Διαφορικές εξισώσεις 302.

Μαθηματικό Αθήνας

Συλλογή ασκήσεων[1]

Λύτες: Βουλγαρίδου Εύα
Ορμάνογλου Στράβων
Παπαμικρούλη Ελένη
Παπανίκου Μυρτώ

Καθηγητές: Αθανασιάδου - Μπαρμπάτης
Επιμέλεια LaTeX: Βώβος Μάριος

[1]Το παρών έγγραφο ενημερώνεται συνεχώς.

Άσκηση 1

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις και το Π.Α.Τ. που ακολουθούν:

(α′) $y' = -2ty$

(β′) $y' = y\sin t$

(γ′) $\begin{pmatrix} y' = ye^t \\ y(0) = 2e \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α′) $\displaystyle\int \frac{y'}{y}dy = -\int 2tdt + c \Rightarrow \ln y = -t^2 + c \Rightarrow y(t) = c_1 e^{t^2}$

(β′) $\displaystyle\int \frac{y'}{y}dy = \int \sin tdt + c \Rightarrow \ln y = -\cos t + c \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\cos t}$

(γ′) $\displaystyle\int \frac{y'}{y}dy = \int e^t dt + c \Rightarrow \ln y = e^t + c \Rightarrow y(t) = c_1 e^{e^t}$. Εύκολα για $t = 0$ έχουμε ότι $c_1 = 2$, επομένως θα ισχύει $y(t) = 2e^{e^t}$

Άσκηση 2

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} y' - y = -te^{-2t}y^3, \quad (1) \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε εξίσωση Bernoulli με $r = 3$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $u(t) = y^{1-3} = \frac{1}{y^2}$ με $u'(t) = -\frac{2}{y^3}y'$. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με την ποσότητα $-\frac{2}{y^3}$ και έχουμε:

$$-2\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{y^2} = 2te^{-2t} \Leftrightarrow u' + 2u = 2te^{-2t}, \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα στην (4) με $\mu(t) = \exp\left(\int 2dt\right) = e^{2t}$. Πολλαπλασιάζουμε την (2) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα που βρήκαμε και έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{2t}u' + 2e^{2t}u = 2t &\Rightarrow \left(e^{2t}u\right)' = \left(t^2\right)' \\ &\Rightarrow e^{2t}u = t^2 + c \\ &\Rightarrow u = e^{-2t}t^2 + e^{-2t}c \\ &\Rightarrow u(t) = e^{-2t}\left(t^2 + c\right) \\ &\Rightarrow y(t) = \pm\frac{e^t}{\sqrt{t^2 + c}} \end{aligned}$$

Προφανώς η y είναι διάφορη του μηδενός και συνεχής επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο και μάλιστα θετικό αφού $y(0) = 1$. Τελικά έχουμε:

$$y(t) = \frac{e^t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

■

Άσκηση 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $x' + 2tx = 2t^3x^3$, (1).

ΛΥΣΗ:

Έχουμε εξίσωση Bernoulli με $r = 3$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $u(t) = x^{1-3} = \frac{1}{x^2}$ με $u'(t) = -\frac{2}{x^3}x'$. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με την ποσότητα $-\frac{2}{x^3}$ και έχουμε:

$$-2\frac{x'}{x^3} - \frac{4t}{x^2} = -4t^3 \Leftrightarrow u' - 4tu = -4t^3, \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα και έχουμε $\mu(t) = \exp\left(\int -4tdt\right) = e^{-2t^2}$. Επομένως, $u(t) = e^{2t^2}\left(\int e^{-2t^2}\left(-4t^3\right)dt + c\right) = e^{2t^2}\left(e^{-2t^2}t^2 + \frac{e^{-2t^2}}{2} + c\right) = ce^{2t^2} + t^2 + \frac{1}{2}$. Τελικά, έχουμε:

$$y(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{ce^{2t^2} + t^2 + \frac{1}{2}}}$$

■

Άσκηση 4

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y' + 2ty = y^2 + t^2 + 1$, (1).

