Μάθημα 16-1-2019

Επίλυση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $L(y)=0$ με μη σταθερούς συντελεστές.

Γενικά χρειάζεται μία λύση της .
Έστω $\phi_1,\ t\in I$ μία λύση της $L(y)=0$. Αναζητούμε μία άλλη λύση ϕ_2 τέτοια ώστε $\phi_1,\ \phi_2$ γραμμικά ανεξάρτητες (δηλαδή βάση του χώρου των λύσεων).

• **1ος τρόπος** (Με την ορίζουσα $Wronski$):
Αν μία $\phi_1\neq 0$ λύση της, έστω ϕ_2 μία άλλη (υποβιβασμός τάξης διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη την ϕ_2)

$$\frac{\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2}{\phi_1^2}=\frac{W}{\phi_1^2}\Leftrightarrow\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)'=\frac{W}{\phi_1^2}$$
$$\Rightarrow \phi_2=\phi_1\int\frac{W}{\phi_1^2}dt \quad \text{ή} \quad \phi_2=\phi_1\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\phi_1^2}dt\ .$$

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι $\phi_1,\ \phi_2$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$.

$$W(\phi_1,\ \phi_2)(t)=\begin{vmatrix}\phi_1 & \phi_2\\ \phi_1' & \phi_2'\end{vmatrix}=\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2=\phi_1\left(\phi_1'\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\phi_1^2}dt+\phi_1\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\phi_1^2}\right)-\phi_1'\phi_1\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\phi_1^2}dt$$
$$=\phi_1^2\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\phi_1^2}=e^{-\int p(t)dt}\neq 0\ .$$

Γραμμική ανεξαρτησία των $\phi_1,\ \phi_2$.

Άσκηση 1: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''-\frac{t+1}{t}y'+\frac{1}{t}y=0 \quad , \quad t>0\ ,$$

αν μία λύση της είναι η $\phi_1(t)=e^t$, $t>0$.

Λύση: Μία άλλη λύση της θα είναι

$$\phi_2(t)=\phi_1(t)\int\frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{\phi_1^2(t)}\,dt=e^t\int\frac{e^{-\int\frac{t+1}{t}\,dt}}{e^2t}\,dt=e^t\int\frac{e^te^{lnt}}{e^{2t}}\,dt=e^t\int te^{-t}\,dt$$
$$=e^t\left[e^{-t}(-t-1)\right]=-t-1$$

Γενική λύση: $y_{o\mu}(t)=c_1e^t+c_2(-t-1)$
(ή αλλιώς μπορεί να έχει και τη μορφή $y_{o\mu}(t)=\kappa_1e^t+\kappa_2(t+1)$.

Άσκηση 2: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''-6y'+9y=0\,,$$

αν μία λύση της είναι η $\phi_1(t)=e^{3t}$.

Λύση:

• 1^{os} **τρόπος:** Μία άλλη λύση της είναι η

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{\phi_1^2(t)}\,dt = e^{3t} \int \frac{e^{\int 6\,dt}}{(e^{3t})^2}\,dt = e^{3t} \int \frac{e^{6t}}{e^{6t}}\,dt = te^{3t}$$

• 2^{os} **τρόπος:** Αν $\phi_1(t)$ λύση της $L(y) = 0$, μία άλλη λύση της δίνεται από το μετασχηματισμό
,

$$y(t) = \phi_1(t) \int u(t)\,dt$$

Λύση:

$$y'(t) = \phi_1^{'}(t) \int u(t)\,dt + \phi_1 u$$

$$y''(t) = \phi_1^{''}(t) \int u(t)\,dt + 2\phi_1^{'}(t)u(t) + \phi_1(t)u'(t)$$

$$\phi_1^{''}(t) \int u(t)\,dt + 2\phi_1^{'}u + \phi_1(t)u'(t) + p(t)\phi_1^{'}(t) \int u(t)\,dt + p(t)\phi_1(t)u(t) + \phi_1(t) \int u(t)\,dt = 0$$

$$(\phi_1^{''} + p(t)\phi_1^{'} + \phi_1(t)) \int u(t)\,dt + \phi_1(t)u'(t) + (2\phi_1^{'}(t) + p(t)\phi_1(t))u(t) = 0$$

Από $\phi_1^{''} + p(t)\phi_1^{'} + \phi_1(t) = 0$ και $\phi_1 \neq 0$ έχουμε

$$u'(t) + \left(2\frac{\phi_1^{'}(t)}{\phi_1(t)} + p(t)\right) u(t) = 0$$

Μία λύση είναι

$$u(t) = e^{-\int \left(2\frac{\phi_1^{'}(t)}{\phi_1(t)} + p(t)\right)\,dt} = e^{-2ln|\phi_1(t)|} e^{-\int p(t)\,dt} = \frac{1}{\phi_1^2(t)} e^{-\int p(t)\,dt}$$

Μία άλλη λύση της $L(y) = 0$ είναι η

$$y(t) = \phi_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\phi_1^2(t)} dt$$