ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ
2018-2019
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ:Κα.ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

- **ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ**

ΟΜΑΔΑ ΛΥΤΩΝ:

ΣΑΒΒΙΝΑ ΜΑΓΚΟΥ

ΙΩΑΝΝΑ ΝΑΣΗ

ΕΒΕΛΙΝΑ ΔΑΡΕΜΑ

ΡΑΦΑΗΛΙΑ ΦΕΡΜΑΝΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΛΙΒΙΤΣΑΝΟΣ

ΠΕΤΡΟΣ ΠΛΟΥΜΙΔΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

* Να λυθούν: $y''-5y+6y=0$, $y''+6y'+9y=0$

$y''-4y'+5y=0$ και το ΠΑΤ: $\begin{cases} y''+y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

(1) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:
$r^2-5r+6=0$ με ρίζες $r_1=3$ και $r_2=2$. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς $L(y)=0$, θα είναι: $y_{ομ}(t)=c_1\cdot e^{3t}+c_2\cdot e^{2t}$ με c_1,c_2 σταθερές ($c_1,c_2\in\mathbb{R}$)
Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας: $W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t}\end{vmatrix}$
$=3e^{5t}-2e^{5t}=e^{5t}\neq 0$.

(2) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2+6r+9=0 \Leftrightarrow (r+3)^2=0$ με διπλή ρίζα την $r_1=r_2=r=-3$. Επομένως, οι λύσεις της $L(y)=0$ θα είναι $y_1(t)=e^{-3t}$ και $y_2(t)=t\cdot e^{-3t}$
$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{-3t} & t\cdot e^{-3t} \\ -3e^{-3t} & e^{-3t}-3te^{-3t}\end{vmatrix}=$
$e^{-6t}-\cancel{3te^{-6t}}+\cancel{3te^{-6t}}=e^{-6t}\neq 0$. Άρα, η γενική λύση της ομογενούς: $\underline{y_{ομ}(t)=}\ c_1\cdot e^{-3t}+c_2te^{-3t}$ με $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

(3) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2-4r+5=0$ με $\Delta=16-20=-4<0$ και ρίζες $r_{1,2}=\dfrac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$
Η ομογενής θα έχει λύση, τότε:
$y_{ομ}(t)=e^{2t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$ με $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t+2e^{2t}\cos t & e^{2t}\cos t+2e^{2t}\sin t\end{vmatrix}$
$=e^{4t}\cos^2 t+\cancel{2e^{4t}\cos t\sin t}+e^{4t}\sin^2 t-\cancel{2e^{4t}\cos t\sin t}$
$=e^{4t}(\cos^2 t+\sin^2 t)=e^{4t}\neq 0$

(4) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2+1=0$ με $r=\pm i$
Επομένως, $y_{ομ}(t)=e^0(c_1\cos t+c_2\sin t)=c_1\cos t+c_2\sin t$ με $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Έχουμε: $y(0)=1$ άρα: $c_1\cos 0+\cancel{c_2\sin 0}=1$
$\Leftrightarrow \boxed{c_1=1}$

και $\left.\begin{array}{l} y'_{ομ}(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ y'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -c_1 \cdot \cancel{\sin 0}^{0} + c_2 \cdot \cancel{\cos 0}^{1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{c_2 = 0}$

Άρα, τελικά: $y_{ομ}(t) = \cos t$.

* $W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$

* Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y'' - 2y - y' = e^{-t}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς: $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$ με ρίζες $r_1 = -1$ και $r_2 = 2$.

Η ομογενής έχει γενική λύση: $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{2t}$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Επίσης: $W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix}$

$= 2e^{t} + e^{t} = 3e^{t} \neq 0$ και y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες

Μια ειδική λύση της μη-ομογενούς:

$y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$

$y_p(t) = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{2t}$, οπότε θα έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{2t} = 0 \\ c_1'(t)(-e^{-t}) + c_2'(t)(2e^{2t}) = e^{-t} \end{cases}$

Λύνοντας ως προς $c_1'(t)$ και $c_2'(t)$ θα έχουμε:

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t} \\ e^{t} & 2e^{2t} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{-e^{t}}{3e^{t}} = -\frac{1}{3} \text{ και}$$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{e^{-2t}}{3e^{t}} = \frac{1}{3} e^{-3t}$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως t:

$$c_1(t) = \int_0^t -\frac{1}{3}\, ds = -\frac{1}{3}[s]_0^t = -\frac{1}{3} t$$

$$c_2(t) = \int_0^t +\frac{1}{3} e^{-3s}\, ds = \int_0^t \frac{1}{3}(-3) e^{-3s} \left(-\frac{1}{3}\right) ds$$

$$= -\frac{1}{9} \int_0^t -3e^{-3s}\, ds = -\frac{1}{9}\left[e^{-3s}\right]_0^t = -\frac{1}{9}\left(e^{-3t} - e^{0}\right)$$

$$= -\frac{1}{9}\left(e^{-3t}-1\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t}$$ και έχω τότε:

$$\psi_p(t) = -\frac{1}{3}te^{-t} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t}\right)e^{2t}$$

$$\psi_p(t) = -\frac{1}{3}te^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t} - \frac{1}{9}e^{-t}$$ και η γενική λύση:

$$\psi(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t} - \frac{1}{9}e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

* Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

(1) $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 6t^2$, $t>0$, αν είναι γνωστό ότι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς $L(y)=0$ είναι η $y_1(t)=t^2$

(1): $p(t) = -\frac{2}{t}$, $q(t) = \frac{2}{t^2}$, $f(t) = 6t^2$. Άρα:

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}dt = t^2\int \frac{e^{-\int -\frac{2}{t}dt}}{t^4}dt$$

$$= t^2\int \frac{e^{\int \frac{2}{t}dt}}{t^4}dt = t^2\int \frac{e^{2\ln t}}{t^4}dt = t^2\int \frac{e^{\ln t^2}}{t^4}dt$$

$$= t^2\int \frac{t^2}{t^4}dt = t^2\int \frac{1}{t^2}dt = t^2\left[-\frac{1}{t}\right] = -t$$

Άρα, $y_2(t) = -t$

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας: $W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & -t \\ 2t & -1 \end{vmatrix}$
$= -t^2 + 2t^2 = t^2 > 0$.

Άρα, y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς και γενική λύση: $y_{ομ}(t) = c_1t^2 + c_2(-t)$
$= c_1 \cdot t^2 - c_1 \cdot t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Έστω $y_p(t)$ μια ειδική λύση της μη-ομογενούς; τότε
$\psi_p(t) = c_1(t)\,t^2 - c_2(t)\cdot t$, οπότε έχω το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1'(t)t^2 - c_2'(t)t = 0 \\ c_1'(t)\,2t - c_2'(t)\cdot 1 = 6t^2 \end{cases}$$

Λύνοντας ως προς $c_1'(t)$ και $c_2'(t)$ θα έχουμε:

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -t \\ 6t^2 & -1 \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{6t^3}{t^2} = 6t$$ και

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 6t^2 \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{6t^4}{t^2} = 6t^2$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως t:

$$c_1(t) = \int_0^t 6s\, ds = \int_0^t (3s^2)'\, ds = [3s^2]_0^t = 3t^2$$

$$c_2(t) = \int_0^t 6s^2 ds = \int_0^t 2 \cdot 3s^2 ds = 2[s^3]_0^t = 2t^3$$

Άρα, $\varphi_p(t) = 3t^2 \cdot t^2 - 2t^3 \cdot t = 3t^4 - 2t^4 = t^4$ και τελικά γενική λύση: $\varphi(t) = t^4 + c_1 \cdot t^2 - c_2 \cdot t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

* Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y'' - \frac{2t}{t^2+1} y' + \frac{2}{t^2+1} y = 0$ $t>0$, αφού βρεθεί πρώτα μια λύση της $\varphi_1(t)$ με το μάτι.

Μια λύση της: $\varphi_1(t) = t$, οπότε με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης: $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)\, dt}}{\varphi_1^2(t)} dt =$

$$t \int \frac{e^{-\int \frac{-2t}{t^2+1} dt}}{t^2} dt = t \int \frac{e^{\int \frac{2t}{t^2+1} dt}}{t^2} dt =$$

$$t \int \frac{e^{\ln(t^2+1)}}{t^2} dt = t \int \frac{t^2+1}{t^2} dt =$$

$$t \int \frac{t^2}{t^2} dt + t \int \frac{1}{t^2} dt = t[t] + t\left[-\frac{1}{t}\right] =$$

$t^2 - 1$

Ακόμη: $W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t^2-1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 + 1$

$= t^2 + 1 \neq 0$, άρα $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και γενική λύση:

$y(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) = c_1 \cdot t + c_2(t^2 - 1)$

με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

* Να λύθει η διαφορική εξίσωση: $y''-4y'+4y=0$, αν είναι γνωστό ότι η $\phi_1(t)=e^{2t}$ είναι λύση της.
Για να βρω την άλλη λύση της, χρησιμοποιώ τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης: $\varphi_2(t)=\phi_1(t)\displaystyle\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)}dt=$

$$=e^{2t}\int\frac{e^{-\int -4dt}}{e^{4t}}dt=e^{2t}\int\frac{e^{\int 4dt}}{e^{4t}}dt=$$

$$=e^{2t}\int\frac{\cancel{e^{4t}}}{\cancel{e^{4t}}}dt=e^{2t}\int 1\,dt=t\cdot e^{2t}$$

Ακόμη: $W(\varphi_1,\varphi_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{2t} & t\cdot e^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t}\end{vmatrix}$

$=e^{4t}+\cancel{2te^{4t}}-\cancel{2e^{4t}t}=e^{4t}\neq 0$ και οι φ_1,φ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$, με γενική λύση: $y_{o\mu}(t)=c_1\cdot e^{2t}+c_2\cdot t\cdot e^{2t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

* Να λυθεί η: $t^2y''-3ty'+4y=t^2, t>0$.
Διαιρώ με t^2: $y''-\dfrac{3}{t^2}ty'+\dfrac{4}{t^2}y=\dfrac{t^2}{t^2}\iff$

$y''-\dfrac{3}{t}y'+\dfrac{4y}{t^2}=1$ και έχουμε: $p(t)=-\dfrac{3}{t}$
$q(t)=\dfrac{4}{t^2}$, $f(t)=1$

Μια λύση της ομογενούς $L(y)=0$ είναι η $\varphi_1(t)=t^2$
Με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης βρίσκω την $\varphi_2(t)$:

$$\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)}dt=t^2\int\frac{e^{-\int-\frac{3}{t}dt}}{t^4}dt$$

$$=t^2\int\frac{e^{\int\frac{3}{t}dt}}{t^4}dt=t^2\int\frac{e^{3\ln t}}{t^4}dt=t^2\int\frac{e^{\ln t^3}}{t^4}dt$$

$=t^2\displaystyle\int\frac{t^3}{t^4}dt=t^2\int\frac{1}{t}dt=t^2\cdot\ln t$. Επιπλέον:

$$W(\varphi_1,\varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 \cdot \ln t \\ 2t & 2t\ln t + t \end{vmatrix} =$$

$\cancel{2t^3 \ln t} + t^3 - \cancel{2t^3 \cdot \ln t} = t^3 \neq 0$ και επομένως οι $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ γραμμικά ανεξάρτητες.

Η γενική λύση της ομογενούς: $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot t^2 + c_2 \cdot t^2 \cdot \ln t$ $t > 0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Έστω, τώρα, μια ειδική λύση της μη-ομογενούς: $\psi_p(t) = c_1(t) \cdot t^2 + c_2(t)\, t^2 \cdot \ln t$, έχω τότε το σύστημα: $\begin{cases} c_1'(t)\, t^2 + c_2'(t) \cdot t^2 \cdot \ln t = 0 \\ c_1'(t)\, 2t + c_2'(t)\,(2t\ln t + t) = 1 \end{cases}$. Λύνοντας ως προς c_1', c_2':

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^2 \cdot \ln t \\ 1 & 2t\ln t + t \end{vmatrix}}{t^3} = \frac{-t^2 \cdot \ln t}{t^3} = -\frac{1}{t} \cdot \ln t$$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 1 \end{vmatrix}}{t^3} = \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t}.$$

Ολοκληρώνοντας:

$$c_1(t) = \int -\frac{1}{t} \cdot \ln t \, dt = -\int 2\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{t} \ln t \, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int 2 \cdot \frac{1}{t} \ln t \, dt = \frac{-1}{2} (\ln t)^2$$

$$c_2(t) = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln t$$

Άρα: $\psi_p(t) = -\frac{1}{2} (\ln t)^2 \cdot t^2 + \ln t \cdot t^2 \cdot \ln t$

$$\psi_p(t) = -\frac{1}{2} t^2 \cdot \ln^2 t + t^2 \cdot \ln^2 t = t^2 \cdot \ln^2 t \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\psi_p(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot \ln^2 t$$

Τελικά: $y(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot \ln^2 t + c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές

* Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2+1}$$

(1) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 2r + 1 = 0$ με $\Delta = 0$ και διπλή ρίζα: $r_1 = r_2 = r = 1$. Επομένως, οι λύσεις της ομογενούς $L(y) = 0$ θα είναι $y_1(t) = e^t$ και $y_2(t) = t \cdot e^t$ με γενική λύση: $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^t \cdot t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας: $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^t t \\ e^t & e^t(t+1) \end{vmatrix}$
$= \cancel{e^{2t} \cdot t} + e^{2t} - \cancel{e^{2t} \cdot t} = e^{2t} \neq 0$

Για να βρω μια ειδική λύση της μη ομογενούς :
$y'' - 2y' + y = e^t / t^2+1$, θα εφαρμόσω μέθοδο Lagrange

Αναζητώ λύση (ειδική) της μη-ομογενούς:
$\psi_p(t) = c_1(t) e^t + c_2(t) t e^t$, οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1'(t) e^t + c_2'(t) t e^t = 0 \\ c_1'(t) e^t + c_2'(t)(e^t t + e^t) = e^t / t^2+1 \end{cases}$$

Λύνοντας ως προς

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t e^t \\ e^t/t^2+1 & e^t t + e^t \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} = \frac{\frac{-t \cdot e^{2t}}{t^2+1}}{\frac{e^{2t}}{1}} = \frac{-t}{t^2+1}$$

και

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & e^t/t^2+1 \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} = \frac{\frac{e^{2t}}{t^2+1}}{\frac{e^{2t}}{1}} = \frac{1}{t^2+1}$$

Ολοκληρώνοντας: $c_1(t) = \int \frac{-t}{t^2+1} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{+2t}{t^2+1} dt$
$= -\frac{1}{2} \ln(t^2+1)$

$$c_2(t) = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t$$

Επομένως: $\psi(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t + \arctan(t)\, t \cdot e^t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1)$, με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές.