(α΄) Να βρεθεί μία λύση της (1) της μορφής $y_{\varepsilon\iota\delta}(t) = \alpha t + \beta$, (2).

(β΄) Να βρεθεί μία λύση της (1) που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

ΛΥΣΗ:

(α΄) Η σχέση (2) ικανοποιεί την σχέση (1) άρα:

$$\begin{aligned} (\alpha t + \beta)' + 2t(\alpha t + \beta) &= (\alpha t + \beta)^2 + t^2 + 1 \\ \Rightarrow \alpha + 2t(\alpha t + \beta) &= (\alpha t + \beta)^2 + t^2 + 1 \\ \Rightarrow \alpha + 2\alpha t^2 + 2\beta t &= \alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2 + t^2 + 1 \\ \Rightarrow 2\alpha t^2 + 2\beta t + \alpha &= \left(\alpha^2 + 1\right)t^2 + 2\alpha\beta t + \left(\beta^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Τα πολυώνυμα είναι ίσα οπότε προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} 2\alpha = \alpha^2 + 1 \\ 2\beta = 2\alpha\beta \\ \alpha = \beta^2 + 1 \end{cases}$ που εύκολα έχει λύση $(\alpha, \beta) = (1, 0)$.

Επομένως, $y_{\varepsilon\iota\delta}(t) = t$. ■

(β΄) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $y(t) = y_{\varepsilon\iota\delta}(t) + \frac{1}{u(t)} = t + \frac{1}{u(t)}$ που δίνει $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$ και μέσω της (1) θα είναι:

$$u' + (2t - 2t)u = -1 \Leftrightarrow u' = -1 \Rightarrow u = -t + c$$

Επομένως, η γενική λύση της δ.ε. είναι η $y(t) = t + \frac{1}{c - t}$. Για να διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$ πρέπει $y(0) = 1$ και άρα $c = 1$. Τελικά, έχουμε $y(t) = t + \frac{1}{1 - t}$. ■

Άσκηση 5

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' + \frac{1}{t}y = y^2 - \frac{1}{t^2}$, (1), $t > 0$ αν δέχεται μία λύση της μορφής $y(t) = \frac{\alpha}{t}$, (2).

ΛΥΣΗ:

Η (2) ικανοποιεί την (1) αν ισχύει $\left(\frac{\alpha}{t}\right)' + \frac{1}{t}\cdot\frac{\alpha}{t} = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^2 - \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$. Επομένως, $y_{\varepsilon\iota\delta}(t) = \pm\frac{1}{t}$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $y(t) = y_{\varepsilon\iota\delta}(t) + \frac{1}{u(t)} = \pm\frac{1}{t} + \frac{1}{u(t)}$ που δίνει $y'(t) = \mp\frac{1}{t^2} - \frac{u'}{u^2}$ και κρατώντας ως $y_{\varepsilon\iota\delta}(t) = \frac{1}{t}$ καταλήγουμε ότι $u' + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t}\right)u = -1 \Leftrightarrow u' + \frac{1}{t}u = -1$, (3). Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα στην σχέση (3) και έχουμε $\mu(t) = \exp\left(\int\frac{dt}{t}\right) = e^{\ln t} = t$. Συνεπώς:

$$u(t) = -t\left(\int t\,(-1)\,dt + c\right) = -t\left(c - \frac{t^2}{2}\right) = \frac{t^3}{2} - ct$$

Και τελικά θα έχουμε $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{t^3 - 2ct}$. ■

Άσκηση 6

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' + y = ty^2$, (1).

