ΘΕΩΡΙΑΣ

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ~~ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ~~ ~~ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.~~ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

Νικόλαος Αλικάκος

Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Μάιος 2006

+ Corner layer

Περιεχόμενα

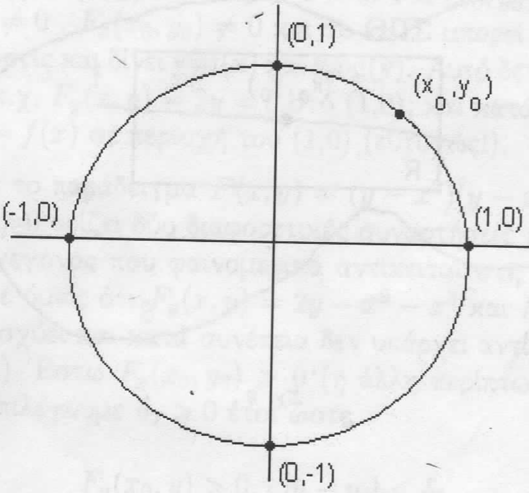
1 Το Κεντρικό Θεώρημα

1.1 Θεώρημα Πεπλεγμένης συναρτήσης

Η εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

συσχετίζει τις μεταβλητές x και y και ορίζει τη μια σαν συνάρτηση της άλλης.



Σχ. 1

Έστω (x_0, y_0) όπως στο σχήμα 1. Τότε τοπικά σε περιοχή του σημείου η (1) ορίζει

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}\,, \quad y_0 = f(x_0)$$

και ανάλογα

$$x = g(y) = \sqrt{1-y^2}\,, \quad x_0 = g(y_0)$$

Για (x_0, y_0) επί των αξόνων, έχουμε μόνο μια επιλογή. Για παράδειγμα, αν $(x_0, y_0) = (1, 0)$ αναγκαστικά επιλέγουμε το x σαν συνάρτηση του y.

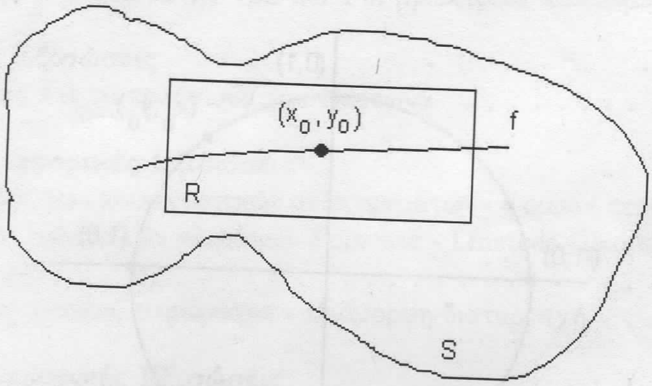
Όταν δωθεί μια γενική εξίσωση της μορφής

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

είναι εν γένει σπάνιο να μπορούμε να εκφράσουμε σε λυμένη μορφή τη μια μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης. Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων εγγυάται, κάτω από κατάλληλες υποθέσεις, ότι η (2) ορίζει τη μία μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης, τουλάχιστον τοπικά περί το (x_0, y_0) που ικανοποιεί την (2) και επιτρέπει τον υπολογισμό της συνάρτησης με όση ακρίβεια επιθυμούμε.

Θεώρημα 1.1 *Έστω $F(.,.)$ C^1 -συνάρτηση ορισμένη σε ανοιχτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in S$.*

$F(\cdot,\cdot)$



Σχ. 2

Υποθέτουμε ότι
(I) $F(x_0, y_0) = 0$
(II) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

Τότε υπάρχουν $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε στο ορθογώνιο $R = \{(x, y) \,/\, |x - x_0| \leq \delta_1, |y - y_0| \leq \delta_2\} \subseteq S$ ισχύουν τα ακόλουθα
(i) $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $\exists \,!\, y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ *τέτοιο ώστε*

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει καλώς ορισμένη y=f(x) που ικανοποιεί

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \tag{4}$$

και όλες οι λύσεις της (3) μέσα στο R βρίσκονται πάνω στο γράφημα της f(x).

