Διαφορικές Εξισώσεις 1/10/18 ΜΑΘΗΜΑ 1ο ⊗

Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Είναι της μορφής $y'(t) = f(t, y(t))$ όπου $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$ συνεχής $t \in I \in \mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης αν:

(1) $\varphi(t) \in C^1(I)$

(2) $(t, \varphi(t)) \in D \quad \forall t \in I$

(3) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I$

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) είναι της μορφής:

(ΠΑΤ) : $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ $t_0 \in I$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πεδίο Ορισμού του ΠΑΤ είναι το μεγαλύτερο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται λύση του ΠΑΤ και $t_0 \in I$

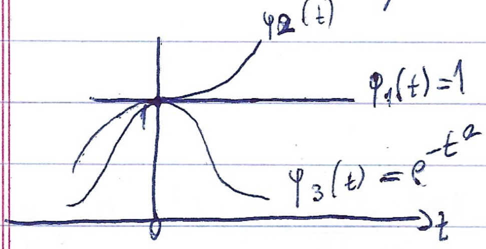
Γεωμετρική Ερμηνεία

Η συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι λύση του ΠΑΤ αν

(I) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ (II) $\varphi(t_0) = y_0$

Παράδειγμα

Έστω το ΠΑΤ: $y'(t) = -t\, y(t)$, $y(0) = 1$



$$\left(\frac{dy(t)}{dt} = g(t) \Rightarrow y(t) = \int g(t)\, dt + c \right)$$

Εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t)\,h(y(t)) \qquad (*)$$

Αν $h(y) \neq 0$ τότε η $(*)$ είναι ισοδύναμη με $\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dt} = g(t)$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dt}\, dt = \int g(t)\, dt + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Αλλαγή μεταβλητών $y = y(t)$, $dy = y'(t)\,dt = \frac{dy}{dt} dt$

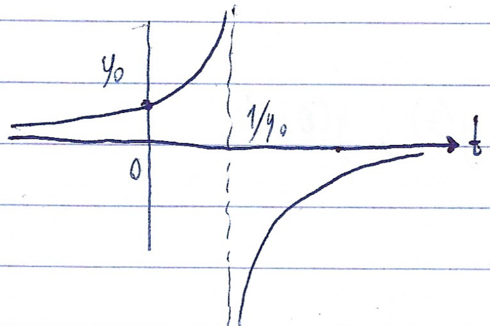
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\, dt + C$$

Παράδειγμα: 1) Να λυθεί η δ.ε. $y'(t) = y^2$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dt + C$, $y \neq 0$ $\Rightarrow \left[-\frac{1}{y}\right] = t + C \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{t+C}$, $C \in \mathbb{R}$

Η $y(t) = 0$ είναι επίσης λύση

2) Να λυθεί το ΠΑΤ: $y'(t) = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$ για $y(t) \in \{y(t) = \frac{-1}{t+C}\}$
Η αρχική συνθήκη: $y(0) = \frac{-1}{0+C} = y_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{y_0}$ και η λύση
του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y(t) \overset{y_0}{=} -1/(t - \frac{1}{y_0})$



Π.Ο του ΠΑΤ $: (-\infty, 1/y_0)$

3) Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ: $e^y \frac{dy}{dt} - (t + t^3) = 0$ $\quad y(0) = 1$
Χωρίζουμε μεταβλητές $\int e^y dy = \int (t + t^3)\, dt + C$
$\Rightarrow e^y = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C \Rightarrow e^{1} - e = C$
Η λύση του ΠΑΤ είναι $y(t) = \ln\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + e\right)$

ΔΙΑΦΟΡΙΜΕΣ 5/10/18 ΜΑΘΗΜΑ 2º ⊗

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$\boxed{y(t)=y}$

1) Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'(t)=\frac{t\,y(t)(4-y(t))}{1+t},\quad y(0)=y_0\geq 0\qquad t>0$$

$$\int\frac{dy}{y(4-y)}=\int\frac{t\,dt}{1+t}+C\ ①\qquad y\neq 0,\ y\neq 4$$

$$\frac{1}{y(4-y)}=\frac{\frac{1}{4}}{y}+\frac{\frac{1}{4}}{4-y}$$

$$① \Rightarrow \frac{1}{4}\int\frac{dy}{y}-\frac{1}{4}\int\frac{-dy}{4-y}=\int dt-\int\frac{dt}{1+t}+C\quad,\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 4\cdot\cancel{\tfrac{1}{4}}\ln|y|-\cancel{4}\cancel{\tfrac{1}{4}}\ln(y-4)=4t-4\ln(1+t)+\underbrace{4c}_{c_1}\quad,\ c_1\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y}{y-4}\right)=c_1+4t-4\ln(t+1)\Rightarrow\left|\frac{y}{y-4}\right|=\overset{c_2}{e^{c_1}}e^{4t}e^{-4\ln(t+1)}\quad,\ c_2\in\mathbb{R}_+$$

$$\left|\frac{y}{y-4}\right|=c_2\frac{e^{4t}}{(t+1)^4}\Rightarrow\frac{y}{y-4}=\underbrace{\pm c_2}_{c_3}\frac{e^{4t}}{(t+1)^4}\quad,\ c_3\in\mathbb{R}$$

$$\frac{y-4}{y}=1-\frac{4}{y}=\frac{(t+1)^4}{c_3e^{4t}}\Rightarrow\frac{4}{y}=\frac{c_3e^{4t}-(t+1)^4}{c_3e^{4t}}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{4c_3e^{4t}}{c_3e^{4t}-(t+1)^4}=\frac{4}{1-(t+1)^4/c_3e^{4t}}$$

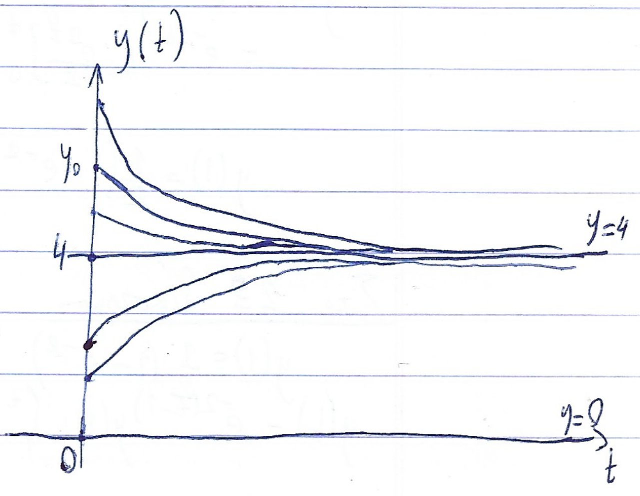
$$\overset{y(0)=y_0>0}{\Rightarrow}\quad y(t)=\frac{4}{1-\left(\frac{y_0-4}{y_0}\right)\frac{(t+1)^4}{e^{4t}}}$$

$y_0>4\Rightarrow y(t)>4\quad\forall\ t\geq 0$

$(0<)\,y_0<4\Rightarrow 0<y(t)<4\quad\forall\ t\geq 0$

$$\lim_{t\to\infty}(t+1)^4e^{-4t}=0$$

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=4$$



2) $y'(t) + \frac{1}{t^2}y(t) = 1 \qquad y(1)=0 \quad , t>0$

$\mu(t) = \exp\{\int t^{-2}dt\} = \exp\{-t^{-1}\} = e^{-t^{-1}}$

$e^{-t^{-1}}y' + t^{-2}e^{-t^{-1}}y = e^{-t^{-1}} \Rightarrow (e^{-t^{-1}}y)' = e^{-t^{-1}}$

$\Rightarrow e^{-t^{-1}}y(t) = \int e^{-t^{-1}}dt + c \Rightarrow y(t) = e^{1/t}(c+\int e^{-1/t}dt)$

3) $y' = ay + u(t) \qquad a\in\mathbb{R} \quad y(t_0)=y_0$

$y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau$ ⊛

Είναι η (*) λύση του ΠΑΤ;

$y(t_0) = e^{a(t_0-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{a(t_0-\tau)}u(\tau)\,d\tau = y_0$

$y'(t) = a e^{a(t-t_0)}y_0 + a\cancel{e^{at}}\cancel{e^{-at}}u(t) + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}u(\tau)\,d\tau = ay(t)+u(t)$

4) Να βρεθεί η γενικευμένη λύση του ΠΑΤ $y'(t)+2y(t)=g(t), y(0)=0$

$g(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & t\notin[0,1]\end{cases}$

Στο $0\le t\le 1$: $y'+2y=1$, $y(0)=0$

$t\ge 1$: $y'+2y=0$, $y(1)=;$

Στο 1ο διάστημα

$y(t) = e^{-2t}y_0 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau \quad , \quad 0\le t\le 1$

$= e^{-2t}\left[\frac{e^{2\tau}}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$

$y(1)=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$

Στο 2ο διάστημα

$y(1)=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$ για να είναι συνεχής

$y(t) = e^{-2(t-1)}y(1) + \int_1^t e^{-2(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau = e^{-2(t-1)}\overset{-\frac{1}{2}(e^{-2}-1)}{\overset{\shortparallel}{y(1)}}$

ΔΙΑΦ. ΕΞ. Ι 15/10/18 ΜΑΘΗΜΑ 3ο ⓧ

Κεφάλαιο 2 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

$y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dy}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t} f(t,y)\,dt \Rightarrow \boxed{y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,y)\,ds}$$

Μέθοδος Piccard

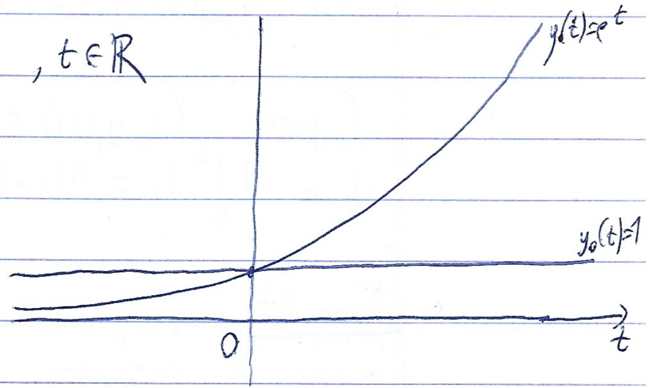
$$y_0(t) = y_0$$
$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overset{y_0}{y_0(s)})\,ds$$
$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))\,ds$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$y'(t) = y(t)$, $y(0) = 1$

Αναλυτικά: $\int \frac{dy}{y} = \int dt + c \Rightarrow \ln|y| = t + c \Rightarrow |y| = e^c \cdot e^t \Rightarrow y(t) = \underbrace{\pm e^c}_{c_1} \cdot e^t,\ c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(0) = c_1 e^0 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 \Rightarrow y(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$

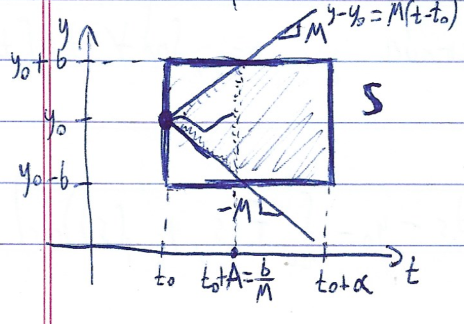


$$y_0(t) = 1$$
$$y_1(t) = 1 + \int^{t} 1\,ds = 1 + t$$
$$y_2(t) = 1 + \int^{t} (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

$$y_n \xrightarrow[\text{ομ}]{n\to\infty} e^t$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Picard-Lindelöf (Τοπικό Θεώρημα ύπαρξης + μοναδικότητα λύσης ΠΑΤ)

Έστω το ΠΑΤ: $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$. Έστω ότι η f και η $\frac{df}{dy}$ συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο $S = \{(t,y): t_0 \le t < t_0 + \alpha,\ |y - y_0| \le b\}$



Έστω $M = \max_{(t,y)\in S} |f(t,y)|$ και $A = \min(a, \frac{b}{M})$

Τότε υπάρχει μοναδική λύση του ΠΑΤ στο $t \in [t_0, t_0 + A$

Ορίζω $C = \{(t,y) : t_0 \leq t < t_0 + A,\ |y - y_0| \leq M(t - t_0)\}$, $C \subseteq S$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (του ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ)

Ισοδύναμο ΠΑΤ: $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$.