ΛΥΣΗ:

Έχουμε εξίσωση Bernoulli με $r = 2$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $u(t) = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ με $u'(t) = -\frac{1}{y^2}y'$. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με την ποσότητα $-\frac{1}{y^2}$ και έχουμε:

$$-\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = -t \Leftrightarrow u' - u = -t$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα και έχουμε $\mu(t) = \exp\left(\int -1dt\right) = e^{-t}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} e^{-t}u' - e^{-t}u = -te^{-t} \Rightarrow (e^{-t}u)' &= \left(\int -te^{-t}dt\right)' \\ \Rightarrow e^{-t}u &= e^{-t}(t+1) + c \\ \Rightarrow u &= ce^t + t + 1 \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{ce^t + t + 1} \end{aligned}$$

■

Άσκηση 7

Να λυθεί το παρακάτω Π.Α.Τ.:

$$\left(\begin{array}{c} y' = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)}, \quad (1) \\ y(0) = -1 \end{array}\right)$$

ΛΥΣΗ:

Η (1) γράφεται ως $2y'(y-1) = 3t^2 + 4t + 2$. Ολοκληρώνουμε κατα μέλη και έχουμε:

$$\begin{aligned} \int 2y'(y-1)\,dt &= \int (3t^2 + 4t + 2)\,dt \\ \Rightarrow y^2 - 2y &= t^3 + 2t^2 + 2t + c \\ \overset{y(0)=-1}{\Rightarrow} y^2 - 2y &= t^3 + 2t^2 + 2t + 3 \\ \Rightarrow y^2 - 2y + 1 &= t^3 + 2t^2 + 2t + 4 \\ \Rightarrow (y-1)^2 &= t^3 + 2t^2 + 2t + 4 \\ \Rightarrow y(t) &= 1 \pm \sqrt{t^3 + 2t^2 + 2t + 4} \\ \overset{y(0)=-1}{\Rightarrow} y(t) &= 1 - \sqrt{t^3 + 2t^2 + 2t + 4} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Άσκηση 8

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{pmatrix} y' + y = \int_0^2 y dt, \quad (1) \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $m = \int_0^2 y dt$ οπότε έχουμε $y' + y = m$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα και έχουμε $\mu(t) = \exp\left(\int dt\right) = e^t$. Επομένως, $y(t) = e^{-t}\left(\int me^t dt + c\right) = e^{-t}\left(me^t + c\right) = m + ce^{-t}$. Έχουμε όμως $y(0) = 1$ άρα $c = 1 - m$. Συνεπώς, $y(t) = m + (1-m)\, e^{-t}$. Ολοκληρώνουμε κατά μέλη και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \int_0^2 y dt &= \int_0^2 \left(m + (1-m)e^{-t}\right) dt \\ \Leftrightarrow m &= 2m + (m-1)\left(e^{-2} - 1\right) \\ \Leftrightarrow m &= 1 - e^2 \end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε $y(t) = e^{2-t} + 1 - e^2$. $\blacksquare$

Άσκηση 9

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Να λυθεί το παρακάτω Π.Α.Τ.:

$$\begin{pmatrix} y' + \alpha y = \int_0^\beta y dt, \quad (1) \\ y(0) = \gamma \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $m = \int_0^\beta y dt$ οπότε $y' + \alpha y = m$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα και έχουμε $\mu(t) = \exp\left(\int \alpha dt\right) = e^{\alpha t}$. Επομένως, $\left(e^{\alpha t} y\right)' = \left(\frac{m}{\alpha} e^{\alpha} t\right)' \Rightarrow y(t) = ce^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha}$. Όμως $y(0) = \gamma$ άρα $c = \gamma - \frac{m}{\alpha}$ και συνεπώς $y(t) = \left(\gamma - \frac{m}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha}$. Ολοκληρώνουμε κατα μέλη και άρα:

$$\begin{aligned} \int_0^\beta y dt &= \int_0^\beta \left(\left(\gamma - \frac{m}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha}\right) dt \\ \Leftrightarrow m &= \left[\frac{m}{\alpha} t - \frac{1}{\alpha}\left(c - \frac{m}{\alpha}\right) e^{-\alpha t}\right]_0^\beta \\ \Leftrightarrow m &= \frac{m}{\alpha}\beta - \frac{1}{\alpha}\left(c - \frac{m}{\alpha}\right) e^{-\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha}\left(c - \frac{m}{\alpha}\right) \\ \Leftrightarrow m &= \gamma\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} + \alpha\frac{1 - e^{-\alpha\beta}}{e^{-\alpha\beta}} + e^{-\alpha\beta}\frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}\right) \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε:

$$y(t) = \left(\gamma - \frac{\gamma\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} + \alpha\frac{1-e^{-\alpha\beta}}{e^{-\alpha\beta}} + e^{-\alpha\beta}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\right)}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} + \frac{\gamma\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} + \alpha\frac{1 - e^{-\alpha\beta}}{e^{-\alpha\beta}} + e^{-\alpha\beta}\frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}\right)}{\alpha}$$