(ii) Η f(x) είναι C^1, $f : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \to (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $f(x_0) = y_0$, και ικανοποιεί επίσης τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1). \tag{5}$$

Παρατηρήσεις

(1) Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα με παραγώγιση από την (4):

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) f'(x)$$

(2) Θεωρούμε την $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Για (x_0, y_0) εκτός των αξόνων ισχύει $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ και το ΘΠΣ μπορεί να εφαρμοστεί και στις δύο κατευθύνσεις και δίνει y=f(x) και x=g(y). Αυτό δεν ισχύει για (x_0, y_0) επί των αξόνων: π.χ, $F_y(x, y) = 2y = 0$ στο (1,0), και κατά συνέπεια το ΘΠΣ δεν εγγυάται $y = f(x)$ σε περιοχή του (1,0) (ευτυχώς!).

(3) Θεωρείστε το παράδειγμα $F(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ που σε περιοχή του (0,0) η F(x,y)=0 ορίζει δύο διαφορετικές συναρτήσεις $y = f_1(x) = x^2$ και $y = f_2(x) = x^3$ γεγονός που φαινομενικά αντίκειται στη μοναδικότητα του f(x). Παρατηρούμε όμως ότι $F_y(x, y) = 2y - x^2 - x^3$ και $F_y(0, 0) = 0$, άρα η υπόθεση (ΙΙ) δεν ισχύει και κατά συνέπεια δεν υπάρχει αντίφαση.

Απόδειξη. (1) Έστω $F_y(x_0, y_0) > 0$ (η άλλη περίπτωση $F_y(x_0, y_0) < 0$ είναι ανάλογη). Επιλέγουμε $\delta_2 > 0$ έτσι ώστε

$$F_y(x_0, y) > 0, \quad |y - y_0| \leq \delta_2 \tag{6}$$

το οποίο είναι δυνατόν λόγω συνέχειας. Κατά συνέπεια, η $y \longmapsto F(x_0, y)$ είναι αυστηρά αύξουσα, και δεδομένου ότι $F(x_0, y_0) = 0$ έχουμε

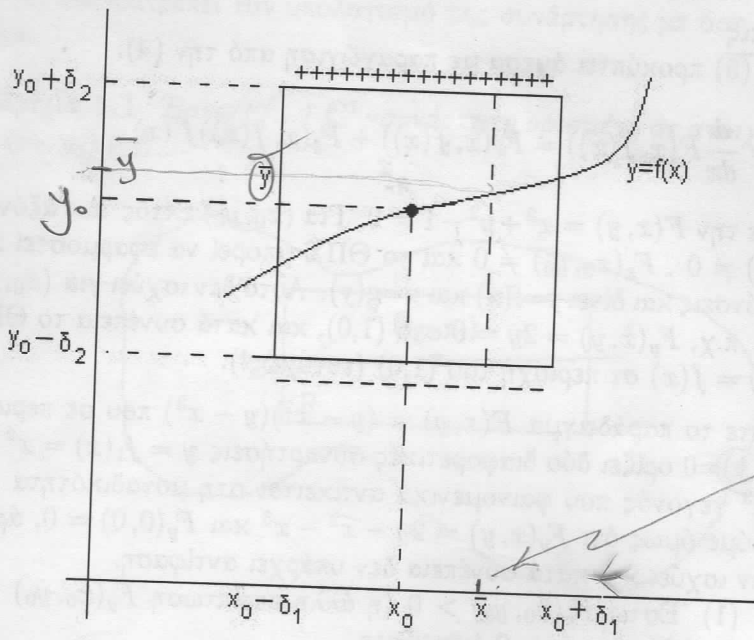
$$F(x_0, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \delta_2) > 0. \tag{7}$$

