Μερικές διαφορικές εξισώσεις

Εξέταση 2 Σεπτεμβρίου 2019

1. (15 Βαθμοί) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_t - xtu_x &= 0, \\ u(x,0) &= f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

στο μέγιστο υποσύνολο του $H = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ που αυτό είναι δυνατόν. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια δεδομένη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

2. (20 Βαθμοί) (α) Να αναχθεί η εξίσωση $u_{tt} - u_{xx} = 0$ στην $U_{\xi\eta} = 0$ όπου $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ για κατάλληλες γραμμικές συναρτήσεις $x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)$.

(β) Να δειχθεί ότι κάθε λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ της $u_{tt} - u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R}^2$ γράφεται στη μορφή $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$ για κατάλληλες $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

(γ) Αν μια λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ της $u_{tt} - u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί την $u_x(x,0) + u_t(x,0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η u είναι ένα οδεύον κύμα που κινείται προς τα δεξιά. [Ερμηνεύουμε τη μεταβλητή t ως χρόνο και την x ως χώρο.]

3. (20 Βαθμοί) Να λυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{array}{ll} u_t = 2u_{xx} & \text{στο } \Omega := (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 2\sin(3x) - \sin(5x) & \text{για κάθε } x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για κάθε } t > 0. \end{array}$$

4. (15 Βαθμοί) Για οποιαδήποτε συνεχή $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, ορίζουμε τους συντελεστές Fourier της ως

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}, \\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Για μια 2π-περιοδική $f \in C^1(\mathbb{R})$, γνωρίζουμε τους συντελεστές $a_k(f), b_k(f)$. Να βρεθούν συναρτήσει αυτών οι συντελεστές Fourier των (περιορισμών στο $[-\pi, \pi]$ των) συναρτήσεων

(α) $3f(x)$,

(β) $f'(x)$,

(γ) $f(2x)$.

5. (15 Βαθμοί) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (k είναι μια θετική σταθερά)

$$\begin{array}{ll} u_t = ku_{xx} & \text{στο } \Omega := (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = xe^{-x} & \text{για κάθε } x \in [0,\infty), \\ u(0,t) = 0 & \text{για κάθε } t > 0. \end{array}$$

Να δοθεί σε ολοκληρωτική αναπαράσταση μια λύση του.

6. (15 Βαθμοί) Έστω $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος και $u \in C(\bar{D})$ αρμονική συνάρτηση με $u(x,y) = x^2$ για κάθε $(x,y) \in \partial D$.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της u στο $\bar{D}$ και ένα σημείο στο οποίο αυτή λαμβάνεται.

(β) Να υπολογιστεί η τιμή $u(0,0)$.

7. (15 Βαθμοί) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xxx} & \text{στο } \Omega := (0,1) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{για κάθε } x \in [0,1], \\ u_x(0,t) = h(t) & \text{για κάθε } t > 0, \\ u_{xx}(0,t) = k(t) & \text{για κάθε } t > 0, \\ u_x(1,t) = \lambda(t) & \text{για κάθε } t > 0, \end{array}$$

όπου g, h, k, λ είναι δεδομένες συναρτήσεις. Να δειχθεί ότι το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση. [Υπόδειξη: Χρήσιμο είναι το συναρτησιακό $E_w(t) = \int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx$ για $w \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$ και $t \geqslant 0$.]

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. $u(x,t) = f(xe^{t^2/2})$.

2. (α), β). Θεωρία. Σελ. 139 στο βιβλίο των Ακρίβη-Αλικάκου.

3. $u(x,t) = 23^{-18t}\sin(3x) - e^{-50t}\sin(5x)$.

4. (α) $a_k(3f) = 3a_k(f), b_k(3f) = 3b_k(f)$.
(β) $a_k(f') = kb_k(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με τη σύμβαση $b_0(f) = 0$. $b_k(f') = -ka_k(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$.
(γ) Έστω $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $g(x) = f(2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$a_k(g) = \begin{cases} a_{k/2}(f) & \text{αν } k \text{ άρτιος,} \\ 0 & \text{αν } k \text{ περιττός,} \end{cases}$$

και για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$ έχουμε

$$b_k(g) = \begin{cases} b_{k/2}(f) & \text{αν } k \text{ άρτιος,} \\ 0 & \text{αν } k \text{ περιττός,} \end{cases}$$

5. Κάνουμε περιττή επέκταση της xe^{-x} στο $\mathbb{R}$. Η επέκταση είναι η $\phi(x) = xe^{-|x|}$. Οι λεπτομέρειες, όπως στις σελίδες 306, 307 του βιβλίου των Ακρίβη-Αλικάκου.

6. Σελίδα 385 στο Ακρίβης-Αλικάκος. (α) Αρχή του μεγίστου. Μέγιστο στο $(1,0)$ με τιμή την 1.
(β) Ιδιότητα της μέση τιμής. Βρίσκουμε $u(0,0) = 1/2$.

7. Έστω u_1, u_2 δύο λύσεις του προβλήματος. Τότε η $w := u_1 - u_2$ λύνει το ίδιο πρόβλημα όπου όμως $g = h = k = \lambda = 0$. Θεωρούμε την $E : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$E(t) = \int_0^1 w_x^2(x,t)\,dx$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Η E είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και η παράγωγός της σε κάθε $t > 0$ είναι

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\int_0^1 w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\,dx = 2w_x(x,t)w_t(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 w_{xx}(x,t)w_t(x,t)\,dx \\ &= -2\int_0^1 w_{xx}(x,t)w_{xxx}(x,t)\,dx = -w_{xx}^2(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} = -w_{xx}(1,t)^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Άρα η E είναι φθίνουσα. Η $w(x,0) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ δίνει $w_x(x,0) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε $E(0) = 0$. Επειδή λοιπόν η E είναι φθίνουσα και μη αρνητική, έπεται ότι $E(t) = 0$ για κάθε $t \geqslant 0$. Και επειδή η $x \mapsto w_x(x,t)$ είναι συνεχής, παίρνουμε $w_x(x,t) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα $w_x = 0$ στο Ω. Έπειτα, παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση και χρησιμοποιώντας τη διαφορική εξίσωση παίρνουμε $w_t = w_{xxx} = 0$. Άρα $\nabla w = (w_x, w_t) = 0$ στο Ω. Κατά τα γνωστά (το Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό), αυτό δίνει ότι η w είναι σταθερή στο Ω. Όμως η w είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$ και οι τιμές της στο $[0,1] \times \{0\}$ είναι μηδέν, άρα $w = 0$ στο $\bar{\Omega}$.