$\blacksquare$

Άσκηση 10

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $ye^{xy}dx + (3 + xe^{xy})\, dy = 0$, (1).

ΛΥΣΗ:

Είναι $\underbrace{ye^{xy}}_{M(x,y)}\, dx + \underbrace{(3 + xe^{xy})}_{N(x,y)}\, dy = 0$. Έχουμε $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = e^{xy}(1 + xy)$ που σημαίνει ότι η (1) είναι ακριβής. Άρα, υπάρχει $F(x, y) = c_1$. Επιπλέον $\dfrac{\partial F}{\partial x} = ye^{xy}$, (2) και $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3 + xe^{xy}$, (3). Ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε ότι $F(x, y) = e^{xy} + h(y)$, (4). Παραγωγίζουμε ως προς y την (4) και συγκρίνουμε με την (3). Άρα:

$$xe^{xy} + h'(y) = 3 + xe^{xy} \Leftrightarrow h'(y) = 3 \Rightarrow h(y) = 3y + c_2$$

Τελικά, η (4) γίνεται $F(x, y) = e^{xy} + 3y + c_2 = c_1 \Leftrightarrow e^{xy} + 3y = c$. ■

Άσκηση 11

Να βρεθεί ο ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu\left(t + y^2\right)$ για τη διαφορική εξίσωση $\left(3t + 2y + y^2\right) dt + \left(t + 4ty + 5y^2\right) dy = 0$ και στη συνέχεια να λυθεί.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\underbrace{\left(3t + 2y + y^2\right)}_{M(t,y)} dx + \underbrace{\left(\left(t + 4ty + 5y^2\right)\right)}_{N(t,y)} dy = 0$, (1). Η (1) δεν είναι ακριβής. Πρέπει $(\mu M)\, dt + (\mu N)\, dy = 0$ και $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial t} \Rightarrow \dfrac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \dfrac{\partial N}{\partial t}$, (2). Επίσης, $\mu = \mu\left(t + y^2\right)$ και $S(t, y) = t + y^2$. Επομένως, $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial S}\dfrac{\partial S}{\partial y} = 2y\dfrac{\partial \mu}{\partial S}$, (3). Ακόμη, έχουμε $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = \dfrac{\partial \mu}{\partial S}\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial \mu}{\partial S}$, (4). Από τις σχέσεις (2), (3), (4) έχουμε:

$$2yM\frac{\partial \mu}{\partial S} + m\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial S} + \mu\frac{\partial N}{\partial t}$$
$$\Rightarrow (2yM - N)\frac{\partial \mu}{\partial S} = \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial S} = \frac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{2yM - N}$$

Έστω $h(S) = \dfrac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial t} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{2yM - N} = \dfrac{1 + 4y - 2y - 2}{6yt + 4y^2 + 2y^3 - t - 4ty - 5y^2} = \dfrac{2y - 1}{2yt - y^2 + 2y^3 - t} = \dfrac{1}{t + y^2} = \dfrac{1}{S}$. Άρα:

$$\mu(S) = \exp\left(\int h(S)dS\right) = e^{\ln S} = S = t + y^2, \quad (5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (5) έχουμε:

$$\left(3t + 2y + y^2\right)\left(t^2 + y^2\right) dt\left(t + 4ty + 5y^2\right)\left(t + y^2\right) dy = 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{\left(y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2yt + 3t^2\right)}_{\overline{M}(t,y)} dt + \underbrace{\left(5y^4 + 4ty^3 + 6ty^2 + 4t^2y + t^2\right)}_{\overline{N}(t,y)} dy = 0, \quad (6)$$

