

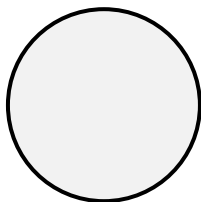
2^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Να βρεθεί το μέτρο και η γωνία κατεύθυνσης του διανύσματος $u=(-2,2)$.
2. Να εξετάσετε αν είναι κάθετα τα διανύσματα u και v στις παρακάτω περιπτώσεις:
 - I. $u=(3,6)$ και $v=(-2,1)$.
 - II. $u=(2,3)$ και $v=(5,-4)$.
3. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα u με κατεύθυνση ίδια με αυτή του διανύσματος $v=(2,-5)$. Να εξετάσετε αν το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο διάνυσμα $v=(3,4)$.
4. Να βρεθεί διάνυσμα u με κατεύθυνση ίδια με αυτή του διανύσματος $v=(1,\sqrt{3})$ και μέτρο ίσο με αυτό του διανύσματος $s=(1,0)+3(1,-1)$.
5. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $u=(3,6)$ και $v=(-2,1)$.
6. Να αποδείξετε κάθε μία από τις παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων:
 - I. $s \cdot (u+v) = s \cdot u + s \cdot v$.
 - II. $v \cdot v = \|v\|^2$.
7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.
 - I. Να δείξετε ότι οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνονται.
 - II. Αν K το σημείο τομής των παραπάνω διχοτόμων δείξτε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .
 - III. Δείξτε ότι το K είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
8. Διατυπώστε και αποδείξτε αντίστοιχα ερωτήματα με αυτά της προηγούμενης άσκησης 7 για το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων ενός τριγώνου $AB\Gamma$ (κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου).
9.
 - I. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180° . Σε ποιο σημείο της απόδειξης είναι αναγκαίο το Ευκλείδειο αξίωμα της παραλληλίας;
 - II. Δείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 360° και ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου είναι 540° . Γενικεύστε σε έναν τύπο για το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με n πλευρές.
10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE=AB$ και την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z=A\Delta$. Να δείξετε ότι $\Gamma E // B\Delta$ και ότι $Z\Gamma // AB$. Εξηγήστε πως από αυτό προκύπτει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.
11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + y + 1 = 0$.
12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από τα σημεία:
 - I. $A(1,5)$ και $B(3,2)$.
 - II. $A(4,1)$ και $B(4,-2)$.
 - III. $A(1,0)$ και $B(3,0)$.
13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και
 - α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$
 - β) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$
 - γ) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$
 - δ) σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 135° .

14. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A (- 2, 3), B (- 6, 1) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.
15. Δίνονται τα σημεία A (4, 2), B (3, - 1) και η ευθεία $\epsilon: y = - 3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ϵ , ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το B.
16. Να εξετάσετε αν είναι σωστό ή λάθος καθένα από τα παρακάτω:
- A. Τα σημεία A (- 2, - 1), B (1, 4) και Γ (- 4, 2) είναι συνευθειακά.
- B. Οι ευθείες $\epsilon_1: 7x + 3y + 2 = 0$ και $\epsilon_2: 2x + 5y - 3 = 0$ είναι κάθετες.
- Γ. Η ευθεία AB με A (1, - 4) και B (- 1, - 5) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 3$.
- Δ. Δίνονται τα σημεία A(-3,-1), B(2,2), Γ(-3,4) και Δ(3, -6). Η ευθεία AB είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.
- Ε. Οι ευθείες $y = 3x + 1$ και $3x - y = 4$ τέμνονται.
- Z. Αν οι ευθείες $(\mu + 1)x - y = 0$ και $3x + y - 7 = 0$ είναι παράλληλες, τότε $\mu = 2$.
17. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2
- β) έχει κέντρο το σημείο (3, - 1) και ακτίνα 5
- γ) έχει κέντρο το σημείο (- 2, 1) και διέρχεται από το σημείο (- 2, 3)
- δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με A (1, 3) και B (- 3, 5)
- ε) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 1) και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$.
18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Να δείξετε ότι είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
19. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 7 = 0$.
20. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής των ευθειών $\epsilon_1: x + y - 2 = 0$ και $\epsilon_2: 5x - y - 4 = 0$ και εφάπτεται στην ευθεία $\eta: 3x + 4y - 4 = 0$.
21. (Διχοτόμος γωνίας)
- A. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας.
- Εφαρμογή 1: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται σε δύο δοθείσες τεμνόμενες ευθείες.
- Εφαρμογή 2: Εξετάστε τον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο στην περίπτωση που οι ευθείες είναι παράλληλες.
- B. 1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στις ευθείες $\epsilon_1: 3x + 4y - 7 = 0$ και $\epsilon_2: 6x - 8y + 2 = 0$.
2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στις ευθείες $\epsilon_1: 3x + 4y - 7 = 0$ και $\epsilon_2: 3x + 4y = 0$.
- Ποιά είναι η διαφορά στις δύο περιπτώσεις B1 και B2;
22. (Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος)
- A. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
- Εφαρμογή: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο δοθέντα σημεία A και B.
- B. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από τα σημεία A(1,-1) και B(3,5).

23. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι ορίζουν ίσες χορδές AB και ΓΔ στις πλευρές δοθείσης γωνίας $\widehat{\chi\Omega\psi}$.
24. Πάνω στους θετικούς ημιάξονες Οχ και Οψ παίρνουμε μεταβλητά σημεία Α και Β, αντίστοιχα, έτσι ώστε $AB = \lambda$ σταθερό. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.
25. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(-1,1). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $(MA)^2 - (MB)^2 = 2$.
26. Δίνονται τα σημεία Α(2,1) και Β(2,-3). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $(MA)^2 + (MB)^2 = 8$.
27. Δίνονται τρία ευθύγραμμο τμήματα α, β, γ. Να κατασκευαστεί τρίγωνο με πλευρές τα τμήματα αυτά.
 Εφαρμογή 1: Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται οι πλευρές του $\alpha = ΒΓ$, $\beta = ΑΓ$ και η διάμεσός του $\mu_\alpha = ΑΜ$.
 Εφαρμογή 2: Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται η πλευρά του $\alpha = ΒΓ$, η διάμεσός του $\mu_\alpha = ΑΜ$ και το ύψος του $u_\alpha = ΑΔ$.
28. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να κατασκευαστεί η μεσοκάθετος του ΑΒ.
 Εφαρμογή 1: Να κατασκευαστεί το μέσον ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
 Εφαρμογή 2: Να κατασκευαστεί η διχοτόμος δοθείσης γωνίας.
 Εφαρμογή 3: Να κατασκευαστεί η κάθετη μιας ευθείας σε ένα δοθέν σημείο Α αυτής.
 Εφαρμογή 4: Να κατασκευαστεί η καθετη σε μια ευθεία από δοθέν σημείο Α που δεν ανήκει στην ευθεία.
 Εφαρμογή 5: Να κατασκευαστεί η παράλληλη σε μια ευθεία από δοθέν σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτήν.
 Εφαρμογή 6: Δίνεται κύκλος και σημείο Α αυτού. Να κατασκευαστεί η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α.
29. Δίνεται γωνία φ και μια ημιευθεία Αχ. Να κατασκευαστεί γωνία ίση με την φ που η μια πλευρά της να είναι η Αχ.
 Εφαρμογή 1: Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται οι πλευρές του $\beta = ΑΓ$, $\gamma = ΑΒ$ και η γωνία του $\phi = \hat{A}$.
 Εφαρμογή 2: Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται η πλευρά του $\alpha = ΒΓ$ και οι γωνίες του $\phi = \hat{B}$ και $\theta = \hat{C}$.
 Εφαρμογή 3: Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται η πλευρά του $\alpha = ΒΓ$, η γωνία του $\phi = \hat{B}$ και η διάμεσός του $\mu_\alpha = ΑΜ$.
 Εφαρμογή 4: Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται η πλευρά του $\alpha = ΒΓ$, η γωνία του $\phi = \hat{B}$ και το ύψος του $u_\alpha = ΑΔ$.
30. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ένα σημείο Α εκτός αυτού. Να κατασκευαστούν οι εφαπτόμενες από το Α στον κύκλο.
31. Δίνονται δύο σημεία Α και Β και ένα ευθύγραμμο τμήμα ρ. Να κατασκευαστεί ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και έχει ακτίνα ρ.
32. Δίνεται μια ευθεία ζ, ένα σημείο Α αυτής και ένα σημείο Β που δεν ανήκει στην ευθεία. Να κατασκευαστεί ο κύκλος που εφάπτεται στην ευθεία στο σημείο Α και διέρχεται και από το σημείο Β.

33. Στον παρακάτω κύκλο έχει σβηστεί το κέντρο του. Να βρείτε τρόπο να προσδιορίσετε το κέντρο (με κανόνα και διαβήτη) και να περιγράψετε τα βήματα της κατασκευής σας.



34. Δίνεται το επόμενο τετράγωνο αριστερά. Κατασκευάστε (με κανόνα και διαβήτη) το αντίστοιχο σχήμα δεξιά περιγράφοντας τα βήματα της κατασκευής σας.

