ΕΝΕΔΙΜ 9
2022

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
9ου ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

3-5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΝΕΔΙΜ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ
ΤΜΗΜΑΤΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ
Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ
Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ
Α. ΧΡΟΝΑΚΗ
Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ

ΕΝΕΔΙΜ, 2022

Εν.Ε.Δι.Μ.

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
της Ένωσης Ερευνητών
Διδακτικής των Μαθηματικών

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ
ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ, Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ, Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ,
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ, Α. ΧΡΟΝΑΚΗ, Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
3-5 Ιουνίου 2022

Αναφορά ως

Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.: Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις.* Βόλος: ΕΝΕΔΙΜ

ISBN: 978-618-82277-2-9

Οργάνωση Ύλης: Β. Χρυσικού
Γραφιστική Επιμέλεια: Β. Κατσιγιαννάκης

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

Το 9ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.), συνδιοργανώνεται από την Εν.Ε.Δι.Μ. και τα Παιδαγωγικά Τμήματα (ΠΤΔΕ, ΠΤΠΕ, ΠΤΕΑ) του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Το συνέδριο διεξάγεται στο Παραλιακό Συγκρότημα Παπαστράτου του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας από τις 3 μέχρι τις 6 Ιουνίου του 2022.

Στο θέμα του συνεδρίου «Η Μαθηματική Εκπαίδευση Μπροστά σε Νέες και Παλιές Προκλήσεις» αποτυπώνεται η ανάγκη για επαναπροσδιορισμό των κυρίαρχων προσανατολισμών της μαθηματικής εκπαίδευσης ώστε να είναι σε θέση να απαντήσει σε νέες προκλήσεις, όπως η πρόσφατη συγκυρία της πανδημίας, καθώς και σε πάγιες προκλήσεις, όπως: ποια μαθηματική εκπαίδευση χρειαζόμαστε και πώς αυτή πραγματώνεται, πώς σχετίζεται το περιεχόμενό της με τρέχουσες κοινωνικές αλλαγές, με την εκπαίδευση σε άλλα επιστημονικά πεδία ή άλλου είδους ανθρώπινες δραστηριότητες.

Το θέμα αφορά σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και εξειδικεύεται στους παρακάτω άξονες:

Θεματικός Άξονας 1: Η μαθηματική εκπαίδευση και η θέση της στη σύγχρονη εκπαίδευση

Θεματικός Άξονας 2: Κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης

Θεματικός Άξονας 3: Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Θεματικός Άξονας 4: Αναπτυξιακές και γνωστικές προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών και η επίδρασή τους στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Θεματικός Άξονας 5: Εμπειρικές και θεωρητικές μελέτες στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που δεν κατατάσσονται στους προηγούμενους θεματικούς άξονες.

Το συνέδριο φιλοξενεί τρεις κεντρικές ομιλίες, από τη διεθνή και την ελληνική ακαδημαϊκή κοινότητα και ένα στρογγυλό τραπέζι. Τόσο οι κεντρικές όσο και οι υπόλοιπες εργασίες του συνεδρίου αναδεικνύουν τους προβληματισμούς και τις προσπάθειες της ερευνητικής και της εκπαιδευτικής κοινότητας να απαντήσουν στα πολυεπίπεδα ζητήματα με τα οποία συνδέεται η μαθηματική εκπαίδευση.

Μετά από μεγάλο διάστημα αποχής από δια ζώσης δραστηριότητες και επικοινωνία, φιλοδοξούμε ότι το 9ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ. θα δώσει την ευκαιρία τόσο σε νέους/ες όσο και σε έμπειρους/ες ερευνητές/ήτριες να μοιραστούν τις ιδέες, τον προβληματισμό και την ερευνητική τους εμπειρία και πρακτική και από κοινού να συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, καθώς και την αξιοποίησή της για μια πιο δίκαιη κοινωνία.

Από το Προεδρείο του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου

Επιτροπές του Συνεδρίου

Οργάνωση

Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)
Παιδαγωγικά Τμήματα Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Προεδρείο

Σταθοπούλου Χαρούλα, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Χρονάκη Άννα, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Επιστημονική Επιτροπή

Καλαβάσης Φραγκίσκος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πιττάλης Μάριος, Λέκτορας, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Τζεκάκη Μαριάννα, Ομότιμη Καθηγήτρια, Αριστοτέλειο Παν. Θεσσαλονίκης
Ψυχάρης Γιώργος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Καποδιστριακό Παν. Αθηνών

Οργανωτική Επιτροπή

Λαζαρίδου Ειρήνη, Υποψ. Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μανιώτη Ευσταθία, Υποψ. Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μπαλαμπανίδου Ζαφείρα, Υποψ. Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μπαμπάτσικου Γεωργία, Υποψ. Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Παπαγιαννακοπούλου Βίκυ, Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σδρόλιας Κωνσταντίνος, ΕΔΙΠ, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σταθοπούλου Χαρούλα, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Φόβος Ιωάννης, Υποψ. Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Χρυσικού Βασιλική, Διδάσκουσα ΠΔ 407/80, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Γραμματειακή Υποστήριξη

Σαραντοπούλου Σταυρένια

Ιστοσελίδα, Λογότυπο

Κατσιγιαννάκης Βαγγέλης

Ηλεκτρονική Επικοινωνία

enedim9@uth.gr

Ιστοσελίδα

enedim9.sed.uth.gr

Χορηγοί

Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
ΠΜΣ «Σχεδιασμός Μαθήματος και Ανάπτυξη Υλικού σε Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης» (ΠΤΔΕ ΠΘ)
Εκδόσεις Gutenberg
ΕΨΑ
Park Hotel Volos
25άρι

Κριτές των εργασιών

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
ΒΑΜΒΑΚΟΥΣΗ ΞΕΝΙΑ
ΔΑΛΛΑΣ ΜΑΡΚΟΣ
ΔΕΣΛΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ
ΖΑΓΟΡΙΑΝΑΚΟΣ ΑΝΤΩΝΗΣ
ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ
ΖΑΧΑΡΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΚΑΛΑΒΑΣΗΣ ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΣ
ΚΑΛΔΡΥΜΙΔΟΥ ΜΑΡΙΑ
ΚΑΜΠΟΥΡΙΔΗ ΒΑΡΒΑΡΑ
ΚΑΣΣΩΤΗ ΟΛΓΑ
ΚΑΦΟΥΣΗ ΣΟΝΙΑ
ΚΛΙΑΠΗΣ ΠΕΤΡΟΣ
ΚΛΩΘΟΥ ΑΝΝΑ
ΚΟΛΕΖΑ ΕΥΓΕΝΙΑ
ΚΟΤΑΡΙΝΟΥ ΠΟΤΑ
ΚΥΝΗΓΟΣ ΧΡΟΝΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ
ΚΑΛΑΒΑΣΗΣ ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΣ
ΛΕΜΟΝΙΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΜΑΜΩΝΑ-ΝΤΑΟΥΝΣ ΙΩΑΝΝΑ
ΜΕΛΕΤΙΟΥ-ΜΑΥΡΟΘΕΡΗ ΜΑΡΙΑ
ΜΙΣΑΗΛΙΔΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ
ΜΟΥΤΣΙΟΣ-ΡΕΝΤΖΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΜΠΑΛΑΜΠΑΝΙΔΟΥ ΖΑΦΕΙΡΑ
ΜΠΕΜΠΕΝΗ ΜΑΡΙΑ
ΜΠΙΖΑ ΕΙΡΗΝΗ
ΝΑΡΔΗ ΕΛΕΝΑ
ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΝΟΥΛΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΞΕΝΟΦΩΝΤΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΝΑΟΥΡΑ ΡΙΤΑ
ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΛΕΝΗ
ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΠΙΤΤΑ-ΠΑΝΤΑΖΗ ΔΗΜΗΤΡΑ
ΠΙΤΤΑΛΗΣ ΜΑΡΙΟΣ
ΠΟΤΑΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ
ΣΑΚΟΝΙΔΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΔΡΟΛΙΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΣΚΟΥΜΠΟΥΡΔΗ ΧΡΥΣΑΝΘΗ
ΣΤΟΥΡΑΙΤΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ ΧΑΡΟΥΛΑ
ΤΑΤΣΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΤΖΕΚΑΚΗ ΜΑΡΙΑΝΝΑ
ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ
ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΧΡΥΣΑΥΓΗ
ΤΣΙΤΣΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
ΧΑΒΙΑΡΗΣ ΠΕΤΡΟΣ
ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΧΡΟΝΑΚΗ ΑΝΝΑ
ΧΡΥΣΙΚΟΥ ΒΑΣΙΛΙΚΗ
ΨΥΧΑΡΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

Πίνακας Περιεχομένων

ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ (POSTERS)

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ/ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ

PLUS C'EST LA MÊME CHOSE, PLUS ÇA CHANGE

Appelbaum Peter

Arcadia University, Philadelphia, USA

appelbap@arcadia.edu

As the historical anthropologist Marshall Sahlins once wrote, plus c'est la même chose plus ça change. In the context of current global crises, mathematics educators can find lessons in the study of colonialism and its long term after-effects in two ways: The first is in thinking about the broad social situation, and how teaching and learning mathematics does and does not prepare our students for living through crises, anticipating and responding to crises, and contributing to a society that anticipates, confronts and survives crises. The second set of lessons looks at our discipline of mathematics itself, and how it is culpable in the creation of crises, in the construction of an ill-prepared society, and what school-based practices can do to think about such important issues. One powerful source of ideas for these ways of thinking will be highlighted: "Education in an Anthropocene" necessitates new forms of teaching and learning for living in and engaging in a more-than-human world; it also requires learners to develop skills for critiquing the Anthropocene and its associated themes if they are to consider how the nonhuman and material worlds co-shape our mutual existence. In particular, such an approach honors local ways of being mathematical without perpetuating the worst characteristics of mathematics as a tool of colonialism, and which struggle against the erasure ("epistemicide") of non-Western versions of mathematics. Broad suggestions for approaching school mathematics will be proposed. We will note how the recommendations are similar to what we would have thought about before the pandemic; the pandemic only makes them more obvious.

THE CONSTANT CHALLENGES ARE STILL BEFORE US

My presentation offers some thoughts on the conference theme, which ends with the question, "What mathematical education do we need and how is it realized, how is its content related to current social changes, to education in other scientific fields, or to other kinds of human activities?" As mathematicians and mathematics educators, I propose that we negotiate among three powerful directions for our thinking: First, we can recognize the potential of mathematics and mathematics education to empower all learners individually and as members of communities, and the potential for mathematics to transform our understanding of important problems. This first perspective demands that we take on the responsibility to use our positions as mathematicians and mathematics educators, to act on our knowledge and expertise, to use our specialized talents in serving all people and our planet. Second, we need at the same time to be self-critical, and to see our role and our knowledge with humility. This second perspective demands that we embrace the ways that our knowledge and expertise may be as much the cause of our problems as the solution, that our knowledge may be constrained and limited by its blind spots and weaknesses, and that some problems are not best approached by trying to solve them – that there are other relationships that mathematics can build and support. The third perspective asks us to worry more about the ways that our strengths as mathematicians and mathematics educators are implicated in those ways that the mathematics we know and love distracts us from the tasks at hand, dissolves important forms of understanding into amorphous confusions, or undermines our values through walls of ignorance. Our conference theme points to all three perspectives, as it emphasizes consistent core challenges in the midst of what feels, in the moment, like new and extremely formidable contexts: ongoing global crises accompanying climate change, continuing geopolitical conflicts instigating mass migration of refugees, economic instability and related forms of human rights violations, human trafficking, bio-exploitation, etc. The shocks brought on by increasingly rapid acceleration of cultural and technological change have been overtaken by the threat of a virus, something too small to even see or touch, yet persistently evolving to meet our ever-increasing attempts to slow its spread and devastation.

My invitation today is to step away for a moment from classroom activities, in order to re-connect to our curriculum in ways that do not feel unrelated to these colossally huge and overpowering challenges to our very existence. I ask you first to think about the geological stage of our planet that we are experiencing, and the place of humans in that vast evolutionary flow. I will then ask you to consider a more recent history of colonialism and the post-colonial period and its after-effects on school and mathematics. Finally, I will wonder with you what we might do now, in the next days, weeks and months, as mathematicians and mathematics educators who have these perspectives in mind.

THE ANTHROPOCENE AND POST-ANTHROPOCENE

Every day brings new horror stories about the changes brought about through global warming. The tree line in the Arctic is receding and turning what was frozen tundra into a green, ever-warmer ecosystem; what used to be a change of a few meters per year is now 50 or more. Sea levels are rising and taking over cities and communities. Severe weather is found in places that used to be rather calm. Massive disruptions are more and more common, at an alarming rate. Ecology and concerns about our planet used to condemn the enlightenment period of history for bringing on a human hubris that treated nature as resources to serve humanity. In this historical era, humanity is better understood as a geologic force, creating massive changes in the entire planet. Ecology and concerns about nature previously studied how our science and technology were inadvertently harmful to ourselves or local species. Now, we understand how mountains and rocks and rivers and beaches and forests are the victims of rights violations as much as people forced into slave labor or fleeing war for the lives of their children. We are witnessing, it seems, the planet's attempts to reign in the uncontrolled forces of humanity as a destructive parasite, characterizing a period sometimes called the "Anthropocene," in order to usher in a post-Anthropocene, post-human, era.

Instead of alarms that the world is ending, some say the end has already arrived. Humans are going to slowly experience this end over many years of increasing struggles to survive.

What might this have to do with mathematics education? One way to answer this is to consider that education has, as one of its important roles, to provide members of a community, on the one hand, with the skills and concepts that maintain and preserve the culture and values of that community, and on the other, with the skills and tools needed to address the current or future needs of that community These roles are consistent with the second of the perspectives I mentioned in my introduction. However, "we now live on a bio-physically different planet than the one in which modern civilization developed and in which our common assumptions about education were formed" (Greenwood, 2014, p.281). In comparison, the first perspective I raised would responsibly pursue the question, "Okay, then, so, what skills and concepts do people need in the Anthropocene to survive and flourish for now and for centuries to come?" … So our mathematics skills and objectives probably need to change. Of course, we do not need to choose one perspective over the other as the most correct or appropriate in this instance, and we do also have that third perspective: that perhaps we need to re-frame our relationships with education and mathematics as we experience the shift from the Anthropocene to the Post-Anthropocene. In other words, to ask entirely different kinds of questions.

As mathematicians and mathematics educators, we might ask here in this conference, "What are *we* to do?" We might feel torn between what Paul Ernest described 30 years ago as two directions for our work: between the location of mathematics in the world of our students' experience, and our desires to share the delights and power of mathematics, that is, to teach the kinds of mathematics that are powerful thinking tools in their purest form

(Ernest 1991). Or, more to the point for today's conversation, we might be torn between two ways in which our intellectual work takes shape in the world, as noted by Gelsa Knijnik 20 years ago: primarily, as scholars and teachers, we are intellectuals with expertise; yet, as a different kind of intellectual, we have an additional, social practice function, in which our work can and often is embedded in social movements and takes on social practice dimensions (Knijnik 2001). When we place our work in the social practice kind of intellectual work, and think of our students as potentially finding pleasures in both possible locations of mathematics in their own life experiences, we create opportunities to consider the third perspective on mathematics education that I am raising in my presentation today. We and our students are living in the post-Anthropocene, without creating forms of education and social action that would help us to find meaning and joy in this world. Until we do, the antiquated education of the Anthropocene keeps us bewildered at the changes in our planet and our world without the tools to live in our world, continues to hold us back, continues to fail us.

Recent responses to my work have asked me to consider the many successes of our mathematics education that have in fact prepared society to cope with and reduce the harms of the challenges we face. Mathematical modelling and mathematical methods have helped in the study of viruses, the creation of vaccinations, the regulation and systematic reduction of economic disasters, prediction of cataclysmic climate changes, and more. I agree that such intellectual achievements have been remarkable. I also worry, however, that these apparent successes are perhaps little more than distractions from the work that truly must be done.

One description of our lived experience shares much with the notion of dread from the philosopher Søren Kierkegaard (1968). Angst, dread, fear, or apprehension… How might mathematics education support our students and our communities and institutions through the combined sense of being overwhelmed together with the ominous foreboding that entangles each of us, preventing progress in any activity. Such dread is overwhelming. Even as we anticipate the coming end of life as we know it, this dread captures us in a paradoxical desire to understand and witness this oncoming deluge of catastrophe. We are impotent in our confrontation with these existential threats to humanity. The promise of mathematics as critical to the solution of problems is also the promise that mathematics can describe the problems ever more increasingly as a never-ending nightmare.

WHERE CAN WE FIND ANALOGOUS ORIENTATIONS THAT CAN HELP US DECIDE WHAT TO DO? – CRITICAL ETHNOMATHEMATICS

I believe with the anthropologist Marshall Sahlins (1976) that people who want things to stay the same, to feel like they know how the world works and to act in the world as if their understanding can predict outcomes of their everyday actions, must, in the end, constantly change a lot in their lives -- in order to keep everything mostly "the same". (I also agree with Sahlins that people who want things to change in their world ironically need to keep some things the same in order to make changes.) The original wisdom, *plus ça change plus c'est même chose*, humorously recognizes the more commonly understood experience, that the more (some) things change, the more (a lot of) things stay the same. In his study of the encounter between the European Captain Cook and the communities of the South Pacific, Sahlins noted the ways that the Islanders desperately worked to maintain their way of life, and in the process, needed to make changes to do so. I believe that our current post-Anthropocene context is similar: many things are changing, and we are hoping that most characteristics of our everyday life can stay the same –we can in this way recognize that some things will change in the pursuit of keeping things the same.

That particular story of cultural confrontation sparked within colonialism guides me to consider as resources for mathematics education the many reactions to colonialism in general that have taken place in our collective geopolitical history. In particular, *ethnomathematics* is often described as the study and enactment of mathematical responses to colonialism. In its early development, ethnomathematics served two paradoxical functions: First, ethnomathematics recognized the hierarchies of knowledge, and associated erasures of local (mathematical) knowledges and practices. The methods of creating knowledge employed by colonial powers were assumed to be superior to local forms. Second, and perhaps ironic, ethnomathematics in its early forms sought to recognize local cultural forms of mathematics. However, the uses of local practices as illustrations of European mathematics perpetuated inequalities and unequal power relations of the colonial period even after official political changes, extending the perceived superiority and universality of Western mathematics (D'Ambrosio 1985). This ironic perpetuation can be described with the term "coloniality" – the systemic structures that perpetuate hierarchies and inequities of colonialism long after the official political forms of control have been relegated to history. *Critical Ethnomathematics* is a term we can use for those forms of ethnomathematics that specifically center their work in addressing coloniality. The key idea for today's conversation is that critical mathematics education accepts the paradox of ethnomathematics as celebrating local knowledges, yet somehow in the process as relegating them to second-class status, as an unavoidable catastrophe of colonialism. Our current geopolitical and sociocultural transnational situation is embraced as a particular example of coloniality (Appelbaum & Stathopoulou 2020, Stathopoulou & Appelbaum 2016) that can be addressed through critical ethnomathematics.

HOW?

Critical ethnomathematics education as I am defining it begins, not with very specific school curriculum recommendations, nor with immediately implementable pedagogical techniques, but instead with a re-orientation to how we understand mathematics education as a broader "social movement" (Appelbaum 2019, Knijnik 2007). What this means is that each struggle is local, and specific to a community, yet simultaneously intimately connects the local experience with international forms of cultural, political, and economic issues of justice and inequality.

> each struggle, through firmly rooted local conditions, leaps to the global level … destroy[ing] the traditional distinction between economic and political struggles. The struggles are at once economic, political and cultural – and hence they are biopolitical struggles, struggles over the form of life. They are constituent struggles, creating new public spaces and new forms of community (Hardt & Negri 2001, p.56)

Knijnik (2007) describes mathematics educators working on the local level to help those struggling to create meaningful and satisfying lives in the Brazilian Landless Movement. In their work, they facilitated the understanding of three different kinds of mathematics, each with its own ways of seeing, learning about, and creating very complex forms of social life: local mathematical practices produced the Landless Movement members' *form of life* (indigenous methods of calculating land areas, for example), a second collection of mathematical practices produced by another, local *form of life* – that of the urban sawmill men, and a third assemblage of mathematical practices, produced by a *form of life* found in the Western, Eurocentric school. They all shared a sense of family resemblances across the forms of life and their associated mathematical practices, yet, were unique in very specific ways. Through this broader, multicultural organization of local knowledges side-by-side with global forms of knowing that are associated with international structures that threaten the local forms of life, learners of mathematics found strategies for understanding the local, global, trans-national, and geopolitical aspects of cultural transformation that they were experiencing, while creating forms of social action for the preservation of those characteristics of life that they wished to stay the same for themselves.

Similar stories tell of other social struggles to afford local forms of mathematics the dignity and recognition that can enable post-colonial reconciliation (Stathopoulou & Appelbaum 2016, Appelbaum & Stathopoulou 2019): stories of Palestinian communities in occupied territories (Fasheh 1990); stories of a Latino community in Chicago (Gutstein 2003); stories of greenhouse gas emissions from a class and gender perspective in Sweden (Ulvila & Pasanen 2011); stories of Roma children in Greece solving immediate problems that affect school attendance, and celebrating Roma community events with parallel development of family mathematics and school mathematics (Kyriakopoulos 2022). What such stories share is the critical ethnomathematics education orientation. What this orientation makes possible is a shift from the disempowerment of dread toward an embrace of life within it. What this orientation demands is a twist from the insurmountable obstacles of dread, away from the despair of unsolved problems into the very meaning of human life.

To return to the philosopher Kierkegaard, he helped us tease out two kinds of dread (1968). In the first, a seemingly lofty one, mathematics educators step back from our impending catastrophes and crises, in order gain perspective, withhold judgement, to develop a reasoned rather than a reactive response. We withdraw from responsibility. Instead of urgently reacting, we monitor our unthinking responses by engaging in further reflection, and by contemplation we find our freedom to be ourselves, to be mathematics teachers, to go about our everyday life with a fulfilling sense of purpose. This lofty dread brings with it what Kierkegaard designated as the dizziness of absolute freedom. In the second form of dread, we directly appreciate and face our always present end, the ultimate finality of life. Kierkegaard's leap is to pursue the mysteries of our current lack of purpose by making a conscious and deliberate effort, to take action, to make movement, to begin a task. From such deliberate action, dread is transformed into movement. We meet dread head on. There is no other way possible. Is the end of our Anthropocene something we cannot stop? How do we live in the post-Anthropocene? How do we live surrounded by and consumed by climate catastrophes, mass refugees of severe weather and war, of the multiplicities of injustice experienced in the context of race, class, ethnicity, nationalism, transnational economic structures? The dizziness is simultaneously an obliterating and annihilating force and an empowering opportunity.

EXTENDING CRITICAL ETHNOMATHEMATICS INTO THE POST-ANTHROPOCENE

One of my points in this presentation is that we can copy tactics from Critical Ethnomathematics, because Critical Ethnomathematics has started this important work for us. We can join with these scholars and teachers, to find methods and techniques of their craft that are useful beyond the specifics of working with, around and through coloniality. The analogy works like this: The structures of coloniality are here to stay, just as people all over the world accept the erasure or subservience of local knowledges in favor of the all-powerful, assumed as universal, Western mathematics. Applying the analogy, we can see that the structures of the post-Anthropocene are here to stay. As one example of coloniality, people all over the world accept the neutrality of mathematics as describing or solving problems without transforming our orientation to them. This STEM orientation of mathematics --as “the language of science,” rather than as the poser of new questions -- is assumed as universal. The universality makes the mathematics unchangeable, as universal truths, thwarting any attempts to change the mathematics that we understand as essential for all students to learn. Critical Ethnomathematics nevertheless works with social movements to support communities in their use of local *and* Western mathematical practices for empowerment. Our “new mathematics education” would work, from today into the future, with social movements, to support communities in their use of traditional mathematics and the problem-posing, question-changing mathematics necessary for living with, around, and through the catastrophic changes of the post-Anthropocene. As we reimagine what this could be, for the post-Anthropocene, we can live with the frightening changes in reality, not accepting them as “okay”, but as the reality we are living: if we want some things to stay the same for humanity, for us and for our students, then, following Marshall Sahlins, other things will need to change. What needs to change?

Environmental Crisis Orientation:

Teresa Lloro-Bidart (2015, p. 133) proposed three overarching conceptual and practical shifts that need to be engaged in education in/for the Anthropocene:

- interdisciplinarity, transdisciplinarity and cross disciplinarity;
- community- and participatory-based approaches; and
- alternative modes of thought, including “mobile lives”, “post-carbon social theory”, Indigenous, ecofeminist/posthumanist and connectivity frameworks.

Those of us in mathematics education are often skeptical of interdisciplinary, transdisciplinary and cross-disciplinary perspectives, because, in our experience, mathematics gets watered down when we collaborate with STEM colleagues – mathematics is reinforced as that “language of science”, a tool that is used for data analysis, counting, and measuring (Appelbaum 2022, Larson 2017, Schmidt & Houang 2007). The potential of mathematics as an aesthetic activity, as a world of inquiry in its own right independent of real-world applications, and as a unique stance to take upon the world, is typically absent, seemingly replaced by the design approaches of engineering, which otherwise would themselves struggle for a presence in the integrated activity; mathematics might in this sense be seen as sacrificed for the ways in which it would most successfully support the development of STEM as a new enterprise (Appelbaum 2008, Bourdeau and Wood 2019, Anderson et al. 2020). Furthermore, the inclusion of mathematics in STEM, associated with science, engineering and technology, is more likely to emphasize those aspects of mathematics that are shared with those approaches to knowledge than if it were clustered with, say, the arts, humanities, or social sciences.

Nevertheless, a commitment to “keeping the same” the many characteristics of life as we enjoy it might require us to collaborate seriously with our colleagues in the STEM fields. With this in mind, we should note that taking mathematics as obviously necessary for STEM makes it very difficult to question whether or not this actually serves STEM in general. We need to keep in mind the common public criticisms of mathematics as difficult and off-putting. In this way, the gateway function of mathematics is more of a problem to be solved than a contribution to STEM. Li and Schoenfeld (2019) propose a shift away from mathematics as processes and techniques of problem solving useful to science and engineering toward mathematics as a sense-making activity; that is, away from a body of content to be learned or processes in which to engage, toward the codification of experiences both of making sense and sense-making. They worry that much of the inductive parts of mathematics have been lost as it is swallowed up in STEM, but also celebrate the potential contributions of mathematics if it were to be “re-framed.” They also urge a shift in focus, away from classroom instruction, toward the student’s experience of the discipline; in other words, they wish for educators to spend less effort designing the best content sequences for mathematics, or the most optimal methods of making the content accessible to learners, and to exert more research and development work on the ways that educational environments provide opportunities for sense-making grounded in mathematical practices. Such a perspective echoes numerous calls for more attention to student experience (Appelbaum 2008, Boaler 2002), and mathematics as a humanistic and meaning-making endeavor (Brown 2001), yet by placing these shifts in the context of mathematics and its support for STEM, it opens up a number of interesting, related issues.

Community and participatory approaches, Lloro-Bidart's second shift, also challenge our routines in mathematics education, because most of us believe that school mathematics must be almost exclusively preparation for living as adults in our world. We design our curricula to introduce skills and concepts that would be later applied in the real world. Indeed, most of our problem solving activities are planned to be the reverse of using mathematics to solve serious problems: They are, instead, commonly used in instruction as opportunities to practice the skills and concepts we are teaching. This shift for the post-Anthropocene requires an enormous commitment to redesigning the ways that our students participate in their community as inventors of mathematics that can be used to confront the changing lived world. Learners are no longer practicing the skills and concepts of the Anthropocene. They are learning how to respond in the moment to their world, finding ways that number, space, shape, pattern, functional relationships, and other mathematical ways of thinking and acting, can help them to fashion needed intellectual tools. We know this is going to be hard to do, because it is fully a revolution in our thinking. School, after all, takes young people away from everyday life, into a place where they can be taken care of, separated from what John Dewey called "the occupations of everyday life." There have been some efforts within environmental education to contribute interdisciplinary approaches to such fundamentally necessary ways to have community participation at the center of curriculum. However, it is the interdisciplinary character and community orientation of environmental education that have been blamed for the difficulties that environmental education has experienced in finding a place in school curricula (Gough 1997): Is it a separate subject, or a cross-disciplinary set of topics? Who is responsible for this in the school? While it is perfectly "fine to be educated *about* and *in* the environment, acting *for* the environment, as in a social reconstructionist or transformative approach to education," has not found its way into typical school experiences (Gough 2020, para. 35). These concerns led Greenwood to ask, "are schools relevant to the complex realities of a changing planet? Or, do they mainly serve an outdated vision of an industrial society that is turning rapidly into a complex mix of decline and transformation?" (Greenwood 2014, p. 279) Education in the post-Anthropocene requires participatory approaches as people need to be learning to work together and live with climate change and the other environmental crises, as well as working across cultures in addressing environmental issues, without already being told what the concepts and skills need to be to do this.

Lloro-Bidart's third shift shares much with Critical Ethnomathematics, a consistent theme that we will continue to visit throughout my presentation today. In her framing, this shift also expands well beyond cultural concerns, to the post-human orientation including animals, plants, and other co-participants in our planet, such as rivers, streams, mountains, oceans, and more. Because the post-Anthropocene requires us to understand ourselves as destroying our ecosystems through our ways of life, environmental education has emphasized human-centered perspectives until recently. Much more attention to this is needed.

Geopolitical Conflicts, Refugees, and Mass Migration

We mathematics educators are good at adapting our pedagogy to the needs of refugee children. But this does nothing to reduce or eliminate the need for such expertise, that is, to use mathematics and mathematics education in the service of peace, and for minimizing severe climate and weather changes that instigate mass climate-migration. Mathematics educators have also researched the ways that mathematics has served the causes of war and violence (Smith 1915, Davis & Hersh 1981, Davis & Appelbaum 2002). More or less, such attempts to educate about the horrors of war and the horrific uses of mathematics in the service of war have had little impact on ongoing war efforts. It is unclear what levels of total devastation might lead to wide-scale uses of such materials, rather than the continued refusal to take them seriously. Perhaps some of us here today at our conference will re-visit David Eugene Smith's (1915) *Problems About War* for inspiration, and create our own updated materials to be used in our schools. In that groundbreaking text, arithmetic problems were "designed to lay before young people in the elementary schools, at the most impressionable age, the fact of the wastefulness of war." (p.5)

> The questions are so framed as to emphasize this point at various stages in the study of arithmetic, and to do it in such a way as to give the pupil not only some valuable work in computation but some facts which will influence his later thoughts and actions on the questions of war. (Smith 1915, p.5)

Smith lays out some useful criteria for what constitutes a successful problem:

> In order to be a good problem in arithmetic, a question must involve the kind of computation which the average citizen needs to know, which principle excludes such a topic as cube root; it must ask for a result which the average citizen might naturally wish to find, which principle

excludes the finding of the time in which a given sun will yield a given interest at a given rate; it must be interesting, or easily capable of being made interesting to a pupil, which excludes problems about the population of a place like Mukden; and it must be stated in language which is fairly familiar to the class, which, in the early grades, excludes problems about proteids.

On the Nature of a Good Problem.—In order to be a good problem in arithmetic, a question must involve the kind of computation which the average citizen needs to know, which principle excludes such a topic as cube root; it must ask for a result which the average citizen might naturally wish to find, which principle excludes the finding of the time in which a given sum will yield a given interest at a given rate; it must be interesting, or easily capable of being made interesting to a pupil, which excludes problems about the population of a place like Mukden; and it must be stated in language which is fairly familiar to the class, which, in the early grades, excludes problems about proteids. For example, the following is a type of a bad problem: "The cost to France of the Franco-Prussian war of 1870, in francs, is the positive root of the quadratic equation $x^2 - 17{,}999{,}999{,}998x - 36{,}000{,}000{,}000 = 0$. Find the cost." Such a problem is ridiculous. No one would ever find the cost in any such way, and the mere statement of the question would bring reproach upon the subject of algebra. Equally bad would be a problem framed on such a plan as this: "In 1913 the amount paid by England for war purposes plus the amount paid by France was so much, while five times the amount paid by England minus twice the amount paid by France was so much. Find the amount paid by each." Now it would be evident to any pupil that the one who framed a question as absurd as this must have known the answers in advance, and that the only purpose of the question would be to puzzle the learner, and so the problem would have substantially no value.

5

Smith includes additional criteria that he describes as "fairness". "If pupils believe that the truth is not being told to them," he writes, "the lesson sought to be inculcated will all be lost" (Smith 1915, p. 6). He provides examples of various perspectives on the need for investment in defense and military training, and of economizing at the level of industry and food supplies. His point is that "the next generation … [will] weigh more carefully the question of proper use of money needed for such a purpose, and to consider whether the world is not by this time old enough to settle its disputes by a resort to arbitration instead of brute force" (Smith 1915, p. 7).

THE COST OF WAR

Problems Involving the Four Operations With Integers.

1. In the war of 1870 France lost in killed, wounded, and prisoners 723,500 officers and men in eight months, and Germany lost 129,647. Find the total loss of both countries, and the average loss per month and per day.

In all such cases take 30 da. to the month.

2. In the great wars from 1790 to 1913 there were 5,498,097 men killed. In the United States it is estimated that the average value of each life (man, woman, or child), based upon the value of the annual products of the country, is $2900. Taking the value of these men, all of them much above the average in health and strength, although living where human life was not economically so valuable, as $2900, what was the financial cost to the world in the loss of all these lives?

3. If in the great war of 1914-1915 there are 2,500,000 men killed, what is the financial loss of these human lives, on the basis of the average given in Ex. 2?

4. Valuing a human life economically at $5000, what would be the loss by the conditions of Ex. 3?

5. It is estimated that 21,200,000 were engaged in the great war of 1914-1915. Suppose each man could produce $2 a day, on the average, if he remained at home and worked, what is the loss per day in production by taking these men away from work?

6. In Ex. 5, what is the loss per month? What is the loss per year?

7. The mere cost of transporting the armies in the great

(Sample: first page of problems, Smith 1915)

A key issue for us is this point that Smith makes about the "fairness" of the presentation. For, of course, such an approach can be used for nefarious, dangerous means! For example, we can compare this sample question from a 1935 school mathematics text used in Nazi Germany:

> A Mental patient costs about 4 RMs a day to keep, a cripple 5,50 RMs, a criminal 3.50 RMs. IN many cases a civil servant only has about 4 RMs, a salaried employee scarcely 3,50 RMs, an unskilled worker barely 3 RMs for his family. (a) illustrate these figures with the aid of pictures. According to conservative estimates, there are about 300,000 mental patients, epileptics, etc., in asylums in Germany. (b) What do

> they cost together per annum at a rate of 4 RMs per person? C) How many marriage loans at 1,000 RMs each could be awarded per annum with this money, disregarding later payment? (Davis & Appelbaum 2002, p. 171)

With this more recent question posed by the Holocaust educator, Rachel Quenk (1997):

> After the pogrom in 1938, Jews were forced to pay one billion Reichmarks in "reparations." IN 1939, German Jews were supposed to pay 1,25 billion Reichmarks in "reparations." If at that time 1 billion Reichmarks = 400 million dollars, how much was 1,25 billion Reichmarks in dollars? (Quenk, cited in Davis & Appelbaum 2002, p. 171)

Perhaps the best approach is to share the quandary of perspectives and interpretations with our students? I am not sure what else would be "fair" in the sense that David Eugene Smith meant, nor what would work more fully for our goals, which would be, in the end, to empower our students to appreciate and weigh the human costs of war and refugee experiences in light of the perceived threats and the realism of wars such as our most recent one in Eastern Europe., so close to home here. For now, maybe it is finally time that we re-visit Smith's use of the most accessible skills and concepts of mathematics to illustrate our contemporary plights. The ongoing dilemma of this kind of work is that the numbers and amounts and specific examples are constantly new, always outdated if we hope to publish a textbook (Frankenstein 1990). It was more of a problem a century ago. Now we have online depositories that we can share with each other, with open access. Jonathan Osler's *Radical Math* website is one example. Frances Harper's is another. Yet one more collaborative, editable Wiki is titled, "Math and Social Justice: A collaborative MTBoS Site."

Alternative Modes of Thought

I will close this presentation with the third shift in Lloro-Bidart's list: alternative modes of thought, including "mobile lives", "post-carbon social theory", Indigenous, ecofeminist/posthumanist and connectivity frameworks. For this, we really do have many models of how we might act, thanks to Critical Ethnomathematics. A key finding from the New Zealand project, Ambitious Mathematics for Young Pacific Learners, for example, is the power of developing mathematical inquiry communities in schools by launching group tasks that investigate problems that are experienced and explained, not as mathematics problems, but as culturally rich and locally specific to the learners in the particular school (Education Counts, undated). Mathematics becomes one of many ways that the group of learners talk about and act in their community, and, in the process, develop skills and concepts, of, for example, algebra and data analysis. This is similar to the findings of Kyriakopoulos (2022), who worked with Roma children in their Greek community, exploring celebrations and practical forms of mathematics related to the birth of a new baby, typically far more advanced and inventive than the school mathematics in the curriculum, and of solving complex problems that were preventing simple travel to and from school. The problems originate in the life experiences of the students in both of these cases, rather than in the list of skills and concepts that the curriculum has collected. This is probably the most important thing to keep in mind: that the mathematics is best learned, and often is a different but far more advanced or nuanced form of mathematics, when the focus is, ironically, *not* on the mathematics itself.

Another key idea is that "taking action" in the community, using mathematics, or because of the mathematics one is learning, has a powerful impact on the nature of what is learned (Appelbaum 2009). In Taking Action students are attributed the critical competence (Skovsmose, 1994) to judge how and where their mathematical ideas can either make an impact on the world, or how the world can make an impact on their further development of ideas. Such a presumption is rare in the usual mathematics classroom, and especially unusual in primary education. Research demonstrates that this is reasonable and simple to do this with young children (Appelbaum 2009). A facilitating educator guides the learners through a process of identifying what is significant or interesting or important in their work. Then they help them determine the best audience for their work, and support them in designing a way to work with others in their community in order to make an impact – on others, or themselves.

What has been missing from such work is the serious life-threatening levels of action impact needed. Gone are the days that we could end a presentation with an inspiring quote from a young activist such as Greta Thunberg ("no one is too small to make a difference" (Somos 2019) or Xiye Bastida ("Anything we ever achieve started with someone imagining it first!" (Bastida 2020). It is no longer good enough to imagine empowering youth with very local and indigenous community activities like improving the paths to school, helping elders to design better quilts for their beds, make recommendations to a zoo on a healthier habitat for their animals, and so on. Those experiences do have the important kernel of activism using mathematics. They can create the self-confidence that is essential to mathematically-skilled community participation. But I fear that we have been too afraid to put the responsibility not only on ourselves but also on our children, for saving the world. We think it is bad for children and young adults to learn about and solve the problems of climate devastation and war-ravaged regions. It is adorable when a class creates a beautiful mural on the wall of their school cleverly communicating the mathematics of recycling and energy conservation, but this does not save us. Meanwhile,

> One in six children across the world are living in areas impacted by conflict, and children are more at risk in conflict now than at any time in the last 20 years. From Syria to South Sudan, Yemen to DRC, children are caught up in violence, which is not of their making. Children are being killed and maimed, raped and recruited, and being denied aid and medical care. Warring parties are bombing schools and hospitals on a scale not seen for decades. (Save the Children undated)

If children are the victims of war and torture … if children are inheriting a planet hostile to their very survival, maybe they can help us change a few things – change a few things, so that life can mostly stay the same.

CODA: DON'T BE A DOOMER!

Some additional thoughts on how we might go forward in this work: We can learn from young climate activists who are telling "Climate Pessimists" to "lighten up." Young activists are well aware of dire climate reports, but they are also even more aware that people are in general are tired of hearing how bad things are. If awareness about the climate crisis has never been greater, so, too, has been a mounting sense of dread about its unfolding effects., particularly among the young. There is also a growing consensus that depression and eco-anxiety are perfectly natural responses to the steady barrage of scary environmenta. News. With the war in Ukraine prompting a push for ramped-up production of fossil fuels, young climate activists are saying that it is more pressing to concentrate on all of the good climate work being done, especially locally. Staying stuck in climate doom ironically helps to preserve a status quo reliant on consumerism and fossil fuels anyway! "Eco-creators" on Tik-Tok and other social media platforms are presenting positive climate news and specific recommendations that people can use in their everyday lives. They are of course very knowledgeable about how recommendations for individual actions have been distractions from the massive impact of corporate and military damage on the environment far surpassing most anything individuals can achieve, yet, to say, "”It's too late," means, "I just want to be comfortable for as much of my life as possible" (because I am already comfortable) – in other words, "I don't have to do anything and the responsibility if not mine, I can continue as I am, because the problems are just too big for me, and hopefully some international agreements and new scientific discoveries will make life possible for years to come." The last fantasy is sometimes called "hopeism" – another version of "doomism." Together they do little or nothing. Young climate activists such as Isaias Hernandez, Caulin Donaldson, Kristy Drutman, and Alana Wood, shift our thinking toward the question, "Are we going to try?" – we do not know until we try whether or not we will solve our gigantic global problems. Their idea is, whether or not we solve those problems, it is worth while trying to do so. (Buckley 2022)

REFERENCES

Anderson J., English L., Fitzallen N., Symons D. (2020) The contribution of mathematics education researchers to the current STEM education agenda. In: Way J., Attard C., Anderson J., Bobis J., McMaster H., Cartwright K. (eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2016–2019*, pp. 27-57. Singapore: Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-15-4269-5_3. Retrieved 3 March, 2020.

Appelbaum, P. (2008). *Embracing mathematics: On becoming a teacher and changing with mathematics*. NY: Routledge.

Appelbaum, P. (2009). Taking action: Mathematics curricular organization for effective teaching and learning. *For the Learning of Mathematics*, 29 (2), 39-44.

Appelbaum, P. (2019). From equity and justice to dignity and reconciliation: Alterglobal mathematics education as a social movement directing curricula, policies, & assessment. In *Equity in Mathematics Education: Addressing a Changing World*, C. Xenofontos (Ed.), pp. 23-40. Information Age Publishing.

Appelbaum, P. (2022). Mathematics learning for STEM, In Tierney, R. Rizvi, F., Ercikan, K. & Smith, G. (Eds.), *International Encyclopedia of Education* 43, Elsevier.

Appelbaum, P. & Stathopoulou, C. (2020). The Taking of Western/Euro Mathematics as Reappropriation/Repair. Revemop.2, 2020. https://www.periodicos.ufop.br/pp/index.php/revemop/article/view/2472

Bastida, X. (2020). How are young people making the choice to fight climate change? NPR. TED Radio Hour. https://www.npr.org/2020/05/22/860168455/xiye-bastida-how-are-young-people-making-the-choice-to-fight-climate-change. Retrieved 3 March 2020.

Boaler, J. (2002). *Experiencing school mathematics: Traditional and reform approaches to teaching and their impact on student* learning. NY: Routledge.

Bourdeau, D.T. and Wood, B.L. (2019). What is humanistic STEM and why do we need it?, *Journal of Humanistic Mathematics* **9, 1,** 205-216.

Brown, S. I. (2001). *Reconstructing school mathematics: Problems with problems and the real world.* NY: Peter Lang.

Buckley, C. (2022). 'OK Doom' Why a growing number of young advocates are telling climate pessimists to lighten up." *The New York Times*, March 23, 2022, p. A11.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 45-48. https://www.jstor.org/stable/40247876.

Davis, B. & Appelbaum, P. (2002). Post-Holocaust science education, In Morris, M. & Weaver, J. (Eds.). *Difficult memories: Talk in a (post) Holocaust era*, pp. 171-190 Peter Lang.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The mathematical Experience*. Springer.

Education Counts. (undated website). Ambitious mathematics for young pacific learners. https://www.educationcounts.govt.nz/topics/bes/ambitious-mathematics-for-young-pacific-learners. Retrieved 3 March 2020.

Fasheh, M. (1990). Community education: To reclaim and transform what has been made invisible. *Harvard Educational Review*,60 (1), pp. 19-35.

Frankenstein, M. (1990). *Relearning mathematics: A different third R – Radical maths*. Free Association Books.

Gough, A. (1997). *Education and the environment: Policy, trends and the problems of marginalisation.* Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Gough, A. (2020). Education in the Anthropocene. Institute for Interdisciplinary Research into the Anthropocene. https://iiraorg.com/2020/11/16/education-in-the-anthropocene/. Retrieved 21 March, 2022.

Greenwood, D. (2014). Culture, environment, and education in the Anthropocene. In M. P. Mueller et al. (Eds.*), Assessing schools for Generation R (Responsibility)*, pp.279-292. Springer.

Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, Latino school. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 37–73.

Hardt, M. & Negri, A. (2001). *Empire*. Harvard University Press.

Harper, Frances. (undated website). *Social Justice Math*. https://francesharper.com/social-justice-math/.

Kierkegaard, S. (1968). *The concept of dread*. Lowrie, W. (trans.). Princeton University Press.

Knijnik, G. (2001). Indigenous knowledge, ethnomathematics approach, and the hole of intellectuals when working with social movements. In Steinberg, S. (ed.), *Multi/intercultural conversations: A reader*, pp. 241-262. Peter Lang.

Knijnik, G. (2007). Mathematics education and the Brazilian landless movement: Three different mathematics in the struggle for social justice. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 21. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome21/Knijnik%20Mathematics%20Education%20and%20the%20Brazilian.doc.

Kyriakopoulos, G. (2022). Curricula and diversity: A culturally responsive mathematics curriculum for Roma students of primary education. Unpublished PhD Thesis, University of Thessaly, Volos.

Larson, M. (2017). Math education IS STEM education. https://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Matt-Larson/Math-Education-Is-STEM-Education! Retrieved 3 March, 2022.

Li, Y. and Schoenfeld, A. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *International Journal of STEM Education* **6**, 44, https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9. Retrieved 3 March, 2020.

Lloro-Bidart, T. (2015). A political ecology of education in/for the Anthropocene. *Environment and Society: Advances in Research*, 6, pp. 128-148.

Math and Social Justice: A Collaborative MTB0S Site. https://sites.google.com/site/mathandsocialjustice/curriculum-resources. Retrieved 3 March, 2022.

Osler, Jonathan. (undated website). RadicalMath. https://www.radicalmath.org/. Retrieved 3 March, 2020.

Quenk, R. (1997). *The spirit that moves us: A literature-based resource guide: Teaching about the holocaust and human rights*. (vol. 2). Tilbury House.

Sahlins, M. (1976). *Islands of history*. University of Chicago Press.

Save the Children. (undated). The War on Children. https://www.savethechildren.net/sites/default/files/waronchildren/. Retrieved 3 March 2020.

Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2007). Lack of focus in the mathematics curriculum: A symptom or a cause? In T. Loveless (ed.), *Lessons learned: What international assessments tell us about math achievement,* pp. 65-84. Washington: Brookings Institution Press.

Skovsmose, O. (1994). *Toward a philosophy of critical mathematics education*. Reidel.

Smith, D.E. (1915). *Problems about war for classes in arithmetic: Suggestions for makers of textbooks and for use in schools.* Carnegie Endowment for International Peace. https://www.google.com/books/edition/Problems_about_War_for_Classes_in_Arithm/CDUoAAAAMAAJ?hl=en&gbpv=1. Retrieved 3 March, 2022.

Somos, C. (2019). Greta Thunberg's four simple steps to combat climate change. Sci Tech. CTV News. https://www.ctvnews.ca/sci-tech/greta-thunberg-s-four-simple-steps-to-combat-climate-change-1.4613253. Retrieved 3 March 2020.

Stathopoulou, C. & Appelbaum, P. (2016). Dignity, recognition and reconciliation: Forgiveness, ethnomathematics and mathematics education, RIPEM: *International Journal for Research in Mathematics Education,* 6 (1): 26-44. http://www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/ripem/article/view/1192

Ulvila, M. & Pasanen, J. (2011). Class, environment, and degrowth. *Green Horizon Magazine*, 23, pp. 12-14.

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΟ ΡΟΛΟ ΤΗΣ ΓΟΝΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Καφούση Σόνια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

kafoussi@aegean.gr

Οι γονείς έχουν τη δική τους μοναδική συνεισφορά στην πορεία των παιδιών τους στη μάθηση και πολλές μελέτες διερευνούν το ρόλο της γονικής συμμετοχής στη μαθηματική εκπαίδευση. Η πλειοψηφία των ερευνών δείχνει ότι η δημιουργία ενός υποστηρικτικού μαθησιακού περιβάλλοντος στο σπίτι από τους γονείς συνδέεται με τη διαμόρφωση θετικών εμπειριών των μαθητών/τριών τόσο στις μικρές όσο και στις μεγαλύτερες ηλικίες για τα μαθηματικά, ενώ η συνεργασία μεταξύ σχολείου και οικογένειας μπορεί να βελτιώσει τις αντιλήψεις, τις επιδόσεις και τις στάσεις των παιδιών στο συγκεκριμένο μάθημα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη των κοινωνικο-πολιτισμικών και κοινωνικο-πολιτικών προσεγγίσεων στη μαθηματική εκπαίδευση έχει προσανατολίσει την έρευνα στη συστηματική μελέτη του ρόλου της γονικής συμμετοχής στη διαμόρφωση της μαθηματικής ταυτότητας των μαθητών/τριών. Όπως έχει επισημανθεί, οι μαθητές/τριες συμμετέχουν σε ποικίλες δραστηριότητες που συνδέονται ρητά ή υπόρρητα με τα μαθηματικά έξω από τη σχολική τάξη και επομένως η μαθησιακή τους διαδρομή δεν μπορεί να ερμηνευθεί μόνο με βάση τις σχολικές τους εμπειρίες, καθώς αναδύεται ως αποτέλεσμα των πολλαπλών τρόπων εμπλοκής τους με τα μαθηματικά στα κοινωνικο-πολιτισμικά περιβάλλοντα με τα οποία αλληλεπιδρούν (Abreu, Gorgorió, & Björklund, 2018· Darragh, 2016). Ερμηνεύοντας κάθε γεγονός της εκπαιδευτικής διαδικασίας ως επικοινωνιακό, το οποίο συντελείται σε μια συγκεκριμένη συγκυρία κοινωνικο-πολιτισμικών συνθηκών, κάθε ενέργεια ενός ομιλητή είναι προϊόν μιας συλλογικής δραστηριότητας και δεν είναι άμεσο παράγωγο των προσωπικών του ικανοτήτων (Sfard & Lavie, 2005).

Τα τελευταία χρόνια ο αριθμός μελετών που διερευνούν τις επιρροές της γονικής συμμετοχής στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών/τριών έχει αυξηθεί, καθώς αναγνωρίζεται ότι οι γονείς έχουν τη δική τους μοναδική συνεισφορά στην μαθησιακή πορεία των παιδιών τους (βλ. ενδεικτικά Boonk, Gijselaers, Ritzen, Brand-Gruwel, 2018 για μια σύνοψη 75 ερευνών από το 2003 έως το 2017 για τη γονική συμμετοχή στη γλώσσα και/ή τα μαθηματικά· Van Voorhis, Maier, Epstein, Lloyd, 2013 για μια σύνοψη 43 ερευνών από το 1992 έως το 2012 στα μαθηματικά). Τα αποτελέσματά τους δείχνουν ότι οι γονείς προσφέρουν διαφορετικές μαθησιακές ευκαιρίες για τα μαθηματικά στο σπίτι και συνδιαμορφώνουν – μαζί με το σχολείο– τη σχέση των παιδιών τους με το συγκεκριμένο μάθημα. Η δημιουργία ενός υποστηρικτικού μαθησιακού περιβάλλοντος στο σπίτι από τους γονείς συνδέεται, όπως αναφέρεται στην πλειοψηφία των ερευνών, θετικά με τη μαθηματική επίδοση των παιδιών τόσο για τις μικρές όσο και για τις μεγάλες ηλικίες, αλλά και με τη διαμόρφωση θετικών στάσεων και πεποιθήσεων για το συγκεκριμένο μάθημα. Γι' αυτόν το λόγο, τονίζεται ότι η συνεργασία μεταξύ σχολείου και οικογένειας μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη αποτελεσματικών πλαισίων μέσα στα οποία συμμετέχει και δρα το παιδί, καθώς γονείς και εκπαιδευτικοί μπορούν να αναλάβουν με διακριτούς ρόλους την ευθύνη για τη μαθηματική του εκπαίδευση (Epstein, 2016; Knapp, Landers, Liang & Jefferson, 2017).

Στην παρούσα εργασία ο όρος γονική συμμετοχή (parental participation ή involvement) χρησιμοποιείται για να περιγράψει τους τρόπους αλληλεπίδρασης των γονιών με το σχολείο και με τα παιδιά τους στο σπίτι, οι οποίοι αφορούν στη σχολική μάθηση (Hill & Taylor, 2004). Στη σχετική βιβλιογραφία γίνεται διάκριση ανάμεσα στη γονική συμμετοχή στο σπίτι (home-based involvement) και τη γονική συμμετοχή στο σχολείο (school-based involvement) (Book et al., 2018). Η γονική συμμετοχή στο σπίτι περιλαμβάνει τις δράσεις των γονιών εκτός σχολείου για την προώθηση της μάθησης των παιδιών τους (με ή χωρίς τη συνεργασία του σχολείου), ενώ η γονική συμμετοχή στο σχολείο περιλαμβάνει τις δράσεις που πραγματοποιούνται με τους γονείς στο χώρο του σχολείου, όπως οι συναντήσεις των γονέων με τους εκπαιδευτικούς για θέματα που αφορούν στη μαθηματική εκπαίδευση του παιδιού τους ή η συμμετοχή τους σε σχολικές εκδηλώσεις για τα μαθηματικά.

Τα ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με τη γονική συμμετοχή στη μαθηματική εκπαίδευση προέρχονται κυρίως από τη συμπλήρωση ερωτηματολογίων από γονείς, εκπαιδευτικούς ή/και μαθητές/τριες, ενώ υπάρχουν λιγότερα αποτελέσματα από προγράμματα παρέμβασης (με ή χωρίς τη συνεργασία του σχολείου). Στην εργασία αρχικά παρουσιάζονται αποτελέσματα σχετικών ερευνών από τη διεθνή βιβλιογραφία για το ρόλο της γονικής συμμετοχής στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών/τριών. Στη συνέχεια, καθώς η γονική συμμετοχή διαμορφώνεται μέσα στο ιδιαίτερο πολιτισμικό περιβάλλον της κάθε χώρας, παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα μελετών που έχουν γίνει στη χώρα μας, και τέλος αναδεικνύονται θέματα εκπαιδευτικού σχεδιασμού της συνεργασίας γονιών και εκπαιδευτικών στο μάθημα των μαθηματικών.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΓΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ

Η γονική συμμετοχή στο σπίτι μπορεί να διακριθεί στην έμμεση και την άμεση (Cai, Moyer & Wang, 1997). Η έμμεση συμμετοχή περιλαμβάνει τη γονική ενθάρρυνση, τις προσδοκίες των γονιών για τη μαθηματική επίδοση, τις πεποιθήσεις και τις στάσεις τους απέναντι στα μαθηματικά, καθώς και την ευρύτερη υποστήριξη μέσω συζητήσεων με τα παιδιά τους για τις σχολικές τους εμπειρίες, τις σπουδές τους και τους επαγγελματικούς τους προσανατολισμούς. Η άμεση συμμετοχή αφορά στους τρόπους αλληλεπίδρασης των γονιών με τα παιδιά τους κατά την ενασχόλησή τους τόσο με τις σχολικές εργασίες που δίνονται από τους εκπαιδευτικούς για τα μαθηματικά στο σπίτι (π.χ. έλεγχος της σχολικής εργασίας, συμμετοχή στην προετοιμασία της), όσο και τις άτυπες ή/και τυπικές δραστηριότητες που εμπλέκουν τα παιδιά με τη μαθηματική γνώση στο σπίτι με πρωτοβουλία του γονιού.

Σχετικά με την έμμεση συμμετοχή τα αποτελέσματα των περισσότερων ερευνών σε πολλές χώρες αναγνωρίζουν τη θετική της συσχέτιση με τις επιδόσεις και τις στάσεις των παιδιών στα μαθηματικά σε όλες τις ηλικίες, από 6 μέχρι 18 ετών (βλ. ενδεικτικές έρευνες στο Boonk et al., 2018). Ιδιαίτερα, οι υψηλές προσδοκίες των γονιών για την επίδοση των παιδιών τους και η ενθάρρυνσή τους ότι μπορούν να τα καταφέρουν στα μαθηματικά φαίνεται να επηρεάζουν θετικά τόσο την επίδοση όσο και την αυτοπεποίθηση των παιδιών, ενώ η σχέση των γονικών προσδοκιών συσχετίζεται θετικά με την επίδοση των παιδιών ανεξάρτητα από το κοινωνικό-οικονομικό και πολιτισμικό περιβάλλον της οικογένειας. Ίσως αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι γονείς με υψηλές προσδοκίες εμπλέκονται περισσότερο στην εκπαίδευση των παιδιών τους, επενδύοντας περισσότερο χρόνο και ενέργεια (Phillipson & Phillipson, 2012· Zippert & Rittle-Johnson, 2020). Επιπλέον, όταν οι γονείς έχουν θετικές πεποιθήσεις για την αξία της μαθηματικής γνώσης και θετικές στάσεις για το συγκεκριμένο μάθημα φαίνεται να επηρεάζουν θετικά τη επίδοση και την στάση των παιδιών τους στα μαθηματικά (βλ. ενδεικτικά Quaye & Pomeroy, 2022).

Τα αποτελέσματα των ερευνών για την άμεση συμμετοχή των γονιών δεν παρουσιάζουν την ίδια συνοχή όπως για την έμμεση συμμετοχή και δημιουργούν πολλές φορές έντονες συζητήσεις για την εμπλοκή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Καθώς η άμεση συμμετοχή φαίνεται να επηρεάζεται από την ηλικία των παιδιών, τα ερευνητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στη συνέχεια με βάση αυτό το κριτήριο:

- Στις μικρές ηλικίες (έως 6 ετών) η άμεση γονική συμμετοχή έχει θετική επιρροή στη μάθηση των παιδιών στα μαθηματικά, όπως έχει φανεί σε πολλές έρευνες που έχουν γίνει σε διαφορετικές χώρες ή/και σε διαφορετικές πολιτισμικές ομάδες στην ίδια χώρα (βλ. ενδεικτικά LeFevre, Skwarchuk, Smith-Chant, et al., 2009· Zhu & Chiu, 2019). Σε αυτές τις ηλικίες η ενασχόληση των γονιών με τα παιδιά τους για θέματα σχετικά με τις βασικές αριθμητικές δεξιότητες, την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και παιχνίδια που περιλαμβάνουν μαθηματικά φαίνεται να συνδέονται με θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των παιδιών τους. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η εμπλοκή των γονιών σε σύνθετα μαθηματικά έργα με τα παιδιά τους στο σπίτι (π.χ. σύγκριση ποσοτήτων) φαίνεται να έχει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα σε σχέση με την εμπλοκή τους σε πιο απλά μαθηματικά έργα (Skwarchuk, 2009). Ωστόσο, το θέμα των ποιοτικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών έργων των γονιών με τα παιδιά τους στις μικρές ηλικίες εξακολουθεί να παρουσιάζει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον (Andrews, Petersson, Sayers, 2021· Lenvenson, Barkai, Tirosh & Tsasmir, 2021· Zippert & Rittle-Johnson, 2020). Για παράδειγμα, οι γονείς εμπλέκουν περισσότερο στο σπίτι τα παιδιά τους σε έργα αρίθμησης σε σχέση με έργα που αναφέρονται σε άλλα θέματα των μαθηματικών (π.χ. μοτίβα, σύνθεση και ανάλυση αριθμών, χωρικές έννοιες) και η ενασχόλησή τους με διάφορα έργα επηρεάζεται από τις απόψεις τους για το τι μπορούν να κάνουν τα παιδιά τους στα μαθηματικά σε αυτές τις ηλικίες (Lenvenson, et al., 2021· Zippert & Rittle-Johnson, 2020). Επίσης, μια πρόσφατη επισκόπηση σχετικών ερευνών έδειξε ότι οι ερευνητές κατηγοριοποιούν με διαφορετικά κριτήρια τα μαθηματικά έργα που αναφέρονται στις μικρές ηλικίες για να μελετήσουν την επίδραση της άμεσης γονικής συμμετοχής στην μάθηση των παιδιών (π.χ. άμεσες/τυπικές και έμμεσες/άτυπες δραστηριότητες), χωρίς ωστόσο να είναι ευδιάκριτα τα όρια αυτών των κατηγοριών και κατά συνέπεια και η διερεύνηση των συνεπειών τους στη μάθηση (Andrews, et al., 2021).

- Στις ηλικίες 6 έως 12 ετών, αρκετές έρευνες εστιάζουν στην εμπλοκή του γονιού στη σχολική εργασία που δίνεται στα παιδιά για τα μαθηματικά στο σπίτι (homework), η οποία αποτελεί την πιο τυπική μορφή γονικής συμμετοχής. Στις περισσότερες σχετικές έρευνες διακρίνονται δύο τρόποι συμμετοχής των γονέων: η γονική υποστήριξη (parental support) και ο γονικός έλεγχος (parental control). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχει θετική συσχέτιση με την επίδοση του παιδιού στα μαθηματικά, όταν οι γονείς συμμετέχουν υποστηρικτικά προς το παιδί στηρίζοντας την αυτονομία του και βοηθώντας το στη σχολική του εργασία όταν το ίδιο το ζητάει (γονική υποστήριξη) και αυτός ο τρόπος συμμετοχής ενισχύει το κίνητρο των παιδιών τους να επιμένουν στην προσπάθειά τους να λύνουν προκλητικά μαθηματικά έργα (Silinskas & Kikas, 2019). Αντίθετα, όταν η συμμετοχή των γονιών είναι παρεμβατική χωρίς να υπάρχει λόγος και υπερβολικά ελεγκτική, η συσχέτιση με την επίδοση του παιδιού είναι αρνητική. Ένα ακόμα ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι όταν οι γονείς εμπλέκουν τα παιδιά τους σε δικά τους μαθηματικά έργα, υπάρχει θετική συσχέτιση με τα μαθησιακά αποτελέσματα των παιδιών (βλ. ενδεικτικά Jacobs & Bleeker, 2004).

- Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (ηλικίες από 12 έως 18 ετών), τα αποτελέσματα των ερευνών είναι ανάλογα με αυτά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την εμπλοκή του γονιού στην εργασία που δίνεται για το σπίτι (βλ. ενδεικτικά Weerasinghe, 2019). Ωστόσο, σε αυτές τις ηλικίες φαίνεται ότι είναι πιο σημαντικό οι γονείς να δημιουργούν ένα υποστηρικτικό περιβάλλον κυρίως μέσω της έμμεσης συμμετοχής, όπως είναι οι συζητήσεις για την αξία των μαθηματικών στο μέλλον των παιδιών τους. Για παράδειγμα, ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αποτελέσματα ενός προγράμματος για την ενίσχυση των πεποιθήσεων των γονιών για την αξία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, καθώς και της επικοινωνίας μεταξύ γονιών και εφήβων για το θέμα αυτό, με στόχο την επιλογή μαθημάτων STEM (Harackiewicz, Rozek, Hulleman & Hyde, ΗΠΑ, 2012). Μέσω φυλλαδίων που στάλθηκαν από τους ερευνητές στους γονείς και την κατασκευή ιστοσελίδας, στην οποία περιέγραφαν τη σημασία των μαθημάτων STEM στην καθημερινή ζωή και την επαγγελματική σταδιοδρομία των νέων, φάνηκε ότι ενισχύθηκαν οι θετικές αντιλήψεις των γονιών και κυρίως των μητέρων για την αξία αυτών των μαθημάτων, έγιναν περισσότερες συζητήσεις των γονιών με τα παιδιά τους και αυξήθηκε ο αριθμός των εφήβων που επέλεξαν τα συγκεκριμένα μαθήματα.

Επιπλέον, κάποιοι άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν την ύπαρξη και την αποτελεσματικότητα της άμεσης γονικής συμμετοχής στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών σε όλες τις ηλικίες είναι η αυτοπεποίθηση ή το άγχος των γονιών για τα μαθηματικά, οι μαθηματικές τους γνώσεις, οι προσωπικές σχολικές τους εμπειρίες και το μορφωτικό τους επίπεδο (κυρίως της μητέρας) (βλ. ενδεικτικά Civil & Bernier, 2006·Hyde, Else-Quest, Alibali, et al., 2006· Maloney et al., 2015· Zippert & Rittle-Johnson, 2020). Για παράδειγμα, έχει φανεί ότι όταν οι γονείς έχουν άγχος για τα μαθηματικά στις μικρές ηλικίες (Α και Β δημοτικού) και εμπλέκονται συχνά στη σχολική εργασία των παιδιών τους στο σπίτι, υπάρχει αρνητική συσχέτιση με την επίδοση των παιδιών, ενώ δημιουργείται άγχος και στα παιδιά (Maloney et al., 2015). Αυτό δεν σημαίνει ότι χρειάζεται να αποτρέπουμε τους (αγχωμένους) γονείς από τη συμμετοχή τους στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους, αλλά αντίθετα να σχεδιάζονται κατάλληλες παρεμβάσεις μείωσης του άγχους τους και ενίσχυσης αποτελεσματικών τρόπων παροχής βοήθειας προς τα παιδιά τους μέσω διαφόρων μαθηματικών έργων. Επίσης, αν και το μορφωτικό επίπεδο (κυρίως της μητέρας) αποτελεί δείκτη πρόβλεψης της μαθηματικής επίδοσης των παιδιών, η επίδραση αυτής της μεταβλητής φαίνεται να μην είναι σημαντική, όταν η εμπλοκή των μητέρων με χαμηλό μορφωτικό επίπεδο είναι υψηλή (βλ. Boonk et al., 2018). Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι η παρότρυνση και καθοδήγηση των γονιών με χαμηλό μορφωτικό επίπεδο να συμμετέχουν ενεργά στην μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των παιδιών.

Τέλος, όπως προαναφέρθηκε η γονική συμμετοχή στο σχολείο περιλαμβάνει διάφορες δράσεις με τους γονείς, όπως συναντήσεις γονιών-εκπαιδευτικών για την ενημέρωση των γονιών για την πορεία των παιδιών τους, επισκέψεις των γονιών στις σχολικές τάξεις ή συμμετοχή τους σε εκδηλώσεις του σχολείου για τα μαθηματικά. Στο θέμα αυτό τα ερευνητικά αποτελέσματα δεν συγκλίνουν ως προς την προσφορά αυτών των δράσεων. Ωστόσο, αξίζει να επισημανθεί ότι σε όλες τις έρευνες οι συναντήσεις γονιών-εκπαιδευτικών φαίνεται να έχουν θετική συσχέτιση με τη μάθηση του παιδιού στα μαθηματικά (Boonk et al., 2018).

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΓΟΝΙΩΝ, ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΩΝ/ΤΡΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Αρκετές έρευνες έχουν αναδείξει τη σχέση της γονικής συμμετοχής με τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά της οικογένειας, τα οποία επηρεάζουν τις προσδοκίες, τα συναισθήματα, τις πεποιθήσεις και τις πρακτικές των γονιών για τη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους. Για παράδειγμα, σε συγκριτικές μελέτες έχει φανεί ότι στις ασιατικές χώρες οι γονείς έχουν υψηλότερες προσδοκίες για τη μαθηματική επίδοση των παιδιών τους σε σχέση με τους γονείς άλλων χωρών και αφιερώνουν αρκετό χρόνο σε μαθηματικές δραστηριότητες στο σπίτι από τις μικρές ηλικίες (βλ. ενδεικτικά Cao, Bishop, & Forgasz, 2006· Di Paola, 2016). Επιπλέον, οι γονείς διαφορετικών πολιτισμικών ομάδων αξιολογούν ως σημαντικά διαφορετικά μαθηματικά θέματα που θεωρούν ότι η οικογένεια είναι υπεύθυνη να διδάξει στα παιδιά (Abreu, Cline, & Shamsi, 2002 ·Crafter, 2012). Καθώς το πολιτισμικό περιβάλλον παίζει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση των χαρακτηριστικών της γονικής συμμετοχής σε κάθε χώρα, στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται ενδεικτικά ερευνητικά αποτελέσματα για τις πεποιθήσεις των γονιών, των εκπαιδευτικών αλλά και των μαθητών/τριών στην Ελλάδα σχετικά με τη γονική συμμετοχή στα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Γονείς

Σύμφωνα με το μοντέλο των Hoover-Dempsey & Sandler (2005) (βλ. Walker et al., 2011) αναγνωρίζονται τρεις κατηγορίες κινήτρων που παρακινούν τους γονείς να εμπλακούν στην εκπαίδευση των παιδιών τους:

α)τα προσωπικά ψυχολογικά κίνητρα συμμετοχής (personal psychological motivators of involvement) που σχετίζονται με τις πεποιθήσεις τους για το ρόλο τους στη σχολική εκπαίδευση του παιδιού και την αυτο-αποτελεσματικότητά τους στη βοήθεια που παρέχουν,
β)τα κίνητρα συμμετοχής που συνδέονται με το πλαίσιο μέσα στο οποίο δρουν (contextual motivators of involvement) και περιλαμβάνουν τις προσκλήσεις για συμμετοχή από το σχολείο, τους εκπαιδευτικούς του σχολείου και τα παιδιά τους και
γ)οι αντιλαμβανόμενες μεταβλητές για το περιβάλλον της ζωής τους (perceptions of life-context variables) που αφορούν στις αντιλήψεις για τις γνώσεις τους και το χρόνο που μπορούν να αφιερώσουν στην εκπαίδευση των παιδιών τους στο σπίτι και το σχολείο.

Στη χώρα μας οι περισσότεροι γονείς δηλώνουν ότι αφιερώνουν αρκετό χρόνο με τα παιδιά τους στο σπίτι για τα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και μάλιστα η πλειοψηφία δηλώνει ότι ο χρόνος αυτός είναι μεγαλύτερος συγκριτικά με τα άλλα μαθήματα, ενώ θεωρούν ότι οι μαθηματικές τους γνώσεις είναι ικανοποιητικές και κρίνουν τους εαυτούς τους ικανούς να βοηθήσουν τα παιδιά τους στις εργασίες των μαθηματικών (βλ. ενδεικτικά Ντζιαχρήστος & Καφούση, 2003· Τσουρέλη, 2021). Οι λόγοι της άμεσης συμμετοχής των Ελλήνων γονιών στα μαθηματικά στο σπίτι συνδέονται κυρίως με την καλύτερη κατανόηση του μαθήματος, την αντιμετώπιση πιθανών δυσκολιών και την εξάσκηση. Αντίστοιχα, οι τρόποι με τους οποίους βοηθούν τα παιδιά τους αφορούν κυρίως στην εξήγηση του μαθήματος, τον έλεγχο και την από κοινού λύση μαθηματικών ασκήσεων/προβλημάτων, ιδιαίτερα αν τα παιδιά συναντούν δυσκολίες. Επίσης, αρκετοί γονείς δηλώνουν ότι χρησιμοποιούν σχολικά βοηθήματα για να συζητούν με τα παιδιά τους πρόσθετες ασκήσεις στα μαθηματικά (βλ. ενδεικτικά Κασσώτη & Κλιάπης, 2009).

Εκπαιδευτικοί

Στη χώρα μας η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών δηλώνει ότι θεωρεί απαραίτητη τη συνεργασία τους με τους γονείς (βλ. ενδεικτικά Δεσλή & Σαραήογλου, 2009· Ντζιαχρήστος & Καφούση, 2003). Οι λόγοι για την ανάπτυξη αυτής της συνεργασίας στα μαθηματικά συνδέονται κυρίως με: α) την αντιμετώπιση των δυσκολιών, οι οποίες εντοπίζονται είτε από την πλευρά του εκπαιδευτικού είτε από την πλευρά του γονιού, β) την ενημέρωση του γονιού για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να βοηθά το παιδί του στα μαθηματικά στο σπίτι και γ) την εξάσκηση. Επομένως, οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι ο ρόλος της γονικής συμμετοχής αφορά κυρίως στην ενίσχυση των πρακτικών που ακολουθούνται στο σχολείο και όχι στο «άνοιγμα» της τάξης των μαθηματικών στη συζήτηση αξιών και πρακτικών που μπορεί να αναπτύσσονται στο σπίτι. Επιπλέον, η επικοινωνία γονιών-εκπαιδευτικών δεν φαίνεται να είναι παραγωγική, καθώς πολλοί γονείς αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί δεν δίνουν οδηγίες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά τους στο σπίτι, ενώ και οι ίδιοι δεν ενημερώνουν τον εκπαιδευτικό για τις εμπειρίες τους με τα παιδιά τους στο σπίτι στο μάθημα των μαθηματικών (βλ. ενδεικτικά Σκουμπουρδή, Τάτσης & Καφούση, 2009).

Με βάση τα παραπάνω ερευνητικά αποτελέσματα για τις πεποιθήσεις των γονιών και των εκπαιδευτικών, οι Έλληνες γονείς φαίνεται να μπορούν να παρακινούνται και από τις τρεις κατηγορίες κινήτρων για να εμπλακούν στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους, ενώ πιστεύουν ότι ο ρόλος τους είναι να μοιράζονται την ευθύνη της μάθησης στα μαθηματικά με τους εκπαιδευτικούς (partnership-role focused construction for involvement), σε αντίθεση με γονείς άλλων εθνικοτήτων που πιστεύουν ότι για τη μάθηση των παιδιών τους είναι πρωταρχικά υπεύθυνοι ή οι ίδιοι ή το σχολείο και συμπεριφέρονται ανάλογα (parent-focused role, school-focused role, Hoover-Dempsey & Jones, 1997, βλ. Walker et al., 2011). Ιδιαίτερα, οι προσκλήσεις των εκπαιδευτικών για τη συμμετοχή των γονιών στην εκπαίδευση των παιδιών τους στο σπίτι και το σχολείο βοηθούν τους γονείς να αισθάνονται ότι είναι πολύτιμα μέλη της σχολικής κοινότητας και πολύτιμοι συμμετέχοντες στην εκπαίδευση των παιδιών τους (Hoover-Dempsey & Sandler, 2005).

Μαθητές

Σε μια πρόσφατη έρευνα με μαθητές/τριες μιας ΣΤ΄ τάξης δημοτικού που πραγματοποιήσαμε σε ένα δημόσιο σχολείο στην Αθήνα (N=15), μελετήθηκε πώς η γονική συμμετοχή επηρεάζει την ταυτότητά τους στα μαθηματικά (Kafoussi et al., 2020). Το εργαλείο συλλογής δεδομένων στηρίχθηκε στο μοντέλο των Abreu και Cline (2003), σύμφωνα με το οποίο η μαθηματική ταυτότητα ενσωματώνει τρεις συμπληρωματικές διαδικασίες τοποθέτησης: προσδιορισμός του άλλου (identifying the other), προσδιορισμός από τους άλλους (being identified) και αυτοπροσδιορισμός (self-identification). Ο προσδιορισμός του άλλου αφορά στην ατομική κατανόηση των κοινωνικών ταυτοτήτων των άλλων και ο προσδιορισμός από τους άλλους αφορά στην ατομική κατανόηση της ταυτότητας που μας αποδίδουν οι άλλοι. Μέσω ατομικών συνεντεύξεων με τα παιδιά θέσαμε ερωτήσεις για έξι θέματα που σχετίζονται με το μάθημα των μαθηματικών (επίδοση, στάση, αξία, φύση, αυτοπεποίθηση, συνεργασία με τους γονείς στο σπίτι). Για κάθε θέμα διατυπώθηκαν τρία διαφορετικά ερωτήματα που αντιστοιχούν στις προαναφερόμενες διαδικασίες τοποθέτησης. Για παράδειγμα στο θέμα της επίδοσης τα ερωτήματα ήταν: α)Πιστεύεις ότι είσαι καλός/ή στα μαθηματικά; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό; β)Η μητέρα/ο πατέρας σου πιστεύει ότι είσαι καλός/ή στα μαθηματικά; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό; Γ)Πιστεύεις ότι η μητέρα σου/ ο πατέρας σου είναι καλή/ός στα μαθηματικά; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό;

Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι η επίδραση της γονικής συμμετοχής στη διαμόρφωση της μαθηματικής ταυτότητας των μαθητών/τριών στηρίζεται κυρίως στην άμεση συμμετοχή, δηλαδή στην ύπαρξη ή όχι της συνεργασίας με τους γονείς τους κατά την εργασία που έχουν στο σπίτι και ανέδειξαν σημαντικές διαφοροποιήσεις ανάμεσα στους μαθητές που αυτοπροσδιορίστηκαν ως «καλοί στα μαθηματικά» και αυτούς που αυτοπροσδιορίστηκαν ως «μέτριοι στα μαθηματικά». Στην πρώτη ομάδα τα παιδιά θεωρούν ότι και οι γονείς τους έχουν την ίδια αντίληψη για την επίδοση και την αυτοπεποίθησή τους στα μαθηματικά και η άμεση γονική συμμετοχή συνδέθηκε μόνο με θετικές εμπειρίες. Αντίθετα, όταν οι μαθητές/τριες χαρακτήρισαν τον εαυτό τους «μέτριο/α» στα μαθηματικά, φάνηκε να μην βιώνουν την ίδια συνοχή σε σχέση με τις αντιλαμβανόμενες απόψεις των γονιών τους. Για παράδειγμα, πολλές φορές δήλωσαν ότι δεν γνώριζαν αν οι γονείς τους τούς θεωρούν καλούς στα μαθηματικά, ότι οι τοποθετήσεις των δύο γονιών τους σε σχέση με τις δικές τους δυσκολίες διέφεραν (συνήθως πιο θετικές απόψεις για τους ίδιους από τη μητέρα τους), ενώ προσδιόρισαν διαφορετικά τη δυσκολία των ίδιων των γονιών τους στα μαθηματικά (προσδιόρισαν διαφορετικά τις μητέρες από τους πατέρες) και εξέφρασαν αντιφατικές απόψεις σχετικά με τη βοήθεια των γονιών τους. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι πολλά παιδιά αναφέρθηκαν στα επαγγέλματα των γονιών τους προκειμένου να χαρακτηρίσουν τη σχέση τους με τα μαθηματικά ή να εξηγήσουν την αξία που οι γονείς τους αποδίδουν σε αυτό το μάθημα, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο ομάδες παιδιών δήλωσαν ότι χρειάζονται τη συνεργασία των γονιών τους στην εργασία στο σπίτι. Τέλος, η συγκεκριμένη έρευνα επιβεβαίωσε αποτελέσματα άλλων ερευνών, ότι τα παιδιά θεωρούν ότι ο πατέρας έχει καλύτερη σχέση με τα μαθηματικά και η συμμετοχή του φαίνεται να είναι πιο έντονη σε αυτό το μάθημα σε σχέση με άλλα μαθήματα (βλ. ενδεικτικά Moutsios-Rentzos et al., 2015).

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΟΝΙΩΝ

Αν και σε πολλές μελέτες αναδεικνύεται η αναγκαιότητα της διερεύνησης των τρόπων της αποτελεσματικής συνεργασίας σχολείου-οικογένειας στη μαθηματική εκπαίδευση, λίγες έρευνες έχουν ασχοληθεί με την αξιολόγηση προγραμμάτων παρέμβασης (intervention programs) που αφορούν στην ενίσχυση της άμεσης ή/και έμμεσης συμμετοχής των γονιών στα μαθηματικά. Τα προγράμματα αυτά θα μπορούσαν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, αν και τα όρια δεν είναι πάντα ευδιάκριτα: αυτά που εστιάζουν κυρίως στην εκπαίδευση των γονιών και αυτά που εστιάζουν κυρίως στην εργασία στο σπίτι σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς του σχολείου.

Στην πρώτη κατηγορία μπορούν να ενταχθούν προγράμματα παρέμβασης που έχουν πραγματοποιηθεί για ένα μικρό ή μεγάλο χρονικό διάστημα με την υποστήριξη ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης κυρίως για μαθητές/τριες πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και περιλαμβάνουν την οργάνωση εργαστηρίων σε μια σειρά συναντήσεων με γονείς (πολλές φορές στις συναντήσεις αυτές συμμετέχουν και εκπαιδευτικοί ή/και παιδιά), στις οποίες γίνονται συζητήσεις για το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών, ενώ προτείνονται και εργασίες για το σπίτι (βλ. ενδεικτικά Family Mathematics Curriculum, 2000, ΗΠΑ για οικογένειες με χαμηλό κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο· Getting Ready for School program-GRS, 2012·Math and Parent Partnerships in the Soouhtwest-MAPPS, 1999-2003, 2008-2011, ΗΠΑ· Γεωργιάδου-Καμπουρίδη & Μπαρτζάκλη, 2008· Παπαδόπουλος, 2011). Τα αποτελέσματά τους δείχνουν ότι η ενίσχυση της γονικής συμμετοχής στα μαθηματικά στο σπίτι συσχετίζεται θετικά με τη βελτίωση της επίδοσης των παιδιών τους, ιδιαίτερα αν τα προγράμματα διαρκούν μεγάλο χρονικό διάστημα. Επιπλέον, δείχνουν θετικές αλλαγές στην ικανότητα των γονιών να υποστηρίξουν το παιδί τους λόγω των περισσότερων μαθηματικών γνώσεων και της μεγαλύτερης αυτοπεποίθησης που αποκτούν (Knapp et al., 2017· Van Voorhis et al., 2013).

Στη δεύτερη κατηγορία μπορούν να ενταχθούν προγράμματα που στηρίζουν τη γονική συμμετοχή μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων μαθηματικών εργασιών που δίνονται από τους εκπαιδευτικούς του σχολείου για το σπίτι. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι το πρόγραμμα TIPS (Teachers Involve Parents in Schoolwork- Interactive Math homework, ΗΠΑ), που εμπλέκει σκόπιμα τους γονείς σε μαθηματικές εργασίες με τα παιδιά τους στο σπίτι, καθώς οι εκπαιδευτικοί ζητούν από τους/τις μαθητές/τριες να συζητήσουν με τους γονείς τους για ένα μαθηματικό θέμα που έμαθαν στο σχολείο, δίνοντας συγκεκριμένες οδηγίες στους γονείς και παράλληλα ζητούν από τους γονείς να σχολιάσουν την αλληλεπίδραση με το παιδί τους, ενημερώνοντας τον/την εκπαιδευτικό (Epstein, 2016). Το συγκεκριμένο πρόγραμμα φαίνεται να έχει πολύ θετικά αποτελέσματα στην αλληλεπίδραση των γονιών με τα παιδιά στο σπίτι, την επίδοση των παιδιών στα μαθηματικά και τη δημιουργία θετικών συναισθημάτων σε παιδιά και γονείς για την εργασία με τα μαθηματικά στο σπίτι (van Voorhis et al., 2013).

Προς αυτή την κατεύθυνση στη συνέχεια παρουσιάζονται στοιχεία από ένα επιμορφωτικό πρόγραμμα που πραγματοποιήθηκε την περίοδο Μάιος – Ιούνιος 2021 στο πλαίσιο των επιμορφωτικών δράσεων του 1ου ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Αττικής, με θέμα «Σχεδιάζοντας δραστηριότητες για τα μαθηματικά στο σπίτι» για τους/τις εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης όλων των τάξεων. Το πρόγραμμα είχε διάρκεια έξι εβδομάδων και συμμετείχαν εθελοντικά 16 εκπαιδευτικοί που δίδασκαν σε διαφορετικές τάξεις σε 10 δημοτικά σχολεία (βλ.https://blogs.sch.gr/1pekesat/2021/06/16/yliko-apo-to-epimorfotiko-programma-schediazontas-drastiriotites-gia-ta-mathimatika-sto-spiti/). Ένας από τους στόχους του προγράμματος ήταν να ενημερωθούν οι εκπαιδευτικοί για τις σύγχρονες προσεγγίσεις της σχέσης μαθηματικής εκπαίδευσης και γονικής συμμετοχής και να σχεδιάσουν μαθηματικές εργασίες σε συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους του αναλυτικού προγράμματος που απαιτούσαν την αλληλεπίδραση γονιών-παιδιών. Οι εργασίες σχεδιάστηκαν με βάση τα ακόλουθα κριτήρια: α) να δηλώνεται με σαφήνεια η σύνδεσή τους με συγκεκριμένο μαθησιακό στόχο του προγράμματος σπουδών, β) να παρέχονται οδηγίες για την πραγματοποίησή τους, γ) να επεκτείνουν τις μαθηματικές γνώσεις που απέκτησαν τα παιδιά στην τάξη σε καταστάσεις που αναδεικνύουν τη λειτουργικότητα των μαθηματικών στην καθημερινή τους ζωή και δ) να δηλώνεται τι θα περιλαμβάνει η συζήτηση την επόμενη μέρα στην τάξη (διαφορετικές προτάσεις/λύσεις των παιδιών και δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετώπισαν).

Για να συζητηθεί η συμβολή των συγκεκριμένων έργων συλλέχθηκαν στοιχεία από τους γονείς μέσω της συμπλήρωσης ενός ερωτηματολογίου (109 γονείς) και τα φύλλα εργασίας των παιδιών. Οι απαντήσεις των γονιών ανέδειξαν κρίσιμα στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης που αφορούσαν: α) στην αναγνώριση της σχέσης των μαθηματικών με την καθημερινότητα (π.χ. «Ήταν ενδιαφέρουσα καθώς έδωσε την ευκαιρία να συζητήσουμε το θέμα της σύγκρισης τιμών για την εύρεση της καλύτερης επιλογής, το θέμα του προϋπολογισμού μιας γιορτής και τη σημασία που έχει να προγραμματίζουμε και να προσπαθούμε να μην ξεφύγουμε εντελώς από τα διαθέσιμα χρήματα που έχουμε.», Ε΄ τάξη), β) την επισήμανση τρόπων λύσεων των παιδιών (π.χ. «Με εντυπωσίασε το γεγονός ότι όταν δυσκολεύτηκε επέλεξε να τα ζωγραφίσει για να τα μετρήσει.», Β΄ τάξη) και γ) την ανάπτυξη θετικών συναισθημάτων γονιών και παιδιών (π.χ. «Ήταν πολύ χαρούμενο το παιδί μου που το κάναμε όλο μαζί.», Α΄ τάξη).

Στο πρόγραμμα επιμόρφωσης ήταν ισχυρός ο προβληματισμός των εκπαιδευτικών για τους τρόπους βοήθειας των οικογενειών διαφορετικών πολιτισμικών ομάδων στα μαθηματικά. Παραδοσιακά, η εμπλοκή των οικογενειών που προέρχονται από διαφορετικές πολιτισμικές ομάδες σε σχέση με την κυρίαρχη ομάδα, αντιμετωπίστηκε ως «εμπόδιο» στη τυπική μαθηματική εκπαίδευση, ενώ σήμερα επισημαίνεται ότι οι γονείς μπορούν να συμμετέχουν ενεργά ως συν-σχεδιαστές (co-designers) της μαθηματικής εμπειρίας των παιδιών τους (Ishimaru, Barajas-Lopez & Bang, 2015). Η αξιοποίηση του κεφαλαίου της γνώσης (funds of knowledge) της κάθε οικογένειας και των πρακτικών της σε σχέση με τα μαθηματικά μπορεί να βοηθήσει στη μάθηση των μαθηματικών με κατανόηση, η οποία δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητη από τη σύνδεση των σχολικών γνώσεων των παιδιών με τις μαθηματικές τους εμπειρίες εκτός σχολείου, ιδιαίτερα στην προσπάθεια ανάπτυξης μιας πολιτισμικά ανταποκρινόμενης διδασκαλίας (culturally responsive teaching) (βλ. ενδεικτικά Civil & Bernier, 2006·Wager, 2012). Όπως έχει φανεί, τα παιδιά διαφορετικών πολιτισμικών ομάδων δείχνουν προτιμήσεις στις μαθηματικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται στο σχολείο και το σπίτι, οι οποίες επηρεάζονται από διάφορες μεταβλητές, όπως το περιβάλλον που θεωρούν ότι τους εξασφαλίζει καλύτερη κατανόηση, η γλώσσα ή συγκεκριμένοι τρόποι λύσης μαθηματικών προβλημάτων (Abreu, Cline, & Shamsi, 2002).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ταυτότητα ενός/μιας μαθητή/τριας στα μαθηματικά διαμορφώνεται μέσω της συμμετοχής του σε μαθηματικές δραστηριότητες σε διάφορα περιβάλλοντα που συμπεριλαμβάνουν τη σχολική τάξη και την οικογένεια. Τα ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι ανάλογα με την ηλικία, υπάρχει μία ποικιλία γονικών συμπεριφορών που συνδέονται τόσο με την έμμεση όσο και με την άμεση συμμετοχή και οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν στη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων των μαθητών/τριών στα μαθηματικά. Ιδιαίτερα, η άμεση συμμετοχή φαίνεται να έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των παιδιών, όταν στηρίζεται σε έργα που είναι καλά σχεδιασμένα από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος είναι πρόθυμος να ακούσει και να μάθει από τους γονείς, καθώς συμβάλλουν με τις δικές τους αξίες και πρακτικές στη μαθηματική δραστηριότητα. Οι μαθηματικές πρακτικές μπορούν να “ταξιδεύουν” από το σπίτι στο σχολείο και αντίστροφα, ρίχνοντας πολλές φορές φως στην ερμηνεία της μαθηματικής συμπεριφοράς του παιδιού (Anderson & Gold, 2006).

Η ανάπτυξη συνεργασίας ανάμεσα στο σχολικό και το οικογενειακό περιβάλλον είναι πολύ σημαντική για να αποτελεί ζήτημα ευκαιριακό και να εναπόκειται στην καλή θέληση και διάθεση γονιών και εκπαιδευτικών ή να θεωρείται ευθύνη είτε μόνο των γονιών είτε μόνο των εκπαιδευτικών (Adams, Forsyth & Mitchel, 2009). Ο σχεδιασμός της μαθηματικής εκπαίδευσης μπορεί να περιλαμβάνει την ανάπτυξη δράσεων για την θεσμοθέτηση της συνεργασίας σχολείου-οικογένειας στα μαθηματικά με συγκεκριμένους τρόπους σε κάθε, κατά το δυνατόν προσδιορισμένο, κοινωνικό-πολιτισμικό περιβάλλον. Βασικές αρχές ανάπτυξης του εκπαιδευτικού σχεδιασμού για τη συνεργασία γονιών-εκπαιδευτικών στα μαθηματικά μπορεί να είναι οι ακόλουθες:

- Όλοι οι γονείς μπορούν να εμπλακούν στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους ανεξάρτητα από τα κοινωνικο-πολιτισμικά χαρακτηριστικά της οικογένειας.
- Η επικοινωνία γονιών-εκπαιδευτικών δεν μπορεί παρά να στηρίζεται στην ανάπτυξη σχέσεων αμοιβαίας εμπιστοσύνης και αποδοχής ανάμεσά τους και να ενισχύει την ενεργητική συμμετοχή των γονιών σε θέματα μάθησης των παιδιών τους στα μαθηματικά.
- Ο σχεδιασμός εργασιών για το σπίτι που απαιτούν τη συνεργασία γονιών-παιδιών μπορεί να περιλαμβάνει συγκεκριμένες οδηγίες από τους εκπαιδευτικούς και να εξυπηρετεί τη σύνδεση με τις καθημερινές εμπειρίες των παιδιών στην οικογενειακή και κοινωνική τους ζωή, ενισχύοντας το μαθηματικό γραμματισμό.
- Οι γονείς μπορούν να στηρίξουν τη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους αν είναι ενημερωμένοι για τους στόχους των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών.
- Η ανατροφοδότηση της μάθησης στη σχολική τάξη από την εργασία με τους γονείς στο σπίτι είναι αναγκαία προϋπόθεση για τη βελτίωση της συνεργασίας εκπαιδευτικών και γονιών στα μαθηματικά.

Ωστόσο, αρκετά ερωτήματα χρειάζεται ακόμα να διερευνηθούν τα οποία αφορούν στα κριτήρια σχεδιασμού των μαθηματικών έργων κατά τη συνεργασία σχολείου-οικογένειας σε διαφορετικές ηλικίες, στην καταγραφή των χαρακτηριστικών των αλληλεπιδράσεων γονιών και μαθητών, μέσω όχι μόνο ποσοτικών αλλά και ποιοτικών ερευνών, καθώς και στους τρόπους επικοινωνίας γονιών-εκπαιδευτικών στις σύγχρονες πολυπολιτισμικές τάξεις των μαθηματικών εξασφαλίζοντας ίσες ευκαιρίες για όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abreu, G. de, & Cline, T. (2003). Schooled mathematics and cultural knowledge. *Pedagogy, Culture and Society*, *11*(1), 11-30.

Abreu, G. de, Cline, T., & Shamsi, T. (2002). Exploring ways parents participate in their children's school mathematical learning: Cases studies in multiethnic primary schools. In G. de Abreu, A. Bishop & N. Presmeg (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practices* (σ. 123-147). Boston, MA: Kluwer.

Abreu, G. de, Gorgorio, N., & Boistrup, L. B. (2018). Diversity in mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven, *Developing Research in Mathematics*

Education: Twenty years of communication in Europe (σ. 211-222). Oxon, UK: Routledge.

Adams, C., Forsyth, P., & Mitchell, R. (2009). The formation of parent-school trust: A multilevel analysis. *Educational Administration Quarterly*, *45*(1), 4-33.

Anderson, D. & Gold, E. (2006). Home to School: Numeracy Practices and Mathematical Identities. *Mathematical Thinking and Learning*, *8* (3), 261-286.

Andrews, P. Petersson, J. & Sayers, J. (2021). A methodological critique of research on parent-initiated mathematics activities and young children's attainment. *Educational Studies in Mathematics*, https://doi.org/10.1007/s10649-021-10080-x

Boonk, L., Gijselaers, H. J. M., Ritzen, H., Brand-Gruwel, S. (2018). A review of the relationship between parental involvement indicators and academic achievement. *Educational Research Review*. http://dx.doi.org/10.1016/j.edurev.2018.02.001

Γεωργιάδου-Καμπουρίδη. Β. & Μπαρτζάκλη, Μ. (2008). Αναπτύσσοντας ένα πλαίσιο συνεργασίας γονέων, μαθητών και εκπαιδευτικού στα μαθηματικά. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, *2*, 51-70.

Cai, J., Moyer, J.C. & Wang, N. (1997, March). Parental Roles in Students' Learning of Mathematics: An Exploratory Study. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago, USA. Retrieved from ERIC database. (ED 412187)

Cao, Z., Bishop, A., & Forgasz, H. (2006). Perceived parental influence on mathematics learning: a comparison among students in China and Australia. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(1), 85-106.

Civil, M. & Bernier,E. (2006). Exploring Images of Parental Participation in Mathematics Education: Challenges and Possibilities. *Mathematical Thinking & Learning*, *8*(3), 309-330.

Crafter, S. (2012). Parental cultural models and resources for understanding mathematical achievement in culturally diverse school settings. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 31-46.

Δεσλή, Δ. & Σαραήογλου Π. (2009). Η εμπλοκή των γονέων στα μαθηματικά του σχολείου. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ, Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές* (σ. 121-130). Ρόδος.

Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 19-33.

Di Paola, B. (2016). Why Asian children outperform students from other countries? Linguistic and parental influences comparing Chinese and Italian children in Preschool Education. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 11* (9), 3351-3359.

Epstein, J. L. (2016). *TIPS Teachers Involve Parents in Schoolwork*. Center on School, Family, and Community Partnerships Johns Hopkins University.

Harackiewicz1, J., M. Rozek, C. S., Hulleman C. S. & Hyde, J. S. (2012). Helping Parents to Motivate Adolescents in Mathematics and Science: An Experimental Test of an Utility-Value Intervention. *Psychological Science*. doi: 10.1177/0956797611435530

Hill, N. E., & Taylor, L. C. (2004). Parental school involvement and children's academic achievement. *American Psychological Society, 13* (4), 161-164.

Hoover-Dempsey, K. V., & Jones, K. P. (1997, March). Parental role construction and parental involvement in children's education. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago.

Hoover-Dempsey, K. V., & Sandler, H. M. (2005). *Final performance report for OERI grant # R305T010673: The social context of parental involvement: A path to enhanced achievement.* Presented to Project Monitor, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education, March 22.

Hyde, J. S., Else-Quest, N. M., Alibali, M. W., Knuth, E., & Romberg, T. (2006). Mathematics in the home: Homework practices and mother–child interactions doing mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 136-152.

Ishimaru, A., Barajas-Lopez, F. & Bang, M. (2015). Centering family knowledge to develop children's empowered mathematics identities. *Journal of Family Diversity in Education, 1*(4), 1-21.

Jacobs, J. E. & Bleeker, M. (2004). Girls' and boys' developing interests in Math and Science: do parents matter? *New Directions for Child and Adolescent Development*, *106*, 5-21.

Κασσώτη, Ο. & Κλιάπης, Π. (2009). Γονεϊκή συμμετοχή στη μελέτη των Μαθηματικών στην περιοχή της Αλεξάνδρειας Ημαθίας. Διερεύνηση της εμπλοκής των γονέων στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ.

Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ, Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές* (σ. 111-120). Ρόδος.

Kafoussi, S., Chaviaris, P. & Moutsios-Rentzos, A. (2020). Investigating parental influences on sixth graders’ mathematical identity in Greece: a case study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), em0572, https://doi.org/10.29333/iejme/6279

Knapp, A., Landers, R., Liang, S., & Jefferson, V. (2017). We all as a family are graduating tonight: a case for mathematical knowledge for parental involvement. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 79-95.

LeFevre, J., Skwarchuk, S. L., Smith-Chant, B. L., Fast, L., Kamawar, D., and Bisanz, J. (2009). Home numeracy experiences and children’s math performance in the early school years. *Canadian Journal of Behavioural Science*, *41*(2), 55-66.

Lenvenson, S. E., Barkai, R., Tirosh, D. & Tsasmir, P. (2021) Exploring adults’ awareness of and suggestions for early childhood numerical activities. *Educational Studies in Mathematics*, https://doi.org/10.1007/s10649-021-10063-y

Maloney,E., Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. & Beilock, S. (2015). Intergenerational Effects of Parents’ Math Anxiety on Children’s Math Achievement and Anxiety. *Psychological Science, 26*(9), 1480–1488.

Moutsios-Rentzos, A., Chaviaris, P., & Kafoussi, S. (2015). School socio-cultural identity and perceived parental involvement about mathematics learning in Greece. *Journal of Research in Mathematics Education (REDIMAT), 4(3),* 234-259.

Ντζιαχρήστος, Β. & Καφούση, Σ. (2003). Γονείς, μαθητές, δάσκαλοι και μαθηματικά. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, *60*, 63-84.

Παπαδόπουλος, Ι. (2011). Γονείς στο σχολείο: βελτιώνοντας τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επιμ.), *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ, Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας* (σ. 381-390). Ιωάννινα.

Phillipson, S., & Phillipson, S. N. (2012). Children’s cognitive ability and their academic achievement: The mediation effects of parental expectations. *Asia Pacific Educational Review*, *13*, 495-508.

Quaye, J. & Pomeroy, D. (2022). Social class inequalities in attitudes towards mathematics and achievement in mathematics cross generations: a quantitative Bourdieusian analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *109*, 155-175.

Σκουμπουρδή, Χ., Τάτσης, Κ. & Καφούση, Σ. (2009). Απόψεις γονιών, παιδιών νηπιαγωγείου, για την εμπλοκή των Μαθηματικών σε καθημερινές δραστηριότητες και παιχνίδια. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, *Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές* (σ. 131-140). Ρόδος.

Sfard, A. & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different ?-Early numerical thinking revised. *Cognition and Instruction*, *23*(2), 237-309.

Silinkas, G. & Kikas, E. (2019). Perental involvement in Math Homework: Links to Childern's Performance and Motivation. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *63*(1), 17-37.

Skwarchuk, S. L. (2009). How do parents support preschoolers' numeracy learning experienc-es at home? *Early Childhood Educational Journal*, *37*(3), 189-197.

Τσουρέλη Δ. (2021). *Ο ρόλος του πλαισίου της οικογένειας και των γονιών στη μάθηση των μαθηματικών: Μελέτη των παραγόντων που επηρεάζουν την ενασχόληση των γονέων και οι επιπτώσεις αυτής*. Διδακτορική διατριβή. Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών της Σχολής Επιστημών Αγωγής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Van Voorhis, F. L., Maier, M. F., Epstein, J. L, Lloyd, C. M. (2013). *The Impact of Family Involvement on the Education of Children Ages 3 to 8. A Focus on Literacy and Math Achievement Outcomes and Social-Emotional Skills.* MDRC

Wager, A. A. (2012). Incorporating out-of-school mathematics: from cultural context to embedded practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 9–23.

Walker, J. M. T., Ice, C. L., Hoover-Dempsey, K. V. & Sandler, H. M. (2011). Latino Parents' Motivations for Involvement in Their Children's Schooling. *The Elementary School Journal*, *111*(3), 409-429.

Weerasinghe, D. (2019). Striking a Balance between children's need of support and parental roles in mathematics homework. In G. Hine, S. Blackley, & A. Cooke (Eds.), *Mathematics Education Research: Impacting Practice (Proceedings of the 42nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*, (σ. 755-762). Perth: MERGA.

Zhu, J. & Chiu, M. M. (2019). Early home numeracy activities and later mathematics achievement: early numeracy, interest and self-efficacy as mediators. *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 173-191.

Zippert, E. & Rittle-Johnson, B. (2020). The home math environment: more than numeracy. *Early Childhood Research Quarterly, 50,* 4–15.

ΠΕΡΙΘΩΡΙΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΗ ΣΚΥΛΛΑ ΚΑΙ ΤΗ ΧΑΡΥΒΔΗ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Ξενοφώντος Κωνσταντίνος

Oslo Metropolitan University, Νορβηγία

constantinos.xenofontos@oslomet.no

Στο κείμενο αυτό εξετάζω το ζήτημα της περιθωριοποίησης ομάδων παιδιών με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (εμφανή ή μη) και του αποκλεισμού τους από το σχολικό μάθημα των μαθηματικών. Το ζήτημα αυτό, η εξέταση και η αποτελεσματική αντιμετώπισή του αποτελούν ιδιαίτερες προκλήσεις για τη μαθηματική παιδεία. Ξεκινώ τοποθετώντας το κείμενο σε σχέση με συγκεκριμένες τάσεις στην έρευνα της μαθηματικής παιδείας, αφού προηγουμένως παρουσιάζω μια σύντομη ιστορική επισκόπηση του κλάδου. Ακολούθως, επικεντρώνομαι στην έννοια της περιθωριοποίησης, σχολιάζοντας ευρήματα σχετικών ερευνών για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στη συνέχεια, κάνω μια σύντομη αναφορά στην ερευνητική μου εμπειρία σε τρία διαφορετικά πλαίσια (Κύπρο, Σκωτία, Νορβηγία), διερευνώντας πώς το ζήτημα της περιθωριοποίησης προσεγγίζεται από την εκπαιδευτική πολιτική κάθε χώρας, καθώς επίσης και πώς διδάσκοντες σχολικών μαθηματικών από την κάθε χώρα τοποθετούνται ως προς αυτό. Τέλος, στρέφομαι στην έννοια της δια-τομικότητας, υπογραμμίζοντας την ανάγκη για κατανόηση των τρόπων με τους οποίους οι κοινωνικές ανισότητες λειτουργούν συνδυαστικά σε ό,τι αφορά την περιθωριοποίηση και τον αποκλεισμό ομάδων παιδιών από τα σχολικά μαθηματικά.

ΣΤΡΟΦΕΣ ΣΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ

Η έναρξη συστηματικών συζητήσεων γύρω από τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών τοποθετείται χρονικά περίπου στα μέσα του προηγούμενου αιώνα, όταν τα ζητήματα αυτά άρχισαν να απασχολούν ερευνητές από δύο διαφορετικά πεδία: τα καθαρά μαθηματικά και την ψυχολογία (Andrews & Rowland, 2014· Kilpatrick, 2014). Από τους μεν πρώτους, δύο σημαντικές παρουσίες είναι αυτές των Hans Freudenthal και George Pólya, ακαδημαϊκών μαθηματικών οι οποίοι έθεσαν, μεταξύ άλλων, ερωτήματα σχετικά με το πώς οι μέθοδοι σκέψης και εργασίας των ερευνητών στα πανεπιστημιακά μαθηματικά θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν στη δευτεροβάθμια και, σε μικρότερο βαθμό, την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Παράλληλα, στην ψυχολογία ορισμένοι ερευνητές επικεντρώθηκαν στη μελέτη των γνωστικών διεργασιών του ανθρώπινου εγκεφάλου κατά την επίλυση μαθηματικών έργων. Σταδιακά, η μαθηματική παιδεία άρχισε να αυτονομείται από τους γονεϊκούς της κλάδους· εντούτοις, ειδικά τις πρώτες δεκαετίες, οι επιδράσεις των μαθηματικών και της ψυχολογίας στα ενδιαφέροντα των ερευνητών του νεοσύστατου κλάδου ήταν εμφανείς: ψυχομετρικές προσεγγίσεις, σταθμισμένα δοκίμια, ποσοτικά δεδομένα, μετρήσεις, συγκρίσεις, στατιστική σημαντικότητα.

Μερικές δεκαετίες αργότερα, γύρω στα τέλη της δεκαετίας του ’70 και τις αρχές της δεκαετίας του ’80, η μαθηματική παιδεία παρακολουθεί την εντατικοποίηση φιλοσοφικών/επιστημολογικών διαλόγων εντός τόσο των μαθηματικών όσο και της ψυχολογίας. Συγκεκριμένα, στο χώρο των μαθηματικών βλέπουμε να εντείνονται οι συζητήσεις σχετικά με τη φύση της μαθηματικής γνώσης και το κατά πόσον οι μαθηματικές έννοιες υπάρχουν ως αφηρημένες και αντικειμενικές οντότητες ανεξάρτητες από το άτομο που τις μελετά ή αποτελούν προϊόν της ανάγκης του ανθρώπου να κατανοήσει τον κόσμο γύρω του, και ως εκ τούτου, είναι ένα κοινωνικά κατασκευασμένο εργαλείο (Ernest, 1999). Την ίδια περίοδο, στην ψυχολογία, οι συζητήσεις γύρω από τις θεωρίες μάθησης του Piaget και του Vygotsky καλούν τους ερευνητές να επανεξετάσουν ερωτήματα σχετικά με το αν η μάθηση είναι δραστηριότητα που λαμβάνει χώρα αποκλειστικά στο μυαλό του μανθάνοντα ή αποτελεί προϊόν της κοινωνικής αλληλεπίδρασης του ατόμου με το περιβάλλον και τους γύρω του (van Geert, 1998). Αποτέλεσμα όλων αυτών φαίνεται να είναι η *κοινωνική στροφή* (Lerman, 2000) της μαθηματικής παιδείας προς την εξέταση θεμάτων κοινωνικοπολιτισμικής φύσης, όπως για παράδειγμα η δουλειά της Thompson (1984) η οποία, αξιοποιώντας ποιοτικές μεθόδους έρευνας, μελετά τη σχέση πεποιθήσεων και πρακτικών των εκπαιδευτικών, και των Yackel και Cobb (1996) σχετικά με τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες της σχολικής τάξης.

Στο μεταξύ, ορισμένοι ερευνητές του χώρου (π.χ. Appelbaum, 1995· Frankenstein, 1983· Skovsmose, 1985· Popkewitz & Brennan, 1998) αρχίζουν να θέτουν ερωτήματα κοινωνικοπολιτικού χαρακτήρα για τα σχολικά μαθηματικά, ερωτήματα τα οποία μέχρι και τα τέλη της δεκαετίας του ’90 αποτελούσαν σποραδικές φωνές «επανάστασης» σε ένα χώρο όπου οι γνωστικές επιρροές ήταν ακόμα πάρα πολύ ισχυρές. Φωνές άλλων ερευνητών άρχισαν να συμπαρίστανται και να ενώνονται, έτσι που γύρω στο 2000 παρατηρείται αυτό που η Gutiérrez (2013) ονομάζει *κοινωνικοπολιτική στροφή* της μαθηματικής παιδείας. Από τη σκοπιά αυτή, οι Sriraman και Steinthorsdottir (2007) τολμούν να δηλώσουν πως πια η μαθηματική παιδεία φαίνεται να έχει περισσότερα κοινά με την πολιτική επιστήμη, με την ευρεία έννοια, παρά με τα ίδια τα μαθηματικά. Έκτοτε, πολλά άτομα του χώρου επικεντρώθηκαν και επικεντρώνονται στη μελέτη ερωτημάτων όπως: Ποιος αποφασίζει για το περιεχόμενο των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών; Ποιες ομάδες παιδιών περιθωριοποιούται και αποκλείονται από τα σχολικά μαθηματικά; Πώς έννοιες όπως η ισότητα και η κοινωνική δικαιοσύνη σχετίζονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση του αντικειμένου;

Σε αυτό, λοιπόν, το τελευταίο ρεύμα σκέψης στη μαθηματική παιδεία εντάσσεται και το θέμα που πραγματεύεται το παρόν κείμενο. Προς αποφυγή παρανοήσεων, υπογραμμίζω πως δεν υπονοώ ότι σε κάθε στροφή του ενδιαφέροντος ο κλάδος εγκατέλειψε την προηγούμενη σχολή σκέψης. Αντιθέτως, παρατηρείται σήμερα μια συνύπαρξη των τριών: του γνωστικού, του κοινωνικού, και του κοινωνικοπολιτικού. Μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις ερευνητές αξιοποιούν ταυτόχρονα μεθόδους και θεωρητικά πλαίσια από περισσότερες από μία σχολές (de Araujo κ.ά., 2018).

ΠΕΡΙΘΩΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Προτού εξετάσουμε το ζήτημα της περιθωριοποίησης στα μαθηματικά, κρίνεται αναγκαίο να ορίσουμε την ίδια την έννοια της περιθωριοποίησης. Για το σκοπό αυτό, υιοθετώ μια ευρεία αντίληψη του όρου, ο οποίος βασίζεται σε παρατηρήσιμα (και μη) χαρακτηριστικά και πρακτικές ατόμων ή ομάδων, όπως για παράδειγμα η εθνικότητα, η κοινωνική τάξη, οι θρησκευτικές πεποιθήσεις, η ταυτότητα φύλου, ο σεξουαλικός προσανατολισμός, και η αναπηρία (Laurie & Khan, 2017). Συχνά, η περιθωριοποίηση αναφέρεται σε *μειονότητες*, λέξη που αποφεύγω συνειδητά να χρησιμοποιώ, προτιμώντας τη χρήση του όρου *μειονοτικοποιημένη ομάδα*. Ο χαρακτηρισμός μιας ομάδας ως μειονοτικοποιημένης δεν σημαίνει απαραίτητα την αριθμητική της μειοψηφία. Απεναντίας, τονίζει το ότι η ομάδα αυτή έχει, συνήθως εκ προθέσεως, οδηγηθεί στο κοινωνικό περιθώριο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα ποσοστά των μαύρων κατά το απαρτχάιντ στη Νότια Αφρική (Khalfani & Zuberi, 2001) και των γυναικών ανά το παγκόσμιο, αν αναφερθούμε στο φύλο από μια συντηρητική διπολική σκοπιά. Περιθωριοποίηση ή μειονοποίηση μιας ομάδας σημαίνει, μεταξύ άλλων, παρεμπόδιση ορατότητας στο δημόσιο λόγο, κοινωνικό αποκλεισμό και άνιση πρόσβαση σε κοινωνικές δομές, άρνηση ευκαιριών.

Πιθανό να διερωτηθεί κανείς πώς αυτά σχετίζονται με τα σχολικά μαθηματικά. Ένα τέτοιο ερώτημα δεν θα ήταν εντελώς αδικαιολόγητο, κυρίως όταν υπάρχουν ακόμα και σήμερα παγιωμένες πεποιθήσεις ότι τα μαθηματικά ως πεδίο ακαδημαϊκής έρευνας (Barton, 1996), και κατ' επέκταση τα σχολικά μαθηματικα (Jaworski & Phillips, 1999), είναι «καθαρά» (pure) και δεν επηρεάζονται από θέματα ταυτότητας, γλώσσας και κουλτούρας. Κι όμως, η μαθηματική παιδεία λειτουργεί σε διάφορα επίπεδα – π.χ. ως τομέας έρευνας, στα αναλυτικά προγράμματα, σε επίπεδο σχολικής τάξης – ως χώρος περιθωριοποίησης, συντήρησης και αναπαραγωγής κοινωνικών ανισοτήτων (Appelbaum, 2019· Battey & Leyva, 2016· Gutiérrez, 2017). Όπως πληροφορούμαστε από πρόσφατες έρευνες, κυρίως από τη Βόρεια Αμερική και την Ευρώπη, παρατηρούνται τεράστια χάσματα ανάμεσα στη συμμετοχή και τις μαθηματικές επιδόσεις παιδιών με διαφορετικά δημογραφικά χαρακτηριστικά. Στη μια πλευρά βρίσκεται μια συγκεκριμένη ομάδα, η οποία συστηματικά έχει τις υψηλότερες επιδόσεις: λευκά αγόρια μεσαίας κοινωνικής τάξης. Στην αντίπερα όχθη, βλέπουμε ομάδες όπως τα κορίτσια (Foyn κ.ά, 2018· He κ.ά., 2020), άτομα που αυτοπροσδιορίζονται ως κουήρ (Leyva, 2017· Rands, 2013), παιδιά από εθνοτικά μειονοτικοποιημένες ομάδες (Martin, 2019· Stathopoulou & Kalabasis, 2007· Tabron κ.ά., 2021), παιδιά των οποίων η γλώσσα που ομιλείται στο σπίτι είναι διαφορετική απ' αυτήν του σχολείου και της διδασκαλίας (Chronaki & Planas, 2018· Moschkovich, 2018), άτομα με διάφορες μορφές αναπηρίας και μαθησιακών δυσκολιών (Cascales-Martínez κ.ά., 2017· Watson & Gable, 2012), και παιδιά από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα (Chiu, 2018· Gates, 2019). Κατά συνέπεια, πολλές έρευνες από το χώρο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης επισημαίνουν, χωρίς αυτό να αποτελεί έκπληξη, πως άτομα από τις περιθωριοποιημένες αυτές ομάδες υποεκπροσωπούνται σε κλάδους όπως οι θετικές επιστήμες, η τεχνολογία, η μηχανική, και τα μαθηματικά (Bensimon κ.ά. 2019· Cech & Pham, 2017· Jenson κ.ά., 2011· MacPhee κ.ά., 2013· Patridge κ.ά., 2014).

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε διάφορες χώρες και εκπαιδευτικά συστήματα ακολουθούνται, τουλάχιστον σε επίπεδο εκπαιδευτικής πολιτικής αλλά και εκπαιδευτικής έρευνας, συγκεκριμένες τάσεις και προσεγγίσεις υπό το πρίσμα των οποίων εξετάζονται θέματα περιθωριοποίησης στα σχολικά μαθηματικά (Graven, 2014). Στις Ηνωμένες Πολιτείες, για παράδειγμα, ο λόγος (discourse) είναι στραμμένος σχεδόν αποκλειστικά σε εθνοτικά θέματα, και συγκεκριμένα σε σχέση με τις κοινότητες των Μαύρων και των Ισπανόφωνων. Σε πολλές ευρωπαϊκές χώρες, τα θέματα αυτά αφορούν παιδιά με μεταναστευτική βιογραφία, στο Ηνωμένο Βασίλειο η περιθωριοποίηση εξετάζεται μέσα από το φακό της κοινωνικής τάξης, ενώ στην Κίνα και σε πολλές χώρες της Λατινικής Αμερικής οι συζητήσεις περιστρέφονται γύρω από το ζήτημα της απόστασης από τα μεγάλα αστικά κέντρα. Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί παρά προέκταση αυτού που γράφει ο Γερμανός κοινωνιολόγος Jens Dangschat, ότι «κάθε κοινωνία παράγει και συντηρεί τη 'δική' της περιθωριοποίηση» (Dangschat, 2009, σ. 836). Ακολούθως, παρουσιάζω την προσωπική μου ερευνητική εμπειρία από τρεις χώρες (Κύπρο, Σκωτία, Νορβηγία) και πώς η κάθε χώρα φαίνεται να οριοθετεί το λόγο (discourse) για την περιθωριοποίηση παιδιών στα σχολικά μαθηματικά.

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΥΠΡΟΥ

Στην Κύπρο, οι εκπαιδευτικές πολιτικές με άμεσες ή έμμεσες αναφορές στην περιθωριοποίηση περιστρέφονται γύρω από δύο άξονες. Ο πρώτος αφορά τη συμπερίληψη παιδιών με αναπηρία ή/και ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στο γενικό σχολείο, θεματική που απασχόλησε και απασχολεί την εγχώρια εκπαιδευτική έρευνα (βλέπε Damianidou & Phtiaka, 2018· Jones & Symeonidou, 2017). Ο δεύτερος άξονας αναφέρεται στη διαπολιτισμική εκπαίδευση και τη συμπερίληψη παιδιών με μεταναστευτική βιογραφία, θέμα που επίσης συζητείται εκτενώς και σε ερευνητικό επίπεδο (βλέπε Hadjisoteriou & Angelides, 2013· Symeou & Karagiorgi, 2018).

Στο βαθμό που μπορώ να γνωρίζω, ζητήματα αναπηρίας και ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών σε σχέση με τα μαθηματικά δεν εξετάζονται από την τοπική ερευνητική κοινότητα, τουλάχιστον όχι συστηματικά. Το ίδιο μπορώ να ισχυριστώ και για ζητήματα διαπολιτισμικής εκπαίδευσης, με εξαίρεση παλαιότερη δουλειά μου σε τρία αστικά σχολεία με υψηλά ποσοστά παιδιών με μεταναστευτική βιογραφία (Xenofontos, 2015, 2016). Συνοψίζοντας, όπως διαφάνηκε μέσα από τη συγκεκριμένη έρευνα, οι Κύπριοι δάσκαλοι που συμμετείχαν: (α) επεσήμαναν ότι η μη επαρκής γνώση της ελληνικής από τα παιδιά ήταν ο κύριος παράγοντας που δυσκόλευε το εκπαιδευτικό τους έργο στα μαθηματικά, (β) έκαναν ασαφείς αναφορές στο ρόλο της κουλτούρας των παιδιών και πώς αυτή φαίνεται να επηρεάζει τη μάθηση των μαθηματικών, και (γ) χρησιμοποιούσαν διάφορες πρακτικές με στόχο τη στήριξη των παιδιών στο μάθημα των μαθηματικών, που όμως έρχονταν σε σύγκρουση με προτάσεις της διεθνούς βιβλιογραφίας (για παράδειγμα, η αντιμετώπιση της γλώσσας ως πρόβλημα, και όχι ως εκπαιδευτικός πόρος).

Αναστοχαζόμενος, οφείλω να αναφέρω ότι τα προσωπικά ερευνητικά μου ενδιαφέροντα κατά την περίοδο εκείνη περιόρισαν την έρευνα στο πλαίσιο της μεταναστευτικής βιογραφίας και της γλωσσικής επάρκειας. Ως εκ τούτου, δεν μπορώ να γνωρίζω τεκμηριωμένα τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τη μάθηση μαθηματικών σε σχέση με άλλους παράγοντες περιθωριοποίησης, όπως είναι η αναπηρία, το φύλο, η κοινωνική τάξη κ.ο.κ.

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΣΚΩΤΙΑΣ

Κατ’ αρχάς να ξεκαθαρίσουμε ότι για το Ηνωμένο Βασίλειο η εκπαίδευση είναι αποκεντρωμένη, με τέσσερις αυτόνομες εκπαιδευτικές περιοχές (Αγγλία, Βόρεια Ιρλανδία, Ουαλία, Σκωτία). Η Σκωτία τοποθετεί το ζήτημα της περιθωριοποίησης σε εντελώς διαφορετική βάση από την Κύπρο. Σε κείμενα εκπαιδευτικής πολιτικής, χρησιμοποιείται ο όρος *poverty-related attainment gap* (Scottish Government, 2016· Education

Scotland, 2018), για να περιγράψει τις αποκλίσεις ανάμεσα στις επιδόσεις και τα ποσοστά συμμετοχής μαθητών που ζουν σε δυσμενείς οικονομικές συνθήκες και μαθητών από εύρωστα οικονομικά στρώματα. Το σχολικό μάθημα των μαθηματικών, μαζί με αυτά της γλώσσας και της αγωγής υγείας, έχει επισημανθεί ως αντικείμενο υψηλής προτεραιότητας, για το οποίο το χάσμα επιδόσεων πρέπει να γεφυρωθεί άμεσα.

Για σκοπούς αξιολόγησης της οικονομικής δυσμένειας της κάθε περιοχής, η κυβέρνηση της Σκωτίας χρησιμοποιεί μετρήσεις με βάση εφτά κριτήρια (εισόδημα, εργοδότηση, εκπαίδευση/σπουδές, υγεία, πρόσβαση σε υπηρεσίες, εγκληματικότητα, στέγαση) για να υπολογίσει ένα σχετικό δείκτη, τον οποίο ονομάζει Scottish Index of Multiple Deprivation (SIMD). Σε κάθε περιοχή της Σκωτίας δίνεται μια ακέραια τιμή SIMD, από το 1 (μέγιστη δυσμένεια) μέχρι το 10 (ελάχιστη δυσμένεια). Κάθε σχολείο της χώρας λαμβάνει άμεση χρηματοδότηση ανάλογα με το πόσα παιδιά από περιοχές με χαμηλούς δείκτες SIMD φοιτούν. Σε πολλές περιπτώσεις, όμως, τα σχολεία δεν γνωρίζουν τους αποτελεσματικότερους τρόπους αξιοποίησης της χρηματοδότησης, με αποτέλεσμα τα κονδύλια αυτά είτε να μένουν αναξιοποίητα είτε να διοχετεύονται για την κάλυψη «λανθασμένων» αναγκών.

Η ερευνητική μου εμπειρία με διδάσκοντες μαθηματικών στις τρεις σχολικές βαθμίδες (προσχολική, πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια) στη Σκωτία κατέδειξε την αναπαραγωγή του λόγου της εκπαιδευτικής πολιτικής από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς (Xenofontos & Hizli Alkan, 2022). Συγκεκριμένα, και στις τρεις βαθμίδες οι εκπαιδευτικοί θεωρούν το χαμηλό κοινωνικοοικονομικό στάτους ως τον κύριο παράγοντα περιθωριοποίησης παιδιών στα μαθηματικά. Επιπλέον, από ορισμένους εκπαιδευτικούς σε κάθε βαθμίδα γίνονται μεμονωμένες αναφορές σε άλλους παράγοντες, όπως για παράδειγμα το φύλο, ο βαθμός επάρκειας της αγγλικής γλώσσας, και ζητήματα ψυχικής υγείας στην οικογένεια, χωρίς όμως οι αναφορές αυτές να ακολουθούν συγκεκριμένο μοτίβο. Παρατηρείται επίσης μια ασυνέπεια ανάμεσα στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα αίτια της περιθωριοποίησης και τις πρακτικές που εφαρμόζουν για την αντιμετώπισή της. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι δηλώσεις εκπαιδευτικού στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ότι αφενός τα παιδιά από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα δυσκολεύονται να κατακτήσουν τη μαθηματική γνώση, και αφετέρου ο ίδιος, για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα αυτό, δημιούργησε ιστοδελίδα για την τάξη του, όπου και ανεβάζει όλο το διδακτικό υλικό για πρόσβαση από το σπίτι. Προφανώς, μια τέτοια δήλωση δεν λαμβάνει υπόψη ότι τα παιδιά που ζουν κάτω από το όριο της φτώχειας ενδεχομένως δεν έχουν πρόσβαση στο διαδίκτυο ή σε κατάλληλες συσκευές στο σπίτι.

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΝΟΡΒΗΓΙΑΣ

Στο εκπαιδευτικό σύστημα της Νορβηγίας υπάρχει η υπόρρητη πεποίθηση ότι το ζήτημα της περιθωριοποίησης ομάδων παιδιών στο σχολείο είναι λυμένο. Εξάλλου, από τη δεκαετία του ’70, τα περισσότερα ειδικά σχολεία της χώρας έκλεισαν και τα πιο πολλά παιδιά με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες βρίσκονται στο γενικό σχολείο (Fasting 2013), πολύ πριν από τη Διακήρυξη της Σαλαμάνκα, μέσα από την οποία η UNESCO (1994) καλούσε τα κράτη να θέσουν τη συμπεριληπτική εκπαίδευση ως προτεραιότητα. Στο νορβηγικό συγκείμενο, η συμπερίληψη γίνεται αντιληπτή ως έννοια πέραν από την ειδική εκπαίδευση. Κατ’ ακρίβεια, η φράση *συμπερίληψη και διαφοροποιημένη διδασκαλία* (inkludering og tilpasset opplæring) χρησιμοποιείται συχνά σε διάφορα κείμενα εκπαιδευτικής πολιτικής για να περιγράψει τη δημιουργία συνθηκών μάθησης για *όλα* τα παιδιά, με βάση τις ατομικές ανάγκες του καθενός (Buli-Holmberg κ.ά., 2014). Η φράση αυτή εμπερικλείει τις νορβηγικές κοινωνικές προσδοκίες για το ρόλο του δημόσιου σχολείου σε μια συμπεριληπτική και υποστηρικτική κοινωνία (Mordal & Strømstad, 2005). Εντούτοις, στα κείμενα εκπαιδευτικής πολιτικής η φράση αυτή δεν ορίζεται επαρκώς, δεν αναφέρονται οι λόγοι για τους οποίους χρειάζεται διαφοροποίηση της διδασκαλίας, όπως επίσης δεν παρουσιάζονται μηχανισμοί μέσα από τους οποίους κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί. Ως εκ τούτου, το *inkludering og tilpasset opplæring* παραμένει ακόμα μια «νεφελώδης έννοια που έχει αντιμετωπίσει δυσκολίες υλοποίησης των πρακτικών της δυνατοτήτων» (Maxwell & Bakke 2019, σ. 101).

Επί του παρόντος, είμαι μέλος στην ομάδα ενός ερευνητικού προγράμματος στο οποίο εξετάζονται, μεταξύ άλλων, οι πεποιθήσεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών δημοτικού και γυμνασίου στα μαθηματικά σε σχέση με τη συμπερίληψη και τη διαφοροποιημένη διδασκαλία. Οι πρώτες αναλύσεις από ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί και στις δύο βαθμίδες αντικατοπτρίζουν στο λόγο τους τις ασαφείς αναφορές των κειμένων της εκπαιδευτικής πολιτικής. Κατ’ αρχάς, οι εκπαιδευτικοί αποφεύγουν τη χρήση χαρακτηρισμών όπως «καλός», «μέτριος», «αδύνατος» για να μιλήσουν για τα παιδιά. Χαρακτηριστικό είναι και το γεγονός ότι, ενώ όλα τα παιδιά βρίσκονται στη γενική τάξη με τους εκπαιδευτικούς να διατηρούν ισχυρές απόψεις για τη σημαντικότητα ενός περιβάλλοντος μικτών ικανοτήτων, η διαφοροποίηση της διδασκαλίας γίνεται συνήθως σε ομάδες *εκτός* της γενικής τάξης, όπου «τα παιδιά με ειδικό ενδιαφέρον στα μαθηματικά» και «τα παιδιά που αντιμετωπίζουν δυσκολίες» λαμβάνουν επιπλέον στήριξη. Με άλλα λόγια, υπονοείται ότι οποιαδήποτε απόκλιση από το «τυπικό» δεν πρέπει να μένει ορατή, κάτι που αντανακλά μία ιδεολογία που στις σκανδιναβικές χώρες ονομάζεται Νόμος του Γιάντε, μια υπόρρητη κοινωνική σύμβαση ότι το σύνολο είναι ισχυρότερο από οποιαδήποτε μονάδα και πως κανείς δεν πρέπει να διακρίνεται από τους υπόλοιπους.

Η ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΔΙΑ-ΤΟΜΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Συνοπτικά, η καθεμία από τις τρεις χώρες που εξετάσαμε φαίνεται να τοποθετεί τη συζήτηση σε διαφορετικό πλαίσιο. Για την Κύπρο, η περιθωριοποιήση στην εκπαίδευση γενικότερα συνδέεται με την αναπηρία και τη μεταναστευτική βιογραφία, ενώ η σχέση περιθωριοποίησης και σχολικών μαθηματικών αποτελεί θέμα μάλλον αδιάφορο. Στη Σκωτία, οι εκπαιδευτικές αρχές μιλούν ξεκάθαρα για το θέμα της φτώχειας, τονίζοντας ότι τα μαθηματικά είναι ένα από τα σχολικά αντικείμενα τα οποία χρήζουν άμεσης προσοχής. Παρατηρείται, επίσης, μια αναπαραγωγή του λόγου (discourse) των κέντρων αποφάσεων από τους διδάσκοντες μαθηματικών σε κάθε σχολική βαθμίδα. Τέλος, η Νορβηγία θεωρεί ότι το ζήτημα της περιθωριοποίησης είναι ξεπερασμένο, έτσι που οι εκπαιδευτικές πολιτικές της αναφέρονται σε συμπερίληψη και διαφοροποιημένη διδασκαλία για *όλα* τα παιδιά, ανάλογα με τις εξατομικευμένες τους ανάγκες. Όμως, οι διδάσκοντες μαθηματικών σε δημοτικό και γυμνάσιο δείχνουν να μην γνωρίζουν πώς να υλοποιήσουν τη συμπερίληψη και τη διαφοροποίηση στην πράξη, γεγονός που επιβεβαιώνει την άποψη της διεθνούς βιβλιογραφίας ότι συχνά παρατηρούνται ασυνέπειες ανάμεσα στη ρητορική και την πρακτική (Whitty & Clarke, 2012).

Όπως ανέφερα και προηγουμένως, σε κάθε κοινωνία η περιθωριοποίηση οικοδομείται και γίνεται αντιληπτή με διαφορετικό τρόπο (Dangschat, 2009). Σε σχέση με τα σχολικά μαθηματικά, τόσο οι εκπαιδευτικές πολιτικές όσο και η έρευνα ακολουθούν πολύ συγκεκριμένες προσεγγίσεις, που εξαρτώνται από το πολιτισμικό συγκείμενο της κάθε χώρας (Graven, 2014). Γενικά μιλώντας, αυτό από μόνο του δεν είναι προβληματικό: η εκπαιδευτική έρευνα οριοθετείται, σε μεγάλο βαθμό, από το ιστορικό, πολιτισμικό, και πολιτικό πλαίσιο του κάθε τόπου. Εντούτοις, η αντίληψη ότι παράγοντες περιθωριοποίησης όπως είναι η εθνικότητα, το φύλο, η κοινωνική τάξη, η αναπηρία κ.ο.κ. λειτουργούν αυτόνομα και αποκλειστικά είναι τουλάχιστον αφελής. Αυτό μας πληροφορεί, άλλωστε, η θεωρία της δια-τομικότητας (intersectionality). Η δια-τομικότητα ως έννοια αναδύθηκε από τη δουλειά της Crenshaw (1989) στις σπουδές φύλου, για να περιγράψει τις εμπειρίες περιθωριοποίησης μαύρων γυναικών στις Ηνωμένες Πολιτείες. Έκτοτε, η έννοια αυτή πήρε άλλες διαστάσεις, όχι απαραίτητα ταυτισμένες με ζητήματα φύλου, για να αναφερθεί στο πώς οι κοινωνικές ανισότητες λειτουργούν συνδυαστικά (Atewologun, 2018). Όπως, αλλωστε, αναφέρει η ίδια η Crenshaw (2017) πιο πρόσφατα, η δια-τομικότητα είναι στην ουσία η αναγνώριση του ότι κάθε άτομο φέρει τις δικές του ξεχωριστές εμπειρίες διακρίσεων, αποκλεισμού, και καταπίεσης, και ως εκ τούτου οφείλουμε να λάβουμε υπόψη όλους τους παράγοντες που ενδέχεται να περιθωριοποιούν τους ανθρώπους. Παρόλα αυτά, οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι δεν είναι πάντοτε εφικτό να κατανοήσουμε την κοινωνική εμπειρία ενός ατόμου με βάση ένα πεπερασμένο αριθμό παραγόντων περιθωριοποίησης (Appelbaum, 2002· Garry, 2011). Στην καλύτερη περίπτωση, μπορούμε να έχουμε μια αντίληψη «κατά προσέγγιση», βασισμένη στα κυριότερα χαρακτηριστικά του πώς η ταυτότητα γίνεται αντιληπτή σε μια κοινωνική συνθήκη.

Η έρευνα στη μαθηματική παιδεία, ειδικά μετά το 2000 και την κοινονικοπολιτική στορφή του ενδιαφέροντος των ερευνητών (Gutiérrez, 2013), έχει εξετάσει εκτενώς διάφορους παράγοντες περιθωριοποίησης. Για τους παράγοντες αυτούς μιλήσαμε προηγουμένως. Αυτό που φαίνεται να απουσιάζει έντονα από το χώρο είναι η μελέτη των παραγόντων αυτών από μια δια-τομική σκοπιά· πώς δηλαδή μερικοί απ’ αυτούς λειτουργούν συνδυαστικά και σπρώχνουν ομάδες παιδιών στο περιθώριο της μάθησης. Φωτεινές εξαιρέσεις αποτελούν οι πολύ πρόσφατες δουλειές των Joseph κ.ά. (2019) και Leyva (2021) στις ΗΠΑ, οι οποίοι ερευνούν τις εμπειρίες μαύρων κοριτσιών και τους αγώνες τους μέσα στις λευκές, πατριαρχικές δομές της μαθηματικής παιδείας. Σε άλλη πρόσφατη δημοσίευση, ο Leyva και οι συνεργάτες του (Leyva κ.ά., 2022) τοποθετούν το ενδιαφέρον στην τομή εθνότητας και σεξουαλικότητας, εξετάζοντας τις εμπειρίες μαύρων κουήρ φοιτητών σε κλάδους STEM. Άλλοι ερευνητές σε προηγούμενα χρόνια επικεντρώθηκαν στη μελέτη τομών όπως αυτές των ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών και της φτώχειας (Hauser-Cram κ.ά., 2007) και της εθνοτικής μειονοτικοποίησης και της αναπηρίας (Hawley κ.ά., 2013). Η ανάγκη για περισσότερες μελέτες αυτής της φύσης είναι πιο πολύ από επιβεβλημένη. Επιπλέον, η εκπαίδευση εκπαιδευτικών στα μαθηματικά καλείται σήμερα, περισσότερο από ποτέ, να εντάξει στη θεματολογία της ζητήματα περιθωριοποίησης και κοινωνικού αποκλεισμού (McLeman & Vomvoridi-Ivanovic, 2012· Xenofontos κ.ά., 2021). Το να γίνουν συστημικές αλλαγές σε επίπεδο κράτους και εκπαιδευτικής πολιτικής αποτελεί συνθήκη δύσκολη (Apple, 2008· Freire, 1970). Αυτό στο οποίο, όμως, ο καθένας από εμάς μπορεί να συμβάλει, στο βαθμό που οι συνθήκες το επιτρέπουν, είναι οι μικρές αλλαγές στο άμεσο περιβάλλον του. Γι’ αυτό άλλωστε και στις τρεις χώρες όπου εργάστηκα ως ακαδημαϊκός στον τομέα της εκπαίδευσης εκπαιδευτικών στα μαθηματικά ενέταξα και εντάσσω ζητήματα αυτής της φύσης στα προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μου μαθήματα.

Κλείνω με μια σύντομη αναφορά στη θεματολογία του συνεδρίου, «Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις», θέτοντας ένα προβληματισμό, κυρίως για τους συναδέλφους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και την εκπαίδευση εκπαιδευτικών. Το διδακτικό και ερευνητικό έργο του καθενός μας είναι, σε μεγάλο βαθμό, αποτέλεσμα των επιστημολογικών και ιδεολογικών μας πεποιθήσεων, οι οποίες μπορούν να συνδεθούν με μία ή περισσότερες σχολές σκέψης για τη μαθηματική παιδεία: την γνωστική, την κοινωνική, και την κοινωνικοπολιτική. Ο προβληματισμός-πρόκληση, λοιπόν, που θέτω ενώπιόν σας είναι ο εξής: Πώς θα μπορούσαν να εξεταστούν ζητήματα περιθωριοποίησης μέσα από το δικό σας διδακτικό και ερευνητικό έργο;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Andrews, P., & Rowland, T. (Eds.). (2014). MasterClass in mathematics education. *International perspectives on teaching and learning*. Bloomsbury Academic.

Appelbaum, P. (1995). *Popular culture, educational discourse, and mathematics*. SUNY Press.

Appelbaum, P. (2002). *Multicultural and diversity education: A reference handbook*. ABC-CLIO.

Appelbaum, P. (2019). From equity and social justice to dignity and reconciliation: Alterglobal mathematics education as a social movement directing curricula, policies, and assessment. In C. Xenofontos (Ed.), *Equity in mathematics education: Addressing a changing world* (pp. 23-40). Information Age Publishing.

Apple, M. W. (2008). Can schooling contribute to a more just society? *Education, Citizenship and Social Justice*, *3*(3), 239-261.

Atewologun, D. (2018). Intersectionality theory and practice. *Oxford research encyclopedia of business and management*. Retrieved from https://oxfordre.com/business/business/view/10.1093/acrefore/9780190224851.001.0001/acrefore-9780190224851-e-48

Barton, B. (1996). Anthropological perspectives on mathematics and mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp 1035-1053). Springer.

Battey, D., & Leyva, L. A. (2016). A Framework for Understanding Whiteness in Mathematics Education. *Journal of Urban Mathematics Education*, *9*(2), 49-80.

Bensimon, E.M., Dowd, A.C., Stanton-Salazar, R., & Dávila, B. (2019). The role of institutional agents in providing institutional support to Latino students in STEM. *The Review of Higher Education*, *42*(4), 1689-1721.

Buli-Holmberg, J., Nilsen, S., & Skogen, K. (2014). Inclusive and individually adapted education in Norway. Results from a survey study in two municipalities focusing the roles of headteachers, teachers and curriculum planning. *International Journal of Special Education, 29*(1), 47-60.

Cascales-Martínez, A., Martínez-Segura, M. J., Pérez-López, D., & Contero, M. (2017). Using an augmented reality enhanced tabletop system to promote learning of mathematics: A case study with students with special educational needs. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(2), 355-380.

Cech, E. A., & Pham, M. V. (2017). Queer in STEM organizations: Workplace disadvantages for LGBT employees in STEM related federal agencies. *Social Sciences, 6*(1), 12-34.

Chiu, M. S. (2018). Effects of early numeracy activities on mathematics achievement and affect: Parental value and child gender conditions and socioeconomic status mediation. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(12), em1634.

Chronaki, A., & Planas, N. (2018). Language diversity in mathematics education research: a move from language as representation to politics of representation. *ZDM Mathematics Education, 50*(6), 1101-1111.

Crenshaw, K. (1989). Demarginalizing the intersection of race and sex: A black feminist critique of antidiscrimination doctrine, feminist theory and antiracist politics. *University of Chicago Legal Forum*, 1989(1).

Crenshaw, K. (2017). *On intersectionality: Essential writings*. The New Press.

Damianidou, E., & Phtiaka, H. (2018). Implementing inclusion in disabling settings: The role of teachers' attitudes and practices. *International Journal of Inclusive Education, 22*(10), 1078-1092.

Dangschat, J. S. (2009). Space matters – marginalization and its places. *International Journal of Urban and Regional Research, 33*(3), 835-840.

de Araujo, Z., Roberts, S. A., Willey, C., & Zahner, W. (2018). English learners in K-12 mathematics education: A review of the literature. *Review of Educational Research, 88*(6), 879-919.

Education Scotland (2018). *Scottish Attainment Challenge*. Retrieved from: https://education.gov.scot/improvement/learning-resources/scottish-attainment-challenge

Ernest, P. (1999). Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: Philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 67-83.

Fasting, R. B. (2013). Adapted education: the Norwegian pathway to inclusive and efficient education. *International Journal of Inclusive Education, 17*(3), 263-276.

Foyn, T., Solomon, Y., & Braathe, H. J. (2018). Clever girls' stories: The girl they call a nerd. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 77-93.

Frankenstein, M. (1983). Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's epistemology. *Journal of Education*, *165*(4), 315-339.

Freire, P. (1970). *Pedagogy of the oppressed.* The Seabury Press.

Garry, A. (2011). Intersectionality, metaphors, and the multiplicity of gender. *Hypatia, 26*(4), 826-850.

Gates, P. (2019). Why the (social) class you are in still counts. In C. Xenofontos (Ed.), *Equity in mathematics education: Addressing a changing world* (pp. 41-64). Information Age Publishing.

Graven, M. H. (2014). Poverty, inequality and mathematics performance: The case of South Africa's post-apartheid context. *ZDM Mathematics Education, 46*(7), 1039-1049.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 37-68.

Gutiérrez, R. (2017). Why mathematics (education) was late to the backlash party: The need for a revolution. *Journal of Urban Mathematics Education*, *10*(2), 8-24.

Hajisoteriou, C., & Angelides, P. (2013). The politics of intercultural education in Cyprus: Policy-making and challenges. *Education Inquiry, 4*(1), 103-123.

Hauser-Cram, P., Durand, T. M., & Warfield, M. E. (2007). Early feelings about school and later academic outcomes of children with special needs living in poverty. *Early Childhood Research Quarterly, 22*(2), 161-172.

Hawley, C. E., Cardoso, E., & McMahon, B. T. (2013). Adolescence to adulthood in STEM education and career development: The experience of students at the intersection of underrepresented minority status and disability. *Journal of Vocational Rehabilitation, 39*(3), 193-204.

He, L., Zhou, G., Salinitri, G., & Xu, L. (2020). Female underrepresentation in STEM subjects: An exploratory study of female high school students in China. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16*(1), em1802.

Jaworski, B., & Phillips, D. (Eds.). (1999). *Comparing standards internationally: Research and practice in mathematics and beyond.* Symposium Books.

Jenson, R.J., Petri, A.N., Day, A.D., Truman, K.Z., & Duffy, K. (2011). Perceptions of self-efficacy among STEM students with disabilities. *Journal of Postsecondary Education and Disability, 24*(4), 8-28.

Jones, C., & Symeonidou, S. (2017). The Hare and the Tortoise: a comparative review of the drive towards inclusive education policies in England and Cyprus. *International Journal of Inclusive Education, 21*(7), 775-789.

Joseph, N. M., Hailu, M. F., & Matthews, J. S. (2019). Normalizing Black girls' humanity in mathematics classrooms. *Harvard Educational Review*, *89*(1), 132-155.

Khalfani, A. K., & Zuberi, T. (2001). Racial classification and the modern census in South Africa, 1911-1996. *Race and Society, 4*(2), 161-176.

Kilpatrick, J. (2014). History of research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 267-272). Springer.

Laurie, T., & Khan, R. (2017). The concept of minority for the study of culture. *Continuum, 31*(1), 1-12.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Ablex Publishing.

Leyva, L. A. (2017). Unpacking the male superiority myth and masculinization of mathematics at the intersections: A review of research on gender in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(4), 397-433.

Leyva, L. A. (2021). Black women's counter-stories of resilience and within-group tensions in the white, patriarchal space of mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 52*(2), 117-151.

Leyva, L. A., McNeill, R. T., & Duran, A. (2022). A queer of color challenge to neutrality in undergraduate STEM pedagogy as a White, cisheteropatriarchal space. *Journal of Women and Minorities in Science and Engineering, 28*(2), 79-94.

MacPhee D, Farro S, Canetto SS (2013). Academic self-efficacy and perfor-mance of underrepresented STEM majors: gender, ethnic, and social class patterns. *Analyses of Social Issues and Public Policy, 13*(1), 347-369.

Martin, D. B. (2019). Equity, inclusion, and antiblackness in mathematics education. *Race Ethnicity and Education, 22*(4), 459-478.

Maxwell, G., & Bakke, J. (2019). Schooling for Everyone: Norway's adapted approach to education for everyone. In Sustainable Development Working Group (Ed.), *Including the North: A comparative study of the policies on inclusion and equity in the Circumpolar North* (pp. 89-107). Arctic Council Secretariat.

McLeman, L., & Vomvoridi-Ivanovic, E. (2012). Understanding the knowledge and practices of mathematics teacher educators who focus on developing teachers' equitable mathematics pedagogy. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 1*(3), 278-300.

Mordal, K. N., & Strømstad, M. (2005). Norway: adapted education for all? In M. Ainscow & T. Booth (Eds.), *From them to us* (pp. 108-124). London: Routledge.

Moschkovich, J. (2018). Talking to learn mathematics with understanding: Supporting academic literacy in mathematics for English learners. In A. L. Bailey, C. A. Maher, & L. C. Wilkinson (Eds.), *Language, literacy, and learning in the STEM disciplines* (pp. 13-34). Routledge.

Patridge, E.V., Barthelemy, R.S., & Rankin, S.R. (2014). Factors impacting the academic climatefor LGBQ STEM faculty. *Journal of Women and Minorities in Science and Engineering, 20*(1),75-98.

Popkewitz, T. & Brennan, M. (Eds.) (1998). *Foucault's challenge. Discourse, knowledge and power in education.* Teachers' College Press.

Rands, K. (2013). Supporting transgender and gender-nonconforming youth through teaching mathematics for social justice. *Journal of LGBT Youth, 10*(1-2), 106-126.

Scottish Government (2016). *Delivering excellence and equity in Scottish education: A delivery plan for Scotland*. Retrieved from: https://www.gov.scot/publications/delivering-excellence-equity-scottish-education-delivery-plan-scotland/

Skovsmose, O. (1985). Mathematical education versus critical education. *Educational Studies in Mathematics, 16*(4), 337-354.

Sriraman, B., & Steinthorsdottir, O. (2007). Emancipatory and social justice perspectives in mathematics education. *Interchange, 38*(2), 195-202.

Stathopoulou, C., & Kalabasis, F. (2007). Language and culture in mathematics education: Reflections on observing a Romany class in a Greek school. *Educational Studies in Mathematics, 64*(2), 231-238.

Symeou, L., & Karagiorgi, Y. (2018). Culturally aware but not yet ready to teach the “others”: Reflections on a Roma education teacher training programme. *Journal for Multicultural Education, 12*(4), 314-329.

Tabron, L. A., Kitchen, R., & Mestas, B. (2021). Moving beyond equal access: Detracking a high school’s mathematics program. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(9), em2000.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers’ conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 105-127.

UNESCO (1994). *The Salamanca statement and framework for action on special needs education. Adopted by the world conference on special needs education: Access and equity*. Paris: UNESCO.

Van Geert, P. (1998). A dynamic systems model of basic developmental mechanisms: Piaget, Vygotsky, and beyond. *Psychological Review, 105*(4), 634-677.

Watson, S., & Gable, R. (2012). Evidence-based strategies for improving the reading comprehension of secondary students: Implications for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 27*(2), 79-89.

Whitty, E., & Clarke, M. (2012). Irish mathematics teachers’ attitudes towards inclusion. *European Journal of Special Needs Education, 27*(2), 237-256.

Xenofontos, C. (2015). Immigrant pupils in elementary classrooms of Cyprus: How teachers view them as learners of mathematics. *Cambridge Journal of Education, 45*(4), 475-488.

Xenofontos, C. (2016). Teaching mathematics in culturally and linguistically diverse classrooms: Greek-Cypriot elementary teachers’ reported practices and professional needs. *Journal of Urban Mathematics Education, 9*(1), 94-116.

Xenofontos, C., Fraser, S., Priestley, A., & Priestley, M. (2021). Mathematics teachers and social justice: A systematic review of empirical studies. *Oxford Review of Education, 47*(2), 135-151.

Xenofontos, C., & Hizli Alkan, S. (2022). “They’re coming into school hungry, they’re not ready to learn”. Scottish teachers’ perceptions of marginalization in school mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(6), em2116.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

ΤΑ ΤΕΧΝΟΥΡΓΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΟΧΗ. *«ΠΑΛΙΟ ΚΡΑΣΙ ΣΕ ΝΕΑ ΔΟΧΕΙΑ» Η «ΝΕΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ ΣΕ ΔΙΣΤΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΡΡΥΘΜΙΣΕΙΣ»;*

Κολέζα Ευγενία, Σκουμπουρδή Χρυσάνθη,
Νικολαντωνάκης Κώστας, Χατζηκυριάκου Κώστας,
Μούτσιος-Ρέντζος Ανδρέας

Πανεπιστήμιο Πατρών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου,
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας,
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών

ekoleza@upatras.gr, kara@aegean.gr, knikolantonakis@uowm.gr,
kxatzkyr@uth.gr, moutsiosrent@primedu.uoa.gr

Οι επικρατούσες τάσεις υιοθέτησης ή μη υλικών/τεχνουργημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση, διαμορφώνονται τόσο σε σχέση με την ποικιλία των διαθέσιμων υλικών, και τις νέες θεωρητικές προσεγγίσεις, όσο και από τα ερευνητικά αποτελέσματα που αποτυπώνονται μέσω προτάσεων σχεδιασμένης χρήσης τους.

Μέσα από τη μετατροπή του τεχνουργήματος σε εργαλείο (εργαλειακή γένεση) και τη μοντελοποίηση αυτής της διαδικασίας μέσω της προσέγγισης της σημειωτικής διαμεσολάβησης οι μαθητές οδηγούνται στην κατασκευή της γνώσης και τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος. Το εργαλείο, ιδωμένο ως σημείο, ενεργοποιεί διακριτά πολυτροπικά επικοινωνιακά συστήματα (μαθηματικών, φυσικής κ.ά.), ενώ η αποβλεπτική σχέση με το εργαλείο επιτρέπει την επιλεκτική απόκρυψη ή εμφάνιση διεπιστημονικών νοημάτων και πρακτικών. Η ιστορία των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης μας δίνει πολλά παραδείγματα κατασκευής εργαλείων από μαθηματικούς ερευνητές, επαγγελματίες συντεχνιών καθώς και παιδαγωγούς. Οι μεν πρώτοι κατασκεύασαν εργαλεία στην προσπάθεια τους να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα, οι δε άλλοι χρησιμοποίησαν εργαλεία για να εφαρμόσουν την τέχνη τους και να διδάξουν.

Σε σχέση με χρήση των τεχνουργημάτων στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, θα συζητηθούν ερωτήματα όπως: Τα συμπεράσματα που προκύπτουν μέσα από τη χρήση των τεχνουργημάτων/εργαλείων, μπορούν να θεωρηθούν ως "αποδείξεις"; Οι εγγενείς δυσκολίες χειρισμού κάποιων τεχνουργημάτων μπορούν να αποτελέσουν παράγοντες για τη μη υιοθέτησή τους κατά τη διδασκαλία; Θα συζητηθούν επίσης ζητήματα διαφάνειας και περιορισμών των τεχνουργημάτων, διεπιστημονικών προσεγγίσεων μέσω τεχνουργημάτων, όπως επίσης και οι πιθανές αλλαγές στον τρόπο συγκρότησης νοήματος σε σχέση με κατασκευαστικές διακυμάνσεις του υλικού.

Κάποια από τα τεχνουργήματα που θα συζητηθούν είναι ο κινέζικος άβακας ως εργαλείο υπολογισμού, ο χάρακας ως εργαλείο για χαράξεις και μετρήσεις, ο γεωπίνακας του Caleb Gattegno, και η (τελετουργική;) προέλευση της γεωμετρίας στη διδασκαλία και τη μάθηση ενός όμορφου θεωρήματος του G. A. Pick για το εμβαδόν περιοχών σε σημειακά πλέγματα, ο γνώμονας (στις μετρήσεις και την εξαντικειμενίκευση του ορθογωνίου τριγώνου), οι απλές μηχανές για τη διεπιστημονική προσέγγιση της έννοιας της αναλογίας, οι κύβοι ως δομικά στοιχεία τρισδιάστατων αντικειμένων κλπ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ[1]

ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙ ΥΛΙΚΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Στη μακρόχρονη ιστορία της χρήσης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση διαμορφώθηκαν δύο αντίθετες τάσεις υιοθέτησης και χρήσης τους με τους υποστηρικτές της η καθεμία (Szendrei, 1996): Στη μία τάση δεν γινόταν εύκολα αποδεκτή η χρήση τους, με το σκεπτικό ότι τα μαθηματικά αφορούν σε αφηρημένες έννοιες και ως τέτοιες πρέπει να διδαχθούν. Στην αντίθετη τάση η χρήση υλικών και άλλων μέσων θεωρούταν απαραίτητη για την αποτελεσματική αντιμετώπιση όλων των δυσκολιών των παιδιών στα μαθηματικά. Ωστόσο, στη δεύτερη αυτή τάση, λόγω του ότι χρησιμοποιούνταν ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν ήταν αναγκαία η χρήση τους ή χρησιμοποιούνταν με λανθασμένο τρόπο, το επιδιωκόμενο μαθησιακό αποτέλεσμα δεν ερχόταν και αυτό οδήγησε στο άλλο άκρο. Η προσφορά τους αμφισβητήθηκε και αυτό είχε ως κατάληξη την απομάκρυνση τους από την εκπαιδευτική διαδικασία.

Η επανεισαγωγή υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση πραγματοποιήθηκε με τη θεωρητική θεμελίωσή τους από τον Comenius, τον Pestallozzi, τον Fröebel, την Montessori, τον Cuisenaire, τον Piaget, τον Gattegno, τον Dienes, τον Bruner και τον Skemp, μεταξύ άλλων, οι οποίοι αναγνώρισαν τη σημασία και την ιδιαίτερη αξία της εποπτείας και των ποικίλων εμπειριών με υλικά και άλλα μέσα για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Τεκμηρίωσαν την αναγκαιότητα χρήσης των υλικών από την πρώτη σχολική ηλικία, για την αποτελεσματική διδασκαλία των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, τη μάθηση με κατανόηση, αλλά και τη δημιουργία θεμελίων για τη μάθηση σε πιο αφηρημένο επίπεδο. Επιπλέον, οι συγκεκριμένοι ερευνητές επινόησαν νέα, για την εποχή τους, εκπαιδευτικά υλικά και νέες παιδαγωγικές πρακτικές χρήσης τους, οι οποίες βασίζονταν στη δομιστική προσέγγιση και την ανακαλυπτική μάθηση, εστιάζοντας στην 'ανακάλυψη' από τον μαθητή της μαθηματικής έννοιας που ενσωμάτωνε το υλικό.

Σήμερα, έχει επαναξιολογηθεί ο ρόλος που παίζουν τα υλικά και μέσα, τα οποία φαίνεται να καταλαμβάνουν κεντρική θέση στην έρευνα και την εκπαίδευση. Όλο και περισσότεροι/ες ερευνητές/ριες διεθνώς μελετάνε τη συνεισφορά των υλικών και μέσων στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης. Τα ερευνητικά τους αποτελέσματα αναγνωρίζουν και καταγράφουν τον πολυδιάστατο ρόλο τους τόσο για το ίδιο το αντικείμενο των μαθηματικών, όσο και για τους/ις εκπαιδευτικούς και τους/ις μαθητές/ριες.

[1] Την Εισαγωγή επιμελήθηκε η Χ. Σκουμπουρδή.

Ωστόσο εξακολουθούν να υπάρχουν δύο αντίθετες τάσεις, με διαφορετική εστίαση από τις προηγούμενες. Η μία τάση εκφράζει απαισιοδοξία για την αποτελεσματικότητα υλικών και μέσων, αναφέροντας αφενός ότι συχνά διαφέρουν οι ερμηνείες των παιδιών από αυτές των εκπαιδευτικών και αφετέρου ότι η χρήση τους καθιστά δύσκολη τη μετάβαση στα αφηρημένα σύμβολα και στη νοητική δραστηριότητα. Η άλλη τάση αναδεικνύει τον σημαντικό τους ρόλο και προτείνει τη σχεδιασμένη αναζήτηση, επιλογή, αξιολόγηση και χρήση τους σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Σκουμπουρδή, 2021).

ΤΥΠΟΛΟΓΙΑ ΥΛΙΚΟΥ

Ο γενικά αποδεκτά θετικός ρόλος υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση έχει οδηγήσει σε πληθώρα διαθέσιμων υλικών ποικίλων ειδών, μορφών και τύπων, τα οποία μπορούν να ταξινομηθούν σε διαφορετικές κατηγορίες. Θέτοντας ως κριτήριο κατηγοριοποίησης το αν αυτά τα υλικά υφίστανται ανεξάρτητα από τη μαθηματική εκπαίδευση ή όχι δημιουργούνται δύο κατηγορίες (Σκουμπουρδή, 2021): Τα υφιστάμενα υλικά και μέσα, ως τα υλικά και μέσα τα οποία υπάρχουν στην καθημερινότητά μας ανεξάρτητα από τη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αυτήν (όπως το ανθρώπινο σώμα και τα μέλη του, υλικά και μέσα της καθημερινής ζωής, βιβλία και ιστορίες, παιχνίδια κ.λπ.) και τα εξειδικευμένα υλικά και μέσα, ως τα υλικά και μέσα τα οποία είναι σχεδιασμένα για τη μαθηματική επιστήμη και εκπαίδευση, δηλαδή κάθε είδους εκπαιδευτικό υλικό (ΕΥ). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν όλων των ειδών τα ΕΥ, τόσο τα παρεχόμενα, δηλαδή το σχολικό διδακτικό πακέτο (βιβλίο μαθητή, τετράδιο εργασιών, βιβλίο εκπαιδευτικού κ.λπ.), το οποίο συνήθως παρέχεται στους εκπαιδευτικούς, όσο και πρόσθετα ΕΥ, δηλαδή ΕΥ που προέρχονται από το ξεκίνημα της μαθηματικής επιστήμης, ΕΥ που προέρχονται από την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και είναι συνδεδεμένα με τη θεωρητική θεμελίωση της χρήσης τους, ΕΥ που προέρχονται από την ανάπτυξη της Διδακτικής των Μαθηματικών και είτε είναι αναδιαμορφώσεις των προηγούμενων είτε είναι σύγχρονα ΕΥ και σχετίζονται με εκπαιδευτικά παιχνίδια, εκπαιδευτικά βιβλία, σενάρια και ιστορίες για τα μαθηματικά, κ.λπ., καθώς και κάθε είδους υλικά και μέσα τα οποία είναι σχεδιασμένα και κατασκευασμένα από τους εμπλεκόμενους στην εκπαιδευτική διαδικασία (εκπαιδευτικούς, μαθητές, μαθήτριες, γονείς) για να καλύψουν διδακτικούς και μαθησιακούς σκοπούς υποστηρίζοντας τη διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών.

Η κατηγορία υλικών που θα συζητηθεί στο συγκεκριμένο στρογγυλό τραπέζι αφορά σε ΕΥ που προέρχονται από το ξεκίνημα της μαθηματικής επιστήμης και έχουν εδραιωθεί ως πολιτισμικά υλικά. Τα υλικά αυτά έχουν ιδιαίτερη σημασία λόγω του ότι δημιουργήθηκαν ως εξειδικευμένα τεχνουργήματα για την εξυπηρέτηση ειδικών σκοπών (πρακτικών θεμάτων, καθημερινών προβλημάτων, εκπαίδευσης κ.λπ.), καθώς και λόγω του ότι κάποια από αυτά λόγω της χρηστικότητας και της αποτελεσματικότητάς τους επικράτησαν και υπάρχουν τόσο στην καθημερινότητά μας όσο και στην εκπαίδευση.

ΑΝ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΤΕΧΝΟΥΡΓΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΝΑΙ Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ, ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΕΡΩΤΗΣΗ

Κολέζα Ευγενία

Πανεπιστήμιο Πατρών

ekoleza@upatras.gr

Στην εισήγησή μας υποστηρίζουμε ότι πίσω από τη χρήση των τεχνουργημάτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, βρίσκονται τουλάχιστον τέσσερα ερωτήματα.

1) Ποιος είναι ο ρόλος των τεχνουργημάτων στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών;
2) Πώς μπορούμε να διαμορφώσουμε ένα «μέσο» για μια γόνιμη αλληλεπίδραση τεχνουργήματος-μαθητή;
3) Ποιες είναι οι βασικές αρχές σχεδιασμού μαθηματικών έργων που περιλαμβάνουν τη χρήση τεχνουργημάτων;
4) Ποια είναι η σχέση τεχνουργήματος και έννοιας, στην οποία αυτό αναφέρεται κατά τη χρήση του;

ΤΕΧΝΟΥΡΓΗΜΑΤΑ/ARTIFACTS, ΕΡΓΑΛΕΙΑ/TOOLS, ΟΡΓΑΝΑ/ INSTRUMENTS

Ο όρος «τεχνούργημα» αναφέρεται σε υλικά αντικείμενα που έχουν σκόπιμα κατασκευαστεί για να επιτελούν μια συγκεκριμένη λειτουργία (Preston, 2018). Οι λειτουργίες ενός τεχνουργήματος αναφέρονται ως «κατάλληλες λειτουργίες/ proper functions» αν τα τεχνουργήματα σχεδιάστηκαν για να επιτελέσουν αυτές ακριβώς τις λειτουργίες. Ωστόσο, μερικές φορές αυτοσχεδιάζουμε και αποδίδουμε μια λειτουργία σε ένα τεχνούργημα, που δεν σχεδιάστηκε γι' αυτό το σκοπό. Σε μια τέτοια περίπτωση μιλάμε για «αυτοσχέδιες λειτουργίες/improvised functions». Η διάκριση μεταξύ «κατάλληλων» και «αυτοσχέδιων» λειτουργιών ενός τεχνουργήματος θα μας φανεί χρήσιμη σε επόμενη ενότητα που συζητάμε τον τρόπο κατασκευής μαθηματικών έργων με τη χρήση τεχνουργημάτων.

Ο R. Heersmink (2021) διακρίνει 4 κατηγορίες τεχνουργημάτων.