Ακολουθία συναρτήσεων Picard

$y_0(t) = y_0$

$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\, ds$

$\vdots$

$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds$

Βήμα 1ο

$|y_n(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$ $\forall t \in [t_0, t_0 + A)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\left(\begin{array}{l} y_n \in C \subseteq S \\ \forall t \in [t_0, t_0+A) \end{array}\right)$

Απόδειξη επαγωγική

για $n=0$: $0 \leq M(t - t_0)$

Έστω ότι ισχύει για $n=j$, δηλ $|y(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$ $\forall t \in [t_0, t_0 + A)$

Τότε $|y_{j+1}(t) - y_0| = \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_j(s))ds - y_0 \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_j(s))| ds$ ①

Εφόσον $(s, y_j(s)) \in C \subseteq S$ τότε $|f(s, y(s))| \leq M$

① $\leq M \int_{t_0}^{t} ds = M(t - t_0)$ $\forall t \in [t_0, t_0 + A)$

Βήμα 2ο

Ισχύει η εκτίμηση στο $[t_0, t_0 + A)$ ότι $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{ML^{n-1}(t - t_0)^n}{n!}$

$L = \max\limits_{(t,y) \in S} \left| \frac{df}{dy}(t, y) \right|$

Απόδειξη με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$

Για $n=1$: $|y_1(t) - y_0| \leq \frac{ML^0(t - t_0)^1}{1!} = M(t - t_0)$

Ισχύει από 1ο βήμα

Έστω ότι η επαγωγική υπόθεση ισχύει για $n=j$, δηλ $\forall t \in [t_0, t_0 + A)$

$|y_j(t) - y_{j-1}(t)| \leq \frac{ML^{j-1}(t - t_0)^j}{j!}$. Τότε

$|y_{j+1}(t) - y_j(t)| \leq \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_j(s))ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y_{j-1}(s))ds \right|$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \overbrace{\left|f(s,y_j(s)) - f(s,y_{j-1}(s))\right|}^{\leq L\left|y_j(s)-y_{j-1}(s)\right|} ds \, *$$

Τότε $\left|f(s,y_j(s)) - f(s,y_{j-1}(s))\right| \leq \left| \int_{y_{j-1}(s)}^{y_j(s)} \left|\frac{df}{dy}(s,y)\right| dy \right|$

$$\leq \left| L \int_{y_{j-1}(s)}^{y_j(s)} dy \right| \leq L \left| y_j(s) - y_{j-1}(s) \right|$$

$$* \leq L \int_{t_0}^{t} \frac{ML^{j-1}(s-t_0)^j \, ds}{j!} = \frac{ML^j}{j!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^j ds = \frac{ML^j}{j!} \left. \frac{(s-t_0)^{j+1}}{j+1} \right|_{t_0}^{t}$$

$$= \frac{ML^j}{(j+1)!} (t-t_0)^{j+1} \Rightarrow \text{Ισχύει } \forall \, n \in \mathbb{N}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 5/11/18 ΜΑΘΗΜΑ 4ο

ΘΕΩΡΗΜΑ Picard-Lindelof

Έστω $f(t,y)$ και $\frac{df}{dy}(t,y)$ συνεχείς συναρτήσεις στο

$S=\{(t,y): t_0\le t\le t_0+a, |y-y_0|\le b\}$

Έστω $M=\max\limits_S|f(t,y)|$ και $A=\min(a,\frac{b}{M})$.

Τότε το ΠΑΤ: $y'=f(t,y)$, $y(t_0)=y_0$ έχει μοναδική λύση στο $t\in[t_0,t_0+A)$

Απόδειξη

$y_n(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y_{n-1}(s))ds$

$(y'=f(t,y), y(t_0)=y_0) \Leftrightarrow y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds$

i) $|y_n(t)-y_0|\le M(t-t_0)\ \forall t\in[t_0,t_0+A]$ ισοδύναμα $y_n(t)\in C\ \forall t\in[t_0,(t_0+A))$,

ii) $|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\le\frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}\ \forall t\in[t_0,t_0+A), \forall n\in\mathbb{N}$

$L=\max\limits_S\left|\frac{df}{dy}(t,y)\right|$

iii) Η ακολουθία $y_n(t)\xrightarrow{ομ}y(t)$ στο $t\in[t_0,t_0+A)$ $y_{-1}=0$

$y_n(t)=y_0+(y_1(t)-y_0)+(y_2(t)-y_1(t))+\dots+y_n(t)-y_{n-1}(t)=\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_{k-1})$

Για να συγκλίνει η σειρά αυτή αρκεί να αποδείξω ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως, δηλ $\sum_{k=0}^{n}|y_k(t)-y_{k-1}(t)|$ συγκλίνει

Έχουμε:

$\sum_{k=1}^{n}|y_k-y_{k-1}|\le|y_0(t)|+\sum_{k=1}^{n}|y_k(t)-y_{k-1}(t)|\le|y_0|+\sum_{k=1}^{n}\frac{ML^{k-1}(t-t_0)^k}{k!}$

$\le|y_0|+\frac{M}{L}\sum_{k=1}^{n}\frac{L^k(t-t_0)^k}{k!}\quad t\in[t_0,t_0+A)\le|y_0|+\frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^kA^k}{k!}$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ $=|y_0|+\frac{M}{L}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^kA^k}{n!}}_{e^{AL}}-1\Big)\Rightarrow y_n\xrightarrow{ομ}y(t)$

$y_n=\sum_{k=0}^{\infty}(y_k-y_{k-1})<\infty\Leftarrow\sum|y_k-y_{k-1}|<\infty$

Κριτήριο M-Weistrass

$\sum_{k=0}^{\infty}M_k<\infty\quad |f_k|\le M_k\Rightarrow\sum_k|f_k|<\infty$

iv) Η $y(t)$ που ορίσαμε στο ii) ικανοποιεί το ΠΑΤ, δηλαδή

$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$

Από την ακολουθία Picard

$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\,ds$

$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\,ds$

$\Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, y_n(s))\,ds \Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n(s)}_{y(t)})\,ds$

$\Rightarrow y(t)$ λύση του ΠΑΤ

v) Μοναδικότητα λύσης

$y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\,ds \qquad y_n \xrightarrow{\text{ομ}} y(t) \qquad t \in [t_0, t_0 + A]$

και $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds \Leftrightarrow$ ΠΑΤ

Έστω $Z(t)$ λύση του ΠΑΤ

$Z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, Z(s))\,ds$

Ισχύει η εκτίμηση: $|y_n(t) - Z(t)| \le \frac{M L^n (t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in [t_0, t_0 + A)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επαγωγικά: $n = 0: |y_0 - Z(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,ds| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, z(s))|\,ds \le M(t - t_0)$

$= M L^0 (t - t_0)$

Έστω ότι ισχύει για $n = j$, δηλ. $|y_j(t) - Z(t)| \le \frac{M L^j (t-t_0)^{j+1}}{(j+1)!}$

Για $n = j+1$:

$|y_{j+1}(t) - Z(t)| \le |y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_j(s))\,ds - \cancel{y_0} - \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,ds|$

$= |\int_{t_0}^{t} f(s, y_j(s) - f(s, z(s))\,ds| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, y_j(s))\,ds - f(s, z(s))|\,ds$

$= \int_{t_0}^{t} |\int_{z(s)}^{y_j(s)} \frac{df}{dy}(s, y)|\,ds \le \int_{t_0}^{t} \int_{z(s)}^{y_j(s)} |\frac{df}{dy}(s, y)|\,dy\,ds \le L \int_{t_0}^{t} \underbrace{|y_j - z|}_{\le \frac{M L^j (s-t_0)^{j+1}}{(j+1)!}}\,ds$

$= \frac{M L^{j+1}}{(j+1)!} \frac{(s-t_0)^{j+2}}{j+2} \Big|_{s=t_0}^{s=t} = M L^{j+1} (t - t_0)^{j+2} / (j+2)!$

Επομένως η εκτίμηση ισχύει $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Αποδείξαμε ότι $\lim_{n\to\infty} y_n(t) - Z(t) \le \lim_{n\to\infty} \frac{M L^n (t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow |y(t) - z(t)| = \frac{M}{L} \lim_{n\to\infty} \frac{[L(t-t_0)]^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall\, t \in [t_0, t_0+A]$$

Επομένως $|y(t) - z(t)| = \frac{M}{L} \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa^{n+1}}{(n+1)!}$ όπου $\kappa = L(t-t_0) = 0$

$$\Rightarrow y(t) = z(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_0+A)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\kappa^n}{n!} = 0$$

Επομένως η λύση του ΠΑΤ είναι μοναδική

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 12/11/18 ΜΑΘΗΜΑ 5º ⊗

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $f(t,y)$ και $\frac{df}{dy}(t,y))$ συνεχής στο $S=\{(t,y): t_0\leq t\leq t_0+a,\ y_0-b\leq y\leq y_0+b\}$

Έστω $M=\max_S|f(t,y)|$ και $A=\min(a, b/M)$. Τότε το

ΠΑΤ : $y'=f(t,y)$, $y(t_0)=y_0$ έχει μ.λ. στο $t\in[t_0,t_0+A)$

Παρατήρηση

Η συνθήκη ως προς την ύπαρξη και συνέχεια της $\frac{df}{dy}(t,y)$ στη διατύπωση του Θεωρήματος μπορεί να αντικατασταθεί από την συνθήκη ότι η $f(t,y)$ είναι συνεχής Lipschitz ως προς y

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η $f(t,y)$ είναι Lipschitz συνεχής (ως προς τη 2η μεταβ.) στο S αν υπάρχει $L\geq 0: |f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq L(y_1,y_2)$ $\forall\ (t,y_1)\ \&\ (t,y_2)\in S$ $(f:S\to\mathbb{R})$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(t,y)=y\cos t$

$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=|y_1\cos t-y_2\cos t|$

$\leq|\cos t||y-y_2|\leq 1|y_1-y_2|$

2) Έστω $f(t,y)=y^{2/3}$, $f:S\to\mathbb{R}$ $(0,0)\in S$

Αν η f ήταν Lipschitz τότε θα υπήρχε $L\geq 0: f(t,y)-f(t,0)|\leq L|y-0|$

$y^{2/3}\leq L\,y$ (αν $y>0$)

$\Rightarrow L y^{1/3}\geq 1$ Αν $y>0$ αυθαίρετα μικρό έχω αντίφαση

(Ισοδύναμα $\lim_{y\to 0}\left|\frac{y^{2/3}}{y}\right|=\infty$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω ότι $\frac{df}{dy}(t,y)$ είναι συνεχής.

Τότε $L=\max_S\left|\frac{df}{dy}(t,y)\right|$

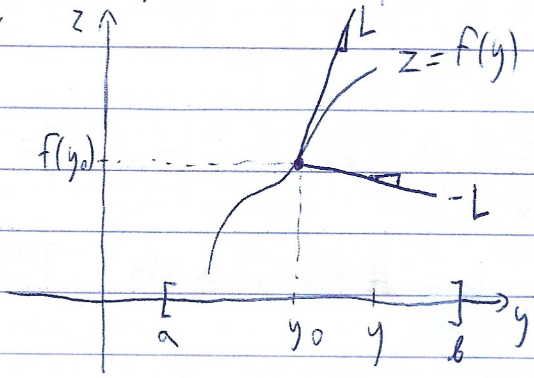
Τότε αν (t,y_1) και $(t,y_2)\in S$

$$|f(t,y_2)-f(t,y_1)|=\left|\int_{y_1}^{y_2}\frac{df}{dy}(t,y)\,dy\right|$$

$$\leq\left|\int_{y_1}^{y_2}\underbrace{\left|\frac{df}{dy}\right|}_{\leq L}dy\right|\leq L\left|\int_{y_1}^{y_2}dy\right|=L|y_2-y_1|$$

3) Έστω $f(y)$ είναι Lipschitz (με σταθερά L) στο $[a, b]$

Τότε



Τότε αν $y_0, y \in [a, b]$ και $y > y_0$

$$|f(y) - f(y_0)| \leq L(y - y_0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(y) - f(y_0) \leq L(y - y_0) \\ f(y_0) - f(y) \leq L(y - y_0) \end{array}\right\}$$

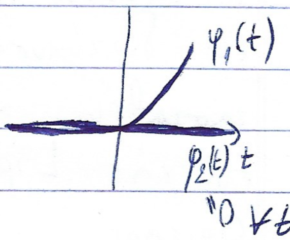
$$f(y_0) - L(y - y_0) \leq f(y) \leq f(y_0) + L(y - y_0)$$