* 4.39/206 Βιβλίο

Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων

ⓐ $t^2y''+5ty'-5y=0$

Υποθέτουμε $t>0$. Θέτοντας $y=t^r$, έχουμε:

$$L(t^r)=t^2r(r-1)t^{r-2}+5trt^{r-1}-5t^r=$$
$$=(r^2-r)t^r+5rt^r-5t^r$$
$$=(r^2-r+5r-5)t^r=(r^2+4r-5)t^r \text{ με}$$

$F(r)=r^2+4r-5.$

$\Delta=16+20=36$

$$r_{1,2}=\frac{-4\pm6}{2} \begin{cases} r_1=-5 \\ r_2=1 \end{cases}$$

Άρα, στις παραπάνω ρίζες αντιστοιχούν οι ακόλουθες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης ①: $y_1(t)=t^{-5}$ και $y_2(t)=t$, οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες αφού $r_1\neq r_2$. Άρα, γενική λύση: $y(t)=c_1t^{-5}+c_2\cdot t$ με c_1, c_2 σταθερές

ⓑ $2t^2y''+3ty'-y=0$

Θεωρώ $t>0$ και θέτω $\underline{y=t^r}$, οπότε έχω:

$$L(t^r)=2t^2r(r-1)\underline{t^{r-2}}+3trt^{r-1}-t^r$$
$$=2t^r(r^2-r)+3rt^r-t^r$$
$$=t^r(2r^2-2r+3r-1)$$
$$=t^r(2r^2+r-1) \text{ με } F(r)=2r^2+r-1$$

$\Delta=1+8=9$

$$r_{1,2}=\frac{-1\pm3}{4} \begin{cases} r_1=1/2 \\ r_2=-1 \end{cases}$$

Άρα, στις ρίζες αυτές αντιστοιχούν οι $y_1(t)=t^{-1}$ και $y_2(t)=t^{1/2}$, λύσεις της διαφορικής εξίσωσης οι οποίες είναι και γραμμικά ανεξάρτητες, αφού $r_1\neq r_2$. Άρα, η γενική λύση είναι:

$$y(t)=c_1\cdot t^{-1}+c_2t^{1/2}, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

(8) $t^2y'' + ty' + y = 0$

Θεωρώ $t>0$ και θέτω $y = t^r$, οπότε έχουμε:

$$L(t^r) = t^2 r(r-1)t^{r-2} + t r t^{r-1} + t^r$$

$$= (r^2-r)t^r + r t^r + t^r = t^r(r^2 \cancel{-r} \cancel{+r} + 1) = t^r(r^2+1)$$

με $F(r) = r^2+1$, οπότε για $F(r)=0$ έχω: $r_{1,2} = \pm i$

και η μιγαδική συνάρτηση $\varphi(t) = t^{i} =$

$$= t^0 \underline{t^i = 1} \cdot t^i = (e^{\ln t})^i = e^{i \cdot \ln t} = \cos(\ln t) + i\sin(\ln t)$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης. Επειδή, οι συναρ-τήσεις: $y_1(t) = Re[\varphi(t)] = \cos(\ln t)$

και $y_2(t) = Im[\varphi(t)] = \sin(\ln t)$ είναι δύο πραγματικές γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, η γενική λύση είναι: $y(t) = c_1 \cdot \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t)$, c_1, c_2 σταθερές

(5) $(t-2)^2y'' + 5(t-2)y' + 4y = 0$. Έστω $t>2$. Διαιρώ με $(t-2)^2$

$$\Leftrightarrow y'' + \frac{5}{(t-2)}y' + \frac{4}{(t-2)^2}y = 0$$

με $p(t) = \dfrac{5}{(t-2)}$ και $q(t) = \dfrac{4}{(t-2)^2}$

Μια προφανής λύση της είναι η $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{(t-2)^2}$ οπότε με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης βρίσκω τη δεύτερη λύση $\varphi_2(t)$.

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)}dt =$$

$$\frac{1}{(t-2)^2}\int \frac{e^{-\int \frac{5}{t-2}dt}}{\frac{1}{(t-2)^4}}dt = \frac{1}{(t-2)^2}\int \frac{e^{-5\ln(t-2)}}{\frac{1}{(t-2)^4}}dt$$

$$= \frac{1}{(t-2)^2}\int \frac{e^{\ln(t-2)^{-5}}}{\frac{1}{(t-2)^4}}dt = \frac{1}{(t-2)^2}\int \frac{\frac{1}{(t-2)^5}}{\frac{1}{(t-2)^4}}dt$$

$$= \frac{1}{(t-2)^2}\int \frac{\cancel{(t-2)^4}}{(t-2)^{\cancel{5}}}dt = \frac{1}{(t-2)^2}\int \frac{1}{(t-2)}dt = \frac{1}{(t-2)^2} \cdot \ln(t-2)$$

$$W(\varphi_1,\varphi_2)(t)=\begin{vmatrix}\frac{1}{(t-2)^2} & \frac{1}{(t-2)^2}\ln(t-2)\\ \frac{-2}{(t-2)^3} & -\frac{2}{(t-2)^3}\ln(t-2)+\frac{1}{(t-2)^3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(t-2)^5}-\cancel{\frac{2}{(t-2)^5}\ln(t-2)}+\cancel{\frac{2}{(t-2)^5}\ln(t-2)}$$

$=\frac{1}{(t-2)^5}\neq 0$ και οι $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

Άρα, η γενική λύση: $\psi(t)=c_1\frac{1}{(t-2)^2}+c_2\frac{\ln(t-2)}{(t-2)^2}$

με c_1, c_2 σταθερές

* 4.40/ 206 Βιβλίο

Να λυθεί το ακόλουθο ΠΑΤ:

$$\begin{cases} t^2y''-3ty'+4y=0 & ① \text{ στο διάστημα } (0,+\infty)\\ y(1)=1,\ y'(1)=0\end{cases}$$

Θέτω $y=t^r$ οπότε η ①: $t^2r(r-1)t^{r-2}-3trt^{r-1}+4t^r$

$=L(t^r)\Rightarrow L(t^r)=(r^2-r)t^r-3rt^r+4t^r$

$=(r^2-r-3r+4)t^r$

$=(r^2-4r+4)t^r$

$=(r-2)^2t^r$ με $F(r)=(r-2)^2$

που έχει διπλή ρίζα $r_1=r_2=2$. Επομένως, οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχούν στη διπλή ρίζα: $y_1(t)=t^2$ και $y_2(t)=t^2\cdot\ln t$

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix}t^2 & t^2\cdot\ln t\\ 2t & 2t\cdot\ln t+t\end{vmatrix}=$$

$=\cancel{2t^3\ln t}+t^3-\cancel{2t^3\ln t}=t^3\neq 0$, επομένως $y_1(t), y_2(t)$ γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση είναι:

$\psi(t)=c_1\cdot t^2+c_2\cdot t^2\cdot\ln t$

Έχω όμως: $c_1\cdot 1+c_2\cdot 1\cdot\overset{0}{\cancel{\ln 1}}=1\Leftrightarrow \boxed{c_1=1}$

και: $\psi(t)=t^2+c_2\cdot t^2\cdot\ln t$

$\psi'(t)=2t+2tc_2\ln t+t\cdot c_2$

άρα: $2+2c_2\cdot\overset{0}{\cancel{\ln 1}}+1\cdot c_2=0\Leftrightarrow \boxed{c_2=-2}$

Άρα, $\varphi(t) = t^2 - 2t^2 \cdot \ln t = t^2(1 - 2\ln t)$ στο $(0, +\infty)$

* 4.27/ 205 Βιβλίο

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$, η οποία ισοδύναμα

είναι: $x^2 \cdot y''(x) - 2x\,y'(x) + 2y = 0 \Leftrightarrow$

$L(y) = x^2 \cdot y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Θεωρώ $x>0$ και θέτω: $y = x^r$, οπότε η ① γίνεται:

$L(x^r) = x^2 r(r-1)x^{r-2} - 2xrx^{r-1} + 2x^r$

$= (r^2 - r)x^r - 2rx^r + 2x^r = x^r[r^2 - r - 2r + 2]$

$= x^r[r^2 - 3r + 2]$ με $F(r) = r^2 - 3r + 2$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

και $r_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 1$

Επομένως, οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι $y_1(x) = x^2$ και $y_2(x) = x$ και επειδή $r_1 \neq r_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα, η γενική λύση είναι:

$\varphi(x) = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x$ με c_1, c_2 σταθερές

* Να λυθεί το ΠΑΤ: $\left.\begin{array}{l} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0 \end{array}\right\}$

Η ομογενής εξίσωση είναι: $y''' + y'' + y' + y = 0$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $p(r) = r^3 + r^2 + r + 1$. Για $p(r) = 0$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 1 & \rho = -1 \\ \downarrow & -1 & 0 & -1 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

οπότε: $p(r) = (r+1)(r^2+1) = 0$ και έχει ρίζες $r_1 = -1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, οι οποίες θα αντιστοιχούν στις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης: $\varphi_1(t) = e^{-t}$, $\varphi_2(t) = \cos t$ και $\varphi_3(t) = \sin t$

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & \cos t & \sin t \\ -e^{-t} & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} =$$

$$e^{-t}\begin{vmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ -1 & -\sin t & \cos t \\ 1 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = e^{-t}\begin{vmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & \cos t - \sin t & \cos t+\sin t \\ 0 & -2\cos t & -2\sin t \end{vmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{vmatrix} \cos t-\sin t & \cos t+\sin t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{vmatrix}$$

$$= e^{-t}\left(-2\sin t\cos t + 2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\cos t\sin t\right)$$

$= e^{-t}\left(2(\sin^2 t+\cos^2 t)\right) = \dfrac{2}{e^t} > 0$. και επομένως $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ γραμμικά ανεξάρτητες

Αναζητώ τώρα μια ειδική λύση της μη ομογενούς $\psi_p(t) = U_1(t)\varphi_1(t) + U_2(t)\varphi_2(t) + U_3(t)\varphi_3(t)$.

οπότε πρέπει:

$$\begin{cases} U_1'(t)e^{-t} + U_2'(t)\cos t + U_3'(t)\sin t = 0 \\ -U_1'(t)e^{-t} + U_2'(t)(-\sin t) + U_3'(t)\cos t = 0 \\ U_1'(t)e^{-t} + U_2'(t)(-\cos t) + U_3'(t)(-\sin t) = 1 \end{cases}$$

οπότε:

- $U_1'(t) = \dfrac{1}{2}e^{t}\begin{vmatrix} 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 1 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$

$$= \frac{e^t}{2}\,1\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = e^t/2$$

- $U_2'(t) = \dfrac{e^t}{2}\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 & \sin t \\ -e^{-t} & 0 & \cos t \\ e^{-t} & 1 & -\sin t \end{vmatrix} = \dfrac{e^t}{2}(-1)\begin{vmatrix} e^{-t} & \sin t \\ -e^{-t} & \cos t \end{vmatrix}$

$$= -\frac{e^t}{2}\left(e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t\right) = -\frac{e^t\cdot e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$$

- $U_3'(t) = \dfrac{e^t}{2}\begin{vmatrix} e^{-t} & \cos t & 0 \\ -e^{-t} & -\sin t & 0 \\ e^{-t} & -\cos t & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{e^t}{2}\begin{vmatrix} e^{-t} & \cos t \\ -e^{-t} & -\sin t \end{vmatrix}$

$$= \frac{e^t}{2}\left(-\sin t(e^{-t}) + e^{-t}\cos t\right) = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$$

Με ολοκλήρωση: $U_1(t) = \frac{e^t}{2}$

$U_2(t) = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$

$U_3(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$

$\psi_p(t) = \frac{e^t}{2} e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)\cos t + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\sin t$

$\psi_p(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos^2 t - \cancel{\frac{1}{2}\cos t \cdot \sin t} + \cancel{\frac{1}{2}\cos t \sin t}$

$+ \frac{1}{2}\sin^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Άρα, γενική λύση: $\psi(t) = 1 + c_1 e^{-t} + c_2 \cdot \cos t + c_3 \sin t$
με c_1, c_2, c_3 σταθερές.

$\cdot\ 1 + c_1 + c_2 \cdot \cos 0 + c_3 \cancel{\sin 0} = 0 \Leftrightarrow \underline{c_1 + c_2 = -1}$

$\psi'(t) = -c_1 e^{-t} - c_2 \sin t + c_3 \cos t$, άρα

$-c_1 - c_2 \cancel{\sin 0} + c_3 \cos 0 = 1 \Leftrightarrow \underline{c_3 - c_1 = 1}$

$\psi''(t) = e^{-t} \cdot c_1 - c_2 \cos t - c_3 \sin t$, άρα

$\underline{c_1 - c_2 = 0}$.

$c_1 = c_2$, άρα $c_2 = -1/2$ και $c_1 = -1/2$

$c_3 = 1 + c_1 = 1 - 1/2 = 1/2$

Επομένως, $\psi(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$

* $y''' - 4y'' - y' + 4y = 3e^{-t}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς:
$r^3 - 4r^2 - r + 4 = r^2(r-4) - (r-4) = (r-4)(r^2-1)$
με ρίζες $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = 4$ και η γενική της λύση
$\psi_{ομ}(t) = c_1 e^t + c_2 \cdot e^{-t} + c_3 \cdot e^{4t}$

Το δεξί μέλος $3e^{-t}$ είναι λύση της ομογενούς οπότε αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_p(t) = Ate^{-t}$
Παραγωγίζω και έχω: $y_p'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$,

$y_p''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$

$y_p'''(t) = 2Ae^{-t} + Ae^{-t} - Ate^{-t}$

Με αντικατάσταση στην αρχική παίρνουμε:

$2Ae^{-t} + \cancel{Ae^{-t}} - \cancel{Ate^{-t}} + 8Ae^{-t} - 4\cancel{Ate^{-t}} - \cancel{Ae^{-t}} + \cancel{Ate^{-t}} + 4\cancel{Ate^{-t}} = 3e^{-t} \Leftrightarrow 10Ae^{-t} = 3e^{-t}$

$\Leftrightarrow \boxed{A = \frac{3}{10}}$

Άρα: $y_p(t) = \frac{3}{10} te^{-t}$ και γενική λύση:

$\psi_r(t) = \frac{3}{10} te^{-t} + c_1 \cdot e^{t} + c_2 \cdot e^{-t} + c_3 \cdot e^{4t}$ με

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ σταθερές

* $y''' + y' = 3\cos t$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι:

$r^3 + r = 0 \Leftrightarrow r(r^2+1) = 0$ με $r = 0$ και $r = \pm i$

Επομένως, $y_1(t) = e^0 = 1$, $y_2(t) = \cos t$, $y_3(t) = \sin t$

και γενική λύση $\psi(t) = c_1 + c_2 \cdot \cos t + c_3 \cdot \sin t$

με $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ σταθερές.

Η $3\cos t$ στο δεύτερο μέλος είναι λύση της ομο-γενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής:

$y_p(t) = t(A\sin t + B\cos t)$

$y_p'(t) = A\sin t + At\cos t + B\cos t - Bt\sin t$

$y_p''(t) = A\cos t - At\sin t + A\cos t - B\sin t - Bt\cos t - B\sin t$

$= 2A\cos t - 2B\sin t - At\sin t - Bt\cos t$

$y_p'''(t) = -2A\sin t - 2B\cos t - A\sin t - At\cos t - B\cos t + Bt\sin t$

$= -3A\sin t - 3B\cos t - At\cos t + Bt\sin t$

Με αντικατάσταση:

$-3A\sin t - 3B\cos t - A\cancel{t\cos t} + B\cancel{t\sin t} + A\sin t + A\cancel{t\cos t}$

$+ B\cos t - B\cancel{t\sin t} = 3\cos t \Leftrightarrow -2A\sin t - 2B\cos t =$

$= 3\cos t \Leftrightarrow \begin{cases} -2B\cos t = 3\cos t \\ A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -3/2 \\ A = 0 \end{cases}$

Άρα: $y_p(t) = -\frac{3}{2} t\cos t$ και γενική λύση:

$\psi_\Gamma(t) = -\frac{3}{2} t\cos t + C_1 + C_2 \cdot \cos t + C_3 \sin t$, C_1, C_2, C_3 σταθερές

* $y'' + 2y' = 1 + t^2 + e^{-2t}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς εξίσωσης:

$r^2 + 2r = 0 \Leftrightarrow r(r+2) = 0$ με $r_1 = 0$ ή $r_2 = -2$ και η γενική λύση: $\psi(t) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^{-2t}$

$\psi(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές

(A) $y'' + 2y' = e^{-2t}$

Η e^{-2t} στο δεύτερο μέλος είναι λύση της ομογενούς οπότε αναζητώ ειδική λύση $y_p(t) = Ate^{-2t}$

Παραγωγίζω: $y_{p_1}'(t) = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}$

$y_{p_1}''(t) = -2Ae^{-2t} - 2Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}$

$y_{p_1}''(t) = -4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}$

Με αντικατάσταση: $-4Ae^{-2t} + \cancel{4Ate^{-2t}} + 2Ae^{-2t} - \cancel{4Ate^{-2t}} = e^{-2t} \Leftrightarrow -2Ae^{-2t} = e^{-2t} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$.