Κάνοντας χρήση τώρα της συνέχειας $x \longmapsto F(x, y_0 \pm \delta_2)$ με δ_1 αρκετά μικρό, έχουμε

$$F(x, y_0 - \delta_2) < 0, \quad F(x, y_0 + \delta_2) > 0, \quad |x - x_0| \leq \delta_1. \tag{8}$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει ένα ορθογώνιο $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ στην πάνω πλευρά του οποίου η F είναι θετική, στην κάτω αρνητική. Επιλέγοντας τα δ_1, δ_2 μικρότερα ενδεχομένως μπορούμε να εγγυηθούμε ότι εντός του ορθογωνίου ισχύει

$$F_y > 0 \tag{9}$$



Σχ. 3

(2) Εάν δοθεί τώρα $\bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $y \longmapsto F(\bar{x}, y)$, $y \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ η οποία αλλάζει πρόσημο ακριβώς μια φορά λόγω (8) και (9). Κατά συνέπεια, λόγω συνέχειας υπάρχει $\bar{y} \in [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ τέτοιο ώστε

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{10}$$

Το $\bar{y}$ είναι μοναδικό (λόγω (9)). Ορίζουμε λοιπόν

$$f(\bar{x}) := \bar{y}, \;\; \bar{x} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]. \tag{11}$$

3. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = x_0$. Δοθέντος $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $F(x, y_0 + \epsilon) > 0$, $F(x, y_0 - \epsilon) < 0$

για $|x - x_0| < \delta$. Κατά συνέπεια, λόγω συνέχειας, υπάρχει $y^* = y^*(x)$ με $y^* \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ τέτοιο ώστε $F(x, y^*(x)) = 0$.

Λόγω της μοναδικότητας της f(x), συμπεραίνουμε ότι $y^*(x) = f(x)$ και κατά συνέπεια $|f(x)-f(x_0)| = |y^*(x)-y_0| < \varepsilon$ για $|x-x_0| < \delta$ που αποδεικνύει τη συνέχεια.

Για $x^* \neq x_0$, $x^* \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ θεωρούμε το σημείο $(x^*, f(x^*)) \in R$. Οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν για το (x^*, y^*) στη θέση του (x_0, y_0). Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω κατασκευή οδηγούμαστε σε μια f^* που συμπίπτει αναγκαστκά με την f λόγω του ορισμού της τελευταίας ως μοναδικής λύσης της εξίσωσης F(x,y)=0. Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο x^* για κάθε $x^* \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.

4. Τέλος θα δείξουμε ότι η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \tag{12}$$

από όπου έπεται ότι η $f \in C^1$.
Έστω λοιπόν x φιξαρισμένο σημείο και $y = f(x)$. Για Δx τέτοιο ώστε $x + \Delta x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, ορίζουμε

$$\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + \Delta x) - y.$$

Από τον ορισμό της f έχουμε

$$F(x, y) = 0 = F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = F(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F_x(\bar{x}, \bar{y})\Delta x + F_y(\bar{x}, \bar{y})\Delta y$$

όπου $\bar{x} \in (x, x + \Delta x), \bar{y} \in (y, y + \Delta y)$ και κάναμε χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής.

Έπεται ότι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\bar{x}, \bar{y})}{F_y(\bar{x}, \bar{y})} \tag{13}$$

όπου κάναμε χρήση του $F_y > 0$ στο R. Παίρνοντας το όριο $\Delta x \longrightarrow 0$, κάνοντας χρήση της συνέχειας έχουμε $\Delta y \longrightarrow 0$, και κατά συνέπεια $(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow (x, y)$ και από την (13) έχουμε

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

Ισχύει η εξής γενική μορφή του ΘΠΣΘ που την παραλείπουμε χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 1.2 *Έστω $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ χώροι Banach και $F \in C(\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Έστω $F(\lambda_0, u_0) = 0$ για κάποιο $(\lambda_0, u_0) \in \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{X}$. Εάν η μετρική παράγωγος $F_u(\lambda, u)$ υπάρχει σε περιοχή του (λ_0, u_0) και εάν*

(a) $(\lambda, u) \longrightarrow F_u(\lambda, u)$, συνεχής σε περιοχή του (λ_0, u_0),

(b) $F_u(\lambda_0, u_0)$ *ισομορφισμός από* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$.