F Lipschitz $\Rightarrow (y, f(y)) \in C$

4) Έστω το ΠΑΤ $y' = \underbrace{|y|^{1/2}}_{f}$, $y(0) = 0$

Η f δεν είναι Lipschitz

Έστω $\varphi_1(t) = \begin{cases} 1/4\, t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

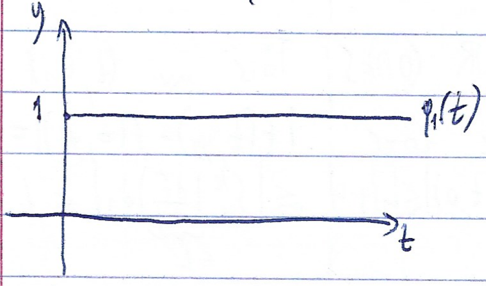


$$\varphi_1' = \begin{cases} \frac{1}{2} t = \sqrt{\varphi_1(t)} & t \geq 0 \\ 0 = \sqrt{\varphi_1(t)} & t < 0 \end{cases}$$

5) $y'(t) = \underbrace{t\sqrt{1-y2}}_{f(t,y)}$ $f: [0, \infty)\ \mathbb{R}$ $y(0) = 1$

$$\frac{dF}{dy} = \frac{1}{2} t (1-y2)^{-1/2} (-2y) = -ty(1-y^2)^{-1/2}$$

Η f δεν είναι Lipschitz στο $[0, \infty)$ αλλά η λύση υπάρχει και είναι μοναδική



Η $y_1(t) = 1$ $\forall t \geq 0$ είναι λύση

Έστω $y(t)$ είναι λύση. Τότε $y \in C^1[0, \infty)$

$y'(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0 \Rightarrow y(t)$ αύξουσα στο $[0, \infty)$

$\Rightarrow y(t) \geq \overset{1}{y(0)}$ $\forall t \geq 0$

Όμως $-1 \leq y(t) \leq 1$ $\forall t \geq 0 \Rightarrow y(t) = 1$ $\forall t \in [0, \infty)$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 19/11/18 ΜΑΘΗΜΑ 6ο ⊗

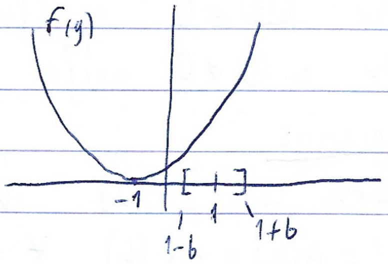
Παράδειγμα

Έστω το ΠΑΤ: $y'=(1+y)^2$, $y(1)=1$

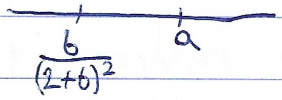
Ποιο είναι το μέγιστο διάστημα $t\in[1,1+\alpha)$ για το οποίο το Θεώρημα PL εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

$$M=\max_{S}|f(y)|=\max_{1-b\le y\le 1+b}(1+y)^2$$

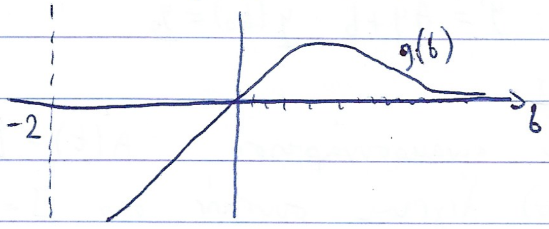
$$=(2+b)^2 \quad (y=1+b)$$



$$\alpha=\min\left(a,\frac{b}{(2+b)^2}\right) \qquad \left.\begin{aligned}\alpha&\le a\\ \alpha&\le\frac{b}{(2+b)^2}\end{aligned}\right\}$$



$$\max_{b\ge 0}\underbrace{\frac{b}{(2+b)^2}}_{g(b)}$$



$$g'(b)=\left(\frac{b}{(2+b)^2}\right)'=\frac{(2+b)^2-2b(2+b)}{(2+b)^4}=0$$

$$=\frac{2-b}{(2+b)^3}=0\Rightarrow b=2$$

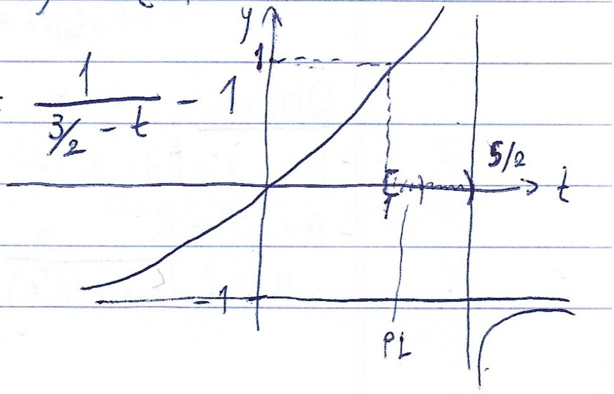
$$g(2)=\frac{1}{8}=\alpha$$

$$\frac{dy}{dt}=(1+y)^2\ ,\quad y(1)=1$$

$$\Rightarrow\int\frac{dy}{1+y^2}=\int dt-c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{1+y}=t-c\Rightarrow y=\frac{1}{c-t}-1\overset{t=1}{\Rightarrow}y(1)=\frac{1}{c-1}-1\Rightarrow c=3/2$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ $y(t)=\dfrac{1}{3/2-t}-1$



Προκαταρκτικά (Πίνακες)

Εξετάζουμε:

$$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \quad ①$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $[a_{ij}(t)] \in C(I)$, $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

$\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^{n}$, $b_i(t) \in C(I)$

Αν $\underline{b}(t) = \underline{0}$ η εξίσωση λέγεται ομογενής

Αν η ① $\neq \underline{0}$ ορίζει μη ομογενές σύστημα [ΜΟ]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λύση του [ΜΟ] είναι $\underline{y}(t)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\underline{y}'(t) \in C^1(I)$ και $\underline{y}' = A(t)\,\underline{\varphi} + \underline{b}(t)$ $\forall\, t \in I$

Αν επιπλέον $\varphi(t_0) = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$, τότε η $\underline{\varphi}(t)$ είναι λύση του ΠΑΤ: $y' = Ay + b$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω πινακοσυνάρτηση $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Η $A(t)$ λέγεται συνεχής στο $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ εάνν $a_{ij} \in C(I)$ $\forall\, 1 \le i,j \le n$
- Η $A(t)$ " διαφορίσιμη " a_{ij} διαφ στο I "
- Η $A(t)$ " ολοκληρώσιμη " ολοκληρ στο I "

Ορίζουμε $A'(t) = [a'_{ij}(t)]$ $\quad \int_a^b A(s)\,ds = \left[\int_a^b a_{ij}(s)\,ds\right]$

Ισχύει ότι $[A(t)\,\underline{y}(t)]' = A'(t)\,\underline{y}(t) + A(t)\,\underline{y}'(t)$

$[A(t)\,B(t)]' = A'B + AB'$

Παράδειγμα

Έστω $A(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ διαφορίσιμοι στο $\mathbb{R}$

$$[A(t)\,\underline{y}(t)]' = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)' = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)' \\ (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a'_{11}y_1 + a'_{12}y_2 \\ a'_{21}y_1 + a'_{22}y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 \\ a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2 \end{pmatrix} = A'\underline{y} + A\underline{y}'$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Αν $\underline{y} = [y_1\ y_2 \cdots y_n]^T \in \mathbb{R}^n$ η Ευκλείδεια νόρμα του $\underline{y}$: $\|y\| = \sqrt{\underline{y}^T\underline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$
- Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, η Ευκλείδεια νόρμα (νόρμα Frobenius)

$\|A\| = \sqrt{trace(A^TA)}$ $\quad$ (Αν $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $trace(B) = \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$)

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

(α) $\|\underline{y}\| \geq 0 \quad \forall\ \underline{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\underline{y}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{0}$

(β) $\|\cancel{\underline{x}} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|y\|$ (Τριγωνική ανισότητα)

(γ) $\|c\,\underline{y}\| = |c|\,\|\underline{y}\| \quad \forall c \in \mathbb{R},\ \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

(δ) Αν $\underline{y}(t)$ συνεχής στο $I = (a, b)$ τότε $\|\int_a^b \underline{y}(s)\,ds\| \leq \int_a^b \|\underline{y}(s)\|\,ds$

(ε) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $\|A\underline{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{y}\|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(α) Προφανής $\quad \|\underline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \geq 0$

(β) Θα αποδείξουμε πρώτα $|\underline{x}^T \underline{y}| \leq \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|$ (Cauchy-Swartz)

$0 \leq \|x \mp \lambda y\|^2 = (\underline{x} \mp \lambda y)^T(\underline{x} \mp \lambda \underline{y}) = \|x\|^2 \mp 2\lambda \underline{x}^T \underline{y} + \lambda^2 \|\underline{y}\|^2$

Ο όρος δεξιά ελαχιστοποιείται όταν

$\frac{d}{dx}(\cdot) = 0 \Rightarrow -2\underline{x}^T\underline{y} + 2\lambda\|y\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\|^2} = \hat{\lambda} \quad (y \neq 0)$

Επομένως για $\lambda = \hat{\lambda}$, $\quad 0 \leq \|\underline{x} - \hat{\lambda}\underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 - 2\frac{(x^T y)^2}{\|\underline{y}\|^2} + \frac{(\underline{x}^T \underline{y})^2}{\|y\|^4}\|y\|^2$

$= \|X\|^2 - \frac{\underline{x}^T y^2}{\|\underline{y}\|^2} \Rightarrow (x^T y)^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \|y\|^2$

Τώρα $\|x + y\|^2 = (\underline{x} + y)^T(\underline{x} + \underline{y}) = \|x\|^2 + 2\underline{x}^T\underline{y} + \|\underline{y}\|^2 \leq \|x\|^2 + 2(\underline{x}^T y) + \|y\|^2$

$= (\|x\| + \|y\|)^2$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑ 7Ξ 26/11/18

$y \in R^n \qquad \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \underline{y_i}^2}$

$A \in \mathbb{R}^{n\kappa n} \qquad \|A\|_E = \sqrt{trase(A^TA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

v) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $\|A\underline{y}\| \leq \|A\|\|\underline{y}\|$

i) $\|y\| \geq 0$ και $\|\underline{y}\| = 0 \iff \underline{y} = \underline{0}$

ii) $\|\underline{y}_1 + \underline{y}_2\| \leq \|\underline{y}_1\| + \|\underline{y}_2\|$

iii) $\|c\underline{y}\| = |c|\|y\|$

iv) $\underline{y}(t) \in C(I)$ τότε $\|\int_I |\underline{y}(s)|ds\| \leq |\int_I \|\underline{y}(s)\| ds|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

iv) $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)^T = \int_I |y(s)|\, ds \Rightarrow v_j = \int_I |y_j(s)|\, ds$

$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{j=1}^{n} v_j \int_I |y_j(s)| ds = \int_I \sum_{j=1}^{n} v_j |y_j(s)| ds = \int_I v^2 |y(s)|\, ds \leq \int_I \|v\| \|y(s)\| ds$

$= \|v\| \int_I \|y(s)\| ds \Rightarrow \|\int_I |y(s)| ds\| \leq \int_I \|y(s)\| ds$

v) $(Ay)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$

$\|Ay\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i^T y|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2 \|y\|^2 = \|y\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2 = \|y\|^2 \|A\|^2$

Γραμμικά Συστήματα

Έστω γραμμικό σύστημα

$\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t) \qquad [ΜΟ]$

$A(t) \in R^{n\times n}, \underline{b}(t) \in \mathbb{R}^n \quad a_{ij}(t) \in C^1(I), I = (a, b) \subseteq R$

$b_i \in C^1(I) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$

Το αντίστοιχο ομογενές διαφορικό σύστημα είναι: $\underline{y}' = A(t)\underline{y}(t) \quad [ΟΜ]$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λύση του [ΜΟ] συστήματος είναι $\underline{y}(x): I \to \mathbb{R}^n$, $y \in C^1(I)$ και $\forall t \in I\ \underline{y}' = A(t)y$

Αν επιπλέον $\underline{y}(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ τότε η $\underline{y}(t)$ είναι λύση του ΠΑΤ

$y' = Ay$ και $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω το ομογενές σύστημα $y'(t) = A(t)\underline{y}(t)$. Ορίζουμε το σύνολο των λύσεων $L_{\text{ομ}} = \{\underline{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n, \underline{\varphi} \in C^1[I) \text{ και } \underline{\varphi}' = A\underline{y}\}$