άρα: $y_p(t) = -\frac{1}{2} t e^{-2t}$ (1)

(B) $y'' + 2y' = t^2 + 1$

4.32/205 (J)

Επειδή το 1 είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς αναζητώ λύση: $y_{p_2}(t) = t(B_0 + B_1 t + B_2 t^2)$

Παραγωγίζω: $y_{p_2}'(t) = B_0 + 2B_1 t + 3B_2 t^2$

$y_{p_2}''(t) = 2B_1 + 6B_2 t$

Αντικαθιστώ: $2B_1 + 6B_2 t + 2B_0 + 4B_1 t + 6B_2 t^2 = t^2 + 1$

$6B_2 t^2 + (6B_2 + 4B_1)t + 2B_1 + 2B_0 = t^2 + 1$

$B_2 = 1/6$

$6B_2 + 4B_1 = 0 \Rightarrow 1 + 4B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -1/4$

$2B_1 + 2B_0 = 1 \Rightarrow B_1 + B_0 = 1/2 \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow B_0 = \frac{3}{4}$

Άρα: $y_{p_2}(t) = \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{3}{4} t$

Από την αρχή της υπέρθεσης: $\psi_\Gamma(t) = \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{3}{4} t - \frac{1}{2} t e^{-2t} + C_1 + C_2 e^{-2t}$

σταθερές $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

4.32/205 * $y'' + y' + y = 1 + t + t^2$

(δ) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς

$r^2 + r + 1 = 0$ με $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ και γενική λύση

της ομογενούς:

$y(t) = e^{\sigma t}(c_1 \cos wt + c_2 \sin wt)$

$y(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos \sqrt{3}/2\, t + c_2 \sin \sqrt{3}/2\, t)$

Επομένως, αναζητώ ειδική λύση της μορφής:

$y_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$.

Παραγωγίζω: $y_p'(t) = A_1 + 2A_2 t$

$y_p''(t) = 2A_2$

Αντικαθιστώ: $2A_2 + A_1 + 2A_2 t + A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = 1 + t + t^2$

$(2A_2 + A_1 + A_0) + (2A_2 + A_1)t + A_2 t^2 = 1 + t + t^2$

$A_2 = 1$

$2A_2 + A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = -1$

$2A_2 + A_1 + A_0 = 1 \Rightarrow 2 - 1 + A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = 0.$

Άρα: $y_p(t) = -t + t^2$

Οπότε $y_\Gamma(t) = -t + t^2 + e^{-t/2}(c_1 \cos \sqrt{3}/2\, t + c_2 \sin \sqrt{3}/2\, t)$

c_1, c_2 σταθερές

4.32/205 * $y'' + 3y = t^3 - 1$

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς:

$r^2 + 3 = 0 \Rightarrow r^2 = -3 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}i$

Επομένως, $y(t) = e^{\sigma t}(c_1 \cos wt + c_2 \sin wt)$

$y(t) = e^0(c_1 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t)$

$y(t) = c_1 \cdot \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t$ γενική λύση

της ομογενούς.

Επομένως αναζητώ ειδική λύση της μορφής:

$y_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3$

Παραγωγίζω: $y_p'(t) = A_1 + 2A_2 t + 3A_3 t^2$

$y_p''(t) = 2A_2 + 6A_3 t$

Αντικαθιστώ: $2A_2 + 6A_3 t + 3A_0 + 3A_1 t + 3A_2 t^2 + 3A_3 t^3$

$= t^3 - 1$

$$\Rightarrow (2A_2+3A_0)+(6A_3+3A_1)t+3A_2t^2+3A_3t^3=t^3-1$$

$$\begin{cases} A_3=1/3 \\ 3A_2=0 \Rightarrow A_2=0 \\ 6A_3+3A_1=0 \Rightarrow 2+3A_1=0 \Rightarrow A_1=-2/3 \\ 2\cancel{A_2}^{0}+3A_0=-1 \Rightarrow A_0=-1/3 \end{cases}$$

άρα $y_p(t)=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}t^3$ και γενική λύση:

$$\psi_\Gamma(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}+c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t \quad , c_1, c_2 \text{ σταθ.}$$

4.32/ 205 0

$$* \; y''+2y'-3y=1+te^t$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι:
$r^2+2r-3=0$ με ρίζες $r_1=1$, $r_2=-3$ και γενική λύση
$\psi(t)=c_1\cdot e^t+c_2\cdot e^{-3t}$, c_1, c_2 σταθερές της αντίστοιχης ομογενούς

Το 1 δεν είναι λύση της ομογενούς, όμως το e^t είναι, επομένως αναζητώ ειδική λύση της μορφής:

$$y_p(t)=te^t(A_0+A_1t)+B$$

$$y_p'(t)=A_0e^t+A_0te^t+A_1t^2e^t+2A_1te^t$$

$$y_p''(t)=2A_0e^t+A_0te^t+2A_1te^t+A_1t^2e^t+2A_1e^t+2A_1te^t$$

$$=2A_0e^t+A_0te^t+4A_1te^t+2A_1e^t+A_1t^2e^t$$

Αντικαθιστώ: $2A_0e^t+\cancel{A_0te^t}+4A_1te^t+2A_1e^t+\cancel{A_1t^2e^t}$
$+2A_0e^t+\cancel{2A_0te^t}+\cancel{2A_1t^2e^t}+4A_1te^t-\cancel{3te^tA_0}$
$-\cancel{3A_1e^tt^2}-3B=te^t+1$

$$2A_1e^t+4A_0e^t+8A_1te^t-3B=te^t+1$$

$$-3B=1 \Leftrightarrow B=-1/3$$

$$8A_1=1 \Leftrightarrow A_1=1/8$$

$$(2A_1+4A_0)e^t=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+4A_0=0 \Rightarrow A_0=-\frac{1}{16}$$

Άρα: $y_p(t)=-\frac{1}{16}t\cdot e^t+\frac{1}{8}t^2e^t-\frac{1}{3}$ και

$$\psi_\Gamma(t)=-\frac{1}{16}te^t+\frac{1}{8}t^2e^t-\frac{1}{3}+c_1\cdot e^t+c_2e^{-3t}$$

με c_1, c_2 σταθερές

4.32/205* $y'' - y = t^2 e^t$

(γ) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι η:
$r^2 - 1 = 0$ με $r_{1,2} = \pm 1$ και γενική λύση της:
$y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 e^{-t}$, c_1, c_2 σταθερές
Επειδή η e^t είναι λύση της ομογενούς, αναζητώ
$y_p(t) = te^t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)$ ειδική λύση
$y_p'(t) = A_0 e^t t + A_0 e^t + A_1 t^2 e^t + 2A_1 te^t + A_2 t^3 e^t + 3A_2 t^2 e^t$
$y_p''(t) = 2A_0 e^t + A_0 e^t t + \underline{2A_1 te^t} + A_1 t^2 e^t + 2A_1 e^t + \underline{2A_1 te^t} + A_2 t^3 e^t + 3A_2 t^2 e^t + 3A_2 t^2 e^t + 6A_2 te^t$
$= 2A_0 e^t + A_0 e^t t + 4A_1 e^t t + 2A_1 e^t + 6A_2 t^2 e^t + 6A_2 te^t + A_2 t^3 e^t$

$2A_0 e^t + \cancel{A_0 te^t} + 4A_1 e^t t + 2A_1 e^t + 6A_2 t^2 e^t + 6A_2 te^t + \cancel{A_2 t^3 e^t} - \cancel{te^t A_0} - t^2 e^t A_1 - \cancel{t^3 e^t A_2} = t^2 \cdot e^t$

$(2A_0 + 2A_1)e^t + \underline{(4A_1 + 6A_2)} e^t t + (6A_2 - A_1) t^2 e^t = t^2 e^t$
$6A_2 - A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 6A_2 - 1 \Rightarrow A_1 = 3/4 - 1 = -1/4$
$4A_1 + 6A_2 = 0 \Rightarrow 24A_2 - 4 + 6A_2 = 0 \Rightarrow 32A_2 = 4 \Rightarrow A_2 = 1/8$
$2A_0 + 2A_1 = 0 \Rightarrow 2A_0 - \frac{2}{4} = 0 \Rightarrow 2A_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow A_0 = 1/4$

Άρα: $y_p(t) = \frac{1}{4} te^t - \frac{1}{4} t^2 e^t + \frac{1}{8} t^3 e^t$

Άρα τελικά: $y_Γ(t) = \frac{1}{4} te^t + \frac{1}{8} t^3 e^t - \frac{1}{4} t^2 e^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ με c_1, c_2 σταθερές

4.32/205* (στ) $y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t}$
Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι: $r^2 + r - 6 = 0$
με ρίζες $r_1 = 2$ και $r_2 = -3$ και γενική λύση:
$y(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-3t}$, c_1, c_2 σταθερές

(A) $y'' + y' - 6y = \sin t$.

Η sint δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, οπότε αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_1p(t) = A\sin t + B\cos t$

Παραγωγίζω: $y_1p'(t) = A\cos t - B\sin t$

$y_1p''(t) = -A\sin t - B\cos t$

Αντικαθιστώ: $-\underline{A\sin t - B\cos t + A\cos t} - B\sin t - 6A\sin t - 6B\cos t = \sin t \Rightarrow (-7A - B)\sin t + (A - 7B)\cos t = \sin t$

$$\begin{cases} -7A - B = 1 \\ A - 7B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -49B - B = 1 \\ A = 7B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -50B = 1 \\ A = 7B \end{cases} \Rightarrow B = -1/50,\ A = -7/50$$

Άρα: $y_1p(t) = -\frac{7}{50}\sin t - \frac{1}{50}\cos t$

(B) $y'' + y' - 6y = te^{2t}$

Η e^{2t} είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, οπότε αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_2p(t) = te^{2t}(A_0 + A_1 t)$

$y_2p(t) = A_0 te^{2t} + A_1 t^2 e^{2t}$

Παραγωγίζω: $y_2p'(t) = A_0 e^{2t} + 2A_0 te^{2t} + 2A_1 te^{2t} + 2A_1 t^2 e^{2t}$

$y_2p''(t) = 2A_0 e^{2t} + 2A_0 e^{2t} + 4A_0 te^{2t} + 2A_1 e^{2t} + 4A_1 te^{2t} + 4A_1 te^{2t} + 4A_1 t^2 e^{2t} = 4A_0 e^{2t} + 4A_0 te^{2t} + 2A_1 e^{2t} + 8A_1 te^{2t} + 4A_1 t^2 e^{2t}$

Αντικαθιστώ: $4A_0 e^{2t} + \cancel{4A_0 te^{2t}} + 2A_1 e^{2t} + 8A_1 te^{2t} + \cancel{4A_1 t^2 e^{2t}} + A_0 e^{2t} + \cancel{2A_0 te^{2t}} + 2A_1 te^{2t} + \cancel{2A_1 t^2 e^{2t}} - \cancel{6A_0 te^{2t}} - \cancel{6A_1 t^2 e^{2t}} = t\cdot e^{2t}$

$5A_0 e^{2t} + 2A_1 e^{2t} + 10A_1 te^{2t} = t\cdot e^{2t}$

$$\begin{cases} 10A_1 = 1 \\ 5A_0 + 2A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1/10 \\ 5A_0 = -\cancel{2}^{1}/\cancel{10}^{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1/10 \\ A_0 = -1/25 \end{cases}$$

Άρα: $y_2p(t) = -\frac{1}{25}te^{2t} + \frac{1}{10}t^2 e^{2t}$

Από την αρχή της υπέρθεσης: $y_p(t) = y_1p(t) + y_2p(t)$

$y_p(t) = -\frac{1}{25}te^{2t} + \frac{1}{10}t^2e^{2t} - \frac{7}{50}\sin t - \frac{1}{50}\cos t$ και

γενική λύση: $\varphi_r(t) = y_p(t) + c_1\cdot e^{2t} + c_2\cdot e^{-3t}$, c_1, c_2 σταθερές.

* $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^t - t \cdot e^{2t}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς:

$r^4 - 5r^2 + 4 = 0$ με $\rho = 1$

1	0	-5	0	4	1
↓	1	1	-4	-4	
1	1	-4	-4	0	

$(r-1)(r^3 + r^2 - 4r - 4) = 0$

$(r-1)(r^2(r+1) - 4(r+1)) = 0$

$(r-1)(r^2-4)(r+1) = 0$ με ρίζες $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 2, r_4 = -2$

Άρα, η γενική λύση της : $y_{ομ}(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cdot e^{2t} + C_4 \cdot e^{-2t}$ με C_1, C_2, C_3, C_4 σταθερές

(A) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^t$

Η e^t λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση: $y_{1p}(t) = Ate^t$. Παραγωγίζω:

$y_{1p}'(t) = Ae^t + Ate^t$

$y_{1p}''(t) = Ae^t + Ae^t + Ate^t = 2Ae^t + Ate^t$

$y_{1p}'''(t) = 2Ae^t + Ae^t + Ate^t = 3Ae^t + Ate^t$

$y_{1p}^{(4)}(t) = 3Ae^t + Ae^t + Ate^t = 4Ae^t + Ate^t$

Αντικαθιστώ: $\underline{4Ae^t} + \cancel{Ate^t} - \underline{10Ae^t} - 5\cancel{Ate^t} + 4\cancel{Ate^t} = e^t \Rightarrow -6Ae^t = e^t \Rightarrow A = -1/6$

Άρα, $y_{1p}(t) = -\frac{1}{6}te^t$

(B) $y^4 - 5y'' + 4y = t \cdot e^{2t}$

Η te^{2t} δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση: $y_{2p}(t) = te^{2t}(B_0 + B_1 t) = \underline{B_0 te^{2t} + B_1 t^2 e^{2t}}$

$y_{2p}'(t) = \underline{B_0 e^{2t} + 2B_0 te^{2t} + 2B_1 te^{2t} + 2B_1 t^2 e^{2t}}$

$y_{2p}''(t) = \underline{2B_0 e^{2t} + 2B_0 e^{2t} + 4B_0 te^{2t} + 2B_1 e^{2t} +}$
$\underline{4B_1 te^{2t} + 4B_1 te^{2t} + 4B_1 t^2 e^{2t}}$
$= \underline{4B_0 e^{2t} + 4B_0 e^{2t} t + 2B_1 e^{2t} + 8B_1 e^{2t} t}$
$+ \underline{4B_1 t^2 e^{2t}}$

