$3^{η}$ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ο αντίθετός του -α είναι μοναδικός. Δηλαδή, ότι αν β είναι ένας πραγματικός αριθμός και α+β=0 τότε β=-α.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $α \neq 0$ ο αντίστροφός του $α^{-1}$ είναι μοναδικός.

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 0 είναι είναι μοναδικός. Δηλαδή, ότι αν ο μ είναι πραγματικός αριθμός και α+μ=α για κάθε πραγματικό αριθμό α, τότε μ=0.

4. Να αποδείξετε ότι $α \cdot 0=0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει:

I. $(-α)\cdot β=-(αβ)$

II. $(-α)\cdot(-β)=αβ$.

6. Α. Αν $α \neq 0$, να αποδείξετε ότι $α^2>0$.

Β. Να δείξετε ότι 1>0.

7. Να βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

I. $α_ν = \frac{ν^2+2ν+1}{3ν^2+5}$ II. $α_ν = \frac{2ν^2+4ν-7}{ν^2+6ν+1}$

III. $α_ν = \frac{ν^2+3}{ν^3+5ν+3}$ IV. $α_ν = \frac{2ν+1}{-4ν^2+5}$

8. Να βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

I. $α_ν = \left(\frac{2}{5}\right)^ν + \left(\frac{4}{7}\right)^ν + 3$ II. $α_ν = \frac{2\cdot 3^ν+4^ν}{3^ν-4^ν}$

III. $α_ν = \frac{4\cdot 3^ν-4^ν+4\cdot 5^ν}{3^ν-4^ν+2\cdot 5^ν}$.

9. Να βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

I. $α_ν = \frac{ημν}{ν}$ II. $α_ν = \frac{συνν}{ν^2}$.

10. Α. Να δείξετε ότι για κάθε $ν \in N^*$ ισχύει: $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3ν-2)(3ν+1)} = \frac{ν}{3ν+1}$.

Β. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας $α_ν = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3ν-2)(3ν+1)}$.

11. Α. Να δείξετε ότι για κάθε $ν \in N^*$ ισχύει: $1+2+3+\ldots+ν = \frac{ν(ν+1)}{2}$.

Β. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας $α_ν = \frac{1+2+3+\ldots+ν}{ν^2+2ν+1}$.