Έχουμε $\underline{0} \in L_{\text{ομ}}$ και αν $\varphi_1, \varphi_2 \in L_{\text{ομ}}$ τότε $c_1\underline{\varphi_1}(t) + c_2\underline{\varphi_2}(t) \in L_{\text{ομ}} \; \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω δ.ε. n-τάξης $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\, y(t) = b(t)$

Ορίζω $x_1 = y, x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}$ και $\underline{x} = [x_1 \ldots x_n]^T$

Τότε $x_1' = x_2, x_2' = x_3, \ldots, x_{n-1}' = x_n$

Επίσης $x_n' = y^{(n)} = -a_0 y - a_1 y' - \ldots - a_{n-1} y^{(n-1)} + b(t) \Rightarrow x_n' = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + b(t$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑ 8ο 3/12/18

$\underline{y}' = A(t)\underline{y} + \underline{b}(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_{ij} \in C(I)$

$\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in C(I)$

$\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ (ομογενής) $\Rightarrow L = \{\underline{\varphi} : I \to \mathbb{R},\ \varphi_i \in C^1(I),\ \underline{\varphi}' = A\underline{\varphi}\ \forall t \in I\}$

$$\left.\begin{aligned} \underline{y}' &= A\underline{y} + b \\ \underline{y}(t_0) &= \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \text{ΠΑΤ} \qquad \left.\begin{aligned} \underline{y}'(t) &= A(t)\,\underline{y}(t) \\ \underline{y}(t_0) &= \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \text{ΠΑΤ}$$

μοναδική λύση

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το L είναι διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$) διάστασης n (όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \in L$, τότε $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\underline{\varphi}(t) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in C^1(t)$

και $\varphi'(t) = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' = c_1 A\varphi_1 + c_2 A\varphi_2 = A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = A\varphi \Rightarrow \varphi \in L$

Θεωρούμε η ΠΑΤ:

$(\text{ΠΑΤ})_i \quad \underline{y}' = A\underline{y},\ \underline{y}(t_0) = [0\,0 \ldots 0\,\overset{\text{θέση } i}{1}\,0 \ldots 0]^T = e_i^T,\ i = 1, 2, \ldots, n$

Έστω $\underline{\varphi}_i(t)$ η μοναδική λύση του $(\text{ΠΑΤ})_i$

i) Οι $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Έστω $\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(t) = \underline{0}\ \forall\, t \in I \Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(t_0) = \underline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i\underline{e}_i = \underline{0} \Rightarrow c_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \ldots + c_n\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow c_i = 0\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ γρ. ανεξάρτητες

ii) Έστω $\underline{\varphi} \in L$. Έστω $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{c} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$

Ορίζω επίσης $\hat{\varphi} = \sum c_i\underline{\varphi}_i(t)$

Έχουμε $\hat{\varphi} \in L$ (ως γρ. συνδυασμός n-λύσεων)

Επίσης $\hat{\varphi}(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(t_0) = \begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix} = \underline{c}$

Επομένως $\underline{\varphi} = \hat{\varphi}\ \forall\, t \in I$ και επομένως $\varphi \in \text{Span}\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$

Επομένως $\{\underline{\varphi}_i(t)\}_{i=1}^n$ είναι βάση του L και $\dim L = n$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια βαση $B = \{\underline{\varphi_1}, \underline{\varphi_2}, \dots, \underline{\varphi_n}\}$ του L για το σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y}$ λέγεται θεμελιώδες σύστημα λύσεων και ο πίνακας $\Phi(t) = [\underline{\varphi_1}\ \underline{\varphi_2} \cdots \underline{\varphi_n}] \in R^{n\times n}$ λέγεται θεμελιώδης πίνακας λύσεων (θ.π.λ)

Αν $\Phi(t)$ είναι πίνακας λύσεων

$$\Phi'(t) = [\underline{\varphi_1}'\ \ \underline{\varphi_2}' \cdots \underline{\varphi_n}'] = [A\underline{\varphi_1} \cdots A\underline{\varphi_n}] = A\,[\underline{\varphi_1}\underline{\varphi_2} \cdots \underline{\varphi_n}] \Rightarrow \Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\Phi(t) = [\underline{\varphi}_1\ \underline{\varphi}_2 \cdots \underline{\varphi}_n] \in R^{n\times n}$ είναι πίνακας λύσεων του $\underline{y}' = A\underline{y}$ τότε $|\Phi(t)| = W[\underline{\varphi_1}\ \underline{\varphi_2} \cdots \underline{\varphi_n}](t)$ λέγεται ορίζουσα Wronski

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι λύσεις $\{\underline{\varphi_1}\ \underline{\varphi_2} \cdots \underline{\varphi_n}\}$ είναι γρ. ανεξάρτητες (ισοδύναμα $\Phi = [\underline{\varphi_1} \cdots \underline{\varphi_n}]$ είναι θπλ) εανν $W[\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_n](t) \neq 0 \ \ \forall\ t \in I$

($\iff W[\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_n](t) \neq 0$ για κάποιο $t \in I$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέλουμε να δείξουμε: $\overbrace{\{\varphi_i\} \text{ γρ. ανεξ}}^{\textcircled{A}} \iff \overbrace{W(t) \neq 0\ \forall\, t \in I}^{\textcircled{B}}$

$\sim\textcircled{A} \iff \sim\textcircled{B}$, δηλ $\{\varphi_i\}$ γραμ. εξαρ. $\Rightarrow W(t) = 0$ για κάποιο $t \in I$

($\Rightarrow$): Έστω $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{n}$ γρ. εξ., δηλ $\exists\, c_i$ (όχι όλα μηδέν): $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi_i}(t) = \underline{0}$

$$\Rightarrow \underbrace{[\varphi_1(t) \cdots \varphi_n(t)]}_{\Phi(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\underline{c}} = \underline{0} \quad \forall\ t \in I$$

$$\Rightarrow |\Phi(t)| = W(t) = 0$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $W[\varphi_1 \cdots \varphi_n](t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 \in I$

Άρα $\exists\, \underline{c} \neq 0 : \Phi(t_0)\underline{c} = \underline{0}$ $\quad (\Phi = [\underline{\varphi_1} \cdots \underline{\varphi_n}])$

Ορίζω $\underline{y}(t) = \Phi(t)\underline{c}$, $\ t \in I$

Έχουμε $\underline{y}(t_0) = \Phi(t_0)\,\underline{c} = 0$

Άρα $y(t)$ λύση του ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\ \underline{y}(t_0) = \underline{0}$

Επομένως (λόγω μονοσήμαντου) $\underline{y}(t) = \underline{0} \quad \forall\ t \in I$

Επομένως $\Phi(t)\,\underline{c} = [\varphi_1(t) \cdots \varphi_n(t)]\underline{c} = \underline{0}$, $\ c \neq \underline{0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) = \underline{0}$

$\Rightarrow \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ γρ. εξ. (στο I)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $y' = Ay$ και έστω $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ γρ. ανεξ. λύσεις (ισοδύναμα $\Phi(t)$ θ.π.λ)

Τότε όλες οι λύσεις $L = \{\Phi(t)\underline{c} : c \in \mathbb{R}^n\}$

Έστω ότι θέλω να βρω τη λύση του ΠΑΤ : $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$

Έστω $\underline{y}(t) = \Phi(t)\underline{c} \Rightarrow \underline{y}(t_0) = \Phi(t_0)\underline{c} = \underline{y}_0 \Rightarrow \underline{c} = \Phi^{-1}(t_0)\, y_0$

$\Rightarrow y(t) = \underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)}\, y_0$ είναι η (μοναδική) λύση του ΠΑΤ

($G(t,t_0)$ συνάρτηση μεταφοράς)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι θ.π.λ. Τότε $\Phi_1(t) = \Phi(t)C$, $|C| \neq 0$ είναι θ.π.λ

Αν $\Phi(t)$ και $\Phi_L(t)$ δύο θ.π.λ (του $y' = Ay$) τότε $\Phi_L(t) = \Phi(t)C$ για κάποιον $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|C| \neq 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\Phi(t)$ είναι θ.π.λ. $\Rightarrow \Phi' = A\Phi$. Τότε $\Phi_L'(t) = [\Phi(t)C]' = \Phi'(t)C = A\Phi C$ $= A\Phi_L \Rightarrow \Phi_L$ είναι θ.π.λ.

Αντίστροφα, ορίζω $Y(t) = \Phi^{-1}(t)\Phi_1(t) \Leftrightarrow \Phi Y = \Phi_1$

Έχουμε $\Phi_1' = [\Phi(t)Y(t)]' = \Phi'Y + \Phi Y' \Rightarrow A\underbrace{\Phi_L}_{\Phi Y} = A\Phi Y + \Phi Y' \Rightarrow \Phi(t)Y'(t) = 0 \Rightarrow Y'(t) = 0$

$\Rightarrow Y(t) = C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $|C| = |\Phi^{-1}(t_0)\Phi_L(t_0)| \neq 0 \Rightarrow \Phi_L(t) = \phi(t)C$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 5/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 9ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}$

$\underline{y}' = A\underline{y}$ (ομογενές)

$\{\underline{\varphi}_i\}_{i=1}^{n}$

$\Phi(t) = [\underline{\varphi}_1 \cdots \underline{\varphi}_n]$ Θ.π.λ.

$L_{ομ} = \{\Phi(t)\underline{c} : \underline{c} \in \mathbb{R}^n\}$

Η (μοναδική) λύση του ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$

$$\underline{\varphi}(t) = \underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)}_{G(t,t_0)}\underline{y}_0$$

$\{\Phi(t)C : C \in \mathbb{R}^{n\times n}, |C| \neq 0\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

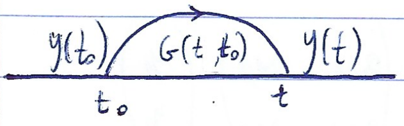
1) Η $G(t,t_0)$ είναι ανεξάρτητη από τον Θ.π.λ. ο οποίος την ορίζει

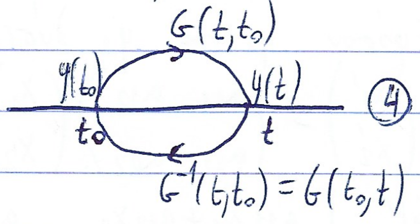
2) $\forall\, t, t_0 \in I : G'(t,t_0) = A(t)\,G(t,t_0)$

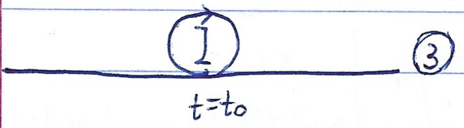
3) $\forall\, t \in I : G(t,t) = I_n$

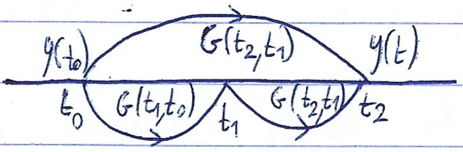
4) $\forall\, t, t_0 \in I : G^{-1}(t,t_0) = G(t_0,t)$

5) $\forall\, t_0, t_1, t_2 \in I : G(t_2,t_0) = G(t_2,t_1)\,G(t_1,t_0)$









ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) Έστω $G(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$

$G_1(t,t_0) = \Phi_1(t)\Phi_1^{-1}(t_0)$

Έχουμε $\Phi_1(t) = \Phi(t)C$, $|C| \neq 0$

Τότε $G_1(t,t_0) = \Phi(t)\,C[\Phi(t_0)C]^{-1} = \Phi(t)\,C\,C^{-1}\,\Phi^{-1}(t_0) = G(t,t_0)$

2) $G'(t,t_0) = A(t)\,G(t,t_0)$

$G'(t,t_0) = [\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)]' = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0) = A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = A(t)\,G(t,t_0)$

3) $G(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$

$t = t_0 \Rightarrow G(t,t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I_n$

4) $G^{-1}(t,t_0) = [\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)]^{-1} = \Phi(t_0)\Phi(t) = G(t_0,t)$

5) $G(t_2,t_0) = \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_1)\Phi(t_1)\Phi^{-1}(t_0) = G(t_2,t_1)\,G(t_1,t_0)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Liouville)

Αν $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι πίνακας λύσεων και $W(t) = |\Phi(t)|$ (ορίζουσα Wronski) και $t, t_0 \in I$ τότε $W(t) = W(t_0)\, exp\{\int_{t_0}^{t} trace(A(\sigma))\,d\sigma\}$

[Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε $trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$]