$y_{2p}'''(t) = \underline{8B_0 e^{2t} + 4B_0 e^{2t} + 8B_0 e^{2t} t + 4B_1 e^{2t}}$
$\underline{+ 8B_1 e^{2t} + 16B_1 e^{2t} t + 8B_1 t^2 e^{2t} + 8B_1 te^{2t}}$

$$y_{2p}'''(t) = 12B_0e^{2t} + 8B_0e^{2t}t + 12B_1e^{2t} + 24B_1te^{2t} + 8B_1t^2e^{2t}$$

$$y_2''''(t) = 24B_0e^{2t} + 8B_0e^{2t} + 16B_0e^{2t}t + 24B_1e^{2t} + 24B_1e^{2t} + 48B_1te^{2t} + 16B_1te^{2t} + 16B_1t^2e^{2t}$$

$$= 32B_0e^{2t} + 16te^{2t}B_0 + 48e^{2t}B_1 + 64B_1te^{2t} + 16B_1t^2e^{2t}$$

Άρα: $32B_0e^{2t} + \cancel{16te^{2t}B_0} + 48e^{2t}B_1 + 64te^{2t}B_1 + \cancel{16B_1t^2e^{2t}} - 20B_0e^{2t} - \cancel{20B_0e^{2t}t} - 10B_1e^{2t} - 40B_1te^{2t} - \cancel{20B_1t^2e^{2t}} + \cancel{4B_0te^{2t}} + \cancel{4B_1t^2e^{2t}} = t\cdot e^{2t}$.

$$12B_0e^{2t} + 38B_1e^{2t} + 24B_1te^{2t} = t\cdot e^{2t}$$

$$\begin{cases} 12B_0 + 38B_1 = 0 \\ 24B_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = 1/24 \\ 12B_0 = -38\cdot 1/24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = 1/24 \\ B_0 = -\frac{19}{144} \end{cases}.$$

Άρα: $y_{2p}(t) = \frac{-19}{144}te^{2t} + \frac{1}{24}t^2e^{2t}$

Από την αρχή της υπέρθεσης: $y_p(t) = y_{1p}(t) - y_{2p}(t)$

$$y_p(t) = -\frac{1}{6}te^t + \frac{19}{144}te^{2t} - \frac{1}{24}t^2e^{2t}$$

Επομένως, γενική λύση: $\psi_r(t) = c_1\cdot e^t + c_2\cdot e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t} + \frac{19}{144}te^{2t} - \frac{1}{24}t^2e^{2t} - \frac{1}{6}te^t$

με $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

4.21/204 Βιβλίο

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση
$y'' + 4y = te^t + t\sin 2t$

Για την ομογενή: $y'' + 4y = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4 \Leftrightarrow r^2 = 4i^2$
$\Leftrightarrow r = \pm 2i$. Άρα, $\psi_{r\,ομ}(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(α) $y'' + 4y = te^t$

Η $t \cdot e^t$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα

$y_{1p}(t) = e^t(A_0 + A_1 t)$

$y_{1p}'(t) = e^t A_0 + A_1 e^t + A_1 t e^t$

$y_{1p}''(t) = A_0 e^t + A_1 e^t + A_1 e^t + A_1 t e^t = A_0 e^t + 2A_1 e^t + A_1 t e^t$

Αντικαθιστούμε: $A_0 e^t + 2A_1 e^t + A_1 t e^t + 4A_0 e^t + 4A_1 e^t t = te^t$

$5A_0 e^t + 2A_1 e^t + 5A_1 t e^t = te^t$

$(5A_0 + 2A_1)e^t + 5A_1 t e^t = te^t$

$\begin{cases} 5A_1 = 1 \\ 5A_0 + 2A_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1/5 \\ 5A_0 + 2/5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1/5 \\ A_0 = -\frac{2}{25} \end{cases}$

Άρα $y_{1p}(t) = -\frac{2}{25} e^t + \frac{1}{5} t e^t$

(β) $y'' + 4y = t\sin 2t$

Η $t\sin 2t$ δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{2p}(t) = t\left((B_0 + B_1 t)\sin 2t + (\Gamma_0 + \Gamma_1 t)\cos 2t\right)$

$y_{2p}(t) = B_0 t\sin 2t + B_1 t^2 \sin 2t + \Gamma_0 t\cos 2t + \Gamma_1 t^2 \cos 2t$

$y_{2p}'(t) = B_0 \sin 2t + 2B_0 t\cos 2t + 2B_1 t\sin 2t + 2B_1 t^2 \cos 2t +$
$+ \Gamma_0 \cos 2t - 2\Gamma_0 t\sin 2t + 2\Gamma_1 t\cos 2t - 2\Gamma_1 t^2 \sin 2t$

$y_{2p}''(t) = 2B_0 \cos 2t + 2B_0 \cos 2t - 4B_0 t\sin 2t + 2B_1 \sin 2t + 4B_1 t\cos 2t$
$+ 4B_1 t\cos 2t - 4B_1 t^2 \sin 2t - 2\Gamma_0 \sin 2t - 2\Gamma_0 \sin 2t - 4\Gamma_0 t\cos 2t$
$+ 2\Gamma_1 \cos 2t - 4\Gamma_1 t\sin 2t - 4\Gamma_1 t\sin 2t - 4\Gamma_1 t^2 \cos 2t$
$= 4B_0 \cos 2t - 4B_0 t\sin 2t + 2B_1 \sin 2t + 8B_1 t\cos 2t - 4B_1 t^2 \sin 2t$
$- 4\Gamma_0 \sin 2t - 4\Gamma_0 t\cos 2t + 2\Gamma_1 \cos 2t - 8\Gamma_1 t\sin 2t -$
$4\Gamma_1 t^2 \cos 2t$

Με αντικατάσταση:

$4B_0 \cos 2t - \cancel{4B_0 t\sin 2t} + 2B_1 \sin 2t + 8B_1 t\cos 2t - \cancel{4B_1 t^2 \sin 2t}$
$- 4\Gamma_0 \sin 2t - \cancel{4\Gamma_0 t\cos 2t} + 2\Gamma_1 \cos 2t - 8\Gamma_1 t\sin 2t - \cancel{4\Gamma_1 \cos 2t (t^2)}$
$+ \cancel{4B_0 t\sin 2t} + \cancel{4B_1 t^2 \sin 2t} + \cancel{4\Gamma_0 t\cos 2t} + \cancel{4\Gamma_1 t^2 \cos 2t} = t\sin 2t$

$\Rightarrow 4B_0 \cos 2t + 2B_1 \sin 2t + 8B_1 t\cos 2t - 4\Gamma_0 \sin 2t + 2\Gamma_1 \cos 2t$
$- 8\Gamma_1 t\sin 2t = t\sin 2t \Rightarrow (4B_0 + 2\Gamma_1)\cos 2t + (2B_1 - 4\Gamma_0)\sin 2t$
$+ 8B_1 t\cos 2t - 8\Gamma_1 t\sin 2t = t\sin 2t \Rightarrow$

$$\begin{cases} 4B_0+2\Gamma_1=0 \\ 2B_1-4\Gamma_0=0 \\ 8B_1=0 \\ -8\Gamma_1=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B_1=0 \\ \Gamma_0=0 \\ \Gamma_1=-1/8 \\ B_0=1/16. \end{cases}$$

Άρα: $y_{2p}(t)=\frac{1}{16}t\sin 2t-\frac{1}{8}t^2\cos 2t$

Από την αρχή της υπέρθεσης: $y_p(t)=\frac{-2}{25}e^t+\frac{1}{5}te^t+\frac{1}{16}t\sin 2t$
$-\frac{1}{8}t^2\cos 2t$

Οπότε, η γενική λύση: $\psi_\Gamma(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{1}{5}te^t-\frac{2}{25}e^t$
$+\frac{1}{16}t\sin 2t-\frac{1}{8}t^2\cos 2t$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

4.23/204 Βιβλίο Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$$y''+4y=1+t+\sin t.$$
• Έχουμε για την ομογενή: $\psi(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$
γενική λύση με $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

(A) $y''+4y=1+t$
Το $1+t$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση: $y_{1p}(t)=A_0+A_1t$
$y_{1p}'(t)=A_1$
$y_{1p}''(t)=0.$
Άρα: $4A_0+4A_1t=1+t$
$$\begin{cases} 4A_0=1 \\ 4A_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0=1/4 \\ A_1=1/4. \end{cases}$$
Άρα, $y_{1p}(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t$

(B) $y''+4y=\sin t$
Το $\sin t$ δεν είναι λύση της ομογενούς, οπότε $y_{2p}(t)=B\cos t+$
$+\Gamma\sin t$, $y_{2p}'(t)=-B\sin t+\Gamma\cos t$, $y_{2p}''(t)=-B\cos t-\Gamma\sin t.$
Άρα: $-B\cos t-\Gamma\sin t+4B\cos t+4\Gamma\sin t=\sin t$
$$\begin{cases} 3B=0 \\ 3\Gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ \Gamma=1/3 \end{cases}$$

Άρα: $y_{2p}(t) = 1/3 \sin t$.

Από την αρχή της υπέρθεσης: $y_p(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{3}\sin t$

οπότε γενική λύση: $\psi_\Gamma(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{3}\sin t$

με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4.10/202 Αν ψ_1 και ψ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

① $y'' + 2y' + 5y = f(t)$ όπου f συνεχής, να δειχθεί ότι

$\lim_{t\to+\infty} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0$

Για την ομογενή $\mathcal{L}(y) = 0 \Leftrightarrow y'' + 2y' + 5y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16$

$r_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$

οπότε $y_{ομ}(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$

Αφού $\psi_1(t), \psi_2(t)$ λύσεις της ①:

$\mathcal{L}(\psi_1 - \psi_2) = \mathcal{L}(\psi_1) - \mathcal{L}(\psi_2) = f(t) - f(t) = 0, t \in I$.

δηλαδή η $\psi_1 - \psi_2$ είναι λύση της ομογενούς $\mathcal{L}(y) = 0$. Άρα, αν y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $\mathcal{L}(y) = 0$, τότε υπάρχουν μοναδικές σταθερές c_A, c_B έτσι ώστε:

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) = c_A y_A(t) + c_B \cdot y_B(t)$$

$$\begin{aligned}\psi_1(t) - \psi_2(t) &= c_A e^{(-1+2i)t} + c_B e^{(-1-2i)t} \\ &= c_A e^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t) + c_B e^{-t}(\cos 2t - i \sin 2t) \\ &= e^{-t}[(c_A + c_B)\cos 2t + i(c_A - c_B)\sin 2t] \\ &= e^{-t}[c_\Gamma \cos 2t + c_\Delta \sin 2t] \text{ με } c_\Gamma = c_A + c_B\end{aligned}$$

$\lim_{t\to+\infty} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| = \lim_{t\to+\infty} \left| \frac{1}{e^t} c_\Gamma \cos 2t + \frac{1}{e^t} c_\Delta \sin 2t \right|$ ⊛ $c_\Delta = i(c_A - c_B)$ νέες σταθερές

• $\left| \frac{\cos 2t}{e^t} \right| = \frac{|\cos 2t|}{|e^t|} \leq \frac{1}{e^t} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^t} \leq \frac{\cos 2t}{e^t} \leq \frac{1}{e^t}$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0 = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{e^t}\right) = 0$ Άρα, $\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{e^t} c_\Gamma \cos 2t\right) = 0$

• $\left|\frac{\sin 2t}{e^t}\right| = \frac{|\sin 2t|}{e^t} \leq \frac{1}{e^t} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^t} \leq \frac{\sin 2t}{e^t} \leq \frac{1}{e^t}$

$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^t}\right) = 0$ Άρα, $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^t} C_\Delta \sin 2t\right) = 0$

$\left|\frac{1}{e^t} C_\Gamma \cos 2t\right| + \left|\frac{1}{e^t} C_\Delta \sin 2t\right| \geq \left|\frac{1}{e^t} C_\Gamma \cos 2t + \frac{1}{e^t} C_\Delta \sin 2t\right|$

Άρα, ⊛: $\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{e^t} C_\Gamma \cos 2t + \frac{1}{e^t} C_\Delta \sin 2t\right| = 0.$

<u>Άσκηση:</u> Αν $\psi_1(t)$ και $\psi_2(t)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης ① $y'' + 4y' + 13y = f(t)$, όπου f συνεχής, να δειχθεί ότι $\lim_{t\to+\infty}|\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0.$

Για την ομογενή $L(y) = 0$: $y'' + 4y' + 13y = 0$ με χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 + 4r + 13 = 0$

$\Delta = 16 - 52 = -36$

$r_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$ οπότε η γενική λύση θα

είναι: $y(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Εάν η ① έχει λύσεις ψ_1, ψ_2 τότε: $L(\psi_1 - \psi_2) = L(\psi_1) - L(\psi_2) = f(t) - f(t) = 0$, δηλαδή η $\psi_1 - \psi_2$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Αφού y_1, y_2 λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς, υπάρχουν C_A, C_B σταθερές έτσι ώστε: $\psi_1 - \psi_2 = C_A y_1 + C_B y_2$

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) = C_A e^{(-2+3i)t} + C_B e^{(-2-3i)t}$$
$$= C_A e^{-2t}(\cos 3t + i \sin 3t) + C_B e^{-2t}(\cos 3t - i \sin 3t)$$
$$= e^{-2t}\left[(C_A + C_B)\cos 3t + i(C_A - C_B)\sin 3t\right]$$
$$= e^{-2t}\left[C_\Gamma \cos 3t + C_\Delta \sin 3t\right]$$

με $C_\Gamma = C_A + C_B$, $C_\Delta = i(C_A - C_B)$ νέες σταθερές

$\lim_{t\to+\infty}|\psi_1(t) - \psi_2(t)| =$

$= \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-2t} C_\Gamma \cos 3t + e^{-2t} C_\Delta \sin 3t\right|$ ⊛

• $\left|\frac{\sin 3t}{e^{2t}}\right| = \frac{|\sin 3t|}{e^{2t}} \leq \frac{1}{e^{2t}} \Rightarrow -\frac{1}{e^{2t}} \leq \frac{\sin 3t}{e^{2t}} \leq \frac{1}{e^{2t}}$

$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^{2t}}\right) = 0$ άρα $\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin 3t}{e^{2t}} = 0.$

$$\left|\frac{\cos 3t}{e^{2t}}\right| = \frac{|\cos 3t|}{e^{2t}} \leq \frac{1}{e^{2t}} \Rightarrow -\frac{1}{e^{2t}} \leq \frac{\cos 3t}{e^{2t}} \leq \frac{1}{e^{2t}}$$

Ομοιοτρόπως: $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\cos 3t}{e^{2t}} = 0$

Ισχύει. $\left| c_r e^{-2t}\cos 3t + c_\lambda e^{-2t}\sin 3t \right| \leq c_r\left|e^{-2t}\cos 3t\right| + c_\lambda\left|e^{-2t}\sin 3t\right|$

άρα $\lim\limits_{t\to+\infty} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = 0.$

⊛ Δίνεται η διαφορική εξίσωση $L(y) = y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' = b(t)$

(i) Να λυθεί η εξίσωση για $b(t) = 0$

$L(y) = y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' = 0.$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς

$r^4 + r^3 + r^2 + r = 0 \Leftrightarrow r^3(r+1) + r(r+1) = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r^3+r) = 0$

$(r+1)\,r(r^2+1) = 0 \Leftrightarrow r(r^2+1)(r+1) = 0.$

Άρα, $r=0$, $r=-1$, $r=\pm i$

Άρα, $y(t) = C_1 \cdot e^0 + C_2 e^{-t} + e^0(C_3\cos t + C_4 \sin t)$ με C_1, C_2, C_3, C_4 σταθερές δηλαδή $y(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{-t} + C_3\cos t + C_4 \sin t$

$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

(ii) Να δοθεί η μορφή μιας ειδικής λύσης της $L(y) = b(t)$ για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις $b(t)$

1) $b(t) = t e^t$

$L(y) = y^4 + y^3 + y'' + y' = t \cdot e^t$

Η $t \cdot e^t$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα αναζητώ λύση της μορφής $y_p(t) = e^t(A_0 + A_1 t) = A_0 e^t + A_1 e^t t$

$y_p'(t) = A_0 e^t + A_1 e^t + A_1 e^t t$

$y_p''(t) = A_0 e^t + A_1 e^t + A_1 e^t + A_1 e^t t = A_0 e^t + 2A_1 e^t + A_1 e^t t.$

$y_p'''(t) = A_0 e^t + 2A_1 e^t + A_1 e^t + A_1 e^t t = A_0 e^t + 3A_1 e^t + A_1 e^t t.$

$y_p^{(4)}(t) = A_0 e^t + 3A_1 e^t + A_1 e^t + A_1 e^t t = A_0 e^t + 4A_1 e^t + A_1 e^t t.$

Με αντικατάσταση:

$A_0 e^t + 4A_1 e^t + A_1 e^t t + A_0 e^t + 3A_1 e^t + A_1 e^t t + A_0 e^t + 2A_1 e^t$
$+ A_1 e^t t + A_0 e^t + A_1 e^t + A_1 e^t t = t e^t$

$4A_0e^t + 10A_1e^t + 4A_1e^t t = te^t$

$\begin{cases} 4A_0 + 10A_1 = 0 \\ 4A_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1/4 \\ A_0 = \frac{-10}{4} A_1 = -\frac{10}{4} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}. \end{cases}$

Άρα: $y_p(t) = \frac{-5}{8} e^t + \frac{1}{4} e^t t$

και $y_\Gamma(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t - \frac{5}{8} e^t + \frac{1}{4} e^t t$ με C_1, C_2, C_3, C_4 σταθερές

2) $b(t) = e^{-t}$

Η e^{-t} είναι λύση της ομογενούς άρα αναζητώ λύση της μορφής.