Τότε, υπάρχει συνεχής καμπύλη $\lambda \longrightarrow u(\lambda)$ που ορίζεται για λ σε περιοχή του $\lambda_0 \in \mathbf{\Lambda}$ τέτοια ώστε

$$u(\lambda_0) = u_0, \quad F(\lambda, u(\lambda)) = 0.$$

Επίσης, οποιαδήποτε λύση της $F(\lambda, u) = 0$ σε περιοχή του (λ_0, u_0) είναι της μορφής $(\lambda, u(\lambda))$.

1.2 Μικρή (ομαλή) διαταραχή Χαμιλτονιανού Συστήματος

([A], σελ. 149)

Θεωρούμε το σύστημα

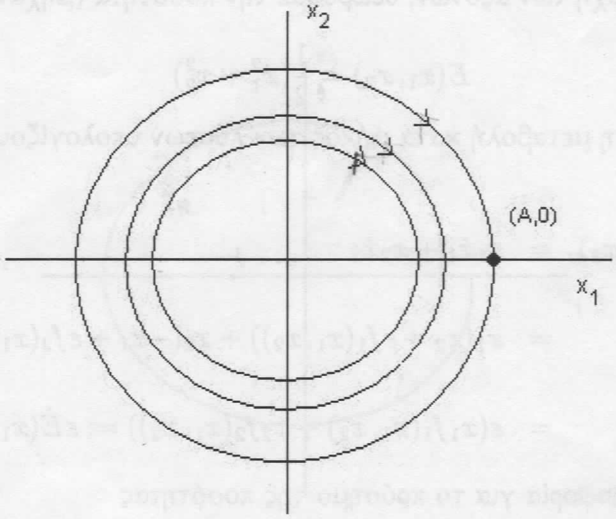
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2) \qquad |\varepsilon| << 1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{14}$$

(όπου f_i C^1 συναρτήσεις)

που διαφέρει ελαφρώς από τον γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \tag{15}$$

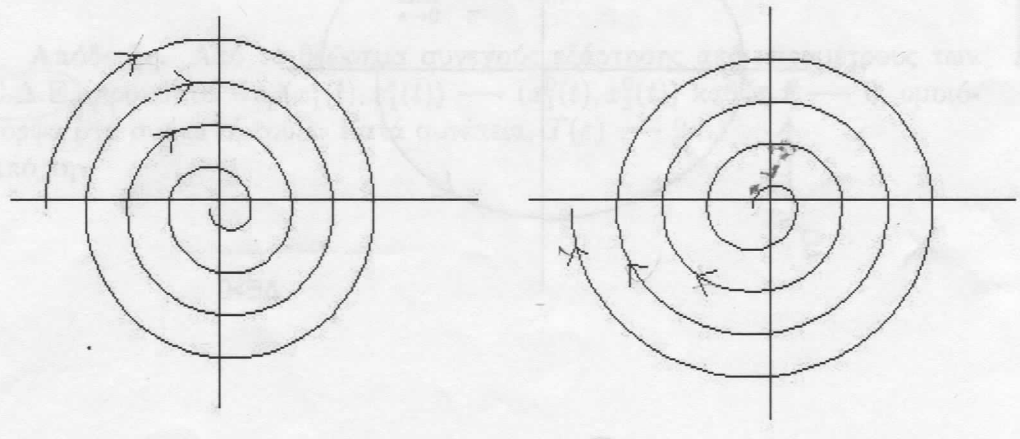
του οποίου όλες οι λύσεις είναι περιοδικές:



Σχ. 4Α

$$x_1^0(t) = A\cos(t - t_0)$$
$$x_2^0(t) = A\sin(t - t_0)$$

Οι τροχιές του (14) εν γένει δεν είναι κλειστές και ενδέχεται να έχουμε τη μορφή ελικοειδούς με απόκλειση της τάξης του ε μεταξυ 2 διαδοχικών στροφών:



Σχ. 4Β

Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η ελικοειδής λύση πλησιάζει ή απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, θεωρούμε την ποσότητα (μηχανική ενέργεια)

$$E(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

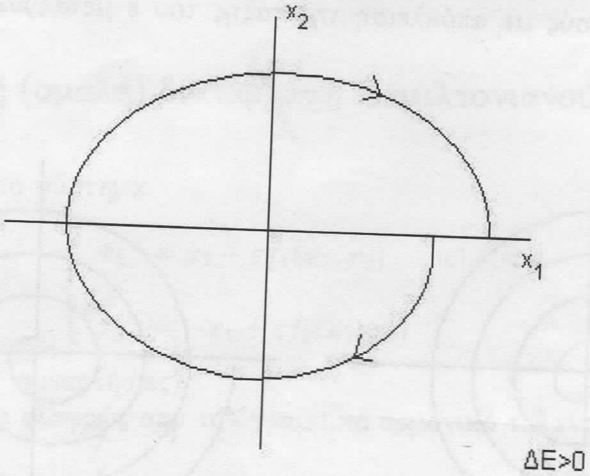
της οποίας τη μεταβολή κατά μήκος των λύσεων υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x_1,x_2) &= x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2\\ &= x_1(x_2+\varepsilon f_1(x_1,x_2))+x_2(-x_1+\varepsilon f_2(x_1,x_{=}2))\\ &= \varepsilon(x_1f_1(x_1,x_2)+x_2f_2(x_1,x_2)) =: \varepsilon\dot{E}(x_1,x_2)\end{aligned}$$

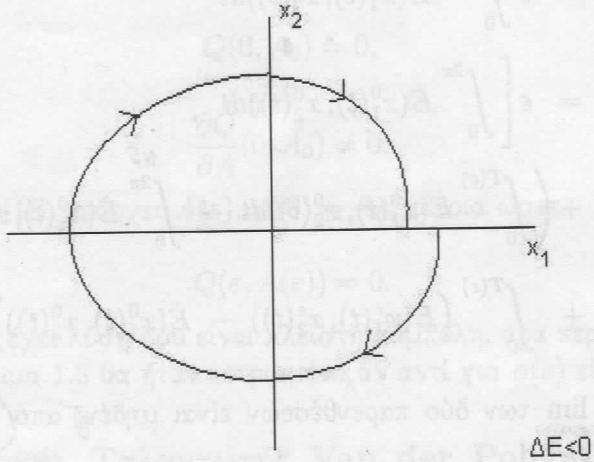
Ζητάμε πληροφορία για το πρόσημο της ποσότητας

$$\int_0^{T(\varepsilon)}\varepsilon\dot{E}(x_1^\varepsilon(t),x_2^\varepsilon(t))dt =: \Delta E \tag{16}$$

που αντιστοιχει στη μεταβολή της ~~κινητικής~~ ενέργειας της $(x_1^\epsilon(t),x_2^\epsilon(t))$ κατά μια πλήρη "περιστροφή": $x_2^\epsilon(0)=x_2^\epsilon(T(\epsilon))=0$



Σχ. 4Γ.



Σχ. 5

Λήμμα 1.3

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(A cos(t-t_0), A sin(t-t_0))dt \ + \ o(\varepsilon). \tag{17}$$

<u>Συμβολισμός:</u> Εξ' ορισμού, o(ε) είναι ποσότητα που εξαρτάται από το ε και

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

[AK(§2.4]

Απόδειξη. Από το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης από παραμέτρους των Σ.Δ.Ε. προκύπτει ότι $(x_1^\varepsilon(t), x_1^\varepsilon(t)) \longrightarrow (x_1^0(t), x_2^0(t))$ καθώς $\varepsilon \longrightarrow 0$, ομοιόμορφα στα συμπαγή του t. Κατά συνέπεια, $T(\varepsilon) \longrightarrow 2\pi$.
Από την

ε

ΣΔΕ

$$\Delta E \; = \; \varepsilon \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t))dt \tag{18}$$

$$= \; \varepsilon \Bigg[\int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt$$

$$+ \left(\int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt \; - \; \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt \right)$$

$$+ \; \int_0^{T(\varepsilon)} \left(\dot{E}(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t)) \; - \; \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) \right) dt \Bigg].$$

λόγω ότι του $\lim_{\varepsilon \to 0}$ των δύο παρενθέσεων είναι μηδέν, από συνχή εξάρτηση, συνεχή
προκύπτει η (17).