- Ενσώματα τεχνουργήματα (Embodied artifacts)
- Αντιληπτικά τεχνουργήματα (Perceptual artifacts)
- Συναισθηματικά τεχνουργήματα (Affective artifacts)
- Γνωστικά τεχνουργήματα (Cognitive artifacts)

Παραδείγματα γνωστικών τεχνουργημάτων περιλαμβάνουν χάρτες, άβακες, διαγράμματα, μοντέλα, συστήματα υπολογιστών κλπ. Για να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία τέτοια αντικείμενα απαιτείται συνδυασμός κινητικών, αντιληπτικών και γνωστικών τεχνικών. Ο Norman (1993) υποστηρίζει ότι τα γνωστικά τεχνουργήματα είναι «πράγματα που μας κάνουν έξυπνους» και χωρίς αυτά οι γνωστικές μας ικανότητες θα ήταν ριζικά διαφορετικές. Η ανάλυση του Norman εστιάζει στο ότι τα τεχνουργήματα αλλάζουν την ίδια τη φύση της εργασίας που εκτελείται και όχι μόνο την ικανότητά μας να ολοκληρώσουμε το έργο.

Ιδιαίτερη κατηγορία τεχνουργημάτων αποτελούν οι μηχανές. Οι μαθηματικές μηχανές ή μαθηματικοί μηχανισμοί είναι ιδιαίτεροι τύποι αρθρωτών συστημάτων. Είναι τεχνουργήματα (artifacts ή artefacts) που σχεδιάστηκαν (συνήθως από κάποιον μαθηματικό) έτσι ώστε, τα αρθρωτά τους μέρη να κινούνται και να χαράσσουν γραμμές ακολουθώντας ένα μαθηματικό νόμο. Μελετώντας τη μαθηματική μηχανή και την κίνησή της, προσπαθούμε να ανακαλύψουμε το νόμο που κρύβει.

Τα τεχνουργήματα διακρίνονται σε εργαλεία (tools) ή όργανα (instruments) με βάση τις λειτουργίες τους. Τα εργαλεία είναι σημαντικά για την κατασκευή, την επισκευή ή την τροποποίηση. Τα όργανα προορίζονται για την «καθοδήγηση» μιας διαδικασίας. Ενώ το εργαλείο επεκτείνει και ενισχύει άμεσα τις δεξιότητες των χρηστών, το όργανο χρησιμεύει για να εποπτεύει και να βοηθά στη διαχείριση αυτών των δεξιοτήτων. Και τα εργαλεία και τα όργανα έχουν να κάνουν με την άσκηση δεξιοτήτων και την εκτέλεση μιας λειτουργίας. Ωστόσο, στην περίπτωση του εργαλείου, η έμφαση δίνεται περισσότερο στη λειτουργία και στο είδος της εργασίας που εκτελείται, ενώ στην περίπτωση του οργάνου, έμφαση δίνεται περισσότερο στις δεξιότητες του χρήστη και στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η εργασία. Οι Impedovo, M. A., Andreucci, C., & Ginestié, J. (2017) παρουσιάζουν μια λεπτομερή ταξινόμηση των τεχνουργημάτων. Συγκρίνοντας αυτήν τη ταξινόμηση με άλλες έρευνες σχετικά με τον καθορισμό των εννοιών τεχνούργημα, εργαλείο, όργανο, παρουσιάζονται επικαλύψεις. Για παράδειγμα ως ξεχωριστή κατηγορία εμφανίζονται τα instruments και τα classroom and instructional artifacts και τα cognitive artifacts.

Κοινό σημείο όλων των ταξινομήσεων είναι η έμφαση στο ότι τα όργανα παρέχουν ανατροφοδότηση σε μια διαδικασία, ενώ τα εργαλεία συνήθως απλώς κάνουν τη διαδικασία να συμβεί. Τα όργανα μας επιτρέπουν να παρακολουθούμε τη διαδικασία και να την προσαρμόζουμε στις ιδιαίτερες συνθήκες του έργου. Ταυτόχρονα όμως τα όργανα δρουν πάνω μας σε νοητικό επίπεδο. Είναι ένα ενδιάμεσο στο συνεχές μεταξύ νου και εργαλείου, περισσότερο «αντανακλαστικό» από ότι ένα εργαλείο και ταιριάζει σε αυτό που ο Norman (1993) αποκαλεί «σύνθετο μέσο», (‘compositional medium’), όπου η «συνθετότητα» νοείται ως η γνωστική διαδικασία που «επιτρέπει την προσθήκη νέων παραστάσεων, την τροποποίηση και τη χειραγώγηση των παλιών, και στη συνέχεια την πραγματοποίηση συγκρίσεων» (σελ. 247). Ο παρακάτω πίνακας (Gorayska et al., 2001) εμφανίζει ένα συνεχές μεταξύ νου και υλικού κόσμου.

Η απόσταση και η ανάδραση είναι αντιστρόφως ανάλογοι προσδιοριστικοί παράγοντες των υποκατηγοριών των τεχνουργημάτων.

Ο βαθμός ανάδρασης του τεχνουργήματος μπορεί περαιτέρω να ενισχυθεί ή να μετριαστεί από μεταβλητές περιβάλλοντος τόσο εξωτερικές όσο και εσωτερικές του χρήστη. Βασικοί παράγοντες είναι: 1) ένα εξωτερικό δυναμικό περιβάλλον (πχ μέσω κατάλληλων έργων που απαιτούν τη χρήση του εργαλείου) 2) εσωτερικές παρακινητικές καταστάσεις και 3) γλωσσική ή πολιτισμική διαμεσολάβηση στην ερμηνεία των αντιληπτικών μας δεδομένων.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε επιγραμματικές απαντήσεις στα ερωτήματα που θέσαμε αρχικά, ενώ πλήρης ανάλυση θα επιχειρηθεί κατά την παρουσίαση, όπου θα τεθούν και περισσότερα ερωτήματα.

1) Ποιος είναι ο ρόλος των τεχνουργημάτων στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών;

Ο ρόλος των τεχνουργημάτων έχει αναλυθεί στο πλαίσιο διαφόρων θεωριών.

Ο Vygotsky (1978) εξετάζει το πώς ένα τεχνούργημα μπορεί να μετατραπεί σε ψυχολογικό εργαλείο στο πλαίσιο της κοινωνικής και πολιτιστικής αλληλεπίδρασης που αναπτύχθηκε μέσω της ζώνης εγγύτατης ανάπτυξης και διαδικασίας εσωτερίκευσης. Οι μελέτες των Verillon και Rabardel (1995) που έχουν τις ρίζες τους στη θεωρία του Vygotsky τόνισαν την ουσιαστική διαφορά ανάμεσα σε ένα τεχνούργημα και ένα όργανο ως ψυχολογική κατασκευή.

Συγκεκριμένα, ο Rabardel (1995) ορίζει το τεχνικό αντικείμενο (τα εργαλεία και τα όργανα είναι τεχνικά αντικείμενα) ως «οτιδήποτε έχει υποστεί μια μεταμόρφωση ανθρώπινης προέλευσης» (σελ. 59) και προτείνει μια βασική διάκριση μεταξύ τεχνουργήματος/εργαλείου και οργάνου. Το πρώτο ορίζεται ως το υλικό ή συμβολικό αντικείμενο καθεαυτό και το δεύτερο ορίζεται ως μια μικτή οντότητα που αποτελείται από στοιχεία τύπου τεχνουργήματος και σχήματα χρήσης, «προϊόντα τόσο του υποκειμένου όσο και του αντικείμενου» (Rabardel and Samucay 2001). Τα σχήματα χρήσης εξελίσσονται σταδιακά με τη χρήση του τεχνουργήματος σε σχέση με την ολοκλήρωση μιας συγκεκριμένης εργασίας. Όπως αναφέρουν οι Verillon και Andreucci (2006), «όταν χρησιμοποιείται, ένα τεχνούργημα παγιδεύεται σε ένα σύστημα σχημάτων δράσης, αναπαραστάσεων, γνώσεων, διανοητικών και κινητικών δεξιοτήτων, που καθορίζουν τη λειτουργία του. Υπό αυτήν την έννοια, τα όργανα/instruments είναι στην πραγματικότητα υβριδικές οντότητες, εν μέρει ψυχολογικές και εν μέρει τεχνουργηματικού χαρακτήρα/artefactual».

Η θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης (TSM) αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε στη Μαθηματική Εκπαίδευση από τις Bartolini Bussi & Mariotti (2008). Θεμελιώδες στοιχείο σε αυτό το πλαίσιο είναι ότι κάθε δράση με ένα τεχνούργημα προκαλεί την εμφάνιση σημείων-λέξεων, συμβόλων, σχημάτων, σκίτσων κλπ (semiotic activity), που μπορεί να χρησιμοποιηθούν από το δάσκαλο προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές να κατασκευάσουν ή να ενισχύσουν μαθηματικά νοήματα: «ένα βασικό χαρακτηριστικό αυτών των σημείων είναι ότι το νόημά τους έχει στενή σχέση με τις λειτουργίες που εκτελούνται» (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, σελ.753).

Η θεωρία της ενσωμάτωσης (embodiment theory) υποστηρίζει τις ισχυρές σχέσεις μεταξύ των αισθητηριακών δραστηριοτήτων και των τεχνουργημάτων (Healy & Fernandes, 2011). Στον πυρήνα της υπάρχει η αλλαγή παραδείγματος από την εννοιολόγηση του νου ως μια καθαρά εσωτερική υπόθεση στην ενσώματη διάστασή του και τη στενή σύνδεση με το περιβάλλον.

Η θεωρία της καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης (guided reinvention/ Realistic Mathematics Education) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατευθύνει το σχεδιασμό μαθηματικών έργων που βασίζονται σε τεχνουργήματα.

2) Πώς μπορούμε να διαμορφώσουμε ένα «μέσο» για μια γόνιμη αλληλεπίδραση τεχνουργήματος-μαθητή;

Μια μαθησιακή εμπειρία είναι μια αλληλεπίδραση μεταξύ ενός μαθητή και του κοινωνικού, ψυχολογικού και υλικού περιβάλλοντος/milieu. Υπάρχει δυνατότητα μάθησης σε κάθε περίπτωση και εναπόκειται στον εκπαιδευόμενο να συνειδητοποιήσει αυτή τη δυνατότητα. Ενώ οι διαμεσολαβητές και άλλοι παράγοντες μπορούν να βοηθήσουν στη δημιουργία του περιβάλλοντος, ο μαθητής είναι αυτός που δημιουργεί την ιδιαίτερη εμπειρία. Μπορεί να είναι χρήσιμο να γίνει διάκριση μεταξύ ενός συμβάντος-event και της εμπειρίας-experience/ «consciousness» «personal psychological history». Το συμβάν είναι η όλη κατάσταση όπως παρατηρείται από κάποιον που παρατηρεί «όλο αυτό», ενώ η εμπειρία είναι η κατάσταση όπως βιώνεται από το μαθητή.

Κάθε μαθητής αποτελεί μέρος του περιβάλλοντος, εμπλουτίζοντάς το με τη προσωπική του συνεισφορά και δημιουργώντας μια αλληλεπίδραση που είναι η μαθησιακή εμπειρία για τον εαυτό του και για άλλους. Ωστόσο, ο μαθητής είναι μέρος του περιβάλλοντος και προκειμένου να αναστοχασθεί πρέπει να μπορεί να αποσυρθεί από την άμεση αλληλεπίδραση για να συνειδητοποιήσει τι συμβαίνει.

Στο σημείο αυτό η συνεισφορά του δασκάλου είναι μεγάλη. Είτε μέσω α-διδακτικών καταστάσεων, είτε μέσω κατάλληλων ερωτήσεων, θα υποστηρίξει τη διαδικασία αναστοχασμού του μαθητή.

3) Ποιες είναι οι βασικές αρχές σχεδιασμού μαθηματικών έργων που περιλαμβάνουν τη χρήση τεχνουργημάτων;

Τα τεχνουργήματα, εξ ορισμού, είναι τεχνουργήματα, επειδή κατασκευάζονται και χρησιμοποιούνται σκόπιμα (Loughmiller-Cardinal & Cardinal, 2020). Η μετατροπή από απλό υλικό «αντικείμενο» σε «τεχνούργημα» προϋποθέτει πρόθεση. Για παράδειγμα

- Θέλω να φτιάξω κύκλους (**πρόθεση**/purpose/intentionality)
- Ο διαβήτης χρησιμοποιείται για να φτιάχνει κύκλους (**χρήση**/use/action)
- Θα χρησιμοποιήσω διαβήτη για να φτιάξω κύκλους -και μέσω αυτών διάφορες γεωμετρικές κατασκευές- (**λειτουργία**/function/goal/practicality)

Πρόθεση-Επιλογή (βάσει χρήσης)-Εκτέλεση. Σε αυτό το παράδειγμα εμφανίζεται μια *γραμμική/ιεραρχική* διαδικασία *πρόθεσης-χρήσης διαβήτη και αποτελέσματος-κατασκευής κύκλου.* Θεωρούμε το τρίπτυχο (κλασικός) διαβήτης-κύκλος/ κατασκευές με κύκλο/ διδασκαλία της Γεωμετρίας, ως το πρώτο επίπεδο δυνατοτήτων/affordances του διαβήτη.

Αυτό το γραμμικό σχήμα, εντούτοις, εμφανίζει κάποια προβλήματα.

- Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η αρχική πρόθεση κατασκευής του εργαλείου, δεν έχει καμία σχέση με την τελική χρήση του. Πχ μπορούμε να τριχοτομήσουμε μια γωνία με τη χρήση ενός χάρακα ή ενός βιβλίου.
- Το τελικό αποτέλεσμα (πχ. η κατασκευή κύκλου) μπορεί να προκύψει από διαφορετική αιτία (πχ. τη χρήση ενός κυκλικού δίσκου).

- Η λειτουργία του τεχνουργήματος μπορεί να είναι συμβολικής και όχι πρακτικής φύσης (πχ ο διαβήτης ως σύμβολο).

Η ανάλυση αυτών των προβλημάτων διευκολύνεται αν αντικαταστήσουμε το γραμμικό μοντέλο με ένα περισσότερο αλληλεπιδραστικό.

Η πρακτική πλευρά του τεχνουργήματος αφορά το σκοπό της κατασκευής και τη χρήση του. Η κατασκευή του διαβήτη είναι τέτοια, που του επιτρέπει να κάνει κύκλους οπότε ικανοποιεί την πρόθεσή μου να κάνω κύκλους.

Και αν....

- *Η κατασκευή του τεχνουργήματος δεν παραπέμπει στη λειτουργία του τεχνουργήματος;*
- *Η πρόθεσή μου να κάνω κύκλους ικανοποιείται και από άλλου τύπου τεχνουργήματα;*

Η πραγματιστική πλευρά αφορά τη χρήση και τη λειτουργία. Επειδή ο διαβήτης φτιάχνει κύκλους θα τον χρησιμοποιήσω να φτιάξω κύκλους.

Και αν...

- *Χρησιμοποιήσω τις δυνατότητες του τεχνουργήματος/διαβήτη για κάτι διαφορετικό;*

Η κανονιστική πλευρά αφορά το σκοπό της κατασκευής του τεχνουργήματος και τη λειτουργία του. Θέλω να φτιάξω κύκλους και γι' αυτό θα χρησιμοποιήσω το διαβήτη.

Και αν...

- *Θέλω να φτιάξω κύκλους χωρίς τη χρήση του συγκεκριμένου τεχνουργήματος;*

Θεωρούμε τις παραπάνω ενδεχομενικές λειτουργίες του τεχνουργήματος ως το δεύτερο επίπεδο δυνατοτήτων/affordances του.

4) Ποια είναι η σχέση τεχνουργήματος και έννοιας στην οποία αυτό αναφέρεται κατά τη χρήση του;

Η φυσική δομή και η λειτουργική χρήση κάθε τεχνικού οργάνου αντικατοπτρίζει διαφορετικές ιδιότητες της γεωμετρικής έννοιας που ενσωματώνει και αυτό είναι κάτι που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά την επιλογή εργαλείων στο σχεδιασμό έργων. Συγκεκριμένα,

- ο διαβήτης αναδεικνύει τον ορισμό του κύκλου ως το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από δοθέν σημείο, ενώ
- οι κυκλικοί ιχνηλάτες και το περίγραμμα τόξου κύκλου, αναδεικνύουν τον κύκλο ως κλειστή γραμμή σταθερής καμπυλότητας.

Σκεφτείτε

Πώς μπορείτε να κατασκευάσετε κύκλο (που δεν ξέρετε το κέντρο του) με το διπλανό εργαλείο; Ποιες ιδιότητες του κύκλου αναδεικνύονται;

Επίσης, ο διαβήτης, χρησιμοποιείται πολλές φορές και για τη σύγκριση ίσων ευθυγράμμων τμημάτων.

Μια τέτοια διδακτική επιλογή

1. Δεν συνάδει με την αρχική χρήση του διαβήτη από τον Ευκλείδη. Πράγματι, πρέπει να σημειώσουμε ότι ο διαβήτης του Ευκλείδη ήταν διαφορετικός από το γνωστό σύγχρονο διαβήτη: Έκλεινε όταν σηκώνετο από το χαρτί και, επομένως, δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων και

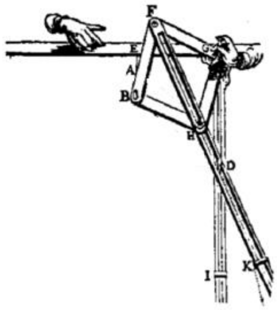
2. Υπάρχει ένα κατάλληλο εργαλείο για τη μεταφορά τμημάτων (divider).

Ενδιαφέρουσα είναι η επιλογή του χάρακα ως εργαλείου χάραξης ευθειών. Με μια πρώτη σκέψη, ο χάρακας μπορεί να θεωρηθεί ότι παραπέμπει άμεσα στην κατασκευή της ευθείας.

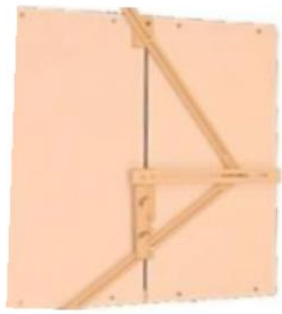
Εντούτοις, ένα σοβαρό προβληματισμό σχετικά με αυτό έθεσε ο A.B. Kempe's στο κείμενό του με τίτλο How to Draw a Straight Line (1877). «*Αν θέλουμε να χαράξουμε μια ευθεία γραμμή με έναν χάρακα, ο ίδιος ο χάρακας πρέπει να έχει μια ευθεία πλευρά. Και πώς θα κάνουμε αυτή τη πλευρά ευθεία; Επιστρέφουμε στην αφετηρία μας*».

Η απάντηση στο ερώτημα του Kempe είναι η συνδεσμολογία Peaucellier–Lipkin ένας μηχανισμός που επινοήθηκε το 1864 απο το γάλλο μηχανικό Charles-Nicolas Peaucellier, στον οποίον αρχικά δεν δόθηκε ιδιαίτερη σημασία, μέχρι που περίπου 10 χρόνια αργότερα επανα-ανακαλύφθηκε από έναν Ρώσο φοιτητή του P. Chebyshev, τον Yom Tov Lipman Lipkin.

Ένα τρίτο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι παραβολογράφοι των Cavalieri και van Schooten.



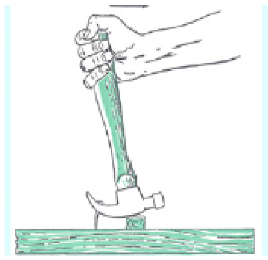
van Schooten



Cavalieri

Ο πρώτος αναδεικνύει μέσω της δομής του τον ορισμό της παραβολής ως γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου τα οποία αποτελούν κορυφή ισεμβαδικού τετραγώνου με ορθογώνιο το οποίο έχει μία πλευρά σταθερού μήκους και τα δύο επίπεδα σχήματα έχουν «εφαρμοσθεί» σε μία άλλη κοινή ορθή γωνία τους (τετραγωνισμός ορθογωνίου παραλληλογράμμου), ενώ ο δεύτερος αναδεικνύει τον ορισμό του Πάππου, δηλαδή ο λόγος της απόστασης κάθε σημείου της παραβολής από την διευθετούσα ευθεία της προς την αντίστοιχη απόσταση του σημείου από την Εστία της ισούται με μία ένα.

Ένα τελευταίο παράδειγμα από το χώρο των απλών μηχανών αποτελεί το σφυρί που μπορεί να λειτουργήσει και ως μοχλός.



ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, 746.

Gorayska, B., Marsh, J. P., & Mey, J. L. (2001). Cognitive technology: Tool or instrument?. In I*nternational Conference on Cognitive Technology* (pp. 1-16). Springer, Berlin, Heidelberg.

Healy, L., & Fernandes, S. H. A. A. (2011). The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 157-174.

Heersmink, R. (2021). Varieties of artifacts: Embodied, perceptual, cognitive, and affective. *Topics in Cognitive Science*, *13*(4), 573-596.

Impedovo, M. A., Andreucci, C., & Ginestié, J. (2017). Mediation of Artefacts, Tools and Technical Objects: an international and French perspective. *International Journal of Technology and Design Education*, *27*(1), 19-30.

Loughmiller-Cardinal, J. A., & Cardinal, J. S. (2020). Use, Purpose, and Function—Letting the Artifacts Speak. *Heritage*, *3*(3), 587-605.

Norman, D. (1993). *Things that make us smart: Defending human attributes in the age of the machine*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Artifact and cognition: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education, IX*, (3), 77–101.

Vérillon, P., & Andreucci, C. (2006). Artefacts and cognitive development: How do psychogenetic theories of intelligence help in understanding the influence of technical environments on the development of thought?. In *International Handbook of Technology Education* (pp. 399-416). Brill Sense.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΤΑΞΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΚΙΝΕΖΙΚΟΥ ΑΒΑΚΑ

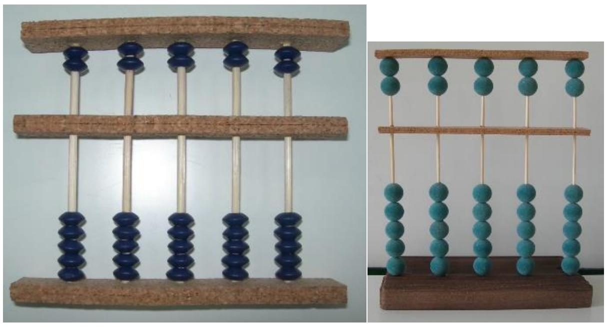
Νικολαντωνάκης Κώστας

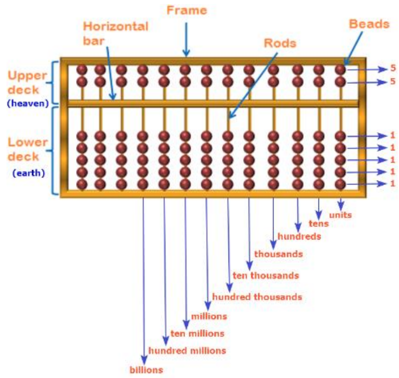
ΠΤΔΕ-Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

knikolantonakis@uowm.gr

Η εισαγωγή της ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω αντιγράφων αρχαίων εργαλείων και τεχνουργημάτων. Αυτά παρέχουν: α) οπτική και β) απτική αντίληψη μιας έννοιας, η οποία κινητοποιεί τους/τις μαθητές/τριες και αποτελεί σημαντικό κομμάτι της γνωστικής θεμελίωσης της μαθηματικής δραστηριότητας.

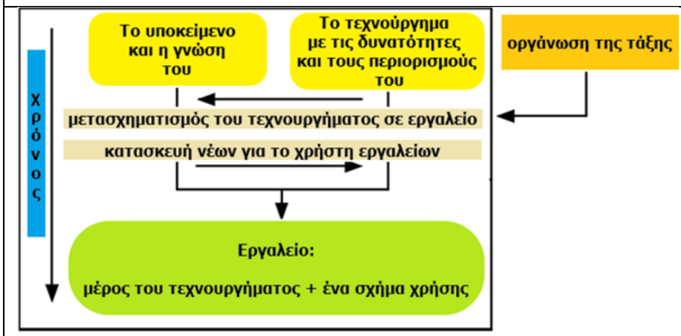
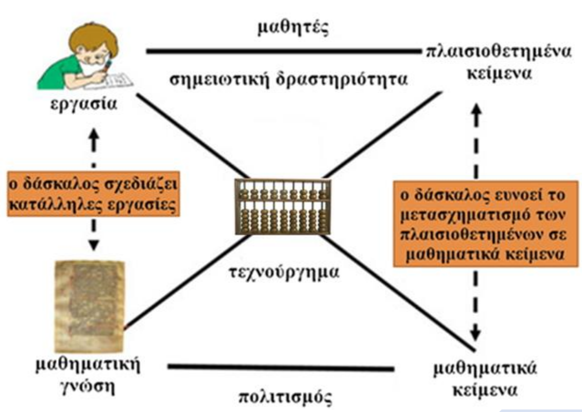
Ένα όργανο, το οποίο δύναται να εισαγάγει την ιστορία των μαθηματικών στη δραστηριότητα της τάξης, είναι και ο κινέζικος άβακας.

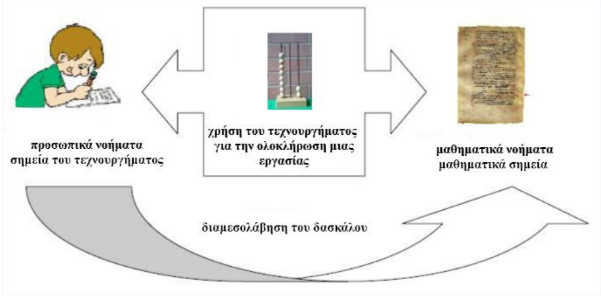
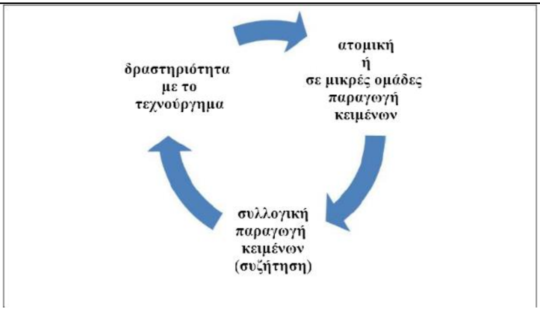




Κατασκευές άβακα της τάξης και ατομικό   Σχηματική επεξήγηση του άβακα

Για την ανάγνωση και ερμηνεία των απαντήσεων των μαθητών/τριών χρησιμοποιήθηκαν οι θεωρίες της εργαλειακής γένεσης του Rabardel και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, οι οποίες παρουσιάζονται σχηματικά παρακάτω και επεξηγούνται σε άλλα κείμενα αυτού του εργαστηρίου.

<table>
<tr><th>Η εργαλειακή γένεση κατά Rabardel</th><th>Σημειωτική διαμεσολάβηση</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Διαμεσολάβηση εκπαιδευτικού	Διδακτικός κύκλος
	

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Να εξεταστεί αν οι μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου γνωρίζουν τη δομή του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, και να διαπιστώσει αν ο κινέζικος άβακας, υπό το πρίσμα της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης και της σημειωτικής διαμεσολάβησης, μπορεί να συμβάλει στη κατανόηση της δομής του.

ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου αγροτικής περιοχής του νομού Πιερίας.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Ερωτηματολόγιο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, συνεντεύξεις των μαθητών/τριών κατά τη συμπλήρωσή τους, ηχογραφήσεις κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων, φύλλα εργασίας μετά από κάθε δραστηριότητα

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Έγινε τροποποίηση στη σειρά της διδασκαλίας των κεφαλαίων των μαθηματικών, ώστε να μη γίνει καμία αναφορά στους άξονες των φυσικών αριθμών και των πράξεων με αυτούς πριν και κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης

- ✓ **Δραστηριότητες**

α) εισαγωγικές: i. Γνωριμία με τις απαρχές του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, ii. Επαφή και με άλλα συστήματα αρίθμησης, iii. Ανακάλυψη του κινέζικου άβακα, iv. Γνωριμία με την ιστορική εξέλιξη και περιγραφή του, v. Κατασκευή του ατομικού άβακα και του άβακα της τάξης, vi. Εναλλακτική κατασκευή του με τη χρήση διαφορετικών υλικών, vii. Ανακάλυψη του τρόπου λειτουργίας του.

β) κύριες σε δύο άξονες: i. των ακέραιων αριθμών (μέχρι και το 1.000), ii. των πράξεων με ακέραιους αριθμούς (προσθέσεων και αφαιρέσεων)

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση δείχνουν ότι τα παιδιά, στην πλειοψηφία τους, **δεν κατέχουν σε** ικανοποιητικό **βαθμό** την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου, αφού:

- ✓ Δυσκολεύτηκαν να αναλύσουν προσθετικά τριψήφιους αριθμούς.
- ✓ Έκαναν λάθη στις ανταλλαγές μεταξύ των διαφόρων τάξεων.
- ✓ Έκαναν λάθη κατά την κάθετη διάταξη αριθμών και την εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.
- ✓ Δεν μπόρεσαν να περιγράψουν με σαφήνεια την έννοια του κρατουμένου.
- ✓ Δεν μπόρεσαν να περιγράψουν με σαφήνεια την έννοια του δανεικού.

<u>**Ερευνητικό ερώτημα**</u>: Μπορεί ο κινέζικος άβακας να μετατραπεί σε εργαλείο για την κατανόηση της έννοιας της αξίας θέσης ψηφίου;

- Το παραπάνω ερώτημα θέτει στο επίκεντρο την εργαλειακή γένεση.
- Η μετατροπή του κινέζικου άβακα από τεχνούργημα σε εργαλείο:
- ✓ επιδιώχθηκε μέσα από στοχευμένες δραστηριότητες, οι οποίες αποσκοπούσαν στην εξέλιξη αυτή,
- ✓ καταγράφηκε στις απαντήσεις των μαθητών/τριών κατά τη συμπλήρωση των ασκήσεων του ερωτηματολογίου, που ακολούθησε τη διδακτική παρέμβαση.

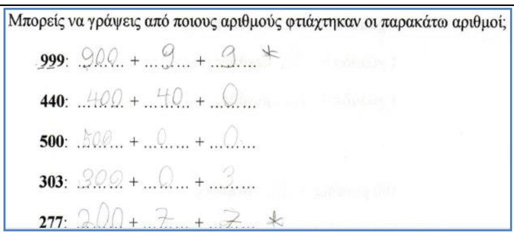
Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα από τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου μετά την παρέμβαση, τα οποία αποδεικνύουν ότι ο κινέζικος άβακας **μπορεί** να εξελιχθεί σε εργαλείο.

Στην ερώτηση σχετικά με τη γραφή των αριθμών

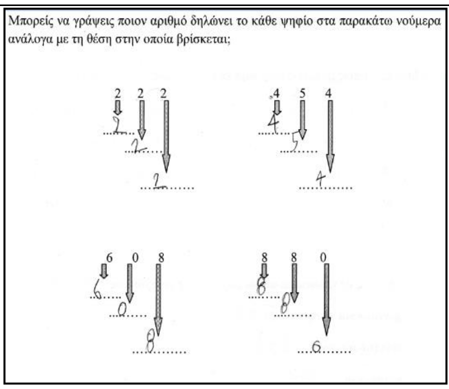
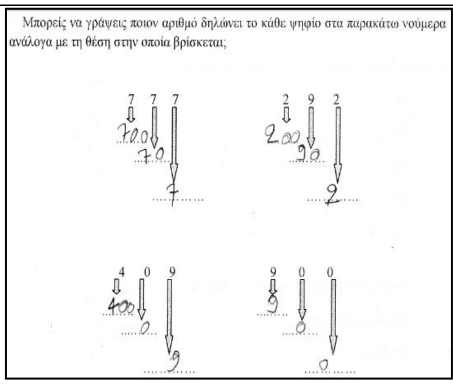
πριν την παρέμβαση	**μετά την παρέμβαση**
Μπορείς να γράψεις με ψηφία τους παρακάτω αριθμούς; **πεντακόσια πενήντα**: 5050 × **εννιακόσια εννιά**: 909 **οχτακόσια**: 800 **διακόσια είκοσι δύο**: 2022 ×	Μπορείς να γράψεις με ψηφία τους παρακάτω αριθμούς; **τετρακόσια σαράντα**: 440 **επτακόσια**: 700 **τριακόσια τριάντα τρία**: 333 **οχτακόσια οχτώ**: 808
	Δ: Γιατί ο αριθμός «τριακόσια τριάντα τρία» δε γράφεται ως 3033; **Μ**: Γιατί στο 333, αυτό το 3 (δείχνει το 3 των εκατοντάδων) είναι το τριακόσια, αυτό (δείχνει το 3 των δεκάδων) είναι το 30 και αυτό (δείχνει

	το 3 των μονάδων) είναι το 3. **Δ**: Και γιατί δε γράφεις τον αριθμό έτσι, 300303; **Μ**: Γιατί στον άβακα αυτό το 3 (δείχνει το 3 των εκατοντάδων) είναι στη στήλη των εκατοντάδων και το γράφω με σκέτο 3, αυτό (δείχνει το 3 των δεκάδων) είναι στη στήλη των δεκάδων και το γράφω με 3 και αυτό το 3 (δείχνει το 3 των μονάδων) είναι το 3. Σε κάθε στήλη γράφω μόνο έναν αριθμό.

Σχετικά με την προσθετική ανάλυση αριθμών

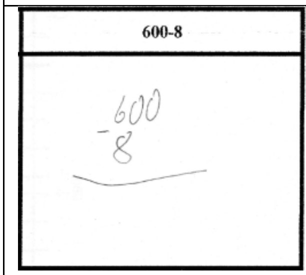
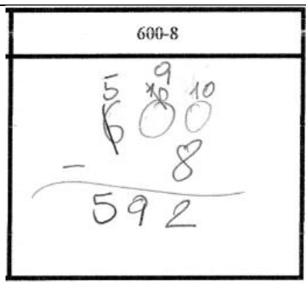
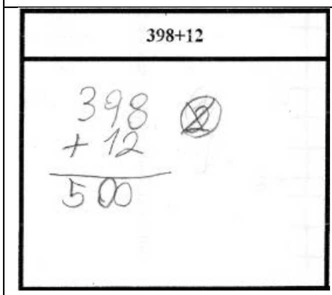
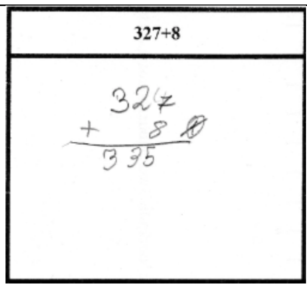
πριν την παρέμβαση	**μετά την παρέμβαση**
 Μπορείς να γράψεις από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι παρακάτω αριθμοί; 999: 900 + 9 + 9 * 440: 400 + 40 + 0 500: 500 + 0 + 0 303: 300 + 0 + 3 277: 200 + 7 + 7 *	 Μπορείς να γράψεις από ποιους αριθμούς φτιάχτηκαν οι παρακάτω αριθμοί; 222: 200 + 20 + 2 100: 100 + 0 + 0 909: 900 + 0 + 9 660: 600 + 60 + 0 744: 700 + 40 + 4
	Δ: Γιατί ο αριθμός 222 δεν αναλύεται ως 200+2+2; **Μ**: Γιατί αυτό το 2 (δείχνει το 2 των δεκάδων) είναι το 20. Είναι στη στήλη των δεκάδων και φτιάχνεται με δύο χάντρες.

Σχετικά με την αναγνώριση αξίας ψηφίων

πριν την παρέμβαση	**μετά την παρέμβαση**
 Μπορείς να γράψεις ποιον αριθμό δηλώνει το κάθε ψηφίο στα παρακάτω νούμερα ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται;	 Μπορείς να γράψεις ποιον αριθμό δηλώνει το κάθε ψηφίο στα παρακάτω νούμερα ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται;

	Δ: Γιατί στον αριθμό 777 έγραψες ότι το πρώτο 7 είναι ο αριθμός 700, το δεύτερο 7 είναι ο αριθμός 70 και το τρίτο 7 είναι ο αριθμός 7; **Μ**: Γιατί αυτό το 7 (δείχνει το πρώτο 7 του 777) είναι στην τρίτη στήλη, αυτό (δείχνει το δεύτερο 7 του 777) είναι στις δεκάδες και αυτό (δείχνει το τελευταίο 7 του 777) είναι στο τέλος… στη στήλη των μονάδων».

Σχετικά με την εκτέλεση πράξεων με κρατούμενο και δανεικό

πριν την παρέμβαση	**μετά την παρέμβαση**
	
	Δ: Γιατί έγραψες το 8 κάτω από το 0 και όχι κάτω από το 6 του αριθμού 600; **Μ**: Γιατί είναι μόνο οχτώ και πρέπει να μπει στον άβακα στη στήλη των μονάδων.
πριν την παρέμβαση	**μετά την παρέμβαση**
	
Η μαθήτρια μετέφερε τα κρατούμενα που προέκυψαν στις μονάδες και στις δεκάδες των αριθμών και τα άθροισε στη στήλη	**Δ**: Το κρατούμενο δεν πρέπει να πάει στο 3 του αριθμού 327; **Μ**: Όχι, γιατί 7+8 κάνει 15. Γράφω το 5 και το κρατούμενο το πάω στη

των εκατοντάδων.	διπλανή στήλη, στη στήλη των δεκάδων. Στον άβακα κάνω ανταλλαγή το δέκα του ουρανού με ένα της γης στην άλλη στήλη.

Σχετικά με την ερμηνεία του κρατουμένου

πριν την παρέμβαση	**μετά την παρέμβαση**
Δ: Μπορείς να πεις τι είναι ένα κρατούμενο; **Μ**: Το κρατούμενο είναι ένας αριθμός που τον βάζεις για να κάνεις την πρόσθεση. **Δ**: Είναι ένας δικός σου αριθμός ή τον βρίσκεις κάπου; **Μ**: Τον παίρνεις από κάτι, από ένα νούμερο. Παίρνω ένα νούμερο και παίρνω λίγο από αυτό το νούμερο.	**Δ**: Μπορείς να πεις τι είναι ένα κρατούμενο; **Μ**: Το κρατούμενο είναι ένας αριθμός που τον κρατάω για λίγο, γιατί δεν μπορώ να τον βάλω στη στήλη που είναι και μετά τον βάζω στην άλλη στήλη. **Δ**: Γιατί δεν μπορείς να τον βάλεις στη στήλη που είναι; **Μ**: Γιατί στον άβακα η κάθε στήλη μπορεί να πάρει μόνο έναν αριθμό. Από το 0 μέχρι το 9. Ο αριθμός σε εμένα είναι μεγαλύτερος από 9.

Σχετικά με την ερμηνεία του δανεικού

πριν την παρέμβαση	**μετά την παρέμβαση**
Δ: Μπορείς να πεις τι είναι ένα δανεικό; **Μ**: Το δανεικό είναι ένα νούμερο που το δανείζομαι από ένα νούμερο για λίγο, το βάζω κάπου και του το ξαναδίνω	**Δ**: Μπορείς να πεις τι είναι ένα δανεικό; **Μ**: Είναι ένας αριθμός που δανείζομαι για λίγο για να μπορέσω να κάνω την αφαίρεση. **Δ**: Από πού θα δανειστείς; **Μ**: Από τη διπλανή στήλη. Θα ανταλλάξω μια χάντρα της γης στις δεκάδες με δύο χάντρες του ουρανού στις μονάδες.

<u>Ερευνητικό ερώτημα</u>: Μπορεί ο κινέζικος άβακας να διαμεσολαβήσει την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου;

- Αναφέρεται στη θεωρία της σημειωτικής διαμεσολάβησης.

- Ο κινέζικος άβακας **μπορεί** να διαμεσολαβήσει στους/στις μαθητές/τριες την έννοια της αξίας θέσης ψηφίου. Αυτό αποδεικνύεται από τα παρακάτω παραδείγματα.

Οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να αναπαραστήσουν τον αριθμό 342 στον ατομικό κινέζικο άβακα και να εξηγήσουν προφορικά πώς εργάστηκαν.

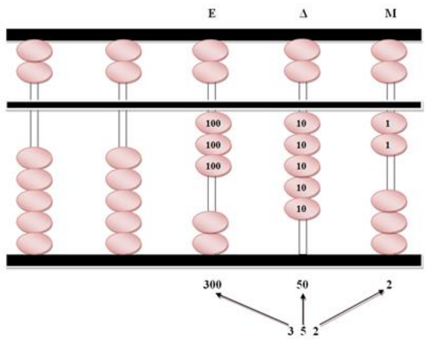
Μαθητής Α

«Ανέβασα τρεις μπαλίτσες στο τρίτο ξυλάκι από το τέλος, μετά ανέβασα αυτές τις μπαλίτσες στο προτελευταίο ξυλάκι και μία μπαλίτσα σε αυτό το ξυλάκι.» (πλαισιοθετημένο κείμενο)

«Ανέβασα τρεις μπαλίτσες στο τρίτο ξυλάκι από το τέλος, μετά ανέβασα τέσσερις μπάλες στο προτελευταίο ξυλάκι και μετά μία μπαλίτσα στο τελευταίο το ξυλάκι.»

«Ανέβασα τρεις χάντρες στη στήλη των εκατοντάδων, γιατί η καθεμία δείχνει εκατό, άρα τριακόσια. Ανέβασα τέσσερις χάντρες στη στήλη των δεκάδων, γιατί η καθεμία έχει δέκα, (άρα) σαράντα και ανέβασα και δύο στις μονάδες, γιατί η κάθε χάντρα έχει (αξία) ένα.» (μαθηματικό κείμενο)

Σε προηγούμενη δραστηριότητα σχεδιάστηκε στον πίνακα ο παρακάτω κινέζικος άβακας, ο οποίος αναλύει τον αριθμό 352.



«Κύριε, παρατήρησα κάτι: στη στήλη των μονάδων ο αριθμός 1 δεν έχει μηδέν, στη στήλη των δεκάδων ο αριθμός 10 έχει ένα μηδενικό, ενώ στη στήλη των εκατοντάδων ο αριθμός 100 έχει δύο μηδενικά.» (πλαισιοθετημένο κείμενο)

«Η πρώτη στήλη δείχνει το 1. Η δεύτερη στήλη είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από την πρώτη και δείχνει το 10, και η τρίτη είναι δέκα φορές μεγαλύτερη από τη δεύτερη και δείχνει το 100.» (μαθηματικό κείμενο)

Συμβάλλει τελικά ο κινέζικος άβακας στην κατανόηση της έννοιας της βάσης του 10 στο αριθμητικό σύστημα, του κρατουμένου, του δανεικού, και των αλγόριθμων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης από τους/τις μαθητές/τριες της Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου;

Τη **θετική** απάντηση στο παραπάνω ερώτημα παρέχουν οι απαντήσεις των μαθητών/τριών στο ερωτηματολόγιο μετά τη διδακτική παρέμβαση, συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες του ερωτηματολογίου πριν την παρέμβαση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746–783). New York, NY: Routledge.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2018). Introduction: integrating history and epistemology of mathematics in mathematics education. In K. Clark, T. Kjeldsen, S. Schorcht, & C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, education and history*. ICME-13 Monographs (pp. 1–23). Cham: Springer.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Poisard, C. (2006). The notion of carried-number, between the history of calculating instruments and arithmetic. In P. Groontenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnapan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces. Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol 2, pp. 416–423). Adelaide: MERGA.

Popotis, A., & Nikolantonakis, K. (2018a, July). *The contribution of the Chinese abacus to the development of number sense*. Paper presented at the 8th European Summer University on Epistemology and History in Mathematics Education, Oslo Metropolitan University, Oslo, Norway.

Popotis, A., & Nikolantonakis, K. (2018b, December). *Carried and borrowing number in the light of the Mathematical Working Space*. Paper presented at the Sixth Symposium on Mathematical Work, Pontificia Universidad Catolica de Valparaiso, Chile.

ΕΞΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΕΥΟΝΤΑΣ ΒΙΩΜΕΝΕΣ ΠΟΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ: (ΑΠΟ)ΔΟΜΗΣΕΙΣ ΕΝΟΣ ΓΝΩΜΟΝΑ

Μούτσιος-Ρέντζος Ανδρέας

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών

moutsiosrent@primedu.uoa.gr

Στην πλειοψηφία των σύγχρονων κοινωνικο-πολιτισμικών περιβαλλόντων, οι ορθές γωνίες θεωρούνται δεδομένες, ενώ, αντίστοιχα, στην πλειοψηφία των εκπαιδευτικών συστημάτων για τα μαθηματικά η αναγνώριση σχημάτων που περιέχουν ορθές γωνίες εμφανίζεται από την προ-σχολική εκπαίδευση. Ο γνώμονας, όπως ο χάρακας και ο διαβήτης, είναι ένα υλικό που θεωρείται δεδομένο στις σύγχρονες τάξεις των μαθηματικών, τόσο για τους μαθητές και τις μαθήτριες, όσο και για τους/τις εκπαιδευτικούς. Πώς όμως είναι δυνατό οι σημαντικές μαθηματικές ιδέες (ή κάποιες από αυτές) που οδήγησαν στην κατασκευή του γνώμονα να γίνουν νοητά ορατές σε μαθητές και μαθήτριες, χωρίς να εκπίπτουν σε μια τελετουργική μίμηση; Στην παρούσα εργασία, συζητείται ένα διδακτικό πλαίσιο που, αντλώντας από φαινομενολογικές ιδέες (Husserl, 2001/1970· Sokolowski, 2001) της εξαντικειμενίκευσης (objectification) και της αποβλεπτικότητας (intentionality), στοχεύει στην λειτουργική αποκάλυψη κρίσιμων μαθηματικών σχέσεων σχετικά με το ορθογώνιο τρίγωνο που συμπυκνώνονται –και συνήθως αποκρύπτονται– με την παραδοσιακή ένταξη του γνώμονα στην τάξη των μαθηματικών.

Ο Husserl διερευνά το ερώτημα με την υποκειμενικότητα του γνωρίζειν και της αντικειμενικότητας του αντικειμένου της μάθησης και προτείνει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα δεν αποτελούν ιδιοσυγκρασιακές κατασκευές, ούτε ‘αναμνήσεις’ κάποιων μη ανθρωπίνως προσβάσιμων ιδεών, αλλά ανθρωπίνως κατασκευασμένες ιδεατότητες. Δηλαδή, ανθρώπινες κατασκευές οι οποίες μέσω της γλώσσας υπερβαίνουν τα πρωταρχικά εξατομικευμένα βιώματα και γίνονται αντικείμενα, εντός ενός κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου, σε υπερβατολογικές ιδεατότητες. Οι Lappas και Spyrou (2006) διέκριναν δύο επίπεδα εξαντικειμενίκευσης σε αντιστοιχία με το σημειωτικό και το σχεσιακό πλαίσιο: στο πρώτο επίπεδο (αριθμητικό) τα αποτελέσματα της υποκειμενικής εμπειρίας εξαντικειμενικεύονται μέσω της αριθμητικής τους αναπαράστασης, ενώ στο δεύτερο επίπεδο (αλγεβρικό) τα αρχετυπικά αποτελέσματα ενσωματώνονται μέσω της αξιωματικής απόδειξης σε μια μαθηματική θεωρία και με αυτό τον τρόπο καθίστανται μη τυχαία, άχρονα αντικείμενα.

Από μια σημειωτική οπτική, το υλικό ιδωμένο ως σημείο, ενεργοποιεί διακριτά πολυτροπικά επικοινωνιακά συστήματα, ενώ η σχέση με το υλικό επιτρέπει την επιλεκτική απόκρυψη ή εμφάνιση μονοεπιστημονικών, διεπιστημονικών και καθημερινών νοημάτων και πρακτικών. Ο γνώμονας εμφανίζεται σε διαφορετικές επιστήμες και διαφορετικά μαθήματα, οπότε εμφανίζονται συγκλίσεις και αποκλίσεις των ενεργοποιούμενων νοημάτων, επιστημικών αντικειμένων και πρακτικών, από τους ερμηνευτές και τις ερμηνεύτριες (Moutsios-Rentzos κ.ά., 2020). Ταυτόχρονα, η ορθή γωνία ανάμεσα σε γραμμικώς ανεξάρτητα οριζόντια και κατακόρυφα διανύσματα κρύβεται σε ποικίλες βιολογικές και πολιτισμικές εμφανίσεις του ανθρώπινου είδους. Για παράδειγμα, η κατεύθυνση της δύναμης της βαρύτητας, αποτυπώνεται σε μηχανισμούς της ανθρώπινης φυσιολογίας και σε νοητικά μοντέλα που στοχεύουν στην αναγνώριση της κατακορύφου (Merfeld κ.ά., 1999· Noback κ.ά., 2005), καταδεικνύοντας την σημασία της αναγνώρισής της για την επιβίωση. Επίσης, η κατασκευή του οριζόντιου και του κατακόρυφου επίπεδου, σχετιζόμενη με αισθητηριακή πρόσληψη του κόσμου από τον άνθρωπο ως επίπεδες επιφάνειες, φαίνεται να είναι απαραίτητο στοιχείο πολλών εμφανίσεων του ανθρώπινου πολιτισμού. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να σχεδιαστούν διδακτικές παρεμβάσεις στις οποίες τα νοητικά ενεργήματα των μαθητών και των μαθητριών διακρίνουν μαθηματικές ιδέες που για τον εκπαιδευμένο νου είναι ορατές.

Σύμφωνα με μια φαινομενολογική οπτική, ο νους θα πρέπει να μετατοπιστεί από τη φυσική στάση, τον αντανακλαστικό τρόπο που καθημερινά σχετίζεται με τον ‘κόσμο της ζωής’, προς μια φαινομενολογική στάση, κατά την οποία αναπτύσσεται η ρητή σκέψη και η επανα-ενεργοποίηση της αποβλεπτικής γέννησης των αντικειμένων. Κατά τη φαινομενολογική αναγωγή (εποχή· Audi, 1999), αναταράσσεται και αποκαλύπτεται η ιζηματοποιημένη αποβλεπτική ιστορία των αντικειμένων, ενώ αναδεικνύεται «η υπερβατολογική στιγμή όπου αναστέλλεται η φυσική στάση, δεικνύοντας την επανα-ενεργοποίηση μιας ιζηματοποιημένης ιστορίας προς μια αποβλεπτική ιστορία» (Moutsios-Rentzos κ.ά., 2014, σελ. 30). Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι δεν ισχυριζόμαστε ότι είναι εφικτή η αναπαραγωγή της ιστορικής γένεσης μιας μαθηματικής ιδέας (δεδομένης της διαφορετικότητας του κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου κάτι τέτοιο είναι μάλλον αδύνατο· Radford, 1997), αλλά ότι είναι δυνατό μέσω κατάλληλης προσαρμογής μια ιδέα που κατασκευάστηκε σε μια δεδομένη ιστορική στιγμή να αποκαλυφθεί και να νοηματοδοτηθεί στο σύγχρονο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο μέσα από τις αναλλοίωτες γενεσιουργές δεσμεύσεις της (Arcavi & Isoda, 2007· Jankvist, 2009).

Στην παρούσα προσέγγιση, προτείνεται ένα ευρύτερο διδακτικό πλαίσιο (Moutsios-Rentzos κ.ά., 2014· Μούτσιος-Ρέντζος, 2015) το οποίο αντλεί από τις Χουσερλιανές ιδέες της εξαντικειμενίκευσης και της αποβλεπτικότητας και συγκροτείται από πέντε αρχές: αλληλουχία κατάλληλων γενικεύσεων (Radford, 2003), ενσώματο βίωμα (Lakoff & Núñez, 2016), επικοινωνία σε πολλαπλά σημειωτικά συστήματα (Duval, 2006· πρβλ. Moutsios-Rentzos κ.ά., 2020), προ-επιστημονικά υλικά (το υλικό που χρησιμοποιείται θα πρέπει να προάγει την φαινομενολογική στάση), και εφικτότητα (η προτεινόμενη παρέμβαση θα πρέπει να μπορεί να υλοποιηθεί σε μια σχολικής τάξη δεδομένου εκπαιδευτικού και κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου).

Στο στρογγυλό τραπέζι, θα συζητηθούν διδακτικές παρεμβάσεις που σχεδιάστηκαν σύμφωνα με αυτό το πλαίσιο σε Δημοτικό και Γυμνάσιο (Αγραπίδη, 2018· Moutsios-Rentzos κ.ά., 2014· Σπύρου & Μούτσιος-Ρέντζος, 2011), στη διάρκεια των οποίων μαθητές και μαθήτριες επανα-επινοούν κατασκευαστικά έναν γνώμονα, μετασχηματίζοντας το ρόλο τους από εφαρμοστές υλικού σε σχεδιαστές υλικού και, συνεπώς, μετασχηματίζοντας τα νοητικά ενεργήματά τους με αυτό το υλικό. Ειδικότερα, στοχεύσαμε στο πρώτο επίπεδο (αριθμητικό) εξαντικειμενίκευσης του ορθογωνίου τριγώνου, όπως αυτό συμβαίνει με ένα γνώμονα που υλοποιεί τη βασική Πυθαγόρεια τριάδα (3,4,5). Οι μαθητές και οι μαθήτριες συνειδητοποιούν τη σημασία της σχέσης των μέτρων των εμπλεκόμενων μεγεθών και όχι του απόλυτου μέτρου τους, τη σχέση ορθής γωνίας και μήκους απέναντι πλευράς, διατυπώνουν την αριθμητική σχέση $3^2+4^2=5^2$, και γενικεύουν τα βιώματά τους σε μια γλωσσική διατύπωση ενός κανόνα (σε μια αποδεκτή από την κοινότητα περίοδο λόγου), προ-κατανόηση αυτού που θα τους γνωστοποιηθεί ότι έχει ενταχθεί στην ανθρώπινη μαθηματική γνώση ως Πυθαγόρειο Θεώρημα. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές και οι μαθήτριες ξανα-επισκέπτονται ένα δεδομένο υλικό της τάξης των μαθηματικών, ως λειτουργικό εργαλείο με αναφορικότητα. Μέσω της επικέντρωσης στην κατάδειξη και επικοινωνία αναλλοίωτων σχέσεων δι-υποκειμενικών βιωμάτων, βιώνεται η συγκροτητική λειτουργία της αποβλεπτικότητας, που επιτρέπει την επανα-επινόηση μαθηματικών ιδεών που συγκροτούν και συμπυκνώνονται στο γνώμονα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγραπίδη, Μ. (2018). *Η Ορθογωνιότητα στα Μαθηματικά του Δημοτικού: Εξαντικειμενικευμένες Ποσοτικοποιήσεις μιας Βιούμενης Ποιότητας* (Αδημοσίευτη μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 111–129.

Audi, R. (Ed.). (1999). *Cambridge dictionary of philosophy*. Cambridge University Press.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Husserl, E. (2001/1970). In J. N. Findlay (Ed.), *Logical investigations*. Routledge.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235–261.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2016). *Από που προέρχονται τα μαθηματικά. Πως ο ενσώματος νους καθιστά τα μαθηματικά υπαρκτά*. Liberal Books.

Lappas, D., & Spyrou, P. (2006). A reading of Euclid’s elements as embodied mathematics and its educational implications. *The Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 5*(1), 1–16.

Merfeld, D. M., Zupan, L., & Peterka, R. J. (1999). Humans use internal models to estimate gravity and linear acceleration. *Nature, 398*, 615–618.

Μούτσιος-Ρέντζος, A. (2015). Η σχέση θεωρίας και υλικού στο σχεδιασμό μιας πρότασης για τη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Στο Σκουμπουρδη Χ. & Σκουμιός Μ., *Πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 538-560). 17-18 Οκτωβρίου 2014, Ρόδος, Ελλάδα.

Moutsios-Rentzos, A., Spyrou, P., & Peteinara, A. (2014). The objectification of the right- angled triangle in the teaching of the Pythagorean Theorem: an empirical investigation. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 29-51.

Moutsios-Rentzos, A., Pinnika, V., Kritikos, G., & Kalavasis, F. (2020). Appearances of the equals sign in primary school mathematics and natural sciences: an interdisciplinary, systemic approach. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 7,* 285-294.

Noback, C. R., Strominger, N. L., Demarest, R. J., & Ruggiero, D. A. (2005). *The human nervous system*. Humana Press.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26–33.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 39–65.

Sokolowski, R. (2000). *Introduction to phenomenology*. Cambridge University Press.

Σπύρου, Π., & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2011). Η εξαντικειμενίκευση του ορθογωνίου τριγώνου σε μια διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επ.), *Πρακτικά του 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 459-468). Ιωάννινα, Ελλάδα: Εν.Ε.Δι.Μ.-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

ΧΑΡΑΚΑΣ: ΤΕΧΝΟΥΡΓΗΜΑ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ ΥΛΙΚΟ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΟΡΓΑΝΟ, ΕΡΓΑΛΕΙΟ

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

kara@aegean.gr

Ο χάρακας είναι ένα τεχνούργημα το οποίο δημιουργήθηκε για την αντιμετώπιση πρακτικών ζητημάτων όπως χαράξεις ευθειών και μετρήσεις μηκών και του οποίου η χρησιμότητα δεν αμφισβητήθηκε στη διάρκεια των χρόνων. Ακόμα και οι υποστηρικτές της ακραίας τάσης μη χρήσης υλικού στη διδακτική πράξη, δεν αμφισβήτησαν τη χρησιμότητά του θεωρώντας τον απαραίτητο μέσο για την υποστήριξη της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, μαζί με τον διαβήτη, τον πίνακα, το χαρτί και το μολύβι, και (ίσως) την αριθμομηχανή (Gyulane & Szendrei, 2003). Έτσι, ο χάρακας αποτελεί, σήμερα, ένα από τα βασικά γεωμετρικά όργανα που χρησιμοποιείται ευρέως τόσο στην εκπαίδευση από την πρώτη σχολική ηλικία όσο και στην καθημερινότητα για την εξυπηρέτηση ποικίλων αναγκών χάραξης και μέτρησης. Αυτή του η σταθερή χρησιμότητα στο πέρασμα των χρόνων καθιέρωσε τη χρήση του καθιστώντας τον ως πολιτισμικό εργαλείο.

Ωστόσο, παρά τον σημαντικό του ρόλο και την ευρεία χρήση του καταγράφονται σημαντικές δυσκολίες των μαθητών και των μαθητριών. Οι δυσκολίες αυτές συνδέονται με την ερμηνεία των χαρακτηριστικών της φυσικής δομής του τεχνουργήματος καθαυτού, με τον τρόπο διαχείρισής του ώστε να πραγματοποιηθεί αποτελεσματικά μία εργασία (π.χ. χάραξη, μέτρηση κ.λπ.), αλλά και με την απόδοση του αποτελέσματος μίας μέτρησης (Cullen & Barrett, 2010; Tan-Sisman & Aksu, 2016; Solomon, Vasilyeva, Huttenlocher & Levine, 2015), μεταξύ άλλων.

Τα παραπάνω ζητήματα προσελκύουν έντονα το ερευνητικό ενδιαφέρον διεθνώς, με τους ερευνητές να εστιάζουν στον ρόλο του χάρακα κατά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, καθώς και στις απαραίτητες συνθήκες για την αποτελεσματική χρήση του. Έχει καταγραφεί ότι ο χάρακας από μόνος του, ως τεχνούργημα, δεν ορίζει αυτόματα τον τρόπο χρήσης του και τον ρόλο του χρήστη, ούτε οδηγεί αυτόματα στην αποτελεσματική πραγματοποίηση μίας εργασίας. Δεν έχει για όλους τους χρήστες την ίδια αξία. Για να χρησιμοποιήσει κάποιος αποτελεσματικά τον χάρακα για τη χάραξη ή/και τη μέτρηση μήκους, πρέπει πρώτα να εξοικειωθεί με τη φυσική δομή του τεχνουργήματος καθαυτού και με τον σωστό τρόπο που πρέπει να το πιάσει και να το τοποθετήσει ώστε να πραγματοποιήσει μία εργασία.

Η χρήση του χάρακα απαιτεί την ταυτόχρονη αντίληψη της τεχνικής και της εννοιολογικής του διάστασης, οι οποίες ενσωματώνονται στους τρόπους χρήσης του. Για κάποιους χρήστες μπορεί η χρήση του χάρακα να μείνει στην τεχνική διάσταση του τεχνουργήματος, ενώ για άλλους χρήστες μπορεί η χρήση του χάρακα να γίνεται με τέτοιον τρόπο που να λαμβάνει υπόψη την εννοιολογική διάστασή του.

Ο χρήστης είναι αναγκαίο να κατανοήσει τις δυνατότητες του τεχνουργήματος και να αναπτύξει σχέση με αυτό. Το αν θα γίνει αυτό εξαρτάται από το αν ο χρήστης αντιληφθεί τα χαρακτηριστικά του τεχνουργήματος, τα οποία αποκαλύπτονται κατά τη χρήση του στην πράξη, από το αν κατανοήσει τις δυνατότητες του και από το αν ενσωματώσει αυτή την κατανόηση στη δραστηριότητά του (Bartolini Bussi, Corni, Mariani & Falcade, 2012; Bartolini Bussi & Boni, 2003). Από τη στιγμή που ο χρήστης καταστεί ικανός να χρησιμοποιήσει τον χάρακα με τέτοιον τρόπο ώστε να τον προσαρμόσει στις ανάγκες του, να τον ενσωματώσει στη δραστηριότητά του σημαίνει ότι τον έχει μετασχηματίσει σε εργαλείο (Guin & Trouche, 1999). Στη διαδικασία αυτή, γνωστή ως εργαλειακή γένεση (Zbiek, Heid, Blume & Dick, 2007), ο χρήστης κατά την αλληλεπίδρασή του με τον χάρακα αποκτά γνώσεις, οι οποίες μπορεί να τον οδηγήσουν σε διαφορετικό τρόπο χρήσης του, αλλά και σε μορφοποίησή του χάρακα για την εξυπηρέτηση συγκεκριμένων στόχων. Η δημιουργία μαθηματικού νοήματος μέσα από αυτή τη δράση με το τεχνούργημα ολοκληρώνει την εκπαιδευτική του συνεισφορά.

Με αφορμή τις παραπάνω καταγραφές έγινε η υπόθεση ότι αν ο χάρακας είναι λειτουργικό εργαλείο για τους (υποψήφιους και εν ενεργεία) εκπαιδευτικούς τότε θα μπορέσουν να καθοδηγήσουν αποτελεσματικά τους μαθητές τους στην πορεία της μετατροπής του χάρακα-τεχνούργημα στον χάρακα-εργαλείο εξασφαλίζοντας την εξοικείωση με το τεχνούργημα και τη χρήση του, την ερμηνεία του τρόπου λειτουργίας του—αναδεικνύοντας τη διαφοροποίηση μεταξύ τεχνουργήματος και εργαλείου—καθώς και τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος—ως τον πυρήνα της σημειωτικής διαμεσολάβησης (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Με βάση την υπόθεση αυτή σχεδιάστηκε έρευνα με σκοπό τη διερεύνηση του αν ο χάρακας αποτελεί λειτουργικό εργαλείο για μετρήσεις και χαράξεις μεγεθών για τους υποψήφιους και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Καταγράφηκαν και αναλύθηκαν οι τρόποι με τους οποίους αντιλαμβάνονται και αποτυπώνουν τα τεχνικά και εννοιολογικά χαρακτηριστικά του χάρακα, καθώς και αν τα ενσωματώνουν στη δραστηριότητά τους προσαρμόζοντάς τα στις ανάγκες χαράξεων και μετρήσεων. Τα ερωτήματα που τέθηκαν σχετίζονταν με: 1. Την ερμηνεία του τεχνουργήματος καθαυτού και της χρήσης του 2. Τον τρόπο λειτουργίας του τεχνουργήματος 3. Τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος κατά τη χρήση του τεχνουργήματος.

Στο στρογγυλό τραπέζι θα συζητηθούν τα αποτελέσματα της διερεύνησης και θα διατυπωθούν ερωτήματα προς συζήτηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bartolini Bussi, M. & Boni, M. (2003). Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms. *For the Learning of Mathematics, 23*(2), 15-22.

Bartolini Bussi, M. & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 746-783). New York, Routledge.

Bartolini Bussi, M., Corni, F., Mariani, C. & Falcade, R. (2012). Semiotic mediation in mathematics and physics classrooms: Artifacts and signs after a Vygotskian approach. *Electronic Journal of Science Education, 16*(3).

Cullen, C & Barrett, J. (2010). Strategy use indicative of an understanding of units of length. In M. Pinto & T. Kawasaki (eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 181-188). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments. The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Gyulane, R. & Szendrei, J. (2003). Didactic materials: Miracles or harmful drugs? *Proceedings of CIEAEM55, The use of didactic materials for developing pupil's mathematical activities* (pp. 19-20), Poland.

Σκουμπουρδή, Χ. (2021). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών* (Νέα, αναθεωρημένη έκδοση). Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα.

Solomon, T., Vasilyeva, M., Huttenlocher, J. & Levine, S. (2015). Minding the gap: Children's difficulty conceptualizing spatial intervals as linear measurement units. *Developmental Psychology, 51*(11), 1564–1573. https://doi.org/10.1037/a0039 707

Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 411-434). Netherlands: Kluwer, Academic Publishers.

Tan-Sisman, G. & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, 1293-1319. https ://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5

Zbiek, R., Heid, M., Blume, G. & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1169-1207). USA: Information Age Publishing.

Ο ΓΕΩΠΙΝΑΚΑΣ

Χατζηκυριάκου Κώστας

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

kxatzkyr@uth.gr

Ο γεωπίνακας είναι ένα χειραπτικό υλικό για τη διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας, το οποίο επινόησε ο μαθηματικός και παιδαγωγός Caleb Gattegno (1911-1988). Στην πιο συνηθισμένη του εκδοχή πρόκειται για μια επίπεδη ξύλινη ή συχνότερα πια πλαστική επιφάνεια, στην οποία προεξέχουν εικοσιπέντε “καρφάκια” έτσι ώστε να δημιουργείται ένα «πλέγμα» από 16 ίσα τετραγωνάκια. (Φυσικά ο δάσκαλος (ή η δασκάλα), αλλά και ο μαθητής (ή η μαθήτρια) μπορεί να κατασκευάσει εύκολα μεγαλύτερους γεωπίνακες). Τεντώνοντας πολύχρωμα λαστιχάκια κατάλληλα ανάμεσα στα καρφάκια, μπορούμε να ορίσουμε πάνω στον γεωπίνακα ποικιλία σχημάτων.

Στην επιφάνεια του γεωπίνακα μπορούμε

- να φανταστούμε τις πρακτικές των τεχνιτών και πρωτο-γεωμετρών που χειρίζονται σχοινιά στη χωρομέτρηση ή την κατασκευή βωμών
- να αναγνωρίσουμε τις αρχαίες χαρακτικές επιφάνειες των μαθηματικών, την άμμο, το χώμα, τον πηλό, αλλά και τη νεότερη της (λευκής) σελίδας
- να αναγνωρίσουμε ένα τμήμα μιας σελίδας τετραγωνισμένου χαρτιού που προσφέρεται και για πιο αφηρημένη χειρογραφική χρήση.

Με άλλα λόγια, ο γεωπίνακας είναι ένα χειραπτικό υλικό επάνω στο οποίο είναι δυνατό να δούμε ποικίλες σημειωτικές πρακτικές της γεωμετρικής παράδοσης.

Η εξερεύνηση (προβληματικών) καταστάσεων κατέχει κεντρική θέση στην αντίληψη του Gategno για τη μάθηση και είναι φανερό ότι ο γεωπίνακας, ως χειραπτικό υλικό, προσφέρεται ιδιαίτερα για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων με τις οποίες μπορούμε να εξερευνήσουμε τις ιδιότητες διαφόρων επίπεδων σχημάτων, καθώς και την έννοια της μέτρησης της περιμέτρου και του εμβαδού τους.

Στη διεύθυνση https://issuu.com/eswi/docs/1027_geoboard_geometry μπορεί να βρει ο αναγνώστης ένα βιβλιαράκι με (διερευνητικές) δραστηριότητες που μπορεί να γίνουν στον γεωπίνακα και το οποίο ετοίμασε ο ίδιος ο Gattegno.

Με κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, ο μαθητής (ή η μαθήτρια), στην επιφάνεια του γεωπίνακα μπορεί να έρθει σε επαφή με ορισμένες από τις προβληματικές καταστάσεις που αντιμετώπισαν οι άνθρωποι στο παρελθόν τους, να ανακαλύψει (έστω και με καθοδήγηση) τις λύσεις που κατόρθωσαν να δώσουν και να συνειδητοποιήσει τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των εκάστοτε υλικών και νοητικών εργαλείων τους. Με λίγη μόνον ρητορική υπερβολή, ίσως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι με κατάλληλες δραστηριότητες και ερωτήσεις πάνω στον γεωπίνακα (πράγμα του «σημερινού περιβάλλοντος κόσμου» μας) μπορούμε να διατρέξουμε αντίστροφα τη γεωμετρική παράδοση εκκινώντας από την ευκλείδεια μετρική και να καταλήξουμε στα ανθρώπινα πρωτο-ενεργήματα (που γίνονται μέσα στον «προεπιστημονικό-κόσμο-του πολιτισμού»), μέσω των οποίων πρωτο-διαμορφώνονται οι γεωμετρικές ιδεατότητες (κίνηση αναγκαία, κατά τον Χούσερλ της *Προέλευσης της Γεωμετρίας*, στην κατανόηση του νοηματικού μορφώματος «γεωμετρία»).

Τις παρακάτω δραστηριότητες 2 έως και 6, μαζί με την πρώτη, «βιαστικότερα» διατυπωμένη, τις έχω περιγράψει αρκετά χρόνια πριν στην εργασία «Η *ιστορία* στη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος» που παρουσίασα στο 1ο (από τα δεκατρία συνολικά που οργανώθηκαν με την επιστημονική ευθύνη του Δημήτρη Χασάπη) *Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (Θεσσαλονίκη, 8 & 9 Μαρτίου 2002). http://users.uoa.gr/~dchasapis/praktika/1_2002.pdf

Αποσκοπούν στο να βοηθήσουν τον μαθητή και τη μαθήτρια να εννοήσουν

- ότι η μέτρηση εμβαδού είναι καταρχήν γεωμετρική δραστηριότητα, ιδιάζουσα γεωμετρική σύγκριση και ιδιάζων γεωμετρικός «μετασχηματισμός»
- ότι οι τύποι με τους οποίους γίνεται ο υπολογισμός του εμβαδού διαφόρων χωρίων είναι η «αλγεβρική» μορφοποίηση αυτών των δραστηριοτήτων
- ότι είναι δυνατόν να μπορεί να μετρηθεί ακριβώς το εμβαδόν ενός σχήματος, αλλά όχι και η περίμετρός του
- τη σημασία του πυθαγορείου θεωρήματος στη γεωμετρική μέτρηση

αλλά και

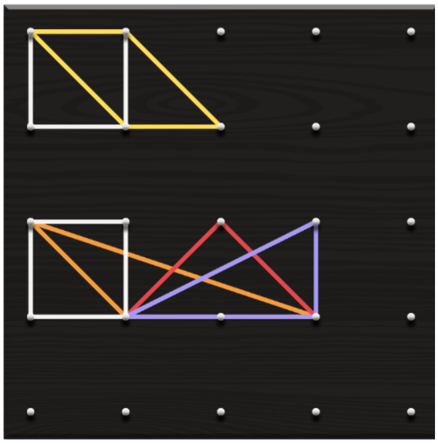
- να προετοιμαστούν για τη θεμελιώδη δραστηριότητα και έννοια του τετραγωνισμού.

Η 7η δραστηριότητα προστέθηκε αργότερα και, φέρνοντας σε επαφή τον μαθητή (ή τη μαθήτρια) με το όμορφο θεώρημα που απέδειξε το 1899 ο

Alexander Pick (1859-1942), δείχνει τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η μαθηματική παράδοση μέσω της ίδιας της ερωτηματοθεσίας της.

Ορίζουμε στον γεωπίνακα μοναδιαίο τετράγωνο Τ που έχει πλευρά το μοναδιαίο μήκος μ που είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο γειτονικά (οριζοντίως ή καθέτως) καρφάκια.

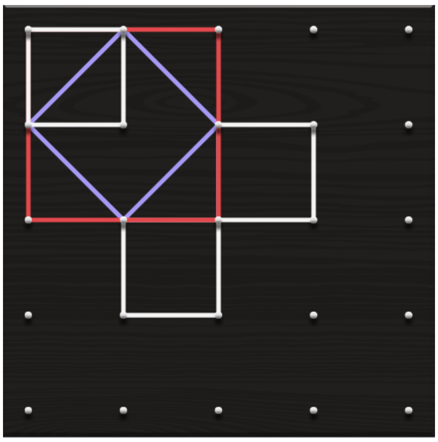
1η δραστηριότητα. Μπορείς να ορίσεις (τριγωνικές, παραλληλόγραμμες, τραπεζοειδείς, «τυχούσες») περιοχές που καταλαμβάνουν την ίδια με το Τ έκταση; Διπλάσια, τριπλάσια, τετραπλάσια έκταση από εκείνη του Τ; Μπορείς να ορίσεις περιοχή που καταλαμβάνει τη μισή έκταση του Τ. Λέμε ότι οι περιοχές αυτές έχουν εμβαδόν 2, 3, 4 κ.λπ και αντίστοιχα $\frac{1}{2}$. Μπορείς να μετρήσεις πόσες φορές χωρά ακριβώς το μ στην περίμετρο κάθε περιοχής που όρισες;



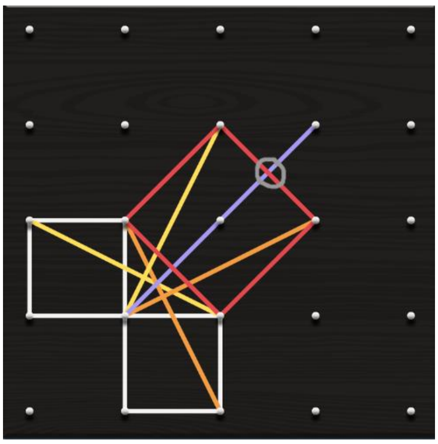
Περιοχές με εμβαδόν 1

2η δραστηριότητα. Μπορείς να ορίσεις τετραγωνικές περιοχές με εμβαδόν 4, 9 και 16;

3η δραστηριότητα. Μπορείς να ορίσεις τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν 2; Με εμβαδόν 8;

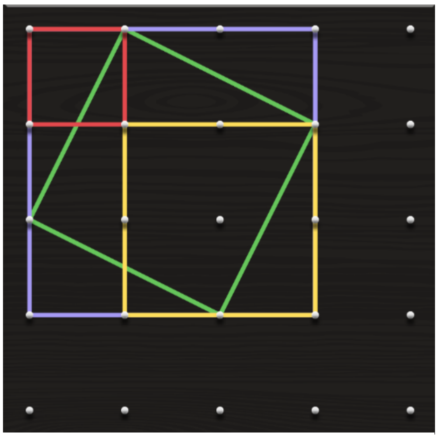


Η λύση στις Σουλβασούτρες & στον Μένωνα



Η απόδειξη στον Ευκλείδη

4η δραστηριότητα. Μπορείς να ορίσεις τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν 5 (= 4 +1); Με εμβαδόν 10 (= 9 +1);



Η κινεζική απόδειξη

5η δραστηριότητα. Γενικά, αν σου δώσω τετραγωνικές περιοχές με εμβαδόν Α, Β, αντίστοιχα, σε χαρτί μιλιμετρέ, μπορείς να σχηματίσεις τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν Α + Β;

6η δραστηριότητα. Μπορείς να ορίσεις τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν 3;

7η δραστηριότητα. Μέτρησε τα καρφάκια που βρίσκονται στο εσωτερικό, και πάνω στην περίμετρο οποιασδήποτε περιοχής έχεις ορίσει ως τώρα. Αν βρήκες Ε καρφάκια στο εσωτερικό της και Σ καρφάκια στην περίμετρό της, σύγκρινε τον αριθμό $Ε + \frac{Σ}{2} - 1$ με το εμβαδόν της περιοχής που όρισες. Μπορείς να διατυπώσεις μιαν εύλογη εικασία; [Ο αριθμός αυτός εκφράζει το εμβαδόν της περιοχής.]

Το παραπάνω πακέτο «ενορχηστρωμένων» δραστηριοτήτων μπορεί να δοθεί τόσο στην τελευταία τάξη του Δημοτικού όσο και στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Στο πλαίσιο κάθε δραστηριότητας, η διερεύνηση (μαθηματική, ιστορική, πολιτισμική) μπορεί να προχωρά βαθύτερα καθώς η εκπαιδευτική βαθμίδα μεγαλώνει.

Στην τρίτη δραστηριότητα, λόγου χάρη, η λύση που υποδεικνύει η τοποθέτηση του μωβ τετραγώνου στο εσωτερικό του κόκκινου είναι η λύση που σχετίζεται με το πρόβλημα του τελετουργικού διπλασιασμού της τετραγωνικής επιφάνειας των βωμών σε αρχαίους πολιτισμούς (βλ. *A. Seidenberg, The Ritual Origin of Science, Archive for History of Exact Sciences, 1, 488-567, (1961)* και https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Indian_sulbasutras/). Είναι ωστόσο και η λύση που συζητά ο Σωκράτης με τον δούλο στον πλατωνικό διάλογο *Μένων*. Η περίφημη αυτή σκηνή είναι παράδειγμα καθοδηγούμενης μάθησης και η επιχειρηματολογία του Σωκράτη μπορεί να αναπαρασταθεί στον γεωπίνακα. Με αφορμή την ευκλείδεια λύση (δεξιός γεωπίνακας) μπορεί να συζητηθούν ενδιαφέροντα ζητήματα αναπαράστασης (το σημείο τομής που σημειώνεται δεν αντιστοιχεί σε καρφάκι) που σχετίζονται τόσο με την 1η όσο και με την 6η δραστηριότητα και εντέλει με τις βαθιές έννοιες των ασύμμετρων μεγεθών, των άρρητων αριθμών και των μεταξύ τους σχέσεων.

Στην τέταρτη δραστηριότητα η λύση στον αριστερό γεωπίνακα είναι η λύση που βρίσκουμε στην κινεζική *Κλασική Αριθμητική του γνώμονα και των κυκλικών διαδρομών των ουρανίων σωμάτων*.

Τέλος, οι εικόνες που συνοδεύουν το κείμενο έγιναν με τη βοήθεια της εφαρμογής geoboard του https://www.mathlearningcenter.org. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα προς συζήτηση είναι το πώς σχετίζεται η διδασκαλία και η μάθηση με τη βοήθεια του χειραπτικού υλικού με τη διδασκαλία και τη μάθηση που μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της ψηφιακής προσομοίωσής του.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΝΟΗΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ CHOICO

Σωτηρόπουλος Σπυρίδων

Ιδιώτης Μαθηματικός, MSc

spiros-sot@hotmail.com

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα πιθανοτήτων είναι πολλές. Αυτό οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές διδάσκονται τις πιθανότητες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Μια νέα οπτική στο πρόβλημα έρχεται να δώσει η διερεύνηση των νοημάτων που δημιουργούν οι μαθητές για τις έννοιες πιθανοτήτων με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων, εστιάζοντας στην χρήση πραγματικών δεδομένων από την καθημερινή ζωή καθώς οι μαθητές παίζουν ένα ψηφιακό παιχνίδι αποφάσεων με αβέβαιες συνέπειες στο ασφαλές περιβάλλον ChoiCo. Με τη χρήση του θεωρητικού δομήματος της μάθησης μέσω ψηφιακών παιχνιδιών αναζητούμε τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές για τις έννοιες πιθανοτήτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

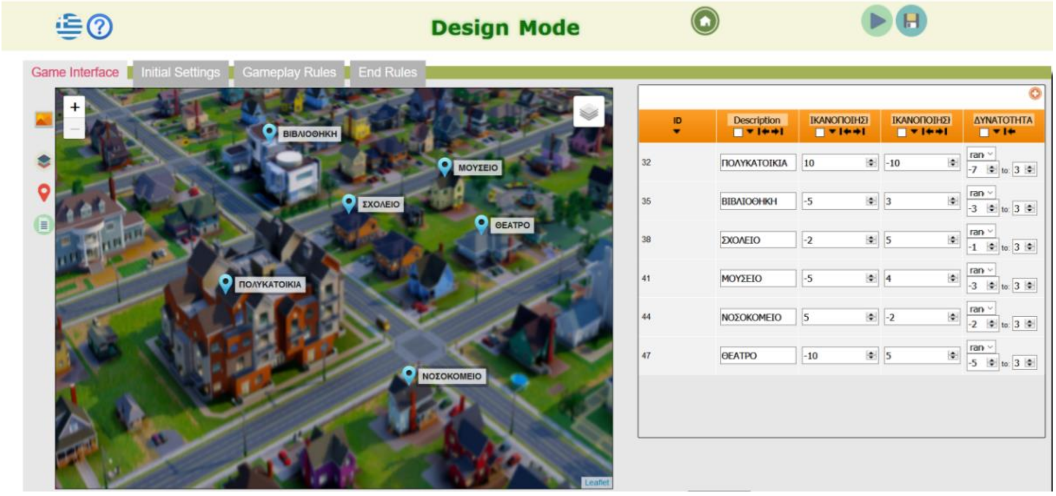
Οι πιθανότητες είναι ένα πολύπλοκο γνωστικό πεδίο για την διδασκαλία των Μαθηματικών, το οποίο συνδυάζει διάφορα είδη αναπαραστάσεων στατικών αλλά και δυναμικών. Ένα λογισμικό λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας που φέρουν γνωστές και άγνωστες συνέπειες καθώς και ένα πολύπλοκο και προκλητικό πρόβλημα του οποίου η λύση χρειάζεται συλλογή και επεξεργασία δεδομένων για τη λήψη αποφάσεων και σχεδιασμό και επανασχεδιασμό στρατηγικής ανάλογα με τις συνέπειες της κάθε απόφασης, αποσκοπεί στην ανάδειξη των συνδέσεων ανάμεσα στη διδακτική πιθανοτήτων και τα ψηφιακά παιχνίδια εστιάζοντας στην χρήση πραγματικών δεδομένων από την καθημερινή ζωή καθώς οι μαθητές παίζουν ένα ψηφιακό παιχνίδι αποφάσεων με αβέβαιες συνέπειες στο ασφαλές περιβάλλον ChoiCo. Μέσα από το παιχνίδι επιδιώκεται η ανάδειξη των διαδικασιών με τις οποίες οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στις πιθανότητες για να λάβουν αποφάσεις με συνέπειες που διαμορφώνουν την εξέλιξη του παιχνιδιού, αξιολογώντας τα δεδομένα που τους παρέχονται. Στόχος είναι να αναδειχθούν, υπό το πρίσμα της δημιουργίας προσωπικών νοημάτων, αντιλήψεις για τον ορισμό της πιθανότητας πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου ως κλάσμα με τον κλασικό ορισμό αλλά και ως ποσοστό.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι πιθανότητες είναι ένα πεδίο των μαθηματικών με περιεχόμενο που είναι εξολοκλήρου νέο. Η διδασκαλία των πιθανοτήτων κρίνεται απαραίτητη κυρίως λόγω των εφαρμογών σε δραστηριότητες εκτός των μαθηματικών και του διαφορετικού «τρόπου σκέψης» που απαιτεί σε σχέση με τα άλλα μαθηματικά πεδία. Παρόλο που η έννοια της πιθανότητας είναι συνυφασμένη με τον κόσμο που ζούμε, οι ψυχολόγοι Tversky και Kahneman (1974) υποστηρίζουν ότι κατά τη λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας, οι μαθητές δείχνουν να μην ακολουθούν τις αρχές της θεωρίας των πιθανοτήτων με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε «σοβαρά και συστηματικά λάθη». Οι Borovcnik και Bentz (1991), προτείνουν ότι η παραδοσιακή διδασκαλία των πιθανοτήτων δημιουργεί πολύ λίγες συνδέσεις μεταξύ των αρχικών ιδεών (αντιλήψεων) του μαθητή και της μαθηματικής θεωρίας. Προτείνουν ότι η διδασκαλία πρέπει να αρχίσει από τις αρχικές διαισθήσεις του μαθητή, προσπαθώντας να τις αλλάξει και να τις αναπτύξει. Ο Borovcnik (2011) επισημαίνει ότι μια λογική προσέγγιση σκέψης αλλά και μια αιτιώδης προσέγγιση σκέψης είναι συμβατές στο διαισθητικό επίπεδο, και ότι η διδασκαλία πρέπει να αναπτύξει τις δευτερεύουσες διαισθήσεις που διευκρινίζουν πώς η πιθανολογική σκέψη συσχετίζεται με αυτές τις προσεγγίσεις. Ο Fischbein (1975) πιστεύει ότι τα διαισθητικά μοντέλα αποτελούν την αφετηρία για την οικοδόμηση της γνώσης στις έννοιες των πιθανοτήτων. Ορίζει ως διαισθητικό μοντέλο τη γνώση που εμφανίζεται υποκειμενικά ως αυταπόδεικτη, η οποία είναι άμεσα αποδεκτή από το άτομο και θεωρείται ολιστική και έμμεσα καταναγκαστική. Οι Pratt και Noss (2002) βρήκαν ότι οι διαισθητικές αντιλήψεις των υποκειμένων επηρεάζονται από τα βιώματα τους και διάφορα πραγματικά αποτελέσματα, όπως τη ρίψη ενός ζαριού και μπορούν να ανιχνευθούν είτε μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες παρεμβάσεις είτε σε συνθήκες λήψης απόφασης υπό αβεβαιότητα (Pratt, 2001). Αντίθετα, η ενασχόληση και αλληλεπίδρασή με ένα λογισμικό πιθανοτήτων έχει ως αποτέλεσμα να εναρμονίσουν τις παλιές τους αντιλήψεις με νέες που προήλθαν από την αλληλεπίδρασή τους με τις δυναμικές αναπαραστάσεις του λογισμικού (Pratt, 2000).

ΤΟ CHOICO ΩΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΜΑΘΗΣΗΣ

Το εκπαιδευτικό περιβάλλον ChoiCo (Choices with Consequences) πρόκειται για ένα ελεύθερο διαδικτυακό λογισμικό που υποστηρίζει το παίξιμο, τον σχεδιασμό και την τροποποίηση ψηφιακών παιχνιδιών προσομοίωσης καθοδηγούμενων από επιλογές, από μαθητές και εκπαιδευτικούς (Kynigos & Yiannoutsou, 2018). Έχει κατασκευαστεί από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας του Πανεπιστημίου Αθηνών. Στα παιχνίδια ChoiCo, ο παίχτης περιφέρεται γύρω από επιλογές βασισμένες πάνω στον χάρτη του παιχνιδιού, τις εξετάζει ως προς τις συνέπειες τους και κάνοντας επιλογές οι οποίες επηρεάζουν τις παραμέτρους του παιχνιδιού. Στόχος του παίχτη είναι να μείνει στο παιχνίδι όσο περισσότερο μπορεί. Τέλος διαθέτει προγραμματισμό με



Εικόνα 1. Το εκπαιδευτικό περιβάλλον ChoiCo

Block (Block-based programming) για να προγραμματιστούν οι κανόνες του παιχνιδιού (Grizioti and Kynigos, 2019). Με το λογισμικό αυτό ο χρήστης μπορεί είτε να παίξει, είτε να σχεδιάσει ψηφιακά παιχνίδια προσομοίωσης που βασίζονται στις επιλογές με επιπτώσεις (choice driven simulation games) (Yiannoutsou, Kynigos & Daskolia, 2014). Μέσα από το παιχνίδι οι μαθητές μαθαίνουν να λειτουργούν συνεργατικά, να μοιράζονται και να επικοινωνούν αποτελεσματικά (De Lope, Medina-Medina, Paderewski, & Gutierrez-Vela, 2015). Οι ευκαιρίες για συνεργασία κατά τη μάθηση είναι αρκετές καθώς οι μαθητές μπορούν να συζητούν με άλλους μαθητές τη στρατηγική που ακολούθησαν μέσα στο παιχνίδι ή ακόμα τον τρόπο με τον οποίο νίκησε ή έχασε κάθε παίχτης (Resnick et al, 2009). Η μάθηση μέσα από παιχνίδι (Game Based Learning),(Prensky, 2001) ορίζεται ως η διαδικασία όπου χρησιμοποιούνται οι εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές παίζοντας παιχνίδια ως εργαλεία μάθησης (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2009). Μέσω των παιχνιδιών, αυξάνονται τα κίνητρα για μάθηση, ενισχύονται μία σειρά από δεξιότητες των μαθητών, αλλά και η δημιουργικότητά τους (Φωκίδης κ.αλ., 2018). Η οργάνωση της μαθηματικής γνώσης δεν εξαρτάται μόνο από το σύνολο των νοημάτων που οικοδομεί ο ανθρώπινος νους, αλλά και από τους στόχους για τους οποίους τα νοήματα αυτά οικοδομούνται. Το περιβάλλον στο οποίο οικοδομείται η γνώση παίζει βασικό ρόλο στα γνωστικά σχήματα που δημιουργούνται, με αποτέλεσμα αυτά να είναι άμεσα συνδεδεμένα με αυτό (Kynigos, 2015). Οι πιθανότητες δεν έχουν μόνο την θεωρητική προσέγγιση με υπολογισμούς τύπων αλλά και την πειραματική προσέγγιση. Αυτές οι δύο προσεγγίσεις και οι συνδέσεις τους καθώς και η φιλοσοφία που διέπει τη κάθε προσέγγιση, δεν είναι εύκολο να αναπτυχθούν με τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό, οπότε μέσα από το παιχνίδι θα γίνουν αντικείμενο συζήτησης (Borovcnik, Kapadia, 2014). Ο συνδυασμός εργαλείων όπως η δυνατότητα πραγματοποίησης μεγάλου αριθμού πειραμάτων τύχης, ανάλυση και σύνοψη των πειραματικών δεδομένων με τη βοήθεια πολλαπλών αναπαραστάσεων (Νικηφορίδου, 2011), χρησιμοποιούνται σε δυναμικά περιβάλλοντα διδασκαλίας και αλληλεπίδρασης που βασίζονται στις νέες τεχνολογίες, μπορεί να προσφέρει χρήσιμες εμπειρίες για τις πιθανότητες που έχουν νόημα για τα παιδιά (Grizioti, Kynigos, 2018).

Η ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Κύριος σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αναδειχθούν υπό το πρίσμα της δημιουργίας προσωπικών νοημάτων, αντιλήψεις για τον ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου ως κλάσμα με τον κλασικό ορισμό αλλά και ως ποσοστό. Τα δεδομένα της έρευνας προέρχονται από έξι (6) μαθητές του Δεύτερου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του σχολείου αυτού, ήταν η φοίτηση παιδιών εξοικειωμένα με τις νέες τεχνολογίες, κάτι που διευκόλυνε την εμπλοκή των μαθητών στην εξέλιξη της ερευνητικής διαδικασίας. Το παιδαγωγικό πλάνο που σχεδιάστηκε πραγματοποιήθηκε σε μια τάξη του Δεύτερου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών, η οποία ήταν εξοπλισμένη με δύο (2) φορητούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Η διάρκεια της έρευνας ήταν έξι (6) διδακτικές ώρες και πραγματοποιήθηκε σε πραγματικές σχολικές συνθήκες, στις 29 Οκτωβρίου και στις 5 Νοεμβρίου του ακαδημαϊκού έτους 2019 – 2020. Πρόκειται για μια έρευνα σχεδιασμού, σχετίζεται άμεσα με την διερεύνηση και αξιολόγηση της συνεισφοράς και του ρόλου ειδικά σχεδιασμένων υπολογιστικών εργαλείων σε θέματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, λαμβάνοντας υπ’ όψιν κάθε πιθανή παράμετρο που επηρεάζει τη μαθησιακή διαδικασία (Cobb et al., 2003). Το κύριο εργαλείο της έρευνας ήταν ένα ψηφιακό παιχνίδι με τίτλο e-game, όπου ο μαθητής καλείται να αναλάβει τον ρόλο του δημάρχου μιας πόλης και να κτίσει κτήρια, τα οποία θα εξυπηρετούν τις ανάγκες των άστεγων συμπολιτών του ή αυτές των ήδη στεγασμένων συμπολιτών του, οι οποίες όμως διαφέρουν μεταξύ τους. Ο στόχος του παιχνιδιού είναι να αυξήσει όσο μπορεί την δυνατότητα επανεκλογής του, που επηρεάζεται με τρόπο τυχαίο. Οι τρεις παράμετροι του παιχνιδιού είναι η ικανοποίηση των δύο ομάδων και η δυνατότητα επανεκλογής του δήμαρχου. Ο παίχτης χάνει εάν η ικανοποίηση της μιας ομάδας καταλήξει κάτω από μια τιμή και κερδίζει το παιχνίδι εάν η δυνατότητα επανεκλογής φτάσει πάνω από μια συγκεκριμένη τιμή. Πλούσια πηγή ερευνητικών δεδομένων στην έρευνα αυτή αποτέλεσε το διερευνητικό λογισμικό ChoiCo, εφοδιασμένο παράλληλα με το λογισμικό αποθήκευσης ήχου και εικόνας HyperCam2.

Δόθηκε παράλληλα ένα φύλλο εργασίας όπως φαίνεται παρακάτω:

Ο χρόνος της προεκλογικής μάχης είναι περιορισμένος και οι εκλογές πλησιάζουν. Έχετε 6 κινήσεις. Προσπαθήστε να αυξήσετε περισσότερο τις πιθανότητες επανεκλογής σας.

Ποιο είναι το πιο ευνοϊκό σενάριο ως προς το χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής»;

Στην επιλογή 'πολυκατοικία', ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 στο χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής» ;

Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 σε κάθε μια επιλογή στο χαρακτηριστικό «δυνατότητα επανεκλογής» ;

Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 3 και στις δέκα επιλογές μέσα στο παιχνίδι; Θεωρείτε ότι έχει κάποια σχέση με την πιθανότητα επιτυχίας του πειράματος τύχης;

Εικόνα 2. Το φύλλο εργασίας

Καθοριστικό ρόλο κατά την εξαγωγή συμπερασμάτων στην ερευνητική αυτή μελέτη έπαιξαν οι προσωπικές σημειώσεις του ερευνητή κατά τη διάρκεια του πειράματος, οι οποίες επεφύλασσαν μια συνολική εικόνα για την εμπλοκή των μαθητών. Για την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων ο ερευνητής εστίασε, στην αλληλεπίδραση των μαθητών με τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις και λειτουργικότητες του νέου αυτού διερευνητικού νοητικού εργαλείου, καθώς και στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων και την ανάπτυξη νέων γνωστικών σχημάτων από τη σκοπιά των μαθητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές παίζοντας το παιχνίδι e-game, αρχικά ελεύθερα, για να εξοικειωθούν με τους μηχανισμούς του προγράμματος και του παιχνιδιού και έπειτα με ερωτήσεις που σχετίζονταν άμεσα με το παιχνίδι και τις πιθανότητες, ανέπτυξαν διάφορες στρατηγικές με σκοπό να απαντήσουν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. Οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε δύο ομάδες των τριών ατόμων και ο κάθε μαθητής έπαιζε το παιχνίδι ενώ οι άλλοι δύο συζητούσαν τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουν. Οι μαθητές κατάλαβαν ότι εφόσον δεν μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, καθώς υπάρχουν πολλοί παράγοντες που το καθορίζουν, τότε αυτό είναι πείραμα τύχης. Οι μαθητές όταν έπαιξαν το παιχνίδι τις πρώτες δύο φορές απλώς πατούσαν τα διάφορα κτίρια για να καταλάβουν πώς παίζεται το παιχνίδι. Έχοντας ως σημείο αναφοράς τις αρχικές τιμές του παιχνιδιού οι μαθητές άρχισαν να συνεργάζονται με σκοπό να νικήσουν το παιχνίδι, να αναπτύσσουν στρατηγικές και να κάνουν εικασίες. Ενδιαφέρον είχε ότι οι μαθητές επεξεργάζονταν τα δεδομένα του παιχνιδιού για τον κάθε τύπο κτιρίου πριν λάβουν μια απόφαση αξιολογώντας το ρίσκο της κάθε απόφασης. Μετά από κάποιες δοκιμές οι μαθητές κατέληξαν σε κάποια στρατηγική που ήταν ωφέλιμη για να παρατηρήσουν με ποιες τιμές νίκησαν το παιχνίδι ή έχασαν αντίστοιχα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσέγγιση μιας εκ των δύο ομάδων, η οποία προσπάθησε επιλέγοντας κάθε φορά να χτίζουν μόνο έναν τύπο κτιρίου, να μελετήσει με ποιες τιμές θα χάσει.

Μαθητής 5 Προσπαθούμε να πετύχουμε ισορροπία μεταξύ αστέγων και στεγασμένων και να μεγιστοποιήσουμε τη δυνατότητα επανεκλογής.

Μαθητής 3 Χάσαμε με 110 18 59.

Μαθητής 2 Επιλέξαμε κάθε κτίριο;

Μαθητής 1 Ναι.

Ερευνητής Γιατί προσπαθήσατε να χάσετε;

Μαθητής 3 Για να δούμε με ποιες τιμές χάσαμε. Αυτό είναι το νόημα σε αυτό το παιχνίδι, να χάσεις για να καταλάβεις πως λειτουργεί.

Μαθητής 6: Η διαφορά πρέπει να είναι πάντα, περίπου 20 μεταξύ των δύο ομάδων όπως στις αρχικές τιμές του παιχνιδιού.

Μαθητής 5: Πρέπει πρώτα να βάζουμε κτίρια που ευνοούν την μια ομάδα και μετά κτίρια που ευνοούν την άλλη. Το σχολείο και το νοσοκομείο είναι καλές επιλογές.

Μαθητής 1: Ένα ευνοϊκό σενάριο είναι να διατηρείς την ισορροπία μεταξύ των δύο ομάδων. Η πολυκατοικία χρησιμοποιείται μόνο εάν η διαφορά των δύο ομάδων είναι μεγάλη.

Μαθητής 3: Να επιλέγεις μόνο το σχολείο, αυξάνει την πιθανότητα επανεκλογής περισσότερο από ότι τα υπόλοιπα. Είναι η λιγότερη αρνητική μονάδα.

Ερευνητής: Γιατί θεωρείτε να κτίζεις μόνο το νοσοκομείο και το σχολείο ως τα καλύτερα σενάρια;

Μαθητής 4: Γιατί εξυπηρετεί και τις δύο ομάδες.

Μαθητής 3: Γιατί η δυνατότητα επανεκλογής είναι από -1 έως 3 ενώ στα άλλα κτίρια ξεκινάει από πιο παρακάτω.

Ερευνητής: Υπάρχει κάτι κοινό στα διάφορα κτίρια όσον αφορά τη δυνατότητα επανεκλογής;

Μαθητής 1: Ναι, δεν ανεβαίνει πάνω από 3.

Μαθητής 2: Το 3 είναι το καλύτερο νούμερο που μπορεί να τύχει.

Μαθητής 4: Σε όλα τα κτίρια το καλύτερο είναι 3, άρα αυτό είναι το πιο καλό σενάριο.

Ερευνητής: Πιο θεωρείτε λοιπόν το πιο ευνοϊκό σενάριο αν μπορούσε να πραγματοποιηθεί;

Μαθητής 4: Το σχολείο που είναι από -1 έως 3, ως αυτό που έχει το λιγότερο αρνητικό.

Καθηγητής: Λες δηλαδή, ότι το σχολείο είναι η πιο ασφαλής επιλογή. Αν καταφέρνατε και στις 10 επιλογές να φέρετε μόνο 3, θα ήταν αυτό το πιο ευνοϊκό σενάριο;

Μαθητής 3: Ναι, γιατί δεν μπορεί να τύχει κάτι μεγαλύτερο από 3, άρα είναι το καλύτερο.

Οι μαθητές στην προσπάθεια τους να βρουν την πιο ευνοϊκή στρατηγική ώστε να αυξήσουν τις πιθανότητες επανεκλογής του δημάρχου, οδηγήθηκαν μέσω της συζήτησης με τον ερευνητή και τον διδάσκοντα στην θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας και στην πειραματική προσέγγιση, χωρίς τη χρήση τυπικού ορισμού. Μέσα από το παιχνίδι και τα επιχειρήματα των μαθητών φαίνεται ότι χρησιμοποιούν τις πιθανότητες για να προβλέψουν πριν τη δοκιμή του παιχνιδιού τι θα γίνει και τα δεδομένα που προκύπτουν μετά από κάθε επιλογή μέσα στο παιχνίδι για να βρουν το πιο ευνοϊκό σενάριο. Σε αυτό το απόσπασμα που ακολουθεί το ενδιαφέρον είναι η προσπάθεια σύνδεσης της πειραματικής προσέγγισης της πιθανότητας και της θεωρητικής προσέγγισης.

Ερευνητής: Βρήκατε όλοι κάποιο ευνοϊκότερο σενάριο. Πόσες φορές παίξατε το παιχνίδι για να βεβαιωθείτε ότι είναι αυτό;

Μαθητής 2: Περίπου δέκα φορές.

Μαθητής 1: Παραπάνω. Την προηγούμενη φορά είχαμε βρει μια πιθανότητα να έρθει το καλύτερο, άρα πρέπει να δοκιμάσουμε το παιχνίδι τουλάχιστον τόσες φορές και παραπάνω.

Ερευνητής: Εννοείς, να δοκιμάσουμε το παιχνίδι τόσες φορές όσο είναι η τιμή της πιθανότητας που βρήκαμε να έρθει μόνο 3 και τις 6 φορές.

Μαθητής 1: Ναι, αλλά ποτέ δεν θα είμαστε σίγουροι.

Ερευνητής: Η πιθανότητα όμως που βρήκαμε είναι ένα νούμερο μεταξύ του 0 και του 1, δεν είναι ακέραιος. Δεν μπορείς να παίξεις το παιχνίδι.

Μαθητής 1: Εννοώ τον αριθμό του παρονομαστή.

Καθηγητής: Λες ότι αν παίξουμε το παιχνίδι όσες φορές λέει ο παρονομαστής και νικήσουμε είμαστε σίγουροι.

Μαθητής 1: Πάλι δεν είμαστε εντελώς σίγουροι.

Καθηγητής: Γιατί;

Μαθητής 1: Γιατί μπορεί να μην τύχει καθόλου να έρθουν μόνο οι ελάχιστες τιμές.

Μαθητής 4: Έξι φορές.

Μαθητής 5: Για να είμαστε σίγουροι 10 φορές.

Μαθητής 6: Εφόσον είναι ισοπίθανοι αριθμοί, πρέπει να παίξουμε το παιχνίδι τόσες φορές όσες και οι αριθμοί που μπορεί να τύχουν. Δηλαδή 6*8=48 φορές.

Μαθητής 3: Εγώ λέω 10 φορές, γιατί είναι οκτώ οι αριθμοί και άλλες δύο φορές για σιγουριά.

Μαθητής 4: Τα παιχνίδια όταν δημιουργούνται δίνονται να τα δοκιμάσουν από διαφορετικούς ανθρώπους, γιατί ο καθένας έχει διαφορετική σκέψη. Οπότε δεν μπορούμε να βάλουμε συγκεκριμένο αριθμό, αλλά να το δώσουμε να το δοκιμάσουν όσες φορές θέλουν και να δούμε αν κάποιος θα χάσει. Αυτό δεν γίνεται με 6 άτομα που είμαστε εδώ.

Το παραπάνω απόσπασμα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον καθώς οι μαθητές αιτιολογούν με πόσες δοκιμές του παιχνιδιού θα βεβαιώνονταν ότι η τιμή 3 θα εμφανισθεί σε κάθε επιλογή που κάνουν στο παιχνίδι. Οι μαθητές εξέφρασαν αντιλήψεις για τις πιθανότητες και την αβεβαιότητα που σχετίζονται με τα μαθηματικά. Φάνηκε ότι οι μαθητές όταν κάνουν μια εικασία για την τυχαιότητα, την ελέγχουν πειραματικά, ωστόσο επικρατεί η θεωρητική προσέγγιση της πιθανότητας που έχουν διδαχθεί. Όταν τα αποτελέσματα της πειραματικής μεθόδου δεν συνάδουν με αυτά που προκύπτουν από υπολογισμούς των μαθητών, οι μαθητές δεν θεωρούν ότι έχουν κάνει λάθος υπολογισμούς αλλά θεωρούν ότι υπάρχει λάθος στα αποτελέσματα των πειραμάτων τους.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνας που επικεντρώθηκαν και στις δύο ομάδες μας παρέχουν στοιχεία για τον τρόπο που οι μαθητές σε ένα ψηφιακό μαθησιακό περιβάλλον κατασκευάζουν προσωπικά νοήματα για τις πιθανότητες, την επινόηση στρατηγικών και τη λήψη αποφάσεων με αξιολόγηση ρίσκου στη λύση ενός καθόλου προφανούς προβλήματος. Κεντρική θέση κατά τη διερεύνηση, είχε η προσπάθεια των μαθητών να συνδέσουν την θεωρητική με την πειραματική προσέγγιση της πιθανότητας. Η σύνδεση των δύο αυτών προσεγγίσεων της έννοιας της πιθανότητας επιτεύχθηκε μέσα από τη διερεύνηση της έννοιας της πιθανότητας ως πρόβλεψη αποτελεσμάτων πριν παιχτεί το παιχνίδι και ως συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, μια δυνατότητα που τους παρείχε εξ' ολοκλήρου το λογισμικό ChoiCo μέσω των αναπαραστάσεων των δεδομένων και της συνεχούς ανατροφοδότητσης μετά από κάθε επιλογή του παίχτη. Το ChoiCo προκαλεί τους μαθητές να πειραματιστούν καταφέρνοντας με τον τρόπο αυτό να γενικεύσουν εμπειρικά τις πρωταρχικές τους εικασίες που αφορούν την έννοια της πιθανότητας. Ο περιορισμός της έρευνας ήταν ο μικρός χρόνος που υπήρχε και ότι δεν κατέστη δυνατόν να επαναληφθεί το πείραμα τύχης ξανά με άλλες ομάδες μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. *Batanero C, Burrill G, Reading C (eds). Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education*. A joint ICMI/IASE study New York: Springer, pp 71-83.

Borovcnik, M., and Bentz, H. J. (1991). *Empirical Research in Understanding Probability, in Chance Encounters: Probability in Education*. R. Kapadia and M. Borovcnik (Eds.)., The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. *E. J Chernoff & B. Sriraman, (Eds.), Probabilistic thinking: presenting plural perspectives (pp. 7–34).* New York: Springer.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, Vol. 32, No. 1, 9-13.

De Lope, Medina-Medina, Paderewski, & Gutierrez-Vela, (2015). Design methodology for educational games based on interactive screenplays. Design methodology for educational games based on interactive screenplays. *CEUR Workshop Proceedings. 1394*

Fischbein, E. (1975). The intuitive source of probability thinking in children. *Dordrecht, The Netherlands: Reidel.*

Grizioti M, Kynigos, C. (2018). Game Modding for Computational Thinking: An Integrated Design Approach. *Proceedings of the 2018 Conference on Interaction Design and Children. ACM, 2018*

Grizioti M, Kynigos, C. (2019). Collaborative Modding of a Simulation Game: An Approach to the Development of Computational Thinking. *Proceedings of the 13th International Conference on Game Based Learning.*

Kynigos, C. (2015). *Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?* S. J. Cho (Eds.), Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design? (pp. 417- 438). Springer International Publishing.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in mathematics Education, 31(5), 602–625.*

Pratt, D. (2001). Probability and Randomness. *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*, 1(3), ch.9, 140-150

Pratt, D., Noss, R. (2002). The Micro-Evolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. *Journal of the Learning Sciences*, 11(4), 453-488.

Prensky, M. (2001). *Digital game-based learning.* New York: McGraw-Hill.

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., ... ,& Kafai, Y. (2009). *Scratch: programming for all. Communications of the ACM, 52(11), 60-67.*

Tversky A., Kahneman D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. Science, 185(4157), 1124–1131.

Yiannoutsou N., Kynigos C. and Daskolia M. (2014). Constructionist Designs in Game Modding: The case of learning about Sustainability, *Proceedings of Constructionism (2014). 19-23*

Νικηφορίδου, Ζ. (2011). Η χρήση των Νέων Τεχνολογιών στη διερεύνηση της αντίληψης και την αξιοποίηση εννοιών των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών σε μικρά παιδιά: η έννοια του ρίσκου. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2009). Ο ρόλος του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση: ανταγωνιστικές στάσεις και ψευδαίσθηση ομοθυμίας. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση,* 47, 138-154.

Φωκίδης, Ε., Ατσικπάση, Π., Καϊμάρα, Π., & Δεληγιάννης, Ι. (2018). Ψηφιακά εκπαιδευτικά παιχνίδια. Μία κριτική θεώρηση των αποτελεσμάτων των ερευνητικών παρεμβάσεων της πρωτοβουλίας ETiE: *Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου και Διεθνούς Συνεδρίου «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση», Θεσσαλονίκη(2018).*

ΠΩΣ ΟΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΕΡΜΗΝΕΥΟΥΝ ΤΑ ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΥΜΒΑΝΤΑ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΕΜΠΕΙΡΙΩΝ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Σούραλης Χρήστος

Υποψήφιος Διδάκτορας στη Διδακτική των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

c.souralis@gmail.com

Η παρατήρηση είναι μια επαγγελματική ικανότητα κατά την οποία ο εκπαιδευτικός εντοπίζει, ερμηνεύει και ανταποκρίνεται στα κρίσιμα συμβάντα της διδασκαλίας. Η έρευνα εστιάζει στο τι εντοπίζουν οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί και πως το ερμηνεύουν εμβαθύνοντας στην ανάλυση της επιχειρηματολογίας με αναλυτικά εργαλεία όπως το σχήμα Toumlin, τις πηγές και την μορφή επιχειρηματολογίας. Κυρίως εντοπίζονται συμβάντα που αφορούν κάποια δυσκολία των μαθητών και ερμηνεύονται ως έλλειψη κατανόησης. Οι πηγές των επιχειρημάτων δείχνουν την επιρροή του μαθήματος της πρακτικής στην ανάπτυξη της ικανότητας της παρατήρησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κρίσιμο συμβάν (Potari & Psycharis, 2018) είναι μια μονάδα ανάλυσης της διδασκαλίας. Περιγράφει ένα στιγμιότυπο του μαθήματος στο οποίο εμφανίζεται κάποια αλλαγή στην σκέψη. Η παρούσα έρευνα εστιάζει στην ικανότητα του εκπαιδευτικού να εντοπίζει τα κρίσιμα συμβάντα, να τα ερμηνεύει και να λαμβάνει κατάλληλες διδακτικές αποφάσεις. Η διδακτική επιστήμη στρέφεται στην παρατήρηση (noticing) από τον Βρετανό Mason (1998). Η παρατήρηση πλαισιώνεται από τις διαστάσεις εντοπισμός, ερμηνεία και ανταπόκριση (Potari & Psycharis, 2018).

Η παρατήρηση είναι μια σημαντική επαγγελματική ικανότητα που επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να ενεργεί εντός ενός διαρκώς μεταβαλλόμενου και μη προβλέψιμου, από αιτιοκρατικά ή στοχαστικά μοντέλα, κοινωνικού περιβάλλοντος όπως είναι το πολύπλοκο σύστημα της σχολικής τάξης (Μεταξάς, 2011). Με την ανάπτυξη της παρατήρησης ο εκπαιδευτικός απομακρύνεται από την συνήθη διδακτική νόρμα, που ονομάζεται διδακτική λαγνεία (Mason, 2003), κατά την οποία ο ίδιος κατέχει την τέλεια γνώση και την μεταδίδει σαν ζηλωτής ιεραπόστολος.

Ο μεγαλύτερος όγκος της ερευνητικής βιβλιογραφίας με εστίαση στην ανάπτυξη της παρατήρησης αφορά εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ενώ λίγες έρευνες εστιάζουν στην επιχειρηματολογία των εκπαιδευτικών (Potari & Psycharis, 2018). Συνεπώς δημιουργείται ένα ενεργό ερευνητικό πρόβλημα και εκεί τοποθετείται η παρούσα έρευνα καθώς εμβαθύνει στην ανάλυση των ερμηνειών που δίνουν στα κρίσιμα συμβάντα οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα πλαίσια του προπτυχιακού μαθήματος της πρακτικής άσκησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η επιχειρηματολογία

Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί ερμηνεύοντας τα κρίσιμα συμβάντα επιχειρηματολογούν. Η επιχειρηματολογία αποτυπώνει την προσπάθεια του ανθρώπου να εξηγήσει τον κόσμο γύρω του. Είναι μια κοινωνική δραστηριότητα διαπραγμάτευσης νοήματος (Triantafillou, Potari & Spiliotopouou, 2016). Βρίσκεται στο επίκεντρο της μάθησης είτε ως εργαλείο στην επίτευξη ενός στόχου είτε ως αντικείμενο μελέτης (Metaxas, Potari & Zachariades, 2016). Η απόδειξη των μαθηματικών προτάσεων ανήκει στον χώρο της επιχειρηματολογίας (Knipping & Reid, 2019).

Το σχήμα Toumlin (Μεταξάς, 2011) περιγράφει την δομή ενός επιχειρήματος. Ένα επιχείρημα έχει δύο άκρα. Στο ένα άκρο βρίσκονται τα δεδομένα (πληροφορίες) και στο άλλο άκρο το συμπέρασμα. Η εγγύηση γεφυρώνει τα δύο άκρα και είναι ένας γενικός κανόνας με υψηλό βαθμό αφαίρεσης (Metaxas et al., 2016). Το στοιχείο στήριγμα είναι το κομμάτι του επιχειρήματος που νομιμοποιεί την εγγύηση. Το στοιχείο αξιολόγηση μας πληροφορεί για την ισχύ του επιχειρήματος με την χρήση κατάλληλων λέξεων. Το στοιχείο αντίκρουση αναφέρεται στις εξαιρέσεις που μπορεί να έχει η εγγύηση ενός επιχειρήματος η οποία μπορεί να πηγάζει από διάφορους χώρους (Potari & Psycharis, 2018).

Ένα επιχείρημα χαρακτηρίζεται τοπικό όταν είναι ένα συμπαγές και ανεξάρτητο βήμα σε μια συνολική δομή ή ολικό όταν είναι μια δομή πού περιλαμβάνει τοπικά επιχειρήματα όπως είναι συνήθως η απόδειξη ενός θεωρήματος (Knipping & Reid, 2019). Τα τοπικά επιχειρήματα δημιουργούν επιχειρηματολογία (Μεταξάς et al., 2016) πού έχει πηγαία μορφή όταν σχηματίζουν μια αλυσίδα που οδηγεί στο συμπέρασμα ή έχει σπειροειδή μορφή όταν κινούνται ανεξάρτητα και παράλληλα προς το συμπέρασμα.

Αποτελέσματα ερευνών με εστίαση στην παρατήρηση

Αρκετές έρευνες εστιάζουν στην επιρροή πού έχουν οι επιμορφώσεις ή τα πανεπιστημιακά μαθήματα στην ανάπτυξη της παρατήρησης. Αρχικά οι εκπαιδευτικοί περιγράφουνε τα γεγονότα της διδασκαλίας με χρονολογική σειρά (Van Es & Sherin, 2002) και ενδιαφέρονται για το κλίμα της σχολικής τάξης όπως η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών. Τελικά εστιάζουν στους μαθητές και στα μαθηματικά νοήματα και οι ερμηνείες είναι βαθύτερες και λεπτομερέστερες (Van Es & Sherin, 2008).

Η ανάπτυξη της παρατήρησης παρουσιάζει την άμεση, την αυξητική και την κυκλική τροχιά. Η κυκλική τροχιά αποτελείται από το πρώτο στάδιο που έχει κοινά χαρακτηριστικά με το τρίτο και το δεύτερο στάδιο που μοιάζει με το τέταρτο (Van Es & Sherin, 2008). Στην διάσταση της ερμηνείας εμφανίζονται η περιγραφική στάση, η αξιολογική και η ερμηνευτική.

Η επιχειρηματολογία των μελλοντικών εκπαιδευτικών όπως αναπτύσσεται κατά την συμμετοχή τους σε ένα πανεπιστημιακό πρόγραμμα αρχικά έχει σπειροειδή μορφή και τελικά έχει πηγαία μορφή, πλούσια σε εγγυήσεις και στηρίγματα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Κίνητρο ανάπτυξης της παρούσας έρευνας αποτελούν τα ερωτήματα

Τι κρίσιμα συμβάντα εντοπίζουν οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί και πως αυτό αναπτύσσεται στο πλαίσιο της πρακτικής τους άσκησης;

Πως οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν τα κρίσιμα συμβάντα και επιχειρηματολογούν για τις ερμηνείες τους και πως αυτό αναπτύσσεται στο πλαίσιο της πρακτικής τους άσκησης;

Συμμετέχοντες στην έρευνα είναι τέσσερις προπτυχιακοί φοιτητές μαθηματικού τμήματος που συμμετέχουν στο μάθημα της πρακτικής άσκησης στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Χαρακτηρίζονται ως μελλοντικοί εκπαιδευτικοί καθώς δεν έχουν εμπειρία διδασκαλίας σε σχολική αίθουσα. Διδάσκουν σε εξατομικευμένα μαθήματα στον χώρο του μαθητή.

Ο ερευνητής σαν εθελοντής συνοδός δημιουργεί σχέσεις εμπιστοσύνης και οικειότητας, στηρίζει και υποστηρίζει τους φοιτητές, παρέχει κατάλληλες πηγές και φροντίζει για την τήρηση των χρονικών ορίων.

Η έρευνα, το πανεπιστημιακό μάθημα και τα πειραματικά σχολεία προσαρμόζονται στα μέτρα αντιμετώπισης της πανδημίας και διεξάγονται εξ αποστάσεως. Τα εμπειρικά δεδομένα είναι ηχογραφήσεις των συνεντεύξεων που διεξάγονται αμέσως μετά την κάθε παρουσία στην σχολική τάξη (δύο παρακολουθήσεις αρχικά και δύο διδασκαλίες μετά). Κάθε εβδομάδα οι φοιτητές συναντιούνται στο πανεπιστήμιο με τον διδάσκοντα καθηγητή ή πηγαίνουν στο σχολείο, σε ομάδες των δύο μαζί με τον συνοδό τους, για να παρακολουθήσουν κάποια διδασκαλία ή να διδάξουν. Οι συνεντεύξεις δομούνται γύρω από τις παρακάτω δύο ερωτήσεις. Παρατήρησες κάτι σημαντικό στο μάθημα; Πως το εξηγείς αυτό;

Η ανάλυση των δεδομένων ακολουθεί την μέθοδο grounded. Η ικανότητα παρατήρησης πλαισιώνεται από τις διαστάσεις εντοπισμός, ερμηνεία και ανταπόκριση (Potari & Psycharis, 2018). Για την ανάλυση στην πρώτη διάσταση χρησιμοποιείται ως μονάδα το κρίσιμο συμβάν πού αποτελεί κυρίαρχη έννοια στην ύλη του μαθήματος της πρακτικής άσκησης. Στην δεύτερη διάσταση χρησιμοποιείται το σχήμα Toumlin, η μορφή της επιχειρηματολογίας και οι πηγές της επιχειρηματολογίας που αφορούν το είδος της εγγύησης ενός επιχειρήματος (Potari & Psycharis, 2018).

ΑΝΑΛΥΣΗ

Η διάσταση του εντοπισμού

Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί αρχικά εστιάζουν στον εκπαιδευτικό και σε θέματα που αφορούν την διαχείριση της σχολικής τάξης. Έπειτα από κατάλληλες ερωτήσεις του ερευνητή εντοπίζουν τους μαθητές και τα μαθηματικά. Η Άννα αρχικά εστιάζει στις ενέργειες του εκπαιδευτικού όταν ένας μαθητής κάνει λάθος. Καθώς περιγράφει αυτό το λάθος αλλάζει την εστίαση της και στρέφεται στους μαθητές «μια μαθήτρια είχε κάνει λάθος…πήγε από πάνω της. Αυτό το λάθος τι ήτανε; Μπορείς να το περιγράψεις; Αντί να πολλαπλασιάσει με το -10 πολλαπλασίασε με 10».

Τελικά οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί εντοπίζουν κρίσιμα συμβάντα που κυρίως αφορούν τις δυσκολίες των μαθητών κατά την εμπλοκή τους με τα μαθηματικά όπως η δυσκολία αναγνώρισης της έννοιας κλίση συνάρτησης «Ενώ τα παιδιά έχουνε δει αρκετές φορές το Δψ/Δχ την κλίση…δεν το αναγνώρισαν εύκολα».

Η διάσταση της ερμηνείας

Σε κάθε στάδιο της έρευνας οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί εμφανίζουν ερμηνευτική στάση. Οι δυσκολίες των μαθητών ερμηνεύονται ως έλλειψη κατανόησης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εμφανίζεται στην συνδιδασκαλία της Κατερίνας και της Άννας. Στην εβδομάδα της δεύτερης διδασκαλίας εντοπίζουν την δυσκολία των μαθητών στην μέτρηση των ευνοϊκών περιπτώσεων κατά τον υπολογισμό της πιθανότητας η ρίψη ζαριού να φέρει έξι «το 6 έχει το (4,2) και το (2,4), εκεί ζοριστήκανε». Ερμηνεύουν το κρίσιμο συμβάν ως έλλειψη κατανόησης της έννοιας διάταξη «σύγχυση καταμέτρησης στα διατεταγμένα ζεύγη».

Η ερμηνευτική στάση εκδηλώνεται με την διατύπωση επιχειρηματολογίας που αρχικά εμφανίζει σπειροειδή μορφή και αποτελείται από τοπικά επιχειρήματα απλής δομής (εγγύηση και συμπέρασμα) και σύνθετης δομής (στήριγμα, εγγύηση, συμπέρασμα, δεδομένα, αντίκρουση). Συγκεκριμένα κατά την πρώτη παρακολούθηση η Ελευθερία εντοπίζει την συνεργασία των μαθητών όταν μια μαθήτρια παίρνει τον λόγο και προτείνει στον συμμαθητή της μια διαφορετική λύση «ήρθε η μαθήτρια από κάτω και είπε ότι δεν είναι καλή λύση υπάρχει μια πολύ πιο απλή». Συμπεραίνει ότι η μαθήτρια ενεργεί με αυτόν τον τρόπο επειδή είναι μαθήτρια υψηλών επιδόσεων και επειδή την ώρα του μαθήματος εργάζεται στο τετράδιο της ταυτόχρονα με τον συμμαθητή της. Τα δύο τοπικά επιχειρήματα σχηματίζουν σπειροειδή μορφή.

Ερευνητής: Τι εξήγηση θα έδινες;

Ελευθερία: Εεε καλά εντάξει αυτή είναι μία καλή μαθήτρια που έχει κατανοήσει αρκετά και προφανώς αυτή έλυνε παράλληλα την άσκηση στο τετράδιο της και είδε ότι το ένα της βγαίνει και το άλλο της βγαίνει οπότε είπε να πει αυτό με το δεδομένο και πως στην ουσία θα το επεξεργαστούμε, έτσι το κατάλαβα αυτό την κατανόηση ας πούμε.

Ερευνητής: Που το στηρίζεις;

Ελευθερία: Γιατί όταν μίλησε (η εκπαιδευτικός) είπε ότι είναι πολύ άριστη, εμφανίζεται έχει παραπάνω γνώσεις.

Το πρώτο επιχείρημα έχει ως αφετηρία τα δεδομένα που προκύπτουν από τα λόγια της εκπαιδευτικού σε συνέντευξη που παραχωρεί στην Ελευθερία μετά το μάθημα «κάθε φορά που η μαθήτρια αυτή εκφράζει τις μαθηματικές της απόψεις έχει περισσότερες γνώσεις από τους συμμαθητές της και εμφανίζει αύξουσα πορεία». *Στηρίζει* στις δηλώσεις της εκπαιδευτικού «η εκπαιδευτικός είπε ότι» την *εγγυημένη* από τις υψηλές επιδόσεις της μαθήτριας «αυτή είναι μια καλή μαθήτρια» πορεία προς το *συμπέρασμα* και *αξιολογείται* ως κάτι πολύ βέβαιο και προφανές «καλά εντάξει».

Στο δεύτερο τοπικό επιχείρημα η Ελευθερία με σιγουριά «προφανώς» *εγγυάται ό*τι η μαθήτρια είναι σε θέση να εκφράσει μια οικονομικότερη λύση «οπότε είπε να πει αυτό» επειδή έλυνε την άσκηση στο τετράδιο της την ώρα που ο συμμαθητής της την έλυνε στον πίνακα «Αυτή έλυνε παράλληλα την άσκηση στο τετράδιο της». Ακόμα η οικονομικότερη λύση που προτείνει η μαθήτρια είναι αποτέλεσμα σύγκρισης της δικής της λύσης με αυτήν του συμμαθητή της «είδε ότι το ένα βγαίνει και το άλλο βγαίνει» κάτι που *στηρίζει* ακόμα περισσότερο την *εγγύηση* του δεύτερου τοπικού επιχειρήματος.

Τελικά η επιχειρηματολογία είναι κυρίως σπειροειδούς μορφής αλλά και πηγαίας μορφής. Η επιχειρηματολογία του Νικόλα στην πρώτη διδασκαλία είναι παράδειγμα πηγαίας μορφής. Ξεκινώντας από την δυσκολία χειρισμού των μεταβλητών «παίρνει το ν κάπως λάθος» *συμπεραίνει* έλλειψη κατανόησης καθώς οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τι κάνουν «δεν είχε καταλάβει σε βάθος τι είναι αυτό που κάνουμε». Κάνουν άλγεβρα επειδή οι μεταβλητές είναι σημαντικό κομμάτι της άλγεβρας «είναι το 1ο βήμα στο να σκεφτεί κανείς αλγεβρικά» και η άλγεβρα είναι δύσκολη «αυτό το βήμα είναι που κιόλας που δυσκολεύει». Στην δεύτερη διδασκαλία οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί διατυπώνουν ένα σύνθετο επιχείρημα.

Οι πηγές των επιχειρημάτων των μελλοντικών εκπαιδευτικών είναι κυρίως η εμπειρία (εμπειρία διαδικασίας) που αποκτούν από την συμμετοχή τους στις διαδικασίες του μαθήματος της πρακτικής «η εκπαιδευτικός είπε ότι», η επαγγελματική εμπειρία που έχουν από τα ιδιαίτερα μαθήματα «το βλέπω στα ιδιαίτερα», η γνώση των δυσκολιών (διδακτική των μαθηματικών) που συνήθως εμφανίζουν οι μαθητές «μετέφρασε το θετικό σαν αύξουσα» και η επιστημολογία των μαθηματικών «γιατί εντάξει τι είναι η άλγεβρα έτσι και αλλιώς, αυτό είναι το 1ο βήμα». Τελικά τα επιχειρήματα έχουν πολλαπλές πηγές.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ο ερευνητής δεν έχει μελετήσει την σχετική βιβλιογραφία στην πληρότητα της και δεν έχει κριτικά ευθυγραμμιστεί με τις πρακτικές της ερευνητικής κοινότητας. Επίσης δεν αντλήθηκαν εμπειρικά δεδομένα από τις εργασίες των φοιτητών. Τα ανωτέρω θέτουν περιορισμούς στην παρούσα έρευνα (Amador & Carter, 2018).

Ως προς το πρώτο ερώτημα η έρευνα απαντά ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν στο μάθημα της πρακτικής τελικά εντοπίζουν κρίσιμα συμβάντα που αφορούν τις δυσκολίες των μαθητών με τα μαθηματικά. Ως προς το δεύτερο ερώτημα η έρευνα απαντά ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί τελικά ερμηνεύουν τα κρίσιμα αυτά συμβάντα ως έλλειψη κατανόησης.

Η ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες (Potari & Psycharis, 2018) είναι θετική και οφείλεται στην συμμετοχή των μελλοντικών εκπαιδευτικών στο μάθημα της πρακτικής επειδή τα επιχειρήματα τους πηγάζουν κυρίως από την εμπειρία που αποκτούν στο μάθημα της πρακτικής. Επίσης το θεωρητικό εργαλείο των τεσσάρων ερωτήσεων που χρησιμοποιείτε στις συνεντεύξεις έχει θετική επίδραση στην πρώτη διάσταση της παρατήρησης καθώς στρέφει την προσοχή των εκπαιδευτικών στους μαθητές και τα μαθηματικά.

Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί έχουν ερμηνευτική στάση σε όλα τα στάδια του μαθήματος της πρακτικής και άρα ο χαρακτηρισμός της στάσης δεν επαρκεί για μία σε βάθος ανάλυση και καθιστά την ανάλυση της επιχειρηματολογίας αναγκαία. Ακόμα η ερμηνεία στην τρίτη συνέντευξη έχει πλουσιότερη επιχειρηματολογία από την ερμηνεία στην τέταρτη και τελική συνέντευξη στην οποία εμφανίζεται ένα σύνθετο επιχείρημα. Αυτό το αποτέλεσμα θα μπορούσε να εξηγηθεί με την κυκλική τροχιά ανάπτυξης της παρατήρησης (Van Es & Sherin, 2008). Όμοια συμπεράσματα εμφανίζονται και σε άλλες έρευνες (Van Es & Sherin, 2002).

Τα κρίσιμα συμβάντα που κυρίως ενδιαφέρουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς αφορούν μια δυσκολία των μαθητών και ερμηνεύονται ως έλλειψη κατανόησης. Τα είδη των διδακτικών δράσεων πού ακολουθούν τον εντοπισμό και την ερμηνεία καθώς και η πιθανή σχέση των τριών διαστάσεων της παρατήρησης δημιουργούν ένα ερευνητικό κενό στον χώρο της παρατήρησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Amador, J. M., & Carter, I. S. (2018). Audible conversational affordances and constraints of verbalizing professional noticing during prospective teacher lesson study. Journal of Mathematics Teacher Education, 21(1), 5-34.

Knipping, C., & Reid, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. In Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education (pp. 3-31). Springer, Cham.

Mason, J. (2003). Reader Commentary, Seeing worthwhile things. Journal of Mathematics Teacher Education, 6(3), 281-292.

Metaxas, N., Potari, D., & Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. Educational Studies in Mathematics, 93(3), 383-397.

Potari, D., & Psycharis, G. (2018). Prospective mathematics teacher argumentation while interpreting classroom incidents. *In Educating prospective secondary mathematics teachers (pp. 169-187). Springer, Cham.*

Triantafillou, C., Spiliotopoulou, V., & Potari, D. (2016). The nature of argumentation in school mathematics and physics texts: The case of periodicity. International Journal of Science and Mathematics Education, 14(4), 681-699.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. Teaching and teacher education, 24(2), 244-276.

Μεταξάς, Ν. (2011). Η ανάλυση της επιχειρηματολογίας των καθηγητών μαθηματικών ως εργαλείο μελέτης της επαγγελματικής τους γνώσης (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΠΑΙΔΙΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ 4 ΕΩΣ 6 ΕΤΩΝ: ΜΙΑ ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Φραντζεσκάκη Κωνσταντίνα, Καφούση Σόνια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

konst.frantz@gmail.com, kafoussi@aegean.gr

Η παρούσα έρευνα εστιάζει στην ανάπτυξη της συνδυαστικής σκέψης παιδιών προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών. Επτά παιδιά έλαβαν μέρος και ενεπλάκησαν με προβλήματα συνδυαστικής για κάθε τύπο (συνδυασμοί, μεταθέσεις, διατάξεις), μέσα σε ένα ουσιαστικό πλαίσιο. Σκοπός ήταν να ερευνηθεί η ικανότητά τους να τα επιλύουν, καθώς και να εντοπιστούν κοινά λάθη και δυσκολίες τους. Βάσει αποτελεσμάτων, η πλειοψηφία των παιδιών κατάφερε να εντοπίσει ένα μεγάλο αριθμό λύσεων και για τους τρεις τύπους προβλημάτων, με κοινό λάθος την επανάληψη των συνδυασμών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συνδυαστική ορίζεται ως η τέχνη απαρίθμησης όλων των δυνατών τρόπων με τους οποίους πολλά πράγματα μπορούν να συνδυαστούν, να μετατοπιστούν, ή να ενωθούν το ένα με το άλλο, ώστε να γίνει σαφές ότι τίποτα δεν έχει παραλειφθεί στην επίτευξη ενός σκοπού (Bernoulli, 2006). Οι Fischbein & Grossman (1997) αναγνωρίζουν τέσσερις τύπους συνδυαστικών προβλημάτων: τις *μεταθέσεις* (όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν όλα τα στοιχεία ενός συνόλου να μπουν σε σειρά), τις *διατάξεις με ή χωρίς επανάληψη* (όλοι οι δυνατοί τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά κ στοιχεία από τα ν στοιχεία ενός συνόλου, με τη σειρά επιλογής των στοιχείων να έχει σημαντικό ρόλο) και τους *συνδυασμούς* (κάθε επιλογή κ στοιχείων από τα ν στοιχεία του συνόλου, χωρίς να έχει σημασία η σειρά). Η επανάληψη αναφέρεται στη δυνατότητα κάθε στοιχείου να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές σε μία επιλογή (Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015; Ηλιόπουλος & Λαζαρίδης, 1998).

Η σημασία της ανάπτυξης της συνδυαστικής σκέψης στα μαθηματικά του σχολείου έχει επισημανθεί στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης (βλ. Fischbein & Gazit, 1988; Lesh & Heger, 2001) και σε πολλά προγράμματα σπουδών παγκοσμίως (βλ. NCTM, 2000). Η συνδυαστική συνδέεται με τη δημιουργία υποθέσεων και γενικεύσεων, η οποία έχει μεγαλύτερη σημασία στην εκπαίδευση, που προετοιμάζει τα παιδιά για το μέλλον, από την εκπαίδευσή τους να εφαρμόζουν μαθηματικούς τύπους (Drijvers, 2015), ενώ η ανάπτυξη μιας σειράς δραστηριοτήτων για τη συνδυαστική φαίνεται ότι μπορεί να συμβάλει στον εκσυγχρονισμό και την αύξηση της αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας των μαθηματικών (Krekic-Pinter κ.ά., 2015). Οι Batanero, Godino, κ.ά. (1997) σημειώνουν ότι πολλές πιθανές παρερμηνείες των μαθητών/τριών οφείλονται στην έλλειψη συνδυαστικής συλλογιστικής, καθώς απαριθμούν λανθασμένα το χώρο του δείγματος σε ένα πρόβλημα. Σκοπός της παρούσας πιλοτικής έρευνας είναι να μελετηθεί η ανάπτυξη συνδυαστικής σκέψης παιδιών προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών, εντοπίζοντας κοινά λάθη και δυσκολίες κατά την εμπλοκή τους με προβλήματα συνδυαστικής.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη της συνδυαστικής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση ήταν οι Piaget & Inhelder (1958, 1975) με έρευνες που διεξήγαγαν σε μαθητές/τριες ηλικίας από 6 έως 15 ετών. Μέσα από τις έρευνες τους ισχυρίστηκαν ότι ένας/μία μαθητής/τρια μπορεί να επιλύσει επιτυχώς ένα πρόβλημα συνδυαστικής μόνο στο στάδιο των επίσημων λειτουργιών (11-15 ετών). Ωστόσο μεταγενέστεροι ερευνητές επισήμαναν την πιθανότητα να έχει γίνει απόκρυψη των ικανοτήτων των παιδιών που συμμετείχαν, λόγω της φύσης των πειραμάτων, που θεωρήθηκε πολύ επιστημονική και αφηρημένη, καθώς και της έλλειψης εξοικείωσης με τα πειραματικά υλικά (Carey, 1985; Eysenck, 1984).

Η English σε μία σειρά ερευνών (1991, 1992, 1993, 2007), χρησιμοποιώντας ένα ουσιαστικό πλαίσιο (ντύσιμο αρκούδων) μελέτησε την ικανότητά μαθητών/τριών ηλικίας 4 έως 12 ετών, να επιλύουν δισδιάστατα (δύο στοιχεία, μπλούζα-παντελόνι/φούστα) και τρισδιάστατα (τρία στοιχεία, μπλούζα-παντελόνι-ρακέτα του τένις) προβλήματα συνδυαστικής. Πέντε στρατηγικές διακρίθηκαν σε δισδιάστατα προβλήματα (για παιδιά ηλικίας 4 έως 9 ετών), που κυμαίνονταν από μία απλή συμπεριφορά δοκιμής και λάθους, μέχρι και σε πιο αποτελεσματικές στρατηγικές, όπως εκείνες του οδόμετρου (odometer, η ονομασία αυτή αποδόθηκε λόγω της ομοιότητάς της με το οδόμετρο ενός οχήματος Scardamalia, 1977). Ειδικότερα στη στρατηγική 1 παρατηρούνταν τυχαία επιλογή στοιχείων, και απόρριψη εκείνων που είχαν αποδειχθεί ακατάλληλα (π.χ. X1-Y1, X2-Y2, X1-Y2), στις στρατηγικές 2 και 3 εμφανιζόταν ένα μοτίβο στην επιλογή στοιχείου (π.χ. X1-Y1, X2-Y2, X3-Y3), ενώ στις στρατηγικές 4 και 5, υπήρχε ένα πρότυπο οδόμετρου στην επιλογή στοιχείου, με ένα σταθερό στοιχείο να επιλέγεται επανειλημμένα, μέχρι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί που το εμπεριέχουν να σχηματιστούν (π.χ. X1-Y1, X1-Y2, X1-Y3). Επισημάνθηκε λοιπόν ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να συνδέσουν αντικείμενα από διακριτά σύνολα με συστηματικό τρόπο για να σχηματίσουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αντικειμένων, μέσω της χρήσης κατάλληλου υλικού και ουσιαστικού πλαισίου για τα ίδια (English,1991;1993).

Η Σιακαλλή (2013), διαπίστωσε την ικανότητα παιδιών ηλικίας 4 έως 5 ετών να επιλύουν προβλήματα μεταθέσεων (για n=3). Όπως επισημάνθηκε, η επαναλαμβανόμενη εμπλοκή των παιδιών με προβλήματα ίδιου τύπου, τα βοήθησε να βελτιώσουν τις στρατηγικές τους. Επιπρόσθετα, το φύλλο καταγραφής, όπου δινόταν ο αριθμός δυνατών λύσεων, φάνηκε να αποτέλεσε ένα πρόσφορο εργαλείο για την εύρεση των λύσεων. Σε μεταγενέστερη έρευνα των Palmer & van Bommel (2018), εντοπίστηκε η δυσκολία παιδιών ηλικίας 6 ετών σε μεταθέσεις (για n=3), με ελάχιστα παιδιά να καταφέρνουν να εντοπίσουν όλες τις δυνατές λύσεις. Για την εύρεση των λύσεων, τα παιδιά χρησιμοποίησαν τόσο εικονογραφικές (σχηματισμός λύσεων ζωγραφίζοντας το αντικείμενο), όσο και εικονικές αναπαραστάσεις (σχηματισμός λύσεων με σύμβολα που αναπαριστούσαν το αντικείμενο). Παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά που χρησιμοποίησαν εικονογραφικές αναπαραστάσεις έκαναν σημαντικά λιγότερες επαναλήψεις, σε σχέση με εκείνα που χρησιμοποίησαν εικονική αναπαράσταση, ενώ πιο μεταβατικές στρατηγικές παρατηρήθηκαν στα παιδιά που έκαναν χρήση της εικονικής αναπαράστασης.

Σύμφωνα με τους Batanero, Godino, και Navarro-Pelayo (2005) προκειμένου να διευκολυνθεί η διδασκαλία και η μάθηση της συνδυαστικής, χρειάζεται να διερευνηθούν α) η φύση των λαθών των μαθητών/τριών κατά την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής και β) ο εντοπισμός των μεταβλητών που μπορεί να επηρεάσουν αυτή τη δυσκολία. Ωστόσο μικρός αριθμός ερευνών εντοπίζεται, που αφορά την ανάπτυξη συνδυαστικής σκέψης παιδιών προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών. Η παρούσα έρευνα είναι πιλοτική και εντάσσεται στο σχεδιασμό της εκπόνησης διδακτορικής διατριβής με θέμα: «*Η ανάπτυξη της συνδυαστικής σκέψης παιδιών προσχολικής ηλικίας (4 έως 6 ετών) με τη συμβολή ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης*». Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής: α) Μπορούν τα παιδιά προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών, να επιλύσουν επιτυχώς προβλήματα συνδυαστικής; β) Ποια είναι τα κοινά λάθη και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την εμπλοκή τους με αυτά τα προβλήματα; γ) Υπάρχει κάποιος τύπος προβλημάτων (συνδυασμοί, μεταθέσεις, διατάξεις) που τα δυσκολεύει περισσότερο; δ) Χρησιμοποιούν κάποια στρατηγική (English, 2007) για την παραγωγή συνδυασμών;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε νηπιαγωγείο της Ρόδου, σε παιδιά προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών. Συνολικά συμμετείχαν 7 παιδιά προσχολικής ηλικίας, 4 νήπια και 3 προνήπια, εκ των οποίων 2 αγόρια και 5 κορίτσια. Με στόχο την ενεργή εμπλοκή των παιδιών δημιουργήθηκαν τρία διαφορετικά σενάρια, ένα για κάθε τύπο προβλήματος αντίστοιχα, μέσα σε ένα ουσιαστικό πλαίσιο για τα ίδια. Τα παιδιά εργάστηκαν ατομικά, έχοντας στη διάθεσή τους καρτέλες σε στοίβες σε σχήμα τριγώνου και κλήθηκαν να συμπληρώσουν τις απαντήσεις τους, σε φύλλο καταγραφής, όπου δινόταν ο αντίστοιχος αριθμός δυνατών λύσεων. Η έρευνα διεξήχθη σε τρεις μέρες, μία ημέρα για κάθε τύπο προβλήματος. Δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι απαντήσεις των παιδιών στα φύλλα καταγραφής, καθώς και τυχόν σχόλιά τους, όπως καταγράφηκαν (ηχογράφηση), κατά την ενασχόλησή τους με τα προβλήματα. Έτσι για κάθε παιδί αναλύθηκαν: α) ο τρόπος που παρήγαγε τους συνδυασμούς, β) ο αριθμός των συνδυασμών που εντόπισε και γ) τα σχόλια του, όπου φανέρωναν τόσο τον τρόπο σκέψης του, όσο και της εργασίας του.

Το **1ο πρόβλημα** με το οποίο ενεπλάκησαν τα παιδιά αφορούσε την **εύρεση συνδυασμών με και χωρίς επανάληψη**, στο οποίο παρουσιάστηκε μία ιστορία με έναν ήρωα, που λάτρευε τους χυμούς. Τα παιδιά κλήθηκαν να βρουν όλους τους δυνατούς τρόπους που θα μπορούσαν να βάλουν δύο φρούτα μαζί, από τα τρία που τους δίνονταν (1η περίπτωση: μήλο-αχλάδι-πορτοκάλι, 2η περίπτωση: μανταρίνι-μπανάνα-φράουλα, δυνατοί συνδυασμοί για n=3), δημιουργώντας μία νέα γεύση χυμού, τόσο χωρίς, όσο και με επανάληψη στοιχείων. Στην πρώτη περίπτωση, δε δινόταν η δυνατότητα στα παιδιά να βάλουν δύο ίδια φρούτα μαζί (συνδυασμοί χωρίς επανάληψη – 3 δυνατοί συνδυασμοί), ενώ στη δεύτερη δινόταν (συνδυασμοί με επανάληψη – 6 δυνατοί συνδυασμοί). Το **2ο πρόβλημα** αφορούσε **μεταθέσεις,** όπου παρουσιάστηκε στα παιδιά η ιστορία ενός ουράνιου τόξου που έχασε τα χρώματά του και δε θυμόταν με τι σειρά τα είχε. Το ουράνιο τόξο είχε μόνο τρία χρώματα (κόκκινο-κίτρινο-μπλε) κι έτσι τα παιδιά ενεπλάκησαν με μεταθέσεις για n=3. Τα παιδιά κλήθηκαν να βρουν όλους τους δυνατούς τρόπους που θα μπορούσε να έχει τα χρώματά του, το ουράνιο τόξο (δυνατές μεταθέσεις 6). Τέλος, το **3ο πρόβλημα** αφορούσε **διατάξεις χωρίς και με επανάληψη,** όπου τα παιδιά κλήθηκαν να βοηθήσουν για ένα πάρτι γενεθλίων, φτιάχνοντας πράγματα με δύο στοιχεία, επιλέγοντας από τρία διαφορετικά χρώματα. Στην πρώτη περίπτωση έφτιαξαν καπέλα (τρίγωνο-φουντίτσα), χωρίς να μπορούν να χρησιμοποιήσουν το ίδιο χρώμα για το τρίγωνο και τη φουντίτσα (διατάξεις χωρίς επανάληψη - 6 δυνατές διατάξεις), ενώ στη δεύτερη περίπτωση έφτιαξαν δώρα (κουτί-φιόγκος), έχοντας τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν το ίδιο χρώμα σε κουτί και φιόγκο (διατάξεις με επανάληψη - 9 δυνατές διατάξεις).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για καθένα από τα προβλήματα συνδυαστικής, τόσο για κάθε τύπο προβλήματος, όσο και για το σύνολο των προβλημάτων.

Στον Πίνακα 1 φαίνονται οι απαντήσεις των παιδιών στο πρώτο πρόβλημα.

Πίνακας 1: Συνδυασμοί (χωρίς και με επανάληψη)

ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ	ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ
Όλοι οι Συνδυασμοί (3)	6	Όλοι οι Συνδυασμοί (6)	4
2 Συνδυασμοί	1	5 Συνδυασμοί	1
		3 Συνδυασμοί	2
Σύνολο	7	Σύνολο	7

Στους συνδυασμούς χωρίς επανάληψη, έξι παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς, με εξαίρεση ένα παιδί νηπιακής ηλικίας, που κατάφερε να εντοπίσει 2 (6^{ο} παιδί: *Μήλο-Πορτοκάλι*, Αχλάδι-Μήλο, *Πορτοκάλι-Μήλο*). Στους συνδυασμούς με επανάληψη, τέσσερα παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς, ένα παιδί εντόπισε 5 (2^{ο} παιδί: Μανταρίνι-Μανταρίνι, Φράουλα-Φράουλα, Μπανάνα-Μπανάνα, *Φράουλα- Μπανάνα*, *Μπανάνα- Φράουλα*, Μανταρίνι-Μπανάνα) και δύο παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν 3 (π.χ. 1^{ο} παιδί: *Φράουλα-Μπανάνα*, **Μανταρίνι-Μπανάνα**, <u>Μανταρίνι-Φράουλα</u>, *Μπανάνα-Φράουλα*, <u>Φράουλα-Μανταρίνι</u>, **Μπανάνα-Μανταρίνι**). Τα παιδιά επέλεγαν τυχαία κάθε φορά τα φρούτα για τον εντοπισμό όλων των δυνατών λύσεων.

Το κοινό λάθος που παρατηρήθηκε από τα παιδιά σε αυτά τα προβλήματα, ήταν η επανάληψη των συνδυασμών, κατά την παραγωγή τους, κάνοντας τόσο την ίδια επιλογή φρούτων (π.χ. Μπανάνα-Φράουλα, Μπανάνα-Φράουλα,), όσο και τοποθετώντας τα ίδια φρούτα σε διαφορετική θέση (π.χ. Φράουλα-Μανταρίνι, Μανταρίνι-Φράουλα).

Στον Πίνακα 2 φαίνονται οι απαντήσεις των παιδιών στο δεύτερο πρόβλημα.

Πίνακας 2: Μεταθέσεις

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ
Όλες οι Μεταθέσεις (6)	3
4 έως 5 Μεταθέσεις	3
3 Μεταθέσεις	1
Σύνολο	7

Βάσει αποτελεσμάτων τρία παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν όλες τις δυνατές μεταθέσεις, καθώς και 4 έως 5 μεταθέσεις (π.χ. 2^{ο} παιδί: Κίτρινο-Μπλε-Κόκκινο, Μπλε-Κόκκινο-Κίτρινο, Κίτρινο-Κόκκινο-Μπλε, Μπλε-Κίτρινο-Κόκκινο), ενώ μόνο ένα παιδί εντόπισε μόνο 3 (1^{ο} παιδί: Κόκκινο-Κίτρινο-Μπλε, Κίτρινο-Μπλε-Κόκκινο, Μπλε-Κόκκινο-Κίτρινο). Τα παιδιά επέλεγαν τυχαία κάθε φορά τα χρώματα, για τον εντοπισμό όλων των δυνατών λύσεων.

Η επανάληψη μεταθέσεων ήταν κοινό λάθος των παιδιών, επιλέγοντας τα ίδια χρώματα με την ίδια σειρά (π.χ. 5ο παιδί: Μπλε-Κόκκινο-Κίτρινο, Μπλε-Κίτρινο-Κόκκινο, Κόκκινο-Κίτρινο-Μπλε, *Κίτρινο-Μπλε-Κόκκινο, Κίτρινο-Μπλε-Κόκκινο,* Κίτρινο-Κόκκινο-Μπλε). Αξίζει να σημειωθεί ότι κάποια παιδιά στην προσπάθειά τους να εντοπίσουν μία νέα μετάθεση, σκέφτηκαν να βάλουν μόνο δύο χρώματα από τα τρία (επιλέγοντας π.χ. κόκκινο-μπλε-μπλε), ενώ κάποια άλλα σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν ένα χρώμα που δεν τους δινόταν, αναποδογυρίζοντας την καρτέλα που είχε χρώμα άσπρο.

Στον Πίνακα 3 φαίνονται οι απαντήσεις των παιδιών στο τρίτο πρόβλημα.

Πίνακας 3: Διατάξεις χωρίς και με επανάληψη

ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ	ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ
Όλες οι Διατάξεις (6)	5	Όλες οι Διατάξεις (9)	3
4 έως 5 Διατάξεις	2	6 έως 8 Διατάξεις	4
Σύνολο	7	Σύνολο	7

Στις διατάξεις χωρίς επανάληψη, πέντε παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν όλες τις δυνατές διατάξεις, ενώ δύο παιδιά εντόπισαν από 4 έως 5 διατάξεις (π.χ. 2ο παιδί: Πράσινο-Κόκκινο, Κόκκινο-Κίτρινο, *Πράσινο-Κίτρινο*, Κίτρινο-Πράσινο, Κόκκινο-Πράσινο, *Πράσινο-Κίτρινο*). Στις διατάξεις με επανάληψη τρία παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν όλες τις δυνατές διατάξεις, ενώ τέσσερα παιδιά εντόπισαν από 6 έως 8 διατάξεις (π.χ. 5ο παιδί: Καφέ-Καφέ, ***Καφέ-Μπλε***, *Μπλε-Πορτοκαλί, Μπλε-Πορτοκαλί,* **Καφέ-Μπλε**, Πορτοκαλί-Πορτοκαλί, *Μπλε-Πορτοκαλί,* Καφέ-Πορτοκαλί, Μπλε-Καφέ). Τα παιδιά επέλεγαν τυχαία τα χρώματα, για τον εντοπισμό όλων των δυνατών λύσεων.

Κοινό λάθος των παιδιών σε αυτά τα προβλήματα ήταν η επανάληψη διατάξεων (π.χ. 1ο παιδί: Κίτρινο-Πράσινο, **Κόκκινο-Κίτρινο**, *Πράσινο-Κόκκινο, Πράσινο-Κόκκινο,* **Κόκκινο-Κίτρινο**, Πράσινο-Κίτρινο*),* καθώς τα παιδιά δε μπόρεσαν να εντοπίσουν στο φύλλο καταγραφής τους, ότι έχουν ξανατοποθετήσει με τον ίδιο τρόπο τα χρώματα και μάλιστα περισσότερες από δύο φορές.

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τα συνολικά αποτελέσματα ανά παιδί σε καθένα από τους τύπους προβλημάτων (συνδυασμοί, μεταθέσεις, διατάξεις).

Πίνακας 4: Εύρεση δυνατών λύσεων από κάθε παιδί για όλα τα προβλήματα

	Α (3)	Β (6)	Γ (6)	Δ (6)	Ε (9)
1ο ΠΑΙΔΙ	3	3	3	4	6
2ο ΠΑΙΔΙ	3	5	4	5	6
3ο ΠΑΙΔΙ	3	6	6	6	9
4ο ΠΑΙΔΙ	3	6	6	6	9
5ο ΠΑΙΔΙ	3	3	5	6	6
6ο ΠΑΙΔΙ	2	6	6	6	9
7ο ΠΑΙΔΙ	3	6	4	6	8

Α: Συνδυασμοί χωρίς επανάληψη Β: Συνδυασμοί με επανάληψη Γ: Μεταθέσεις Δ: Διατάξεις χωρίς επανάληψη Ε: Διατάξεις με επανάληψη (Αριθμός Δυνατών Λύσεων)

Τα περισσότερα παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν ένα μεγάλο αριθμό δυνατών λύσεων, είτε δίνοντας όλες τις λύσεις, είτε δίνοντας τις περισσότερες δυνατές λύσεις. Ελάχιστα ήταν εκείνα που εντόπισαν λίγες δυνατές λύσεις (2 παιδιά στο πρόβλημα συνδυασμού με επανάληψη και 1 παιδί στο πρόβλημα των μεταθέσεων). Το πρόβλημα, το οποίο τα περισσότερα παιδιά ολοκλήρωσαν με επιτυχία ήταν εκείνο των συνδυασμών χωρίς επανάληψη (6 από τα 7 παιδιά), όπου εμπεριείχε 3 δυνατούς συνδυασμούς. Αντίθετα, τα προβλήματα που φάνηκαν να τα δυσκολεύουν περισσότερο ήταν εκείνα με την εύρεση μεταθέσεων και την εύρεση διατάξεων με επανάληψη, αφού και στις δύο περιπτώσεις υπήρξαν μόνο 3 παιδιά, που κατάφεραν να τα επιλύσουν, παρά το γεγονός ότι τα προβλήματα μεταθέσεων εμπεριείχαν λιγότερους συνδυασμούς (6 δυνατές μεταθέσεις), συγκριτικά με τις διατάξεις με επανάληψη (9 δυνατούς συνδυασμούς). Επιπλέον, φάνηκε ότι η επανάληψη στοιχείων είναι πιο δύσκολη για τα παιδιά, αφού τόσο στους συνδυασμούς, όσο και στις διατάξεις με επανάληψη, περίπου τα μισά παιδιά (4 στην πρώτη περίπτωση, 3 νήπια-1 προνήπιο, και 3 στη δεύτερη – 3 νήπια) κατάφεραν να τα επιλύσουν, ενώ στην περίπτωση χωρίς επανάληψη τα περισσότερα παιδιά κατάφεραν να τα επιλύσουν, έξι παιδιά όσον αφορά τους συνδυασμούς (3 νήπια και 3 προνήπια) και πέντε στις διατάξεις (3 νήπια και 2 προνήπια). Αυτό θα μπορούσε να αποδοθεί και στο γεγονός ότι η επανάληψη στοιχείων εμπεριέχει μεγαλύτερο αριθμό δυνατών λύσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο δύο παιδιά, νηπιακής ηλικίας (3ο και 4ο παιδί), κατάφεραν να επιλύσουν επιτυχώς όλα τα προβλήματα, βρίσκοντας όλες τις δυνατές λύσεις.

Σημαντικό εργαλείο για τα παιδιά αποτέλεσε το φύλλο καταγραφής για τον εντοπισμό όλων των δυνατών λύσεων. Σχόλια που καταγράφηκαν κατά την αλληλεπίδραση τους με το φύλλο καταγραφής όπως: *«το έχω ξαναβάλει είναι ίδια αυτά», «όχι το κάναμε», «Φράουλα-Μπανάνα έχω βάλει,* *μανταρίνι έχω βάλει , άρα πάλι φράουλα», «ααα το βρήκα»* επιλέγει κόκκινο και μετά κίτρινο, συμπληρώνοντας, *«βλέπεις πουθενά να το έχω κάνει;», «ουπς το έχουμε ξαναβάλει το μπλε κάτω»*, φανέρωναν τον τρόπο σκέψης τους, καθώς και τον τρόπο που εργάστηκαν πάνω σε αυτό. Τρεις κατηγορίες παιδιών διακρίθηκαν, όσον αφορά την εύρεση συνδυασμών και το φύλλο καταγραφής: α) παιδιά που είχαν συνεχώς επαφή με το φύλλο καταγραφής σε όλα τα προβλήματα, αξιοποιώντας το στον εντοπισμό νέων συνδυασμών (3 νήπια και 1 προνήπιο), β) παιδιά που δεν είχαν καμία επαφή καθ' όλη τη διάρκεια των προβλημάτων (1 νήπιο και 1 προνήπιο) και γ) παιδιά που κάποιες φορές είχαν επαφή και κάποιες άλλες όχι (1 προνήπιο). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δύο παιδιά, νηπιακής ηλικίας, που κατάφεραν να επιλύσουν όλα τα προβλήματα επιτυχώς, εντοπίζοντας όλες τις δυνατές λύσεις, βρίσκονταν σε συνεχή επαφή με το φύλλο καταγραφής, παρακολουθώντας προσεκτικά κάθε φορά ποια στοιχεία έχουν βάλει ήδη μαζί, για να επιλέξουν νέα.

Κλείνοντας, επισημαίνεται ότι κατά την εμπλοκή των παιδιών και με τους τρεις τύπους προβλημάτων, η επιλογή των στοιχείων γινόταν με τυχαίο τρόπο, για τον εντοπισμό νέων συνδυασμών. Δηλαδή ακολούθησαν τη στρατηγική 1 σύμφωνα με την English (2007), όπου τα παιδιά επιλέγουν τυχαία στοιχεία, με μία προσέγγιση δοκιμής και λάθους, απορρίπτοντας τα στοιχεία που έχουν αποδειχθεί ακατάλληλα. Αξίζει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι στην προσπάθεια κάποιων παιδιών να εντοπίσουν όλες τις δυνατές λύσεις, έγινε χρήση πιο συστηματικών στρατηγικών τύπου οδόμετρου, διατηρώντας ένα σταθερό στοιχείο και μεταβάλλοντας το δεύτερο (π.χ. 3ο Πρόβλημα: επιλέγει πορτοκαλί κουτί και κοιτάζει ένα-ένα τα χρώματα των φιόγκων για να δει με ποιο δε το έχει βάλει για να επιλέξει. Εντοπίζει τον τελευταίο συνδυασμό με το πορτοκαλί κουτί).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως διαπιστώθηκε παιδιά προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών είναι ικανά να επιλύσουν προβλήματα συνδυαστικής, εντοπίζοντας ένα μεγάλο αριθμό δυνατών λύσεων. Το κοινό λάθος που εντοπίστηκε, ήταν η επανάληψη των συνδυασμών, εύρημα που έχει παρατηρηθεί και σε προγενέστερες έρευνες (English 1991, 1992, 1993, 2007; Σιακαλλή, 2013). Όπως επισημάνθηκε τα παιδιά που κατάφεραν να εντοπίσουν όλες τις δυνατές λύσεις, βρίσκονταν σε συνεχή επαφή με το φύλλο καταγραφής, παρακολουθώντας προσεκτικά κάθε φορά ποια στοιχεία έχουν βάλει ήδη μαζί, για να επιλέξουν νέα, χαρακτηριστικό που περιγράφεται από την English (1992), ως ενέργεια σάρωσης που κατέχει σημαντικό ρόλο στην επιτυχή ολοκλήρωση των εργασιών συνδυαστικής. Επιπλέον, διαπιστώθηκε μεγαλύτερη δυσκολία στα προβλήματα μεταθέσεων και διατάξεων με επανάληψη, σε σχέση με τους συνδυασμούς, παρόμοιο εύρημα με τους Fischbein και Gazit (1988), σύμφωνα με τους οποίους τα προβλήματα μετάθεσης δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές/τριες, ενώ τα προβλήματα συνδυασμού φαίνονται ευκολότερα. Περαιτέρω έρευνες είναι αναγκαίο να διεξαχθούν με μεγαλύτερο δείγμα, με σκοπό να διερευνηθεί περαιτέρω η ανάπτυξη συνδυαστικής σκέψης παιδιών προσχολικής ηλικίας, περιλαμβάνοντας παρατηρήσεις τόσο σε ατομικό επίπεδο, όσο και σε επίπεδο τάξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.

Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (2005). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 239-252): IOS Press.

Bernoulli J. (2006). *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis.* Translated by Edith Dudley Sylla. Johns Hopkins University Press. Baltimore.

Carey, S. (1985). Are children fundamentally different kinds of thinkers and learners than adults? In S. F. Chipman, J. W. Segal, and R. Glaser (eds.), *Thinking and Learning Skills*, Vol. 2: Current Research and Open Questions, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Universiteit Utrecht

English, L. D. (1991). Young children's combinatorics strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 451-474.

English, L. D. (1992). Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, 62, 203-216.

English, L. (1993). *Development of Children's Strategic and Metastrategic Knowledge in a Novel Mathematical Domain.* Educational Recourses Information Center (ERIC)

English, L. D. (2007). Children's strategies for solving two-and three-dimensional combinatorial problems. In *Stepping Stones for the 21st Century* (pp. 139-158). Brill Sense.

Eysenck, M.: (1984). *A Handbook of Cognitive Psychology*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 5, 193-198.

Fischbein, E. & Grossman A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34: 27-47.

Ηλιόπουλος, Α. & Λαζαρίδης, Σ., (1998). *Μαθηματικά Άλγεβρα 4ης Δέσμης*. Αθήνα: Κορφή

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking: From childhood to adolescence* (A. Parsons & S.Milgram, Trans.). London: Routledge and Kegan Paul.

Καλαβάσης, Φ. & Μούτσιος- Ρέντζος, Α., (2015). *Ανάμεσα στο μέρος και στο όλο: Αναστοχαστική Οικοδόμηση Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Gutenberg

Krekić-Pinter, V., Ivanović, J., Namestovski, Ž., & Major, L. (2015). Strategy and methods for solving combinatorial problems in initial instruction of mathematics. *International Journal of Modern Education Research*, 2(6), 77-87.

Lesh, R.A., & Heger, M. (2001). Mathematical abilities that are most needed for success beyond school in a technology based age of information. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 38(2).

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Palmér, H., & van Bommel, J. (2018). The role of and connection between systematization and representation when young children work on a combinatorial task. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 562-573.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. (L. Leake, P. Burell, and H. D. Fishbein, Trans.). Routledge & Kegan Paul. (Original work published in 1951).