$y_p(t) = Ate^{-t}$

$y_p'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$

$y_p''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$

$y_p'''(t) = +2Ae^{-t} + Ae^{-t} - Ate^{-t} = 3Ae^{-t} - Ate^{-t}$

$y_p^{(4)}(t) = -3Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = -4Ae^{-t} + Ate^{-t}$

Άρα, με αντικατάσταση: $-4Ae^{-t} + \cancel{Ate^{-t}} + 3Ae^{-t} - \cancel{Ate^{-t}} - 2Ae^{-t} + \cancel{Ate^{-t}} + Ae^{-t} - \cancel{Ate^{-t}} = e^{-t} \Leftrightarrow -2Ae^{-t} = e^{-t}$ άρα $A = -1/2$

και $y_p(t) = -\frac{1}{2} te^{-t}$ οπότε η γενική λύση είναι:

$y_\Gamma(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t - 1/2\, te^{-t}, \; C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

3) $b(t) = \cos t$

Η cost είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_p(t) = t(A\cos t + B\sin t) = At\cos t + Bt\sin t$

$y_p'(t) = A\cos t - At\sin t + B\sin t + Bt\cos t$

$y_p''(t) = -A\sin t - A\sin t - At\cos t + B\cos t + B\cos t - Bt\sin t.$

$y_p''(t) = -2A\sin t - At\cos t + 2B\cos t - Bt\sin t$

$y_p'''(t) = -2A\cos t - A\cos t + At\sin t - 2B\sin t - B\sin t - Bt\cos t$

$= -3A\cos t + At\sin t - 3B\sin t - Bt\cos t$

$y_p^{(4)}(t) = 3A\sin t + A\sin t + At\cos t - 3B\cos t - B\cos t + Bt\sin t$

$= 4A\sin t + At\cos t - 4B\cos t + Bt\sin t$

Με αντικατάσταση:

$4A\sin t + \cancel{At\cos t} - 4B\cos t + \cancel{Bt\sin t} - 3A\cos t + \cancel{At\sin t} - 3B\sin t - \cancel{Bt\cos t}$
$- 2A\sin t - \cancel{At\cos t} + 2B\cos t - \cancel{Bt\sin t} + A\cos t - \cancel{At\sin t} + B\sin t + \cancel{Bt\cos t}$
$= \cos t \Leftrightarrow 2A\sin t - 2B\sin t - 2A\cos t - 2B\cos t = \cos t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A - 2B = 0 \\ -2A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ B = -1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/4 \\ B = -1/4. \end{cases}$$

άρα $y_p(t) = -\frac{1}{4} t\cos t - \frac{1}{4} t\sin t$ οπότε γενική λύση:

$\varphi_\Gamma(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{-t} + C_3\cos t + C_4 \sin t - \frac{1}{4} t\cos t - \frac{1}{4} t\sin t$ με $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

4) $b(t) = t^2$

Η t^2 δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ λύση της μορφής: $y_p(t) = t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = A_0 t + A_1 t^2 + A_2 t^3$

$y_p'(t) = A_0 + 2A_1 t + 3A_2 t^2$
$y_p''(t) = 2A_1 + 6A_2 t$
$y_p'''(t) = 6A_2$
$y_p''''(t) = 0.$

Με αντικατάσταση: $\underline{6A_2} + \underline{2A_1} + 6A_2 t + \underline{A_0} + 2A_1 t + 3A_2 t^2 = t^2$

$\Leftrightarrow A_0 + 2A_1 + 6A_2 + (6A_2 + 2A_1)t + 3A_2 t^2 = t^2$

$$\begin{cases} A_2 = 1/3 \\ 6A_2 + 2A_1 = 0 \\ A_0 + 2A_1 + 6A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = 1/3 \\ A_1 = -3 \cdot 1/3 = -1 \\ A_0 = -2(-1) - 6 \cdot 1/3 = +2 - 2 = 0 \end{cases}$$

άρα: $y_p(t) = -2t + t^2$

άρα γενική λύση: $\varphi_\Gamma(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{-t} + C_3\cos t + C_4 \sin t - 2t + t^2$ με $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

5) $b(t) = te^t + \cos t + t^2$

Από την αρχή της υπέρθεσης: $\varphi_\Gamma(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3\cos t + C_4 \sin t$
$-\frac{5}{8} e^t + \frac{1}{4} e^t t - \frac{1}{4} t\cos t - \frac{1}{4} t\sin t - 2t + t^2$ με $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

4.8/ Βιβλίο 202

Να βρεθεί η γενική λύση μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης αν είναι γνωστό ότι οι $\varphi_1(t)=t^2$, $\varphi_2(t)=t^2+e^t$, $\varphi_3(t)=1+t^2+2e^t$ είναι λύσεις της.

(A)

Έστω
$$\left.\begin{aligned} y_1''(t)+a(t)y_1'+b(t)y_1&=f(t)\\ y_2''(t)+a(t)y_2'+b(t)y_2&=f(t)\end{aligned}\right\}$$
$$(y_1-y_2)''+a(t)(y_1-y_2)'+b(t)(y_1-y_2)=0$$
Αν y_1, y_2 λύσεις της μη ομογενούς, τότε η y_1-y_2 είναι λύση της ομογενούς:

$\varphi_2-\varphi_1=e^t$

$\varphi_3-\varphi_1=1+2e^t$

$\varphi_3-\varphi_2=1+e^t$

Οι $y_1(t)=1+2e^t$ και $y_2(t)=e^t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι:
$$\begin{vmatrix}1+2e^t & e^t\\ 2e^t & e^t\end{vmatrix}=e^t+\cancel{2e^{2t}}-\cancel{2e^{2t}}=e^t\neq 0 \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$
Άρα: $\varphi(t)=c_1(1+2e^t)+c_2\cdot e^t+\underbrace{t^2}_{\varphi_1(t)}$

(B) Ομοίως, αν $\varphi_1(t)=t^2+t^3\cdot\ln t$, $\varphi_2(t)=t+t^2+t^3\cdot\ln t$, $\varphi_3(t)=t+2t^2+t^3\cdot\ln t$, $t>0$

Έστω
$$\left.\begin{aligned} y_1''+a(t)y_1'+b(t)y_1&=f(t)\\ y_2''+a(t)y_2'+b(t)y_2&=f(t)\end{aligned}\right\}$$
$$(y_1-y_2)''+a(t)(y_1-y_2)''+b(t)(y_1-y_2)=0$$
Αν y_1, y_2 λύσεις της μη ομογενούς, η y_1-y_2 είναι λύση της ομογενούς

$\varphi_2-\varphi_1=t$

$\varphi_3-\varphi_2=t^2$

$\varphi_3-\varphi_1=t+t^2$

Οι $y_1(t)=t^2$ και $y_2(t)=t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, διότι:
$$\begin{vmatrix}t^2 & t\\ 2t & 1\end{vmatrix}=t^2-2t^2=-t^2\neq 0 \quad \forall\, t>0$$
Άρα, η γενική λύση: $\varphi(t)=c_1\cdot t^2+c_2 t+\underbrace{t^2+t^3\cdot\ln t}_{\varphi_1(t).}$

* Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y''-5y'+6y=2\cos t-e^{-3t}$

(ii) $y'' + 5y' + 6y = 2\cos t - e^{-3t}$

(iii) $y'' - 4y' + 3y = e^{t} + e^{2t}$

(ii) Λόγω της Αρχής της Υπέρθεσης θα έχουμε:

(1) $y'' + 5y' + 6y = 2\cos t$

(2) $y'' + 5y' + 6y = -e^{-3t}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς θα είναι: $r^2 + 5r + 6 = 0$ με ρίζες $r_1 = -2$ και $r_2 = -3$ οπότε η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς θα είναι: $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-3t}$ με c_1, c_2 σταθερές

(1) Η $2\cos t$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς άρα αναζητώ λύση (ειδική) της μορφής: $y_{1p}(t) = A\cos t + B\sin t$

Παραγωγίζω και έχω: $y_{1p}'(t) = -A\sin t + B\cos t$

$y_2''p(t) = -A\cos t - B\sin t$ και αντικαθιστώ οπότε έχω:

$-A\cos t - B\sin t - 5A\sin t + 5B\cos t + 6A\cos t + 6B\sin t = 2\cos t \Leftrightarrow 5A\cos t + 5B\cos t + 5B\sin t - 5A\sin t = 2\cos t$

$$\begin{cases} 5A + 5B = 2 \\ 5B - 5A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10B = 2 \\ B = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1/5 \\ A = 1/5 \end{cases}$$

Άρα: $y_{1p}(t) = \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$

(2) Η $-e^{-3t}$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{2p}(t) = -Ate^{-3t}$

Παραγωγίζω: $y_{2p}'(t) = -Ae^{-3t} + 3Ate^{-3t}$

$y_{2p}''(t) = 3Ae^{-3t} + 3Ae^{-3t} - 9Ate^{-3t}$
$= 6Ae^{-3t} - 9Ate^{-3t}$

Άρα: $6Ae^{-3t} - \cancel{9Ate^{-3t}} - 5Ae^{-3t} + \cancel{15Ate^{-3t}} - \cancel{6Ate^{-3t}}$
$= -e^{-3t} \Leftrightarrow Ae^{-3t} = e^{-3t}(-1)$

$A = -1$

Άρα: $y_{2p}(t) = t \cdot e^{-3t}$

και $y_{Γ}(t) = \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + t \cdot e^{-3t} + c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-3t}$

c_1, c_2 σταθερές

(ii) Λόγω της Αρχής της Υπέρθεσης θα ισχύει:
(1) $y'' - 5y' + 6y = 2\cos t$
(2) $y'' - 5y' + 6y = -e^{-3t}$
Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς:
$r^2 - 5r + 6 = 0$ με ρίζες $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ και γενική λύση
$y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{3t}$, c_1, c_2 σταθερές

(1) Η $2\cos t$ δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ λύση της μορφής: $y_{1p}(t) = A\cos t + B\sin t$ (ειδική λύση)
Παραγωγίζω: $y_{1p}'(t) = -A\sin t + B\cos t$
$y_{1p}''(t) = -A\cos t - B\sin t$
Αντικαθιστώ: $\underline{-A\cos t} - B\sin t + 5A\sin t - 5B\cos t + \underline{6A\cos t}$
$+ 6B\sin t = 2\cos t \Leftrightarrow 5A\cos t + 6B\sin t$
$-5B\cos t - B\sin t + 5A\sin t = 2\cos t \Leftrightarrow (5A - 5B)\cos t$
$+ (5B + 5A)\sin t = 2\cos t \Leftrightarrow \begin{cases} 5A - 5B = 2 \\ 5B + 5A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ 5A + 5A = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ 10A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A = 1/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1/5 \\ A = 1/5 \end{cases}$

άρα: $y_{1p}(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t = \frac{1}{5}(\cos t - \sin t)$

(2) Η $-e^{-3t}$ δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{2p}(t) = -At^0 e^{-3t} = -Ae^{-3t}$
Παραγωγίζω: $y_{2p}'(t) = 3Ae^{-3t}$
$y_{2p}''(t) = -9Ae^{-3t}$ και αντικαθιστώ:
$-9Ae^{-3t} - 15Ae^{-3t} + 6(-Ae^{-3t}) = -e^{-3t}$
$\cancel{-}30Ae^{-3t} = \cancel{-}e^{-3t}$
$A = 1/30$

Άρα: $y_{2p}(t) = -\frac{1}{30}e^{-3t}$ και $y_{Γ}(t) = \frac{1}{5}(\cos t - \sin t)$

$-\frac{1}{30}e^{-3t} + c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{3t}$, c_1, c_2 σταθερές.

