

ΜΑΠ - Επισκόπηση Μαθηματικών - Όκτώβριος 2020
Πρώτη Εργασία στην Επισκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΑΜ :

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** 1. Η παράδοση της εργασίας θα γίνει την ημέρα της εξέτασης Τρίτη 24/11/2020.
2. Να λύσετε όλα τα προβλήματα. Τα προβλήματα είναι ισοδύναμα.
3. Το σύνολο των εργασιών που θα παραδώσετε μπορεί να σας προσαυξήσει τη τελική βαθμολογία το πολύ κατά μία μονάδα, μόνο αν ο βαθμός της τελικής εξέτασης είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 5.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα με απαλοιφή Gauss.

$$\begin{aligned}x - 2y + 2z - w &= 1 \\2x - 4y + 3z + w &= 0 \\3x - 6y + 6z - 3w &= 3\end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

Έστω ο 3×3 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- (α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και οι ιδιοτιμές του.
(β) Να βρεθούν οι ιδιόχωροι που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή, καθώς και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.
(γ) Εξετάστε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, και αν ναι, να βρείτε τον αντιστρέψιμο πίνακα P της διαγωνοποίησης, καθώς και τον A^{-1} .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Έστω ο υπόχωρος $U = \text{span}\{(-1, 1, 2), (4, 3, 5), (3, 2, 3)\}$ του \mathbb{R}^3 .

- (α) Να βρεθεί μία βάση του U και η διάστασή του.
(β) Είναι σωστός ο ισχυρισμός ότι $U = \mathbb{R}^3$; Εξηγήστε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Έστω ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

- (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές καθώς και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .
(β) Να βρεθεί ο A^3 από το Θεώρημα Caley-Hamilton.
(γ) Εξετάστε αν ο A διαγωνοποιείται και αν ναι, να βρείτε τον αντιστρέψιμο πίνακα P της διαγωνοποίησης, καθώς και τον διαγώνιο Δ . Χρησιμοποιώντας τη διαγωνοποίηση, να βρεθεί ο A^{-1} .
(δ) Να βρεθεί η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον πίνακα A και να χαρακτηριστεί.