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $n=2$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{bmatrix} \qquad \psi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$W' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$\left(W' = (x_1y_2 - y_1x_2)' = x_1'y_2 + x_1y_2' - y_1'x_2 - y_1x_2'\right)$$

Εφόσον ψ_1 και ψ_2 λύσεις:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$W' = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{11}y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12}y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_{21}x_1 & a_{21}y_1 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_{22}x_2 & a_{22}y_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow W'(t) = (a_{11} + a_{22})\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = trace(A)\,W(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dW(t)}{W(t)} = \int_{t_0}^{t} trace(A(\sigma))\,d\sigma \Rightarrow \ln|W(t)| - \ln|W(t_0)| = \int_{t_0}^{t} trace(A(\sigma))\,d\sigma$$

$$\Rightarrow W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} trase(A(\sigma))ds}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$G(t,t_0) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)$$

$$|G(t,t_0)| = |\Phi(t)|\,|\Phi^{-1}(t_0)| = |\Phi(t)|\,|\Phi(t_0)|^{-1} = \frac{W(t)}{W(t_0)} = e^{\int_{t_0}^{t} trace(A(\sigma))d\sigma}$$

$$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in I \quad ⊛$$

Μέθοδος μεταβολής παραμέτρων

Το αντίστοιχο ομογενές $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ έχει (μοναδική) λύση $\underline{y} = G(t,t_0)\underline{y}_0$

Ψάχνουμε λύσεις του ΜΟ συστήματος: $\underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{x}(t)$

$$\xRightarrow{t=t_0} \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 = G(t_0,t_0)\,\underline{x}(t_0) \Rightarrow \underline{x}(t_0) = \underline{y}_0$$

Αντικαθιστώντας στην ⊛

$$(G(t,t_0)\,\underline{x}(t))' = A(t)\,[G(t,t_0)\,\underline{x}(t)] + \underline{b}(t)$$

$$G'(t,t_0)\cdot\underline{x}(t) + G(t,t_0)\,\underline{x}'(t) = A(t)\,G(t,t_0)\,\underline{x}(t) + \underline{b}(t) \Rightarrow G(t,t_0)\,\underline{x}'(t) = \underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}'(t) = G^{-1}(t,t_0)\,\underline{b}(t) = G(t_0,t_0)\,\underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} G(t_0,\tau)\,\underline{b}(\tau)\,d\tau \Rightarrow \underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{x}(t)$$

$$= G(t,t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t,t_0)\,G(t_0,\tau)\,\underline{b}(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)\,\underline{b}(\tau)\,d\tau$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 7/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 10ο ⓧ

Εξετάζουμε συστήματα της μορφής $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

Ξέρουμε για το αυτόνομο σύστημα $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t)$, $\underline{y}(t_0) = y(0) \in \mathbb{R}^n$

$G(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$

$y(t) = G(t,t_0)y_0$

$$\underline{y}(t) = G(t,t_0)\underline{y}_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} G(t,z)\underline{b}(z)\,dz}_{\text{ολοκλήρωμα συνέλιξης}}$$

Επιβεβαιώνουμε τη λύση του $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (σταθερός)

$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$

Έστω $A = a \in \mathbb{R}$, $\underline{b}(t) = b(t)$ το πρόβλημα.

$y'(t) = a\,y(t) + b(t)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$

Η λύση : $y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-z)} b(z)\,dz$

(Επαλήθευση: $y(t_0) = e^{a(t_0-t_0)}y_0 + \overset{\nearrow 0}{\int_{t_0}^{t_0} (\;)\,dz} = y_0$)

$$y'(t) = \left(e^{a(t-t_0)}y_0\right)' + \left(e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-az} b(z)\,dz\right)' = a e^{a(t-t_0)}y_0 + a e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-az}b(z)\,dz + e^{at}\left(e^{-at}b(t)\right)$$

$$= G(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} G(t,z)\,b(z)\,dt$$

Άρα στη περίπτωση αυτή $G(t,z) = e^{a(t-z)}$

Αν $z = 0$ $G(t,0) = e^{at} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t)$

Στη περίπτωση αυτή ορίζω $e^{At} = G(t,0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$

Η λύση του ΠΑΤ $y' = Ay + b(t)$, $y(t_0) = \underline{y_0}\}$ $(A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ σταθερός$)$

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-z)}\underline{b}(z)\,dz$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

- $(e^{At})' = Ae^{At}$ $\quad (G'(t,t_0) = A(t)G(t,t_0))$
- $e^{A0} = I_n$ $\quad (G(0,0) = I_n)$
- Ο e^{At} είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του $\Phi(t)$ στον ορισμό
$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$

Λήμμα

(α) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} \quad \forall t,s \in R$

(β) $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)} \quad \forall t \in R$

(γ) $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$

(δ) $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I_n + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(α) $X(t) = e^{A(t+s)}$ $\quad y(t) = e^{At}e^{As}$ (s σταθεροποιημένο)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(X(t)) = \frac{d}{d(t+s)}\left\{e^{A(t+s)}\right\} = Ae^{A(t+s)} = AX(t) \\ X(t)\big|_{t=0} = e^{As} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = Ae^{At}e^{As} = AY(t) \\ Y(t)\big|_{t=0} = e^{As} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} Z' = AZ(t) \\ Z(0) = e^{AS} \end{array}\right\}$$

Λόγω μονοσήμαντου της λύσης ΠΑΤ $X(t) = Y(t) \quad \forall t \in R$

(β) Θέτω $s = -t$ στην (α) $\quad I_n = e^{A0} = e^{At}e^{A(-t)} \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$

(γ) $X(t) = Ae^{At}$ $\quad y(t) = e^{At}A$

$$\left.\begin{array}{l} X'(t) = A(Ae^{At}) = AX(t), \; X(0) = A \\ Y'(t) = Ae^{At}A = AY(t), \; y(0) = A \end{array}\right\} \Rightarrow X(t) = Y(t) \Leftrightarrow Ae^{At} = e^{At}A \quad \forall t \in R$$

Υποβιβασμός τάξης

Έστω $L(y) = y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y(t) = 0$

Έστω ότι $y_1(t)$ είναι λύση

Ορίζουμε $y_2(t) = y_1(t)v(t)$

$y_2 = y_1 v \Rightarrow y_2' = y_1'v + y_1v' \Rightarrow y_2'' = y_1''v + y_1'v' + y_1'v' + y_1v''$

Αντικαθιστώντας

$(y_1''v + 2y_1'v' + y_1v'') + a_1(y_1'v + y_1v') + a_2y_1v = 0$

$\Rightarrow v(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + y_1 v'' + (2y_1' + a_1 y_1) v' = 0$

Έστω $y_1 \neq 0 \Rightarrow v'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) v' = 0$

Έστω $u = v' \Rightarrow u' = v''$

$$u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) u = 0$$

Ορίζω $\mu(t) = e^{\int\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) dt}$ (ολοκληρωτικός παράγοντας)

$$\mu(t) = \exp\left\{2\int \frac{y_1'}{y_1} dt + \int a_1(t)\, dt\right\} = y_1^2 \cdot e^{\int a_1(t)\, dt}$$

Πολ/ζω με $\mu(t)$: $y_1^2 e^{\int a_1(t)\, dt} u' + y_1^2 e^{\int a_1(t)\, dt}\left(2\frac{y_1'}{y_1} + a_1\right) u = 0$

$$\Rightarrow \left(y_1^2 e^{\int a_1(t)\, dt} u\right)' = 0$$

Επομένως $y_1^2 e^{\int a_1 dt} u = c$, $u(t) = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int a_1(t)\, dt}$

$\Rightarrow v(t) = c_1 + \int \frac{c e^{-\int a_1(t)\, dt}}{y_1^2} dt \Rightarrow y_2 = v(t) y_1(t)$

Άρα μία δεύτερη λύση $y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int a_1(t)\, dt}}{y_1^2(t)} dt$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$y'' - \frac{2}{t^2} y = 0$ ① $0 < t < \infty$

$y_1 = t^2 \Rightarrow y_1'' = 2 \Rightarrow ① = 0$

Άρα $y_2(t) = t^2 \int \frac{1}{t^4} dt = t^2 \int t^{-4} dt = \cancel{t^2}\left(\frac{t^{-3}}{-3} + c\right) = -\frac{1}{3t} + ct^2$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 10/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 11ο ⊗

Συστήματα με σταθερούς συντελεστές

$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $(\lambda, \underline{u})$, $\underline{u} \neq \underline{0}$ λέγεται ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος αν $A\underline{u} = \lambda \underline{u}$. Ισοδύναμα $(\lambda I_n - A)\underline{u} = \underline{0} \Rightarrow q(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = 0$

Έστω $q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{\tau_p}$, $(\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j)$

Ορίζουμε $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ και τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i $\left(\sum_{i=0}^{p} \tau_i = n\right)$

Έστω $null(\lambda_i I - A) = \dim[Ker(\lambda_i I - A)]$ $\quad (rank(\lambda_i I - A) + null(\lambda_i I - A) = n)$

Ορίζω $d_i = null(\lambda_i I - A)$ ως η γεωμετρική πολ/τα της λ_i

Ισχύει $\forall\, i = 1, 2, \dots, p$ $\quad 1 \leq d_i \leq \tau_i$

Αν $d_i = \tau_i$ $\forall\, i = 1, 2, \dots, p$ τότε ο A είναι πίνακας "απλής δομής" (Διαφορετικά μη απλής δομής)

Πίνακες απλής δομής

Έστω $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(όχι απαραίτητα διακεκριμένες)

Έστω ότι $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ είναι οι ιδιοτιμές και $\{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \dots, \underline{u_n}\}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε ισχύει ότι $A\underline{u_i} = \lambda_i \underline{u_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\Rightarrow A[\underline{u_1}\ \underline{u_2} \dots \underline{u_n}] = \underbrace{[\underline{u_1}\ \underline{u_2} \dots \underline{u_n}]}_{U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι $\det(U) \neq 0$

$$AU = U\Lambda \Rightarrow \boxed{A = U\Lambda U^{-1}}$$

Το σύστημα:

$$\underline{y}' = A\underline{y} \Rightarrow \underline{y}' = U\Lambda U^{-1}\underline{y} \Rightarrow \underbrace{U^{-1}\underline{y}'}_{x'} = \Lambda \underbrace{U^{-1}\underline{y}}_{x} \Rightarrow \underline{x}' = \Lambda \underline{x}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ x_n' = \lambda_n x_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ x_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{matrix} \quad c_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{X}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Έχουμε $\underline{x}(t) = e^{\Lambda t}\underline{c}$

Εφόσον $\underline{y} = U\underline{x} \Rightarrow \underline{y}(t) = U e^{\Lambda t}\underline{c} = [\underline{u}_1 \underline{u}_2 \dots \underline{u}_n] e^{\Lambda t}\underline{c} \Rightarrow \boxed{\underline{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\underline{u}_i}$

Ισοδύναμα $\underline{y}' = A\underline{y} \Rightarrow \underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 \qquad \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$A = U\Lambda U^{-1} \Rightarrow A^2 = U\Lambda^2 U^{-1}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = U\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Lambda^k t^k}{k!}U^{-1} \quad \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Lambda^k t^k}{k!}\right)_{ii} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^k t^k}{k!} = e^{\lambda_i t}$$

$$e^{At} = Ue^{\Lambda t}U^{-1} \Rightarrow \underline{y}(t) = Ue^{\Lambda t}\underbrace{U^{-1}\underline{y}_0}_{\underline{c}\in\mathbb{R}^n} \Rightarrow \underline{y}(t) = Ue^{\Lambda t}\underline{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\underline{u}_i$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\underline{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix}-11 & 16\\ -8 & 13\end{bmatrix}}_{A}\underline{y}, \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix}\lambda+11 & -16\\ 8 & \lambda-13\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1 = -3: (\lambda_1 I - A)\underline{u}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}8 & -16\\ 8 & -16\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}}^{\underline{u}_1} = \underline{0} \Rightarrow a_1 = 2b_1 \quad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5: (\lambda_2 I - A)\underline{u}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}16 & -16\\ 8 & -8\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\end{bmatrix}}^{\underline{u}_2} = \underline{0} \Rightarrow a_2 = b_2 \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \underline{y}(t) = c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{5t}$$
$$\quad\ \underline{u}_1\ \ \underline{u}_2$$

$$\overset{t=0}{\Rightarrow} \underline{y}(0) = \begin{bmatrix}2c_1 + c_2\\ c_1 + c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2$$

Άρα $\underline{y}(t) = \begin{bmatrix}2e^{-3t} + 2e^{5t}\\ e^{-3t} + 2e^{5t}\end{bmatrix}$