Scardamalia, M. (1977). Information processing capacity and the problem of horizontal decalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. *Child Development*, *48*, 28 37.

Σιακαλλή Μ. Α. (2013). *Ανάπτυξη Νοητικών Δεξιοτήτων Τετράχρονων Παιδιών, Μέσα Από Διαδικασίες Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος*. Διδακτορική Διατριβή. Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών Τμήμα Επιστημών Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία: Πάτρα.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΗΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΔΙΑΛΕΞΗ ΜΕΣΩ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΣΕΩΝ: ΜΙΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Καράβη Θωμαΐς, Μάλη Αγγελική

University of Groningen, Faculty of Science and Engineering, the Netherlands

t.karavi@rug.nl, a.mali@rug.nl

Η εργασία μελετά τη βιβλιογραφία γύρω από τη διδασκαλία στην πανεπιστημιακή διάλεξη μέσω κοινωνικοπολιτισμικών θεωρήσεων και επικεντρώνεται στις μελέτες που συνδέουν τη διδασκαλία με τη μάθηση των φοιτητών. Η ανασκόπηση καταλήγει σε δύο βασικά συμπεράσματα. Στην πλειοψηφία τους οι μελέτες επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν είτε τη θεωρία δραστηριότητας είτε το commognition. Οι μελέτες που χρησιμοποιούν commognition χωρίζονται σε δύο χρονικές περιόδους, την προγενέστερη που εστιάζει σε συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο και τη μεταγενέστερη όπου η διδασκαλία μελετάται συνολικά.

Αν και παραδοσιακή, η διδασκαλία σε διαλέξεις είναι ο κυρίαρχος τρόπος διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο (π.χ., Petropoulou et al., 2020). Σε αυτό το πλαίσιο, ο διδάσκων μιλάει μπροστά από μεγάλες ομάδες φοιτητών, οι οποίοι ακούν παθητικά και αντιγράφουν συνήθως τις σημειώσεις από τον πίνακα (π.χ., Jaworski et al., 2017). Οι Speer, Smith και Horvath (2010) εντόπισαν έλλειψη εμπειρικών ερευνών για το χαρακτηρισμό της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο και προέτρεψαν τους ερευνητές να προχωρήσουν σε εμπειρικές μελέτες. Έξι χρόνια αργότερα, οι Biza et al. (2016) σχολίασαν το όλο και αυξανόμενο ενδιαφέρον των ερευνητών για την έρευνα της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο. Στη μελέτη τους κατηγοριοποίησαν τις έρευνες σε τρεις κατηγορίες: επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών, διδασκαλία και σχέση με τους στόχους και προθέσεις του διδάσκοντος, και τα χαρακτηριστικά της πανεπιστημιακής διδασκαλίας.

Έξι χρόνια μετά, οι εμπειρικές μελέτες για τη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο είναι σαφώς περισσότερες. Σε αυτό άρθρο εστιάζουμε σε έρευνες που χρησιμοποιούν κοινωνικοπολιτισμικά πλαίσια για την μελέτη της διδασκαλίας στις διαλέξεις των οποίων τα ερευνητικά ερωτήματα συνδέουν τη διδασκαλία με την οπτική των διδασκόντων για τη μάθηση των φοιτητών. Επιπλέον αντιλαμβανόμενες την πρόσφατη κοινωνικοπολιτισμική στροφή στην επικοινωνία και το λόγο των διδασκόντων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας δίνουμε έμφαση στο νεοεισερχόμενο θεωρητικό πλαίσιο, commognition (Sfard, 2008) και στις έρευνες που το χρησιμοποιούν. Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρουν οι έρευνες οι οποίες δείχνουν πως ο μονόλογος του διδάσκοντος στις διαλέξεις μπορεί να λαμβάνει υπόψιν τη μάθηση των φοιτητών.

Επομένως, τα ερευνητικά ερωτήματα αυτής της βιβλιογραφικής ανασκόπησης είναι τα ακόλουθα:

1. Ποιες πτυχές της διδασκαλίας με στόχο τη μάθηση των φοιτητών σε διάλεξη αναδείχθηκαν μέσω των κοινωνικοπολιτισμικών θεωρήσεων τα τελευταία 12 χρόνια;
2. Ποιες πτυχές της διδασκαλίας σε διάλεξη φωτίζουν οι έρευνες που χρησιμοποιούν commognition;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για τη συγκεκριμένη βιβλιογραφική ανασκόπηση αναζητήσαμε έρευνες (άρθρα) σε πλατφόρμες όπως Google Scholar, ERIC, SmartCat. Αναζητήσαμε μελέτες μετά το 2010. Χρησιμοποιήσαμε συνδυασμούς από τις παρακάτω λέξεις κλειδιά: «εμπειρικός», «κοινωνικοπολιτισμικός», «πανεπιστήμιο», «διάλεξη», «διδάσκων στο πανεπιστήμιο (lecturer/ instructor)», «προπτυχιακός (undergraduate)». Έπειτα αναζητήσαμε σχετικές μελέτες σε περιοδικά της διδακτικής μαθηματικών. Από την έρευνα συγκεντρώσαμε περισσότερα από 50 άρθρα από τα οποία 34 επιλέχθηκαν (με κριτήρια όπως η σχέση με τη διδακτική μαθηματικών) και κατηγοριοποιήθηκαν. Στην συγκεκριμένη εργασία αναφέρουμε δύο από τις κατηγορίες (έρευνες της διδασκαλίας μέσω των κοινωνικοπολιτισμικών θεωρήσεων με στόχο τη μάθηση των φοιτητών και έρευνες που χρησιμοποιούν commognition για τη μελέτη της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο). Συνολικά παρουσιάζονται 12 έρευνες.

ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΕ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

Είναι μια ερευνητική πρόκληση η μελέτη της μάθησης των φοιτητών κατά την παρατήρηση της διδασκαλίας στις διαλέξεις λόγω της μονόπλευρης επικοινωνίας μεταξύ διδάσκοντος και φοιτητών. Οι έρευνες που ακολουθούν χρησιμοποίησαν την θεωρία δραστηριότητας (activity theory) ως θεωρητικό πλαίσιο για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση. Οι Jaworski et al. (2017) εξέτασαν με απευθείας παρατήρηση τη διδασκαλία των μαθηματικών σε πανεπιστημιακό επίπεδο, αναζητώντας έναν σε βάθος χαρακτηρισμό των διδακτικών δράσεων που σχετίζονται με τη δημιουργία νοημάτων (κατανόηση) των φοιτητών. Η σχέση αυτή μελετήθηκε από την παιδαγωγική οπτική του διδάσκοντα με συνεντεύξεις και παρατηρήσεις των διαλέξεων. Επιπλέον, οι Petropoulou et al. (2020) χαρακτήρισαν διδακτικές δράσεις σε σχέση με τις μαθησιακές ανάγκες των φοιτητών σε μαθηματικά που διδάσκονται στις διαλέξεις τμημάτων Μαθηματικών στην

Ελλάδα. Αυτές οι μαθησιακές ανάγκες ερμηνεύθηκαν από το σχεδιασμό των διαλέξεων με χρήση της θεωρίας δραστηριότητας και της διδακτικής τριάδας (Jaworski et al., 2017). Επίσης, η Treffert-Thomas (2015) προσέφερε μια θεώρηση της διδακτικής πρακτικής στις διαλέξεις ενός μαθήματος Γραμμικής Άλγεβρας. Η κοινωνικοπολιτισμική προοπτική επέτρεψε στην ερευνήτρια την κατανόηση και ερμηνεία των διδακτικών δράσεων ώστε να απαντήσει στην ερώτηση «Τι σημαίνει διδάσκω γραμμική άλγεβρα στο πανεπιστήμιο;» (σελ. 56). Δεδομένου αυτού του σχεδιασμού, αναπτύχθηκε ένα μοντέλο διδασκαλίας που συνδύαζε τους στόχους όπως τους εξέφρασε ο διδάσκων και τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας.

Μελετώντας διαλέξεις και σεμινάρια (tutorials), σε Ελλάδα και Μεγάλη Βρετανία, οι Mali και Petropoulou (2017) ανέπτυξαν ένα εννοιολογικό πλαίσιο που αποτελείται από κατηγορίες διδακτικών δράσεων, χρησιμοποιώντας την θεωρία της δραστηριότητας και την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Οι κατηγορίες αφορούν στην Επιλογή, Επεξήγηση, Επέκταση και Αξιολόγηση. Το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο επέτρεψε την ανάλυση ενός «ευρύτερου πλαισίου» που λαμβάνει υπόψιν «τα διαφορετικά πλαίσια διδασκαλίας και χώρες, και τις κοινές διδακτικές δράσεις και τα σχετικά εργαλεία σε αυτές» (σελ. 26). Το ευρύτερο πλαίσιο σε αυτήν την περίπτωση βοήθησε στην κατανόηση των διδακτικών δράσεων. Κατά συνέπεια, οι κατηγορίες του πλαισίου παρείχαν μια λεπτομερή ανάλυση της διδασκαλίας στο πανεπιστημιακό επίπεδο και μπορούν να εφαρμοστούν σε διαφορετικά περιβάλλοντα (δηλαδή σε σεμινάρια, διαλέξεις) και διαφορετικές χώρες.

Επίσης από κοινωνικοπολιτισμική σκοπιά αλλά χρησιμοποιώντας διαφορετικό θεωρητικό πλαίσιο από τις προηγούμενες μελέτες, η Hemmi (2010) περιέγραψε τις παιδαγωγικές οπτικές των διδασκόντων κατά τη διδασκαλία της απόδειξης με δεδομένα από συνεντεύξεις μαζί τους. Η ερευνήτρια εξέτασε τα δεδομένα από την οπτική της κοινωνικής πρακτικής (social practice perspective) (Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998) και υποστήριξε ότι η απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τεχνούργημα (artefact) στη μαθηματική πρακτική που μεσολαβεί μεταξύ του ατόμου και της κοινωνικής πρακτικής (π.χ. στην κοινότητα του τμήματος μαθηματικών που συμμετείχε στην έρευνα). Ένα εννοιολογικό πλαίσιο δημιουργήθηκε από το συνδυασμό της οπτικής της κοινωνικής πρακτικής με την υπάρχουσα βιβλιογραφία στη διδασκαλία και την εκμάθηση της απόδειξης, που αποτελείται από τα ζευγάρια induction/ deduction, intuition/ formality, and invisibility/ visibility. Από την ανάλυση, τρία διδακτικά στυλ εντοπίστηκαν (progressive, deductive, and classical) που υπογράμμισαν τις παιδαγωγικές απόψεις των διδασκόντων σχετικά με τη διδασκαλία της απόδειξης. Αυτή η μελέτη υπογράμμισε τη σημασία της μελέτης της διδασκαλίας της απόδειξης εντός των κοινωνικοπολιτισμικών προοπτικών, που έως σήμερα δεν έχει διερευνηθεί σε μεγάλο βαθμό.

Η αναφορά στις παραπάνω μελέτες έχει ως στόχο να τονίσει τα οφέλη της μελέτης της διδασκαλίας σε διαλέξεις μέσω της κοινωνικοπολιτισμικής οπτικής. Όλες οι μελέτες χαρακτήρισαν σε βάθος τους στόχους και τις πρακτικές των διδασκόντων. Ο σε βάθος χαρακτηρισμός προσέφερε καλύτερη κατανόηση της διδασκαλίας σε πανεπιστημιακό επίπεδο και υπογράμμισε την αλληλεπίδραση των διδασκόντων με το περιβάλλον της διδασκαλίας και της μάθησης.

ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΕ COMMOGNITION

Από το 2008, πολλοί ερευνητές στράφηκαν στη μελέτη της επικοινωνίας και της γλώσσας στις διαλέξεις, χρησιμοποιώντας ως κοινωνικοπολιτισμικό θεωρητικό πλαίσιο το commognition (Sfard, 2008). Η βασική αρχή αυτού του πλαισίου είναι ότι η σκέψη μπορεί να θεωρηθεί ως επικοινωνία ενός ατόμου με τον εαυτό του (Sfard, 2008). Τα μαθηματικά είναι ένας ιστορικά καθιερωμένος λόγος (discourse) που υποδηλώνει μια πράξη επικοινωνίας. Συμμετοχή στο λόγο σημαίνει ότι μπορείς να μιλάς για τα μαθηματικά αντικείμενα του λόγου που εμφανίζονται και έχουν νόημα μέσα στον μαθηματικό λόγο. Κάθε (μαθηματικός) λόγος διακρίνεται από τη χρήση λέξεων (word use) της κοινότητας, τους οπτικούς μεσολαβητές (visual mediators), τις (εσωτερικευμένες) αφηγήσεις ((endorsed) narratives) και τις ρουτίνες (routines) (Sfard, 2008, σελ. 133-135).

Οι κανόνες του λόγου μπορεί να είναι object-level ή meta-discursive (metarules) (Sfard, 2008). Πιο συγκεκριμένα, οι object-level κανόνες είναι «αφηγήσεις σχετικά με τις κανονικότητες στη συμπεριφορά των αντικειμένων του λόγου» (Sfard, 2008, σελ. 201). Οι metarules είναι αφηγήσεις που «ορίζουν μοτίβα στη δραστηριότητα των ομιλητών στην προσπάθεια παραγωγής και να τεκμηρίωσης object-level αφηγήσεων» (Sfard, 2008, σελ. 201). Οι metarules σχετίζονται με το τι κάνει ο συμμετέχοντας ενώ έχουν την δυνατότητα να εξελιχθούν με το χρόνο και την εμπλοκή στο λόγο και να διαφοροποιηθούν. Δεδομένων αυτών, δύο τύποι μάθησης εμφανίζονται στο commognition, η object-level and η meta-level μάθηση. Η object-level μάθηση αντικατοπτρίζει μια αύξηση στον αριθμό και την πολυπλοκότητα των εσωτερικευμένων αφηγήσεων και ρουτίνων ενός λόγου όπου το άτομο είναι ήδη εξοικειωμένο. Το αποτέλεσμα είναι μια «ενδογενής επέκταση του λόγου» (Sfard, 2008, σελ. 300). Η meta-level μάθηση έχει να κάνει με την αλλαγή στους metarules του λόγου και αντικατοπτρίζει τη μετάβαση σε ένα νέο (για το άτομο) λόγο. Η αλλαγή είναι «εξωγενής» (Sfard, 2008, σελ. 256) που σημαίνει ότι οι προηγουμένως αποδεκτές αφηγήσεις και κανόνες του οικείου λόγου αλλάζουν ώστε να ταιριάζουν στο νέο λόγο.

Στις επόμενες παραγράφους, εμφανίζονται μελέτες που χρησιμοποίησαν το commognition για τη διερεύνηση της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο. Οι έρευνες χωρίζονται σε δύο περιόδους, η πρώτη περίοδος (2008-2018) αφορά στις αρχικές έρευνες με commognition, ενώ η δεύτερη περίοδος (2019-σήμερα) αφορά στις μεταγενέστερες έρευνες με commognition.

Στις πρώτες του έρευνες, ο Viirman (2014, 2015) μελέτησε τις πρακτικές διδασκαλίας μιας ομάδας διδασκόντων κατά τη διδασκαλία των συναρτήσεων σε εισαγωγικά πανεπιστημιακά μαθήματα. Ο ερευνητής εντόπισε τις διαφορετικές ρουτίνες των μαθηματικών και παιδαγωγικών λόγων των διδασκόντων αναλύοντας τις απομαγνητοφωνήσεις των διαλέξεων και αναζητώντας «μοτίβα και χαρακτηριστικά της χρήσης μαθηματικών και διδακτικών αφηγήσεων» (2015, σ. 1170). Μέσα στο μαθηματικό λόγο εμφανίστηκε η κατηγοριοποίηση των construction ρουτίνων (που στοχεύουν στη δημιουργία νέων εσωτερικευμένων αφηγήσεων) και substantiation ρουτίνων (που επικεντρώνονται στην απόφαση να επικυρωθεί μια αφήγηση). Η μελέτη υπογράμμισε ότι παρά το γεγονός ότι οι διαλέξεις φαίνονταν παρόμοιες, με τους διδάσκοντες να μιλάνε και να γράφουν στον πίνακα, εντοπίστηκαν διαφορές στις πρακτικές και στον τρόπο επικοινωνίας των μαθηματικών. Αυτές οι διαφορές αφορούσαν στη συχνότητα εμφάνισης των ρουτίνων στη διάλεξη και στον διαφορετικό χαρακτήρα τους, που αποτελούνταν από τους διαφορετικούς τύπους ρουτίνων. Στη συνέχεια (2015), εξετάστηκε ο παιδαγωγικός λόγος των διδασκόντων. Από την ανάλυση προέκυψαν οι ακόλουθες ρουτίνες: typologies of explanation, motivation, και question posing. Στον παιδαγωγικό λόγο των μαθηματικών αντικειμένων (π.χ. συναρτήσεις), οι διδάσκοντες χρησιμοποίησαν τις ρουτίνες με «διαφορετικούς τρόπους και σε διαφορετικό βαθμό» (σελ. 1177) συμφωνώντας με την παρατήρηση της πρώτης μελέτης. Στα δύο άρθρα, ο προσδιορισμός των ρουτίνων στους μαθηματικούς και παιδαγωγικούς λόγους συνέβαλε στον χαρακτηρισμό των διδακτικών πρακτικών των διδασκόντων.

Η Güçler (2013) εντόπισε και συνέκρινε τα χαρακτηριστικά των λόγων (discourses) στα όρια, τόσο των φοιτητών όσο και του διδάσκοντα σε εισαγωγικά μαθήματα απειροστικού λογισμού, επισημαίνοντας τις περιπτώσεις που η επικοινωνία απέτυχε. Η ερευνήτρια εστίασε στους metarules και προσδιόρισε τις δύο περιστάσεις που η επικοινωνία απέτυχε: κατά τον άτυπο ορισμό του ορίου και κατά τον υπολογισμό των ορίων. Κατά τη διάρκεια αυτών, ο διδάσκων «μετατόπισε» τα στοιχεία του λόγου για την υποστήριξη των αφηγήσεων «το όριο είναι ένας αριθμός» και το «όριο είναι μια διαδικασία». Οι φοιτητές είχαν τους ίδιους metarules, λέξεις και οπτικούς μεσολαβητές για την εσωτερίκευση των ίδιων αφηγήσεων για το όριο με τον διδάσκοντα. Όμως, αυτά τα χαρακτηριστικά του λόγου τους δεν ήταν τόσο συνεκτικά όσο του διδάσκοντα, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μετάβαση από τη δυναμική στις πιο στατικές πτυχές του ορίου.

Ο Park (2015) εξέτασε τρεις διδάσκοντες κατά τη διδασκαλία της παραγώγου, δίνοντας έμφαση στη μετάβαση από τη παράγωγο σε σημείο στην παράγωγο ως συνάρτηση σε διάστημα, θέμα που οι φοιτητές θεωρούν δύσκολο. Μέσω της ανάλυσης των διαλέξεων, ο ερευνητής εντόπισε στοιχεία του ορισμού της παραγώγου (π.χ., συναρτήσεις, πηλίκο διαφοράς και όριο, παράγωγο) και μοτίβα που συνέδεαν τα διαφορετικά στοιχεία, προσδιορίζοντας επίσης τις οπτικές αναπαραστάσεις (σύμβολα, γραφήματα, χειρονομίες, αλγεβρικές αναπαραστάσεις) των διδασκόντων. Ωστόσο, ο λόγος των διδασκόντων επικεντρώθηκε στις συμβολικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις της παραγώγου. Πραγματοποιήθηκε περιορισμένη συζήτηση στις διαλέξεις σχετικά με τις διαφοροποιήσεις της παραγώγου ως συνάρτηση και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, ενώ οι διδάσκοντες χρησιμοποίησαν περιορισμένα παραδείγματα για την αιτιολόγηση των ιδιοτήτων της παραγώγου. Επιπλέον, παρά την χρήση αρκετών γραφημάτων καμπυλών (π.χ., γραμμές ακινητοποίησης, εφαπτομένη γραμμή) δεν παρουσιάστηκαν οι συνδέσεις μεταξύ τους. Η χρήση των λέξεων και των οπτικών αναπαραστάσεων των διδασκόντων χαρακτήρισε τις ρουτίνες και τις αφηγήσεις του διδακτικού τους λόγου. Ο ερευνητής, μέσω των παραπάνω ευρημάτων προσπάθησε να συνδέσει τη διδασκαλία με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές με την παράγωγο.

Στο επίκεντρο αυτών των μελετών ήταν η επικοινωνία μεταξύ των διδασκόντων και των φοιτητών, σε μια προσπάθεια των πρώτων να εισαγάγουν τους δεύτερους στον νέο (για τους φοιτητές) μαθηματικό λόγο. Το commognition προσέφερε τη γλώσσα και τα αναλυτικά εργαλεία για τη διερεύνηση των πρακτικών διδασκαλίας στο λόγο των διδασκόντων και να προσδιορίσει πότε και πώς συνέβη η επικοινωνία, αλλά και πότε απέτυχε και δημιούργησε παρανοήσεις στους φοιτητές.

Οι μελέτες που εξετάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους επικεντρώθηκαν στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών (συνάρτηση, όριο, παράγωγο) που μπορούν να διερευνηθούν με commognition. Πιο πρόσφατα, η ατζέντα των ερευνητών διεύρυνε την εστίαση της για να εξετάσει τη διάλεξη σαν σύνολο, δίνοντας έμφαση στις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται από τους διδάσκοντες στις διαλέξεις. Στις επόμενες παραγράφους εξετάζονται οι πιο πρόσφατες μελέτες.

Ο Viirman (2021) διερεύνησε τις πανεπιστημιακές διαλέξεις εστιάζοντας στον μαθηματικό λόγο της διάλεξης σε μια προσπάθεια μοντελοποίησης της μαθηματικής συμπεριφοράς των διδασκόντων προς τους φοιτητές μέσω του εντοπισμού των metarules. Αυτή η μελέτη διαφέρει από τις προηγούμενες (2014, 2015) του ερευνητή που είχαν επικεντρωθεί στον χαρακτηρισμό των διδακτικών πρακτικών. Σε αυτή τη μελέτη, επικεντρώθηκε στους κανόνες του «να κάνει κανείς μαθηματικά» έχοντας ως μονάδα ανάλυσης τις δράσεις μέσα στο λόγο. Από την ανάλυση προέκυψε ένας αριθμός metarules στον μαθηματικό λόγο που είτε ήταν εσωτερικευμένοι (εμφανίστηκαν ρητά στο λόγο των διδασκόντων) είτε εκτελέστηκαν υπόρρητα από τους διδάσκοντες (υπονοούμενοι από στη δραστηριότητα του λόγου). Όλοι οι metarules που προσδιορίστηκαν είχαν ως σκοπό να παράγουν ή να τεκμηριώσουν μια αφήγηση για ένα μαθηματικό αντικείμενο. Η ενημερότητα σχετικά με την ύπαρξη των metarules θα μπορούσε να βοηθήσει τους διδάσκοντες στην συνειδητοποίηση της επιρροής του λόγου τους στον τρόπο που οι φοιτητές εμπλέκονται με τα μαθηματικά, ενθαρρύνοντας τον προβληματισμό των διδασκόντων σχετικά με τη διδασκαλία τους.

Ο Pinto (2019) μελέτησε την έκταση και τη φύση των εμφανίσεων τυπικού και άτυπου περιεχομένου μαθηματικών δύο βοηθών διδασκαλίας (teaching assistants - TAs) που παρουσιάστηκαν στα σεμινάρια τους (tutorials) με μορφή διαλέξεων, ενώ μοιράζονταν την ίδια ατζέντα. Ο ερευνητής διερεύνησε τον μαθηματικό λόγο των TAs, εστιάζοντας στη μεταβλητότητα των ευκαιριών για object-level ή meta-level μάθηση. Οι προσαρμογές στο μάθημα σε επίπεδο object-level μάθησης παρείχαν διαφορετικές ευκαιρίες για τη meta-level μάθηση των φοιτητών. Ο ερευνητής διαπίστωσε ότι η επικοινωνία μεταξύ των TAs κατά την προετοιμασία του μαθήματος ήταν για την object-level μάθηση και όχι για τη meta-level μάθηση καθώς οι TAs εστίαζαν κυρίως στις μαθηματικές αφηγήσεις και σπάνια στη μαθηματική λογική πίσω από αυτές.

Τέλος, ο Kontorovich (2021) επικεντρώθηκε στην επικοινωνία μεταξύ του διδάσκοντος και των φοιτητών, και μεταξύ του διδάσκοντος και του ερευνητή της Διδακτικής των μαθηματικών. Ο ερευνητής ενδιαφερόταν για τα πλεονεκτήματα της συνεργασίας των ερευνητών με τους διδάσκοντες και ισχυρίστηκε ότι η χρήση κατάλληλων οργανωτικών πλαισίων μπορεί να αυξήσει την ευαισθητοποίηση των διδασκόντων για τις πρακτικές διδασκαλίας και να βοηθήσει την έρευνα για τη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο. Ο λόγος (discourse) που εξετάστηκε ήταν ο διδακτικός λόγος για την απόδειξη (DDP), ο οποίος αφορά στον παιδαγωγικό λόγο και αποτελείται από μαθηματικά στοιχεία (τι θεωρεί κάποιος ως απόδειξη και πώς την παράγει) και παιδαγωγικά στοιχεία (σχετικά με τη διευκόλυνση της συμμετοχής του νεοεισερχόμενου στην αποδεικτική διαδικασία).

Εστιάζοντας στο DDP, ο ερευνητής ανέλυσε την ανατροφοδότηση του διδάσκοντα στις αποδείξεις των γραπτών των φοιτητών μέσω μιας μελέτης περίπτωσης. Η μελέτη περίπτωσης βοήθησε τον ερευνητή να απεικονίσει τα οφέλη του οργανωτικού πλαισίου για την επικοινωνία και τη συνεργασία μεταξύ ερευνητών και μαθηματικών για τη δημιουργία των αφηγήσεων και υπογράμμισε τα χαρακτηριστικά της ανατροφοδότησης του διδάσκοντα που αφορούσαν κυρίως στην ιδέα και στην αναπαράσταση της απόδειξης.

Σε αυτές τις τρεις μελέτες που δημοσιεύθηκαν πρόσφατα, εντοπίζεται μια αλλαγή στην ερευνητική εστίαση από το συγκεκριμένο πλαίσιο (συναρτήσεις, παράγωγο, όριο), στη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο που ίσως διευκολύνει τη μάθηση των φοιτητών. Η χρήση του commognition υπογράμμισε μια επικοινωνιακή πτυχή της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο ακόμη και αν υπάρχει έλλειψη διαλόγου στις διαλέξεις. Πιο συγκεκριμένα, η ανάλυση των metarules του Viirman (2021) πρόσφερε μια κατανόηση των πρακτικών διδασκαλίας των διδασκόντων στις διαλέξεις. Η εργασία του Pinto (2019) άνοιξε μια συζήτηση για τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται από τους διδάσκοντες κατά την πανεπιστημιακή διδασκαλία. Τέλος, ο Kontorovich (2021) υπογράμμισε τις επικοινωνιακές πτυχές της ανατροφοδότησης των διδασκόντων. Συνολικά, η μελέτη με commognition προσφέρει στη συζήτηση για τη διδασκαλία σε σχέση με τη μάθηση των φοιτητών σε περιπτώσεις που η επικοινωνία γίνεται κυρίως από τον διδάσκοντα.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα βιβλιογραφική ανασκόπηση επικεντρώθηκε στις μελέτες της διδασκαλίας σε διαλέξεις με ερευνητικά ερωτήματα που συνδέουν τη διδασκαλία με τη μάθηση των φοιτητών στο πανεπιστήμιο. Δύο ήταν τα βασικά ευρήματα της εργασίας. Αρχικά, στην πλειοψηφία τους οι εμπειρικές μελέτες που επιλέγουν να μελετήσουν τη διδασκαλία μέσω της κοινωνικοπολιτισμικής θεώρησης, την τελευταία δεκαετία, επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν είτε τη θεωρία δραστηριότητας είτε το commognition. Με τα δύο αυτά θεωρητικά πλαίσια μελετήθηκαν τόσο οι συνεντεύξεις των διδασκόντων όσο και τα δεδομένα από την παρατήρηση των διαλέξεων. Από τις έρευνες αυτής της ανασκόπησης μόνο η Hemmi (2010) χρησιμοποίησε την οπτική της κοινωνικής πρακτικής και μελέτησε τις συνεντεύξεις των διδασκόντων. Επίσης, οι μελέτες που χρησιμοποίησαν ως θεωρητικό πλαίσιο το commognition χωρίστηκαν σε αυτή τη βιβλιογραφική ανασκόπηση σε δύο κατηγορίες, σε αυτές μεταξύ 2008-2018 και στις μεταγενέστερες. Την πρώτη δεκαετία εμφάνισης του commognition οι ερευνητές επέλεξαν να εστιάσουν σε συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο (π.χ., συναρτήσεις). Τη δεκαετία που διανύουμε, όμως, οι έρευνες άνοιξαν την εστίαση τους μελετώντας τη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο που ίσως διευκολύνει τη μάθηση των φοιτητών. Συμπερασματικά, η μελέτη μέσω κοινωνικοπολιτισμικών θεωρήσεων μπορεί να προσφέρει μία σε βάθος κατανόηση της διδασκαλίας στην πανεπιστημιακή διάλεξη που στοχεύει στη μάθηση των φοιτητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. S., & Rasmussen, C. (2016). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level*. Springer Nature.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 439–453.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 271-291

Jaworski, B., Mali, A., & Petropoulou, G. (2017). Critical theorising from studies of undergraduate mathematics teaching for students' meaning making in mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 168-197.

Kontorovich, I. (2021). Minding mathematicians' discourses in investigations of their feedback on students' proofs: a case study. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10035-2

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press.

Mali, A., & Petropoulou, G. (2017). Characterising undergraduate mathematics teaching across settings and countries: An analytical framework. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *22*(4), 23-42.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 182-198.

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics*, *89*(2), 233–250

Petropoulou, G., Jaworski, B., Potari, D., & Zachariades, T. (2020). Undergraduate mathematics teaching in first year lectures: can it be responsive to student learning needs? *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(3), 347-374.

Pinto, A. (2019). Variability in the formal and informal content instructors convey in lectures. *The Journal of Mathematical Behavior*, *54*, 100680.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2014). University mathematics as a discourse - why, how, and what for? *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 199–203.

Speer, N. M., Smith, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*, 99–114.

Treffert-Thomas, S. (2015). Conceptualising a university teaching practice in an activity theory perspective. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(2), 53–77.

Viirman, O. (2014). The functions of function discourse – University mathematics teaching from a commognitive standpoint. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(4), 512–527.

Viirman, O. (2015). Explanation, motivation and question posing routines in university mathematics teachers' pedagogical discourse: a commognitive analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(8), 1165–1181.

Viirman, O. (2021). University Mathematics Lecturing as Modelling Mathematical Discourse. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-24.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge University Press.

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΌΤΗΤΑΣ: Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ

Ραφτογιάννη Θάλεια, Τριανταφύλλου Χρυσαυγή

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

raftthal@gmail.com, chrtriantaf@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία μελετά τους τρόπους που μαθητές Β΄Λυκείου νοηματοδοτούν την έννοια της περιοδικότητας. Αφού αναζητήθηκε η εικόνα της έννοιας που είχαν αποκομίσει οι μαθητές από τις σχολικές και εξωσχολικές εμπειρίες τους στη συνέχεια τους δόθηκαν δυο ορισμοί της περιοδικής συνάρτησης (γεωμετρικός, αλγεβρικός) και τους ζητήθηκε να αιτιολογήσουν την περιοδική συμπεριφορά μη οικείων σε αυτούς γραφημάτων. Τα ερευνητικά δεδομένα αναλύθηκαν με βάση το θεωρητικό πλαίσιο των Vinner και Tall. Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν ότι οι μαθητές είχαν συνδέσει την εικόνα της έννοιας με την περιοδική κίνηση και ότι η χρήση των δύο ορισμών βοήθησε στην εξέλιξη αυτής της εικόνας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αξιωματική θεμελίωση της μαθηματικής γνώσης στην βάση μιας λογικής-παραγωγικής δομής, καθιστά τους μαθηματικούς ορισμούς σημαντικούς και σε επίπεδο επιστημονικό αλλά και διδακτικό. Οι ορισμοί αποτελούν το μέσο προσδιορισμού μιας έννοιας, των ιδιοτήτων της αλλά και της κλάσης αντικειμένων που συνδέονται με αυτήν (Winicki & Leikin, 2000). Επιπλέον, σε διδακτικό επίπεδο ο ορισμός μιας έννοιας συνδέεται με τρόπους νοηματοδότησης της έννοιας και την ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου των μαθητών (Bayda & Sutliff, 2020). Οι Dormolen και Zaslavsky (2003) προτείνουν ως καλή διδακτική πρακτική οι μαθητές αρχικά να έρχονται σε επαφή με ένα διαισθητικό ορισμό μιας έννοιας ο οποίος υποστηρίζεται από προσεκτικά επιλεγμένα παραδείγματα ώστε οι μαθητές να νιώσουν αυτοπεποίθηση και στη συνέχεια να εμπλακούν σε συζητήσεις που οδηγούν στον καθορισμό της έννοιας με πιο τυπικό τρόπο.

Μια από τις κεντρικές μαθηματικές έννοιες είναι η έννοια της περιοδικότητας. Μια έννοια με έντονο διαισθητικό χαρακτήρα και διεπιστημονική ταυτότητα. Μια ταυτότητα που την καθιστά κεντρική για τα αναλυτικά σχολικά προγράμματα. Έτσι οι μαθητές την συναντούν αδιαλείπτως κατά την διάρκεια της σχολικής τους ζωής. Με αφετηρία τα αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα φθάνουν στην μελέτη των περιοδικών κινήσεων (Φυσική) και τις περιοδικές συναρτήσεις (Μαθηματικά) στις Λυκειακές τάξεις. Παρόλα αυτά, πολλοί ερευνητές αναφέρονται σε δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην αναγνώριση του αν μια μεταβολή είναι περιοδική ή όχι (Buendia & Cordero, 2005; Dreyfus & Eisenberg, 1980). Οι Dormolen και Zaslavsky (2003) προτείνουν δυο ορισμούς της περιοδικής συνάρτησης. Τον τυπικό ορισμό, που συναντάται στο σχολικό βιβλίο της άλγεβρας και τον ονομάζουν *'Αλγεβρικό ορισμό'* και ένα άτυπο ορισμό που εκφράζει μια διαισθητική και γεωμετρική αντίληψη της έννοιας τον οποίο ονομάζουν *'Γεωμετρικό ορισμό'* και εξυπηρετεί παιδαγωγικούς σκοπούς.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω ερευνητικά αποτελέσματα σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ένα διδακτικό πείραμα (Steffe & Thomspon, 2000) σε μαθητές Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου πριν τη διδασκαλία των περιοδικών συναρτήσεων. Το διδακτικό πείραμα πραγματοποιήθηκε σε 3 φάσεις. Στην $1^{η}$ φάση (φάση διερεύνησης) αναζητήθηκε ο τρόπος που νοηματοδοτούν οι μαθητές την έννοια της περιοδικότητας μέσα από τη σχολική και εξωσχολική εμπειρία τους. Στη $2^{η}$ φάση (εισαγωγή της νέας έννοιας) δόθηκαν οι δύο ορισμοί της περιοδικής συνάρτησης των Dormolen και Zaslavsky (2003). Στην $3^{η}$ ερευνητική φάση (εφαρμογή της έννοιας) οι μαθητές κλήθηκαν να αιτιολογήσουν την περιοδική (ή μη περιοδική) συμπεριφορά μη οικείων σε αυτούς γραφικών αναπαραστάσεων με τη βοήθεια των δύο ορισμών. Έτσι διαμορφώθηκαν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα: ΕΕ1 : Ποια είναι η αρχική νοηματοδότηση της έννοιας που έχουν αναπτύξει οι μαθητές από την σχολική και εξωσχολική εμπειρία τους; ΕΕ2: Πώς οι μαθητές εξελίσσουν τους τρόπους που νοηματοδοτούν την έννοια στην προσπάθεια να συνδέσουν αναπαραστάσεις της έννοιας με τους δύο ορισμούς της, τον αλγεβρικό και τον γεωμετρικό;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Γνωρίζοντας την κεντρική θέση των μαθηματικών ορισμών πολλοί ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών (De Villiers, 1998; Winicki-Landman & Leikin, 2000) έχουν ασχοληθεί με τον τρόπο χρήσης τους μέσα στη σχολική τάξη. Ο De Villiers (1998) θεωρεί την διαμόρφωση ενός ορισμού [defining] κεντρική δραστηριότητα στη σχολική τάξη των μαθηματικών ισάξια με άλλες μαθηματικές διεργασίες όπως η επίλυση προβλήματος και η απόδειξη.

Concept Definition ⟷ Concept Image

Διάγραμμα 1 : Μακροχρόνιες διεργασίες διαμόρφωσης της έννοιας

Οι Tall και Vinner (1981) μελέτησαν τις γνωστικές διεργασίες που λαμβάνουν μέρος κατά τη νοηματοδότηση μιας έννοιας. Για αυτό τον σκοπό αναγνώρισαν για κάθε μαθηματική έννοια την *εικόνα της έννοιας* [concept image] και τον *ορισμό της έννοιας* [concept definition]. Η εικόνα της έννοιας είναι η συνολική νοητική δομή όπου περιλαμβάνει λεκτικές, συμβολικές και οπτικές αναπαραστάσεις της έννοιας καθώς και ιδιότητες που σχετίζονται με αυτήν. Χτίζεται στο πέρασμα των χρόνων μέσα από όλων των ειδών τις εμπειρίες καθώς το άτομο εξελίσσεται και ωριμάζει. Ο ορισμός της έννοιας είναι ένα σύνολο λέξεων και συμβόλων που χρησιμοποιούνται από τον εκπαιδευτικό/σχολικό εγχειρίδιο για να οριστεί μια μαθηματική έννοια. Ο ορισμός της έννοιας για κάθε μαθητή μπορεί να είναι *ο τυπικός ορισμός της έννοιας* [formal concept definition] ή μια προσωπική ανακατασκευή του τυπικού ορισμού, αυτό που οι Tall και Vinner καλούν *προσωπικό ορισμό της έννοιας* [personal concept definition]. Ταυτόχρονα, ο τρόπος νοηματοδότησης μιας έννοιας εξαρτάται και από το αναπαραστατικό πλαίσιο (αριθμητικό, αναλυτικό, γραφικό) που χρησιμοποιείται (Καλδρυμίδου & Μόρογλου, 2007). Οι Edwards και Ward (2004), με την βοήθεια του θεωρητικού πλαισίου των Vinner & Tall (1981), μελετώντας πώς οι φοιτητές προπτυχιακού επιπέδου κατανοούν και χρησιμοποιούν τους ορισμούς, συμπέραναν ότι πολλοί φοιτητές αν και μπορούν να διατυπώσουν και να εξηγήσουν ένα ορισμό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τον κατανοούν.

Η έννοια της περιοδικότητας

Η έννοια της περιοδικότητας έχει γίνει αντικείμενο μελέτης από αρκετούς ερευνητές. Η Shama (1998) υποστηρίζει ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά την έννοια της περιοδικότητας ως τη συμπεριφορά χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών. Οι Buendia και Condero (2005), παρατήρησαν ότι η αυστηρή διαίρεση των πεδίων της Φυσικής και των Μαθηματικών και η διαφορετική προσέγγιση της έννοιας της περιοδικότητας σε αυτά τα πεδία οδηγεί σε μη λειτουργική γνώση και σε δυσκολίες νοηματοδότησης της έννοιας. Έτσι δημιούργησαν μαθηματικά έργα που ακολουθούν μια περιοδική ή μη περιοδική συμπεριφορά και κατέληξαν ότι η κοινωνική πρακτική της πρόβλεψης οδηγεί σε πιο πλούσια κατανόηση της έννοιας της περιοδικότητας. Εστιάζοντας στην ελληνική πραγματικότητα, στα σχολικά βιβλία της Φυσικής η περιοδικότητα προσεγγίζεται μέσα από τις περιοδικές κινήσεις και από ένα ορισμό περιγραφικού χαρακτήρα και ολικής προσέγγισης. Ενώ στα Μαθηματικά προσεγγίζεται μέσα από τις περιοδικές συναρτήσεις και από ένα αναλυτικό ορισμό που μελετά την συνάρτηση σημείο προς σημείο. Ταυτόχρονα, απουσιάζουν αναπαραστάσεις επαναλαμβανόμενων αλλά μη περιοδικών συναρτήσεων (Τριανταφύλλου κ.ά., 2012). Επιπλέον, οι Van Dormolen και Zaslavsky (2003) θεωρούν ότι η δυνατότητα επιλογής μεταξύ δυο ή περισσότερων ορισμών βοηθά τον μαθητή στην βαθύτερη κατανόηση των εννοιών. Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιήθηκε ο τυπικός (αλγεβρικός) ορισμός και ο γεωμετρικός ορισμός που προτείνουν οι παραπάνω ερευνητές. Ο γεωμετρικός ορισμός είναι πιο κοντά στον ορισμό της Φυσικής ενώ ο αλγεβρικός είναι ο τυπικός μαθηματικός ορισμός της περιοδικής συνάρτησης που συναντούν οι μαθητές στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας Β' Λυκείου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το ερευνητικό πλαίσιο

Το διδακτικό πείραμα πραγματοποιήθηκε στο δεύτερο μισό του Α΄ τετραμήνου σε τμήμα Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου. Ολοκληρώθηκε σε 4 διδακτικές ώρες, με εξ αποστάσεως διδασκαλία. Οι μαθητές είχαν έρθει σε επαφή με την έννοια της περιοδικότητας στη Γ΄ Γυμνασίου μέσα από τις ταλαντώσεις. Λόγω του χρονικού διαστήματος που έγινε η διδασκαλία, εικάζεται ότι πολλοί μαθητές και μαθήτριες είχαν διδαχθεί την έννοια της περιοδικής συνάρτησης στο φροντιστήριο. Οι συμμετέχοντες ήταν 16 μαθητές. Το διδακτικό πείραμα είχε τρεις ερευνητικές φάσεις. Η $1^{η}$ ερευνητική φάση αναζήτησε την εικόνα της έννοιας που οι μαθητές είχαν διαμορφώσει από προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις τους. Στη $2^{η}$ φάση δόθηκαν οι δύο ορισμοί. Ο αλγεβρικός ορισμός, που είναι ο τυπικός ορισμός της περιοδικής συνάρτησης και τον συναντούν οι μαθητές στο σχολικό τους βιβλίο και ο γεωμετρικός ορισμός που πρότειναν οι Dormolen και Zaslavsky (2003) ο οποίος εκφράζει μια διαισθητική αντίληψη. Οι ορισμοί έχουν ως εξής :

Αλγεβρικός ορισμός: *Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:*

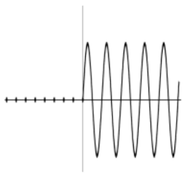
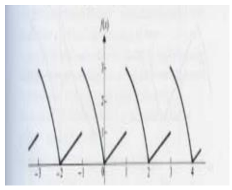
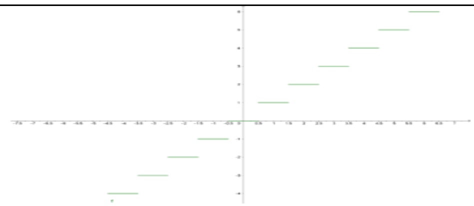
i. $x + T \in A$, $x - T \in A$ *και*

ii. $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

Γεωμετρικός ορισμός: *Μια συνάρτηση f καλείται περιοδική εάν υπάρχει μεταφορά της γραφικής παράστασης της f κατά μήκος του οριζόντιου άξονα, έτσι ώστε η εικόνα της να συμπίπτει με την αρχική.*

Τέλος, στην $3^{η}$ ερευνητική φάση δόθηκαν στους μαθητές μη οικεία γραφήματα συναρτήσεων, όπως κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις ή συναρτήσεις που να ορίζονται με διαφορετικό τρόπο στις αρνητικές και θετικές τιμές του άξονα x΄x (Πίνακας 1), όπου οι μαθητές τα μελέτησαν ως προς την περιοδική τους συμπεριφορά. Οι απαντήσεις τους έπρεπε να τεκμηριωθούν με χρήση των δυο ορισμών.

 Συνάρτηση (α)	 Συνάρτηση (γ)	 Συνάρτηση (δ)

Πίνακας 1 : Γραφήματα που δόθηκαν στους μαθητές στην 3η φάση

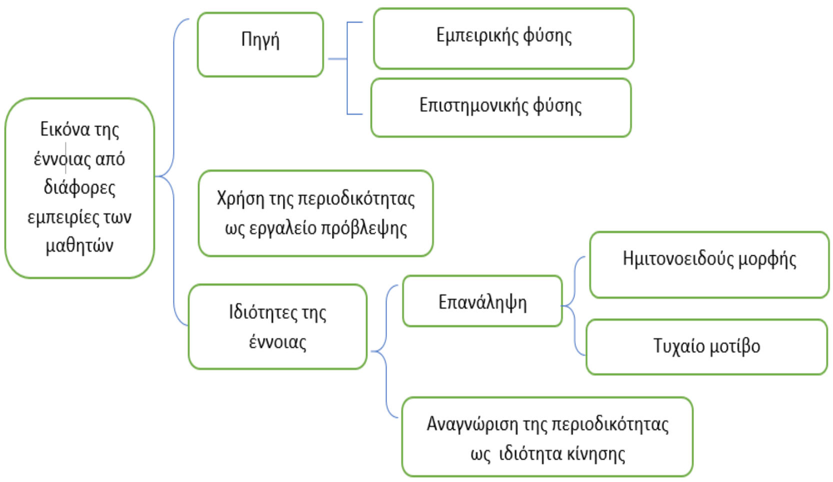
Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Η συλλογή δεδομένων έγινε με χρήση ερωτηματολογίου, chat της πλατφόρμας Webex, email, ηλεκτρονικού πίνακα και μαγνητοφώνησης (3ης ερευνητικής φάσης). Θεωρητικό εργαλείο ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων ήταν το θεωρητικό πλαίσιο των Vinner & Tall (1981) που ερμηνεύουν την αλληλεπίδραση μεταξύ της εικόνας της έννοιας [concept image] και του ορισμού της έννοιας [concept definition]. Για την ανάλυση των δεδομένων εφαρμόσθηκε η θεωρία συστημικών δικτύων (Bliss, Monk & Ogborn, 1983). Αρχικά δημιουργήθηκαν κατηγορίες απαντήσεων. Ακολούθησε συσχέτιση αυτών των κατηγοριών με αποτέλεσμα να γίνει η τελική κωδικοποίηση των απαντήσεων και να διαμορφωθούν δυο συστημικά δίκτυα που απαντούσαν στα αντίστοιχα ερευνητικά ερωτήματα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η εικόνα της έννοιας που είχαν διαμορφώσει οι μαθητές από σχολικές και εξωσχολικές εμπειρίες τους

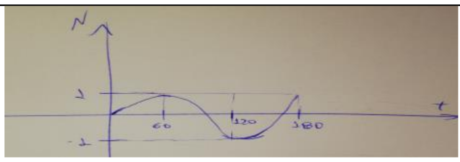
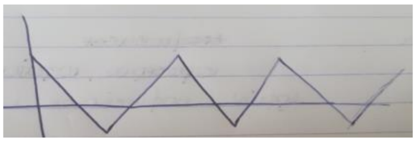
Το συστημικό δίκτυο (Διάγραμμα 2) αποτυπώνει την εικόνα που οι μαθητές είχαν διαμορφώσει από προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις τους.



Διάγραμμα 2: Συστημικό δίκτυο αποτύπωσης διαστάσεων της εικόνας της έννοιας στην 1η φάση.

Η διάσταση *πηγή* είναι η δεξαμενή στην οποία “βούτηξαν” οι μαθητές για να ανασύρουν ένα παράδειγμα περιοδικότητας. Τα παραδείγματα που έφεραν ήταν τόσο *εμπειρικής* (π.χ. έκδοση Κυριακάτικης εφημερίδας), όσο και *επιστημονικής φύσης* (π.χ. η κίνηση του εκκρεμούς). Επίσης όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν την περιοδικότητα ως *εργαλείο πρόβλεψης*. Χαρακτηριστική απάντηση : «*Μας βοηθά να προσδιορίσουμε την σχέση του χρόνου με κάποιο γεγονός, για παράδειγμα αν και πότε αυτό επαναλαμβάνεται και τι διάρκεια έχει*». Η διάσταση *ιδιότητες της έννοιας* προέκυψε από τους προσωπικούς ορισμούς των μαθητών αλλά και από τα σχέδια των μαθητών στην προσπάθειά τους να αναπαραστήσουν την κίνηση των δεικτών ενός ωρολογίου.

Οι μαθητές στους προσωπικούς τους ορισμούς αναφέρθηκαν στην *επανάληψη* κάποιας κίνησης. Επανάληψη που απεικονίζονταν με μια ημιτονοειδή καμπύλη (σχήμα 1, πίνακας 2) ή με ένα τυχαίο μοτίβο (σχήμα 2, πίνακας 2). Χαρακτηριστικό παράδειγμα : «*Είναι μια συνάρτηση που αν την αναπαραστήσουμε σε διάγραμμα, η κίνηση που την εκφράζει επαναλαμβάνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα*». *(μαθήτρια Μ3)*

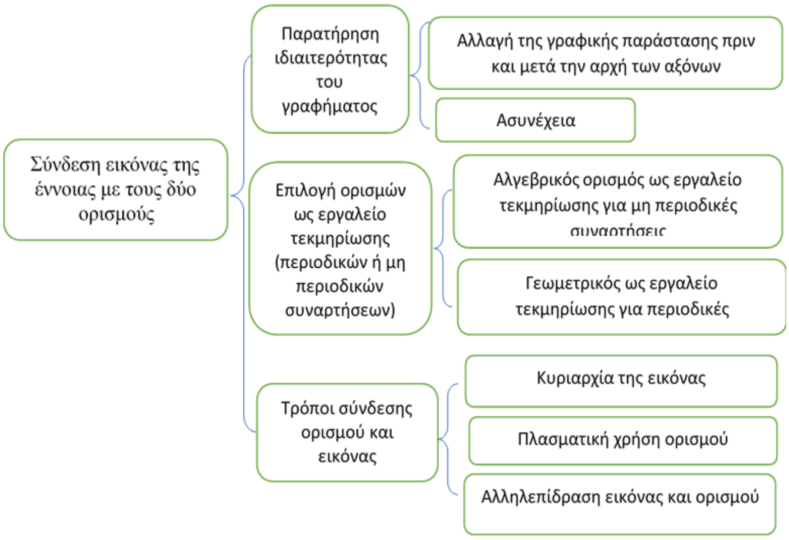
	
Σχήμα 1: Σχεδίαση μαθητή (Ημιτονοειδής καμπύλη)	**Σχήμα 2: Σχεδίαση μαθητή (Τυχαίο μοτίβο)**

Πίνακας 2: Σχεδιαγράμματα μαθητών

Σύνδεση της εικόνας της έννοιας με τους δύο ορισμούς

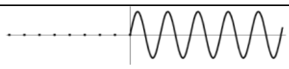
Το συστημικό δίκτυο (Διάγραμμα 3) προέκυψε από την προσπάθεια των μαθητών να συνδέσουν την εικόνα που είχαν διαμορφώσει για την έννοια με τους δύο ορισμούς μέσω της αναγνώρισης της περιοδικής φύσης μη οικείων γραφημάτων που τους δόθηκαν. Η διάσταση *παρατήρηση ιδιαιτερότητας του γραφήματος* προέκυψε από τον τρόπο που οι μαθητές προσέγγισαν τα γραφήματα.

Η εικόνα της έννοιας που είχαν διαμορφώσει οι μαθητές από προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες (συνεχής περιοδική κίνηση) τους προκάλεσε να παρατηρήσουν ιδιαιτερότητες των γραφημάτων, όπως στην περίπτωση του γραφήματος της συνάρτησης (α), του Πίνακα 3. Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι μαθητές εστίασαν στο μέρος του γραφήματος που βρίσκεται δεξιά του άξονα y΄y και αποφάνθηκαν ότι η συνάρτηση που εκφράζει το γράφημα είναι περιοδική λόγω της ημιτονοειδούς καμπύλης.



Διάγραμμα 3: Συστημικό δίκτυο αποτύπωσης της σύνδεσης της εικόνας της έννοιας με τους δύο ορισμούς στην 3η φάση

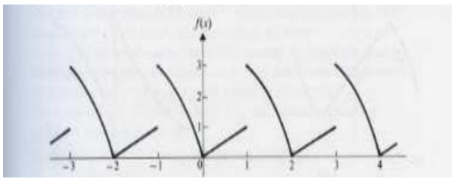
Μετά την ερώτηση της μαθήτριας Μ4 (Πίνακας 3) οι μαθητές συνειδητοποίησαν την ιδιαιτερότητα του και άλλαξαν γνώμη, αναγνωρίζοντας την μη περιοδική φύση του γραφήματος.

 Συνάρτηση (α)	Μ4: Σε αυτό το σχήμα είναι [ανήκουν] και αυτές οι τελίτσες;

Πίνακας 3: Η παρέμβαση της μαθήτριας Μ4

Σε άλλη περίπτωση κάποιοι μαθητές εστίασαν στα σημεία *ασυνέχειας* του γραφήματος, όπως στην περίπτωση του γραφήματος της συνάρτησης (γ), πίνακας 4, όπου αναρωτήθηκαν εάν παίζει ρόλο που διακόπτεται το γράφημα: Μ4 : *Κυρία, παίζει ρόλο, το κενό που έχουν ανάμεσα;* ή αποφάσισαν ότι δεν είναι γράφημα περιοδικής συνάρτησης, Μ9: *Δεν είναι περιοδική διότι διακόπτεται οπότε διακόπτεται και η συνάρτηση*.

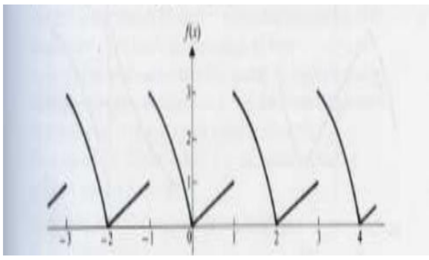
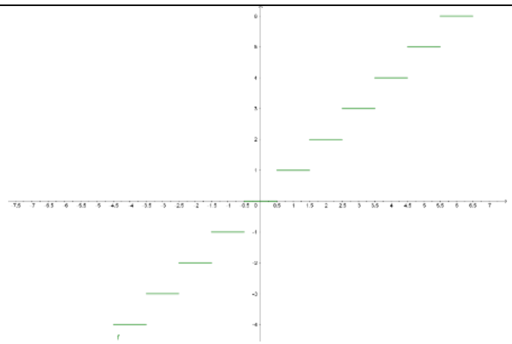
Η διάσταση *επιλογή ορισμών ως εργαλείο τεκμηρίωσης (περιοδικών ή μη περιοδικών συναρτήσεων)* προέκυψε από τις επιλογές των μαθητών όταν κλήθηκαν να αιτιολογήσουν τις αποφάσεις τους. Έτσι επέλεξαν τον αλγεβρικό ορισμό κυρίως για την τεκμηρίωση μη περιοδικών συναρτήσεων ενώ τον γεωμετρικό ορισμό για περιοδικές συναρτήσεις. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στον Πίνακα 4.

 Συνάρτηση (β)	 Συνάρτηση (γ)

Μαθήτρια Μ2: Η συνάρτηση δεν είναι περιοδική διότι παρόλο που τα x είναι σταθερά τα y δεν είναι και άρα δεν ισχύει ότι, $x+T \in A\,, x-T \in A$ και $$f(x+T)=f(x-T)=f(x)$$	Μαθήτρια Μ4: Είναι περιοδική, πάλι με τον δεύτερο ορισμό μπορούμε να δούμε γίνεται μεταφορά συνάρτησης.

Πίνακας 4: Οι επιλογές των μαθητών για την τεκμηρίωση περιοδικών και μη περιοδικών συναρτήσεων

Τρόποι σύνδεσης ορισμού και εικόνας: Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει πώς οι μαθητές χρησιμοποίησαν τον αλγεβρικό ή γεωμετρικό ορισμό σε συνδυασμό με την εικόνα έννοιας της περιοδικότητας που είχαν αποκομίσει από τις προηγούμενες εμπειρίες τους. Έτσι υπήρξαν μαθητές που απάντησαν βασισμένοι μόνο στην εικόνα της έννοιας, *(διάσταση κυριαρχία της εικόνας)*, όπως υποδεικνύει η απάντηση της μαθήτριας Μ9 (πίνακας 5) η οποία είναι καθαρά διαισθητική. Τροφοδοτείται αποκλειστικά από την εικόνα της έννοιας της περιοδικότητας κατά την οποία οτιδήποτε περιοδικό ταυτίζεται με την επαναλαμβανόμενη κίνηση. Όμως υπήρξαν και περιπτώσεις μαθητών που μετατόπισαν το βάρος της επιχειρηματολογίας τους στον ορισμό και παρουσίασαν πιο οργανωμένη μαθηματική σκέψη (διάσταση *αλληλεπίδραση εικόνας και ορισμού)*, όπως στην περίπτωση της μαθήτριας Μ2 (Πίνακας 5). Η συνύπαρξη περιγραφικών και αναλυτικών χαρακτηριστικών στην επιχειρηματολογία της μαθήτριας Μ2 υποδηλώνει αλληλεπίδραση ορισμού και εικόνας της έννοιας, με τον ορισμό να έχει πρωταρχικό ρόλο στην τελική απάντηση.

 Συνάρτηση (γ)	 Συνάρτηση (δ)
Μαθήτρια Μ9: Δεν είναι περιοδική διότι διακόπτεται οπότε διακόπτεται και η συνάρτηση.	Μαθήτρια Μ2: Δεν είναι περιοδική διότι δεν έχουμε ούτε σταθερό x ούτε σταθερό y και άρα δεν ισχύουν οι τύποι [συνθήκες] του αλγεβρικού ορισμού.

Πίνακας 5: Τρόπος αλληλεπίδρασης γραφήματος (εικόνας) και ορισμών

Η σειρά με την οποία εμφανίστηκαν οι τρόποι σύνδεσης εικόνας και ορισμού αποτυπώνονται στο Διάγραμμα 4. Αρχικά, οι μαθητές αγνοούν τους ορισμούς χωρίς να απαγκιστρώνονται από την εικόνα της έννοιας ως περιοδική κίνηση, μετά κάνουν πλασματική χρήση του ορισμού όταν απλά τον αναφέρουν χωρίς να τον χρησιμοποιούν (π.χ. μαθήτρια Μ3: «*Η παράσταση αυτή είναι περιοδική συνάρτηση, διότι σύμφωνα με τον γεωμετρικό ορισμό αναπαριστά μια επαναλαμβανόμενη κίνηση*» [συνάρτηση (α), Πίνακας 3] και τέλος μεταθέτουν το βάρος της επιχειρηματολογίας τους στον ορισμό δηλαδή αναγνωρίζουμε στην επιχειρηματολογία τους την αλληλεπίδραση ορισμού και εικόνας της έννοιας.

Διάγραμμα 4 : Σταδιακή εξέλιξη χρήσης ορισμών

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι τρόποι νοηματοδότησης της έννοιας στη φάση διερεύνησης του διδακτικού πειράματος ήταν ελλιπείς. Παρότι στις εκφράσεις των μαθητών αναγνωρίζουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της έννοιας, οι μαθητές δυσκολεύονται να εναρμονίσουν γραφικά την περίοδο με την επανάληψη των τιμών στην κίνηση του λεπτοδείκτη, ενώ η βασική πηγή τροφοδότησης της έννοιας είναι το μάθημα της φυσικής. Οι δύο ορισμοί που δόθηκαν στους μαθητές τους βοήθησαν να εξελίξουν τον τρόπο που νοηματοδοτούν την έννοια. Ο γεωμετρικός ορισμός ευνόησε τη συμμετοχή, την αλληλεπίδραση και τη συζήτηση ανάμεσα στους μαθητές αλλά και τη διαπραγμάτευση στοιχείων της έννοιας. Θεωρούμε ότι λόγω του περιγραφικού του χαρακτήρα και της τοπικής/ολικής προσέγγισης αποτέλεσε το “μεταβατικό στάδιο” για τη νοηματοδότηση του αλγεβρικού ορισμού ο οποίος έχει πολύ πιο αυστηρή και συμβολική γραφή. Ταυτόχρονα ο αλγεβρικός ορισμός, λόγω των αναλυτικών χαρακτηριστικών του, προσέφερε στους μαθητές εργαλεία τεκμηρίωσης για τη μη περιοδική συμπεριφορά σχετικών γραφημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bayda, N. I., & Sutliff, G. (2020). Comparing Extracted and Stipulated Definitions in Algebra 1 Textbooks and "Khan Academy". *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2).

Bliss, J. Monk, M. & Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*. London: Croom Helm.

Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 299-333.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 248–255). Stellenbosch: RSA.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1980). On teaching periodicity. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, *11*(4), 507-509.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, *111*(5), 411-424.

Shama, G. (1998). Understanding periodicity as a process with a gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 255-281.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 91-106.

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the learning of Mathematics*, *20*(1), 17-21.

Καλδρυμίδου, Μ., Μορόγλου, Ε. (2007), Αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και ο ρόλος του αναπαραστατικού πλαισίου, στο Χ. Σακονίδης, Δ. Δεσλή (επιμ.), *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ), Αθήνα*: Τυπωθήτω, 293-303.

Τριανταφύλλου, Χ., Σπηλιωτοπούλου, Β., Σιδερής, Ε., & Κεχράκος, Δ. (2012). Η Έννοια της Περιοδικότητας στα Σχολικά Βιβλία και οι Αντιλήψεις των Σπουδαστών ΤΕΙ. *Πρακτικά 29ου Συνεδρίου ΕΜΕ: Μαθηματικά: Θεωρία-Πράξη-Προεκτάσεις*, 841-855.

ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ! Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Παπαστάθη Χρύσα[1], Κανέλλος Ιωάννης[2,3], Παπαδάκη Εύη[3], Μπιζά Ειρήνη[3], Ναρδή Έλενα[3]

[1]Πειραματικό Γυμνάσιο Ρεθύμνου, [2]ΠΕ.ΚΕ.Σ. Κρήτης, [3]University of East Anglia (UEA, UK)

xrysapapastathi@gmail.com, I.Kanellos@uea.ac.uk, P.Papadaki@uea.ac.uk, I.Biza@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk

Στο πλαίσιο έρευνα δράσης με στόχο τη σύνδεση έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών με την πραγματικότητα της τάξης, η ερευνητική ομάδα του MathTASK, ένας Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου (Σ.Ε.Ε.) και μία εκπαιδευτικός συνεργάστηκαν στο σχεδιασμό, εφαρμογή και αξιολόγηση καινοτόμων δραστηριοτήτων με θέμα τη μαθηματική απόδειξη στην τάξη της εκπαιδευτικού. Η συνεργασία απέδωσε σειρά δραστηριοτήτων που δοκιμάστηκαν στην τάξη και οι οποίες διευκολύνουν την πρώτη επαφή των μαθητ(ρι)ών με τη μαθηματική απόδειξη, εγείρουν το ενδιαφέρον και την εκτίμησή τους για αυτήν αλλά και αναπτύσσουν δεξιότητες τεκμηρίωσης, ομαδικής εργασίας και διαπραγμάτευσης εναλλακτικών λύσεων προβλήματος.

ΕΡΕΥΝΑ ΔΡΑΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Έρευνα δράσης είναι η «μελέτη μιας κοινωνικής κατάστασης με σκοπό τη βελτίωση της ποιότητας της δράσης μέσα σε αυτήν» (Elliott, 1991, σελ. 69). Χαρακτηριστικά της στην εκπαίδευση είναι μεταξύ άλλων ο συνεργατικός και συμμετοχικός χαρακτήρας, η σύνδεση θεωρίας και πράξης, ο στοχασμός και αναστοχασμός, η ανοιχτή σπειροειδής διαδικασία, και η σύνδεση με την επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού. Κεντρική ιδέα είναι ότι όλοι οι εμπλεκόμενοι με την εκπαιδευτική πρακτική συμμετέχουν στην παραγωγή νέας γνώσης και δεν είναι απλώς χρήστες γνώσης που παράγουν ερευνητές αποστασιοποιημένοι από την εκπαιδευτική πράξη. Η μορφή συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών και των ερευνητών αναφέρεται ως μια «συνεργατική συμφωνία μάθησης» (Wagner, 1997, σελ. 15-16) στην οποία ο καθένας μπορεί να μάθει περισσότερα για τον κόσμο του άλλου αλλά και για τον δικό του. Στο πλαίσιο τις διδασκαλίας των Μαθηματικών, η βιβλιογραφία παραθέτει επιτυχημένα παραδείγματα τέτοιας συνεργασίας (π.χ. Potari et al., 2010). Σε αυτή την εργασία παρουσιάζουμε την συνεργασία μίας ερευνητικής ομάδας, ενός Συντονιστή Εκπαιδευτικού Έργου (Σ.Ε.Ε.) και μίας εκπαιδευτικού. Στόχος της συνεργασίας ήταν η εφαρμογή στην τάξη καινοτόμων δραστηριοτήτων με θέμα τη μαθηματική απόδειξη.

Το ερευνητικό ερώτημα που διαπραγματευόμαστε είναι ποια είναι τα χαρακτηριστικά που καθιστούν αυτήν τη συνεργασία επιτυχημένη (άμεσα αποτελεσματική και μεσο/μακροπρόθεσμα βιώσιμη). Παραθέτουμε ακολούθως στοιχεία που αφορούν στο πλαίσιο συνεργασίας και στο σχεδιασμό, εφαρμογή και αξιολόγηση των δραστηριοτήτων στην τάξη.

ΑΦΟΡΜΗΣΗ: ΟΜΑΔΑ, ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ

Η ομάδα σχηματίστηκε ως ανταπόκριση σε οργανικές ανάγκες της σχολικής μονάδας και της εκπαιδευτικού. Κατόπιν εισηγήσεων του Υπουργείου Παιδείας και του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π., Κύκλοι Δεξιοτήτων Μάθησης, Ζωής, Τεχνολογίας και Νου), το Σχολείο εισήγαγε πιλοτικά στο ωρολόγιο πρόγραμμα «Εργαστήρια Δεξιοτήτων». Ο Σ.Ε.Ε. Μαθηματικών εισηγήθηκε στο Διευθυντή και στο Σύλλογο Διδασκόντων μια καινοτόμα-πειραματική δράση στα πλαίσια αυτών των εργαστηρίων με αντικείμενο τη διδασκαλία της απόδειξης στα Μαθηματικά της Γ΄ Γυμνασίου – και την υποστήριξη αυτής της δράσης από ερευνήτριες της Μαθηματικής εκπαίδευσης. Η πρόταση εγκρίθηκε από τα θεσμικά όργανα του Σχολείου και η ομάδα συστάθηκε αρχικά με διαφορετικά κίνητρα: (α) την εκπαιδευτικό η οποία θεώρησε την πρόταση συμβατή τόσο με τις εκπαιδευτικές αξίες του Σχολείου και τις συνθήκες εργασίας όσο και με τους στόχους του σχεδίου δράσης που είχε ήδη ετοιμάσει για τα «Εργαστήρια Δεξιοτήτων» με γενικό τίτλο «ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ: Συμφωνώ - Διαφωνώ - Επιχειρηματολογώ», (β) τις ερευνήτριες οι οποίες δραστηριοποιούνται επί μακρόν στο χώρο της επιμόρφωσης εκπαιδευτικών μέσω του προγράμματος MathTASK (Biza et al., 2007) και (γ) τον Σ.Ε.Ε. ο οποίος επιδίωκε τη στήριξη του Σχολείου αλλά και το ερευνητικό του ενδιαφέρον για την εισαγωγή των μαθητ(ρι)ών της Γ΄ Γυμνασίου στη μαθηματική απόδειξη (Kanellos et al., 2018).

Κύριος διδακτικός στόχος ήταν η εισαγωγή των μαθητ(ρι)ών στην αναγκαιότητα της απόδειξης ως εργαλείο για την τεκμηρίωση της αλήθειας στα μαθηματικά (Kanellos et al., 2018) αλλά και σε ένα ευρύτερο πλαίσιο της επιχειρηματολογίας στην καθημερινή ζωή (Askew, 2020). Οι επιμέρους στόχοι περιλαμβάνουν: 1) καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας 2) εξοικείωση των μαθητ(ρι)ών με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και με την αποδεικτική διαδικασία 3) ενίσχυση της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων 4) σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητ(ρι)ών να κατανοούν και να ελέγχουν κριτικά τα αποτελέσματα που παράγουν 5) καλλιέργεια κριτικής προσέγγισης της πληροφορίας και προβληματισμός για τη διαφορά ανάμεσα στην προσωπική άποψη και τα πραγματικά δεδομένα 6) ανάδειξη της διαφοράς ανάμεσα στο πείραμα – δοκιμή – εμπειρία και στη γενίκευση.

ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Η γεωγραφική απόσταση των μελών της ομάδας αλλά και η επιβεβλημένη κοινωνική αποστασιοποίηση λόγω της πανδημίας οδήγησαν αποκλειστικά σε δέκα διαδικτυακές συναντήσεις στην περίοδο Νοέμβριος 2020 – Μάΐος 2021. Ταυτόχρονα υπήρξε πλούσια συνομιλία και επεξεργασία δραστηριοτήτων μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου. Στην πρώτη συνάντηση, η ομάδα συζήτησε διεξοδικά τους προβληματισμούς πάνω στον τρόπο που οι μαθητές/ήτριες έχουν μάθει να μελετούν και συγκεκριμένα στο γεγονός ότι ακολουθούν κυρίως διαδικαστικές μεθόδους (Askew, 2020). Προσδιορίσαμε τους στόχους της συνεργασίας και τη μεθοδολογία με την οποία θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες και αρχίσαμε να επεξεργαζόμαστε το σενάριο της πρώτης δραστηριότητας.

Ακολούθησε εκπόνηση τεσσάρων δραστηριοτήτων, μία Δια Ζώσης (ΔΖ) και τρεις με προσαρμογή σε Εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση (ΕΞΑΕ): 1η - Εισαγωγή στην έννοια και στην απόδειξη ταυτότητας *Πάρε θέση! Ο Δημήτρης, η Κατερίνα κι ο Πάνος συζητούν για την ... ισότητα* / 2η - Αποδεικτική άσκηση στην ισότητα τριγώνων με χρήση μεσοκάθετου *Enterprise* / 3η - Εφαρμογή της παραγοντοποίησης στην επίλυση τριτοβάθμιας εξίσωσης *Factorize* / 4η - Εισαγωγή στις Ανισότητες *Συζήτηση για μια ανισότητα*. Οι δραστηριότητες διαμορφώθηκαν έτσι ώστε να εγείρουν ενεργητική εμπλοκή των μαθητ(ρι)ών και να εμπεριέχουν εργασία σε ομάδες, παρουσίαση και συζήτηση στην ολομέλεια του τμήματος αλλά και προσωπικό αναστοχασμό. Οι παρουσιάσεις των μαθητ(ρι)ών έγιναν είτε προφορικά (ΔΖ μαθήματα), είτε καταγράφοντάς τις σε ένα εξωτερικό εργαλείο (π.χ. Webex, φόρμα Google, padlet, Edmodo, ΕΞΑΕ μαθήματα). Η επιλογή του εργαλείου έλαβε υπόψη το επίπεδο ψηφιακού γραμματισμού των μαθητ(ρι)ών καθώς και το ότι μεγάλο ποσοστό παρακολουθούσε από τάμπλετ ή κινητό κι όχι από σταθερό ή φορητό υπολογιστή. Σημειώνουμε επίσης πως αρκετοί/ές μαθητές/ήτριες είτε παρουσιάζουν μαθησιακές δυσκολίες είτε έχουν χαμηλή συμμετοχή σε αντίθεση με άλλους/ες που συμμετέχουν και εκφράζουν άνετα την άποψή τους. Η συμπερίληψη μαθητ(ρι)ών με διαφορετικό προφίλ στην ίδια ομάδα λήφθηκε υπόψη ώστε να έχουν τη δυνατότητα όλοι/ες να συνεισφέρουν.

Έπειτα από κάθε δραστηριότητα στην τάξη, γινόταν συνάντηση για την ενημέρωση της ομάδας ως προς την πορεία υλοποίησης, τον σχολιασμό, τις αντιδράσεις αλλά και τις ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ιδέες των μαθητ(ρι)ών, τα πιθανά προβλήματα που προέκυψαν και τέλος την υποστήριξη και ανατροφοδότηση της εκπαιδευτικού με πιθανά εναλλακτικά σενάρια.

Ο βασικός ισχυρισμός μας σε αυτή την εργασία είναι πως, από τη Δραστηριότητα 1 έως 4, βελτιώνοντας κάθε φορά τη στρατηγική μας μέσα από τον ομαδικό αναστοχασμό, άρχισε να παίρνει μορφή μια νέα κατάσταση στην τάξη όπου οι μαθητές/ήτριες παίρνουν πρωτοβουλία, συνεργάζονται, επικοινωνούν, αναρωτιούνται, αμφισβητούν, επιχειρηματολογούν και – γιατί όχι; – αποδεικνύουν! Δειγματοληπτικά, παρουσιάζουμε εδώ τη διαδικασία ανάπτυξης, σχεδιασμού και εφαρμογής της Δραστηριότητας 1.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ!): ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Σχεδιάσαμε την δραστηριότητα ώστε να διεξαχθεί μέσα σε μια ψηφιακή τάξη (ΕΞΑΕ, πλατφόρμα Webex, 2 διδακτικές ώρες, με φόρμα Google για τη διευκόλυνση της συλλογής γραπτών απαντήσεων από την εκπαιδευτικό). Το σενάριο βασίζεται σε ένα παιχνίδι ρόλων με μορφή διαλογικής αντιπαράθεσης. Βασικό ρόλο έχουν οι μαθητές/ήτριες ενώ η εκπαιδευτικός συντονίζει και καθοδηγεί διακριτικά. Σκοπός της δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν οι μαθητές/ήτριες την έννοια και την αξία της μαθηματικής απόδειξης. *Διδακτικοί στόχοι*: (1) Να ξεχωρίσουν το πείραμα (δοκιμή – εμπειρία) από τη γενίκευση και να προσδιορίσουν την αξία του καθενός (2) Να γνωρίζουν πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα (3) Να εξασκηθούν στην αποδεικτική διαδικασία απλών ταυτοτήτων. *Παιδαγωγικοί στόχοι*: (1) Να αναπτύσσουν εικασίες και υποθέσεις σχετικές με τις έννοιες και τις διαδικασίες του σεναρίου και να τις διατυπώνουν με σαφήνεια (2) Να συμμετέχουν στον διάλογο όλης της τάξης και να συνεισφέρουν με τις ιδέες και τις εκτιμήσεις τους (3) Να στηρίζουν την άποψή τους με λογικά επιχειρήματα, να ελέγχουν τις υποθέσεις τους και να υπερασπίζονται τα συμπεράσματά τους ατομικά, στην ομάδα αλλά και σε όλη την τάξη (4) Να οικοδομούν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τους/τις συμμαθητές/ήτριες τους και την εκπαιδευτικό. Προαπαιτούμενες γνώσεις: απλές πράξεις με πραγματικούς αριθμούς, επιμεριστική ιδιότητα, πολλαπλασιασμός πολυώνυμου με πολυώνυμο. Η αρχική ιδέα ήταν εμπνευσμένη από δραστηριότητες στην έρευνα των Healy & Hoyles (2000) και την προσαρμογή αυτών από τους Kanellos et al. (2018, σελ. 282). Η τελική μορφή της δραστηριότητας είναι δομημένη σύμφωνα με την τεχνική του role play (Williams, 2012), κατά την οποία οι μαθητές/ήτριες παίρνουν τον ρόλο φανταστικών προσώπων, εκθέτοντας και υποστηρίζοντας τις απαντήσεις και τις θέσεις αυτών γύρω από ένα ζήτημα. Κατασκευάσαμε έναν φανταστικό διάλογο μεταξύ μαθητ(ρι)ών στον οποίο δίνονται τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις στο εξής πρόβλημα:

Να εξηγήσετε γιατί η ισότητα $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ *ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό α και β;*

Ο Δημήτρης , η Κατερίνα κι ο Πάνος συζητούν για την ... ισότητα.

Η καθηγήτρια της τάξης ρώτησε τους μαθητές και τις μαθήτριες να εξηγήσουν γιατί η ισότητα

(α - β) * (α + β) = α^2 – β^2 ισχύει για κάθε αριθμό α και β.

Σημ.: 1. (*) είναι το σύμβολο του πολλαπλασιασμού
2. (^) είναι το σύμβολο της δύναμης. Δηλαδή το α^2 διαβάζεται α στο τετράγωνο.

Ο Δημήτρης λέει:
Αν δοκιμάσω μερικές τιμές για τα α και β και κάνω τις πράξεις, βρίσκω το ίδιο αποτέλεσμα στο αριστερό και στο δεξιό μέλος.
Κοίτα για α = 2 και β = 1, έχω (2 - 1) * (2 + 1) = 1 * 3 = 3 για το αριστερό μέλος.
Επίσης έχω 2 * 2 – 1 * 1 = 4 - 1 = 3 για το δεξιό μέλος.
Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Δοκίμασα και άλλους αριθμούς και δουλεύει μια χαρά !
Επομένως η ισότητα ισχύει για κάθε αριθμό α και β !

Η Κατερίνα λέει:
Θα ξεκινήσω από το αριστερό μέλος ... αν εφαρμόσω την επιμεριστική ιδιότητα θα έχω
α * α + α * β – β * α – β * β που κάνει α^2 – β^2 .
Επομένως η ταυτότητα ισχύει για κάθε αριθμό α και β !

Ο Πάνος λέει:
Αυτή είναι μία ισότητα από αυτές που έχει το βιβλίο και φυσικά ισχύει για κάθε αριθμό α και β!
Αν ξεκινήσω από το δεξιό μέλος θα έχω
α^2 – β^2 = (α - β) * (α + β)
Επομένως η ισότητα ισχύει για κάθε αριθμό α και β και γι' αυτό λέγεται ταυτότητα !

Α. Εσύ που παρακολουθείς τη συζήτηση προσπάθησε να βοηθήσεις τον Δημήτρη (1η ομάδα) , την Κατερίνα (2η ομάδα) ή τον Πάνο (3η ομάδα) να πείσει τους συμμαθητές του/της ότι η σκέψη του/της είναι σωστή και ολοκληρωμένη . Τι έχεις να του προτείνεις; *

Η απάντησή σας

Ποια πιστεύεις ότι θα είναι η αντίδραση της καθηγήτριας σε αυτό που είπε ο Δημήτρης (1η ομάδα) , η Κατερίνα (2η ομάδα) ή ο Πάνος (3η ομάδα); *

Η απάντησή σας

Εικόνα 1: Η τελική μορφή της *Δραστηριότητας 1, Πάρε Θέση!*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ!): ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1η διδακτική ώρα (35')

Κατά τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας δόθηκε στους/στις μαθητές/ήτριες η δραστηριότητα μέσω chat του Webex αλλά και μέσω της πλατφόρμας ασύγχρονης εξ αποστάσεως διδασκαλίας (Edmodo) για περαιτέρω επεξεργασία και με τις απαραίτητες γραπτές οδηγίες-επεξηγήσεις. Η διανομή των ρόλων έγινε με κατανομή σε ομάδες εργασίας (Breakout Session Assignments) με το εργαλείο του Webex.

Κάθε μια από τις ομάδες μαθητ(ρι)ών κλήθηκε να συζητήσει και να αναπτύξει επιχειρήματα ώστε να υποστηρίξει την απάντηση του Δημήτρη, της Κατερίνας ή του Πάνου (Ερώτημα Α) αλλά και να διαμορφώσει το πιθανό σχόλιο της καθηγήτριας πάνω στην επιχειρηματολογία τους (Ερώτημα Β). Η επιλογή της εργασίας σε ομάδες είχε στόχο την ενεργοποίηση όλων των μαθητ(ρι)ών και την αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας.

Στη συνέχεια, κάθε μαθητής/ήτρια ξεχωριστά κατέγραψε τις δικές του/της απαντήσεις με χρήση της φόρμας Google ώστε μέσα από τη γραπτή διατύπωση των επιχειρημάτων να ενισχυθεί και η προσπάθεια υποστήριξης του γλωσσικού γραμματισμού. Οι μαθητές/ήτριες ανταποκρίθηκαν στο σύνολό τους και οι απαντήσεις που έδωσαν είχαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ο ρόλος της εκπαιδευτικού ήταν να δώσει εξ αρχής σαφείς οδηγίες για τη διεξαγωγή της δραστηριότητας αλλά και να απαντήσει σε απορίες των μαθητ(ρι)ών μιας και όλη η διαδικασία ήταν πρωτόγνωρη για τη τάξη.

2η διδακτική ώρα (40')

Με την έναρξη της δεύτερης διδακτικής ώρας η καθηγήτρια ζήτησε από τις ομάδες των μαθητ(ρι)ών να παρουσιάσουν στην τάξη τα αποτελέσματα της συζήτησης που έλαβε χώρα την προηγούμενη ώρα διατηρώντας τους ρόλους τους. Έτσι ξεκίνησε στην ολομέλεια μια συζήτηση μεταξύ των διαφορετικών ομάδων στην οποία αναδείχθηκαν τα πλεονεκτήματα αλλά και οι ελλείψεις στις απαντήσεις των τριών φανταστικών μαθητ(ρι)ών. Στη συνέχεια – με την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού – οι μαθητές/ήτριες εγκατέλειψαν τους ρόλους τους και εξέφρασαν την προσωπική άποψη που διαμόρφωσαν έπειτα από την αναζήτηση επιχειρημάτων για την υποστήριξη της ομάδας τους και από τη συζήτηση με τις άλλες ομάδες. Η καθηγήτρια βοήθησε τη διαδικασία κάνοντας ερωτήσεις με σκοπό να οδηγήσει τους/τις μαθητές/ήτριες στην ανακάλυψη της «αλήθειας» – της απάντησης που η μαθηματική κοινότητα της τάξης στο εξής ενστερνίζεται ως ορθή – καθώς και στην επισήμανση των κενών που εμφανίζονται στις άλλες απαντήσεις.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ!): ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Σημειώνουμε πως τα αξιολογικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία προέρχονται από την μαρτυρία της εκπαιδευτικού και έμμεσα μόνο αναφερόμαστε στην εμπειρία των μαθητ(ρι)ών που συμμετείχαν στη δραστηριότητα (σε «» παραθέτουμε αποσπάσματα από απαντήσεις των μαθητ(ρι)ών όπως τα ανακαλεί η εκπαιδευτικός κατά τον αναστοχασμό). Η δραστηριότητα δόθηκε σε τμήμα της Γ΄ Γυμνασίου (23 = 7 κορίτσια + 16 αγόρια) στο οποίο το επίπεδο των μαθητ(ρι)ών είναι αρκετά καλό και με αρκετά από τα παιδιά να υποστηρίζονται με φροντιστηριακά μαθήματα (γεγονός που πολλές φορές αποτελεί τροχοπέδη στην προσπάθεια ανακάλυψης της γνώσης στη σχολική τάξη).

Η επιχειρηματολογία που αναπτύχθηκε στις γραπτές απαντήσεις των μαθητ(ρι)ών, αλλά και στη συζήτηση στην τάξη, έδειξε ότι η πλειοψηφία θεωρεί πιο κατανοητό τον «τρόπο» που χρησιμοποιεί ο Δημήτρης αν και θα μπορούσε να δώσει μερικές τιμές ακόμα για να το «αποδείξει καλύτερα». Η πλειοψηφία επίσης πιστεύει ότι ο «τρόπος» του Πάνου είναι «πιο μαθηματικός» γιατί «το λέει όπως θα το έλεγε ο δάσκαλος και ύστερα οι μαθητές θα έπρεπε να το διαβάσουν και να το μάθουν». Κάποιοι/ες δεν ικανοποιήθηκαν πλήρως από τον «τρόπο» της Κατερίνας κι έψαχναν να βρουν το λάθος της ωσότου αποκαλύφθηκε ότι δεν είχαν λάβει υπόψη το λεκτικό μέρος της απάντησης («Θα ξεκινήσω από το αριστερό μέλος....») παρά μόνο το μέρος των αλγεβρικών πράξεων.

Οι απαντήσεις στο δεύτερο ερώτημα ποικίλουν. Ξεχωρίζουν δύο μαθητές/τριες που δηλώνουν πως η καθηγήτρια θα ακούσει και τις τρεις απόψεις χωρίς να αποκαλύψει τη σωστή ώστε να επιτρέψει στην τάξη να βρει τη σωστή απάντηση. Αυτό το θεωρούμε ένδειξη πως οι μαθητ(ρι)ες αρχίζουν να αντιλαμβάνονται πως στην τάξη μπορεί να δίνεται περισσότερη έμφαση στη διαδικασία παραγωγής της γνώσης και της μάθησης παρά στο τελικό αποτέλεσμα. Ένα σεβαστό ποσοστό αναθεώρησε την άποψή του έπειτα από τους προβληματισμούς που προέκυψαν από τη συζήτηση και διαμόρφωσε πιο ξεκάθαρη εικόνα για την έννοια της ταυτότητας αλλά και τη διαφορά ανάμεσα στο πείραμα-δοκιμή και τη γενίκευση που απαιτεί η μαθηματική απόδειξη. Διαπίστωσαν ότι παραγωγική ενασχόληση με τη μαθηματική απόδειξη εμπλέκει και τα δύο μέρη και έμαθαν να είναι πιο προσεκτικοί απέναντι σε αληθοφανείς, αλλά όχι ολοκληρωμένες, απαντήσεις.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της συγκεκριμένης δραστηριότητας για τη διδασκαλία της απόδειξης είναι ενθαρρυντικά. Η όλη διαδικασία προσέλκυσε ικανοποιητικά τη συμμετοχή των μαθητ(ρι)ών και αναζωογόνησε το ενδιαφέρον τους, ιδιαίτερα στο πρώτο μέρος. Στο δεύτερο μέρος υπήρξε μικρότερη συμμετοχή και χρειάστηκε η παρότρυνση από την εκπαιδευτικό ώστε να εκφράσουν τη γνώμη τους περισσότεροι/ες μαθητές/ήτριες (συνολικά συμμετείχαν 10 παιδιά). Σημαντικό ήταν το όφελος και για την εκπαιδευτικό αφού μέσα από αυτή τη δραστηριότητα διαπιστώθηκαν δυσκολίες των μαθητ(ρι)ών και διερευνήθηκαν τρόποι μαθηματικά ουσιαστικοί και παιδαγωγικά ελκυστικοί για να αντιμετωπιστούν αυτές οι δυσκολίες. Τα συμπεράσματα από την εφαρμογή της Δραστηριότητας 1 τροφοδότησαν τη συνέχεια (σχεδιασμός Δραστηριοτήτων 2-4 και πέρα).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως αναφέραμε, τα αξιολογικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία προέρχονται μόνο από τη μαρτυρία της εκπαιδευτικού. Αναγνωρίζουμε αυτόν τον περιορισμό της εργασίας μας αλλά τονίζουμε πως η έμφασή της είναι η ανάδειξη των χαρακτηριστικών της συνεργασίας της εκπαιδευτικού, του Σ.Ε.Ε. και της ομάδας ερευνητριών. Ενορχηστρώνουμε τώρα τις επόμενες φάσεις αυτής της Έρευνας Δράσης έτσι ώστε η εμπειρία των μαθητ(ρι)ών που συμμετέχουν να πάρει εξίσου κεντρικό ρόλο.

Αυτή η εργασία έχει δειγματοληπτικό χαρακτήρα: παραθέτουμε δείγμα της συνεργασίας μας, με βάση μία δραστηριότητα από τη σειρά δραστηριοτήτων που δοκιμάστηκαν στην τάξη της εκπαιδευτικού. Ισχυριζόμαστε πως η σειρά διευκόλυνε την πρώτη επαφή των μαθητ(ρι)ών με τη μαθηματική απόδειξη, διέγειρε το ενδιαφέρον και την εκτίμησή τους για αυτήν αλλά και προώθησε την ανάπτυξη δεξιοτήτων τεκμηρίωσης, κριτικής σκέψης, ομαδικής εργασίας και διαπραγμάτευσης εναλλακτικών λύσεων προβλήματος στα μαθηματικά. Αρχικό έναυσμα και στόχος ήταν η πρώτη ενασχόληση των μαθητ(ρι)ών με τη μαθηματική αποδειξη. Κατά μία έννοια, η εισαγωγή στις ταυτότητες έδωσε μία απλή και χρονικά κατάλληλη αφορμή για αυτή την ενασχόληση.

Οι Δραστηριότητες 1-4 έκαναν απτή μία απάντηση στο ερώτημα «αν είχαμε μία ώρα ακόμα στο μάθημα των μαθηματικών τι θα την κάναμε;». Η εφαρμογή έγινε στα πλαίσια της επιπρόσθετης «πέμπτης ώρας» του προγράμματος δεξιοτήτων του Ι.Ε.Π., συνδυάζοντας μαθηματικές και πλείστες άλλες δεξιότητες με διαθεματικό τρόπο. Σε αντίθεση με τον επίσημο εκπαιδευτικό σχεδιασμό του προγράμματος δεξιοτήτων – που θέλει τα εργαστήρια δεξιοτήτων διαχωρισμένα από τα «κανονικά» μαθήματα των μαθηματικών – δείξαμε πως μπορούν οι στόχοι του προγράμματος να επιτευχθούν ταυτόχρονα με τους στόχους των «κανονικών» μαθημάτων (στην περίπτωση μας του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών). Το εύρημα είναι μη τετριμμένο: η μικρής κλίμακας παρέμβαση δείχνει ότι, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, είναι εφικτή η μετάβαση από την ασάφεια μεγαλεπήβολων παιδαγωγικών ενοράσεων στη δημιουργική παιδαγωγική πράξη της τάξης. Επιπλέον τα ευρήματα αντίκεινται στο αποσπασματικό / διασπαστικό αφήγημα περί δεξιοτήτων «μετά» ή «έξω» από την απόκτηση γνώσης. Στη δική μας πρόταση, γνώση και δεξιότητες λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα και διαλεκτικά. Ας δούμε εν συντομία ποιες είναι οι συνθήκες που ευνόησαν αυτή τη μετάβαση από την ασάφεια στη δημιουργική πράξη.

Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι η καινοτομία να είναι «κοινή επιχείρηση» (Wenger, 1998) των εμπλεκομένων μερών. Τα μέλη της ομάδας είχαν διαφορετικά κίνητρα (παιδαγωγικά, ερευνητικά, θεσμικά). Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή των δραστηριοτήτων αποτέλεσε το μέσο για την επίτευξη των επιμέρους στόχων: η καθηγήτρια ήθελε να εμπλέξει τη τάξη με την (μαθηματική) επιχειρηματολογία στα εργαστήρια δεξιοτήτων, ο Σ.Ε.Ε. να υποστηρίξει τη καινοτομία στο σχολείο προωθώντας παράλληλα την ομαλή εισαγωγή των μαθητ(ρι)ών στην απόδειξη και οι ερευνήτριες να προχωρήσουν την έρευνα τους με την εμπλοκή μαθητ(ρι)ών με δραστηριότητες του MathTASK προγράμματος.

Το δεύτερο είναι η δημιουργία πλαισίου που ευνοεί την ισότιμη εμπλοκή (Wenger, 1998) όλων των μερών και επιτρέπει αναστοχασμό και ανατροφοδότηση. Η έρευνα δράσης (Elliott, 1991) προσέφερε το κατάλληλο πλαίσιο συνεργασίας. Κατά τη διάρκεια της συνεργασίας, η οποία είναι μακρόχρονη και αποτελείται από κύκλους, η εκπαιδευτικός, ο Σ.Ε.Ε. και οι ερευνήτριες εμπνέονται από τη πράξη, μελετούν έρευνες και τις εφαρμόζουν στην τάξη, παίρνουν ανατροφοδότηση από την εφαρμογή, προσαρμόζουν τις πρακτικές τους και επικοινωνούν με άλλους εκπαιδευτικούς (όλη η ομάδα είχε την ευκαιρία να συζητήσει με άλλους εκπαιδευτικούς σε μορφή σεμιναρίων του Πε.Κ.Ε.Σ. της περιοχής εμπνευσμένα από αυτή τη δράση).

Το τρίτο είναι η ισότιμη αλλά διακριτά διαφορετική συνεισφορά των μελών της ομάδας. Η εκπαιδευτικός ανατροφοδοτεί την ομάδα ως προς σχολικές ανάγκες (λόγος της διδακτικής πρακτικής), οι ερευνήτριες ανατροφοδοτούν την ομάδα με τα ερευνητικά δεδομένα (βιβλιογραφία, θεωρητικά και μεθοδολογικά εργαλεία: λόγος την επιστημονικής κοινότητας) ενώ ό Σ.Ε.Ε. είναι ο «διαμεσολαβητής» (Wenger, 1998) που αποτελεί τον συνδετικό κρίκο μεταξύ έρευνας και πράξης (Hjalmarson & Baker, 2020), διευκολύνει την εφαρμοσιμότητα της έρευνας και δίνει θεσμική διάσταση στη δράση. Η επιτυχία της δράσης κρίνεται από τη δημιουργία κοινού λόγου σε ομάδα που έχει «κοινή επιχείρηση» ενώ αναγνωρίζει τις διαφορετικές ανάγκες των μελών της.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε θερμά το Περιφερειακό Κέντρο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού (Πε.Κ.Ε.Σ.) Κρήτης όπως επίσης και το Σχολείο, τις μαθήτριες και τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας. Η φάση του προγράμματος MathTASK στη οποία αναφερόμαστε σε αυτή την εργασία χρηματοδοτήθηκε από το *Pro-Vice Chancellor's Impact Fund* (No ICF202105) στο UEA.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Askew, M. (2020). Reasoning as a mathematical habit of mind. *The Mathematical Gazette, 104*(559), 2-11.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 301–309.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Open University Press.

Hjalmarson, M. A., & Baker, C. K. (2020). Mathematics specialists as the hidden players in professional development. *International Journal of Science and Mathematics Education 18* (supplement), S51–S66.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education 31*(4), 396–428.

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.). Κύκλοι Δεξιοτήτων. Κύκλοι Δεξιοτήτων - Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (iep.edu.gr).

Kanellos, I., Nardi, E. & Biza, I. (2018). Proof Schemes combined: Mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Thinking and Learning 20*(4), 277–294.

Potari, D., Sakonidis, C., Chatzigoula, A. & Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analyzing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education 13*, 473-485.

Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher 26*(7), 13-22.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge University Press.

Williams, H. (2012). To what extent might role-play be a useful tool for learning mathematics? *Mathematics Teaching, 230*, 17–20.

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ: ΛΑΘΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Θωμά Αθηνά, Παπαδόπουλος Ιωάννης

University of Southampton, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

a.thoma@soton.ac.uk, ypapadop@eled.auth.gr

Στην εργασία αυτή ερευνούμε τα λάθη και τις παρανοήσεις μαθητών Α΄ και Β΄ Λυκείου σχετικά με την έννοια των σύνθετων κλασμάτων. Συγκεκριμένα εξετάζουμε τις γραπτές λύσεις των μαθητών σε δύο δραστηριότητες που αρχικά ζητούν να μετατραπεί μια ρητή αριθμητική παράσταση σε οριζόντια μορφή και στη συνέχεια να γίνουν οι υπολογισμοί. Η ποιοτική ανάλυση των γραπτών απαντήσεων των μαθητών ανέδειξε λάθη που προέρχονται είτε από περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση του κλάσματος, είτε από λανθασμένη εφαρμογή των βημάτων του αλγορίθμου μετατροπής σύνθετου κλάσματος σε απλό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα σύνθετα κλάσματα είναι ίσως για πολλούς ένα θέμα στη διδασκαλία της Αριθμητικής στο Δημοτικό Σχολείο με περιορισμένη εφαρμοσιμότητα στα υπόλοιπα σχολικά Μαθηματικά όλων των βαθμίδων. Στην άποψη αυτή υπάρχουν σοβαρές ενστάσεις. Πολλές δεκαετίες πριν, δημοσιεύτηκαν εργασίες που τονίζουν την αναγκαιότητα συστηματικής διδασκαλίας και μελέτης τους (Gale, 1911; Lynde, 1920; Bowie, 1949) λόγω του ότι αυτά είναι απαραίτητα σε πολλά προβλήματα στον Απειροστικό Λογισμό. Έτσι, για παράδειγμα, η παραγώγιση της $εφ\frac{1}{\chi}$ ή του $ημ\left(\frac{1}{1+\chi^2}\right)$ οδηγούν, μετά την εφαρμογή των κανόνων παραγώγισης, στη διαχείριση σύνθετων κλασμάτων.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε σε αυτή την εργασία είναι τμήμα μιας ευρύτερης έρευνας που τρέχει αυτή τη στιγμή και που βασίζεται σε αντίστοιχη ερευνητική δουλειά των Papadopoulos και Gunnarsson (2020) που έχει προηγηθεί. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές μελέτησαν την χρήση των νοερών παρενθέσεων κατά τη διάρκεια υπολογισμού του εξαγόμενου ρητών αριθμητικών παραστάσεων. Στην παρούσα έρευνα η ανάλυση των δεδομένων έδειξε αξιοσημείωτη δυσκολία στις δραστηριότητες που απαιτούσαν την μετατροπή σύνθετων κλασμάτων σε απλά. Τις δυσκολίες αυτές, τα λάθη και τις παρανοήσεις που εντοπίζονται σχετικά με την απλοποίηση σύνθετων κλασμάτων μελετούμε στην εργασία αυτή.

Σε αυτό λοιπόν το πλαίσιο, και έχοντας λοιπόν υπόψη μας την σημαντικότητα της έννοιας των σύνθετων κλασμάτων στην Δευτεροβάθμια και Τριτοβάθμια εκπαίδευση, εξετάζουμε εδώ το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

Ποιά ειναι η ταυτότητα των λαθών και των παρανοήσεων που εμφανίζουν οι μαθητές Λυκείου σε σχέση με την έννοια του σύνθετου κλάσματος;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Στη γενική τους μορφή τα σύνθετα κλάσματα ορίζονται ως πηλίκα κλασμάτων, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, με $\frac{c}{d} \neq 0,\ b, d \neq 0$. Η σημασία των σύνθετων κλασμάτων δεν έχει αναγνωριστεί όσο θα έπρεπε αν κρίνουμε από την παρουσία τους στα αναλυτικά προγράμματα και στα σχολικά εγχειρίδια. Τα συναντούμε μεταξύ άλλων στην ενότητα του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων ως επιμέρους οδηγία να μπορούν οι μαθητές να μετατρέπουν ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό (ΔΕΠΠΣ, 2003). Το μεγαλύτερο μέρος των σχετικών ερευνών εστιάζει κυρίως σε παρανοήσεις εν γένει των κλασμάτων και όχι ιδιαίτερα στα σύνθετα κλάσματα (Stafylidou και Vosniadou, 2004; Tirosh, 2000). Στις λίγες που τα μελετούν είναι φανερό ότι οι μαθητές δυσκολεύονται σε μεγάλο βαθμό. Οι Lee και Boyadzhiev (2020) στην έρευνά τους βρήκαν ότι μόλις το 37% των συμμετεχόντων φοιτητών ήταν σε θέση να κάνουν υπολογισμούς που περιλάμβαναν σύνθετα κλάσματα. Η έρευνα είχε βασικό ενδιαφέρον στα λάθη σε υπολογισμούς γενικά με κλάσματα και κατέληξε σε βασικούς τύπους λαθών που οφείλονταν σε έλλειψη κατανόησης της φύσης των κλασματικών αριθμών, έλλειψη υπολογιστικών δεξιοτήτων με φυσικούς, έλλειψη κατανόησης των πράξεων με κλάσματα, υπερβολική έμφαση στην εύρεση κοινού παρονομαστή, και ελλιπή κατανόηση της προτεραιότητας πράξεων. Ανάλογη έρευνα των Brown και Quinn (2006) χρησιμοποίησε ένα τεστ 25 ερωτήσεων με κλάσματα σε 143 μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (15-16 χρονών) στις Ηνωμένες Πολιτείες. Μεταξύ αυτών υπήρχαν και ερωτήσεις που περιλάμβαναν σύνθετα κλάσματα. Οι μαθητές στην περίπτωση σύνθετου κλάσματος όπου ο αριθμητής ήταν φυσικός και ο παρονομαστής κλάσμα a/(b/c), είχαν πρόβλημα να αναγνωρίσουν το κλάσμα στον παρονομαστή (b/c) ως παράγοντα της διαίρεσης. Αλλά και στην κλασική περίπτωση σύνθετου κλάσματος (κλάσμα προς κλάσμα) το πρόβλημα των μαθητών ήταν ότι δεν μπορούσαν να εφαρμόσουν τον κανόνα «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Αυτό τους οδηγούσε στο να εφαρμόσουν μια ποικιλία λανθασμένων αλγορίθμων. Τέλος, στην περίπτωση παράστασης που είχε φυσικό αριθμό στον αριθμητή (την μονάδα) και γινόμενο κλασμάτων στον παρονομαστή (το $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$) ένας σημαντικός αριθμός μαθητών έκανε είτε υπολογιστικό λάθος στον υπολογισμό του γινομένου στον παρονομαστή είτε αδυνατούσαν να ανταποκριθούν στην απλοποίηση του κλάσματος $\frac{1}{\frac{1}{6}}$. Οι ερευνητές αποδίδουν αυτή τη σύγχυση των μαθητών στην αδυναμία να αναγνωρίσουν ότι εδώ πρόκειται για τον αντίστροφο του 1/6 δηλαδή το 6. Ο κανόνας «βρίσκω τον αντίστροφο ανταλλάσσοντας θέση στους όρους του κλάσματος» μπορεί να εξυπηρετεί προσωρινά αλλά φαίνεται ότι στο τέλος δεν παρέχει ουσιαστική κατανόηση της έννοιας του αντιστρόφου και έτσι εξηγεί την αποτυχία στη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Οι Papadopoulos και Gunnarsson (2020) στην έρευνά τους πάνω στην έννοια των νοερών παρενθέσεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν για να υπολογίσουν μια ρητή αριθμητική παράσταση την μετατρέπουν πρώτα στην οριζόντιά της μορφή, χρησιμοποίησαν και μια δραστηριότητα που περιλάμβανε σύνθετο κλάσμα της μορφής $\frac{\frac{a}{b}}{c}$. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όταν δεν γινόταν χρήση παρενθέσεων το κλάσμα γραφόταν ως a:b:c και τότε, σε κάποιες περιπτώσεις, οι διαιρέσεις γινόταν από τα αριστερά προς τα δεξιά, κάτι που παραβίαζε τη δομή του αρχικού κλάσματος.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ – ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν συνολικά 182 μαθητές της Α΄και Β΄Λυκείου (133 και 49 αντίστοιχα) από τέσσερα διαφορετικά σχολεία της περιφέρειας. Τα δεδομένα της ευρύτερης έρευνας ήταν γραπτές απαντήσεις των μαθητών σε δραστηριότητες, εμπνευσμένες από την ερευνητική δουλειά των Papadopoulos και Gunnarsson (2020), για την επίλυση ρητών αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων.

1) Γνωρίζετε ότι το κλάσμα $\frac{6}{3}$ μπορεί να γραφτεί οριζοντίως ως $6:3$. Για τα παρακάτω κλάσματα, πρώτα ξαναγράψτε το καθένα σε οριζόντια μορφή και μετά υπολογίστε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων (π.χ. $\frac{6}{3} = 6:3$).

γ) $\frac{-6}{\frac{3}{2}} - \frac{4\cdot5\cdot9}{3\cdot7} =$

δ) $\frac{\frac{4+16}{4}}{2} + \frac{3\cdot4}{2} =$

Εικόνα 1: Δραστηριότητες με αριθμητικές παραστάσεις σύνθετων κλασμάτων

Για τις ανάγκες της εργασίας αυτής επικεντρωνόμαστε στις γραπτές απαντήσεις των μαθητών στις 2 τελευταίες δραστηριότητες της πρώτης ομάδας (Εικόνα 1). Οι γνωστικές απαιτήσεις για την επίλυσή τους περιορίζονται στη γνώση που έχουν αποκτήσει στην Α' Γυμνασίου. Επομένως δεν δημιουργεί ανισότητες στη διαδικασία το γεγονός ότι συμμετέχουν μαθητές της Α΄και Β΄Λυκείου και γι αυτό στην ανάλυση των αποτελεσμάτων δεν γίνεται διάκριση ανάμεσα στους μαθητές.

Και οι δυο δραστηριότητες ζητούν από τους μαθητές αρχικά να μετατρέψουν τις κλασματικές παραστάσεις στις ισοδύναμές τους αριθμητικές σε οριζόντια διάταξη και στη συνέχεια να τις υπολογίσουν. Για να γίνει αυτό είναι απαραίτητη προϋπόθεση η χρήση παρενθέσεων ώστε να διατηρηθεί η δομή των κλασμάτων. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για παράδειγμα στην χρήση παρενθέσεων σε τεχνολογικά περιβάλλοντα (π.χ., Excel, TI-84) όπου το περιβάλλον παρέχει τη δυνατότητα εισαγωγής τύπων μόνο σε οριζόντια παράσταση (Drijvers et al., 2010).

Στην πρώτη από τις δυο δραστηριότητες, η κλασματική παράσταση πρέπει να μεταφερθεί οριζόντια ως $-6 : (3:2) - (4 \cdot 5 \cdot 9) : (3 \cdot 7) = -6 : 1{,}5 - 180 : 21 = -4 - 20 : 7$ το οποίο μπορεί να παρουσιαστεί είτε ως -6,86 (στρογγυλοποίηση δύο δεκαδικά ψηφία) είτε ισοδύναμα ως $-48 : 7$. Αντίστοιχα η δεύτερη δραστηριότητα μεταφέρεται οριζόντια ως $[(4+16):4]:2 + (3 \cdot 4):2$ και υπολογίζεται στη συνέχεια ως $5:2 + 12:2 = 2{,}5 + 6 = 8{,}5$. Στην πρώτη δραστηριότητα στο σύνθετο κλάσμα ο αριθμητής είναι φυσικός και ο παρονομαστής κλάσμα ενώ στη δεύτερη, αντίστροφα, το κλάσμα βρίσκεται στον αριθμητή και ο φυσικός στον παρονομαστή. Η επιλογή έγινε σκόπιμα για να συμπεριλάβουμε όψεις του σύνθετου κλάσματος πέρα από την κλασική περίπτωση με κλάσματα και στους δυο όρους του: $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε εδώ ότι σύμφωνα με το εγχειρίδιο Μαθηματικών της Α' Γυμνασίου, οι μαθητές αρχικά εισάγονται στην τεχνική αυτή ($\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$) και ακολουθεί εξήγησή της στη βάση της διαίρεσης κλασμάτων. Το πρώτο από τα λυμένα παραδείγματα του βιβλίου παρουσιάζει όλες τις διαφορετικές όψεις του σύνθετου κλάσματος.

Η διάρκεια για τη συγκεκριμένη ομάδα δραστηριοτήτων ήταν 15 λεπτά αν και δεν χρειάστηκε να εξαντληθεί όλος ο χρόνος. Οι γραπτές απαντήσεις των μαθητών συλλέχθηκαν και αποτελούν τα δεδομένα της έρευνας.

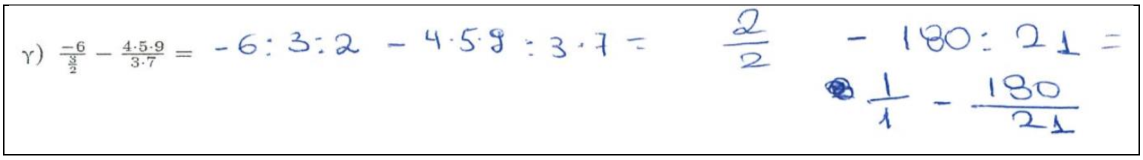
Έγινε ποιοτική ανάλυση περιεχομένου (Mayring, 2014) και οι λανθασμένες απαντήσεις κωδικοποιήθηκαν με βάση το σημείο στην πορεία υπολογισμού που σημειώθηκε το λάθος σε σχέση με την απλοποίηση των σύνθετων κλασμάτων. Η ανάλυση έγινε και από τους δύο συγγραφείς ξεχωριστά και όπου υπήρχε διαφωνία στην κατηγοριοποίηση ακολούθησε συζήτηση ώστε να συμφωνηθεί η τελική κατηγοριοποίηση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης ανά δραστηριότητα για όλους τους μαθητές (Α΄ και Β΄ Λυκείου ταυτόχρονα), εστιάζοντας σε απαντήσεις που παρουσιάζουν παρανοήσεις ή λάθη σχετικά με την έννοια του σύνθετου κλάσματος.

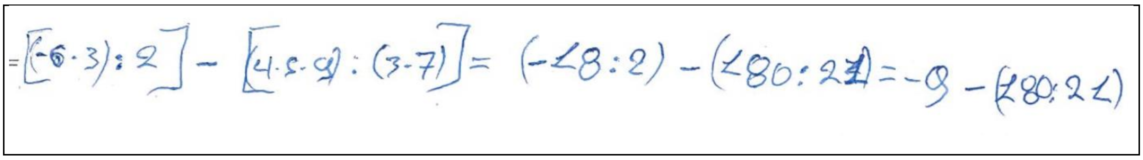
Πρώτη Δραστηριότητα (δραστηριότητα γ)

Στην εργασία αυτή εστιάζουμε στο κομμάτι των σύνθετων κλασμάτων και έτσι δεν αναφερόμαστε στο υπόλοιπο μέρος των υπολογισμών που κάνουν οι μαθητές. Η δραστηριότητα αυτή είχε στο σύνθετο κλάσμα τον φυσικό αριθμό στον αριθμητή και το κλάσμα στον παρονομαστή. Εντοπίστηκαν 25 περιπτώσεις που αφήνουν να φανεί η δυσκολία των μαθητών με τα σύνθετα κλάσματα. Μια συνήθης προβληματική προσέγγιση ήταν η οριζόντια γραφή της αριθμητικής παράστασης χωρίς όμως τις απαραίτητες παρενθέσεις που θα διατηρούσαν τη δομή του αρχικού κλάσματος. Στην Εικόνα 2 ο συγκεκριμένος μαθητής (Μ138) ξεκίνησε με τον τρόπο αυτό. Στην συνέχεια, στην περίπτωση του σύνθετου κλάσματος υπολογίζει την αριθμητική παράσταση σύμφωνα με την προτεραιότητα πράξεων (δηλ. από αριστερά προς δεξιά) παραβιάζοντας έτσι την δομή του αρχικού κλάσματος που θέλει τη διαίρεση 3:2 να προηγείται. Για το δεύτερο κλάσμα παρόλο που δεν έχει βάλει παρενθέσεις διατηρεί νοερά την δομή του κλάσματος (αριθμητής και παρονομαστής) και υπολογίζει σωστά το δεύτερο κλάσμα. Αυτό φαίνεται να είναι σε συμφωνία με τη χρήση νοερών παρενθέσεων όπως αυτές αναφέρονται στην εργασία των Papadopoulos και Gunnarsson (2020).



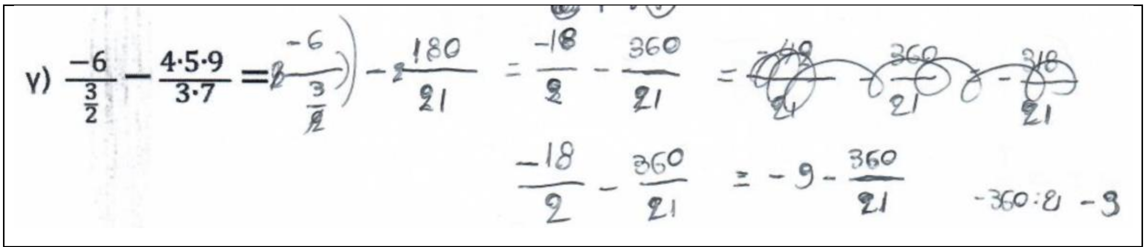
Εικόνα 2: Παραβίαση δομής κλάσματος και χρήση νοερών παρενθέσεων [Μ138]

Σε άλλες περιπτώσεις παρόλο που γίνεται χρήση παρενθέσεων για να διατηρηθεί η δομή του κλάσματος κατά τη διάρκεια της μεταφοράς στην οριζόντια διάταξη, οι μαθητές δεν κάνουν σωστά την μετατροπή του σύνθετου σε απλού. Έτσι, στην Εικόνα 3, αντί ο μαθητής να γράψει $(-6 \cdot 2) : 3$ γράφει $(-6 \cdot 3) : 2$.



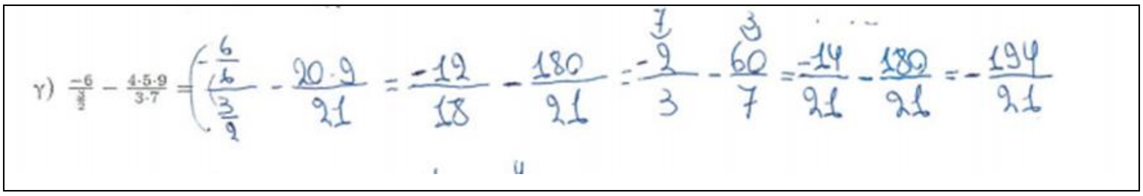
Εικόνα 3: Λανθασμένη απλοποίηση σύνθετου κλάσματος [Μ105]

Λάθη εμφανίστηκαν επίσης κατά τη διαδικασία εφαρμογής μιας αλγοριθμικής προσέγγισης για την απλοποίηση ενός σύνθετου κλάσματος Στο παράδειγμα (Εικόνα 4), παρατηρούμε ότι ο μαθητής χρησιμοποιεί καμπύλες γραμμές για να δείξει τα δύο ζεύγη που χρειάζονται για την χρήση του αλγορίθμου. Δεδομένου ότι στον αριθμητή υπάρχει φυσικός και όχι κλάσμα θεωρεί νοερά την ύπαρξη μιας μονάδας πάνω από το -6. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζει το -6 με το 3 και το νοερό «1» με το 2 και τοποθετεί λανθασμένα το πρώτο γινόμενο (εσωτερικό) στον αριθμητή και το δεύτερο γινόμενο (εξωτερικό) στον παρονομαστή, καταλήγοντας στο κλάσμα $-\frac{18}{2}$.



Εικόνα 4: Λανθασμένη απλοποίηση σύνθετου κλάσματος [M54]

Λάθος στην προσπάθεια δημιουργίας των τεσσάρων όρων του σύνθετου κλάσματος φαίνεται επίσης στην Εικόνα 5.

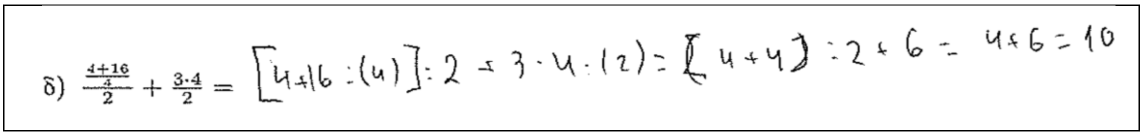


Εικόνα 5: Λανθασμένη απλοποίηση σύνθετου κλάσματος [M154]

Εδώ ο μαθητής αντικαθιστά το -6 του αριθμητή με το κλάσμα $-\frac{6}{6}$. Όπως και ο προηγούμενος, έτσι και αυτός χρησιμοποιεί τις καμπύλες γραμμές για να δείξει τα ζεύγη, πολλαπλασιάζει τα εξωτερικά νούμερα και τα τοποθετεί σωστά στον αριθμητή και τα εσωτερικά στον παρονομαστή καταλήγοντας όμως λανθασμένα στο $-\frac{12}{18}$.

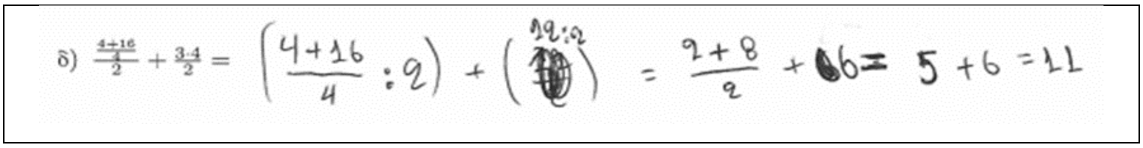
Δεύτερη Δραστηριότητα (δραστηριότητα δ)

Συνολικά σε αυτήν εντοπίστηκαν 24 απαντήσεις ενδεικτικές των δυσκολιών των μαθητών σε σχέση με τα σύνθετα κλάσματα. Άλλες από αυτές είναι στο ίδιο πνεύμα με όσες παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη δραστηριότητα και άλλες παρουσιάζουν κάποιες διαφορές. Στην Εικόνα 6, βλέπουμε ότι ο μαθητής κάνει χρήση παρενθέσεων αλλά δεν διατηρεί με επιτυχία την δομή του σύνθετου κλάσματος κατά τη μετατροπή σε οριζόντια διάταξη. Η παρένθεση χρειαζόταν γύρω από το 4+16. Ο μαθητής υπολογίζει σωστά την αριθμητική παράσταση μέσα στις αγκύλες, όμως η γραφή αυτή δεν διατηρεί την δομή του κλάσματος και γι αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό.



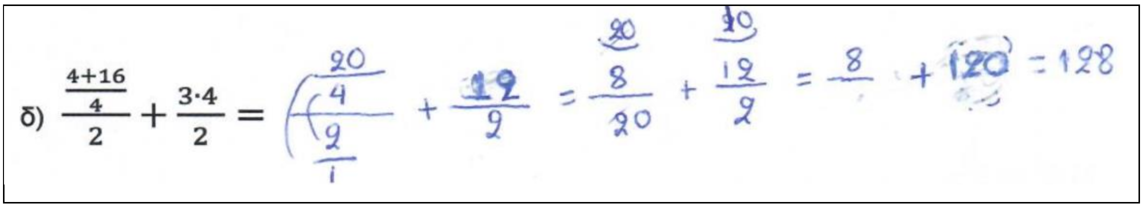
Εικόνα 6: Παραβίαση δομής κλάσματος [Μ156]

Επίσης, στην προσπάθεια των μαθητών να μετατρέψουν το σύνθετο κλάσμα σε απλό παρατηρήθηκε ότι κάποιοι (βλέπε για παράδειγμα την απάντηση στην Εικόνα 7) διατηρούν τον αριθμητή στην κλασματική του μορφή και μεταφράζουν την κλασματική γραμμή που βρίσκεται κάτω από αυτό σε διαίρεση. Πρόκειται για μια σωστή ερμηνεία του αρχικού κλάσματος. Στη συνέχεια όμως ερμηνεύουν την διαίρεση του $\frac{4+16}{4}$ με το 2 ως μια λανθασμένη υπεργενίκευση της επιμεριστικής ιδιότητας της διαίρεσης ως προς την πρόσθεση και διαιρούν και τους δύο όρους του κλάσματος με το 2. Αυτή η ενέργεια οδηγεί στο ισοδύναμο κλάσμα $(\frac{4+16}{4}=\frac{2+8}{2})$ και όχι στο αποτέλεσμα της διαίρεσης $(\frac{4+16}{4}:2=\frac{4+16}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{20}{8})$.



Εικόνα 7: Υπεργενίκευση επιμεριστικής ιδιότητας [Μ85]

Και σε αυτήν τη δραστηριότητα εντοπίστηκαν λάθη που προέκυψαν από την ανάγκη των μαθητών με βάση το σχετικό κανόνα να έχουν διαθέσιμους 4 όρους που θα τους συνδυάζουν ανά δύο για να πετύχουν την απλοποίηση του σύνθετου κλάσματος.



Εικόνα 8: Λανθασμένη απλοποίηση σύνθετου κλάσματος [Μ5]

Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στην Εικόνα 8. Ο μαθητής δημιουργεί σωστά τους τέσσερις όρους τοποθετώντας την μονάδα ως παρανομαστή του 2. Κατόπιν χρησιμοποιεί τις καμπύλες γραμμές για να υποδείξει τα ζεύγη που επιλέγει προκειμένου να υπολογίσει τα γινόμενά τους. Αυτό όμως που τελικά οδηγεί σε λανθασμένο αποτέλεσμα είναι ότι τοποθετεί τα γινόμενα σε λάθος θέση. Έτσι, βάζει το εξωτερικό γινόμενο ως παρονομαστή και το εσωτερικό ως αριθμητή ενώ θα έπρεπε να τα τοποθετήσει αντίστροφα.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εστιάσαμε στις παρανοήσεις και τα λάθη που παρατηρήθηκαν σε γραπτές απαντήσεις μαθητών Λυκείου σε μια δραστηριότητα με ρητές αριθμητικές παραστάσεις. Με βάση τα ευρήματα φαίνεται ότι αυτές οι δυσκολίες συνδέονται (α) με την εννοιολογική κατανόηση του κλάσματος, και (β) με τη χρήση του αλγορίθμου απλοποίησης του σύνθετου κλάσματος.

Η περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση του κλάσματος (Lee & Boyadzhiev, 2020) έγινε αισθητή κυρίως μέσω της παραβίαση της δομής του αρχικού κλάσματος όταν αυτό μεταφερόταν σε οριζόντια γραφή και όπου έπρεπε να ληφθεί μέριμνα προκειμένου συνολικά ο αριθμητής να διαιρείται με όλον τον παρονομαστή. Αυτό σημαίνει ότι ο λύτης πρέπει να κάνει χρήση παρενθέσεων οι οποίες θα του εξασφαλίζουν αυτή τη διατήρηση της δομής. Εδώ παρατηρήθηκαν δυο παραλλαγές. Στην πρώτη περίπτωση η οριζόντια μεταφορά δεν έκανε χρήση παρενθέσεων οπότε φαινομενικά παραβιάζεται η δομή του κλάσματος. Όμως οι σχετικοί υπολογισμοί στη συνέχεια από τους μαθητές γίνονται με τον τρόπο που θα επέβαλε η ύπαρξη των παρενθέσεων. Το φαινόμενο αυτό παρατήρησαν οι Papadopoulos και Gunnarsson (2020) στην έρευνά τους και το περιγράφουν με τον όρο «νοερές παρενθέσεις». Στη δεύτερη περίπτωση, και πάλι δεν γίνεται χρήση παρενθέσεων στην οριζόντια μεταφορά της παράστασης και στη συνέχεια οι υπολογισμοί γίνονται με βάση τους κανόνες για την προτεραιότητα πράξεων, γεγονός που προφανώς παραβιάζει τη δομή του αρχικού κλάσματος. Πρόκειται δηλαδή για τυπική παραβίαση της δομής στην πρώτη, και για ταυτόχρονη τυπική και ουσιαστική παραβίαση της δομής στη δεύτερη. Παρατηρήθηκε οι μαθητές να κάνουν ή μόνο το ένα από τα δυο ή και τα δυο ταυτόχρονα στους υπολογισμούς τους. Έτσι, στο παράδειγμα της Εικόνας 2, και τα δυο αρχικά κλάσματα γράφονται οριζόντια χωρίς χρήση παρενθέσεων. Στο πρώτο, που είναι σύνθετο κλάσμα, ο υπολογισμός $(-6 \div 3 \div 2)$ γίνεται με βάση την προτεραιότητα πράξεων, γεγονός που οδηγεί στο λανθασμένο αποτέλεσμα $\frac{2}{2}$, αντί του σωστού 4 που θα έπρεπε να βρει αν φρόντιζε να διατηρήσει τη δομή του. Στο δεύτερο κλάσμα ο ίδιος μαθητής αποφεύγει και πάλι τη χρήση παρενθέσεων $(-4 \cdot 5 \cdot 9 \div 3 \cdot 7)$. Εν τούτοις ο τρόπος υπολογισμού γίνεται σαν να ήταν παρούσες οι παρενθέσεις: $-180 \div 21$. Αυτός ο υπολογισμός δεν συνάδει τυπικά με τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων. Στη μορφή που είναι γραμμένη η παράσταση θα έπρεπε να προχωρήσει τους υπολογισμούς από αριστερά προς τα δεξιά. Ανάλογα στιγμιότυπα συναντώνται και στις απαντήσεις των εικόνων 3, 6 και 7. Στην κατηγορία αυτή των δυσκολιών που σχετίζονται με την εννοιολογική κατανόηση ενδιαφέρον παρουσιάζει και η τάση για υπεργενίκευση ιδιοτήτων που σχετίζονται με τους φυσικούς και η μεταφορά τους στα κλάσματα. Στην Εικόνα 7 ο μαθητής σωστά ξαναγράφει το πρώτο κλάσμα της παράστασης ως $\frac{4+16}{4} \div 2$. Στη συνέχεια όμως κάνει μια υπεργενίκευση της επιμεριστικής ιδιότητας της διαίρεσης. Στην περίπτωση που το ‘α+β’ διαιρείται με το ‘γ’ τότε πρέπει και το ‘α’ και το ‘β’ να διαιρεθούν με το ‘γ’. Στη λογική αυτή ο μαθητής γενικεύει ότι και στην περίπτωση του κλάσματος ‘α/β’ που διαιρείται με φυσικό ‘γ’ πρέπει όλοι οι όροι που προηγούνται του φυσικού (και ο ‘α’ και ο ‘β’) να διαιρεθούν με αυτόν. Έτσι το $\frac{4+16}{4} \div 2$ γίνεται $\frac{2+8}{2}$.

Η δεύτερη κατηγορία λαθών προέρχεται από την εφαρμογή του αλγορίθμου (βλ. Εικόνες 4, 5 και 8). Η δυσκολία αυτή χαρακτηρίζει γενικά μαθητές που βασίζονται αποκλειστικά στη χρήση αλγορίθμων. Το πλήθος των αλγοριθμικών διαδικασιών που πρέπει να διατηρούν στη μνήμη τους αυξάνεται σημαντικά όσο προχωρούν από τάξη σε τάξη και από βαθμίδα σε βαθμίδα εκπαίδευσης. Συνεπώς οι μαθητές πρέπει να θυμούνται κάθε φορά (α) ποιος είναι ο απαιτούμενος αλγόριθμος, (β) ποια είναι τα επιμέρους βήματά του, (γ) με ποια σειρά εκτελούνται τα βήματα, και (δ) πώς εκτελείται σωστά το κάθε βήμα. Προφανώς, οποιοδήποτε λάθος σε ένα από τα παραπάνω οδηγεί σε λανθασμένο αποτέλεσμα στη δραστηριότητα υπολογισμού. Για τον αλγόριθμο που αφορά τα σύνθετα κλάσματα τα επιμέρους βήματα που πρέπει επιτυχώς να ακολουθήσει κανείς είναι: (α) το σύνθετο κλάσμα να έχει τέσσερις όρους, (β) να επιλεγούν σωστά τα ζευγάρια των 2 εξωτερικών και 2 εσωτερικών αριθμών που θα πολλαπλασιαστούν, και (γ) να γίνει η σωστή τοποθέτηση των γινομένων στον αριθμητή και παρονομαστή του τελικού κλάσματος. Στις δύο δραστηριότητες που παρουσιάζουμε εδώ το σύνθετο κλάσμα δεν έχει τους τέσσερις όρους αφού ο ένας από τους όρους του κλάσματος είναι φυσικός και άρα αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη ώστε ο φυσικός να μετατραπεί σε κλάσμα προκειμένου να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος. Στις απαντήσεις των μαθητών είχαμε αδυναμία στη σωστή δημιουργία των τεσσάρων όρων (Εικ. 4, 5) (Brown & Quinn, 2006), και λανθασμένη τοποθέτηση των γινομένων (Εικ. 4 και 8).

Τα παραπάνω τεκμηριώνουν την αναγκαιότητα που από παλιά τονίζει η βιβλιογραφία μιας πιο εκτενούς ενασχόλησης των μαθητών με τα σύνθετα κλάσματα λόγω του σημαντικού ρόλου που διαδραματίζουν στην επιτυχή διεκπεραίωση δραστηριοτήτων σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bowie, H. E. (1949). Variety of Mathematical Experiences. *Mathematics Magazine, 23*(1), 39-44.

Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *Australian Mathematics Teacher, The*, *62*(4), 28-40.

Drijvers, P., Boon, P., & Van Reeuwijk, M. (2010). Algebra and technology. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 179–202). Rotterdam: Sense

Gale, A. S. (1911). What in high school mathematics is of most importance as preparation for analytic geometry and the calculus in college. *The Mathematics Teacher, 4*(2), 58-64.

Lee, H. J., & Boyadzhiev, I. (2020). Underprepared College Students' Understanding of and Misconceptions with Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3), em0583.

Lynde, L. E. (1920). Some helps and hindrances in teaching mathematics in the Secondary School. *The Mathematics Teacher, 12*(4), 139-153.

Mayring, P. (2014). *Qualitative Content Analysis: Theoretical Foundation, Basic Procedures and Software Solution*. Klagenfurt: Beltz.

Papadopoulos, I., & Gunnarsson, R. (2020). Exploring the way rational expressions trigger the use of "mental" brackets by primary school students. *Educational Studies in Mathematics, 103*(2), 191-207.

Stafylidou, S, & Vosniadou, S. (2004). The Development of Students' understanding of the Numerical Value of Fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Tirosh, D. (2000). Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών (http://www.pi-schools.gr/programs/depps/)

ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΥΘΕΝΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΣΗΡΟΤΡΟΦΙΑΣ

Κακαλή Αθανασία, Τριανταφύλλου Χρυσαυγή

Παιδαγωγικό Τμήμα ΔΠΘ, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

athkakali@hotmail.com, chrtriantaf@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα μελετά τις δυσκολίες που συνάντησαν μαθητές και μαθήτριες στην προσπάθειά τους να λύσουν αυθεντικά προβλήματα του χώρου εργασίας της σηροτροφίας. Το θεωρητικό πλαίσιο ακολουθεί την κοινωνικό-πολιτισμική οπτική. Τα ερευνητικά δεδομένα είναι οι γραπτές απαντήσεις 36 μαθητών και μαθητριών Α΄ Λυκείου Σουφλίου, σε 3 αυθεντικά προβλήματα. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα συνάντησαν δυσκολίες στην κατανόηση στοιχείων του πλαισίου, παρότι το επάγγελμα του σηροτρόφου αποτελεί μέρος της πολιτισμικής τους παράδοσης. Οι δυσκολίες αφορούσαν την αναγνώριση της τεχνικής γλώσσας των δεδομένων του προβλήματος και τη φύση των εργασιών του σηροτρόφου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση προβλήματος κατέχει κεντρική θέση στην μαθηματική εκπαίδευση. Οι μαθητές/τριες όταν εμπλέκονται σε πρακτικές επίλυσης προβλήματος, έχουν ευκαιρίες ανάπτυξης δράσεων διερεύνησης και μεταγνωστικών στρατηγικών, καθώς και επέκταση της μαθηματικής τους γνώσης σε πραγματικά πλαίσια. Η εμπλοκή των μαθητών/τριών σε πρακτικές επίλυσης προβλήματος, επηρεάζει θετικά τις στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στα μαθηματικά, προωθώντας με τον τρόπο αυτό την ανάπτυξη αυτόνομων μαθητών/τριών, αναλαμβάνοντας τον έλεγχο της δικής τους μάθησης και παρακολουθώντας τη δική τους πρόοδο στην επίτευξή της (Hiebert & Carpenter, 1992).

Η κίνηση των Ρεαλιστικών μαθηματικών (Realistic Mathematics Education - RME) έφερε τη μαθηματικοποίηση ρεαλιστικών καταστάσεων στο κέντρο της μαθηματικής διδασκαλίας (Doorman & Gravemeijer, 2009; Freudenthal, 1981). Με αυτή την κίνηση η μοντελοποίηση καταστάσεων της πραγματικότητας, αποτελούν αντικείμενο της διδασκαλίας. Ως επέκταση αυτής της κίνησης, διαμορφώθηκε το ερευνητικό ενδιαφέρον εφαρμογής αυθεντικών προβλημάτων της καθημερινότητας και του χώρου εργασίας στη σχολική τάξη (e.g., Wake, 2015). Αναφερόμαστε σε αυθεντικά προβλήματα (authentic tasks) του χώρου εργασίας, τα οποία αφορούν μια επαγγελματική πρακτική (π.χ. δεδομένα, ρουτίνες εργασίας ή προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι επαγγελματίες), αναγνωρίζονται από τους επαγγελματίες ως επαγγελματικές τους πρακτικές, διατηρώντας την αυθεντικότητα των στόχων τους και της γλωσσικής τους έκφρασης (Palm, 2008). Οι δραστηριότητες αυτές προσφέρουν ευκαιρίες διερεύνησης και ανάπτυξης συλλογισμών και επιχειρηματολογίας (Dierdorp et al., 2011). Παρόλα αυτά, πολλές έρευνες διαπιστώνουν δυσκολίες σύνδεσης ανάμεσα στα μαθηματικά της τάξης και του χώρου εργασίας. Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται στην ιδιότυπη μαθηματική γλώσσα του χώρου εργασίας (mathematical genre) που αφορούν τεχνικούς όρους, το πλαίσιο, τα εργαλεία, αλλά και στους διαφορετικούς στόχους των δύο κοινοτήτων (Williams & Wake, 2007). Ταυτόχρονα, ερευνητές διαπίστωσαν ότι πολλοί μαθητές/τριες όταν λύνουν προβλήματα που αφορούν απλές καθημερινές καταστάσεις, φαίνεται ότι δίνουν απαντήσεις που δεν έχουν νόημα στο συγκεκριμένο πλαίσιο του προβλήματος. Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται ως ‘έλλειψη απόδοσης κατάλληλου νοήματος’ (‘suspension of sense-making’, Schoenfeld, 1991, p. 316). Για παράδειγμα, οι Wu και Adams (2006) έδωσαν σε μαθητές 10-12 χρονών το εξής πρόβλημα: *Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 3 ώρες και μια άλλη σε 12 ώρες. Αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες μαζί σε πόσες ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή*. Δόθηκαν ως πιθανές απαντήσεις 2.4, 4.0, 7.5, 9.0 (ώρες). Ενώ η πιο λογική απάντηση ήταν 2.4 ώρες, οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν λάθος απαντήσεις. Ταυτόχρονα, οι πιο καλοί μαθητές απάντησαν 7,5 ώρες βρίσκοντας την μέση τιμή των 3 και 12 ωρών, κάνοντας μια ‘αχρείαστη’ μαθηματικοποίηση στο πρόβλημα, δηλαδή την εύρεση της μέσης τιμής. Κάτι τέτοιο δεν είχε νόημα στο πρόβλημα που τους δόθηκε μιας και η λύση του προβλήματος απαιτούσε στοιχειώδη κατανόηση του πλαισίου, δηλαδή αφού μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 3 ώρες μια δεύτερη βρύση-έστω και με μικρότερη παροχή νερού- θα γέμιζε τη δεξαμενή σε λιγότερο από 3 ώρες! Αν και πολλές έρευνες έχουν μελετήσει δυσκολίες παιδιών στην προσπάθειά τους να μαθηματικοποιήσουν αυθεντικές καταστάσεις (Jupri & Drijvers, 2016), δεν έχει δοθεί ιδιαίτερη σημασία ποιες από αυτές τις δυσκολίες αφορούν αποκλειστικά το πλαίσιο του προβλήματος.

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό να μελετήσει τις προκλήσεις που συναντούν οι μαθητές και μαθήτριες, στην προσπάθειά τους να διαχειριστούν τα αυθεντικά στοιχεία ενός προβλήματος. Το πρόβλημα αφορά το επάγγελμα της σηροτροφίας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 2 τμήματα της Α΄ Λυκείου Σουφλίου. Από το τέλος του 19^{ου} αιώνα μέχρι και σήμερα πολλοί από τους κατοίκους του Σουφλίου ασχολούνται συστηματικά με τη σηροτροφία. Οι περισσότεροι μαθητές του σχολείου γνώριζαν αυτό το επάγγελμα από τους γονείς τους. Τα προβλήματα που τους δόθηκαν ήταν απλά όσον αφορά τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες, και αυθεντικά στοιχεία από το πλαίσιο της σηροτροφίας, όπως η γλώσσα και οι εργασίες ενός σηροτρόφου.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι: ΕΕ1: Τι είδους δυσκολίες συνάντησαν οι μαθητές και μαθήτριες στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων ενός επαγγελματικού χώρου, που συνδέεται με την κουλτούρα της περιοχής τους; ΕΕ2: Πού μπορεί να οφείλονται αυτές οι δυσκολίες;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία υιοθετήθηκε η κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση (Lerman, 2000). Αυτή η θεωρητική οπτική, χαρακτηρίζει τη μάθηση ως διαδικασία που αναπτύσσεται στα πλαίσια ιστορικο- κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών. Ταυτόχρονα, έρευνες στο θέμα της ‘έλλειψης απόδοσης κατάλληλου νοήματος’ αναφέρουν ότι αυτό είναι αποτέλεσμα των τρόπων μάθησης που αναπτύσσονται στο σχολικό περιβάλλον (Chai & Silver, 1995).

Μελέτες έδειξαν πως οι λανθασμένες απαντήσεις μαθητών σε προβλήματα που περιγράφουν ρεαλιστικές ή αυθεντικές καταστάσεις, απορρέουν από την απουσία απόδοσης του κατάλληλου νοήματος στο πλαίσιο του προβλήματος ή την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων ως ‘σχολικού τύπου προβλήματα’ κάνοντας ανώφελες και αχρείαστες μαθηματικοποιήσεις (Wu & Adams, 2006). Οι συγκεκριμένοι ερευνητές αναγνωρίζουν δύο διαστάσεις κατανόησης του πλαισίου ενός προβλήματος: α) την κατανόηση των αριθμητικών δεδομένων και ζητούμενων του προβλήματος και β) την κατανόηση του ευρύτερου πλαισίου στο οποίο τοποθετείται το πρόβλημα. Ανάλογες μελέτες υποστηρίζουν πως ο τρόπος που ‘προσομοιώνεται’ μια αυθεντική κατάσταση, είναι ένας παράγοντας που πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπ’ όψη κατά την ανάπτυξη και επιλογή προβλημάτων που χρησιμοποιούνται μέσα στη τάξη (Palm, 2008). Επίσης, η παρουσίαση ενός αυθεντικού προβλήματος μπορεί να επηρεάσει θέματα κατανόησης των μαθητών (Carotenuto et al., 2021)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πλαίσιο

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα σχολείο στο Σουφλί. Στην αρχή της έρευνας δόθηκε εθνογραφικό υλικό σχετικό με το επάγγελμα του/της σηροτρόφου και έγιναν ανάλογες συζητήσεις. Το υλικό αφορούσε συνεντεύξεις με σηροτρόφους της περιοχής και το βίντεο «Η τριλογία του μεταξιού. Βόμβυξ ο θαυματουργός» Με τη βοήθεια αυτού του υλικού, οι μαθητές οι οποίοι γνώριζαν για τη σηροτροφία, κατάφεραν να θυμηθούν λεπτομέρειες αυτού του επαγγέλματος, αλλά και όσοι δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία, να το γνωρίσουν διεξοδικά. Έμαθαν πολύ αναλυτικά για το πώς γίνεται η εκκόλαψη των κουκουλιών, για το πώς συλλέγεται η τροφή και πού τοποθετείται, για την ποσότητα τροφής που πρέπει να δίνεται ανάλογα με την ηλικία των μεταξοσκωλήκων, καθώς και για τον τρόπο που γίνεται η αξιολόγηση της παραγωγής των κουκουλιών (βομβυκίων). Στη συνέχεια δόθηκαν στους μαθητές 3 προβλήματα που συσχετιζόταν με κάποιες από τις παραπάνω δραστηριότητες ενός σηροτρόφου και με απλό για τους μαθητές μαθηματικό περιεχόμενο.

Συμμετέχοντες

Στη διάρκεια της έρευνας συμμετείχαν 27 μαθήτριες και 15 μαθητές από δύο τμήματα της Α΄ Λυκείου. Έντεκα από τους μαθητές ήταν μουσουλμανόπαιδες (7 κορίτσια και 4 αγόρια). Ο τόπος μόνιμης κατοικίας όλων των μαθητών ήταν το Σουφλί, καθώς και χωριά της γύρω περιοχής. Αρχικά οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, σε αυτούς που γνώριζαν σχετικά με την εκτροφή του μεταξοσκώληκα (ομάδα ΓΣΜ) και σε αυτούς που δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία ή γνώσεις για αυτό το επάγγελμα (ομάδα Μ). Στην ομάδα ΓΣΜ εντάχθηκαν 25 μαθητές, ενώ στην δεύτερη ομάδα Μ συμμετείχαν 17 μαθητές. Στη συγκεκριμένη εργασία, αναλύθηκαν 36 από τις 97 συνολικές απαντήσεις των μαθητών και στα τρία προβλήματα. Οι 36 απαντήσεις αφορούν γραπτά μαθητών, οι οποίοι φάνηκε να έχουν δυσκολίες κατανόησης θεμάτων, που αφορούν ιδιαίτερα το πλαίσιο του προβλήματος.

Τα προβλήματα

Τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα αφορούσαν καθημερινά ζητήματα και αποφάσεις που παίρνουν οι σηροτρόφοι της περιοχής, σε διαφορετικές φάσεις εκτροφής του μεταξοσκώληκα. Τα δεδομένα ήταν αυθεντικά, η γλώσσα ήταν εναρμονισμένη με τη γλώσσα των σηροτρόφων και οι μαθητές είχαν έναν ρόλο σε κάθε πρόβλημα, να βοηθήσουν τον σηροτρόφο να πάρει αποφάσεις σε καθημερινά ζητήματα του επαγγέλματός του. Οι αποφάσεις αυτές συνδέονταν με μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο κύριος Βαγγέλης εκθρέφει 70 κουτιά κουκούλια (σπόρου) και χρειάζεται να εξασφαλίσει τα απαραίτητα φύλλα. Ο κύριος Νίκος που τον βοηθάει, του είπε ότι για ένα κουτί, χρειάζεται περίπου 500kg φύλλα ως το τέλος της 5ης ηλικίας. Ο ίδιος γνωρίζει ότι έως τώρα, που έχει ολοκληρωθεί η 4η ηλικία εκτροφής, έχει ήδη καταναλώσει 92kg φύλλα για κάθε κουτί. Πώς θα του προτείνατε να διαχειριστεί την εκτροφή του από δω και πέρα; Ανέπτυξε και αιτιολόγησε την άποψή σου.	*Ο κύριος Χρήστος θέλει να κατασκευάσει μόνος του ένα χώρο για την εκτροφή κουκουλιών. Ρώτησε ένα φίλο του σηροτρόφο και του ανέφερε ότι στο 1ο στάδιο εκτροφής χρειάζεται $1m^2$ για κάθε κουτί σπόρου και ότι σε κάθε επόμενο στάδιο διπλασιάζεται η επιφάνεια εκτροφής. Ο κ. Χρήστος έχει αποφασίσει να εκθρέψει 70 κουτιά αλλά δυσκολεύεται να υπολογίσει πόση επιφάνεια χρειάζεται συνολικά δηλαδή και για τις 5 ηλικίες εκτροφής (στάδια). Πώς θα μπορούσες να βοηθήσεις τον κύριο Χρήστο στο συγκεκριμένα θέμα που αντιμετωπίζει;*
Εικόνα 1: Πρώτο πρόβλημα	**Εικόνα 2: Δεύτερο Πρόβλημα**

Το 1ο πρόβλημα (Εικόνα 1) αναφέρεται στην εξασφάλιση της απαραίτητης ποσότητας φύλλων μουριάς κατά την διάρκεια της εκτροφής και για τις πέντε ηλικίες του μεταξοσκώληκα. Το μαθηματικό πλαίσιο του προβλήματος ήταν απλοί αριθμητικοί υπολογισμοί. Το 2ο πρόβλημα (Εικόνα 2) περιγράφει τον ακριβή και αναγκαίο αριθμό τετραγωνικών μέτρων για κάθε ηλικία του μεταξοσκώληκα. Το μαθηματικό πλαίσιο του προβλήματος ήταν η γεωμετρική πρόοδος σε μια πρωταρχική μορφή (διπλασιασμός μιας έκτασης ανά στάδιο εκτροφής). Το 3ο πρόβλημα (Εικόνα 3) περιγράφει τον τρόπο που γίνεται η αξιολόγηση της παραγωγής βομβυκίων μεταξοσκώληκα και τον τρόπο πληρωμής της παραγόμενης ποσότητας. Περιγράφει επ' ακριβώς τη διαδικασία και το φόβο του σηροτρόφου όσων αφορά την αποζημίωσή του. Το μαθηματικό πλαίσιο του προβλήματος ήταν μια απλή εφαρμογή αναλογίας των κατώτερης ποιότητας, προς τη συνολική παραγωγή όλων των κουκουλιών.

Ο κύριος Γιώργος είναι ένας νέος σηροτρόφος. Φέτος έχει εκθρέψει 350kg κουκούλια τα οποία τα συσκεύασε σε σακιά των 10kg και από αυτά τα 7 περιέχουν κατώτερης ποιότητας φούσκες. Ένας φίλος του, παλιός παραγωγός, του εξήγησε ότι μετά την απόπνιξη έρχεται υπάλληλος από την αρμόδια υπηρεσία και κάνει έναν έλεγχο ανοίγοντας τυχαία ένα κουτί. Βάση του αποτελέσματος εγκρίνει την ανάλογη επιδότηση που ο κύριος Γιώργος θα πάρει από το κράτος. Μπορείς να εντοπίσεις ποιος είναι ο φόβος του κυρίου Γιώργου; Ποια πιθανότητα υπάρχει να χάσει κάποια από τα αναμενόμενα χρήματα;
Εικόνα 3: Τρίτο Πρόβλημα

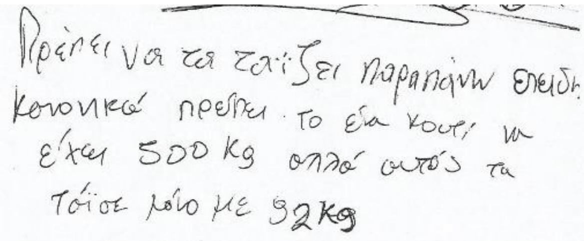
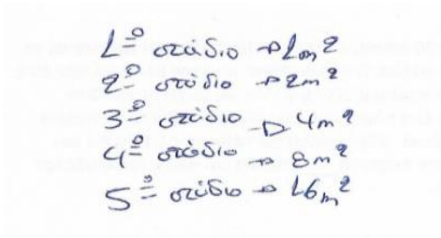
Ερευνητικά δεδομένα και ανάλυσή τους

Τα ερευνητικά δεδομένα ήταν οι απαντήσεις των μαθητών στα 3 προβλήματα. Στην 1η φάση της ανάλυσης των δεδομένων διαπιστώθηκε ότι πολλοί μαθητές σταμάτησαν την ορθή επίλυση ή δεν την ολοκλήρωσαν ή κάτι συνέβη και αλλοιώθηκε η ορθότητα της λύσης τους. Στη 2η φάση δόθηκε βαρύτητα στις συγκεκριμένες απαντήσεις των μαθητών που φάνηκε για κάποιο λόγο να μην ολοκληρώνουν σωστά τη σκέψη τους. Στο 1ο πρόβλημα ενώ ενεπλάκησαν 34 μαθητές, στη συγκεκριμένη ομάδα απαντήσεων εντάχθηκαν οι απαντήσεις συνολικά 10 μαθητών (7 ΓΣΜ, 3 Μ). Στο 2ο πρόβλημα ενώ ενεπλάκησαν 31 μαθητές, στη συγκεκριμένη ομάδα απαντήσεων εντάχθηκαν οι απαντήσεις 13 μαθητών (10 ΓΣΜ, 3 Μ). Στο 3ο πρόβλημα ενώ ενεπλάκησαν 32 μαθητές στη συγκεκριμένη ομάδα απαντήσεων εντάχθηκαν οι απαντήσεις συνολικά 13 μαθητών (10 ΓΣΜ, 3 Μ). Στην 3η φάση οι συγκεκριμένες απαντήσεις των μαθητών αναλύθηκαν σύμφωνα με το μοντέλο των Wu και Adams (2006). Το μοντέλο αυτό αφορά τις εξής διαστάσεις: α) κατανόηση των αριθμητικών δεδομένων β) κατανόηση του πλαισίου του προβλήματος γ) κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών και δ) μαθηματική μοντελοποίηση. Ο λόγος χρήσης αυτού του μοντέλου ήταν για να εντοπιστούν οι δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές. Στην 4η φάση της ανάλυσης προέκυψαν δύο κατηγορίες που αφορούν τις βασικές δυσκολίες των μαθητών. Πρέπει να αναφερθεί, ότι στη συγκεκριμένη ανάλυση η έμφαση δόθηκε στις δυσκολίες των μαθητών που αφορούσαν το πλαίσιο του προβλήματος.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αναγνωρίστηκαν τρία είδη δυσκολιών και προκλήσεων που συνάντησαν οι μαθητές:

Μη σωστή αποτύπωση ή διαχείριση των αριθμητικών δεδομένων και των ζητούμενων του προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές είτε δεν αναφέρονται με σωστό τρόπο στα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος (όπως οι μαθητές Μ3 και ΓΣΜ$_1$), είτε ξεκινούν να λύνουν το πρόβλημα αξιοποιώντας κάποια από τα δεδομένα του προβλήματος και διακόπτουν απότομα τη λύση τους (όπως οι μαθητές Μ6, ΓΣΜ$_{25}$, ΓΣΜ$_{17}$).

	
Εικόνα 4: Η απάντηση του Μ$_3$	**Εικόνα 5: Η απάντηση του ΓΣΜ$_{17}$**

Χαρακτηριστικά, ο Μ3 αναφέρει στο 2ο Πρόβλημα: «Στα 5 στάδια πρέπει να χρησιμοποιήσει 70m2 κουτιά, αλλά επειδή κάθε φορά διπλασιάζεται θα χρειαστεί 100m2κουτιά» .Ο Μ3 αναφέρει «70m2 κουτιά» αν και η εκφώνηση αναφέρεται σε 70 κουτιά. Σε άλλη περίπτωση ο ίδιος μαθητής (Μ3) στο 1ο πρόβλημα αναφέρει «πρέπει το ένα κουτί να έχει 500kg» ενώ το πρόβλημα έλεγε «για το ένα κουτί χρειάζεται 500kg φύλλα» (Εικόνα, 4). Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι ο Μ3 ανήκε στη Μουσουλμανική μειονότητα και ίσως να τον δυσκόλευε να κατανοήσει και να αποδώσει σωστά την τεχνική ορολογία του επαγγέλματος του σηροτρόφου.

Ο μαθητής ΓΣΜ$_1$ απαντά στο 1ο πρόβλημα ως εξής: *«4ο στάδιο→92·70 = 6.440kg, 5ο στάδιο→500·70 = 35.000kg . Άρα θα πρέπει να προμηθευτεί συνολικά για το 5ο στάδιο 35 τόνους φύλλα»*. Ο μαθητής αποδίδει το σύνολο της τροφής στο 5ο στάδιο ενώ το πρόβλημα έλεγε ότι χρειάζεται 500kg τροφή και για τα 5 στάδια εκτροφής. Επίσης, η απάντηση «*4ο στάδιο→92·70 = 6.440kg*» είναι επίσης λάθος, μιας και το σύνολο αυτών των κιλών αφορά από το 1ο μέχρι και το 4ο στάδιο εκτροφής. Άλλη περίπτωση ο μαθητής Μ$_{11}$ που απαντά στο 2ο πρόβλημα ως εξής: « *Αν είναι 5 στάδια θα χρειαστεί 1m^2· 5 για κάθε κουτί σπόρου.1m^2 ·70 = 70 στρέμματα*

$70m^2 \cdot 5 = 350m$ για 5 στάδια». Θεωρεί ενδεχομένως ότι σε όλα τα στάδια χρειάζεται την ίδια επιφάνεια αν και το πρόβλημα σαφώς αναφερόταν ότι σε κάθε στάδιο διπλασιάζεται η έκταση εκτροφής.

Ο μαθητής $ΓΣΜ_{25}$ απαντά στο 3^{ο} πρόβλημα ως εξής: *«350kg κουκούλια 10kg→10 το 1 σακί 7→κατώτερης ποιότητας 350:10 = 35 σακιά 35-7 κατώτερης ποιότητας = 28 καλά σακιά».* Στην περίπτωση αυτού του μαθητή φαίνεται να σταματάει τη λύση κάνοντας μόνο κάποιους βασικούς υπολογισμούς χωρίς να έχει κατανοήσει το ζητούμενο του προβλήματος. Την ίδια δυσκολία αναγνωρίζουμε και στον μαθητή $ΓΣΜ_{17}$ (Εικόνα 5) που στην απάντησή του περιορίζεται στην χρήση κάποιων από τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος, όπως ο διπλασιασμός της επιφάνειας για 1 κουτί, αγνοώντας άλλα όπως ότι υπήρχαν 70 κουτιά, καθώς και ότι ζητείτο να αναφέρουν τη συνολική έκταση. Άλλο παράδειγμα από τον μαθητή ο $Μ_6$ που απαντά στο 1^{ο} πρόβλημα *«500·70=35000 kg φύλλα»,* περιορίζοντας τη λύση του *στη* χρήση κάποιων από τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος.

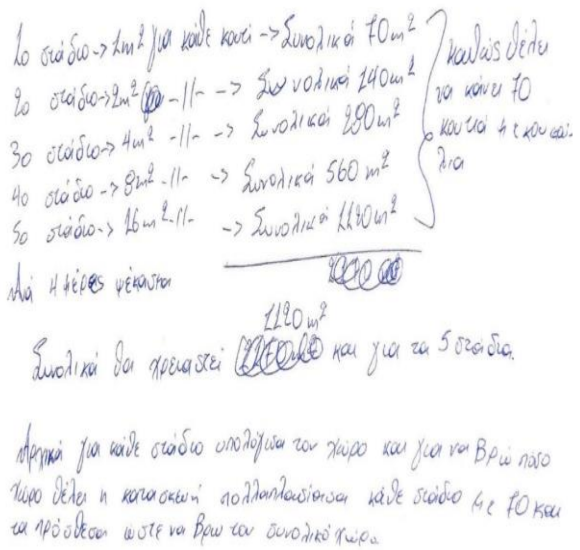
Μη σύνδεση του προβλήματος με πραγματικές καταστάσεις.

Ένα λάθος που αναγνωρίστηκε είναι στη λύση του 2^{ου} προβλήματος, όπου οι μαθητές παρότι υπολόγισαν σωστά την έκταση στο 5^{ο} και τελικό στάδιο εκτροφής, στο τέλος πρόσθεσαν όλες τις εκτάσεις λες και ο σηροτρόφος θα χρησιμοποιεί για κάθε στάδιο μια καινούργια έκταση και όχι ότι επεκτείνει την αρχική, διπλασιάζοντάς την σε κάθε στάδιο.

Στάδια	1κ.	70κ.
1ο	1m^2	70m^2
2ο	2m^2	140m^2
3ο	4m^2	280m^2
4ο	8m^2	560m^2
5ο	16m^2	1120m^2
Σύνολο	31m^2	2170m^2

Με βάση τα δεδομένα για κάθε κουτί θα χρειαστεί συνολικά 31m^2 οπότε για 70 κουτιά θα χρειαστεί συνολικά ένα χώρο 2.170 m^2

Εικόνα 6: Η απάντηση του μαθητή $ΓΣΜ_{11}$


1ο στάδιο -> 1m² για κάθε κουτί -> Συνολικά 70m²
2ο στάδιο -> 2m² -//- -> Συνολικά 140m²
3ο στάδιο -> 4m² -//- -> Συνολικά 280m²
4ο στάδιο -> 8m² -//- -> Συνολικά 560m²
5ο στάδιο -> 16m² -//- -> Συνολικά 1120m²
καθώς θέλει να κάνει 70 κουτιά με κουκούλια
1120m²
Συνολικά θα χρειαστεί 1120m² και για τα 5 στάδια.
Αρχικά για κάθε στάδιο υπολόγισα τον χώρο και για να βρω πόσο χώρο θέλει η κατασκευή πολλαπλασίασα κάθε στάδιο με 70 και τα πρόσθεσα ώστε να βρω τον συνολικό χώρο.

Εικόνα 7: Η απάντηση του μαθητή $ΓΣΜ_1$

Για παράδειγμα, ο μαθητής ΓΣΜ11 προσθέτει στο τέλος όλα τα τετραγωνικά μέτρα όλων των σταδίων, τόσο για την ποσότητα ενός κουτιού: «σύνολο 31m2», όσο και για το σύνολο των κουτιών: «σύνολο 2170 m2» (Εικόνα 6). Ο μαθητής ΓΣΜ1 φαίνεται να έχει κατανοήσει όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, χρησιμοποιεί σωστά τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτό, αλλά προβληματίζεται αν θα πρέπει να προσθέσει ή όχι τις εκτάσεις για κάθε στάδιο εκτροφής (σβήνει τις επιπλέον πράξεις) αλλά στο τέλος επεξηγεί λανθασμένα «πρόσθεσα για να βρω το συνολικό χώρο» (Εικόνα 7). Δεν φαίνεται να έχει επίγνωση της μεγάλης διαφοράς της έκτασης ανάμεσα στα 1120m2 και 2170 m2 που προκύπτει από το άθροισμα όλων των επιμέρους σταδίων.

Αυθαίρετη χρήση επιπλέον αριθμητικών δεδομένων

Ο μαθητής ΓΣΜ$_{10}$ δίνει τη ακόλουθη λύση στο 1^{ο} πρόβλημα:

ΓΣΜ$_{10}$: Χρειάζονται 28560kg να καταναλωθούν μέχρι το τέλος της εκτροφής. Ο κύριος Βαγγέλης θα χρειαστεί 28560kg φύλλα ακόμα. Οι μεταξοσκώληκές του, θα πρέπει να καταναλώνουν 2856 kg φύλλα την ημέρα για 10 μέρες έως να ολοκληρωθεί η διαδικασία εκτροφής.

Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής. γνωρίζοντας από την εμπειρία του ότι οι μέρες εκτροφής στο 5^{ο} στάδιο είναι 8-10 διαιρεί το συνολικό αριθμό φύλλων που έχει βρει διά δέκα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αναγνωρίστηκαν 3 βασικές κατηγορίες δυσκολίας των μαθητών. Η *μη αποτύπωση και διαχείριση των αριθμητικών δεδομένων και των ζητούμενων του προβλήματος* που αφορούν τεχνικά στοιχεία της γλώσσας του επαγγέλματος του σηροτρόφου αλλά και τη φύση των εργασιών του, όπως τα στάδια και η έκταση εκτροφής του μεταξοσκώληκα. Η κατηγορία αυτή αναγνωρίστηκε και στις δύο ομάδες των μαθητών, και σε αυτή που ανέφερε ότι ήταν εξοικειωμένη με τη σηροτροφία και σε αυτή που είχε δηλώσει ότι δεν γνώριζε αυτό το επάγγελμα. Ιδιαίτερα αναγνωρίστηκε η δυσκολία αυτή στους μαθητές που ανήκαν στη Μουσουλμανική μειονότητα. Αυτό συνάδει με σχετικές έρευνες που αναδεικνύουν δυσκολίες μαθητών κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων σε γλώσσα διαφορετική από τη μητρική τους (Setati & Barwell, 2008). Η έρευνα αυτή αναδεικνύει την ιδιαίτερη δυσκολία των μαθητών αυτών όταν πρέπει να κατανοήσουν τις ιδιαιτερότητες της γλώσσας και της ορολογίας ενός αυθεντικού προβλήματος που δεν αποτελεί μέρος της κουλτούρας τους. Παρόλα αυτά, η αναγνώριση των αυθεντικών δεδομένων του προβλήματος φάνηκε να δυσκολεύει και μαθητές που είχαν δηλώσει ότι ήταν εξοικειωμένοι με το επάγγελμα του σηροτρόφου. Στον αντίποδα της προηγούμενης δυσκολίας των μαθητών υπάρχει η *αυθαίρετη χρήση επιπλέον δεδομένων στο πρόβλημα* που αφορούσε την περίπτωση ενός μαθητή που γνώριζε πολύ καλά το επάγγελμα του σηροτρόφου.

Η δυσκολία της *μη σύνδεσης του προβλήματος με πραγματικές καταστάσεις* συμφωνεί με το φαινόμενο ‘της έλλειψης απόδοσης κατάλληλου νοήματος’ (Carotenuto et al., 2021) στις εργασίες του σηροτρόφου. Συγκεκριμένα, οι μαθητές φαίνεται να αγνοούν τις πρακτικές συνέπειες του να χρησιμοποιεί ο σηροτρόφος για κάθε στάδιο εκτροφής νέο χώρο εκτροφής, με διπλάσια έκταση από την προηγούμενη. Η έλλειψη απόδοσης κατάλληλου νοήματος κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων έχει αναφερθεί και από άλλους ερευνητές (Palm, 2008; Wu & Adams, 2006). Το ενδιαφέρον στην παρούσα έρευνα είναι ότι η παραπάνω δυσκολία αναγνωρίστηκε κυρίως στην ομάδα που είχε αναφέρει ότι ήταν εξοικειωμένοι με το επάγγελμα του σηροτρόφου, συνεπώς και με τη φύση των εργασιών του, και οι οποίοι είχαν αναγνωρίσει και διαχειριστεί σωστά τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες του προβλήματος. Τι είναι λοιπόν αυτό που προκαλεί την ‘έλλειψη απόδοσης κατάλληλου νοήματος’ στους μαθητές; Υιοθετώντας την κοινωνικο-πολιτισμική οπτική, θα μπορούσε να επικρατήσει η άποψη, ότι η συνεχής μαθηματική εμπλοκή των μαθητών σε αποπλαισιωμένες (context-free) δραστηριότητες, στις οποίες δεν απαιτείται η σύνδεση με την πραγματικότητα, δημιουργεί μια κουλτούρα πρακτικής που ενθαρρύνει την ύπαρξη τέτοιας δυσκολίας.