(iii) Λόγω της Αρχής της Υπέρθεσης θα ισχύει: (1) $y'' - 4y' + 3y = e^t$
και (2) $y'' - 4y' + 3y = e^{2t}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι:
$r^2 - 4r + 3 = 0$ με ρίζες $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ οπότε η γενική λύση της: $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{3t}$, c_1, c_2 σταθερές

(1) Η e^t είναι λύση της ομογενούς, άρα η ειδική λύση $y_{1p}(t) = A_1 t \cdot e^t$. Παραγωγίζω: $y_{1p}'(t) = A_1 e^t + A_1 t e^t$

$y_{1p}''(t) = A_1 e^t + A_1 e^t + A_1 t e^t = 2A_1 e^t + A_1 t e^t$

Άρα: $2A_1 e^t + \cancel{A_1 t e^t} - 4A_1 e^t - \cancel{4 A_1 t e^t} + \cancel{3 A_1 t e^t} = e^t$

$-2A_1 e^t = e^t$

$A_1 = -1/2$ και $y_{1p}(t) = -\frac{1}{2} t e^t$

(2) Η e^{2t} δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Άρα, η ειδική λύση είναι της μορφής:
$y_{2p}(t) = A_2 e^{2t}$
$y_{2p}'(t) = 2A_2 e^{2t}$ και $y_{2p}''(t) = 4A_2 e^{2t}$. Άρα:

$4A_2 e^{2t} - 8A_2 e^{2t} + 3A_2 e^{2t} = e^{2t}$

$-A_2 e^{2t} = e^{2t}$

$A_2 = -1$

και $y_{2p}(t) = -e^{2t}$ και τελικά $y_r(t) = -\frac{1}{2} t e^t - e^{2t} + c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{3t}$, c_1, c_2 σταθερές

4.37/206 Βιβλίο

$$\begin{cases} y''' = y \\ y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

$y''' = y \Leftrightarrow y''' - y = 0$

Με χαρακτηριστική εξίσωση: $r^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r^2+r+1) = 0$

με $r_1 = 1$ και για το τριώνυμο: $\Delta = 1 - 4 = -3$

$r_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2}$

άρα γενική λύση

$y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(c_2 \cdot \cos \sqrt{3}/2\, t + c_3 \sin \sqrt{3}/2\, t \right)$

με c_1, c_2, c_3 σταθερές

• $c_1 e^0 + e^0 \left(c_2 \cdot \cos \sqrt{3}/2 \cdot 0 + \cancel{c_3 \cdot \sin \sqrt{3}/2 \cdot 0} \right)$
$= c_1 + c_2 = 1$

$$y'_{o\mu}(t) = c_1 \cdot e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t/2}\left(c_2 \cdot \cos\sqrt{3}/_2\, t + c_3 \cdot \sin\sqrt{3}/_2\, t\right)$$

$$+ e^{-t/2}\left(-c_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3}/_2\, c_3 \cos\sqrt{3}/_2\, t\right)$$

$$\bullet\ c_1 \cdot e^{0} - \frac{1}{2} e^{0}\left(c_2 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right) + \cancel{c_3 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right)}^{0}\right) + e^{0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3\right)$$

$$= c_1 - \frac{1}{2} c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 = 0$$

$$\psi''_{o\mu}(t) = c_1 \cdot e^{t} + \frac{1}{4} e^{-t/2}\left(c_2 \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

$$-\frac{1}{2} e^{-t/2}\left(-\sqrt{3}/2\, c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

$$+ e^{-t/2}\left(-\frac{3}{4} c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{3}{4} c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

$$-\frac{1}{2} e^{-t/2}\left(-c_2 \cdot \sqrt{3}/2 \sin\sqrt{3}/2\, t + \sqrt{3}/2\, c_3 \cos\sqrt{3}/2\, t\right)$$

$$\bullet\ c_1 + \frac{1}{4}\left(c_2\right) + \left(-\frac{3}{4} c_2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_3\right) =$$

$$c_1 + \frac{c_2}{4} - \frac{3}{4} c_2 - \frac{\sqrt{3}}{4} c_3 = 0 \Leftrightarrow c_1 - \frac{2c_2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} c_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 - \frac{c_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} c_3 = 0 \xrightarrow{c_2 = 1 - c_1} c_1 + \frac{c_1 - 1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} c_3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3c_1 - 1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} c_3 = 0 \Rightarrow 6c_1 - 2 = \sqrt{3} c_3 \Rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{3} c_3 + 2}{6}$$

και $c_1 - \frac{1}{2}(1 - c_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 = 0$

$$\bullet\ c_1 + \frac{c_1 - 1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 = 0 \Rightarrow \frac{3c_1 - 1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 = 0$$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1 - \sqrt{3} c_3}{3}$ άρα $\frac{1 - \sqrt{3} c_3}{\cancel{3}} = \frac{2 + \sqrt{3} c_3}{\cancel{6}\,2}$

$$\cancel{2} - 2\sqrt{3} c_3 = \cancel{2} + \sqrt{3} c_3 \Rightarrow 3\sqrt{3} c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

άρα: $c_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ και $c_2 = 1 - c_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Άρα: $\psi_{ομ}(t) = \frac{1}{3}e^{t} + e^{-t/2} \cdot \frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$

* Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης
$$y'' - 4y' + 3y = e^{2t}\cos t$$
Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι:
$r^2 - 4r + 3 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow r_1 = 3 \\ \searrow r_2 = 1 \end{matrix}$
$\Delta = 16 - 12 = 4$
και γενική λύση $\psi_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{t}$, c_1, c_2 σταθερές
Επειδή η $e^{2t}\cos t$ δεν είναι λύση της ομογενούς, αναζητώ λύση (ειδική της μορφής): $y_p(t) = e^{2t}(A\sin t + B\cos t)$
Παραγωγίζω: $y_p'(t) = 2e^{2t}A\sin t + 2e^{2t}B\cos t + A\cos t\, e^{2t} - B\sin t\, e^{2t}$

$y_p''(t) = 2e^{2t}A\cos t + 4e^{2t}A\sin t - 2e^{2t}B\sin t + 4e^{2t}B\cos t - A\sin t e^{2t} + 2A\cos t e^{2t} - B\cos t e^{2t} - 2B\sin t e^{2t} = 4A\cos t \cdot e^{2t} - 4B\sin t e^{2t} + 4e^{2t}A\sin t + 4e^{2t}B\cos t - A\sin t\, e^{2t} - B\cos t\, e^{2t}$

Αντικαθιστώ: στην αρχική σχέση

$\cancel{4A\cos t e^{2t}} + 3A\sin t e^{2t} \cancel{- 4Be^{2t}\sin t} + 3e^{2t}B\cos t - 8e^{2t}A\sin t - 8e^{2t}B\cos t \cancel{- 4A\cos t e^{2t}} \cancel{+ 4B\sin t e^{2t}} + 3e^{2t}A\sin t + 3e^{2t}B\cos t = e^{2t}\cos t$

$-2e^{2t}B\cos t - 2A\sin t e^{2t} = e^{2t}\cos t$
$$\begin{cases} -2e^{2t}B\cos t = e^{2t}\cos t \\ -2A\sin t e^{2t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1/2 \\ A = 0 \end{cases}$$
Άρα, τελικά $y_p(t) = e^{2t}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos t$ και γενική λύση: $\psi_\Gamma(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{t}$ με c_1, c_2 σταθερές

4.34/205 Βιβλίο

Να λυθεί το ΠΑΤ: $\begin{cases} y''' + y'' = t + e^{-t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1 \end{cases}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$r^3 + r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2(r+1) = 0$ με $r_1 = -1$ και $r_2 = 0$ (ΔΙΠΛΗ)

Άρα, και η γενική λύση: $\psi_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot 1 + t \cdot c_3$, c_1, c_2, c_3 σταθ.

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & 1 & t \\ -e^{-t} & 0 & 1 \\ e^{-t} & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -e^{-t} & 1 \\ e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = e^{-t} \neq 0.$$

Και $\varphi_1(t) = e^{-t}$ και $\varphi_2(t) = 1$ και $\varphi_3(t) = t$ γραμμικά ανεξάρτητες.

(A) $y''' + y'' = t$

Η t είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς; άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_p(t) = t^2(A_0 + A_1 t) = A_0 t^2 + A_1 t^3$

Παραγωγίζω: $y_{1p}'(t) = 2A_0 t + 3A_1 t^2$

$y_{1p}''(t) = 2A_0 + 6A_1 t$

$y_{1p}'''(t) = 6A_1$ και αντικαθιστώ

$6A_1 + 2A_0 + 6A_1 t = t$

$\begin{cases} A_1 = 1/6 \\ 6 \cdot A_1 + 2A_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1/6 \\ A_0 = -1/2 \end{cases}$ άρα $y_{1p}(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

(B) $y''' + y'' = e^{-t}$

Η e^{-t} είναι λύση της ομογενούς άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{2p}(t) = Bte^{-t}$

$y_{2p}'(t) = Be^{-t} - Bte^{-t}$

$y_{2p}''(t) = -Be^{-t} - Be^{-t} + Bte^{-t} = -2Be^{-t} + Bte^{-t}$

$y_{2p}'''(t) = 2Be^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t} = 3Be^{-t} - Bte^{-t}$

Άρα: $3Be^{-t} - \cancel{Bte^{-t}} - 2Be^{-t} + \cancel{Bte^{-t}} = e^{-t}$

$Be^{-t} = e^{-t} \Rightarrow B = 1$

Άρα: $y_{2p}(t) = t \cdot e^{-t}$

και λόγω της αρχής της υπέρθεσης: $y_p(t) = t \cdot e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

και $\psi_\Gamma(t) = c_1 e^{-t} + c_2 + t \cdot c_3 + t \cdot e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

• $c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = -3}$

• $\psi_\Gamma'(t) = -c_1 \cdot e^{-t} + c_3 + e^{-t} - t \cdot e^{-t} - t + \frac{1}{2}t^2$

άρα: $-c_1 + c_3 + 1 = 0 \Leftrightarrow c_3 - c_1 = -1 \Rightarrow \boxed{c_3 = 3}$

• $\psi_\Gamma''(t) = c_1 \cdot e^{-t} - e^{-t} - e^{-t} + t \cdot e^{-t} - 1 + t$ άρα:

$c_1 - 1 - 1 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 4}$

Άρα $\psi_r(t) = 4e^{-t} - 3 + 3t + t\,e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$

4.33/205 Βιβλίο

Να λυθεί το ΠΑΤ: $y''' - 2y'' + y' = 1 + t\cdot e^{t}$

$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι:

$r^3 - 2r^2 + r = 0 \Leftrightarrow r(r^2 - 2r + 1) = 0 \Leftrightarrow r(r-1)^2 = 0$

με ρίζες $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ (ΔΙΠΛΗ) και γενική λύση:

$\psi_{o\mu}(t) = c_1\cdot e^t + c_2\cdot 1 + c_3\cdot t\cdot e^t$, c_1, c_2, c_3 σταθ.

(A) $y''' - 2y'' + y' = 1$

Αναζητώ λύση της μορφής $y_{1p}(t) = tA_0$

$y_{1p}'(t) = A_0$ Άρα: $A_0 = 1$

$y_{1p}''(t) = y_{1p}'''(t) = 0$

και ειδική λύση $y_{1p}(t) = t$

(B) $y''' - 2y'' + y' = t\,e^t$

Η e^t είναι λύση της ομογενούς άρα η ειδική λύση:

$y_{2p}(t) = t^2 e^t (B_0 + B_1 t) = B_0 e^t t^2 + B_1 e^t t^3$

$y_{2p}'(t) = B_0 e^t t^2 + 2B_0 e^t t + B_1 e^t t^3 + 3B_1 e^t t^2$

$y_{2p}''(t) = B_0 e^t t^2 + 2B_0 e^t t + 2B_0 e^t + 2B_0 e^t t + 3B_1 e^t t^2 + B_1 e^t t^3 + 6B_1 e^t t + 3B_1 e^t t^2$

$= B_0 e^t t^2 + 4B_0 e^t t + 2B_0 e^t + 6B_1 e^t t^2 + B_1 e^t t^3 + 6B_1 e^t t$

$y_{2p}'''(t) = B_0 e^t t^2 + 2B_0 e^t t + 4B_0 e^t + 4B_0 e^t t + 2B_0 e^t + 6B_1 e^t t^2 + 12B_1 e^t t + 3B_1 e^t t^2 + B_1 e^t t^3 + 6B_1 e^t + 6B_1 e^t t$

$= B_0 e^t t^2 + 6B_0 e^t t + 6B_0 e^t + 9B_1 e^t t^2 + 18B_1 e^t t + 6B_1 e^t + B_1 e^t t^3$

Άρα: $B_0 e^t t^2 + 6B_0 e^t t + 6B_0 e^t + 9B_1 e^t t^2 + 18B_1 e^t t + 6B_1 e^t - 2B_0 e^t t^2 - 8B_0 e^t t - 4B_0 e^t - 12B_1 e^t t^2 - 2B_1 e^t t^3 - 12B_1 e^t t + B_0 e^t t^2 + 2B_0 e^t t + B_1 e^t t^3 + 3B_1 e^t t^2 + B_1 e^t t^3 = t\,e^t$

$2B_0 e^t + 6B_1 e^t + 6B_1 e^t t = t\,e^t$

Άρα: $\begin{cases} B_1 = 1/6 \\ 2B_0 + 6B_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 1/6 \\ B_0 = -1/2 \end{cases}$

Άρα: $y_{2p}(t) = -\frac{1}{2} e^t t^2 + \frac{1}{6} e^t t^3$

Από αρχή της υπέρθεσης: $y_p(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t - \frac{1}{2} e^t t^2 + t$

και $\psi_\Gamma(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t + t - \frac{1}{2} e^t t^2 + c_1 \cdot e^t + c_3 \cdot t \cdot e^t + c_2$

• $\psi(0) = \underline{c_1 + c_2 = 0}$

• $\psi_\Gamma'(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t + 1 - \frac{1}{2} e^t t^2 - e^t t + c_3 e^t + c_3 t e^t$

$+ c_1 e^t$, άρα $\psi'(0) = 1 + c_3 + c_1 = 0 \Rightarrow \underline{c_1 + c_3 = -1}$

$\psi''_\Gamma(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t + t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t - \frac{1}{2} e^t t^2 - e^t t$

$- e^t t - e^t + c_3 e^t + c_3 e^t + c_3 t e^t + c_1 e^t$

$\psi_\Gamma''(0) = 2c_3 - 1 + c_1 = 1 \Rightarrow \underline{2c_3 + c_1 = 2}$

$c_1 + c_3 = -1 \Rightarrow 2 - 2c_3 + c_3 = -1 \Rightarrow -c_3 = -3 \Rightarrow c_3 = 3$

άρα: $c_1 = 2 - 6 \Rightarrow c_1 = -4$

$c_2 = 4$

Άρα: $\psi_\Gamma(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t - \frac{1}{2} e^t t^2 + t - 4e^t + 4 + 3te^t$

4.38/ 206 Βιβλίο

Να λυθεί το ΠΑΤ: $\left.\begin{array}{l} y''' - 5y'' + 100y' - 500y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 10 \\ y''(0) = 250 \end{array}\right\}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^3 - 5r^2 + 100r - 500 = 0$

$\Leftrightarrow r^2(r-5) + 100(r-5) = 0 \Leftrightarrow (r-5)(r^2+100) = 0$

με ρίζες $r_1 = 5$, $r_2 = -10i$, $r_3 = 10i$

και γενική λύση $\psi_{o\mu}(t) = c_1 \cdot e^{5t} + c_2 \cdot \cos 10t + c_3 \sin 10t$

και $\psi(0) = c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{c_1 = -c_2}$

$\psi_{o\mu}'(t) = 5c_1 e^{5t} - 10c_2 \sin 10t + 10c_3 \cos 10t$

$\psi'(0) = 5c_1 + 10c_3 = 10 \Leftrightarrow \underline{c_1 + 2c_3 = 2}$

$\psi_{o\mu}''(t) = 25c_1 e^{5t} - 100c_2 \cos 10t - 100 c_3 \sin 10t$

$\psi''(0) = 25c_1 - 100c_2 = 250 \Leftrightarrow \underline{c_1 - 4c_2 = 10}$

άρα $-5c_2 = 10 \Leftrightarrow \underline{c_2 = -2}$

$\underline{c_1 = 2}$ και $\underline{c_3 = 0}$

άρα $\psi_{o\mu}(t) = 2e^{5t} - 2\cos 10t$.

(*) $W(y_1, y_2, y_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{5t} & \cos 10t & \sin 10t \\ 5e^{5t} & -10\sin 10t & 10\cos 10t \\ 25e^{5t} & -100\cos 10t & -100\sin 10t \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} e^{5t} & \cos 10t & \sin 10t \\ 0 & -10\sin 10t - 5\cos 10t & 10\cos 10t - 5\sin 10t \\ 0 & -100\cos 10t - 25\cos 10t & -100\sin 10t - 25\sin 10t \end{vmatrix}$

$= e^{5t}(1000\sin^2 10t + 250\sin^2 10t + \cancel{500\cos 10t \sin 10t}$
$+ \cancel{125\cos 10t \sin 10t} + 1000\cos^2 10t - \cancel{500\cos 10t \sin 10t}$
$+ 250\cos^2 10t - \cancel{125\cos 10t \sin 10t})$

$= e^{5t}(1250\sin^2 10t + 1250\cos^2 10t)$

$= e^{5t}\, 1250 \neq 0$ και οι y_1, y_2, y_3 γραμμικά ανεξάρτητες.