Προφανώς, τώρα ισχύει $\dfrac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial t}$ που σημαίνει ότι η (6) είναι ακριβής. Από γνωστό θέωρημα θα υπάρχει συνάρτηση τέτοια ώστε $F(x, y) = c$ με $\dfrac{\partial F}{dt} = y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2yt + 3t^2$ και $\dfrac{\partial F}{dy} = 5y^4 + 4ty^3 + 6ty^2 + 4t^2y + t^2$. Ολοκληρώνοντας ως προς t την πρώτη σχέση έχουμε $F(x, y) = y^4t + 2y^2t^2 + yt^2 + 2y^3t + t^3 + g(y)$. Παραγωγίζοντας ως προς y και συγκρίνοντας με την δεύτερη σχέση που βρήκαμε παραπάνω έχουμε:

$$4y^3t + 4yt^2 + t^2 + 6y^2t + g'(y) = 5y^4 + 4ty^3 + 6ty^2 + 4t^2 + t^2$$
$$\Leftrightarrow g'(y) = 5y^4 \Rightarrow g(y) = y^5 + c_1$$

Άρα, $y^4t + 2y^2t^2 + yt^2 + 2y^3t + t^3 + y^5 + c_1 = c \Leftrightarrow y^4t + 2y^2t^2 + yt^2 + 2y^3t + t^3 + y^5 = c'$. Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή. ■

Άσκηση 12

Για τη διαφορική εξίσωση $\left(x^2y+y^2\right)dx - x^3dy = 0$.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $\underbrace{\left(x^2y+y^2\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(-x^3\right)}_{N(x,y)}dy = 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η δ.ε. δεν είναι ακριβής. Είναι $\mu = \mu(xy)$, $S(x,y) = S = xy$. Έχουμε διαδοχικά $\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = \dfrac{\partial\mu}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} = x\dfrac{\partial\mu}{\partial S}$ και $\dfrac{\partial\mu}{\partial x} = \dfrac{\partial\mu}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} = y\dfrac{\partial\mu}{\partial S}$. Μετασχηματίζουμε την δ.ε. στην ισοδύναμη μορφή $(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$ και έχουμε $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial\mu}{\partial y}M + \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial\mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις είναι:

$$\begin{aligned}
& xM\frac{\partial\mu}{\partial S} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = yN\frac{\partial\mu}{\partial S} + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \\
\Leftrightarrow\ & (xM - yN)\frac{\partial\mu}{\partial S} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial S} = \frac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)}{xM - yN}
\end{aligned}$$

Έστω $g(s) = \dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN} = \dfrac{-3x^2 - x^2 - 2y}{x^3y + xy^2 + yx^3} = \dfrac{-4x^2 - 2y}{2x^3y + xy^2} = -\dfrac{2}{xy} = -\dfrac{2}{S}$ και $\mu(S) = \exp\left(\displaystyle\int g(s)ds\right) = \dfrac{1}{s^2} = \dfrac{1}{x^2y^2}$.
Τελικά, η δ.ε. θα είναι της μορφής:

$$\frac{1}{x^2y^2}\left(x^2y+y^2\right)dx - x^3\frac{1}{x^2y^2}dy = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2}}_{\overline{M}(x,y)} - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{\overline{N}(x,y)}\frac{dy}{dx} = 0$$

Τώρα, η δ.ε. είναι ακριβής και άρα υπάρχει συνάρτηση $F(x,y) = c$ με $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \overline{M}(x,y) = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x^2}$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \overline{N}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}$.
Ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση ως προς x και παραγωγίζουμε το συμπέρασμα ως προς y, συγκρίνοντας το με την δεύτερη σχέση:

$$\left.\begin{aligned}
F &= \int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2}\right)dx + h(y) = \frac{x}{y} - \frac{1}{x} + h(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{x^2}{y} + h'(y) = -\frac{x^2}{y}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