Τα παραπάνω συμπεράσματα καταδεικνύουν την ανάγκη οι μαθητές να εξοικειώνονται με αυθεντικές καταστάσεις, και μέσα από αυτές να αποδέχονται ή να απορρίπτουν σχετικές στρατηγικές τους. Επίσης, θα μπορούσαν τα παραπάνω ευρήματα να υποστηρίξουν πρακτικές αξιολόγησης απαντήσεων των μαθητών σε αυθεντικά προβλήματα, ένα θέμα στο οποίο υπάρχει αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον (Cooper & Dunne, 2000).

Άλλωστε, η προσαρμοστική ικανότητα στους συλλογισμούς σε διαφορετικά πλαίσια αναφοράς, η εννοιολογική κατανόηση και διαχείριση μαθηματικών πρακτικών, καθώς και η ευχέρεια ανάπτυξης στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, είναι στοιχεία που αναδεικνύουν την μαθηματική επάρκεια (Kilpatrick, 2001).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cai, J., & Silver, E. A. (1995). Solution processes and interpretations of solutions in solving division-with-remainder story problems: Do Chinese and U.S. students have similar difficulties? *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 491—497.

Carotenuto, G., Di Martino, P., & Lemmi, M. (2021). Students’ suspension of sense making in problem solving. *ZDM,* 1-14.

Cooper, B., & Dunne, M. (1999). *Assessing children's mathematical knowledge: Social class, sex, and problem-solving.* McGraw-Hill Education (UK).

Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H., & van Maanen, J. (2011). Authentic Practices as Contexts for Learning to Draw Inferences beyond Correlated Data. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1–2), 132–151.

Doorman, M., & Gravemeijer, K. (2009). Emergent modeling: Discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM*, 199–211.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational studies in mathematics*, 133-150.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, (pp.65 – 97). New York: Macmillan

Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481-2502.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, *47*, 101-116.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, *1*, 19-44.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational studies in mathematics*, *67*(1), 37-58.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. E. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311—343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Setati, M., & Barwell, R. (2008). Making mathematics accessible for multilingual learners: guest editorial. *Pythagoras*, *2008(1)*, 2-4.

Wake, G. (2015). Preparing for workplace numeracy: a modelling perspective. *ZDM*, *47*(4), 675-689.

Williams, J. S. & Wake, G. D. (2007). Metaphors and Models in Translation between College and Workplace Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 345-371.

Wu, M., & Adams, R. (2006). Modelling mathematics problem solving item responses using a multidimensional IRT model. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(2), 93-113.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΝΟΡΜΩΝ ΣΕ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ

Αποστολοπούλου Ευσταθία, Καράλη Άννα, Κουλούρης Ανδρέας, Σίδερης Απόστολος, Στουραΐτης Κωνσταντίνος

4ο ΓΕΛ Γαλατσίου, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ, 3ο ΓΕΛ Γαλατσίου, 3ο ΓΕΛ Αλίμου, Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

efsapostol@gmail.com, karali.anna2@gmail.com, akoulouris13@gmail.com, aposider@gmail.com, stouraitisk@gmail.com

Στην παρούσα μελέτη αναλύονται τέσσερεις σύγχρονες εξ αποστάσεως διδασκαλίες, εστιάζοντας στις νόρμες και στην επίδρασή τους στην εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες. Η νόρμα της προτεραιότητας της συναισθηματικής κατάστασης του μαθητή φαίνεται να έχει κεντρικό ρόλο, συνεπικουρούμενη από τις νόρμες της ευθύνης του μαθητή και της διαφοροποίησης των έργων. Στην παρούσα έρευνα αναδεικνύονται οι νόρμες που υποστηρίζουν την εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες και τη συνεργασία τους σε μικρές ομάδες στις συγκεκριμένες διδασκαλίες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επείγουσα μετατόπιση της διδασκαλίας από τη φυσική τάξη στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση λόγω της πανδημίας έφερε στην επιφάνεια μεγάλες δυσκολίες και ανάγκες, αλλά συγχρόνως ίσως επιτάχυνε εξελίξεις στη μορφή και στο περιεχόμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών (Engelbrecht, Llinares & Borba, 2020). Λόγω του επείγοντος χαρακτήρα και της έλλειψης προετοιμασίας και υποδομών, η συζήτηση για την εκπαίδευση στην εποχή του covid εστιάστηκε στην εισαγωγή της τεχνολογίας, στην όξυνση ανισοτήτων, σε θέματα επαγγελματικής μάθησης και σε οικονομικές, πολιτικές και κοινωνικές διαστάσεις (πχ. Czerniewicz, 2020). Επιπλέον, κάποιες μελέτες αναφέρονται στο περιεχόμενο της διδασκαλίας και στις αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικού–μαθητή (Kalogeropoulos κ.α., 2021). Ωστόσο, η μελέτη της κουλτούρας της τάξης και των νορμών που διέπουν τις αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικού και μαθητών κατά τη σύγχρονη εξ αποστάσεως εκπαίδευση δεν φαίνεται να έχουν μελετηθεί συστηματικά, ούτε την περίοδο του covid, αλλά ούτε και πριν από αυτήν.

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται μια πρώτη αποτύπωση των νορμών που καλλιεργούνται σε μια σειρά από σύγχρονες εξ αποστάσεως διδασκαλίες που έγιναν το σχολικό έτος 2020-21 σε Λύκειο από έναν εκπαιδευτικό μέλος της συγγραφικής ομάδας. Η έρευνα αυτή έρχεται σε συνέχεια προηγούμενης έρευνά μας (Αποστολοπούλου, κ.α., 2019) όπου μελετήθηκαν οι νόρμες σε μια δια ζώσης διδασκαλία με διαφοροποίηση και μαθηματική πρόκληση.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας είναι:

α) Ποιες νόρμες ανιχνεύονται κατά τη διάρκεια των συγκεκριμένων σύγχρονων εξ αποστάσεως διδασκαλιών στα Μαθηματικά;

β) Ποιες από αυτές και με ποιον τρόπο υποστηρίζουν την ενεργό εμπλοκή των μαθητών στο (εξ αποστάσεως) μάθημα;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Οι νόρμες, δηλαδή οι υπόρρητοι κανόνες που διέπουν τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις στην τάξη (Yackel & Cobb, 1996), μπορεί να προωθούν ή να εμποδίζουν την εμπλοκή των μαθητών στο να κάνουν μαθηματικά, στη δημόσια υποστήριξη της άποψής τους, αλλά και στη διαφοροποίηση του ρυθμού και του τρόπου μάθησης. Στην τάξη των μαθηματικών, οι νόρμες διακρίνονται σε κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές. Οι τελευταίες μπορεί να συνδέονται με την ανάπτυξη διδασκαλιών που εστιάζουν σε ποιοτικά χαρακτηριστικά, όπως "η ενεργός και υψηλής ποιότητας συμμετοχή των μαθητών σε μαθηματικές συζητήσεις" (Partanen & Kaasila, 2015, σ. 927).

Οι Yackel & Rasmussen (2002) και οι Partanen & Kaasila (2015) θεωρούν ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση ανάμεσα στις νόρμες και στις πεποιθήσεις, ωστόσο φαίνεται ότι η μελέτη των νορμών είναι χρήσιμη ιδιαίτερα όταν επιδιώκεται η ανάπτυξη συγκεκριμένων χαρακτηριστικών της διδασκαλίας. Μια τέτοια περίπτωση είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων μαθησιακών περιβαλλόντων που, μέσω της συνεργατικής επίλυσης προβλήματος, έχει ως στόχο, μεταξύ άλλων, τον προσανατολισμό των μαθητών στην ανάληψη ευθύνης για τη διαδικασία της μάθησης (Κολέζα, 2006).

Οι ερευνητές που μελετούν τις νόρμες στην τάξη των μαθηματικών προσπαθούν να αναγνωρίσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μέσα στην τάξη. Οι Yackel & Rasmussen (2002) σε ένα πανεπιστημιακό μάθημα μελετούν την προσπάθεια να καλλιεργηθούν νόρμες, όπως για παράδειγμα ότι οι φοιτητές πρέπει να ακούν και να προσπαθούν να αποδώσουν νόημα στη σκέψη των άλλων. Στα συμπεράσματά τους αναφέρουν τη συνεξέλιξη των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών με τις ατομικές πεποιθήσεις ως ένα δυναμικό σύστημα, και το όφελος που προκύπτει από την σκόπιμη πρόκληση διαπραγμάτευσης επί των νορμών της τάξης. Οι Partanen & Kaasila (2015) μελετούν τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες που δημιουργούνται στις αλληλεπιδράσεις σε δύο μικρές ομάδες μαθητών και τονίζουν "την ισχύ και την επιμονή υπαρχουσών νορμών που έρχονται από εμπειρία χρόνων των εκπαιδευτικών και των μαθητών" (σ. 942).

Σε προηγούμενη εργασία μας (Αποστολοπούλου κ.α, 2019), μελετώντας τις νόρμες σε μια διδασκαλία με διαφοροποίηση και μαθηματική πρόκληση, είχαμε αναγνωρίσει έξι νόρμες: 1. Τη νόρμα της μαθηματικής διερεύνησης: Βασική διάσταση του "κάνω μαθηματικά" είναι η διερεύνηση. 2. Τη νόρμα της μαθηματικής επικοινωνίας: Τόσο οι άτυπες όσο και οι τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις είναι αποδεκτές. 3. Τη νόρμα της συνεργασίας: Η συνεργασία μεταξύ των μαθητών σε μικρές ομάδες, όπως και στην τάξη, είναι σημαντική, επιδιώκεται και υποστηρίζεται. 4. Τη νόρμα της εγκυροποίησης: Η εγκυροποίηση ενός ισχυρισμού είναι αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης σε επίπεδο ομάδας και ολομέλειας. 5. Τη νόρμα της διατύπωσης γνώμης: Όλοι οι μαθητές έχουν δικαίωμα να διατυπώσουν τη γνώμη τους. 6. Τη νόρμα της αναζήτησης βοήθειας: Ενθαρρύνεται η αναζήτηση βοήθειας, αφού είναι αποδεκτό ότι όλοι οι μαθητές δεν έχουν το ίδιο μαθηματικό υπόβαθρο.

Ακολουθώντας την ίδια προσέγγιση, αντιλαμβανόμαστε τη διαφοροποίηση ως προσαρμογή της διδασκαλίας στις διαφορετικές ανάγκες, ρυθμούς, ενδιαφέροντα και ικανότητες των μαθητών.

Την εποχή του covid, οι Kalogeropoulos κ.α. (2021) σε μελέτη τους σε δύο δημοτικά σχολεία της Αυστραλίας, διαπιστώνουν δυσκολίες διατήρησης της διερευνητικής μάθησης την οποία ακολουθούσαν οι εκπαιδευτικοί στα δια ζώσης μαθήματα. Αναφέρουν ότι οι μαθητές περιέγραψαν την απουσία αλληλοϋποστήριξης και συνεργασίας μεταξύ τους ως τη σημαντικότερη δυσκολία και σημειώνουν ότι αυτό ήταν "ίσως το πιο αξιοσημείωτο εμπόδιο να καθιερωθούν κοινωνικομαθηματικές νόρμες" (σ. 13) που συμβάλλουν στη διερευνητική μάθηση σε συνθήκες εξ αποστάσεως μάθησης. Οι Calder, Jafri & Guo (2021) αναγνωρίζοντας τη σημασία της συνεργασίας των μαθητών ακόμα και στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση, προτείνουν την αυξημένη χρήση των "breakout sessions" και των άτυπων κοινωνικών δικτύων που επιτρέπουν τη διαπραγμάτευση και το μοίρασμα της κατανόησης και των λύσεων και την ενίσχυση της σιγουριάς μεταξύ των μαθητών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο πλαίσιο συνεργασίας που είχε ξεκινήσει σε προηγούμενο χρόνο (Αποστολοπούλου κ.α. 2019) μέρος της ομάδας των εκπαιδευτικών μελέτησε κάποια εξ αποστάσεως μαθήματα ενός μέλους της. Ο εκπαιδευτικός (Ε) κατά τη δια ζώσης διδασκαλία στην τάξη έδινε έμφαση στην ομαδική εργασία και την αυτονομία των μαθητών. Στα δύο χρόνια του covid ήταν θετικά διακείμενος προς την εξ αποστάσεως εκπαίδευση και αξιοποιούσε αρκετές δυνατότητες για την εργασία των μαθητών σε ομάδες (breakout sessions, ομάδες σε κοινωνικά δίκτυα). Στην παρούσα μελέτη αναλύονται 4 διδασκαλίες του σε δύο τμήματα της Β΄ Λυκείου ενός Δημόσιου Γενικού Λυκείου σε περιοχή της Αθήνας. Οι διδασκαλίες αφορούσαν στη διαίρεση πολυωνύμων (Δ1), στη σχετική θέση παραβολής και ευθείας (Δ2), στην έννοια της εκκεντρότητας της έλλειψης με τη χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού (GeoGebra) (Δ3) και στην εισαγωγή στις εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές (Δ4) και συμπεριελάμβαναν συνεργατική επίλυση ασκήσεων από τους μαθητές σε ομάδες. Οι διδασκαλίες βιντεοσκοπήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν. Οι εκπαιδευτικοί μελέτησαν ανεξάρτητα ο καθένας τα βίντεο και συζήτησαν διαδικτυακά σε 8 συναντήσεις τις νόρμες που αναγνώριζε ο καθένας. Από την ανάλυση προέκυψαν οι 6 νόρμες που παρουσιάζονται παρακάτω. Η παρούσα έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης και η ερευνητική μεθοδολογία που ακολουθήθηκε έχει στοιχεία ανάλυσης περιεχομένου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στα τρία από τα τέσσερα μαθήματα που μελετήθηκαν, οι μαθητές εργάζονταν σε ομάδες των 3-5 ατόμων στις οποίες συμμετείχαν ενεργά οι μισοί, ενώ το ένα πέμπτο δεν συμμετείχε καθόλου. Στο τέταρτο μάθημα η τάξη εργάστηκε σε μια μεγάλη ομάδα 9 ατόμων. Στα μαθήματα αυτά εντοπίστηκαν τρεις κοινωνικές και τρεις κοινωνικομαθηματικές νόρμες οι οποίες περιγράφονται παρακάτω. Οι νόρμες 1, 2 και 5 αναλύονται εκτενέστερα θεωρώντας ότι σχετίζονται περισσότερο με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

1. Η νόρμα της ευθύνης του μαθητή: Ο μαθητής έχει την ευθύνη της μάθησής του. Αυτή η νόρμα περιλαμβάνει δύο εκφάνσεις: 1α) οι μαθητές επιλέγουν αν και με τι θα εμπλακούν πριν ή κατά τη διάρκεια του μαθήματος, και 1β) οι μαθητές αναζητούν τη θεωρία και ελέγχουν την ορθότητα των απαντήσεών τους συγκρίνοντας τες με αυτές που δίνει ο εκπαιδευτικός.

1α) Ο Ε κατά τη διάρκεια του μαθήματος παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να επιλέξουν αν θα συμμετάσχουν ή όχι και πότε. Για παράδειγμα, λέει: "Αν έχετε δουλειά δε θέλω να σας καταπιέσω, αν όμως έχετε διάθεση... [λύστε τις ασκήσεις που σας δείχνω]" (Δ1). Εφόσον συμμετέχουν, επιλέγουν το πώς θα διαχειριστούν τον χρόνο τους: "Όποιος γνωρίζει διαίρεση μπορεί να κάνει τη διαίρεση, όποιος δεν γνωρίζει μπορεί να δει το βίντεο" (Δ1) (αναφέρεται σε βίντεο που έχει δημιουργήσει ο ίδιος). Στο τέλος του μαθήματος αναθέτει προαιρετική εργασία (ασκήσεις) για το σπίτι "Συνεχίζετε τις υπόλοιπες ασκήσεις …, όποιος θέλει" (Δ1).

Οι μαθητές φαίνεται να αναλαμβάνουν την ευθύνη που τους παραχωρείται: στο Δ1, ένας μαθητής απευθύνεται σε συμμαθητή του "... Έχω μπερδευτεί λίγο. Κάτσε, να το ξαναδώ [το βίντεο]". Στο Δ2 οι μαθητές εργάστηκαν χωρίς παρέμβαση από τον διδάσκοντα σε breakout session επί 20 λεπτά περίπου στη διάρκεια 25λεπτου. Στην πορεία της συζήτησης "παρεκτρέπονται" 4-5 φορές σε εξωσχολικά θέματα, για μικρά χρονικά διαστήματα (διάρκειας 2-3 λεπτών), επανέρχονται όμως μόνοι τους στο πρόβλημα.

1β) Η αναζήτηση της σχετικής θεωρίας και ο έλεγχος της ορθότητας των λύσεων είναι επίσης ευθύνη των μαθητών. Για παράδειγμα, ο Ε λέει στους μαθητές, να παρακολουθήσουν στο YouTube το βίντεο με την παράδοση του μαθήματος, σε περίπτωση που το χρειάζονται και βοηθά μόνο αν ζητηθεί. Επίσης, στέλνει τις λύσεις των ασκήσεων παροτρύνοντας τους μαθητές να εντοπίσουν μόνοι τους τα λάθη τους και να προσέξουν τυχόν διαφορετικές διατυπώσεις. Για παράδειγμα (Δ1) ο Ε στέλνει τη λύση στην ομάδα ώστε να ελέγξουν το αποτέλεσμα. "Ε: Για δείτε, τί σας έχει ξεφύγει;"

Στη συζήτηση στην ομάδα των ερευνητών ο Ε εκφράζει την πεποίθηση ότι το σχολείο οφείλει να προετοιμάζει τους μαθητές για την ενήλικη ζωή τους, όπου θα κληθούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα με τα «βιβλία» ανοιχτά, δηλαδή θα χρειαστεί να αναζητήσουν πληροφορίες και να συνεργαστούν.

2. Η νόρμα της προτεραιότητας της συναισθηματικής κατάστασης: Η συναισθηματική κατάσταση των μαθητών ιεραρχείται ως πρώτης προτεραιότητας αφού αποτελεί προϋπόθεση για την γνωστική ανάπτυξη.

Ο εκπαιδευτικός ενδιαφέρεται για τη συναισθηματική κατάσταση των μαθητών, ιδιαιτέρως λόγω του μακρόχρονου κλεισίματος του σχολείου και της απομόνωσης των μαθητών. Το ενδιαφέρον εκφράζεται μέσα από συχνές ερωτήσεις του εκπαιδευτικού για τη συναισθηματική τους κατάσταση και την αποφυγή να πιεστούν να κάνουν μαθηματικά. Για παράδειγμα, στη Δ1, σε επίσκεψη σε ομάδα ο Ε απευθύνεται σε μια μαθήτρια λέγοντας: "Πώς αισθάνεσαι, … θέλεις να δεις το βίντεο, να προσπαθήσεις να κάνεις μια διαίρεση, να συνεργαστείς με τους Μ1, Μ3, Μ4;" και συνεχίζει: "εάν έχεις δουλειά δεν θέλω να σε καταπιέζω, εάν έχεις κάτι άλλο να διαβάσεις, εάν όμως έχεις διάθεση …". Στη αρχή της Δ4, ο Ε λέει: "Πώς είστε; Πώς αισθάνεστε σήμερα; Έχετε διάθεση; Θα δουλέψουν οι ομάδες;"

Οι μαθητές φαίνεται να αισθάνονται ευχάριστα και άνετα στη φάση της εργασίας στις ομάδες. Μπαίνοντας στα δωμάτια των ομάδων ο Ε τους βρίσκει να γελούν και να συζητούν ευχάριστα μεταξύ τους επί του μαθηματικού αντικειμένου (Δ1, Δ2). Στη Δ2, οι Μ1 και Μ2 επιβεβαιώνουν ότι έχουν καταλήξει σε κοινό αποτέλεσμα και ο Μ1 αντιδρά προτάσσοντας τη συναισθηματική επίδραση αυτής της επικοινωνίας τους: "Αισθάνομαι ασφαλής τώρα" (αντί ίσως του είμαι σίγουρος πια ή συμφωνώ μαζί σου).

Στην συζήτηση στην ομάδα των ερευνητών ο Ε λέει ότι θεωρεί σημαντικό στο πλαίσιο του παιδαγωγικού του ρόλου να ενδιαφέρεται για πιθανές συναισθηματικές δυσκολίες (πχ. άγχος, κούραση) που ίσως εμποδίζουν την εμπλοκή του μαθητή. Έτσι δημιουργείται ένα κλίμα εμπιστοσύνης στην τάξη το οποίο φαίνεται να επηρεάζει θετικά τη διάθεση για συμμετοχή. Τα μαθηματικά αποτελούν τον στόχο αλλά και την αφορμή για να δραστηριοποιηθούν, να συνεργαστούν και να αισθανθούν ικανοποίηση, πρώτα από την ένταξη, τη συμμετοχή και τη συνεργασία τους με την ομάδα και έπειτα από την επίτευξη των γνωστικών στόχων.

Ο Ε επιλέγει την εργασία των μαθητών σε ομάδες, εφόσον κάποιοι μπορεί να ντρέπονται να εκφραστούν στην ολομέλεια. Στα πρώτα μαθήματα οι ομάδες ορίζονται από τον Ε με κριτήριο την μαθηματική ετοιμότητα των μαθητών, ενώ αργότερα σχηματίζονται με βάση τις προτιμήσεις τους, αναγνωρίζοντας τη συναισθηματική διάσταση αυτών των προτιμήσεων στη συνεργασία.

3. Η νόρμα της ελαχιστοποίησης του χρόνου ομιλίας του εκπαιδευτικού: Η συνεργασία των μαθητών είναι βασικό στοιχείο της εξέλιξης του μαθήματος, οπότε ο εκπαιδευτικός περιορίζει τον χρόνο ομιλίας του.

Ο ρόλος του Ε είναι κυρίως οργανωτικός: καθορίζει το περιεχόμενο, επιλέγει τα έργα και καλεί τους μαθητές να εμπλακούν σε δραστηριότητες. Κατά τη συνεργασία των μαθητών, ο Ε κάνει ερωτήσεις όταν κρίνει ότι πρέπει να κατευθύνει τη σκέψη των μαθητών. Για παράδειγμα, στη Δ2 ο Ε δεν παρεμβαίνει στη συζήτηση της ομάδας παρά μόνο στην αρχή για να τους εξηγήσει πώς θα εργαστούν και λίγο πριν τη λήξη του μαθήματος, ακούγοντάς τους επί 20 λεπτά περίπου. Σε άλλες περιπτώσεις, όταν δέχεται ερωτήσεις παροτρύνει τους μαθητές να τις απευθύνουν στην ομάδα τους.

Οι μαθητές φαίνεται να είναι εξοικειωμένοι με το γεγονός ότι θα αναπτύσσουν μεταξύ τους διαλόγους ακόμα και με την παρουσία του Ε. Στη Δ3 "χτίζουν" οι ίδιοι τη λύση του προβλήματος αναπτύσσοντας επί 20 λεπτά έναν παραγωγικό διάλογο και διευκρινίζοντας θεωρητικά ζητήματα.

Στη συζήτηση στην ομάδα των ερευνητών, ο Ε εξηγεί ότι μιλάει λίγο επειδή η πρωτοβουλία δίνεται στον μαθητή ο οποίος μιλά, ρωτά, λύνει, βοηθά και βοηθιέται, και καθορίζει τον ρυθμό μαζί με τους συμμαθητές του.

4. Η νόρμα της μαθηματικής διατύπωσης: Η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην επικοινωνία των ομάδων κατά την επεξεργασία των μαθηματικών προβλημάτων είναι αποδεκτή ακόμα κι αν δεν είναι αυστηρά μαθηματική.

Για παράδειγμα, στο Δ3 οι μαθητές μετά από συζήτηση και ανταλλαγή επιχειρημάτων χρονικής διάρκειας 10 λεπτών επιλύουν τελικά την άσκηση. Ο Ε παρακολουθεί και δεν απορρίπτει την παρακάτω περιγραφή του Μ1:

> "Μπορεί να είναι έλλειψη απλώς να είναι σε πολύ .... να είναι έλλειψη αλλά να είναι σε πολύ πολύ μικρούς αριθμούς η έλλειψη, για αυτό να φαίνεται σαν ευθεία γραμμή. Αλλά να μην είναι ευθεία γραμμή. Απλώς επειδή είναι πολύ μικροί οι αριθμοί της έλλειψης, δεν ξέρω της εκκεντρότητας...".

Ο Ε εξηγεί ότι αφήνει τους μαθητές να κάνουν λάθη στις εκφράσεις και να τα διορθώνουν συνεργαζόμενοι, μέχρι να διατυπώσουν την τελική απάντηση.

5. Η νόρμα της διαφοροποίησης των έργων: Ο Ε επιλέγει ή δημιουργεί έργα διαφορετικού είδους και βαθμού δυσκολίας που αντιστοιχούν στη διαφορετική μαθηματική ετοιμότητα των μαθητών.

Για παράδειγμα, στην αρχή της Δ1, ο Ε λέει: "Σήμερα θα κάνουμε μερικές διαιρέσεις [πολυωνύμων] …, αν και κάποιοι έχετε ήδη εξασκηθεί και τα καταφέρνετε καλά ας κάνουμε μια, δύο". Τελικά τους δίνει τέσσερις ασκήσεις και συμπληρώνει: "… όποιοι τελειώσουν γρήγορα και σωστά τη διαίρεση και την ξέρουν καλά, θα τους βάλω και μια δυο ασκήσεις ακόμα, λίγο πιο δύσκολες". Αν και θεωρεί εύκολο έργο τον αλγόριθμο της διαίρεσης, προσθέτει: "Τώρα όσοι δεν έχουν καταλάβει τη διαίρεση και δυσκολεύονται, έχω ανεβάσει ένα βίντεο να ξαναδούνε τον τρόπο που κάνουμε διαίρεση."

Οι μαθητές φαίνονται εξοικειωμένοι με την ιδέα των διαφορετικών έργων. Στο παράδειγμα της Δ1, η μία ομάδα έκανε διαιρέσεις μέχρι το τέλος της διδακτικής ώρας, μια μαθήτρια ξαναείδε το βίντεο, ενώ μια άλλη ομάδα προχώρησε γρήγορα σε αρκετά πιο δύσκολες ασκήσεις.

Στη συζήτηση μεταξύ των ερευνητών, ο Ε λέει ότι συνήθως ρωτάει τις ομάδες για το τι θέλουν να λύσουν. "Άλλοι μαθητές μου λένε θέλουμε άλλη μία να λύσουμε, άλλοι λένε εντάξει το καταλάβαμε και τους λέω έχω κάτι πιο δύσκολο." Ο Ε εξηγεί τις επιλογές του αναφερόμενος στο αίσθημα ικανοποίησης και αυτοεκτίμησης των μαθητών του:

> "... το "περνάω καλά" και το "νιώθω καλά" έχει να κάνει και με μια αίσθηση ότι έχω [ο μαθητής] καταφέρει κάτι, ότι είμαι ικανός να κάνω κάτι, ότι η πρόκληση που μου δόθηκε σήμερα είναι στα μέτρα μου και μπόρεσα σε ένα σημαντικό βαθμό να ανταποκριθώ, άρα να αισθανθώ καλά με τον εαυτό μου, να πάρω μια αξία, μια αυτοεπιβεβαίωση".

6. Η νόρμα της εγκυροποίησης: Η εγκυροποίηση του μαθηματικά σωστού γίνεται από τον εκπαιδευτικό και δεν τίθεται σε διαπραγμάτευση. Η "αλήθεια" καθορίζεται από τον εκπαιδευτικό και παρέχεται χωρίς επεξεργασία.

Ο Ε έχει καταγράψει τις λύσεις των ασκήσεων σε προηγούμενο χρόνο και τις στέλνει ηλεκτρονικά στις ομάδες των μαθητών όταν ο ίδιος κρίνει, συνήθως στο τέλος του μαθήματος ή του χρόνου που είχαν στη διάθεσή τους. Για παράδειγμα, στην Δ1 λέει "... έχω ανεβάσει μια φωτογραφία …, οπότε θα ξέρετε ότι έχετε βρει το σωστό" Σε μια παρατήρηση μαθητή: "κύριε όμως βρήκαμε άλλο αποτέλεσμα", ο Ε προτρέπει να βρουν οι ίδιοι το λάθος: "Για δείτε, τι σας έχει ξεφύγει".

Η εγκυροποίηση πραγματοποιείται επομένως και εκτός διδακτικής ώρας, σε κατάλληλες (ενδεχομένως διαφορετικές για τον κάθε μαθητή) χρονικές στιγμές, όχι απαραίτητα από τον ίδιο τον Ε αλλά συχνότερα μέσω κάποιου προκατασκευασμένου (από τον Ε) υλικού (απαντήσεις στις ασκήσεις που αναθέτει, εκπαιδευτικά βίντεο) ή και από το σχολικό βιβλίο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των διδασκαλιών προέκυψαν έξι νόρμες, οι τρεις πρώτες κοινωνικές και οι τρεις τελευταίες κοινωνικομαθηματικές: 1) της ευθύνης του μαθητή, 2) της προτεραιότητας της συναισθηματικής κατάστασης, 3) της ελαχιστοποίησης του χρόνου ομιλίας του εκπαιδευτικού, 4) της μαθηματικής διατύπωσης, 5) της διαφοροποίησης των έργων, και 6) της εγκυροποίησης.

Όπως οι Yackel & Rasmussen (2002), βλέπουμε ότι ο Ε καταβάλλει συστηματική προσπάθεια να καλλιεργηθούν συγκεκριμένες νόρμες που θεωρεί ότι υποστηρίζουν την εμπλοκή των μαθητών. Συγκρίνοντας με αντίστοιχες νόρμες που εντοπίστηκαν σε προηγούμενη εργασία μας (Αποστολοπούλου κ.α., 2019) η 1η και η 2η δεν είχαν εντοπιστεί σε εκείνη την περίπτωση, η 3η, η 4η και η 5η έχουν περιεχόμενο παρόμοιο με εκείνη, ενώ η 6η έχει το αντίθετο περιεχόμενο (εκεί, η εγκυροποίηση ήταν αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης στην τάξη). Οι διαφορές αυτές εκτιμούμε ότι συνδέονται με τη διαφορετική φύση (δια ζώσης και εξ αποστάσεως) και το περιεχόμενο του μαθήματος, αλλά και με τις επιλογές των εκπαιδευτικών. Ειδικότερα, η 1η νόρμα φαίνεται να υποστηρίζεται από και να υποστηρίζει την κατάσταση της ομαδικής από απόσταση εργασίας, ενώ η 2η ίσως πηγάζει από τις διαφορετικές ανάγκες που δημιουργεί η απομόνωση των μαθητών.

Όσον αφορά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, θεωρούμε ότι η 2η νόρμα διαδραματίζει καίριο ρόλο στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών διότι δημιουργεί συνθήκες συναισθηματικής ασφάλειας και εμπιστοσύνης που είναι απαραίτητες για τη συμμετοχή τους σε ένα διαδικτυακό μάθημα. Όμως, η συναισθηματική ασφάλεια δεν αρκεί για την εμπλοκή του μαθητή. Η διαφοροποίηση των έργων παρέχει το πεδίο για αυτή την εμπλοκή, δηλαδή, κατά κάποιο τρόπο, μέσω της 5ης νόρμας πραγματώνεται ο στόχος της 2ης. Το συμπέρασμα αυτό δεν ταυτίζεται με τα συμπεράσματα προηγούμενης έρευνάς μας (Αποστολοπούλου κ.α., 2019) όπου κεντρικό ρόλο στην εμπλοκή των μαθητών έπαιζαν αφενός "η αποδοχή των άτυπων και η μετάβαση σε τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις" και αφετέρου "η εγκυροποίηση ως αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης από όλους".

Φαίνεται ότι υπάρχουν εκλεκτικές συγγένειες μεταξύ των νορμών: η 2η νόρμα δεν είναι απλώς συμβατή με την 5η, αλλά την έλκει από το σύνολο των δυνατών νορμών. Σε άλλη περίπτωση, αν το έργο δεν ανταποκρίνεται στις διαφορετικές ανάγκες και ενδιαφέροντα των μαθητών, ίσως πληγεί η θετική συναισθηματική τους κατάσταση λόγω αισθήματος ανεπάρκειας ή, αντίθετα, ανίας. Επίσης, η 3η και η 4η νόρμα φαίνεται να συνδέονται άμεσα με την 1η, εκφράζοντας διαφορετικές πτυχές της σχετικής αυτονομίας του μαθητή. Από την άλλη, ο τρόπος που γίνεται η εγκυροποίηση (6η νόρμα) φαίνεται να είναι σε αντίθεση με την αυτονομία του μαθητή (1η νόρμα).

Η εκπαίδευση από απόσταση παρουσιάζει διαφορετικές απαιτήσεις από διδάσκοντες και διδασκομένους που εν πολλοίς δεν έχουν γίνει φανερές σε όλη τους την έκταση ακόμα. Αναγνωρίζουμε τις δυσκολίες που προκύπτουν για το πιο ευάλωτο μέρος των μαθητών μας από την έλλειψη τεχνικών μέσων (Czerniewicz, 2020), από τη λειτουργία της τάξης χωρίς φυσική παρουσία (Calder, Jafri, & Guo, 2021), καθώς και τις δυσκολίες ψυχολογικής και σωματικής φύσεως (κούραση από την οθόνη, δυσκολία συγκέντρωσης της προσοχής, δισταγμός επικοινωνίας από το μικρόφωνο κλπ) που δημιουργούν τα ίδια τα τεχνικά μέσα. Ωστόσο, ισχυριζόμαστε ότι η παρούσα έρευνα δείχνει ότι και στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση είναι εφικτή η εμπλοκή των μαθητών σε ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα και η συνεργασία σε μικρές ομάδες. Θεωρούμε ότι χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση της κουλτούρας που διαμορφώνεται σε μια διαδικτυακή διδασκαλία των μαθηματικών και, ιδιαιτέρως, των κοινωνικοσυναισθηματικών πτυχών αυτής της διδασκαλίας (με διαφορετικό τρόπο ίσως σε εκπαιδευτικούς και μαθητές).

Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας αναδύθηκαν προβληματισμοί που μπορεί να αποτελέσουν έναυσμα για περαιτέρω έρευνα. Πρώτον, οι παρατηρούμενες νόρμες απαιτούν και υποστηρίζουν εσωτερικά κίνητρα μάθησης στον μαθητή εις βάρος των εξωτερικών. Η κατάσταση αυτή προσιδιάζει περισσότερο σε εκπαίδευση ενηλίκων ή γενικότερα, μαθητών με ισχυρή αυτοδέσμευση στη μάθηση, παρά σε δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τουλάχιστον όπως η τελευταία έχει καθιερωθεί στη χώρα μας. Πώς λοιπόν μπορούν να καλλιεργηθούν τέτοιου τύπου νόρμες στις διάφορες βαθμίδες του δημόσιου σχολείου σήμερα; Δεύτερον, πώς τέτοιες νόρμες διαφοροποιούν τον ρόλο του εκπαιδευτικού ως οργανωτή του μαθήματος και ως αξιολογητή; Τρίτον, μήπως θα συνέβαλε στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών η εστίαση όχι σε συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές (π.χ. εργασία των μαθητών σε ομάδες ή χρήση συγκεκριμένων ψηφιακών εργαλείων), αλλά στις νόρμες που τις υποστηρίζουν και υποστηρίζονται από αυτές;

Ευχαριστίες: Ευχαριστούμε την Καθ. Δέσποινα Πόταρη για την υποστήριξη και εμψύχωση της ομάδας μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Calder, N., Jafri, M., & Guo, L. (2021). Mathematics Education Students' Experiences during Lockdown: Managing Collaboration in eLearning. *Education Sciences, 11*(4), 191.

Czerniewicz, L. (2020). University shutdowns—what we learnt from 'going online'. https://philonedtech.com/what-we-learnt-from-going-online-during-university-shutdowns-in-south-africa/ Ανακτήθηκε στις 20.05.2021

Engelbrecht, J., Llinares, S., & Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM,* 52, 825–841.

Kalogeropoulos, P., Roche, A., Russo, J., Vats, S., & Russo, T. (2021). Learning Mathematics from Home during COVID-19: Insights from Two Inquiry-Focussed Primary Schools. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(5).

Partanen, A. M., & Kaasila, R. (2015). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4), 927-946.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 313-330). Springer, Dordrecht.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477

Αποστολοπούλου, Ε., Κουλούρης, Α., Πετεινάρα, Α., Σίδερης, Α., Σιώπη, Κ., Στουραΐτης, Κ. (2019). Νόρμες σε μια διδασκαλία με διαφοροποίηση και αυξημένη μαθηματική πρόκληση. Εργασία που παρουσιάστηκε στο 8ο Συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ.

Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και σχολικά μαθηματικά: επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΠΟΙΟΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Πατσιαλά Ναυσικά, Παπαδόπουλος Ιωάννης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

npatsiala@eled.auth.gr, ypapadop@eled.auth.gr

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται τα προβλήματα που δημιουργούν μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης όταν τους δίνεται αρχικά μια δομημένη ή ημιδομημένη κατάσταση δημιουργίας προβλήματος. Τα παραγόμενα προβλήματα εξετάζονται ως προς τη μαθηματική και γλωσσική τους πολυπλοκότητα προκειμένου να διερευνηθεί μια πιθανή σχέση μεταξύ του είδους της κατάστασης δημιουργίας προβλήματος και του είδους της πολυπλοκότητας των παραγόμενων προβλημάτων. Τα ευρήματα δείχνουν ότι οι δομημένες καταστάσεις ευνοούν τη δημιουργία προβλημάτων με αυξημένη τη μαθηματική παρά τη γλωσσική πολυπλοκότητα σε αντίθεση με την ημοδομημένη κατάσταση όπου στα παραγόμενα προβλήματα υπερτερεί μάλλον η γλωσσική παρά η μαθηματική πολυπλοκότητα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά το γεγονός ότι η δημιουργία προβλήματος είναι συνυφασμένη με την επίλυση προβλήματος (Silver, 1994), για πολλά χρόνια η τελευταία έχει προσελκύσει περισσότερο την προσοχή των ερευνητών. Αυτή η διαπίστωση έχει πυροδοτήσει τα τελευταία χρόνια την εμφάνιση ερευνών που εστιάζουν σε ποικίλες όψεις της δημιουργίας προβλήματος και που αφορούν κυρίως μαθητές της δευτεροβάθμιας ή φοιτητές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε σε μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης εξετάζοντας την επίδραση της κατάστασης δημιουργίας προβλήματος της αρχικής δραστηριότητας στα ερωτήματα που τίθενται και στα προβλήματα που δημιουργούνται από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, στόχος μας είναι να αξιολογηθούν τα παραγόμενα προβλήματα σε σχέση με τη μαθηματική και γλωσσική πολυπλοκότητα που παρουσιάζουν. Η αξιολόγηση της μαθηματικής και γλωσσικής πολυπλοκότητας των παραγόμενων προβλημάτων μπορεί να αποτελέσει στα χέρια των εκπαιδευτικών ένα εργαλείο αποτίμησης της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών τους (Silver & Cai, 2005).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η σπουδαιότητα της Δημιουργίας Προβλήματος επισημαίνεται στους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων (NCTM, 2000), στα οποία αναφέρεται ότι θεωρείται σημαντικό για τους μαθητές και τις μαθήτριες να δημιουργούν προβλήματα αξιοποιώντας μια ποικιλία διαφορετικών πλαισίων. Οι μαθητές εμπλέκονται σε αυθεντικές καταστάσεις, ώστε να δημιουργούν προβλήματα με νόημα (Bonotto, 2013). Οι Stoyanova και Ellerton (1996) έχουν ταξινομήσει τις καταστάσεις δημιουργίας προβλήματος σε τρεις κατηγορίες:

Δομημένες καταστάσεις Δ.Π., στις οποίες οι μαθητές βασίζονται σε συγκεκριμένα προβλήματα ώστε να δημιουργήσουν άλλα είτε αναδιαμορφώνοντας τα δοσμένα προβλήματα είτε τροποποιώντας τις συνθήκες ή τις ερωτήσεις τους. Για παράδειγμα, οι μαθητές σε ένα ήδη γνωστό πρόβλημα, τροποποιούν το ερώτημα.

Ημιδομημένες καταστάσεις Δ.Π., στις οποίες οι μαθητές καλούνται να εξερευνήσουν τη δομή μιας «ανοιχτής» κατάστασης και να την ολοκληρώσουν έπειτα με βάση τις γνώσεις και τις ικανότητες που έχουν.

Ελεύθερες καταστάσεις Δ.Π., στις οποίες οι μαθητές μπορούν χωρίς περιορισμούς να δημιουργήσουν προβλήματα με βάση ένα γενικό πλαίσιο, όπως για παράδειγμα να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για τους συμμαθητές ή τους δασκάλους τους.

Οι Stoyanova και Ellerton (1996) βρήκαν ότι μέσα από τέτοιου είδους δραστηριότητες οι μαθητές κάνουν ανασκόπηση όσων ήδη γνωρίζουν μέχρι εκείνη τη στιγμή. Οι Bonotto και Dal Santo (2015) υποστήριξαν με βάση τα ευρήματά τους ότι οι δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος που εντάσσονται στην κατηγορία είτε των ημιδομημένων είτε των ελεύθερων καταστάσεων ενθαρρύνουν τη δημιουργική μαθηματική σκέψη.

Η Δημιουργία Προβλήματος από τους μαθητές σύμφωνα με τους Silver και Cai (2005) αξιολογείται σε τρεις άξονες: ποσότητα, πρωτοτυπία και πολυπλοκότητα, με την τελευταία να προσεγγίζεται μέσα από δυο διαφορετικές οπτικές: τη μαθηματική και τη γλωσσική πολυπλοκότητα.

Η μαθηματική πολυπλοκότητα σχετίζεται με τη δομή των παραγόμενων προβλημάτων και ένας τρόπος να την προσεγγίσουμε είναι μέσα από την καταμέτρηση του πλήθους των σημασιολογικών σχέσεων (Marshall, 1995) που οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες:

Αλλαγή (Change): Αναφέρεται στην αλλαγή (μεταβολή) της αρχικής μετρήσιμης ποσότητας (αύξηση ή μείωση) κατά ένα ποσό. Στην περίπτωση αυτή, τρεις αριθμοί είναι σημαντικοί: η αρχική ποσότητα, το ποσό που μεταβάλλει την αρχική ποσότητα και η τελική ποσότητα.

Ομαδοποίηση (Group): Αναφέρεται στην περίπτωση όπου πολλές μικρότερες ποσότητες συνδυάζονται σχηματίζοντας μια μεγαλύτερη. Η ομαδοποίηση μπορεί να είναι σαφής και να δηλώνεται ξεκάθαρα από τα δεδομένα ή έμμεση και να αναμένεται από τον λύτη να αξιοποιήσει προηγούμενες γνώσεις που ήδη διαθέτει.

Σύγκριση (Compare): Αναφέρεται στη σύγκριση μεταξύ δυο ποσοτήτων (περισσότερο, λιγότερο, μεγαλύτερο, μικρότερο κτλ.). Για να γίνει η σύγκριση, οι λύτες αξιοποιούν προηγούμενες γνώσεις τους σχετικά με τις σχέσεις μεταξύ των μεγεθών (π.χ. σύγκριση 20 λεπτών και 1 ευρώ).

Επαναδιατύπωση (Restate): Αναφέρεται στη σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών, η οποία εφαρμόζεται μόνο σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και δεν μπορεί να γενικευτεί. Η σύνδεση ανάμεσα στις δυο μεταβλητές μπορεί να γίνεται με εκφράσεις όπως διπλάσιος, τριπλάσιος, μισός κλπ. Έτσι η τιμή της μιας μεταβλητής επαναδιατυπώνεται σύμφωνα με τα δεδομένα για την άλλη μεταβλητή.

Μεταβολή (Vary): Αναφέρεται στη σταθερή σχέση ανάμεσα σε δυο μεταβλητές που μένει ίδια ανεξάρτητα από το πλαίσιο (π.χ. η σχέση μεταξύ ευρώ και λεπτών). Αυτό σημαίνει ότι αν αλλάξει η τιμή της μιας από τις δυο μεταβλητές, τότε θα αλλάξει και η τιμή της άλλης μεταβλητής λόγω της σχέσης που τις συνδέει.

Σύμφωνα με τους Silver και Cai (1996), φαίνεται ότι τα προβλήματα των μαθητών τείνουν να γίνονται πολυπλοκότερα όταν οι μαθητές αξιοποιούν τα αποτελέσματα από πιο απλά προβλήματα που έχουν λύσει, ώστε να δημιουργήσουν πιο σύνθετα. Η English (1997) σε έρευνά της με μαθητές της Ε’ Δημοτικού διαπίστωσε ότι μια διδακτική παρέμβαση εστιασμένη στη δημιουργία προβλήματος οδήγησε σε αύξηση τόσο στο πλήθος των παραγόμενων προβλημάτων όσο και στην πολυπλοκότητά τους. Οι παρεμβάσεις, συνεπώς, αποτελούν έναν παράγοντα που μπορεί να επηρεάσει την ποιότητα των προβλημάτων που δημιουργούνται. Όμως, η πολυπλοκότητα φαίνεται να συσχετίζεται και με την επίδοση των μαθητών, όπως φαίνεται από τα ευρήματα της Ellerton (1986), σύμφωνα με τα οποία μαθητές με υψηλότερες επιδόσεις δημιουργούσαν και πιο πολύπλοκα προβλήματα.

Από την άλλη για τη γλωσσική πολυπλοκότητα, βασιστήκαμε στις προσεγγίσεις των Mayer (1987) και Goldenberg et. al (2015). Σύμφωνα μα αυτούς ένα πρόβλημα παρουσιάζει στοιχεία γλωσσικής πολυπλοκότητας όταν στο νέο πρόβλημα εντοπίζονται (i) ερωτηματικές αντωνυμίες, (ii) λέξεις που φανερώνουν σύγκριση ή ποσότητα (όλα, κάποια, κανένα, περισσότερα από ή λιγότερα από, τουλάχιστον, το πολύ, κ.ά), (iii) λέξεις που δηλώνουν υπόθεση ή προϋπόθεση (αν, εάν, αν δεν, μόνο εάν, κ.ά), και (iv) λέξεις που δηλώνουν συνδυασμό ή άρνηση (ή, και, όχι, δεν κ.ά.). Η παρουσία τους απαιτεί συχνά ερμηνεία από τον λύτη, οπότε το πρόβλημα καθίσταται γλωσσικά πιο πολύπλοκο.

Σε αυτό το πλαίσιο το ερευνητικό μας ερώτημα διαμορφώνεται ως εξής: Τι είδους πολυπλοκότητα (μαθηματική – γλωσσική) φαίνεται να ευνοεί η χρήση δομημένων και ημιδομημένων καταστάσεων δημιουργίας προβλήματος;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

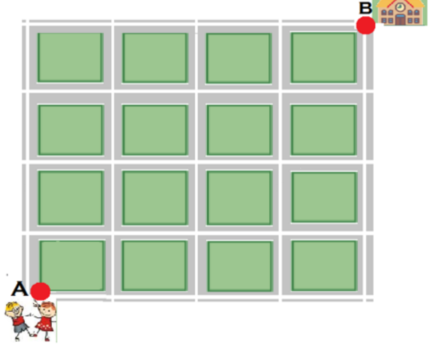
Η παρούσα έρευνα είναι η δεύτερη σε μια σειρά πιλοτικών στα πλαίσια μιας ευρύτερης έρευνας στη δημιουργία προβλήματος. Στη συγκεκριμένη φάση των πιλοτικών ερευνών, συμμετείχαν 7 παιδιά Δ' και Ε' τάξης Δημοτικού απογευματινού ομίλου ιδιωτικού σχολείου της Θεσσαλονίκης για ένα διάστημα 4 μηνών τη σχολική χρονιά 2019-2020. Οι μαθητές δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία με παρόμοιες δραστηριότητες δημιουργίας προβλήματος.

Δυο από τις δραστηριότητες που δόθηκαν ήταν οι εξής:

Έχω στο πορτοφόλι μου 3 κέρματα των 20 λεπτών και 5 κέρματα των 50 λεπτών ενώ ο αδερφός μου έχει 2 κέρματα των 2 ευρώ και 4 κέρματα των 5 λεπτών. Ποσά χρήματα έχει ο καθένας;

Τι άλλο θα μπορούσε να ρωτάει αυτό το πρόβλημα;

Ο Κωνσταντίνος και η Λουκία ξεκινάνε κάθε πρωί από το σπίτι τους και περπατάνε μέχρι το σχολείο. Παρατηρήστε την εικόνα και φτιάξτε προβλήματα βασισμένα σε αυτή.



Εικόνα 1. Δραστηριότητα 1 (αριστερά) και Δραστηριότητα 2 (δεξιά)

Η πρώτη δραστηριότητα χαρακτηρίζεται ως δομημένη κατάσταση ενώ η δεύτερη ως ημιδομημένη (Stoyanova & Ellerton, 1996). Επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες καταστάσεις γιατί σε αντίθεση με την ελεύθερη κατάσταση είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα της τάξης. Οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν όσα περισσότερα προβλήματα μπορούσαν και στις δύο περιπτώσεις. Τα φύλλα εργασίας με τις απαντήσεις και τα προβλήματα που δημιούργησαν οι μαθητές αποτέλεσαν τα δεδομένα της παρούσας έρευνας. Αυτά αναλύθηκαν σύμφωνα με το πλαίσιο των Silver και Cai (2005). Αρχικά οι απαντήσεις διαχωρίστηκαν σε μαθηματικές (Μ), μη μαθηματικές (ΜΜ) και σε όσες αντί για κάποιο ερώτημα περιείχαν απλά μια διατύπωση (ΔΤΠ). Στη συνέχεια, τα προβλήματα μαθηματικού περιεχομένου διαχωρίστηκαν σε επιλύσιμα (ΕΠ) και μη επιλύσιμα (ΜΕΠ). Τέλος, στα επιλύσιμα, αναζητήθηκαν ενδείξεις σχετικά με τη μαθηματική και τη γλωσσική πολυπλοκότητα που παρουσιάζουν. Για την πρώτη, κριτήριο ήταν ο αριθμός των σημασιολογικών σχέσεων που εντοπίζονται σε κάθε πρόβλημα (Marshall, 1995). Μεγαλύτερος αριθμός σημασιολογικών σχέσεων υποδηλώνει και πιο πολύπλοκα προβλήματα. Για τη γλωσσική πολυπλοκότητα εξετάστηκε η παρουσία των τεσσάρων στοιχείων των Mayer (1987) και Goldenberg et. al (2015).

Η αξιολόγηση έγινε ξεχωριστά από καθέναν από τους συγγραφείς και σε περιπτώσεις διαφωνίας, ακολουθούσε συζήτηση μέχρι να υπάρξει συμφωνία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Συνολικά, τα προβλήματα που δημιουργήθηκαν στη Δραστηριότητα 1 ταξινομήθηκαν όπως φαίνεται στον Πίνακα 1. Ο μέγιστος αριθμός σημασιολογικών σχέσεων σε ένα πρόβλημα ήταν τρεις.

<table>
<tr><td colspan="7">Συνολικός αριθμός απαντήσεων: 22</td></tr>
<tr><td>ΜΜ: 1</td><td colspan="5">Μ:19</td><td>ΔΤΠ: 2</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="4">ΕΠ: 18</td><td>ΜΕΠ: 1</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Μαθ. Πολ.:</td><td>Γλωσ. Πολ.: 5</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>1σ.σ.</td><td>2σ.σ.</td><td>3σ.σ.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>3</td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

Πίνακας 1. Αποτελέσματα Δραστηριότητας 1

Κάποια από τα ερωτήματα που δημιουργήθηκαν ήταν:

Παράδειγμα 1: «Πόσα κέρματα σε πλήθος έχω εγώ και ο αδερφός μου; »

Στην περίπτωση αυτή, συναντάται μια σημασιολογική σχέση, η ομαδοποίηση, καθώς για τη λύση του προβλήματος απαιτείται μόνο η πρόσθεση του αριθμού των κερμάτων που έχει ο καθένας.

Παράδειγμα 2: «Πόσα € αξίζουν τα κέρματα που έχουμε μαζί ο αδερφός μου και εγώ; »

Το ερώτημα εδώ εστιάζει στην αξία σε € που έχουν τα κέρματα, οπότε εντοπίζονται δύο σημασιολογικές σχέσεις, η ομαδοποίηση (group) και μεταβολή (vary), αφού για την επίλυση του προβλήματος απαιτείται εκτός από την πρόσθεση όλων των ποσοτήτων και η αξιοποίηση της σχέσης μεταξύ € και λεπτών για τη μετατροπή του συνολικού ποσού σε €.

Παράδειγμα 3: «Ποιος έχει πιο πολλά ευρώ;»

Στο παράδειγμα αυτό, συναντώνται τρεις σημασιολογικές σχέσεις, η ομαδοποίηση, η μεταβολή και η σύγκριση. Προκειμένου να λύσει κάποιος το πρόβλημα πρέπει να βρει το συνολικό ποσό του καθενός οπότε ομαδοποιεί τα επιμέρους ποσά του κάθε ατόμου. Έπειτα μετατρέπει τα λεπτά σε ευρώ οπότε βασίζεται στη σταθερή σχέση ανάμεσα σε € και λεπτά (μεταβολή) και τέλος συγκρίνει τα δυο ποσά (σύγκριση) προκειμένου να καταλήξει στην τελική απάντηση.

Σε κάποια από τα προβλήματα εντοπίστηκαν και στοιχεία γλωσσικής πολυπλοκότητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το παρακάτω:

Παράδειγμα 4: «**Αν** εγώ αντί για 3 κέρματα των 20 λεπτών, είχα 6 και ο αδερφός μου είχε 56 λεπτά **παραπάνω** από εμένα, πόσα ευρώ έχει ο αδερφός μου; »

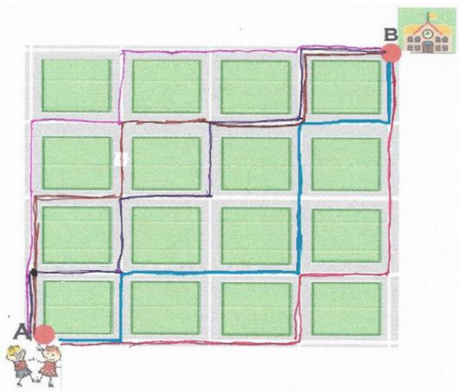
Σε αυτό το παράδειγμα, εντοπίζονται λέξεις που φανερώνουν σύγκριση (παραπάνω) και υποθετικοί σύνδεσμοι (Αν), στοιχεία που όπως αναφέρθηκε παραπάνω, καθιστούν ένα πρόβλημα πιο πολύπλοκο γλωσσικά γιατί απαιτούν ερμηνεία από το λύτη.

Στη δεύτερη δραστηριότητα, σε ότι αφορά τη μαθηματική πολυπλοκότητα, ο μέγιστος αριθμός σημασιολογικών σχέσεων που εντοπίστηκε σε ένα πρόβλημα ήταν τρεις ενώ υπήρχαν αρκετά προβλήματα στα οποία ήταν παρόντα στοιχεία που υποδηλώνουν την ύπαρξη γλωσσικής πολυπλοκότητας (Πίνακας 2).

<table>
<tr><td colspan="7">Συνολικός αριθμός απαντήσεων: 26</td></tr>
<tr><td>ΜΜ: 1</td><td colspan="5">Μ: 23</td><td>ΔΤΠ: 2</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="4">ΕΠ: 16</td><td>ΜΕΠ: 7</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Μαθ. Πολ.</td><td>Γλωσ. Πολ.: 9</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>1σ.σ.</td><td>2σ.σ.</td><td>3σ.σ</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>12</td><td>3</td><td>1</td></tr>
</table>

Πίνακας 2. Αποτελέσματα Δραστηριότητας 2

Ακολουθούν κάποια αντιπροσωπευτικά παραδείγματα από κάθε κατηγορία:



Εικόνα 2. Απάντηση στη Δραστηριότητα 2

Παράδειγμα 1: Πόση απόσταση θα διανύσουν τα παιδιά για το σχολείο **αν** η μια πλευρά του τετραγώνου είναι 3/6 μ.; (μπλε διαδρομή) (Εικ. 2)

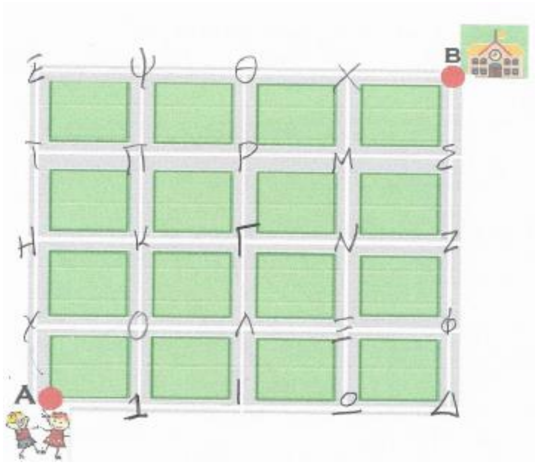
Στο πρόβλημα αυτό, έχει ήδη σχεδιαστεί μια διαδρομή από μια μαθήτρια και εμπλέκει δυο μεταβλητές, τον αριθμό των πλευρών των τετραγώνων που διανύονται και το μήκος κάθε πλευράς. Η σχέση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές ορίζεται για το συγκεκριμένο πλαίσιο και δεν ισχύει γενικά οπότε και εντοπίζεται μια σημασιολογική σχέση, η επαναδιατύπωση.

Παράδειγμα 2: **Αν** τα παιδιά πηγαίνουν 1 μήνα σχολείο και τη μια μέρα κάνουν 16 λεπτά, **πόσες** ώρες θα κάνουν τον 1 μήνα;

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος, ο λύτης χρειάζεται να σκεφτεί πόσες είναι οι μέρες σε ένα μήνα που πηγαίνει ένας μαθητής στο σχολείο. Οπότε αρχικά αξιοποιεί σχέσεις που ισχύουν και εκτός του συγκεκριμένου πλαισίου (1 μήνας=30 μέρες και 1 σχολική εβδομάδα=5 μέρες) οπότε εντοπίζεται η σημασιολογική σχέση ‘μεταβολή’. Στη συνέχεια, αξιοποιείται το δεδομένο για τον χρόνο που χρειάζεται κανείς για να ολοκληρώσει τη διαδρομή, οπότε χρησιμοποιείται μια σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δυο μεταβλητές, η οποία ισχύει μόνο στο δεδομένο πλαίσιο. Συνεπώς εντοπίζεται η σημασιολογική σχέση ‘επαναδιατύπωση’. Τέλος, τα λεπτά θα πρέπει να μετατραπούν σε ώρες οπότε αξιοποιείται η σταθερή σχέση ανάμεσα σε λεπτά και ώρες (60 λεπτά = 1 ώρα) άρα εμφανίζεται ξανά η σημασιολογική σχέση ‘μεταβολή’.

Παράδειγμα 3: **Ποιος** είναι **ο πιο σύντομος** δρόμος για να φτάσουν τα παιδιά στο σχολείο;

Στο παράδειγμα αυτό, υπάρχει και ερωτηματική αντωνυμία (Ποιος) αλλά και φράση που υποδηλώνει σύγκριση (ο πιο σύντομος). Επίσης, η φράση «ο πιο σύντομος δρόμος» προϋποθέτει από τον πιθανό λύτη ερμηνεία, καθώς ο πιο σύντομος δρόμος είναι αυτός για τον οποίο απαιτείται λιγότερος χρόνος ή ισοδύναμα αυτός με τη μικρότερη απόσταση ανάμεσα στην αρχή και στο τέλος της διαδρομής. Πρόκειται για ερώτημα που διατυπώθηκε από περισσότερους από έναν μαθητές. Αυτό βέβαια που δεν έχουν αντιληφθεί είναι πως στο συγκεκριμένο πλαίσιο όποια διαδρομή και να ακολουθηθεί θα έχει το ίδιο μήκος. Ωστόσο, αποτελεί ένα ερώτημα, του οποίου η απάντηση δεν είναι προφανής αλλά καλεί τον λύτη να διερευνήσει τη συγκεκριμένη κατάσταση προτού καταλήξει στο συμπέρασμα αυτό.



Εικόνα 3. Απάντηση στη Δραστηριότητα 2

Παράδειγμα 4: **Αν** ήμουν στο σημείο Α και ήθελα να πάω στο σημείο Θ, **πόσες διαφορετικές διαδρομές** υπάρχουν**;**

Σε αυτό το παράδειγμα συναντάμε και υποθετικό σύνδεσμο (Αν), και ερωτηματική αντωνυμία (πόσες) αλλά και σύγκριση (διαφορετικές διαδρομές). Το ερώτημα, συνεπώς, απαιτεί ερμηνεία από το λύτη. Για τον υπολογισμό των διαδρομών, θα μπορούσαν να εφαρμοστούν διάφορες στρατηγικές εύρεσής τους, οπότε αποτελεί ένα ερώτημα που οδηγεί τον πιθανό λύτη στη διερεύνηση και την αναζήτηση μοτίβων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο στόχος της έρευνας αυτής ήταν η σύγκριση ανάμεσα στα προβλήματα που δημιουργούνται από μαθητές των μεγάλων τάξεων του δημοτικού σχολείου σε δύο διαφορετικά πλαίσια Δημιουργίας Προβλήματος, ένα δομημένο και ένα ημιδομημένο. Μια αρχική εκτίμηση είναι ότι όλοι οι συμμετέχοντες μπόρεσαν να διατυπώσουν προβλήματα μαθηματικού περιεχομένου και κατανόησαν το ζητούμενο κάθε δραστηριότητας. Ελάχιστες ήταν οι περιπτώσεις όπου δεν υπήρχε ερώτημα ή το ερώτημα ήταν μη μαθηματικού περιεχομένου, γεγονός που κρίνεται ως σημαντικό δεδομένης της απουσίας ανάλογων εμπειριών στη δημιουργία προβλήματος.

Στην πρώτη δραστηριότητα, οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν προβλήματα με ευρώ και λεπτά έχοντας ήδη κάποια δεδομένα διαθέσιμα. Τα προβλήματα που προέκυψαν ήταν στην πλειοψηφία τους επιλύσιμα. Σε ότι αφορά τη μαθηματική πολυπλοκότητα παρατηρείται μια συσσώρευση σημασιολογικών σχέσεων προς τα πάνω μιας που σε 10 από τα 18 εντοπίστηκαν δυο σημασιολογικές σχέσεις ενώ υπήρχαν και προβλήματα (5 από τα 18) στα οποία εντοπίστηκαν τρεις σημασιολογικές σχέσεις. Από την άλλη, στοιχεία γλωσσικής πολυπλοκότητας εντοπίστηκαν μόνο σε έναν μικρό αριθμό προβλημάτων (5 από τις 18).

Στη δεύτερη δραστηριότητα, οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν προβλήματα έχοντας σαν δεδομένο μόνο την εικόνα. Παρόλο που στην πλειοψηφία τους, τα προβλήματα που δημιούργησαν οι μαθητές ήταν επιλύσιμα, αυξήθηκε σημαντικά ο αριθμός των μη επιλύσιμων προβλημάτων. Σε σχέση με τη μαθηματική τους πολυπλοκότητα, παρατηρείται μια συσσώρευση σημασιολογικών σχέσεων προς τα κάτω αφού εντοπίστηκε σε 12 από τα 16 μόνο μία σημασιολογική σχέση, ενώ πολύ λιγότερες ήταν οι περιπτώσεις στις οποίες εντοπίστηκαν δύο ή τρεις σημασιολογικές σχέσεις. Από την άλλη όμως παρατηρήθηκαν αυξημένα στιγμιότυπα με στοιχεία γλωσσικής πολυπλοκότητας (9 από τις 16).

Φαίνεται λοιπόν ότι το είδος της κατάστασης δημιουργίας προβλήματος που δίνεται στους μαθητές ευνοεί την ανάπτυξη διαφορετικού τύπου πολυπλοκότητας στα παραγόμενά προβλήματά τους. Έτσι, οι δομημένες καταστάσεις φαίνεται να ευνοούν τη δημιουργία προβλήματος με αυξημένη μαθηματική πολυπλοκότητα χωρίς όμως τα προβλήματα να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα γλωσσικά, ενώ οι ημιδομημένες καταστάσεις ευνοούν τη δημιουργία μη τυπικών ερωτημάτων, τα οποία είναι πιο πολύπλοκα γλωσσικά αλλά όχι μαθηματικά. Αυτό πιθανόν συμβαίνει διότι η ημιδομημένη κατάσταση δίνει μεγάλο βαθμό ελευθερίας για την αξιοποίησή της και έτσι οδηγούνται σε ερωτήματα που διαφέρουν από αυτά που συνήθως συναντούν οι ίδιοι σαν λύτες στη σχολική καθημερινότητά τους.

Προφανώς, λόγω του μικρού δείγματος δεν μπορούν να γενικευτούν τα αποτελέσματα. Όμως, ανοίγουν τη συζήτηση για μια πιο εστιασμένη συζήτηση και περαιτέρω διερεύνηση γύρω από τη σχέση κατάστασης δημιουργίας προβλήματος και είδους πολυπλοκότητας των παραγόμενων προβλημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 37-55. doi: 10.1007/s10649-012-9441-7

Bonotto, C., Santo, L.D. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. In: Singer, F., F. Ellerton, N., Cai, J. (eds) *Mathematical Problem Posing. From Reasearch to Effective Practice.* Springer, doi: 10.1007/978-1-4614-6258-3_5

Ellerton, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261–271. doi: 10.1007/BF00305073

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 183–217. doi: 10.1023/A:1002963618035

Goldenberg, E.P., Mark, J., Kang, J., Fries, M., Carter, C., & Cordner, T. (2015). *Making sense of algebra*. Heinemann

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Cambridge University Press.

Mayer, R. E. (1987). *Educational psychology: A cognitive approach*. Scott Foresman & Company.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(3), 521–539. doi: 10.2307/749846

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19–28

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students’ mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 129-135.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students’ problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Mathematics Education Research Group of Australasia.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Πιττάλης Μάριος[1], Δημοσθένους Ελένη[1], Drijvers Paul[2], Sproesser Ute[3], Frey Kerstin[3]

[1]Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, [2]Freudenthal Institute, Utrecht University, [3]Ludwigsburg University of Education

m.pittalis@ucy.ac.cy, demosthenous.eleni@ucy.ac.cy, p.drijvers@uu.nl, ute.sproesser@ph-ludwigsburg.de, kerstin.frey@ph-ludwigsburg.de

Ο συναρτησιακός λογισμός διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών και αποτελεί ενοποιητικό στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος. Παρόλα αυτά παρατηρείται απουσία ενός ευρέως αποδεκτού ορισμού του όρου και ασυμφωνία ως προς το τι περιλαμβάνει. Στόχος της παρούσας εργασίας, με βάση τη σύνθεση της βιβλιογραφίας, είναι η περιγραφή ενός θεωρητικού πλαισίου για την έννοια του συναρτησιακού λογισμού βασισμένο στις διαφορετικές του παραμέτρους και στην αναπτυξιακή του πορεία. Οι βασικές πτυχές που οικοδομούν τον συναρτησιακό λογισμό στηρίζονται στην ερμηνεία της έννοιας της συνάρτησης ως διαδικασία εισόδου-εξόδου, ως συμμεταβολή, ως αντιστοίχιση και ως μαθηματικό αντικείμενο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα για τον συναρτησιακό λογισμό τα τελευταία 20 χρόνια έχει αναπτυχθεί σε σημαντικό βαθμό λόγω του σημαντικού ρόλου που διαδραματίζει στην κατανόηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, όπως η δομή, η μεταβολή, η συμμεταβολή και οι μαθηματικές σχέσεις (National Council of Teachers of Mathematics 2000; Stephens, et al., 2017). Ο συναρτησιακός λογισμός συνδέεται με άλλα μαθηματικά είδη σκέψης, όπως η αλγεβρική σκέψη και ο υπολογιστικός συλλογισμός, και με τον μαθηματικό και επιστημονικό αλφαβητισμό. Η βιβλιογραφία παραθέτει διαφορετικούς ορισμούς για τον συναρτησιακό λογισμό με αποτέλεσμα να μην υπάρχει μια ευρέως αποδεκτή περιγραφή του όρου. Οι περιγραφές που υπάρχουν συνδέονται με το υπόβαθρο του ατόμου που δίνει την περιγραφή και τις αντιλήψεις που έχει για την έννοια της συνάρτησης, για αυτό και ιστορικά έχουν παρουσιαστεί διαφορετικές περιγραφές (Thompson & Carlson, 2017).

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η σύνθεση της βιβλιογραφίας για την οικοδόμηση ενός θεωρητικού πλαισίου διδασκαλίας για τον συναρτησιακό λογισμό βασισμένο στις διαφορετικές του πτυχές και στην αναπτυξιακή του πορεία. Το θεωρητικό πλαίσιο επεκτείνεται με την παρουσίαση βασικών αρχών διδασκαλίας του συναρτησιακού συλλογισμού από την Στ΄ δημοτικού μέχρι την Γ΄ Λυκείου και την παρουσίαση ενδεικτικού παραδείγματος. Η εργασία παρουσιάζει δεδομένα που προέκυψαν από το ερευνητικό πρόγραμμα FUNTHINK που έχει ως στόχο τη μελέτη της ανάπτυξης του συναρτησιακού λογισμού από το δημοτικό μέχρι το λύκειο.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Στις αρχές του 20ου αιώνα, ο Γερμανός μαθηματικός Felix Klein πρωτοστάτησε στην προσπάθεια μεταρρύθμισης του προγράμματος των μαθηματικών στις ανώτερες τάξεις του λυκείου με σύνθημα «εκπαίδευση στο συναρτησιακό λογισμό» (Kruger, 2019). Η μεταρρύθμιση αυτή, γνωστή ως Meraner Lehrplan, έδωσε έμφαση στην αξία του συναρτησιακού λογισμού ως ενοποιητικό στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος και της μαθηματικής σκέψης ευρύτερα. Ο συναρτησιακός λογισμός συμβάλει στο να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες ότι οι ποσότητες μεταβάλλονται σε διαφορετικά πλαίσια και να εντοπίσουν τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των μεταβλητών. Η προσέγγιση αυτή δεν απαιτεί έναν τυπικό ορισμό της συνάρτησης ως αντιστοιχία, αλλά υφέρπει έναν τρόπο σκέψης που αναζητεί συνεχώς σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και μεταβλητών. Ο συναρτησιακός λογισμός ως τρόπος σκέψης προϋποθέτει ότι διαισθητικοί τρόποι αντίληψης του συναρτησιακού λογισμού αναπτύσσονται στις πρώτες τάξεις του σχολείου, πριν τη συστηματική διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σχετίζεται με διαφορετικά πεδία των μαθηματικών, όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία και ο απειροστικός λογισμός και έχει εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα προβληματικών καταστάσεων.

Ο συναρτησιακός λογισμός έχει οριστεί με διαφορετικούς τρόπους. Ως σημείο αναφοράς, υιοθετούμε τον ορισμό του συναρτησιακού λογισμού ως τη διαδικασία περιγραφής, οικοδόμησης και συλλογισμού για σχέσεις που προκύπτουν από συναρτήσεις ή για συναρτήσεις (Stephens et al., 2017). Άλλες περιγραφές έχουν εστιαστεί σε πιο συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, ο Smith (2008) δίνει έμφαση στη πτυχή της γενίκευσης και της αναπαράστασης της σχέσης μεταξύ των ποσοτήτων. Επιπρόσθετα, ερευνητές έχουν συνδέσει τον συναρτησιακό λογισμό με τη δομή, τη συμμεταβολή, την αλλαγή και τις σχέσεις, την ερμηνεία ποιοτικών αλλαγών για την επεξήγηση σχέσεων και την αξιοποίηση των σχέσεων αυτών στην επίλυση προβλημάτων (Cañadas et al., 2016). Για την καλύτερη κατανόηση των προκλήσεων που προκύπτουν ως προς τη διδασκαλία και την ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού είναι σημαντική η εξέταση της έννοιας της συνάρτησης από μαθηματικής πλευράς. Η έννοια της συνάρτησης, ως ο πυρήνας του συναρτησιακού λογισμού, είναι θεμελιώδης και εμπλέκει διαφορετικές πτυχές της έννοιας όπως έχουν αναπτυχθεί ιστορικά. Οι πτυχές αυτές δίνουν έμφαση σε δομικά χαρακτηριστικά της έννοιας και δίνουν σημαντικές πληροφορίες στη μαθηματική κοινότητα για τη διδασκαλία.

Πτυχές της έννοιας της συνάρτησης

Στην εργασία αυτή υιοθετούμε την πρόταση των Pittalis et al. (2020) και Doorman et al. (2012) για τη διάκριση πτυχών της έννοιας της συνάρτησης:

Συνάρτηση ως διαδικασία εισόδου-εξόδου

Η πτυχή της συνάρτησης ως διαδικασία εισόδου-εξόδου υπογραμμίζει τον υπολογιστικό χαρακτήρα της συνάρτησης. Συσχετίζεται, επίσης, με δραστηριότητες διερεύνησης μοτίβων και περιγραφής της δομής τους. Ερωτήματα στα οποία πρέπει να υπολογιστεί η τιμή εξόδου, όταν εισέλθει σε μια αριθμομηχανή μια τιμή εισόδου, είναι αντιπροσωπευτικά της πτυχής αυτής. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του ποσού που πρέπει να πληρώσει κάποιος που αγοράζει προϊόντα, συναρτήσει της ποσότητας των αντικειμένων. Με τη πτυχή αυτή συνδέονται αναπαραστάσεις όπως βελοδιάγραμμα και πίνακας με στήλες είσοδος-έξοδος. Η πτυχή αυτή της συνάρτησης αντιπροσωπεύει τη λειτουργική κατανόηση της έννοιας, όπως προτείνεται από τη Sfard (1991) και δεν απαιτεί αντίληψη της αιτιώδους σχέσης μεταξύ τιμής εισόδου-τιμής εξόδου.

Συνάρτηση ως μια δυναμική διαδικασία συμμεταβολής

Η πτυχή αυτή εστιάζει στην κατανόηση της συμμεταβολής της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής. Σχετίζεται με τις ιδέες των Thompson και Carlson (2017) που αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως δύο ποσότητες που μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Η ταυτόχρονη μεταβολή των δύο ποσοτήτων καθορίζεται από τη σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων, ώστε μια τιμή της μιας ποσότητας να καθορίζει μια τιμή της άλλης ποσότητας. Δίνει έμφαση στο γεγονός ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή, καθώς μεταβάλλεται με βάση το πεδίο ορισμού, προκαλεί τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής στο πεδίο τιμών. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η μελέτη της αλλαγής της απόστασης που διανύει ένα αντικείμενο συναρτήσει του χρόνου. Αναπαραστάσεις που θεωρούνται κατάλληλες για τη μελέτη της πτυχής αυτής είναι ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση της συνάρτησης που επιτρέπουν τον συντονισμό της μεταβολής των δύο ποσοτήτων.

Συνάρτηση ως μια σχέσης αντιστοίχισης

Η πτυχή αυτή σχετίζεται με την κατανόηση της σχέσης μεταξύ της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής και την αναπαράσταση της σχέσης αυτής. Περιλαμβάνει την έννοια της αντιστοίχισης και οδηγεί στον πιο τυπικό ορισμό της συνάρτησης ως ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη. Η αντίληψη αυτή συμβάλει στην κατανόηση της γενικής σχέσης μεταξύ των δύο μεταβλητών. Για παράδειγμα, οι σχέσεις μεταξύ φαινομένων, όπως η ηλικία και ο κίνδυνος νόσησης από τον ιό COVID. Κατάλληλες αναπαραστάσεις για τη μελέτη αυτών των σχέσεων αποτελούν οι γραφικές παραστάσεις και το νομογράφημα. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσεται και ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης κατά Dirichlet που επικρατεί στις ανώτερες τάξεις του λυκείου. Με βάση τον ορισμό αυτό, οι τιμές μιας μεταβλητής καθορίζονται με μοναδικό τρόπο από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής με βάση συγκεκριμένο κανόνα αντιστοίχισης (Thompson & Carlson, 2017).

Συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο

Η μελέτη της συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο περιλαμβάνει τις ιδιότητες και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν σε αυτήν, ώστε να μπορεί να συγκριθεί με άλλα μαθηματικά αντικείμενα. Είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων για οικογένειες συναρτήσεων και τη διερεύνηση ανωτέρου επιπέδου διαδικασιών, όπως η παραγώγιση. Ερωτήματα που σχετίζονται με τη συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο περιλαμβάνουν τη σύγκριση ιδιοτήτων κατηγοριών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η σύγκριση των ιδιοτήτων των πολυωνυμικών συναρτήσεων σε σχέση με τις εκθετικές και η αναγνώριση των χαρακτηριστικών της κάθε οικογένειας. Αναπαραστάσεις που συμβάλουν στην οικοδόμηση της συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο είναι κυρίως η γραφική παράσταση και η συμβολική αναπαράσταση του γενικού τύπου.

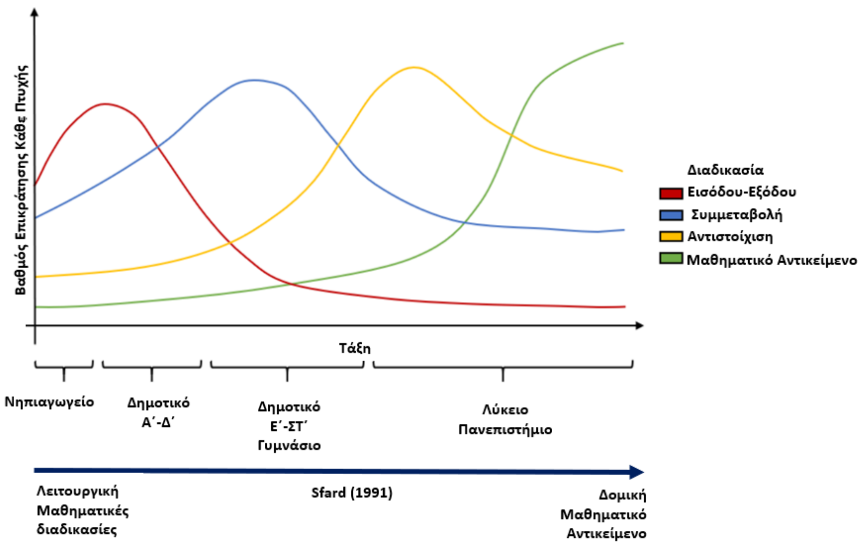
Περιγραφή συναρτησιακού λογισμού

Με βάση τις πιο πάνω περιγραφές, στην παρούσα εργασία εισηγούμαστε ότι ο συναρτησιακός λογισμός για τους/τις μαθητές/τριες του δημοτικού σχολείου θεμελιώνεται κυρίως στις πτυχές της συνάρτησης ως διαδικασία εισόδου-εξόδου, ως συμμεταβολή και ως αντιστοίχιση. Συγκεκριμένα, ο συναρτησιακός λογισμός για τους μαθητές δημοτικού είναι το είδος του λογισμού που επεξεργάζεται την αμετάβλητη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων/μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα (Pittalis et al., 2020). Ο τρόπος με τον οποίο ο/η μαθητής/τριας αντιλαμβάνεται ότι μια τιμή της ποσότητας/μεταβλητής καθορίζει την τιμή της άλλης ποσότητας/μεταβλητής είναι δυνατόν να διευκολύνει τη μετάβαση από τον χειρισμό σχέσεων μεταξύ συγκεκριμένων τιμών σε γενίκευση για σχέσεις που ισχύουν για σύνολα τιμών. Συνεπώς, ο συναρτησιακός λογισμός περιλαμβάνει (α) τον εντοπισμό και τη γενίκευση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων/μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, (β) την αναπαράσταση των σχέσεων αυτών λεκτικά, συμβολικά ή με άλλο είδος αναπαράστασης και (γ) την αξιοποίηση των τρόπων αυτών αναπαράστασης στην επίλυση προβλημάτων (Cañadas et al., 2016). Για τους μαθητές του γυμνασίου η περιγραφή αυτή εμπλουτίζεται σταδιακά με την πτυχή της συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο και προσθέτει στις διαστάσεις του συναρτησιακού λογισμού την περιγραφή, την ερμηνεία και την αξιοποίηση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων σύμφωνα με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης της κάθε κατηγορίας συναρτήσεων, όπως η επεξήγηση του ρόλου των παραμέτρων.

Ανάπτυξη συναρτησιακού λογισμού

Με βάση την επισκόπηση της βιβλιογραφίας, η τάση στα αναλυτικά προγράμματα διεθνώς είναι οι μαθητές να εμπλέκονται σε δραστηριότητες που πραγματεύονται τη συνάρτηση ως διαδικασία εισόδου-εξόδου, ως δυναμική διαδικασία συμμεταβολής και ως αντιστοίχιση στο δημοτικό σχολείο και στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου (Lichti & Roth, 2019; Pittalis et al., 2020; Stephens et al., 2017). Για την ανάπτυξη κατανόησης για τη συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο είναι απαραίτητη η ενασχόληση των μαθητών με διαφορετικές οικογένειες συναρτήσεων, με τη σύγκριση συναρτήσεων με διαφορετικές ιδιότητες, και την εφαρμογή ανώτερων διαδικασιών όπως ο υπολογισμός της παραγώγου και του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης. Αυτή η μετατόπιση από την υπολογιστική διάσταση της συνάρτησης στη δομική αντίληψη ως μαθηματικό αντικείμενο θεωρείται τυπική για την κατανόηση μιας έννοιας στα μαθηματικά (Sfard, 1991). Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει τον βαθμό επικράτησης στη διδασκαλία κάθε πτυχής της έννοιας της συνάρτησης με βάση τη σύνθεση της βιβλιογραφίας και υπογραμμίζει την προοδευτική μετατόπιση από τη λειτουργική στη δομική αντίληψη της συνάρτησης ανά βαθμίδα εκπαίδευσης. Αυτή η εικόνα αντικατοπτρίζεται σε μεγάλο βαθμό στο αναλυτικό πρόγραμμα πολλών χωρών, όπως της Γερμανίας, της Ολλανδίας, της Πολωνίας, της Σλοβακίας και της Κύπρου που μελετήθηκαν για τους σκοπούς της εργασίας.

Παρά τη γενική εικόνα που παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 1, εντοπίζονται διαφοροποιήσεις στην έμφαση που δίνεται σε κάθε πτυχή της έννοιας της συνάρτησης στο αναλυτικό πρόγραμμα μεταξύ των χωρών. Για παράδειγμα, η συγκριτική μελέτη των αναλυτικών προγραμμάτων των πέντε χωρών που συμμετέχουν στο πρόγραμμα FunThink έδειξε ότι η έμφαση που δίνεται σε κάθε πτυχή διαφοροποιείται σύμφωνα με την παράδοση και το πολιτισμικό πλαίσιο κάθε εκπαιδευτικού συστήματος. Στη Γερμανία η έννοια της συνάρτησης εισάγεται στην Α΄ Γυμνασίου με έμφαση στη συνάρτηση ως αντιστοίχιση και ο τυπικός ορισμός συνοδεύεται με παραδείγματα γραμμικών συναρτήσεων. Στην Ολλανδία η έννοια της συνάρτησης εισάγεται άτυπα στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, μέσω αριθμομηχανών ή δραστηριοτήτων που εμπλέκουν αντίθετες και αντίστροφες πράξεις, χωρίς να γίνεται ξεκάθαρη αναφορά σε ορισμό της συνάρτησης. Στη Σλοβακία η εισαγωγή της έννοιας γίνεται στην Γ΄ Γυμνασίου μέσω γραμμικών συναρτήσεων μέσω διαφορετικών μορφών αναπαράστασης, ενώ ο τυπικός ορισμός εισάγεται στην Β΄ Λυκείου. Στην Πολωνία οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων εισάγονται στην Α΄ Γυμνασίου μέσω εφαρμογών στη Φυσική, ενώ ο τυπικός ορισμός ως σχέση αντιστοίχισης εισάγεται στην Γ΄ Γυμνασίου. Στην Κύπρο γίνεται διαισθητική εισαγωγή στις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού μέσω μοτίβων, αριθμομηχανών και προβλημάτων που εμπλέκουν συναρτησιακές σχέσεις, ενώ στη Β΄ Γυμνασίου η έμφαση μετατοπίζεται στη συνάρτηση ως αντιστοιχία και στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης.



Διάγραμμα 1: Η Ανάπτυξη των Πτυχών της Έννοιας της Συνάρτησης

Διδακτικές αρχές στη διδασκαλία του συναρτησιακού λογισμού

Η διδασκαλία του συναρτησιακού λογισμού θα πρέπει να αναπτύσσει ταυτόχρονα τις τέσσερις διαφορετικές πτυχές της έννοιας της συνάρτησης, δίνοντας διαφορετική έμφαση ανά τάξη σύμφωνα με το Διάγραμμα 1, ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν εξελικτικά από τη λειτουργική στη δομική αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης (Sfard, 1991). Επιπρόσθετα, στην παρούσα εργασία εισηγούμαστε ότι η διδασκαλία του συναρτησιακού λογισμού θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις πιο κάτω διδακτικές αρχές.

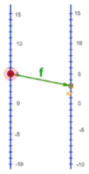
Αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων: Σύγχρονα ψηφιακά εργαλεία που ενσωματώνουν οθόνες αφής, αισθητήρες και περιβάλλοντα εικονικής και επαυξημένης πραγματικότητας είναι δυνατόν να προσφέρουν στους μαθητές αυθεντικές εμπειρίες μάθησης για την ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού, επιτρέποντας τη δυναμική επεξεργασία ποικιλίας αναπαραστάσεων της συνάρτησης, όπως οι γραφικές παραστάσεις, οι πίνακες τιμών και εργαλεία εισόδου-εξόδου τιμών. Η ταυτόχρονη παρουσία των αναπαραστάσεων αυτών επιτρέπει τη δημιουργία διασυνδέσεων, παράλληλης ενασχόλησης με τις διαφορετικές πτυχές της συνάρτησης και ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη. **Ενσώματη μάθηση:** Η ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού είναι δυνατόν να ενισχυθεί μέσω δραστηριοτήτων ενσώματης μάθησης που προσφέρουν στους μαθητές ευκαιρίες για αλληλεπίδραση μεταξύ της αντίληψής τους και των ενεργειών τους. Οι ενέργειες αυτές μπορεί να συνδέονται με συγκεκριμένα ψηφιακά εργαλεία. Για παράδειγμα, για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ χρόνου και απόστασης, οι μαθητές μπορούν να περπατήσουν και η κίνηση τους να καταγραφεί μέσω ενός αισθητήρα και το αποτέλεσμα να αποτυπωθεί σε μια γραφική παράσταση. Η ενσώματη αυτή εμπειρία θα δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν μέσω των αισθήσεών τους τη σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών και να παρατηρήσουν πώς η αλλαγή στην κίνηση τους θα μεταβάλει τη σχέση αυτή (Shvarts et al., 2021). **Πλαισιωμένη μάθηση:** Η χρήση ρεαλιστικών καταστάσεων που εντάσσουν τη μελέτη συναρτησιακών σχέσεων σε πλαίσια που έχουν νόημα για τους μαθητές συμβάλει στο να οικοδομήσουν οι μαθητές από μόνοι τους αντίληψη για τα εμπλεκόμενα μεγέθη και τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, η χρήση ρεαλιστικού πλαισίου στη διδασκαλία της γραμμικής σχέσης $y = ax + \beta$ λειτουργεί βοηθητικά στο να ερμηνεύσουν οι μαθητές της έννοιας της κλίσης a και τον ρόλο του β, επεξηγώντας το αποτέλεσμα της μεταβολής των τιμών αυτών με αναφορά σε συγκεκριμένο πλαίσιο. **Διερευνητικό μοντέλο διδασκαλίας**: Η ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού δεν μπορεί να επιτευχθεί με μαθησιακούς στόχους που υλοποιούνται με δραστηριότητες επίδειξης και εξάσκησης. Η κατανόηση των διαφορετικών πτυχών της συνάρτησης απαιτεί την εμπλοκή των μαθητών σε διερευνητικού τύπου δραστηριότητες, στις οποίες οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να εξερευνήσουν, να παρατηρήσουν, να διατυπώσουν εικασίες και να επαληθεύσουν την εγκυρότητα των υποθέσεων τους, για να γενικεύσουν και να εκφράσουν συμβολικά τη σχέση μεταξύ των εμπλεκόμενων μεγεθών.

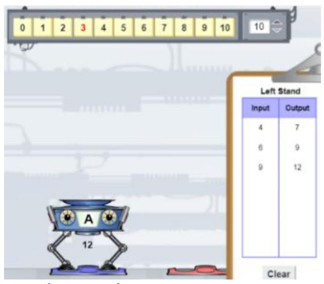
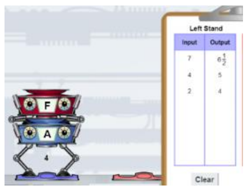
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει ένα ενδεικτικό μάθημα διδασκαλίας συναρτησιακών σχέσεων για την Στ΄ δημοτικού σχολείου που υιοθετεί τις διδακτικές αρχές που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Το μάθημα έχει υλοποιηθεί στις χώρες του συμμετέχουν στο πρόγραμμα.

	Περιγραφή δραστηριότητας
Πρόκληση ενδιαφέροντος Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης ως	Οι μαθητές/τριες κάνουν τους πιο κάτω υπολογισμούς: *Καταγράφω τον αριθμό που αντιστοιχεί στον μήνα γέννησης μου, πολλαπλασιάζω επί 5, προσθέτω 7, πολλαπλασιάζω επί 4, προσθέτω 13, πολλαπλασιάζω επί 5, προσθέτω τον αριθμό που αντιστοιχεί στη μέρα γέννησης και καταγράφω το τελικό αποτέλεσμα.*

<table>
<tr><td>διαδικασία εισόδου-εξόδου</td><td>Με βάση τον αριθμό που καταλήγει κάθε μαθητής/τρια ο εκπαιδευτικός βρίσκει την ημερομηνία γέννησης του κάθε μαθητή. Γίνεται καταγραφή και αντιστοίχιση των αριθμών που προέκυψαν με τις ημερομηνίες γέννησης. Στη συζήτηση δίνεται έμφαση στο γεγονός ότι κάθε ημερομηνία θα δώσει διαφορετικό αριθμό μετά την εκτέλεση των υπολογισμών και οι μαθητές/τριες εξερευνούν τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η ημερομηνία γέννησης με βάση τον αριθμό που προκύπτει από τους υπολογισμούς.</td></tr>
<tr><td>Διερεύνηση

Μελέτη τρόπου αντιστοίχισης–Ενσώματη μάθηση</td><td>Οι μαθητές/τριες εργάζονται στο ψηφιακό εργαλείο. Μετακινώντας το κόκκινο σημείο στον αριστερό άξονα παρατηρούν πώς μεταβάλλεται το αντίστοιχο σημείο στον δεξιό άξονα. Καταγράφουν τις αντιστοιχήσεις που δημιουργούνται και κάνουν υποθέσεις για τον τρόπο που σχετίζονται οι αριθμοί στους δύο άξονες.
</td></tr>
<tr><td>Διερεύνηση σχέσεων

Συνάρτηση ως είσοδος-έξοδος Πίνακας τιμών Παρατήρηση κανόνα – Γενίκευση-Επεξήγηση</td><td>Οι μαθητές/τριες εισάγουν αριθμούς σε μια έτοιμη αριθμομηχανή με αθροιστική δομή και πειραματίζονται για τις τιμές που προκύπτουν (www.explorelearning.com). Παρατηρούν τον πίνακα τιμών που συμπληρώνεται και κάνουν προβλέψεις για την τιμή εξόδου για άλλες τιμές. Επεξηγούν το σκεπτικό τους. Επαναλαμβάνουν την ίδια διαδικασία για άλλη μηχανή με πολλαπλασιαστική δομή.

</td></tr>
<tr><td>Διερεύνηση αθροιστικών σχέσεων – Γενίκευση και Αναπαράσταση</td><td>Οι μαθητές/τριες προγραμματίζουν μηχανές, ώστε να δίνουν ως αποτέλεσμα συγκεκριμένο πίνακα τιμών.
<table><tr><th>ΕΙΣΟΔΟΣ</th><th>ΕΞΟΔΟΣ</th></tr><tr><td>1</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>14</td></tr><tr><td>4</td><td>28</td></tr><tr><td>7</td><td>49</td></tr></table>
<table><tr><th>ΕΙΣΟΔΟΣ</th><th>ΕΞΟΔΟΣ</th></tr><tr><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>10</td><td>6</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Διαισθητική εισαγωγή σύνθεσης συναρτήσεων – συνάρτηση ως αντικείμενο</td><td>Οι μαθητές/τριες συνδυάζουν δύο αριθμομηχανές (μία με αθροιστική δομή και μία με πολλαπλασιαστική δομή). Συμπληρώνουν πίνακα τιμών και στη συνέχεια αλλάζουν τη σειρά των μηχανών και συμπληρώνουν καινούριο πίνακα τιμών. Συγκρίνουν τους δύο πίνακες. Προβλέπουν το αποτέλεσμα στην έξοδο κάθε συνδυασμού για μεγάλους αριθμούς. Βρίσκουν την τιμή εισόδου που αντιστοιχεί σε συγκριμένη τιμή εξόδου.

</td></tr>
<tr><td>Διερεύνηση συμμεταβολής – Σύγκριση αθροιστικής και πολλαπλασιαστικής σχέσης</td><td>Οι μαθητές/τριες προγραμματίζουν μια αριθμομηχανή με κανόνα «προσθέτω 4» και μια δεύτερη μηχανή με κανόνα «πολλαπλασιάζω επί 5». Συμπληρώνουν πίνακα τιμών για κάθε περίπτωση και συγκρίνουν τα μοτίβα που δημιουργούνται. Στη συνέχεια, ζητείται να εισάγουν σε κάθε μηχανή διαδοχικούς αριθμούς και να παρατηρήσουν πώς μεταβάλλονται οι τιμές εξόδου. Επαληθεύουν τις εικασίες τους για άλλες διαδοχικές τιμές εισόδου.</td></tr>
<tr><td>Συνάρτηση ως αντιστοίχιση – Ερμηνεία αναπαραστάσεων – Εφαρμογή σε</td><td>Δίνεται το πιο κάτω σενάριο: Μια εταιρεία ενοικιάζει ποδήλατα ως εξής: €8 για κάθε ώρα και επιπλέον €5 για ασφάλεια. Οι μαθητές: (α) Συνδυάζουν μηχανές για να δημιουργήσουν μια σχέση που υπολογίζει το συνολικό κόστος. (β) Ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση που δημιουργείται στο εφαρμογίδιο, (γ) Βρίσκουν διαφορετικό συνδυασμό</td></tr>
</table>

ρεαλιστικό σενάριο	μηχανών για άλλη εταιρεία που είναι φθηνότερη για ενοικίαση ποδηλάτου χρονικής διάρκειας μεγαλύτερης από 5 ώρες.

Πίνακας 1: Περιγραφή μαθήματος για αριθμομηχανές

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή πρότεινε έναν ορισμό του συναρτησιακού λογισμού και βασικές αρχές διδασκαλίας που μπορούν να αξιοποιηθούν από ερευνητές και εκπαιδευτικούς για σκοπούς ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού για την έννοια της συνάρτησης. Επιπρόσθετα, ο ορισμός αυτός μπορεί να αξιοποιηθεί για τη διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας που θα εγκυροποιεί με ποσοτικά δεδομένα τις πτυχές της διδασκαλίας της συνάρτησης που αναλύθηκαν με βάση τη σύνθεση της βιβλιογραφίας. Για το σκοπό αυτό παρουσιάσαμε ένα ενδεικτικό μάθημα που στηρίζεται στις βασικές αρχές που περιγράψαμε και παρέχει συγκεκριμένες ιδέες για διαισθητικούς τρόπους προσέγγισης της έννοιας της συνάρτησης και δομικών χαρακτηριστικών σε μαθητές/τριες μικρής ηλικίας, όπως η μελέτη γραφικών παραστάσεων, η μετάφραση από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη και η σύνθεση συναρτήσεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Με συγχρηματοδότηση από το πρόγραμμα «Erasmus+» της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87–103.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243–1267.

Krüger, K. (2019). Functional thinking: The history of a didactical principle. In *The legacy of Felix Klein* (pp. 35–53). Springer, Cham.

Lichti, M., & Roth, J. (2019). Functional Thinking—A Three-Dimensional Construct?. *Journal für Mathematik-Didaktik, 40*(2), 169–195.

National Council for Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631–674.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36.

Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2021). Embodied instrumentation in learning mathematics as the genesis of a body-artifact functional system. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 447–469.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Lawrence Erlbaum Associates.

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386–420). NTCM.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). NCTM.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΕΦΑΡΜΟΖΕΤΑΙ Η ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ;

Ζιώγα Μαριάνθη, Δεσλή Δέσποινα

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

mizioga@eled.auth.gr, ddesli@eled.auth.gr

Η παρούσα εργασία εξετάζει τις διδακτικές προσεγγίσεις που ακολούθησαν δύο εκπαιδευτικοί της Α' Δημοτικού οι οποίες, μετά τη συμμετοχή τους σε πρόγραμμα παρέμβασης για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, υλοποίησαν την ίδια μαθηματική δραστηριότητα. Μέσω συνεντεύξεων διερευνώνται οι αντιλήψεις τους σχετικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά και μελετάται η συνέπεια ανάμεσα σε αυτές και τις διδακτικές τους πρακτικές. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι θεωρητικές αντιλήψεις και των δύο εκπαιδευτικών αντανακλώνται στη διδασκαλία τους, με διαφοροποιήσεις, ωστόσο, στο επίπεδο των προοπτικών που προσφέρουν στους μαθητές τους αναφορικά με την καλλιέργεια της δημιουργικότητάς τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργικότητα, σύμφωνα με τη Leikin (2009), αποτελεί ιδιότητα του ανθρώπινου μυαλού η οποία διαθέτει δυναμικό χαρακτήρα: με την κατάλληλη εκπαίδευση μπορεί να καλλιεργηθεί ή, σε αντίθετη περίπτωση, να ατονήσει. Αν και δεν υπάρχει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά μεταξύ των ερευνητών (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013), τα τελευταία χρόνια έχει μελετηθεί σε διάφορες εκφάνσεις της. Τα κύρια χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας που αναδεικνύονται συχνότερα στους ορισμούς είναι η *πρωτοτυπία/καινοτομία* και η *χρησιμότητα* του τελικού προϊόντος (Smith & Smith, 2017). Επίσης, η *δημιουργία νέας γνώσης* και η ικανότητα για *ευελιξία* στην επίλυση προβλημάτων (Kwon, Park & Park, 2006) συνιστούν βασικούς πυλώνες της δημιουργικής σκέψης. Σύμφωνα με τις Lev-Zamir και Leikin (2011), οι ικανότητες των μαθητών για *αφαιρετική σκέψη* και *γενίκευση* στο μαθηματικό περιεχόμενο συσχετίζονται με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά.

Οι Beghetto και Kaufman (2009), επιχειρώντας να μελετήσουν και να περιγράψουν τη δημιουργικότητα, διατύπωσαν το μοντέλο Four-C. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο, η *Big-C* (ή *απόλυτη* δημιουργικότητα) αφορά ανακαλύψεις που έφεραν μεγάλες αλλαγές στο πεδίο που ανήκουν, η *little-c* (ή *σχετική* δημιουργικότητα) αναφέρεται στη δημιουργικότητα που σχετίζεται με την καθημερινή ζωή και η *mini-c* αφορά άμεσα την εκπαίδευση, καθώς εστιάζει στις καινούριες ιδέες και ερμηνείες που έχουν προσωπικό νόημα και εμπλέκονται στη μάθηση και την απόκτηση εμπειρίας. Η διεύρυνση, συνεπώς, της έννοιας της δημιουργικότητας ώστε να συμπεριλάβει την κατηγορία της mini-c, επιτρέπει στις προσωπικές ανακαλύψεις των μαθητών να θεωρηθούν δημιουργικές (Beghetto & Kaufman, 2009).

Έχει φανεί ότι το περιβάλλον του σχολείου μπορεί να επηρεάσει την ανάπτυξη της δημιουργικότητας ενθαρρύνοντας ή αποθαρρύνοντας τους μαθητές να εμπλακούν σε δημιουργικές δραστηριότητες (Gralewski, 2016). Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αναγνώριση της δημιουργικότητας και των δραστηριοτήτων που την καλλιεργούν στην τάξη (Aljughaiman & Mowrer-Reynolds, 2005) καθώς και ότι οι αντιλήψεις τους για τη δημιουργικότητα συχνά είναι περιορισμένες και συγκεχυμένες (Desli & Zioga, 2015), η επιρροή του σχολείου είναι δεδομένη. Συχνά μάλιστα παρατηρείται σημαντική αντίθεση και ασυνέπεια ανάμεσα στις δηλώσεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα και τη συμπεριφορά τους στην τάξη (Gralewski, 2016).

Η παρούσα εργασία αποτελεί τμήμα μιας έρευνας που έχει ως στόχο να μελετήσει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά καθώς και τις διδακτικές τους πρακτικές που ευνοούν την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στην τάξη. Επικεντρώνεται σε δύο εν ενεργεία εκπαιδευτικούς και επιχειρεί να μελετήσει τη συνέπεια μεταξύ των δηλώσεων και των διδακτικών πρακτικών τους αναφορικά με την καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών τους στα μαθηματικά. Με άλλα λόγια, εξετάζει την ύπαρξη συμφωνίας μεταξύ θεωρίας και πράξης. Πιο συγκεκριμένα, επιχειρείται η διερεύνηση των ερωτημάτων: α) Πώς αντιλαμβάνονται οι δύο εκπαιδευτικοί τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά; β) Πώς εφαρμόζουν τις ιδέες και τις αντιλήψεις τους για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία τους; γ) Υπάρχει συνέπεια ανάμεσα στις δηλώσεις τους και τις διδακτικές πρακτικές που υλοποιούν στην τάξη τους;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Οι συμμετέχουσες. Η Χαρά και η Γεωργία είναι εκπαιδευτικοί με 23 και 22 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, αντίστοιχα. Είναι και οι δύο απόφοιτοι της Παιδαγωγικής Ακαδημίας και έχουν ολοκληρώσει το πρόγραμμα εξομοίωσης πτυχίου. Την περίοδο της έρευνας, στην οποία συμμετείχαν εθελοντικά, δίδασκαν και οι δύο σε Α’ τάξη. Δεν έχουν κάποια εξειδίκευση ή συμμετοχή σε προγράμματα για τα μαθηματικά.

Η παρέμβαση. Η επιμορφωτική παρέμβαση που παρακολούθησαν είχε συνολική διάρκεια 18 ωρών. Περιελάμβανε ενημέρωση των εκπαιδευτικών για τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα που αφορούν στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, συζήτηση, σχολιασμό και επίλυση δημιουργικών έργων καθώς και τροποποίηση δραστηριοτήτων με στόχο να γίνουν περισσότερο πρόσφορες για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά.

Εργαλεία. Για τον σκοπό της παρούσας εργασίας, η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω ημιδομημένης συνέντευξης και παρατήρησης. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης επιλέχθηκαν με στόχο την κατά το δυνατόν πληρέστερη έκφραση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Αφορούσαν στους τρόπους έκφρασης της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, στα χαρακτηριστικά των δημιουργικών ανθρώπων και τα στοιχεία των δημιουργικών έργων καθώς και στην ατμόσφαιρα της τάξης που ενδείκνυται για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας. Τέλος, σχεδιάστηκε και χρησιμοποιήθηκε φύλλο δομημένης παρατήρησης, το οποίο εστίαζε στο είδος των έργων που επέλεγαν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία τους καθώς και στη διδακτική προσέγγιση που υιοθετούσαν. Ο σχεδιασμός του επέτρεπε την εισαγωγή δεδομένων με δύο τρόπους: α) με δειγματοληψία συμβάντων (εισαγωγή μιας μικρής καθέτου (/) δίπλα σε κάθε χαρακτηριστικό κάθε φορά που παρατηρείται) και β) με καταγραφή σε διαστήματα, μέθοδος που απεικονίζει τη χρονολογική σειρά των γεγονότων και τα καταγράφει στην αντίστοιχη κατηγορία, σε προκαθορισμένα διαστήματα (1 λεπτού) (Cohen, Manion & Morrison, 2008). Η ανάλυση των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο της θεματικής ανάλυσης (Bryman, 2017).

Διαδικασία. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν τρεις μήνες μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης. Είχαν διάρκεια περίπου 30 λεπτών και ηχογραφήθηκαν. Η παρατήρηση της διδασκαλίας κάθε εκπαιδευτικού στην ώρα των μαθηματικών διήρκεσε 4 ώρες και έλαβε χώρα σε εύρος διαστήματος τριών μηνών μετά την παρέμβαση. Η μέρα και ώρα της παρατήρησης καθοριζόταν κάθε φορά μετά από συνεννόηση με την εκάστοτε εκπαιδευτικό. Το περιεχόμενο της διδασκαλίας και οι δραστηριότητες που αξιοποιούσε η εκπαιδευτικός, αποτελούσαν αποκλειστικά δικές της επιλογές. Η ερευνήτρια δεν παρενέβη με κανέναν τρόπο στους στόχους, στο περιεχόμενο ή στη μέθοδο της διδασκαλίας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η παρατήρηση της διδασκαλίας των δύο εκπαιδευτικών συνέπεσε χρονικά. Ως αποτέλεσμα, οι εκπαιδευτικοί διαχειρίστηκαν την ίδια ενότητα του σχολικού εγχειριδίου στην τάξη τους. Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί αμφότερες επέλεξαν να τροποποιήσουν την ίδια δραστηριότητα του σχολικού εγχειριδίου (Εικόνα 1) η οποία, σύμφωνα με το βιβλίο του εκπαιδευτικού (ΥΠΕΠΘ, 2007) έχει ως διδακτικό στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να εντοπίζουν τις θέσεις των τετραγώνων του τετραγωνισμένου χαρτιού με βάση την οριζόντια και την κάθετη διάσταση.

Εικόνα 1: Δραστηριότητα που αξιοποιήθηκε από τις εκπαιδευτικούς (Α' τάξη, Β.Μ., Κεφάλαιο 36, σελ. 18)

α. Η διδακτική προσέγγιση της Χαράς

Η Χαρά στη συνέντευξή της, όταν ερωτάται "*Τι είναι η δημιουργικότητα και ποιοι άνθρωποι είναι δημιουργικοί; Ποια προβλήματα καλλιεργούν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά;*", συνδέει έντονα τη δημιουργικότητα με ευχάριστα συναισθήματα: "*δημιουργικότητα είναι… (η) ευκολία να δημιουργείς ευχάριστες καταστάσεις στη ζωή σου*". Παράλληλα, δίνει έμφαση στα εσωτερικά κίνητρα: "*Η ανάγκη μας να νιώσουμε χαρά μάς κάνει να είμαστε δημιουργικοί*". Δηλώνει ότι ο δημιουργικός εκπαιδευτικός "*χρησιμοποιεί τα πάντα, με σκοπό να πάρει ευχαρίστηση και ο ίδιος και οι μαθητές του*". Επιπλέον, πιστεύει ότι τα προβλήματα που καλλιεργούν τη δημιουργικότητα των μαθητών είναι αυτά που τους αφορούν άμεσα, που σχετίζονται με την καθημερινότητα και τα ενδιαφέροντά τους, που τους εμπλέκουν στη μαθησιακή διαδικασία: "*Όταν τους αφορά, μπορούν πραγματικά να δημιουργήσουν. Όταν δεν τους αφορά, όταν είναι πολύ ξένο, αόριστο, τους είναι αδιάφορο να μπουν στη διαδικασία*".

Κατά τη διάρκεια της παρατήρησης, η Χαρά, τροποποιώντας τη δραστηριότητα της Εικόνας 1, σχεδίασε έναν πίνακα με 6 γραμμές και 5 στήλες, τον αρίθμησε και δήλωσε: "*Έχω κρύψει κάτι σε ορισμένα τετράγωνα*". Κάθε μαθητής, εκ περιτροπής, σηκωνόταν και η Χαρά τού έλεγε: "*Είναι στην 4η σειρά και στην 5η στήλη*" ή "*Είναι στην 3η σειρά και στη 2η στήλη*" κ.λπ. Όταν ο εκάστοτε μαθητής έβρισκε το σωστό τετράγωνο, η Χαρά τού χάριζε μία σβήστρα που "κρυβόταν" στο συγκεκριμένο τετράγωνο. Όλοι οι μαθητές εντόπισαν με ευκολία το σωστό τετράγωνο.

Η Χαρά προσέδωσε έναν παιγνιώδη χαρακτήρα στην εργασία και την μετέτρεψε σε περισσότερο διασκεδαστική για τους μαθητές, οι οποίοι επιπλέον αποκόμισαν μία μικρή ανταμοιβή για την επιτυχή απάντησή τους. Η διδακτική προσέγγιση της Χαράς βρίσκεται σε συμφωνία με τις αντιλήψεις για τη δημιουργικότητα, όπως αυτές εκφράστηκαν στη συνέντευξή της. Είναι έκδηλη η πρόθεσή της να αισθανθούν οι μαθητές της χαρά και ικανοποίηση, ενώ ταυτόχρονα να νιώσουν ότι εμπλέκονται σε κάτι που τους αφορά. Ωστόσο, η διδακτική προσέγγιση της επιβράβευσης μέσω ανταμοιβής παραπέμπει έντονα σε συμπεριφορικό τρόπο διδασκαλίας. Επιπλέον, αν και ο διδακτικός στόχος της εργασίας επετεύχθη, δεν παρατηρήθηκε καλλιέργεια της δημιουργικότητας σε κανένα επίπεδο, καθώς δεν ενισχύθηκε η ευέλικτη ή η πρωτότυπη σκέψη των μαθητών ούτε ενθαρρύνθηκαν να αναζητήσουν νέα γνώση ή να σκεφτούν με αφαιρετικό τρόπο. Οι έννοιες της εμπλοκής των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία και της ικανοποίησής τους από αυτήν είναι πιο σύνθετες και δεν εξαντλούνται στη δημιουργία διασκεδαστικής ατμόσφαιρας στην τάξη.

β. Η διδακτική προσέγγιση της Γεωργίας

Η Γεωργία, όταν ερωτάται σχετικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά και τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να καλλιεργηθεί, τη συνδέει με την ευέλικτη σκέψη: "*δημιουργικοί στα μαθηματικά είναι αυτοί που βρίσκουν κι άλλους τρόπους επίλυσης, που τους διευκολύνουν και τους ίδιους*". Όταν στοχεύει στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, επιλέγει προβλήματα διαφορετικά από τα συνηθισμένα, προκειμένου να προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Παράλληλα, τους ενθαρρύνει να εμπλακούν στη μαθησιακή διαδικασία: "*Τους ζητώ να προβληματιστούν, να αναζητήσουν, προσπαθώ να είναι και λίγο ασυνήθιστα τα προβλήματα για να τους κινήσουν το ενδιαφέρον. Προσπαθούν, λένε και ιδέες*". Θεωρεί ότι δημιουργικός είναι ο εκπαιδευτικός που "*ξεφεύγει από την πεπατημένη και προσπαθεί να δείξει στα παιδιά ότι τα μαθηματικά είναι άμεσα συνδεδεμένα με τη ζωή τους*".

Κατά τη διάρκεια της παρατήρησης, στη διδακτική ώρα που αφορούσε τη δραστηριότητα της Εικόνας 1, η Γεωργία αρχικά συνέδεσε τις νέες έννοιες με τις εμπειρίες των μαθητών, υπενθυμίζοντάς τους μία παράσταση που είχαν παρακολουθήσει στο θέατρο σε προγενέστερο χρόνο. Με διερευνητικές ερωτήσεις που κινητοποιούσαν τους μαθητές (π.χ., "*Καθίσατε όπου θέλατε ή σε συγκεκριμένες θέσεις;*") κάποιοι μαθητές θυμήθηκαν και άλλοι συνειδητοποίησαν ότι στο θέατρο οι θεατές κάθονται σε συγκεκριμένες θέσεις που τις υποδεικνύει το εισιτήριό τους.

Έπειτα, προχώρησαν στη δραστηριότητα του σχολικού εγχειριδίου (Εικόνα 1). Αν και κάποιοι μαθητές βρήκαν σε ποιες θέσεις του σχεδιαγράμματος αντιστοιχεί το εισιτήριο, οι περισσότεροι αντιμετώπισαν δυσκολία. Άλλωστε, όπως σχολίασε και η ίδια η Γεωργία, η απεικόνιση ενός εισιτηρίου που αντιστοιχεί σε δύο θέσεις, δεν είναι ρεαλιστική. Προκειμένου να εξασκηθούν οι μαθητές στην εύρεση της θέσης με βάση την οριζόντια και κάθετη διάσταση και να παρουσιαστεί με πιο ρεαλιστικό τρόπο το ερώτημα της εργασίας ώστε να προσομοιάζει με τις εμπειρίες των μαθητών, η Γεωργία αποφάσισε να αλλάξει τη διαρρύθμιση της τάξης και να την μετατρέψει σε “θέατρο”. Αφού απομάκρυνε τα θρανία, διέταξε τις καρέκλες με τέτοιον τρόπο ώστε να σχηματίζουν 4 σειρές και 4 στήλες (οι μαθητές της τάξης της ήταν 16). Στη συνέχεια, χώρισε τους μαθητές σε 4 ομάδες των 4 ατόμων και τους μοίρασε χαρτιά διαφορετικού χρώματος, ένα σε κάθε παιδί, για να φτιάξουν με αυτά “εισιτήρια”. Διευκρίνισε ότι κάθε εισιτήριο αντιστοιχεί σε μία θέση. Κάθε ομάδα παιδιών είχε ίδιο χρώμα εισιτηρίου. Η Γεωργία είπε στους μαθητές: “*Η πρώτη ομάδα, που έχει ροζ εισιτήρια, θα καθίσει στην 1η σειρά*”. Με τον ίδιο τρόπο, έδωσε οδηγίες στους υπόλοιπους μαθητές, αντιστοιχίζοντας κάθε σειρά με ένα χρώμα εισιτηρίου. “*Τώρα, τα παιδιά κάθε ομάδας θα συνεννοηθούν μεταξύ τους, για να αποφασίσουν ποια θέση της σειράς τους θα πάρει ο καθένας, την 1, 2, 3 ή 4*”, εξήγησε η Γεωργία.

Μετά από συζήτηση, κάθε μαθητής έγραψε στο εισιτήριό του τον αριθμό της θέσης του και επιχείρησε να καθίσει στη θέση που του αντιστοιχούσε. Στο σημείο αυτό δημιουργήθηκαν πολλές διαφωνίες, οι μαθητές συνέχεαν τη θέση με τη σειρά και πολλοί ήθελαν να καθίσουν στην πρώτη σειρά για να είναι μπροστά, παρόλο που το εισιτήριό τους έγραφε άλλον αριθμό σειράς. Η Γεωργία επενέβη, τους ξεκαθάρισε ποιες είναι οι σειρές και πώς αριθμούνται (1η είναι αυτή που είναι πιο κοντά στην έδρα). Αφού έγινε ξεκάθαρο στους μαθητές σε ποια σειρά κάθεται ο καθένας, δοκίμασαν και πάλι να καθίσουν στη θέση που έδειχνε το εισιτήριό τους. Αυτή τη φορά όμως, προέκυψε ένα άλλο πρόβλημα: καθώς οι θέσεις δεν ήταν αριθμημένες, δεν ήταν σαφές στους μαθητές ποια είναι η θέση 1 και ποια η θέση 4 (ή αντίστοιχα οι θέσεις 2 και 3). Συνεπώς, αναδείχθηκε η ανάγκη για αρίθμηση των θέσεων. Μετά από πρόταση ενός μαθητή, τοποθέτησαν αυτοκόλλητα χαρτάκια στις καρέκλες που αντιστοιχούσαν στη θέση 1 κάθε σειράς. Εν τέλει, οι μαθητές κάθισαν στις σωστές θέσεις. Στη συνέχεια, η Γεωργία μάζεψε τα εισιτήρια, τα ανακάτεψε και τα ξαναμοίρασε στους μαθητές με τυχαίο τρόπο, ζητώντας τους να αλλάξουν θέση, σύμφωνα με το νέο εισιτήριο που τους δόθηκε. Οι μαθητές προσανατολίστηκαν και εντόπισαν τη νέα θέση τους με πολύ μεγαλύτερη ευκολία αυτή τη φορά. Η διαδικασία συλλογής των εισιτηρίων από τη Γεωργία, αναδιανομής τους με τυχαίο τρόπο και αναζήτησης της νέας θέσης επαναλήφθηκε άλλες δύο φορές, μέχρι που όλοι οι μαθητές κάθισαν στη σωστή θέση χωρίς δυσκολία.

Η Γεωργία, αφού πρώτα συνέδεσε τις καινούριες έννοιες με προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών (διαδικασία που συνδέεται με τη mini-c δημιουργικότητα), ενέπλεξε τους μαθητές σε μια ενδιαφέρουσα γι' αυτούς δραστηριότητα, στην οποία συμμετείχαν ενεργά. Η αναγκαιότητα αρίθμησης των στηλών και των γραμμών, ώστε να προσδιορίζεται κάθε θέση με μοναδικό τρόπο, προέκυψε με φυσικό και ρεαλιστικό τρόπο και επιλύθηκε από τα παιδιά. Η Γεωργία ήταν αρκετά καθοδηγητική και δεν επέτρεψε στους μαθητές μεγάλο περιθώριο αυτενέργειας. Ωστόσο, η συγκεκριμένη δραστηριότητα παρείχε στους μαθητές πρόσφορες συνθήκες και κίνητρα ώστε να ενεργοποιήσουν τις διαδικασίες της "mini-c", δηλαδή να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των καινούριων εννοιών και των προηγούμενων γνώσεών τους, ώστε να οικοδομήσουν νέα γνώση και να καλλιεργήσουν τη δημιουργικότητά τους.

Αφού ξανατακτοποίησαν την τάξη με βάση την προηγούμενη διαρρύθμισή της, η Γεωργία ζήτησε από τους μαθητές να σχεδιάσουν στο τετράδιό τους τις θέσεις, όπως τις είχαν διατάξει προηγουμένως και να χρωματίσουν αυτή που αναγράφεται στο εισιτήριό τους. Οι μαθητές, με άλλα λόγια, κλήθηκαν να μεταφέρουν την προηγούμενη δράση και εμπειρία τους σε πιο αφηρημένο επίπεδο και να προσανατολιστούν αυτή τη φορά στο χαρτί, αντί για τον πραγματικό χώρο. Κάθε μαθητής χρωμάτισε στο σχεδιάγραμμά του τη θέση που του αντιστοιχούσε και στη συνέχεια σηκώθηκε και τη χρωμάτισε στην κάτοψη που είχε σχεδιάσει η Γεωργία στον πίνακα. Πρόκειται για μία δημιουργική δραστηριότητα, στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να σκεφτούν αφαιρετικά και να αναπαραστήσουν στο επίπεδο (τετραγωνισμένο χαρτί) την πραγματική τους θέση στον τρισδιάστατο χώρο.

Οι αντιλήψεις της Γεωργίας για τη δημιουργικότητα, όπως εκφράστηκαν στις συνεντεύξεις, αντικατοπτρίζονται στη διδακτική της πρακτική και στις επιλογές που έκανε προκειμένου να τροποποιήσει τη δραστηριότητα. Αρχικά, επέδειξε η ίδια ευελιξία και δημιουργικότητα αλλάζοντας τη δραστηριότητα με τέτοιον τρόπο, ώστε να γίνουν καλύτερα κατανοητές οι έννοιες από τους μαθητές και να συνδεθούν άμεσα με την καθημερινή τους ζωή. Η δραστηριότητα που σχεδίασε ήταν μη τυποποιημένη και ξέφευγε από τα συνηθισμένα, προσελκύοντας το ενδιαφέρον των μαθητών. Παράλληλα, οι μαθητές προβληματίστηκαν και ενεπλάκησαν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία, κατακτώντας νέα γνώση. Παρατηρείται, επομένως, μεγάλη συνέπεια ανάμεσα στις δηλώσεις της Γεωργίας και στη διδακτική της προσέγγιση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Φαίνεται ότι οι αντιλήψεις των δύο εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, είτε συντελούν στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας είτε όχι, αντανακλώνται στις διδακτικές τους πρακτικές σε μεγάλο βαθμό. Από τη μία πλευρά, η Χαρά παραμένει σταθερή στην πεποίθησή της ότι η δημιουργικότητα συνδέεται με την ευχάριστη και χαρούμενη ατμόσφαιρα και προσπαθεί να διδάσκει με δημιουργικό τρόπο, χωρίς αυτό να συνεπάγεται απαραίτητα ενίσχυση της δημιουργικότητας των μαθητών της. Σε αντίστοιχο συμπέρασμα κατέληξαν και οι Bolden, Harries και Newton (2010), καθώς οι συμμετέχοντες στην έρευνά τους συχνά συνέχεαν τη δημιουργικότητα με τη δημιουργία διασκεδαστικής ατμόσφαιρας και είχαν την τάση να *διδάσκουν δημιουργικά* και όχι να διδάσκουν *με στόχο τη δημιουργικότητα*. Από την άλλη πλευρά, η Γεωργία τόνισε στις συνεντεύξεις της τη σύνδεση της δημιουργικότητας με την ευέλικτη σκέψη, την αξιοποίηση μη τυποποιημένων προβλημάτων, την ενεργό συμμετοχή των μαθητών, καθώς και τη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά κατάφερε να τα ενσωματώσει σε μία δημιουργική μαθηματική δραστηριότητα. Εν τέλει, η τροποποίηση της ίδιας δραστηριότητας του σχολικού εγχειριδίου είχε ως αποτέλεσμα στη μεν περίπτωση της Χαράς οι μαθητές να διασκεδάσουν κατακτώντας τον διδακτικό στόχο που έθετε το σχολικό εγχειρίδιο, στη δε περίπτωση της Γεωργίας οι μαθητές να εμπλακούν σε μια δημιουργική δραστηριότητα, να έχουν την ευκαιρία να προβληματιστούν, να δράσουν, να οικοδομήσουν νέα γνώση και να κατακτήσουν διδακτικούς στόχους πέρα από αυτούς που έθετε το σχολικό εγχειρίδιο, χωρίς ωστόσο να τους λείπει ο ενθουσιασμός και η ικανοποίηση. Παρατηρούνται, επομένως, σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ των διδακτικών προσεγγίσεων των δύο εκπαιδευτικών, όσον αφορά τη μέθοδο διδασκαλίας, τους διδακτικούς στόχους αλλά και τις ευκαιρίες για καλλιέργεια της δημιουργικότητας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο εκπαιδευτικοί στις συνεντεύξεις τους αναφέρονται στην αξία της εμπλοκής των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία και της αξιοποίησης προβλημάτων που τους αφορούν και τους προσελκύουν το ενδιαφέρον. Εντούτοις, το περιεχόμενο που αποδίδουν σε αυτές τις διαδικασίες διαφέρει, όπως έγινε φανερό κατά τη διάρκεια της παρατήρησης. Η Χαρά εξαντλεί την εμπλοκή των μαθητών σε ένα πρώτο επίπεδο, αυτό της ανταμοιβής, ενώ η Γεωργία τους ενθαρρύνει να σκεφτούν, να δράσουν, να συνδέσουν τις έννοιες με την καθημερινή τους ζωή και να οικοδομήσουν νέα γνώση. Αυτή η διαφοροποίηση ενδεχομένως συνδέεται με την εκπαίδευση που έλαβαν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών σπουδών τους.

Οι δύο εκπαιδευτικοί είναι πιθανόν να αποτελούν μεμονωμένες περιπτώσεις και, κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα της εργασίας δεν είναι δυνατό να γενικευθούν. Ωστόσο, τα στοιχεία που προέκυψαν φαίνεται να συμφωνούν με ευρήματα προηγούμενων ερευνών που δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν ανακριβείς αντιλήψεις σχετικά με τη δημιουργικότητα και συχνά δεν είναι σε θέση να την καλλιεργήσουν στην τάξη τους (Aljughaiman & Mowrer-Reynolds, 2005; Desli & Zioga, 2015). Αναδεικνύεται, επομένως, η σημασία της κατάλληλης προετοιμασίας και εκπαίδευσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών γύρω από τη διδασκαλία των μαθηματικών γενικότερα, καθώς και η ανάγκη για εμπλουτισμό των προπτυχιακών προγραμμάτων σπουδών σχετικά με την καλλιέργεια της δημιουργικότητας.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ερευνητική εργασία υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛΙΔΕΚ) και από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ), στο πλαίσιο της Δράσης «Υποτροφίες ΕΛΙΔΕΚ Υποψηφίων Διδακτόρων» (κωδικός 1901).

ΕΛ.Ι.Δ.Ε.Κ. Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας & Καινοτομίας

ΓΓΕΤ ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aljughaiman, A. & Mowrer-Reynolds, E. (2005). Teachers' conceptions of creativity and creative students. *The Journal of Creative Behavior*, *39*(1), 17-34.

Beghetto, R. & Kaufman, J. (2009). Do we all have multicreative potential? *ZDM, 41*(1), 39-44.

Bolden, D.S., Harries, A.V. & Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 143-157.

Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι κοινωνικής έρευνας*. Αθήνα: Gutenberg.

Cohen, J., Manion, L. & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Desli, D. & Zioga, M. (2015). Looking for creativity in primary school mathematical tasks. *Proceedings of the 9th congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 989-995). Czech: Prague.

Gralewski, J. (2016). Teachers' beliefs about creativity and possibilities for its development in Polish high schools: A qualitative study. *Creativity. Theories–Research-Applications*, *3*(2), 292-329.

Kwon, O.N., Park, J.S. & Park, J.H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, *7*(1), 51–61.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity* *in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R. & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM*, *45*(2), 159–166.

Lev-Zamir, H. & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, *13*(1), 17-32.

Smith, J.K., & Smith, L.F. (2017). The nature of creativity: mayflies, octopi, and the best bad idea we have. In R. Beghetto, & B. Sriraman (Eds.), *Creative contradictions in education* (pp. 21-35). Switzerland: Springer.

ΥΠΕΠΘ (2007). *Μαθηματικά Α'Δημοτικού*, *Βιβλίο δασκάλου*. Αθήνα: Διόφαντος.

ΟΙ ΓΡΙΦΟΙ MOBILE ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΕΚΦΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ

Μακρή Ευαγγελία, Παπαδόπουλος Ιωάννης

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

makrievangelia11@gmail.com, ypapadop@eled.auth.gr

Στην εργασία αυτή, φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος εργάζονται με τους γρίφους mobile, στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι με σκοπό να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι γρίφοι αυτοί διευκολύνουν την άτυπη έκφραση της κατανόησης και των γνώσεων των φοιτητών για το σύμβολο της ισότητας και τις ιδιότητές του στα πλαίσια της αλγεβρικής σκέψης. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, παρέχουν ενδείξεις για το εύρος των διαφορετικών στρατηγικών που κάνουν χρήση οι φοιτητές όταν απουσιάζει η τυπική αλγεβρική γνώση, όσο και για την άτυπη εφαρμογή ενεργειών που αργότερα θα αποτελέσουν στη διδασκαλία τα τυπικά βήματα για την επίλυση μιας εξίσωσης ή ενός συστήματος εξισώσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλές έρευνες τα τελευταία χρόνια στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν ασχοληθεί με την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας και της σχέσης ισοδυναμίας που αυτό εκφράζει κι έχουν αναδείξει τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν με αυτό μαθητές όλων των βαθμίδων (Behr et al., 1980; Carpenter et al., 2003; Kieran, 1981). Η δυσκολία αυτή πηγάζει από το ότι επικεντρώνονται στην λειτουργική σημασία του συμβόλου και αγνοούν την σχεσιακή λειτουργία του. Ωστόσο, μια σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου είναι απαραίτητη, διότι αποτελεί ένα στάδιο προετοιμασίας για την εισαγωγή στην άλγεβρα. Προς την κατεύθυνση αυτή έχουν κατά καιρούς δοκιμαστεί ερευνητικά μια σειρά από περιβάλλοντα, προκειμένου να ενισχυθεί η κατανόηση των μαθητών σχετικά με το σύμβολο της ισότητας και τη χρήση του. Στην εργασία αυτή προτείνεται το περιβάλλον των γρίφων mobile, οι οποίοι θα παρουσιαστούν με περισσότερη λεπτομέρεια παρακάτω. Το περιβάλλον αυτό έχει ήδη μελετηθεί ερευνητικά με μαθητές Δημοτικού (Papadopoulos, 2018). Εδώ το περιβάλλον αυτό δοκιμάζεται από φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος προκειμένου να δοθεί απάντηση στο εξής ερευνητικό ερώτημα:

- Με ποιον τρόπο το περιβάλλον των γρίφων mobile αποτελεί εργαλείο έκφρασης της κατανόησης και των γνώσεων των φοιτητών για το σύμβολο της ισότητας και τις ιδιότητές του στα πλαίσια της αλγεβρικής σκέψης;

ΤΙ ΛΕΕΙ Η ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για τους περισσότερους μαθητές η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα αποτελεί μεγάλη πρόκληση, καθώς συχνά δυσκολεύονται με τις εξισώσεις και απομνημονεύουν κανόνες χωρίς να κατανοούν τη λογική τους. Ένα μεγάλο μέρος των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν αφορά το σύμβολο της ισότητας, το οποίο βλέπουν μόνο ως λειτουργικό σύμβολο που τους προτρέπει να κάνουν κάτι (Carpenter, et al., 2003; Jones et al., 2013; Kieran, 1981, 2007). Για να μεταβούν από τη λειτουργική στη σχεσιακή κατανόηση του συμβόλου, χρειάζεται να αναπτύξουν μαθηματικές συνήθειες του μυαλού που σχετίζονται με την αλγεβρική σκέψη. Αυτές οι συνήθειες προηγούνται από τους κανόνες και τους τύπους οι οποίοι δεν προκύπτουν από την λογική των μαθητών. Αν η γνώση που παρέχεται στους μαθητές βασίζεται στη λογική τους, τότε θα μπορούν και να κατανοούν. O Goldenberg και οι συνεργάτες του (2015) δίνουν έμφαση στην ανάπτυξη από τους μαθητές αλγεβρικών συνηθειών του νου διαισθητικά, μέσα από μια σειρά λογικο-μαθηματικών-γρίφων. Στην έρευνα αυτή, ασχολούμαστε με μια κατηγορία τέτοιων γρίφων, τους γρίφους mobile, οι οποίοι σχετίζονται μεταξύ άλλων με μια συγκεκριμένη συνήθεια του μυαλού, την 'αναζήτηση και χρήση δομής', καθώς καλούνται οι μαθητές να ανακαλύψουν και να χρησιμοποιήσουν τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων. Κατακτώντας την οι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν τι σημαίνει πως ένα mobile ισορροπεί, ποιες είναι οι σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα που εξασφαλίζουν την ισορροπία αυτή και πως αυτές μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά. Η 'αναζήτηση και χρήση της δομής' συνδέεται με την πρώιμη αλγεβρική σκέψη η οποία μπορεί να προκύψει σε διάφορες μορφές μέσα στην τάξη (Blanton & Kaput, 2005).

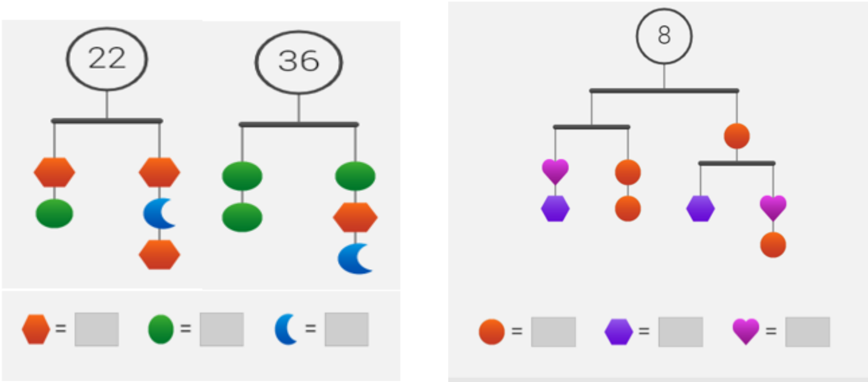
ΓΡΙΦΟΙ MOBILE

Ένας γρίφος mobile αναπαριστά πολλαπλές ισορροπημένες συλλογές αντικειμένων (Εικόνες 1, 2). Οι οριζόντιες ράβδοι είναι κρεμασμένες πάντα στη μέση με χορδές, επομένως αυτό σημαίνει ότι τα δύο άκρα κάθε ράβδου έχουν το ίδιο βάρος. Υποτίθεται ότι οι ράβδοι και οι χορδές δεν έχουν βάρος. Τα ίδια σχήματα σε ένα mobile έχουν το ίδιο βάρος, ενώ διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν ίσα ή διαφορετικά βάρη. Ένας γρίφος mobile αναπαριστά στην ουσία ένα σύστημα εξισώσεων με τη μορφή μιας εικόνας, που κάνει φανερή την δομή της υποκείμενης εξίσωσης ή του συστήματος εξισώσεων. Αυτό υποστηρίζει το λύτη στο να κατανοήσει τη λογική με την οποία είναι δομημένη η εξίσωση (ή το σύστημα), χωρίς να είναι απαραίτητο να ανατρέξει σε κανόνες και βήματα προκειμένου να πετύχει τη λύση. Για κάποιον ο οποίος είναι εξοικειωμένος με την άλγεβρα είναι εύκολο να λύσει το σύστημα εξισώσεων. Για κάποιον όμως που δεν είναι ούτε αρχάριος ούτε ειδικός, η επίλυση των συγκεκριμένων γρίφων μπορεί να αποτελέσει μια "διασκεδαστική" και προκλητική διαδικασία. (Goldenberg et al. 2015; Gulati, 2018).

Οι Papadopoulos et al. (2016) και Papadopoulos (2018), εργάστηκαν με μαθητές της έκτης τάξης με σκοπό να εξετάσουν εάν το συγκεκριμένο περιβάλλον ενθαρρύνει την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έφερε στο φως πέντε τύπους σκέψης, οι οποίοι δείχνουν πρώιμη αλγεβρική κατανόηση. Επιπλέον, η εργασία των μαθητών με τα mobile puzzles τους έδωσε τη δυνατότητα να επιδείξουν μια άτυπη γνώση των τυπικών κανόνων για την επίλυση εξισώσεων. Οι μαθητές δεν προτρέπονταν να σκεφτούν και να εργαστούν με βάση τους συγκεκριμένους κανόνες που ούτως ή άλλως αγνοούσαν. Ωστόσο, έκαναν χρήση αρκετά συχνά τέτοιων κανόνων, όπως η αντικατάσταση βαρών που είναι ισοδύναμα, η προσθήκη ή αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και στις δύο πλευρές, έχοντας ως στόχο την διατήρηση της ισορροπίας του mobile. Αυτή η διαδικασία έδειξε ότι υπάρχει μια διαισθητική χρήση συγκεκριμένων ιδιοτήτων των πράξεων και του συμβόλου της ισότητας, που στη συνέχεια θα εισαχθούν επίσημα ως αντιμεταθετική, προσεταιριστική και ανακλαστική ιδιότητα.

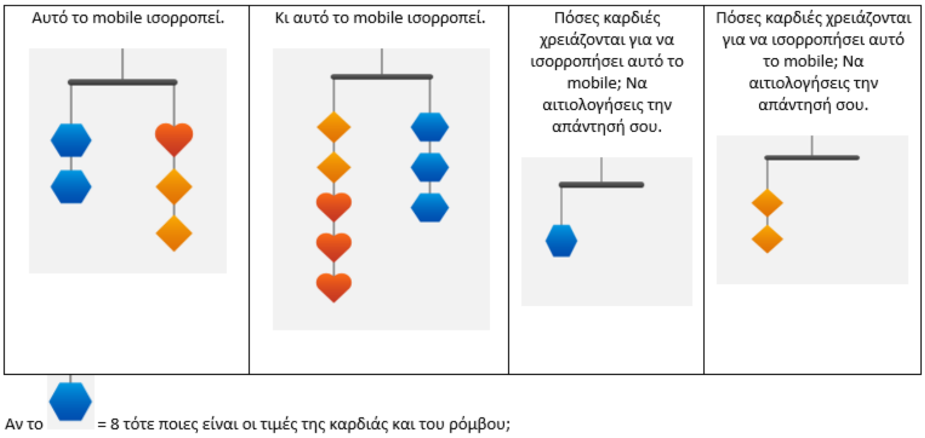
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα συμμετείχαν κατά μέσο όρο (μιας που ο αριθμός τους δεν ήταν σταθερός σε όλες τις συνεδρίες) 35 φοιτητές του 3ου και 4ου έτους του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η διάρκειά της ήταν πέντε εβδομάδες και οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν συνολικά 10 δραστηριότητες γρίφων mobile διαβαθμισμένης δυσκολίας. Οι φοιτητές εργάστηκαν ατομικά και τους ζητήθηκε όχι μόνο να λύσουν τον κάθε γρίφο αλλά και να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης και τα βήματα που ακολούθησαν. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν οι απαντήσεις των φοιτητών στα πέντε αυτά φύλλα εργασίας. Για την ανάλυσή τους χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της Θεματικής Ανάλυσης Περιεχομένου (Mayring, 2014). Η ανάλυση των φύλλων εργασίας οδήγησε στη δημιουργία ορισμένων κατηγοριών σχετικά με τους τρόπους επίλυσης που επέλεξαν οι φοιτητές, αλλά και τις ενέργειες που έλαβαν χώρα κατά τη διάρκεια επίλυσης. Η τελική ταξινόμηση εξετάστηκε και από δεύτερο ερευνητή. Για τις ανάγκες της εργασίας αυτής περιοριζόμαστε εδώ στην παρουσίαση τριών δραστηριοτήτων που όμως δίνουν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα του συνόλου των απαντήσεων που συλλέχθηκαν από ολόκληρη την έρευνα.



Εικόνα 1: Δραστηριότητες 1η και 2η

Στην πρώτη δραστηριότητα (Εικ. 1, αριστερά) έχουμε 2 mobile που ισορροπούν και το ζητούμενο είναι να βρεθεί το βάρος των τριών σχημάτων (εξάγωνο, κύκλος, μισοφέγγαρο). Στη δεύτερη δραστηριότητα (Εικ. 1, δεξιά) έχουμε ένα mobile σε ισορροπία και το ζητούμενο είναι πάλι το βάρος των σχημάτων που το απαρτίζουν.



Εικόνα 2: Δραστηριότητα 6η

Στην τρίτη δραστηριότητα (Εικ. 2), δίνονται δύο mobile, που ισορροπούν και με βάση αυτά οι λύτες πρέπει να εντοπίσουν πόσες καρδιές χρειάζεται να συμπληρώσουν στον δεξί κλάδο, σε καθένα από τα επόμενα δύο mobile, προκειμένου να ισορροπήσουν, και να βρουν την τιμή των δύο άγνωστων μεταβλητών (της καρδιάς και του ρόμβου), αν γνωρίζουν την τιμή του εξαγώνου.

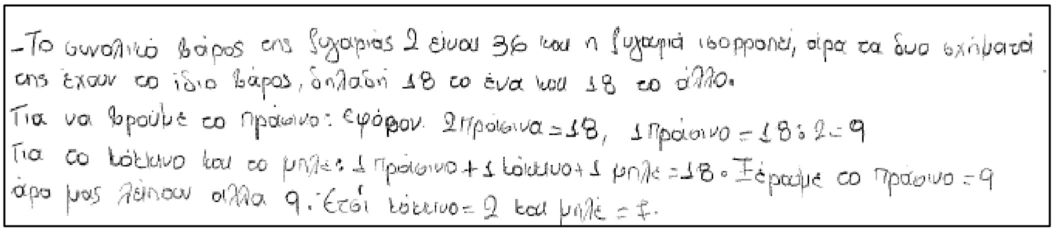
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η ανάλυση των δεδομένων οδήγησε σε δυο κατηγορίες ευρημάτων. Η πρώτη αφορά τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι συμμετέχοντες προκειμένου να φτάσουν στη λύση. Η δεύτερη αφορά τις επιμέρους ενέργειες των λυτών πάνω στα mobile προκειμένου να εφαρμόσουν τις στρατηγικές τους. Παρακάτω παρουσιάζουμε τα ευρήματα για κάθε κατηγορία.

Στρατηγικές επίλυσης

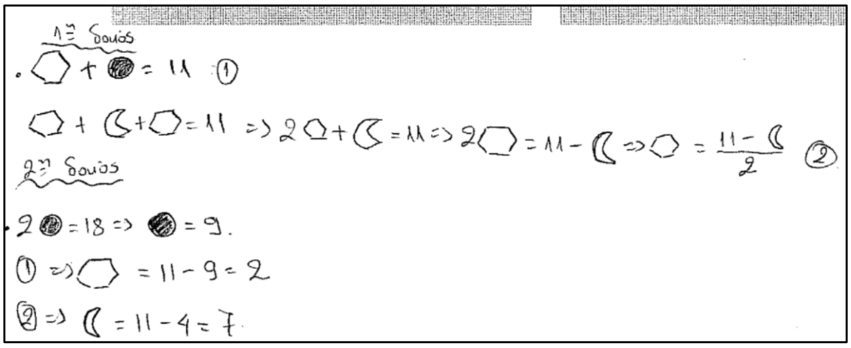
Συνολικά εντοπίστηκαν πέντε διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης των γρίφων mobile: α) κειμενική επίλυση β) εικονική, γ) αλγεβρική, δ) εξεικονιστική, και ε) συνδυαστική.

Ο *κειμενικός* τρόπος επίλυσης χαρακτηρίζεται από την αποκλειστική χρήση κειμένου και την παντελή απουσία κάθε είδους συμβολισμού στη λύση του γρίφου. Στο παράδειγμα της Εικ. 3 ο λύτης φτάνει στη λύση της 1ης δραστηριότητας περιγράφοντας κάθε βήμα με κείμενο χωρίς χρήση κάποιου αλγεβρικού συμβολισμού.


-Το συνολικό βάρος της ζυγαριάς 2 είναι 36 και η ζυγαριά ισορροπεί, άρα τα δυο σχήματα της έχουν το ίδιο βάρος, δηλαδή 18 το ένα και 18 το άλλο.
Για να βρούμε το πράσινο: εφόσον 2πράσινα=18, 1πράσινο=18:2=9
Για το κόκκινο και το μπλε: 1 πράσινο+1 κόκκινο+1 μπλε=18. Ξέρουμε το πράσινο=9 άρα μας λείπουν άλλα 9. Έτσι κόκκινο=2 και μπλε=7.

Εικόνα 3: Κειμενικός τρόπος επίλυσης

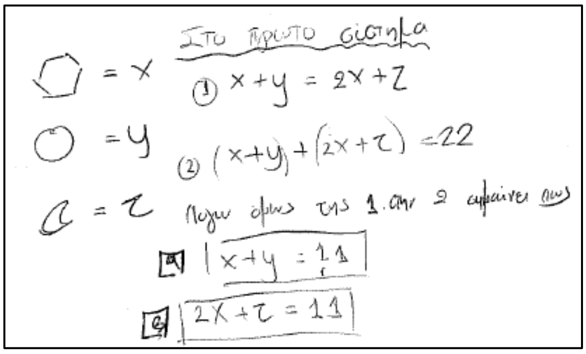
Κατά τον *εικονικό* τρόπο επίλυσης μεταφράζεται η ισορροπία του mobile σε σχέσεις, με χρήση των εικονιδίων που υπάρχουν ενσωματωμένα στο σύστημα και τα οποία αξιοποιούν για τη λύση τους.



Εικόνες 4: Εικονικός τρόπος επίλυσης

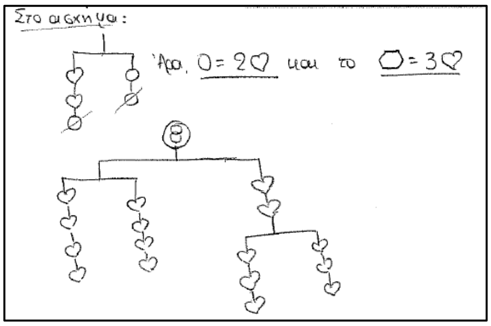
Για την πρώτη δραστηριότητα ο λύτης αρχικά μετάφρασε την εικόνα σε σύστημα εξισώσεων με τη χρήση των εικονιδίων (Εικ. 4) και στη συνέχεια με τα εικονίδια να παίζουν τον ρόλο των μεταβλητών, εργάζεται προκειμένου να φτάσει στη λύση.

Στον *αλγεβρικό* τρόπο επίλυσης περιλαμβάνονται οι απαντήσεις που δείχνουν δεξιότητα στον χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων και παραστάσεων. Το χαρακτηριστικό γνώρισμα είναι ότι οι λύτες χρησιμοποιούν γράμματα για να αναπαραστήσουν τις οντότητες στο γρίφο που παίζουν το ρόλο των μεταβλητών. Έτσι, στη συνέχεια κάνουν χρήση τεχνικών που φαίνεται πως ήδη γνωρίζουν για την αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης ή του συστήματος εξισώσεων (Εικ. 5).



Εικόνες 5: Αλγεβρικός τρόπος επίλυσης

Στην *εξεικονιστική* στρατηγική επίλυσης οι λύτες έκαναν χρήση των εικονιδίων του συστήματος, ενταγμένων όμως στο mobile, δείχνοντας όχι τη σειρά των παρεμβάσεων που κάνουν στο σύστημα (όπως γίνεται όταν χρησιμοποιούνται τα εικονίδια του συστήματος που είδαμε πιο πριν), αλλά παρουσιάζοντας κάθε φορά την συνολική κατάσταση του συστήματος μετά την παρέμβασή τους ως μια νέα εικόνα, απεικονίζοντας ουσιαστικά τα διακριτά βήματα και όχι την αναλυτική πορεία της επίλυσης (Εικ. 6).

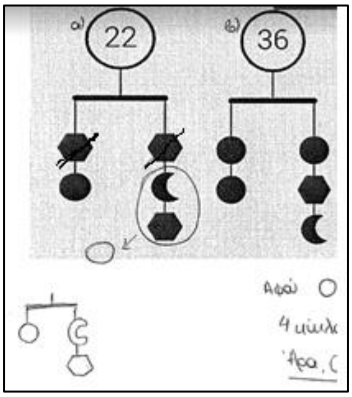


Εικόνα 6: Εξεικονιστικός τρόπος επίλυσης

Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις προέκυψαν όχι μόνο από την αποκλειστική χρήση μιας στρατηγικής, αλλά μέσα από έναν συνδυασμό δύο ή και τριών από αυτές. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για *συνδυαστικό* τρόπο επίλυσης.

Ενέργειες επέμβασης των λυτών στο σύστημα

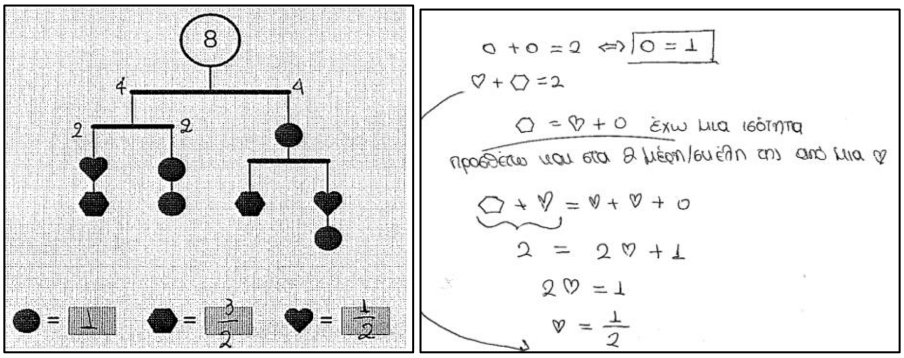
Εξίσου σημαντικός με τον τρόπο επίλυσης της δραστηριότητας είναι και ο τρόπος με τον οποίο επεμβαίνουν οι συμμετέχοντες πάνω στο σύστημα, διατηρώντας όμως πάντα την ισορροπία του. Έτσι, γίνεται φανερή μια άτυπη χρήση αυτών που αργότερα θα εισαχθούν στους λύτες ως τα τυπικά βήματα της επίλυσης εξισώσεων.



Εικόνα 7: Διαγραφή και αντικατάσταση

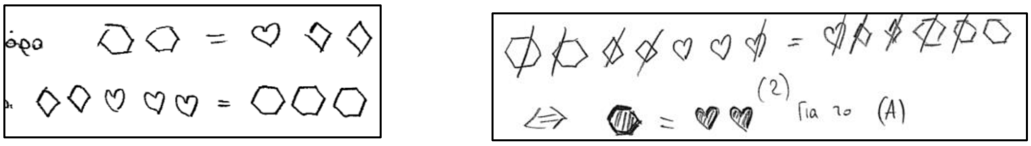
Στην Εικ. 7, παρατηρούμε ότι ο λύτης στην προσπάθειά του να λύσει τον γρίφο αρχικά, στο αριστερό mobile, αποφασίζει να διαγράψει ένα εξάγωνο και από τους δυο κλάδους του mobile με τη σιγουριά ότι η ισορροπία θα διατηρηθεί. Εφαρμόζει λοιπόν την αρχή ότι *σε μια ισότητα μπορούμε να αφαιρέσουμε και από τα δυο μέλη της την ίδια ποσότητα*. Στη συνέχεια εντοπίζει την σχέση που παραμένει μετά τη διαγραφή προκειμένου να αντικαταστήσει, όπως φαίνεται και στην Εικ. 7, το ζευγάρι κύκλος-εξάγωνο με το ισοδύναμό του βάρος του κύκλου, κάτι που παραπέμπει στην γνωστή μας αντικατάσταση σε μια διαδικασία επίλυσης εξίσωσης, *όπου αντικαθιστούμε μια ποσότητα με μια ισοδύναμή της*. Η ιδέα της *αντικατάστασης* ως μεθόδου επίλυσης εξίσωσης, ώστε σταδιακά να μειώνουμε τον αριθμό των αγνώστων, αποτυπώνεται επίσης πολύ καθαρά πιο πάνω στην Εικ. 6. Εκεί ο λύτης αρχικά αντικαθιστά στο αριστερό mobile το εξάγωνο με μια καρδιά και έναν κύκλο (σχέση που προκύπτει από το δεξί επιμέρους mobile). Εφαρμόζει στο αριστερό mobile την ιδιότητα της διαγραφής και έτσι προκύπτει η νέα σχέση 1καρδιά = 2κύκλοι. Αντικαθιστά αυτήν τη σχέση στο δεξί mobile για να πάρει την επόμενη σχέση 1εξάγωνο=3κύκλοι. Τέλος, αντικαθιστά και τις δυο αυτές μεταβλητές στο αρχικό mobile προκειμένου μέσω της *μεθόδου της αντικατάστασης* να καταλήξει σε μια εξίσωση με έναν άγνωστο (την καρδιά).

Στη δεύτερη δραστηριότητα ένας λύτης αρχικά εντόπισε κάποιες αριθμητικές σχέσεις, όπως ότι στον αριστερό κλάδο ισχύει 1καρδιά + 1εξάγωνο = 2 (Εικ. 8). Στη συνέχεια για τον δεξί κλάδο φτάνει στη σχέση εξάγωνο = καρδιά + κύκλος. Τότε, για να εκμεταλλευθεί τις αριθμητικές σχέσεις που είχε εντοπίσει *προσθέτει* μια καρδιά και *στα δυο μέλη της* τελευταίας *εξίσωσης*: εξάγωνο + καρδιά = καρδιά + καρδιά + κύκλος. Κάτι τέτοιο δεν επηρεάζει την τοπική ισορροπία η οποία θα συνεχίσει να υφίσταται. Αυτό όμως τον βοηθά να δημιουργήσει στα αριστερά της τελευταίας εξίσωσης την παράσταση ‘εξάγωνο + καρδιά’ για την οποία γνωρίζει το αριθμητικό της ισοδύναμο που είναι 2.



Εικόνα 8: Προσθέτω και στα δυο μέλη τον ίδιο αριθμό

Τέλος, μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση άτυπης εφαρμογής των τυπικών βημάτων για την επίλυση εξισώσεων είναι η περίπτωση της *πρόσθεσης κατά μέλη*. Στην τρίτη δραστηριότητα όπου δίνονται δυο συστήματα σε ισορροπία και ζητείται για τα επόμενα δυο να βρεθεί ο αριθμός οντοτήτων (καρδιές) που χρειάζεται ώστε και αυτά να ισορροπούν μια από τις λύσεις ακολούθησε την εξής πορεία:



Εικόνα 9: Προσθέτω εξισώσεις κατά μέλη

Αρχικά μεταφράζεται η ισορροπία των δυο συστημάτων σε μορφή εικονικής εξίσωσης (Εικ. 9, πάνω). Στη συνέχεια ο λύτης προσθέτει κατά μέλη τις δυο αυτές εξισώσεις (Εικ. 9, κάτω) και φτάνει στη σχέση: 2 εξάγωνα + 2 ρόμβοι + 3καρδιές = 3εξάγωνα + 1καρδιά + 2ρόμβοι. Η νέα αυτή ισορροπία εξακολουθεί να διατηρείται αν απομακρυνθούν ίσα βάρη και από τα δυο σκέλη. Έτσι αποφασίζει να απομακρύνει (*ιδιότητα διαγραφής*) 2 εξάγωνα, 2 ρόμβους και 1 καρδιά. Αυτό οδηγεί στην σχέση 1εξάγωνο = 2καρδιές που είναι και η απάντηση για το πρώτο από τα δυο ζητούμενα της δραστηριότητας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Προφανώς για κάποιον ο οποίος έχει το απαραίτητο αλγεβρικό υπόβαθρο, φαίνεται πως το συγκεκριμένο περιβάλλον δεν αποτελεί εργαλείο έκφρασης της αλγεβρικής του σκέψης, μιας που είναι σε θέση να την εκφράσει με τη χρήση της αλγεβρικής γλώσσας των συμβόλων. Για το μεγαλύτερο κομμάτι των συμμετεχόντων όμως, λειτούργησε ως διευκολυντής που τους έδωσε τη δυνατότητα να ανακαλύψουν και να εκφράσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές και να εργαστούν σε ένα πλαίσιο, που εκ πρώτης όψεως δεν κάνει επίκληση στην τυπική αλγεβρική σκέψη. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν για την έρευνα αυτή, δίνουν ενδείξεις ότι πράγματι το συγκεκριμένο περιβάλλον των γρίφων, έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας ως μια σχέση ισοδυναμίας. Αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι έδωσε την δυνατότητα στους συμμετέχοντες, που δεν φάνηκαν τόσο εξοικειωμένοι με την αλγεβρική επίλυση, να μεταφράσουν την εικόνα σε ισοδύναμες σχέσεις και να τις εκφράσουν με διαφορετικούς τρόπους πέρα από τον αλγεβρικό, όπως ο κειμενικός, ο εικονικός, ο εξεικονιστικός και ένας συνδυασμός τους.

Από την άλλη, το περιβάλλον επέτρεψε στους λύτες να παρέμβουν στο σύστημα ισορροπίας των mobile και να το τροποποιήσουν με στόχο πάντα τη διατήρηση της ισορροπίας. Μια μαθηματική μετάφραση αυτών των παρεμβάσεων δείχνει ότι πρόκειται για άτυπη εφαρμογή τυπικών κανόνων, που εφαρμόζονται στην αλγεβρική επίλυση εξισώσεων ή συστημάτων εξισώσεων. Έτσι, οι λύτες αντικατέστησαν μια ποσότητα με μια ισοδύναμή της, πρόσθεσαν και στα δυο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό ή αφαίρεσαν και από τα δυο μέλη την ίδια ποσότητα, πρόσθεσαν κατά μέλη εξισώσεις, και εφάρμοσαν τη μέθοδο της αντικατάστασης για να μειώσουν τον αριθμό των αγνώστων προκειμένου να λύσουν μια εξίσωση.

Συγκριτικά με την αντίστοιχη έρευνα με μαθητές της Στ Δημοτικού φαίνεται πως η δυναμική του περιβάλλοντος είναι εξ ίσου ενθαρρυντική και στην περίπτωση των μελλοντικών δασκάλων μιας που εντοπίστηκαν νέες στρατηγικές (πχ η εξεικονιστική και η αλγεβρική προσέγγιση, που δεν είχαν εντοπιστεί στους μικρούς μαθητές). Έτσι, τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε επόμενες έρευνες, με στόχο αρχικά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης με τις άλλες δύο βαθμίδες και την προηγούμενη βιβλιογραφία. Επιπλέον, μπορεί να ερευνηθεί το πώς οι διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης των γρίφων, μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο συζήτησης και διαπραγμάτευσης μεταξύ των φοιτητών στο πλαίσιο της εκπαίδευσης των μελλοντικών δασκάλων. Τέλος, μπορεί να συνδεθεί η κατανόηση της ισότητας από τους φοιτητές μέσα από το συγκεκριμένο περιβάλλον, με το σχεδιασμό διδασκαλίας στα μαθηματικά του Δημοτικού που αξιοποιεί το ίδιο περιβάλλον.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Behr, M. J., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*(1), 13-15.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, *36*(5), 412-446.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Goldenberg, E. P., Mark, J., Kang, J. M., Fries, M. K., Carter, C. J., & Cordner, T. (2015). *Making sense of algebra: Developing students' mathematical habits of mind*. Heinemann.

Gulati, S. (2018). Mobile puzzles–making sense of variables and equations. *At Right Angles*, *7*(3), 63-68.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 34-39.

Kieran, C. (1981). 'Concepts associated with the equality symbol', *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. InF. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). National Council of Teachers of Mathematics.

Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution.* Klangenfurt. Beltz

Papadopoulos, I. (2018). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Papadopoulos, I., Kindini, T., & Tsakalaki, X. (2016). Using mobile puzzles to develop algebraic thinking. In Csikos, C., et al. (eds.), *Proceedings 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 43−50). PME.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΑΙΔΙΑ Δ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Βασιλά Κατερίνα, Δεσλή Δέσποινα

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

basilakaterina@yahoo.gr, ddesli@eled.auth.gr

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μιας διδακτικής παρέμβασης που είχε ως στόχο την καλλιέργεια του στατιστικού συλλογισμού σε μαθητές της Δ΄ τάξης με έμφαση στην ανάπτυξη των ικανοτήτων τους στην ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων. Η διδακτική παρέμβαση βασίστηκε στα πλαίσια GAISE (2016) και FIBA (Skoumpourdi, 2017) και συμφωνεί με τους στόχους του ισχύοντος (2003) και του νέου αναλυτικού προγράμματος σπουδών (2011) για τα Μαθηματικά. Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι τα παιδιά που συμμετείχαν, παρουσίασαν στατιστικά σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις τους τόσο στην ερμηνεία όσο και την κατασκευή εικονογράμματος και ραβδογράμματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών για τα Μαθηματικά, η διδασκαλία της στατιστικής εντάσσεται από τα πρώτα χρόνια του δημοτικού σχολείου. Σύμφωνα με τους Franklin και Bargagliotti (2020), είναι αναγκαία η προετοιμασία των παιδιών για έναν κόσμο που σηματοδοτείται από τις πληροφορίες καθώς θα πρέπει να αποκτήσουν την ικανότητα κατανόησης και διαχείρισης των πληροφοριών με τα διαθέσιμα εργαλεία της στατιστικής, ώστε να καταλήγουν σε λογικές αποφάσεις για τα παγκόσμια ζητήματα. Η διδασκαλία των γραφικών παραστάσεων «ικανοποιεί» την παγκοσμιοποιημένη τάση οπτικοποίησης του κόσμου, με σκοπό την κατάκτηση της μέγιστης δυνατής γνώσης, καθώς καθιστούν το μαθησιακό-επιστημονικό-στατιστικό υλικό ελκυστικό, ενδιαφέρον και κατανοητό, και λειτουργούν ως επιστημολογικό και παιδαγωγικό εργαλείο (van Garderen, Scheuermann, & Poch, 2014; Hegarty & Kozhevnikov, 1999).

Υπό το πρίσμα αυτό, οι περισσότερες έρευνες επικεντρώνονται στη διερεύνηση των ικανοτήτων και των δυσκολιών που παρουσιάζουν τα παιδιά στην ερμηνεία και την κατασκευή γραφικών παραστάσεων. Από αυτές, διαφαίνεται ότι τα παιδιά συναντούν δυσκολία στην ερμηνεία εικονογράμματος η οποία εντοπίζεται κυρίως στην κατανόηση ότι μία ποσότητα αναπαρίσταται με μία εικόνα (Wu, 2004). Αντίστοιχα, τα παιδιά συχνά δεν είναι σε θέση να ερμηνεύσουν ένα ραβδόγραμμα, καθώς δεν κατανοούν πάντα το εύρος των τιμών που αναπαριστά μία ράβδος (Whitaker & Jacobbe, 2017; Lee & Meletiou-Mavrotheris, 2003), ενώ και στα δύο είδη γραφικών παραστάσεων τα παιδιά παρουσιάζουν δυσκολία στην ερμηνεία του συνόλου των δεδομένων εστιάζοντας σε μεμονωμένα χαρακτηριστικά τους (Glazer, 2011; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990). Ως εκ τούτου, αδυνατούν να επιχειρηματολογήσουν για τις απαντήσεις τους σε ερμηνευτικές ερωτήσεις, να βγάλουν συμπεράσματα και να διατυπώσουν υποθέσεις ή προβλέψεις. Συχνά επίσης εντοπίζονται δυσκολίες των παιδιών να ακολουθήσουν τις «γραφικές συμβάσεις» των δύο γραφικών παραστάσεων παραλείποντας ετικέτες και τίτλους (Wu, 2004). Επιπλέον, η «μεταφορά» των δεδομένων από και προς τον πίνακα συχνοτήτων καθώς και η «μεταφορά» δεδομένων μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων (εικονογράμματος και ραβδογράμματος) φαίνεται να δυσκολεύει τα παιδιά (Χριστοδούλου & Ηλία, 2013).