□

Θέτουμε

$$F(A) := \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt \tag{19}$$

και γράφουμε την (17) ως

$$\Delta E = \varepsilon \left[F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right]. \tag{20}$$

Θεώρημα 1.4 *Έστω ότι η F έχει απλή ρίζα στο A_0.*

$$F(A_0) = 0 \quad F'(A_0) \neq 0$$

Τότε το (14) έχει περιοδική λύση πλάτους $A_0 + O(\varepsilon)$ για $|\varepsilon| << 1$.

Η αντιπροσωπεύει <u>Συμβολισμός:</u> Το $O(\varepsilon)$ ~~είναι~~ παράσταση που εξαρτάται από το ε και για την οποία ισχύει η εκτίμηση $|O(\varepsilon)| < C|\varepsilon|$ ~~όπου C σταθερά ανεξάρτητη από το ε,~~ για $|\varepsilon| << 1$, όπου C μια σταθερά ανεξάρτητη του ε.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$Q(\epsilon, A) := F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Η Q είναι C^1 (εδώ κάνουμε χρήση από Σ.Δ.Ε. της ομαλής εξάρτησης ως προς ε) και

$$Q(0, A_0) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A}(0, A_0) \neq 0.$$

Μέσω του ΘΠΣ, υπάρχει $A(\varepsilon)$, $A(0) = A_0$, τέτοια ώστε

$$Q(\varepsilon, A(\varepsilon)) = 0.$$

Άρα το (14) έχει λύση που είναι κλειστή καμπύλη, άρα περιοδική. □

<u>Σχόλιο</u>: Το Λήμμα 1.3 θα ήταν τετριμμένο αν αντί για $o(\varepsilon)$ είχαμε $O(\varepsilon)$. και αχρηστο

1.3 Εφαρμογή: Ταλαντωτής Van der Pol [ηλεκτρικά κυκλώματα].

Θεωρούμε την εξίσωση

$-x$

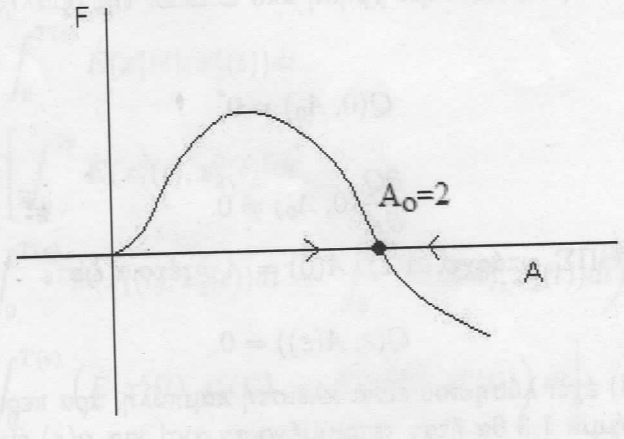
$$\ddot{x} = -x + \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) \qquad (Van\ der\ Pol)$$

την οποία γράφουμε σε μορφή συστήματος θέτοντας $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon x_2(1 - x_1^2). \\ \dot{E}(x_1, x_2) &= x_2^2(1 - x_1^2) \end{aligned}$$

$$F(A) = \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2(t - t_0)(1 - A^2 \cos^2(t - t_0))dt =$$

$$= \pi(A^2 - \frac{A^4}{4}).$$



Σχ. 6

Κατά συνέπεια η εξίσωση Van der Pol έχει περιοδική λύση για $|\varepsilon| << 1$ κοντά στην περιφέρεια $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Ø 1

Άσκηση 1.5 *Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση Duffing:* $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$. *Παίρνετε καμία πληροφορία;*

Ø 2

Άσκηση 1.6 *Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση:*

$\ddot{x} = -x + \varepsilon|x|^p\dot{x}(1 - x^{2q})$.