* $y''' - 3y' + 2y = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωσή της: $r^3 - 3r + 2 = 0$ και έχω

1	0	-3	2	$\rho=1$
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

$(r-1)(r^2 + r - 2) = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+2)(r-1) = 0$ με

δηλαδή ρίζα $r_1 = 1$ και $r_2 = -2$ και επομένως οι λύσεις της (1)

$y_1(t)=e^{-2t}, y_2(t)=e^t, y_3(t)=t\cdot e^t$

$$W(y_1,y_2,y_3)(t)=\begin{vmatrix} e^{-2t} & e^t & te^t \\ -2e^{-2t} & e^t & te^t+e^t \\ 4e^{-2t} & e^t & 2e^t+t\cdot e^t \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} e^{-2t} & e^t & te^t \\ 0 & 3e^t & 3te^t+e^t \\ 0 & -3e^t & 2e^t-3te^t \end{vmatrix}=e^{-2t}\begin{vmatrix} 3e^t & 3te^t+e^t \\ -3e^t & 2e^t-3te^t \end{vmatrix}$$

$$=e^{-2t}\left(6e^{2t}-\cancel{9e^{2t}t}+3e^{2t}+\cancel{9e^{2t}t}\right)$$

$=e^{-2t}\,9e^{2t}=9e^0=9\neq 0$ και οι y_1,y_2,y_3 γραμμικά ανεξάρτητες

Άρα, γενική λύση: $y_{ομ}(t)=c_1e^{-2t}+c_2\cdot e^t+c_3\cdot te^t$, c_1,c_2,c_3 σταθερές

* $y^{(4)}+3y'''+3y''+y'=0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^4+3r^3+3r^2+r=0$

$r(r^3+3r^2+3r+1)=0 \Leftrightarrow r(r+1)^3=0$ με τριπλή ρίζα $r_1=-1$ και $r_2=0$. Άρα, οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$y_1(t)=e^0=1,\ y_2(t)=e^{-t},\ y_3(t)=t\cdot e^{-t},\ y_4(t)=t^2e^{-t}$

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} 1 & e^{-t} & te^{-t} & t^2e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{-t}+te^{-t} & -t^2e^{-t}+2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^{-t}+te^{-t} & -4te^{-t}+t^2e^{-t}+2e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} & -e^{-t}-te^{-t} & -6e^{-t}+6te^{-t}-t^2e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -e^{-t} & e^{-t}+te^{-t} & -t^2e^{-t}+2te^{-t} \\ 0 & 3e^{-t}+2te^{-t} & -2te^{-t}+2e^{-t} \\ 0 & -2e^{-t}-2te^{-t} & -6e^{-t}+4te^{-t} \end{vmatrix}$$

$$=-e^{-t}\left(18e^{-2t}+\cancel{12te^{-2t}}-\cancel{12e^{-2t}t}+8t^2e^{-2t}-\cancel{4e^{-2t}t}+4e^{-2t}-4t^2e^{-2t}+\cancel{4e^{-2t}t}\right)$$

$$=-e^{-t}\left(20e^{-2t}+4t^2e^{-2t}\right)=-20e^{-3t}-4t^2e^{-3t}\neq 0$$

και y_1,y_2,y_3 γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως, γενική λύση: $y_{ομ}(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-t} + c_3 \cdot e^{-t} t + c_4 \cdot e^{-t} t^2$ με c_1, c_2, c_3, c_4 σταθερές

Άσκηση
Θέμα
3.7.2007

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y'' - 3y' + 2y = e^{3t} + e^{2t}$
Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς:
$y'' - 3y' + 2y = 0$ θα είναι: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-2) = 0$
με ρίζες $r = +1$, $r = +2$.
Άρα, $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{t} + c_2 \cdot e^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(A) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$
Η e^{3t} δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{1p}(t) = Ae^{3t}$
$y_{1p}'(t) = 3Ae^{3t}$
$y_{1p}''(t) = 9Ae^{3t}$
Με αντικατάσταση: $\cancel{9Ae^{3t}} - \cancel{9Ae^{3t}} + 2Ae^{3t} = e^{3t}$
$\Leftrightarrow A = 1/2$.
άρα $y_{1p}(t) = \frac{1}{2} e^{3t}$

(B) $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$
Η e^{2t} <u>όμως</u> είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση: $y_{2p}(t) = Bte^{2t}$
$y_{2p}'(t) = \underline{Be^{2t} + 2Bte^{2t}}$
$y_{2p}''(t) = \underline{2Be^{2t}} + 2Be^{2t} + 4Bte^{2t} = 4Be^{2t} + 4Bte^{2t}$
οπότε: $4Be^{2t} + \cancel{4Bte^{2t}} - 3Be^{2t} - \cancel{6Bte^{2t}} + \cancel{2Bte^{2t}}$
$= e^{2t} \Leftrightarrow Be^{2t} = e^{2t} \Leftrightarrow B = 1$
οπότε $y_{2p}(t) = t \cdot e^{2t}$
και η γενική λύση είναι: $y_Γ(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t} + te^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. (από αρχή υπέρθεσης)

Άσκηση
Θέμα
11/2/2008

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}$.
Για την ομογενή $L(y) = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^3 - 4r = 0 \Leftrightarrow r(r^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow r(r-2)(r+2) = 0$
με λύσεις $r = 0$, $r = 2$, $r = -2$, οπότε
$y_{ομ}(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{2t}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(A) $y''' - 4y' = t$

Η t δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα αναζητώ λύση της μορφής $y_p(t) = (A_0 + A_1 t)t = A_0 t + A_1 t^2$

$y_p'(t) = A_0 + 2A_1 t$

$y_p''(t) = 2A_1$ ——— Άρα: $-4A_0 - 4\cdot 2A_1 t = t$

$y_p'''(t) = 0$ $\quad -4A_0 - 8A_1 t = t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -1/8 \\ A_0 = 0. \end{cases}$ άρα $y_p(t) = -\frac{1}{8}t^2$.

(B) $y''' - 4y' = 3\cos t$

Η $3\cos t$ δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_p(t) = 3(A\cos t + B\sin t)$

$y_p'(t) = -3A\sin t + 3B\cos t$

$y_p''(t) = -3A\cos t - 3B\sin t$

$y_p'''(t) = 3A\sin t - 3B\cos t$

Άρα: $3A\sin t - 3B\cos t + 12A\sin t - 12B\cos t = 3\cos t$

$15A\sin t - 15B\cos t = 3\cos t$

$\begin{cases} A = 0 \\ B = -1/5 \end{cases}$

άρα: $y_p(t) = -\frac{3}{5}\sin t$

(Γ) $y''' - 4y' = e^{-2t}$

Η e^{-2t} είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_p(t) = Ate^{-2t}$

$y_p'(t) = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}$

$y_p''(t) = -2Ae^{-2t} - 2Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t} = -4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}$

$y_p'''(t) = 8Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} - 8Ate^{-2t} = 12e^{-2t} - 8Ate^{-2t}$

Άρα: $12e^{-2t} - \cancel{8Ate^{-2t}} - 4Ae^{-2t} + \cancel{8Ate^{-2t}} = e^{-2t}$

$\Rightarrow 8Ae^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow \boxed{A = 1/8}$

άρα $y_p(t) = \frac{1}{8}e^{-2t}t$.

Από την αρχή της υπέρθεσης: $\psi_r(t) = C_1 + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{5}\sin t$ με $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση Θέμα 12/9/2008

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
$y''' - 4y'' + 4y' = 2e^t + 3$

Για την ομογενή $y''' - 4y'' + 4y'$ έχει χαρακτηριστική εξίσωση: $r^3 - 4r^2 + 4r = 0 \Leftrightarrow r(r^2 - 4r + 4) = 0$
$\Leftrightarrow r(r-2)^2 = 0$ με ρίζες $r=0$, $r=2$ (ΔΙΠΛΗ)

Άρα, $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{2t} + c_3 e^{2t} t$, με $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(A) $y''' - 4y'' + 4y' = 2e^t$

Η $2e^t$ δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{1p}(t) = 2Ae^t$

$y_{1p}'(t) = 2Ae^t$

$y_{1p}''(t) = 2Ae^t$, $y_{1p}'''(t) = 2Ae^t$

$2Ae^t - 4 \cdot \cancel{2Ae^t} + 4 \cdot \cancel{2Ae^t} = 2e^t$

$A = 1$

άρα: $y_{1p}(t) = 2e^t$

(B) $y''' - 4y'' + 4y' = 3$

ειδική λύση $y_{2p}(t) = 3B_0 t$

$y_{2p}'(t) = 3B_0$, $y_2''p(t) = y_2'''(t) = 0$.

άρα: $\cancel{3}B_0 \cdot 4 = \cancel{3} \Rightarrow B_0 = 1/4$

άρα: $y_{2p}(t) = \frac{3}{4}t$

Από την αρχή της υπέρθεσης: $y_\Gamma(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{2t} + 2e^t + \frac{3}{4}t + c_3 e^{2t} t$, με $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Άσκηση Θέμα 23/09/2015

(α) Δείξτε ότι $y_1 = t^2$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης
$t^2 y''(t) - (t^2 + 4t) y'(t) + (2t+6) y(t) = 0 \quad (t > 0)$

Εάν $y_1 = t^2$ τότε:

$t^2 \cdot 2 - (t^2 + 4t) \cdot 2t + (2t+6) t^2 = 0 \Leftrightarrow$

$2t^2 - \cancel{2t^3} - 8t^2 + \cancel{2t^3} + 6t^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Άρα, $y_1 = t^2$ λύση της (1).

Για μια δεύτερη λύση γραμμικά ανεξάρτητη της πρώτης (με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης): $y_2(t) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2} dt$.

$$y_2(t) = t^2 \int \frac{e^{-\int -\left(\frac{t^2+4t}{t^2}\right)dt}}{t^4} dt = t^2 \int \frac{e^{+\int 1\, dt + \int \frac{4}{t} dt}}{t^4} dt$$

$$t^2 \int \frac{e^{t} \cdot e^{+4\ln t}}{t^4} dt = t^2 \int \frac{e^{-t} \cdot e^{\ln t^4}}{t^4} dt$$

$$= t^2 \int \frac{e^t \cdot \cancel{t^4}}{\cancel{t^4}} dt = t^2 \int e^t\, dt = t^2 e^t$$

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 e^t \\ 2t & 2te^t + t^2 e^t \end{vmatrix} = \cancel{2t^3e^t} + t^4 e^t - \cancel{2t^3 e^t}$$
$$= t^4 e^t \neq 0$$

άρα $y_2(t) = e^t t^2$ γραμμικά ανεξάρτητη της $y_1(t)$

(β) Να λυθεί το ΠΑΤ: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} + t$, $y(0) = y'(0) = 0$

Για την ομογενή : $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 3r + 2 = 0$ με $r = -1, r = -2$

άρα $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$

Η e^{-t} είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{1p}(t) = Ate^{-t}$

$y_{1p}'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$

$y_{1p}''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = Ate^{-t} - 2Ae^{-t}$

Άρα: $\cancel{Ate^{-t}} - 2Ae^{-t} + 3Ae^{-t} - 3\cancel{Ate^{-t}} + 2\cancel{Ate^{-t}} = e^{-t}$

$Ae^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow A = 1$

Άρα: $y_{1p}(t) = te^{-t}$

- $y'' + 3y' + 2y = t$.

Η t δεν είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση:

$y_{2p}(t) = (B_0 + B_1 t)$

$y_{2p}'(t) = B_1$

$y_{2p}''(t) = 0$

Άρα: $3B_1 + 2B_0 + 2B_1 t = t$

$$\begin{cases} 2B_1 = 1 \\ 3B_1 + 2B_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = 1/2 \\ B_0 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Άρα, $y_{2p}(t) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$.

Από την αρχή της υπέρθεσης: $\psi_r(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + te^{-t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$

$c_1 + c_2 - 3/4 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3/4$ (1)

$\psi_r'(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} + e^{-t} - te^{-t} + \frac{1}{2}$

άρα: $-c_1 - 2c_2 + 1 + 1/2 = 0 \Leftrightarrow c_1 + 2c_2 = \frac{3}{2}$ (2)

(1)-(2): $-c_2 = 3/4 - 3/2$

$-c_2 = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} \Rightarrow c_2 = -\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow c_2 = \frac{3}{4}$

άρα: $c_1 = \frac{3}{4} - c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow c_1 = 0$

Άρα: $\psi_r(t) = \frac{3}{4} e^{-2t} + te^{-t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$.

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των εξισώσεων:

(i) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$

(ii) $t^2 y''(t) - 5y'(t)\cdot t + 25y(t) = 0 \quad (t>0)$

Θέμα 27/1/2015

(i) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς:

$r^2 + 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r+2) = 0 \Leftrightarrow r = -1$ ή $r = -2$.

Άρα: $y_{ομ}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Η e^{-t} είναι λύση της ομογενούς, άρα, αναζητώ ειδική λύση:

$y_p(t) = Ate^{-t}$

$y_p'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$

$y_p''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$

άρα: $-2Ae^{-t} + \cancel{Ate^{-t}} + 3Ae^{-t} - \cancel{3Ate^{-t}} + \cancel{2Ate^{-t}} = e^{-t}$

$Ae^{-t} = 1\cdot e^{-t} \Rightarrow A = 1$

άρα $\psi_r(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + te^{-t}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $t^2y'' - 5y't + 25y = 0 \quad (t>0)$

(Εξίσωση Euler) Θέτω $y = t^r$ και έχουμε:

$$\mathcal{L}(t^r) = t^2 r(r-1)t^{r-2} - 5rt^{r-1}t + 25t^r =$$
$$= t^r r(r-1) - 5rt^r + 25t^r$$
$$= t^r[r^2 - r - 5r + 25] = t^r[r^2 - 6r + 25]$$

Για την εξίσωση $r^2 - 6r + 25 = 0$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 25 = 36 - 100 = -64 < 0$$

με ρίζες $r_{1,2} = \dfrac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$ και η συνάρτηση

$\varphi(t) = t^{3+4i} = t^3[\cos(4\ln t) + i\sin(4\ln t)]$ μια λύση της εξίσωσης

Άρα, οι $y_1(t) = Re(\varphi(t)) = t^3\cos(4\ln t)$

$y_2(t) = Im(\varphi(t)) = t^3\sin(4\ln t)$

είναι δύο πραγματικές γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και η γενική λύση είναι: $y(t) = t^3[c_1\cos(4\ln t) + c_2\sin(4\ln t)]$, $t>0$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Θέμα 07/2014 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 4y' + 4y = 5t^2e^{2t}$

Για την αντίστοιχη ομογενή: $y'' - 4y' + 4y = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0$

με διπλή ρίζα $r = 2$. Επομένως, $y_{ομ}(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Η t^2e^{2t} δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση: $y_p(t) = t^2e^{2t}(A_0 + A_1t + A_2t^2) = A_0t^2e^{2t} + A_1t^3e^{2t} + A_2t^4e^{2t}$

$y_p'(t) = 2A_0te^{2t} + 2A_0t^2e^{2t} + 3A_1t^2e^{2t} + 2A_1t^3e^{2t} + 4A_2t^3e^{2t}$
$\quad + 2A_2t^4e^{2t}$

$y_p''(t) = 2A_0e^{2t} + 4A_0te^{2t} + 4A_0te^{2t} + 4A_0t^2e^{2t} + 6A_1te^{2t} + 6A_1t^2e^{2t}$
$\quad + 6A_1t^2e^{2t} + 4A_1t^3e^{2t} + 12A_2t^2e^{2t} + 8A_2t^3e^{2t} + 8A_2t^3e^{2t}$
$\quad + 4A_2t^4e^{2t}$