Πολύ περιορισμένα είναι, ωστόσο, τα ερευνητικά ευρήματα αναφορικά με τα αποτελέσματα που μπορεί να προσφέρει μία διδακτική παρέμβαση στην κατανόηση και στις επιδόσεις των παιδιών. Η διδακτική παρέμβαση που προτείνεται στην παρούσα εργασία έχει ως στόχο την καλλιέργεια του στατιστικού συλλογισμού σε παιδιά της Δ΄ τάξης και την ανάπτυξη των ικανοτήτων τους στην ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων. Με τον τρόπο αυτόν, η παρούσα έρευνα επιδιώκει να συμβάλει στην αναζήτηση νέων καινοτόμων προσεγγίσεων αναφορικά με τη διδασκαλία εννοιών στατιστικής στα μικρά παιδιά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Η έρευνα διεξήχθη σε δημοτικό σχολείο της Αττικής στην οποία συμμετείχαν 51 μαθητές/τριες δύο τμημάτων της Δ΄ τάξης. Η επιλογή των συγκεκριμένων τμημάτων έγινε με βολική δειγματοληψία και τυχαία ως προς την επιλογή της πειραματικής ομάδας (N=26) και της ομάδας ελέγχου (N=25). Η διδακτική παρέμβαση στην πειραματική ομάδα πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια, ενώ στην ομάδα ελέγχου τη διδασκαλία των εννοιών της στατιστικής πραγματοποίησε η εκπαιδευτικός της τάξης η οποία, ακολουθώντας το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (2003) για τα Μαθηματικά (2003), χρησιμοποίησε τα σχολικά εγχειρίδια του οργανισμού.

Σχεδιασμός-εργαλείο μέτρησης. Πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα με οιονεί-πειραματικό σχεδιασμό ο οποίος κάλυπτε τρία στάδια: προ-έλεγχο, διδακτική παρέμβαση και μετά-έλεγχο.

Προκειμένου να διερευνηθεί η επίδοση των παιδιών στην ερμηνεία εικονογράμματος καθώς και στην κατασκευή και ερμηνεία ραβδογράμματος, σχεδιάστηκε τεστ το οποίο παρουσιάστηκε ίδιο στον προ-έλεγχο και τον μετά-έλεγχο. Το τεστ περιελάμβανε τέσσερις δοκιμασίες, με περιεχόμενο από καταστάσεις καθημερινής ζωής. Στην πρώτη δοκιμασία δόθηκαν στους συμμετέχοντες οι απαντήσεις παιδιών αναφορικά με το αγαπημένο τους φρούτο και τους ζητήθηκε να προτείνουν τρόπους οργάνωσης αυτών των δεδομένων. Στη συνέχεια, κλήθηκαν να συμπληρώσουν τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων και να απαντήσουν σε τέσσερις ερωτήσεις που έλεγχαν την ερμηνεία και κατανόηση των αποτελεσμάτων (π.χ., 'πόσα περισσότερα παιδιά προτιμούν το μήλο από το πορτοκάλι'). Στη δεύτερη δοκιμασία δόθηκε στους συμμετέχοντες ένα εικονόγραμμα με τις απαντήσεις παιδιών για το μεταφορικό μέσο που χρησιμοποιούν για να μεταβούν στο σχολείο τους και κλήθηκαν να απαντήσουν σε τέσσερις ερωτήσεις που εξέταζαν την ερμηνεία της γραφικής παράστασης (π.χ., 'ποιο μεταφορικό μέσο χρησιμοποιούν περισσότερο/λιγότερο τα παιδιά για να πάνε στο σχολείο'). Στην τρίτη δοκιμασία δόθηκε στους συμμετέχοντες ένας πίνακας συχνοτήτων με απαντήσεις παιδιών για το αγαπημένο τους φαγητό και τέσσερα ραβδογράμματα εκ των οποίων μόνο το ένα απεικόνιζε σωστά τα δεδομένα του πίνακα. Οι συμμετέχοντες έπρεπε αρχικά να αναγνωρίσουν το σωστό ραβδόγραμμα και στη συνέχεια να αιτιολογήσουν την επιλογή τους. Στην τελευταία δοκιμασία δόθηκε στους συμμετέχοντες ένας πίνακας συχνοτήτων με απαντήσεις παιδιών για τις ώρες του ελεύθερου χρόνου τους και κλήθηκαν οι συμμετέχοντες να κατασκευάσουν ένα ραβδόγραμμα.

Διαδικασία. Οι συμμετέχοντες της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου απάντησαν ατομικά στο τεστ στο πλαίσιο μίας διδακτικής ώρας. Δεν δόθηκαν διευκρινήσεις και τα παιδιά διασφαλίστηκαν ότι θα διατηρηθεί η ανωνυμία τους καθώς η διαδικασία δεν αποτελούσε μέρος της τυπικής αξιολόγησής τους.

Η διδακτική παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση στόχευε στην καλλιέργεια της ικανότητας των παιδιών για ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων και περιελάμβανε τρεις ενότητες. Οι στόχοι κάθε ενότητας εντάσσονταν στην επόμενη ως «σκαλωσιά». Συγκεκριμένα, η πρώτη ενότητα εστίαζε στην ανάδειξη της αναγκαιότητας συλλογής και οργάνωσης δεδομένων καθώς και στην κατασκευή και την ερμηνεία πίνακα συχνοτήτων. Η δεύτερη ενότητα ξεκινούσε με την επανάληψη των εννοιών της προηγούμενης ενότητας και επικεντρωνόταν στην αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων σε κάθετο και οριζόντιο εικονόγραμμα με τη χρήση ακόμα και δύο τιμών σε μία μεταβλητή. Η τρίτη ενότητα, αφού υπενθύμιζε τις έννοιες των δύο προηγούμενων ενοτήτων, εστίαζε στην επέκταση των γνώσεων αναφορικά με την αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων σε οριζόντιο και κάθετο ραβδόγραμμα με τη χρήση ακόμα και δύο τιμών σε μία μεταβλητή.

Η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε στην πειραματική ομάδα ήταν σύμφωνη τόσο με τους στόχους του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος σπουδών του 2003 όσο και με τους στόχους του νέου αναλυτικού προγράμματος σπουδών του 2011 και δομήθηκε με βάση το πλαίσιο GAISE (2016) και το πλαίσιο FIBA (Skoumpourdi, 2017) [1], τα οποία εξυπηρετούν τόσο τους διδακτικούς όσο και τους παιδαγωγικούς στόχους της παρέμβασης. Το πλαίσιο GAISE εισηγείται έξι κατευθυντήριες προτάσεις για την ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης, χωρίς να προσδιορίζει την ηλικία των μαθητών (βλ. Πίνακα 1). Το πλαίσιο FIBA, το οποίο έχει προταθεί για τις ανάγκες της διερευνητικής μάθησης, ορίζει επτά στάδια σχεδιασμού δραστηριοτήτων (βλ. Πίνακα 1) που προωθούν τη διερευνητική μάθηση.

Η παρέμβαση διήρκησε 30 διδακτικές ώρες και περιελάμβανε 14 φύλλα δραστηριοτήτων καθώς και 3 φύλλα αξιολόγησης, καθένα από τα οποία χρησιμοποιήθηκε μετά από κάθε ενότητα, και 1 φύλλο αξιολόγησης που δόθηκε στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης. Κάθε δραστηριότητα αξιοποιήθηκε σε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών.

Οι δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης στη βάση του πλαισίου GAISE. Σύμφωνα με το πλαίσιο GAISE (2016), είναι αναγκαία η έμφαση στην ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης αλλά και η ενθάρρυνση της ενεργούς μάθησης μέσω της διερευνητικής διαδικασίας. Με βάση τις προτάσεις του πλαισίου, οι δραστηριότητες της παρέμβασης σχεδιάστηκαν με σκοπό την ανάδειξη της αναγκαιότητας συλλογής, αναπαράστασης και ερμηνείας δεδομένων μέσα από τη διεξαγωγή μικρών ερευνών (π.χ., πραγματοποίηση έρευνας για το αγαπημένο είδος λογοτεχνικών βιβλίων των παιδιών). Η πρόταση του πλαισίου που αναφέρεται στην εννοιολογική κατανόηση αξιοποιήθηκε με τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που στόχευαν στην ανάπτυξη των ικανοτήτων αλλά και των εμπειριών των παιδιών στην αναπαράσταση και στην ερμηνεία των δεδομένων με δύο είδη γραφικών παραστάσεων (εικονόγραμμα-ραβδόγραμμα) έτσι ώστε τα παιδιά να είναι σε θέση να επιλέγουν την κατάλληλη γραφική παράσταση για την έρευνά τους. Σε όλες τις δραστηριότητες της παρέμβασης χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα που αναφέρονται στην καθημερινή ζωή των παιδιών και στα ενδιαφέροντά τους (π.χ., προτίμηση πρωϊνού γεύματος), αξιοποιώντας με τον τρόπο αυτό την πρόταση του πλαισίου για ενσωμάτωση πραγματικών δεδομένων σε σενάρια διδασκαλίας. Κατά την ολοκλήρωση της παρέμβασης τα παιδιά επεξεργάστηκαν και άλλα είδη γραφικών παραστάσεων με τη χρήση του στατιστικού πακέτου (π.χ., SPSS) όπως προτείνεται από το πλαίσιο. Τέλος, σύμφωνα με το πλαίσιο είναι αναγκαία η χρήση δραστηριοτήτων αξιολόγησης. Ως εκ τούτου, με την ολοκλήρωση κάθε ενότητας σχεδιάστηκαν φύλλα αξιολόγησης για την ανατροφοδότηση της επίτευξης των διδακτικών στόχων.

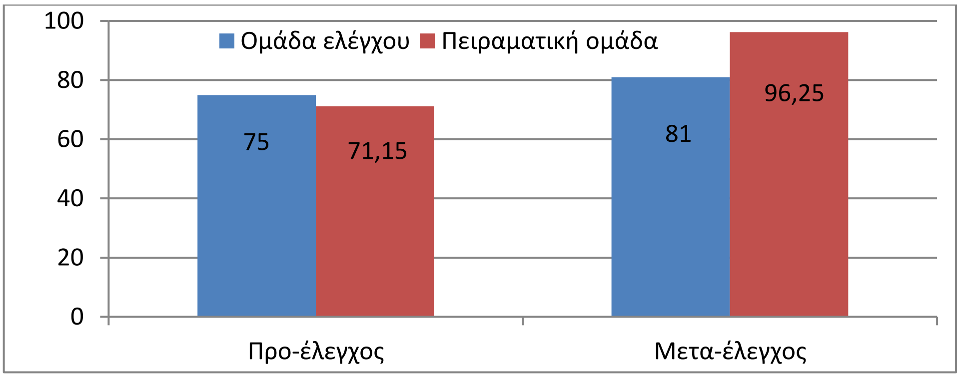
Πλαίσιο GAISE (2016)	Πλαίσιο FIBA (Skoumpourdi, 2017)
1. Έμφαση στη στατιστική σκέψη	1. Θέμα / Προβληματισμός στη βάση των εμπειριών των παιδιών
2. Εστίαση στην εννοιολογική κατανόηση	2. Εξερεύνηση του προβλήματος για την κατανόηση του
3. Ενσωμάτωση πραγματικών δεδομένων σε σενάρια διδασκαλίας	3. Παρουσίαση στρατηγικών επίλυσης
4. Ενθάρρυνση για ενεργό μάθηση	4. Σύνθεση / Σύνδεση των προτάσεων επίλυσης
5. Χρήση της τεχνολογίας για διερεύνηση εννοιών και ανάλυση δεδομένων	5. Γενίκευση / Μαθηματικοποίηση του τρόπου επίλυσης και διαμόρφωση μαθηματικής έννοιας
6. Χρήση δραστηριοτήτων αξιολόγησης	6. Μετάφραση του συμπεράσματος με άλλους τρόπους παρουσίασης
	7. Επέκταση του προβλήματος με τη δημιουργία νέων προβληματικών καταστάσεων

Πίνακας 1: Προτάσεις πλαισίου GAISE (2016) και στάδια πλαισίου FIBA (Skoumpourdi, 2017)

Οι δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης στη βάση του πλαισίου FIBA. Ακολουθώντας τα στάδια του πλαισίου FIBA, στο πρώτο στάδιο του *Προβληματισμού*, τα παιδιά εντάχθηκαν σε μία προβληματική κατάσταση μέσω ρεαλιστικού σεναρίου, όπως για παράδειγμα τη διεξαγωγή μιας έρευνας για το αγαπημένο τους μεταφορικό μέσο. Κατά το δεύτερο στάδιο της *Εξερεύνησης*, τα παιδιά διατύπωσαν ερωτήσεις και πρότειναν λύσεις για την οργάνωση, τη συλλογή και την παρουσίαση των δεδομένων. Για παράδειγμα, προτάθηκε από τα παιδιά η οργάνωση των δεδομένων με βάση τη συχνότητα των απαντήσεων. Στο τρίτο στάδιο της *Παρουσίασης*, τα παιδιά διατύπωσαν τρόπους παρουσίασης των δεδομένων που είχαν επιλέξει. Για παράδειγμα, στην έρευνα για το αγαπημένο μεταφορικό μέσο τα παιδιά πρότειναν την κατασκευή και την ερμηνεία πίνακα συχνοτήτων, αλλά και την παρουσίαση των δεδομένων με εικονόγραμμα. Στο επόμενο στάδιο της *Σύνδεσης/Σύνθεσης*, ο εκπαιδευτικός μαζί με τα παιδιά ομαδοποίησαν τις προτεινόμενες λύσεις και εξήγαγαν ένα συμπέρασμα για τους τρόπους παρουσίασης των δεδομένων. Στο πέμπτο στάδιο της *Γενίκευσης/Μαθηματικοποίησης*, η νέα γνώση (π.χ., η παρουσίαση δεδομένων με εικονόγραμμα) συνδέθηκε με τις προηγούμενες γνώσεις των παιδιών. Στο επόμενο στάδιο της *Μετάφρασης*, τα παιδιά παρουσίασαν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους σε άλλη τάξη με διαφορετικά μέσα παρουσίασης από αυτά που αρχικά είχαν επιλέξει. Για παράδειγμα, επέλεξαν διαφορετικές εικόνες αναπαράστασης στο εικονόγραμμα. Τέλος, στο στάδιο της *Επέκτασης*, τα παιδιά διατύπωσαν ερωτήματα σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης των αποτελεσμάτων τους σε άλλο είδος γραφικής παράστασης. Με τον τρόπο αυτό, δόθηκε η ευκαιρία για επέκταση της γνώσης αναφορικά με την κατασκευή και την ερμηνεία ραβδογράμματος.

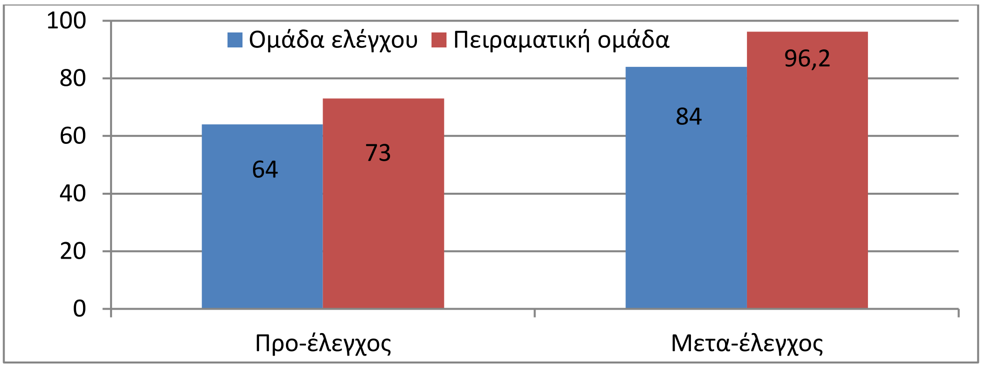
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Με σκοπό τη διερεύνηση των επιδόσεων των παιδιών στην ανάγνωση και ερμηνεία εικονογράμματος πριν και μετά την παρέμβαση, πραγματοποιήθηκε έλεγχος t-test για τις δύο ομάδες ξεχωριστά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μόνο τα παιδιά της πειραματικής ομάδας μετά τη διδακτική παρέμβαση, έχοντας μεγαλύτερη ευχέρεια στην ανάγνωση και την ερμηνεία της πληροφορίας που δίνεται από τη γραφική παράσταση, παρουσίασαν στατιστικά σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις τους ($t(25)=-3{,}844$, $p<.05$), ενώ οι επιδόσεις των παιδιών της ομάδας ελέγχου δεν φαίνεται να επηρεάστηκαν στατιστικά σημαντικά ($t(24)=-{,}625$, $p=.538$). Τα ποσοστά επιτυχίας για την ομάδα ελέγχου και για την πειραματική ομάδα παρουσιάζονται στο Σχήμα 1 που ακολουθεί.



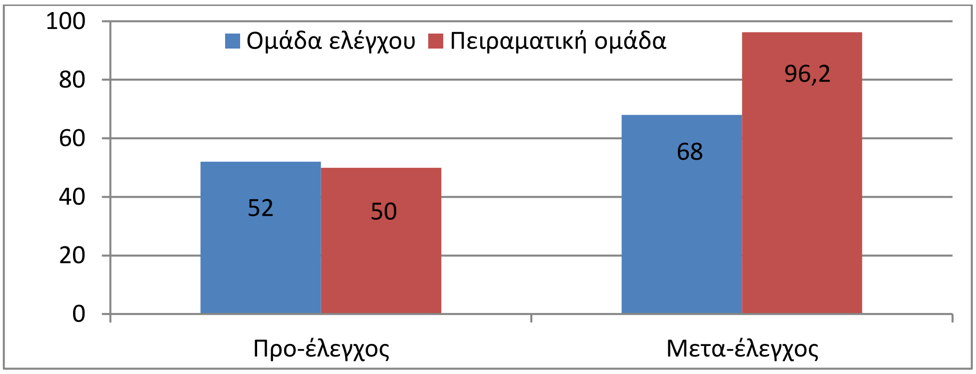
Σχήμα 1: Ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων στην ερμηνεία εικονογράμματος στον προ-έλεγχο και τον μετά-έλεγχο ως προς την ομάδα

Όταν εξετάστηκαν οι επιδόσεις των συμμετεχόντων στην ανάγνωση και ερμηνεία ραβδογράμματος πριν και μετά την παρέμβαση, βρέθηκε ότι οι τα παιδιά της πειραματικής ομάδας βελτίωσαν σημαντικά την επίδοσή τους μετά τη διδακτική παρέμβαση ($t(25)=-2{,}287$, $p<.05$). Ωστόσο, τα παιδιά της ομάδας ελέγχου οριακά δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοσή τους ανάμεσα στον προ-έλεγχο και τον μετά-έλεγχο ($t(24)=-2{,}000$, $p=.057$). Τα ποσοστά επιτυχίας των δύο ομάδων στην ερμηνεία ραβδογράμματος στο pre-test και στο post-test παρουσιάζονται στο Σχήμα 2 που ακολουθεί.



Σχήμα 2: Ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων στην ερμηνεία ραβδογράμματος στον προ-έλεγχο και τον μετά-έλεγχο ως προς την ομάδα

Αναφορικά με την επίδοση των συμμετεχόντων στην κατασκευή ραβδογράμματος, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά τόσο της πειραματικής ομάδας ($t(25)=-4{,}045$, $p<.05$) όσο και της ομάδας ελέγχου ($t(24)=-2{,}138$, $p<.05$) βελτίωσαν στατιστικά σημαντικά τις επιδόσεις τους μετά τη διδασκαλία σε σχέση με τις επιδόσεις τους πριν από τη διδασκαλία. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, η βελτίωση της πειραματικής ομάδας είναι πολύ μεγαλύτερη από τη βελτίωση της ομάδας ελέγχου.



Σχήμα 3: Ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων στην κατασκευή ραβδογράμματος στον προ-έλεγχο και στον μετά-έλεγχο ως προς την ομάδα

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση είχε ως στόχο την καλλιέργεια του στατιστικού συλλογισμού σε παιδιά της Δ΄ τάξης μέσω της ανάπτυξης ικανοτήτων τους στην ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι συμμετέχοντες της πειραματικής ομάδας σημείωσαν σημαντική βελτίωση στην ερμηνεία εικονογράμματος. Φαίνεται ότι οι εμπειρίες που απέκτησαν στις δύο μορφές του εικονογράμματος (οριζόντιου και κάθετου) κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, τους βοήθησαν να ξεπεράσουν τη δυσκολία που παρουσίασαν στον προ-έλεγχο όσον αφορά την ερμηνεία της συμβολικής μορφής της πληροφορίας και είναι πλέον σε θέση να ερμηνεύουν τα δεδομένα ενός εικονογράμματος, να βρίσκουν τις σχέσεις που τα συνδέουν και να κάνουν τις απαραίτητες συγκρίσεις για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Αξιοσημείωτη είναι και η βελτίωση που σημείωσαν οι συμμετέχοντες της πειραματικής ομάδας στην ερμηνεία και την κατασκευή ραβδογράμματος. Φαίνεται να έχουν κατακτήσει τόσο την ικανότητα αναπαράστασης των δεδομένων όσο και την ικανότητα επιλογής εκείνης της γραφικής παράστασης που απεικονίζει ορθά δεδομένα και είναι σε θέση να καταλήγουν σε συμπεράσματα ερμηνεύοντας την πληροφορία που τους δίνεται από τη γραφική παράσταση.

Στην παρούσα έρευνα υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις ότι η εφαρμογή των προτάσεων που παρέχονται από τα πλαίσια GAISE και FIBA σε μία διδακτική παρέμβαση μπορεί να επεκτείνει τον άτυπο στατιστικό συλλογισμό των παιδιών μέσα από την ενθάρρυνσή τους να οικοδομήσουν και αναδιοργανώσουν τις διαισθητικές τους αντιλήψεις για τις στατιστικές έννοιες. Η διερευνητική προσέγγιση που προτείνεται από τα δύο πλαίσια βοήθησε τα παιδιά να συμμετέχουν ενεργά στη συλλογή και την ανάλυση των δεδομένων και να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες της στατιστικής αναπτύσσοντας συγχρόνως τη στατιστική τους σκέψη. Η χρήση δεδομένων σε ρεαλιστικά σενάρια κέντρισαν το ενδιαφέρον των παιδιών δίνοντάς τους έτσι την ευκαιρία να συσχετίσουν τις έννοιες της στατιστικής με τις εμπειρίες της καθημερινής τους ζωής. Η διασύνδεση πολλαπλών γραφικών παραστάσεων ενίσχυσε την εμπειρία των παιδιών η οποία θεωρείται από τους σημαντικότερους παράγοντες ενίσχυσης τόσο των ερμηνευτικών όσο και των κατασκευαστικών ικανοτήτων των μαθητών (Arteaga, Batanero, Contreras & Canadas, 2012; Shah & Hoeffner, 2002). Τέλος, η άμεση ανατροφοδότηση διευκόλυνε τη μάθηση, επιτρέποντας στα παιδιά να διερευνήσουν, να κάνουν υποθέσεις, και ακολούθως εύκολα να ελέγξουν τις υποθέσεις αυτές βλέποντάς τις σε δράση.

Με δεδομένο ότι η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε μικρή ομάδα παιδιών, αναγνωρίζεται η ανάγκη εφαρμογής της σε περισσότερα παιδιά. Ενδιαφέρον θα έχει αφενός η διερεύνηση της συμβολής της διδακτικής παρέμβασης και σε άλλα είδη γραφικών παραστάσεων και αφετέρου η εφαρμογή περισσότερων διδακτικών παρεμβάσεων και η πραγματοποίηση συγκρίσεων ως προς την αποτελεσματικότητά τους.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Σημείωση 1, Οι τίτλοι των πλαισίων συνιστούν ακρωνύμια (GAISE: Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education και FIBA: Framework for designing and implementing Inquiry Based Activities).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., & Cañadas, G. (2002). Understanding statistical graphs: A research survey. *Boletin de Estadistica e Investigation Operativa, 28* (3), 261-277.

Franklin, C., & Bargagliotti, A. (2020). Introducing GAISE II: A guideline for precollege statistics and data science education. *Harvard Data Science Review Issue 2*. DOI: 10.1162/99608f92.246107bb

GAISE (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education. College report.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Retrieved April 13, 2021, from https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GaiseCollege_Full.pdf

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of the literature. *Studies in Science Education, 47*(2), 183-210.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

Lee, C., & Meletiou-Maurotheris, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Proceedings of the joint statistical meetings - Section on statistical education* (pp. 2326 – 2333). Alexandria, VA: American Statistical Association.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Δημοτικό), Νέο Σχολείο (Σχολείο 21ου αιώνα)*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Shah, P., & Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: Implications for instruction. *Educational Psychology Review, 14*(1), 47-69.

Skoumpourdi, C. (2017). A framework for designing inquiry-based activities (FIBA) for early childhood mathematics. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), Proceedings of *10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 1901-1908). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

van Garderen, D., Scheuermann, A., & Poch, A. (2014). Challenges students identified with a learning disability and as high-achieving experience when using diagrams as a visualization tool to solve mathematics word problems. *ZDM Mathematics Education, 46*, 135–149.

Whitaker, D., & Jacobbe, T. (2017) Students' understanding of bar graphs and histograms: Results from the LOCUS Assessments. *Journal of Statistics Education*, *25*(2), 90-102.

Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students understanding of statistical graphs. *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematics Education* (pp. 1-7). Copenhagen, Denmark.

Χριστοδούλου, Θ., & Ηλία, Ι. (2013). Οι δυσκολίες των μαθητών σε έργα μετάφρασης γραφικών παραστάσεων. Στο Α. Γαγάτσης, & Α. Φιλίππου (Επιμ.), *Πρακτικά 15ου Παγκύπριου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σελ. 101-118). Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

ΚΑΛΛΙΕΡΓΩΝΤΑΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΝΟΡΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΤΑΞΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

Καλογερία Ελισάβετ

PhD, 3ο Γυμνάσιο Αργυρούπολης

ekaloger@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία αναφέρεται σε διδασκαλία που σχεδιάστηκε και πραγματοποιήθηκε σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου, στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος 'Educate' και αφορούσε την ένταξη εννοιών της επιπεδομετρίας στον τρισδιάστατο χώρο. Η αναπαράσταση των εννοιών αυτών είτε ενσώματα, είτε με χρήση υλικών αντικειμένων καλλιεργήθηκε συστηματικά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και αποτέλεσε τον κυρίαρχο τρόπο προσέγγισης των ερωτημάτων. Η εισαγωγή αυτής της κοινωνικομαθηματικής νόρμας έδειξε να ευνοεί την αναγνώριση των εννοιών του επιπέδου μέσα στον χώρο, αλλά και του 'συμβατικού' τρόπου αναπαράστασής τους στο χαρτί, την εύρεση των μεταξύ τους σχέσεων και την εξαγωγή γενικευμένων συμπερασμάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία μελετά μια διδασκαλία που σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε στην τάξη στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος Educate, το οποίο είχε ως θέμα την «Ενίσχυση της Διαφοροποιημένης Διδασκαλίας και της Γνωστικής Ενεργοποίησης των Μαθητών στα Μαθηματικά Μέσω της Στήριξης της Εκπαίδευσης Εκπαιδευτικών». Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί σχεδίασαν και εφάρμοσαν στις τάξεις τους μια σειρά γνωστικά απαιτητικών δραστηριοτήτων (Stein & Lane, 1996, σ. 58-59), έχοντας παράλληλα κατά νου την υποστήριξη μαθητών με διαφορετικές μαθησιακές ανάγκες, ώστε όλοι οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα εμπλοκής σε έργα με μαθηματική πρόκληση. Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίχθηκαν θεωρητικά και πρακτικά μέσα από συνεδρίες στις οποίες συζητούσαν τις διδασκαλίες τους και ανέλυαν στιγμιότυπα με μαθηματική πρόκληση, τρόπους υποστήριξης των διαφορετικών μαθησιακών αναγκών, μεθόδους διαχείρισης των ομάδων, επιλογές ανακοίνωσης των διαφορετικών λύσεων στην ολομέλεια, καθώς και τις διαδικασίες εγκαθίδρυσης νέων νορμών στις τάξεις τους, που να υποστηρίζουν τους στόχους του προγράμματος. Σε αυτή την τελευταία συνιστώσα εστίασε η παρούσα εργασία, η οποία αναλύει μια διδασκαλία μέσα από το πρίσμα των κοινωνικομαθηματικών νορμών (Yackel & Cobb, 1996) που αναπτύσσονται κατά τη διάρκειά της. Αντικείμενο της διδασκαλίας είναι ο προσδιορισμός/αναγνώριση εννοιών και σχέσεων της επίπεδης γεωμετρίας πάνω σε έναν κύβο, από μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Ευρύτερος στόχος, ήταν η ένταξη εννοιών/σχέσεων της επίπεδης γεωμετρίας στον χώρο και η διαμόρφωση μιας πρότασης για τη διδασκαλία της Στερεομετρίας στις χαμηλότερες βαθμίδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με αντίστοιχη προσαρμογή των Προγραμμάτων Σπουδών (Π.Σ).

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η διδασκαλία της Στερεομετρίας στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα τοποθετείται στο τέλος της Β΄ Γυμνασίου και της Β΄ Λυκείου, ωστόσο σπάνια υλοποιείται, κυρίως λόγω στενότητας του διδακτικού χρόνου. Η σημασία της Στερεομετρίας υπογραμμίζεται στα Π.Σ., όμως οι εγγενείς δυσκολίες της καθιστούν εξαιρετικά δύσκολη τη διδασκαλία της. Η αναπαράσταση ενός 3D αντικειμένου μέσω ενός 2D σχήματος απαιτεί μια σειρά από σημαντικές συμβάσεις που δεν διδάσκονται στο σχολείο. Η απεικόνιση μιας ορθής γωνίας ως αμβλεία ή ως οξεία, μιας ισότητας τμημάτων ως άνισα, η σχεδιαστική διαφοροποίηση των ορατών στοιχείων ενός σχήματος στο χώρο από τα μη ορατά ανάλογα με την οπτική γωνία θέασης, είναι μόνο μερικά παραδείγματα αυτών των συμβάσεων, που έχουν ως συνέπεια μαθητές και ενήλικες να συναντούν μεγάλες δυσκολίες στη σχεδίαση 3D αντικειμένων.

Οι Pittalis & Christou (2010) επισημαίνουν τη διαφορά στη βιβλιογραφία ανάμεσα σε δύο αλληλένδετες ικανότητες, τις χωρικές και τις σχετιζόμενες με την τρισδιάστατη γεωμετρία (αναπαράσταση 3D αντικειμένων από 2D σχήματα, αναγνώριση στερεών και των στοιχείων τους, υπολογισμός εμβαδού/όγκου στερεών και σύγκριση ιδιοτήτων τρισδιάστατων σχημάτων) (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Η διδακτική ιδέα της παρούσας εργασίας εστιάζει περισσότερο στην ανάπτυξη των ικανοτήτων στην Στερεομετρία, ξεκινώντας από την εξοικείωση των μαθητών με τη δομή ενός στερεού, τις έννοιες του επιπέδου που ενσωματώνονται σε αυτό και τη διαφοροποίησή τους από μη ομοεπίπεδες έννοιες, χωρίς όμως την αναπαράστασή τους στο χαρτί από τους ίδιους τους μαθητές.

Στη διεθνή βιβλιογραφία αρκετές έρευνες υπογραμμίζουν τη σημασία ένταξης ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία της Στερεομετρίας, με στόχο τη βελτίωση της τρισδιάστατης απεικόνισης και αντίληψης μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες εφαρμογές (Christou et al, 2007), δραστηριότητες (Mithalal & Balacheff, 2019) και θεωρίες μάθησης της Γεωμετρίας (Zaranis & Exarchakos, 2018). Στην διδασκαλία που μελετάται στην παρούσα εργασία έγινε χρήση του Geogebra, ώστε οι μαθητές να έχουν μια ακόμα αναπαράσταση πέραν των κύβων που τους δόθηκαν.

Η εργασία με χειραπτικά υλικά και λογισμικό 3D, επέβαλαν την ανάγκη αναπαράστασης των εννοιών στον χώρο μέσα από κινήσεις του σώματος ή μέσω χρήσης άλλων υλικών αντικειμένων (μολύβια, χάρακες κλπ).

Ωστόσο, οι αναπαραστασιακές αυτές μέθοδοι δεν αποτελούν συνήθως μέρος της παραδοσιακής εργασίας στις μαθηματικές τάξεις και με αυτή την έννοια η χρήση τους απαιτεί μια πιο συστηματική μύηση των μαθητών σε αυτές. Συνεπώς, εδώ αναφερόμαστε σε μια πρώτη προσπάθεια εγκαθίδρυσης νορμών στην κατεύθυνση αυτή. Οι νόρμες (Yackel, 2001, Yackel & Cobb, 1996) συνδέονται με συλλογικότητες και περιγράφουν προσδοκίες και υποχρεώσεις κοινά αποδεκτές, που είτε έχουν διατυπωθεί και συμφωνηθεί, είτε προκύπτουν μέσα από τις καθημερινές πρακτικές. Επηρεάζουν τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων και συνδέονται στενά με τη γνωστική ανάπτυξή τους. Στην τάξη των μαθηματικών οι νόρμες που αναπτύσσονται μπορεί να είναι κοινωνικές (ΚΝ) ή/και κοινωνικομαθηματικές (ΚΜΝ). Μια συνήθης κοινωνική νόρμα είναι ότι οι λιγότερο ικανοί μαθητές διστάζουν να εκφράσουν τις δυσκολίες και τις πιθανές εναλλακτικές προσεγγίσεις τους, γεγονός στενά συνδεδεμένο με τους κανόνες και τις διαδικασίες που υιοθετεί ο εκπαιδευτικός. Οι ΚΜΝ αναφέρονται στις συνήθεις πρακτικές, τους επαναλαμβανόμενους τρόπους οργάνωσης και επικοινωνίας οι οποίοι επηρεάζουν την προσέγγιση της μάθησης που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί (όπως το τι θεωρείται διαφορετικό, εξεζητημένο, αποτελεσματικό και κομψό από μαθηματικής άποψης, τις αιτιολογήσεις που θεωρούνται αποδεκτές) (Yackel & Cobb, 1996), (Sullivan & Mousley, 2001). Για να διακρίνουμε τις ΚΝ από τις ΚΜΝ το παρακάτω παράδειγμα είναι διαφωτιστικό: κοινωνική νόρμα είναι ότι οι λύσεις των μαθητών πρέπει να αιτιολογούνται, όμως ποιες μαθηματικές αιτιολογήσεις θεωρούνται αποδεκτές είναι μια ΚΜΝ.

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω βιβλιογραφικά δεδομένα, καθώς και τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, στο οποίο οι έννοιες του επιπέδου δεν εντάσσονται σε κάποιο πλαίσιο (π.χ. χώρος), η παρούσα έρευνα στοχεύει στον προσδιορισμό εννοιών και σχέσεων του επιπέδου ως μέρος του χώρου (τομή/καθετότητα, παραλληλία) και στη διάκρισή τους από παραπλήσιες έννοιες (παράλληλες–ασύμβατες, κάθετες–ορθογώνιες) και μελετά τις νόρμες που αναδύονται στη διάρκεια της εφαρμογής στην τάξη.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Το πλαίσιο, ο στόχος και τα ερωτήματα της έρευνας

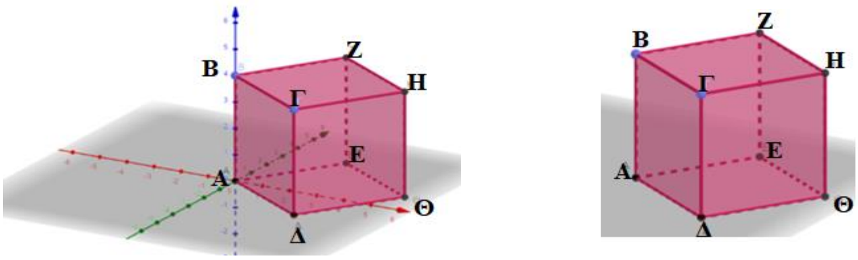
Η σύζευξη της γνωστικής ενεργοποίησης (δηλαδή, της ενασχόλησης των μαθητών σε έργα με μαθηματική πρόκληση) και της διαφοροποίησης ήταν η βασικότερη επιδίωξη του προγράμματος Educate. Στην διδασκαλία που αναφερόμαστε εδώ, η μαθηματική πρόκληση αναφέρεται κυρίως στην ένταξη και αναγνώριση εννοιών του επιπέδου, στον τρισδιάστατο χώρο (και συγκεκριμένα πάνω σε έναν κύβο). Για το σκοπό αυτό αναλύονται οι τρόποι με τους οποίους έρχεται στην επιφάνεια η μαθηματική πρόκληση σε ομάδες μαθητών με διαφορετική δυναμικότητα, εστιάζοντας στις ΚΜΝ που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η θέαση και αναγνώριση των εννοιών της επιπεδομετρίας ως μέρος του χώρου που μας περιβάλλει. Σε αυτό το διδακτικό πλαίσιο αλλάζουν οι νόρμες της τάξης; Ποιες νόρμες είναι οι πλέον εμφανείς και γιατί; Η συμμετοχή των διαφορετικών επιπέδων μαθητών αλλάζει μορφή και περιεχόμενο; Τα παραπάνω είναι μια σειρά ερωτημάτων που αναμένεται να προσεγγισθούν μέσα από την ανάλυση στιγμιότυπων του μαθήματος.

Τα δεδομένα και η μέθοδος ανάλυσης

Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε προς το τέλος της Α΄ Γυμνασίου, σε τμήμα 22 μαθητών, με διαφορετικά γνωστικά επίπεδα ως προς τα μαθηματικά και αρκετή εξοικείωση με το Geogebra (κατασκευές σχημάτων και εκτέλεση μικροπειραμάτων στον διαδραστικό πίνακα). Το μάθημα βιντεοσκοπήθηκε και απομαγνητοφωνήθηκε. Η ανάλυση εστίασε σε στιγμιότυπα που αναδύονται και επαναλαμβάνονται νέες μορφές συλλογισμού και αιτιολόγησης από πλευράς μαθητών, νέοι τρόποι διαχείρισης από πλευράς εκπαιδευτικού και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών.

Η δραστηριότητα

Οι μαθητές με βάση τη γενικότερη εικόνα τους στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, χαρακτηρίσθηκαν ως «υψηλών επιδόσεων» (Υ), «μέτριων επιδόσεων» (Μ) ή «χαμηλών επιδόσεων» (Χ) και χωρίσθηκαν σε διμελείς ομάδες με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς: (Υ, Υ), (Χ, Χ), (Υ, Χ), (Υ, Μ), (Μ, Μ) (Μ, Χ). Σε κάθε ομάδα δόθηκε ένας πραγματικός κύβος. Στον διαδραστικό πίνακα κατασκευάσθηκε από την εκπαιδευτικό ένα αρχείο Geogebra με τον κύβο, τον οποίο οι μαθητές μπορούσαν να περιστρέψουν



Εικόνα 1: Το σχήμα που δόθηκε στον διαδραστικό και στο Φύλλο Εργασίας

γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, να αυξομειώσουν την πλευρά του και να αλλάζουν διαρκώς την οπτική τους γωνία. Επίσης, στη διάθεσή τους υπήρχαν 2 laptops με το ίδιο αρχείο προς πειραματισμό. Στους μαθητές δόθηκε Φύλλο Εργασίας (Φ.Ε.) με το πρώτο σχήμα της Εικόνας 1, στο οποίο τους ζητήθηκε να βρουν: α) Ποια ευθύγραμμα τμήματα τέμνουν το τμήμα ΑΒ; β) Ποια από τα παραπάνω τμήματα είναι κάθετα στο ΑΒ; γ)

Ποια ευθύγραμμα τμήματα ΔΕΝ τέμνουν το τμήμα ΑΒ; και δ) Ποια από τα παραπάνω τμήματα είναι παράλληλα με το τμήμα ΑΒ. Στο δεύτερο σχήμα ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν και άλλα τμήματα του κύβου που να είναι κάθετα στο ΑΒ στο σημείο Β. Σε αυτό το σκέλος της δραστηριότητας η εκπαιδευτικός προέτρεψε τους μαθητές να πειραματισθούν με το Geogebra, ενώ στο πρώτο με τα στερεά που είχαν στη διάθεσή τους.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Στην ανάλυση που ακολουθεί περιγράφονται στιγμιότυπα από τις ‘επισκέψεις’ τις εκπαιδευτικού (Ε στη συνέχεια) στις ομάδες, τα διαφορετικά ζητήματα που έρχονται στην επιφάνεια και την αντίστοιχη διαχείρισή τους.

Μια πρώτη προσπάθεια καθιέρωσης νορμών: χρησιμοποιώντας αντικείμενα και δείχνοντας το σχήμα

Ξεκινώντας από ομάδα (Χ, Χ), η Ε δίνει προτεραιότητα στην κατανόηση των όρων που συνθέτουν το ερώτημα.

Ε: Ποιες τέμνουν το ΑΒ, τι σημαίνει «τέμνουν»;

Μαθητής: Ενώνουν, ενώνονται! Είναι το ΑΔ...

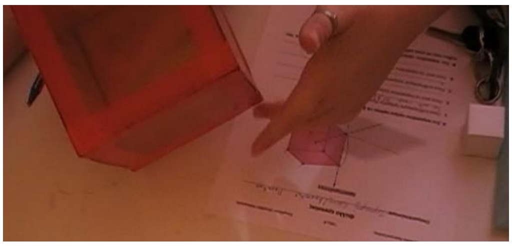
Η Ε τον συγχαίρει και τον διακόπτει ζητώντας του να δείξει και στο σχήμα και στον κύβο αυτά τα τμήματα, ο μαθητής τα δείχνει και συνεχίζει.

Μια «αταίριαστη» ομάδα: μιλάμε για τις έννοιες, τις «δείχνουμε» με το στυλό και πάνω στο στερεό.

Σε ομάδα (Υ, Χ), ο Υ βρίσκει με ευκολία τα τμήματα που τέμνουν το ΑΒ και ότι όλα είναι κάθετα σε αυτό, διακρίνοντας την καθετότητα σε δυο διαφορετικά επίπεδα (στο ΒΓΗΖ και στο ΑΔΘΕ). Η Χ, αναφέρει με ευκολία τα ορατά τμήματα που τέμνουν το ΑΒ και με κατάλληλη ερώτηση της Ε το μη ορατό ΑΕ. Ωστόσο, δεν μπορεί να διακρίνει την καθετότητα στο σχήμα και η Ε την παροτρύνει να δουλέψει με το στερεό.

Ε: Μπορείς να μου δείξεις πάνω στο στερεό το ΑΒ; (η μαθήτρια το δείχνει). Τώρα μπορείς να μου δείξεις ποια από τα τμήματα αυτά είναι κάθετα στο ΑΒ; (η μαθήτρια τα δείχνει όλα, Εικ.2).

Η περίπτωση της Χ αναδεικνύει δυο ειδών δυσκολίες: 1) την αποτύπωση της καθετότητας στο χαρτί (π.χ. η $\widehat{\Delta AB}$ φαίνεται ως αμβλεία και η $\widehat{ZB\psi'}$ ως οξεία), 2) την εύρεση σχέσεων μεταξύ τμημάτων που δεν είναι όλα ορατά (όπως το ΑΕ που βρίσκεται στην πίσω-μη ορατή πλευρά του κύβου). Η τοποθέτηση του στερεού στο χώρο, σε



Εικόνα 2: Από το στερεό στο χαρτί

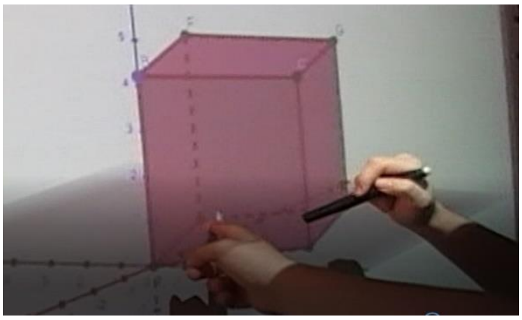
θέση που να προσομοιάζει με το σχήμα του Φ.Ε., βοήθησε να φανούν οι σχέσεις και οι συμβάσεις που εμπεριέχει η αποτύπωση στο επίπεδο.

Αναπαριστώντας το (μη ορατό) επίπεδο που ορίζουν δυο παράλληλες

Σε ομάδα (Μ, Μ) οι μαθήτριες δείχνουν τα τμήματα που δεν τέμνουν το ΑΒ και με ευκολία βρίσκουν τα ΓΔ και ΕΖ, δηλαδή αυτά που είναι παράλληλα με το ΑΒ και βρίσκονται σε μια από τις έδρες του κύβου. Εδώ φαίνεται ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν την παραλληλία όταν βλέπουν το επίπεδο που ορίζει το τμήμα με το ΑΒ. Η Ε δείχνει το ΗΘ, ρωτά «*αυτό είναι παράλληλο με το ΑΒ*;» και οι μαθήτριες αρχικά απαντούν διστακτικά ότι είναι. Στη συνέχεια αναπαριστούν με τα στυλό τους τα τμήματα και πολύ πιο σίγουρες απαντούν πως είναι. Η μη αποτύπωση του επιπέδου που ορίζουν οι ΑΒ, ΗΘ, δυσκόλεψε τις μαθήτριες, ωστόσο η αναπαράσταση με υλικά αντικείμενα φαίνεται και σε αυτή την περίπτωση να διευκόλυνε τη σκέψη τους.

«Δείχνοντας» στον διαδραστικό: Διάκριση παραλλήλων και ασυμβάτων με περιστροφή του στερεού – Η σημασία της έννοιας «ομοεπίπεδες»

Σε ομάδα (Υ, Υ), οι μαθητές με χρήση του διαδραστικού και περιστρέφοντας διαρκώς το σχήμα στο Geogebra, ταξινόμησαν εύκολα αυτές που ΔΕΝ τέμνουν το ΑΒ σε δυο κατηγορίες: α) αυτές που είναι παράλληλες με το ΑΒ και β) αυτές που δεν είναι παράλληλες με το ΑΒ αλλά και δεν τέμνονται με αυτό. Σε ερώτηση της Ε «*τι χαρακτηριστικό έχουν αυτές που είναι παράλληλες από αυτές που δεν είναι*» οι μαθητές έδειξαν με τα μολύβια τους στο σχήμα ότι οι πρώτες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, ενώ οι άλλες «*δεν μπορούν να είναι στο ίδιο επίπεδο*», αναπαριστώντας με τα μολύβια τους την εικόνα δυο ασυμβάτων, καθώς περιέστρεφαν το στερεό (Εικ.3).

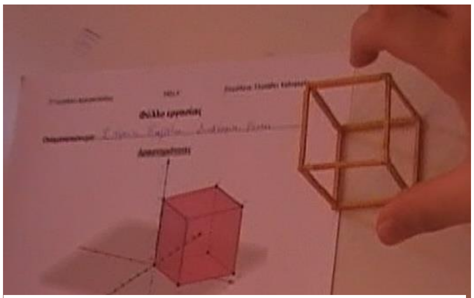


Εικόνα 3: Αναπαράσταση ασυμβάτων με μολύβια

Η δυνατότητα περιστροφής του στερεού και αλλαγής της οπτικής γωνίας του διευκόλυνε τους μαθητές να διαπιστώσουν ότι οι μη παράλληλες στον χώρο δεν είναι υποχρεωτικά τεμνόμενες και ότι αυτή η συνθήκη αφορά το επίπεδο.

«Δείχνοντας» στο στερεό: Διάκριση παραλλήλων και ασυμβάτων

Για την εύρεση των τμημάτων που ΔΕΝ τέμνουν το ΑΒ μια άλλη ομάδα (Υ, Υ) πρότεινε «*να βρούμε ποια το τέμνουν και άρα τα υπόλοιπα θα είναι παράλληλα με αυτό*». Η Ε τους πρότεινε να βρουν το πλήθος των ακμών του κύβου και στη συνέχεια να το συγκρίνουν με το άθροισμα αυτών που το τέμνουν και αυτών που είναι παράλληλες. Χρησιμοποιήθηκε ένα ξύλινο στερεό (Εικ.4) με το οποίο έγινε εμφανές ότι το άθροισμα τεμνουσών και παραλλήλων στο ΑΒ, δεν είναι 12 (μαζί με το ΑΒ). Στην ερώτηση της Ε «*γιατί να συμβαίνει αυτό;*» οι μαθητές δείχνουν τις ασύμβατες προς την ΑΒ ευθείες, λέγοντας ότι «*αυτές δεν είναι στο ίδιο επίπεδο με το ΑΒ*».

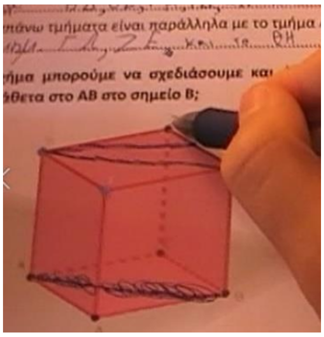


Εικόνα 4: Μέτρηση των ακμών

Εδώ, είναι εμφανής η μεταφορά στον χώρο των προϋποθέσεων του επιπέδου, δηλαδή ότι οι μη τεμνόμενες ευθείες θα είναι παράλληλες. Η εργασία με τα συνθετικά του στερεού έδειξε να βοηθά στην ανακάλυψη μιας τρίτης κατηγορίας σχέσεων μεταξύ ευθειών στο χώρο (ασύμβατες).

Δείχνοντας με τα αντικείμενα πάνω στο στερεό: Διάκριση των τμημάτων σε αυτά που βλέπω και αυτά που μπορώ να κατασκευάσω

Κατά τη 2η επίσκεψη της Ε στην ομάδα (Υ, Χ), ο μαθητής Υ έχει απαντήσει στο ερώτημα «*και άλλα τμήματα του κύβου που να είναι κάθετα στο ΑΒ στο σημείο Β*». Έχει ήδη σχεδιάσει τη διαγώνιο ΒΗ και τμήμα από το Β προς τυχαίο σημείο του τμήματος ΖΗ (Εικ.5). Σε ερώτηση της Ε «*πόσα τέτοια τμήματα μπορούμε να σχεδιάσουμε;*» ο μαθητής δείχνει την τεθλασμένη ΖΗΓ και απαντά «*άπειρα, ενώνοντας το Α με όλα τα σημεία της ΖΗΓ*». Εδώ, η πρόκληση για την Ε είναι να εμπλέξει την Χ στη διαδικασία. Έτσι, πριν ο Υ καταγράψει την απάντηση, η Ε μεταφέρει το στερεό στην Χ και



Εικόνα 5: Σχεδίαση στο σχήμα τμημάτων κάθετων στο ΑΒ στο Β

Εικόνα 6: Αναπαριστώντας με το μολύβι τμήματα κάθετα στο ΑΒ στο σημείο Β

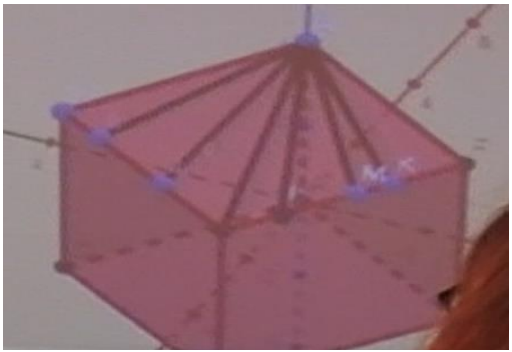
επαναλαμβάνει το ερώτημα, ζητώντας της 'να δείξει' την απάντηση πάνω στο στερεό με το στυλό της. Η μαθήτρια ξεκινά αναπαριστώντας με το στυλό τις ακμές ΒΓ, ΒΖ και τη διαγώνιο ΒΗ, όχι όμως τα ενδιάμεσα σημεία (Εικ.6, α, β) και η Ε ζητά από τον Υ να αναπαραστήσει τα σημεία αυτά, 'δίνοντας κίνηση' στο στυλό του και στη συνέχεια από την Χ να διατυπώσει το συμπέρασμα (Εικ.6, γ).

Αυτό ήταν ένα ακόμα σημείο που δείχνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν πρόσθετες δυσκολίες στη μετάβαση από 'αυτό που βλέπουν' σε 'αυτό που μπορούν να κατασκευάσουν', αλλά και να γενικεύσουν τα ευρήματά τους. Επίσης, εδώ είναι εμφανής η διαφοροποιημένη διδακτική αντιμετώπιση της Ε στα μέλη της ομάδας αυτής, καθώς ο Υ καλείται να αναπαραστήσει δυναμικά με το στυλό ένα σύνολο σημείων, ώστε να μπορέσει η Χ να διατυπώσει το γενικευμένο συμπέρασμα.

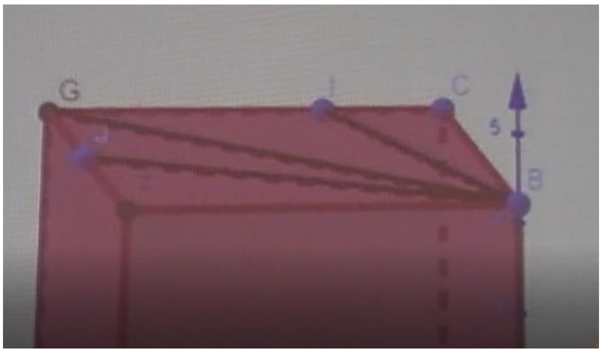
«Γενίκευση» με το Geogebra: Από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο

Κατά τη 2η επίσκεψη της Ε σε ομάδα (Υ, Υ) οι μαθητές δείχνουν στον διαδραστικό τα τμήματα που κατασκεύασαν να είναι κάθετα στο ΑΒ στο Β, μετακινώντας/περιστρέφοντας τον κύβο στο Geogebra (Εικ.7). Το ίδιο ακριβώς κάνει και μια ομάδα (Μ, Μ) εργαζόμενη στο laptop.

Η Ε προτείνει και στις δυο ομάδες αντί να κατασκευάζουν άπειρα ευθύγραμμα τμήματα ενώνοντας το Β με τα σημεία της τεθλασμένης ΖΗΓ να πάρουν ένα σημείο Ι πάνω στην ΖΗ, ένα σημείο J πάνω στην ΗΓ, να τα ενώσουν με το Β και να τα μετακινούν (Εικ.8).



Εικόνα 7: Σχεδίαση στον διαδραστικό τμημάτων κάθετων στο ΑΒ στο Β



Εικόνα 8: Σχεδιασμός δυναμικά κινούμενων τμημάτων ΙΒ και JB

Έτσι, μέσα από τη μετακίνηση των τμημάτων ΙΒ και JB αποτυπώνονται τα άπειρα τμήματα στο χώρο που είναι κάθετα στο ΑΒ στο σημείο Β. Οι μαθητές της μιας ομάδας (Υ,Υ) διατύπωσαν την διαπίστωση ότι «*όλα αυτά τα τμήματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο*» προσεγγίζοντας έτσι πρώιμα την έννοια του επιπέδου που είναι κάθετο σε σημείο μιας ευθείας.

Κλείνοντας τη διδακτική ώρα

Στο τέλος της διδακτικής ώρας τέσσερις ομάδες ολοκλήρωσαν τις δραστηριότητες και τρεις από αυτές κατάφεραν να διερευνήσουν το τελευταίο ερώτημα στον διαδραστικό ή στα laptops. Οι υπόλοιπες απάντησαν στα τέσσερα πρώτα ερωτήματα, αφήνοντας αναπάντητη την καθετότητα στο ΑΒ στο σημείο Β. Στο κλείσιμο του μαθήματος, σε ολομέλεια τάξης η Ε συνοψίζει τα ευρήματα των ομάδων, τονίζοντας ότι όλοι οι μαθητές βρήκαν τα κάθετα στο ΑΒ τμήματα και αυτά που το τέμνουν, όπως και τα παράλληλα. Εδώ έγινε ξανά μια συζήτηση για τα τμήματα που δεν είναι παράλληλα στο ΑΒ και ταυτόχρονα δεν το τέμνουν, εστιάζοντας στο εύρημα ότι αυτά «*δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο με το ΑΒ*», «*ούτε μπορούν να φτιάξουν επίπεδο με αυτό*», κάνοντας μια πρώτη νύξη για την έννοια των ασυμβάτων ευθειών. Τέλος, παρουσιάσθηκε η γενίκευση με κίνηση σημείων στον διαδραστικό, η οποία βοήθησε τις πιο αδύναμες μαθησιακά ομάδες να διαπιστώσουν την απειρία τμημάτων του κύβου με την ιδιότητα να είναι κάθετα στο ΑΒ στο Β.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στόχος της παραπάνω διδασκαλίας ήταν η αναγνώριση από τους μαθητές εννοιών/σχέσεων της επίπεδης γεωμετρίας και η ένταξή τους στο χώρο. Η ανάλυση της διδασκαλίας έδειξε την ανάδυση νέων νορμών που περιελάμβαναν τη χρήση υλικών αντικειμένων για την αναπαράσταση των γεωμετρικών εννοιών. Η επικοινωνία ανάμεσα στην εκπαιδευτικό και τους μαθητές βασίσθηκε κατά πολύ σε αυτό και οι απαντήσεις /αιτιολογήσεις των μαθητών για να γίνουν αποδεκτές περιελάμβαναν τη χρήση αντικειμένων ή ενσώματη αναπαράσταση. Η συγκεκριμένη μορφή οργάνωσης της μαθηματικής τάξης υποδηλώνει την ύπαρξη νέων ΚΜΝ, που ευνόησαν τη συμμετοχή των μαθητών διαφορετικών επιπέδων: 1) Όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν την καθετότητα στον χώρο, αλλά και πώς αυτή αποτυπώνεται συμβατικά στο χαρτί, την παραλληλία των τμημάτων που ανήκαν στις έδρες του στερεού και πιο δύσκολα την παραλληλία των τμημάτων που ορίζουν μη ορατό επίπεδο. 2) Οι ομάδες ανάπτυξαν διαφορετικές στρατηγικές για την εύρεση των τμημάτων που δεν είναι παράλληλα, ούτε μπορούν να τμηθούν και προσδιόρισαν τη σημασία του όρου ‘ομοεπίπεδες’. 3) Εντός των ομάδων, επιλέχθηκε διαφοροποιημένη διδακτική διαχείριση των μαθητών, με βάση τις ανάγκες τους. 4) Οι μαθητές αρκετών ομάδων προσέγγισαν με εμπειρικό τρόπο αρκετά πιο δύσκολες έννοιες και σχέσεις του χώρου όπως τις ασύμβατες ευθείες, τις ορθογώνιες και το επίπεδο κάθετο σε σημείο ευθείας.

Από τα παραπάνω χαρακτηριστικά απορρέει ένα ακόμα σημαντικό θέμα προς συζήτηση σε επίπεδο σχεδιασμού Π.Σ., που είναι η ιδέα της ήπιας διάχυσης εννοιών της Στερεομετρίας στη διδασκαλία της επίπεδης Γεωμετρίας. Η παρούσα μελέτη αποτελεί ένα πρώτο βήμα στην κατεύθυνση αυτή. Η εξεύρεση κατάλληλων περιοχών των Π.Σ. των Μαθηματικών που ευνοούν την ένταξη εννοιών της Στερεομετρίας και ο σχεδιασμός αντίστοιχων δραστηριοτήτων θα μπορούσε να αποτελέσει διεύρυνση της παρούσας εργασίας και να επιβεβαιώσει τα ευρήματά της, δίνοντας το έναυσμα για αντίστοιχο εμπλουτισμό των Π.Σ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., Pitta, D., Jones, K., Sendova, E. & Boytchev, P. (2007). Developing an Active Learning Environment for the Learning of Stereometry. *Proceedings of the 8th ICTMT*, Hradec Králové, Czech Republic.

Mithalal, J. & Balacheff, N. (2019). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. *Educational Studies in Mathematics*, 100:161–176

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, NCTM.

Pittalis, M. & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75:191–212.

Stein, K. & Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation*, 2:1, 50-80.

Sullivan, P., Mousley, J. (2001). Thinking Teaching: Seeing Mathematics Teachers as active Decision Makers. In F.-L. Lin & T.J Cooney (Eds) *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, 33-52, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms. *Proceedings of the 25th PME*, v.1-4.

Zaranis, N. & Exarchakos, G (2018). How ICT Affects the Understanding of Stereometry Among University Students. *International Journal of Web-Based Learning and Teaching Technologies*, v.13, 1, 37-49.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΕΝΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Κατσομήτρος Σωτήριος, Τάτσης Κωνσταντίνος

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

s.katsomitros@uoi.gr, ktatsis@uoi.gr

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των αντιλήψεων ενός εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αναφορικά με τη μετάβαση στα μαθηματικά από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και παράλληλα της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου αναφορικά με τις έννοιες της μεταβλητής και των εξισώσεων στην μεταβατική περίοδο. Μεταξύ άλλων, ζητήθηκε από τον εκπαιδευτικό να τροποποιήσει μαθηματικές δραστηριότητες από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου για πιθανή διδακτική αξιοποίηση στη Στ΄ Δημοτικού, αναδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο τη παιδαγωγική γνώση περιεχομένου του. Μέσα από τις αντιλήψεις του διαφαίνεται ότι τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών και οι διαφορετικές διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών των δύο βαθμίδων διαδραματίζουν ένα κρίσιμο ρόλο στη διαδικασία της μετάβασης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι μία διαδικασία πολυδιάστατη και ταυτόχρονα απαιτητική για τους μαθητές. Συνήθως λαμβάνει χώρα μεταξύ των ηλικιών 11-13, προκαλώντας ακαδημαϊκές, κοινωνικές, συναισθηματικές και ψυχολογικές αλλαγές στους μαθητές (Zeedyk et al., 2003).

Ειδικότερα, η μετάβαση των μαθητών στα μαθηματικά από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει προσεγγιστεί από αρκετούς ερευνητές, οι οποίοι έχουν εστιάσει στις εμπειρίες και αντιλήψεις των μαθητών των γονέων και των εκπαιδευτικών, στα αναλυτικά προγράμματα των δύο βαθμίδων καθώς και σε ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών (Attard, 2010; Paul, 2014; Sdrolias & Triandafillidis, 2008).

Την τελευταία πενταετία, αρκετές έρευνες επικεντρώνονται στη συνεργασία των εκπαιδευτικών των μαθηματικών των δύο βαθμίδων (Psycharis et al., 2020) και στις γνώσεις τους σε ζητήματα της μαθηματικής μετάβασης, όπως την εξοικείωσή τους με τα αναλυτικά προγράμματα (Α.Π.) της άλλης βαθμίδας (O’Meara et al., 2020). Στην έρευνα των O’Meara et al. (2020), η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δηλώνει ότι δεν είναι εξοικειωμένοι με το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της πρώτης τάξης της επόμενης βαθμίδας.

Με βάση το παραπάνω εύρημα, στη παρούσα εργασία μελετούμε έναν εκπαιδευτικό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, από τον οποίο ζητήθηκε να τροποποιήσει μαθηματικές δραστηριότητες από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου με σκοπό να τις εντάξει διδακτικά στην Στ΄ Δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα, διερευνούμε τις αντιλήψεις του για τη μετάβαση στα μαθηματικά ανάμεσα στις δύο βαθμίδες που σχετίζονται με τα αναλυτικά προγράμματα και τις διδακτικές πρακτικές, αλλά και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου που εμφανίζει μέσα από μια διαδικασία διδακτικού επανασχεδιασμού.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα έρευνα υιοθετούμε το θεωρητικό πλαίσιο των Cantley et al. (2021), το οποίο ειδικεύεται στη μελέτη της συνέχειας της μαθηματικής μαθησιακής εμπειρίας κατά τη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο βασίζεται στην αρχή της «συνέχειας της εμπειρίας» (Dewey [1938], 1997) και στην ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (Anthropological Theory of Didactics/ A.T.D.) (Bosch & Gascón, 2006), στην οποία η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί ανθρώπινη δραστηριότητα εντός ενός ευρύτερου κοινωνικού, πολιτιστικού και οργανωτικού πλαισίου.

Οι Cantley et al. (2021) προτείνουν την εξής ιεραρχία παραγόντων/επιπέδων που επιδρούν στη διδασκαλία (Hierarchy of levels of didactic codetermination) και στην ομαλή μετάβαση (Chevallard, 2002):

5. Πολιτισμός		5. Πολιτισμός
4. Κοινωνία		4. Κοινωνία
3. Σχολείο (περιλαμβάνει χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών)		3. Σχολείο (περιλαμβάνει χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών)
2. Παιδαγωγική	⟷ Συνέχεια	2. Παιδαγωγική
1. Αναλυτικό Πρόγραμμα	⟷ Συνέχεια	1. Αναλυτικό Πρόγραμμα
Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση		Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Πίνακας 1: Παράγοντες/επίπεδα που επιδρούν στη διδασκαλία και την ομαλή μετάβαση (Cantley et al., 2021)

Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, τα χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού (επίπεδο 3), όπως η εμπειρία του, οι γνώσεις του και οι αντιλήψεις του, επιδρούν στην οργάνωση της διδακτέας ύλης (επίπεδο 1) αλλά και στις διδακτικές πρακτικές του (επίπεδο 2), με πιθανό αποτέλεσμα να οδηγούν σε ασυνέχεια της μαθησιακής εμπειρίας κατά τη μεταβατική περίοδο (Cantley et al., 2021). Για αυτό το λόγο, στην παρούσα έρευνα εστιάσαμε στις αντιλήψεις ενός εκπαιδευτικού Στ΄ Δημοτικού σχετικά με τα αναλυτικά προγράμματα και τις διδακτικές πρακτικές κατά τη μεταβατική περίοδο. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψιν την αναγκαιότητα επίτευξης συνέχειας στα αναλυτικά προγράμματα, εστιάσαμε στην διαδικασία πιθανής ενσωμάτωσης μαθηματικών δραστηριοτήτων της Α΄ Γυμνασίου στη Στ΄ Δημοτικού, διερευνώντας την παιδαγωγική γνώση του εκπαιδευτικού.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία (Mathematical Knowledge for Teaching/M.K.T.) (Ball et al., 2008), το οποίο αποτυπώνει τα είδη των γνώσεων του εκπαιδευτικού που συντελούν στην αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών. Ειδικότερα, η Γνώση του Περιεχομένου και των Μαθητών/ Γ.Π.Μ. (Knowledge of Content and Students) συνδυάζει τη γνώση του εκπαιδευτικού για το μαθηματικό περιεχόμενο διδασκαλίας με τη γνώση των αναπτυξιακών δυνατοτήτων των μαθητών του. Παράλληλα, η Γνώση του Περιεχομένου και της Διδασκαλίας/ Γ.Π.Δ. (Knowledge of Content and Teaching) αναφέρεται στην γνώση σχεδιασμού και διδασκαλίας για το μαθηματικό περιεχόμενο που διδάσκεται. Έπειτα, η Γνώση του Περιεχομένου και του Προγράμματος Σπουδών/ Γ.Π.Π. (Knowledge of Content and Curriculum) τονίζει την γνώση του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών. Συγκεντρωτικά, οι παραπάνω τρεις διαστάσεις αποτελούν την Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου του εκπαιδευτικού (Ball et al., 2008).

Οι μαθηματικές δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου προήλθαν από το *Κεφάλαιο 4: Εξισώσεις και προβλήματα* (Βανδουλάκης κ.ά., 2012). Στην Ελλάδα, η διδασκαλία της άλγεβρας αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας κυρίως στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στο Δημοτικό, η Στ΄ Δημοτικού με το κεφάλαιο των «Εξισώσεων» αποτελεί τον προθάλαμο για την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ)(2003), όπου η επίλυση απλών εξισώσεων προσεγγίζεται με την βοήθεια τόσο της μεθόδου της «ζυγαριάς», όσο και της μεθόδου των αντίστροφων πράξεων.

Συμπερασματικά, τα ερευνητικά ερωτήματα είναι τα παρακάτω:

1. Ποιες είναι οι αντιλήψεις του εκπαιδευτικού για τη μετάβαση στα μαθηματικά από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο σχετικά με τα Αναλυτικά Προγράμματα και τις διδακτικές πρακτικές;
2. Ποιες είναι οι Παιδαγωγικές Γνώσεις Περιεχομένου του εκπαιδευτικού αναφορικά με τις έννοιες της μεταβλητής και των εξισώσεων κατά το πέρασμα από τη Στ΄ Δημοτικού στην Α΄ Γυμνασίου;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο έρευνας

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης (Yin, 1994). Ο εκπαιδευτικός που μελετήθηκε θα αποκαλείται με το ψευδώνυμο «Δήμος». Ο Δήμος ήταν απόφοιτος παιδαγωγικού τμήματος με πάνω από 25 χρόνια υπηρεσίας σε ιδιωτικά και δημόσια δημοτικά σχολεία και την περίοδο που έλαβε χώρα η έρευνα ήταν εκπαιδευτικός Στ΄ Δημοτικού. Ο Δήμος επιλέχθηκε, διότι είχε διδάξει πέντε φορές στην Στ΄ δημοτικού και, επιπλέον, δήλωνε ότι προσπαθούσε να χτίζει «γέφυρες» με το Γυμνάσιο. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Ιούνιο του 2021, δεδομένου ότι είχε ολοκληρωθεί πριν από αρκετό καιρό η διδασκαλία του κεφαλαίου των εξισώσεων και οι μαθητές χρονικά πλησίαζαν στη φοίτησή τους στην Α΄ Γυμνασίου.

Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης

Η συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια. Στο πρώτο χρησιμοποιήθηκε μία ημιδομημένη συνέντευξη, η οποία αρχικά εστίαζε σε συγκεκριμένες κατηγορίες (Αναλυτικό Πρόγραμμα, Παιδαγωγική, Στρατηγικές Αξιολόγησης) της μαθηματικής μετάβασης από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με βάση την έρευνα της Attard (2010) και μετέπειτα σε ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης των εξισώσεων κατά τη μεταβατική περίοδο, στηριζόμενοι στη θεωρία των Ball et al. (2008), καθώς και στα βιβλία του εκπαιδευτικού των δύο τάξεων. Ενδεικτικές ερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι εξής:

- Πώς θα όριζες την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο;
- Ποιες τάξεις εμπλέκει αυτή η μετάβαση; Αφορά και στο μάθημα των μαθηματικών;
- Ποια είναι τα κύρια εμπόδια για μια επιτυχημένη μετάβαση στο μάθημα των μαθηματικών;
- Πώς θα μπορούσε να βελτιωθεί η μετάβαση στα μαθηματικά;
- Με ποιον τρόπο διδάσκεις το κεφάλαιο των εξισώσεων; Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν συνήθως οι μαθητές;
- Οι μαθηματικές απαιτήσεις των αντίστοιχων κεφαλαίων των εξισώσεων της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου είναι ίδιες; Αν όχι, σε τι διαφέρουν;
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν κοινές μαθηματικές δραστηριότητες στη Στ΄ Δημοτικού και Α΄ γυμνασίου;

Τα δεδομένα που προέκυψαν από αυτό το στάδιο ομαδοποιήθηκαν σε ευρύτερες κατηγορίες με βάση τα τρία πρώτα επίπεδα της ιεραρχίας των

Cantley et al. (2021). Συγκεκριμένα, μέσα από την κωδικοποίηση των δεδομένων, αναλύθηκαν οι αντιλήψεις του Δήμου αναφορικά με: τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών των δύο βαθμίδων (επίπεδο 1), τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών (επίπεδο 2), καθώς και με την επίδραση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του ως εκπαιδευτικού (επίπεδο 3), όπως η εμπειρία και οι γνώσεις του.

Στο δεύτερο στάδιο δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με επτά δραστηριότητες του Κεφαλαίου 4 του σχολικού εγχειριδίου της Α΄ Γυμνασίου, όπου ο Δήμος κλήθηκε να προβεί σε αλλαγές (σε περίπτωση που το κρίνει σκόπιμο), με στόχο την πιθανή διδακτική ενσωμάτωσή τους στην Στ΄ δημοτικού. Ενδεικτικά παραθέτουμε μία δραστηριότητα του ερωτηματολογίου (Άσκηση 5: Κεφάλαιο Α.4.3.), την οποία ο Δήμος κλήθηκε να τροποποιήσει και να εντάξει υποθετικά στη διδασκαλία του:

Αν $x \cdot y = \frac{2}{9}$ και $z = \frac{3}{5}$, να βρεθεί το $x \cdot (y \cdot z)$ (Βανδουλάκης κ.ά., 2012, σ. 74)

Η επίλυση της παραπάνω δραστηριότητας στηρίζεται στη χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού, την οποία οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού έχουν ήδη διδαχθεί πριν από το κεφάλαιο των εξισώσεων. Όμως, στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού δεν υπάρχει κάποια αντίστοιχη δραστηριότητα, όπου αφενός οι παραγόντες του πολλαπλασιασμου είναι παραπάνω από δύο και αφετέρου η επίλυση της εξίσωσης να βασίζεται στην προσεταιριστική ιδιότητα. Συνεπώς, οι αλλαγές που εντοπίστηκαν μας έδωσαν πληροφορίες για τις συνιστώσες της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου του Δήμου (Γ.Π.Μ., Γ.Π.Δ., Γ.Π.Π.), με βάση το μοντέλο της «Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία» (Ball et al., 2008).

Το τρίτο στάδιο περιλάμβανε μία ημιδομημένη συνέντευξη με στόχο την αιτιολόγηση των αλλαγών που έγιναν στο προηγούμενο στάδιο. Τα δεδομένα που προέκυψαν από αυτό το στάδιο χρησιμοποιήθηκαν για την περαιτέρω διερεύνηση των αντιλήψεων και των συνιστωσών της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου του εκπαιδευτικού που προέκυψαν από τα δύο προηγούμενα στάδια.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αντιλήψεις για τα Α.Π. και τις διδακτικές πρακτικές

Αρχικά, ο Δήμος όρισε την μετάβαση στα μαθηματικά ως:

> … ένα πέρασμα από μία βάση που έχουν αποκτήσει οι μαθητές του δημοτικού στα μαθηματικά προς ένα άλλο επίπεδο με περισσότερη διαχείριση και ενασχόληση, που ουσιαστικά εμπλέκει την Ε΄, την Στ΄ και την Α΄ Γυμνασίου.

Επιπλέον, χαρακτήρισε αυτή τη μετάβαση ως μία «μη απολύτως ομαλή» διαδικασία.

Στην ερώτηση για τα κύρια εμπόδια σε μια επιτυχημένη μετάβαση στα μαθηματικά, ο Δήμος ανέφερε ότι τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου, καθώς και οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών σε αυτές τις τάξεις φαίνεται να διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο. Ειδικότερα, η διαφορετική εννοιολογική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών που εμφανίζεται στα Α.Π. και στα σχολικά εγχειρίδια, καθώς και ο διαφορετικός τρόπος προσέγγισης της διδασκαλίας των μαθηματικών ανάμεσα στις δύο βαθμίδες, εξαιτίας της ειδίκευσης των εκπαιδευτικών, αποτέλεσαν δύο παράγοντες που εκφράστηκαν από τα λεγόμενα του Δήμου:

> Ως προς τη διδασκαλία θεωρώ ότι διδάσκουμε διαφορετικά. Ένας εκπαιδευτικός της Α΄ Γυμνασίου αντιμετωπίζει ηλικιακά πιο ώριμους μαθητές και γι' αυτό ίσως έχουν μεγαλύτερες απαιτήσεις. Το αντίστροφο συμβαίνει στο δημοτικό, όπου το διαφορετικό επίπεδο μαθησιακής ωριμότητας των μαθητών επηρεάζει τον τρόπο προσέγγισης των εννοιών. Εκεί, γίνεται η διδασκαλία πιο παιδαγωγικά ενώ στο γυμνάσιο πιο εξειδικευμένα στο γνωστικό αντικείμενο.

Ο Δήμος με τον χαρακτηρισμό της διδασκαλίας στο Δημοτικό ως περισσότερο «παιδαγωγικό» εννοεί ότι υπάρχει μια ευρύτερη «εικόνα» των μαθητών και στα άλλα γνωστικά αντικείμενα από τον εκπαιδευτικό, γεγονός που του επιτρέπει να «μπορεί να διαφοροποιεί και να συνθέτει κατάλληλα τους στόχους διδασκαλίας του με μεγαλύτερη ευχέρεια». Μετέπειτα, επεσήμανε ότι κοινό σημείο των διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών των δύο βαθμίδων μπορεί να αποτελέσει «η διαφοροποίηση της διδασκαλίας, ώστε να γίνει πιο εύκολη η προσαρμογή των μαθητών». Παράλληλα, κρίσιμο ρόλο στη μαθηματική μετάβαση φαίνεται να έχουν τα Α.Π.:

> Το πρόγραμμα σπουδών δεν διευκολύνει την μετάβαση με την έννοια ότι είναι σαν να είναι δύο ξεχωριστά. Τυπικά, υπάρχει μία σύνδεση σε σχέση με τους τίτλους από τα μαθήματα. Όμως, η ορολογία (π.χ., μαθηματικοί ορισμοί) και κάποιες εννοιολογικές απαιτήσεις δε βοηθούν τη μετάβαση.

Για παράδειγμα, «η θεματική των εξισώσεων είναι ένα πρωτόγνωρο δεδομένο για τους μαθητές, διότι δυσκολεύονται να αντιληφθούν την έννοια της μεταβλητής». Στο Δημοτικό η εισαγωγή στις εξισώσεις καλό θα ήταν «να εστιάζει σε προβλήματα καθημερινής ζωής και η επίλυση αυτών με μαθηματικό τρόπο να αφορά κυρίως το Γυμνάσιο. Τέτοιου είδους γέφυρες χρειάζονται», ανέφερε ο Δήμος στο ερώτημα για το πώς θα μπορούσε να βελτιωθεί η μετάβαση στα μαθηματικά.

Συνιστώσες Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου

Στην ερώτηση για τον τρόπο διδασκαλίας των εξισώσεων στην Στ΄ δημοτικού, ο Δήμος δήλωσε ότι εστιάζει στην επίλυση προβλημάτων. Για την επίλυση των εξισώσεων προτιμά τη μέθοδο της αντίστροφης πράξης, διότι θεωρεί ότι υπάρχει «καλύτερη σύνδεση στη συνέχεια με τους αρνητικούς αριθμούς» (Γ.Π.Π.):

> Προσπαθώ να συνδυάσω το γλωσσικό κείμενο μιας εκφώνησης μαζί με την εμφάνιση της εξίσωσης, ώστε από κάτω να εμφανιστεί μαθηματικοποιημένο το πρόβλημα μέσα από την εξίσωση. (Γ.Π.Δ.)

Μετέπειτα, ο Δήμος, αναφορικά με τις απαιτήσεις των αντίστοιχων κεφαλαίων των εξισώσεων της Στ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου, θεώρησε ότι η εξίσωση στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση έχει «περισσότερο παιγνιώδη λογική εντός ενός λεκτικού προβλήματος, ενώ στο Γυμνάσιο η εξίσωση φαίνεται να χρησιμοποιείται ως μαθηματικό εργαλείο» (Γ.Π.Δ.)

Μία από τις δραστηριότητες από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου, που κλήθηκε ο Δήμος να τροποποιήσει και να εντάξει υποθετικά στη διδασκαλία του, ήταν η Άσκηση 5 του Κεφαλαίου Α.4.3.(Βανδουλάκης κ.ά., 2012, σελ. 74). Πιο αναλυτικά, ο Δήμος ισχυρίστηκε ότι θα μπορούσε να εντάξει τη συγκεκριμένη δραστηριότητα στην Στ΄ Δημοτικού μέσα από συγκεκριμένες αλλαγές:

> Θα τη χρησιμοποιούσα την συγκεκριμένη άσκηση, όμως στην αρχή χωρίς κλάσματα. Θα προτιμούσα φυσικούς αριθμούς και θα καλούσα τους μαθητές να λύσουν την αριθμητική παράσταση. (Γ.Π.Δ.)

Ο Δήμος θα απέφευγε στη συγκεκριμένη άσκηση την χρήση κλασματικών αριθμών, με το αιτιολογικό ότι ίσως κάποιοι μαθητές θα θεωρούσαν δυσκολότερη την άσκηση με κλασματικούς αριθμούς, γεγονός που ίσως να μείωνε την προσπάθεια μερικών για επίλυση (Γ.Π.Μ.). Ως προς τη διδακτική αξιοποίηση της παραπάνω μαθηματικής δραστηριότητας, ο Δήμος εξέφρασε κάποιες επιφυλάξεις για το αν θα αναγνώριζαν οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού ότι το γινόμενο δύο μεταβλητών μπορεί να είναι ένας σταθερός αριθμός (Γ.Π.Μ.). Για αυτό το λόγο, ίσως ο ίδιος σε κάποιο σημείο της επίλυσης της δραστηριότητας να προέτρεπε τους μαθητές να εξετάσουν αν κάποια από τις ιδιότητες των πράξεων που ήδη γνωρίζουν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί (Γ.Π.Δ.).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας αναφορικά με τη μετάβαση στα μαθηματικά από τη πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Μελετήσαμε έναν εκπαιδευτικό της Στ΄ Δημοτικού με στόχο τον εντοπισμό των αντιλήψεών του για τη μαθηματική μετάβαση ανάμεσα στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αναφορικά με τα αναλυτικά προγράμματα και τις διδακτικές πρακτικές. Επίσης, επικεντρωθήκαμε στη διερεύνηση της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου που αναδύεται κατά τη διαδικασία τροποποίησης μαθηματικών δραστηριοτήτων της Α΄ Γυμνασίου με στόχο την πιθανή διδακτική ενσωμάτωσή τους στην Στ΄ Δημοτικού.

Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών των δύο βαθμίδων και οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών διαδραματίζουν ένα κρίσιμο ρόλο στη διαδικασία της μετάβασης, γεγονός που εναρμονίζεται με τα αποτελέσματα αντίστοιχων ερευνών (Attard, 2010· Paul, 2014). Μέσα από την ενασχόληση του Δήμου με τις μαθηματικές δραστηριότητες της Α΄ Γυμνασίου ως πιθανή πηγή διδακτικής αξιοποίησης αυτών στην Στ΄ Δημοτικού, αναδύθηκαν και οι τρεις συνιστώσες της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (Γ.Π.Μ., Γ.Π.Δ., Γ.Π.Π.). Δεδομένου ότι ο κάθε εκπαιδευτικός διαθέτει διαφορετικές αντιλήψεις και γνώσεις αναφορικά με την άλλη βαθμίδα, διαφαίνεται ότι ενδεχομένως επηρεάζεται η διαδικασία της μαθηματικής μετάβασης (Cantley et al., 2021; O’Meara et al., 2020). Συγκεκριμένα, όσον αφορά στην πιθανή διδακτική αξιοποίηση συγκεκριμένης μαθηματικής δραστηριότητας από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου, ο εκπαιδευτικός της μελέτης μας θα την αξιοποιούσε διδακτικά στη Στ΄ Δημοτικού, χρησιμοποιώντας φυσικούς αριθμούς στη θέση των κλασματικών. Τέλος, ο εκπαιδευτικός εντόπισε διαφορετικές διδακτικές και γνωστικές απαιτήσεις των αντίστοιχων κεφαλαίων των εξισώσεων των δύο τάξεων.

Περαιτέρω έρευνα αναφορικά με την διαδικασία και τα αποτελέσματα μιας πιθανής διδακτικής ενσωμάτωσης μαθηματικών δραστηριοτήτων της Α΄ Γυμνασίου στην Στ΄ Δημοτικού κρίνεται σκόπιμη. Μια τέτοια έρευνα θα πρέπει να εμπλέξει ικανό αριθμό εκπαιδευτικών και να συμπεριλάβει έννοιες από συγκεκριμένα τμήματα ή και από ολόκληρο το Α.Π. του Δημοτικού ή και του Γυμνασίου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Attard, C. (2010). Students’ Experiences of Mathematics during the Transition from Primary to Secondary School. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education* (pp. 53-60). Fremantle, Australia: MERGA.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2012). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Αθήνα, Ελλάδα: «Διόφαντος» Ινστιτούτο Τεχνολογίας, Υπολογιστών και Εκδόσεων.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI bulletin*, *58*(58), 51-65.

Cantley, I., O'Meara, N., Prendergast, M., Harbison, L., & O'Hara, C. (2021). Framework for analysing continuity in students' learning experiences during primary to secondary transition in mathematics. *Irish Educational Studies*, *40*(1), 37-49.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In J. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dewey, J. [1938]1997. *Experience and Education*. New York, NY: Touchstone.

O'Meara, N., Prendergast, M., Cantley, I., Harbison, L., & O'Hara, C. (2020). Teachers' self-perceptions of mathematical knowledge for teaching at the transition between primary and post-primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(4), 497-519.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε από http://www.pi-schools.gr/programs/depps

Paul, M. (2014). Managing the transition from primary school mathematics to secondary school mathematics: Teachers' and learners' perspectives. *Mediterranean journal of social sciences, 5*(25), 205.

Psycharis, G., Trgalová, J., Alturkmani, M. D., Kalogeria, E., Latsi, M., & Roubin, S. (2020). Studying primary and secondary teachers' collaborative design of resources for algebra. In H. Borko & D. Potari (Eds.), *ICMI Study 25 - Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups* (pp. 668-675). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Sdrolias, K. A., & Triandafillidis, T. A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics"?. *Educational studies in mathematics, 67*(2), 159-169.

Yin, R. K. (1994). Discovering the future of the case study. Method in evaluation research. *Evaluation practice, 15*(3), 283-290.

Zeedyk, M. S., Gallacher, J., Henderson, M., Hope, G., Husband, B., & Lindsay, K. (2003). Negotiating the transition from primary to secondary school: Perceptions of pupils, parents and teachers. *School Psychology International*, *24*(1), 67-79.

Η ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ Η ΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Τερζάκη Ευαγγελία, Λεμονίδης Χαράλαμπος

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

evaterzaki@gmail.com, xlemon@uowm.gr

Στην παρούσα μελέτη διερευνώνται η γνώση και η στάση των εκπαιδευτικών των μαθηματικών του Νομού Ηρακλείου αναφορικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Χρησιμοποιήθηκε η ποσοτική προσέγγιση και δόθηκε ερωτηματολόγιο 52 ερωτήσεων σε 153 εν ενεργεία εκπαιδευτικούς μαθηματικών της μέσης εκπαίδευσης δημόσιων σχολείων και ιδιωτικών φροντιστηρίων του Νομού Ηρακλείου με τις περισσότερες ερωτήσεις να είναι 6-βάθμιες τύπου Likert και δύο ανοικτού τύπου. Δεδομένης της απουσίας της μοντελοποίησης από το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών, φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν σχετικά καλή γνώση και θετική στάση απέναντι στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης, στοιχεία αισιόδοξα για την εισαγωγή της στην ελληνική εκπαίδευση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης συμπεριλαμβάνεται στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών ολοένα και περισσότερων χωρών (Ferri, 2013) και αυτό έχει ως συνέπεια, τις τελευταίες δεκαετίες, η έρευνα στην εκπαίδευση των μαθηματικών να προσπαθεί να διερευνήσει τις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης της μαθηματικής μοντελοποίησης και να προτείνει τρόπους εφαρμογής της στη σχολική τάξη (Blum & Niss, 1991; Houston, 2009). Ο Ernest (1989) υποστηρίζει ότι η μάθηση των μαθηματικών οφείλει να στοχεύει στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής και σε αυτή την προοπτική το γνωστικό αντικείμενο και η διδακτική του, είναι αναγκαίο να εμπλουτιστούν. Κατά συνέπεια κρίνεται σκόπιμη η προσαρμογή των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών που θα στοχεύουν στην ενίσχυση της γνώσης των εκπαιδευτικών η οποία θα οδηγήσει στην διδασκαλία των εννοιών μέσα από προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης.

Αναφορικά με τη γνώση και στάση των εκπαιδευτικών ως προς τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης, τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη γνώση που οφείλουν να έχουν, προκειμένου να διδάξουν. Σε έρευνα του 1987 (Shulman, 1987) καθορίστηκε ένας ειδικός τομέας γνώσης των εκπαιδευτικών, ο οποίος αναφέρεται ως παιδαγωγική γνώση περιεχομένου. Ο Shulman, (1987) και οι συνάδελφοί του υποστήριξαν ότι, αν θέλουμε να έχουμε μια υψηλής ποιότητας εκπαίδευση, είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί να έχουν μια εξελιγμένη επαγγελματική γνώση (Loewenberg Ball et al., 2008).

Το 1992 οι Fennema και Franke επηρεασμένοι από τον Shulman (1987) ανέπτυξαν ένα μοντέλο που περιλαμβάνει τέσσερις πτυχές: τη γνώση περιεχομένου, της παιδαγωγικής, των γνώσεων των μαθητών και τις στάσεις των εκπαιδευτικών. Οι στάσεις θεωρούνται από τις πιο σημαντικές έννοιες της ψυχολογίας και καθορίζουν τις επιλογές του ατόμου για πρόσωπα, θέσεις ή γεγονότα. Θεωρούνται ότι δεν αλλάζουν εύκολα και αντιστέκονται στην αλλαγή σε σύγκριση με τις πεποιθήσεις που χτίζονται σταδιακά και είναι αποτέλεσμα γνώσης και εμπειρίας (Ernest, 1989; Albarracín, et al., 2005).

Αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών, τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί έρευνες στο χώρο των μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών για την αξιολόγηση της διερευνητικής προσέγγισης στη διδασκαλία και τη μάθηση (Chapman, 2006). Η μαθηματική μοντελοποίηση και οι διδακτικές πρακτικές της θεωρούνται εξέχον θέμα στην παγκόσμια εκπαιδευτική κοινότητα εξαιτίας της χρήσης των μαθηματικών στην επιστήμη, στην τεχνολογία και στην καθημερινή ζωή. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης στοχεύει στην εισαγωγή μιας μαθηματικής έννοιας και την ανάπτυξη της μέσα από αυτήν. Οι στόχοι μιας τέτοιας πρακτικής είναι ισχυρά παιδαγωγικοί και αφορούν το αντικείμενο της μάθησης (Ferri, 2013).

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα δεν εφαρμόζεται στην πράξη η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Για παράδειγμα, το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών δεν αναφέρει ρητά την ικανότητα που πρέπει να έχει ένας μαθητής, προκειμένου να μπορεί να λύνει πραγματικά προβλήματα, ακολουθώντας διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης, υπογραμμίζει ωστόσο, τη σημαντικότητα επίλυσης προβλημάτων (Α.Π.Σ, 2003).

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση ανέδειξε ότι μια επιτυχημένη διδασκαλία μαθηματικής μοντελοποίησης βασίζεται σε μεγάλο ποσοστό τόσο στη γνώση όσο και στη στάση των εκπαιδευτικών για τη σημαντικότητα της ως περιεχόμενο στη διδασκαλία των μαθηματικών (Blum & Niss, 1991; Houston, 2009). Επιπλέον, οι κατακερματισμένες γνώσεις τόσο στο περιεχόμενο όσο και στις παιδαγωγικές των εκπαιδευτικών οι οποίες αναδεικνύονται από την πλειοψηφία των ερευνών, οφείλονται κυρίως στην έλλειψη επιμόρφωσης, στην έλλειψη διδακτικών εμπειριών αλλά και στην απουσία ενσωμάτωσης οδηγιών αναφορικά με τη διδασκαλία της μοντελοποίησης στα σχολικά αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Frejd, 2012; Gould, 2013; Sturgill & Asempapa, 2019). Όσον αφορά τη στάση των εκπαιδευτικών, στην πλειονότητα τους χαρακτηρίζεται θετική αποτιμώντας ένα σύνολο από οφέλη στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών (Gould, 2013; Bautista et al., 2014).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός και ερωτήματα της έρευνας

Βασικός στόχος της παρούσας έρευνας, είναι η διερεύνηση της γνώσης και της στάσης των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής:

1. Ποια είναι η γνώση των εκπαιδευτικών μαθηματικών για την έννοια της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης;

2. Ποιά είναι η στάση των εκπαιδευτικών μαθηματικών για την διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης;

3. Πώς σχετίζεται η γνώση με τη στάση των εκπαιδευτικών μαθηματικών για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης;

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 153 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί μαθηματικών του Νομού Ηρακλείου που διδάσκουν σε δημόσια σχολεία και φροντιστήρια δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Από τους συμμετέχοντες οι 80 (52,2%) ήταν γυναίκες και η μέση ηλικία τους ήταν 44,2±10,5 έτη. Το δείγμα της έρευνας επιλέχθηκε με δειγματοληψία ευκολίας.

Ερωτηματολόγιο

Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε, ήταν ήδη κατασκευασμένο και προέρχεται από προγενέστερη διατριβή-έρευνα του Asempapa (2016) που σκοπό έχει την κατασκευή ενός εργαλείου για την αξιολόγηση της γνώσης και της στάσης των εκπαιδευτικών αναφορικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Αποτελείται από τρία μέρη:

Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει έντεκα κλειστές δηλώσεις και μια ερώτηση ανοικτής απάντησης. Οι δηλώσεις αφορούν τη γνώση για την έννοια της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης. Η ανοικτή ερώτηση αφορά την ικανότητα δημιουργίας ορισμού της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Το δεύτερο μέρος αποτελείται από 28 δηλώσεις κλειστού τύπου που αφορούν τη στάση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης, με τις απαντήσεις να είναι σε 6-βάθμια κλίμακα Likert (1. διαφωνώ έντονα, 2. διαφωνώ, 3. κάπως διαφωνώ, 4. κάπως συμφωνώ, 5. συμφωνώ, 6. συμφωνώ έντονα). Σε αυτό το μέρος, το σύνολο των 28 δηλώσεων χωρίζεται σε 4 άξονες. Ο πρώτος άξονας περιλαμβάνει 6 δηλώσεις και διερευνά πώς περιγράφουν οι εκπαιδευτικοί τον κονστρουκτιβιστικό χαρακτήρα διδασκαλίας και μάθησης της μαθηματικής μοντελοποίησης, ο οποίος επιτρέπει στους μαθητές να δουλεύουν σε ομάδες με ή χωρίς την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, γεγονός που ευνοεί την κατάκτηση της γνώσης μέσω ανακάλυψης και κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Arseven, 2015). Ο δεύτερος άξονας αποτελείται από 5 δηλώσεις ζητώντας από τους συμμετέχοντες να περιγράψουν τον βαθμό που κατανοούν τη μαθηματική μοντελοποίηση. Ο τρίτος άξονας 7 δηλώσεων αναφέρεται στη συνάφεια της μαθηματικής μοντελοποίησης με πραγματικά προβλήματα. Τέλος, ο τελευταίος άξονας των 10 δηλώσεων οι συμμετέχοντες, καλούνται να δηλώσουν τη συμφωνία ή διαφωνία τους, αναφορικά με τα οφέλη της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών. Οι συντελεστές alpha του Cronbach ως μέτρηση της εσωτερικής συνάφειας ήταν $\alpha > 0.700$ για το σύνολο των ερωτήσεων και για κάθε άξονα ξεχωριστά.

Το τρίτο μέρος περιλαμβάνει 12 ερωτήσεις και μία ερώτηση ελεύθερης απάντησης. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται η συλλογή δημογραφικών στοιχείων των συμμετεχόντων και τους ζητείται να προσδιορίσουν την εμπειρία τους, αν έχουν, αναφορικά με πρακτικές διδασκαλίας μαθηματικής μοντελοποίησης.

Διαδικασία

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω ηλεκτρονικού ερωτηματολογίου που δημιουργήθηκε με χρήση των φορμών Google (Google Forms) και ο χρόνος συλλογής των δεδομένων ήταν ένας μήνας (30/1/2021 έως 28/2/2021). Τα αποτελέσματα των ερωτήσεων των γνώσεων και στάσεων εκφράστηκαν με τη μορφή τόσο μέσων όρων και τυπικών αποκλίσεων όσο και διαμέσων και τεταρτημορίων. Οι διαφορές ελέγχθηκαν με μη παραμετρικούς ελέγχους Mann-Whitney για δύο ομάδες και Kruskal-Wallis για άνω των δύο ομάδων. Η συσχέτιση έγινε με τους συντελεστές Pearson's και Spearman's ενώ για διακριτές μεταβλητές η συσχέτιση έγινε με τον έλεγχο Pearson's χ^2. Συνολικά το ερωτηματολόγιο στάλθηκε σε 96 σχολεία και σε 43 φροντιστήρια σε σύνολο 280 εκπαιδευτικών και απάντησαν οι 153, ποσοστό απόκρισης 54%.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται το επίπεδο γνώσης και στάσης των συμμετεχόντων. Ο μέσος όρος των γνώσεων κυμάνθηκε στο 8,5 (1,3) και η διάμεσος στο 9,0 (8,0-9,0) με άριστα το 11. Ως προς τις στάσεις οι μέσοι όροι ήταν αρκετά υψηλοί δηλώνοντας υψηλή συμφωνία με 4,8 (0,5) για τις στάσεις συνολικά 5,0 (0,5) για τον άξονα «κονστρουκτιβισμός» 4,7 (0,5) για την «κατανόηση» 4,8 (0,6) για την «σχετικότητα με πραγματική ζωή» και 4,5 (0,6) για τον άξονα ερωτήσεων «κινητοποίηση και ενδιαφέρον».

Πίνακας 1. Περιγραφικά στατιστικά ερωτήσεων γνώσης και στάσης των εκπαιδευτικών μαθηματικών του Νομού Ηρακλείου

	ΜΟ (ΤΑ)*	Διάμεσος ** (Ενδ.Εύρος)	Ελάχιστο-Μέγιστο	KS (p)***
Γνώσεις	8,5 (1,3)	9,0 (8,0-9,0)	5-10	<0,001
Στάσεις συνολικά	4,8 (0,5)	4,8 (4,5-5,0)	3,1-6	0,030
Κονστρουκτιβιστικός χαρακτήρας της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης	5,0 (0,5)	5,0 (4,8-5,2)	2,7-6	<0,001
Κατανόηση	4,7 (0,5)	4,8 (4,4-5,0)	2,8-5,8	<0,001
Σχετικότητα προβλημάτων με πραγματική ζωή	4,8 (0,6)	4,9 (4,4-5,1)	2,7-6	<0,001
Κινητοποίηση και ενδιαφέρον στους μαθητές	4,5 (0,6)	4,6 (4,2-4,9)	2,6-6	0,053

* Μ.Ο: Μέσος όρος, (Τ.Α): τυπική απόκλιση **Διάμεσος (ενδοτεταρτιμοριακό Εύρος) *** KS (p) Kolmogorov Smirnov p

Η ποιοτική ερώτηση 12, στην οποία ζητήθηκε να δοθεί ένας ορισμός της μαθηματικής μοντελοποίησης, έδειξε ότι 103 από τους 153 που απάντησαν, οι 25 (24,3%) έδωσαν έναν «εξαιρετικό» ορισμό, για 34 (33,0%) ο ορισμός ήταν «καλός» για 29 (28,2%) «μέτριος» και για 15 (14,6%) ερωτώμενους «ελλιπής».

Οι συντελεστές Pearson και Spearman συσχέτισης της γνώσης με τη στάση παρουσιάζονται στον Πίνακα 2. Εμφανίζεται ασθενής συσχέτιση (r<0,300) μεταξύ της γνώσης και της στάσης των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Πίνακας 2. Συσχέτιση της γνώσης και των αξόνων της στάσης των ερωτώμενων για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης.

	Γνώσεις			
	Spearman's r	p	Pearson's r	p
Κονστρουκτιβιστικός χαρακτήρας της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης	0,199	0,014	0,270	<0,001
Κατανόηση	0,178	0,028	0,178	0,028
Σχετικότητα προβλημάτων με πραγματική ζωή	0,135	0,095	0,149	0,066
Κινητοποίηση και ενδιαφέρον στους μαθητές	0,159	0,05	0,169	0,036
Σύνολο	0,208	0,01	0,238	0,003

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η έρευνα ανέδειξε ότι, σε ένα δείγμα 153 εκπαιδευτικών ιδιωτικού και δημοσίου τομέα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης η γνώση τους είναι αρκετά καλή αναφορικά με τις βασικές αρχές της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί έχουν κάποια δυσκολία στο να προσδιορίσουν επακριβώς την έννοια, όπως προκύπτει από την ανοικτή ερώτηση του ερωτηματολογίου. Στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία ο Asempapa (2016) στο τεστ πεδίου, όπου χρησιμοποιείται το ίδιο ερωτηματολόγιο, παρατηρείται ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν παρόμοιες γνώσεις με Μ.Ο=9,51 οι οποίες αποτυπώνονται στα υψηλά ποσοστά των σωστών απαντήσεων. Όμως, στην ανοικτή ερώτηση για τον ορισμό της μαθηματικής μοντελοποίησης τα ποσοστά που δίνουν «καλές» και «εξαιρετικές» απαντήσεις είναι λίγο χαμηλότερα από αυτά της παρούσας έρευνας.

Παρόμοια ήταν και τα αποτελέσματα στις έρευνες Yu & Chan (2011) και Frejd (2012). Στην τελευταία έρευνα μόλις το 50% των ερωτηθέντων γνώριζε την έννοια της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης ενώ παράλληλα φαίνεται να την συγχέουν με τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Σε σχετική έρευνα (Bautista et al., 2014) οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί είχαν εσφαλμένες ερμηνείες σχετικά με την έννοια της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης θεωρώντας την ταυτόσημη με τη βήμα -βήμα μίμηση της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού.

Ο άξονας με τον υψηλότερο μέσο όρο των ερωτήσεων στάσης ήταν ο κονστρουκτιβισμός Μ.Ο=5,0. Αυτό σημαίνει ότι οι διερευνητικές δεξιότητες που αναπτύσσονται μέσω της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελο-ποίησης, βοηθούν στην εννοιολογική κατανόηση. Η έρευνα του Asempapa (2016) έδωσε παρεμφερή αποτελέσματα με ΜΟ=5,06 όπως και των Yu & Chan (2011). Δυσκολίες στην κατανόηση του κονστρουκτιβιστικού χαρακτήρα της μοντελοποίησης εμφάνισαν και οι εκπαιδευτικοί σε άλλη έρευνα (Kuntze et al., 2013). Οι έρευνες αυτές ανέδειξαν την αδυναμία των εκπαιδευτικών να συνδέσουν το πραγματικό πρόβλημα με το μαθηματικό μοντέλο.

Ως προς την προσωπική τους κατανόηση τα αποτελέσματα στον δεύτερο άξονα δηλώσεων αποτύπωσαν τη δυσκολία των εκπαιδευτικών στην υλοποίηση των πρακτικών της. Παρόμοια είναι και τα αποτελέσματα στην έρευνα του Asempapa (2016) που έδωσε ΜΟ=4,53 (ΤΑ=0,77) και τα οποία δείχνουν μια μέτρια κατανόηση. Σε παρόμοια σχετική έρευνα οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν ως εμπόδιο τον χρόνο και τη λεκτική διατύπωση των προβλημάτων (Kaiser et al, 2006). Παρεμφερή αποτελέσματα έδωσαν και άλλες έρευνες, Yu & Chang, (2011), Tan & Ang, (2013), Jacobs & Durandt (2016), στις οποίες αφενός αποτυπώνεται η θετική στάση τους απέναντι στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης και αφετέρου η έλλειψη παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου, ώστε να μπορούν να διαχειριστούν τόσο θέματα κατανόησης όσο και προβλήματα χρόνου.

Οι απαντήσεις του άξονα «Σχετικότητα με πραγματική ζωή» είχε τη $2^{η}$ υψηλότερη βαθμολογία με Μ.Ο=4,8. Πιο συγκεκριμένα, οι ερωτηθέντες εκπαιδευτικοί συμφώνησαν στην πλειοψηφία τους, στη χρησιμότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης στην επίλυση προβλημάτων καθημερινής ζωής που συμβάλλει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ο Asempapa (2016) έδωσε ΜΟ=5,05 (ΤΑ=0,58) χρησιμοποιώντας το ίδιο ερωτηματολόγιο. Ωστόσο, στην ανοικτή ερώτηση των γνώσεων δεν ανέφεραν ότι τα προβλήματα μοντελοποίησης πρέπει να προέρχονται από πραγματικά σενάρια. Στις σχετικές έρευνες οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν τη χρησιμότητα και τη συνάφεια της στην επίλυση προβλημάτων καθημερινής ζωής (Yu & Chang, 2011). Αντίθετα, σύμφωνα με τον Gould (2013), οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν ότι οι καταστάσεις μοντελοποίησης πρέπει να προέρχονται από πραγματικά προβλήματα.

Αναφορικά με τα οφέλη της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης στους μαθητές, οι περισσότεροι από τους ερωτηθέντες αφενός αναγνωρίζουν τα οφέλη της, όμως εμφανίζονται διχασμένοι ανάμεσα στη διδασκαλία των απλών προβλημάτων ή προβλημάτων μοντελοποίησης. Εντούτοις, αναγνωρίζουν ότι κάνει τη διδασκαλία των μαθηματικών πιο ενδιαφέρουσα, ευνοεί τη μάθηση και προετοιμάζει καλύτερα τους μαθητές. Οι σχετικές έρευνες (Frejd, 2012; Gould, 2013) αποκαλύπτουν ότι οι εκπαιδευτικοί αξιολογούν θετικά τη διδασκαλία της και συμφωνούν ότι κινητοποιεί τους μαθητές τόσο στο μάθημα των μαθηματικών όσο και στην ενασχόλησή τους με την επίλυση καθημερινών πρακτικών προβλημάτων.

Από τις συσχετίσεις που έγιναν μεταξύ των γνώσεων και των στάσεων των συμμετεχόντων στην έρευνα, προέκυψε θετική - έστω και ασθενής - συνολική συσχέτιση. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της γνώσης των εκπαιδευτικών και της στάσης τους απέναντι στον κονστρουκτιβιστικό χαρακτήρα της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης. Επίσης, προέκυψε ότι οι εκπαιδευτικοί με καλή γνώση, έχουν κατανοήσει τις πρακτικές της και μπορούν να την εντάξουν στο μάθημά τους. Με βάση τα ευρήματα, η γνώση τους σχετίζεται με τη στάση τους αναφορικά με την κινητοποίηση και το ενδιαφέρον που προκαλεί στους μαθητές. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί που υποστηρίζουν τον κονστρουκτιβιστικό χαρακτήρα της μοντελοποίησης, αξιολογούν θετικά τα οφέλη της αναφορικά με την κινητοποίηση και το ενδιαφέρον που προκαλεί στους μαθητές τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Albarracín, D., Zanna, M. P., Johnson, B. T., & Kumkale, G. T. (2005). Attitudes: Introduction and Scope. In *The handbook of attitudes*. (pp. 3-19). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Arseven, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Universal Journal of Educational Research*, *3*(12), 973-980.

Asempapa, R. S. (2016). *Developing an Instrument to Assess Teachers? Knowledge of the Nature of Mathematical Modeling and Their Attitude Toward Such Modeling*. Ohio University.

Bautista, A., Wilkerson, M., Tobin, R., & Brizuela, B. (2014). Mathematics teachers' ideas about mathematical models: A diverse landscape. *PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)*, *9*. https://doi.org/10.30827/pna.v9i1.6107

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Chapman, O. (2006). Classroom Practices for Context of Mathematics Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 211-230. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, *15*, 13-33. https://doi.org/10.1080/0260747890150102

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 147-164). Macmillan Publishing Co, Inc.

Ferri, R. B. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *4*(2).

Frejd, P. (2012). Teachers' conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary school [article]. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(5), 17-40. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:liu:diva-89496

Gould, H. (2013). Teachers' Conceptions of Mathematical Modeling.

Houston, K. (2009). *How to Think Like a Mathematician : A Companion to Undergraduate Mathematics*. https://doi.org/10.1017/CBO9780511808258

Jacobs, G. J., & Durandt, R. (2016). Attitudes of pre-service mathematics teachers towards modelling: A South African inquiry. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(1), 61-84.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, *38*(2), 82-85. https://doi.org/10.1007/BF02655882

Kuntze, S., Siller, H.-S., & Vogl, C. (2013). Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling–an empirical study with Austrian teachers. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 317-326). Springer.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Sturgill, R. S. A., & J, D. (2019). Mathematical modeling: Issues and challenges in mathematics education and teaching. *Editorial Team*, *11*(5), 71.

Tan, L. S., & Ang, K. C. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling–A case study. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 373-383). Springer.

Yu, S.-Y., & Chang, C.-K. (2011). What did Taiwan mathematics teachers think of model-eliciting activities and modelling teaching? *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 147-156.

Μαθηματικών, Α. Π. Σ.-Δ. Ε. Π. Π. Σ. (2003). *Παιδαγωγικό Ινστιτούτο*.

ΜΑΘΗΤΕΣ 'ΕΠΑΝΕΦΕΥΡΟΥΝ' ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ

Κωνσταντίνου Γιάννης, Τριανταφύλλου Χρυσαυγή

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

gianniskon2112@gmail.com, chrtriantaf@math.uoa.gr

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθεί η εξέλιξη της διαδικασίας 'επανεφεύρεσης' της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης μιας ομάδας πέντε μαθητών Β΄ Λυκείου στην προσπάθειά τους να λύσουν ένα πρόβλημα κινηματικής. Το πρόβλημα αφορούσε τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου της Formula 1 και τους παρουσιάστηκε με τη μορφή βίντεο. Τα ερευνητικά δεδομένα είναι οι συζητήσεις της ομάδας των μαθητών καθώς και οι γραπτές απαντήσεις των μαθητών και αναλύθηκαν σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Leont'ev (1978). Τα αποτελέσματα ανέδειξαν δύο κύκλους δράσεων των μαθητών στην δραστηριότητα, οι οποίοι έχοντας ως στόχο την επίλυση του προβλήματος στο αυθεντικό του πλαίσιο, οδηγήθηκαν στην επανεφεύρεση της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Freudenthal (1991) αναφέρθηκε στη 'αντί-διδακτική αναστροφή' σύμφωνα με την οποία αφετηρία της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί το τέλος των αποτελεσμάτων της Μαθηματικής Επιστήμης, σε αντίθετη πορεία δηλαδή από την ιστορική πορεία και εξέλιξη των Μαθηματικών. Η εναλλακτική πρόταση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education - RME) βλέπει τα Μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μαθηματικοποιήσουν ρεαλιστικές καταστάσεις και να επανεφεύρουν μαθηματικές έννοιες με την κατάλληλη καθοδήγηση (Freudenthal, 1973).

Ταυτόχρονα, η μελέτη και κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης, όπως της εφαπτομένης καμπύλης, του ρυθμού μεταβολής και του ολοκληρώματος, δυσκολεύει αρκετά τους μαθητές, καθώς οι περισσότεροι καταφεύγουν σε υπολογιστικές διαδικασίες και σπάνια κατανοούν την αναγκαιότητα αλλά και τη σημασία αυτών των υπολογισμών (Bos, Doorman & Piroi, 2020; Biza, Christou & Zachariades, 2008; Mkhatshwa, 2020). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση κατανόησης της έννοιας του ολοκληρώματος, οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές αφορούν κυρίως την αναγνώριση της φυσικής ποσότητας που προκύπτει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (Nguyen & Rebello, 2011). Ερευνητές όπως οι Doorman και Gravemeijer (2009) θεωρούν ότι η κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης ευνοείται όταν γίνεται μέσω εννοιών Φυσικής και ιδιαίτερα της κινηματικής, δηλαδή της μελέτης της κίνησης ενός σώματος. Συγκεκριμένα, πολλοί ερευνητές προτείνουν τη διδακτική προσέγγιση της έννοιας του ολοκληρώματος μέσω του εμβαδού που προκύπτει από το γράφημα ταχύτητας-χρόνου, όπως ιστορικά επεξεργάστηκε την έννοια ο N. Oresme (Doorman, M., & Van Maanen, 2008; Farmaki, Klaudatos & Paschos, 2004). Ταυτόχρονα, θωρείται κρίσιμο το μαθηματικό έργο που δίνεται στους μαθητές να είναι ενδιαφέρον και να υποστηρίζει την ανάπτυξη μεθόδων και συλλογισμών (Bos et al., 2020).

Η παρούσα έρευνα μελετά πώς πέντε μαθητές Β΄ Λυκείου στην προσπάθειά τους να λύσουν ένα ανοιχτό πρόβλημα κινηματικής ‘επανεφηύραν’ την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Το πρόβλημα αφορούσε την εύρεση του μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου της Formula 1 με τη βοήθεια ενός βίντεο που έδειχνε την ταχύτητά του σε κάθε χρονική στιγμή.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

ΕΕ1: Πώς εξελίχθηκε η δραστηριότητα ‘επανεφεύρεσης’ της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης από τους πέντε μαθητές;

ΕΕ2: Ποιοι παράγοντες επηρέασαν την εξέλιξη αυτής της δραστηριότητας;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Θέματα ‘επανεφεύρεσης’ μαθηματικών εννοιών έχουν μελετηθεί μέσα από γνωστικά πλαίσια όπως της οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης (Treffers, 1987) εστιάζοντας στα μοντέλα που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της επανεφεύρεσης. Για παράδειγμα, οι ερευνητές Bos, Doorman και Piroi (2020) μελέτησαν τον τρόπο που 44 ομάδες μαθητών Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου επανεφηύραν την κλίση μιας καμπύλης σε ένα πρόβλημα σχεδίασης μιας τσουλήθρας.

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η κοινωνικο-πολιτισμική οπτική στη μελέτη των δράσεων των μαθητών καθώς εξελίσσουν τη γνώση τους στην κατεύθυνση της ‘επανεφεύρεσης’ της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα, αξιοποιείται η Θεωρία Δραστηριότητας (Leont’ev, 1978). Σύμφωνα με τον Leont’ev, κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα προσανατολίζεται σε ένα κίνητρο και αποτελείται από μια σειρά δράσεων. Για να αντιληφθεί κάποιος μια ανθρώπινη δραστηριότητα θα πρέπει να παρακολουθήσει και να ερμηνεύσει τις δράσεις μέσω των οποίων η δραστηριότητα αυτή πραγματώνεται. Οι δράσεις είναι διαδικασίες που έχουν συγκεκριμένους και συνειδητούς στόχους και είναι απαραίτητες για να μεταφέρουν στην πραγματικότητα το κίνητρο της κάθε δραστηριότητας. Τέλος, για να επιτευχθεί λειτουργικά ο στόχος της κάθε δράσης είναι απαραίτητες συγκεκριμένες λειτουργίες οι οποίες αποτελούν τις μεθόδους υλοποίησής της. Οι λειτουργίες με την σειρά τους υλοποιούνται μέσω κάποιων προϋποθέσεων οι οποίες αποτελούν τα εργαλεία επίτευξής τους (Leont' ev, 1978). Οι Jaworski και Potari (2009) συνοψίζουν τα παραπάνω σε μια τριπλή αλυσιδωτή σχέση: Δραστηριότητα ↔ κίνητρο, δράσεις ↔ στόχοι, λειτουργίες ↔ συνθήκες. Ταυτόχρονα, η Δραστηριότητα παρουσιάζει μία εξελικτική μορφή, δηλαδή χαρακτηρίζεται από συνεχείς αλλαγές και μεταμορφώσεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μια ομάδα πέντε μαθητών (τέσσερα κορίτσια και ένα αγόρι) της Β΄ Λυκείου. Ήταν διάρκειας δύο διδακτικών ωρών. Ο εκπαιδευτικός προσπάθησε να ενθαρρύνει τους μαθητές να επικοινωνούν μεταξύ τους και να εφαρμόσουν τις ιδέες τους, χωρίς να έχει καθοδηγητικό ρόλο. Πριν τη διδακτική παρέμβαση και δεδομένου ότι το πλαίσιο του προβλήματος ήταν η κινηματική ο ερευνητής/εκπαιδευτικός της τάξης συζήτησε με συναδέλφους του Φυσικούς με σκοπό να είναι προετοιμασμένος για τους ενδεχόμενους τρόπους προσέγγισης των μαθητών.

Το πρόβλημα

Το μήκος πίστας της Formula 1

Θα παρακολουθήσετε σε βίντεο την προσπάθεια του οδηγού της Formula 1, Lewis Hamilton, ώστε να κάνει τον ταχύτερο γύρο σε πίστα στο Ισπανικό Grand Prix (2017). Οι πληροφορίες που μας παρέχει το βίντεο είναι η στιγμιαία ταχύτητα (σε km/h) του αγωνιστικού αυτοκινήτου (Εικόνα 1) καθώς και αν επιταχύνει (Εικόνα 2) ή επιβραδύνει (Εικόνα 3). Μπορείτε με τις πληροφορίες που σας δίνονται να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της πίστας;

https://www.youtube.com/watch?v=2e1krmYs_HM&t=14s)

		
Εικόνα 1	Εικόνα 2	Εικόνα 3

Η σωστή απάντηση είναι μια από τις παρακάτω:

(Α) 4.500m (Β) 4.600m (Γ) 4.550m (Δ) 4.700m (Ε) 4.650m

Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας δόθηκε στους μαθητές ένας πλήρης πίνακας των ταχυτήτων του αγωνιστικού αυτοκινήτου ανά δευτερόλεπτο

(Πίνακας 1), όπως επίσης χρησιμοποιήθηκε και το GeoGebra από τον εκπαιδευτικό για την διευκόλυνση των χρονοβόρων υπολογισμών.

Ερευνητικά δεδομένα και ανάλυσή τους

Έγινε μαγνητοφώνηση και βιντεοσκόπηση της διδασκαλίας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν οι συζητήσεις των μαθητών και του εκπαιδευτικού και αναλύθηκαν σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Leont'ev (1978). Καταγράφηκαν οι δράσεις των μαθητών και οι στόχοι της κάθε δράσης (ΕΕ1). Στη συνέχεια εντοπίσαμε αλλαγές στην εξέλιξη της δραστηριότητας των μαθητών σε σχέση με τους στόχους και τα εργαλεία που χρησιμοποίησαν και προσπαθήσαμε να ανιχνεύσουμε τους παράγοντες που επηρέασαν αυτή την εξέλιξη της δραστηριότητας των μαθητών (ΕΕ2).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το κίνητρο των μαθητών ήταν η επίλυση του προβλήματος που τους δόθηκε, δηλαδή η εύρεση του μήκους της πίστας της Formula 1.

Οι μαθητές ανέπτυξαν 2 κύκλους Δράσεων. Ο 1ος κύκλος Δράσεων είχε στόχο τον υπολογισμό του μήκους με τη βοήθεια της μέσης ταχύτητας του αγωνιστικού αυτοκινήτου σε διάφορα χρονικά διαστήματα. Ο 2ος κύκλος Δράσεων των μαθητών είχε στόχο τον υπολογισμό του μήκους ως αριθμητική τιμή του εμβαδού ενός χωρίου.

1ος κύκλος Δράσεων με στόχο τον υπολογισμό του μήκους με τη βοήθεια της μέσης ταχύτητας του αγωνιστικού αυτοκινήτου.

Δράση 1: Χωρισμός της κίνησης σε διαστήματα σύμφωνα με το είδος της κίνησης (επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη).

Η προσπάθεια αναγνώρισης του είδους της κίνησης τούς οδήγησε στην ιδέα να διαχωρίσουν την κίνηση ανά είδος, σε επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη.

Απόσπασμα 1

Αναστασία: δεν μπορούμε να το σπάσουμε σε χρονικές στιγμές;

Γιώργος: να το περνάμε ανά διαστήματα, δηλαδή όσο κάνει επιταχυνόμενη να το πάρουμε αυτό ως ένα διάστημα (…) αλλά δεν είναι η επιτάχυνση σταθερή. Δεν νομίζω ότι μπορούμε να πάρουμε τους τύπους της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.

Η παραπάνω παρατήρηση των μαθητών τούς οδήγησε στην απόρριψη αυτής της προσπάθειας.

Δράση 2: Εύρεση της μέσης ταχύτητας σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα

Στη συνέχεια οι μαθητές σκέφτηκαν ότι θα τους ήταν χρήσιμες οι ταχύτητες σε κάθε δευτερόλεπτο ώστε να μπορούν να επιλέξουν αυτές που θα χρειαστούν για τους υπολογισμούς τους, όμως ως ανασταλτικός παράγοντας για αυτό λειτούργησε ότι η διαδικασία αυτή θα ήταν πολύ χρονοβόρα.

Τότε ο εκπαιδευτικός για την διευκόλυνση των υπολογισμών δίνει τον πίνακα με τις τιμές της ταχύτητας σε m/s και σε km/h για κάθε δευτερόλεπτο (Πίνακας 1).

Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)
8	308	85,56	28	294	81,67	48	216	60,00	68	132	36,67
9	314	87,22	29	191	53,06	49	236	65,56	69	167	46,39
10	318	88,33	30	159	44,17	50	256	71,11	70	205	56,94
11	320	88,89	31	150	41,67	51	253	70,28	71	220	61,11
12	322	89,44	32	181	50,28	52	247	68,61	72	152	42,22
13	323	89,72	33	214	59,44	53	259	71,94	73	131	36,39
14	324	90,00	34	238	66,11	54	278	77,22	74	150	41,67
15	239	66,39	35	258	71,67	55	291	80,83	75	117	32,50
16	171	47,50	36	166	46,11	56	304	84,44	76	92	25,56
17	150	41,67	37	120	33,33	57	312	86,67	77	91	25,28
18	186	51,67	38	102	28,33	58	227	63,06	78	98	27,22
19	200	55,56	39	120	33,33	59	101	28,06	79	135	37,50
20	223	61,94	40	164	45,56	60	73	20,28	80	179	49,72
21	243	67,50	41	196	54,44	61	81	22,50	81	218	60,56
22	249	69,17	42	235	65,28	62	106	29,44	82	241	66,94
23	256	71,11	43	257	71,39	63	155	43,06	83	257	71,39
24	264	73,33	44	266	73,89	64	192	53,33	84	276	76,67
25	273	75,83	45	168	46,67	65	206	57,22	85	287	79,72
26	282	78,33	46	153	42,50	66	145	40,28	86	295	81,94
27	291	80,83	47	189	52,50	67	128	35,56	87	300	83,33

Πίνακας 1: Τιμές ταχύτητας του αγωνιστικού αυτοκινήτου σε km/h και m/s από το $8^{ο}$ έως το $87^{ο}$ δευτερόλεπτο.

Οι μαθητές στην επόμενη προσπάθεια επιχειρούν να υπολογίσουν τον μέσο όρο των ταχυτήτων και να τον συνδέσουν με τον τύπο της μέσης ταχύτητας από τη Φυσική.

Απόσπασμα 2

Δέσποινα: παίρνουμε όλες τις τιμές [της ταχύτητας] μαζί και τις διαιρούμε δια το πόσες είναι.

Εκπαιδευτικός: και την απόσταση πως θα την υπολογίσουμε;

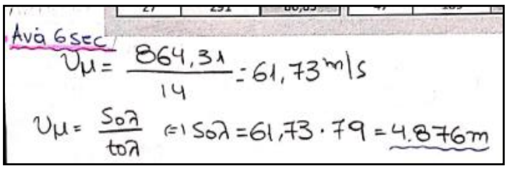
Δέσποινα: ταχύτητα δια χρόνο (λέει διστακτικά), όχι;

Γιώργος: θα πάρουμε τον τύπο x = u επί t.

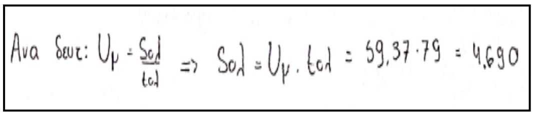
Αρχικά χωρίζουν την κίνηση σε διαστήματα έξι δευτερολέπτων και υπολογίζουν το μήκος (Εικόνα 4). Κατόπιν, απορρίπτουν την απάντησή τους εξαιτίας της απόκλισης από τα δοσμένα αποτελέσματα του προβλήματος.

Δράση 3: Εύρεση της μέσης ταχύτητας ανά 1 sec

Στη συνέχεια σκέφτονται ότι καλύτερα θα ήταν να υπολογίσουν τη μέση ταχύτητα ανά 1 sec. Επιλέγοντας το διάστημα 1 sec οι μαθητές πήραν το αποτέλεσμα 4.690 μέτρων με απόκλιση 30 μέτρων από μια δοθείσα επιλογή του προβλήματος που ήταν 4.660 μέτρα την οποία όμως απέρριψαν (Εικόνα 5).



Εικόνα 4. Φύλλο εργασίας Δέσποινας



Εικόνα 5. Φύλλο εργασίας Ντίνας

Ο διαχωρισμός των διαστημάτων και η προσπάθεια για καλύτερη προσέγγιση οδήγησε τους μαθητές στην ανάγκη να επιλέγουν όλο και μικρότερο διάστημα. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές ανάπτυξαν την αναγκαιότητα και τη σημασία της διαμέρισης ενός διαστήματος ως μέσον για την μεγαλύτερη ακρίβεια: «*δεν ξέρω αν θα το εκφράσω σωστά...ότι όσο περισσότερες τιμές πάρουμε....και τις διαιρέσουμε με το πλήθος τους, τόσο πιο σωστή θα είναι η μέτρηση.*» (Δέσποινα).

2ος Κύκλος Δράσεων με στόχο τον υπολογισμό του μήκους ως αριθμητική τιμή του εμβαδού ενός χωρίου

Ο Γιώργος προτείνει να σχεδιαστεί το γράφημα της ταχύτητας και στη συνέχεια συνειδητοποιεί ότι το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε γράφημα ταχύτητας – χρόνου είναι ίσο αριθμητικά με την συνολική απόσταση που διήνυσε το αγωνιστικό αυτοκίνητο, αναλογιζόμενος σχετικές γνώσεις του από το μάθημα της Φυσικής.

Απόσπασμα 3

Γιώργος: να φτιάξουμε μια συνάρτηση [εννοεί το γράφημα μιας συνάρτησης], να κάνουμε τον κάτω να είναι ο άξονας του χρόνου και ο $y'y$ ο άξονας των ταχυτήτων

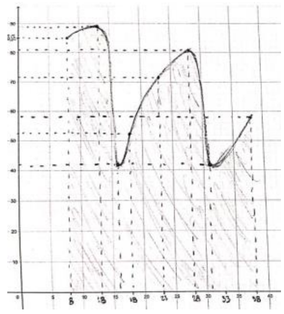
Αναστασία: θέλουμε να βρούμε το μήκος.

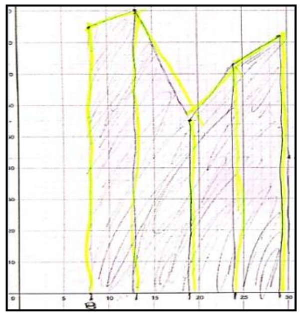
Γιώργος: αααααα! αν το κάνουμε σε διάγραμμα και το εμβαδό κάτω από αυτό που θα φτιάξουμε θα είναι το Δx(μετατόπιση).

Έτσι οι μαθητές προχωρούν σε ένα νέο κύκλο δράσεων που είχε στόχο τον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής του εμβαδού του χωρίου που σχηματίζεται ανάμεσα στο γράφημα της ταχύτητας και του άξονα του χρόνου.

Δράση 1: Σχεδίαση γραφημάτων

Αρχικά οι μαθητές σχεδίασαν τα γραφήματα για τα πρώτα 20 δευτερόλεπτα από τις τιμές του Πίνακα 1. Η επιλογή των μαθητών να σχεδιάσουν το γράφημα με καμπύλη έγινε στην προσπάθειά τους να έχουν μια όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική αναπαράσταση για την απεικόνιση της πραγματικότητας. (Εικόνες 6, 7).





Εικόνα 6. Γράφημα της Ίριδας **Εικόνα 7. Γράφημα της Δέσποινας**

Δράση 2: υπολογισμός εμβαδού χωρίου

Οι μαθητές αναγνωρίζουν την αδυναμία εύρεσης του εμβαδού σε καμπυλόγραμμο χωρίο, οπότε θα προχωρήσουν στον υπολογισμό του εμβαδού στα γραφήματα με την τεθλασμένη γραμμή. Για τον υπολογισμό του εμβαδού οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα ως τραπέζια για το κάθε διάστημα που έχουν επιλέξει.

Απόσπασμα 4

Ίριδα: τώρα σχήματα... αυτό είναι τραπέζιο.

Δέσποινα: τραπέζιο άρα $E = \frac{(\beta+B)\upsilon}{2}$.

Η διαφοροποίηση αυτή έπαιξε σημαντικό ρόλο στην πορεία για την διαμόρφωση διαισθητικά του μοντέλου της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Οι μαθητές καταλαβαίνουν και επισημαίνουν ότι ο υπολογισμός του εμβαδού στο ευθύγραμμο γράφημα θα είναι μια προσέγγιση.

Δράση 3: Χρήση ψηφιακού εργαλείου για τον αυτόματο υπολογισμό χωρίων

Στην συνέχεια οι μαθητές υπολόγισαν τα εμβαδά των τραπεζίων που είχαν σχεδιάσει, όμως για τον τελικό υπολογισμό του μήκους της πίστας χρησιμοποιήθηκε από τον εκπαιδευτικό το πρόγραμμα GeoGebra για την διευκόλυνση των υπολογισμών. Στην αρχή επέλεξαν το χρονικό διάστημα των έξι δευτερολέπτων και έπειτα μείωναν το διάστημα κατά ένα δευτερόλεπτο έως ότου έφτασαν στο διάστημα ενός δευτερολέπτου. Η απόσταση που υπολόγισαν στο διάστημα ενός δευτερολέπτου ήταν 4.649 μέτρα με απόκλιση 1 μέτρου από την απάντηση (δ) 4.650 την οποία και επέλεξαν.

Δράση 4: Εξήγηση της καλύτερης προσέγγισης

Έχοντας ως κύριο στόχο την επίλυση του προβλήματος οι μαθητές επιδιώκουν την καλύτερη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Στην προσπάθεια αυτή εμφανίζεται, σε άτυπη μορφή, η έννοια του ορίου.

Απόσπασμα 5

Εκπαιδευτικός: ωραία άρα πως θα μπορέσουμε την προσέγγιση που είπε πριν η Ίριδα να την κάνουμε καλύτερη;

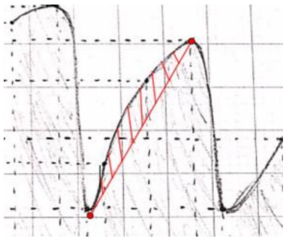
Αναστασία: γιατί αλλάζει συνεχώς η ταχύτητα του, επειδή είναι φόρμουλα οπότε όσο πιο λίγα δευτερόλεπτα πάρουμε εμείς τόσο πιο κοντά θα είμαστε.

Επίσης στο παρακάτω απόσπασμα υπάρχει μια άτυπη αναφορά στα αθροίσματα Riemann η οποία προέκυψε στη διάρκεια της συζήτησης για το είδος των γραφημάτων.

Απόσπασμα 6

Γιώργος: όλα τείνουν προς αυτό, το ένα είναι μεγαλύτερο, το άλλο είναι μικρότερο και πετύχαμε μια [προσέγγιση] που είναι σχεδόν ίσο με αυτό που θέλουμε.

Ο μαθητής παρατηρεί ότι οι υπολογισμοί από τα τραπέζια άλλοτε είναι μεγαλύτεροι και άλλοτε μικρότεροι από το καμπυλόγραμμο γράφημα αφού είτε θα λείπει ένα κομμάτι μηνίσκου είτε θα περισσεύει (Εικόνα 8).



Εικόνα 8. Η παρατήρηση του Γιώργου

Ταυτόχρονα, παρατηρούμε την αλλαγή στον τρόπο έκφρασης των μαθητών. Χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως ‘όλα τείνουν προς...’ ή ‘όσο πιο λίγα δευτερόλεπτα πάρουμε εμείς τόσο πιο κοντά θα είμαστε’ οι οποίες αφορούν διαισθητικές αντιλήψεις της έννοιας του ορίου. Σε αυτό τον κύκλο δράσεων των μαθητών παρατηρούμε την ‘επανεφεύρεση’ σε διαισθητικό επίπεδο της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσης με την μέθοδο του τραπεζίου.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθεί η εξέλιξη της διαδικασίας ‘επανεφεύρεσης’ της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης από μία ομάδα πέντε μαθητών Β΄ Λυκείου στην προσπάθειά τους να λύσουν ένα πρόβλημα κινηματικής. Αναγνωρίσαμε δύο κύκλους δράσεων των μαθητών, οι οποίοι είχαν διαφορετικούς στόχους και διαφορετικές λειτουργίες σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Leont’ev (1978). Ο 1ος κύκλος δράσεων είχε στόχο τον υπολογισμό του συνολικού μήκος της πίστας συνδυάζοντας τον μέσο όρο των ταχυτήτων με την μέση ταχύτητα του αγωνιστικού αυτοκινήτου σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Τα εργαλεία των μαθητών ήταν κυρίως αλγεβρικής φύσης, όπως ο υπολογισμός του μέσου όρου των ταχυτήτων για διαφορετικές διαμερίσεις του χρονικού διαστήματος της κίνησης του αυτοκινήτου. Επειδή το αποτέλεσμα διέφερε από τις δοθείσες επιλογές (κίνητρο της δραστηριότητας) αποφάσισαν να ξεκινήσουν έναν νέο κύκλο δράσεων προσεγγίζοντας το πρόβλημα μέσα από διαφορετική οπτική, χρησιμοποιώντας εργαλεία από το μάθημα της Φυσικής. Ο 2ος κύκλος δράσεων είχε στόχο τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της πίστας από το εμβαδόν κάτω από γράφημα ταχύτητας-χρόνου. Τα εργαλεία σε αυτόν τον κύκλο δράσεων είναι τα γραφήματα απεικόνισης της ταχύτητας. Παρατηρούμε την προσπάθειά των μαθητών για την εγγύτερη με την πραγματικότητα γραφική απεικόνιση της ταχύτητας του αυτοκινήτου στο διάστημα της κίνησής του. Ο στόχος τους για την καλύτερη γραφική απεικόνιση της κίνησης του αυτοκινήτου οδήγησε τους μαθητές στην ‘επανεφεύρεση’ της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσης με τη μέθοδο του τραπεζίου. Σε αυτό τους βοήθησε και η εξοικείωσή τους με την έννοια της ‘διαμέρισης’ ενός χρονικού διαστήματος από τον 1ο κύκλο δράσεων. Παράγοντες που συντέλεσαν σε αυτό ήταν το αυθεντικό πλαίσιο του προβλήματος που αποτελούσε το κίνητρο για τις προσπάθειές τους αλλά και το μέσον ανατροφοδότησης των δράσεών τους. Ταυτόχρονα, το ότι η ομάδα μοιράστηκε τους ίδιους στόχους και παρακολούθησε την εξέλιξή των δράσεών τους φάνηκε να υποστηρίζει τη δραστηριότητα που αναπτύχθηκε.

Τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν με σχετικές μελέτες ότι η ‘επανεφεύρεση’ των μαθηματικών εννοιών είναι μεν μια χρονοβόρα και απαιτητική διαδικασία αλλά είναι και εφικτή σε σχολικό επίπεδο (Bos et al., 2020). Παρότι στη παρούσα έρευνα, όπως και σε άλλες, οι μαθητές δεν φτάνουν στην τυπική μαθηματική γνώση, η ‘επανεφεύρεση’ έστω και σε άτυπο επίπεδο μπορεί να αποτελέσει μια γέφυρα σύνδεσης με την τυπική μαθηματική γνώση. Τέλος, η θεωρητική οπτική της κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης του Leont’ev (1978) βοηθά να παρακολουθήσουμε τις δράσεις ‘επανεφεύρεσης’ των μαθητών αλλά και τους παράγοντες που την επηρεάζουν, σε αντίθεση με άλλες έρευνες που επικεντρώνουν την προσοχή τους στο γνωστικό πλαίσιο και στα μαθηματικά μοντέλα που δημιουργούν οι μαθητές (π.χ. Doorman & Gravemeijer, 2009).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 53-70.

Bos, R., Doorman, M., & Piroi, M. (2020). Emergent models in a reinvention activity for learning the slope of a curve. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100773.

Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM*, 41(1-2), 199-211.

Doorman, M., & Van Maanen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal*, *22*(2), 4-14.

Farmaki, V., Klaudatos, N., & Paschos, T. (2004). Integrating the History of Mathematics in Educational Praxis. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2020). A socio-constructivist elaboration of realistic mathematics education. In *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 217-233). Springer, Cham.

Jaworski, B., & Potari, D. (2009). Bridging the macro-and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 219-236.

Leont’ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*.

Mkhatshwa, T. P. (2020). Calculus students’ quantitative reasoning in the context of solving related rates of change problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(2), 139-161.

Nguyen, D. H., & Rebello, N. S. (2011). Students’ understanding and application of the area under the curve concept in physics problems. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 7(1), 010112.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: *The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

«ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΗΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΚΥΚΛΟΥΣ» - ΜΙΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μπαλωμένου Αθανασία

Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία Πανεπιστημίου Πατρών

smpalom@upatras.gr

Η εργασία αφορά τη μελέτη του κύκλου ως εργαλείο σύγκρισης ευθυγράμμων τμημάτων στο περιβάλλον Cabri Geometry II, υπό το πρίσμα της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας δείχνει ότι μαθητές/τριες (13-14ετών) μετασχημάτισαν τη σύγκριση μηκών σε σύγκριση κυκλικών επιφανειών με ακτίνες ή διαμέτρους τα υπό σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα, προσδίδοντας στο εργαλείο «κύκλος» νέες χρήσεις. Το εργαλείο αφενός ενέπνευσε τους/τις μαθητές/τριες να οικοδομήσουν καινοτόμες στρατηγικές σύγκρισης μηκών, αφετέρου, οι μαθητές/τριες προσάρμοσαν το εργαλείο «κύκλος» για δικές τους χρήσεις, εμπλουτίζοντάς το σταδιακά με δυνατότητες για τις οποίες δεν ήταν αρχικά μελετημένο ότι υποστηρίζει.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην επιλογή και αξιοποίηση του εργαλείου για κύκλους από μαθητές/τριες (13-14 ετών) ως εργαλείο σύγκρισης ευθυγράμμων τμημάτων, στο πλαίσιο δραστηριότητας σύγκρισης μηκών σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, υπό το πρίσμα της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης (Rabardel, 1995). Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τα ψηφιακά εργαλεία επηρεάζουν και διαμορφώνουν τον τρόπο σκέψης και τις ενέργειες των μαθητών, συνεπώς και την ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης (Trouche, 2004; Jupri et al., 2015; Kieran & Drijvers, 2006). Επιπλέον, έρευνες δείχνουν ότι η τεχνολογία μπορεί να υποστηρίξει την οπτικοποίηση (visualization) αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, σε συνδυασμό με το δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών αντικειμένων (Drijvers & Barzel, 2012), κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλήματος από μαθητές/τριες, υποστηρίζοντας ταυτόχρονα διαδικασίες διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και γενίκευσης (Kieran & Drijvers, 2006). Στην παρούσα εργασία, αρχικά γίνεται αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο της εργαλειακής γένεσης (Rabardel, 1995; Trouche, 2004), με έμφαση στις διαδικασίες «οικοδόμησης εργαλείου» (instrumentation) και «τροποποίησης εργαλείου» (instrumentalization), σύμφωνα με τις οποίες γίνεται η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας. Ακολουθεί η μεθοδολογία της έρευνας, η ανάλυση των αποτελεσμάτων και συζήτηση πάνω σε αυτά, με στόχο την ανάδειξη όψεων εργαλειακής γένεσης σε στρατηγικές σύγκρισης μηκών που αναπτύσσουν μαθητές/τριες 13-14 ετών κατά την εμπλοκή τους σε μια δραστηριότητα ανοικτού τύπου και πολλαπλών επιλύσεων (Kordaki, 2015; Balomenou & Kordaki, 2009) στο περιβάλλον του Cabri Geometry II.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΣΙΟ

Κατά την εμπλοκή μαθητών με κατάλληλα διαμορφωμένες μαθηματικές δραστηριότητες σε ένα ψηφιακό περιβάλλον, αναπτύσσεται αυτόματα μια σχέση μεταξύ τεχνικών που δημιουργούνται από τους/τις μαθητές/τριες με τη χρήση του εργαλείου και μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τη θεωρία της εργαλειακής γένεσης (Rabardel, 1995), η σχέση αυτή αναλύεται σε δύο αμφίδρομες διαδικασίες: α) την «οικοδόμηση εργαλείου» (instrumentation) και β) την «τροποποίηση εργαλείου» (instrumentalization). Κατά την διαδικασία «οικοδόμησης εργαλείου» (instrumentation) αναπτύσσονται ή προσαρμόζονται σχήματα εργαλειακής δράσης (schemes of instrumented action), τα οποία σταδιακά διαμορφώνονται ως τεχνικές - τρόποι χρήσης του εργαλείου (tool) που επιτρέπουν στο υποκείμενο/μαθητή να ανταποκριθεί αποτελεσματικά σε δοσμένες δραστηριότητες (Artigue, 2002). Κατά την «οικοδόμηση εργαλείου» δεν αλλάζουν οι λειτουργικότητες του εργαλείου, αλλά τα προσαρτημένα σε αυτό γνωστικά σχήματα του μαθητή (Κυνηγός κ.ά., 2015). Το εργαλείο επιτρέπει στο υποκείμενο να αναπτύξει δραστηριότητα μέσα σε κάποια όρια: τους περιορισμούς του εργαλείου και τις εν δυνάμει χρήσεις του (tool affordances), (Gibson, 1977; Norman, 1999). Παράλληλα, υπάρχει η ταυτόχρονη διαδικασία «τροποποίησης εργαλείου» (instrumentalization), κατά την οποία το υποκείμενο διαμορφώνει και προσαρμόζει το εργαλείο για δικές του χρήσεις, εμπλουτίζοντάς το σταδιακά με δυνατότητες για τις οποίες αυτό δεν ήταν αρχικά μελετημένο ότι υποστηρίζει. Τελικά, το υποκείμενο μετασχηματίζει το εργαλείο (tool) σε ένα «νέο εργαλείο» (instrument) με άλλες ή «και» άλλες λειτουργικότητες σε σχέση με το αρχικό (Κυνηγός κ.ά., 2015), που προκύπτουν σύμφωνα με τις ατομικές ανάγκες και γνώσεις του υποκειμένου που το οικοδομεί. Το νέο εργαλείο (instrument) δεν υπάρχει αφ εαυτού, αλλά δημιουργείται καθώς το υποκείμενο το προσαρμόζει και το ενσωματώνει στις δραστηριότητές του προσδίδοντάς του νέες χρήσεις, ενώ ταυτόχρονα διαμορφώνει και επηρεάζει τον τρόπο σκέψης του υποκειμένου.

Στην παρούσα έρευνα, μελετάμε τις διαδικασίες «οικοδόμησης εργαλείου» και «τροποποίησης εργαλείου» κατά την εμπλοκή των μαθητών σε μια κατάλληλα διαμορφωμένη δραστηριότητα σύγκρισης, εστιάζοντας στο εργαλείο για κύκλους του Cabri Geometry II. Το ερευνητικό ερώτημα που προσεγγίζουμε είναι: *τι είδους στρατηγικές σύγκρισης μηκών οικοδομούν οι μαθητές/τριες της έρευνας εμπνεόμενοι από το εργαλείο για κύκλους του*

Cabri Geometry II και ταυτόχρονα, ποιες νέες χρήσεις προσδίδουν οι μαθητές/τριες στο εργαλείο αυτό;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μελέτη συνιστά μια ποιοτική έρευνα που έλαβε χώρα στο σχολικό εργαστήριο Πληροφορικής του Πειραματικού Γυμνασίου Πανεπιστημίου Πατρών. Δύο πλήρη τμήματα μαθητών της Β΄ τάξης του σχολείου (συνολικά 48 μαθητές/τριες, 13-14 ετών) συμμετείχαν σε αυτή την έρευνα. Οι μαθητές/τριες εργάστηκαν στο σχολικό εργαστήριο Πληροφορικής και διαπραγματεύτηκαν, ατομικά ο καθένας, μια δραστηριότητα σύγκρισης δύο δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων στο περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Cabri Geometry II, αξιοποιώντας εργαλεία της επιλογής τους. Ταυτόχρονα, κατέγραφαν τις τεχνικές σύγκρισης που ανέπτυσσαν σε ειδικά σχεδιασμένο φύλλο εργασίας περιγράφοντας και αιτιολογώντας συνοπτικά αυτές τις τεχνικές. Η διάρκεια εμπλοκής κάθε μαθητή με τη δραστηριότητα ήταν μια διδακτική ώρα. Προηγήθηκε μια φάση εξοικείωσης των μαθητών με βασικές λειτουργίες και εργαλεία του Cabri Geometry II. Αυτή η φάση είχε επίσης διάρκεια μίας διδακτικής ώρας για κάθε μαθητή. Το συγκεκριμένο εκπαιδευτικό λογισμικό επιλέχθηκε για τη συγκεκριμένη έρευνα σύγκρισης μηκών δεδομένου ότι αποτελεί ένα μικρόκοσμο δυναμικής γεωμετρίας με πληθώρα εργαλείων που υποστηρίζει τη δυναμική διαχείριση γεωμετρικών αντικειμένων, αλλά και την αξιοποίηση πολλαπλών, διασυνδεδεμένων και ταυτόχρονων αναπαραστάσεων ποικίλων μαθηματικών εννοιών (Balomenou et al., 2017). Η έρευνα ήταν προσαρμοσμένη σε πραγματικές συνθήκες της τάξης. Τα δεδομένα της έρευνας αποτελούν τα αρχεία Cabri με τις ενέργειες των μαθητών, τα φύλλα εργασίας των μαθητών, καθώς και τα βίντεο καταγραφής των ενεργειών των μαθητών με το λογισμικό Camtasia. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας έγινε υπό το πρίσμα της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η εργαλειακή γένεση αποτελεί μια πολύπλοκη και χρονοβόρα διαδικασία, η οποία δεν επιτυγχάνεται με την εμπλοκή των μαθητών σε μία μεμονωμένη ερευνητική δραστηριότητα. Στη συγκεκριμένη έρευνα επισημαίνονται οι διαδικασίες «οικοδόμησης εργαλείου» και «τροποποίησης εργαλείου» που αναδείχθηκαν κατά την ανάλυση των στρατηγικών σύγκρισης τις οποίες δημιούργησαν μαθητές/τριες στο πλαίσιο δοσμένης δραστηριότητας, εστιάζοντας και φωτίζοντας την επιλογή του συγκεκριμένου εργαλείου για κύκλους από αυτούς για τη σύγκριση μηκών στο περιβάλλον του λογισμικού. Η δραστηριότητα της έρευνας αποτελεί μέρος ευρύτερης έρευνας οικοδόμησης μαθηματικών εννοιών με υπολογιστικά εργαλεία πολλαπλών αναπαραστάσεων (Μπαλωμένου, 2017).

Η δραστηριότητα

Οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να συγκρίνουν τα μήκη δύο δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων, στο περιβάλλον του Cabri Geometry II, των οποίων η σύγκριση δεν ήταν οπτικά άμεσα εμφανής (Fig1).

Fig1: Τα υπό σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα

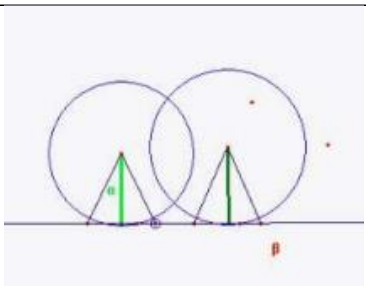
Οι μαθητές/τριες ενθαρρύνθηκαν από την ερευνήτρια να υλοποιήσουν όσο το δυνατό περισσότερες στρατηγικές σύγκρισης μπορούσαν να σκεφτούν κατά την εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα, επιλέγοντας, αυτοβούλως, εργαλεία του λογισμικού που επιθυμούσαν και συνδυάζοντας και πρότερες γνώσεις τους (Μπαλωμένου, 2017; Balomenou et al., 2019). Οι μαθητές/τριες της έρευνας δημιούργησαν συνολικά τριακόσιες εικοσιπέντε (325) στρατηγικές σύγκρισης μηκών των δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων, αξιοποιώντας ποικιλία εργαλείων του Cabri Geometry II.

Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε μόνο στις 67 από τις 325 στρατηγικές σύγκρισης, οι οποίες δημιουργήθηκαν από τους/τις μαθητές/τριες με αξιοποίηση του εργαλείου «κύκλος». Τις στρατηγικές αυτές τις εντάσσουμε σε δύο κατηγορίες με κριτήριο τις «χρήσεις» του εργαλείου «κύκλος» από μαθητές, υπό το πρίσμα των αμφίδρομων διαδικασιών «οικοδόμησης εργαλείου» και «τροποποίησης εργαλείου» που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της θεωρίας της εργαλειακής γένεσης. Οι κατηγορίες αυτές παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα της ανάλυσης των αποτελεσμάτων της έρευνας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ποιοτική ανάλυση των ψηφιακών και γραπτών δεδομένων της έρευνας (Cohen et al., 2007), προέκυψε ότι σαράντα επτά (47) από τους/τις σαράντα οκτώ (48) μαθητές/τριες της έρευνας αξιοποίησαν το εργαλείο για κατασκευή κύκλων στο Cabri Geometry II και ανέπτυξαν συνολικά εξήντα επτά (67), πρωτότυπες για τη σχολική πρακτική, στρατηγικές σύγκρισης των μηκών δύο δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Το εργαλείο «κύκλος» αξιοποιήθηκε από τους/τις μαθητές/τριες της έρευνας με ποικίλους τρόπους, είτε ως αυτόνομο εργαλείο σύγκρισης μηκών, είτε συνδυαστικά και με άλλα εργαλεία του Cabri Geometry II. Αναλύοντας αυτές τις εξήντα επτά (67) στρατηγικές των μαθητών/τριών με κριτήριο τη χρήση που προσδίδουν οι μαθητές στο εργαλείο για κύκλους, και ταυτόχρονα διερευνώντας και την επίδραση του εργαλείου για κύκλους στην οικοδόμηση συγκεκριμένων στρατηγικών σύγκρισης από τους/τις μαθητές/τριες, προέκυψε η ομαδοποίηση αυτών στις ακόλουθες δύο κατηγορίες:

1) *Χρήση κύκλου ως εργαλείο μεγέθυνσης.* Οι εικοσιτέσσερις (24) από τους/τις σαράντα οκτώ (48) μαθητές/τριες της έρευνας κατασκεύασαν κύκλους με ακτίνες ή διαμέτρους τα υπό σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα. Στη συνέχεια, οι μαθητές/τριες, στηριζόμενοι αποκλειστικά στην οπτική τους αντίληψη, υποστήριξαν ότι ο κύκλος με τη μεγαλύτερη επιφάνεια αντιστοιχεί στον κύκλο με τη μεγαλύτερη ακτίνα (ή διάμετρο αντίστοιχα), και έτσι προσδιόρισαν ποιο είναι το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα. Οι μαθητές/τριες αιτιολόγησαν στο φύλλο εργασίας τους ότι μετασχηματίζουν τη σύγκριση μηκών τμημάτων σε σύγκριση επιφανειών σχημάτων όπου η σύγκριση είναι εμφανέστερη. Επιπλέον, δέκα (10) μαθητές/τριες της έρευνας κατασκεύασαν κύκλους με ακτίνες ή διαμέτρους τα υπό σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα και στη συνέχεια προχώρησαν σε αριθμητικές μετρήσεις περιμέτρου ή εμβαδού των κύκλων αυτών και υποστήριξαν ότι ο κύκλος με τη μεγαλύτερη περίμετρο ή (το μεγαλύτερο εμβαδό) αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα. Όπως προκύπτει από τις καταγραφές των μαθητών/τριών στα φύλλα εργασίας τους, χρησιμοποίησαν τις αριθμητικές μετρήσεις με δύο τρόπους: είτε για επιβεβαίωση /επαλήθευση της οπτικής τους αντίληψης σχετικά με το ποιος κύκλος έμοιαζε μεγαλύτερος, είτε για σύγκριση των δοσμένων μηκών βασισμένη αποκλειστικά σε αριθμητικές μετρήσεις αντίστοιχων περιμέτρων ή εμβαδών κύκλων. Οι μαθητές/τριες προσέδωσαν μια νέα χρήση στο εργαλείο για κύκλους, αξιοποιώντας το εργαλείο αυτό ως εργαλείο μεγέθυνσης, προκειμένου η σύγκριση των αρχικών τμημάτων να είναι εμφανής. Όπως προκύπτει από τη μελέτη των στρατηγικών σύγκρισης των μαθητών, η ύπαρξη του συγκεκριμένου εργαλείου τους ενέπνευσε να οικοδομήσουν πρωτότυπες στρατηγικές σύγκρισης μηκών. Στον ακόλουθο πίνακα (Table 1) παρουσιάζονται ενδεικτικά στιγμιότυπα από τις στρατηγικές σύγκρισης που ανέπτυξαν μαθητές/τριες της έρευνας, και εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία, με αντίστοιχη συνοπτική περιγραφή τους (στιγμιότυπα 1.1 και 1.2)

Ενδεικτικά Στιγμιότυπα	**Συνοπτική Περιγραφή Στιγμιότυπων**
 Στιγμιότυπο 1.1	Κατασκευή κύκλων με ακτίνες τα υπό σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα και σύγκριση των επιφανειών των δύο κύκλων με το μάτι. Ο κύκλος με τη μεγαλύτερη επιφάνεια αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ακτίνα, άρα στο μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα. Ορισμένοι μαθητές συνδυάζουν τη στρατηγική με αριθμητική μέτρηση εμβαδών ή περιμέτρων κύκλων για να επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

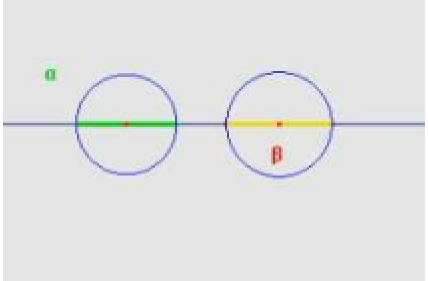
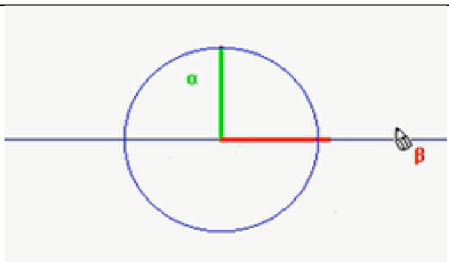
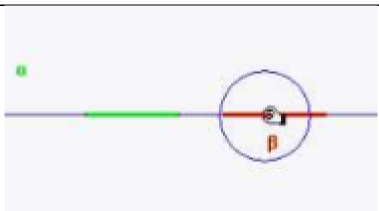
 Στιγμιότυπο 1.2	Κατασκευή κύκλων με διάμετρο τα προς σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα και στη συνέχεια σύγκριση των επιφανειών των κύκλων με το μάτι. Ο κύκλος με τη μεγαλύτερη επιφάνεια αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη διάμετρο. Ορισμένοι μαθητές συνδυάζουν τη στρατηγική αυτή με αριθμητική μέτρηση εμβαδών ή περιμέτρων κύκλων για να επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Table 1: Ο κύκλος ως εργαλείο μεγέθυνσης για σύγκριση δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων - Ενδεικτικά στιγμιότυπα και σύντομη περιγραφή

2) *Χρήση κύκλου ως εργαλείου «οριοθέτησης»*. Εικοσιπέντε (25) από τους/τις σαράντα οκτώ (48) μαθητές/τριες της έρευνας κατασκεύασαν κύκλους με ακτίνα ή διάμετρο το ένα από τα δύο υπό σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα. Στη συνέχεια, αξιοποιώντας τη λειτουργία «drag – mode» του Cabri Geometry II, μετακίνησαν δυναμικά και τοποθέτησαν κατάλληλα ένα από τα υπό σύγκριση τμήματα ή έναν από τους κύκλους, ώστε να είναι σε θέση να προβούν σε οπτικές συγκρίσεις. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές/τριες αξιοποιούν τον κύκλο ως εργαλείο οριοθέτησης με το οποίο μπορούν να δουν ποιο τμήμα προεξέχει ή υπολείπεται ως προς αυτό το «οπτικό όριο» και έτσι να καταλήξουν σε συμπεράσματα αναφορικά με τη σύγκριση των ευθυγράμμων τμημάτων. Στον ακόλουθο πίνακα (Table 2) παρουσιάζονται ενδεικτικά στιγμιότυπα από τις στρατηγικές των μαθητών/τριών της έρευνας που εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία, με αντίστοιχη συνοπτική περιγραφή τους (στιγμιότυπα 2.1, 2.2. και 2.3).

Ενδεικτικά Στιγμιότυπα	**Συνοπτική Περιγραφή Στιγμιότυπων**
 Στιγμιότυπο 2.1	Μετατόπιση του οριζόντιου ευθυγράμμου τμήματος ώστε να έχει κοινή αρχή με το κατακόρυφο. Κατασκευή κύκλου με ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα α. Έλεγχος αν το ευθύγραμμο τμήμα β προεξέχει του κύκλου ή υπολείπεται.
 Στιγμιότυπο 2.2	Κατασκευή κύκλου με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα α. Οριζόντια μετατόπιση του κύκλου στο αυτού προς το ευθύγραμμο τμήμα β ώστε να διαπιστωθεί αν το ευθύγραμμο τμήμα β προεξέχει ή υπολείπεται ως διάμετρος του προηγούμενου κύκλου.

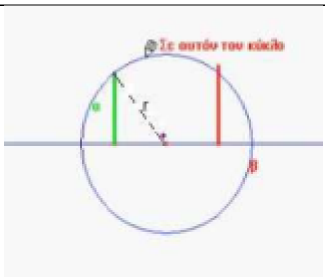
 Στιγμιότυπο 2.3	Αλλαγή προσανατολισμού του τμήματος β ώστε να είναι παράλληλο στο τμήμα α. Προσδιορισμός μέσου απόστασης των δύο ευθύγραμμων τμημάτων α και β όταν αυτά είναι κατακόρυφα. Με κέντρο το μέσο της απόστασης αυτής και ακτίνα r (βλέπε στιγμιότυπο 2.3) κατασκευάζει κύκλο και παρατηρεί ότι το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα προεξέχει. Άρα συμπεραίνει ότι το κόκκινο είναι μεγαλύτερο.

Table 2: Ο κύκλος ως εργαλείο οριοθέτησης για σύγκριση δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων - Ενδεικτικά στιγμιότυπα και σύντομη περιγραφή.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όπως προκύπτει από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας, το εργαλείο «κύκλος» του Cabri Geometry II ενέπνευσε τους/τις συμμετέχοντες/χουσες μαθητές/τριες να δημιουργήσουν καινοτόμες στρατηγικές σύγκρισης μηκών. Μέσα από αυτές τις στρατηγικές, αναδείχθηκε ότι οι μαθητές/τριες της έρευνας επέλεξαν να συγκρίνουν μονοδιάστατα μεγέθη με ένα ιδιαίτερο τρόπο και ασυνήθιστο για τη σχολική πρακτική: μετασχηματίζοντας τη σύγκριση δύο ευθύγραμμων τμημάτων σε σύγκριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων (κύκλους με ακτίνες ή διαμέτρους τα υπό σύγκριση ευθύγραμμα τμήματα) όπου η δυνατότητα οπτικής σύγκρισης είναι εμφανής. Ο μετασχηματισμός από τους/τις μαθητές/τριες της σύγκρισης μηκών σε σύγκριση επιφανειών προσδίδει στο εργαλείο για κύκλους δύο νέες χρήσεις. Η πρώτη χρήση αφορά στον κύκλο ως «εργαλείο μεγέθυνσης» προκειμένου η σύγκριση των δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων να είναι εμφανής με άμεση οπτική αντίληψη. Πολλοί/ες μαθητές/τριες συνδύασαν το εργαλείο «κύκλος» και με επιπλέον εργαλεία του λογισμικού, όπως το εργαλείο αριθμητικής μέτρησης εμβαδού κυκλικού δίσκου ή περιμέτρου κύκλου, ώστε να επαληθεύσουν – επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμα της οπτικής σύγκρισης μέσω αυτής της ιδιαίτερης στρατηγικής μεγέθυνσης. Επιπλέον, η δεύτερη χρήση αφορά στον κύκλο ως «οπτικό όριο» κατά τη σύγκριση των δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Οι χρήσεις αυτές συνιστούν «τροποποίηση εργαλείου» (instrumentalization), (Trouche, 2004), και προσαρμογή του στις ανάγκες των μαθητών, δεδομένου ότι το εργαλείο για κύκλους δεν είναι προσδιορισμένο από τον κατασκευαστή του λογισμικού να υποστηρίζει διαδικασίες σύγκρισης μηκών ευθυγράμμων τμημάτων. Οι νέες χρήσεις που προσδίδουν οι μαθητές/τριες στο εργαλείο στο πλαίσιο της δοσμένης δραστηριότητας είναι συμβατές με το λογισμικό, αλλά δεν αποτελούν μέρος των συμβατικών κυρίαρχων διδακτικών πρακτικών σύγκρισης μηκών στο σχολείο. Επιπρόσθετα, επισημαίνεται ότι οι νέες χρήσεις που προσδίδουν οι μαθητές/τριες στο εργαλείο δεν συνιστούν νέες λειτουργικότητες για το εργαλείο. Αυτό που επιτυγχάνεται κατά την εμπλοκή των μαθητών με τη δραστηριότητα σύγκρισης μηκών στο περιβάλλον του συγκεκριμένου εργαλείου Δυναμικής Γεωμετρίας Cabri Geometry II είναι η σταδιακή ανάπτυξη ή τροποποίηση γνωστικών σχημάτων του μαθητή για τη σύγκριση μηκών τα οποία είναι ατομικά και σχετίζονται με το εργαλείο και τον τρόπο χρήσης από τον/την εκάστοτε μαθητή/τρια, σύμφωνα με τις ατομικές προτιμήσεις και τις πρότερες γνώσεις του/της. Μέσα από τις τεχνικές σύγκρισης που ανέπτυξαν οι μαθητές/τριες της έρευνας, φάνηκε να αλλάζει η αντιληπτική εικόνα τους σχετικά με τη σύγκριση μονοδιάστατων μεγεθών (μήκους ευθυγράμμου τμήματος) προσεγγίζοντάς την μέσω της σύγκρισης επιφανειών ή περιμέτρων επιπέδων σχημάτων. Άρα, το εργαλείο ώθησε τους/τις μαθητές/τρις, σε συγκεκριμένες επιλογές, επηρεάζοντας και καθορίζοντας τον τρόπο απόκρισής τους σε δοσμένη δραστηριότητα (instrumentation, Trouche, 2004).