όπου $p,\ q > 0$.

(i) (Χ. Ιωακίμ) Για $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *και άρτιο* γκαι $q \in \mathbb{N}$, *εξίσωση έχει μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους*

$$x_1^2 + x_2^2 = \left[\frac{2.4...2q}{1.3...(2q-1)}\frac{2.4.6...(2q+p+2)}{2.4...p(p+2)}\right]^{\frac{1}{q}} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

X_2^2

X_2^2

(ii) (Χ. Ιωακίμ) Για p, q *όπως στο (i), και επίσης* $p+2 = 2q$ *έχουμε μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους* $x_1^2 + x_2^2 = 4 + O(\varepsilon)$, $q \in \mathbb{N}/\{0\}$

στο (ι)

(iii) (Μπερκέτης) Για p, q *όπως στο ένα και* $\lim_{q\to\infty}\frac{4}{q} = 2$ *έχουμε μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους* $x_1^2 + x_2^2 = 4 + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Ø 3

Άσκηση 1.7 *Θεωρείστε την εξίσωση τύπου Van der Pol*

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon f(\dot{x})(1 - x^2)$$

Επιλέξτε f κατάλληλο πολυώνυμο έτσι ώστε να υπάρχουν ακριβώς 3 περιοδικές λύσεις για $\varepsilon << 1$. Για το παράδειγμα που θα κατασκευάσετε ερευνείστε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων.

Άσκηση 1.8 *(Χ. Ιοακίμ) Θεωρείστε την εξίσωση τύπου Van der Pol*

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon[16\dot{x}^5 - 80\dot{x}^3 + 175\dot{x}](1 - x^2)$$

Δείξτε ότι για $\varepsilon << 1$ (π.χ. ε=0.001) έχουμε 3 οριακούς κύκλους, 2 ευσταθείς με πλάτη $x_1^2 + x_2^2 = 4 + O(\varepsilon)$ και $x_1^2 + x_2^2 = 7 + O(\varepsilon)$ και έναν ευσταθή με πλάτος $x_1^2 + x_2^2 = 5 + O(\varepsilon)$.

2 Αλγεβρικές Εξισώσεις

2.1 Κλίμακες και το πολύγωνο του Νεύτωνα

Το ΘΠΣ δίνει ύπαρξη λύσεων της

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{ή } F(z, w) = 0) \tag{21}$$

κάτω από υποθέσεις σε περιοχή σημείου $(x_0, y_0)(= (0, 0)$ χωρίς βλάβη της γενικότητας) που ικανοποιεί την εξίσωση, $F(x_0, y_0) = 0$. Στην περίπτωση που η F είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών, ή γενικότερα

$$\begin{cases} F : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \text{ αναλυτική ως προς 2 μεταβλητές} \\ \text{σε περιοχή του } (0,0) \text{ της μορφής (βλ. υπόμνημα} \\ \text{θεώρημα προπαρασκευής του Weierestrass)} \\ F(z, w) = w^k + a_{k-1}(z) w^{k-1} + \ldots + a_0(z) \\ a_j(z) = a_j^{(p_j)} z^{p_j} + a_j^{(p_j+1)} z^{p_j+1} + \ldots \\ a_0^{(p_0)} \neq 0 \\ \text{όπου } a_j(z) \text{ αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις } j = 0, 1, \ldots, k-1 \end{cases} \tag{22}$$

Οι υποθέσεις του ΘΠΣ πραφανώς δεν ικανοποιούνται διότι $F_w(0, 0) = 0$. Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε όλες τις λύσεις $w = f_l(z)$ σε περιοχή του (0,0), $l = 1, \ldots, K_n$.

k