Τελικά, θα είναι $F(x,y) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{x} + h(y) \Leftrightarrow c = \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{x} + c_1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{x} = c'$. ■

Άσκηση 13

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\left(5x^2 - y\right)dx + xdy = 0$ αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \mu(x)$.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $\underbrace{\left(5x^2 - y\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x)}_{N(x,y)}dy = 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η δ.ε. δεν είναι ακριβής. Μετασχηματίζουμε την δ.ε. στην ισοδύναμη μορφή $(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$ και έχουμε $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial\mu}{\partial y}M + \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial\mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x}$
$\Rightarrow \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial\mu}{\partial x}N + \mu\dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial\mu}{\partial x}N = \mu\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{-1-1}{x} = -\dfrac{2}{x}$.
Άρα, $\mu = \exp\left(\displaystyle\int f(x)dx\right) = \dfrac{1}{x^2}$. Τελικά, η δ.ε. γίνεται:

$$\underbrace{\left(5 - \frac{y}{x^2}\right)}_{\overline{M}(x,y)}dx + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\overline{N}(x,y)}dy = 0$$

Η δ.ε. είναι ακριβής και άρα υπάρχει συνάρτηση $F(x,y)=c$ με $\frac{\partial F}{\partial x}=\overline{M}(x,y)=5-\frac{y}{x^2}$ και $\frac{\partial F}{\partial y}=\overline{N}(x,y)=\frac{1}{x}$. Ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση ως προς x και παραγωγίζουμε το συμπέρασμα ως προς y, συγκρίνοντας το με την δεύτερη σχέση:

$$\left.\begin{aligned} F &= \int\left(5-\frac{y}{x^2}\right)dx + h(y) = 5x + \frac{y}{x} + h(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{x} + h'(y) = \frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

Τελικά, έχουμε $5x+\frac{y}{x}=c'$. ■

Άσκηση 14

Να προσδιορίσετε τη διαφορίσιμη συνάρτηση $f(0)=0$, για την οποία η διαφορική εξίσωση $2+y^3\cos t+f(t)y^2y'=0$ είναι ακριβής. Στη συνέχεια, να λυθεί η διαφορική εξίσωση για την προκύπτουσα f.

ΛΥΣΗ:

Έχουμε $\underbrace{\left(2+y^3\cos t\right)}_{M(t,y)}dx+\underbrace{\left(f(t)y^2y'\right)}_{N(t,y)}dy=0$. Αφού η f είναι ακριβής πρέπει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow 3y^2\cos t = f'(t)y^2 \Leftrightarrow f'(t) &= 3\cos t \\ \Rightarrow f(t) &= 3\sin t + c_1, \ , f(0)=0 \\ \Rightarrow f(t) &= 3\sin t \end{aligned}$$

Οπότε η δ.ε. γίνεται $2+y^3\cos t+3\sin ty^2y'=0 \Leftrightarrow y'+\frac{2+y^3\cos t}{3y^2\sin t}=0 \Leftrightarrow y'+\frac{\cos t}{3\sin t}y=-\frac{2}{3\sin t}y^{-2}$. Άρα, έχουμε Bernoulli για $r=-2$. Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $u(t)=y^{1-r}=y^3$ με $u'(t)=3y^2y'$. Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. με $3y^2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} 3y^2y'+\frac{\cos t}{\sin t}y^3 = -\frac{2}{\sin t} \Rightarrow u'(t)+\frac{\cos t}{\sin t}u(t) &= -\frac{2}{\sin t} \\ \Rightarrow \sin tu'(t)+\cos tu(t) &= -2 \\ \Rightarrow (\sin tu(t))' &= (-2t)' \\ \Rightarrow u(t) &= \frac{c-2t}{\sin t} \\ \Rightarrow \frac{1}{y^3} &= \frac{c-2t}{\sin t} \\ \Rightarrow y(t) &= \sqrt[3]{\frac{\sin t}{c-2t}} \end{aligned}$$

■