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 = Ue^{\Lambda t}U^{-1}\underline{y}_0 = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-5t} & 0\\ 0 & e^{5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\underline{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underline{y}$$

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -(\lambda+2) & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\left((\lambda+1)\lambda - 2\right)$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+2)(\lambda-1)$$

$\lambda_2 = -2, \ z_2 = 2$

$\lambda_1 = 1, \ z1 = 1$

$\lambda_1 = 1 \ : \ (\lambda_1 I - A)\underline{u_1} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x = y+z \\ 2y = x+z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y = z \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{u}_1$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y(t)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 12/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 12º

$\underline{y}' = A\underline{y}$ $\quad\quad$ $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t)$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\underline{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{y}_0$ $\quad\quad$ $\underline{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-z)}\underline{b}(z)\,dz$

Έστω ότι έχω πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω ότι έχω ένα ζεύγος $(\lambda, \underline{u})$ ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος, δηλαδή $A\underline{u} = \lambda\underline{u}$ $(\underline{u} \neq \underline{0})$

συζυγής διάνυσμα $\nearrow$ A (ο συζυγής του A είναι A)

$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow \overline{A\underline{u}} = \overline{\lambda\underline{u}} = \bar{A}\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}$

$\Rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\underline{u}})$ είναι επίσης ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος

Έστω $\lambda = \sigma + iw$, $\sigma, w \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$

$\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$, $\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$

$$A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + iw)(\underline{x} + i\underline{z}) = \overbrace{(\sigma\underline{x} - w\underline{z})}^{A\underline{x}} + i\overbrace{(w\underline{x} + \sigma\underline{z})}^{A\underline{z}}$$

<u>Ισοδύναμα:</u> $A[\underline{x} : \underline{z}] = [\underline{x} : \underline{z}] = \begin{bmatrix} \sigma & w \\ -w & \sigma \end{bmatrix}$

<u>Λήμμα:</u> $(\underline{x}, \underline{z})$ είναι γρ. ανεξ.

Έστω (για αντίφαση) ότι $\exists (c_1, c_2) \neq (0,0)$: $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = \underline{0}$

Έχουμε $c_2 \neq 0$ $\left(\begin{array}{l} \text{Αν } c_2 = 0 \Rightarrow c_1 x = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow w\underline{z} = 0 \Rightarrow \underline{z} = 0 \\ \Rightarrow \underline{u} = \underline{0} \text{ άτοπο} \end{array}\right)$

Επομένως $\underline{z} = -\frac{c_1}{c_2}\underline{x}$ και $A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow A(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x})$

$$= (\sigma + iw)(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x}) \Rightarrow (1 - i\frac{c_1}{c_2})A\underline{x} = (1 - i\frac{c_1}{c_2})(\sigma + iw)\underline{x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A\underline{x}}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{(\sigma + iw)\underline{x}}_{\in\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{R}^n}, \ \underline{x} \neq 0$$

(αυστηρά μιγαδικοί) $\quad$ (άτοπο)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Έστω το $\underline{y}' = A\underline{y}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, και έστω $(\lambda, \underline{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος του A όπου $\lambda = \sigma + iw$, $\sigma, w \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$, $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$, $\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$. Τότε οι πραγματικές συναρτήσεις

$\varphi_1(t) = e^{\sigma t}(\cos(wt)\underline{x} - \sin(wt)\underline{z})$, $\varphi_2(t) = e^{\sigma t}(\sin(wt)\cdot\underline{x} + \cos(wt)\underline{z})$

είναι γρ. ανεξ. λύσεις του συστήματος

Απόδειξη:

Έχουμε ότι $\underline{y}(t) = e^{\lambda t}\cdot\underline{u}$ είναι λύση $\left(\underline{y}' = \lambda e^{\lambda t}\cdot\underline{u} = e^{\lambda t} A\cdot\underline{u} = A(e^{\lambda t}\cdot\underline{u}) = A\,y(t)\right)$

Έχουμε
$$\underline{y}(t) = e^{(\sigma+i\omega)t}(\underline{x}+i\underline{z}) = e^{\sigma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)(x+iz)$$
$$= \underbrace{e^{\sigma t}(\cos(\omega t)\underline{x} - \sin(\omega t)\underline{z})}_{\underline{\varphi_1}(t)} + i\underbrace{(\sin(\omega t)\underline{x} + \cos(\omega t)\underline{z})e^{\sigma t}}_{\underline{\varphi_2}(t)}$$

$\underline{\varphi_1}$ και $\underline{\varphi_2}$ λύσεις γιατί

$$\underset{\underline{\varphi_1}' + i\underline{\varphi_2}'}{\underset{\parallel}{(\underline{\varphi_1} + i\underline{\varphi_2})'}} = A(\underline{\varphi_1} + i\underline{\varphi_2}) = A\underline{\varphi_1} + iA\underline{\varphi_2} \Rightarrow \underline{\varphi_1}' = A\underline{\varphi_1},\ \underline{\varphi_2}' = A\underline{\varphi_2}$$

Έστω για αντίφαση ότι φ_1, φ_2 είναι γρ. εξ. στο $\mathbb{R}$ τότε
$\exists (c_1, c_2) \neq (0,0) : c_1\underline{\varphi_1}(t) + c_2\underline{\varphi_2}(t) = \underline{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow c_1\underline{\varphi_1}(0) + c_2\underline{\varphi_2}(0) = \underline{0} \Rightarrow c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = 0$, αδύνατο

$$\begin{bmatrix}\underline{\varphi_1}(t)\\ \underline{\varphi_2}(t)\end{bmatrix} = e^{\sigma t}\begin{bmatrix} I_n\cos\omega t & -\sin\omega t\\ I_n\sin\omega t & I_n\cos\omega t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{z}\end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\underline{y}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{pmatrix}\underline{y}$ $\qquad \varphi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 4 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \underline{+}\,2i$

$\left.\begin{matrix}\lambda = \pm 2i\\ \sigma = 0\\ w = 2\end{matrix}\right\}$ $\qquad \lambda_i = 2i : \underset{\lambda_1 I = A}{\begin{bmatrix}2i & -1\\ 4 & 2i\end{bmatrix}}\underset{\underline{u}}{\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}} = \underline{0} \Rightarrow b = 2ai$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix}1\\ 2i\end{bmatrix} = \underset{\underline{x}}{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}} + i\underset{\underline{z}}{\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}}$$

$\varphi_1(t) = e^{0t}\left\{\cos(2t)\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} - \sin(2t)\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\right\}$

Η γενική λύση : $\underline{\varphi} = c_1\underline{\varphi_1} + c_2\underline{\varphi_2}\ (t) = \begin{bmatrix}c_1\cos 2t + c_2\sin 2t\\ -2c_1\sin 2t + 2\cos 2t\end{bmatrix}$

$c_{1,2} \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\underline{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{A} \cdot \underline{y} \quad , \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2+1\right] = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm i$

· $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = 1\\ \gamma = 0 = \beta\end{matrix}$ $\qquad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1 + i$: $\underbrace{\begin{bmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & i & 1\\ 0 & -1 & i\end{bmatrix}}_{\lambda_2 I - A}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}}_{\underline{u}_2} = \underline{0}$ $\qquad i\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\beta = i\gamma$

$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\ i\\ 1\end{bmatrix} = \underline{\bar{u}_3}$

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} i$$

$\sigma t = 1t \Rightarrow \sigma = 1$

$\varphi_1(t) = e^t \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad , \quad \varphi_2(t) = e^t \left\{ \cos t \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - \sin \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$

$\varphi_3(t) = e^t \left\{ \sin t \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \cos \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$

<u>Γενική λύση:</u> $\underline{\varphi}(t) = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3$

$$\underline{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \cdot e^t\\ -c_2 e^t \sin t + c_3 \cdot e^t \cos t\\ c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\underline{0}) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \varphi(t) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

Πίνακες μη απλής δομής

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μη απλής δομής. Έστω $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{z_1} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{z_\ell}$ όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ και z_i η αλγεβρική πολ/τα της λ_i

Εστω $d_i = \dim(\ker[\lambda_i I - A])$ η γεωμετρική πολ/τα του λ_i

Έχουμε για κάποιο i: $1 \leq d_i < \tau_i$

Ορίζουμε αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων (για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$)

$$\left.\begin{aligned} A\underline{u}_1 &= \lambda \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 &= \lambda \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ &\vdots \\ A\underline{u}_n &= \lambda u_n + u_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

Αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων

$\underline{u}_1$ γεν. 1ης τάξης

$\underline{u}_2$ " 2ης "

⋮

$\underline{u}_n$ " n τάξης

Ισχύει η σχέση

$$(\lambda I - A)^j \underline{u}_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$(j=1: (\lambda I - A)\underline{u}_1 = 0\ ,\ j=2: (\lambda I - A)^2 \underline{u}_2 = (\lambda I - A)\Big[\overbrace{(\lambda I - A)\,\underline{u}_2}^{=u_1}\Big] = 0$$

$$A[\underline{u}_1 \underline{u}_2 \ldots \underline{u}_n] = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, u_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{\text{Jordan block}}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 14/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 13ο

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και $\varphi(\lambda)=|\lambda I_n-A|=(\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{\tau_p}$ $\lambda_i\neq\lambda_j,\ i\neq j$

$d_i=\dim[\ker(\lambda_i I-A)]$ $1\leq d_i\leq\tau_i$ $(\forall i=1,2,\dots,p)$

Έστω $r_{ij}=\text{Rank}[\lambda_i I-A]^j$ $,i=1,2,\dots,p)$

Η $(r_{ij})_{i=1,2,\dots}$ $(r_{11}\geq r_{12}\geq r_{13}\geq\dots)$

$(r_{i1}=n-d_i)$

Έστω l_i ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο $r_{i,l_i}=r_{i,l_i+1}$

$(r_{11}>r_{12}>\dots>r_{i,l_i-1}>r_{i,l_i}=r_{i,l_i+1})$

$\forall i=1,2,\dots,p$

Χαρακτηριστική Segré

$$S_i=[\underbrace{n-r_{i,1}}_{\substack{d_i\\ \#\text{ γενικευμένων}\\ \text{ιδιοδ. τάξης } 1}}\quad\underbrace{r_{i,1}-r_{i,2}}_{\substack{\#\text{ γεν. ιδ.}\\ 2^{ης}\text{ τάξης}}}\ \cdots\ \underbrace{r_{i,l_i-1}-r_{i,l_i}}_{\#\text{ γεν.ιδ. τάξης } l_i}]$$

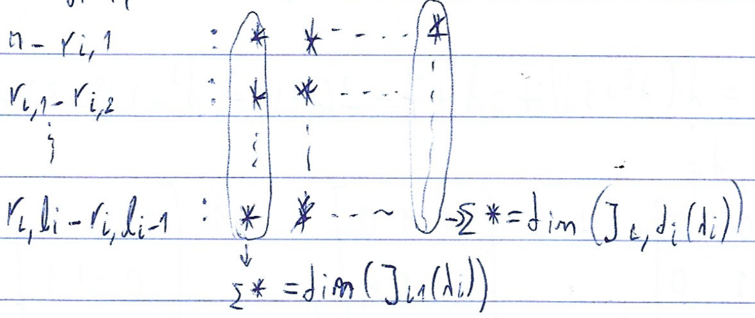
$Au_{i,1}=\lambda u_{i,1}$

$Au_{i,2}=\lambda u_{i,2}+u_{i,1}$

$\vdots$

$Au_{i,k}=\lambda u_{i,k}+u_{i,k-1}$

Διάγραμμα Ferré



<u>Παράδειγμα</u>

$A\in\mathbb{R}^{10\times10}$, $\lambda_i\in\sigma(A)$, $\lambda_i=4$

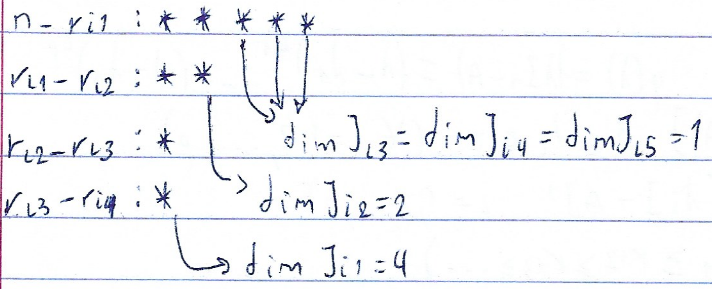
$r_{i1}=\text{rank}[\lambda_i I-A]=5$ $,r_{i3}=2$ $,r_{i4}=1$ $,r_{i5}=1$