Άρα: $2A_0e^{2t} + 8A_0te^{2t} + 4A_0t^2e^{2t} + 6A_1te^{2t} + 12A_1t^2e^{2t}$
$+ 4A_1t^3e^{2t} + 12A_2t^2e^{2t} + 16A_2t^3e^{2t} + 4A_2t^4e^{2t} - 8A_0te^{2t}$
$- 8A_0t^2e^{2t} - 12A_1t^2e^{2t} - 8A_1t^3e^{2t} - 16A_2t^3e^{2t} - 8A_2t^4e^{2t}$
$+ 4t^2e^{2t}A_0 + 4A_1t^3e^{2t} + 4A_2t^4e^{2t} = 5t^2e^{2t} \Leftrightarrow$

$2A_0e^{2t} + 6A_1te^{2t} + 12A_0t^2e^{2t} - 5t^2e^{2t} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = A_1 = 0 \\ A_2 = 5/12 \end{cases}$

Άρα, $y_p(t) = \frac{5}{12} t^4 e^{2t}$

Επομένως, γενική λύση $\psi_\Gamma(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{5}{12} t^4 e^{2t}$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Θέμα 2011 Να ορισθεί ο $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η $\varphi(t) = t^a$ να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $L(y) := y'' - \frac{3}{t} y' + \frac{3}{t^2} y = 0$ και στη συνέχεια να λυθεί η $L(y) = 2t - 1$

ⓐ $\varphi(t) = t^a$, $\varphi'(t) = a t^{a-1}$, $\varphi''(t) = a(a-1) t^{a-2}$

Οπότε με αντικατάσταση: $(a^2 - a) t^{a-2} - 3t^{-1} a t^{a-1} + 3t^{-2} t^a = 0$

$\Rightarrow (a^2 - a) t^{a-2} - 3a t^{a-2} + 3 t^{a-2} = 0$

$\Rightarrow t^{a-2} [a^2 - a - 3a + 3] = 0 \Rightarrow t^{a-2} [a^2 - 4a + 3] = 0$

άρα για την εξίσωση $a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-3) = 0$

υπάρχουν ρίζες $a = 1$ ή $a = 3$

Για $a = 1$: $t^a = t$ και $0 - \frac{3}{t} 1 + \frac{3}{t^2} t = -\frac{3}{t} + \frac{3}{t} = 0$

Για $a = 3$: $t^a = t^3$ και $6t - \frac{3}{t} \cdot 3t^2 + \frac{3}{t^2} t^3 = 6t - 9t + 3t = 0$

Άρα, γενική λύση της $L(y) = 0$:

$y_1(t) = C_1 t^2 + C_2 t^3$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ⓑ

$L(y) = 2t - 1 \Leftrightarrow y'' - \frac{3}{t} y' + \frac{3}{t^2} y = 2t - 1$

Έχω $p(t) = -\frac{3}{t}$, $q(t) = \frac{3}{t^2}$ και $f(t) = 2t - 1$

Έστω $y_p(t)$ μια ειδική λύση της μη-ομογενούς, τότε

$y_p(t) = C_1(t)\, t + C_2(t)\, t^3$, οπότε

$$\begin{cases} C_1'(t) t + C_2'(t) t^3 = 0 \\ C_1'(t) 1 + C_2'(t)(3t^2) = 2t - 1 \end{cases}$$

Λύνοντας ως προς C_1', C_2': $C_1'(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & t^3 \\ 2t-1 & 3t^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-t^3(2t-1)}{3t^3 - t^3}$

$$= \frac{t^3-2t^2}{2t^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{t}$$

$$C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & 2t-1 \end{vmatrix}}{2t^3} = \frac{2t^2-t}{2t^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}.$$

Ολοκληρώνοντας:

$$C_1(t) = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\int dt - \int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2} t - \ln t$$

$$C_2(t) = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}\right) dt = \int \frac{1}{t}\, dt + \frac{1}{2}\int -\frac{1}{t^2}\, dt = \ln t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}.$$

Άρα, $\psi_p(t) = \left(\frac{1}{2}t - \ln t\right)t + \left(\ln t + \frac{1}{2t}\right)t^3 = \frac{1}{2}t^2 - t\cdot\ln t + t^3 \ln t$

$$+ \frac{t^2}{2} = \cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}} + \ln t\,(t^3 - t) = t^2 + (t^3-t)\ln t$$

και γενική λύση: $\psi_\Gamma(t) = C_1 t^2 + C_2 t^3 + t^2 + (t^3-t)\ln t$

με $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Θέμα 07/2015 $\quad y'' - y' - 6y = t + 2e^{-2t}$

* Για την ομογενή: $y'' - y' - 6y = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 - r - 6 = 0$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow r_1 = 3 \\ \searrow r_2 = -2 \end{matrix}$$

άρα γενική λύση της ομογενούς: $y_{o\mu}(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$ με $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(α) $y'' - y' - 6y = t$

Η t δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενής, άρα αναζητώ ειδική λύση: $y_{1p}(t) = (A_0 + A_1 t)$

$y_{1p}'(t) = A_1$, $y_{1p}''(t) = 0$

Οπότε: $-A_1 - 6A_0 - 6A_1 t = t$

$\Rightarrow \begin{cases} -A_1 - 6A_0 = 0 \\ -6A_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -1/6 \\ 1/6 = 6A_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -1/6 \\ A_0 = 1/36 \end{cases}$

Άρα: $y_{1p}(t) = \frac{1}{36} - \frac{1}{6}t$

(B) $y'' - y' - 6y = 2e^{-2t}$

Η $2e^{-2t}$ είναι λύση της ομογενούς, άρα αναζητώ ειδική λύση: $y_{2p}(t) = 2Bte^{-2t}$

$y_{2p}'(t) = 2Be^{-2t} - 4Bte^{-2t}$

$y_{2p}''(t) = -4Be^{-2t} - 4Be^{-2t} + 8Bte^{-2t} = -8Be^{-2t} + 8Bte^{-2t}$

Άρα: $-8Be^{-2t} + \cancel{8Bte^{-2t}} - 2Be^{-2t} + \cancel{4Bte^{-2t}} - \cancel{12Be^{-2t}t}$

$= 2e^{-2t} \Rightarrow -10Be^{-2t} = 2e^{-2t} \Rightarrow B = -1/5$

Άρα: $y_{2p}(t) = -\frac{2}{5}te^{-2t}$

Οπότε, από την αρχή της υπέρθεσης $\psi_\Gamma(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{36} - \frac{1}{6}t - \frac{2}{5}te^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Θέμα 07/2015

Να λυθεί το ΠΑΤ: $\left.\begin{matrix} t^2y'' + 5ty' + 5y = 0 \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{matrix}\right\}$

Η $\mathcal{L}(y) = t^2y'' + 5ty' + 5y = 0$ είναι εξίσωση Euler.

Έστω $t > 0$. Θέτοντας $y = t^r$ έχουμε:

$\mathcal{L}(t^r) = t^2 r(r-1)t^{r-2} + 5trt^{r-1} + 5t^r =$

$(r^2 - r)t^r + 5rt^r + 5t^r = t^r[r^2 - r + 5r + 5]$

$= t^r[r^2 + 4r + 5]$

Για την εξίσωση $r^2 + 4r + 5 = 0$ έχουμε ρίζες $r = -1$, $r = -4$.

οπότε η γενική λύση : $y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-4} = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^4}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Για $t=1$: $c_1 + c_2 = 1$ ①

$y'(t) = -\frac{1}{t^2} c_1 - \frac{4}{t^5} c_2$ οπότε για $t=1$: $-c_1 - 4c_2 = 1$ ②

$\Rightarrow$ ① + ② : $c_2 - 4c_2 = 2 \Rightarrow -3c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -2/3$

άρα $c_1 = 1 - c_2 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{3}$

άρα : $y(t) = \frac{5}{3} t^{-1} - \frac{2}{3} t^{-4} = \frac{5}{3t} - \frac{2}{3t^4} = \frac{5t^3 - 2}{3t^4}$

4.14/202 Βιβλίο

Να βρεθεί η γενική λύση της
$y'' + 4y' + 4y = t^{-2} e^{-2t}$

Για την ομογενή : $y'' + 4y' + 4y = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -2$

Άρα, $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 t \cdot e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Αναζητώ ειδική λύση της μη-ομογενούς : $y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$

δηλαδή $y_p(t) = c_1(t) e^{-2t} + c_2(t) t \cdot e^{-2t}$, οπότε:

$$\begin{cases} c_1'(t) e^{-2t} + c_2'(t) t e^{-2t} = 0 \\ c_1'(t)(-2e^{-2t}) + c_2'(t)(1 \cdot e^{-2t} - 2te^{-2t}) = t^{-2} e^{-2t} \end{cases}$$

Λύνοντας ως προς c_1', c_2':

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^{-2t} \\ t^{-2}e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix}} = \frac{-(t \cdot e^{-2t})(t^{-2} e^{-2t})}{e^{-4t} \cancel{- 2te^{-4t}} \cancel{+ 2te^{-4t}}}$$

$$= \frac{-\cancel{e^{-4t}} t^{-1}}{\cancel{e^{-4t}}} = -\frac{1}{t}$$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & t^{-2}e^{-2t} \end{vmatrix}}{+e^{-4t}} = \frac{t^{-2} \cancel{e^{-4t}}}{\cancel{e^{-4t}}} = \frac{1}{t^2}$$

Ολοκληρώνοντας: $c_1(t) = \int -\frac{1}{t}\, dt = -\ln|t|$

$c_2(t) = \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t}$

Άρα, η γενική λύση: $\varphi_\Gamma(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - e^{-2t}\ln|t| - e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(Θέμα 6/2017) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$y'' - y = t + e^t + e^{2t}$

Για την ομογενή: $y'' - y = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \pm 1$.

άρα, η γενική λύση της: $y_{o\mu}(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(α) $y'' - y = t$

Αναζητώ ειδική λύση της μορφής: $y_{1p}(t) = A_0 + A_1 t$

$y_{1p}'(t) = A_1$, $y_{1p}''(t) = 0$

άρα: $-A_0 - A_1 t = t \Rightarrow \begin{cases} -A_1 = 1 \\ -A_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -1 \\ A_0 = 0. \end{cases}$

Άρα, $y_{1p}(t) = -t$

(β) $y'' - y = e^t$

Αναζητώ ειδική λύση: $y_{2p}(t) = Bte^t$

$y_{2p}'(t) = Be^t + Bte^t$

$y_{2p}''(t) = Be^t + Be^t + Bte^t = 2Be^t + Bte^t$

Άρα: $2Be^t + \cancel{Bte^t} - \cancel{Bte^t} = e^t$

$2Be^t = e^t$

$B = 1/2$

Άρα, $y_{2p}(t) = \frac{1}{2} t e^t$

(γ) $y'' - y = e^{2t}$

Αναζητώ ειδική λύση $y_{3p}(t) = \Gamma e^{2t}$

$y_{3p}'(t) = 2\Gamma e^{2t}$, $y_{3p}''(t) = 4\Gamma e^{2t}$

Άρα: $4\Gamma e^{2t} - \Gamma e^{2t} = e^{2t} \rightarrow \Gamma = 1/3$ $\quad y_{3p}(t) = \frac{1}{3} e^{2t}$

Από την αρχή της υπέρθεσης: $y_r(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{t} + \frac{1}{3} e^{2t} - t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4.35/206 Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$y'' - 3y' + 2y = 14\sin 2t - 18\cos 2t$$

Για την ομογενή $y'' - 3y' + 2y = 0$

Η χαρακτηριστική της εξίσωση $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-2) = 0$ έχει ρίζες $r_1 = 1$ και $r_2 = 2$, οπότε έχει γενική λύση:

$y_{ομ}(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Για τη μη-ομογενή αναζητώ λύση της μορφής $y_p(t) = A\sin 2t - B\cos 2t$

$y_p'(t) = 2A\cos 2t + 2B\sin 2t$

$y_p''(t) = -4A\sin 2t + 4B\cos 2t$

Άρα: $-4A\sin 2t + 4B\cos 2t - 6A\cos 2t - 6B\sin 2t + 2A\sin 2t - 2B\cos 2t = 14\sin 2t - 18\cos 2t \Rightarrow -2A\sin 2t - 6B\sin 2t + 2B\cos 2t - 6A\cos 2t = 14\sin 2t - 18\cos 2t$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A - 6B = 14 \\ 2B - 6A = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A - 3B = 7 & |1 \\ B - 3A = -9 & |3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B - 9A = -27 \\ -3B - A = 7 \end{cases} \oplus$$

$-10A = -20$

$A = 2$

άρα $B = -9 + 3A \Rightarrow B = -9 + 6 \Rightarrow B = -3$

άρα: $y_p(t) = 2\sin 2t + 3\cos 2t$

Άρα, $y_r(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + 2\sin 2t + 3\cos 2t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4.36/206 Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$y'' + 4y = 4\cos 2t + 6\cos t + 8t^2 - 4t.$$

Για την αντίστοιχη ομογενή: $y'' + 4y = 0$ η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r^2 = 2^2 i^2 \Rightarrow r = \pm 2i$

Άρα, $y_{ομ}(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$

(α) Αναζητώ ειδική λύση: $y_{1p}(t) = t(A\cos 2t + B\sin 2t)$

$y_{1p}(t) = At\cos 2t + Bt\sin 2t$

$y_{1p}'(t) = A\cos 2t - 2At\sin 2t + B\sin 2t + 2Bt\cos 2t$

$y_{1p}''(t) = -2A\sin 2t - 2A\sin 2t - 4At\cos 2t + 2B\cos 2t + 2B\cos 2t$
$- 4Bt\sin 2t = -4A\sin 2t + 4B\cos 2t - 4At\cos 2t$
$- 4Bt\sin 2t$

Άρα: $-4A\sin 2t + 4B\cos 2t - \cancel{4At\cos 2t} - \cancel{4Bt\sin 2t}$
$+ \cancel{4At\cos 2t} + \cancel{4Bt\sin 2t} = 4\cos 2t \Rightarrow$
$-4A\sin 2t + 4B\cos 2t = 4\cos 2t \Rightarrow \begin{cases} 4B = 4 \\ -4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 0 \end{cases}$

άρα $y_{1p}(t) = t\sin 2t$.

(β) $y'' + 4y = 6\cos t$

Αναζητώ ειδική λύση: $y_{2p}(t) = \Gamma \sin t + \Delta \cos t$.

$y_{2p}'(t) = \Gamma\cos t - \Delta\sin t$, $y_{2p}''(t) = -\Gamma\sin t - \Delta\cos t$

Άρα: $-\Gamma\sin t - \Delta\cos t + 4\Gamma\sin t + 4\Delta\cos t = 6\cos t$

$\Rightarrow 3\Gamma\sin t + 3\Delta\cos t = 6\cos t \Rightarrow \begin{cases} \Gamma = 0 \\ \Delta = 2 \end{cases}$

άρα $y_{2p}(t) = 2\cos t$.

(γ) $y'' + 4y = 8t^2 - 4t$

$y_{3p}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$

$y_{3p}'(t) = A_1 + 2A_2 t$, $y_{3p}''(t) = 2A_2$

Άρα: $2A_2 + 4A_0 + 4A_1 t + 4A_2 t^2 = 8t^2 - 4t$

$\Rightarrow \begin{cases} 2A_2 + 4A_0 = 0 \\ 4A_1 = -4 \\ 4A_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 2 \\ A_1 = -1 \\ A_0 = -\frac{2}{4}A_2 = -1. \end{cases}$

άρα $y_{3p}(t) = -1 - t + 2t^2$

Άρα, η γενική λύση της μη-ομογενούς είναι η:

$y_\Gamma(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + t\sin 2t + 2\cos t - 1 - t + 2t^2$
όπου $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (λόγω της αρχής της υπέρθεσης)