Συνοψίζοντας, οι μαθητές/τριες της έρευνας επηρέασαν αλλά και επηρεάστηκαν από το εργαλείο Cabri Geometry II, αφενός προσδίδοντάς του χρήσεις (ως εργαλείο μεγέθυνσης ή οριοθέτησης) για τις οποίες δεν ήταν εκ των προτέρων μελετημένο να υποστηρίζει (instrumentalization), (Trouche, 2004), αφετέρου εμπνέονται από τη φύση των εργαλείων του ώστε να δημιουργήσουν τεχνικές σύγκρισης μηκών τις οποίες ενδεχομένως δεν θα σκεφτόντουσαν να υλοποιήσουν αν δεν είχαν στη διάθεσή τους τα συγκεκριμένα εργαλεία του Cabri Geometry II (instrumentation), (Trouche, 2004).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3), 245-274.

Balomenou, A., Komis, V., Zacharos, K. (2019). Instrumental genesis of students' comparison strategies in a digital environment of dynamic Geometry. In the Educational Journal of the university of Patras UNESCO Chair. Vol. 6, N. 1 p. 335-343, (2019) - Colloque SIEST Méditerranée, ISSN: 2241-9152 DOI: https://doi.org/10.26220/une.3050

Balomenou, A., Komis, V., & Zacharos, K. (2017). Handling Signs in Inequalities by Exploiting Multiple Dynamic Representations–the Case of ALNuSet. Digital Experiences in Mathematics Education, 3(1), 39-69.

Balomenou, A. & Kordaki, M. (2009). Multiple Solution Tasks within Dynamic Geometry Systems. In Educatia 21, no54, Special Volume: Virtual Instruments and tools in Sciences Education: Experiences and

Perspectives, 71-78 (BDI: Fachportal Paedagogik, Germania). ISSN: 1841 – 0456.

Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2007). Research Methods in Education (6th ed), Routledge Publishers, Oxford, UK.

Drijvers, P., & Barzel, B. (2012). Equations with Technology: Different Tools, Different Views. Mathematics Teaching, 228, 14-19.

Gibson, J. J. (1977). The Theory of Affordances. In R. E. Shaw & J. Bransford (eds.), Perceiving, Acting, and Knowing. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Norman, D. A. (1999). Affordance, conventions, and design. interactions, 6(3), 38-43.

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving Grade 7 Students' Achievement in Initial Algebra Through a Technology-Based Intervention. Digital Experiences in Mathematics Education, 1(1), 28-58.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paperand-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11(2), 205-263.

Kordaki, M. (2015). The challenge of multiple perspectives: Multiple solution tasks for students incorporating diverse tools and representation systems. Technology, Pedagogy and Education, 24(4), 493-512.

Κυνηγός, Χ., Διαμαντίδης, Δ. & Γριζιώτη, Μ., (2015). Ερμηνεύοντας τη Χρήση Ψηφιακών Εργαλείων από Μαθητές στη 'Χελωνόσφαιρα'. *Πρακτικά Εργασιών 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία» της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης ΤΠΕ στην Εκπαίδευση (ΕΤΠΕ).* Β.Δαγδιλέλης, Α. Λαδιάς, Κ. Μπίκος, Ε. Ντρενογιάννη, Μ. Τσιτουρίδου (επιμ.), Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 30 Οκτωβρίου – 1 Νοεμβρίου.

Μπαλωμένου, Α. (2017). Οικοδόμηση Μαθηματικών Εννοιών σε υπολογιστικά περιβάλλοντα πολλαπλών αναπαραστάσεων: η περίπτωση της ανισότητας. Διδακτορική Διατριβή. Πανεπιστήμιο Πατρών.

Rabardel, P. (1995). Les hommes & les technologies. Approche cognitive des instruments contemporaines Ed.: A. Colin Paris.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for mathematical learning, 9(3), 281-307.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΜΙΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ

Δάλλας Μάρκος

Department of Mathematical Sciences, University of Agder, Norway

markos.dallas@uia.no

Η ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας αναδεικνύει σημαντικές έννοιες που θα μπορούσαν να χαρακτηρίσουν μια αλληλεπιδραστική προοπτική της επιχειρηματολογίας στην τάξη των μαθηματικών. Προκειμένου να οργανωθούν εννοιολογικά αυτές οι ιδέες, αναπτύσσεται ένα μοντέλο που ονομάζεται «Μοντέλο αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών» (MCIM). Στο άρθρο παρουσιάζεται το μοντέλο καθώς και πώς καθίσταται λειτουργικό μέσω των ερευνητικών ερωτήσεων και ενός εργαλείου κωδικοποίησης με τρεις ερευνητικές διαστάσεις: επιχειρηματολογικός λόγος, συλλογική συμπεριφορά, ρόλος συμμετέχοντα.

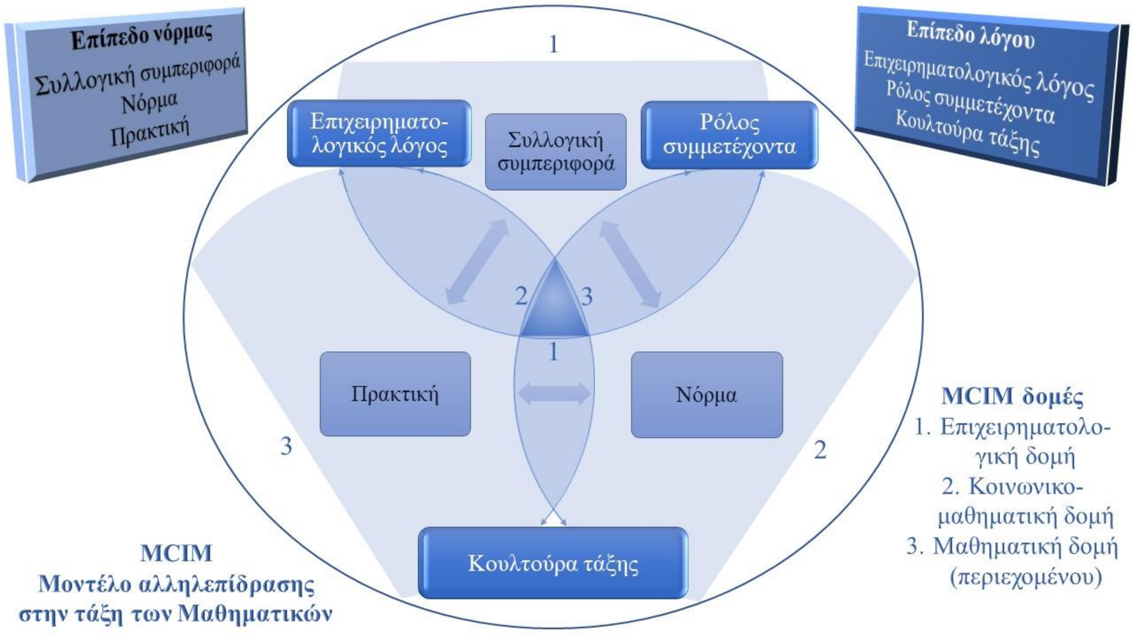
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ

Μια πρώτη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αναδεικνύει δύο προσεγγίσεις που επικεντρώνονται στην επιχειρηματολογία στις τάξεις των μαθηματικών. Ερευνητές εξετάζουν το ζήτημα είτε μέσω της προσέγγισης των κοινωνικο-μαθηματικών νορμών και της συμμετοχής στην τάξη είτε μέσω της προσέγγισης του μαθηματικού επιχειρήματος και της αλληλεπίδρασης στην τάξη. Μια αρχική προσπάθεια σύνθεσης και οπτικοποίησης αυτών των ιδεών οδήγησε στην ανάπτυξη ενός μοντέλου που ονομάζεται «Μοντέλο αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών» (MCIM) (Dallas, 2019; Δάλλας, 2019). Ωστόσο, μια προσεκτική μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας στο σύνολό της αναδεικνύει μια κοινωνική οπτική της δεύτερης προσέγγισης στην τάξη των μαθηματικών πλησιάζοντας κατά αυτό τον τρόπο την πρώτη προσέγγιση. Οι Stylianides et al. (2017, σσ. 239–250) εντόπισαν μελέτες στη Μαθηματική Εκπαίδευση που εννοιολογούν την «αποδεικτική διαδικασία» (proving) από τρεις διαφορετικές οπτικές: «επίλυση προβλήματος» (problem solving), «πειθώ» (convincing) και «κοινωνικά ενσωματωμένη δραστηριότητα» (socially embedded activity). Ενώ η προοπτική της κοινωνικά ενσωματωμένης δραστηριότητας μπορεί να υποστηρίξει έναν επεξηγηματικό και επικοινωνιακό ρόλο της απόδειξης στην τάξη των μαθηματικών, αυτό δημιουργεί αμφισημίες μεταξύ ερευνητών και διδασκόντων σχολικά μαθηματικά, διότι μέχρι στιγμής τα δομήματα (constructs) της εξήγησης και της επικοινωνίας δεν έχουν καταστεί λειτουργικά ώστε να εξυπηρετούν «ως στόχοι παρουσίασης αποδείξεων και ένα αναλυτικό εργαλείο για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς στην τάξη» (Stylianides et al., 2017, σ. 249). Στη βάση αυτών των τριών οπτικών, οι Campbell et al. (2020), εννοιολογούν την απόδειξη και την επιχειρηματολογία μέσω μιας ανασκόπησης της βιβλιογραφίας στα σχολικά μαθηματικά (K-12) σε όλες τις βαθμίδες, τονίζοντας την ανάγκη να επικεντρωθούμε στην επιχειρηματολογία σε τάξεις του Δημοτικού όπου υπάρχει λίγη σχετική έρευνα.

Οι έννοιες που συζητούνται έμμεσα σε σχέση με το μαθηματικό επιχείρημα και την αλληλεπίδραση στην τάξη είναι οι ίδιες έννοιες που συζητούνται ρητά σε σχέση με τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες και τη συμμετοχή στην τάξη. Από τη μία πλευρά υπάρχουν οι έννοιες ‘συμπεριφορά’, ‘νόρμα’ και (μαθηματική) ‘πρακτική’ και αφετέρου οι έννοιες ‘συμμετοχή’ και ‘ρόλος συμμετέχοντα’. Αυτές οι έννοιες φαίνεται να είναι σημαντικές και μαζί με τον επιχειρηματολογικό λόγο (argumentative discourse) θα μπορούσαν να χαρακτηρίσουν μια αλληλεπιδραστική προοπτική της επιχειρηματολογίας στην τάξη των μαθηματικών. Η διαπίστωση αυτή προτείνει τη σύνθεση των συγκεκριμένων εννοιών σε μια νέα έκδοση του μοντέλου “Mathematics Classroom Interactional Model” (MCIM) (Dallas, 2021), η νέα εκδοχή του οποίου θα μπορούσε να αποδοθεί στα ελληνικά ως «Μοντέλο αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών» (MCIM) (Εικόνα 1).

Το μοντέλο MCIM οργανώνεται σε δύο επίπεδα αλληλεπίδρασης στην τάξη: το «επίπεδο νόρμας» (normative level) (συλλογική συμπεριφορά, νόρμα, πρακτική) και το «επίπεδο λόγου» (discursive level) (επιχειρηματολογικός λόγος, ρόλος συμμετέχοντα, κουλτούρα τάξης). Λαμβάνοντας υπόψη τις έννοιες και στα δύο επίπεδα ως αλληλένδετα και αναπόσπαστα συστατικά στην αλληλεπίδραση στην τάξη των μαθηματικών, διαμορφώνονται τρεις MCIM δομές που τις συνδέουν: 1) επιχειρηματολογική δομή: επιχειρηματολογικός λόγος, ρόλος συμμετέχοντα, συλλογική συμπεριφορά, 2) κοινωνικο-μαθηματική δομή: ρόλος συμμετέχοντα, κουλτούρα τάξης, νόρμα 3) μαθηματική δομή (περιεχομένου): κουλτούρα τάξης, επιχειρηματολογικός λόγος, πρακτική.

Το μοντέλο MCIM καθίσταται λειτουργικό μέσω της σύνδεσης δύο μεθοδολογικών σταδίων: Της διαμόρφωσης των ερευνητικών ερωτήσεων και ενός εργαλείου κωδικοποίησης με τρεις ερευνητικές διαστάσεις.



Εικόνα 1: Μοντέλο αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών (MCIM)

Η ΜΕΛΕΤΗ

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει μια αλληλεπιδραστική προοπτική της επιχειρηματολογίας σε μια τάξη μαθηματικών Δ΄ Δημοτικού κατά τη διάρκεια μιας σειράς μαθημάτων σε μαθηματικές ιδέες που σχετίζονται με τους ρητούς αριθμούς. Τέσσερις ερευνητικές ερωτήσεις διατυπώθηκαν για να εξυπηρετήσουν αυτόν τον σκοπό:

- Ερευνητική Ερώτηση 1 (ΕΕ1): Ποιοι είναι οι επιχειρηματολογικοί λόγοι που εμφανίζονται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δασκάλας και μαθητών;
- Ερευνητική Ερώτηση 2 (ΕΕ2): Ποιες είναι οι συλλογικές συμπεριφορές που εμφανίζονται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δασκάλας και μαθητών και ποιες νόρμες τάξης υποδεικνύουν;
- Ερευνητική Ερώτηση 3 (ΕΕ3): Ποιοι είναι οι ρόλοι των συμμετεχόντων που εμφανίζονται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δασκάλας και μαθητών;
- Ερευνητική Ερώτηση 4 (ΕΕ4): Ποια είναι τα μοτίβα των αλληλεπιδραστικών πρακτικών που αναδύονται κατά την αντιμετώπιση ασυνεχειών (breakdowns) στην από κοινού μαθηματική κατανόηση μεταξύ δασκάλας και μαθητών;

Η έρευνα έλαβε τη μορφή μιας μελέτης περίπτωσης (Yin, 2018) μιας τάξης μαθηματικών Δ΄ Δημοτικού σε ένα διεθνές σχολείο στη Νορβηγία. Πραγματοποιήθηκαν παρατηρήσεις στη συγκεκριμένη τάξη σε μια σειρά μαθημάτων μαθηματικών και συνεντεύξεις με τη δασκάλα. Οι παρατηρήσεις των μαθημάτων αναλύθηκαν με βάση ένα εργαλείο κωδικοποίησης με τρεις ερευνητικές διαστάσεις: του επιχειρηματολογικού λόγου, της συλλογικής συμπεριφοράς και του ρόλου συμμετέχοντα. Μια αρχική έκδοση αυτού του εργαλείου βελτιώθηκε, κατά τη διάρκεια της κωδικοποίησης, μέσω της χρήσης συνεχούς σύγκρισης (constant comparison) (Cohen et al., 2018; Corbin & Strauss, 2015; Strauss & Corbin, 1994). Στις επόμενες τρεις υποενότητες συζητούνται βασικά χαρακτηριστικά των τριών ερευνητικών διαστάσεων που λήφθησαν υπόψη κατά την κωδικοποίηση.

Επιχειρηματολογικός λόγος

Μια προσέγγιση επιχειρηματολογικού λόγου εξετάζει την επιχειρηματολογία στην τάξη των μαθηματικών ως ένα ζήτημα διαπραγμάτευσης ενός επιχειρήματος (π.χ. Ellis, 2008). Αυτό το είδος λόγου μπορεί να οδηγήσει σε «μαθηματικές έννοιες που διαμοιράζονται» (σ. 289) επειδή η διαφορά μεταξύ «του υπόβαθρου της γνώσης των μαθητών [και] της γνώσης που ο δάσκαλος θέλει να αποκτήσουν οι μαθητές» (σ. 292) ρυθμίζει τη διαπραγμάτευση του νοήματος που ανταλλάσσεται μέσω του λόγου και χαρακτηρίζει τη μαθησιακή διαδικασία (Voigt, 1994). Ειδικότερα, υπό το πρίσμα της αποδεικτικής διαδικασίας ως κοινωνικά ενσωματωμένης δραστηριότητας σε τάξεις 3ης-5ης Δημοτικού, οι Campbell et al. (2020) θίγουν ένα ζήτημα μεταξύ του είδους του λόγου που χαρακτηρίζει τα μαθηματικά γενικά και του είδους του λόγου που στοχεύει στην ανάπτυξη επιχειρημάτων, τονίζοντας την αναγκαιότητα για περαιτέρω διερεύνηση του ζητήματος εστιάζοντας στην εμπλοκή των μαθητών στην επιχειρηματολογία στις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Τέλος, οι Chen (2011) και Kim & Hand (2015) ανέπτυξαν πλαίσια κατάλληλα για τάξεις φυσικών επιστημών που προσφέρουν μια εκκίνηση για την κωδικοποίηση των χαρακτηριστικών του επιχειρηματολογικού λόγου στις τάξεις μαθηματικών. Τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του επιχειρηματολογικού λόγου μέσω των οποίων επικοινωνούνται και τίθενται υπό διαπραγμάτευση μορφές συλλογισμού μεταξύ των συμμετεχόντων στην τάξη των μαθηματικών μπορεί να διευκολύνουν την καθιέρωση ενός αμοιβαία αποδεκτού μαθηματικού νοήματος στην κοινότητα της τάξης.

Συλλογική συμπεριφορά

Ενώ προηγούμενες μελέτες αναφέρονται σε νόρμες, η σύνδεση με σχετικές συμπεριφορές είναι ασαφής και, σε επίπεδο λειτουργικότητας, ο τρόπος με τον οποίο οι νόρμες συνάγονται από τις συμπεριφορές παραμελείται. Επομένως, απαιτείται μια εστίαση στις συμπεριφορές ως σημείο εκκίνησης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι «οι νόρμες σχετίζονται με εκείνα τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα συμπεριφοράς τα οποία η κατάσταση συνήθως απαιτεί και αναμένονται από, τους συμμετέχοντες» (Hofmann & Ruthven, 2018, σ. 499) και δεδομένου ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί επί του παρόντος κάποιο συγκεκριμένο και ουσιαστικό κριτήριο για μια «συλλογική αξιολόγηση», μια «συλλογική προσδοκία» ή την «πιθανότητα αντιμετώπισης» (Gibbs, 1965, σσ. 593–594), διερευνήθηκαν πιθανές λειτουργίες συλλογικών συμπεριφορών. Επειδή το ζήτημα των νορμών εδράζεται στον τρόπο με τον οποίο εννοιολογικά αντιμετωπίζεται τόσο από την κοινωνική επιστήμη και όσο και από τη φιλοσοφική επιστήμη, με άλλα λόγια, από τη μια η λειτουργική ερμηνεία των νορμών και από την άλλη η ανάδυση και δυναμική των νορμών (Bicchieri et al., 2018), η προσσέγιση στην παρούσα μελέτη με τη διερεύνηση πιθανών λειτουργιών συλλογικών συμπεριφορών υποστηρίζει επίσης τον συντονισμό των δύο παραπάνω οπτικών, επιδιώκοντας να προσφέρει συμπληρωματικές αναγνώσεις. Επίσης, παραδείγματα νορμών που αναφέρονται από τους Kazemi και Stipek (2001) είναι σχετικά με την παρούσα μελέτη επειδή αφορούν μαθήματα 4ης και 5ης τάξης του Δημοτικού που σχετίζονται με τους ρητούς αριθμούς. Υπό το πρίσμα των παραπάνω, διαμορφώθηκε ένα σχήμα κωδικοποίησης κατά την ανάλυση των συλλογικών συμπεριφορών, ώστε να συναχθούν νόρμες με βάση συλλογικές συμπεριφορές.

Ρόλος συμμετέχοντα

Η λεκτική, συμβολική και χειρονομική (μαθηματική) επικοινωνία είναι όλες σημαντικές στη συλλογική ανάπτυξη του νοήματος (π.χ. Rasmussen et al., 2004) μέσω της συμμετοχής στην επιχειρηματολογία στην τάξη των μαθηματικών (Cramer & Knipping, 2018; Krummheuer, 2007). Κατά τη διάρκεια της τρέχουσας ανάλυσης, σε λειτουργικό επίπεδο, επηρεάστηκα από τις ιδέες των κύριων και δευτερευόντων ρόλων των ομιλητών (λεκτική επικοινωνία) που εκφράστηκαν από τον Levinson (1988), ο οποίος επέκτεινε τις ιδέες του Goffman (1981). Αυτές προσαρμόστηκαν με τη σειρά τους στη μαθηματική εκπαίδευση βασισμένες σε διαδραστικές και κοινωνιολογικές προοπτικές· για τους κύριους ρόλους των ομιλητών (Krummheuer, 2007) και τους δευτερεύοντες ρόλους των ομιλητών (Krummheuer & Brandt, 2001, όπως αναφέρεται στο Cramer & Knipping, 2018). Επειδή αυτοί οι ρόλοι εξετάζουν μόνο τη λεκτική επικοινωνία, σε αυτή τη μελέτη, αυτές οι ιδέες έχουν προσαρμοστεί περαιτέρω για να εξετάσουν επίσης συμβολικές και χειρονομικές μορφές επικοινωνίας. Ενώ αυτή η πολυτροπικότητα (λεκτική, συμβολική και χειρονομική) είναι μια περαιτέρω διάσταση που διατρέχει τα τρία σχήματα κωδικοποίησης, φαίνεται ιδιαίτερα σημαντική να εξεταστεί ρητά σε σχέση με τη συμμετοχή. Στη «νόμιμη περιφερική συμμετοχή» (legitimate peripheral participation), ο καθένας θα μπορούσε δυνητικά να γίνει πλήρης συμμετέχων στην κοινότητα με διάφορες μορφές (Lave & Wenger, 1991). Επομένως, ο συντονισμός αυτών των λεκτικών, συμβολικών και χειρονομικών πτυχών ταυτόχρονα ως τρόποι συμμετοχής στην επιχειρηματολογία στην τάξη των μαθηματικών φαίνεται να είναι απαραίτητος για να παρέχουμε μια ολιστική περιγραφή των ποικίλων μορφών των ρόλων των συμμετεχόντων. Αυτές οι διαφορετικές μορφές συμμετοχής θα μπορούσαν να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες των μαθητών να μάθουν να σκέφτονται και να κατανοούν, επειδή αυτές οι διαφορετικές μορφές επικεντρώνονται στο τι μπορεί να συμβάλει ο κάθε μαθητής/ η κάθε μαθήτρια στη συζήτηση (π.χ. Greeno & MMAP, 1997) κάτι που τους επιτρέπει να κατανοήσουν τις μαθηματικές τους εμπειρίες μέσα και πέρα από την κοινωνική αλληλεπίδραση στην τάξη (π.χ. Wood, 1999).

ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται να αποτυπωθεί ο τρόπος με τον οποίο οι τρεις ερευνητικές διαστάσεις σχετίζονται με τις ερευνητικές ερωτήσεις. Επίσης, συζητείται η θεωρητική υπόσταση της μεθοδολογικής προσέγγισης σύμφωνα με το μοντέλο MCIM. Ο Πίνακας 1 επιχειρεί να αποτυπώσει τη σύνδεση της μεθοδολογικής προσέγγισης (ερευνητικές ερωτήσεις και ερευνητικές διαστάσεις) και της θεωρητικής προσέγγισης (μοντέλο MCIM).

Ένα σχέδιο τριών σταδίων αναπτύχθηκε για την αντιμετώπιση των ερευνητικών ερωτήσεων και την περαιτέρω υποστήριξη του μοντέλου MCIM τόσο εννοιολογικά όσο και λειτουργικά. Το πρώτο στάδιο εστιάζει στην επιχειρηματολογική δομή του μοντέλου MCIM (πρώτη διασύνδεση των εννοιών και στα δύο επίπεδα του μοντέλου) απαντώντας στις ΕΕ 1, 2 (πρώτο μέρος), 3. Η ΕΕ1 εξετάζει την έννοια του επιχειρηματολογικού λόγου, η ΕΕ2 πρωτίστως την έννοια της συλλογικής συμπεριφοράς (πρώτο μέρος) και η ΕΕ3 διερευνά την έννοια του ρόλου συμμετέχοντα. Το δεύτερο στάδιο εστιάζει στην κοινωνικο-μαθηματική δομή του μοντέλου MCIM (δεύτερη διασύνδεση των εννοιών και στα δύο επίπεδα του μοντέλου) απαντώντας στο δεύτερο μέρος της ΕΕ2, η οποία μελετά επιπλέον την έννοια της νόρμας που συνάγεται από συλλογικές συμπεριφορές. Το τρίτο στάδιο εστιάζει στη μαθηματική δομή (περιεχομένου) του μοντέλου MCIM (τρίτη διασύνδεση των εννοιών και στα δύο επίπεδα του μοντέλου) απαντώντας στην ΕΕ4. Η ΕΕ4 εξετάζει πρακτικές ως αναδυόμενα μοτίβα αλληλεπίδρασης (μοτίβα αλληλεπιδραστικών πρακτικών), όπως αυτά προέκυψαν μέσω των τριών ερευνητικών διαστάσεων (επιχειρηματολογικός λόγος, συλλογική συμπεριφορά, ρόλος συμμετέχοντα) κατά την αντιμετώπιση ασυνεχειών (breakdowns) στην από κοινού μαθηματική κατανόηση μεταξύ δασκάλας και μαθητών. Τέλος, το αποτέλεσμα ολόκληρης της έρευνας εξετάζει την ιδέα της κουλτούρας της τάξης ως έμμεση στη συνολική δομή του μοντέλου MCIM.

Μεθοδολογική προσέγγιση		**Θεωρητική προσέγγιση**
Ερευνητικές ερωτήσεις	**Ερευνητικές διαστάσεις**	**Μοντέλο MCIM**
Ερευνητική Ερώτηση 1 (ΕΕ1): Ποιοι είναι οι επιχειρηματολογικοί λόγοι που εμφανίζονται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δασκάλας και μαθητών;	Επιχειρηματολογικός λόγος	Επιχειρηματολογική δομή
Ερευνητική Ερώτηση 2 (ΕΕ2): Ποιες είναι οι συλλογικές συμπεριφορές που εμφανίζονται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δασκάλας και μαθητών και ποιες νόρμες τάξης υποδεικνύουν;	Συλλογική συμπεριφορά	Επιχειρηματολογική δομή, Κοινωνικο-μαθηματική δομή
Ερευνητική Ερώτηση 3 (ΕΕ3): Ποιοι είναι οι ρόλοι των συμμετεχόντων που εμφανίζονται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ δασκάλας και μαθητών;	Ρόλος συμμετέχοντα	Επιχειρηματολογική δομή
Ερευνητική Ερώτηση 4 (ΕΕ4): Ποια είναι τα μοτίβα των αλληλεπιδραστικών πρακτικών που αναδύονται κατά την αντιμετώπιση ασυνεχειών (breakdowns) στην από κοινού μαθηματική κατανόηση μεταξύ δασκάλας και μαθητών;	Επιχειρηματολογικός λόγος, Συλλογική συμπεριφορά, Ρόλος συμμετέχοντα	Μαθηματική δομή (περιεχομένου)

Πίνακας 1: Σχέση μεταξύ μεθοδολογικής και θεωρητικής προσέγγισης

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε να καταστεί λειτουργικό το μοντέλο MCIM μέσω της διαμόρφωσης των ερευνητικών ερωτήσεων και της εξέτασης ενός εργαλείου κωδικοποίησης με τρεις ερευνητικές διαστάσεις. Επίσης, επιχειρήθηκε να αποτυπωθεί η σχέση μεταξύ της θεωρητικής και της μεθοδολογικής προσέγγισης συνολικά. Το αρχικό στάδιο, κατά το οποίο οι τρεις ερευνητικές διαστάσεις καθίστανται λειτουργικές λαμβάνοντας υπόψη θεωρητικές και μεθοδολογικές αρχές της μελέτης, πρότεινε τρία σχήματα κωδικοποίησης, που αναδείχθηκαν κατά τη διάρκεια της ανάλυσης μέσω συνεχούς σύγκρισης. Ωστόσο, αν και η ανάλυση έχει ολοκληρωθεί, τα αποτελέσματα, τα οποία δεν έχουν ακόμη πλήρως οριστικοποιηθεί, προγραμματίζεται να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικών δημοσιεύσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bicchieri, C., Muldoon, R. & Sontuoso, A. (2018). Social norms. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2018 Edition). Retrieved from https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/social-norms/

Campbell, G. T., Boyle, D. J., & King, S. (2020). Proof and argumentation in K-12 mathematics: A review of conceptions, content, and support. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(5), 754–774.

Chen, Y.-C. (2011). *Examining the integration of talk and writing for student knowledge construction through argumentation.* (Doctoral dissertation, University of Iowa). Retrieved from https://doi.org/10.17077/etd.85rfjnr9

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th ed.). Oxon and New York: Routledge.

Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cramer, J. C., & Knipping, C. (2018). Participation in argumentation. In U. Gellert, C. Knipping and H. Straehler-Pohl (Eds.), *Inside the mathematics class: Sociological perspectives on participation, inclusion, and enhancement* (pp. 229–244). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Dallas, M. (2019). Towards an interactional perspective on argumentation in school mathematics. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 171–178). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Δάλλας, Μ. (2019). Επιχειρηματολογία στην τάξη των μαθηματικών. Στο Κ. Χρίστου (Επιμ.), *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (σσ. 131–139). Λευκωσία, Κύπρος: Εν.Ε.Δι.Μ

Dallas, M. (2021, July). *Mathematics classroom argumentation: An interactional perspective*. Paper presented at the Topic Study Group 16: Reasoning, argumentation and proof in mathematics education, at the

14th International Congress on Mathematical Education, Shanghai, China.

Ellis, D. G. (2008). Argumentative discourse. In W. Donsbach (Ed.), *The International Encyclopedia of Communication*. Retrieved from https://doi.org/10.1002/9781405186407.wbieca053

Gibbs, J. P. (1965). Norms: The problem of definition and classification. *American Journal of Sociology, 70*(5), 586–594.

Goffman, E. (1981). Footing. *Forms of talk* (pp. 124–159). Philadelphia, PA: Penn Press.

Greeno, J., & The Middle-School Mathematics through Applications Project Group. (1997). Theories and practices of thinking and learning to think. *American Journal of Education*, *106*(1), 85–126.

Hofmann, R. & Ruthven, K. (2018). Operational, interpersonal, discussional and ideational dimensions of classroom norms for dialogic practice in school mathematics. *British Educational Research Journal*, *44*(3), 496–514.

Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The Elementary School Journal*, *102*(1), 59–80.

Kim, S., & Hand, B. (2015). An analysis of argumentation discourse patterns in elementary teachers' science classroom discussions. *Journal of Science Teacher Education*, *26*(3), 221–236.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60–82.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Levinson, S. C. (1988). Putting linguistic on a proper footing: Explorations in Goffman's concepts of participation. In P. Drew, A. Wootton, & G. Ervin (Eds.), *Exploring the interaction* (pp. 161–227). Cambridge, United Kingdom: Polity Press.

Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 301–323.

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273–285). Thousand Oaks, CA: Sage.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237–266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275–298.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 171–191.

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

ΝΟΕΡΕΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΙ ΕΝΗΛΙΚΕΣ: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Δεσλή Δέσποινα

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

ddesli@eled.auth.gr

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές παιδιών Στ' τάξης και ενηλίκων κατά την εκτέλεση νοερών αφαιρέσεων. Για τον σκοπό αυτό, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να υπολογίσουν νοερά αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς στις οποίες: α) το μέγεθος του αφαιρετέου ήταν μικρότερο ή μεγαλύτερο από τη διαφορά και β) η αριθμητική απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και τη διαφορά ήταν μικρότερη ή μεγαλύτερη από 10. Οι συμμετέχοντες παρουσίασαν αναπτυγμένη ικανότητα νοερών αφαιρέσεων και χρήση ποικιλίας στρατηγικών, με τις στρατηγικές της αντιστάθμισης και της ανάκλησης αριθμητικών δεδομένων από τη μνήμη, κυρίως από τους ενήλικες, να διασφαλίζουν την επιτυχία. Αντίθετα, η χρήση του αλγόριθμου οδήγησε τα παιδιά σε λανθασμένες απαντήσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται ολοένα και περισσότερο αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον τόσο για την ανάπτυξη των νοερών υπολογισμών, με έμφαση κυρίως στη σύνδεσή τους με την αίσθηση του αριθμού, όσο και για τη συστηματική ένταξή τους στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά. Ωστόσο, σχετικά περιορισμένη είναι η έρευνα αναφορικά με τις υπολογιστικές διαδικασίες κατά την εκτέλεση των νοερών αφαιρέσεων και τις στρατηγικές που αυτές ενεργοποιούν.

Αν και συχνά πραγματοποιούμε νοερές αφαιρέσεις σε ποικίλες καταστάσεις καθημερινής ζωής, φαίνεται πως αυτές δεν είναι πάντα το ίδιο εύκολες και επηρεάζονται από διάφορους παράγοντες. Το μέγεθος των εμπλεκόμενων αριθμών φαίνεται να συνδέεται με την ορθότητα των απαντήσεων αλλά και τον χρόνο επίλυσης των αφαιρέσεων. Για παράδειγμα, οι αφαιρέσεις με μονοψήφιο αφαιρετέο (π.χ., 58-6) ευνοούν περισσότερο τους επιτυχείς νοερούς υπολογισμούς σε σχέση με αυτές με διψήφιο αφαιρετέο (π.χ., 43-12) (Caviola, Mammarella, Pastore, & LeFevre, 2018), όπως και η ύπαρξη δανεικού λειτουργεί επιβαρυντικά για την εκτέλεση νοερών αφαιρέσεων (Imbo, Vandierendonck, & Vergauwe, 2007). Οι Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière και Verschaffel (2013) επίσης βρήκαν πως παιδιά Ε' και Στ' τάξης στο Βέλγιο έλυναν γρηγορότερα τις αφαιρέσεις στις οποίες η απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης ήταν μεγάλη (π.χ., 83-4, 83-79) συγκριτικά με εκείνες με μικρή απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης (π.χ., 84-38, 84-46). Παρόμοια αποτελέσματα είχαν παρατηρηθεί σε προγενέστερη έρευνά τους με ενήλικες (Peters et al., 2010). Ακόμα και διαφορές στον τρόπο παρουσίασης των πράξεων μπορεί να προκαλέσουν διαφορές στις διαδικασίες που ακολουθούν οι λύτες. Οι Caviola, Mammarella, Cornoldi και Lucangeli (2012), για παράδειγμα, βρήκαν ότι παιδιά Γ’ και Δ’ τάξης στην Ιταλία δυσκολεύονταν περισσότερο στις προσθέσεις που παρουσιάζονταν κάθετα παρά οριζόντια, κυρίως λόγω του γεγονότος ότι η μνήμη επιβαρυνόταν σε οπτικοχωρικό επίπεδο στην πρώτη περίπτωση, ενώ σε λεκτικό στη δεύτερη όπου τα φωνολογικά στηρίγματα ήταν περισσότερο διαθέσιμα.

Η έρευνα στους νοερούς υπολογισμούς αφαίρεσης αναδεικνύει τρεις μεγάλες κατηγορίες στρατηγικών ανάλογα με τη φύση των υπολογισμών που εκτελούνται (LeFevre, DeStefano, Penner-Wilger & Daley, 2006. Torbeyns, Ghesquière & Verschaffel, 2009). Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις διαδοχικές στρατηγικές (sequencing strategies) στις οποίες οι αφαιρέσεις πραγματοποιούνται σε σειρά διατηρώντας σταθερό τον μειωτέο και αναλύοντας τον αφαιρετέο (π.χ., 34-13: 34-10=24, 24-3=21). Στη δεύτερη κατηγορία εντάσσονται οι στρατηγικές αναδόμησης (decomposition strategies) στις οποίες τόσο ο μειωτέος όσο και ο αφαιρετέος αναλύονται, και οι δεκάδες και οι μονάδες αφαιρούνται ξεχωριστά (π.χ., 34-13: 3-1=2, 4-3=1, άρα 21). Τέλος, υπάρχουν οι στρατηγικές αντιστάθμισης (compensation strategies) στις οποίες και οι δύο όροι αλλάζουν, μετά από συνδυασμό αριθμητικών πράξεων, ώστε να είναι πιο βολικοί (π.χ., 34-13: 34-14=20, 20+1=21). Αν και αυτές οι στρατηγικές δυνητικά εφαρμόζονται σε κάθε νοερή αφαίρεση, δεν φαίνεται να είναι όλες το ίδιο κατάλληλες. Για παράδειγμα, όπως έδειξαν οι Caviola et al. (2018), οι διαδοχικές στρατηγικές χρησιμοποιούνται πιο συχνά στις αφαιρέσεις χωρίς δανεικό, ενώ οι στρατηγικές αναδόμησης ενεργοποιούνται σε περισσότερο πολύπλοκες αφαιρέσεις όπως, για παράδειγμα, αφαιρέσεις με δύσκολους αριθμούς ή και δανεικό. Στις τελευταίες μάλιστα συχνά επίσης εντοπίζεται η νοερή εκτέλεση του τυπικού αλγόριθμου. Τη μεγάλη στήριξη των παιδιών Δ’ τάξης στον τυπικό αλγόριθμο (περίπου στο 80%) εντόπισαν οι Torbeyns και Verschaffel (2016), ακόμα και για αφαιρέσεις που ευνοούσαν την εκτέλεση νοερού υπολογισμού (π.χ., 963-499). Ωστόσο, η ικανότητα επιλογής εκείνης της στρατηγικής που μεγιστοποιεί την επίδοση είναι συχνά περιορισμένη: μόνο το ένα τρίτο των εννιάχρονων παιδιών στην έρευνα της Hickendorff (2020) προσάρμοζαν τη στρατηγική τους ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των αφαιρέσεων, με τα περισσότερα παιδιά να χρησιμοποιούν σταθερά την ίδια στρατηγική. Η πιθανότητα μάλιστα να αλλάζουν τη στρατηγική τους μειωνόταν σημαντικά, όταν τους επιτρεπόταν η εκτέλεση γραπτού υπολογισμού αφαίρεσης σε σύγκριση με την αποκλειστική εκτέλεση νοερού υπολογισμού.

Με δεδομένο ότι η πολυπλοκότητα των αφαιρέσεων επηρεάζει τις νοερές υπολογιστικές διαδικασίες, σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν αφενός να εξετάσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές παιδιών και ενηλίκων κατά την εκτέλεση νοερών αφαιρέσεων και αφετέρου να αναγνωρίσει εκείνα τα αριθμητικά χαρακτηριστικά των αφαιρέσεων που προσδίδουν δυσκολίες στους νοερούς υπολογισμούς. Για τον σκοπό αυτό, στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε μελετήθηκαν οι ικανότητες παιδιών Στ’ τάξης και ενηλίκων κατά την εκτέλεση νοερών αφαιρέσεων με διψήφιους αριθμούς στις οποίες το επίπεδο πολυπλοκότητάς τους διέφερε ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των εμπλεκόμενων αριθμών. Η συνεξέταση παιδιών και ενηλίκων θα προσφέρει πληροφορίες για τις πιθανές διαφοροποιήσεις ως αποτέλεσμα τόσο της ηλικίας όσο και της ενασχόλησης με τα μαθηματικά στο πλαίσιο του σχολείου ή/και στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 120 συμμετέχοντες, ισάριθμα προερχόμενοι από τα δύο φύλα και δύο ηλικιακές ομάδες: παιδιά Στ’ τάξης (μ.ο. ηλικίας: 11 χρόνια και 9 μήνες) και ενήλικες (μ.ο. ηλικίας: 28 χρόνια) που επιλέχθηκαν με ευκαιριακή δειγματοληψία. Τα παιδιά φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της Θεσσαλονίκης και κάλυπταν διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα και σχολικές επιδόσεις. Οι ενήλικες απασχολούνταν σε ποικιλία επαγγελμάτων και η πλειοψηφία τους (63%) είχε ολοκληρώσει την τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης. Πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα και εφαρμόστηκε συγχρονικό ερευνητικό σχέδιο. Συγκεκριμένα, σχεδιάστηκαν 16 δοκιμασίες που περιλάμβαναν αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς, τις οποίες όλοι οι συμμετέχοντες καλούνταν να επιλύσουν αποκλειστικά νοερά.

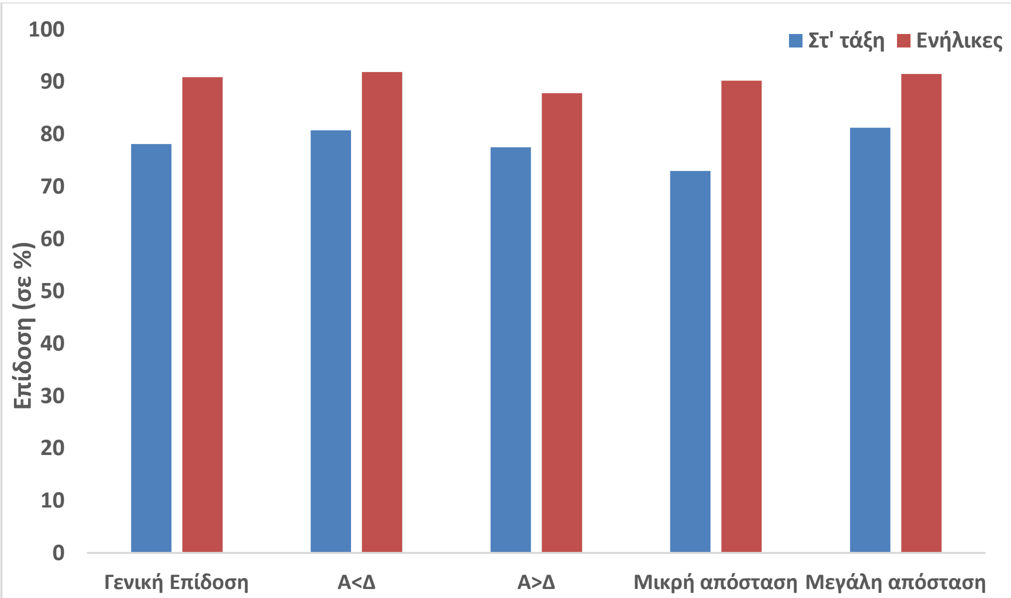
Η επιλογή των αφαιρέσεων βασίστηκε σε δύο συνθήκες: α) *το μέγεθος του αφαιρετέου (Α) σε σχέση με τη διαφορά (Δ)*: υπήρχαν ισάριθμες αφαιρέσεις στις οποίες ο αφαιρετέος είτε ήταν μικρότερος από τη διαφορά (π.χ., 75-9=66) είτε μεγαλύτερος (π.χ., 33-18=15), β) *την αριθμητική απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και τη διαφορά*: στις μισές αφαιρέσεις η απόσταση ήταν μικρότερη από 10 (π.χ., 34-16=18) και στις άλλες μισές ήταν μεγαλύτερη από 10 (π.χ., 82-79=3). Ο συνδυασμός αυτών των συνθηκών οδήγησε στη δημιουργία τεσσάρων ομάδων αφαιρέσεων, με τέσσερις αφαιρέσεις σε κάθε ομάδα. Σε όλες τις αφαιρέσεις, ο μειωτέος ήταν πάνω από 30 και δεν ξεπερνούσε το 100, ενώ απαιτούνταν δανεικό. Ο δείκτης αξιοπιστίας cronbach's alpha βρέθηκε στο 0.895.

Τέλος, οι συμμετέχοντες, καλούνταν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους, ανεξάρτητα από το αν κατέληξαν σε σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις.

Διαδικασία. Τα παιδιά και οι ενήλικες εξετάστηκαν ατομικά σε ήσυχη αίθουσα (του σχολείου ή δικής τους επιλογής, αντίστοιχα). Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν ανώνυμη και προαιρετική και διατηρήθηκε η ανωνυμία τους. Η διαδικασία διήρκεσε περίπου 20 λεπτά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Γενική επίδοση. Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ήταν πολύ καλή, με ποσοστά επιτυχίας κοντά στο 78% και το 91% για τα παιδιά και τους ενήλικες, αντίστοιχα. Μάλιστα, η διαφορά αυτή στην επίδοση μεταξύ των δύο ηλικιακών ομάδων (Σχήμα 1) βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική στο σύνολο των δοκιμασιών (t(118)=-3,283, p<.01) αλλά και για κάθε ομάδα δοκιμασιών ξεχωριστά. Δεν βρέθηκαν, ωστόσο, στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση ως προς το φύλο (t(118)=,144, p=.886).



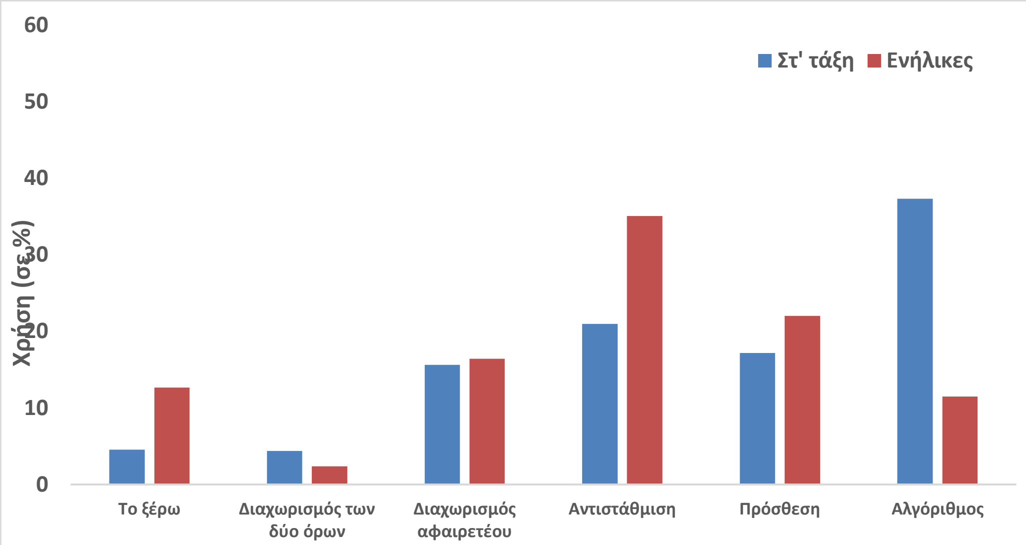
Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ως προς την ηλικιακή ομάδα

Το μέγεθος του αφαιρετέου δεν διαφοροποίησε τα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων ούτε στο σύνολό τους (t(119)=1,051, p=.297) ούτε ανά ηλικιακή ομάδα (t(59)=,474, p=.639 και t(59)=1,153, p=.258, για τα παιδιά Στ' τάξης και τους ενήλικες, αντίστοιχα). Η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες όπου ο αφαιρετέος ήταν μικρότερος από τη διαφορά ήταν παρόμοια με αυτή στις δοκιμασίες όπου ο αφαιρετέος ήταν μεγαλύτερος από τη διαφορά.

Οι επιδόσεις των συμμετεχόντων, ωστόσο, επηρεάστηκαν από την αριθμητική απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και τη διαφορά ($t(119)=-1{,}988$, $p<.05$). Συγκεκριμένα, στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερη ήταν η επιτυχία στις δοκιμασίες στις οποίες η αριθμητική απόσταση ήταν μεγάλη σε σχέση με τις δοκιμασίες στις οποίες υπήρχε μικρή αριθμητική απόσταση. Όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα, η διαφορά αυτή επιβεβαιώθηκε μόνο για τα παιδιά της Στ’ τάξης ($t(59)=-1{,}912$, $p<.05$), ενώ οι ενήλικες εμφάνισαν παρόμοιες επιδόσεις στις δοκιμασίες ανεξάρτητα από την αριθμητική απόσταση ($t(59)=-{,}682$, $p=.501$). Όταν η επίδραση της αριθμητικής απόστασης εξετάστηκε και ως προς το μέγεθος του αφαιρετέου, βρέθηκε ότι οι συμμετέχοντες εμφάνισαν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στις αφαιρέσεις στις οποίες υπήρχε μεγάλη αριθμητική απόσταση ανάμεσα στον αφαιρετέο και τη διαφορά και ο αφαιρετέος ήταν μικρότερος της διαφοράς συγκριτικά με τις υπόλοιπες ομάδες αφαιρέσεων ($p<.05$).

β. Στρατηγικές των παιδιών. Οι επεξηγήσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες, ανεξάρτητα από το αν οδήγησαν σε σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις, αναδείκνυαν τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Ταξινομήθηκαν στις εξής κατηγορίες: *1) «Μνημονική στρατηγική»* (απαντήσεις του τύπου ‘το θυμάμαι’, ‘το ξέρω’), *2) «Διαχωρισμός των δύο όρων»* (ο μειωτέος και ο αφαιρετέος ξεχωριστά αναλύονται σε δεκάδες και μονάδες και οι αφαιρέσεις πραγματοποιούνται με τη σειρά, 42-17: 40-10=30, 12-7=5, 30-5=25, άρα 42-17=25), *3) «Διαχωρισμός του αφαιρετέου»* (μόνο ο αφαιρετέος χωρίζεται σε μονάδες και δεκάδες, 62-35: 62-30=32, 32-5=7, άρα 62-35=27), *4) «Αντιστάθμιση»* (αντισταθμίζεται ο πρώτος ή ο δεύτερος όρος ή και οι δύο όροι και, αφού πραγματοποιηθεί η αφαίρεση, προστίθεται ή αφαιρείται ό,τι είχε αντισταθμιστεί, 54-29: 54-30+1=25, άρα 54-29=25), *5) «Πρόσθεση ως αντίστροφη της αφαίρεσης»* (προστίθενται στον αφαιρετέο αριθμοί ώστε να είναι ο αφαιρετέος και ο μειωτέος ίσοι, 71-67=;, 67+4=71, άρα 71-67=4), και *6) «Αλγόριθμος»* (χρήση του τυποποιημένου αλγόριθμου νοερά).

Οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν πιο συχνά ήταν η αντιστάθμιση και η στρατηγική του αλγόριθμου. Ωστόσο, τα παιδιά της Στ’ τάξης κατέφευγαν στατιστικά σημαντικά συχνότερα στη νοερή εφαρμογή του τυπικού αλγόριθμου (38%) σε σχέση με τους ενήλικες (12%) ($t(118)=3{,}354$, $p<.001$). Οι ενήλικες, επίσης, χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της αντιστάθμισης περίπου δύο φορές συχνότερα από τα παιδιά (35% έναντι 20%), διαφορά που βρέθηκε στατιστικά σημαντική ($t(118)=-3{,}175$, $p<.001$). Η συχνότητα χρήσης της στρατηγικής του διαχωρισμού στον αφαιρετέο και της στρατηγικής της πρόσθεσης ως αφαίρεσης, αν και ήταν αρκετά υψηλή, εμφανίστηκε παρόμοια από τις δύο ηλικιακές ομάδες (βλ. Σχήμα 2). Τέλος, δεν βρέθηκαν διαφορές στη χρήση των στρατηγικών ως προς το επίπεδο εκπαίδευσης των ενηλίκων.



Σχήμα 2: Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών ως προς την ηλικιακή ομάδα

Εξετάζοντας τις συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και το ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων (βλ. Πίνακα 1), βρέθηκε ότι η χρήση του αλγόριθμου από τα παιδιά της Στ' τάξης τα οδηγούσε σε λανθασμένους νοερούς υπολογισμούς αφαίρεσης (Pearson's r=-,439, p<.05) και ιδιαίτερα στις αφαιρέσεις όπου ο αφαιρετέος ήταν μεγαλύτερος από τη διαφορά (Pearson's r=-,478, p<.01). Ωστόσο, υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε για τη στρατηγική της αντιστάθμισης και την επίδοση τόσο των ενηλίκων όσο και των παιδιών στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r=,328, p<.05 και Pearson's r=,413, p<.05, αντίστοιχα) αλλά και στις δοκιμασίες με τον αφαιρετέο μεγαλύτερο της διαφοράς (Pearson's r=,456, p<.01 και Pearson's r=,385, p<.05, αντίστοιχα). Όσο περισσότερο χρησιμοποιούσαν αυτή τη στρατηγική τόσο έτειναν να έχουν επιτυχία στις δοκιμασίες. Επίσης, για τους ενήλικες, υψηλά θετικά συσχετίζεται η ανάκληση των αριθμητικών πληροφοριών από τη μνήμη με τις επιδόσεις τους στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson's r=,316, p<.05).

Στρατηγικές	**Συνολική Επίδοση**	**Μικρή απόσταση**	**Μεγάλη απόσταση**	**Α<Δ**	**Α>Δ**
Παιδιά Στ' τάξης					
1. Μνημονική	,111	,207	-,082	,102	,094
2. Διαχωρισμός	-,137	-,129	-,068	-,096	-,143
3. Διαχωρ/ός Αφ.	,169	,249	-,052	,012	,271
4. Αντιστάθμιση	,413*	,396*	,303	,344	,385*

5. Πρόσθεση	,169	,109	,202	,220	,088
6. Αλγόριθμος	-,439*	-,454*	-,366*	-,373*	-,478**
Ενήλικες					
1. Μνημονική	,316*	,183	,379*	,353*	,370*
2. Διαχωρισμός	,069	,008	,057	,087	,015
3. Διαχωρ/ός Αφ.	,195	,102	,198	,162	,129
4. Αντιστάθμιση	,328*	,482*	,232	,257	,456**
5. Πρόσθεση	,265	,248	,345*	,336*	,207
6. Αλγόριθμος	-,101	-,197	,092	,222	-,292

** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.05 ** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

Πίνακας 1: Συσχετίσεις της χρήσης στρατηγικών με την επίδοση ως προς την ηλικιακή ομάδα

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τρία κύρια ευρήματα αναδεικνύονται από την παρούσα έρευνα. Πρώτον, τα παιδιά της Στ’ τάξης και οι ενήλικες φάνηκε να διαθέτουν νοερές στρατηγικές για τον υπολογισμό αφαιρέσεων σε ικανοποιητικό βαθμό. Ωστόσο, τόσο οι επιδόσεις όσο και οι στρατηγικές διαφοροποιήθηκαν αφενός από την ηλικία των συμμετεχόντων, με τους ενήλικες να έχουν στατιστικά σημαντικά υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τα παιδιά και αφετέρου από τα χαρακτηριστικά των αφαιρέσεων αναφορικά με τους εμπλεκόμενους αριθμούς.

Δεύτερον, παρατηρήθηκε μια μετατόπιση από τις λιγότερο στις περισσότερο εξελιγμένες στρατηγικές ανάλογη προς την εμπειρία των συμμετεχόντων, συνοδευόμενη από μεγαλύτερη στήριξη σε αλγοριθμική λύση από τα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα, οι ενήλικες επέλεξαν περισσότερο συχνά την ανάκληση των αριθμητικών πληροφοριών από τη μνήμη, ιδιαίτερα στις πιο απλές αφαιρέσεις ή τις αφαιρέσεις με τις οποίες ήταν περισσότερο εξοικειωμένοι, σε σχέση με τα παιδιά της Στ’ τάξης, τα οποία οδηγούνταν συχνά στην εκτέλεση του τυπικού αλγόριθμου της αφαίρεσης νοερά. Παρόμοια, μεγάλη συχνότητα αναφορικά με τη μνημονική στρατηγική είχαν επισημάνει και οι Caviola et al. (2018) στα μεγαλύτερα παιδιά της έρευνάς τους, εύρημα που αναδεικνύει τον ρόλο της εξοικείωσης ως αποτέλεσμα των περισσότερων εμπειριών. Επίσης, οι ενήλικες επέλεξαν στρατηγικές αντιστάθμισης και διαδοχικές στρατηγικές (διαχωρισμός του αφαιρετέου) πιο συχνά σε όλες τις ομάδες αφαιρέσεων. Ιδιαίτερα μάλιστα κατέφευγαν στην αντιστάθμιση όταν ο αφαιρετέος ήταν μεγαλύτερος από τη διαφορά και με μικρή αριθμητική απόσταση μεταξύ τους (π.χ., 62-35=27). Στην περίπτωση που ο αφαιρετέος ήταν μεγαλύτερος από τη διαφορά αλλά η αριθμητική απόσταση ήταν μεγάλη (π.χ., 71-67=4), η στρατηγική της αντιστάθμισης δεν ήταν αποτελεσματική και, ενώ κάποιοι συμμετέχοντες -κυρίως ενήλικες- την χρησιμοποίησαν, δεν οδηγήθηκαν σε ορθό αριθμητικό αποτέλεσμα. Σε αυτή την περίπτωση των αφαιρέσεων, τόσο τα παιδιά όσο και οι ενήλικες χρησιμοποιούσαν την πρόσθεση αντί για την αφαίρεση: ήταν, δηλαδή, πιο εύκολο στην αφαίρεση 71-67 να εκτελέσουν νοερά πρόσθεση (67+4=71), καθώς φαίνεται να υπάρχει ένα αριθμητικό πλεονέκτημα που ευνοεί περισσότερο την πρόσθεση. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει αντίστοιχα ευρήματα των Peters et al. (2013, 2010) και των Torbeyns et al. (2009).

Τρίτον, ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσκόλληση των παιδιών σε κανόνες και την εφαρμογή του αλγόριθμου νοερά (4 στα 10 παιδιά Στ’ τάξης), ακόμα και όταν δεν είναι απαραίτητοι για τον υπολογισμό της αφαίρεσης. Για παράδειγμα, τα παιδιά κατέφευγαν στον αλγόριθμο για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα μίας εύκολης αφαίρεσης (π.χ., 41-3) και οδηγούνταν σε επιτυχή απάντηση. Αντίθετα, η χρήση του αλγόριθμου σε δυσκολότερες αφαιρέσεις όπως, για παράδειγμα, όταν ο αφαιρετέος ήταν μεγαλύτερος από τη διαφορά (π.χ., 43-38, 54-29), αφενός δυσκόλευε τα παιδιά και αφετέρου τα οδηγούσε σε λανθασμένες απαντήσεις, συχνά μάλιστα καθόλου λογικές. Είναι πιθανόν αυτή η τάση για στήριξη στον αλγόριθμο να ανακόπτει τις δυνατότητες των ατόμων για αναζήτηση και χρήση εναλλακτικών στρατηγικών.

Αυτό το μοτίβο της χρήσης των στρατηγικών στις νοερές αφαιρέσεις με διψήφιους αριθμούς δείχνει ότι οι μεγαλύτεροι συμμετέχοντες βασίστηκαν περισσότερο σε στρατηγικές που ήταν αποτελεσματικές, απαιτούσαν την κατοχή βασικών αριθμητικών γνώσεων και αντανακλούσαν ανώτερο επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης (π.χ., μεγαλύτερη χρήση εννοιολογικών στρατηγικών), ακόμα κι όταν η πολυπλοκότητα των αφαιρέσεων δυσχέραινε τους νοερούς υπολογισμούς. Τέτοιες διαφορές, οι οποίες έχουν επίσης εντοπιστεί σε νοερές προσθέσεις (Caviola et al., 2012), νοερές αφαιρέσεις με τριψήφιους αριθμούς (Torbeyns & Verschaffel, 2016) και νοερούς πολλαπλασιασμούς (Reed et al., 2014), είναι δυνατόν να εξηγούνται ως αποτέλεσμα πρόσφατων σχολικών εμπειριών (Lemaire & Brun, 2018): ενδεχομένως τα παιδιά επέλεξαν μια τυπική αλγοριθμική λύση καθώς αυτή αποτελεί στρατηγική που έμαθαν πρόσφατα ή ενισχύεται στις καθημερινές πρακτικές τους στο πλαίσιο του σχολείου. Παράλληλα, όπως υποστηρίζουν οι Gravemeijer και Bruin-Muurling (2019), η ανάπτυξη εννοιολογικών στρατηγικών υπολογισμού περιλαμβάνει την ανάπτυξη δικτύων αριθμητικών σχέσεων στα οποία οι αριθμοί γίνονται αντικείμενα σκέψης. Το γεγονός ότι τα άτομα συχνά ανακαλούσαν γνωστά αριθμητικά γεγονότα ή συνδύαζαν στρατηγικές δείχνει ότι σχημάτιζαν σύνολα αριθμητικών σχέσεων στη βάση της γνώσης των αρχών που τα διέπουν (π.χ., 56+20=76, 20+56=76, 76-20=56, 76-56=20). Με αυτόν τον τρόπο, τα αθροίσματα και οι διαφορές γίνονται μαθηματικά αντικείμενα τα οποία, καθώς τα άτομα διαχειρίζονται, ενισχύεται τόσο η ευελιξία τους στη χρήση των αριθμητικών σχέσεων όσο και η βαθύτερη κατανόηση των εννοιολογικών δομών τους.

Περαιτέρω έρευνα αναφορικά με τη μελέτη και άλλων στοιχείων που περιλαμβάνονται στα προβλήματα αφαίρεσης τα οποία ενδεχομένως συνδέονται με το επίπεδο γνωστικής απαίτησης από τη μεριά του λύτη μπορεί να προσφέρει σημαντικές πληροφορίες με σκοπό την κατανόηση των διαδικασιών επίλυσης σε σύνθετους νοερούς υπολογισμούς αφαίρεσης. Καθώς έρχονται στο προσκήνιο τα θετικά αποτελέσματα διδακτικών παρεμβάσεων ενίσχυσης των στρατηγικών σε νοερές αφαιρέσεις (Nemeth, Werker, Arend, & Lipowsky, 2021), η ανάγκη για έρευνα είναι μεγάλη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Caviola, S., Mammarella, I.C., Cornoldi, C., Lucangeli, D. (2012). The involvement of working memory in children’s exact and approximate mental addition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *112*, 141-160.

Caviola, S., Mammarella, I.C., Pastore, M., & LeFevre, J-A. (2018). Children’s strategy choices on complex subtraction problems: Individual differences and developmental changes. *Frontiers in Psychology*, *9*:1209.

Gravemeijer, K., & Bruin-Muurling, G. (2019). Fostering process-object transitions and a deeper understanding in the domain of number. *Quadrante, 28*(2), 6-31.

Hickendorff, M. (2020). Fourth graders’ adaptive strategy use in solving multidigit subtraction problems. *Learning and Instruction, 67*, 101311, 1-10.

Imbo, I., Vandierendonck, A., & Vergauwe, E. (2007). The role of working memory in carrying and borrowing. *Psychological Research, 71*(4), 467–483.

LeFevre, J.-A., DeStefano, D., Penner-Wilger, M., & Daley, K.E. (2006). Selection of procedures in mental subtraction. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, *60*(3), 209–220.

Lemaire, P., & Brun, F. (2018). Age-related changes in children’s strategies for solving two-digit addition problems. *Journal of Numerical Cognition, 3*(3), 582–597.

Nemeth, L., Werker, K., Arend, J., & Lipowsky, F. (2021). Fostering the acquisition of subtraction strategies with interleaved practice: An intervention study with German third graders. *Learning and Instruction, 71*, 101354.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Adults' use of subtraction by addition. *Acta Psychologica, 135*(3), 323-329.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2013). Children's use of addition to solve two-digit subtraction problems. *British Journal of Psychology, 104*(4), 495-511.

Reed, H.C., Gemmink, M., Broens-Paffen, M., Kirschner, P.A., & Jolles, J. (2015). Improving multiplication fact fluency by choosing between competing answers. *Research in Mathematics Education, 17*(1), 1-19.

Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction, 19*, 1-12.

Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2016). Mental computation or standard algorithm? Children's strategy choices on multi-digit subtractions. *European Journal of Psychology of Education, 31*(2), 99–116.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Βισσαρίου Αικατερίνη, Δεσλή Δέσποινα

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

vissario@eled.auth.gr, ddesli@eled.auth.gr

Οι μεταγνωστικές λειτουργίες είναι ζήτημα θεμελιακής σημασίας για τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Με τη μεταγνώση τα παιδιά μαθαίνουν να παρακολουθούν, να ελέγχουν και να ρυθμίζουν τη σκέψη τους και τις ενέργειές τους σε όλες τις φάσεις της επίλυσης, ωστόσο η επίτευξη αυτών των δεξιοτήτων προϋποθέτει την κατάλληλη εκπαίδευση. Στόχος της παρούσας θεωρητικής εργασίας είναι η ανάδειξη του ρόλου της μεταγνωστικής διδασκαλίας στην ικανότητα μαθητών δημοτικού σχολείου για επίλυση προβλήματος. Παρουσιάζονται μοντέλα μεταγνωστικής παρέμβασης, οι βασικές προϋποθέσεις για την υλοποίησή τους και τα ευεργετικά αποτελέσματά τους, και εγείρονται προβληματισμοί για την ένταξη της διδασκαλίας της μεταγνώσης στα μαθηματικά του σύγχρονου σχολείου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μεταγνώση αποτελεί σύνθετο και πολυπαραγοντικό φαινόμενο που απαντάται σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης μάθησης. Η πολυπλοκότητά της καθίσταται φανερή κυρίως από τη δυσκολία του ορισμού της και της ύπαρξης ενός ξεκάθαρου θεωρητικού μοντέλου, καθώς και από το γεγονός ότι αξιοποιείται εκτεταμένα από διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους, σε διάφορα πλαίσια και για διαφορετικούς σκοπούς. Παρά τις δυσκολίες αυτές, η μεταγνώση έχει οριστεί ως η ενημερότητα του ατόμου για τη σκέψη του και συνδέεται άρρηκτα με τον στοχασμό, καθώς, σύμφωνα με την Tarricone (2011, σελ. 11) «*ο στοχασμός είναι η πεμπτουσία της μεταγνώσης*». Ο στοχασμός, ως βασικό συστατικό της κριτικής σκέψης, αλληλεπιδρά με τη γνώση του εαυτού του ατόμου, το οποίο καθώς μαθαίνει γνωρίζει τον εαυτό του και καθίσταται ενήμερο για τη γνωστική του λειτουργία.

Τα βασικά και αλληλένδετα συστατικά της μεταγνώσης είναι: α) η γνώση της γνωστικής λειτουργίας ή μεταγνωστική γνώση, β) η ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας ή μεταγνωστικές δεξιότητες και γ) οι μεταγνωστικές εμπειρίες. Η μεταγνωστική γνώση είναι η γνώση, οι θεωρίες ή οι αντιλήψεις που έχει το άτομο για τη γνωστική του λειτουργία και διακρίνεται σε δηλωτική, διαδικαστική και υποθετική γνώση. Η ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας συνιστά τη διαδικαστική πτυχή της μεταγνώσης, γιατί αφορά σε δεξιότητες που χρησιμοποιεί το άτομο (π.χ., σχεδιασμός, παρακολούθηση, αξιολόγηση κ.ά.) για την εκτέλεση των ενεργειών που χρειάζονται στην ολοκλήρωση ενός έργου. Οι μεταγνωστικές εμπειρίες συνιστούν προϊόντα της διάδρασης μεταξύ ατόμου και έργου και παίρνουν τη μορφή μεταγνωστικών αισθημάτων, κρίσεων ή εκτιμήσεων που μπορεί να έχουν θετικό ή αρνητικό σθένος (Tarricone, 2011; Efklides & Vlachopoulos, 2012).

ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τις τελευταίες δεκαετίες στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος τίθεται η σύνδεση της μεταγνώσης με την ακαδημαϊκή επίδοση γενικότερα και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος ειδικότερα. Οι μαθητές που εκπαιδεύονται στη μεταγνώση εστιάζουν την προσοχή τους πιο επιλεκτικά στις πληροφορίες του προβλήματος, αποσαφηνίζουν τον στόχο/τους στόχους του προβλήματος, καταστρώνουν σχέδιο/α επίλυσης, αναζητούν ευρετικές στρατηγικές (π.χ., χρήση αναπαραστάσεων, δημιουργία μοτίβων κλπ.) που θα συμβάλουν στον περιορισμό του μη αναγκαίου γνωστικού φορτίου και συλλέγουν επιπρόσθετα δεδομένα με τα οποία οργανώνουν εναλλακτικούς τρόπους λύσης. Ακόμη, μαθαίνουν να χρησιμοποιούν ευέλικτα τις γνώσεις τους, ασκούνται στην επιλογή, συνδυασμό και τροποποίηση στρατηγικών, μεταφέρουν με επιτυχία τις απαιτούμενες γνώσεις και στρατηγικές από μία κατάσταση προβλήματος σε μία άλλη και καθίστανται ενήμεροι για τις διαδικασίες σκέψης που λαμβάνουν χώρα (Mevarech & Amrany, 2008).

Έχει μάλιστα αναδειχτεί πως οι μαθητές με μεγαλύτερα επίπεδα μεταγνωστικών δεξιοτήτων αξιολογούν καλύτερα τις απαιτήσεις μιας συγκεκριμένης μαθησιακής κατάστασης αλλά και την πρόοδό τους, χρησιμοποιούν με ευελιξία τις γνώσεις τους και εφαρμόζουν καλύτερα τις στρατηγικές. Μετά από κάθε βήμα στοχάζονται πάνω στις ενέργειές τους και συνεπώς αποκτούν επίγνωση των δικών τους διαδικασιών μάθησης, βελτιώνοντας την ικανότητά τους στην επίλυση προβλήματος και την επίδοσή τους στα μαθηματικά γενικότερα (Yang & Lee, 2013).

Ωστόσο, η εκδήλωση και η ανάπτυξη μεταγνωστικών διαδικασιών προϋποθέτει την κατάλληλη εκπαίδευση, αναγκαιότητα που εντείνεται από το γεγονός ότι η επίλυση προβλήματος είναι μια διαδικασία εναλλαγής μεταξύ γνωστικών και μεταγνωστικών ενεργειών. Ως εκ τούτου, τις τελευταίες δεκαετίες το ερευνητικό ενδιαφέρον στράφηκε στον σχεδιασμό και την υλοποίηση μεταγνωστικών παρεμβάσεων σε διάφορες ηλικιακές ομάδες. Η παρούσα εργασία, η οποία αποτελεί μέρος ευρύτερης εργασίας, επιχειρεί να συμβάλει στην αποτύπωση και περιγραφή της επίδρασης της μεταγνωστικής διδασκαλίας στην ικανότητα μαθητών δημοτικού σχολείου για επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Για τον σκοπό αυτό, θα παρουσιαστούν μοντέλα μεταγνωστικής διδασκαλίας που έχουν εφαρμοστεί στο πλαίσιο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και αφορούν στην επίλυση προβλήματος.

ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Το μοντέλο IMPROVE (Mevarech & Kramarski, 1997)

Οι Mevarech και Kramarski (1997) ανέπτυξαν το μεταγνωστικό μοντέλο IMPROVE, το οποίο δύναται να υλοποιείται τόσο σε ατομικό όσο και σε ομαδικό επίπεδο. Ο τίτλος του συνιστά ακρωνύμιο των εξής επτά σταδίων διδασκαλίας: α) Εισαγωγή νέων εννοιών, β) Μεταγνωστική αμφισβήτηση, γ) Εξάσκηση, δ) Αναθεώρηση, ε) Κατάκτηση γνώσης σε γνωστικές διαδικασίες χαμηλού και υψηλού επιπέδου, στ) Επαλήθευση και ζ) Εμπλουτισμός. Κάθε βήμα διδασκαλίας συνοδεύεται από τη χρήση αυτό-διαχειριζόμενων μεταγνωστικών ερωτήσεων, τις οποίες τα παιδιά εκπαιδεύονται να θέτουν και να απαντούν.

Συγκεκριμένα, τα παιδιά μαθαίνουν να χρησιμοποιούν ερωτήσεις κατανόησης (π.χ., σε τι αναφέρεται το πρόβλημα;), ερωτήσεις σύνδεσης (π.χ., ποιες οι ομοιότητες ή διαφορές ανάμεσα στο πρόβλημα που καλείστε να λύσετε και άλλα προβλήματα που έχετε λύσει στο παρελθόν;), ερωτήσεις στρατηγικής (π.χ., ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσεις;) και δ) ερωτήσεις στοχασμού (π.χ., ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζεις κατά τη λύση του προβλήματος;). Στόχος του διδακτικού μοντέλου IMPROVE είναι η διδασκαλία των δύο βασικών πτυχών της μεταγνώσης, της γνώσης και της ρύθμισης της γνωστικής λειτουργίας, σε όλα τα στάδια εφαρμογής του και αποδίδει βαρύτητα στη σπουδαιότητα του στοχαστικού λόγου με την αξιοποίηση των μεταγνωστικών ερωτήσεων. Η αποτελεσματικότητά του έχει αναδειχθεί σε αρκετές έρευνες. Για παράδειγμα, όταν οι Mevarech, Terkieltaub, Vinberger και Nevet (2010) εφάρμοσαν το συγκεκριμένο μοντέλο σε μαθητές Γ’ και Στ’ δημοτικού, βρήκαν ότι όσοι μαθητές έλαβαν τη μεταγνωστική διδασκαλία υπερείχαν ως προς την επίδοση (γνωστική και μεταγνωστική) σε σύγκριση με τους μαθητές που δεν την έλαβαν. Έχει επίσης επισημανθεί ότι οι ερωτήσεις που συνοδεύουν κάθε στάδιο επίλυσης συνιστούν σημαντική βοήθεια στη λήψη αποφάσεων και συμβάλλουν στην εσωτερίκευση δεξιοτήτων αυτορρύθμισης των μαθητών (Kramarski & Friedman, 2014). Αν και η κριτική που είχε αρχικά εκφραστεί αφορούσε στην απουσία της καταγραφής των απαντήσεων των μαθητών στις μεταγνωστικές ερωτήσεις (Schmitz & Weise, 2006), εντοπίζονται δείγματα των προφορικών απαντήσεων των παιδιών σε πιο σύγχρονες έρευνες που αξιοποιούν το συγκεκριμένο μοντέλο (π.χ., Kramarski & Friedman, 2014).

Το μοντέλο SOLVED (Hohn & Frey, 2002)

Οι Hohn και Frey (2002) σχεδίασαν το μοντέλο SOLVED που αποσκοπούσε στη διδασκαλία ευρετικών στρατηγικών επίλυσης σε μαθητές δημοτικού σχολείου, δίνοντας ταυτόχρονα έμφαση στη χρήση αναπαραστάσεων. Οι δημιουργοί του τόνισαν την αναγκαιότητα διδακτικών παρεμβάσεων που δίνουν έμφαση στη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης, για την ενίσχυση της κατανόησης στα μαθηματικά. Η ονομασία του αποτελεί ακρωνύμιο των εξής διδακτικών σταδίων: α) Διατύπωση και κατανόηση του προβλήματος, β) Επιλογές προς χρήση, γ) Συνδέσεις με το παρελθόν, δ) Οπτική βοήθεια, ε) Εφαρμογή της λύσης και στ) Επανέλεγχος. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο βήμα οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν τα δεδομένα και να αποσαφηνίσουν τους στόχους του προβλήματος και στο δεύτερο βήμα να αναγνωρίσουν τον τύπο του προβλήματος, προκειμένου να το κατανοήσουν καλύτερα. Στο επόμενο βήμα οι μαθητές προσπαθούν να ανακαλέσουν παρόμοια προβλήματα που έχουν λύσει στο παρελθόν, ώστε να διευκολυνθούν στη δημιουργία ενός σχεδίου επίλυσης και στη συνέχεια να προχωρήσουν στους αναγκαίους υπολογισμούς, αφού όμως έχει προηγηθεί η χρήση αναπαραστάσεων και η επινόηση του σχεδίου επίλυσης. Στο τελευταίο στάδιο οι μαθητές ελέγχουν τη διαδικασία που ακολούθησαν, εντοπίζουν τυχόν λάθη, στοχάζονται πάνω στις ενέργειές τους και συζητούν για τη λύση.

Το συγκεκριμένο μοντέλο εφάρμοσαν οι Hohn και Frey σε μαθητές Γ’, Δ’ και Ε’ τάξεων στην Αμερική και διαπίστωσαν ότι βελτιώνει εξίσου την ικανότητα επίλυσης όλων των μαθητών, ανεξάρτητα από την αρχική τους επίδοση στα μαθηματικά. Μάλιστα, η βελτίωση αυτή διήρκησε περισσότερο στους μαθητές Γ’ τάξης, γεγονός που οδήγησε τους συγκεκριμένους ερευνητές στη διαπίστωση ότι η τάξη αυτή είναι ενδεχομένως η ιδανική για την εισαγωγή και διδασκαλία ευρετικών στρατηγικών, καθώς οι μαθητές στην ηλικία αυτή είναι πιο δεκτικοί σε νέες μεθόδους διδασκαλίας. Ωστόσο, δεδομένου ότι, προκειμένου να διατυπώσουν το πρόβλημα και να σχεδιάσουν τους αναγκαίους χειρισμούς, απαιτούνται από τους μαθητές προηγμένες δεξιότητες κατανόησης στο πρώτο στάδιο του μοντέλου αυτού (Kribbs & Rogowsky, 2016), η εφαρμογή του μοντέλου αμφισβητείται.

Το μοντέλο CLIA (De Corte, Verschaffel & Masui, 2004)

Οι De Corte, Verschaffel και Masui (2004) ανέπτυξαν το διδακτικό μοντέλο CLIA, με στόχο την καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων σκέψης των μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος. Τα χαρακτηριστικά του αφορούν σε: α) Ικανότητα, η οποία αναφέρεται σε γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες αλλά και τη θετική αυτοαντίληψη του λύτη ως προς τις μαθησιακές του δυνατότητες στην επίλυση προβλήματος. Η τελευταία σε συνδυασμό με τις δεξιότητες θα δημιουργήσουν στους μαθητές ισχυρό κίνητρο για την ενασχόληση με προβλήματα, β) Μάθηση, η οποία επιδιώκεται να έχει τα εξής χαρακτηριστικά γνωρίσματα: ενεργητική, σωρευτική, προσανατολισμένη σε στόχο, αυτορρυθμιζόμενη, συνεργατική και διαφορετική από άτομο σε άτομο, γ) Παρέμβαση, στα πλαίσια της οποίας θα αναπτύσσονται στρατηγικές αυτορρύθμισης, θα αξιοποιούνται δραστηριότητες που αφορούν σε καταστάσεις του πραγματικού κόσμου των παιδιών και θα προάγει την κοινωνική αλληλεπίδραση, λαμβάνοντας υπόψη τα ατομικά χαρακτηριστικά του καθενός και δ) Αξιολόγηση, η οποία θα παρέχει ανατροφοδότηση στους μαθητές για τη διαδικασία της μάθησης, θα περιλαμβάνει εναλλακτικούς τύπους αξιολόγησης και θα καλλιεργεί δεξιότητες ατομικής και ομαδικής αυτό-αξιολόγησης.

Το εν λόγω μοντέλο χρησιμοποιήθηκε από τον De Corte (2013) ως διδακτικό πλαίσιο για τη διδασκαλία σε χαρισματικούς μαθητές, καθώς θεωρήθηκε ότι μπορεί να αξιοποιηθεί σε καινοτόμες και ευέλικτες διδακτικές τεχνικές, με σκοπό οι μαθητές να θέτουν τους δικούς τους στόχους, να οργανώνουν και να παρακολουθούν τη διαδικασία της μάθησής τους. Η εφαρμογή του έδειξε ότι τα χαρακτηριστικά του μοντέλου επιτρέπουν την αντιμετώπιση των διάφορων αναγκών των μαθητών, με αποτέλεσμα να επωφελούνται όλα τα παιδιά, ανεξάρτητα από την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Ως εκ τούτου, το CLIA δύναται να λειτουργεί περισσότερο ως πυρήνας για τον σχεδιασμό δυναμικού μαθησιακού περιβάλλοντος προαγωγής της μεταγνώσης, αναπτύσσοντας κυρίως δεξιότητες αυτορρύθμισης.

Το μοντέλο των Yimer και Ellerton (2006)

Οι Yimer και Ellerton (2006) ανέπτυξαν ένα μεταγνωστικό διδακτικό μοντέλο που τονίζει τη σχέση αλληλεξάρτησης μεταξύ γνώσης και μεταγνώσης καθώς και τη σχέση μεταξύ γνώσης και ρύθμισης της γνωστικής λειτουργίας, κατά τη διαδικασία επίλυσης μη-τυποποιημένων μαθηματικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα, το μοντέλο αυτό αποτελείται από τα εξής στάδια διδασκαλίας: α) Εμπλοκή, που αφορά κατά κύριο λόγο στην κατανόηση του προβλήματος, β) Μετασχηματισμός – διατύπωση, που αναφέρεται στην κατάστρωση σχεδίου επίλυσης, γ) Εφαρμογή του προτεινόμενου σχεδίου επίλυσης, δ) Αξιολόγηση των ενεργειών, των αποφάσεων που λήφθηκαν, της λύσης κλπ., και ε) Εσωτερίκευση, που αφορά στον στοχασμό του λύτη πάνω στη συνολική διαδικασία επίλυσης που εφάρμοσε ο λύτης.

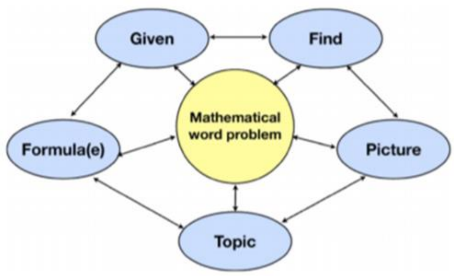
Αξίζει να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο διδακτικό μοντέλο διαπνέεται από τη στοχαστική σκέψη, δεδομένου ότι ο στοχασμός διαπερνά όλα τα στάδιά του. Για παράδειγμα, στο πρώτο στάδιο επιδιώκεται ο στοχασμός του λύτη πάνω στη βασική ιδέα του προβλήματος, στο δεύτερο στάδιο ο λύτης στοχάζεται σχετικά με τις συνθήκες υλοποίησης του σχεδίου επίλυσης, στο επόμενο στάδιο αναπτύσσεται στοχασμός για την καταλληλότητα των ενεργειών και των βημάτων του λύτη κ.ο.κ. Αυτή η βαρύτητα που αποδίδεται στον στοχασμό, ευνοεί την εκδήλωση και ανάπτυξη μεταγνωστικών συμπεριφορών καθώς και την καλλιέργεια υψηλού επιπέδου σκέψης, χαρακτηριστικό γνώρισμα του επιδέξιου λύτη.

Επίσης, χαρακτηρίζεται από ευελιξία, καθώς παρέχει στον λύτη διάφορα μονοπάτια επίλυσης και τονίζει ότι η σύνδεση μεταξύ των παραπάνω σταδίων δεν είναι γραμμική ούτε μονής κατεύθυνσης (Stillman & Mevarech, 2010). Η εφαρμογή του σε μεταγενέστερη έρευνα των δημιουργών του (Yimer & Ellerton, 2010) σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς έδειξε ότι ο στοχασμός βοήθησε τους συμμετέχοντες να καταστούν ενήμεροι για τις πτυχές της διαδικασίας επίλυσης, να αποκτήσουν καλύτερη αυτό-αντίληψη ως λύτες και να συνειδητοποιήσουν ότι σημασία δεν έχει η λύση αλλά η διαδικασία μέχρι να φτάσουν στη λύση. Ειδικότερα, στο τελευταίο στάδιο της εσωτερίκευσης υποδηλώνεται ο βαθμός εξοικείωσης του λύτη με τη διαδικασία επίλυσης, εκφράζονται τα συναισθήματά του για τη λύση που έδωσε στο πρόβλημα, με άλλα λόγια, διαφαίνεται το επίπεδο της μεταγνωστικής ωριμότητας του λύτη.

Το μοντέλο STARtUP (Lee, Yeo & Hong, 2014)

Οι Lee, Yeo και Hong (2014) σχεδίασαν ένα διδακτικό μοντέλο για την ανάπτυξη της μεταγνώσης και της ικανότητας επίλυσης μη-τυποποιημένων προβλημάτων. Βάση του συγκεκριμένου μοντέλου, που έχει τον τίτλο STARtUP, αποτέλεσε το «Πρόβλημα Τροχός» (Problem Wheel), ένα κυκλικό μεταγνωστικό σχήμα των Chang, Yeap και Lee (2001, στο Lee, Yeo & Hong, 2014), που τονίζει την αλληλεπίδραση των σταδίων του. Από το σχήμα αυτό οι Lee, Yeo και Hong διατήρησαν τα «Δεδομένα» (Given), τα «Ζητούμενα» (Find), την «Εικόνα» (Picture) και αντικατέστησαν το «Θέμα» (Topic) με τις ευρετικές (Heuristics) και τον «Τύπο» (Formula) με την «Έναρξη» (Start). Σε κάθε στάδιο οι μαθητές χρησιμοποιούν ερωτήσεις προκειμένου να παρακολουθούν και να κατευθύνουν τη σκέψη τους. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο στάδιο θέτουν ερωτήσεις που τους καθιστούν ενήμερους για τις πληροφορίες που περιέχονται στο πρόβλημα. Στο επόμενο στάδιο οι μαθητές εστιάζουν την προσοχή τους στο ζητούμενο του προβλήματος και στη συνέχεια, με τη χρήση αναπαραστάσεων, οπτικοποιούν τις σχέσεις μεταξύ των πληροφοριών του προβλήματος. Έπειτα, οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν την κατάλληλη μέθοδο, για να εργαστούν στο πρόβλημα. Στόχος είναι οι αυτό-κατευθυνόμενες ερωτήσεις να βοηθούν τους μαθητές κυρίως κατά την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης, γι’ αυτό και δίνεται έμφαση στα αρχικά στάδια κατανόησης και σχεδιασμού, στα οποία δυσκολεύονται ιδιαίτερα οι μαθητές.

Η υλοποίηση του STARtUP ενδείκνυται τόσο για ατομική όσο και για ομαδική επίλυση και συνοδεύεται, όπως αναφέρθηκε, από τη χρήση μεταγνωστικών ερωτήσεων σε κάθε στάδιο, τις οποίες οι μαθητές καλούνται να απαντούν γραπτώς. Επίσης, το εν λόγω μοντέλο αναγνωρίζει τη σπουδαιότητα των οπτικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία επίλυσης, όπως υποδηλώνει το αντίστοιχο τμήμα του, και βοηθά τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τη διαδικασία επίλυσης περισσότερο ως διαδικασία και λιγότερο ως σκοπό.



Εικόνα 1: Η βάση του μοντέλου διδασκαλίας της μεταγνώσης STARtUP (ΠΗΓΗ: Lee, Yeo & Hong, 2014, σελ. 467)

Η εφαρμογή του STARtUP έχει αναδείξει την εξοικείωση των μαθητών με την επίλυση μη-τυποποιημένων προβλημάτων και την ανάπτυξη δεξιοτήτων ρύθμισης και ελέγχου της σκέψης τους κατά τη διαδικασία επίλυσης. Ειδικότερα, οι Lee, Yeo και Hong (2014) το εφάρμοσαν σε παιδιά Δ' τάξης στη Σιγκαπούρη και διαπίστωσαν ότι αυτά ήταν σε θέση να κατανοούν περισσότερο τα προβλήματα, να καταστρώνουν αποτελεσματικότερα σχέδια επίλυσης και να αποκτούν αυτοπεποίθηση για την επιτυχία στη λύση τους. Η κριτική που έχει δεχθεί εστιάζει στον χρόνο που απαιτείται για την καταγραφή των απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις που συνοδεύουν κάθε στάδιο, τουλάχιστον μέχρι να εξοικειωθούν με αυτές. Ωστόσο, η γραπτή αποτύπωση των ενεργειών τους βοηθά σημαντικά στη διατήρηση πληροφοριών που σε διαφορετική περίπτωση δεν θα διατηρούνταν λόγω της περιορισμένης χωρητικότητας της μνήμης εργασίας των παιδιών (Hong, Lee & Yeo, 2015).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η ανάδειξη του ρόλου της μεταγνωστικής διδασκαλίας στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μαθητών δημοτικού σχολείου. Τόσο η στροφή του ερευνητικού ενδιαφέροντος τα τελευταία χρόνια στη διδασκαλία της μεταγνώσης όσο και τα αντίστοιχα ερευνητικά ευρήματα μαρτυρούν ότι η μεταγνωστική παρέμβαση είναι πολύ ευεργετική για τους μαθητές που τη λαμβάνουν. Η ύπαρξη διάφορων μοντέλων μεταγνωστικής διδασκαλίας, ορισμένα από τα οποία περιγράφηκαν παραπάνω, δείχνει ότι δεν υπάρχει κάποιο ιδεατό διδακτικό μοντέλο, λόγω της πολυπλοκότητας του φαινομένου της μεταγνώσης. Συγκεκριμένα, ο σχεδιασμός και η εφαρμογή ενός μεταγνωστικού μοντέλου διδασκαλίας εξαρτάται από ποικίλους παράγοντες όπως, για παράδειγμα, ποια πτυχή της μεταγνώσης επιθυμεί να διδάξει κανείς, υπό ποιες συνθήκες, ποια τα χαρακτηριστικά του μαθητικού πληθυσμού που θα λάβει τη μεταγνωστική διδασκαλία, πόσο χρόνο θα διαρκέσει η παρέμβαση κ.ο.κ..

Αξίζει να σημειωθεί η επίδραση του μοντέλου επίλυσης του Polya (1962) σε όλα τα μοντέλα μεταγνωστικής διδασκαλίας. Για παράδειγμα, οι μεταγνωστικές ερωτήσεις στις οποίες εκπαιδεύονται να απαντούν οι μαθητές που λαμβάνουν τη μεταγνωστική διδασκαλία IMPROVE αντιστοιχούν στις τέσσερις φάσεις επίλυσης του Polya (κατανοώ το πρόβλημα, επινοώ ένα σχέδιο, εκτελώ το σχέδιο, κοιτάζω πίσω). Παρομοίως, στο διδακτικό μοντέλο SOLVED διαπιστώνεται αντιστοίχιση φάσεων και σταδίων, όπως και στο μοντέλο των Yimer και Ellerton (2006), που οι πέντε φάσεις του αντιστοιχούν ουσιαστικά στις τέσσερις φάσεις του μοντέλου επίλυσης του Polya. Τέλος, το μοντέλο STARtUP συνιστά συνδυασμό του μεταγνωστικού σχήματος «Problem Wheel» με το μοντέλο επίλυσης του Polya. Ως εκ τούτου, παρόλο που ο Polya δεν αναφέρεται ρητά στη μεταγνώση, το μοντέλο επίλυσης και οι ευρετικές στρατηγικές που εισηγήθηκε κατ’ ουσίαν αφορούν στη μεταγνώση. Ένα ακόμη κοινό χαρακτηριστικό των μεταγνωστικών μοντέλων διδασκαλίας είναι η άρρηκτη σχέση τους με τον στοχασμό. Οι μαθητές, προκειμένου να προχωρήσουν από το ένα στάδιο διδασκαλίας στο επόμενο, καλούνται να σκέφτονται κριτικά, να στοχάζονται πάνω στις ενέργειές τους και να λαμβάνουν τις αντίστοιχες αποφάσεις. Η στοχαστική σκέψη ενισχύεται σημαντικά από την ανατροφοδότηση που λαμβάνει χώρα στο τέλος κάθε διδακτικού σταδίου.

Ωστόσο, παρά την αναγνώριση της σπουδαιότητας της μεταγνώσης στη μάθηση, η πλειοψηφία των σχετικών ερευνών έχει υλοποιηθεί σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και ενήλικες, ενώ όσες περιλαμβάνουν μαθητές δημοτικού σχολείου, περισσότερο παραμένουν σε επίπεδο εκδήλωσης και αξιολόγησης της μεταγνώσης, παρά σε επίπεδο διδασκαλίας. Συνεπώς, αναδεικνύεται η ανάγκη για τον σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλων διδακτικών μοντέλων μεταγνωστικής εκπαίδευσης για μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και την ένταξη της καλλιέργειας της μεταγνώσης στα μαθηματικά του σύγχρονου σχολείου, προκειμένου οι μαθητές να εξελιχθούν σε κριτικά και στοχαστικά σκεπτόμενους πολίτες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

De Corte, E., Verschaffel, L., & Masui, C. (2004). The CLIA-model: A framework for designing powerful learning environments for thinking and problem solving. *European Journal of Psychology of Education*, *19*(4), 365–384.

De Corte, E. (2013). Giftedness considered from the perspective of research on learning and instruction. *High Ability Studies*, *24*(1), 3–19.

Efklides, A., & Vlachopoulos, S. P. (2012). Measurement of metacognitive knowledge of self, task, and strategies in mathematics. *European Journal of Psychological Assessment*, *28*(3), 227–239.

Hohn, R. L., & Frey, B. (2002). Heuristic training and performance in elementary mathematical problem solving. *The Journal of Educational Research*, *95*(6), 374–380.

Hong, S. E., Lee, N. H., & Yeo, D. J. S. (2015). A metacognitive approach in kick-starting the understanding and planning phases of mathematical problem solving. In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12)* (pp. 4450–4458). Cham: Springer International Publishing.

Kramarski, B., & Friedman, S. (2014). Solicited versus unsolicited metacognitive prompts for fostering mathematical problem solving using multimedia. *Journal of Educational Computing Research*, *50*(3), 285–314.

Kribbs, E. E., & Rogowsky, B. A. (2016). A review of the effects of visual-spatial representations and heuristics on word problem solving in middle school mathematics. *International Journal of Research in Education and Science*, *2*(1), 65–74.

Lee, N. H., Yeo, D. J. S., & Hong, S. E. (2014). A metacognitive-based instruction for primary four students to approach non-routine mathematical word problems. *ZDM*, *46*(3), 465–480.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal*, *34*(2), 365–395.

Mevarech, Z. R., & Amrany, C. (2008). Immediate and delayed effects of meta-cognitive instruction on regulation of cognition and mathematics achievement. *Metacognition and Learning*, *3*(2), 147–157.

Mevarech, Z. R., Terkieltaub, S., Vinberger, T., & Nevet, V. (2010). The effects of meta-cognitive instruction on third and sixth graders solving word problems. *ZDM*, *42*(2), 195–203.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*. New York: Wiley.

Schmitz, B., & Weise, B. S. (2006). New perspectives for the evaluation of training sessions in self-regulated learning: Time-series analyses of diary data. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(1), 64–96.

Stillman, G., & Mevarech, Z. (2010). Metacognition research in mathematics education: from hot topic to mature field. *ZDM*, *42*(2), 145–148.

Tarricone, P. (2011). *The taxonomy of metacognition*. Hove: Psychology Press.

Yang, C. T., & Lee, S. Y. (2013). The effect of instruction in cognitive and metacognitive strategies on ninth-grade students' metacognitive abilities. *New Waves*, *16*(1), 46–55.

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures, and learning spaces* (pp. 575–582). Adelaide, Australia: MERGA.

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2010). A five-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM*, *42*(2), 245–261.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Βισσαρίου Αικατερίνη, Δεσλή Δέσποινα

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

vissario@eled.auth.gr & ddesli@eled.auth.gr

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση ενός νέου εργαλείου μέτρησης της μεταγνωστικής γνώσης μαθητών Γ' τάξης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Πρόκειται για έναν κατάλογο αυτό-αναφοράς που περιλαμβάνει 30 δηλώσεις και αφορά στην αξιολόγηση του επιπέδου της δηλωτικής, της διαδικαστικής και της υποθετικής γνώσης, ως τα τρία είδη της μεταγνωστικής γνώσης. Περιγράφονται τα στάδια ανάπτυξής του, καθώς και ο έλεγχος της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας του. Οι σχετικές αναλύσεις έδειξαν ότι ο συγκεκριμένος κατάλογος δυνητικά αποτελεί ένα έγκυρο και αξιόπιστο εργαλείο μέτρησης της μεταγνωστικής γνώσης μαθητών δημοτικού σχολείου κατά την επίλυση προβλήματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση προβλήματος κατέχει από πολύ παλιά εξέχουσα θέση στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Στην επίλυση προβλήματος οι μαθητές μαθαίνουν να λειτουργούν μεθοδικά με τη χρήση βημάτων, να κατανοούν ένα βήμα πριν προχωρήσουν στο επόμενο, να συγκρίνουν, να επιλέγουν και να εφαρμόζουν την κατάλληλη στρατηγική επίλυσης, να στοχάζονται στις ενέργειές τους και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά με νόημα. Αυτές οι ικανότητες αποτελεσματικής επίλυσης συνδέονται με την καλλιέργεια της μεταγνώσης, η οποία συνιστά ένα πολυδιάστατο φαινόμενο που συμβάλλει καθοριστικά στην ανάπτυξη δεξιοτήτων σκέψης και κατανόησης.

Η μεταγνώση συνίσταται στη γνώση της γνωστικής λειτουργίας, στη ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας και στις μεταγνωστικές εμπειρίες (Flavell, 1979; Tarricone, 2011; Kim, Park, Moore & Varma, 2013). Η γνώση της γνωστικής λειτουργίας (knowledge of cognition) ή μεταγνωστική γνώση (metacognitive knowledge) ορίζεται ως η γνώση, οι πεποιθήσεις και η ενημερότητα του ατόμου για τις γνωστικές του διεργασίες. Πιο συγκεκριμένα, αφορά στη γνώση των μαθησιακών δυνατοτήτων του, των αδυναμιών του καθώς και στη γνώση σχετικά με τις στρατηγικές και την κατάλληλη εφαρμογή τους κατά την επίλυση. Κατ' ουσίαν, περιγράφει πόσο ενήμερο είναι ένα άτομο για τις γνωστικές του ικανότητες, τις διαδικασίες και τους πόρους που διαθέτει κατά την εκτέλεση συγκεκριμένων γνωστικών έργων. Η μεταγνωστική γνώση διαρκώς εμπλουτίζεται και διαφοροποιείται με την ενσωμάτωση πληροφοριών που προέρχονται από την παρακολούθηση της γνωστικής λειτουργίας σε ένα συνειδητό επίπεδο, μέσω της παρατήρησης της συμπεριφοράς, των ενεργειών των ατόμων και των αποτελεσμάτων τους (Flavell, 1979). Η μεταγνωστική γνώση περιλαμβάνει τρία είδη γνώσης: τη δηλωτική γνώση (declarative knowledge), τη διαδικαστική γνώση (procedural knowedge) και την υποθετική γνώση (conditional knowledge) (Schraw, 2009).

Η *δηλωτική γνώση* είναι η σταθερή, συνεχής, οικεία και μακροπρόθεσμη γνώση που περιλαμβάνει την αυτό-γνώση, την αυτό-ενημερότητα και την αξιολόγηση αυτής της γνώσης και αναφέρεται στο άτομο, στα έργα και τις στρατηγικές. Η δηλωτική γνώση που αφορά στον παράγοντα άτομο συνίσταται στο τι πιστεύει ένα άτομο για τον εαυτό του και τους άλλους ως γνωστικά όντα. Η δηλωτική γνώση ως προς τα μαθηματικά προβλήματα περιλαμβάνει τις πληροφορίες και τις απαιτήσεις του προβλήματος, καθώς και την ενημερότητα ως προς την επιλογή και εφαρμογή της στρατηγικής που απορρέει από αυτές (Flavell, 1979; Tarricone, 2011). Η δηλωτική γνώση αναφορικά με τις στρατηγικές περιγράφει την κατάκτηση της γνώσης γενικών και ειδικών στρατηγικών επίλυσης, την αντίληψη της εν δυνάμει χρησιμότητας, συνθηκών χρήσης, εφαρμογής και αποτελεσματικότητάς τους, προκειμένου το άτομο να αντεπεξέλθει στις απαιτήσεις του προβλήματος και να πετύχει τα καλύτερα αποτελέσματα. Στηρίζεται δηλαδή στην επίγνωση του πότε, πού και πώς μπορεί μια στρατηγική να αξιοποιηθεί.

Η *διαδικαστική γνώση* αναφέρεται στο «γνωρίζω πως», δηλαδή στη γνώση και ενημερότητα των διαδικασιών που αφορούν στην αντιμετώπιση των απαιτήσεων του προβλήματος, στην εφαρμογή στρατηγικών και διαδικασιών που διευκολύνουν την πραγμάτωση των στόχων του. Εξαρτάται σημαντικά από τη θετική ή αρνητική αυτό-αντίληψη του ατόμου ως λύτη, από την αυτό-αποτελεσματικότητά του και τα εσωτερικά του κίνητρα. Αναπτύσσεται μέσω της εφαρμογής και της εμπειρίας και μπορεί να οδηγήσει το άτομο σε ασυνείδητες, αυτοματοποιημένες διαδικασίες, εκλεπτυσμένες στρατηγικές ή δεξιότητες, όταν αντιμετωπίζει οικείες καταστάσεις επίλυσης προβλήματος (Slusarz & Sun, 2001).

Το τρίτο είδος μεταγνωστικής γνώσης, η *υποθετική γνώση*, αφορά στο «ξέρω πότε και γιατί να χρησιμοποιήσω τη δηλωτική και διαδικαστική γνώση» (Schraw, 1998, σελ. 114). Με άλλα λόγια, είναι η γνώση και η ενημερότητα του ατόμου για τις συνθήκες που επιδρούν στη μάθηση όπως, για παράδειγμα, γιατί είναι κατάλληλες και αποτελεσματικές οι στρατηγικές, πότε θα πρέπει να εφαρμοστούν κατά τη διαδικασία επίλυσης κ.ά. Η υποθετική γνώση ενισχύει την ενημερότητα ως προς το είδος του προβλήματος, τις απαιτήσεις και το πλαίσιό του, υποστηρίζοντας έτσι τη δηλωτική και διαδικαστική γνώση, οι οποίες χωρίς την υποστήριξη αυτή θα ήταν αναποτελεσματικές, καθώς το άτομο δεν θα γνώριζε πότε και γιατί να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις του, να προσαρμόσει τις στρατηγικές κατά την επίλυση μη οικείων προβλημάτων, να εφαρμόσει τις απαιτούμενες διαδικασίες κλπ. (Schneider & Lockl, 2002).

Τις τελευταίες δεκαετίες η αξιολόγηση των πτυχών της μεταγνώσης βρίσκεται στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος σε σχέση με τη μαθηματική επίδοση γενικότερα αλλά και με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος ειδικότερα (Desoete & De Craene, 2019). Η μεταγνωστική γνώση αξιολογείται στο πλαίσιο μιας συνολικότερης αξιολόγησης της μεταγνώσης είτε κατά τη διάρκεια της επίλυσης (on-line μετρήσεις), συνήθως με τη μέθοδο της φωναχτής σκέψης, είτε πριν από και μετά την επίλυση (off-line μετρήσεις), συνήθως με τη χρήση καταλόγων αυτό-αναφοράς. Οι τελευταίοι μάλιστα χρησιμοποιούνται συχνότερα και περιλαμβάνουν δηλώσεις για τη μεταγνώση στο σύνολό της (μεταγνωστική γνώση, μεταγνωστικές δεξιότητες, μεταγνωστικές εμπειρίες), χωρίς να διαφαίνεται η διάκριση των πτυχών της. Μονάχα το εργαλείο MKMQ των Efklides και Vlachopoulos (2012) αφορά αμιγώς στη μεταγνωστική γνώση, ωστόσο αναφέρεται γενικότερα στα μαθηματικά και όχι μόνο στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Επίσης, στα περισσότερα υφιστάμενα εργαλεία μέτρησης της μεταγνώσης κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, οι δηλώσεις που αφορούν στη μεταγνωστική γνώση δεν καλύπτουν πολλές παραμέτρους της, με αποτέλεσμα αυτή να επιτελεί υποδεέστερο ρόλο, τουλάχιστον συγκριτικά με τη διαδικαστική πτυχή της, στην οποία αποδίδεται μεγαλύτερη βαρύτητα κατά την επίλυση. Ακόμη, τα περισσότερα διαθέσιμα εργαλεία κατασκευάστηκαν για την αξιολόγηση του μεταγνωστικού επιπέδου μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και ενηλίκων. Για τον λόγο αυτό και με δεδομένο ότι τα συστατικά μέρη της μεταγνώσης είναι αλληλένδετα μεν, διακριτά δε, και εξίσου σημαντικά για την αξιολόγηση του μεταγνωστικού επιπέδου των μαθητών, η παρούσα εργασία επιχειρεί να προτείνει ένα νέο εργαλείο μέτρησης της μεταγνωστικής γνώσης μαθητών δημοτικού σχολείου και να υπογραμμίσει τον ρόλο της τελευταίας στην αξιολόγηση της μεταγνώσης εν γένει.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 38 παιδιά (20 αγόρια και 18 κορίτσια) δύο τμημάτων Γ’ τάξης προερχόμενα από δύο δημόσια δημοτικά σχολεία, με μεγάλο εύρος ακαδημαϊκών επιδόσεων και κοινωνικού-οικονομικού επιπέδου. Ο μέσος όρος της ηλικίας των παιδιών ήταν 8 χρόνια και 4 μήνες. Η επιλογή των συγκεκριμένων τμημάτων έγινε με τυχαία βολική δειγματοληψία.

Σχεδιασμός της έρευνας – Εργαλείο. Προκειμένου να διερευνηθεί το μεταγνωστικό επίπεδο των παιδιών κατασκευάστηκαν τέσσερις κατάλογοι αυτό-αναφοράς, ύστερα από μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας: ένας για την αποτίμηση του επιπέδου της μεταγνωστικής γνώσης, για τον οποίο γίνεται λόγος στην παρούσα εργασία, ένας για την αποτίμηση του επιπέδου της ρύθμισης της γνωστικής λειτουργίας και δύο για την αποτίμηση του επιπέδου των μεταγνωστικών εμπειριών, πριν από και μετά την επίλυση μη-τυποποιημένων μαθηματικών προβλημάτων αντίστοιχα. Το θεωρητικό πλαίσιο για την κατασκευή των καταλόγων βασίστηκε στη θεωρία της Tarricone (2011).

Για την κατασκευή του καταλόγου της μεταγνωστικής γνώσης ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία: Πρωταρχική επιδίωξη ήταν, μέσω της συνεργασίας ειδικών στη μεταγνώση και την επίλυση προβλήματος, η δημιουργία δηλώσεων που θα μετρούν προδρομικά και αναδρομικά τα τρία είδη της μεταγνωστικής γνώσης: δηλωτική, διαδικαστική και υποθετική. Η διαμόρφωση των δηλώσεων είχε ως βάση τους καταλόγους αυτό-αναφοράς Jr. MAI (εκδόσεις Α και Β) των Sperling, Howard, Miller και Murphy (2002), HISP των Fortunato, Hecht, Tittle και Alvarez (1991), RAC-PAC της Desoete (2007) και Metacognition Scale των Yildiz, Akpinar, Tatar και Ergin (2009), αφού λήφθηκαν υπόψη και άλλα συναφή εργαλεία για την αξιολόγηση της μεταγνώσης κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (π.χ., το εργαλείο αξιολόγησης του Magno (2009) κλπ). Συνολικά δημιουργήθηκαν 30 δηλώσεις για τη μεταγνωστική γνώση, από τις οποίες οι 16 αφορούσαν στη δηλωτική γνώση, οι 9 στη διαδικαστική και οι 5 στην υποθετική. Οι δηλώσεις παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες με ανακατεμένη σειρά και η αρίθμησή τους φαίνεται στις Εικόνες 1, 2 και 3, αντίστοιχα.

Όλες οι δηλώσεις ήταν κλειστού τύπου, κατάλληλες για το ηλικιακό, γνωστικό και λεξιλογικό επίπεδο των συμμετεχόντων και χρησιμοποιούσαν την κλίμακα Likert με πέντε διαβαθμίσεις (ποτέ, σπάνια, μερικές φορές, συχνά, πάντα). Η τελική μορφή του καταλόγου διαμορφώθηκε ύστερα από τη διεξαγωγή των φάσεων της πιλοτικής έρευνας, με τις διορθώσεις που προέκυψαν (κυρίως επαναδιατύπωση ορισμένων δηλώσεων, προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητές στους συμμετέχοντες) και τη διερεύνηση της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας του.

Διαδικασία. Οι συμμετέχοντες, αφού κατανόησαν τις οδηγίες που δόθηκαν γραπτά και προφορικά από την ερευνήτρια, κλήθηκαν, με την έναρξη της σχολικής χρονιάς, να συμπληρώσουν ατομικά τους τέσσερις καταλόγους οι οποίοι στο σύνολό τους αξιολογούν το επίπεδο μεταγνώσης των παιδιών, σε διαφορετικές ημέρες το καθένα και κατά τη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, αρχικά συμπληρώθηκε ο κατάλογος της μεταγνωστικής γνώσης και έπειτα ο κατάλογος της ρύθμισης της γνωστικής λειτουργίας. Η συμπλήρωση κάθε καταλόγου διήρκησε μία διδακτική ώρα (45΄). Ακολούθησε η συμπλήρωση του καταλόγου των μεταγνωστικών εμπειριών πριν από την επίλυση, που διήρκησε 20 λεπτά. Στη συνέχεια, προκειμένου να αξιολογηθεί η γνωστική επίδοση των συμμετεχόντων στην επίλυση προβλήματος, χορηγήθηκαν 12 μη-τυποποιημένα προβλήματα, τα οποία τα παιδιά κλήθηκαν να λύσουν το καθένα σε διαφορετική συνεδρία και σε διαθέσιμο χρόνο δύο διδακτικών ωρών (90΄). Μετά τη χορήγηση των προβλημάτων, οι συμμετέχοντες συμπλήρωσαν τον τέταρτο κατάλογο, αυτόν των μεταγνωστικών εμπειριών μετά την επίλυση, σε χρονική διάρκεια 20 λεπτών.

1. Ξέρω πότε κατανοώ ένα πρόβλημα ή όχι.
2. Γνωρίζω τι περιμένει η δασκάλα από μένα να κάνω, όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα.
3. Σε ένα πρόβλημα, ξέρω ποιες μεθόδους θα χρησιμοποιήσω για τη λύση του.
6. Όταν διαβάζω ένα πρόβλημα, ξέρω αν είναι εύκολο ή δύσκολο για μένα.
9. Ξέρω τι πρέπει να κάνω πριν ξεκινήσω να λύνω ένα πρόβλημα.
11. Ξέρω από ποιους παράγοντες εξαρτάται η επιτυχία μου ή η αποτυχία μου σε ένα πρόβλημα.
16. Ξέρω ποιες πληροφορίες χρειάζομαι για να λύσω ένα πρόβλημα.
17. Σκέφτομαι: «Καταλαβαίνω τι μου ζητάει το πρόβλημα;»
19. Διαβάζω το πρόβλημα όσες φορές χρειαστεί, μέχρι να το καταλάβω.
20. Γνωρίζω ποιες πληροφορίες δεν χρειάζομαι σε ένα πρόβλημα.
21. Μπερδεύομαι και δεν μπορώ να αποφασίσω τι να κάνω για να λύσω ένα πρόβλημα.
24. Λύνω σωστά ένα πρόβλημα, όταν το λύνω μαζί με κάποιον άλλον/άλλους.
25. Ξέρω τι είναι αυτό που με δυσκολεύει, όταν δεν λύνω σωστά ένα πρόβλημα.
26. Για να λύσω σωστά ένα πρόβλημα, είναι σημαντικό να ξέρω να κάνω αριθμητικές πράξεις.
27. Λύνω σωστά ένα πρόβλημα, όταν ξέρω μεθόδους επίλυσης.
29. Όταν βλέπω ένα πρόβλημα, σκέφτομαι «δεν μπορώ να το λύσω».

Εικόνα 1: Οι δηλώσεις της δηλωτικής γνώσης στον κατάλογο για την αξιολόγηση της μεταγνωστικής γνώσης

4. Προσπαθώ να χρησιμοποιώ τρόπους επίλυσης που έχουν αποδειχθεί αποτελεσματικοί για μένα νωρίτερα σε προβλήματα.
5. Ξεχωρίζω τις σημαντικές πληροφορίες από τις λιγότερο σημαντικές σε ένα πρόβλημα.
7. Όταν διαβάζω ένα πρόβλημα, ξέρω ποια βήματα θα κάνω για να το λύσω.
10. Λύνω καλύτερα ένα πρόβλημα, όταν με ενδιαφέρει το θέμα του.
12. Στρέφω την προσοχή μου σε αυτό που ζητάει το πρόβλημα.
14. Για να λύσω ένα πρόβλημα, προσπαθώ να το συνδέσω με καταστάσεις από την καθημερινότητά μου.
15. Προσπαθώ να θυμηθώ αν έχω λύσει ξανά ένα πρόβλημα σαν κι αυτό.
22. Προσπαθώ να διατυπώσω το πρόβλημα με δικά μου λόγια.
30. Σκέφτομαι διαφορετικές μεθόδους επίλυσης ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος.

Εικόνα 2: Οι δηλώσεις της διαδικαστικής γνώσης στον κατάλογο για την αξιολόγηση της μεταγνωστικής γνώσης

Κατά τη συμπλήρωση του καταλόγου της μεταγνωστικής γνώσης οι συμμετέχοντες καλούνταν να επιλέξουν μία από τις πέντε προτεινόμενες επιλογές απάντησης, όποια τους εξέφραζε καλύτερα. Μάλιστα, τον συμπλήρωσαν με άνεση στο δεδομένο χρονικό περιθώριο και δεν εξέφρασαν απορίες, γεγονός που έδειξε ότι οι δηλώσεις ήταν κατανοητές. Η διαδικασία χορήγησης όλων των καταλόγων και των προβλημάτων υλοποιήθηκε ξανά έναν μήνα πριν από τη λήξη του σχολικού έτους, μετά την υλοποίηση μεταγνωστικής διδασκαλίας στους μισούς συμμετέχοντες και παραδοσιακής διδασκαλίας στους υπόλοιπους.

Τη συλλογή των δεδομένων ακολούθησε η επεξεργασία με το στατιστικό πρόγραμμα SPSS26. Δεδομένου ότι στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάδειξη του εργαλείου της μεταγνωστικής γνώσης και όχι άλλων παραμέτρων της έρευνας στην οποία εφαρμόστηκε, υφίσταται και ο αντίστοιχος περιορισμός στα δεδομένα που παρουσιάζονται.

8. Ξέρω πότε να χρησιμοποιώ μία συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης.
13. Ξέρω γιατί ένα πρόβλημα είναι εύκολο ή δύσκολο για μένα.
18. Ξέρω γιατί χρησιμοποιώ μία συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης.
23. Ξέρω γιατί μία μέθοδος επίλυσης δεν είναι η κατάλληλη.
28. Ξέρω πότε χρειάζεται να αλλάξω τον τρόπο που εργάζομαι.

Εικόνα 3: Οι δηλώσεις της υποθετικής γνώσης στον κατάλογο για την αξιολόγηση της μεταγνωστικής γνώσης

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Προκειμένου να ελεγχθεί η καταλληλότητα των δεδομένων για την παραγοντική ανάλυση, χρησιμοποιήθηκαν τα στατιστικά κριτήρια Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) και Bartlett's Test of Sphericity και στα τρία είδη της μεταγνωστικής γνώσης. Συγκεκριμένα, οι τιμές του πρώτου κριτηρίου βρέθηκαν 0,588 για τη δηλωτική γνώση, 0,671 για τη διαδικαστική γνώση και 0,584 για την υποθετική γνώση. Η ανάλυση με το δεύτερο κριτήριο έδειξε στατιστικά σημαντικό αποτέλεσμα ($p<.001$) και στα τρία είδη της μεταγνωστικής γνώσης. Ως εκ τούτου, τα δεδομένα κρίθηκαν κατάλληλα και το δείγμα επαρκές για τη διενέργεια διερευνητικής παραγοντικής ανάλυσης (Exploratory Factor Analysis), στην οποία η ομαδοποίηση των δηλώσεων οδήγησε στην εξής παραγοντική δομή: έξι κύριοι παράγοντες για τη δηλωτική γνώση, τρεις κύριοι παράγοντες για τη διαδικαστική γνώση και δύο κύριοι παράγοντες για την υποθετική γνώση.

Ταυτόχρονα, η ύπαρξη υψηλών αλληλοσυσχετίσεων μεταξύ των παραγόντων στη δηλωτική (Pearson's $r=-0,36$, $p<.05$) και στη διαδικαστική γνώση (Pearson's $r=+0,34$, $p<.05$) οδήγησε στην επιλογή της μεθόδου της πλάγιας περιστροφής (Direct Oblimin). Αντίθετα, η απουσία ύπαρξης υψηλών αλληλοσυσχετίσεων στην υποθετική γνώση (Pearson's $r=+0,24$) οδήγησε στην επιλογή της μεθόδου της ορθογώνιας περιστροφής (Varimax). Οι παράγοντες που προέκυψαν από την εκτέλεση των πλάγιων περιστροφών παρουσιάζονται στους Πίνακες 1 και 2, ενώ της ορθογώνιας περιστροφής στον Πίνακα 3.

Παράγοντας	**Ερωτήσεις (παραγοντική φόρτιση)**	**Cronbach's Alpha**
1.Διεργασίες πριν από την επίλυση	9(0,84), 16(0,74), 19(0,93), 20(0,56),21(0,79),29(0,50)	0,88
2.Ενημερότητα ως προς τον βαθμό δυσκολίας	6(0,49)	–
3.Κατανόηση και μέθοδοι επίλυσης	1(0,79), 17(0,68),27(0,45)	0,52
4.Στρατηγικές επίλυσης και δυσκολίες κατά την επίλυση	3(-0,95), 25(-0,44)	0,59
5.Γνώση εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων	26(0,94)	–
6.Συνεργατική επίλυση	24(0,89)	–
Συνολική Δηλωτική Μεταγνωστική Γνώση	1, 2, 3, 6, 9, 11, 16, 17, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27 & 29	0,76

Πίνακας 1: Αξιοπιστία Δηλωτικής Μεταγνωστικής Γνώσης (Επιμέρους παραγόντων και συνολικής κλίμακας)

Ακόμη, στους ίδιους πίνακες παρουσιάζονται οι τιμές Cronbach's Alpha τόσο για τη συνολική δηλωτική, διαδικαστική και υποθετική γνώση όσο και για τους επιμέρους παράγοντες της καθεμίας. Όπως διαπιστώνεται, η αξιοπιστία της συνολικής δηλωτικής και διαδικαστικής μεταγνωστικής γνώσης έχει την ίδια τιμή (0,76), η οποία είναι αρκετά ικανοποιητική και μεγαλύτερη από την τιμή αξιοπιστίας της υποθετικής μεταγνωστικής γνώσης (0,67), η οποία, ωστόσο, παραμένει σε αποδεκτά όρια (α>0,6) (Hinton, McMurray & Brownlow, 2014).

Παράγοντας	**Ερωτήσεις (παραγοντική φόρτιση)**	**Cronbach's Alpha**
1.Διαδικασίες πριν από την επίλυση	5(0,55), 7(0,72), 22(0,91)	0,74
2.Παράγοντες που διευκολύνουν την επίλυση	10(0,77), 15(0,84)	0,61
3.Ικανότητα χρήσης στρατηγικών επίλυσης, εστίαση στον στόχο του προβλήματος και σύνδεση με την καθημερινή ζωή	4(0,41),12(0,69),14(0,52),30(0,86)	0,62
Συνολική Διαδικαστική Μεταγνωστική Γνώση	4,5,7,10,12,14,15,22 & 30	0,76

Πίνακας 2: Αξιοπιστία Διαδικαστικής Μεταγνωστικής Γνώσης (Επιμέρους παραγόντων και συνολικής κλίμακας)

Παράγοντας	**Ερωτήσεις (παραγοντική φόρτιση)**	**Cronbach's Alpha**
1.Αποτελεσματική χρήση στρατηγικών επίλυσης	8(0,68), 18 (0,78), 28(0,86)	0,74
2.Επίγνωση πηγών δυσκολίας & χρήσης αναποτελεσματικών στρατηγικών επίλυσης	13(0,72), 23(0,88)	0,62
Συνολική Υποθετική Μεταγνωστική Γνώση	8,13,18 & 23	0,67

Πίνακας 3: Αξιοπιστία Υποθετικής Μεταγνωστικής Γνώσης (Επιμέρους παραγόντων και συνολικής κλίμακας)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η μεταγνωστική γνώση είναι μία από τις βασικές πτυχές της μεταγνώσης και καθοριστικός παράγοντας για την ανάπτυξή της. Χωρίς επαρκή γνωστική βάση η εκδήλωση και καλλιέργεια της μεταγνώσης παρεμποδίζεται, δεδομένου ότι μεταξύ γνώσης και μεταγνώσης υφίσταται διαρκής αλληλεπίδραση. Ειδικότερα, το γεγονός ότι η επίλυση προβλήματος απαιτεί εναλλαγή γνωστικών και μεταγνωστικών διαδικασιών, υπογραμμίζει την αναγκαιότητα διερεύνησης του επιπέδου μεταγνωστικής γνώσης των παιδιών, στόχος που μπορεί να επιτευχθεί μέσω της ανάπτυξης έγκυρων και αξιόπιστων εργαλείων μέτρησής της.

Παρά το ότι στη βιβλιογραφία συναντά κανείς διάφορα εργαλεία μέτρησης της μεταγνωστικής γνώσης, τα οποία, ως επί το πλείστον, έχουν τη μορφή καταλόγων αυτό-αναφοράς, τα εργαλεία αυτά μετρούν συγχρόνως και άλλες πτυχές της μεταγνώσης, κυρίως τη διαδικαστική πτυχή της, με αποτέλεσμα συχνά να παραμελείται ο ρόλος της μεταγνωστικής γνώσης. Ως εκ τούτου, στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε ένα νέο εργαλείο που επιχειρεί να μετρήσει αμιγώς τη μεταγνωστική γνώση μαθητών δημοτικού σχολείου, το οποίο αξιοποιήθηκε για πρώτη φορά στο πλαίσιο μιας ευρύτερης έρευνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Εξετάστηκαν οι ψυχομετρικές του ιδιότητες και διαπιστώθηκαν η ικανοποιητική εγκυρότητα και αξιοπιστία του, σύμφωνα με τα αντίστοιχα κριτήρια των Hinton, McMurray και Brownlow (2014).

Η χορήγηση του συγκεκριμένου εργαλείου σε μαθητές Γ’ δημοτικού αναδείχτηκε εύκολη και μη χρονοβόρα, ενισχύοντας έτσι την πρακτικότητα και τη λειτουργικότητά του. Το γεγονός μάλιστα ότι το εν λόγω εργαλείο αφορά αποκλειστικά στη μεταγνωστική γνώση αφενός τονίζει την έμφαση που δίνεται στην όσο το δυνατόν πληρέστερη διερεύνησή της και αφετέρου επιχειρεί να καλύψει το μειονέκτημα των προηγούμενων εργαλείων που μετρούσαν πολλές πτυχές της μεταγνώσης μαζί. Σε κάθε περίπτωση, εκπαιδευτικοί και ερευνητές χρειάζεται να αποδίδουν εξίσου βαρύτητα σε όλες τις πτυχές της μεταγνώσης, χωρίς να υποτιμούν κάποια από αυτές.

Ωστόσο, δεν μπορεί να παραβλεφθεί το μικρό δείγμα των συμμετεχόντων στο οποίο το συγκεκριμένο εργαλείο χρησιμοποιήθηκε, προβάλλοντας έτσι αφενός το γεγονός της μη δυνατότητας γενίκευσης των συμπερασμάτων και αφετέρου την ανάγκη να αξιοποιηθεί περαιτέρω σε μεγαλύτερα δείγματα, λαμβάνοντας υπόψη τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Τέλος, είναι αποδεκτό πως οι πιο έγκυρες και αξιόπιστες μέθοδοι διερεύνησης μιας συμπεριφοράς, ενός φαινομένου κλπ. αποτελεί ο συνδυασμός εργαλείων και μεθόδων, όπως στη διερεύνηση της μεταγνώσης, που τα τελευταία χρόνια παρατηρείται η στροφή του ερευνητικού ενδιαφέροντος σε πολυμεθοδικές προσεγγίσεις αξιολόγησής της και κυρίως σε συνδυασμό on-line και off-line μετρήσεων. Υπό αυτό το πρίσμα, το συγκεκριμένο εργαλείο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας, να συνδυαστεί με τη μέθοδο της φωναχτής σκέψης ή της συστηματικής παρατήρησης κατά την επίλυση των προβλημάτων, προκειμένου η αξιολόγηση της μεταγνώσης να βασίζεται σε πιο έγκυρες και αξιόπιστες μετρήσεις, αναγκαιότητα επιτακτική για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση κατάλληλων μεταγνωστικών παρεμβάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Desoete, A. (2007). Evaluating and improving the mathematics teaching-learning process through metacognition. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 5*(3), 705–730.

Desoete, A., & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM, 51*(4), 565–575.

Efklides, A., & Vlachopoulos, S. P. (2012). Measurement of metacognitive knowledge of self, task, and strategies in mathematics. *European Journal of Psychological Assessment, 28*(3), 227–239.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new era of cognitive development inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906–911.

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C. K., & Alvarez, L. (1991). Metacognition and problem solving. *Arithmetic Teacher, 38*(4), 38–40.

Hinton, P., McMurray, I., & Brownlow, C. (2014). *SPSS explained* (2nd ed.) Routledge: Taylor & Francis Group.

Kim, Y. R., Park, M. S., Moore, T. J., & Varma, S. (2013). Multiple levels of metacognition and their elicitation through complex problem-solving tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 377–396.

Magno, C. (2009). Assessing grade school students' metacognition in solving mathematical problem. *The Assessment Handbook, 2*, 1–22, PEMEA.

Schneider, W., & Lockl, K. (2002). The development of metacognitive knowledge in children and adolescents. In T. J. Perfect & B. L. Schwartz (Eds.), *Applied metacognition* (pp. 224–257). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, 26, 113–125.

Schraw, G. (2009). Measuring metacognitive judgments. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), *Handbook of metacognition in education* (pp. 415–429). New York: Routledge.

Slusarz, R., & Sun, R. (2001). The interaction of explicit and implicit learning: An integrated model. In J. D. Moore, & K. Stenning (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 952–957). Edinburgh: LEA.

Sperling, R. A., Howard, B. C., Miller, L. A., & Murphy, C. (2002). Measures of children's knowledge and regulation of cognition. *Contemporary Educational Psychology, 27*(1), 51–79.

Tarricone, P. (2011). *The taxonomy of metacognition*. Hove: Psychology Press.

Yildiz, E., Akpinar, E., Tatar, N., & Ergin, O. (2009). Exploratory and confirmatory factor analysis of the metacognition scale for primary school students. *Educational Sciences: Theory and Practice, 9*(3), 1591–1604.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΜΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Κόπτση Ιωάννα[1], Χρήστου Κωνσταντίνος[2], Βαμβακούση Ξένια[1]

[1]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, [2]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

joanna_kop09@yahoo.gr, kchristou@uowm.gr, xvamvak@uoi.gr

Παρουσιάζουμε μέρος μιας θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού, στην οποία αναπτύξαμε μια ακολουθία δραστηριοτήτων με στόχο τη σύνδεση της διαίρεσης με τη μέτρηση ποσοτήτων και την αξιοποίησή της σε μια εναλλακτική προσέγγιση του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Η ακολουθία δοκιμάστηκε σε 4 παιδιά της Στ΄ Δημοτικού, με οφέλη στην ερμηνεία της διαίρεσης κλασμάτων και τον υπολογισμό πηλίκων. Παρουσιάζονται ευρήματα πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την εφαρμογή, τα οποία θα αξιοποιηθούν στον επανασχεδιασμό της ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η διαίρεση κλασμάτων είναι ένα από τα πιο απαιτητικά αντικείμενα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Copur-Gencturk, 2021; Ma, 1999; Tirosh, 2000). Εκπαιδευτικοί και μαθητές, στην περίπτωση κλασματικού διαιρέτη, συγχέουν τη διαίρεση με τον πολλαπλασιασμό με το ίδιο κλάσμα ή με τη διαίρεση με τον παρονομαστή του κλάσματος, εκτιμούν λανθασμένα το πηλίκο, δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ή να κατασκευάσουν σχετικά προβλήματα, δεν μπορούν να εξηγήσουν τους αλγόριθμους, και τους εφαρμόζουν λανθασμένα, ιδιαίτερα αυτόν που είναι γνωστός και ως «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» (στο εξής, Α&Π). Δύο βασικοί παράγοντες δυσκολίας για τη διαίρεση κλασμάτων είναι, αφενός, το γεγονός ότι προαπαιτεί κατανόηση ενός σύνθετου πλέγματος εννοιών και διαδικασιών, όπως η έννοια των αντίστροφων αριθμών και ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων (Ma, 1999). Αφετέρου, η ερμηνεία της δυσχεραίνεται από το διαισθητικό μοντέλο της διαίρεσης ως «δίκαιη μοιρασιά» που απαιτεί ο διαιρέτης να είναι ακέραιος και μικρότερος από τον διαιρετέο και το πηλίκο μικρότερο από τον διαιρετέο. Το διαισθητικό αυτό μοντέλο παραμένει η κυρίαρχη πηγή νοήματος για τη διαίρεση ακόμα και σε ενήλικες, δημιουργώντας δυσκολίες στις περιπτώσεις που παραβιάζονται οι άδηλες παραδοχές που το διέπουν (Tirosh, 2000).

Κεντρικό ζήτημα για τη διαίρεση κλασμάτων και τις διαδικασίες της είναι το νόημα που της δίνεται είτε σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο, ως πράξη μεταξύ αριθμών, είτε ως μοντέλο καταστάσεων με αναφορά σε ποσότητες και σχέσεις ποσοτήτων (Greer, 1992). Από την πρώτη οπτική, η διαίρεση νοηματοδοτείται, κατά κύριο λόγο, ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού (αxβ:β=α, για β≠0). Από τη σκοπιά των ανώτερων μαθηματικών, η διαίρεση δεν είναι απαραίτητη ως αυτόνομη πράξη στους μη μηδενικούς ρητούς αριθμούς, καθώς αναπληρώνεται από την αντίστροφη πράξη, αλλά με τον αντίστροφο αριθμό. Από αυτή τη «διπλή αντιστροφή» (Li, 2008), προκύπτει άμεσα ο Α&Π. Αυτή η εξήγηση για τον Α&Π δεν είναι άμεσα προσβάσιμη σε παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το ίδιο ισχύει και για τους «αλγεβρικούς» τρόπους προσέγγισης του Α&Π που βασίζονται σε μετασχηματισμούς της αρχικής παράστασης μέχρι να φτάσει στην επιθυμητή μορφή (Fredua-Kwarteng & Ahia, 2006), που απαιτούν κατανόηση συμβολικών παραστάσεων και ευχέρεια στον χειρισμό τους.

Από τη δεύτερη οπτική, μια κεντρική διάκριση είναι αυτή ανάμεσα στη «διαίρεση μερισμού» και τη «διαίρεση μέτρησης». Η διάκριση αυτή ανακύπτει σε καταστάσεις του τύπου των «ισοπληθών ομάδων» (π.χ. *Η δασκάλα είχε 20 μαρκαδόρους και έδωσε 4 στο καθένα από τα 5 παιδιά μιας ομάδας*) που είναι ασύμμετρες (Greer, 1992), με την έννοια ότι στη σχέση που διέπει αυτή την κατάσταση (5 παιδιά x 4 μαρκαδόροι/ανά παιδί = 20 μαρκαδόροι) ο πολλαπλασιαστής και ο πολλαπλασιαστέος έχουν διακριτούς ρόλους. Τα προβλήματα διαίρεσης που προκύπτουν από την κατάσταση αυτή αντιστοιχούν σε διαφορετικό νόημα για τη διαίρεση, στη «διαίρεση μερισμού» (*Πόσους μαρκαδόρους πήρε κάθε παιδί;* - ο διαιρετέος ισομερίζεται από τον αρχικό πολλαπλασιαστή) και στη «διαίρεση μέτρησης» (*Πόσα ήταν τα παιδιά της ομάδας;* - ο διαιρετέος μετράται από τον αρχικό πολλαπλασιαστέο). Το νόημα της μέτρησης διατηρείται όταν ο διαιρέτης είναι κλασματικός, αντίθετα με αυτό του μερισμού, που πρέπει να προσαρμοστεί ως «διαίρεση με τον πολλαπλασιαστή» (Greer, 1992). Από διδακτική άποψη, τυπικά στη βιβλιογραφία ο Α&Π συνδέεται με το (τροποποιημένο) νόημα της διαίρεσης μερισμού (Gregg & Gregg, 2007) σε καταστάσεις που δίνεται μια πληροφορία για το «μέρος» και ζητείται η αντίστοιχη πληροφορία για το «όλο» (π.χ. *Αν τα 3/4 του κέικ γεμίζουν τα 2/3 ενός δοχείου, πόσο κέικ γεμίζει όλο το δοχείο;*). Ο σχετικός τύπος μπορεί να προκύψει σε δύο βήματα, αρχικά με αναγωγή στην κλασματική μονάδα για το δοχείο (*το 1/3 του δοχείου γεμίζει με 3/4x1/2 του κέικ, άρα το 1 δοχείο γεμίζει με 3/4x1/2x3*). Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ στενά συνδεδεμένη με το συγκεκριμένο τύπο προβλήματος και η γενίκευσή της είναι δυσχερής για τις μικρότερες ηλικίες.

Μια εξαίρεση στη σύνδεση του Α&Π με τη διαίρεση μερισμού είναι η προσέγγιση των Cavey και Kinzel (2014), που νοηματοδοτούν τον αντίστροφο ενός αριθμού ν ως τον αριθμό που εκφράζει πόσες φορές «χωράει» ο ν στη μονάδα. Με αυτή την ερμηνεία, η διαίρεση α/β:γ/δ προσεγγίζεται με αναγωγή στη μονάδα: Για τον υπολογισμό α/β:γ/δ (μέτρηση του α/β με το γ/δ), υπολογίζεται αρχικά πόσες φορές χωράει το γ/δ στη μονάδα που έχει ως αποτέλεσμα το δ/γ. Κατόπιν, το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με το α/β, προκειμένου να βρεθεί το αρχικό ζητούμενο πηλίκο, καταλήγοντας στον τύπο του Α&Π. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να αξιοποιηθεί μόνο μετά την εισαγωγή των κλασμάτων και των αντίστροφων αριθμών.

Στην εργασία παρουσιάζουμε μέρος μιας εν εξελίξει *θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού* (Gravemeijer & Prediger, 2019) με κεντρική προβληματική τη διδακτική προσέγγιση της διαίρεσης, κατά τρόπο ώστε να αναδεικνύεται το νόημα της διαίρεσης μέτρησης, να είναι δυνατή η επέκτασή της στη διαίρεση κλασμάτων, να καταλήγει εύλογα στον Α&Π και να είναι εφαρμόσιμη στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Η προσέγγισή μας–που, όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν αναφέρεται στη βιβλιογραφία–βασίζεται στην άμεση σύνδεση της αριθμητικής πράξης της διαίρεσης με τη μέτρηση μεγεθών, συγκεκριμένα του μήκους, και αξιοποιεί την αρχή της «αντιστάθμισης» στη μέτρηση: Όταν κανείς μετρά ένα μέγεθος Μ με μια μονάδα μ, τότε Μ = α x μ, όπου α είναι το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης. Αν το Μ είναι σταθερό και η μονάδα μεταβάλλεται, τότε το α είναι αντιστρόφως ανάλογο του μ. Επομένως, αν το μ πολλαπλασιαστεί με το λ (≠ 0), τότε το α πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του. Η αριθμητική πράξη της διαίρεσης είναι μια ανάλογη κατάσταση της μέτρησης μεγεθών, από την οποία αντλεί και το νόημά της ως «διαίρεση μέτρησης», με τις αντιστοιχίες Δ≡Μ, δ≡μ και π≡α, όπου Δ: ο διαιρετέος, δ: ο διαιρέτης και π:το πηλίκο (Δ/δ). Έτσι, η διαίρεση κλασμάτων (ή και γενικότερα) μπορεί να εξεταστεί υπό το πρίσμα μιας αλλαγής μονάδας (διαιρέτη), από μια αρχική μέτρηση (Δ, δ1, π1) σε μια δεύτερη μέτρηση (Δ, δ2, π2). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε τη διαίρεση 2/3: 5/6. Αν δ1=1, τότε π1=2/3. Ο συντελεστής μεταβολής του δ1 είναι το 5/6. Με βάση την αρχή της αντιστάθμισης, το π2 προκύπτει αν το π1 (2/3) πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο του 5/6, δηλαδή το 6/5.

Σχεδιάσαμε μια ακολουθία δραστηριοτήτων βασισμένη σε αυτό το σκεπτικό, την οποία εφαρμόσαμε δοκιμαστικά σε παιδιά που είχαν ήδη εκτεθεί σε διδασκαλία για τη διαίρεση κλασμάτων, αλλά όχι για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, με κεντρικό στόχο την άντληση πληροφοριών χρήσιμων για τον επανασχεδιασμό της (Gravemeijer & Prediger, 2019). Διερευνήσαμε α) την προϋπάρχουσα γνώση των παιδιών για τη διαίρεση κλασμάτων β) τη μεταβολή των γνώσεων αυτών μετά τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα των δραστηριοτήτων αυτών, γ) τις δυνατότητες και τους περιορισμούς της ακολουθίας.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Οι συμμετέχοντες στη δοκιμαστική παρέμβαση ήταν 4 παιδιά της Στ΄ Δημοτικού που είχαν διδαχθεί τη διαίρεση κλασμάτων στην Ε΄τάξη, ενώ δύο την είχαν επαναλάβει και στην Στ΄ τάξη. Κανένα δεν είχε διδαχθεί ακόμα τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Τα παιδιά συμμετείχαν ατομικά σε δύο συνεδρίες (περίπου 1,5 ώρας η κάθε μία).

Η έρευνα διαρθρώθηκε σε 3 φάσεις (I, II, III). Στη Φάση I διερευνήθηκε η τρέχουσα κατανόησή τους για τη διαίρεση γενικά και τη διαίρεση κλασμάτων, ειδικότερα. Τους ζητήθηκε: α) να εξηγήσουν με λόγια ή/και κατασκευάζοντας ένα πρόβλημα τι σημαίνουν δεδομένες πράξεις διαίρεσης, με τον τύπο των δεδομένων αριθμών να μεταβάλλεται (π.χ. ακέραιος διαιρετέος με ακέραιο και κλασματικό διαιρέτη), β) να υπολογίσουν πηλίκα με κλασματικό διαιρέτη και να εξηγήσουν πώς τα υπολογίζουν, γ) να επιλέξουν από ένα σύνολο έξι προβλημάτων αυτά που λύνονται με μια συγκεκριμένη διαίρεση (5:1/2) και γ) να υπολογίσουν ένα πολλαπλάσιο και ένα υπο-πολλαπλάσιο ενός αριθμού (το πενταπλάσιο και το 1/5 του 30, αντίστοιχα). Στη Φάση III, τα παιδιά κλήθηκαν να επανεξετάσουν τα έργα των α και β, για κλασματικούς διαιρέτες.

Στη Φάση II υλοποιήθηκε η ακολουθία δραστηριοτήτων, με 4 μέρη (Α, Β, Γ, Δ). Το κεντρικό πρόβλημα σε όλα τα μέρη αφορούσε μια σειρά αλλαγών του αριθμητικού αποτελέσματος μιας μέτρησης, μετά από μια σειρά αλλαγών της αρχικής μονάδας μέτρησης (αύξηση/μείωση με ακέραιο/μοναδιαίο κλασματικό συντελεστή, αντίστοιχα). Τα παιδιά κλήθηκαν α) να προβλέψουν την κατεύθυνση των αλλαγών του αποτελέσματος (αύξηση, μείωση), β) να υπολογίσουν τα νέα αποτελέσματα και να τα καταγράψουν σε πίνακες και γ) να διατυπώσουν συμπεράσματα. Υπήρχαν παραλλαγές όσον αφορά τους εμπλεκόμενους αριθμούς, το είδος των αναπαραστάσεων, αλλά και τον τρόπο παρουσίασης των αλλαγών της μονάδας (ως ακολουθία διαδοχικών αλλαγών ίδιας κατεύθυνσης ή σε τυχαία σειρά), σύμφωνα με το σκεπτικό της προσέγγισης των «προβλημάτων με παραλλαγές» που θεωρείται πρόσφορη και στη διαίρεση κλασμάτων (Gregg & Gregg, 2007; Sun, 2011).

Πιο συγκεκριμένα, στο μέρος Α το πρόβλημα τέθηκε σε ρεαλιστικό πλαίσιο, με φυσικά αντικείμενα ως εμπράγματες αναπαραστάσεις («πόσοι *τέτοιοι* φιόγκοι μπορούν να γίνουν από *αυτή* την κορδέλα;»), με στόχο να διερευνηθεί και να εκφραστεί η αρχή της αντιστροφής στο πλαίσιο της μέτρησης. Το μέρος Β αποτελείτο από 3 υπομέρη (Β1, Β2, Β3) με στόχο να εδραιωθεί η σύνδεση μεταξύ της διαίρεσης ως αριθμητική πράξη και της μέτρησης ποσοτήτων. Στο Β1 διατηρήθηκε το πλαίσιο του Α, αλλά με χάρτινες λωρίδες ως αναπαράσταση, στις οποίες αναγραφόταν το μήκος των κορδελών. Επιπλέον του έργου «αλλαγής μονάδας», ζητήθηκε η πράξη με την οποία θα μπορούσε να υπολογιστεί το αποτέλεσμα. Το Β2 αφορούσε την αριθμητική πράξη της διαίρεσης, με τους αριθμούς να αναπαριστώνται ξανά με χάρτινες λωρίδες. Τέλος στο Β3, με παρόμοιο υλικό ζητήθηκε η ερμηνεία της διαίρεσης με διαιρέτη μεγαλύτερο του διαιρετέου ως μέτρηση και ο υπολογισμός του πηλίκου (4:7).

Στο μέρος Γ, οι χάρτινες λωρίδες αναπαρέστησαν γενικευμένους αριθμούς (Δ: διαιρετέος, δ: διαιρέτης, π: πηλίκο), με στόχο τη γενίκευση της αρχής της αντιστροφής στο πλαίσιο της διαίρεσης. Τέλος, στο μέρος Δ, με τις λωρίδες να αναπαριστούν αριθμούς, οι μαθητές κλήθηκαν να ερμηνεύσουν διαιρέσεις με κλασματικό διαιρέτη (μοναδιαίο και μη) και να υπολογίσουν το πηλίκο.

Κεντρικός ρόλος της ερευνήτριας (πρώτη συγγραφέας) ήταν να προτρέπει τα παιδιά να εκφράσουν τις μεταβολές μέσω συντελεστών, τόσο προφορικά, όσο και καταγράφοντας τα αποτελέσματα σε ειδικά σχεδιασμένους πίνακες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο τμήμα αυτό θα περιγράψουμε τα κύρια γενικά ευρήματα συνολικά για τα 4 παιδιά, αλλά θα δώσουμε σχετικά παραδείγματα εστιάζοντας σε ένα από αυτά, στο οποίο θα αναφερόμαστε με το ψευδώνυμο «Κοσμάς», που ήταν το παιδί με την πιο φτωχή αρχική κατανόηση για τη διαίρεση κλασμάτων.

Φάση Ι

Όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να διατυπώσουν προβλήματα διαίρεσης, όταν οι δεδομένοι αριθμοί επέτρεπαν την ερμηνεία της διαίρεσης μερισμού, με αναφορά στη «δίκαιη μοιρασιά». Κανένα παιδί, όμως, δεν ήταν σε θέση να διατυπώσει πρόβλημα, ή να εξηγήσει με λόγια τι σημαίνει μια διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη, ακόμα και στην πιο απλή περίπτωση (δ=1/2).

Ο Κοσμάς προσπάθησε να προσαρμόσει το αρχικό του πρόβλημα (*6 καραμέλες μοιράζονται σε 2* παιδιά) για δ=1/2, καταλήγοντας σε αδιέξοδο:

> Έξι δια 1/2 είναι 3… Έξι είναι οι καραμέλες, όπως πριν, οπότε… Δε γίνεται να έχεις μισό παιδί! Δεν μπορώ να φτιάξω πρόβλημα, αλλά ξέρω ότι έξι δια ένα δεύτερο είναι το μισό, δηλαδή τρία.

Όπως είναι προφανές, ο Κοσμάς ερμήνευσε το 6:1/2 ως «το μισό του έξι», συγχέοντας τη διαίρεση με τον πολλαπλασιασμό. Την ίδια δυσκολία εκδήλωσαν όλα τα παιδιά στο έργο αναγνώρισης προβλημάτων που λύνονται με δεδομένη πράξη (5:1/2). Για παράδειγμα, όλα τα παιδιά επέλεξαν ως κατάλληλο το πρόβλημα «Ο φούρναρης είχε 5κ. αλεύρι και έβαλε το μισό σε ένα κουβά. Πόσο αλεύρι έβαλε στον κουβά;». Ο Κοσμάς δεν έκανε ούτε μία σωστή επιλογή στα 6 προβλήματα και αντιμετώπισε όλους τους υπολογισμούς πηλίκων που του ζητήθηκαν με τον ίδιο τρόπο. Από τα άλλα παιδιά, μόνο ένα υπολόγισε σωστά τα πηλίκα για όλους τους κλασματικούς διαιρέτες, με τον Α&Π, εφαρμόζοντάς τον μηχανικά (κατά δήλωσή του).

Μόνο ένα παιδί εξέφρασε το 1/5 του 30 με πολλαπλασιασμό. Ο Κοσμάς πρότεινε αρχικά τη διαίρεση (30:5). Όταν του ζητήθηκε να εκφράσει το ίδιο πράγμα με πολλαπλασιασμό, ανταποκρίθηκε με το γινόμενο 5x6=30. Τέλος, κανένα παιδί δε θυμόταν τι είναι οι αντίστροφοι αριθμοί, οπότε η ερευνήτρια υπενθύμισε τον ορισμό του διδακτικού τους εγχειριδίου.

Φάση ΙΙ

Όσον αφορά την κατάσταση μεταβολής της μονάδας (στο εξής, μ) και του αποτελέσματος της μέτρησης (στο εξής, α), αρχικά τα παιδιά παρουσίασαν διαφορές ως προς α) το είδος της μεταβολής που παρατήρησαν (προσθετική /πολλαπλασιαστική), β) τον τρόπο που περιέγραψαν τις μεταβολές (με/χωρίς χρήση συντελεστή), γ) τους τρόπους με τους οποίους υπολόγισαν τα νέα αποτελέσματα (π.χ. άμεσα, με μέτρηση) και δ) την ετοιμότητα με την οποία άρχισαν να λαμβάνουν υπόψη και τις δύο μεταβολές ταυτόχρονα. Ανεξάρτητα από τις διαφορές, κοινά στοιχεία της πορείας των παιδιών στη διάρκεια της Φάση Β ήταν ότι όλα τα παιδιά: α) προέβλεπαν σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του α (αύξηση/μείωση), β) ήταν σε θέση να εκφράσουν την αύξηση μέσω συντελεστή και το έκαναν συστηματικά και αυθόρμητα, γ) δεν εξέφρασαν τη μείωση με κλασματικό συντελεστή αυθόρμητα και δ) δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν ως αντίστροφους αριθμούς τον τελεστή μεταβολής της μονάδας (στο εξής, Σμ) και τον τελεστή μεταβολής του αποτελέσματος (στο εξής, Σα), κάτι που επίσης προκάλεσε πολλές παρεμβάσεις, σταθεροποιήθηκε στην πιο απλή περίπτωση (ν, 1/ν), αλλά όχι στη γενική.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι διαδοχικές απόπειρες του Κοσμά στο μέρος Α να περιγράψει τη σχετική κατάσταση και να διατυπώσει συμπέρασμα. Οι απόπειρες ακολουθούν τα αιτήματα της ερευνήτριας για έκφραση των μεταβολών χρησιμοποιώντας συντελεστές, είτε προφορικά, είτε γραπτά (με γκρι σκίαση στον Πίνακα 1). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, στην περίπτωση της μείωσης του μ ο Κοσμάς συνέδεσε άμεσα τις μεταβολές των μ, α και εξέφρασε την πρώτη μεταβολή του α πολλαπλασιαστικά (Κ1), αλλά τις επόμενες μεταβολές προσθετικά (Κ2). Στη συνέχεια παρατήρησε τη σχέση της κατεύθυνσης της μεταβολής του παρονομαστή του συντελεστή αλλαγής της μονάδας, αρχικά με το μέγεθος και το πλήθος των μονάδων (Κ3) και κατόπιν με τη μεταβολή του α, την οποία περιγράφει ως προσθετική (Κ4).

Μέρος Α, μείωση της μονάδας μέτρησης (Σμ=1/2, 1/3, 1/4)	
Κ1	Το αρχικό *(α)* είναι 12. Επειδή *(το μ)* είναι το μισό, πιο μικρό, πολλαπλασίασα *(το α)* με το 2 και βγήκε 24
Κ2	Μετά επειδή *(το μ)*είναι ακόμα πιο μικρό, πολλαπλασίασα *(το α)* με το... όχι… έβαλα συν 12…36 και στο 48 το ίδιο, στο 36 έβαλα συν 12.
Κ3	Όσο πιο μεγάλος ο παρονομαστής *(του Σμ)*, τόσο μικρότερα…τόσο πιο πολλά τα κομμάτια.
Κ4	Κάθε φορά που ο παρονομαστής *(του Σμ)* μεγαλώνει, αυτό *(α)* γίνεται συν δώδεκα
Κ5	Όταν έχουμε ένα κομμάτι *(μ)* και το κάνουμε κλάσμα, μισό, πολλαπλασιάζουμε το 12 *(α)* με το 2. Όταν έχουμε ένα τρίτο, θα πολλαπλασιάσουμε *(το α)* με το 3.
Κ6	Δηλαδή, όσο πάει και μεγαλώνει ο παρονομαστής *(του Σμ)* τόσο μεγαλώνει και το πόσες φορές χρειάζεται η κορδέλα.
Μέρος Α, αύξηση της μονάδας μέτρησης (Σμ = 2, 3, 4)	
Κ7	Όταν μεγαλώνει το κομμάτι *(μ)*, το νούμερο *(α)* μικραίνει.
Κ8.α	Όταν διπλασιάζεται το ένα *(μ)*, το άλλο *(μ)* διαιρείται με…τι; Με το 2. Όταν τριπλασιάζεται, είναι 12 δια 3. Και όταν τετραπλασιάζεται, είναι 12 δια 4.
Κ8.β	Δώδεκα δια δύο είναι…Πρέπει να πολλαπλασιάσω το 12 με έναν αριθμό και να βρω 6. Είναι το μισό, ένα δεύτερο.
Κ9	Το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με 1/2, 1/3, 1/4.
Κ10	Θα πάρω το διπλάσιο και τότε θα διαιρέσω το 12 με το 2, το τριπλάσιο και τότε με το 3 και στο τετραπλάσιο με το 4.
Κ11	Αυτό το 2 εδώ *(Σμ)* είναι ο παρονομαστής εδώ *(Σα)*. Το ίδιο με το 3 εδώ *(Σμ)* και εδώ *(Σα)*.
Σημείωση: *μ: Μονάδα μέτρησης, α: αριθμητικό αποτέλεσμα μέτρησης, Σμ, Σα: συντελεστής αλλαγής της μονάδας και του αποτελέσματος αντ.*	

Πίνακας 1: Ο Κοσμάς πραγματεύεται τις μεταβολές της μονάδας και του αριθμητικού αποτελέσματος της μέτρησης και τη μεταξύ τους σχέση

Στο Κ5, η αύξηση του α περιγράφεται πολλαπλασιαστικά μέσω του Σμ, ενώ η μείωση του μ χωρίς τη χρήση Σμ. Στο Κ6, ο Κοσμάς επανήλθε στον ρόλο του παρονομαστή του Σμ, συνδέοντας στοιχειωδώς με τον συντελεστή αλλαγής του αποτελέσματος. Συνεχίζοντας στην περίπτωση της αύξησης του μ, ο Κοσμάς διατύπωσε αρχικά ποιοτικά τη σχέση μεταξύ των κατευθύνσεων των δύο μεταβολών (Κ7). Στη συνέχεια, περιέγραψε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις μεταβολές, εκφράζοντας τη μείωση με διαίρεση (Κ8.α). Η έκφραση της μείωσης με πολλαπλασιασμό δε γίνεται άμεσα από το παιδί (Κ8.β), το οδηγεί όμως στην πρώτη έκφραση των μειώσεων του α με συντελεστές (Κ9), για να επιστρέψει, σχεδόν άμεσα, στην αρχική του διατύπωση (Κ10). Τέλος, παρατηρεί τη σχέση ανάμεσα στο Σμ και τον παρονομαστή του Σα, χωρίς να αναγνωρίσει ότι πρόκειται για αντίστροφους αριθμούς. Η αναγνώριση αυτή, για τον Κοσμά, συνέβη στο Β μέρος («Τώρα το κατάλαβα ότι είναι ο αντίστροφος, εδώ είχαμε 3 και 1/3, εδώ 1/2 και 2»), οπότε και άρχισε να το αξιοποιεί πιο συστηματικά.

Κοινές δυσκολίες αντιμετώπισαν τα παιδιά στο πλαίσιο της μέτρησης, όταν ο διαιρέτης ήταν μεγαλύτερος από τον διαιρετέο (Β3), και όταν ο διαιρέτης ήταν μη μοναδιαίο κλάσμα (μέρος Δ). Για παράδειγμα, ο Κοσμάς στο Β3 ήταν πλέον σε θέση να αποδώσει λεκτικά το νόημα της διαίρεσης μέτρησης για την πράξη 4:7 αλλά και να προβλέψει ότι «χωράει πιο λίγες φορές από μία». Για να εξηγήσει, όμως, την απάντησή του με το υλικό, χρησιμοποίησε τη λωρίδα με το μικρότερο μήκος ως μονάδα μέτρησης. Χρειάστηκε παρέμβαση («Με τι μετράς; Ποια είναι η μονάδα μέτρησης;») για να αντιστρέψει τις λωρίδες, και να καταλήξει στη διαπίστωση ότι «χωράνε τα 4 από τα 7», εκφράζοντας τελικά το πηλίκο ως κλάσμα.

Στο μέρος Δ, όταν ο Κοσμάς και τα άλλα παιδιά δοκίμασαν με το υλικό τους να μετρήσουν το 8 με μονάδα τα 2/3, ανταποκρίθηκαν με τον ίδιο τρόπο: Αρχικά, διαμέρισαν κάθε μονάδα του ακέραιου σε τρία ίσα μέρη που καταμετρήθηκαν συνολικά (μέτρηση με το 1/3). Μετά από παρέμβαση («Ποια είναι η μονάδα μέτρησης;»), σκίασαν και καταμέτρησαν τα δύο τρίτα κάθε μονάδας ξεχωριστά, παραλείποντας ένα τρίτο ανά μονάδα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο μέρος Δ, ο Κοσμάς εξέφρασε μια λανθασμένη ερμηνεία για τη διαίρεση με κλάσμα, διαφορετική από αυτήν της Φάσης Ι:

> Έχουμε το 8 δια το $\frac{1}{2}$, το οποίο σημαίνει μισό, άρα 8 δια το μισό του, το οποίο είναι το 4 (…) 8 δια 4 ίσον 2.

Ολοκληρώνοντας τη μέτρηση (χωρίς δυσκολία), το παιδί αυθόρμητα σύγκρινε το αποτέλεσμα με την αρχική του απάντηση, δοκιμάζοντας μια γνωστική σύγκρουση («Μα δεν είναι και 2;»). Στο τέλος της Φάσης ΙΙΙ, φάνηκε ότι η σύγκρουση αυτή είχε επιλυθεί, καθώς το παιδί δήλωσε ότι (στην αρχή) «τα έκανε όλα λάθος» και ότι «τώρα ξέρει ότι βγαίνει πιο πολύ».

Φάση ΙΙΙ

Στη Φάση ΙΙΙ, όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά το νόημα της διαίρεσης με ακέραιο ή κλασματικό διαιρέτη ως μέτρηση. Οι λανθασμένες επιλογές στην αναγνώριση προβλημάτων διαίρεσης με κλάσμα, μειώθηκαν για όλα τα παιδιά και μηδενίστηκαν για τον Κοσμά που, επιπλέον, διατύπωσε και ένα πρόβλημα διαίρεσης με διαιρέτη το 1/2:

> Έχουμε μια σοκολάτα και τη χωρίζουμε σε 6 κομμάτια. Και όπως είναι το ένα κομμάτι θα το κόψουμε άλλη μια φορά στη μέση, το κάθε κομμάτι, και θα δούμε πόσα κομμάτια έχει τώρα η σοκολάτα.

Ήδη από τη Φάση ΙΙ, όλα τα παιδιά, εκτός από τον Κοσμά, υπολόγιζαν πηλίκα με κλασματικό διαιρέτη αναφερόμενα ρητά στη μέθοδο της «αντιστάθμισης»:

> Διαιρώ το 6 με το 1 και το αποτέλεσμα είναι 6. Μετά αλλάζω το διαιρέτη, τον πολλαπλασιάζω με 2/3. Άρα, το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με το 3/2.

Ο Κοσμάς συστηματικά στρεφόταν στη μέτρηση με το υλικό, στρατηγική που ακολούθησε και στη Φάση ΙΙΙ, κάτι που τον εμπόδισε να ολοκληρώσει τη διαίρεση δύο κλασμάτων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ -ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα ευρήματα της Φάσης Ι έδειξαν ότι το μόνο διαθέσιμο στα παιδιά νόημα για τη διαίρεση ήταν αυτό της «δίκαιης μοιρασιάς» (Tirosh, 2010). Τα παιδιά έδειξαν εξαιρετικά φτωχή κατανόηση, αλλά και διαδικαστική ευχέρεια για τη διαίρεση κλασμάτων, μετά τη διδασκαλία στο σχολείο. Στη Φάση ΙΙ αποκαλύφθηκαν και περιορισμοί σχετικά με έννοιες και διαδικασίες της μέτρησης, καθώς τα παιδιά δεν μπορούσαν να διανοηθούν τη μέτρηση με μονάδα μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγεθος και παραβίασαν μια βασική αρχή της μέτρησης (*οι μονάδες πρέπει να καλύπτουν το μήκος*) όταν χρειάστηκε να μετρήσουν με ένα μη μοναδιαίο κλάσμα. Και στις δύο φάσεις ήταν έκδηλη η δυσκολία των παιδιών να ερμηνεύσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ή να χρησιμοποιήσουν το κλάσμα ως τελεστή (Ma, 1999).

Στη Φάση ΙΙ διαπιστώσαμε ότι η πραγμάτευση της κατάστασης αλλαγής της μονάδας ήταν εφικτή στα παιδιά, παρά το γεγονός ότι δεν τους ήταν εξαρχής οικεία, ούτε είχαν εκτεθεί σε τυπική διδασκαλία για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Παρατηρήθηκε μετατόπιση σε πιο εκλεπτυσμένους τρόπους περιγραφής της κατάστασης (χρήση συντελεστών μεταβολής, αναφορές στους αντίστροφους αριθμούς), που όμως απαίτησε συχνές παρεμβάσεις από την ερευνήτρια. Τέλος, από τη Φάση ΙΙΙ φάνηκε ότι τα παιδιά ανέπτυξαν, σε μεγάλο βαθμό, το νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση, ενώ τρία από αυτά υιοθέτησαν και τη μέθοδο της «αντιστάθμισης» για να υπολογίσουν πηλίκα. Βελτίωση παρατηρήθηκε και στην αναγνώριση προβλημάτων διαίρεσης με κλασματικό διαιρέτη, παρά το γεγονός ότι αυτό δεν αποτέλεσε μέρος της παρέμβασης. Ειδικότερα, ο Κοσμάς κατάφερε όχι μόνο να αναγνωρίσει σωστά όλα τα προβλήματα, αλλά και να διατυπώσει ένα δικό του.

Τα ευρήματα αυτά θα αξιοποιηθούν για τον επανασχεδιασμό της ακολουθίας δραστηριοτήτων και την εφαρμογή της εκ νέου, όπως προβλέπεται από τη μεθοδολογία την οποία υιοθετήσαμε (Gravemeijer & Prediger, 2019). Μεγαλύτερη έμφαση στο πλαίσιο της μέτρησης, αλλά και στον πολλαπλασιασμό με κλάσμα φαίνεται να είναι απαραίτητη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cavey, L. O., & Kinzel, M. T. (2014). From whole numbers to invert and multiply. *Teaching children mathematics*, *20*(6), 374-383.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 1-21.

Fredua-Kwarteng, E., & Ahia, F. (2006). Understanding division of fractions: an alternative view. Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=ED493746

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Reston, Virginia: NCTM.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 546-552.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: an introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 33-58). Cham, Switzerland: SpringerOpen.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25.

ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Αυγέρη Θεοδώρα, Βαμβακούση Ξένια

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

theoavg@hotmail.gr, xvamvak@uoi.gr

Παρουσιάζεται μια εμπειρική μελέτη με στόχο τη διερεύνηση πτυχών της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία. Δεκαπέντε εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να αξιολογήσουν απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε ένα ερώτημα σχετικά με την πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών, να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους και να δώσουν ανατροφοδότηση. Εξετάστηκαν η ορθότητα της αξιολόγησης, η ποιότητα της εξήγησης και οι τρόποι χρήσης αντιπαραδειγμάτων κατά την ανατροφοδότηση. Τα ευρήματα αναδεικνύουν δυσκολίες των εκπαιδευτικών σε συνιστώσες της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία, συγκεκριμένα την κοινή και την εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου, τη γνώση του περιεχομένου και των μαθητών και τη γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το ερώτημα σχετικά με τη γνώση που είναι απαραίτητη για την διδασκαλία ενός αντικειμένου έχει απασχολήσει σημαντικά την εκπαιδευτική έρευνα. Οι Ball και συνεργάτες (Ball, Thames & Felps, 2008) σκιαγράφησαν ορισμένες συνιστώσες της *Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία* (ΜΓΔ) που έχουν αποτελέσει σημείο αναφοράς για τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στην εργασία αυτή υιοθετήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο των Ball και συνεργατών και μελετήσαμε πτυχές της ΜΓΔ εν ενεργεία καθηγητών των μαθηματικών.