$r_{i2}=\text{rank}[\lambda_i I-A]^2=3$

$S_i=[n-r_{i1},r_{i1}-r_{i2},r_{i2}-r_{i3},r_{i3}-r_{i4}]$

5 2 1 1

Διαγραμμα Ferré



$$A[\underline{u}_{11}\ \underline{u}_{12}\ \underline{u}_{13}\ \underline{u}_{14} \vdots \underline{u}_{21}\ \underline{u}_{22} \vdots \underline{u}_{31} \vdots \underline{u}_{41} \vdots \underline{u}_{51}][\tilde{u}]$$
$$=[\underline{u}_{11}\ \underline{u}_{12}\ \underline{u}_{13}\ \underline{u}_{14} \vdots \underline{u}_{21}\ \underline{u}_{22} \vdots \underline{u}_{31} \vdots \underline{u}_{41} \vdots \underline{u}_{51}][\tilde{u}]$$

$$\left.\begin{aligned} A\underline{u}_{11} &= \lambda_1 \underline{u}_{11} \\ A\underline{u}_{12} &= \lambda_1 \underline{u}_{12} + \underline{u}_{11} \\ A\underline{u}_{13} &= \lambda_1 \underline{u}_{13} + \underline{u}_{12} \\ A\underline{u}_{14} &= \lambda_1 \underline{u}_{14} + \underline{u}_{13} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} Au_{21} &= \lambda_1 u_{21} \\ Au_{22} &= \lambda_1 v_{22} + u_{21} \end{aligned}\right\}$$

$$AU = UJ \Rightarrow A = UJU^{-1}$$
$$e^{At} = Ue^{Jt}U^{-1}$$

Παράδειγμα

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi(\lambda)=|\lambda I_3 - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ 5 & \lambda+3 & 7 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda+3 & 7 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & \lambda+3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2+3\lambda) + 5\lambda + 7 - 2(\lambda+3) = \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 = (\lambda+1)^3$$

$\lambda=-1$, $\tau=3$, $d=$

$$d=3: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad d=2: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad d=1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1 \Rightarrow (\lambda I_3 - A)\underline{u}_1 = 0$$
$$A\underline{u}_2 = \lambda \underline{u}_2 + u_1 \Rightarrow (\lambda I_3 - A)\underline{u}_2 = -u_1$$
$$A\underline{u}_3 = \lambda \underline{u}_3 + \underline{u}_2 \Rightarrow (\lambda I_3 - A)\underline{u}_3 = -\underline{u}_2$$

$$(\lambda=-1 : \lambda I - A =)\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ \alpha=\beta=-\gamma \end{cases}$$

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\overset{u_2}{\overbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha+\beta+2\gamma=1 \\ \alpha+\gamma=-1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \gamma=0 \\ \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{matrix}\right\} \qquad \underline{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\overset{u_3}{\overbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha+\beta+2\gamma=-1 \\ \alpha+\gamma=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=-1 \end{matrix}\right\} \qquad \underline{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U = [\underline{u_1}\ \underline{u_2}\ \underline{u_3}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad AU = UJ \Rightarrow A = UJU^{-1} = U\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}U^{-1}$$

Έστω $A = UJU^{-1} \Rightarrow e^{At} = Ue^{Jt}U^{-1}$

$J = \mathrm{diag}\{J_1, \dots, J_p\} \Rightarrow e^{Jt} = \mathrm{diag}\{e^{J_1 t}, \dots, e^{J_p t}\}$

$J_i = \mathrm{diag}\{J_{i1}, \dots, J_{id_i}\} \Rightarrow e^{J_i t} = \mathrm{diag}\{e^{J_{i1} t}, \dots e^{J_{id_i} t}\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots \ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} \qquad e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη για m=3

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad AB = BA \Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\lambda I_3} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N_3}$$

ΛΗΜΜΑ

$$N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3^3 = 0 = N_3^4 = \dots = N_3^n$$

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I_3 + N_3)t} = e^{\lambda t I_3 + N_3 t} = e^{\lambda t I_3} e^{N_3 t} = e^{\lambda t}\left[I_n + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \frac{N^3 t^3}{3!} + \dots\right]$$

$$= e^{\lambda t}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&t&0\\0&0&t\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&t^2/2!\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right\} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$, $\lambda_1 = 2$, $z_1 = 3$, $d_1 = 2$

$\lambda_2 = 3$, $z_2 = 2$, $d_2 = 2$

$$A = UJU^{-1}, \quad J = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 2&1&&&\\ 0&2&&&\\ \hline &&2&&\\ \hline &&&3&0\\ &&&0&3 \end{array}\right]$$

$$e^{At} = U e^{Jt} U^{-1}$$

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} e^{2t}&te^{2t}&&&\\ 0&e^{2t}&&&\\ \hline &&e^{2t}&&\\ \hline &&&e^{3t}&\\ \hline &&&&e^{3t} \end{array}\right]$$

αν $d_1 = d_2 = 1$:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2&1&0&&\\ 0&2&1&&\\ 0&0&2&&\\ \hline &&&3&1\\ &&&0&3 \end{array}\right]$$

ΛΗΜΜΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Phi(t) = e^{(A+B)t} e^{-At} e^{-Bt}$

$\Phi'(t) = \text{----} = 0$

$\Phi(t) = \Phi(0) = I$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί το ΠΑΤ: $\underline{y}' = \overbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}^{A} \underline{y} + \overbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}^{b} \quad , \underline{y}(0) = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = y_0$

$$y(t) = \cancelto{0}{e^{At}} \underline{y_0} + \int_0^t e^{A(t-z)} \underline{b}\, dz$$

$$A = J = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$$

$$e^{A(t-z)} = \begin{pmatrix}e^{t-z} & (t-z)e^{(t-z)}\\ 0 & e^{t-z}\end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{A(t-z)} b\, dz = \int_0^t \begin{pmatrix}e^{t-z} & (t-z)e^{t-z}\\ 0 & e^{t-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} dz$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix}e^{t-z}\\ 0\end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix}\int_0^t e^{t-z}\, dz\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{t-z}\, dz = e^t \int_0^t e^{-z}\, dz = e^t \left[-e^{-z}\right]_0^t = e^t \left[e^{-z}\right]_t^0 = e^t(1-e^{-t}) = e^t - 1$$

$$y(t) = \begin{pmatrix}e^t - 1\\ 0\end{pmatrix} \qquad y'(t) = \begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t - 1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 17/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 14ο

Ύλη

Κεφ 1: 1.1, 1.2, (1.3)

Κεφ 2: 2.2, (2.2.1, 2.2.3) (όχι 2.2.2)

Κεφ 6: 6.1, 6.2, 6.3 (εκτός 6.3.3), 6.5, 6.6, 6.7 (6.4, 6.8 όχι)

[A1] $\mu(t,y) = t^a y^b$

$$\mu(\underbrace{ty^2+2t^2y^3}_{M})\,dt + \mu(\underbrace{t^2y-t^3y^2}_{N})\,dy = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = M_y = N_t = \frac{dN}{dt}$$

$$2ty+6t^2y^2 = M_y \neq N_t = 2ty-3t^2y^2$$

$$\tilde{M} = t^{a+1}y^{b+2} + 2t^{a+2}y^{b+3}$$

$$\tilde{N} = t^{a+2}y^{b+1} - t^{a+3}y^{b+2}$$

$$\tilde{M}_y = (b+2)t^{a+1}y^{b+1} + 2(b+3)t^{a+2}y^{b+2} = (a+2)t^{a+1}y^{b+1} - (a+3)t^{a+2}y^{b+2} = N_t$$

$$\left.\begin{array}{l} b+2=a+2 \\ 2b+6=-a-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=b \\ 3a=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=-3$$

Επομένως για αυτή την επιλογή

$$(\underbrace{t^{-2}y^{-1}+2t^{-1}}_{\frac{dF}{dt}})\,dt + (\underbrace{t^{-1}y^{-2}-y^{-1}}_{\frac{dF}{dy}})\,dy = 0$$

$$\frac{dF}{dt} = t^{-2}y^{-1}+2t^{-1} \Rightarrow F = -t^{-1}y^{-1}+2\ln|t| + h(y)$$

$$\frac{dF}{dy} = t^{-1}y^{-2}+h'(y) \Rightarrow t^{-1}y^{-2}-y^{-1} \Rightarrow h'(y) = -y^{-1} \Rightarrow h(y) = -\ln|y|$$

Επομένως $F(t,y) = -t^{-1}y^{-1} + \ln t^2 - \ln|y| - c$ $\quad (t^2 = c|y|e^{1/ty})$

[A2] $y''+4y = \cos\omega t$ $\quad y'(0)=y(0)=0$ $\quad$ (γραμμική)

$$p(r) = r^2+4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$$

$y_{op} = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \quad , c_1, c_2 \in R$

$w \neq 2 : \; \psi_p = A \cos wt + B \sin wt$ → γραμμένη

$w = 2 : \; \psi_p = At \cos 2t + Bt \sin 2t \Rightarrow$ όχι γραμμένη

$w \neq 2 : \; \psi_p = A \cos wt + B \sin wt$

$\psi'_p = -Aw \sin wt + Bw \cos wt$

$\psi''_p = -Aw^2 \cos wt - Bw^2 \sin wt$

Αντικαθιστώντας : $-Aw^2 \cos wt - Bw^2 \sin wt + 4A \cos wt + 4B \sin wt = \cos wt$

$$A\underbrace{(4-w^2)}_{1} \cos wt + B\underbrace{(4-w^2)}_{0} \sin wt = \cos wt$$

$A = 1/(4-w^2) \quad , B = 0$

$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + (1/(4-w^2)) \cos wt$

$y' = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t - (1/(4-w^2)) \sin wt$

$y(0) = c_1 + 1/(4-w^2) = 0 \quad , y'(0) = 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \; , c_1 = 1/(w^2-4)$

Η λύση του ΠΑΤ

$$y = \frac{1}{w^2-4} \cos 2t + \frac{1}{w^2-4} \cos wt$$

$w = 2$

$\psi_p = At \cos 2t + Bt \sin 2t$

$\psi'_p = A \cos 2t - 2At \sin 2t + B \sin 2t + 2Bt \cos 2t$

$\psi''_p = -2A \sin 2t - 2A \sin 2t - 4At \cos 2t + 2B \cos 2t + 2B \cos 2t - 4Bt \sin 2t$

$$\underbrace{-4A \sin 2t}_{0} - \cancel{4At \cos 2t} + \underbrace{4B \cos 2t}_{1} - \cancel{4Bt \sin 2t} + \cancel{4At \cos 2t} + \cancel{4Bt \sin 2t} = \cos 2t$$

$\Rightarrow A = 0 \quad , B = 1/4 \qquad \psi_p = \frac{1}{4} t \sin 2t$

Επομένως γενική λύση του ΜΟ

$$\left.\begin{aligned} y &= c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{4} t \sin 2t \\ y' &= -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y(0) &= 2c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \; c_1 = c_2 = 0$$

Επομένως λύση $y(t) = \frac{1}{4} t \sin 2t$

[A3] a) $ty' - y = \ln(t)y^2 \quad (t>0)$

Bernoulli, $r=2$, $u = y^{1-r} \Rightarrow u = y^{-1} \Rightarrow u' = (-y^{-2})y'$

$y' - t^{-1}y = t^{-1}\ln(t)y^2$

$$\Rightarrow \underbrace{(-y^{-2})y'}_{u'} + \underbrace{t^{-1}(y^{-2})y}_{t^{-1}u} = \underbrace{t^{-1}\ln(t)(-y^{-2})y^2}_{=-t^{-1}\ln t}$$

$\mu(t) = \exp\{\int t^{-1}dt\} = \exp\{\ln t\} = t$

Άρα $tu' + u = -\ln t \Rightarrow tu = -\int \ln(t)dt + c$

$$\int \underbrace{1}_{\frac{dv}{dt}} \underbrace{\ln(t)}_{u} dt = t\ln(t) - \int t\, t^{-1} dt = \ln(t) - t$$

$u \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow v = t$

$\Rightarrow tu = -t\ln(t) + t + c$

$u = \frac{1}{y(t)} = 1 - \ln(t) + ct^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{1-\ln t + ct^{-1}}$, $c \in R$

b) $t^2y'' + 3ty' + 2y = 0 \quad (t>0)$ (Euler)

