Μερικές διαφορικές εξισώσεις

Ενδιάμεση εξέταση. 23 Νοεμβρίου 2019

1. (25 Βαθμοί) Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_x + xyu_y = 0, \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$u(0, y) = f(y) \qquad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R},$$

όπου $f \in C^1(\mathbb{R})$ δεδομένη.
(α) Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές καμπύλες αυτής της μερικής διαφορικής εξίσωσης; Για δεδομένο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ποια είναι η χαρακτηριστική που διέρχεται από αυτό;
(β) Να λυθεί το πιο πάνω πρόβλημα.

2. (30 Βαθμοί) Έστω ότι η u λύνει το πρόβλημα

$$y^2u_x - x^2u_y = xy^2u, \qquad \text{για } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$
$$u(0, y) = g(y) \qquad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

όπου $g \in C^1(\mathbb{R})$ δεδομένη. Θέτουμε $\xi := x^3 + y^3, \eta := x$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $U(\xi, \eta) := u(x, y)$ όπου τα x, y προσδιορίζονται μοναδικά ως συναρτήσεις των ξ, η.
(α) Να προσδιοριστεί μια ΜΔΕ που ικανοποιεί η U ισοδύναμη με την (1).
(β) Να λυθεί η ΜΔΕ του (α) και να προσδιοριστεί η u που λύνει το αρχικό πρόβλημα.

3. (25 Βαθμοί) Δίνεται ότι κάθε λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ της εξίσωσης $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R}^2$ (όπου $c > 0$) είναι της μορφής $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ για κάποιες $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Έστω ότι για μια τέτοια u γνωρίζουμε ότι $u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με ϕ, ψ δεδομένες συναρτήσεις.
(α) Να δειχθεί ότι $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ και $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.
(β) Να εκφραστεί η u ως συνάρτηση των ϕ, ψ.

4. (25 Βαθμοί) Έστω u η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad \text{για κάθε } (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οι ϕ, ψ είναι δεδομένες συναρτήσεις με $\phi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$.
(α) Αν οι ϕ, ψ είναι άρτιες, να δειχθεί ότι για κάθε $t \geqslant 0$ σταθερό, η $u(\cdot, t)$ είναι άρτια συνάρτηση.
(β) Αν οι ϕ, ψ παίρνουν μη αρνητικές τιμές και $\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) > 0\} = (0, A)$, όπου $A > 0$ σταθερά, να βρεθεί το σύνολο $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : u(x, t) > 0\}$.

5. (25 Βαθμοί) Έστω $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε οι $f, \partial_x f(x, t)$ να είναι συνεχείς.
(α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x, t) = \int_0^t f(x - c(t - s), s)\, ds$ λύνει το πρόβλημα

$$\begin{aligned} &u_t + cu_x = f(x, t) && \text{στο } \Omega := \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ &u(x, 0) = 0 && \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(β) Για f όπως πιο πάνω και $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} &u_t + cu_x = f(x, t) && \text{στο } \Omega := \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ &u(x, 0) = \phi(x) && \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Γράψτε 4 θέματα

Άριστα είναι το 100. Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. (α) $\gamma(x) = (x, y(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι η χαρακτηριστική που διέρχεται από το (x_0, y_0), όπου $y(x) = y_0 e^{-x_0^2/2} e^{x^2/2}$.
(β) $u(x, y) = f(ye^{-x^2/2})$.

2. (α) $U_\eta - \eta U = 0$.
(β) $u(x, y) = g((x^3 + y^3)^{1/3}) e^{x^2/2}$.

4. (β) Ισχύει $u(x, t) > 0$ αν και μόνο αν το διάστημα εξάρτησης του x, t τέμνει το $(0, A)$ σε σύνολο με θετικό μήκος. Δηλαδή αν το $[x - 3t, x + 3t] \cap (0, A)$ έχει θετικό μήκος. Αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν $x + 3t > 0$ και $x - 3t < A$ (γιατί διαφορετικά...). Άρα το ζητούμενο σύνολο είναι το

$$\{(x, t) : t \geqslant 0, -3t < x < A + 3t\}$$

5. (β) $u(x, t) = \phi(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - s), s)\, ds$