Η πρώτη από τις συνιστώσες της ΜΓΔ που μας αφορούν είναι *η κοινή γνώση του περιεχομένου*, δηλαδή, η γνώση για το μαθηματικό περιεχόμενο που πρόκειται να διδαχθεί και είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία του, αλλά όχι αποκλειστικά. Η δεύτερη συνιστώσα είναι η *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών*. Η πτυχή που μας ενδιαφέρει εκφράζεται μέσω της ικανότητας εξήγησης του τρόπου σκέψης των μαθητών, ιδιαίτερα όταν δίνουν λανθασμένες απαντήσεις. Τέλος, εστιάζουμε στη χρήση αντιπαραδειγμάτων κατά την ανατροφοδότηση που αφορά τόσο την *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* (γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο που είναι χρήσιμες αποκλειστικά στο πλαίσιο της διδασκαλία), όσο και τη *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας*. Πράγματι, η κατάλληλη επιλογή ή/και διδακτική διαχείριση αντιπαραδειγμάτων είναι μια μη τετριμμένη διαδικασία που θεωρείται πολύ σημαντική για τη διδασκαλία. Απαιτείται κατάλληλη επιλογή ή/και διδακτική διαχείριση ενός αντιπαραδείγματος ώστε να γίνουν ορατοί στους μαθητές οι λόγοι για τους οποίους ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος και να δημιουργηθούν προϋποθέσεις γενίκευσης, κάτι που φαίνεται να είναι απαιτητικό για τους εκπαιδευτικούς (Peled & Zaslavksy, 1997; Zaslavsky, 2010).

Στην εργασία παρουσιάζουμε μέρος μιας έρευνας που διερεύνησε τις παραπάνω πτυχές της ΜΓΔ σχετικά με τους ρητούς και τους πραγματικούς αριθμούς με εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το μαθηματικό περιεχόμενο στο οποίο επικεντρωνόμαστε είναι η πυκνή διάταξη των πραγματικών αριθμών και ειδικότερα, η απειρία των αριθμών σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς. Υπάρχει πληθώρα ερευνητικών δεδομένων που δείχνουν ότι η ιδιότητα αυτή είναι δύσκολη για τους μαθητές όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης, ακόμη και για φοιτητές μαθηματικών τμημάτων (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Οι μαθητές συχνά υποστηρίζουν ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει πεπερασμένο, πιθανά και μηδενικό πλήθος αριθμών, όπως συμβαίνει στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Επιπλέον, ακόμη και μαθητές που χαρακτηρίζουν ως «άπειρο» το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών συχνά αναφέρονται σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος (π.χ. «ένα δισεκατομμύριο», «όσο οι κόκκοι της άμμου στην έρημο») που, όμως, παραμένει πεπερασμένο.

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα ήταν: α) Αξιολογούν οι εκπαιδευτικοί σωστά λανθασμένες απαντήσεις σχετικά με το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα; (*κοινή γνώση περιεχομένου*), β) Είναι σε θέση να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών; (*γνώση του περιεχομένου και των μαθητών*) και γ) Τι χαρακτηριστικά έχει η ανατροφοδότηση που δίνουν στις λανθασμένες απαντήσεις; Ειδικότερα, για το (γ), εξετάστηκε η χορήγηση αντιπαραδειγμάτων κατά την ανατροφοδότηση (*εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου*, *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας*).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών (10 γυναίκες, 5 άντρες), απασχολούμενοι στον ιδιωτικό τομέα, με εργασιακή εμπειρία από 1 έως 7 έτη, η πλειοψηφία των οποίων είτε ήταν στη διαδικασία απόκτησης, είτε είχε ήδη λάβει μεταπτυχιακό δίπλωμα σπουδών. Μια συμμετέχουσα είχε εξειδίκευση στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Ερευνητικό εργαλείο

Το ερευνητικό μας εργαλείο συμπεριλάμβανε 3 έργα σχετικά με την πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών. Λόγω περιορισμών χώρου, σε αυτή την εργασία θα εξετάσουμε αναλυτικά ένα από αυτά. Το συγκεκριμένο έργο είχε τη μορφή «σεναρίου τάξης», ένα μεθοδολογικό εργαλείο που ενδείκνυται για τη διερεύνηση της ΜΓΔ (Biza, Nardi & Zachariades, 2007).

Στην αρχή του σεναρίου παρουσιάστηκε το μαθηματικό ερώτημα που είχε τεθεί από έναν υποθετικό καθηγητή σε μια τάξη Γ΄ Γυμνασίου (*Πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1,1 και του 1,3;*). Ακολούθησαν οι απαντήσεις τριών υποθετικών μαθητών Α, Β, Γ. Συγκεκριμένα: Α) «Ένας, ο 1,2», Β) «19, οι 1,12, 1,13, 1,14, 1,15, ... 1,19, 1,20, 1,21, ... 1,29» και Γ) «Είναι άπειροι... πάρα πολλοί.... πάνω από ένα δισεκατομμύριο. Μόνο ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους».

Οι υποθετικές απαντήσεις Α, Β και Γ εκφράζουν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Οι τρεις αυτές απαντήσεις, συγκαταλέγονται στις γνωστές από τη βιβλιογραφία απαντήσεις. Στην Α, ο μαθητής αντιμετωπίζει άμεσα τους δεδομένους αριθμούς ως φυσικούς, αναφερόμενος σε ένα πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών που συμβαδίζει με την ακολουθία των φυσικών αριθμών. Στη Β, ο υποθετικός μαθητής πραγματοποιεί το πρώτο βήμα μιας δυνητικά επαναλήψιμης διαδικασίας προσθέτοντας ένα δεκαδικό ψηφίο στους δεδομένους αριθμούς (1,10 και 1,30) και στη συνέχεια τους αντιμετωπίζει παρόμοια με τον υποθετικό μαθητή της Α. Τέλος, η απάντηση Γ αντιστοιχεί στην ερμηνεία της έκφρασης «άπειροι αριθμοί» ως «ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο, πλήθος αριθμών».

Στους συμμετέχοντες τέθηκαν τα εξής ερωτήματα: α) Υπάρχει κάποια απάντηση που θεωρείται σωστή; Αν ναι, ποια; Αν όχι, ποια θα θεωρούσατε εσείς σωστή απάντηση; β) Πώς θεωρείτε ότι σκέφτηκε για να απαντήσει ο κάθε μαθητής; γ) Τι ανατροφοδότηση θα δίνατε εσείς στη θέση του καθηγητή;

Διαδικασία

Οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν ατομικά σε ημι-δομημένες συνεντεύξεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν εξ αποστάσεως μέσω της εφαρμογής Skype. Οι συνεντεύξεις καταγράφτηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αξιολογήσεις απαντήσεων – Εξήγηση τρόπου σκέψης μαθητών

Οι αξιολογήσεις των απαντήσεων Α, Β και Γ εξετάστηκαν, από τους εκπαιδευτικούς, ως προς την ορθότητα τους (Ορθή/Λανθασμένη). Από τους 15 εκπαιδευτικούς, οι εννιά αξιολόγησαν σωστά και τις τρεις απαντήσεις Α, Β, Γ. Συγκεκριμένα, ενώ όλοι αποφάνθηκαν ορθά ότι οι Α και Β απαντήσεις ήταν λανθασμένες, έξι εκπαιδευτικοί (Σ2, Σ3, Σ6, Σ7, Σ11, Σ13) θεώρησαν σωστή την απάντηση Γ. Για παράδειγμα:

Σ7: Συμφωνώ στο ότι ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. Ένας ο οποίος θα έχει προγραμματιστεί από κάποιον μαθηματικό τέλος πάντων, και θα τρέξει έναν αλγόριθμο π.χ. για να τους βρει όλους.

Οι εξηγήσεις του τρόπου σκέψης του μαθητή εξετάστηκαν στις περιπτώσεις που η αξιολόγησή τους ήταν ορθή και κατηγοριοποιήθηκαν αδρά σε 3 κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία («Καμία Εξήγηση/ Αδυναμία Εξήγησης») συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες είτε εξέφρασαν αδυναμία να εξηγήσουν, είτε απέφυγαν να δώσουν εξήγηση.

Στη δεύτερη κατηγορία («Μη ουσιαστική εξήγηση») συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί είτε επαναλάμβαναν την απάντηση του μαθητή, είτε απέδιδαν το λάθος σε γενικούς παράγοντες όπως το υπόβαθρο του μαθητή στα μαθηματικά («καλός»/ «κακός» μαθητής), ή στην επιπολαιότητα. Στα παρακάτω αποσπάσματα παρουσιάζονται παραδείγματα της πρώτης (Σ2) και της δεύτερης (Σ1) κατηγορίας εξηγήσεων:

Σ2: Τώρα εδώ πέρα χάθηκα. Τι θέλει να πει ο ποιητής; Πώς το σκέφτηκε… Δεν ξέρω πώς το σκέφτηκε;

Σ1: Είναι μία επιπόλαιη απάντηση που μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Ο ένας είναι το υπόβαθρο γενικώς, ο δεύτερος είναι η επιπολαιότητα.

Τέλος, στην κατηγορία «Ουσιαστική Εξήγηση», συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί πρόβαλαν ένα ουσιαστικό σκεπτικό για τον τρόπο που σκέφτηκε ο μαθητής. Στις περιπτώσεις αυτές που αφορούσαν τις Α και Β, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε ότι αναγνώρισαν ότι οι μαθητές συλλογίζονται με βάση τους φυσικούς αριθμούς (βλ. Σ15). Όσον αφορά το Γ, οι εκπαιδευτικοί που έδωσαν ουσιαστικές εξηγήσεις αναγνώρισαν ότι ο υποθετικός μαθητής, ενώ χρησιμοποιεί τον όρο «άπειροι», στην ουσία αναφέρεται σε ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο πλήθος (βλ. Σ15 στο παρακάτω απόσπασμα).

Σ5: Ε, ο πρώτος, ρε παιδί μου, σκέφτηκε ότι μετά το 1,1, πώς να το πω, στο δεκαδικό μέρος, μετά το 1 υπάρχει το 2 και μετά το 3. Άρα ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 υπάρχει το 1,2.

Σ15: Εεε.. ο τρίτος σκέφτηκε ότι υπάρχουν άπειροι, αλλά το γεγονός ότι λέει ότι είναι πάνω από ένα δισεκατομμύριο, βάζει κάποιο φράγμα, πάει να τους μετρήσει, δεν νομίζω ότι η έννοια του απείρου του είναι κατανοητή.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας εξήγησης ανά υποθετική απάντηση. Λιγότερες από τις μισές εξηγήσεις βρέθηκαν στην κατηγορία «Ουσιαστική Εξήγηση», με τις περισσότερες από αυτές να δίνονται στο Α. Σημειώνουμε ότι, σε ατομικό επίπεδο, μόνο τρεις από τους εκπαιδευτικούς έδωσαν ουσιαστική εξήγηση και για τις τρεις υποθετικές απαντήσεις (Σ4, Σ8, Σ15). Επιπλέον, 5 από τους συμμετέχοντες δεν εξήγησαν ουσιαστικά καμία από τις υποθετικές απαντήσεις που είχαν αξιολογήσει σωστά, με δύο από αυτούς να έχουν αξιολογήσει σωστά και τις τρεις απαντήσεις (Σ1, Σ14).

Κατηγορία εξήγησης	Απαντήσεις μαθητών			Σύνολο
	Α	Β	Γ	
Ουσιαστική Εξήγηση	9	4	5	18
Μη ουσιαστική εξήγηση	5	7	2	14
Καμία εξήγηση	1	4	2	7
Σύνολο	15	15	9	39

Πίνακας 1: Συχνότητα της κάθε κατηγορίας εξήγησης ανά υποθετική απάντηση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το γεγονός ότι 5 από τους εκπαιδευτικούς που έδωσαν ουσιαστική εξήγηση για το Α, δεν αναγνώρισαν ως παρόμοια την περίπτωση του Β (Πίνακας 1). Τέτοια περίπτωση ήταν ο Σ10:

Σ10: Η δεύτερη απάντηση είναι λίγο περίεργη. Ο Β, είναι περίεργη φουλ η απάντησή του. Εεε.. (μικρή παύση). Ο Β πραγματικά δεν ξέρω, δεν ξέρω πώς προέκυψε η απάντησή του, δε μπορώ να φανταστώ.

Ανατροφοδότηση

Για την ανάλυση της ανατροφοδότησης, ελήφθησαν υπόψη όλες οι ανατροφοδοτήσεις των εκπαιδευτικών στις υποθετικές απαντήσεις που είχαν αξιολογήσει ως λανθασμένες. Σε πολλές περιπτώσεις, δόθηκε μία κοινή ανατροφοδότηση για περισσότερες από μία υποθετικές απαντήσεις. Στα κείμενα ανατροφοδότησης αναζητήθηκαν από τους συγγραφείς, αρχικά ξεχωριστά, αναφορές σε αντιπαραδείγματα. Διαπιστώθηκε ότι υπήρχαν άμεσες και έμμεσες τέτοιες αναφορές, οπότε τα κείμενα επανεξετάστηκαν, συγκρίθηκαν τα ευρήματα και λύθηκαν οι (ελάχιστες) διαφορές με συζήτηση. Συνολικά, εντοπίστηκαν 14 αναφορές σε αντιπαραδείγματα από αντίστοιχο αριθμό συμμετεχόντων. Τα αντιπαραδείγματα είτε αναφέρθηκαν ρητά (ως συγκεκριμένοι αριθμοί) ή περιγραφικά (π.χ. «δεκαδικοί με πολλά δεκαδικά ψηφία»), είτε υπονοήθηκαν με αναφορά στις απαντήσεις άλλων υποθετικών μαθητών ή με αναφορά σε μια τροποποιημένη μορφή του προβλήματος, στην οποία περισσότεροι ενδιάμεσοι αριθμοί θεωρήθηκαν ορατοί στο μαθητή (π.χ., μετά την προσθήκη του μηδενός ως δεκαδικό ψηφίο στους δεδομένους αριθμούς). Τα κείμενα που περιείχαν αναφορές σε αντιπαραδείγματα εξετάστηκαν αρχικά ως προς το αν τα αντιπαραδείγματα χρησιμοποιούνται για να διαψεύσουν ένα συγκεκριμένο ισχυρισμό ή αν η πλαισίωσή του αναδεικνύει δυνατότητες για γενίκευση. Δημιουργήθηκαν έτσι δύο αρχικές κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία («Διάψευση Ισχυρισμού», Ν=4) εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός αναφέρθηκε σε έναν ή περισσότερους ενδιάμεσους αριθμούς, με την πρόθεση να διαψεύσει το συγκεκριμένο ισχυρισμό ότι «δεν υπάρχουν άλλοι ενδιάμεσοι» αριθμοί». Για παράδειγμα:

Σ15: Θα τους ρωτούσα, ας πούμε, το 1,135 είναι ανάμεσα; Εκεί πιστεύω ότι όλοι οι μαθητές θα κοντοστέκονταν και θα έλεγαν α ναι, είναι ανάμεσα. Και θα έλεγα το 1,1355, ας πούμε, είναι ανάμεσα; Είναι ανάμεσα. Να καταλάβουν έτσι ότι είναι λάθος το σκεπτικό τους.

Στη δεύτερη κατηγορία («Δυνατότητες Γενίκευσης», Ν=7) εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες διαφαίνεται μια μέθοδος παραγωγής αντιπαραδειγμάτων που δυνητικά οδηγεί στο συμπέρασμα της απειρίας των ενδιάμεσων αριθμών. Διαπιστώθηκαν, ωστόσο, διαφορές ως προς την επάρκεια περιγραφής της μεθόδου, οπότε και διαμορφώθηκαν δύο υποκατηγορίες. Σε όλες τις περιπτώσεις της πρώτης («Δυνατότητες Γενίκευσης – Ανεπαρκής περιγραφή, Ν=4), οι εκπαιδευτικοί περιορίστηκαν στο να αναφέρουν τη δυνατότητα περισσότερων/άπειρων δεκαδικών ψηφίων σε έναν αριθμό, παρόμοια με τον Σ3 στο παρακάτω απόσπασμα:

Σ3: Προφανώς θα τους εξηγούσα ότι μετά την υποδιαστολή μπορούμε να βάλουμε άπειρα ψηφία, οπότε και αυτός είναι ένας αριθμός. Ο 1,113758239 είναι μικρότερος από το 1,2.

Στη δεύτερη υποκατηγορία («Δυνατότητες Γενίκευση-Επαρκής Περιγραφή», Ν=3), εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί περιέγραψαν επαρκώς μια γενικεύσιμη, επαναλήψιμη διαδικασία παραγωγής ενδιάμεσων αριθμών, είτε σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο (Σ1, Σ10), είτε στο πλαίσιο της ευθείας των πραγματικών αριθμών (Σ12). Για παράδειγμα:

Σ10: Θα έμενα λίγο παραπάνω στις δύο πρώτες απαντήσεις αρχικά που λέει 1,2 και 1,12. Θα τους έλεγα: Το πρώτο στάδιο είναι να πούμε απλά το 1,2. Αλλά μετά, όπως είπε και ο άλλος μαθητής, μπορούμε να πάρουμε και τη δεύτερη περίπτωση, να έχουμε 2 δεκαδικά ψηφία, 1,12 1,13 1,29. Θα τους έλεγα με την ίδια λογική, εφόσον την πρώτη φορά πήραμε ένα δεκαδικό και τη δεύτερη δύο δεκαδικά, γιατί να μη συνεχίσω να παίρνω τρία δεκαδικά; Και θα συνέχιζα ότι αυτό που σας λέω τώρα, από 3 δεκαδικά μπορεί να πάει 4 δεκαδικά. Οπότε γενικά είναι μια διαδικασία που μπορούμε να τη συνεχίζουμε συνεχώς. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για οποιονδήποτε αριθμό δεκαδικών, αρχίζουμε να καταλαβαίνουμε ότι είναι άπειροι αριθμοί.

Σ12: Θα τους έλεγα να διαλέξουν δύο οποιοσδήποτε αριθμούς θέλουν (πάνω στην ευθεία). Θα πάρω τη μέση αυτού του ευθυγράμμου τμήματος. Άρα υπάρχει ένας σίγουρα. Μετά στη μέση θα διαλέξω το ένα από τα δύο και θα το πήγαινα έτσι. Μπορούμε να κάνουμε άπειρη μεγέθυνση και να βρίσκουμε άπειρους αριθμούς.

Σημειώνουμε ότι ο Σ1 και ο Σ12 εξέφρασαν επίσης σαφή πρόθεση να πραγματευθούν την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών όχι μόνο για το συγκεκριμένο, αλλά για οποιοδήποτε διάστημα.

Τέλος, στην κατηγορία «Άλλο» (N=3), εντάχθηκαν τρεις περιπτώσεις ανατροφοδότησης με χρήση αντιπαραδείγματος, οι οποίες κρίθηκαν, για διαφορετικό λόγο η κάθε μία, ως ακατάλληλες (βλ. παρακάτω αποσπάσματα). Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός Σ13 βασίστηκε σε ένα μη έγκυρο συλλογισμό ισχυριζόμενος ότι από το γεγονός ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι άπειροι, προκύπτει ότι στα διαστήματα μεταξύ δύο αριθμών βρίσκονται άπειροι αριθμοί. Ο εκπαιδευτικός (Σ7) αναφέρθηκε αόριστα στους ενδιάμεσους αριθμούς ως «αριθμούς με πάρα-πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία» και πραγματοποίησε ένα «άλμα γενίκευσης» στο συμπέρασμα της απειρίας των αριθμών στο δεδομένο διάστημα. Τέλος, ο Σ14 στήριξε τα αντιπαραδείγματα, αλλά και τη μέθοδο παραγωγής τους στην ακολουθία των φυσικών αριθμών, αναφερόμενος στους 4 πρώτους όρους μιας αντίστοιχης ακολουθίας δεκαδικών αριθμών με ένα δεκαδικό ψηφίο. Δεν είναι σαφές ποιος αριθμός θεωρεί ότι ακολουθεί το «0 κόμμα 9». Αν υποτεθεί ότι πρόκειται για το 1, τότε οι «επόμενοι» αριθμοί δεν είναι ανάμεσα στο 0 και το 1. Αν υποτεθεί ότι πρόκειται για το «0 κόμμα 10», τότε παρουσιάζεται μια ακολουθία ενδιάμεσων αριθμών με την παραπλανητική διάταξη των φυσικών, συμβατή με τη γνωστή παρανόηση των μαθητών ότι «οι δεκαδικοί αριθμοί με περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτεροι», την οποία θεωρήσαμε μη ενδεδειγμένη.

Σ13: Επειδή είναι πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών κι επειδή είναι άπειροι όλοι αυτοί οι αριθμοί, προφανώς ανάμεσα σε δύο αριθμούς δεν υπάρχει μόνο ένας δύο κ.λπ., υπάρχουν πάρα πολλοί, τους οποίους δεν είναι εύκολο να βρούμε. Συνήθως στην καθημερινότητα και στα μαθήματα χρησιμοποιούμε τους πιο εύκολους δηλαδή το 1,13 το 1,14 κτλ.

Σ7: Θα τους έλεγα ότι είναι άπειροι οι αριθμοί ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 ε και δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε πόσο είναι αυτό, ότι δεν σταματάει κάπου το άπειρο τέλος πάντων, ότι θα είναι αριθμοί με πάρα πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία που προσεγγίζουν το 1,3.

Σ14: Κοίτα επειδή η απάντηση είναι ίδια και στους 3, θα τους μάζευα και θα τους έλεγα, ότι γενικά οι αριθμοί όπως ξέρουμε είναι άπειροι. Αυτό δεν σημαίνει ότι αρχίζω και μετράω 0,1,2,3,4 και δεν σταματάω ποτέ γιατί είναι άπειροι. Ακόμη και οι αριθμοί που μεσολαβούν για να πάμε από το 1 στο 2 είναι άπειροι, γιατί όπως καταλαβαίνουμε ότι όταν μετράω 0,1,2,3,4,5 συνεχίζω στο άπειρο, από το 0 να πάω στο 1 υπάρχει μετά ο αριθμός 0,1 0,2 0,3, οπότε με την ίδια λογική στη πρώτη φορά φτάνω στο άπειρο, έτσι και στο 0 κόμμα 1, κόμμα 2, κόμμα 3 κόμμα 4, πάντα είναι άπειροι οι αριθμοί για να φτάσω, να προχωρήσω στο 1.

Τέλος, αξίζει να επισημανθεί ένα ακόμα χαρακτηριστικό των ανατροφοδοτήσεων που δόθηκαν από τους συμμετέχοντες. Όπως ίσως έχει ήδη διαφανεί από τα αποσπάσματα που παρατέθηκαν, η συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της ανατροφοδότησης δεν αναφέρεται καθόλου, ή αναφέρεται υποτυπωδώς, κυρίως μέσω προσχηματικών ερωτήσεων (π.χ. «Θα τους ρωτούσα, ας πούμε, το 1,135 είναι ανάμεσα;»). Εξετάζοντας διεξοδικά τα κείμενα των ανατροφοδοτήσεων, εντοπίστηκαν μόνο δύο εκπαιδευτικοί (Σ1, Σ6) που προέβλεψαν μια πιο ουσιαστική συμμετοχή των μαθητών (π.χ., ζητώντας εξήγηση της απάντησης, ή αναθέτοντας στους μαθητές να συγκρίνουν τις απαντήσεις τους). Για παράδειγμα:

Σ1: Θα ξεκινούσα από τον Β με τη συλλογιστική του Γ για να μπορέσουμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι σε όποιο διάστημα και αν πάρουμε τελικά, θα βρίσκουμε πάντα αριθμό ανάμεσα (….) Γενικά προτιμώ σε τέτοιες περιπτώσεις να ζητάω από τα παιδιά να εξηγήσουν, ποιο είναι το λάθος του άλλου. Ώστε να μπορέσουμε να φτάσουμε διαδοχικά στο ποιο είναι το σωστό.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία (Ball et al., 2008) εν ενεργεία εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Εστιάσαμε στις αποκρίσεις των συμμετεχόντων στις απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε ένα ερώτημα σχετικά με το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα δεδομένο διάστημα.

Το πρώτο εύρημα, που αφορά την *κοινή γνώση περιεχομένου* (Ball et al., 2008), ήταν ότι μόνο 9 από τους 15 εκπαιδευτικούς αξιολόγησαν σωστά και τις τρεις υποθετικές απαντήσεις, κάτι που είναι αξιοσημείωτο δεδομένου του μαθηματικού υποβάθρου των συμμετεχόντων. Οι υπόλοιποι 6 εκπαιδευτικοί συμφώνησαν με τον ισχυρισμό ότι «ένας υπολογιστής μπορεί να βρει όλους τους ενδιάμεσους αριθμούς» σε ένα δεδομένο διάστημα, αποκαλύπτοντας μια αντίληψη του απείρου ως «ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο πλήθος», παρόμοια με μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Σημειώνουμε ότι δυσκολίες όσον αφορά την *κοινή γνώση περιεχομένου* αναδύθηκαν και κατά την ανατροφοδότηση. Ένα παράδειγμα που παρουσιάστηκε σε αυτή την εργασία ήταν η περίπτωση του μη έγκυρου συλλογισμού κατά την ανατροφοδότηση.

Η εξήγηση του τρόπου σκέψης των υποθετικών μαθητών (*γνώση του περιεχομένου και του μαθητή*, Ball et al., 2008) αποδείχθηκε επίσης απαιτητική. Οι περιπτώσεις στις οποίες δε δόθηκε εξήγηση, ή το λάθος αποδόθηκε σε γενικές παραμέτρους υπερέβαιναν τις περιπτώσεις στις οποίες δόθηκε ουσιαστική εξήγηση, με βάση ένα συγκεκριμένο σκεπτικό (π.χ. «σκέφτονται με βάση τους φυσικούς»). Η απόδοση του λάθους σε παράγοντες όπως η επιπολαιότητα, ή η γενική μαθηματική ικανότητα δεν είναι ευνοϊκή για την ουσιαστική διδακτική υποστήριξή των μαθητών.

Τέλος, όσον αφορά την ανατροφοδότηση, εστιάσαμε στη χρήση αντιπαραδειγμάτων, που άπτεται τόσο της *εξειδικευμένης γνώσης του περιεχομένου*, όσο και της *γνώσης του περιεχομένου και της διδασκαλίας* (Ball et al,, 2008). Το συγκεκριμένο σενάριο προσφερόταν για τη χρήση αντιπαραδειγμάτων και, πράγματι, οι εκπαιδευτικοί τα χρησιμοποίησαν, ενώ φάνηκε ότι είχαν στη διάθεσή τους και μεθόδους παραγωγής των αντιπαραδειγμάτων. Μόνο τρεις εκπαιδευτικοί, ωστόσο, τοποθέτησαν τα αντιπαραδείγματα σε ένα πλαίσιο που θα μπορούσε να λειτουργήσει επεξηγηματικά για τους μαθητές και να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε ένα διάστημα. Το εύρημα αυτό συνηγορεί στη διαπίστωση ότι η κατάλληλη χρήση αντιπαραδειγμάτων είναι απαιτητική για τους εκπαιδευτικούς (Zaslavsky, 2010). Επιπλέον, με δύο μόνο εξαιρέσεις, στις περιγραφές των εκπαιδευτικών σκιαγραφήθηκε μηδαμινή ή υποτυπώδης πρόβλεψη συμμετοχής των μαθητών στη διαδικασία της ανατροφοδότησης. Τα ευρήματα σχετικά με την ανατροφοδότηση, παρόλο που δίνουν κάποιες ενδείξεις για την πρόθεση διαχείρισης παρόμοιων συμβάντων στην τάξη, θα πρέπει να αντιμετωπιστούν με επιφύλαξη, καθώς δεν αποκλείεται σε πραγματικές συνθήκες οι εκπαιδευτικοί να επεδίωκαν μια πιο ουσιαστική αλληλεπίδραση με τους μαθητές ή να ανέπτυσσαν πιο πολύ τις εξηγήσεις τους.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της έρευνας αναδεικνύουν αδυναμίες σε διάφορες πτυχές των συνιστωσών της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία που διερευνήθηκαν. Τα συμπεράσματα δεν μπορούν να γενικευθούν, δεδομένου του μικρού δείγματος, αλλά μπορούν να αξιοποιηθούν ως σημείο αφετηρίας για τη βαθύτερη διερεύνηση των ζητημάτων αυτών σε μελλοντική μελέτη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4), 301-309.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counterexamples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in Mathematics*, *19*(3), 49- 61.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the "rubber line" bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 265-284.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. In M.K. Stein, L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107-128). Springer, Boston, MA.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΑΡΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΙΣΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Γεωργιάδης Βασίλειος Χρήστος, Χρήστου Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

geo.vasileios@gmail.com, kchristou@uowm.gr

Στη μελέτη αυτή εξετάζεται το επίπεδο αίσθησης του αριθμού, δείγματος ειδικών πάνω στα μαθηματικά και διερευνάται αν η δημιουργία ενός εννοιολογικού χάρτη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο μέτρησης της αίσθησης του αριθμού. Οι συμμετέχοντες (39 φοιτητές και απόφοιτοι Μαθηματικών Τμημάτων) συμπλήρωσαν ένα τεστ με έργα που εξέταζαν την αίσθηση του αριθμού. Επίσης, κλήθηκαν να κατασκευάσουν έναν εννοιολογικό χάρτη με κεντρικό όρο το $\frac{1}{2}$*. Τα αποτελέσματα έδειξαν συνολικά χαμηλά επίπεδα αίσθησης αριθμού. Η επίδοση των συμμετεχόντων στα παραπάνω εργαλεία είχε στατιστικά σημαντική συσχέτιση, δείχνοντας ότι ο εννοιολογικός χάρτης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση της αίσθησης του αριθμού.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αξία της καλλιέργειας της αίσθησης του αριθμού είναι διεθνώς αναγνωρισμένη ως βασικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών (NCTM, 2000). Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στην γενική κατανόηση των αριθμών και των λειτουργιών τους, στην ικανότητα χρήσης τους με ευέλικτο και δημιουργικό τρόπο, στην ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών για τη χρήση τους σε πράξεις και σε αλγορίθμους καθώς και στη λογική κρίση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων (McIntosh, Reys & Reys, 1992). Η σημασία της καλλιέργειας της αίσθησης του αριθμού στους μαθητές οδηγεί στην ανάγκη διερεύνησης του θέματος σε φοιτητές και απόφοιτους Μαθηματικών Τμημάτων που αποτελούν μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Συγχρόνως, η έρευνα για την αίσθηση του αριθμού σε εκπαιδευτικούς είναι περιορισμένη τόσο στην Ελλάδα όσο και διεθνώς (Yang, Reys & Reys, 2009). Στην παρούσα μελέτη διερευνήθηκε η αίσθηση του αριθμού σε φοιτητές και απόφοιτους μαθηματικών τμημάτων και εξετάστηκε κατά πόσο η κατασκευή εννοιολογικού χάρτη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση του επιπέδου αίσθησης του αριθμού.

Αίσθηση του Αριθμού και τρόποι μέτρησής της

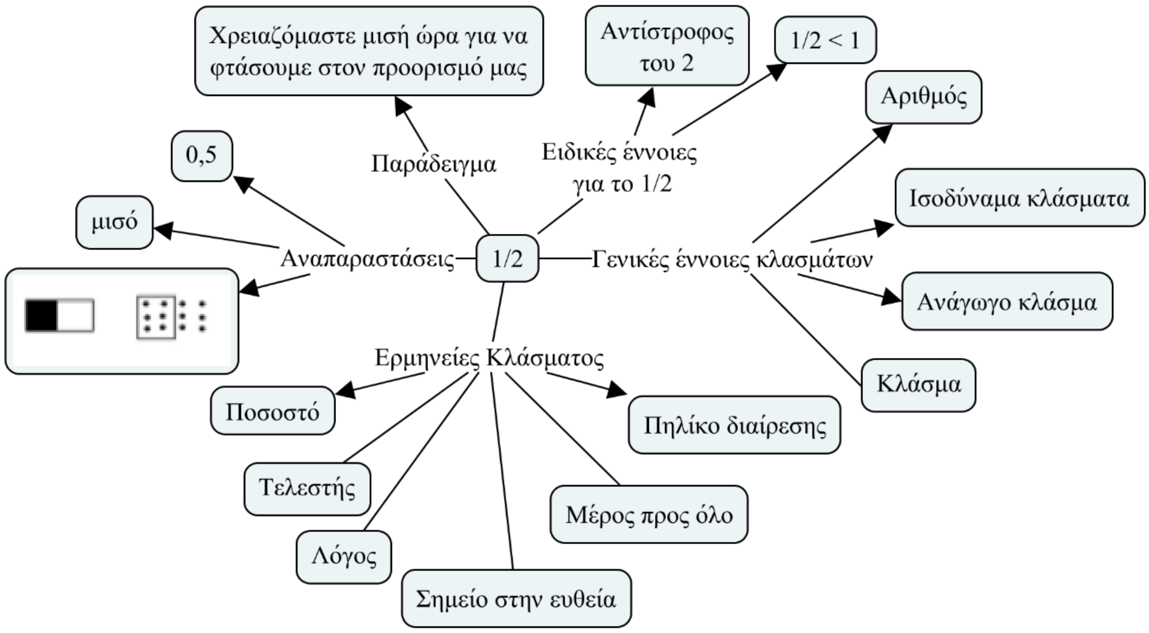
Η αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στη γενική κατανόηση των αριθμών και των πράξεων ανάμεσα στους αριθμούς, καθώς και στην ικανότητα για χειρισμό καταστάσεων που περιλαμβάνουν αριθμούς. Ο Howden (1989) συγκεκριμένα, περιγράφει την αίσθηση του αριθμού ως «*καλή διαίσθηση* *για τους αριθμούς και τις σχέσεις τους*» (σελ.11). Αυτή η ικανότητα χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη ευέλικτων και αποτελεσματικών στρατηγικών προκειμένου να αντιμετωπιστούν αριθμητικά προβλήματα τόσο στην τάξη των μαθηματικών όσο και σε πραγματικές καταστάσεις (McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Παρά τη σημασία του στην απόκτηση βαθύτερου μαθηματικού εγγραμματισμού, η έρευνα σχετικά με το επίπεδο αίσθησης αριθμού των ενηλίκων, η οποία επικεντρώνεται κυρίως σε εκπαιδευτικούς δημοτικών σχολείων ή απόφοιτους παιδαγωγικών σχολών, δείχνει χαμηλά επίπεδα αίσθησης του αριθμού (Yang, Reys & Reys, 2009). Συγκεκριμένα, πρόσφατες έρευνες σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δείχνουν χαμηλή αίσθηση του αριθμού που εμφανίζεται με εκτεταμένη χρήση τυπικών μεθόδων και αλγορίθμων που βασίζονται σε κανόνες, ως οι κύριες στρατηγικές που εφαρμόζονται σε σειρά προβλημάτων, παρά τις οδηγίες να μην χρησιμοποιήσουν τέτοιες στρατηγικές (Yang, Reys & Reys, 2009; Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz, 2016). Επίσης, ένα ενδιαφέρων εύρημα είναι ότι εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βασίζονται περισσότερο σε αλγόριθμους και κανόνες από τους εκπαιδευτικούς του δημοτικού σχολείου (Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz, 2016).

Λαμβάνοντας υπόψη τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού, όπως αυτά παρουσιάζονται παρακάτω, αποτελεί μεγάλη πρόκληση να βρεθούν τρόποι να μελετηθεί το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό του μαθηματικού εγγραματισμού. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να υπάρχει κάποιο έγκυρο και αξιόπιστο εργαλείο όχι με ερωτήσεις που να επιδέχονται μόνο σωστές ή λάθος απαντήσεις αλλά που να επιτρέπει πλούσιες σε είδος και λεπτομερείς αποκρίσεις. Σε προηγούμενες μελέτες, τα έργα που δίνονταν στους συμμετέχοντες γι' αυτό το σκοπό απαιτούσαν τη χρήση νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων και είχαν τη μορφή ανοιχτών ερωτηματολογίων που χορηγούνταν σε ατομικές συνεντεύξεις (Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz, 2016; Χαντόγλου, 2018). Στην παρούσα μελέτη, χρησιμοποιούνται τέτοια έργα από προηγούμενες μελέτες, αλλά δοκιμάζεται επίσης η χρήση κατασκευής εννοιολογικών χαρτών ως εργαλείο για τη μέτρηση των επιπέδων αίσθησης του αριθμού. Έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι η κατασκευή εννοιολογικού χάρτη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτικός τρόπος για τη μέτρηση ορισμένων βασικών πτυχών της αίσθησης του αριθμού.

Εννοιολογικοί χάρτες και η χρησιμότητά τους

Ένας εννοιολογικός χάρτης (concept map) είναι ένα δίκτυο εννοιών που αποτελείται από *κόμβους* και *συνδέσμους* και παρουσιάζεται σε μια διαγραμματική αναπαράσταση. Κάθε κόμβος αναπαριστά έννοιες (*concepts*), που μπορεί να είναι αντικείμενα, γεγονότα, σύμβολα, εικόνες, κτλ. Οι σύνδεσμοι προσδιορίζουν τη σχέση μεταξύ των κόμβων περιγράφοντας πώς μια έννοια συνδέεται με άλλη/ες. Στην Εικόνα 1 παρουσιάζεται ένας εννοιολογικός χάρτης με κεντρική έννοια το ½ που δημιουργήθηκε από τον πρώτο ερευνητή.



Εικόνα 1: Πρότυπος εννοιολογικός χάρτης του ½

Οι εννοιολογικοί χάρτες αναπτύχθηκαν το 1972 στα πλαίσια ενός ερευνητικού προγράμματος στο Cornell University με σκοπό την κατανόηση της αλλαγής της γνώσης των παιδιών στις φυσικές επιστήμες (Novak & Musonda, 1991). Ο Joseph Novak είναι ο πρώτος που έκανε συστηματική χρήση τους με σκοπό τη διδασκαλία και την αξιολόγηση της γνώσης. Έκτοτε, ο εννοιολογικός χάρτης έχει αξιοποιηθεί σε διάφορα γνωστικά πεδία όπως στη βιολογία, στην περιβαλλοντική εκπαίδευση και στη διδακτική των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.

Η διαδικασία δημιουργίας ενός εννοιολογικού χάρτη εμπλέκει γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες που διαμορφώνουν και αλλάζουν την κατανόηση κάποιου ως προς το τι γνωρίζει για τη έννοια που τοποθετείται στο κέντρο του χάρτη (McGowen & Davis, 2019).

Πρόσφατες μελέτες εφάρμοσαν με επιτυχία τη χαρτογράφηση εννοιών για τον έλεγχο μαθηματικών δεξιοτήτων σε διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς και σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες (Plotz, 2019). Σε αυτή την κατεύθυνση, στην μελέτη των Georgiadis και Christou (2021), μέρος της οποίας παρουσιάζεται εδώ, εξετάστηκε αν η κατασκευή εννοιολογικού χάρτη θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να αξιολογηθεί το επίπεδο αίσθησης του αριθμού. Συγκεκριμένα, διερευνήθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα: α) Ποιο είναι το επίπεδο αίσθησης του αριθμού των φοιτητών ή αποφοίτων μαθηματικών τμημάτων; β) Ποιες είναι οι επιδόσεις τους στη συμπλήρωση ενός εννοιολογικού χάρτη; γ) Υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στο εργαλείο μέτρησης της αίσθησης του αριθμού και στην επίδοση στη συμπλήρωση ενός εννοιολογικού χάρτη;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Συμμετείχαν 39 φοιτητές ή απόφοιτοι Μαθηματικών Τμημάτων (17 γυναίκες, Μ.Ο. ηλικίας: 24 έτη)· 15 ήταν μεταπτυχιακοί φοιτητές, ενώ οι υπόλοιποι φοιτούσαν στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών.

Υλικά

Το πρώτο εργαλείο συλλογής δεδομένων ήταν ένα Ερωτηματολόγιο Αίσθησης Αριθμού (ΕρΑΑ). Για τη δημιουργία του επιλέχθηκαν ερωτήματα στα οποία η απάντηση φανέρωνε κάποια από τα εφτά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού, όπως αυτά έχουν περιγραφεί σε προηγούμενες μελέτες (Yang, Reys & Reys, 2009): 1) η κατανόηση του νοήματος των αριθμών, 2) η αναγνώριση του σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών, 3) η χρήση σημείων αναφοράς, 4) η ικανότητα ανάλυσης και σύνθεσης αριθμών, 5) η χρήση διαφόρων αναπαραστάσεων των αριθμών και των πράξεων, 6) η κατανόηση της σχετικής επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς και 7) η ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Το ΕρΑΑ αποτελούνταν από 8 ερωτήματα και στο Παράρτημα φαίνεται η αντιστοίχιση μεταξύ των ερωτημάτων και των χαρακτηριστικών της αίσθησης του αριθμού που εμφανίζεται σε αυτά.

Τα ερωτήματα του ΕρΑΑ μπορούσαν να λυθούν *a priori* με χρήση στρατηγικών που φανερώνουν αίσθηση του αριθμού, ενώ για την απάντηση των ερωτημάτων θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν περισσότερες από μια στρατηγικές ξεχωριστά ή ακόμη και να γίνει ταυτόχρονη χρήση δυο ή περισσότερων στρατηγικών. Τα πέντε πρώτα ερωτήματα προήλθαν από τη μελέτη των Yang, Reys και Reys (2009) για την αίσθηση του αριθμού σε εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το Ερ6 βασίστηκε στη μελέτη των Alajmi και Reys (2007), οι οποίοι μελέτησαν την ικανότητα αναγνώρισης και επιλογής λογικών απαντήσεων, δηλαδή ένα από τα χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού, σε μαθητές Γυμνασίου. Το Ερ7 προήλθε από τη διπλωματική έρευνα του Χαντόγλου (2018), ο οποίος εξέτασε τη γνώση εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας σε προβλήματα εκτιμήσεων ενώ το Ερ8 χρησιμοποιήθηκε από την Tsao (2004) σε μελέτη για την σχέση της αίσθησης του αριθμού με την ικανότητα για νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς, σε εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Το δεύτερο εργαλείο ήταν η κατασκευή εννοιολογικού χάρτη με κεντρική έννοια το 1/2. Θεωρήθηκε πως αυτό θα ήταν ένα κατανοητό και προκλητικό έργο για τους συμμετέχοντες που ταυτόχρονα θα μπορούσε, μέσα από τον πλούτο των διαφορετικών συνδέσεων που θα έκαναν, να αναδειχθεί το βάθος της αίσθησης του αριθμού που διαθέτουν.

Διαδικασία

Οι συμμετέχοντες αρχικά κλήθηκαν ατομικά και με την παρουσία του πρώτου ερευνητή να συμπληρώσουν το ΕρΑΑ και στη συνέχεια προχώρησαν στην δημιουργία του εννοιολογικού χάρτη. Καθώς στην πλειοψηφία τους δε γνώριζαν τους εννοιολογικούς χάρτες, τους δόθηκαν ακριβείς οδηγίες για το τι είναι και πώς κατασκευάζονται. Επίσης τους δόθηκε ως παράδειγμα ένας συμπληρωμένος εννοιολογικός χάρτης με κεντρική την έννοια το *τρίγωνο*.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Επιδόσεις στο ΕρΑΑ και κατηγοριοποίηση των απαντήσεων

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι σχετικές και οι απόλυτες συχνότητες των σωστών απαντήσεων στο ΕρΑΑ. Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων απάντησε σωστά στις περισσότερες ερωτήσεις, ενώ η χαμηλότερη επίδοση εμφανίστηκε στο Ερ6 όπου έπρεπε να γίνει η επιλογή των αριθμών που επαληθεύουν την ανίσωση $3\frac{3}{8} : - > 4$. Το 65% των συμμετεχόντων που απάντησε λανθασμένα σε αυτή την ερώτηση επέλεξε ως σωστές απαντήσεις όλους τους αριθμούς που ήταν μικρότεροι της μονάδας (3/5, 0,9, 0,05).

	Ερ1	Ερ2	Ερ3	Ερ4	Ερ5	Ερ6	Ερ7	Ερ8
Σωστό	37 (95%)	32 (82%)	22 (56%)	29 (74%)	37 (95%)	14 (35%)	37 (95%)	28 (71%)

Πίνακας 1: Συχνότητες σωστών απαντήσεων ανά ερώτημα στο ΕρΑΑ

Στη συνέχεια δημιουργήθηκε μια ιεραρχημένη κατηγορική μεταβλητή πέντε επιπέδων που βαθμολογούσε τις απαντήσεις με βάση την εμφάνιση κάποιας στρατηγικής που έδειχνε ένα επίπεδο αίσθησης του αριθμού. Η μεγαλύτερη τιμή της νέας μεταβλητής ήταν 4 και με αυτή βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις που είχαν αποκλειστικά κάποιο από τα εφτά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού όπως αυτά περιεγράφηκαν παραπάνω. Για παράδειγμα, στη σύγκριση των κλασμάτων $\frac{3}{8}$ *και* $\frac{7}{12}$ μια τέτοια απάντηση ήταν η χρήση του $\frac{1}{2}$ ως σημείο αναφοράς και όχι η μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικούς με σκοπό τη σύγκρισή τους. Με 3 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις που έδειξαν μερική αίσθηση του αριθμού. Στις περιπτώσεις αυτές η μέθοδος επίλυσης είχε χαρακτηριστικά αίσθησης του αριθμού αλλά και χρήσης κανόνων ή αλγόριθμων. Οι απαντήσεις στις οποίες εφαρμόστηκαν μόνο αλγόριθμοι ή/και βασίστηκαν αποκλειστικά σε κανόνες, βαθμολογήθηκαν με 2. Για παράδειγμα, στη σύγκριση των κλασμάτων $\frac{30}{31}$ και $\frac{36}{37}$ (Ερ2), η μετατροπή τους σε δεκαδικούς αριθμούς (0.96 και 0.97) και σύγκριση αυτών, βαθμολογούνταν με 2. Τέλος, οι ελλιπείς ή χωρίς αιτιολόγηση ορθές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1, ενώ οι λανθασμένες αιτιολογήσεις με 0.

Αποτελέσματα στον Εννοιολογικό Χάρτη

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι μέσες επιδόσεις που καταγράφηκαν ανά ερώτημα με βάση την παραπάνω βαθμολόγηση των απαντήσεων. Οι μέσοι όροι σε κάθε ερώτημα δείχνουν χαμηλή αίσθηση του αριθμού, κάτι που δεν ήταν αναμενόμενο από το συγκεκριμένο δείγμα συμμετεχόντων, λόγω της εξειδίκευσής τους στα μαθηματικά.

Ερωτήματα	Ερ1	Ερ2	Ερ3	Ερ4	Ερ5	Ερ6	Ερ7	Ερ8
Μ.Ο.	3,15	2,46	2,74	2,28	2,82	2,46	3,41	2,23
Τ.Α.	1,15	1,16	1,27	1,06	1,07	1,21	1,24	1,20
Μέγιστο	4	4	4	4	4	4	4	4
Ελάχιστο	1	0	0	0	1	1	0	0

Πίνακας 2: Μέσες επιδόσεις ως προς την αίσθηση του αριθμού ανά ερώτημα

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων στο έργο κατασκευής εννοιολογικού χάρτη, οι χάρτες των συμμετεχόντων συγκρίθηκαν με έναν πρότυπο εννοιολογικό χάρτη που κατασκευάστηκε από τον ερευνητή, ακολουθώντας μια συνηθισμένη πρακτική σε αντίστοιχες μελέτες (Ruiz-Primo, Shavelson & Schultz, 2001). Ο πρότυπος εννοιολογικός χάρτης αποτελείται από 16 κόμβους/έννοιες που σχετίζονται με το ½ και παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.

Στον Πίνακα 3, φαίνονται οι διαφορετικές κατηγορίες συνδέσεων που έκαναν οι συμμετέχοντες στον εννοιολογικό τους χάρτη. Ο κόμβος με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης ήταν το *Κλάσμα* καθώς δόθηκε από 29 από τους 39 συμμετέχοντες (74,3%). Αντίθετα, ο *Τελεστής* και το *Σημείο στην ευθεία* δεν εμφανίστηκαν σε κανέναν από τους χάρτες. Δυο κόμβοι που εμφανίζονται με συχνότητα μεγαλύτερη του 50% είναι η *Λεκτική αναπαράσταση* (*μισό*) και η *Δεκαδική αναπαράσταση* του ½ (0,5) που εμφανίστηκαν σε 28 (71,7%) και 26 (66,6%) χάρτες αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, οι απαντήσεις των συμμετεχόντων στους εννοιολογικούς χάρτες βαθμολογήθηκαν με μία μονάδα σε κάθε σωστό κόμβο. Με βάση αυτή τη βαθμολόγηση, η μέγιστη δυνατή βαθμολογία θα ήταν 16, όσοι δηλαδή και οι κόμβοι του εννοιολογικού χάρτη του ειδικού που παρουσιάστηκε παραπάνω. Ωστόσο, η συγκεκριμένη βαθμολογία δεν επιτεύχθηκε, αφού κανείς δεν συμπεριέλαβε όλους τους κόμβους του πρότυπου χάρτη.

Κόμβοι εννοιολογικού χάρτη	**Πλήθος (%)**
Κλάσμα	29 (74,3%)
Λεκτική αναπαράσταση	28 (71,7%)
Δεκαδική αναπαράσταση	26 (66,6%)
Ισοδύναμα κλάσματα	20 (51,2%)
Παράδειγμα με το ½	18 (46,1%)
Αριθμός	18 (46,1%)
Σχηματική αναπαράσταση	15 (38,4%)
Πηλίκο διαίρεσης	15 (38,4%)
Ποσοστό	12 (30,7%)
Μικρότερο του 1	9 (23%)
Μέρος προς όλο	9 (23%)
Αντίστροφος του 2	5 (12,8%)
Λόγος	4 (10,2%)
Ανάγωγο κλάσμα	1 (2,5%)
Τελεστής	0 (0%)
Σημείο στην ευθεία	0 (0%)

Πίνακας 3: Συχνότητα εμφάνισης κάθε κόμβου στους εννοιολογικούς χάρτες

Για την απάντηση του βασικού ερευνητικού ερωτήματος εξετάστηκε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων στο ΕρΑΑ και των επιδόσεων στο έργο κατασκευής εννοιολογικού χάρτη. Έλεγχος συσχέτισης Spearman έδειξε στατιστικά σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στους αριθμούς των συνδέσεων που εμφάνιζαν οι εννοιολογικοί χάρτες και τη βαθμολογία στα έργα αίσθησης του αριθμού ($r=0,445$, $p=0.004$). Μεγαλύτερο δείγμα θα μπορούσε να δείξει ακόμη πιο ισχυρές συσχετίσεις ανάμεσα στα εργαλεία, κάτι που μένει να το εξετάσει μια μελλοντική μελέτη.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα έδειξαν σχετικά χαμηλό επίπεδο αίσθησης αριθμού, λαμβάνοντας υπόψη το επίπεδο εμπειρογνωμοσύνης στα μαθηματικά των συμμετεχόντων. Οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες έδωσαν σωστές απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε διαφορετικά μαθηματικά προβλήματα, δείχνοντας το υψηλό επίπεδο μαθηματικής γνώσης που διαθέτουν. Ωστόσο, οι απαντήσεις τους βασίστηκαν στην εφαρμογή κανόνων και αλγορίθμων, αντί να ακολουθούν τις οδηγίες των ερευνητών για την αποφυγή γραπτών υπολογισμών και τυπικών αλγορίθμων (για πιο λεπτομερή ανάλυση των απαντήσεων βλ. Georgiadis και Christou, 2021). Αυτό το εύρημα ευθυγραμμίζεται με προηγούμενα ευρήματα που δείχνουν χαμηλό επίπεδο αίσθησης αριθμού σε ενήλικες, ακόμη και εκπαιδευτικούς (Yang, Reys & Reys, 2009; Almeida, Bruno & Perdomo-Diaz, 2016).

Τα αποτελέσματα από την ανάλυση των εννοιολογικών χαρτών ήταν παρόμοια. Η πλειοψηφία, παρουσίασε εννοιολογικούς χάρτες με λιγότερους από 6 κόμβους, ενώ ο πρότυπος χάρτης περιλάμβανε 16 κόμβους. Ενδιαφέρον εύρημα ήταν ότι κανένας από τους συμμετέχοντες δεν συνέδεσε το κλάσμα με τις έννοιες *Τελεστής* ή *Σημείο σε ευθεία*. Αυτό υποστηρίζει ευρήματα προηγούμενων ερευνών που δείχνουν πως η κατανόηση του κλάσματος ως τελεστής είναι δύσκολη ακόμη και για ειδικούς (Behr et al. 1997).

Μια ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων είναι ότι η διδασκαλία των μαθηματικών, ειδικά στις υψηλότερες βαθμίδες, επενδύει στην εφαρμογή αλγορίθμων και κανόνων, χωρίς να δίνεται η απαραίτητη προσοχή στην καλλιέργεια βαθιάς εννοιολογικής σκέψης. Οι συμμετέχοντες, που πολλοί από αυτούς θα αποτελέσουν μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών, φάνηκε να έχουν περιορισμένη αίσθηση του αριθμού και φτωχό ρεπερτόριο στρατηγικών για χρήση σε μαθηματικά προβλήματα που θα μπορούσαν να λυθούν χωρίς γραπτούς αλγόριθμους.

Επιπλέον, τα αποτελέσματα παρέχουν εμπειρική στήριξη της εγκυρότητας των έργων κατασκευής εννοιολογικών χαρτών ως εργαλεία μέτρησης της αίσθησης του αριθμού υποστηρίζοντας ότι τέτοια έργα θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τόσο για τη μέτρηση όσο και για την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alajmi, A., & Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 77-94.

Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service secondary mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(5), 959-978.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of pre-service elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. Journal for Research in Mathematics Education, 28(1), 48–69.

Georgiadis, V. C., & Christou, K. (2020). Concept Mapping to Measure Mathematical Experts' Number Sense. *International Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(3), 6-26.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, *36*, 6-11

McGowen, M. A., & Davis, G. E. (2019). Spectral analysis of concept maps of high and low gain undergraduate mathematics students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *55*, 100686.

McIntosh, A, Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*,*12*(3),2-44.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA.

Novak, J. D., & Musonda, D. (1991). A twelve-year longitudinal study of science concept learning. *American Educational Research Journal*, *28*(1), 117-153.

Plotz, T. (2019). Are Concept Maps a Valid Measurement Tool for Conceptual Learning? A Cross-case Study. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(1).

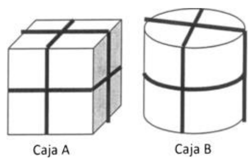
Ruiz-Primo, M. A., Shavelson, R. J., Li, M., & Schultz, S. E. (2001). On the Validity of Cognitive Interpretations of Scores from Alternative Concept-Mapping Techniques. *Educational Assessment*, *7*(2), 99-141.

Tsao, Y. L. (2004). Exploring the Connections among Number Sense, Mental Computation Performance, and the Written Computation Performance of Elementary Preservice School Teachers. *Journal of College Teaching & Learning*, *1*(12), 71-90

Χαντόγλου Π. (2018), Η αίσθηση του αριθμού σε εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης [*Number Sense in Secondary School Teachers*]. (Master's thesis, University of Western Macedonia, Florina, Greece). Retrieved from: https://dspace.uowm.gr/xmlui/handle/123456789/962

Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383-403.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ερωτήματα	Χαρ. ΑΑ
Ερ. 1: Ο Νίκος περπάτησε 0,4828 km, ο Χρήστος περπάτησε $\frac{13}{38}$ km, η Μαρία περπάτησε $\frac{8}{15}$ km, η Δήμητρα περπάτησε $\frac{17}{16}$ km, ο Γιώργος περπάτησε 0,966 km και ο Γιάννης περπάτησε $\frac{7}{29}$ km. Ταξινομήστε τις αποστάσεις από την πιο μακρινή προς την προς πιο κοντινή.	1, 2, 3
Ερ. 2: Η Βικτώρια και η Μαρία χρησιμοποίησαν χρωματιστές κορδέλες για μια εργασία στην τάξη. Η Βικτώρια χρησιμοποίησε $\frac{30}{31}$ m και η Μαρία $\frac{36}{37}$ m. Ποια χρησιμοποίησε μεγαλύτερη κορδέλα;	2, 3, 4
Ερ. 3: Ο Αλέξανδρος χρησιμοποίησε τον υπολογιστή για να κάνει την πράξη 0,4975 x 9428,8 = 4690828 αλλά ξέχασε να σημειώσει το κόμμα. Με χρήση εκτιμήσεων βρείτε που θα πρέπει να τοποθετηθεί το κόμμα: α) 46,90828 β) 469,0828 γ) 4690,828 δ) 46908,28 ε) Δεν μπορώ να απαντήσω χωρίς να κάνω τον ακριβή υπολογισμό	3, 6
Ερ. 4: Έχουμε δυο κουτιά για δώρα και θέλουμε να τα τυλίξουμε με ταινία όπως φαίνεται στην εικόνα. Το ένα κουτί είναι κύβος πλευράς 10cm. Το άλλο έχει είναι κύλινδρος με ύψος και η διάμετρο 10cm. Για πιο κουτί θα χρειαστούμε περισσότερη ταινία; 	5, 6, 7
Ερ. 5: Ένα μπουκάλι νερό των 600 ml κοστίζει 18 cents, ενώ ένα μπουκάλι νερό των 1500 ml κοστίζει 35cents. Εκτιμήστε πιο από τα δυο μπουκάλια συμφέρει να αγοράσουμε.	6, 7
Ερ. 6: Για ποιους αριθμούς ισχύει η ανίσωση $\frac{3}{8} : - > 4$ $3\frac{3}{4}$, 1,54 $1\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ 0,9 0,05 2,5	1, 2, 3, 4, 7
Ερ. 7: Βρείτε τρεις αριθμούς μεταξύ των αριθμών $\frac{7}{8}$ και 1.	1, 2, 6
Ερ. 8: Χωρίς να κάνετε ακριβείς υπολογισμούς εκτιμήστε αν το γινόμενο $\frac{21}{36} x \frac{7}{16}$ είναι: α) Μεγαλύτερο από $\frac{21}{64}$, β) Μικρότερο από $\frac{21}{64}$, γ) Ίσο με $\frac{21}{64}$, δ) Είναι αδύνατο να δοθεί απάντηση χωρίς να γίνουν υπολογισμοί. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.	1, 3, 4, 6

Η ΔΙΠΛΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ –Η ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Κύρβεη Δέσποινα-Ιωάννα[1], Βαμβακούση Ξένια[2], Χρήστου Κωνσταντίνος[1]

[1]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, [2]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

djoannaky@gmail.com, xvamvak@uoi.gr, kchristou@uowm.com

Η παρούσα εργασία μελετά τις αντιλήψεις των μαθητών για τις αριθμητικές τιμές που μπορούν να αποδοθούν σε μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις. 138 μαθητές Γυμνασίου κλήθηκαν να αξιολογήσουν 48 ισχυρισμούς σχετικά με αριθμούς που γίνεται ή δεν γίνεται να αναπαραστήσουν έξι αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές (π.χ. -β, κ+3). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές έτειναν να συμφωνούν με τους ισχυρισμούς που ήταν συμβατοί με τη διαίσθησή τους ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς (ακεραιότητα) και ότι αναπαριστούν αριθμούς του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό πρόσημο της κάθε παράστασης. Η επίδραση της ακεραιότητας ήταν πιο ισχυρή από αυτή του φαινομενικού προσήμου στις αντιλήψεις τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής αποτελεί μία ευρέως διαδεδομένη δυσκολία της μετάβασης των μαθητών από την αριθμητική στην Άλγεβρα (Wagner & Kieran, 2018). Οι μεταβλητές στην Άλγεβρα αναπαρίστανται με γράμματα από την αλφάβητο. Προηγούμενες μελέτες έδειξαν ότι οι μαθητές έχουν την τάση αρχικά να παρερμηνεύουν τα γράμματα στην Άλγεβρα ως συντομογραφίες ονομάτων ή πραγμάτων, ως ετικέτες ή αντικείμενα (β=βάρκες), ή ακόμη κι ως αριθμούς κωδικοποιημένους έτσι ώστε να υπάρχει αντιστοιχία με τη θέση τους στο αλφάβητο (π.χ., b=2) (Kuchemann, 1981; Booth, 1984; Khalid, Yakop & Ibrahim, 2020). Παρ' όλο που οι μαθητές εγκαταλείπουν τέτοιου είδους λάθη μέχρι την (αντίστοιχη) Α΄ Λυκείου, κάποιες άλλες δυσκολίες ανακύπτουν, οι οποίες είναι πιο δύσκολο να ξεπεραστούν ακόμα και ύστερα από στοχευμένη διδασκαλία (Booth, 1984). Μια τέτοια δυσκολία είναι να δεχθούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν ένα εύρος αριθμητικών τιμών και δεν είναι σύμβολα που αναπαριστούν μόνο έναν συγκεκριμένο, άγνωστο αριθμό (Booth, 1984; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007).

Ένα ερώτημα το οποίο μόνο πρόσφατα διερευνήθηκε είναι τι συμβαίνει όταν οι μαθητές αντιλαμβάνονται πως τα αλφαβητικά σύμβολα αναπαριστούν περισσότερες από μία αριθμητικές τιμές: Είναι διατεθειμένοι να δεχτούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ως τιμή μιας μεταβλητής; Για να απαντήσουν σε αυτό το ερώτημα οι Χρήστου και Βοσνιάδου (2009, 2012) χρησιμοποίησαν το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, σύμφωνα με το οποίο πριν έρθουν σε επαφή με τους μη-φυσικούς αριθμούς, οι μαθητές έχουν κατασκευάσει μια καλά οργανωμένη θεωρία για τον αριθμό που προέκυψε από την εμπειρία τους με τους φυσικούς αριθμούς, μέσα και έξω από τη σχολική τάξη. Αυτή η αρχική κατανόηση για τον αριθμό επηρεάζει τις αντιλήψεις και τις προσδοκίες τους σχετικά με το τί είναι ο αριθμός και πώς αυτός λειτουργεί, προκαλώντας φαινόμενα όπως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Ως *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* (ΠΦΑ) χαρακτηρίζεται η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την γνώση τους για τους αριθμούς – η οποία θέλει τους αριθμούς να έχουν ιδιότητες φυσικού αριθμού – σε περιπτώσεις όπου αυτή η γνώση δε μπορεί να εφαρμοστεί, όπως όταν εμπλέκονται ρητοί και πραγματικοί αριθμοί (Ni & Zhou, 2005). Λόγω της ΠΦΑ, οι μαθητές συχνά έχουν την τάση να θεωρούν, για παράδειγμα, ότι δεκαδικοί με περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτεροι, ότι τα κλάσματα με μεγαλύτερους όρους έχουν και μεγαλύτερη αξία, ή ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει ενώ η διαίρεση πάντα μικραίνει τους αρχικούς όρους της πράξης (Ni & Zhou, 2005; Vosniadou et al., 2008; Christou & Vosniadou, 2012).

Μέσα από μια σειρά μελετών ο Χρήστου και οι συνεργάτες του (Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007; Christou & Vosniadou, 2012) διερεύνησαν την υπόθεση ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα επηρέαζε τους μαθητές να θεωρούν ότι τα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως σύμβολα μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, κι όχι κάθε ρητό ή και πραγματικό αριθμό. Η υπόθεση αυτή εξετάστηκε σε προηγούμενες μελέτες χρησιμοποιώντας ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν αριθμητικές τιμές που θεωρούσαν ότι μπορούν να αποδοθούν σε δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές. Η πλειονότητα των μαθητών εμφάνισε την τάση να αποδίδει μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές των παραστάσεων, απαντώντας, για παράδειγμα, ότι το *α* μπορεί να πάρει τιμές τους φυσικούς αριθμούς (1, 2, 3,…), το –β αρνητικούς ακεραίους (-1, -2, -3,…) και το *κ+3* φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 3 (4, 5, 6,…). Παρόλο που οι απαντήσεις αυτές δεν ήταν λανθασμένες, κατέδειξαν την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον, όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν ποιοι αριθμοί (αν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί) *δεν μπορούν* να αναπαραστήσουν οι ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις, η πλειονότητα αντικατέστησε τις μεταβλητές με αρνητικούς ακεραίους, απαντώντας ότι το $-\beta$ δεν μπορεί να πάρει τιμές όπως 1, 2, 3 ή ότι οι αριθμοί -1, -2, -3 δεν μπορούν να αποδοθούν στο α (Christou & Vosniadou, 2012). Αντίστοιχα αποτελέσματα προέκυψαν και από ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (Christou & Vosniadou, 2007) όπου οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους ένα σύνολο από θετικούς, αρνητικούς ακέραιους και ρητούς αριθμούς για να επιλέξουν εκείνους (αν υπάρχουν) που θεωρούσαν ότι δεν μπορούν να αποδοθούν σε συγκεκριμένες αλγεβρικές παραστάσεις. Ένα κοινό μοτίβο απαντήσεων έδειξε συστηματικό αποκλεισμό αριθμών που δεν μπορούσαν να προκύψουν από την αντικατάσταση των γραμμάτων με φυσικούς αριθμούς. Ένα άλλο μοτίβο, ωστόσο, έδειξε συστηματικό αποκλεισμό θετικών αριθμών (είτε φυσικών είτε μη-φυσικών), όταν η έκφραση είχε εμφανές αρνητικό πρόσημο (π.χ. -β) και αρνητικών όταν η παράσταση εμφανιζόταν να έχει θετικό πρόσημο (π.χ., κ+3). Οι αλγεβρικές παραστάσεις γενικά μπορεί να παίρνουν είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές, ανεξάρτητα από το πρόσημο που φαίνεται να έχουν. Για παράδειγμα, το -β θα μπορούσε να πάρει και θετικές τιμές, αν αρνητικές τιμές αντικατασταθούν στο β. Τα παραπάνω ευρήματα ενισχύθηκαν περαιτέρω από μια αναπαραγωγική μελέτη με Φλαμανδούς μαθητές (Van Dooren, Christou & Vamvakoussi, 2010).

Ένας άλλος τρόπος να ερμηνευτεί το παραπάνω εύρημα είναι ότι οι μαθητές προ-αποφασίζουν το πρόσημο των τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει μια παράσταση με βάση την παρουσία ή όχι αρνητικών πρόσημων σε αυτή (έτσι το -β ερμηνεύεται ως μια αρνητική παράσταση). Αυτό συμβαδίζει με προηγούμενες μελέτες που έδειχναν την τάση των μαθητών να παρερμηνεύουν το αρνητικό σύμβολο μιας παράστασης ως σύμβολο αρνητικότητας (βλ. Vlassis, 2004). Αυτό θα μπορούσε να αναγνωριστεί ως μια έμμεση συνέπεια της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, καθώς θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα της διατήρησης (τουλάχιστον) ενός χαρακτηριστικού της πιο στοιχειώδους ερμηνείας των γραμμάτων ως φυσικών αριθμών, αυτό της θετικότητας. Έτσι, θα μπορούσε να επιτραπεί στο k+3 να λάβει μη-φυσικές τιμές, υπό την προϋπόθεση όμως ότι αυτές θα είναι θετικές (π.χ., 3,5). Ομοίως, θα μπορούσε να επιτραπεί στο -β να λάβει μη-φυσικές τιμές, υπό την προϋπόθεση ότι θα είναι αρνητικές (π.χ. -0,5).

Τα παραπάνω αποτελέσματα έδωσαν κάποιες αρχικές εμπειρικές ενδείξεις ότι η ΠΦΑ επηρεάζει την κατανόηση της χρήσης μεταβλητών στην Άλγεβρα με δύο βασικούς τρόπους: α) επηρεάζει τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τα αλφαβητικά σύμβολα ως σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς κι όχι οποιονδήποτε ρητό ή πραγματικό αριθμό, όπως έχουν διδαχθεί (*παράγοντας ακεραιότητας*). β) τους επηρεάζει να θεωρούν ότι το *φαινομενικό πρόσημο* μιας αλγεβρικής παράστασης είναι το πρόσημο των αριθμών που αυτή μπορεί να αναπαραστήσει (*παράγοντας φαινομενικού προσήμου*).

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει περαιτέρω αυτή τη διπλή επίδραση της ΠΦΑ, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική μεθοδολογία από τις προηγούμενες σχετικές έρευνες. Στην παρούσα μελέτη, αντί να αποδώσουν ή να απορρίψουν συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές ως τιμές που μπορεί η δεν μπορεί να αναπαραστήσει μια αλγεβρική παράσταση, ζητήθηκε από τους μαθητές να αξιολογήσουν την ισχύ μιας σειράς ισχυρισμών σχετικά με τις τιμές που μπορούν να αποδοθούν σε δοσμένες παραστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσε να μελετηθεί και η επίδραση της μορφής της αλγεβρικής παράστασης κατά την ερμηνεία των μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, πώς επηρεάζεται από τη μορφή της παράστασης, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές τη συνδέουν με τις αριθμητικές τιμές που θα μπορούσε εκείνη να πάρει. Αν, δηλαδή, η ακέραια (π.χ., κ+3) ή η κλασματική μορφή μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. 4/5y), και αντίστοιχα η «θετική» (π.χ. 4/5y) και η «αρνητική» μορφή της (π.χ. -4/5y) επηρεάζει τις αριθμητικές τιμές που μπορεί να πάρει. Σκεφτήκαμε ότι οι μαθητές που θα αποδέχονταν μια μη-φυσική τιμή σε μια παράσταση που μοιάζει ακέραια (π.χ., κ+3), θα μπορούσαν να δώσουν μόνο κλασματικές τιμές στην περίπτωση μιας παράστασης που μοιάζει κλασματική (π.χ. 4/5y), είτε επειδή επιστρέφουν στην ερμηνεία των γραμμάτων ως φυσικούς αριθμούς, όταν η έκφραση είναι πιο σύνθετη, είτε επειδή η μορφή της έκφρασης τους κατευθύνει προς κλασματικές τιμές.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν συνολικά 138 μαθητές από δημόσια Γυμνάσια του Ν. Σερρών. Από αυτούς, 68 ήταν μαθητές της Β’ τάξης και 70 μαθητές της Γ’ (Μ.Ο. ηλικίας: 14,52 · 77 δήλωσαν κορίτσια). Η προαναφερθείσα ηλικιακή ομάδα επιλέχθηκε διότι έχει προηγουμένως διδαχθεί όλες τις έννοιες και διαδικασίες οι οποίες χρειάζονται για να διαχειριστεί το υλικό του ερωτηματολογίου. Οι συμμετέχοντες συγκεκριμένα έχουν ήδη έρθει σε επαφή με την μεταβλητή ήδη από την Στ΄ τάξη του, κι έχουν εμπειρία με ρητούς αριθμούς από την Δ΄ τάξη του Δημοτικού.

Υλικά

Στους μαθητές της έρευνας δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 48 προτάσεις σχετικές με την αριθμητική τιμή που μπορεί (ή δεν μπορεί) να πάρει μια αλγεβρική έκφραση. Κάθε μια από τις προτάσεις, την ισχύ των οποίων κλήθηκαν να αξιολογήσουν οι μαθητές, παρουσίαζε μία από τις έξι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις: α, -β, κ+3, -δ-4, 4/5y, -4/5z. Σε κάθε μία από τις παραπάνω αποδόθηκαν οχτώ διαφορετικές αριθμητικές τιμές (θετικός ή αρνητικός ακέραιος, θετικός ή αρνητικός ρητός αριθμός - ένας σε κάθε πρόταση). Από τις 48 προτάσεις του ερωτηματολογίου οι μισές ήταν καταφατικά διατυπωμένες (π.χ. *Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 2*), ενώ οι υπόλοιπες ήταν αρνητικά διατυπωμένες (π.χ. *Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -8*) ώστε σωστή να είναι η απάντηση «συμφωνώ» στην πρώτη περίπτωση και «διαφωνώ» στη δεύτερη. Οι αρνητικά διατυπωμένες ερωτήσεις συμπεριλήφθηκαν διότι αλλιώς όλες οι ερωτήσεις θα είχαν ως σωστή απάντηση το «συμφωνώ».

Τα παραπάνω είχαν ως αποτέλεσμα να δημιουργηθούν έργα που είναι συμβατά ή μη-συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά τόσο την ακεραιότητα όσο και το πρόσημο των αριθμητικών τιμών που μπορούν να αποδοθούν σε μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι ισχυρισμοί ήταν: α) συμβατοί με την ακεραιότητα (ΣυμβΑΚ) όταν φυσικοί αριθμοί αποδίδονταν στις μεταβλητές των αλγεβρικών παραστάσεων (π.χ. θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 6), β) μη-συμβατοί με την ακεραιότητα (Μη-συμβΑΚ) όταν κλασματικοί ή δεκαδικοί αριθμοί αποδόθηκαν στις μεταβλητές (π.χ. θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 1/6), γ) συμβατοί με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ) όταν ο αριθμός που αποδίδονταν σε μια αλγεβρική παράσταση ήταν αριθμός του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό της πρόσημο (π.χ. θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -2.8), και δ) μη-συμβατοί με το φαινομενικό πρόσημο (Μη-συμβΦΠ) όταν οι αριθμητικές τιμές είχαν αντίθετο πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο της αντίστοιχης αλγεβρικής παράστασης (π.χ. θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 4/3).

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση οδήγησε τελικά στην ταξινόμηση των έργων σε τέσσερις βασικές κατηγορίες αφού κάθε ένας από τους ισχυρισμούς μπορούσε να είναι ταυτόχρονα συμβατός ή μη-συμβατός με την ακεραιότητα και συμβατός ή μη-συμβατός με το φαινομενικό πρόσημο (βλ. Πίνακα 1).

Αποτελέσματα

Οι απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν ως σωστό (βαθμός 1) ή λάθος (βαθμός 0). Η συμβολική αξιοπιστία του ερωτηματολογίου ήταν καλή (Cronbach’s Alpha = 0.738). Έλεγχος της ομοιογένειας της διασποράς με το κριτήριο του Levene, έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών που να σχετίζεται με την τάξη [$F(1,134) = 0.088$, $p=.768$]. Η μέση επίδοση των μαθητών υπολογίστηκε σε κάθε κατηγορία έργου και παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.

Κατηγορία έργων	Παράδειγμα
ΣυμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -4 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -8
ΣυμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 2 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 3
Μη-συμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -2.8 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -1/2
Μη-συμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 4/3 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 5/6

Πίνακας 2 – Κατηγορίες έργων συμβατών και μη ως προς την ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο.

Οι συνολικές επιδόσεις των μαθητών ήταν υψηλότερες στην κατηγορία ερωτημάτων που ήταν συμβατά με την ακεραιότητα και συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΑΚ / ΣυμβΦΠ), ενώ οι χαμηλότερες επιδόσεις σημειώθηκαν στα έργα που ήταν αντίθετα με τις διαισθήσεις των μαθητών τόσο για την ακεραιότητα όσο και για το φαινομενικό πρόσημο (Μη-συμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ). Ανάλυσης διασποράς επαναλαμβανόμενων μετρήσεων με δύο παράγοντες (ακεραιότητα και φαινομενικό πρόσημο), που έγινε στις παραπάνω μεταβλητές, υποστήριξε την βασική υπόθεση της μελέτης, καθώς έδειξε στατιστικώς σημαντική επίδραση του παράγοντα της ακεραιότητας ($F(1,137) = 106{,}36$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .44$) όπως επίσης και του φαινομενικού προσήμου ($F(1,137) = 56{,}36$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .29$) στις απαντήσεις των μαθητών στα έργα. Η σύγκριση του μεγέθους επίδρασης η_p^2 κάθε παράγοντα δείχνει ότι η επίδραση της ακεραιότητας εμφανίζεται υψηλότερη από αυτήν του φαινομενικού προσήμου.

Σε μια επιπρόσθετη ανάλυση εξετάστηκε με ποιον τρόπο η μορφή των αλγεβρικών παραστάσεων επηρεάζει τις εκτιμήσεις των μαθητών σχετικά με τους αριθμούς που αυτές μπορούν να αναπαραστήσουν. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές σημείωσαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα ΣυμβΦΠ έργα που περιείχαν αλγεβρικές παραστάσεις με ακέραια μορφή (π.χ. α, -β, -δ-4) (Μ.Ο. = 10.31, Τ.Α. = 2.70) σε σχέση με τα αντίστοιχα έργα που περιείχαν παραστάσεις με κλασματική μορφή (π.χ. 4/5y, -4/5z) (Μ.Ο. = 4.18, Τ.Α. = 1.74), [$t(137) = 28.683$, $p < .001$].

	Μ.Ο.	Τ.Σ.	Ελάχιστο	Μέγιστο
ΣυμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	8,38	0,190	3	12
ΣυμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	6,01	0,215	0	12
Μη-συμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	6,11	0,192	1	12
Μη-συμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	4,89	0,231	0	12

Πίνακας 2: Μέσοι όροι για κάθε κατηγορία συμβατών/ μη-συμβατών έργων με την ακεραιότητα και με το φαινομενικό πρόσημο

Αναφορικά με την επίδραση του φαινομενικού προσήμου που φέρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, τα αποτελέσματα έδειξαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα ΣυμβΑΚ έργα που περιείχαν παραστάσεις θετικού φαινομενικού προσήμου (Μ.Ο. = 13.29, Τ.Α. = 0.331), σε σχέση με τα αντίστοιχα έργα με παραστάσεις αρνητικού φαινομενικού προσήμου (Μ.Ο.= 11.92, Τ.Α.= 0.302), [$t(137) = 4.127$, $p < .001$].

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός αυτής της ερευνητικής εργασίας ήταν να μελετήσει τον τρόπο που επιδρούν οι δυο παράγοντες της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, η ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο, στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τις αριθμητικές τιμές που μπορούν να πάρουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική μεθοδολογία σε σχέση με τις αντίστοιχες προϋπάρχουσες μελέτες. Στην παρούσα έρευνα, ζητήθηκε από μαθητές Γυμνασίου να αξιολογήσουν την ισχύ προτάσεων που αφορούσαν στο τι αριθμητικές τιμές μπορεί ή δεν μπορεί να αναπαραστήσει μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μια μεταβλητή. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν υποστήριξαν τις βασικές υποθέσεις της μελέτης, καθώς τόσο η ακεραιότητα όσο και το φαινομενικό πρόσημο επηρέασαν τις απαντήσεις των μαθητών στα δοσμένα έργα.

Όσον αφορά την επίδραση της ακεραιότητας, οι μαθητές φάνηκε να σημειώνουν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στους ισχυρισμούς εκείνους που ήταν σύμφωνοι με τις διαισθητικές αντιλήψεις τους ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς (π.χ. το κ+3 μπορεί να πάρει την τιμή 9), παρά σε ισχυρισμούς αντίθετους με την παραπάνω ιδέα (π.χ. το κ+3 μπορεί να πάρει την τιμή 4/5). Επιπλέον, οι μαθητές φάνηκαν λιγότερο διατεθειμένοι να δεχθούν ακέραιες τιμές ως τιμές που μπορούν να αναπαραστήσουν κλασματικής μορφής αλγεβρικές παραστάσεις όπως η 4/5y, παρά να δεχθούν ρητούς αριθμούς ως τιμές που μπορούν να αναπαραστήσουν ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις όπως η –β. Τα παραπάνω αποτελέσματα ενισχύουν τα ευρήματα των προϋπάρχουσων σχετικών ερευνών (Christou et al., 2007; Christou & Vosniadou, 2012; Van Dooren et al., 2010).

Όσον αφορά την επίδραση του φαινομενικού προσήμου, οι μαθητές φάνηκε να σημειώνουν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα έργα/ισχυρισμούς που ήταν συμβατά με την αντίληψη ότι οι αριθμοί που μπορεί να αναπαριστά μια αλγεβρική παράσταση οφείλουν να είναι αριθμοί του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης (π.χ. το κ+3 δεν μπορεί να πάρει την τιμή -1), σε σύγκριση με τους ισχυρισμούς εκείνους που ήταν μη συμβατοί με την παραπάνω λογική (π.χ. το κ+3 δεν μπορεί να πάρει την τιμή 5). Επιπροσθέτως, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές φάνηκαν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχθούν αρνητικές τιμές ως τιμές που μπορούν να αναπαραστήσουν οι παραστάσεις θετικού φαινομενικού προσήμου (π.χ. κ+3), παρά να δεχθούν θετικούς αριθμούς ως τιμές που αναπαριστούν αλγεβρικές παραστάσεις που φαίνονταν να είναι αρνητικές (π.χ. –δ-4). Τα παραπάνω έρχονται σε σύγκλιση με προϋπάρχοντα ευρήματα της βιβλιογραφίας σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές δείχνουν να επηρεάζονται περισσότερο από το αρνητικό φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων, παρά από το αντίστοιχο θετικό, και να το ερμηνεύουν ως σύμβολο αρνητικότητας (βλ. Vlassis, 2004). Η σύγκριση του μεγέθους επίδρασης των δύο παραγόντων (ακεραιότητα & φαινομενικό πρόσημο) έδειξε ότι οι μαθητές ήταν πιο διατεθειμένοι να δεχθούν τιμές με διαφορετικό πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο της παράσταση από το να δεχθούν μη φυσικούς αριθμούς ως τιμές των μεταβλητών.

Οι προαναφερθείσες παρανοήσεις προκαλούν λάθη και δυσκολίες κατά την εφαρμογή σε συγκεκριμένα μαθηματικά πλαίσια, όπως στη δυσκολία κατασκευής γραφικών παραστάσεων από συναρτήσεις αλλά και στη λύση ισοτήτων και ανισοτήτων με αλγεβρικές παραστάσεις σε τετραγωνικές ρίζες και σε απόλυτες τιμές (Χρήστου & Βοσνιάδου, 2009). Η διδασκαλία που θα δίνει με ρητό τρόπο έμφαση στη σύνδεση μεταξύ μεταβλητών και αριθμητικών τιμών θα μπορούσε να ενισχύσει την κατανόηση του πραγματικού εύρους των τιμών που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή και μια αλγεβρική παράσταση. Ωστόσο, η διόρθωση των παραπάνω παρερμηνειών δεν αναμένεται να είναι μια εύκολη διαδικασία. Για να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, οι μαθητές θα πρέπει να ξεπεράσουν την ΠΦΑ και να διευρύνουν το εννοιολογικό τους πεδίο για τον αριθμό, πέρα από τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό απαιτεί αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τον αριθμό ως φυσικός αριθμός, που είναι μια γνώση εδραιωμένη μέσα από την εμπειρία και επιβεβαιωμένη ακόμα κι από τη συστηματική διδασκαλία τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης (Vosniadou et al., 2008). Αναμένεται, έτσι, να είναι μια σταδιακή και μακροπρόθεσμη διαδικασία η οποία απαιτεί τη συστηματική υποστήριξη των μαθητών σε αυτό τον στόχο. Σημαντικός σε αυτήν την κατεύθυνση είναι ο ρόλος των εκπαιδευτικών που οφείλουν να είναι ενημερωμένοι για την ΠΦΑ και τις δυσκολίες που αυτή δημιουργεί. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούν να οργανώσουν με κατάλληλο τρόπο τις διδακτικές τους προσεγγίσεις, αφενός πριμοδοτώντας τις κατάλληλες διαδικασίες που συμβάλουν στη μάθηση της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και αφετέρου αποφεύγοντας την αναπαραγωγή των ιδεών εκείνων που ενισχύουν την αρχική κατανόηση των μαθητών που θέλει τη μεταβλητή να είναι ένας φυσικός αριθμός.

Σε αυτή την κατεύθυνση θα πρέπει να γίνουν και αλλαγές στα διδακτικά εγχειρίδια, που αποτελούν βασικά εργαλεία για τον εκπαιδευτικό. Προηγούμενη μελέτη έδειξε ότι στα βιβλία του Γυμνασίου δεν γίνεται ρητή αναφορά ούτε δίνονται επαρκή παραδείγματα που να δείχνουν το εύρος των πραγματικών τιμών που μπορούν να αναπαριστούν οι μεταβλητές και οι αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες εμφανίζονται. (Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers’ knowledge of students’ understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249–272.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children’s strategies and errors*. Berkshire: NFER-Nelson.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 1–27.

Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students’ interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 283–297). Elsevier Press.

Khalid, M., Yakop, F. H., & Ibrahim, H. (2020). Year 7 Students’ Interpretation of Letters and Symbols in Solving Routine Algebraic Problems. *The Qualitative Report*, *25*(11), 4167–4181.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. *International Reviews on Mathematical Education*, *37*(1), 68–76.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16.* (pp. 102–119). John Murray.

Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Van Dooren, W., Christou, K. P., & Vamvakoussi, X. (2010). Greek and Flemish students' interpretation of the literal symbols as variables. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Mathematics in different settings – Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 257–264). PME.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. Learning and instruction, 14(5), 469-484.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *Handbook of research on conceptual change* (pp. 3–34). Lawrence Erlbaum Associates.

Wagner, S., & Kieran, C. (2018). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra: The Research Agenda for Mathematics Education, Volume 4*. Routledge.

Δημητρακοπούλου, Στ. Α., & Χρήστου, Κ. Π. (2018). Τα γράμματα-μεταβλητές: Πώς τα κατανοούν οι μαθητές και πώς εμφανίζονται στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Έρευνα Στη Διδακτική Των Μαθηματικών*, 11, 31–52.

Χρήστου, Κ. Π., & Βοσνιάδου, Σ. (2009). Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων—Μια διδακτική παρέμβαση. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή, & Γ. Φεσάκης (Επ.), *Πρακτικά από το 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (pp. 229–308), Ρόδος, Ελλάδα, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΛΟΓΟΥ ΕΝΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΣΤΕΙΡΟΥ Ή ΓΟΝΙΜΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ;

Αθανασίου Γωγώ, Κιούλου Μαρία, Σαντοριναίου Παναγιώτα, Τζεφριού Ευρυδίκη

Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

athanasiou.gogo@gmail.com, mariakioulou@outlook.com, p.santorinaiou@gmail.com, evitzefriou@gmail.com

Η παρούσα εργασία μελετά τις ερωτήσεις που θέτει ένας εκπαιδευτικός Πειραματικού Γυμνασίου στην εξ αποστάσεως διδασκαλία των μαθηματικών, ως πρακτική διαμόρφωσης του λόγου στη διαδικτυακή τάξη. Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης της διδασκαλίας του, η οποία, σε μία πιλοτική έρευνα, παρουσίασε χαρακτηριστικά άξια διερεύνησης. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω παρατηρήσεων τριών διδακτικών ωρών και συνέντευξης του ίδιου και αναλύθηκαν με τη μέθοδο της θεματικής ανάλυσης. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν το πώς οι προκλήσεις του πρωτόγνωρου πλαισίου μπορούν να μετατραπούν σε ευκαιρίες δημιουργίας ενός γόνιμου περιβάλλοντος μάθησης μαθηματικών και επικοινωνίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πανδημία της νόσου COVID-19 έχει επηρεάσει σημαντικά την εκπαίδευση με διάφορους τρόπους. Ο κόσμος της μάθησης και της διδασκαλίας άλλαξε ριζικά, με την εκπαίδευση να βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην τεχνολογία. Η απρόσμενη, «αναγκαστική» και γρήγορη μετάβαση από την πρόσωπο με πρόσωπο, στην εξ αποστάσεως διδασκαλία, έχει επιφέρει σημαντικές αλλαγές, περιορισμούς αλλά και ευκαιρίες που οδηγούν τον εκπαιδευτικό να προσαρμόσει τις διδακτικές του πρακτικές, χρησιμοποιώντας διαφορετικά εργαλεία, με σκοπό να διατηρήσει ενεργή τη μαθησιακή διαδικασία. Στο νέο αυτό πλαίσιο, ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το πώς διαχειρίζεται ο εκπαιδευτικός τον λόγο της τάξης και πως διαμορφώνονται οι ερωτήσεις του ως μία από τις βασικότερες πρακτικές λόγου. Η σημασία των ερωτήσεων του εκπαιδευτικού, ως συστατικό στοιχείο του λόγου στην τάξη, είναι πλήρως αποδεκτή στην ερευνητική και εκπαιδευτική κοινότητα (DeJarnette et al., 2020). Η πρακτική των ερωτήσεων, αφενός, προάγει το είδος της συζήτησης και επικοινωνίας που μπορεί να οδηγήσει στη μάθηση και αφετέρου, ως διδακτικό εργαλείο, αποτελεί μία στρατηγική παρακίνησης και πρόκλησης των σκέψεων των μαθητών, που οδηγούν με τη σειρά τους σε αλληλεπίδραση μέσα στην τάξη (Shahrill & Clarke, 2014). Στην παρούσα ερευνητική εργασία μελετώνται και αναλύονται οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας. Δεν επιδιώκεται παράλληλη σύγκριση με την δια ζώσης διδασκαλία αλλά γίνεται προσπάθεια μελέτης: των ερωτήσεών του ως διδακτικό εργαλείο, όπως διαμορφώνονται από το λόγο του και το πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας των μαθηματικών και του πώς ο ίδιος υπερασπίζεται τις αποφάσεις που διαμορφώνουν την πρακτική λόγου του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού θεωρούνται ένα σημαντικό διδακτικό εργαλείο από την ερευνητική και εκπαιδευτική κοινότητα. Ως ερώτηση ορίζεται μια διερευνητική έκφραση ή μια έκφραση που απαιτεί μία απόκριση-αντίδραση (Aizikovitch-Udi et al., 2013). Η έρευνα σχετικά με τις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού στην τάξη των μαθηματικών, αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο η ερώτηση αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης πρακτικής κατασκευής μαθηματικών νοημάτων αλλά και στο πώς οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με το πότε να θέσουν μία ερώτηση ή πότε να παρέχουν μία πληροφορία (DeJarnette et al., 2020). Μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση γίνεται αντιληπτό ότι οι περισσότερες έρευνες σχετικά με τις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού επικεντρώνονται στην κατηγοριοποίησή τους σχετικά με το γνωστικό αποτέλεσμα που επιφέρουν. Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε στη μελέτη των ερωτήσεων ως πτυχή της πρακτικής λόγου (discursive practice) του εκπαιδευτικού, σε ένα πρωτόγνωρο για τα σχολικά δεδομένα πλαίσιο, αυτό της εξ αποστάσεως διδασκαλίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Υπό τις συνθήκες της πανδημίας Covid-19, ο κόσμος της διδασκαλίας και της μάθησης άλλαξε δραματικά και στηρίχθηκε εξ ολοκλήρου στην τεχνολογία (Engelbrecht et al., 2020). Τη στιγμή που η κοινωνική αποστασιοποίηση ενθαρρύνεται, είναι κρίσιμο να δώσουμε σημασία στη διατήρηση της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Engelbrecht et al., 2020). Καθηγητές και μαθητές, εργαζόμενοι από το σπίτι, έκαναν δραστικές αλλαγές στην παραδοσιακή διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση, αντίστοιχα (Engelbrech et al., 2020). Από τη μία στιγμή στην άλλη, οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να λάβουν αποφάσεις ως προς το πώς να υποστηρίξουν τους μαθητές τους στη συνέχιση της μαθησιακής διαδικασίας, ακόμα και από απόσταση.

Η πιο στοιχειώδης μορφή επικοινωνίας σε ένα τέτοιο πλαίσιο είναι ο προφορικός λόγος. Ο Vygotsky τόνισε τις κοινωνικοπολιτισμικές επιρροές στην ανάπτυξη των παιδιών και αναγνώρισε τη γλώσσα ως την κινητήρια δύναμη πίσω από τη γνωστική τους ανάπτυξη. Ο λόγος είναι ένα σημειωτικό σύστημα που οργανώνει, ρυθμίζει συγκεκριμένες κοινωνικές πρακτικές και παρέχει πόρους στους συμμετέχοντες ώστε να δημιουργήσουν νοήματα, να διαμορφώσουν ταυτότητες, να βιώσουν συναισθήματα και να υποστηρίξουν τις δράσεις τους (Evans et al., 2006).

Ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στη συζήτηση και στον συντονισμό του διαλόγου αφού σε ένα πλαίσιο αυτοσχεδιασμού καθορίζει το πλαίσιο της συζήτησης, παρέχει τη βάση του μαθηματικού περιεχομένου, θέτει κανόνες και αναθέτει ρόλους στους συμμετέχοντες. Τα παραπάνω συνδέονται με τις αποφάσεις του εκπαιδευτικού, για τις οποίες ο Schoenfeld (1998) αναφέρει ότι διαμορφώνονται από τις γνώσεις, τις αντιλήψεις, τους στόχους και τα σχέδιά του, τα οποία εξαρτώνται με τη σειρά τους από την οπτική του για το περιβάλλον διδασκαλίας (Gaspard & Gainsburg, 2020). Κατά τους Krussel, Edwards και Springer (2004) ο λόγος του εκπαιδευτικού ελίσσεται ανάλογα με το σκοπό του, τις συνθήκες και τα επικοινωνιακά και γνωστικά αποτελέσματα που επιφέρει (Springer & Dick, 2006). Οι Cirillo, Steele και Herbel-Eisenmann (2013) περιγράφουν ορισμένους ελιγμούς του λόγου του εκπαιδευτικού: πρόσκληση συμμετοχής (inviting student participation), αναδιατύπωση (revoicing), παύση (waiting), αίτημα αναδιατύπωσης (asking students to revoice), δημιουργία ευκαιριών συλλογισμού και εμπλοκής (probing a student’s thinking και creating opportunities to engage with another’s reasoning), με τους οποίους ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να διαμορφώσει ένα κλίμα επικοινωνίας μέσα στην τάξη.

Ένα βασικό μέρος της έρευνας περί του μαθηματικού λόγου μέσα στην τάξη αποτελεί η μελέτη σχετικά με τις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού. Τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μελέτη εναλλακτικών λειτουργιών των ερωτήσεων του εκπαιδευτικού, οι οποίες υποστηρίζουν το λόγο και την κατανόηση των μαθητών και υποδεικνύουν ότι οι ερωτήσεις μπορούν να εμπλέξουν μαθητές, δραστηριότητες και εργαλεία στη μαθηματική επιχειρηματολογία, να διαμορφώσουν ακαδημαϊκό λόγο και να κοινωνικοποιήσουν τους μαθητές σε μία ευρύτερη μαθηματική συζήτηση (Shein, 2012).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η συγκεκριμένη έρευνα αφορά στη μελέτη των ερωτήσεων που τίθενται από τον εκπαιδευτικό ως πρακτική λόγου στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, γίνεται μία προσπάθεια μελέτης του πώς ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τις ερωτήσεις και διαμορφώνει το λόγο της τάξης στο διαδικτυακό περιβάλλον με στόχο την εμπλοκή των μαθητών και πώς υπερασπίζεται τις αποφάσεις που αφορούν τη διαχείριση του λόγου του.

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης της διδασκαλίας ενός καθηγητή Μαθηματικών σε Πειραματικό Γυμνάσιο της Αθήνας. Για την επιλογή εστίασης της έρευνας λήφθηκε υπόψη μία πιλοτική παρακολούθηση του μαθήματός του, που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια μιας άλλης ερευνητικής εργασίας. Εκεί αναδείχθηκαν στοιχεία της διδασκαλίας του που αφορούν στο ερευνητικό μας πρόβλημα και επιτρέπουν περαιτέρω ανάλυση: ο διερευνητικός χαρακτήρας της διδασκαλίας του και ο τρόπος που επιλέγει να επικοινωνήσει και να εμπλέξει τους μαθητές του στη μαθησιακή διαδικασία.

Για τη συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε εξ αποστάσεως παρακολούθηση τριών διδακτικών ωρών σε τμήμα της Γ΄ Γυμνασίου ενώ ακολούθησε ημιδομημένη συνέντευξη του εκπαιδευτικού. Ως ερευνητικά εργαλεία επιλέχθηκαν οι σημειώσεις πεδίου και η απομαγνητοφώνηση της συνέντευξης. Η συνέντευξη διαμορφώθηκε με σκοπό την άντληση στοιχείων που τεκμηριώνουν και αποσαφηνίζουν τις πρακτικές λόγου του στη διδασκαλία.

Στην έρευνα, κρίθηκε σκόπιμη η ανάλυση των δεδομένων με τη θεματική ανάλυση. Τα δεδομένα οργανώθηκαν σε θεματικές οι οποίες παρουσιάζονται στους παρακάτω θεματικούς χάρτες:

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των δεδομένων της παρατήρησης αναδεικνύει τέσσερις θεματικές που χαρακτηρίζουν τις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού, όπως αυτές διαμορφώνονται στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας. Οι θεματικές ερμηνεύονται σε παραλληλία με τα λεγόμενά του. Μέσα από την ανάλυση της συνέντευξης, εκδηλώθηκαν **στοιχεία της ταυτότητας του εκπαιδευτικού**, όπως οι στάσεις του περί διδασκαλίας των μαθηματικών, οι αντιλήψεις του για την κουλτούρα της τάξης και η ενσυναίσθησή προς τους μαθητές του τα οποία έχουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση και διαχείριση του λόγου του μέσα στην τάξη. Συμπληρωματικά, βασικός παράγοντας στη διαμόρφωση των αποφάσεων γύρω από το λόγο του αποτελεί το **πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας**, το οποίο περιλαμβάνει την ανατροφοδότηση που λαμβάνει μέσα από αυτό, τα τεχνικά ζητήματα που προκύπτουν, τις στιγμιαίες αλλαγές και τη διατήρηση της ποιότητας καθώς και το πώς επαναπροσδιορίζονται οι στόχοι του μαθήματος μέσα στο νέο αυτό πλαίσιο. Ένα από τα μοτίβα των ερωτήσεων του εκπαιδευτικού που παρατηρήθηκαν είναι οι **ερωτήσεις που διαμορφώνονται λόγω του πλαισίου** όπως παρουσιάζονται παρακάτω:

Επεξήγηση κωδικού	**Απόσπασμα**
Τεχνικές ερωτήσεις λόγω πλαισίου - βεβαίωση παρουσίας	*Η Έλενα ακούει; Έλενα;* *Τώρα πρέπει να πω ποια Έλενα…Η…(λέει το επώνυμο)*
	Παιδιά με ακούτε με καθυστέρηση; Γιατί εγώ σαν να ακούω με καθυστέρηση…
Διαδοχικές ερωτήσεις μεταξύ σιωπών	*Μπορεί κάποιος να κάνει τις πράξεις; (σιωπή)* *Έλα να δούμε κιόλας πάλι κάτι… Κωνσταντίνε τι λες; (σιωπή)* *Κωνσταντίνε; (σιωπή)* *Μας ακούς Κωνσταντίνε; (σιωπή)* *Ας πούμε 7χ-3χ πόσο κάνει; (σιωπή)* *Η Καρολίνα τι λέει;*
Ερωτήσεις αποσαφήνισης των λεγόμενων των μαθητών λόγω πλαισίου	*Κάτσε κάτσε αυτό τι…; Προσθέτεις αυτά; Ε;*
	Ωραία, θα γράψουμε 1η, 2η, 3η, 4η και να γράψουμε 1η ρίψη Κ, Γ αυτό δε λες;

Όπως υποστηρίζεται από τα λεγόμενά του, οι ερωτήσεις αυτές φαίνεται, κατά κύριο λόγο, να μην είναι τυχαίες. Οι τεχνικές ερωτήσεις που προκύπτουν λόγω του πλαισίου συνδέονται άμεσα με τα τεχνικά ζητήματα που επικαλείται, όταν ερωτάται για τις προκλήσεις της εξ αποστάσεως διδασκαλίας: «*Ερ: Ποιες προκλήσεις θα λέγατε ότι αντιμετωπίζετε στην εξ αποστάσεως διδασκαλία; Εκπ: […] και το τρίτο είναι τα τεχνικά θέματα*». Επίσης, οι διαδοχικές ερωτήσεις μεταξύ σιωπών ερμηνεύονται ως ένας μηχανισμός διατήρησης της ροής του μαθήματος. Όπως αναφέρει, «*Στην τάξη η ροή του μαθήματος, είναι πιο ζωντανή, πιο αυθόρμητη, μετά (στην εξ αποστάσεως) χάνεται αυτό*». Ερμηνεύοντας τα λεγόμενά του, οι ερωτήσεις αποσαφήνισης λόγω πλαισίου προκύπτουν εξαιτίας της απώλειας της εικόνας: «*Στην τάξη μπορείς να πάρεις πολύ* *περισσότερες πληροφορίες από κάτι που βλέπεις. Τώρα είναι αρκετά δύσκολο. Είναι πλεονέκτημα στη δια ζώσης όταν κάνεις διάλογο με τους μαθητές, παίρνεις πιο άμεσο feedback, το οποίο το ερμηνεύεις και πιο εύκολα».*

Μία ακόμα θεματική που αναδύθηκε μέσα από τα δεδομένα των παρατηρήσεων και φαίνεται να αποτελεί μία πρακτική λόγου του εκπαιδευτικού είναι **οι ερωτήσεις που αφορούν στη διαχείριση του λόγου της τάξης**. Οι ερωτήσεις αυτές είναι οι εξής:

Επεξήγηση κωδικού	Απόσπασμα
Δίνει το λόγο directly	*Τώρα να μας πει ο Στέλιος ας πούμε μετά πόσο βγαίνει…*
	Βικτώρια;(παύση) Α το κατέβασε (σήκωνε χέρι) Βασιλεία; Για πες…
Ενθάρρυνση όλης της τάξης	*Ποιος μπορεί να μου πει μία έκβαση; (παύση)*
	Ωραία. Το άλλο; (παύση) Ποιος θα μας πει; Έλα λίγο ρε παιδιά, ζάρια είναι! Σιγά! Θέλουμε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 10. Πώς τη φαντάζεστε αυτή τη ζαριά δηλαδή ρε παιδί μου;

Η απευθείας ανάθεση του λόγου είναι μία πρακτική λόγου, η οποία εμφανίζεται τόσο στη διά ζώσης διδασκαλία όσο και στην εξ αποστάσεως. Για το συγκεκριμένο εκπαιδευτικό, ο ρόλος των ευθειών ερωτήσεων στην εξ αποστάσεως διδασκαλία παίρνει μία άλλη διάσταση, αφού του επιτρέπει να αξιολογεί με μεγαλύτερη συνέπεια. Όπως ισχυρίζεται: *«Στη δια ζώσης έχεις πιο δύσκολα έλεγχο του προγραμματισμού που βασίζεται σε προηγούμενες μέρες ποιον θα ρωτήσεις και τι. Στην εξ αποστάσεως έχω τον υπολογιστή και μου δίνει πιο άμεση ανατροφοδότηση. Εντάξει και στη τάξη έχω τα χαρτιά μου αλλά δεν είναι τόσο διαχειρίσιμα ή τα παιδιά με βλέπουν ότι κάτι ψάχνω»*. Σε μία προσπάθειά του, επομένως, να συγκρίνει την ίδια πρακτική αξιολόγησης και στα δύο διαφορετικά πλαίσια, θεωρεί ότι η εξ αποστάσεως διδασκαλία ευνοεί την ισότιμη αξιολόγηση όλων των μαθητών, καθώς μπορεί να έχει εποπτεία της επίδοσης του κάθε μαθητή σε πραγματικό χρόνο. Αναφέρει χαρακτηριστικά: «*Αν κάποιον τον έχεις ρωτήσει 30 φορές το βλέπεις πιο ευκολά στην εξ αποστάσεως, ενώ στην τάξη μπορείς να παρασυρθείς από τη ροή του μαθήματος. Είναι πιο δύσκολο να διατηρήσεις την ισομέρεια της εξέτασης κατά τη ροή του μαθήματος».*

Δε θα μπορούσε κανείς να μην αναλογιστεί την επιρροή που ασκεί η ταυτότητά του ως εκπαιδευτικός σε αυτές τις επιλογές του. Φανερώνει το κριτήριο με το οποίο επιλέγει το μαθητή που καλεί, λαμβάνει υπόψη του τόσο το γνωστικό τους υπόβαθρο, όσο και την ιδιοσυγκρασία τους ή ψυχολογικούς παράγοντες, αλλά και τη συμπερίληψη όλων των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. *«Πρέπει να τους ρωτήσω όλους, αυτό βοηθά και εμένα να βλέπω ποιους δεν έχω ρωτήσει. Αν ρωτήσεις μόνο όσους σηκώνουν χέρι, μετά από κάποιο καιρό, κάποιοι δεν θα έχουν ερωτηθεί καθόλου. Σίγουρα πρέπει να ρωτήσω και όσους δεν σηκώνουν για να μην νιώσουν ότι δεν τους αφορά το μάθημα. Δεν πρέπει να ρωτήσω κάτι δύσκολο με κριτήριο το χαρακτήρα τους. Κάποιος ντροπαλός ή κάποιος που ίσως πει κάτι λάθος παρότι προσπαθεί, μετά θα κάνει μια βδομάδα να ξαναμιλήσει...»*

Οι ερωτήσεις ενθάρρυνσης της τάξης χαρακτηρίζονται έτσι διότι συχνά αφορούν σε σύντομες και όχι απαιτητικές γνωστικές απαντήσεις και αποσκοπούν στη διατήρηση της ροής κατά την εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας. Ο εκπαιδευτικός αναφέρει: *«Θα προσπαθήσω να ρωτήσω κάτι που θα απαντήσει. Δεν είναι δύσκολο να προσπαθήσεις να τον παροτρύνεις»*. Η πρωτοβουλία του για παρότρυνση προκύπτει και μέσα από την ενσυναίσθηση προς τους μαθητές του, αφού αντιλαμβάνεται τις διακυμάνσεις της διάθεσης που προκύπτουν από την ιδιαίτερες συνθήκες κοινωνικής αποστασιοποίησης: *«Τώρα τελευταία νιώθω ότι υπάρχει μια κούραση και μια αναμονή να ανοίξουμε. Υπάρχει μια κάμψη»*.

Λόγω των ιδιαίτερων συνθηκών, μέσα στη διδασκαλία του, διαμορφώνει **ερωτήσεις με σκοπό την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών** όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Επεξήγηση κωδικού	**Απόσπασμα**
Αίτημα για αναδιατύπωση στα λεγόμενα συμμαθητή	*Καταλάβατε γιατί το επέλεξε η Έλενα αυτό; Ποιος μπορεί να μας το πει με δικά του λόγια να δούμε αν το κατάλαβε;*
Ερωτήσεις συμφωνίας ή διαφωνίας με συμμαθητή	*Γιατί 6^2; Συμφωνείτε; Ελευθερία τι λες;*
	Ωραία Βάλια τι λες; Συμφωνείς με το 11;
Ανάθεση ρόλου καθηγητή σε κάποιο μαθητή	Μαθ: *Κύριε τι είναι οι εκβάσεις;* Καθ: *Να, θα μας πει ο Στέλιος.*
	Πες του Αλέξανδρου τι να αντικαταστήσει. Πες την ιδέα σου να το κάνει. Όπως του έλεγα τώρα εγώ.

Σε ερώτηση ως προς τη διαφοροποίηση των στόχων του στην εξ αποστάσεως διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός καθιστά σαφές ότι η επίτευξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών είναι ένας βασικός του στόχος: *«Τώρα έχεις και τον στόχο της αλληλεπίδρασης μεταξύ τους γιατί το έχεις πιο δύσκολα (στην εξ αποστάσεως). Το έχεις πιο πολύ στο μυαλό σου, είναι πολύ υψηλά στην ατζέντα σου πλέον και σε απασχολεί πιο πολύ»*. Οι συγκεκριμένες πρακτικές δεν επιλέγονται τυχαία, αλλά προκύπτουν ως αποτέλεσμα καθιερωμένων στάσεων περί διδασκαλίας και κουλτούρας της τάξης, όπως φαίνεται και από τα λεγόμενά του: *«Προσπαθώ να τους εμπλέξω ή με τη συνεργασία ή δίνοντας τους το λόγο ή κάποιον που* *πετάγεται και απαντά απερίσκεπτα, τον φέρνω σε ήπια αντιπαράθεση με έναν άλλον, για να καταλάβει ότι είναι υπεύθυνος για αυτά που λέει».*

Φυσικά, όπως και οι προηγούμενες, οι περισσότερες ερωτήσεις που προκύπτουν μέσα στην τάξη των μαθηματικών έχουν τις ρίζες τους σε μία γνωστική βάση. Επομένως, στο λόγο του ο εκπαιδευτικός διαμορφώνει **ερωτήσεις που αποσκοπούν σε έναν ορθό συλλογισμό** όπως:

Επεξήγηση κωδικού	**Απόσπασμα**
Ερωτήσεις καθαρά γνωστικού περιεχομένου	*Όταν κάνουμε αντικατάσταση, τι προτιμάμε; Ποιος μπορεί να μας το κάνει πιο **γενικό**;*
	Προσέξτε με καλά τώρα εδώ. Τι γωνία θέλετε να σχηματιστεί για το ισόπλευρο; Πόσες μοίρες;
Ερωτήσεις διορθωτικού ύφους	Μαθ: *Προτιμάμε αυτόν που έχει το μικρότερο συντελεστή* Καθ: *Το μικρότερο;*
	Καθ: *Για να δούμε σε ποιες εκβάσεις έχει έρθει μία τουλάχιστον φορά Κ…* Μαθ: *Μια στις οκτώ ;* Καθ: *Κάτσε λίγο κοίτα τουλάχιστον μία φορά Κ…σημαίνει;*
Ερωτήσεις επεξήγησης συλλογισμού από τον ίδιο το μαθητή	*Γιατί πιστεύεις ότι είναι 120; Είναι τυχαίο ή υπάρχει ένας κανόνας;*
	Πώς το βρήκες αυτό;

Ο εκπαιδευτικός διατηρεί και στην εξ αποστάσεως διδασκαλία ψηλά στην ατζέντα του τους γνωστικούς στόχους που θέτει. Η επίτευξη αυτών βρίσκεται σε άμεση συνάρτηση με την αλληλεπίδραση, γεγονός που αποκαλύπτει ευρύτερες στάσεις του περί διδασκαλίας: *«Κάποια προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι πυρηνικά και πρέπει σχεδόν όλοι να τα πετύχουν για αυτό καλό είναι να προκύπτουν μέσα από συζήτηση και αλληλεπίδραση».* Ο ίδιος καλλιεργεί μία κουλτούρα μάθησης ως κοινωνική διαδικασία μέσω της οποίας εμπλέκονται συλλογικά όλα τα μέλη της κοινότητας της τάξης: *«Τι σημαίνει καταλαβαίνω; Να υπάρχει ένα κοινό νόημα εκφρασμένο στα μαθηματικά και να το αποδέχονται όλοι στην τάξη ως σωστό».*

Οι ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου που θέτει στους μαθητές έχουν πολύ συχνά το χαρακτηριστικό της σκαλωσιάς (scaffolding), μέσω του οποίου ο εκπαιδευτικός με πολλαπλές ερωτήσεις αποφεύγει να είναι απλός διεκπεραιωτής και προσπαθεί να οδηγήσει τους μαθητές του στη μαθηματική γνώση, χωρίς να προδίδει τις περισσότερες φορές την απάντηση: *«Αν επιβεβαιώσεις σε κάποιον ότι κάτι είναι σωστό, νομίζω απαντάς μόνο στον ίδιο. Το αν είναι σωστό θα φανεί μέσα από συζήτηση».* Μέσω διορθωτικών ερωτήσεων ή αιτήματος επεξήγησης του συλλογισμού τους, καλεί τους μαθητές *«να νιώθουν υπεύθυνοι για ένα ερώτημα που πρέπει να απαντήσουν»,* με σκοπό να εξασφαλίσει και ο ίδιος ότι έχουν κατανοήσει το μαθηματικό αντικείμενο.

Εν γένει, οι περισσότερες ερωτήσεις που διατυπώνονται από τον ίδιο είναι αποτέλεσμα μίας κουλτούρας που έχει επιδιώξει ώστε οι μαθητές να είναι μεν αφοσιωμένοι στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά και συνδιαμορφωτές της γνώσης. *«Προσπαθώ να έχουν το νου τους εδώ. Αυτό δεν γίνεται από τη μια μέρα στη άλλη, πρέπει να έχεις δημιουργήσει την κουλτούρα ότι αυτός κάτι θα ρωτήσει, που δεν είναι δύσκολο να απαντηθεί, αρκεί να είμαστε εδώ. Οπότε χτίζεις τέτοιες συνθήκες».* Επιπλέον, διακρίνοντας τους περιορισμούς της εξ αποστάσεως διδασκαλίας θίγει αρκετές φορές το ζήτημα των αποφάσεων που λαμβάνει για αλλαγές κατά τη διδασκαλία και την επιρροή αυτών στην ποιότητα: *«Όταν αλλάζεις κάτι στο εξ αποστάσεως αυτό με το οποίο το αντικαθιστάς ίσως δεν έχει ίδια ποιότητα».*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε πρακτικές λόγου του εκπαιδευτικού που εντοπίζονται και στη βιβλιογραφία και έρχεται να επιβεβαιώσει ήδη υπάρχοντα ευρήματα (Herbel-Eisenmann et al., 2013) ακόμα και στο νέο αυτό πλαίσιο. Παράλληλα εντοπίστηκαν πρακτικές λόγου που σχετίζονται άμεσα και δημιουργούνται λόγω του πλαισίου. Παρά τις αντικειμενικές δυσκολίες που δημιουργούνται λόγω του καινούριου πλαισίου, φαίνεται ότι υπάρχει η δυνατότητα ο εκπαιδευτικός να αναπτύξει ένα δίαυλο επικοινωνίας με τους μαθητές του, καλλιεργώντας την αλληλεπίδραση. Ο εκπαιδευτικός δεν είναι ένας απλός συμμετέχων στη συζήτηση μέσα στη μαθηματική τάξη αλλά έχει σημαντικό ρόλο στη διευκόλυνση και το συντονισμό του διαλόγου. Διαμορφώνει το σκηνικό της συζήτησης στην τάξη παρέχοντας το μαθηματικό περιεχόμενο και τα εργαλεία, θέτοντας τους κανόνες και τους ρόλους των συμμετεχόντων και παίρνοντας ενεργά μέρος και ο ίδιος σε ένα πλαίσιο αυτοσχεδιασμού (Springer & Dick, 2006). Τα λεγόμενα του εκπαιδευτικού επιβεβαιώνουν τις παραπάνω προκλήσεις και τους περιορισμούς που γεννά το νέο πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας, ωστόσο οι πρακτικές που χρησιμοποιεί αποτελούν τεκμήριο ύπαρξης όχι μόνο της αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας μέσα στη διαδικτυακή τάξη, αλλά και της δυνατότητας μαθηματικής διερεύνησης στη μαθησιακή διαδικασία. Σε αυτό το πλαίσιο, η ταυτότητα του εκπαιδευτικού αναδεικνύεται σε μεγαλύτερο βαθμό και επηρεάζει έντονα τη διδασκαλία. Πτυχές της ταυτότητάς του, όπως η ενσυναίσθηση, η συμπερίληψη, η ισότιμη αντιμετώπιση, η κουλτούρα της υπευθυνότητας που καλλιεργεί, η συνέπεια μεταξύ λεγόμενων και πράξεων αποτελούν στοιχεία που συμβάλλουν καθοριστικά στη διατήρηση της ποιότητας της εξ αποστάσεως διδασκαλίας.

Συμπερασματικά, παρόλο που το νέο αυτό πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας «γεννήθηκε» λόγω της πανδημίας φαίνεται να εγκαθιδρύεται στη σύγχρονη εκπαιδευτική κοινότητα και θα μπορούσε να αποτελέσει εφαλτήριο αναδιαμόρφωσης των διδακτικών πρακτικών. Μέσα στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης, η παρούσα έρευνα θα μπορούσε να επεκταθεί με τη μελέτη της διαμόρφωσης του λόγου στη μαθηματική τάξη από τη σκοπιά των μαθητών σε συνάρτηση με τις πρακτικές λόγου του εκπαιδευτικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aizikovitch-Udi, A., Clarke, D., & Star, J. (2013). Good questions or good questioning: An essential issue for effective teaching. In *CERME8: 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Antalya, Turkey*.

DeJarnette, A. F., Wilke, E., & Hord, C. (2020). Categorizing mathematics teachers’ questioning: The demands and contributions of teachers’ questions. *International Journal of Educational Research*, *104*, 101690.

Engelbrecht, J., Llinares, S., & Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *Zdm*, *52*(5), 825-841.

Engelbrecht, J., Borba, M. C., Llinares, S., & Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed?. *Zdm*, *52*(5), 821-824.

Evans, J., Morgan, C., & Tsatsaroni, A. (2006). Discursive positioning and emotion in school mathematics practices. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 209-226.

Gaspard, C., & Gainsburg, J. (2020). Abandoning questions with unpredictable answers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(6), 555-577.

Herbel-Eisenmann, B. A., Steele, M. D., & Cirillo, M. (2013). (Developing) teacher discourse moves: A framework for professional development. *Mathematics Teacher Educator*, *1*(2), 181-196.

Shahrill, M., & Clarke, D. J. (2014). Brunei Teachers' Perspectives on Questioning: Investigating the Opportunities to" Talk" in Mathematics Lessons. *International Education Studies*, *7*(7), 1-18.

Shein, P. P. (2012). Seeing with two eyes: A teacher's use of gestures in questioning and revoicing to engage English language learners in the repair of mathematical errors. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(2), 182-222.

Springer, G. T., & Dick, T. (2006). Connecting Research to Teaching: Making the Right (Discourse) Moves: Facilitating Discussions in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Teacher*, *100*(2), 105-109.

ΑΠΟΨΕΙΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ Π.Ε. ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΕ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Ζώρζος Μιχαήλ, Αυγερινός Ευγένιος

ΠΤΔΕ Πανεπιστήμιο Αιγαίου

pred18003@aegean.gr, eavger@aegean.gr

Οι Πιθανότητες είναι ένας από τους σημαντικότερους τομείς των μαθηματικών με άμεση εφαρμογή στις καθημερινές δραστηριότητες. Δύσκολα θα βρει κάνεις επιστήμη που να απέχει από την χρήση πιθανοτικών εννοιών ή διαδικασιών. Μάλιστα, η θεωρία των Πιθανοτήτων χρησιμοποιείται στην καθημερινότητα σε απλές δραστηριότητες, όπως η λήψη μιας απόφασης ή η κατανόηση φαινομένων που εμφανίζουν αβεβαιότητα. Η εργασία αυτή, μέσα από μια έρευνα σε 143 φοιτητές, κάνει μια προσπάθεια να αναδείξει την χρησιμότητα των Πιθανοτήτων στην καθημερινή ζωή. Επίσης, προσπαθεί να φανερώσει αντιλήψεις σχετικά με την χρησιμότητα της θεωρίας σε καθημερινά πλαίσια, αλλά και να αποκαλύψει την επιρροή που ασκούν οι πιθανότητες σε έναν άνθρωπο για μια καθημερινή κατάσταση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά γενικότερα μπορούν να θεωρηθούν ως ένα ανθρώπινο δημιούργημα, που στόχο έχουν την μελέτη και την εξήγηση φαινομένων του πραγματικού κόσμου (Wilder, 1986). Μάλιστα, ο μεγάλος μαθηματικός Laplace το 1986, εξέφρασε μέσα από μια εργασία του, μια άποψη που βρίσκει πολλούς υποστηρικτές μέχρι και σήμερα, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει επιστήμη αντάξια της χρησιμότητας των μαθηματικών που την κατέστησε πολύ γρήγορα ως δημόσια διδασκόμενη επιστήμη.

Ο μέσος άνθρωπος ωστόσο, αδυνατεί πολλές φορές να κατανοήσει τις μαθηματικές επιρροές σε καθημερινά φαινόμενα και καταστάσεις. Αρκετοί, αντιλαμβάνονται, ότι η καλλιέργεια μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως ο αλγοριθμικός τρόπος σκέψης, η λογική και η αφαιρετική ικανότητα αποτελούν άμεσες συνέπειες της μαθηματικής εκπαίδευσης, αλλά δεν μπορούν να συνδέσουν τις μαθηματικές θεωρίες με την καθημερινότητα τους (Drijvers et al., 2019).

Οι Πιθανότητες αποτελούν τον κατεξοχήν κλάδο των μαθηματικών που η απήχηση του σε άλλες επιστήμες και στοχαστικές διαδικασίες καθημερινής φύσεως, τον οδηγούν στη κορυφή της λίστας των χρηστικών μαθηματικών (Batanero et al., 2016). Το αντικείμενο της θεωρίας τους, πραγματεύεται την έρευνα των νόμων που διέπουν τα στοχαστικά φαινόμενα (Χαραλαμπίδης, 2009) και θεωρείται από πολλούς, ως ο επιστημονικός τομέας που εμπλουτίζει τα μαθηματικά ως σύνολο, λόγω των αλληλεπιδράσεων του με άλλες επιστήμες (Batanero et al., 2016).

ΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Οι Πιθανότητες μόλις από τις πρώτες βασικές τους έννοιες, εμφανίζουν την σημασία και τον άμεσο αντίκτυπο τους, στους διάφορους επιστημονικούς τομείς. Αποτελούν έναν κλάδο των μαθηματικών που σχετίζεται με την τυχαιότητα και το μέγεθος της βεβαιότητας για την πραγματοποίηση ενός γεγονότος (Batanero & Chernoff, 2017). Η χρήση τους, επιτρέπει περιγραφές φαινομένων του πραγματικού κόσμου, με ταυτόχρονες πιθανές προβλέψεις για την εξέλιξη και την πορεία των φαινομένων αυτών (Olofsson, 2015). Γεγονός που δικαιολογεί την πεποίθηση αρκετών ερευνητών, ότι οι πιθανότητες, μελλοντικά μπορούν να γίνουν ένα από τα σημαντικότερα πεδία της ανθρώπινης γνώσης (Ross, 2010).

Η σύνδεση της θεωρίας τους με τη στατιστική, την αβεβαιότητα, την πρόβλεψη, την λήψη μιας απόφασης ή ακόμα και την μοντελοποίηση στοχαστικών καταστάσεων, δημιουργεί ένα ισχυρό επιχείρημα στην ανάμιξή τους με άλλες επιστήμες (Borovcnik, & Kapadia, 2010). Ως συνέπεια αυτού, οι Πιθανότητες παρουσιάζονται συχνά αλληλένδετες με ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών σε πραγματικές καταστάσεις και φαινόμενα (Sofaer, Hoeting & Jarnevich, 2018).

Η ανάμιξη της θεωρίας με άλλες επιστήμες, μπορεί να περιγράφει με ποικίλα παραδείγματα τόσο σε καθημερινό (επαγγελματικές ή και μη δραστηριότητες), όσο και σε ερευνητικό επίπεδο (μελέτη φαινομένων) (Taylor, 2014). Γεγονός, που μαρτυράει μια δυσκολία περιγραφής του συνολικού φάσματος απήχησης της θεωρίας. Ωστόσο, δεν είναι δύσκολο να καταλάβει ο αναγνώστης την πολλαπλή ανταπόκριση της θεωρίας σε ένα πλήθος καταστάσεων που φαινομενικά είναι ασύνδετες. Λόγου χάρη, η θεωρία Πιθανοτήτων βρίσκει άμεση απήχηση στην μετεωρολογία και στις προβλέψεις των καιρικών συνθηκών (Piechota et. al., 2001). Επίσης, οι προβλέψεις αυτές έχουν άμεσο αντίκτυπο στην λήψη αποφάσεων, όπως για την απόφαση της κοινότητας για την έναρξη των αντιπλημμυρικών επιχειρήσεων κάθε έτος, την απόφαση του γεωργού για την φύτευση των προϊόντων του, την απόφαση σχετικά με την πραγματοποίηση ενός ταξιδιού ή ακόμα και πιο άμεσες αποφάσεις, όπως τα ρούχα που επιλέγει κάποιος να ντυθεί, ώστε να μην κρυώνει κατά την διάρκεια της ημέρας (Mylne, 2002). Γεγονός, που οδηγεί σε ένα συμπέρασμα για οικονομικές και κοινωνικές επιπτώσεις της θεωρίας μέσα από την χρήση της στην μετεωρολογία.

Η πιθανότητα μπορεί, όπως φαίνεται και στα παραπάνω παραδείγματα, να εμφανίσει εφαρμογές σε έναν τομέα και οι συνέπειες της να εμφανίσουν εφαρμογές της, σε έναν άλλο επιστημονικό τομέα. Επίσης, εδώ μπορούν να παρουσιαστούν και άλλα παραδείγματα, όπως η έρευνα για την δημιουργία των φαρμάκων και η πιθανότητα να σώσουν τον ασθενή (Singh, 2015). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να θέσει τον ιατρό σε μια διαδικασία πιθανοτικής σκέψης για το φάρμακο που θα πρέπει να επιλέξει για να χορηγήσει στον ασθενή (Cameron & Baldock, 1998). Αν η χορήγηση ενός συγκεκριμένου φαρμάκου δεν είναι επιτυχής, ο δικηγόρος θα πρέπει να υπερασπιστεί τον θεράποντα ιατρό, ισχυριζόμενος τις πιθανότητες για να μπορέσει να δικαιολογήσει την επιλογή του ιατρού για το συγκεκριμένο φάρμακο (Gill, 2018).

Συνέπεια των ανωτέρω, είναι η επίδραση της πιθανότητας σε φυσικές, κοινωνικές, ανθρωπιστικές και οικονομικές καταστάσεις, όπως επίσης και καταστάσεις υγείας. Ακόμα θα μπορούσε να σημειωθεί εδώ για να ενισχύσει την χρήση της θεωρίας σε άλλες επιστήμες, η χρήση της στην φυσική, στην χημεία (Batanero, Henry & Parzysz, 2005), στον αθλητισμό (Farrow & Reid, 2012), στην τεχνολογική εξέλιξη (Zabell, 2012), στην τεχνητή νοημοσύνη (Zabell, 2012) και στην μηχανική (Tait, 1993).

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Ο άνθρωπος από την φύση του προσπαθεί να προβλέψει γεγονότα και καταστάσεις. Συνήθως, αυτές οι προβλέπεις βασίζονται σε εμπειρικά δεδομένα ή σε παρόμοιες καταστάσεις της ζωής του, χωρίς όμως αυτό να εγγυείται την αποτελεσματικότητα τους (Murphy & Winkler, 1992). Αυτό συμβαίνει, λόγω της ύπαρξης της αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα επηρεάζει τις προβλέψεις και τις εκβάσεις των γεγονότων (Howard, 1998).

Η λήψη μιας απόφασης ανεξαρτήτως της σημαντικότητας της, δεν είναι μια απλή υπόθεση. Φυσικά, μια απόφαση που εμπεριέχει μεγάλο ρίσκο, είτε κοινωνικό, είτε οικονομικό, χρήζει μεγαλύτερης προσοχής (Best & Freund, 2018), ωστόσο δεν είναι λίγοι και αυτοί που πιστεύουν, ότι σήμερα εμφανίζεται σημαντική επιρροή των Πιθανοτήτων κατά την λήψη και πιο απλών αποφάσεων (Engel & Orthwein, 2018). Πιο συγκεκριμένα, μια απόφαση εύκολη ή δύσκολη, ακολουθείται από συγκεκριμένα αποτελέσματα σε μια μελλοντική κατάσταση. Στόχος του εκάστοτε ανθρώπου είναι να πετυχαίνει κάθε φορά τα βέλτιστα αποτελέσματα στις μελλοντικές καταστάσεις που θα του προκύψουν ως αποτέλεσμα της εν λόγο απόφασης.

Η πιθανοτικές γνώσεις και διαδικασίες, μπορεί να μην προβλέπουν την βέλτιστη απόφαση, ωστόσο εξοπλίζουν τον άνθρωπο με δεξιότητες ελαχιστοποίησης της αβεβαιότητας σε μια κατάσταση (Batanero & Chernoff, 2017). Μάλιστα, υπάρχει και η τάση να θεωρείται μια απόφαση αμερόληπτη, όταν βασίζεται στην θεωρία Πιθανοτήτων (Howard, 1998). Γεγονός, που υπερασπίζει τον ιατρό στο παράδειγμα που δόθηκε παραπάνω.

Η τελική απόφαση σε μια κατάσταση, οφείλει να εμπεριέχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό αξιοπιστίας και να μην επηρεάζεται από προσωπικές εμπειρίες που οδηγούν σε μεροληπτικές κρίσεις (Howard, 1998). Η στρατηγική λογική της θεωρίας, εφοδιάζει τον διδασκόμενο με ικανότητες λήψεις αποφάσεων στην καθημερινότητα του (Batanero & Chernoff, 2017) και όπως θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς, αποτελεί το καλύτερο μέσο αιτιολόγησης της απόφασης ενός ατόμου σε κάποιον άλλον (Batanero & Chernoff, 2017).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η συγγραφή της συγκεκριμένης έρευνας, πραγματοποιήθηκε λόγω της ανάγκης για την ανάδειξη της χρησιμότητας των Πιθανοτήτων σε καθημερινές διαδικασίες. Οι Πιθανότητες είναι ένας μαθηματικός τομέας που τα τελευταία χρόνια η ύλη της θεωρίας τους στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα βρίσκεται σε έναν παραγκωνισμό. Κατά συνέπεια, αυτή η εργασία στοχεύει τόσο στην αφύπνιση της εκπαιδευτικής κοινότητας για τη σημασία διδακτικής των Πιθανοτήτων στο δημόσιο σχολείο, όσο και στην ενημέρωση του εκάστοτε πολίτη για τα πλεονεκτήματα και τις επιρροές που εμφανίζει η χρήση της σε καθημερινές καταστάσεις.

Η έρευνα αυτή, αποτελεί μια ποσοτική έρευνα με πληθυσμό τους πρωτοετείς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Ρόδου. Ο ερευνητής δεν είχε κάποια σχέση με το δείγμα, το οποίο επιλέχτηκε με τυχαία δειγματοληψία και αποτελούνταν από 143 φοιτητές πρώτου έτους. Πιο συγκεκριμένα, 41 αγόρια και 102 κορίτσια, ηλικίας κατά μέσο όρο τα 19,5 έτη. Επίσης, σημαντικό είναι να σημειωθεί, για τις μαθηματικές και ειδικότερα τις πιθανοτικές γνώσεις των ερωτώμενων, ότι 96 άτομα δήλωσαν θεωρητική κατεύθυνση στην Γ Λυκείου, 20 θετική κατεύθυνση, 22 κατεύθυνση οικονομίας και πληροφορικής, ενώ υπήρχαν και 5 άτομα που δεν απάντησαν σε αυτήν την ερώτηση.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν κατά τον σχεδιασμό της έρευνας, παρουσιάζονται παρακάτω.

1. Αντιλαμβάνονται οι μελλοντικοί δάσκαλοι την χρησιμότητα των Πιθανοτήτων στη καθημερινότητα τους;
2. Εμπιστεύονται τις Πιθανότητες για μια απόφαση που εμπεριέχει ρίσκο και αβεβαιότητα;
3. Επηρεάζει η γνώση της πιθανότητας μια απόφαση τους;

Τα δεδομένα της έρευνας, συλλέχτηκαν μέσω ερωτηματολογίου, το οποίο κατασκευάστηκε από τον ερευνητή για τις ανάγκες της έρευνας. Το ερωτηματολόγιο αυτό, μοιράστηκε στους φοιτητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών του πρώτου εξαμήνου, πριν από την έναρξη της ύλης των Πιθανοτήτων στο εν λόγο μάθημα. Η δομή του ακολουθεί τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω. Συνεπώς, το ερωτηματολόγιο αρχίζει συλλέγοντας τα γενικά στοιχεία των ερωτώμενων, σε ηλικία, φύλο και κατεύθυνση στην Γ τάξη του Λυκείου και συνεχίζει με κάποιες ερωτήσεις που παρουσιάζονται με πεντάβαθμη κλίμακα Likert. Τέλος, το ερωτηματολόγιο ολοκληρώνεται με κάποιες ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, οι οποίες στοχεύουν να διερευνήσουν το επίπεδο επιρροής των πιθανοτήτων σε καθημερινές αποφάσεις των συμμετεχόντων.

Η ολοκλήρωση της συλλογής των δεδομένων, οδήγησε την έρευνα στην κωδικοποίηση των απαντήσεων και στο επόμενο στάδιο, της ανάλυσης των δεδομένων. Η στατιστική τους ανάλυση – επεξεργασία, πραγματοποιήθηκε κυρίως με το πρόγραμμα στατιστικής ανάλυσης SPSS, ωστόσο χρησιμοποιήθηκε ενισχυτικά και το πρόγραμμα Microsoft Excel.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης, παρουσιάζονται σε πίνακες, οι οποίοι προσαρμόστηκαν με τρόπο που βοηθάει τον αναγνώστη να παρακολουθήσει τόσο το ερώτημα, όσο και το αποτέλεσμα της ερώτησης. Στους πίνακες εμφανίζονται οι συχνότητες των απαντήσεων των συμμετεχόντων, αλλά και τα αντίστοιχα ποσοστά τους μέσα στην παρένθεση.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται, ότι περισσότεροι από τους μισούς φοιτητές πιστεύουν, ότι η πιθανότητα δεν επηρεάζει ιδιαίτερα την καθημερινότητα τους (καθόλου 29,4% και λίγο 33,6%). Στην λήψη μιας σημαντικής απόφασης, θετικά απάντησαν πάνω από τους μισούς φοιτητές (πολύ 25,9% και πάρα πολύ 25,2%). Σημαντικό, είναι το ποσοστό, όσων πιστεύουν, ότι οι πιθανότητες εμφανίζονται μόνο στον τζόγο (καθόλου 61,5%). Επίσης, ας σημειωθεί ακόμα, ότι οι περισσότεροι φοιτητές θεωρούν πως αν είχαν περισσότερες γνώσεις για την θεωρία της πιθανότητας, θα επηρεαζόταν η καθημερινότητα τους (αρκετά 29,4%, πολύ 26,6% και πάρα πολύ 13,3%).

Πιθανότητες και καθημερινότητα	**Καθόλου**	**Λίγο**	**Αρκετά**	**Πολύ**	**Πάρα πολύ**	**Κενό**
Υπάρχει επιρροή;	32 (29,4%)	48 (33,6%)	38 (26,6%)	14 (9,8%)	10 (7%)	1 (0,6%)

Επηρεάζουν στην λήψη μιας σημαντικής απόφασης;	5 (3,5%)	19 (13,3%)	42 (29,4%)	37 (25,9%)	36 (25,2%)	4 (2,8%)
Οι Πιθανότητες είναι μόνο στον τζόγο	88 (61,5%)	34 (23,8%)	11 (7,7%)	5 (3,5%)	2 (1,4%)	3 (2,1%)
Αν είχα περισσότερες γνώσεις πιθανοτήτων σίγουρα θα επηρέαζαν την καθημερινότητα μου	16 (11,2%)	28 (19,6%)	42 (29,4%)	38 (26,6%)	19 (13,3%)	0 (0%)

Πίνακας 1: Επιρροή της θεωρίας Πιθανοτήτων στην καθημερινότητα

Ο πίνακας που ακολουθεί πραγματεύεται τα αποτελέσματα μιας ερώτησης, όπου έθετε τους φοιτητές σε μια κατάσταση επιλογής στοιχήματος ενός μεγάλου ποσού, σε ένα παιχνίδι τένις ανάμεσα σε ένα φίλο τους και έναν αντίπαλο που υπερτερούν οι πιθανότητες νίκης του. Είναι φανερό εδώ, ότι οι περισσότεροι φοιτητές (57,3%) θα σκέφτονταν συναισθηματικά και όχι πιθανοτικά.

	Συναίσθημα	**Πιθανότητες**	**Κενό**
Στοίχημα	82 (57,3%)	58 (40,6%)	3 (2,1%)

Πίνακας 2: Στοίχημα με βάση το συναίσθημα ή την πιθανότητα

Παρακάτω ακολουθούν τρεις πίνακες, που πραγματεύονται μια άσκηση, στην οποία ο φοιτητής έχει κερδίσει 1000 ευρώ και μπορεί να συνεχίσει για να τα κάνει 5000 ευρώ. Αρχικά, ο φοιτητής καλείται να απαντήσει αν θα συνέχιζε για να πολλαπλασιάσει το ποσό του, χωρίς να του δοθεί κάποια παραπάνω πληροφορία. Στην συνέχεια, ο φοιτητής ερωτάται τι θα τον έκανε να ρισκάρει τα 1000 ευρώ. Ενώ στο τέλος, γίνεται γνωστό στον φοιτητή η πιθανότητα να ρισκάρει το ποσό που έχει κερδίσει και να το πενταπλασιάσει.

Στον πίνακα 3 φαίνεται, η διάθεση της συντριπτικής πλειοψηφίας να μην ρισκάρει τα 1000 ευρώ που έχει κερδίσει (83,9%).

Για 5000 ευρώ	**Ρίσκο**	**Όχι Ρίσκο**	**Κενό**
Στοιχηματίζω 1000 ευρώ που μόλις κέρδισα	20 (14%)	120 (83,9%)	3 (2,1%)

Πίνακας 3: Για 5000 ευρώ θα στοιχημάτιζες 1000 που μόλις κέρδισες

Στον πίνακα 4, σχεδόν οι μισοί φοιτητές απαντάνε, ότι η γνώση των Πιθανοτήτων θα επηρέαζε την απόφαση τους (49%). Σημαντικό είναι και το ποσοστό αυτών που τα στατιστικά θα τους επηρέαζαν (20,3%) και ακολουθεί το ποσοστό αυτών που δεν θα ρίσκαραν καθόλου 15,4%.

	διαίσθηση	**Δεν ρισκάρω**	**Πιθανότητες**	**στατιστικά**	**συχνότερα αποτελέσματα**	**Κενό**
Θα ρισκάρω ανάλογα	14 (9,8%)	22 (15,4%)	70 (49%)	29 (20,3%)	4 (2,8%)	4 (2,8%)

Πίνακας 4: Από τι εξαρτάται αν θα ρισκάρεις

Στον τελευταίο πίνακα, με την γνώση των πιθανοτήτων νίκης, φαίνεται, ότι ένας στους τρεις φοιτητές δεν θα ρίσκαραν (33,6%). Αρκετά μεγάλο ποσοστό φοιτητών, θα έμπαινε στην διαδικασία να το σκεφτεί και τελικά θα ρίσκαρε (28%). Ενώ, μεγάλο είναι και το ποσοστό αυτών που θα έμπαιναν σε διαδικασία σκέψης, αλλά τελικά δεν θα ρίσκαραν.

	Θα έπαιζα	**Δεν ρισκάρω**	**Θα το σκεφτόμουν αλλά Όχι**	**Θα το σκεφτόμουν και Ναι**	**Δεν θα με επηρεάσει η πιθανότητα**	**Κενό**
Με 65% πιθανότητα νίκης	10 (7%)	48 (33,6%)	31 (21,7%)	40 (28%)	7 (4,9%)	7 (4,9%)

Πίνακας 5: Επιλογές αν η πιθανότητα να κερδίσεις είναι 65%

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι πιθανότητες είναι ένας κλάδος των μαθηματικών, που λόγο της φύσης του, συγκέντρωσε πολύ γρήγορα πλήθος υποστηρικτών. Ο κύριος λόγος που προσελκύει μεγάλο ενδιαφέρον, είναι η σύνδεση τους, τόσο άμεση, όσο και έμμεση, με πολλές επιστήμες. Οι εφαρμογές της θεωρίας των Πιθανοτήτων βρίσκουν απήχηση πέραν της επιστήμης των μαθηματικών ή άλλων επιστημών και σε πολλές καθημερινές καταστάσεις (Batanero & Chernoff, 2017).

Στην παρούσα έρευνα, το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελούνταν από 143 φοιτητές – μελλοντικούς δασκάλους. Οι φοιτητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα, δεν είχαν υψηλές πιθανοτικές γνώσεις, καθώς οι περισσότεροι από αυτούς φοίτησαν στην τελευταία τάξη του λυκείου στην θεωρητική κατεύθυνση. Η έρευνα αποσκοπούσε στην ανάδειξη της χρησιμότητας των πιθανοτήτων, τόσο μέσα από τις αντιλήψεις των φοιτητών, όσο και μέσα από την επιρροή που η πιθανότητα τους ασκεί σε ορισμένες αποφάσεις. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα της έρχονται να επιβεβαιώσουν την άποψη των Engel και Orthwein (2018), ότι οι πιθανότητες επηρεάζουν ακόμα και τις πιο απλές αποφάσεις.

Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν, ότι περισσότεροι από τους μισούς φοιτητές επηρεάζονται στην λήψη μιας απόφασης από τις Πιθανότητες (πίνακας 1). Γεγονός που επιβεβαιώνεται και από την δραστηριότητα που είχαν να αντιμετωπίσουν και τα αποτελέσματα της φαίνονται στους πίνακες 3, 4 και 5. Ακόμα, μεγάλο μέρος των φοιτητών θεωρεί, ότι αν κατείχε περισσότερες πιθανοτικές γνώσεις θα επηρεαζόταν περισσότερο η καθημερινότητα του (πίνακας 1), όπως συμφωνεί και η έρευνα των Batanero και Chernoff (2017). Ωστόσο, στον πίνακα δύο φαίνεται η πλειοψηφία να σκέφτεται περισσότερο συναισθηματικά και όχι πιθανοτικά (57,3% έναντι 40,6%). Αυτό, έρχεται σε αντίθεση με την άποψη των Best και Freund (2018), που υποστήριξαν ότι μια απόφαση που υπόκειται σε οικονομικό όφελος συγκεντρώνει μεγαλύτερη πιθανοτική προσοχή.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι ως συμπέρασμα της εν λόγω έρευνας, λογίζεται η ανάγκη για περεταίρω εκπαίδευση στην θεωρία Πιθανοτήτων κατά τα σχολικά έτη. Αυτό προκύπτει κυρίως από τον πίνακα 4, όπου φαίνεται να υπάρχουν αρκετοί φοιτητές που θα επηρεάζονταν από τα στατιστικά, τα τελευταία αποτελέσματα ή την διαίσθηση τους. Δηλαδή, παράγοντες που εντάσσουν την μεροληψία στην απόφαση των φοιτητών. Αποτέλεσμα που εξάγει το συμπέρασμα για την ανάγκη περισσότερης προσοχής κατά την διδακτική διαδικασία πιθανοτικών εννοιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Batanero, C. & Chernoff, E. (2017). Teaching and Learning of Probability. In G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 439-442). Springer International Publishing.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. In C. Batanero, E., Chernoff, J., Engel, H., Lee, & E., Sánchez (Eds.), *Research on Teaching and Learning Probability, ICME-13 Topical Surveys* (pp. 1-33). Springer.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The Nature of Chance and Probability. In J. Graham (Eds.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 15-37). Springer Science and Business Media, Inc.

Best, R., & Freund, A. (2018). Age, Loss Minimization, and the Role of Probability for Decision-Making. Psychology-Gerontology, 64(5), 475-484. https://doi.org/10.1159/000487636

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2010). Research and Developments in Probability Education Internationally. In *British Congress for Mathematics Education* (pp. 41-48).

Cameron, A., & Baldock, F. (1998). A new probability formula for surveys to substantiate freedom from disease. *Preventive Veterinary Medicine*, *34*(1), 1-17. https://doi.org/10.1016/s0167-5877(97)00081-0

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., & Doorman, M. (2019). *Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09905-7

Engel, J. & Orthwein, A. (2018). The Six Loses: Risky Decisions Between Probabilistic Reasoning and Gut Feeling. In C. Batanero & E. Chernoff, *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 261-275). Springer International Publishing.

Farrow, D., & Reid, M. (2012). The contribution of situational probability information to anticipatory skill. *Journal Of Science And Medicine In Sport*, *15*(4), 368-373. https://doi.org/10.1016/j.jsams.2011.12.007

Gill, P. (2018). Interpretation continues to be the main weakness in criminal justice systems: Developing roles of the expert witness and court. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Forensic Science*, 13-21. https://doi.org/10.1002/wfs2.1321

Howard, R. (1988). Uncertainty about Probability: A Decision Analysis Perspective. Risk Analysis, 8(1), 91-98. https://doi.org/10.1111/j.1539-6924.1988.tb01156.x

Laplace, P. S. (1986). Essai Philosophique sur les Probabilitks *(5th ed., pp. 206-207). Libraire pour les mathematiques*

Murphy, A., & Winkler, R. (1992). Diagnostic verification of probability forecasts. *International Journal Of Forecasting*, 7(4), 435-455. https://doi.org/10.1016/0169-2070(92)90028-8

Mylne, K. (2002). Decision-making from probability forecasts based on forecast value. *Meteorological Applications*, *9*(3), 307-315. https://doi.org/10.1017/s1350482702003043

Olofsson, P. (2015). *Probabilities The Little Numbers That Rule Our Lives* (2nd ed.). Wiley.

Piechota, T. C., Chiew, F. H. S., Dracup, J. A. & McMahon, T. A. (2001). Development of Exceedance Probability Streamflow Forecast. *Journal of Hydrologic Engineering, 6(1), 20–28.* https://doi.org/10.1061/(asce)1084-0699(2001)6:1(20)

Ross, S. (2010). *Βασικές αρχές θεωρίας Πιθανοτήτων* (Β. Φελούζης, Μτφ., Επιμ.). Εκδόσεις Κλειδάριθμος (πρότυπη έκδοση 1976).

Singh, S. (2015). Advantages and Disadvantages of Probability Sampling Methods in Social Research. In *National Conference on Innovative Research in Chemical, Physical, Mathematical Sciences, Applied Statistics and Environmental Dynamics* (pp. 15-18).

Sofaer, H., Hoeting, J., & Jarnevich, C. (2018). The area under the precision-recall curve as a performance metric for rare binary events. *Methods In Ecology And Evolution*, *10*(4), 565-577. https://doi.org/10.1111/2041-210x.13140

Tait, N. (1993). The use of probability in engineering design—an historical survey. *Reliability Engineering &Amp; System Safety*, *40*(2), 119-132. https://doi.org/10.1016/0951-8320(93)90102-5

Taylor, F. (2014). Why Teach Probability in the Elementary Classroom?. Louisiana Association Of Teachers Of Mathematics, 2(1), pp. 1-10.

Wilder, R. (1986). *Εξέλιξη των Μαθηματικών εννοιών*. (Δ. Ψυχογίος, Μτχ., Επιμ.). Εκδόσεις Κουτσούμπος.

Zabell, S. (2012). Commentary on Alan M. Turing: The Applications of Probability to Cryptography. *Cryptologia, 36(3), 191–214*. https://doi.org/10.1080/01611194.2012.697811

Η ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΕ ΚΡΙΣΙΜΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μακράκης Νίκος

University of Klagenfurt, Austria

nimakrakis@edu.aau.at

Υπάρχει συνήθως διαρκής πίεση στους μαθητές να παράγουν συγκεκριμένες επιδόσεις σε συγκεκριμένους χρόνους και ταχύτητες στα μαθηματικά. Η πίεση αυτή είναι ακόμη περισσότερη σε κρίσιμα διαγωνίσματα στα οποία υπάρχουν αυστηρά χρονικά περιθώρια. Πως επηρεάζουν τα χρονικά περιθώρια και η έμφαση στην ταχύτητα στην αντιμετώπιση ενός διαγωνίσματος τους μαθητές; Πως αυτές οι συνθήκες μπορούν να δημιουργήσουν ένα πλαίσιο αποκλεισμού και τι κοινωνικοπολιτικές διαστάσεις θα μπορούσε να έχει αυτό; Συζητάω τις παραπάνω ερωτήσεις με βάση σημεία από την συνέντευξη μιας υποψηφίου των πανελληνίων εξετάσεων μαθηματικών του Ιουνίου 2021.

Ο ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο χρόνος είναι σημαντικός παράγοντας της ανθρώπινης νόησης και της κοινωνίας που έχει μελετηθεί πάρα πολύ από την φιλοσοφία, ψυχολογία και κοινωνιολογία (π.χ. Adam, 1990). Στην εκπαίδευση ο χρόνος έχει μελετηθεί ήδη από την εποχή του Rousseau (Πουρκός & Κοντοπόδης, 2005). Ο χρόνος, μέσω του ωρολόγιου προγράμματος, διαμορφώνει τις δραστηριότητες στο σχολείο με βάση πολύ αυστηρώς προκαθορισμένα περιθώρια. Στην έρευνα στην μαθηματική εκπαίδευση, έχει περιγραφεί μια συνήθης αίσθηση βιασύνης στην τάξη των μαθηματικών και αυτό μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε καταστάσεις μαθηματικού άγχους (Boaler, 2014).

Στην αξιολόγηση των μαθηματικών ο χρόνος παίζει σημαντικό ρόλο, επίσης. Τα χρονικά περιθώρια όλων των σημαντικών διαγωνισμάτων μαθηματικών είναι προκαθορισμένα, και κάποιες φορές αυστηρά. Και όταν ο μαθητής έχει να παράξει συγκεκριμένα αποτελέσματα σε συγκεκριμένο χρόνο, τότε υπάρχει μια ελάχιστη ταχύτητα με την οποία οφείλει να δουλέψει (Adam, 1990), η οποία σε κάποια διαγωνίσματα μπορεί να είναι σχετικά μεγάλη. Όμως, η ταχύτητα δεν αναφέρεται ως παράγοντας του μαθηματικού γραμματισμού σε κανέναν ορισμό του, όπως του Υπουργείου Παιδείας (2015) ή άλλου διεθνούς φορέα που να ξέρω, ούτε έχει ερευνηθεί επαρκώς.

Κάποιες μελέτες υποδεικνύουν ότι ίσως τα χρονικά περιθώρια κάποιων διαγωνισμάτων έχουν περισσότερες αρνητικές επιπτώσεις στους μαθητές στα μαθηματικά απ' ότι σε άλλα μαθήματα όπως η γλώσσα. Ερευνητές έχουν συγκρίνει τις επιδόσεις μαθητών που εμφανίζουν μαθηματικό άγχος σε μεγάλο βαθμό με μαθητές που δεν το εμφανίζουν σε δύο είδη διαγωνισμάτων, με ή χωρίς χρονικά περιθώρια. Κάποιες μελέτες έδειξαν σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις (Hembree, 1987; Tsui & Mazzocco, 2006; Gallagher, 1989; Plass & Hill, 1986). Αυτά τα αποτελέσματα, όμως, δεν εμφανίστηκαν σε άλλες κάποιες έρευνες (Mollenkopf, 1950; Bosmans & De Smedt, 2015; Kellogg et al, 1999), οι οποίες, όμως, ήταν λίγο αδύναμες μεθοδολογικά.

Πέρα όμως από τα ποσοτικά ζητήματα, όμως, υπάρχει και η ποιοτική διάσταση και η κοινωνική διάσταση (Walen & Williams, 2002). Η Boistrup (2010) περιγράφει ένα σημαντικό είδος λόγου αξιολόγησης (assessment discourse) που το ονομάζει "Κάνε το γρήγορα και κάνε το σωστά" (σ. 166). Αυτός αναφέρεται στην έμφαση που αποδίδεται σε μαθητές για γρήγορες και σωστές τελικές απαντήσεις και όχι στην διαδικασία με την οποία αυτές παράχθηκαν. Ερευνητές έχουν περιγράψει κοινωνικές νόρμες και τυπικά που έχουν συνδεθεί με την μαθηματική εκπαίδευση (Lundin & Christensen, 2017) και ίσως μπορούμε να θεωρήσουμε και την απαίτηση για ταχύτητα στα μαθηματικά σαν ένα από αυτά, όπως για παράδειγμα έχει περιγράψει η Bibby (2010) ότι αυτή καμιά φορά συνδέεται με την εξουσία και την αρρενωπότητα.

Ένα κράτος σήμερα χρησιμοποιεί τις κρίσιμες και εθνικής εμβέλειας εξετάσεις για να κατατάσσει τεράστιους αριθμούς μαθητών σε επίπεδα επίδοσης, τα οποία καθορίζουν την πρόσβασή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και την στελέχωση της οικονομικής και κοινωνικής διαστρωμάτωσης αργότερα. Ερευνητές έχουν περιγράψει ότι ουσιώδη διαγωνίσματα μαθηματικών που να δίνουν έμφαση στην διερεύνηση και στην επίλυση προβλήματος χρειάζονται χρόνο και για να σχεδιαστούν από τους θεματοθέτες, αλλά και για να λυθούν από τους μαθητές (Suurtamm κ.ά., 2016). Ίσως, τότε, τα αυστηρά χρονικά περιθώρια μερικών τέτοιων διαγωνισμάτων και η κοινωνική νόρμα της ταχύτητας στην μαθηματική αξιολόγηση σε καταστάσεις κρίσιμων διαγωνισμάτων να βολεύει γιατί δημιουργεί πιο μετρήσιμες, διαχειρίσιμες και κυβερνήσιμες συνθήκες. Επίσης, τα αυστηρά χρονικά περιθώρια διευρύνουν το φάσμα των επιδόσεων σε αυτά και αυξάνουν την αποτυχία. Αλλά, επειδή σε τέτοιες εξετάσεις αυξάνεται το κύρος τους όσο αυξάνεται η αποτυχία σε αυτές, τότε ίσως το φαινόμενο να συνδέεται και με την αναπαραγωγή κοινωνικών, οικονομικών και ιδεολογικών όρων, που είναι ένας από τους ρόλους της εκπαίδευσης στην σύγχρονη καπιταλιστική κοινωνία (Baldino & Cabral, 2021; Althusser, 1999).

Επίσης, σε κρίσιμα (high-stakes) διαγωνίσματα, όταν υπάρχουν αυστηρά χρονικά περιθώρια, η επιρροή τους ίσως είναι ακόμα πιο σύνθετη και σημαντική. Η διδασκαλία δίνει έμφαση σε περιεχόμενο που είναι χρήσιμο στις εξετάσεις (τα λεγόμενα SOS ή “teaching to the test”, Cankoy & Tut, 2005, σελ. 235). Οι μαθητές δίνουν περισσότερη έμφαση στην αποστήθιση μεθοδολογιών, σε παλιά θέματα εξετάσεων, σε εξάσκηση γενικών ικανοτήτων επιτυχίας σε διαγωνίσματα (ο.π.). Αυτές οι συνθήκες ευνοούν άλλους παράγοντες επιτυχίας που δεν έχουν σχέση με τα μαθηματικά, όπως την οικειότητα με το διαγώνισμα (test familiarity, Hembree, 1987). Επίσης, ενισχύουν την σκιώδη εκπαίδευση, δηλαδή την ανάγκη για φροντιστήρια ή ιδιαίτερα μαθήματα, άρα και τις συνθήκες οικονομικού αποκλεισμού σε κατηγορίες μαθητών (NESSE, 2011).

Όμως, υπάρχουν ερωτήματα που δεν έχουν μελετηθεί αρκετά (Μακράκης, 2019). Με ποιους τρόπους επηρεάζονται οι μαθητές από τα χρονικά όρια σε κρίσιμα διαγωνίσματα; Πως τους επηρεάζει η ανάγκη για ταχύτητα σε αυτά; Πως συνδέονται αυτά τα ζητήματα με κοινωνικοπολιτικούς παράγοντες της μαθηματικής εκπαίδευσης;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Θα μιλήσουμε για αυτές τις ερωτήσεις σχολιάζοντας μια συνέντευξη, την οποία πήρα στο πλαίσιο μιας ευρύτερης μελέτης που διεξάγω. Η συνέντευξη έγινε με μια μαθήτρια, την Κική (ψευδώνυμο), λίγες εβδομάδες μετά που έγραψε το διαγώνισμα μαθηματικών των πανελληνίων του Ιουνίου του 2021. Οι πανελλαδικές εξετάσεις μαθηματικών είναι μια περίπτωση κρίσιμης εξέτασης και έχει αυστηρό χρονικό περιθώριο τριών ωρών, το οποίο αρκετές φορές είναι ανεπαρκές (Μαυρογιάννης, 2017). Η συνέντευξη έγινε μέσω Skype, λόγω της πανδημίας, βιντεοσκοπήθηκε και απομαγνητοφωνήθηκε. Η Κική πήγε σχετικά καλά στο διαγώνισμα, το οποίο ήταν λιγότερο απαιτητικό σε χρόνο σε σχέση με διαγωνίσματα άλλων ετών.

Θα επιχειρήσω έναν πρώτο σχολιασμό της συνέντευξης χρησιμοποιώντας στοιχεία από προσεγγίσεις της ανάλυσης λόγου, και κυρίως της λακανικής που μελετάει την ανάδυση στοιχείων του Πραγματικού (Lacan, 2006) στον λόγο και δεν περιορίζεται μόνο στο στατικό κείμενο το οποίο εκφέρεται, αλλά επίσης σε υπόρρητα στοιχεία που δεν εκφέρονται καθώς και σε στοιχεία χωρίς συντακτική συνοχή και συνεκτικό νόημα εκ πρώτης όψεως (Parker, 2014).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Νίκος: Πως σου φάνηκε το χρονικό περιθώριο που σου δόθηκε για το διαγώνισμα Μαθηματικών των πανελληνίων;

Κική: Εεε να σας πω την αλήθεια μου φάνηκε αρκετό. Δηλαδή εγώ τελείωσα περίπου στις 2 ώρες. Είχα προετοιμαστεί να τελειώνω πιο μεγάλα διαγωνίσματα σε λιγότερο χρόνο. Οπότε μου φάνηκε πιο πολύ.

Νίκος: Τι εννοείς ότι είχες προετοιμαστεί να τελειώνεις πιο μεγάλα διαγωνίσματα σε μικρότερο χρόνο; Έκανες ειδική προετοιμασία για τον χρόνο; Αυτό εννοείς;

Κική: Εεε ο καθηγητής μου βασικά μας έβαζε να λύνουμε διαγωνίσματα. Απλά μας έδινε δύο ώρες. Και είχαμε συνηθίσει να λύνουμε τέτοια διαγωνίσματα και κάποιες φορές λίγο πιο μεγάλα σε έκταση στο δίωρο. Οπότε είχα συνηθίσει.

Η μαθήτρια αναφέρει ότι ο χρόνος της έφτασε με άνεση και αναφέρει ότι αυτό οφείλεται στο ότι είχε κάνει ειδική προετοιμασία για τον χρόνο. Η προετοιμασία αυτή έγινε από τον καθηγητή της στα ιδιαίτερα μαθήματα, ο οποίος της έβαζε ειδικά διαγωνίσματα που προσομοιώνουν το διαγώνισμα των πανελληνίων. Επιπλέον, ενώ το χρονικό περιθώριο των πανελληνίων είναι τρεις ώρες, εκείνος βάζει δύο ώρες. Δηλαδή η μαθήτρια διαμόρφωσε μια ιδιαίτερη στρατηγική προετοιμασίας για τον χρόνο. Η ίδια ξεκίνησε το διαγώνισμα ως άτομο που είχε κάνει αυτή την ιδιαίτερη προετοιμασία και αναμένεται από αυτήν, ότι θα της φτάσει ο χρόνος και ίσως και με το παραπάνω. Δηλαδή, διαμορφώνει την ταυτότητά της ως άτομο το οποίο εγκαλείται από συνθήκες που έχουν να κάνουν με το τι αναμένεται να κάνει και σε τι χρόνο θα το κάνει αυτό.

Κική: Ναι, επειδή μου αρέσουν πάρα πολύ τα Μαθηματικά, ήτανε το αγαπημένο μου μάθημα ήθελα να γράψω πολύ καλά σε αυτό. Οπότε είχα βάλει στόχο να γράψω έναν συγκεκριμένο βαθμό και γι’ αυτόν τον λόγο αγχώθηκα.

Νίκος: ΟΚ. Μπορείς λίγο να μου εξηγήσεις γιατί έβαλες στόχο επειδή σου αρέσουνε;

Κική: Γιατί έβαλα στόχο επειδή μου αρέσουνε; Εεεε τι να σας πω τώρα; Μ’ αρέσουν πάρα πολύ. Οπότε ήθελα να, ήθελα να αποδώσω. Χωρίς συγκεκριμένο λόγο. Απλά εγώ ένιωθα ότι έπρεπε να αποδώσω καλύτερα στα Μαθηματικά.

Νίκος: Χμ είπες ότι δεν σου ‘ρχεται στο μυαλό κάποιος συγκεκριμένος λόγος. Ή σκέφτεσαι κάτι;

Κική: Όχι, απλά δεν ξέρω πως αλλιώς να σας το εξηγήσω. Ήταν επειδή δούλεψα πάρα πολύ. Είχα βάλει εγώ με τον εαυτό μου στόχο ότι θέλω να γράψω καλά. Καθαρά εγωιστικά, επειδή μου άρεσαν πάρα πολύ.

Από εδώ και από την σύνδεση του άγχους με τις προσδοκίες της μαθήτριας φαίνεται πως αυτή είχε, ίσως, διαμορφώσει μια ταυτότητα ως άτομο καλό στα μαθηματικά και την ώρα του διαγωνίσματος αυτό αποτέλεσε μία πίεση για εκπλήρωση αυτής της ταυτότητας. Επίσης, η μαθήτρια συνδέει το άγχος της με την επένδυση χρόνου που είχε κάνει πριν για το διαγώνισμα. Εδώ ο χρόνος λειτουργεί και ως συσσώρευση, με προσδοκία για απόδοση αργότερα.

Νίκος: Ναι. Ας δούμε το επόμενο το Β4 Που ζητάει να βρεις το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=λ για τις διάφορες τιμές του λ∈ℝ. Θυμάσαι αν αυτό το ΄κανες με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης ή με βάση το σύνολο τιμών της συνάρτησης;

Κική: Με βάση το σύνολο τιμών.