$y = t^r \Rightarrow y' = rt^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)t^{r-2}$

Αντικαθιστώντας: $[\underbrace{r(r-1)+3r+2}_{p(r)}]\, t^r = 0$

$p(r) = r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 + 1^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm i$

$y = c_1 t^{-1+i} + c_2 t^{-1-i}$

$y = t^{-1}(c_1 t^{i} + c_2 t^{-i}) = t^{-1}(c_1 e^{i\ln t} + c_2 e^{-i\ln t})$

$= c_1 t^{-1}(\cos(\ln t) + i\sin(\ln t)) + c_2 t^{-1}(\cos(\ln t) - i\sin(\ln t))$

$= \underbrace{(c_1+c_2)}_{a_1} t^{-1}\cos(\ln t) + \sin(\ln t)\, t^{-1}\underbrace{(c_1-c_2)i}_{a_2}$, $a_1, a_2 \in R$

$$\left(\left. \begin{matrix} c_1 = \gamma + i\delta \\ c_2 = \gamma - i\delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 + c_2 = 2\gamma \\ c_1 - c_2 = 2i\delta \end{matrix} \right)$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 19/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 15ο ⓧ

[Α 3 γ] $y'' + 5y' + 4y = e^{-t} + t^2$

$p(r) = r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4) \Rightarrow r_1 = -1, \ r_2 = -4$ $\quad y^{o\mu}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}$

$\psi^{1}_p(t) = Ate^{-t}, \ \tilde{\psi}_p = A + Bt + \Gamma t^2$

$\psi_p' = Ae^{-t} - Ate^{-t}$

$\psi_p'' = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$

$-2Ae^{-t} + Ate^{-t} + 5(Ae^{-t} - Ate^{-t}) + 4Ate^{-t} \equiv e^{-t} \Rightarrow 3Ae^{-t} \equiv e^{-t} \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$\tilde{\psi}_p' = B + 2\Gamma t$

$\psi_p'' = 2\Gamma$

$2\Gamma + 5(B + 2\Gamma t) + 4(A + Bt + \Gamma t^2) \equiv t^2$

$\Rightarrow (2\Gamma + 5B + 4A) + (10\Gamma + 4B)t + t^2\Gamma \cdot 4 \equiv t^2 \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{4}, B = -\frac{5}{8}, A = 21/32$

Γενική λύση : $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{3} t e^{-t} + \frac{21}{32} - \frac{5}{8} t + \frac{1}{4} t^2$

Παρένθεση:

$y'' + 5y' + 4y = te^{-4t}$ $\quad y_1 = e^{-t}, \ y_2 = e^{-4t}$

$\psi_p = Ate^{-4t}$

$y'' + y = \cos 2t$

$p(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

$y^{o\mu}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$\psi(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$

$y'' + y = \cos t$

$\psi(t) = At\cos t + Bt\sin t$

$y'' + y' = 1$

$p(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

$y^{o\mu}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$y'' + y' = 1$

$p(r) = r^2 + r = r(r+1) \Rightarrow r_1 = 0, \ r_2 = -1$

$y^{o\mu}(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{-t}$

$\psi_p = At$

$y''' + y'' = 1$

$p(r) = r^3 + r^2 = r^2(r+1)$

$y^{o\mu} = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t}$

$\psi(t) = At^2$

$y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\cos t$

$p(r) = r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1^2 = 0$

$\Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm i$

$y^{o\mu} = c_1 e^{(-1+i)t} + C_2 e^{(-1-i)t}$

$= \tilde{C}_1 e^{-t}\cos t + \tilde{C}_2 e^{-t}\sin t$

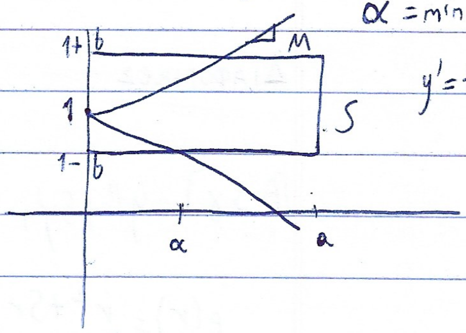
$\psi = Ate^{-t}\cos t + Be^{-t}\sin t$

$M = \max_{S} |f(y)|$

$\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$

$y' = f(y)$

[A9] ΠΑΤ : $y' = y^3$, $y(0) = 1$ $\quad t \in [0, \alpha)$



$M = \max |f(y)|$

$= \max_{1-b \leq y \leq 1+b} |y^3| = (1+b)^3 \quad , b > 0$

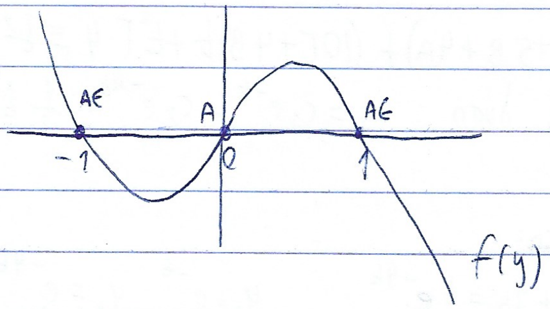
$\alpha = \min \left(a , \underbrace{\frac{b}{(1+b)^3}}_{g(b)} \right)$

$g'(b) = \frac{1(1+b)^3 - 3b(1+b)^2}{(1+b)^6} = 0 \Rightarrow \frac{(1+b)^2(1-2b)}{(1+b)^6} = 0 \Rightarrow b = 1/2$

$\alpha^* = \frac{4}{27}$

$\frac{dy}{dt} = y^3 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int dt + c \Rightarrow -\frac{y^{-2}}{2} = t + c \Rightarrow \frac{1}{y^2} = c - 2t \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$

[A10] $y' = \underbrace{y(1-y^2)}_{f(y)}$



ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 21/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 16ο

2.2

Θεωρ 2.1 όχι απόδειξη (μόνο να ξέρουμε να το εφαρμόζουμε)

6.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

όχι ~~αποδ~~ 6.2 μόνο εφαρμογές

όχι αποδ 6.3 "

" " 6.5 "

μόνο αυτά από [Θεωρ. 6.6, Προτ. 6.1, Θεωρ. 6.7 } αποδείξεις και

όχι Θεωρ 6.8

Θεωρία [Λήμμα 6.1 και εκτός δ

Πόρισμα 6.2 όχι αποδ εφαρμ.

[A 4] $y''+t^2y'+2ty=0 \quad , y(0)=1 \quad , y'(0)=0$

Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών

$$2ty=\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} \quad (=2a_0t+2a_1t^2+\dots)$$

$$t^2y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} \quad (=a_1t^2+2a_2t^3+\dots)$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} \left(=\underbrace{2a_2}_{0}+6a_3t+\dots\right) = 2a_2 \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

$$n-2=m+1 \Rightarrow n=m+3 \Rightarrow m=n-3$$

$$y''+t^2y'+2ty=2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}(m+3)(m+2)a_{m+3}t^{m+1}+\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} \equiv 0$$

$$\underbrace{2a_2}_{=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[(n+2)(n+3)a_{n+3}+(n+2)a_n\right]}_{=0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0} t^{n+1} \equiv 0$$

$$a_{n+3}=-\frac{a_n}{n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$1=a_0 \to a_3 \to a_6 \to \dots$

$0=a_1 \to a_4 \to a_7 \to \dots$

$0=a_2 \to a_5 \to a_8 \to \dots$

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$y(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\dots$

$y(0)=a_0$

$y'(t)=a_1+2a_2t+\dots \Rightarrow y'(0)=a_1=0$

$$\left.\begin{array}{l} a_{3n+1}=0 \\ a_{3n+2}=0 \end{array}\right\} n\in\mathbb{N}_0$$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow a_3=-a_0/3=-1/3 \\ n=3 \Rightarrow a_6=-a_3/6=1/(3\cdot6) \\ n=6 \Rightarrow a_9=-a_6/9=-1/(3\cdot6\cdot9) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{3n}=\dfrac{(-1)^n}{(1\cdot3)(2\cdot3)\cdots(n\cdot3)} \\ a_{3n}=\dfrac{(-1)^n}{3^n\cdot n!} \end{array}$$

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^nn!}t^{3n}$$

[A5] $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$ $e^{At}=?$

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2+4=0 \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1=1+2i\\ \lambda_2=1-2i\end{array}$$

$$\lambda_1: \begin{pmatrix}2i&-2\\2&2i\end{pmatrix}\overset{\underline{u}_1}{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}=\underline{0} \Rightarrow b=ia \quad \underline{u_1}=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2: \underline{u}_2=\overline{\underline{u_1}}=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

$$A=[\underline{u}_1\ \underline{u}_2]\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\overline{\lambda_1}\end{bmatrix}[\underline{u}_1\ \underline{u}_2]^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2i&0\\0&1-2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix}^{-1}$$

$$e^{At}=U\begin{bmatrix}e^{1+2i}&0\\0&e^{1-2i}\end{bmatrix}U^{-1}$$

$$U^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\i&-i\end{bmatrix}=\frac{1}{|U|}\operatorname{adj}(U)$$

$$|U|=-i-i=-2i \quad ,\operatorname{adj}(U)=\begin{bmatrix}-i&-i\\-1&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-i&-1\\-i&1\end{bmatrix}$$

$$u^{-1} = \frac{1}{-2i}\begin{bmatrix}-i & -1\\ -i & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2i\\ 1/2 & -1/2i\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{2} e^{t}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2it} & 0\\ 0 & e^{-2it}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{t}\begin{bmatrix}e^{2it} & e^{-2it}\\ ie^{2it} & -ie^{-2it}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} e^{t}\begin{bmatrix}e^{2it}+e^{-2it} & -ie^{2it}+ie^{-2it}\\ ie^{2it}-ie^{-2it} & e^{2it}+e^{-2it}\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{aligned} &\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta) = \cos\theta \\ &\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta) = \sin\theta \end{aligned}\right)$$

$$e^{At} = e^{t}\begin{bmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ -\sin(2t) & \cos(2t)\end{bmatrix}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ 21/12/18 ΜΑΘΗΜΑ 16ο Ⓧ

2η ωρα

[Α6] Δείξτε ότι η $y_1=1-2t^2$ είναι λύση της $y''-2ty'+4y=0$

$y_1'=-4t$

$y_1''=-4 \qquad -4-2t(-4t)+4(1-2t^2)=0$ άρα λύση

$$\left.\begin{aligned} y_2(t)&=y_1 v \\ y_2'&=y_1'v+v'y_1 \\ y_2''&=y_1''v+2y_1'v'+y_1v'' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &y_1''v+2y_1'v'+y_1v''-2t(y_1'v+v'y_1)+4y_1v=0 \\ &\Rightarrow y_1v''+(2y_1'-2ty_1)v'=0 \qquad u=v' \\ &\Rightarrow u'+\left(\frac{2y_1'}{y_1}-2t\right)u=0 \end{aligned}$$

$$\mu(t)=\exp\left\{\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}-2t\right)dt\right\}=\exp\left\{2\ln|y_1|-t^2\right\}=y_1^2e^{-t^2}$$

$$e^{-t^2}y_1^2u'+\left(2\frac{y_1'}{y_1}-2t\right)e^{-t^2}y^2u=0$$

$$(e^{-t^2}y_1u)'=0\Rightarrow e^{\cancel{-}t^2}y_1^2(t)u=c \Rightarrow u=\frac{ce^{\cancel{-}t^2}}{y_1^2(t)} \Rightarrow v=\int\frac{e^{t^2}}{y_1^2(t)}dt$$

$$y_2=(1-2t^2)\int\frac{e^{t^2}}{(1-2t^2)^2}dt$$

[Α8] $y'=ay+be^{\lambda t} \qquad a<0,\ \lambda>0$

$\lim\limits_{t\to\infty} y=0$

$$y(t)=\underbrace{e^{at}y_0}_{\to 0}+\underbrace{b\int_0^t e^{a(t-z)}e^{\lambda z}dt}_{②}$$

$\underline{\lambda\neq a}$

$$② = be^{at}\int_0^t e^{(\lambda-a)z}dz=be^{at}\left[\frac{e^{(\lambda-a)z}}{\lambda-a}\right]_0^t=\frac{b}{\lambda-a}e^{at}\left(e^{(\lambda-a)t}-1\right)$$

$$=\frac{b}{\lambda-a}\left(e^{\lambda t}-e^{at}\right)\to 0$$

$\underline{\lambda=a}$

$$② = be^{at}t \to 0$$