Νίκος: Πιστεύεις ότι αν το έκανες με την γραφική παράσταση θα σου έπαιρνε λιγότερο ή περισσότερο χρόνο;

Κική: Πιστεύω ότι θα μου έπαιρνε περισσότερο χρόνο αλλά ίσως να ήτανε πιο σίγουρος ως προς το να μην κάνεις λάθος η γραφική παράσταση.

Η μαθήτρια την ώρα που αντιμετωπίζει ένα ερώτημα, αν αυτό μπορεί να ξεκινήσει να το λύνει με περισσότερους από έναν τρόπους, πρέπει να πάρει την απόφαση με ποιον θα ξεκινήσει. Ένας παράγοντας που την επηρεάζει είναι το πόσο χρόνο θα πάρει ο κάθε τρόπος. Επίσης, δεν μπορεί κάθε τρόπος να φέρει το ζητούμενο αποτέλεσμα, και το αν το δίνει ή όχι, κάποιος μαθητής πολλές φορές μπορεί να το ξέρει μόνο στο τέλος και αφού έχει ξοδέψει τον χρόνο να τον έχει εφαρμόσει. Οπότε αυτό ενέχει έναν παράγοντα τύχης.

Το επόμενο κομμάτι αφορά ένα ερώτημα των πανελλαδικών εξετάσεων του Ιουνίου του 2021, το οποίο ήταν:

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3). (Υπουργείο Παιδείας, 2021, σ. 2).

Ρώτησα την Κική για το πώς αντιμετώπισε αυτό το ερώτημα:

Νίκος: (…) Πως σε επηρέασε το γεγονότος ότι το ότι Γ2ii έμοιαζε με τα συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle όταν έλυνες το ερώτημα Γ2i το οποίο ζητούσε να βρεις αν το θεώρημα Rolle εφαρμόζεται στην συνάρτηση f στο διάστημα $[0, \frac{3\pi}{2}]$, παρ’ όλο που τελικά δεν εφαρμόζεται;

Κική: Δεν εφαρμοζότανε, ναι. Αρχικά με είχε μπερδέψει αυτό γιατί, εντάξει έλεγα «για να το λέει πρέπει να εφαρμόζεται κανονικά, να ισχύει» αλλά δεν μου έβγαινε. Οπότε, ΄ντάξει, μετά το κατάλαβα. Απλά στην αρχή ήτανε λίγο… τα μπέρδευε.

Νίκος: Μπορείς να μου περιγράψεις λίγο αυτό το μπέρδεμα. Πως σκέφτηκες;

Κική: Ναι, έλεγα ότι, ΄ντάξει, εφόσον μου ζητάει αρχικά να αποδείξω, να εξετάσω αν ικανοποιείται και μετά μου ζητάει να βρεθεί το μοναδικό ξ που ανήκει εκεί πέρα, μου φαινόταν ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιήσω Ρολ, μια άσκηση που θα χρησιμοποιούσα κανονικά Ρολ, οπότε σκέφτηκα ότι λογικά θα εφαρμόζεται και κλασικά έπρεπε να το αποδείξουμε για να το χρησιμοποιήσουμε μετά. Αλλά στην πορεία είδα ότι δεν εφαρμόζεται. Δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις οπότε το πήγα διαφορετικά από ότι στο πρώτο ερώτημα.

Νίκος: Άρα εννοείς ότι σε επηρέασε για λίγο, αλλά μετά από τις δοκιμές το έβγαλες, δεν είχες θέμα.

Κική: Επειδή είχε με τριγωνομετρικούς πάλι να κάνει και, σας είπα, δεν είναι το αγαπημένο μου, λέω ότι «εντάξει, κάνω λάθος, δεν υπάρχει περίπτωση». Απλά αυτό.

Νίκος: Με το $συν\frac{3\pi}{2}$. Άρα σκέφτηκες ότι "μπορεί να κάνω λάθος στο θέμα της τριγωνομετρίας", τελικά όμως δεν άλλαξες γνώμη.

Κική: Όχι.

Νίκος: Χμ. Σου κόστισε χρόνο αυτό το θέμα με τις δοκιμές που έκανες σε σχέση με το α;

Κική: Ναι, ελαφρώς ναι. Απλά μόνο και μόνο που εγώ δεν ήμουνα σίγουρη για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Ειδάλλως γενικά δεν νομίζω να έτρωγαν χρόνο σ' αυτό οι υπόλοιποι μαθητές.

Η Κική εδώ λέει ότι στην Γ2i απέδειξε ότι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle. Όμως, στο Γ2ii είδε ότι της ζητείται να βρει κάτι το οποίο φαίνεται σαν να έχει προκύψει από εφαρμογή Rolle στο ίδιο διάστημα και αυτό της έδωσε την εντύπωση ότι ίσως αναμένεται από αυτήν να εφαρμόσει τελικά το θεώρημα Rolle. Η σκέψη της αυτή ότι μπορεί να υπάρχει αυτή η προσδοκία από αυτήν να κάνει κάτι την επηρέασε. Αυτό την έβαλε σε αμφιβολίες για το αν ήταν σωστή η απάντηση που έδωσε το προηγούμενο ερώτημα και αυτό την οδήγησε στο να ξανασκεφτεί την λύση της σε αυτό, λόγω και της ανασφάλειάς της να χειρίζεται τριγωνομετρικούς αριθμούς. Και, φυσικά, αυτό της κόστισε και κάποιο χρόνο. Εδώ το κείμενο του διαγωνίσματος δεν λειτουργεί ως ένα στατικό κείμενο, αλλά ο μαθητής έρχεται σε διάλογο με αυτό και η αντίληψή του για αυτό αλλάζει μέσα στον χρόνο. Επίσης, δεν είναι τυχαίες και οι φράσεις "έλεγα «για να το λέει πρέπει να εφαρμόζεται κανονικά, να ισχύει»" και "λέω ότι «εντάξει, κάνω λάθος, δεν υπάρχει περίπτωση»" που χρησιμοποιεί η μαθήτρια για να περιγράψει έναν εσωτερικό διάλογο που κάνει με τον εαυτό της. Δηλαδή παρουσιάζει έναν λόγο με διαφορετικές θέσεις εκφοράς.

Νίκος: (…) Πιστεύεις ότι για να πετύχει κάποιος στα Μαθηματικά στις πανελλήνιες απαιτείται απ' αυτόν το να είναι γρήγορος στο να κάνει Μαθηματικά;

Κική: Σίγουρα είναι μια προϋπόθεση αυτό, αλλά νομίζω περισσότερο έχει να κάνει με το πώς τα αναλύεις και σκέφτεσαι και πόσο καλά είσαι προετοιμασμένος. Γιατί, ΄ντάξει, δεν θεωρώ ότι θα είχανε τόσο χρόνο οι πράξεις, αν εξαιρέσουμε κάποια όρια, ίσως, στο να μην προλάβεις να το λύσεις, να μην γράψεις καλά, όσο όταν ξέρεις μεθοδολογίες και τέτοια.

Νίκος: Άρα χρειάζεται να ξέρεις μεθοδολογίες, αυτό εννοείς, ώστε να είσαι και πιο γρήγορος;

Κική: Ναι, πιστεύω ότι πρέπει να έχεις εμπειρία, ουσιαστικά. Να 'χεις λύσει αρκετά παρόμοιες ασκήσεις κι όλ' αυτά, να ξέρεις πώς να τα λύσεις, θεωρώ ότι είναι πιο σημαντικό απ' το να κάνεις γρήγορα πράξεις.

Νίκος: Άρα η ταχύτητα μετράει, λες, σε κάτι γενικότερο απ' το να κάνεις γρήγορα πράξεις. Στο να έχεις καλή εξοικείωση με το διαγώνισμα που αντιμετωπίζεις ώστε να έχεις καλή γνώση των μεθοδολογιών ώστε να ξέρεις τι να χρησιμοποιήσεις. Με αυτή την έννοια το λες;

Κική: Ναι ναι ναι.

Η Κική εκτιμάει ότι η ταχύτητα χρειάζεται για την επιτυχία στις πανελλήνιες. Πιστεύει ότι χρειάζεται αφομοίωση συγκεκριμένων μεθοδολογιών από πριν και μια οικειότητα με το διαγώνισμα, καθώς αυτά είναι στοιχεία που μπορούν να κάνουν έναν μαθητή να μπορεί να δουλέψει τα θέματα των πανελληνίων τόσο γρήγορα όσο είναι απαραίτητο για να προλάβει να τα ολοκληρώσει.

Νίκος: (…) Πιστεύεις ότι για να είναι κάποιος καλός στα μαθηματικά πρέπει να είναι και γρήγορος κατά την γνώμη σου και γιατί;

Κική: Χμμμ δεν θεωρώ ότι απαιτείται να είσαι γρήγορος στα Μαθηματικά για να είσαι καλός στα Μαθηματικά. Πιστεύω απλά ότι πρέπει, πρέπει να… να έχεις πάλι μια… α' εξοικείωση να το πω; Δεν ξέρω, θεωρώ ότι απλά πρέπει να έχεις πιο αναλυτική σκέψη και να μπορείς να έχεις, να είσαι "πιο ελεύθερος" για να… γιατί δεν είναι συγκεκριμένα αυτά που πρέπει να χρησιμοποιήσεις. Μπορεί σε μια άσκηση να ταιριάζουνε δύο τρόποι λύσης, άλλες τρεις, μπορεί ο ένας να βγαίνει … να έχεις την διαδικασία να αλλάζεις τον τρόπο σκέψης σου έτσι ώστε να μπορεί να σου βγει η άσκηση. Δεν είναι απαραίτητο να είσαι…. να πηγαίνεις με την ταχύτητα του φωτός, ντάξει οκ.

Νίκος: Όταν λες "αναλυτικός τρόπος σκέψης" πως το εννοείς;

Κική: Να μπορείς να σκεφτείς διεξοδικά την άσκηση αν έχεις σκοπό να την λύσεις, άμα θέλεις. Πρέπει να… ειδικά σε κάποιες ασκήσεις πρέπει να έχεις… να την αναλύεις πολύ καλά την … αυτό που σου δίνει, το ερώτημα, για να μπορείς να πάρεις όλες αυτές τις πληροφορίες που μπορεί να χρειαστείς.

Η μαθήτρια μιλάει για την γνώμη της για την σύνδεση της ταχύτητας με τα μαθηματικά με έναν ιδιαίτερο τρόπο. Μάλιστα, αναφέρει την μπερδεμένη φράση: "Δεν είναι απαραίτητο να είσαι…. να πηγαίνεις με την ταχύτητα του φωτός, ΄ντάξει οκ". Μιλάει για εξοικείωση και με "αναλυτικό τρόπο σκέψης", τον οποίο προσπαθεί να περιγράψει με διάφορες μπερδεμένες και λίγο ασύντακτες και ασύνδετες μεταξύ τους αναφορές. Ίσως θέλει να δείξει ότι δεν είναι άτομο που θέλει να εκφράσει κάτι που ίσως εκτιμηθεί ως υπερβολικό, ή να θέλει να δείξει μια αγωνία για κάτι που θεωρεί αδύνατο να περιγραφεί, που αντιλαμβάνεται κάποια αποσπασματικά του χαρακτηριστικά, αλλά όχι στην ολότητά του και δεν μπορεί να το εντάξει στο λόγο της.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ένας μαθητής που αντιμετωπίζει ένα κρίσιμο διαγώνισμα μαθηματικών είναι δυνατόν να αντιλαμβάνεται τον ρόλο του ως άτομο που πρέπει να παρουσιάσει συγκεκριμένη επίδοση σε συγκεκριμένο χρόνο και με συγκεκριμένη ταχύτητα. Αυτό το γεγονός τον αναγκάζει να κάνει και την αναγκαία αντίστοιχη προετοιμασία πριν, τον εγκαλεί ως άτομο και ως μαθητή των μαθηματικών και του επηρεάζει και την αντίληψη του για το τι είναι η ενασχόληση με τα μαθηματικά, ίσως σαν την εκπλήρωση κάποια κοινωνικής νόρμας ή ως εμπειρία κοινωνικού συγχρονισμού.

Ίσως να λειτουργεί υπόρρητα μια φαντασίωση ενός ιδανικού μαθητή-πρότυπο, ο οποίος γνωρίζει τα τέλεια μαθηματικά, μπορεί να παρουσιάζει την πιο άριστη και ταχύτερη μαθηματική επίδοση και αυτή να αντανακλάται γνήσια στο βαθμό του σε ένα κρίσιμο διαγώνισμα. Αν είναι έτσι, τότε είναι λογικό που συχνά παράγονται διαγωνίσματα που χρειάζονται και ταχύτητα, στα οποία επιτυγχάνουν τελικά κυρίως οι γρήγοροι μαθητές και άρα η φαντασίωση του ιδανικού γρήγορου μαθητή φαίνεται να εκπληρώνεται αναδρομικά σαν αυτοεκπληρούμενη προφητεία. Και έτσι αυτή η κατάσταση αναπαράγει τον εαυτό της και συμβάλει στην κανονικοποίηση των αποκλεισμών που παράγουν τα κρίσιμα διαγωνίσματα.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο έντονων υποκειμενικών και κοινωνικών διακυβευμάτων, ίσως να αποδυναμώνεται η διάκριση του τι είναι μαθηματικό με το τι είναι υποκειμενικό, κοινωνικό, πολιτισμικό ή πολιτικό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adam, B. (1990). *Time and social theory*. Cambridge: Polity.

Althusser L. (1999). *Θέσεις*. Αθήνα: Θεμέλιο.

Baldino, R. R., & Cabral, T. C. B. (2021). Criticizing epistemic injustice: Rewarding effort to compensate for epistemic exclusion. Στο D. Kollosche (Επ.), *Exploring new ways to connect: πρακτικά του Eleventh International Mathematics Education and Society Conference* (T. 1, σ. 275–283). Hamburg: Tredition.

Bibby, T. (2010). What does it mean to characterize mathematics as 'masculine'? Bringing a psychoanalytic lens to bear on the teaching and learning of mathematics. Στο M. Walshaw (Επ.), *Unpacking pedagogy: New perspective for mathematics classrooms* (σ. 21-41). Charlotte: Information Age.

Boaler, J. (2014). Research suggests timed tests cause math anxiety. Στο *Teaching Children Mathematics*, 20 (8), 469–474.

Boistrup, L. B. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms: A multimodal social semiotic study* [Διδακτορική Διατριβή, Stockholm University]. Stockholm University Dissertations Archive. http://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:355024/FULLTEXT02.pdf

Bosmans, G. & De Smedt, B. (2015). Insecure attachment is associated with math anxiety in middle childhood. *Frontiers in Psychology*, 6, Άρθρο 1596.

Cankoy, O., & Tut, M. A. (2005). High-stakes testing and mathematics performance of fourth graders in North Cyprus. *The Journal of Educational Research*, 98(4), 234–244.

Gallacher S. A. (1989). Predictors of SAT mathematics scores of gifted male and gifted female adolescents. Στο *Psychology of Women Quarterly*, 13, 191–203.

Hembree, R. (1987). Effects of non-content variables on mathematics test performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18,197-214.

Kellogg J. S., Hopko D. R., Anschaft M. H. (1999). The effects of time pressure on arithmetic performance. *Journal of Anxiety Disorders*, T. 13, No. 6, σελ. 591–600.

Lacan, J. (2006). *Ecrits*. New York: Norton.

Lundin, S. & Christensen, D. S. (2017). Mathematics education as praying wheel: how adults avoid mathematics by pushing it onto children. Στο

H. Straehler-Pohl, N. Bohlmann & A. Pais (Επ.) *The Disorder of Mathematics Education* (σ. 19–34). Switzerland: Springer.

Mollenkopf, W. (1950). An experimental study of the effects on item analysis data of changing placement and test time limit. *Psychometrika* v.15(3), 291–315.

N.E.S.S.E. (2011). *The challenge of shadow education: Private tutoring and its implications for policy makers in the European Union*. http://www.nesse.fr/nesse/activities/reports/activities/reports/the-challenge-of-shadow-education

Parker I. (2014). Lacanian discourse analysis: Seven elements. Στο D. Pavón-Cuéllar & I. Parker (Επ.), *Lacan, discourse, event* (σ. 1–13). East Sussex: Routledge.

Plass J. A, Hill K. T. (1986). Children's achievement strategies and test performance: The role of time pressure, evaluation anxiety, and sex. Στο *Developmental Psychology*. T. 22 . Αρ. 1, 31–36.

Suurtamm, C., Thompson, D., Kim, K. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schulkajlow, S., Silver, E., Ufer, S., & Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education*. Switzerland: Springer.

Tsui J. M. & Mazzocco M. M. M. (2006). Effects of math anxiety and perfectionism on timed versus untimed math testing in mathematically gifted sixth graders. Στο *Roeper Review*, 29:2, 132–139.

Walen, S. & Williams, S. (2002). A matter of time: emotional responces to timed mathematics tests. *Educational Studies in Mathematics*, 49:361–378.

Μακράκης Ν. (2019). Είναι η ταχύτητα στα μαθηματικά σημαντική; Η εμμονή στην ταχύτητα ως σύμπτωμα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στο Κ. Χρήστου (Επ.) *Πρακτικά του 8ου συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ* (σ. 437–445).

Μαυρογιάννης Ν. (2017, 9 Ιουλίου). *Τα θέματα πανελληνίων εξετάσεων μαθηματικών προσανατολισμού 2017 & η πρόσληψη τους από την μαθηματική κοινότητα*. users.sch.gr/mavrogiannis/readings/ Mavrogiannis_Panellinies%202017.pdf

Πουρκός, Μ. & Κοντοπόδης, Μ. (2005). Πως βιώνουν το σχολείο οι μαθητές 16 ετών. Στο *Ψυχολογία*, 12(2), σ. 249–275.

Υπουργείο Παιδείας της Ελλάδος (2015). *Εφημερίς της κυβερνήσεως της 22ης Ιανουαρίου 2015*.

Υπουργείο Παιδείας (2021). *Θέματα πανελλαδικών εξετάσεων μαθηματικών Γ' Τάξης ημερησίων λυκείων*.

ΟΙ ΡΟΥΤΙΝΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΑΦΗΓΗΜΑΤΑ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΟΤΑΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΕΥΟΝΤΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Παναγιώτου Κωνσταντίνος

ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Θεσσαλίας

kpan@sch.gr

Η παρούσα εργασία μελετά τις ρουτίνες και τα αφηγήματα που αναπτύσσει μια ομάδα μαθητών της Γ' *Λυκείου, όταν πραγματεύονται μοντέλα ενός ανοιχτού προβλήματος σε στατικό και δυναμικό περιβάλλον. Το θεωρητικό και αναλυτικό μας πλαίσιο είναι η κοινωνιογνωστική θεωρία της* (Sfard, 2008). *Από τα ευρήματα της έρευνας φαίνεται ότι στο στατικό περιβάλλον οι μαθητές ανέπτυξαν ρουτίνες ανάκλησης οι οποίες κατέληξαν σε επικυρωμένα αφηγήματα για τη λύση του προβλήματος, ενώ στο δυναμικό περιβάλλον οι μαθητές ανέπτυξαν ρουτίνες τεκμηρίωσης και ανάκλησης οι οποίες κατέληξαν σε ένα επικυρωμένο αφήγημα και μία παρανόηση αναφορικά με τη λύση του προβλήματος.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου είναι μαθηματικό έργο υψηλού γνωστικού επιπέδου, καθώς απαιτεί ικανότητες κατανόησης και ερμηνείας, συλλογιστική πρωτοτυπία και αξιοποίηση πληροφοριών από διάφορες πηγές (Doyle, 1988). Η μοντελοποίηση τέτοιων προβλημάτων αποσκοπεί στην αναπαράστασή τους με μαθηματικό τρόπο ώστε να καταστεί δυνατή η διαπραγμάτευσή τους σε μαθηματικό πλαίσιο. Στη διαδικασία της μοντελοποίησης ενός προβλήματος, οι μαθητές εργάζονται με μοντέλα τα οποία καλούνται να αναλύσουν και να ερμηνεύσουν, προτείνοντας, ελέγχοντας και βελτιώνοντας διάφορες λύσεις του προβλήματος (Blum & Ferri, 2009). Σύμφωνα με την (Rogovchenko, 2021) η ανάλυση του μαθηματικού λόγου των μαθητών σε δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τον τρόπο σκέψης των μαθητών, βοηθά στον εντοπισμό αδυναμιών και υποδεικνύει τρόπους αντιμετώπισης αυτών των αδυναμιών.

Η παρούσα εργασία μελετά το μαθηματικό λόγο μίας ομάδας μαθητών όταν πραγματεύονται μοντέλα του προβλήματος σε στατικό (χαρτί-μολύβι) και δυναμικό περιβάλλον αναζητώντας τους όρους ύπαρξης ή μη λύσης του προβλήματος. Το θεωρητικό και αναλυτικό μας πλαίσιο είναι η κοινωνιογνωστική θεωρία της (Sfard, 2008) με εστίαση στο είδος των *αφηγημάτων* και των *ρουτινών* που αναπτύσσουν οι μαθητές. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι:

Ε1: Τι είδους ρουτίνες αναπτύσσει μια ομάδα μαθητών όταν πραγματεύεται μοντέλα ενός ανοιχτού προβλήματος.

Ε2: Σε ποια αφηγήματα καταλήγουν οι μαθητές, μέσα από τις ρουτίνες που αναπτύσσουν, αναφορικά με την ύπαρξη ή μη λύσης του προβλήματος.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο πλαίσιο της επικοινωνιογνωστικής θεωρίας (Lavie et al., 2019; Sfard, 2008) η μάθηση είναι ζήτημα εμπλοκής σε μαθηματικά έργα. Οι τρόποι εμπλοκής σε ένα έργο, οι οποίοι καθορίζονται από το ίδιο το έργο και από προηγούμενη εμπειρία, ονομάζονται ρουτίνες (Lavie et al., 2019). Τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου στο επικοινωνιογνωστικό πλαίσιο είναι η *χρήση λέξεων* (λέξεις ή εκφράσεις με μαθηματικό περιεχόμενο), *οι οπτικοί διαμεσολαβητές* (γραφική ή συμβολική υποβοήθηση της επικοινωνίας), *οι ρουτίνες* (τρόποι εμπλοκής σε μαθηματικά έργα) και τα *αφηγήματα* (προφορικός η γραπτός λόγος στο πλαίσιο ενός έργου) (Nardi et al., 2014; Sfard, 2008). Τα αφηγήματα επικυρώνονται, τροποποιούνται ή απορρίπτονται μέσω *ρουτινών τεκμηρίωσης, κατασκευής ή ανάκλησης* (Rogovchenko, 2021). Τα επικυρωμένα αφηγήματα είναι προφορικές η γραπτές προτάσεις οι οποίες μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς. Οι ρουτίνες ταξινομούνται σε *τελετουργίες* (rituals), οι οποίες είναι προσανατολισμένες αποκλειστικά στην εκτέλεση μιας διαδικασίας (*process-oriented*) *και στοχευμένες πράξεις ή εξερευνήσεις* (deeds or explorations), οι οποίες είναι προσανατολισμένες στην κατασκευή νέων αντικειμένων ή στην παραγωγή τεκμηριωμένων αφηγημάτων (*product-oriented*). Την ανάπτυξη εξερευνητικών ρουτινών χαρακτηρίζουν α) *η εφαρμοσιμότητα*, β) η *αυτενέργεια*, γ) *η επινοητικότητα*, δ) *η ευελιξία*, ε) *η διαφοροποίηση* και ζ) *τα κριτήρια εγκυρότητας* (Rogovchenko, 2021; Sfard, 2008).

Με επικοινωνιογνωστικούς όρους, το αποτέλεσμα της μοντελοποίησης είναι ένα *διαλογικό αντικείμενο-μοντέλο* που απαρτίζεται από πολλές επιμέρους έννοιες, οι οποίες συνιστούν το λόγο της μοντελοποίησης (Ärlebäck & Frejd, 2013).Η αποτελεσματικότητα της επικοινωνίας στη διαδικασία της μοντελοποίησης έγκειται στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μοτίβο του τύπου «εικασία-έλεγχος-αναστοχασμός» (Ärlebäck & Frejd, 2013), το οποίο, σύμφωνα με τους (Kramarski & Hirsch, 2003), μπορεί να διευκολυνθεί σημαντικά στο περιβάλλον Υπολογιστικών Αλγεβρικών Συστημάτων. Ωστόσο, σύμφωνα με την (Sfard, 2008), η άστοχη χρήση λέξεων ή οπτικών διαμεσολαβητών κατά τη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος μπορεί να καταλήξει σε *επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις* οι οποίες οδηγούν σε παρανοήσεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πρόβλημα

Το πρόβλημα αφορούσε ένα μέρος της χορογραφίας ενός αθλητή του καλλιτεχνικού πατινάζ.

Προκειμένου να εκτελέσει με ακρίβεια ένα μέρος του προγράμματός του, ο αθλητής πρέπει να διαγράψει μία τροχιά από το σημείο που βρίσκεται σε ένα άλλο σημείο του παγοδρομίου με τρόπο ώστε κάποια στιγμή να κινηθεί παράλληλα στους κριτές (Κ) .Είναι αυτό εφικτό; Δείξτε την απάντησή σας σε όσες περισσότερες ποιοτικά διαφορετικές τροχιές μπορείτε. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Εικόνα 1: Το πρόβλημα

Οι δραστηριότητες στο περιβάλλον του Geogebra

Δόθηκε επαρκής χρόνος στους μαθητές να σκεφτούν, να παρουσιάσουν και να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους σε φύλλα εργασίας. Στη συνέχεια, οι μαθητές εργάστηκαν στο περιβάλλον του Geogebra με διάφορα δυναμικά μοντέλα του προβλήματος σχεδιασμένα από τον ερευνητή. Κάποια από αυτά τα δομήματα συνιστούν περιπτώσεις λύσης και κάποια περιπτώσεις μη λύσης του προβλήματος. Η σκοπιμότητα της εμπλοκής των μαθητών σε αυτές τις δραστηριότητες ήταν η διερεύνηση του ενδεχομένου της διαφοροποίησης του λόγου των μαθητών στα διαφορετικά περιβάλλοντα που εργάστηκαν

Συμμετέχοντες και δεδομένα

Τα δεδομένα της έρευνας προέρχονται από μία δίωρη πειραματική διδασκαλία σε μία τάξη Γ' Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών. Η τάξη οργανώθηκε σε 4 ομάδες των 3-4 μαθητών. Για τις ανάγκες της έρευνας έγινε καταγραφή των διαλόγων και των ενεργειών των μαθητών με πρόγραμμα καταγραφής οθόνης υπολογιστή. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε σε μια ομάδα 3 μαθητών η οποία απάντησε στα περισσότερα ερωτήματα των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης.

Ανάλυση δεδομένων

Απομαγνητοφωνήσαμε τη συζήτηση της ομάδας σε κάθε μία από τις δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης, η οποία διήρκησε 90 λεπτά περίπου, και αναγνωρίσαμε 5 επεισόδια που αποτέλεσαν τη μονάδα ανάλυσής μας. Κάθε επεισόδιο συνιστά μία *ρουτίνα* η οποία καταλήγει σε ένα *αφήγημα* για την ύπαρξη ή μη λύσης του προβλήματος.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε όλα τα επεισόδια ο λόγος της ομάδας στηρίχτηκε στις εικόνες έννοιας (Vinner, 1983) των μαθητών για τη συνέχεια (συνεκτικότητα της γραφικής παράστασης)([31:14]:*δεν διακόπτεται*]) και την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης (ομαλή καμπύλη) ([30:45]: *δεν παρουσιάζει γωνιακά σημεία*)

Επεισόδιο 1 (Στατικό περιβάλλον)

Στο πρώτο επεισόδιο (βλ. απόσπασμα 1) οι μαθητές τεκμηριώνουν τη λύση του προβλήματος ([15:50]) *ανακαλώντας* το Θεώρημα Rolle ([15:50]: *θα υπάρχει ένα σημείο να είναι παράλληλος*)

Απόσπασμα 1

15:50 Μ3: Άρα, άμα κάνουμε δύο σημεία που είναι ίσα θα ισχύει το Rolle οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο να είναι παράλληλος

16:00 Μ2: Α σωστό!

16:08 Μ1: Άρα να ενώσουμε δύο σημεία

16:16 Μ3: Ό,τι καμπύλη και να κάνεις τώρα ισχύει το Rolle

Εικόνα 2 : Θεώρημα Rolle

Επεισόδιο 2 (Στατικό περιβάλλον)

Στο δεύτερο επεισόδιο (βλ. απόσπασμα 2) οι μαθητές ανακαλούν στη συζήτησή τους το θεώρημα Fermat (βλ. εικόνα 3) όπως τους είναι γνωστό από το σχολικό βιβλίο (βλ. εικόνα 4) (Ανδρεαδάκης et al., 2016) για να *επικυρώσουν* με ένα *αφήγημα* ([18:40]Φ: *Ναι είναι παράλληλος*) την ύπαρξη λύσης του προβλήματος ως συμπέρασμα του θεωρήματος.

Απόσπασμα 2

18:24 Μ2: Να έχει τουλάχιστον μία εφαπτομένη

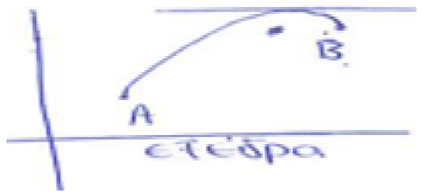
18:32 Μ3: Ναι

18:40 Μ2: Ναι είναι παράλληλος στον x’x γιατί αυτή είναι η εξέδρα έτσι πως το έχουμε πάρει

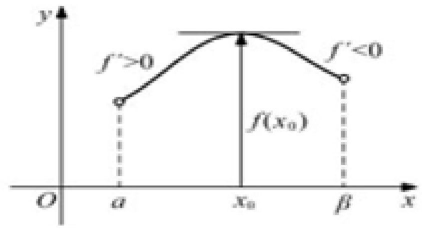
18:48 Μ3: Βάλε Α και Β τα σημεία..

19:43 Μ3: Ναι. Κάνε να είναι το Α εδώ και το Β εδώ. Αλλά να μην είναι ευθεία να είναι καμπύλη

19:50 Μ1: Αυτό νομίζω είναι από το Fermat. Δεν χρειάζεται ίσες τιμές στα άκρα



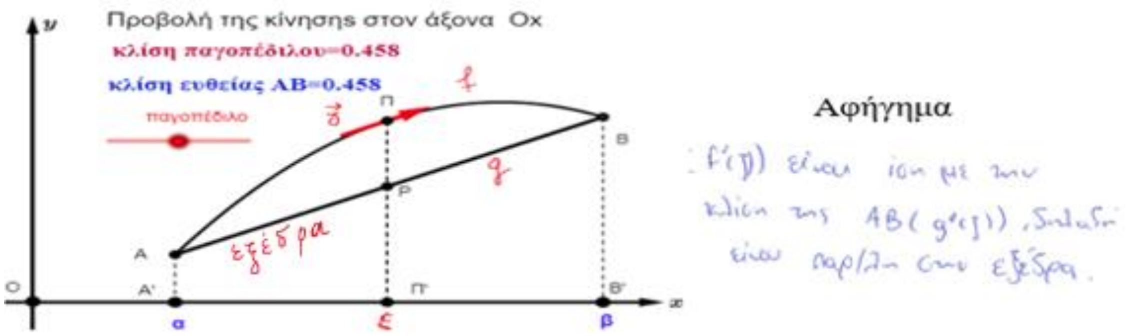
Εικόνα 3 : Fermat- Μαθητές



Εικόνα 4 : Fermat-Σχολικό βιβλίο

Η σκέψη και οι ενέργειες των μαθητών στο 1ο και το 2ο επεισόδιο φαίνεται να συνδέονται άμεσα με την διαδικασία της μοντελοποίησης, η οποία ενεργοποίησε τη φαντασία και την δημιουργικότητα της ομάδας, που οδηγήθηκε σε ρουτίνες με εξερευνητικά χαρακτηριστικά (*αυτενέργεια, επινόηση, εφαρμοσιμότητα, τεκμηρίωση*). Αυτή η διαπίστωση για το ρόλο της μοντελοποίησης στην ανάπτυξη εξερευνητικού λόγου είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα του (Rogovchenko, 2021). Φαίνεται, επίσης, να συνδέεται με την ετοιμότητα των μαθητών να ανασύρουν από τον προσωπικό τους χώρο παραδειγμάτων πρωτοτυπικές εικόνες-παραδείγματα για τα θεωρήματα Rolle και Fermat (Sinclair et al., 2011)

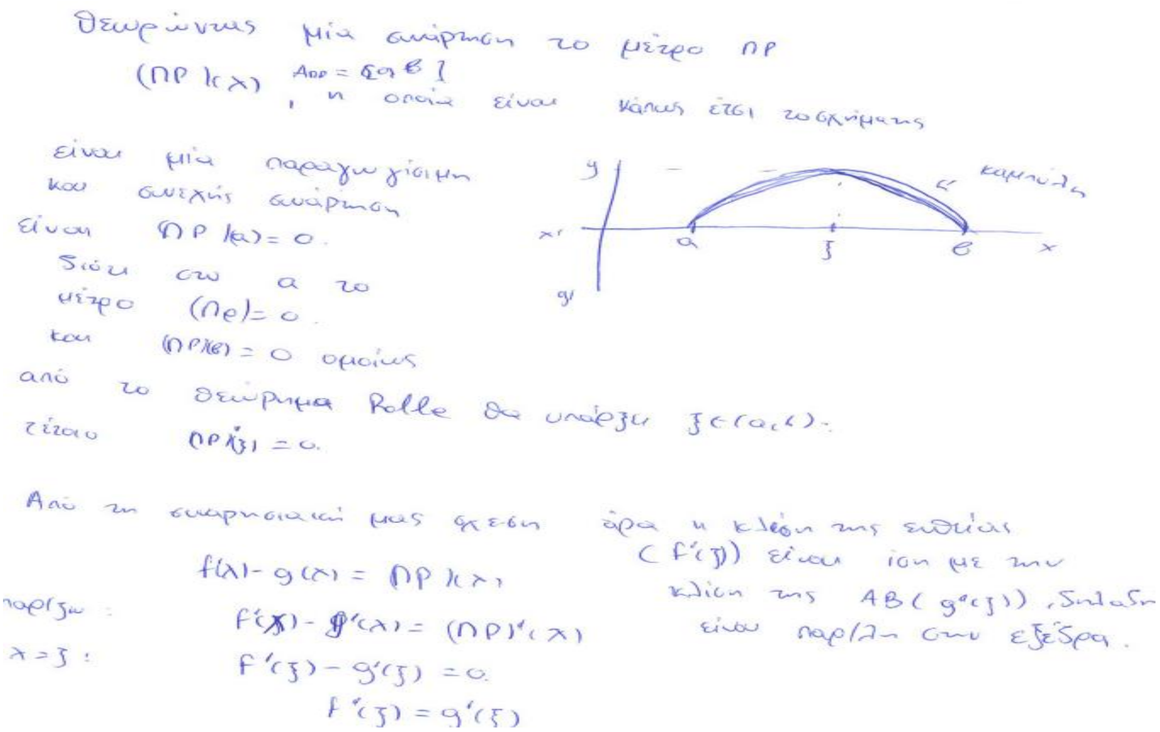
Επεισόδιο 3 (Geogebra)



Εικόνα 5 : $\vec{\delta} // AB$

Το 3ο επεισόδιο αναφέρεται στην *ρουτίνα τεκμηρίωσης* (βλ. εικόνα 6) που ανέπτυξαν οι μαθητές προκειμένου να αιτιολογήσουν την παραλληλία του διανύσματος $\vec{\delta}$ με την ευθεία AB που μεταφράζεται σε ένα επικυρωμένο αφήγημα για τη λύση του προβλήματος (βλ. εικόνα 5)

Εικόνα 6 : Θεώρημα Μέσης Τιμής



Η ανάπτυξη αυτής τη ρουτίνας φαίνεται να είναι συνέπεια της φράσης (*χρήση λέξεων*) «*να τεκμηριώσετε με μαθηματικό τρόπο*» στο αντίστοιχο φύλλο εργασίας. Εδώ φαίνεται ότι, εκτός από την εκφορά του λόγου με *επίσημο λεξιλόγιο*, ρόλο έπαιξε και η προστακτική του σύνταξη.

Με δεδομένο ότι η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι $g'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ αυτή η *τεκμηρίωση* ουσιαστικά είναι μία απόδειξη το Θεωρήματος Μέσης Τιμής (ΘΜΤ). Την ίδια απόδειξη για το ίδιο θεώρημα προτείνει ο (Hurwitz, 1997) με τη βασική διαφορά ότι στη δική του περίπτωση είναι ο εκπαιδευτικός που την παρουσιάζει στους μαθητές, ενώ στη δική μας περίπτωση η απόδειξη είναι έργο (*εξερευνητική ρουτίνα*) των ίδιων των μαθητών.

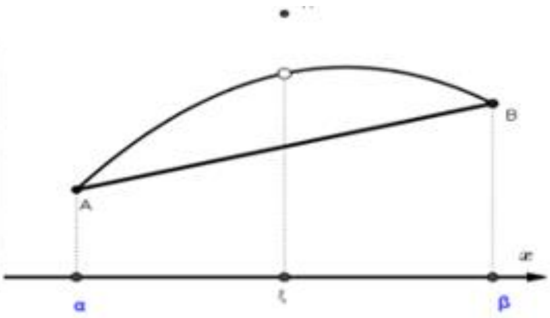
Επεισόδιο 4 (Geogebra)

Στο 4^{ο} επεισόδιο ([1:15:17-1:15:26]) (βλ. εικόνα 7), οι μαθητές ερμηνεύουν την μορφή της τροχιάς- μοντέλου με ένα άλμα του αθλητή στο σημείο με τετμημένη ξ. Οι μαθητές διαπιστώνουν *εξερευνητικά* (πειραματικά) (*οπτική διαμεσολάβηση*) ότι δεν υπάρχει σημείο στην τροχιά του αθλητή στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη χορδή και αποδίδουν αυτή τη διαπίστωση στην ασυνέχεια της τροχιάς *ανακαλώντας* την εικόνα έννοιας που έχουν για την ασυνέχεια της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της (Vinner, 1983). Έτσι καταλήγουν στο αφήγημα:

Απόσπασμα 3

1:16:45 Μ3: Ο αθλητής δεν μπορεί να κινηθεί παράλληλα στην εξέδρα γιατί η τροχιά του δεν είναι συνεχής

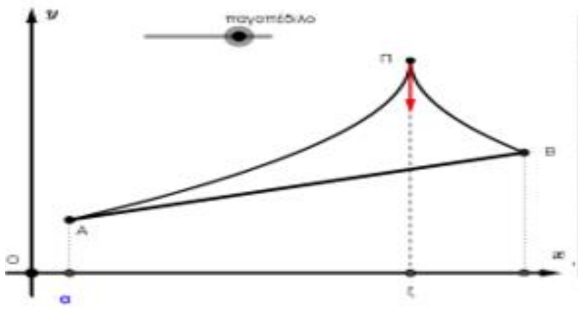
1:15:17	M3	Α!!! Πηδάει μήπως εκεί;
1:15:19	M3	Ναι μπορεί να πηδάει
1:15:20	M1	Ναι μπορεί να πηδάει!!
1:15:22	M2	Κάντο λίγο πιο πίσω
!15:24	M1	Μετά μπροστά
1:15:26	M3	Άρα εκεί πηδάει



Εικόνα 7 : Ο αθλητής κάνει άλμα

Επεισόδιο 5 (Geogebra)

Στο 5ο επεισόδιο [1:17:16-1:21:32] (βλ. εικόνα 8), οι μαθητές ερμηνεύουν το σημείο Π της τροχιάς-μοντέλου της εικόνας 7 ως σημείο στο οποίο ο αθλητής *γυρνάει το παγοπέδιλο* με αποτέλεσμα η συνάρτηση που μοντελοποιεί την τροχιά να μην είναι παραγωγίσιμη στο σημείο Π.



1:17:16	M1	Εδώ πάλι πηδάει;
1:17:27	M2	Όχι. Γυρνάει το παγοπέδιλο, δεν μπορείς να πεις ότι έχει μία κλίση
1:21:32	M1	Εγώ λέω ότι δεν υπάρχει παράγωγος , άρα δεν υπάρχει σημείο να είναι παράλληλο

Εικόνα 8 : Ο αθλητής «στρίβει» το παγοπέδιλο

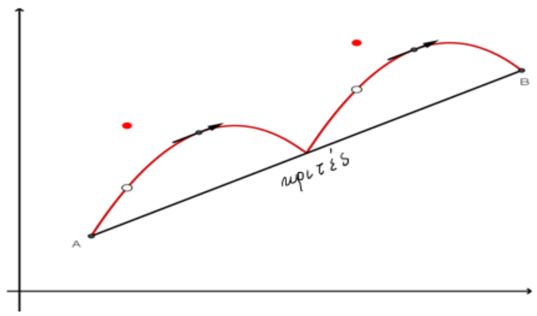
Οι μαθητές διαπιστώνουν *εξερευνητικά* (πειραματικά) (*συμβολική και γραφική διαμεσολάβηση*) ότι δεν υπάρχει σημείο στην τροχιά του αθλητή στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη χορδή και αποδίδουν αυτή τη διαπίστωση στο γωνιακό σημείο της τροχιάς *ανακαλώντας* την εικόνα έννοιας που έχουν για την μη παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της (Vinner, 1983). Έτσι καταλήγουν στο αφήγημα:

Δεν υπάρχει στιγμή που ο αθλητής κινείται παράλληλα στην εξέδρα των κριτών, διότι στο σημείο που θα μπορούσε να υπάρχει παράλληλη στην ΑΒ εκεί η τροχιά δεν είναι παραγωγίσιμη

Ο λόγος των μαθητών στα δύο προηγούμενα επεισόδια κυριαρχείται μεν από εξερευνητικά στοιχεία, παρουσιάζει, ωστόσο, και τελετουργικά στοιχεία (απουσία τεκμηρίωσης, υποταγή της σκέψης στην «αυθεντία» της οπτικής διαμεσολάβησης). Πρόκειται για μία κατάσταση την οποία η (Sfard, 2008) χαρακτηρίζει ως thoughtful imitation.

Συνθέτοντας το λόγο των μαθητών από όλα τα επεισόδια, συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές υιοθετούν δύο διαφορετικά καταληκτικά αφηγήματα: α) αφ1*(επικυρωμένο)* : αν η τροχιά είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (p), τότε το πρόβλημα έχει λύση (q) (επεισόδια 1,2,3) και β) αφ2 (*παρανόηση*): αν η τροχιά δεν είναι συνεχής ή δεν είναι παραγωγίσιμη ($\neg p$), τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση ($\neg q$) (επεισόδια 4,5). Έτσι, χωρίς να το αντιληφθούν, δεδομένου ότι η εγκυρότητα της συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$ δεν συνεπάγεται την εγκυρότητα της συνεπαγωγής $\neg p \Rightarrow \neg q$, οι μαθητές βρίσκονται σε κατάσταση *επικοινωνιογνωστικής σύγκρουσης* (Sfard, 2008) με τους κανόνες της τυπικής λογικής, η οποία τους οδηγεί στην επιβεβαιωμένη στην βιβλιογραφία (Case & Speer, 2021; Orsega et al., 2000) παρανόηση ότι το αφήγημα αφ2 είναι λογική συνέπεια του αφηγήματος αφ1.

Φαίνεται, ωστόσο, αυτή η παρανόηση των μαθητών να είναι συνέπεια της απουσίας λήψης της ιδιαίτερης μέριμνας η οποία, σύμφωνα με τους (Sealey et al., 2019), πρέπει να λαμβάνεται εκ μέρους του εκπαιδευτικού στη χρήση παραδειγμάτων, ώστε αυτά να ανταποκρίνονται στην έκταση και το βάθος των υπό διαπραγμάτευση μαθηματικών φαινομένων. Η παρανόηση των μαθητών στην περίπτωσή μας θα μπορούσε να αποφευχθεί, αν οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να συζητήσουν ένα μοντέλο-παράδειγμα όπως αυτό της εικόνας 9.



Εικόνα 9 : Άλματα, στροφές και κίνηση παράλληλη στην ευθεία ΑΒ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο λόγος των μαθητών κυριαρχείται από εξερευνητικά χαρακτηριστικά. Στο στατικό περιβάλλον οι μαθητές ανέπτυξαν αποκλειστικά ρουτίνες ανάκλησης, οι οποίες κατέληξαν σε επικυρωμένα αφηγήματα. Στο δυναμικό περιβάλλον οι μαθητές ανέπτυξαν μία ρουτίνα τεκμηρίωσης η οποία κατέληξε σε επικυρωμένο αφήγημα και δύο ρουτίνες ανάκλησης οι οποίες έφεραν τους μαθητές σε κατάσταση επικοινωνιογνωστικής σύγκρουσης, που κατέληξε σε μία παρανόηση. Οι ρουτίνες ανάκλησης των μαθητών σε όλες τις περιπτώσεις στηρίχτηκαν στονπροσωπικό τους χώρο πρωτοτυπικών παραδειγμάτων (Sinclair et al., 2011) για τα θεωρήματα Rolle και Fermat και για τις έννοιες της συνέχειας και της παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης. Η ρουτίνα τεκμηρίωσης αναπτύχθηκε ως επακόλουθο επίσημου λόγου και ισχυρής προτροπής από την πλευρά του εκπαιδευτικού.

Το επικυρωμένο αφήγημα των μαθητών για τη λύση του προβλήματος είναι ότι όταν ο αθλητής «διαγράφει» πάνω στο παγοδρόμιο τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης, τότε αναγκαστικά κάποια στιγμή θα κινηθεί παράλληλα στους κριτές. *Η παρανόηση* των μαθητών είναι ότι όταν ο αθλητής «διαγράφει» πάνω στο παγοδρόμιο την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είτε δεν είναι συνεχής είτε δεν είναι παραγωγίσιμη, τότε δεν κινείται ποτέ παράλληλα στους κριτές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Case, J., & Speer, N. (2021). Calculus Students' Deductive Reasoning and Strategies when Working with Abstract Propositions and Calculus Theorems. *PRIMUS*, *31*(2), 184–201. https://doi.org/10.1080/10511970.2019.1660931

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, *23*(2), 167–180. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/s15326985ep2302_6

Hurwitz, M. (1997). Visualizing the Proof of the Mean-Value Theorem for Derivatives. *Mathematics Teacher*, *90*(1). https://doi.org/10.2307/27970047

Kramarski, B., & Hirsch, C. (2003). Using computer algebra systems in mathematical classrooms. *Journal of Computer Assisted Learning*, *19*(1), 35–45. https://doi.org/10.1046/J.0266-4909.2003.00004.X

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/S10649-018-9817-4

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., Mathematics, O. V.-R. in, & 2014, undefined. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. *Taylor & Francis*, *16*(2), 182–198. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918338

Orsega, E., its, P. S.-T. M. and, & 2000, undefined. (2000). “Deconstructing Rolle”: a teaching proposal to foster first year undergraduates’ deductive reasoning. *Academic.Oup.Com*. https://academic.oup.com/teamat/article-abstract/19/2/69/1672701

Rogovchenko, S. (2021). *Mathematical Modelling Problems in a Mathematics Course for Engineers: A Commognitive Perspective*. 561–570. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_47

Sealey, V., Infante, N., Campbell, M. P., & Bolyard, J. (2019). *The generation and use of graphical examples in calculus classrooms: The case of the mean value theorem*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100743

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing* (Vol. 5). Cambridge University Press.

Sinclair, N., Watson, A., Zazkis, R., & Mason, J. (2011). The structuring of personal example spaces. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 291–303. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.04.001

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305.

Ανδρεαδάκης, Σ., Καταργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Σ, Π., & Γ, Π. (2016). *Μαθηματικά Β’ Μέρος*. Διόφαντος.

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΕΣΩ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Ξυλάς Νικόλαος, Ψυχάρης Γιώργος

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

nxylas@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

Στο παρόν άρθρο μελετάμε τα νοήματα μαθητών Β΄ Λυκείου σχετικά με τη έννοια της περιοδικής συμμεταβολής μέσα από δραστηριότητες μοντελοποίησης αυθεντικών καταστάσεων περιοδικής κίνησης και την αξιοποίηση φυσικών και ψηφιακών μοντέλων. Η ανάλυση των δεδομένων με χρήση του πλαισίου των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας ανέδειξε την προοδευτική νοηματοδότηση της περιοδικής συμμεταβολής από τους μαθητές και τον κρίσιμο ρόλο της αλληλεπίδρασής τους με τα διαφορετικά μοντέλα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

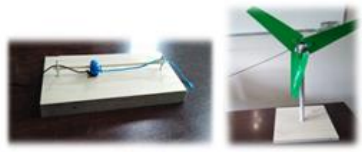
Οι μαθηματικές έννοιες της συμμεταβολής και της περιοδικότητας έχουν μελετηθεί κυρίως χωριστά η μια από την άλλη. Στην παρούσα έρευνα επιχειρούμε να τις διερευνήσουμε συνδυαστικά εστιαζόμενοι στα νοήματα για την περιοδική συμμεταβολή που κατασκευάζουν μαθητές Β' Λυκείου μέσα από αυθεντικές καταστάσεις περιοδικής κίνησης που μοντελοποιούν με τη χρήση φυσικών και ψηφιακών μοντέλων.

Η έννοια της περιοδικότητας διδάσκεται στους μαθητές της Β' λυκείου μέσα από στατικές αναπαραστάσεις περιοδικών κινήσεων, συνεπώς απουσιάζουν από το πρόγραμμα σπουδών προσεγγίσεις της έννοιας που αφορούν μοντελοποίηση αυθεντικών καταστάσεων και χειρισμό μοντέλων. Η προϋπάρχουσα έρευνα έχει δείξει ότι η περιοδικότητα θεωρείται δύσκολη έννοια για τους μαθητές καθώς (α) αντιλαμβάνονται φαινόμενα που δεν είναι περιοδικά ως περιοδικά λόγω του ότι ένα μέρος τους επαναλαμβάνεται (Shama, 1998), (β) αναγνωρίζουν ως περιοδική κάθε συνάρτηση που η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται ή μοιάζει με την ημιτονοειδή (Triantafillou et al., 2014) και (γ) δυσκολεύονται να συνδέσουν τον αναλυτικό ορισμό της περιοδικής συνάρτησης με τις εφαρμογές της σε μη-μαθηματικά πλαίσια (Kynigos & Gavrilis, 2006). Οι δυσκολίες σχετίζονται με την έλλειψη βαθύτερης κατανόησης της έννοιας (Dreyfus & Eisenberg, 1980), την έλλειψη σύνδεσης με φυσικά φαινόμενα (Buendia & Cordero, 2005) καθώς επίσης και την έλλειψη εμπειριών που σχετίζονται με την έννοια της συμμεταβολής (Mariotti et al., 2003). Σύμφωνα με τον Thompson (1994) η κατανόηση της συμμεταβολής περιλαμβάνει (1) την κατασκευή της νοητικής εικόνας της μεταβολής μιας ποσότητας, (2) το συντονισμό των νοητικών εικόνων των μεταβολών δυο ποσοτήτων και (3) την κατασκευή νοητικής εικόνας της ταυτόχρονης συμμεταβολής των αλλαγών δυο ποσοτήτων. Πολλές έρευνες έχουν προτείνει την συνδυαστική αξιοποίηση αυθεντικών καταστάσεων και ψηφιακών εργαλείων ως ένα τρόπο ενίσχυσης της κατανόησης των μαθητών για την περιοδική συμμεταβολή (Kynigos & Gavrilis, 2006). Η παρούσα έρευνα στοχεύει στην εμπλοκή των μαθητών με μοντελοποιήσεις αυθεντικών καταστάσεων που περιλαμβάνουν φυσικά και ψηφιακά μοντέλα. Προκειμένου να μελετήσουμε και να περιγράψουμε την μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών επιλέγουμε το θεωρητικό πλαίσιο των μαθηματικών πεδίων εργασίας (Mathematical Working Spaces) (ΜΠΕ) (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) το οποίο έχει αξιοποιηθεί στην ανάλυση διδακτικών καταστάσεων που βασίζονται σε διαφορετικής φύσης μοντέλα. Σύμφωνα με το πλαίσιο των ΜΠΕ, η εργασία των μαθητών για τη νοηματοδότηση μιας μαθηματικής έννοιας λαμβάνει χώρα μεταξύ δύο επιπέδων: (α) του επιστημολογικού επιπέδου, που σχετίζεται με το μαθηματικό περιεχόμενο, τη μαθηματική οργάνωση και τις δραστηριότητες (tasks) και (β) του γνωστικού επιπέδου, αναφέρεται στην πορεία σκέψης των μαθητών και με τους συλλογισμούς που ακολουθούνται κατά την ατομική εργασία σε μια δραστηριότητα. Για να διερευνηθεί η εργασία σε κάθε ένα από τα δύο επίπεδα προσδιορίζονται τρεις διαστάσεις: (1) η σημειωτική (semiotic), (2) η εργαλειακή (instrumental) και (3) η διαλογική (discursive). Η σημειωτική διάσταση αφορά την χρήση των αλγεβρικών συμβόλων, των σχεδίων που κάνουν οι μαθητές στο χαρτί, των γεωμετρικών αναπαραστάσεων, των γραφημάτων και των διαγραμμάτων. Η εργαλειακή διάσταση αναφέρεται στην αντιμετώπιση των αντικειμένων ως εργαλείων και στη χρήση τους για τις απαραίτητες μαθηματικές και μη κατασκευές. Τέλος, η διαλογική διάσταση αναφέρεται στην απόδειξη εικασιών και γενικότερα στη παραγωγή μαθηματικών νοημάτων. Στο παρόν άρθρο μελετάμε την εξέλιξη της νοηματοδότησης της περιοδικής συμμεταβολής από τους μαθητές εστιάζοντας ιδιαίτερα στον ρόλο των διαθέσιμων μοντέλων και αναπαραστάσεων καθώς των συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών ΜΠΕ στα οποία εργάζονται οι μαθητές.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δραστηριότητες

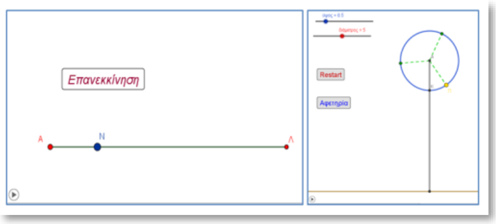
Πραγματοποιηθήκαν τρεις συναντήσεις συγχρόνως με έξι μαθητές της Β΄ Λυκείου οι οποίοι χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες των δύο (ομ1-Μ1,Μ2, ομ2- Μ3,Μ4 και ομ3-Μ5,Μ6) και εργάστηκαν συνολικά έξι διδακτικές ώρες. Κατά την διάρκεια της έρευνας οι μαθητές είχαν διδαχτεί τις περιοδικές συναρτήσεις στο σχολείο, ωστόσο επιδιώκαμε μια εναλλακτική προσέγγιση μέσα από την μελέτη δυναμικών καταστάσεων και τον χειρισμό φυσικών και ψηφιακών μοντέλων.



Εικ.1 Τα φυσικά μοντέλα

Στην 1η συνάντηση οι μαθητές εξοικειώθηκαν με το λογισμικό, ενώ στη 2η και την 3η συνάντηση μελέτησαν την περιοδική κίνηση μιας χάντρας κατά μήκος μιας ξύλινης ράβδου 20 εκατοστών και την κίνηση του έλικα μιας ανεμογεννήτριας αρχικά μέσω φυσικού μοντέλου και ακολούθως μέσω ψηφιακού μοντέλου (Geogebra) (Εικ.1 και 2). Στην αλληλουχία εφαρμογής η περιοδική συμμεταβολή εμφανιζόταν αρχικά μέσω γραμμικής κίνησης και ακολουθούσε η κυκλική κίνηση.

Για τον πειραματισμό με τα φυσικά μοντέλα, ζητήθηκε από τους μαθητές να τραβήξουν τους σπάγκους ώστε να τεθεί σε κίνηση η χάντρα και ο έλικας αντίστοιχα και να περιγράψουν το φαινόμενο και τις μεταβολές που παρατηρούν. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν το γράφημα της περιοδικής κίνησης.



Εικ.2 Τα ψηφιακά μοντέλα

Στα ψηφιακά μοντέλα ζητήθηκε από τους μαθητές να ενεργοποιήσουν την κίνηση ενός δυναμικού σημείου που προκαλεί την προσομοίωση της κίνησης του φυσικού μοντέλου και να κάνουν υποθέσεις για τα γεωμετρικά μεγέθη που μεταβάλλονται (π.χ. μεταβολή των αποστάσεων από τα άκρα, διανυόμενο διάστημα, μεταβολή του μήκους τόξου και της γωνίας που διαγράφει, απόσταση του δυναμικού σημείου από τον οριζόντιο άξονα). Κατόπιν ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν την γραφική παράσταση της κίνησης αξιοποιώντας το υπολογιστικό φύλλο και να προβλέψουν τη θέση του δυναμικού σημείου σε μια οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή κατά την εξέλιξη του φαινομένου. Η αλληλουχία εφαρμογής (φυσικό - ψηφιακό μοντέλο) επέτρεψε τη μελέτη της μετάβασης των μαθητών από την εμπειρική αναγνώριση της περιοδικής συμμεταβολής (σύρσιμο σπάγκων) στη νοηματοδότησή της με τυπικές αναπαραστάσεις (γράφημα, πίνακας τιμών).

A-priori ανάλυση

Διακρίνουμε τρία ΜΠΕ: «Φυσικό Μοντέλο», «Δυναμική Γεωμετρία» (Geogebra), «Συνάρτηση» (Περιβάλλον χαρτί-μολύβι, Geogebra). Στο ΜΠΕ «Φυσικό Μοντέλο» αναμένουμε διαδικασίες νοηματοδότησης της περιοδικής συμμεταβολής στην εργαλειακή διάσταση (σύρσιμο σπάγκου) και την διαλογική διάσταση (ανάπτυξη εικασιών σχετικά με την επαναλαμβανόμενη κίνηση όπως π.χ. η μετάβαση και η επιστροφή στην αρχική θέση της χάντρας ή του έλικα). Σε μικρότερο βαθμό αναμένουμε να εμφανιστεί η σημειωτική διάσταση μέσα από σχέδια στο χαρτί. Στο ΜΠΕ «Δυναμικής Γεωμετρίας» αναμένουμε ισχυρή εμφάνιση της εργαλειακής διάστασης μέσω της κατασκευής α) των αποστάσεων από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος που αναπαριστά η ράβδος (κίνηση χάντρας) και β) του τόξου και της γωνίας που διαγράφει το δυναμικό σημείο καθώς και την απόστασή του από τον οριζόντιο άξονα (κίνηση έλικα). Η σημειωτική διάσταση που αναμένεται να εμφανιστεί σχετίζεται με τα γεωμετρικά αντικείμενα και τις αναπαραστάσεις των αντίστοιχων μεγεθών στο Geogebra (σύμβολα, ετικέτες, τιμές). Αναφορικά με τη διαλογική διάσταση, αναμένουμε οι μαθητές να χτίσουν στην εμπειρία αλληλεπίδρασης με το φυσικό μοντέλο και παρατηρώντας την συμμεταβολή των τιμών των γεωμετρικών μεγεθών να αναγνωρίσουν την περίοδο ως το διάστημα που χρειάζεται το δυναμικό σημείο για να ολοκληρώσει μια πλήρη κίνηση. Στο ΜΠΕ «Συνάρτηση» αναμένουμε την εμφάνιση της διαλογικής και σημειωτικής διάστασης. Η προηγηθείσα εμπειρία με τα φυσικά και ψηφιακά μοντέλα αναμένουμε να βοηθήσει τους μαθητές να κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις και πίνακες τιμών και μέσω αυτών να συνδέσουν την περιοδική κίνηση με τις αναπαραστάσεις αυτές και τα διαφορετικά μοντέλα.

Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης

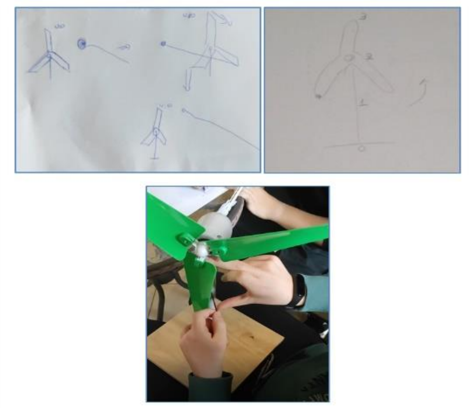
Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν (ηχογράφηση, βιντεοσκόπηση, καταγραφή οθόνης, παρατηρήσεις του εκπαιδευτικού) απομαγνητοφωνήθηκαν για την ανάλυση. Στο πρώτο στάδιο της ανάλυσης τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν (Strauss & Corbin,1998) με κριτήριο την νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών και της περιοδικότητας ανάλογα με το μοντέλο (φυσικό, ψηφιακό). Στο δεύτερο στάδιο συγκρίναμε τις ομάδες των επεισοδίων που αφορούσαν τις δύο έννοιες ανά ΜΠΕ με σκοπό την δημιουργία υποκατηγοριών νοηματοδότησης της περιοδικής συμμεταβολής. Τέλος, αναλύσαμε περαιτέρω τα επεισόδια στις υπάρχουσες κατηγορίες με βάση τις τρεις διαστάσεις των ΜΠΕ με σκοπό να διερευνήσουμε την συμβολή των διαθέσιμων μοντέλων και αναπαραστάσεων στην εξέλιξη της νοηματοδότησης καθώς και να αναδείξουμε τις συνδέσεις μεταξύ των ΜΠΕ.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα διαρθρώνονται σε κατηγορίες επεισοδίων ανά ΜΠΕ για την περιγραφή της εξέλιξης της νοηματοδότησης της περιοδικής συμμεταβολής από τους μαθητές εστιάζοντας στον ρόλο των διαφορετικών μοντέλων και των μεταξύ τους συνδέσεων.

ΜΠΕ Φυσικό Μοντέλο: Εμπειρική νοηματοδότηση της περιοδικότητας

Κατά την αλληλεπίδραση με τα φυσικά μοντέλα οι μαθητές νοηματοδότησαν την περιοδική συμμεταβολή με τρεις τρόπους. Αρχικά μέσα από το σύρσιμο των σπάγκων εντόπισαν το χαρακτηριστικό της «μετάβασης και επιστροφής» στην κίνηση της χάντρας και του έλικα. Κατόπιν κατά τον συντονισμό της κατεύθυνσης των μεταβολών δυο ποσοτήτων (ελάττωση - αύξηση μήκους σπάγκου) αναγνώρισαν το χαρακτηριστικό της επανάληψης στις δυο ακραίες θέσεις και στη μεσαία. Το παρακάτω επεισόδιο έλαβε χώρα κατά την διάρκεια της $3^{ης}$ συνάντησης.



Εικ.3 Εργασία στο φυσικό μοντέλο

Μ4: Έχουμε σχεδιάσει τρία στάδια … όταν δεν έχουμε ξετυλίξει τον σπάγκο, όταν τον ξετυλίγουμε και όταν τον έχουμε ξετυλίξει τελείως.

Μ3: Ο έλικας από το κατώτερο 1 σημείο ανεβαίνει στη μέση 2 μέχρι που πάει στο πιο ψηλό 3 και ξανακατεβαίνει… Αυτό είναι το μήκος του σπάγκου που χρειάζεται (δείχνει με το χέρι του) για μια περιστροφή.

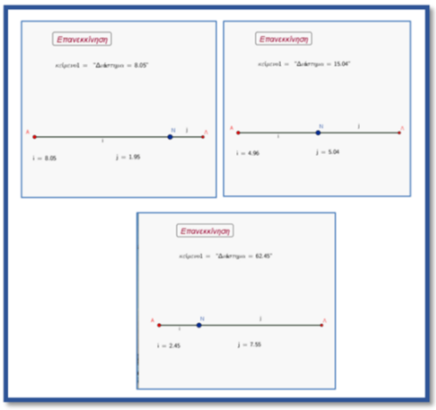
Τέλος στην $3^{η}$ συνάντηση ο Μ1 παρατηρεί «*Όσο τραβάμε, δες αυτό το σημείο ανεβαίνει φτάνει στο ψηλότερο σημείο και μετά κατεβαίνει και τέλος κάνει μια περίοδο*». Τα λόγια του φανερώνουν ότι αναγνώρισε την περίοδο ως το διάστημα που χρειάζεται ο έλικας για να κάνει μια πλήρη κίνηση. Το σύρσιμο των σπάγκων χρησιμοποιήθηκε ως όργανο για την εμπειρική νοηματοδότηση της περιοδικής συμμεταβολής ενώ η σημειωτική διάσταση περιελάμβανε σύμβολα ("1" για την κατώτερη, "2" για την μεσαία, "3" για την ανώτερη θέση του έλικα) καθώς και σχέδια των μαθητών στο χαρτί (σπάγκος που ξεδιπλώνεται σε 3 στάδια, Εικ.3). Η διαλογική διάσταση εκφράστηκε όταν οι μαθητές προσπαθούσαν να κατανοήσουν τις μεταβολές στη θέση της χάντρας και του έλικα καθώς και όταν αναφέρθηκαν για πρώτη φορά στο μέγεθος της περιόδου.

ΜΠΕ Δυναμικής Γεωμετρίας: Η περιοδικότητα στα ψηφιακά μοντέλα

Στην $2^{η}$ συνάντηση οι μαθητές όλων των ομάδων νοηματοδότησαν την επαναλαμβανόμενη φύση στις τιμές των αποστάσεων που έχει το δυναμικό σημείο Ν από τα άκρα. Χαρακτηριστικά η ομ1 επέλεξε να εμφανίζονται οι ετικέτες (τμήματα ΑΝ και ΝΛ) καθώς και οι τιμές τους (Εικ.4). Κατά την κίνηση του σημείου παρατήρησαν την ταυτόχρονη τακτική εναλλαγή των τιμών. Ο Μ1 αναφέρει *«Όσο κινείται το σημείο Ν αυξάνεται το ΑΝ και μειώνεται το ΝΛ μέχρι που μηδενίζει και μετά το αντίστροφο… Επαναλαμβάνεται αυτό συνεχώς»*

Εικ.4 Ψηφιακό μοντέλο χάντρας

Στην συνέχεια η ομ3 παρατηρώντας την κίνηση του δυναμικού σημείου νοηματοδότησε την περιοδικότητα ως εργαλείο πρόβλεψης της θέσης του μελλοντικά. Ο Μ6 προτείνει να χειριστούν το εργαλείο ώστε να βρουν την θέση του (*«Άφησε το σημείο να κινηθεί να βρούμε την θέση του… Σταμάτα το στο 16»*). Ωστόσο ο Μ5 μέσα από αυτό τον χειρισμό αναπτύσσει τον ακόλουθο συλλογισμό *«Για να πάει από το Α στο Λ είναι 10 και να γυρίσει πίσω είναι άλλα 10 άρα 20. Η περίοδος της κίνησης είναι 20…για να βρούμε τη θέση όταν έχει διανύσει 62 εκ. θα πούμε ότι έχει κάνει 3 πλήρεις κινήσεις και απέχει 2εκ από το Α»* (Εικ.5).



Εικ.5 Πρόβλεψη θέσης χάντρας

Οι μαθητές εργαζόμενοι στην εργαλειακή διάσταση αξιοποίησαν τα εργαλεία του Geogebra για την κατασκευή γεωμετρικών μεγεθών (όπως ευθύγραμμα τμήματα), τον συμβολισμό τους, την εμφάνιση των τιμών και την συνεχή παρατήρηση των μεταβολών τους. Η σημειωτική διάσταση εκφράστηκε μέσα από την προοδευτική ενσωμάτωση γεωμετρικών αντικειμένων και των αναπαραστάσεων τους (π.χ. ΝΑ, ΝΛ). Αναφορικά με τη διαλογική διάσταση οι μαθητές μέσα από τον χειρισμό του εργαλείου αναγνώρισαν την επαναλαμβανόμενη φύση στις τιμές των γεωμετρικών μεγεθών, αναζήτησαν κάποιον γενικευμένο κανόνα και εν τέλει αξιοποίησαν την περίοδο της κίνησης με σκοπό την πρόβλεψη της θέσης του δυναμικού σημείου μελλοντικά. Συνεπώς, οι μαθητές ήταν σε θέση να περιγράφουν μελλοντικές θέσεις του σημείου χωρίς χειρισμό του ψηφιακού μοντέλου.

ΜΠΕ Συνάρτησης

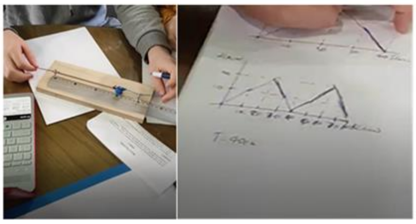
Νοηματοδότηση ανεξάρτητης/εξαρτημένης μεταβλητής και περιόδου

Η εμπλοκή των μαθητών με την περιοδική συνάρτηση ξεκίνησε κατά την αλληλεπίδρασή τους με το φυσικό μοντέλο. Οι ομάδες διερεύνησαν την περιοδική κίνηση της χάντρας με μεγέθη χωρίς συναρτησιακή σχέση (αποστάσεις της χάντρας από τα άκρα) (Εικ.6). Ωστόσο τα λόγια των μαθητών Μ4 και Μ1 *«μετά δεν συνεχίζει γιατί όλα τα σημεία βρίσκονται*

Εικ.6 Γράφημα

πάνω στην ευθεία…», «Έπρεπε να επαναλαμβάνεται το γράφημα καθώς εξελίσσετε η κίνηση» φανερώνουν τον προβληματισμό ως προς τα μεγέθη που απαιτούνται για την περιγραφή της περιοδικής κίνησης. Τελικά επέλεξαν στον x΄x το μέγεθος «Συνολικό διάστημα» και στον y΄y «Απόσταση από το ένα άκρο».

Στη συνέχεια οι μαθητές της ομ2 μέσα από το σύρσιμο των σπάγκων νοηματοδοτούν την περίοδο ως το διάστημα που χρειάζεται η χάντρα για μια πλήρη κίνηση. Συγχρόνως κατασκευάζουν το γράφημα για μια περίοδο. Χαρακτηριστικά ο Μ3 αναφέρει *«Ξεκινάει από το Α διανύει απόσταση 10 άρα απέχει από το Α 10, διανύει 20 άρα αυξάνεται η απόσταση γίνεται 20 και φθάνει στο μέγιστο. Μετά διανύει 30 απέχει πάλι 10 από το Α ενώ όταν έχει διανύσει συνολικά 40 μηδενίζεται η απόσταση από το Α»*. Επαναλαμβάνοντας το σύρσιμο των σπάγκων αντιλαμβάνονται ότι υπάρχουν πολλές θέσεις που η χάντρα απέχει την ίδια απόσταση από το άκρο Α και επεκτείνουν το γράφημα σε δυο περιόδους (*Μ4: «Μετά ξανακάνει το ίδιο ακριβώς. Επαναλαμβάνεται κάθε 40 εκ.»*) (Εικ. 7).

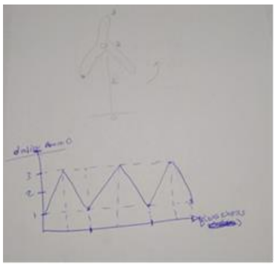


Εικ.7 Γράφημα δυο περιόδων

Στην εργαλειακή διάσταση οι μαθητές συντόνισαν τη θέση της χάντρας πάνω στη ξύλινη ράβδο με το γράφημα της περιοδικής κίνησής της. Η εργασία των μαθητών στην σημειωτική διάσταση αφορούσε τις αναπαραστάσεις της περιοδικής συμμεταβολής (Γράφημα) και τον συμβολισμό των μεγεθών στους άξονες (x΄x-Συνολικό διάστημα, y΄y-d(A)). Η διαλογική διάσταση αναπτύχθηκε τόσο κατά τη νοηματοδότηση συμμεταβαλλόμενων μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών όσο και στην αντίληψη της περιοδικής συμμεταβολής σε όλο το εύρος της κίνησης και την αντιστοίχιση πολλών τιμών του x στην ίδια τιμή του y.

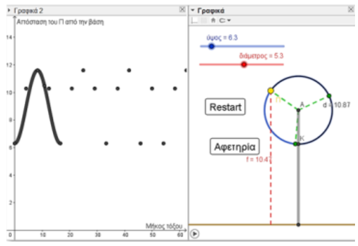
Νοηματοδότηση περιοδικής φύσης του γραφήματος

Οι μαθητές της ομ2 νοηματοδότησαν την περιοδική φύση του γραφήματος ($3^{η}$ συνάντηση-κίνηση έλικα). Αρχικά καθώς πειραματίζονταν με το φυσικό μοντέλο κατασκεύασαν τους άξονες x΄x (Μήκος κλωστής), y΄y (d σημείου από το Ο) και σχεδίασαν το γράφημα για τρεις πλήρεις κινήσεις. Ωστόσο εστίασαν στην κατώτερη (1), στην μεσαία (2) και στην ανώτερη θέση (3) του έλικα με αποτέλεσμα να αποτελείται από ευθύγραμμα



Εικ.8 Περιγραφή

τμήματα που ενώνονται μεταξύ τους και ανεβαίνουν-κατεβαίνουν (Εικ.8). Κατόπιν ενεργοποιώντας την κίνηση του δυναμικού σημείου και παρατηρώντας την μεταβολή στις τιμές των γεωμετρικών μεγεθών κατασκεύασαν ένα πίνακα τιμών και το γράφημα (x΄x-Μήκος τόξου, y΄y-Απόσταση του Π από την βάση) στο Geogebra λαμβάνοντας υπόψιν περισσότερες θέσεις του σημείου (Εικ.9). Ο Μ3 σχολιάζει *«Στο κατώτατο σημείο απέχει 6,3 και έχει διανύσει μηδέν. Όσο κινείται το σημείο Π μεγαλώνει η απόσταση. Φτάνει στο μέγιστο σημείο που απέχει 11,6 και έχει διανύσει 8,33…κατεβαίνει στο κατώτατο σημείο και έχει διανύσει 16,33…παρατηρούμε ότι είναι καμπύλη»*.



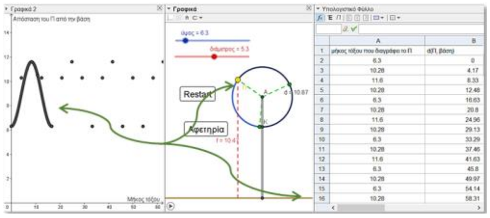
Εικ.9 Περιοδικό γράφημα

Στην εργαλειακή διάσταση οι μαθητές αρχικά εργάστηκαν με το φυσικό μοντέλο για την κατασκευή του γραφήματος ενώ στην συνέχεια συντόνιζαν τις τιμές των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο γράφημα (αυξάνεται- μειώνεται) με τη θέση του δυναμικού σημείου στο ψηφιακό μοντέλο (ανεβαίνει-κατεβαίνει). Στην σημειωτική διάσταση υπάρχει μια προοδευτική ενσωμάτωση του συμβολισμού των μεγεθών (π.χ. ονόμασαν το μήκος κλωστής ‘μήκος τόξου’). Επομένως, η σύνδεση εργαλειακής και σημειωτικής διάστασης συνέβαλε στην εμφάνιση της διαλογικής διάστασης και στη νοηματοδότηση της φύσης του περιοδικού γραφήματος.

Συνδέσεις

Μέσα από τα παραπάνω αποτελέσματα αναδεικνύεται ο προοδευτικός χαρακτήρας των συνδέσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές ανάμεσα στα διαφορετικά ΜΠΕ. Για παράδειγμα, ενόσω οι μαθητές της ομ2 εργάζονταν στο ψηφιακό μοντέλο πειραματίζονταν και με το μοντέλο της χάντρας (*Μ3: «Διαιρούμε με το 20 στο Geogebra γιατί είναι 10 να πάει και 10 να επιστρέψει άρα είναι 20 συνολικά. Ενώ στο φυσικό διαιρούμε με το 40 γιατί η χάντρα θέλει 20 να πάει και 20 να γυρίσει»*). Η αλληλεπίδραση εργαλειακής και διαλογικής διάστασης ανάμεσα στα δυο μοντέλα/ΜΠΕ συνέβαλε ώστε οι μαθητές να νοηματοδοτήσουν την σχέση της περιόδου της κίνησης στο φυσικό μοντέλο με την αντίστοιχη περίοδο στο ψηφιακό (διπλάσια).

Επίσης, οι μαθητές πραγματοποίησαν συνδέσεις μεταξύ εργαλειακής και σημειωτικής διάστασης στα ΜΠΕ Δυναμική Γεωμετρία και Συνάρτηση. Κατά την εργασία στο πεδίο «Συνάρτηση» η ομ2 συντονίζει τη θέση του δυναμικού σημείου (έλικας) με τις τιμές των μεταβλητών στον πίνακα τιμών και στο γράφημα (Μ3: *«Κινείται το σημείο Π ενώ ταυτόχρονα αυξάνει το γράφημα και μεγαλώνουν και οι τιμές ενώ μετά κατεβαίνει το* *σημείο και μειώνονται οι τιμές»*). Οι συνδέσεις μεταξύ των ΜΠΕ βοήθησαν τους μαθητές να συσχετίσουν τις αναπαραστάσεις της περιοδικής συμμεταβολής (περιοδικό γράφημα, πίνακας τιμών, Εικ. 10).



Εικ.10 Συνδέσεις

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε μια προοδευτική εξέλιξη στη νοηματοδότηση της περιοδικής συμμεταβολής κατά το πέρασμα των μαθητών από τα διαφορετικά ΜΠΕ και τα αντίστοιχα μοντέλα. Οι κινητικές - αισθητηριακές εμπειρίες που παρείχαν τα μοντέλα στους μαθητές συνέβαλαν στην διερεύνηση και την νοηματοδότηση της περιοδικής φύσης του γραφήματος (Triantafillou et al., 2014) και των τιμών του πίνακα. Μέσα από τα φυσικά μοντέλα οι μαθητές διέκριναν στοιχεία της περιοδικότητας, όπως την περίοδο μιας πλήρους κίνησης, με εμπειρικό τρόπο. Επιπλέον, μέσω της εμπειρίας χρήσης του φυσικού μοντέλου οι μαθητές νοηματοδότησαν την έννοια της περιοδικότητας προτού νοηματοδοτήσουν τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη (κίνηση χάντρας, διάστημα - απόσταση) μέσω συναρτησιακής σχέσης. Στο ψηφιακό μοντέλο η αναγνώριση της περιοδικής συμμεταβολής στις τιμές των γεωμετρικών μεγεθών και της περιόδου της κίνησης του δυναμικού σημείου ευνόησε την σταδιακή αποστασιοποίηση των μαθητών από τα ψηφιακά εργαλεία (Kynigos & Gavrilis, 2006) και την αναζήτηση κάποιου γενικευμένου κανόνα για την πρόβλεψη της μελλοντικής θέσης του σημείου. Επομένως, η έρευνα επικυρώνει το εύρημα των Buendia και Cordero (2005) ότι η νοηματοδότηση χαρακτηριστικών της περιοδικής συμμεταβολής συμβάλει στην ικανότητα των μαθητών να κάνουν ασφαλείς προβλέψεις. Επιπλέον, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας καταδεικνύουν ότι το στοιχείο της πρόβλεψης συνέβαλε στον συσχετισμό των αναπαραστάσεων της περιοδικής συμμεταβολής σε διαφορετικά ΜΠΕ. Συμπερασματικά, η έρευνα ενισχύει υπάρχοντα ευρήματα που αναδεικνύουν ότι η αλληλουχία μοντέλων (φυσικό, ψηφιακό) καθώς και η χρήση δυναμικών αναπαραστάσεων συμβάλλει στην νοηματοδότηση της περιοδικότητας μέσω της διασύνδεσης των περιοδικών κινήσεων με τα γραφήματα και τους πίνακες τιμών (Arzarello et al., 2012).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *31*(1), 20-30.

Buendia, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 299-333.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1980). On teaching periodicity. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, *11*(4), 507-509.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Kynigos, C., & Gavrilis, K. (2006). Constructing a sinusoidal periodic covariation. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Education* (Vol. 4, pp. 9-16).

Mariotti M.A, Laborde C., & Falcade, R. (2003). Function and Graph in a DGS environment, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, vol. 3, 237 - 244.

Shama, G. (1998). Understanding periodicity as a process with a gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 255-281.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research techniques*. Thousand Oaks, CA: Sage publications.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in collegiate mathematics education*, *1*, 21-44.

Triantafillou, C., Spiliotopoulou, V. & Potari, D. (2014). How undergraduate students make sense out of graphs: the case of periodic motions. 2014. In Nicol, C., Oesterle, S., Liljedahl, P., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 5, pp. 273-280. Vancouver, Canada.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΜΕΣΩ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

Μπακούλας Νίκος, Ψυχάρης Γιώργος

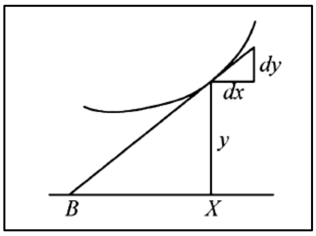
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

nbakoula@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα εστιάζει στη νοηματοδότηση εννοιών που σχετίζονται με την παράγωγο από τρεις μαθήτριες της Β' Λυκείου, μέσω της χρήσης μίας ψηφιακής εφαρμογής που αξιοποιείται από αθλητές (Strava) και ένα ψηφιακό περιβάλλον διδακτικής μαθηματικών (Geogebra). Στόχος της έρευνας είναι η μελέτη των νοημάτων που κατασκευάζουν οι μαθήτριες σε τρεις δραστηριότητες που αφορούν στη μέση ταχύτητα και τη μετάβαση στη στιγμιαία ταχύτητα και την έννοια του ορίου. Μέσω του θεωρητικού πλαισίου των μαθηματικών πεδίων εργασίας αναλύεται ο ρόλος των αξιοποιούμενων ψηφιακών εργαλείων στη νοηματοδότηση των εννοιών από τις μαθήτριες.

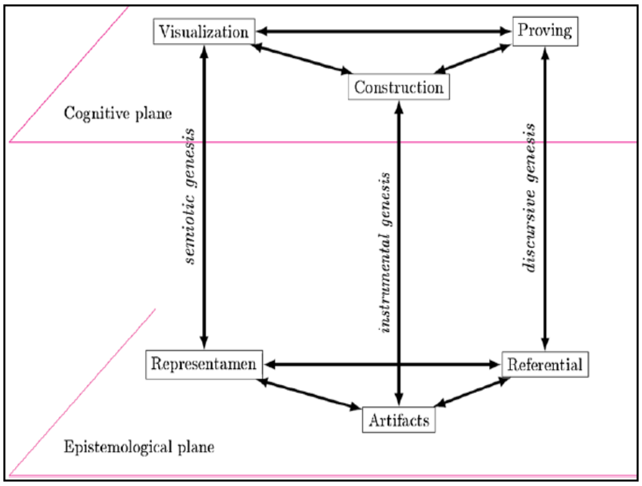
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Πολλές έρευνες έχουν δώσει έμφαση στην ανάδειξη των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν μελετούν την έννοια της παραγώγου. Παρά την άνεση που έχουν αρκετοί μαθητές στην παραγώγιση συναρτήσεων, ύστερα από εξάσκηση, δυσκολεύονται πολύ στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας (Borji et. al. , 2018) εξαιτίας της σύνθετης μορφής που έχει, καθώς σε αυτή συμπεριλαμβάνονται 5 επιμέρους έννοιες, αυτή της συνάρτησης, του λόγου, της κλίσης εφαπτομένης, του ρυθμού μεταβολής και του ορίου (Zandieh, 2000). Οι έννοιες αυτές δημιουργούν ακόμα μεγαλύτερες δυσκολίες στους μαθητές όταν εμφανίζονται σε ρεαλιστικές καταστάσεις ή άλλες αναπαραστάσεις όπως για παράδειγμα σε γραφικές παραστάσεις. Ο Tall (1991) επισημαίνει πως η κατανόηση από τους μαθητές στον κλάδο της ανάλυσης, και ειδικότερα στο κεφάλαιο της παραγώγου, είναι κυρίως αλγεβρική παρά γραφική. Όσον αφορά στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, πολλές έρευνες/θεωρίες στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών έχουν υποδείξει ως ιδιαίτερα σημαντική την εμπλοκή των μαθητών με ρεαλιστικά προβλήματα, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη θεωρία των ρεαλιστικών μαθηματικών (Realistic Mathematics Education) (Gravemeijer & Doorman, 1999). Η θεωρία αυτή μελετά πώς τα προβλήματα με μαθηματικό περιεχόμενο σε ρεαλιστικό πλαίσιο (context problems) ευνοούν τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών και αναδεικνύουν τη χρησιμότητα μίας μαθηματικής έννοιας. Μέσω της εμπλοκής με τα ρεαλιστικά προβλήματα ενισχύεται η δυνατότητα των μαθητών να νοηματοδοτήσουν μία μαθηματική έννοια χωρίς να δοθεί ο ορισμός ή κάποια επεξήγησή της. Στην παρούσα έρευνα δόθηκαν στις μαθήτριες δραστηριότητες στις οποίες η παράγωγος εμφανίζεται ως ταχύτητα, που αποτελεί τον πιο συνηθισμένο τρόπο έκφρασης του μέσου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής (Sahin et. al., 2015). Οι μαθήτριες αναμέναμε να νοηματοδοτήσουν έννοιες σχετικές με την παράγωγο μέσα από δραστηριότητες που αφορούσαν αρχικά στη μελέτη της προπόνησης ενός δρομέα μέσω της εφαρμογής Strava, και στη συνέχεια των κινήσεων ενός ποδηλάτη και ενός μοτοσικλετιστή, που έκαναν την ίδια διαδρομή με τον δρομέα, μέσω του Geogebra. Στόχος των δραστηριοτήτων ήταν η νοηματοδότηση των εννοιών της μέσης ταχύτητας και της κλίσης μέσω του τύπου Δx/Δt και η μετάβαση στη στιγμιαία ταχύτητα και την έννοια του ορίου. Σε αυτή τη μετάβαση ιδιαίτερα σημαντικός ήταν ο ρόλος του τριγώνου της ανάλυσης (calculus triangle) (Weber et al., 2012), δηλαδή ενός ορθογωνίου τριγώνου του οποίου οι κάθετες πλευρές έχουν για μήκος τον αριθμητή και τον παρονομαστή του λόγου dx/dt αντίστοιχα και του οποίου η υποτείνουσα έχει ως φορέα μία τέμνουσα ευθεία της προς μελέτη καμπύλης (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Το τρίγωνο της ανάλυσης

Ως θεωρητικό πλαίσιο επιλέξαμε τα μαθηματικά πεδία εργασίας (Mathematical Working Spaces) (ΜΠΕ) (Kuzniak et al., 2016) μιας και στη δραστηριότητα των μαθητριών εμπλέκονται διαφορετικά περιβάλλοντα και αναπαραστάσεις με διαφορετικό ρόλο στη νοηματοδότηση των εννοιών που σχετίζονται με την παράγωγο. Σύμφωνα με το πλαίσιο των ΜΠΕ, η εργασία των μαθητών για τη νοηματοδότηση μιας μαθηματικής έννοιας λαμβάνει χώρα μεταξύ δύο επιπέδων: (α) του επιστημολογικού επιπέδου, που αναφέρεται στο μαθηματικό περιεχόμενο των έργων στα οποία εμπλέκονται οι μαθητές και (β) του γνωστικού επιπέδου, το οποίο σχετίζεται με την πορεία σκέψης των μαθητών και με τους συλλογισμούς που αναπτύσσουν κατά την ατομική εργασία σε μια δραστηριότητα. Το επιστημολογικό επίπεδο περιλαμβάνει ένα σύνολο αντικειμένων, σχημάτων και συμβόλων, ένα σύνολο τεχνουργημάτων, στα οποία συμπεριλαμβάνονται τα ψηφιακά λογισμικά, και ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς που αποτελείται από θεωρήματα, ορισμούς, ιδιότητες και τύπους. Το γνωστικό επίπεδο αποτελείται από την οπτικοποίηση μέσω της οποίας οι μαθητές ερμηνεύουν τα διαθέσιμα σύμβολα και αναπαραστάσεις, την κατασκευή που πετυχαίνουν μέσω της αξιοποίησης των τεχνουργημάτων και τις διαδικασίες απόδειξης μαθηματικών εικασιών που αναπτύσσουν. Αυτή η σύνδεση γίνεται μέσω γενεσιουργών διαδικασιών που διαμορφώνονται εντός τριών επιμέρους επιπέδων: του σημειωτικού (semiotic), του εργαλειακού (instrumental) και του διαλογικού (discursive) (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Το διάγραμμα των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας

Στο σημειωτικό επίπεδο εντοπίζονται οι ενέργειες που κάνουν οι μαθητές προκειμένου να συνδυάσουν τις σκέψεις, τις εικασίες τους και τα συμπεράσματά τους με τα σύμβολα και τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις. Στο εργαλειακό είναι κυρίαρχη η διαδικασία μετατροπής του τεχνουργήματος σε εργαλείο μέσω της δράσης και του πειραματισμού των μαθητών. Τέλος, στο διαλογικό επίπεδο εντοπίζεται η οργάνωση και η σύνδεση όλων των ιδιοτήτων ενός θεωρητικού συστήματος αναφοράς που γίνεται με στόχο τη μαθηματική αιτιολόγηση εκ μέρους των μαθητών ή την επικύρωση κάποιου συλλογισμού τους. Η παρούσα έρευνα εστιάζεται στον ρόλο των διαφορετικών ψηφιακών περιβαλλόντων στη νοηματοδότηση των εννοιών από τις οποίες εξαρτάται η παράγωγος εντός των τριών επιπέδων νοηματοδότησης, καθώς οι μαθήτριες εμπλέκονται σε δραστηριότητες που έχουν ως βασικό άξονα τη μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα.

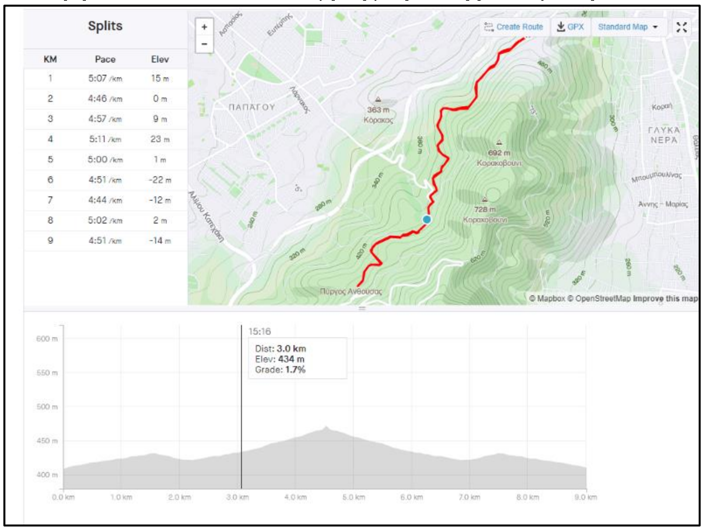
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχουσες και δεδομένα

Στην έρευνα συμμετείχαν τρεις μαθήτριες (Β' Λυκείου) ενός ολιγομελούς τμήματος φροντιστηρίου. Οι δύο από αυτές εργάστηκαν ως ομάδα, ενώ η τρίτη ατομικά. Πραγματοποιήθηκαν τρεις συναντήσεις μέσω τηλεκπαίδευσης με την μαθήτρια που δούλεψε ατομικά (Μ1) και τρεις με την ομάδα (Μ2, Μ3) που διήρκησαν συνολικά 6 και 6,5 ώρες αντίστοιχα. Τα δεδομένα περιλαμβάνουν την καταγραφή της οθόνης των μαθητριών σε όλες τις συναντήσεις και απομαγνητοφωνήθηκε το σύνολο των διαλόγων.

Δραστηριότητες

Η πρώτη δραστηριότητα αφορούσε στη μελέτη της προπόνησης ενός δρομέα μέσω της εφαρμογής Strava με στόχο τη νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας από τις μαθήτριες μέσα από ένα ερώτημα που ζητούσε να βρεθεί το πιο γρήγορο χιλιόμετρο που έκανε σε μία δεδομένη διαδρομή. Ο ρόλος του Strava είναι κρίσιμος σε αυτή την πρώτη φάση της εργασίας των μαθητριών, καθώς παρέχει πληροφορίες για τον συνολικό χρόνο, τη συνολική απόσταση που έκανε ο δρομέας και τον ρυθμό τρεξίματος (pace), ένα μέγεθος που εκφράζει το πηλίκο του χρόνου προς την αντίστοιχη απόσταση που διανύει σε αυτόν (min/km). Οι πληροφορίες αυτές δίνονται μέσω τριών αναπαραστάσεων: ενός χάρτη, ενός γραφήματος στο οποίο υπάρχει μία γραμμή την οποία ο χρήστης χειρίζεται δυναμικά για να πάρει πληροφορίες για κάθε σημείο της προπόνησης, όπως την αντίστοιχη χρονική στιγμή, την συνολική απόσταση που έχει διανύσει μέχρι τότε, και μία στήλη με το μέσο ρυθμό τρεξίματος ανά χιλιόμετρο (Εικόνα 3). Στη δεύτερη δραστηριότητα η εργασία των μαθητριών μεταφέρθηκε από το Strava στο Geogebra, προκειμένου να γίνει μία πρώτη σύνδεση μεταξύ της μέσης και της στιγμιαίας ταχύτητας. Συγκεκριμένα, ένα ερώτημα αφορούσε στην παρατήρηση των γραφικών παραστάσεων που αντιστοιχούσαν σε δύο προπονήσεις του δρομέα και στην εύρεση εκείνης στην οποία ανέπτυξε μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα (Εικόνα 4). Στην τρίτη και τελευταία δραστηριότητα, το σημείο εστίασης ήταν η νοηματοδότηση της στιγμιαίας ταχύτητας μέσω της μελέτης της ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης ενός μοτοσικλετιστή που συναντούσε ο δρομέας στη διαδρομή του. Κεντρικό εργαλείο της δραστηριότητας αυτής ήταν το τρίγωνο της ανάλυσης, το οποίο οι μαθήτριες μπορούσαν να χειριστούν δυναμικά στο Geogebra.



Εικόνα 3: Η εφαρμογή Strava

A priori ανάλυση

Όλες οι δραστηριότητες εκτυλίχθηκαν σε τρία διαφορετικά ΜΠΕ, το Strava, τις στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra και τα ψηφιακά του δομήματα με δυναμικό χειρισμό. Στόχος της αξιοποίησης του Strava και της πρώτης δραστηριότητας ήταν να προκαλέσει τη δράση των μαθητριών σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο όπου θα έπρεπε να αποκωδικοποιήσουν τα δεδομένα που προσφέρουν για την προπόνηση ενός δρομέα οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της εφαρμογής. Η εξερεύνηση της εφαρμογής και η προσπάθεια ερμηνείας των δεδομένων της θα σηματοδοτούσε διαδικασίες νοηματοδότησης από τις μαθήτριες στο σημειωτικό επίπεδο. Η δεύτερη δραστηριότητα είχε στόχο να επεκταθεί η νοηματοδότηση και στα άλλα δύο επίπεδα, το εργαλειακό και το διαλογικό. Τις αναπαραστάσεις του Strava διαδέχθηκαν οι στατικές γραφικές παραστάσεις του Geogebra. Σε αυτό το ΜΠΕ αναμέναμε την παρατήρηση και την προσπάθεια ερμηνείας των διαγραμμάτων, όπως επίσης και την παρέμβαση των μαθητριών σε αυτά με αξιοποίηση των εργαλείων του Geogebra (π.χ. μείωση διαστημάτων Δx). Στόχος ήταν οι μαθήτριες να εργαστούν με βάση ένα θεωρητικό σύστημα αναφοράς και να ερμηνεύσουν τις γραφικές παραστάσεις με βάση την ταχύτητα και την κλίση, και πιο συγκεκριμένα μέσω του τύπου Δx/Δt. Στην τρίτη δραστηριότητα αναμέναμε οι μαθήτριες να συνδέσουν τη στιγμιαία ταχύτητα του μοτοσικλετιστή με το τρίγωνο της ανάλυσης, μέσω διαδικασιών νοηματοδότησης εντός του εργαλειακού και σημειωτικού επιπέδου. Η ύπαρξη ενός δρομέα στο Geogebra που αλλάζει τη βάση του τριγώνου είχε στόχο τη δημιουργία πολλών διαφορετικών τριγώνων, την παρατήρηση αυτών και τις συνδέσεις με τις προηγούμενες δραστηριότητες, για να ολοκληρωθεί η μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα.

Μέθοδος ανάλυσης

Στην ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ανοιχτής κωδικοποίησης - open coding (Strauss, & Corbin, 1998) με τους κωδικούς να αναφέρονται στις έννοιες τις οποίες προσπάθησαν να νοηματοδοτήσουν οι μαθήτριες μέσω των δραστηριοτήτων, όπως επίσης και στα διαφορετικά ΜΠΕ στα οποία δούλευαν κάθε φορά. Οι κωδικοί για τις αντίστοιχες έννοιες είναι «μέση ταχύτητα», «Δx/Δt», «στιγμιαία ταχύτητα», «όριο», «κλίση» και «κλίση εφαπτομένης», ενώ για τα ΜΠΕ είναι «Strava», «στατικές γραφικές παραστάσεις Geogebra» και «δομήματα του Geogebra με δυναμικό χειρισμό». Από την ανάλυση του συνόλου των δεδομένων επιλέχθηκαν τρία επεισόδια, ένα από κάθε δραστηριότητα, που αναδεικνύουν την εξέλιξη της νοηματοδότησης των εννοιών που αναφέρθηκαν παραπάνω στα διαφορετικά ΜΠΕ.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

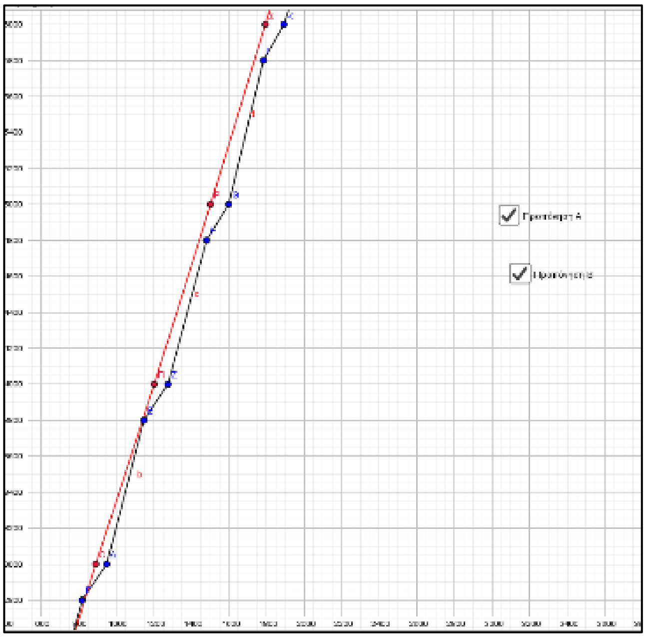
Η μέση ταχύτητα και ο λόγος Δx/Δt

Στην πρώτη δραστηριότητα, η οποία αποσκοπούσε στη νοηματοδότηση της μέσης ταχύτητας μέσω της μελέτης της προπόνησης του δρομέα στο ΜΠΕ Strava, η βασικότερη γνωστική ενέργεια εκ μέρους των μαθητριών ήταν η οπτικοποίηση των αναπαραστάσεών της, τις οποίες έβλεπαν για πρώτη φορά. Ας δούμε την περίπτωση της Μ1, με αφορμή το ερώτημα που ζητούσε την εύρεση του πιο γρήγορου χιλιομέτρου από τα 9 που έτρεξε συνολικά ο δρομέας στην προπόνησή του. Εντός του σημειωτικού επιπέδου, προσπάθησε αρχικά να ερμηνεύσει το γράφημα του Strava συνδέοντας την κλίση του δρόμου με την ταχύτητα (*Μ1: Λοιπόν, πιστεύω ότι θα είναι κάποιο από την κατηφόρα, διότι όταν τρέχουμε σε κατηφόρα πάμε πιο γρήγορα*). Η τελική της απάντηση, όμως, δεν προήλθε μόνο από αυτόν τον εμπειρικό τρόπο σκέψης της. Συνέχισε την εργασία της εντός του εργαλειακού και διαλογικού επιπέδου, όπου προσπάθησε να υπολογίσει τη μέση ταχύτητα του δρομέα σε κάθε χιλιόμετρο της διαδρομής μέσω του τύπου Δx/Δt. Για την εύρεση της αρχικής και της τελικής τιμής του χρόνου και της απόστασης σε κάθε χιλιόμετρο η μαθήτρια μετακινούσε δυναμικά τη γραμμή του γραφήματος του Strava στις κατάλληλες θέσεις. Με αυτόν τον τρόπο εντοπίζουμε τη μετάβαση της νοηματοδότησης από το σημειωτικό στο εργαλειακό επίπεδο.

Η στιγμιαία ταχύτητα

Στη δεύτερη δραστηριότητα η δράση των μαθητριών μεταφέρθηκε από το ΜΠΕ Strava στο ΜΠΕ Geogebra (στατικές γραφικές παραστάσεις). Οι μαθήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήματα τα οποία εκτός από τη μέση αφορούσαν και στη στιγμιαία ταχύτητα του δρομέα, παρατηρώντας τα διαγράμματα x-t δύο διαφορετικών προπονήσεων του δρομέα (Εικόνα 4). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το ερώτημα που ζητούσε από τις μαθήτριες να βρουν κατά τη διάρκεια ποιας προπόνησης ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα. Οι μαθήτριες νοηματοδότησαν τη στιγμιαία ταχύτητα με δυο τρόπους. Ο πρώτος αναπτύχθηκε εντός του σημειωτικού επιπέδου του ΜΠΕ και βασίστηκε στην προσωπική εμπειρία των μαθητριών, ενώ ο δεύτερος αναπτύχθηκε εντός και των τριών επιπέδων του ΜΠΕ και βασίστηκε στην αξιοποίηση της μέσης ταχύτητας και του λόγου Δx/Δt. Σχετικά με τον εμπειρικό τρόπο νοηματοδότησης, η Μ1 διατύπωσε το συμπέρασμα πως ο δρομέας ανέπτυξε μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα στην προπόνηση Β επειδή σε αυτή έκανε διαλείμματα για 200 μέτρα και συνεπώς στα 800 που ακολούθησαν θα πήγαινε πιο γρήγορα.

Μ1: Γιατί παρόλο που στην προπόνηση Α παρατηρούμε ότι έχει μία σταθερή ταχύτητα, στην προπόνηση Β βλέπουμε ότι παρόλο που πήγαινε σταθερά μετά έκοβε για να κάνει ένα διάλειμμα και στη συνέχεια προσπαθούσε να βρει την προηγούμενή του ταχύτητα οπότε μπορεί να την ξεπέρασε κιόλας.



Εικόνα 4: Οι δύο προπονήσεις του δρομέα

Εντός του σημειωτικού επιπέδου και μέσω της παρατήρησης των γραφικών παραστάσεων, η Μ1 διέκρινε ότι η μία από τις δύο αναπαριστά μία διαλειμματική προπόνηση συνδέοντας την έννοια της κλίσης με την έννοια της ταχύτητας. Από την άλλη, η Μ3 της ομάδας επέλεξε να εφαρμόσει τη στρατηγική μείωσης του διαστήματος υπολογισμού της μέσης ταχύτητας για να προσεγγίσει τη στιγμιαία. Τη στρατηγική αυτή την ανέπτυξε εντός και των τριών επιπέδων νοηματοδότησης. Αρχικά, εντός του σημειωτικού επιπέδου παρατήρησε επίσης την κλίση στις δύο διαφορετικές γραφικές παραστάσεις και νοηματοδότησε τη στιγμιαία ταχύτητα υπολογίζοντας τη μέση ταχύτητα στα τμήματα των προπονήσεων όπου ο δρομέας έτρεχε. Για τον υπολογισμό των τελικών και αρχικών τιμών του χρόνου η μαθήτρια εργάστηκε στο εργαλειακό επίπεδο. Εντός αυτού σχεδίαζε τα κατάλληλα σημεία στη γραφική παράσταση που απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα (ανά 200 και 800 μέτρα ως προς τον κατακόρυφο άξονα της απόστασης) προκειμένου να πετύχει ένα παρόμοιο διαχωρισμό με εκείνον της μπλε (διαλειμματική προπόνηση του δρομέα). Στο απόσπασμα που ακολουθεί η Μ3 εξηγεί στον ερευνητή πως σχεδίασε ένα από τα σημεία αυτά (Ω):

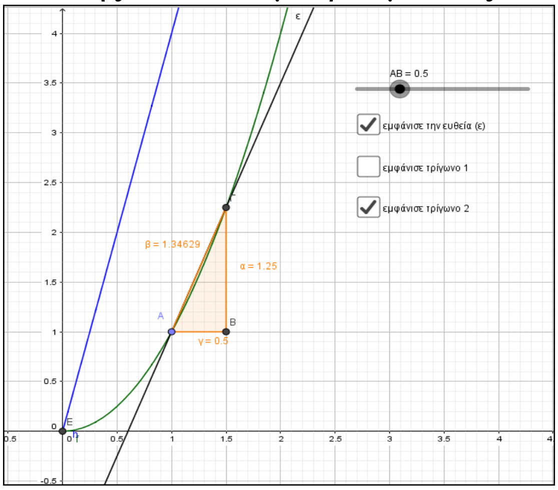
Μ3: Λοιπόν πήρα το σημείο Ω το οποίο είναι το (831.6, 2800) στην κόκκινη γραμμή. Αποκλίνει κάποια δευτερόλεπτα από το σημείο Γ(818,2800) [της μπλε γραφικής], οπότε ουσιαστικά θα πρέπει να βρούμε το υ του άλλου, πόσο κάνει στα 203 δευτερόλεπτα.

Ερευνητής: Το 203 τι είναι;

Μ3: Είναι η διαφορά 818-615 [το Δt που αντιστοιχεί στο τμήμα ΒΓ της μπλε].

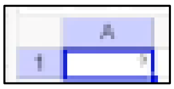
Όριο και στιγμιαία ταχύτητα

Στην τρίτη δραστηριότητα που είχε στόχο την ολοκλήρωση της μετάβασης από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα, προστέθηκε η επιταχυνόμενη κίνηση ενός μοτοσικλετιστή και οι μαθήτριες εργάστηκαν στο ΜΠΕ Geogebra (δομήματα με δυναμικό χειρισμό). Στο ερώτημα που ζητούσε τον υπολογισμό, κατά προσέγγιση, της στιγμιαίας του ταχύτητας τη χρονική στιγμή t=1s, ήταν καθοριστικός ο ρόλος του τριγώνου της ανάλυσης. Για την εξοικείωση των μαθητριών με αυτό είχε προηγηθεί ένα ερώτημα που ζητούσε την εύρεση της μέσης ταχύτητας του μοτοσικλετιστή στα χρονικά διαστήματα 1-2s, 1-1.5s και 1-1.25s. Όλες οι μαθήτριες δρώντας εντός του σημειωτικού και του διαλογικού επιπέδου με βάση τον τύπο Δx/Δt και την ταυτόχρονη παρατήρηση του τριγώνου, κατέληξαν στο συμπέρασμα πως ο λόγος αυτός εκφράζεται στο σχήμα ως α/γ (Εικόνα 5). Στο παραπάνω ερώτημα το χρονικό διάστημα ελαττώνεται και ύστερα από την απόφαση της Μ3, στη δραστηριότητα 2, να υπολογίσει τη μέση ταχύτητα του δρομέα ανά 800 μέτρα αντί για 1000, οι μαθήτριες κλήθηκαν να εφαρμόσουν αυτή τη στρατηγική της μείωσης του χρονικού διαστήματος σε ένα διαφορετικό πεδίο εργασίας, αυτό



Εικόνα 5: Το τρίγωνο της ανάλυσης στη δραστηριότητα 3

του τριγώνου της ανάλυσης. Σε σχέση με τις προηγούμενες δραστηριότητες, η δράση όλων των μαθητριών εντοπίζεται κυρίως στο εργαλειακό και στο σημειωτικό επίπεδο νοηματοδότησης, όπου χειρίζονταν δυναμικά ένα δρομέα στο Geogebra που άλλαζε το μήκος της πλευράς AB του τριγώνου (Εικόνα 5) παρατηρώντας ταυτόχρονα τις αλλαγές στην τιμή του λόγου α/γ στο υπολογιστικό φύλλο του Geogebra που εμφανιζόταν στο δεξί μέρος της οθόνης, δίπλα από το γράφημα. Παρόλο που είχαν εφαρμόσει σε προηγούμενα ερωτήματα τη στρατηγική μείωσης των διαστημάτων, καμία μαθήτρια δεν προχώρησε άμεσα στη μετακίνηση του σημείου B προς το A. Ως αποτέλεσμα, πειραματίζονταν συνεχώς με το Geogebra, παρατηρώντας παράλληλα τις μεταβολές του τριγώνου και του λόγου α/γ, δημιουργώντας έτσι κάποιες εικασίες. Για παράδειγμα, οι μαθήτριες της ομάδας κατέληξαν σε ένα μοτίβο σύμφωνα με το οποίο κάθε φορά που το χρονικό διάστημα μειώνεται κατά 0,25s η ταχύτητα μειώνεται και αυτή κατά 0,25 m/s. Την εικασία αυτή προσπάθησαν να την επαληθεύσουν δίνοντας και άλλες τιμές στο δρομέα AB, με τελικό αποτέλεσμα τη σύγκλιση του σημείου B προς το σημείο A. Σε αυτό το σημείο η δράση όλων των μαθητριών ήταν παρόμοια, αφού και οι μαθήτριες της ομάδας και η Μ1 έστρεψαν την προσοχή τους στο υπολογιστικό φύλλο. Κάθε φορά που το σημείο B ταυτιζόταν με το A εμφανιζόταν ένα ερωτηματικό στην τιμή του λόγου α/γ, εξαιτίας της απροσδιοριστίας 0/0 (Εικόνα 6).



Εικόνα 6

Το στοιχείο αυτό αποτέλεσε το έναυσμα για να κινήσουν οι μαθήτριες το δρομέα ΑΒ, επιλέγοντας μόνο πολύ μικρές τιμές. Έτσι, συμπέραναν ότι η ταχύτητα τείνει να πάρει την τιμή 2 («*Μ2: Πάει να γίνει και καλά 2,1»*, *«Μ1: Θα έβγαινε 2;»*), νοηματοδοτώντας με αυτόν τον τρόπο την έννοια του ορίου και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέσω των παραπάνω δραστηριοτήτων και τη σταδιακή μετάβαση από τη μέση στη στιγμιαία ταχύτητα οι μαθήτριες νοηματοδότησαν τις έννοιες που σχετίζονται με την παράγωγο, εναλλάσσοντας τη δράση τους μεταξύ του σημειωτικού, του εργαλειακού και του διαλογικού επιπέδου. Η χρήση της πρωτόγνωρης, για τις μαθήτριες, εφαρμογής Strava είχε ως επακόλουθο την ανάπτυξη διαδικασιών νοηματοδότησης στο σημειωτικό επίπεδο, όπου προσπάθησαν να αποκωδικοποιήσουν τις αναπαραστάσεις της. Και στη δεύτερη δραστηριότητα, όπου δινόταν μια διαφορετική αναπαράσταση των προπονήσεων του δρομέα, αλλά και στο Geogebra, οι μαθήτριες ξεκίνησαν να εργάζονται στο σημειωτικό επίπεδο. Και στις δύο περιπτώσεις, η μετάβαση στο διαλογικό και εργαλειακό επίπεδο έγινε με σκοπό τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας. Για τον συγκεκριμένο υπολογισμό αξιοποιήθηκαν αρχικά ο λόγος $\Delta x/\Delta t$ και στη συνέχεια τα ψηφιακά μέσα για την εύρεση των τιμών της μετατόπισης και του χρόνου. Στη δεύτερη δραστηριότητα μάλιστα, ο λόγος $\Delta x/\Delta t$ χρησιμοποιήθηκε για τη σύνδεση της μέσης με τη στιγμιαία ταχύτητα, όπως ανέδειξε η Μ3 με την εφαρμογή της στρατηγικής μείωσης διαστημάτων. Στην τρίτη δραστηριότητα που σχεδιάστηκε με βάση αυτή τη στρατηγική και τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του δρομέα στο ΜΠΕ Geogebra (αλλαγή των διαστάσεων του τριγώνου της ανάλυσης) οι μαθήτριες εργάστηκαν κατά κύριο λόγο εντός του εργαλειακού επιπέδου. Αξιοποιώντας όλα τα προηγούμενα συμπεράσματά τους σχετικά με τη μέση ταχύτητα, τον λόγο $\Delta x/\Delta t$ και την κλίση, οι μαθήτριες προσέγγισαν τη στιγμιαία ταχύτητα του μοτοσικλετιστή (σύγκλιση του σημείου Β προς το Α) ύστερα από συνεχόμενο πειραματισμό με τον δρομέα και το τρίγωνο της ανάλυσης και είχαν μία πρώτη εμπειρία της έννοιας του ορίου, χτίζοντας έτσι τις κατάλληλες βάσεις για τη νοηματοδότηση της παραγώγου. Φαίνεται ότι η νοηματοδότηση των μαθητριών αναπτύχθηκε σταδιακά μέσα από τη δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα στα διαφορετικά ΜΠΕ. Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει τη δυναμική της αξιοποίησης ρεαλιστικών καταστάσεων και ψηφιακών εργαλείων στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που ευνοούν τη νοηματοδότηση εννοιών που σχετίζονται με την παράγωγο πριν την επίσημη διδασκαλία της στο λύκειο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(7), 2947-2967.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, *39*(1), 111-129.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Sahin, Z., Yenmez, A. A., & Erbas, A. K. (2015). Relational understanding of the derivative concept through mathematical modeling: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(1), 177-188.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 105-119). MAA Notes No. 19.

Weber, E., Tallman, M., Byerley, C., & Thompson, P. W. (2012). Understanding the derivative through the calculus triangle. *The Mathematics Teacher*, *106*(4), 274-278.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103-127.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟ 1975 ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ

Δακορώνια Ευαγγελία, Αναστασάκης Μαρίνος

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης

evagdacor@gmail.com, m.anastasakis@uoc.gr

Η παρούσα έρευνα μελετά τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται στους μαθητές/-τριες Λυκείου οι έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μέσω τεσσάρων κατηγοριών εργασιών που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα. Σκοπός μας είναι να ερμηνεύσουμε σε ποια κατηγορία δίνει βαρύτητα η εκάστοτε συγγραφική ομάδα, ώστε να διαπιστωθεί κατά πόσο έχουν τροποποιηθεί ή όχι οι προτεραιότητες που θέτει, μέσω της Ανθρωπολογικής Θεωρίας της Διδακτικής. Τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας δείχνουν ότι μια κατηγορία εργασιών υπερτερεί διαχρονικά, με παράλληλη αύξηση μιας άλλης κατηγορίας από το 1990 και έπειτα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών αποτελούν την κύρια πηγή μάθησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Shield & Dole, 2013), ενώ διαμορφώνουν τις πεποιθήσεις των μαθητών/-τριών ως προς το τι «είναι τα μαθηματικά» και τι σημαίνει «γνωρίζω μαθηματικά» (Κολέζα, 2017, σελ. 363). Ταυτόχρονα, αποτυπώνουν σε μεγάλο βαθμό τις προθέσεις του αναλυτικού προγράμματος σπουδών (Pepin & Guedeut, 2014), ενώ οι ίδιοι μαθητές/-τριες τα χρησιμοποιούν όχι μόνο κατ' εντολή του εκπαιδευτικού αλλά και για να βρουν βοηθητικές πληροφορίες κατά την επίλυση ασκήσεων ή προβλημάτων (Rezat, 2009).

Σε επίπεδο περιεχομένου, οι εργασίες που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε ερωτήσεις, ασκήσεις και προβλήματα (Niss, 1993). Οι ερωτήσεις εξετάζουν ορισμούς, θεωρήματα και ιδιότητες διαφόρων μαθηματικών εννοιών και μπορούν να απαντηθούν απευθείας από τους μαθητές/-τριες ή κάνοντας σύντομους υπολογισμούς. Οι ασκήσεις αναφέρονται σε εργασίες «ρουτίνας», που επιλύονται με τη χρήση χαρτιού-μολυβιού και χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση τυπικών μεθόδων και τεχνικών επίλυσης. Τέλος, τα προβλήματα αντιστοιχούν σε «μη τετριμμένες» εργασίες, η επίλυση των οποίων απαιτεί το συνδυασμό διαφορετικών τεχνικών και εννοιών. Μια πρόσθετη κατηγορία εργασιών που εμπεριέχεται πλέον στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών (χωρίς να αποτελεί απαραίτητα μέρος του αναλυτικού προγράμματος σπουδών) είναι οι εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης, οι οποίες συνδέουν τα μαθηματικά με τον ρεαλιστικό κόσμο και περιλαμβάνουν ασκήσεις και προβλήματα από την πραγματική ζωή που επιλύονται με τη χρήση μαθηματικών υπολογισμών (Treffert-Thomas et al., 2017).

Διάφορες μελέτες για τα σχολικά εγχειρίδια έχουν εστιάσει στη συχνότητα χρήσης ασκήσεων ή προβλημάτων, στη διαβάθμιση δυσκολίας των χρησιμοποιούμενων προβλημάτων, στον ρόλο των προβλημάτων κατά τη διδακτική πράξη και τη θέση ή τον ρόλο της γεωμετρίας όπως αποτυπώνεται στα βιβλία διάφορων χωρών. Πιο συγκεκριμένα, οι Vincent και Stacey (2008) μελέτησαν τα πιο δημοφιλή βιβλία μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στα Γυμνάσια της Αυστραλίας και βρήκαν ότι στην πλειοψηφία τους κάνουν χρήση εργασιών χαμηλής δυσκολίας (low procedural complexity), δηλαδή ασκήσεων. Οι Jäder et al. (2020) εξέτασαν τα προβλήματα εγχειριδίων της άλγεβρας και της γεωμετρίας από δώδεκα χώρες και συμπέραναν ότι στην πλειοψηφία τους, τα χρησιμοποιούμενα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν από τους μαθητές/-τριες κάνοντας χρήση λυμένων παραδειγμάτων. Αντίστοιχα, οι Jones και Fujita (2013) σύγκριναν το ρόλο των προβλημάτων που υπάρχουν στα βιβλία γεωμετρίας της Αγγλίας και της Ιαπωνίας, και βρήκαν ότι στην Ιαπωνία τα προβλήματα χρησιμοποιούνται για να εισαχθούν οι μαθητές/-τριες σε διάφορες μαθηματικές έννοιες, ενώ στην Αγγλία οι μαθητές/-τριες επιλύουν τα προβλήματα αφότου πρώτα διδαχθούν τις έννοιες αυτές. Τέλος, οι Kuzniak και Vivier (2009) σύγκριναν τα σχολικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Ελλάδας και της Γαλλίας και συμπέραναν ότι παρόλο που η γεωμετρία στην Ελλάδα διδάσκεται μόνο για πολιτισμικούς λόγους, η αξιωματική της θεμελίωση είναι καλύτερα δομημένη από εκείνη της Γαλλίας.

Με βάση την επισκόπηση της βιβλιογραφίας που πραγματοποιήσαμε, φαίνεται πως στην ελληνική βιβλιογραφία δεν υπάρχουν έρευνες που σχετίζονται με τα διαφορετικά είδη εργασιών που συναντώνται στα σχολικά εγχειρίδια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (π.χ. ασκήσεις και προβλήματα), ούτε για το είδος της μαθηματικής γνώσης που προάγουν αυτά. Συνεπώς, τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι τα εξής:

1. Ποια είδη εργασιών υπάρχουν στα ελληνικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα και τι είδους μεταβολές παρουσιάζουν;
2. Με βάση τα παραπάνω είδη εργασιών, τι μπορούμε να πούμε για τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές/-τριες εισάγονται στις διάφορες γεωμετρικές έννοιες;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Για την απάντηση των ερωτημάτων που μας απασχολούν χρησιμοποιήθηκε η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (ΑΘΔ) του Chevallard. Σύμφωνα με τον Chevallard (2006), η «βασική μονάδα με την οποία κάποιος μπορεί να αναλύσει εκτενώς την ανθρώπινη δραστηριότητα» και να βρει «ποιο είναι το αντικείμενο της γνώσης» είναι η *πραξεολογία* (σελ. 23). Κάθε πραξεολογία απαρτίζεται από δύο κύρια δομικά μέρη: την «πράξη», δηλαδή το πρακτικό μέρος μιας δραστηριότητας και τον «λόγο», δηλαδή το μέρος που δικαιολογεί την πράξη (Chevallard & Sencevy, 2014). Η πράξη αποτελείται από τις εργασίες (tasks, οι ενέργειες που πραγματοποιούμε όταν εμπλεκόμαστε σε μια δραστηριότητα) και τις τεχνικές (techniques, οι τρόποι με τους οποίους πραγματοποιούμε κάποιο έργο), ενώ ο λόγος από την τεχνολογία (technology, οι τρόποι με τους οποίους δικαιολογούμε και σχεδιάζουμε κάποια τεχνική) και τη θεωρία (theory, το υπόβαθρο που εξηγεί και δικαιολογεί κάθε μέρος των τεχνολογιών που χρησιμοποιούμε) (Bosch & Gascón, 2014).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια εκπόνησης μεταπτυχιακής εργασίας και εξετάζει την παρουσία και χρήση εικόνων και εργασιών στα σχολικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα (Δακορώνια, 2020). Το δείγμα μας αποτελείται από τα σχολικά εγχειρίδια στα οποία είχαμε πρόσβαση (N=*8*) και χρησιμοποιούνταν κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρία στην Α’ και Β’ Λυκείου από το 1975 μέχρι σήμερα (Πίνακας 1).

Σχολικό εγχειρίδιο	**Κωδικός**	**Περίοδος χρήσης**
Ευκλείδειος Γεωμετρία (Γ’, Δ’, Ε’ και ΣΤ’ Γυμνασίου)	Α	1975-1976 [1]
Ευκλείδειος Γεωμετρία (Β’ Λυκείου)	Β	1979-1986
Θεωρητική Γεωμετρία (Α’ Λυκείου)	Γ	1979-1990
Θεωρητική Γεωμετρία (Β’ Λυκείου)	Δ	1986-1991
Θεωρητική Γεωμετρία (Α’ Λυκείου)	Ε	1990-1999
Θεωρητική Γεωμετρία (Β’ Λυκείου)	ΣΤ	1991-1999
Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α’ και Β’ Λυκείου)	Ζ	1999-2001
Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α’ και Β’ Λυκείου)	Η	2001-σήμερα [2]

Πίνακας 1: Απόδοση κωδικών στα εγχειρίδια και περίοδος χρήσης

Με δεδομένο ότι μας ενδιέφερε το περιεχόμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου και όχι το περιεχόμενο ανά τάξη και προκειμένου να είναι εφικτές οι συγκρίσεις μεταξύ αυτών, πραγματοποιήθηκαν τα εξής: (α) για κάθε περίοδο χρήσης που δεν υπήρχε κοινό εγχειρίδιο για την Α’ και Β’ Λυκείου, δημιουργήθηκε ένα Βιβλίο το οποίο περιέχει τα εγχειρίδια των δύο τάξεων (δηλαδή το Β με το Γ, το Δ με το Γ [3] και το Ε με το ΣΤ), (β) κατ’ εξαίρεση, αν και το εγχειρίδιο Α προοριζόταν και για την Γ’ Γυμνασίου (1975-1976), συμπεριλήφθηκε αυτούσιο ώστε να εξασφαλιστεί και η απαιτούμενη για τις συγκρίσεις ομοιογένεια ως προς το περιεχόμενο. Με αυτόν τον τρόπο προέκυψαν έξι Βιβλία τα οποία χρησιμοποιούνταν για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο (Πίνακας 2).

Βιβλίο	**Σχολικά εγχειρίδια**	**Περίοδος χρήσης**
Βιβλίο 1	Α	1975-1976
Βιβλίο 2	Β+Γ	1979-1986
Βιβλίο 3	Γ+Δ	1986-1990
Βιβλίο 4	Ε+ΣΤ	1990-1999
Βιβλίο 5	Ζ	1999-2001
Βιβλίο 6	Η	2001-σήμερα

Πίνακας 2: Κατανομή Βιβλίων ανά περίοδο χρήσης

Σε επίπεδο περιεχομένου, επειδή δεν υπήρχε διαθέσιμη στη βιβλιογραφία κάποιου είδους κατηγοριοποίηση των επιμέρους περιοχών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δημιουργήθηκαν δέκα θεματικές περιοχές με βάση τα σχολικά εγχειρίδια Ζ (1999-2001) και Η (2001-σήμερα). Οι περιοχές αυτές είναι:

1. Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία: εισαγωγικές έννοιες της γεωμετρίας (σημεία, ευθείες, επίπεδο), ο κύκλος και τα στοιχεία του, πράξεις, συγκρίσεις και σχέσεις μεταξύ γωνιών.
2. Τρίγωνα: είδη, στοιχεία και κριτήρια τριγώνων, συμμετρίες, τριγωνική ανισότητα, σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου ή δύο κύκλων, γεωμετρικές κατασκευές τριγώνων, μεσοκάθετος, διχοτόμος.
3. Παράλληλες ευθείες: ορισμός και κατασκευή παράλληλων ευθειών, το αίτημα του Ευκλείδη, γωνίες με παράλληλες πλευρές, άθροισμα γωνιών τριγώνου.
4. Τετράπλευρα: ορισμοί και ιδιότητες σχημάτων.
5. Εγγεγραμμένα σχήματα: ορισμούς και σχέσεις εγγεγραμμένων και εγγράψιμων σχημάτων.
6. Αναλογίες και Ομοιότητα: λόγοι ευθύγραμμων τμημάτων, θεώρημα του Θαλή, θεώρημα των διχοτόμων, Απολλώνιος Κύκλος.

7. Μετρικές σχέσεις σε τρίγωνα, πολύγωνα και κύκλο: ορθές προβολές, Πυθαγόρειο Θεώρημα, θεώρημα των διαμέσων, τέμνουσες κύκλου.
8. Εμβαδά: τύποι εμβαδών βασικών σχημάτων, λόγοι εμβαδών όμοιων τριγώνων ή πολυγώνων.
9. Μέτρηση κύκλου: ορισμοί, ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων, μήκος τόξου, εμβαδό κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος.
10. Στερεομετρία: σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδου στο χώρο, θεώρημα του Θαλή, απόσταση σημείου από επίπεδο ή δύο παράλληλων επιπέδων, δίεδρη γωνία, στερεά σχήματα.

Ως προς την κατηγοριοποίηση των εργασιών που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αξιοποιήθηκαν οι μελέτες των Niss (1993) και Treffert-Thomas et al. (2017). Πιο συγκεκριμένα, **ερωτήσεις (Ε)** θεωρούνται οι εργασίες που εξετάζουν τη μαθηματική γνώση χωρίς τη χρήση χαρτιού-μολυβιού (π.χ. διατύπωση ορισμών ή θεωρημάτων), **ασκήσεις (Α)** θεωρούνται οι εργασίες που απαιτούν συγκεκριμένες μεθόδους και τεχνικές (π.χ. απευθείας εφαρμογή κάποιου θεωρήματος), τα **προβλήματα (Π)** αναφέρονται σε συνδυασμό περισσότερων μαθηματικών εννοιών για την επίλυση της κάθε εργασίας και οι εργασίες **μαθηματικής μοντελοποίησης (ΜΜ)** συνδέουν τα μαθηματικά με το ρεαλιστικό κόσμο (Πίνακας 3).

Εργασία	**Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα**
Ερώτηση	Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή. (Εγχειρίδιο Ε, σελ. 103)
Άσκηση	Σ’ ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι δύο κάθετες πλευρές του είναι 15 cm και 20 cm. Να βρεθούν η υποτείνουσα του τριγώνου, οι προβολές των κάθετων πλευρών του πάνω στην υποτείνουσα και το ύψος του από την ορθή γωνία. (Εγχειρίδιο Β, σελ. 26)
Πρόβλημα	Σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων (Εγχειρίδιο Δ, σελ. 39)
Εργασία Μαθηματικής Μοντελοποίησης	Από ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 10m και 5m πέρασε αγροτικός δρόμος πλάτους 2m. Κατά πόσα m^2 μειώθηκε το οικόπεδο; (Εγχειρίδιο ΣΤ, σελ. 35)

Πίνακας 3: Παραδείγματα εργασιών

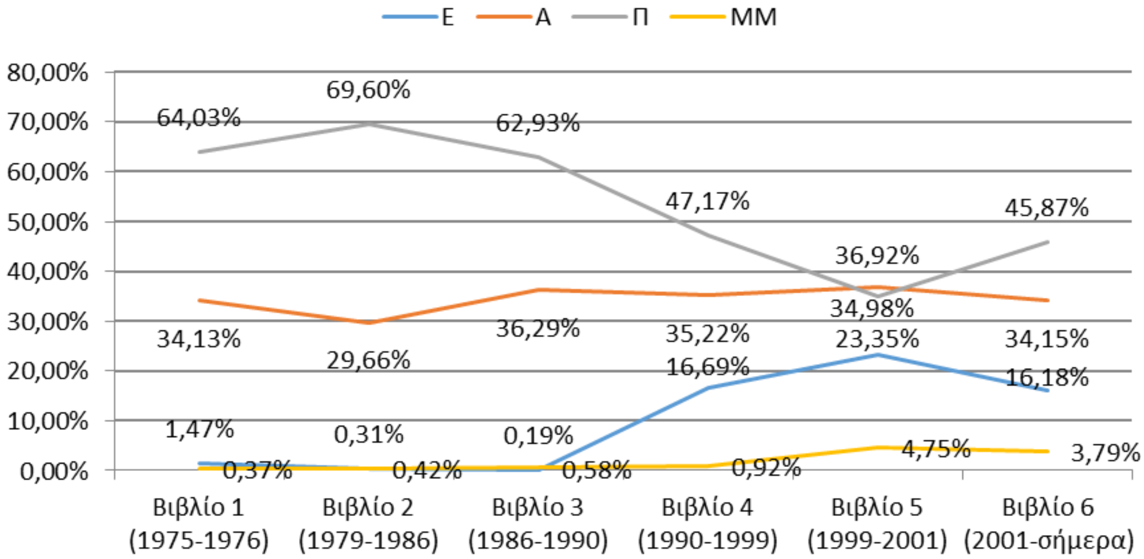
Για την απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος πραγματοποιήθηκε ποιοτική ανάλυση περιεχομένου (Qualitative Content Analysis: Schreier, 2014) κατά την οποία από τις 5248 εργασίες οι 533 κωδικοποιήθηκαν ως ερωτήσεις, οι 1797 ως ασκήσεις, οι 2817 ως προβλήματα και οι 101 ως εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης. Για την καταγραφή πιθανών μεταβολών συγκρίθηκαν τα ποσοστά χρήσης των εργασιών ανά Βιβλίο και ανά θεματική περιοχή. Για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκε η έννοια της πραξεολογίας του Chevallard (2006) θεωρώντας ως «εργασίες» τις άλυτες εργασίες των Βιβλίων γεωμετρίας, ως «τεχνικές» τις τέσσερις κατηγορίες εργασιών (Ε, Α, Π, ΜΜ), ως «τεχνολογία» τη λογική πίσω από τη χρήση των Ε, Α, Π και ΜΜ, και τέλος ως «θεωρία» το σύνολο των θεμελιωδών αξιωμάτων της Γεωμετρίας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο Γράφημα 1 παρουσιάζονται τα ποσοστά ερωτήσεων, ασκήσεων, προβλημάτων και εργασιών μαθηματικής μοντελοποίησης ανά Βιβλίο. Σε γενικές γραμμές, τα προβλήματα αποτελούν το συχνότερα χρησιμοποιούμενο τύπο εργασιών σε όλα τα Βιβλία (με εξαίρεση το Βιβλίο 5). Οι ερωτήσεις παρουσιάζουν αυξημένη χρήση από το Βιβλίο 4 και έπειτα, ενώ οι εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης δεν χρησιμοποιούνται σχεδόν καθόλου. Από το Γράφημα 1 γίνεται επίσης αντιληπτό ότι στα Βιβλία 1, 2 και 3 η χρήση προβλημάτων παρουσιάζει τιμές μεγαλύτερες του 62%, σε αντίθεση με τα Βιβλία 4, 5 και 6 όπου η χρήση τους κυμαίνεται σε ποσοστά μικρότερα του 48%. Οι ασκήσεις παραμένουν σε σταθερές τιμές σε όλα τα Βιβλία. Αντίθετα, η χρήση ερωτήσεων είναι μικρότερη του 1,5% στα Βιβλία 1, 2 και 3 και αυξάνεται ραγδαία ξεπερνώντας την τιμή του 16% στα Βιβλία 4, 5 και 6. Τέλος, οι εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης εμφανίζουν κατά την πλειονότητα τιμές μικρότερες του 1%, με την τιμή αυτή να αυξάνεται στα Βιβλία 5 και 6 πάνω από 3,7%. Ανάλογα αποτελέσματα παρατηρήθηκαν και στη χρήση εργασιών ανά θεματική περιοχή, δηλαδή κατά τη χρονολογική περίοδο 1975-1990 σε όλες τις θεματικές περιοχές γίνεται συχνότερη χρήση προβλημάτων, ενώ κατά την περίοδο 1990 μέχρι σήμερα παρατηρήθηκε πτώση της χρήσης των προβλημάτων και αύξηση της χρήσης των ερωτήσεων.

Οι παραπάνω διαφορές (ανά βιβλίο) ενδεχομένως να υποδηλώνουν δύο χρονολογικές περιόδους στις οποίες η χρήση εργασιών να παρουσίασε διαφοροποίηση: η πρώτη αφορά στα Βιβλία 1, 2 και 3 (1975-1990), ενώ η δεύτερη στα Βιβλία 4, 5 και 6 (1990-σήμερα). Προκειμένου να ελεγχθεί η υπόθεση αυτή, υπολογίστηκε ο μέσος όρος για κάθε τύπο εργασιών (Πίνακας 4) και ελέγχθηκε αν οι παρατηρούμενες διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές. Μέσω συγκρίσεων προέκυψε ότι από 65,89% στα

Βιβλία 1, 2 και 3 ο μέσος όρος χρήσης των προβλημάτων μειώθηκε στο 42,08% στα Βιβλία 4, 5 και 6, με τη διαφορά αυτή να είναι στατιστικά σημαντική ($z=17.29$, $p<0.05$). Αντίθετα, η χρήση των ερωτήσεων αυξήθηκε από το 0,78% στα Βιβλία 1, 2 και 3 στο 19,08% στα Βιβλία 4, 5 και 6, με την παρατηρούμενη διαφορά να είναι εξίσου στατιστικά σημαντική ($z=-21.94$, $p<0.05$).



Γράφημα 1: Ποσοστά εμφάνισης ανά Βιβλίο των ερωτήσεων (Ε), ασκήσεων (Α), προβλημάτων (Π) και εργασιών μαθηματικής μοντελοποίησης (ΜΜ)

	Πρώτη περίοδος (1975-1990)	**Δεύτερη περίοδος (1990-σήμερα)**
Ε	0,78%	19,08%
Α	32,90%	35,53%
Π	65,89%	42,08%
ΜΜ	0,43%	3,35%

Πίνακας 4: Μέσος όρος εργασιών ανά περίοδο

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η καταγραφή των διάφορων εργασιών που υπάρχουν στα ελληνικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η ερμηνεία των τρόπων με τους οποίους οι μαθητές/-τριες εισάγονται στις διάφορες γεωμετρικές έννοιες. Όπως προέκυψε από την ανάλυσης μας, τα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να χωριστούν σε δύο περιόδους. Η πρώτη αφορά στην περίοδο 1975-1990 (Βιβλία 1, 2 και 3) κατά την οποία παρατηρήθηκε υψηλή χρήση προβλημάτων (μέσος όρος 65,89%) και λιγότερο συχνή χρήση ασκήσεων (μέσος όρος 32,90%). Η δεύτερη αφορά στην περίοδο 1990 μέχρι σήμερα (Βιβλία 4, 5 και 6) κατά την οποία παρατηρήθηκε μείωση στη χρήση προβλημάτων (μέσος όρος 42,08%) και αύξηση στη χρήση ερωτήσεων (μέσος όρος 19,08%). Για τις ασκήσεις δεν παρατηρήθηκε κάποια αλλαγή, ενώ οι εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης παρουσιάζουν μια μικρή αύξηση κατά τη δεύτερη περίοδο.

Κάνοντας χρήση των όρων της πραξεολογίας του Chevallard, κατά την πρώτη περίοδο (1975-1990) παρατηρείται συχνότερη χρήση *τεχνικών (techniques)* που δίνουν μεγαλύτερη έμφαση σε εργασίες αυξημένης δυσκολίας (προβλήματα), ενώ κατά τη δεύτερη (1990-σήμερα) παρατηρείται χρήση *τεχνικών* που δίνουν μεγαλύτερη έμφαση σε εργασίες χαμηλότερης δυσκολίας (ερωτήσεις). Με άλλα λόγια, *οι δύο περίοδοι χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τεχνολογίες (technologies)*, δηλαδή σε κάθε περίοδο *η εκάστοτε συγγραφική ομάδα είχε διαφορετικές θεωρήσεις και προτεραιότητες ως προς την μάθηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο*. Ακολουθώντας τους Vincent και Stacey (2008), η μείωση προβλημάτων μπορεί να ερμηνευθεί ως μια συνειδητή επιλογή της κάθε συγγραφικής ομάδας να αντικαταστήσει προβλήματα με εργασίες χαμηλότερης δυσκολίας ως μέσο ενίσχυσης της αυτοπεποίθησης των μαθητών/-τριών κατά την επίλυση εργασιών. Σε κάθε περίπτωση, με δεδομένο ότι τα σχολικά εγχειρίδια είναι πολιτισμικά τεχνουργήματα (Venezky, 2015) που «καθορίζουν τι θεωρείται σημαντική γνώση σε κάθε χρονική περίοδο» (Κολέζα, 2017, σ.363), είναι πολύ πιθανό οι μαθητές/-τριες της πρώτης περιόδου να είχαν διαφορετική αίσθηση του τι σημαίνει μαθαίνω γεωμετρία, από εκείνους/-ες της δεύτερης. Πιο συγκεκριμένα, την πρώτη περίοδο η μάθηση της γεωμετρίας ήταν περισσότερο συνυφασμένη με την επίλυση προβλημάτων, ενώ τη δεύτερη περίοδο μαθαίνω γεωμετρία σημαίνει λύνω λιγότερα προβλήματα και απαντάω σε περισσότερες ερωτήσεις. Ταυτόχρονα όμως, οι μαθητές/τριες της δεύτερης περιόδου έρχονται σε επαφή με μεγαλύτερο εύρος εργασιών, δηλαδή ερωτήσεις, ασκήσεις, προβλήματα και εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης.

Σημαντικός περιορισμός της παρούσας έρευνας ήταν το γεγονός ότι είχαμε πρόσβαση μόνο σε μέρος του επίσημου αναλυτικού προγράμματος, όπως αυτό αποτυπωνόταν στο εκάστοτε εγχειρίδιο και όχι στο λειτουργικό, τι τελικά διδασκόταν στην τάξη μέσω της αλληλεπίδρασης εκπαιδευτικού και μαθητών/-τριών (Remillard & Heck, 2014). Επιπλέον, με δεδομένο το πλαίσιο συγγραφής και αξιοποίησης των σχολικών εγχειριδίων στην Ελλάδα, τα αποτελέσματα μας ενδεχομένως να ήταν διαφορετικά αν η έρευνα πραγματοποιούνταν σε χώρα με διαφορετικό εκπαιδευτικό σύστημα. Ωστόσο, αν και έχουν πραγματοποιηθεί παρόμοιες μελέτες σχολικών βιβλίων, δεν υπάρχει μελέτη στην ελληνική ή διεθνή βιβλιογραφία που να εξετάζει σε βάθος χρόνου τις μεταβολές στη χρήση των διαφορετικών ειδών εργασιών που συμπεριλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια, όπως στην περίπτωση των 46 ετών που εξετάσαμε.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Το εγχειρίδιο του 1976 δε συμπεριλήφθηκε στη μελέτη των αποτελεσμάτων γιατί ακολουθεί την ίδια σειρά ταξινόμησης κεφαλαίων και περιεχομένου με το εγχειρίδιο Α (1975-1976).
2. Το εγχειρίδιο Η είναι διαχωρισμένο σε δύο ξεχωριστά βιβλία από το 2014 και μετά.
3. Το εγχειρίδιο Γ της Α' Λυκείου παρέμεινε ίδιο από το 1979-1990, αντίθετα με το εγχειρίδιο της Β' Λυκείου που άλλαξε το 1986.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δακορώνια, Ε. (2020). *The Greek Geometry textbooks from 1975 till 2019: An Anthropological Approach*. [Master Thesis]. University of Crete.

Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών* (Β' Εκδ.). Αθήνα: Gutenberg.

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: Bikner-Ahsbahs A. & Prediger S. (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 67-83). Springer.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in Mathematics Education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 21–30). Barcelona: Spain.

Chevallard, Y. & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. In: Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 38-43). Dordrecht: Springer.

Jäder, J., Lithner, J. & Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51:7, 1120-1136.

Jones, K., & Fujita, T. (2013). Interpretations of National Curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan. *ZDM Mathematics Education*, 45, 671–683.

Kuzniak, A. & Vivier, L. (2009). A French Look on the Greek Geometrical Working Space at Secondary School Level. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 686-695). France: INRP Lyon.

Niss, M. (1993). Assessment in Mathematics Education and its Effects: An Introduction. In M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education: An ICMI Study* (pp.1-30). Dordrecht: Springer.

Pepin, B. & Gueudet, G. (2014). Curriculum Resources and Textbooks in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 132-135). Dordrecht: Springer.

Remillard, J., & Heck, D. J. (2014). Conceptualising the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46, 705–718.

Rezat, S. (2009). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 1260–1269). France: INRP Lyon.

Schreier, M. (2014). Qualitative Content Analysis. In U. Flick (Ed.), *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis* (pp. 170-183). SAGE.

Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183–199.

Treffert-Thomas, S., Viirman, O., Hernandez-Martinez, P. & Rogovchenko, Y. (2017). Mathematics lecturers' views on the teaching of mathematical modelling. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 22(4), 121–145.

Venezky, R. (2015). Textbooks. In Wright J. (Ed.), *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences* (pp. 256-259). Elsevier.

Vincent, J. & Stacey, K. (2008). Do Mathematics Textbooks Cultivate Shallow Teaching? Applying the TIMSS Video Study Criteria to Australian Eighth-grade Mathematics Textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, 20(1), 82-107.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΙΚΕΣ ΠΟΙΚΙΛΙΕΣ

Πιτσιλή Χατζή Διονυσία

University of Ottawa, Canada

dpits102@uottawa.ca

Στη βιβλιογραφία, συχνά υποτίθεται πως ένας από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η εκμάθηση της τυπικής μαθηματικής ορολογίας. Σε αυτό το πλαίσιο, υποτίθεται πως οι μαθήτριες/φοιτήτριες γνωρίζουν άτυπο μαθηματικό λεξιλόγιο και χρειάζεται να κοινωνικοποιηθούν στις «τυπικές μαθηματικές πρακτικές», συμπεριλαμβανομένης της εκμάθησης και χρήσης μαθηματικής ορολογίας. Η εργασία αυτή επιχειρεί υπό ένα πρίσμα ανάλυσης λόγου να προβληματοποιήσει αυτή τη θέση αναδεικνύοντας πως εντός της μαθηματικής τάξης είναι δυνατό να συνυπάρχουν διάφορες γλωσσικές ποικιλίες όσον αφορά στην ορολογία. Η θέση αυτή στηρίζεται με δεδομένα από ένα πανεπιστημιακό μάθημα «Εισαγωγής στη Μαθηματική Απόδειξη».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης, συχνά γίνεται η παραδοχή πως ένας από τους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η εκμάθηση της μαθηματικής ορολογίας (π.χ.Schleppegrell, 2007; Sfard, 2007). Σύμφωνα με αυτό το σχήμα, η εκμάθηση των μαθηματικών περιλαμβάνει τον μετασχηματισμό του άτυπου μαθηματικού λόγου σε τυπικό. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθήτριες/φοιτήτριες[1] όταν έρχονται στην τάξη, μη γνωρίζοντας την τυπική μαθηματική ορολογία, χρησιμοποιούν άτυπους τρόπους για να μιλήσουν για μαθηματικά και μέσα από τη διδασκαλία μπορούν να κατακτήσουν την τυπική μαθηματική ορολογία (Barwell, 2016).

Στόχος της εργασίας είναι να προβληματοποιήσει αυτό το σχήμα. Αναλύοντας δεδομένα από ένα μάθημα «Εισαγωγής στη Μαθηματική Απόδειξη», τα οποία επέλεξα να παρουσιάσω γιατί καταρρίπτουν την παραπάνω γραμμική αφήγηση περί εκμάθησης της μαθηματικής ορολογίας, διερευνώ ποιες γλωσσικές ποικιλίες αναδεικνύονται στην τάξη και με ποιο τρόπο η σχέση τους μπορεί να ερμηνευτεί ως ανταγωνιστική. Σε αυτή την κατεύθυνση, διακρίνω μεταξύ μιας γλωσσικής ποικιλίας που στρέφεται γύρω από την χρήση της μαθηματικής ορολογίας και μιας ποικιλίας που στέκεται κριτικά απέναντι στη μαθηματική ορολογία. Με αυτό τον τρόπο, θα ασκήσω κριτική στην έννοια της τυπικής μαθηματικής ορολογίας, σαν ένα κλειστό σύστημα.

ΑΤΥΠΟΙ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΤΟΥ ΟΜΙΛΕΙΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εντός της κοινωνικής στροφής της μαθηματικής εκπαίδευσης (Lerman, 2000) το ενδιαφέρον των ερευνητριών στράφηκε στους τρόπους με τους οποίους οι μαθήτριες μαθαίνουν μαθηματικά εντός των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στη σχολική τάξη. Σε αυτό το πλαίσιο, αναπτύχθηκε το ενδιαφέρον για τους τρόπους με τους οποίους συντελείται η κοινωνικοποίηση των μαθητριών στις «τυπικές μαθηματικές πρακτικές». Σημαντικό κομμάτι των τυπικών μαθηματικών πρακτικών είναι η τυπική μαθηματική γλώσσα. Με τη στροφή λοιπόν σε ζητήματα γλώσσας, ένα σημαντικό ερώτημα που αναδεικνύεται στη βιβλιογραφία είναι οι τρόποι με τους οποίους οι μαθήτριες/φοιτήτριες μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τον τυπικό μαθηματικό λόγο.

Μια κεντρική ιδέα αυτή της βιβλιογραφίας είναι πως οι μαθήτριες για να μάθουν να επικοινωνούν μαθηματικά, μεταβαίνουν από μια άτυπη μορφή μαθηματικής γλώσσας προς την τυπική μαθηματική γλώσσα. Για παράδειγμα, η Schleppegrell (2007), εκκινώντας από αυτή την παραδοχή, αναζητά τα γλωσσολογικά χαρακτηριστικά της τυπικής μαθηματικής πρακτικής, τα οποία δημιουργούν δυσκολίες στις μαθήτριες. Σε παρόμοιο μήκος κύματος, το θεωρητικό πλαίσιο της Sfard (2007) που δίνει έμφαση στη στενή διασύνδεση της γνωστικής και της επικοινωνιακής διαδικασίας (commognition), αντιμετωπίζει τον τυπικό μαθηματικό λόγο ως έχοντα ένα σύνολο χαρακτηριστικών και εννοιολογεί τη μάθηση ως τη διαδικασία με την οποία κανείς αποκτά ευχέρεια στη χρήση του τυπικού μαθηματικού λόγου, χτίζοντας πάνω στην ευχέρεια του στον άτυπο μαθηματικό λόγο.

Μια εναλλακτική εικόνα αναδεικνύεται από τον Barwell (2016). Ο Barwell ανατρέχει στο έργο του Bakhtin ως μια εναλλακτική θεωρητική αφετηρία στο έργο του Vygotsky το οποίο είναι κυρίαρχο στη μαθηματική εκπαίδευση. Υπό το πλαίσιο του Vygotsky, παρατηρεί ο Barwell, το ζήτημα της γλώσσας στην τάξη γίνεται αντιληπτό υπό το πρίσμα ότι οι μαθήτριες ακολουθούν μια γραμμική πορεία από την άτυπη μαθηματική γλώσσα στην τυπική. Αντίθετα, το θεωρητικό πλαίσιο του Bakhtin ρίχνει το βάρος στο πώς οι μαθήτριες και η καθηγήτρια χρησιμοποιούν τις πηγές νοήματος που τους είναι διαθέσιμες, ώστε να διευρύνουν το ρεπερτόριο πιθανών τρόπων παραγωγής νοήματος.

Συνολικά, στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης, η γλώσσα γίνεται συνηθέστερα αντιληπτή μέσα από το διαχωρισμό της άτυπης μαθηματικής γλώσσας και της τυπικής μαθηματικής γλώσσας. Μάλιστα, οι έννοιες των τυπικών μαθηματικών και της τυπικής μαθηματικής ορολογίας θεωρούνται δεδομένες, σαν να αποκτούν το νόημα τους με αντικειμενικό τρόπο εξωτερικά της μαθηματικής τάξης.

ΓΛΩΣΣΙΚΕΣ ΠΟΙΚΙΛΙΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ

Το θεωρητικό πλαίσιο αυτής της εργασίας στηρίζεται στην έννοια της γλωσσικής ποικιλίας που προέρχεται από την κοινωνιογλωσσολογία και στην ανάλυση λόγου όπως αυτή αναπτύχθηκε από τους Laclau και Mouffe στο πεδίο της πολιτικής επιστήμης. Στην κοινωνιογλωσσολογία, ο όρος γλωσσική ποικιλία αναπτύχθηκε ως ένας εναλλακτικός όρος στο δίπολο γλώσσα/διάλεκτος, καθώς το δίπολο αυτό είναι αφενός ιεραρχικό και αφετέρου έχει περιορισμένη ερμηνευτική ισχύ (Meyerhoff, 2006). Σε αυτή την εργασία, με τον όρο «γλωσσική ποικιλία» αναφέρομαι σε σχετικά συνεκτικούς τρόπους μαθηματικής έκφρασης. Μια επιστημολογική παραδοχή που κάνω μέσα από τη χρήση αυτού του όρου είναι ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι για να μιλήσει κάποιος μαθηματικά, χωρίς αυτή η ποικιλία τρόπων να υποδηλώνει ιεραρχική σχέση μεταξύ τους.

Όσον αφορά στο πεδίο της ανάλυσης λόγου, που χρησιμοποιείται ολοένα και περισσότερο στον κλάδο της μαθηματικής εκπαίδευσης, αυτό στηρίζεται στην επιστημολογική θέση πως η «πραγματικότητα» δεν προϋπάρχει, αλλά αντίθετα οι τρόποι που μιλάμε για τα πράγματα διαδραματίζουν το δικό τους ρόλο στην κοινωνική κατασκευή της πραγματικότητας (Jørgensen & Phillips, 2011). Οι Laclau και Mouffe (2001), ενστερνιζόμενοι αυτή τη θέση, υποστηρίζουν πως το νόημα δεν είναι ποτέ τελικό, αλλά αντίθετα οι διαφορετικοί λόγοι μπαίνουν σε μια ανταγωνιστική σχέση, στην προσπάθεια τους να αποκρυσταλλώσουν το νόημα «αιωρούμενων σημαινόντων», εννοιών δηλαδή στις οποίες διαφορετικοί λόγοι αποδίδουν διαφορετικά νοήματα. Ακόμη και όταν το νόημα αποκρυσταλλώνεται μέσω μιας ηγεμονικής λογοθετικής παρέμβασης, αυτό είναι προσωρινό και μπορεί δυνητικά να αλλάξει. Η θέση αυτή μπορεί να γίνει αντιληπτή εντός του πλαισίου του λόγου της μαθηματικής τάξης. Από αυτή την οπτική γωνία, δεν μπορούμε να μιλάμε για ένα αποκρυσταλλωμένο νόημα, το οποίο οι μαθήτριες καλούνται να απορροφήσουν, κατανοήσουν, ή μάθουν. Αντίθετα, τα νοήματα κατασκευάζονται εντός της τάξης μέσα από τους διάφορους (μαθηματικούς, επιστημολογικούς, παιδαγωγικούς, κ.α.) λόγους που εκφέρονται από την καθηγήτρια, τις μαθήτριες/φοιτήτριες, το σχολικό βιβλίο κτλ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

Τα δεδομένα στα οποία ανατρέχω σε αυτή την εργασία προέρχονται από τα δεδομένα που συνέλεξα για τη διδακτορική μου διατριβή με τίτλο «Πολιτικές διαστάσεις των μαθηματικών σε δύο προπτυχιακά μαθήματα μαθηματικών». Για τη συλλογή δεδομένων, επισκέφθηκα τις δύο τάξεις, πήρα συνεντεύξεις από τον καθηγητή και κάποιους φοιτητές, και συνέλλεξα τα συγγράμματα και άλλα έγγραφα σχετικά με τα μαθήματα. Σε αυτή την εργασία ανατρέχω αποκλειστικά στις επισκέψεις στην τάξη τις οποίες μαγνητοφώνησα και κρατούσα σημειώσεις πεδίου. Στη συνέχεια, απομαγνητοφώνησα τα τμήματα του μαθήματος στα οποία μιλούσε ο καθηγητής. Για λόγους δεοντολογίας (επειδή οι φοιτήτριες δεν ήταν δυνατό να συναινέσουν στη μαγνητοφώνηση τους, λόγω του μεγάλου πλήθους τους) και για πρακτικούς λόγους (λόγω του μεγέθους του αμφιθεάτρου, η ομιλία των φοιτητριών δεν ήταν εύκολο να μαγνητοφωνηθεί), η συμμετοχή των φοιτητριών στην τάξη δεν απομαγνητοφωνήθηκε, αλλά αντ' αυτού, για τη συμμετοχή τους, στηρίχτηκα στις σημειώσεις πεδίου. Σαν πρόσθετο μέτρο ώστε να μην είναι δυνατή η ταυτοποίηση των φοιτητριών/φοιτητών, οι σημειώσεις πεδίου μου δεν περιλαμβάνουν κανενός είδους αναφορά σε προσωπικά στοιχεία τους, συμπεριλαμβανομένου του φύλου τους. Το θηλυκό γένος χρησιμοποιείται εδώ για να δηλώσει το τυχαίο γένος.

Σε αυτή την εργασία, χρησιμοποιώ δεδομένα από το ένα μόνο προπτυχιακό μάθημα: ένα τετραμηνιαίο μάθημα πρώτου έτους «Εισαγωγής στη Μαθηματική Απόδειξη» σε ένα αγγλόφωνο πανεπιστήμιο του Οντάριο (Καναδά). Το μάθημα αυτό παρακολουθούν τακτικά περίπου 150 φοιτήτριες. Παραθέτω και αναλύω δύο παραδείγματα, τα οποία επιλέχθηκαν εν είδη υπαρξιακής απόδειξης ώστε να στηρίξουν τη θέση ότι η κοινωνικοποίηση στον «τυπικό μαθηματικό λόγο» δε γίνεται με γραμμικό τρόπο, παρά είναι μια σύνθετη διεργασία που συντελείται εντός πολλαπλών γλωσσικών ποικιλιών που συνυπάρχουν στην τάξη και ενίοτε βρίσκονται σε ανταγωνιστική σχέση μεταξύ τους. Το κατευθυντήριο ερώτημα της εργασίας είναι η διερεύνηση των γλωσσικών ποικιλιών που αναδεικνύονται στην τάξη και του πώς η σχέση τους μπορεί να ερμηνευτεί ως ανταγωνιστική.

Τέλος, ανέλυσα τα δεδομένα με χρήση εννοιολογικών εργαλείων από την ανάλυση λόγου των Laclau και Mouffe (2000) και κυρίως της έννοιας του ανταγωνισμού μεταξύ λόγων. Η ανάλυση μου συνίσταται στον εντοπισμό δύο διακριτών γλωσσικών ποικιλιών, στην περιγραφή τους, και στην αναζήτηση των τρόπων με τις οποίες αυτές βρίσκονται σε σχέση ανταγωνισμού, νοηματοδοτώντας με διαφορετικούς τρόπους αιωρούμενα σημαίνοντα. Με αυτή την έννοια, η ανάλυση λόγου που πραγματοποιώ, παρότι λαμβάνει υπόψιν της γραμματικά και συντακτικά στοιχεία του κειμένου, δεν αποτελεί μια ενδελεχή ανάλυση αυτών, παρά κινείται στο πνεύμα μελετών ανάλυσης λόγου που επικεντρώνονται στην ανάλυση της σχέσης του κειμένου με το κοινωνικό πλαίσιο υπό το πρίσμα κάποιων θεωρητικών εργαλείων (π.χ., Valero & Knijnik, 2015), εν προκειμένω της γλωσσικής ποικιλίας και της έννοιας του ανταγωνισμού.

ΕΥΡΗΜΑΤΑ: ΔΥΟ ΣΥΜΒΑΝΤΑ

Το μάθημα «Εισαγωγή στη Μαθηματική Απόδειξη» είναι ένα διαδραστικό μάθημα, με την έννοια ότι ο καθηγητής δίνει χρόνο στις φοιτήτριες να εργαστούν σε ασκήσεις, συζητώντας μεταξύ τους, ενώ μεγάλο κομμάτι της διάλεξης βασίζεται σε ερωταπαντήσεις. Η συνολική ανάλυση των δεδομένων από αυτό το μάθημα αναδεικνύει ότι στο μάθημα λαμβάνουν χώρα τέσσερις βασικοί *λόγοι*, οι οποίοι πλαισιώνουν τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών και νοηματοδοτούν τι είναι τα μαθηματικά σε αυτή την τάξη. Οι λόγοι αυτοί είναι η ανάδειξη του φορμαλισμού ως προτύπου μαθηματικής ακρίβειας και αυστηρότητας, η φαντασιακή κατασκευή των μαθηματικών ως μια πέραν κάθε αμφιβολίας ορθή γνώση στην οποία μπορεί να συμμετέχει ο καθένας, η σημασία της αποτελεσματικότητας της εργασίας όταν κανείς κάνει μαθηματικά, και η πολυμορφία των μαθηματικών και της μαθηματικής κοινότητας.

Όσον αφορά στην πολυμορφία των μαθηματικών και της μαθηματικής κοινότητας, εντός της τάξης αναδεικνύονται τόσο οι ποικίλοι τρόποι με τους οποίους έχει αναπτυχθεί η μαθηματική επιστήμη ιστορικά όσο και οι ποικίλοι τρόποι με τους οποίους μια φοιτήτρια μπορεί να προσεγγίσει μια μαθηματική έννοια ή πρόβλημα. Σε αυτό το πλαίσιο, επικεντρώθηκα, μεταξύ άλλων, στην ποικιλία των τρόπων με τους οποίους ο καθηγητής και οι φοιτήτριες μιλούν μαθηματικά, που είναι η βασική προβληματική αυτής της εργασίας. Ο καθηγητής συχνά υποστηρίζει με ανοιχτό τρόπο τη χρήση μιας ποικιλίας απλής μαθηματικής γλώσσας. Για παράδειγμα, σε αρκετές από τις διαλέξεις του ζητά από τις φοιτήτριες να εκφράσουν μια δήλωση με τρόπο που θα κατανοούσε κάποιος στην 5η Δημοτικού. Γενικότερα, είναι επικριτικός ως προς τη χρήση μαθηματικών ποικιλιών που περιέχουν πολύ πυκνή και «βαριά» ορολογία, όταν εμποδίζεται το νόημα. Τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν αναδεικνύουν την ύπαρξη δύο γλωσσικών ποικιλιών, δηλαδή τρόπων που μπορεί κανείς να μιλήσει μαθηματικά: μια γλωσσική ποικιλία που στρέφεται γύρω από τη μαθηματική ορολογία και μια γλωσσική ποικιλία που είναι κριτική στην δίχως όρους χρήση της μαθηματικής ορολογίας.

Παράδειγμα 1

Το παρακάτω παράδειγμα συμβαίνει καθώς η τάξη μελετά διαφορετικές αποδεικτικές μεθόδους και συγκεκριμένα αφορά τη μέθοδο της ευθείας απόδειξης.

Καθηγητής: Πώς αποδεικνύουμε ότι κάτι συνεπάγεται κάτι άλλο; Ναι;

Φοιτήτρια: πρέπει να ξεκινήσουμε, υποθέτοντας το- [σταματά τη φράση της καθώς δεν είναι σίγουρη πώς να εκφράσει το αριστερό μέλος, γέρνει το σώμα της προς τα αριστερά και τελικά λέει] αριστερό μέλος [left side].

Καθηγητής: Ναι, ξέρω… Βασικά υπάρχουν ιδιαίτερα ονόματα [fancy names] γι' αυτό. Υπόθεση [antecedent]. Και συμπέρασμα [conclusion] ή όπως λέγεται. Αλλά δεν μου αρέσουν καθόλου αυτές οι λέξεις. [But I really don't like these words.] Οπότε, αντί γι' αυτές θα λέμε «αριστερό μέλος», «δεξί μέλος» [left side, right side].

Φοιτήτρια: Το υπόθεση ακούγεται καλύτερο [Antecedent sounds cooler].

Καθηγητής: Το υπόθεση ακούγεται καλύτερο; Οκ, μια χαρά. Οπότε, θα υποθέσουμε το «όχι Q» και θα αποδείξουμε πως «όχι P».

Στο παράδειγμα αυτό, η φοιτήτρια αναζητά και στη συνέχεια δηλώνει ότι προτιμά μια πιο «βαριά» μαθηματική ποικιλία, ενώ ο καθηγητής είναι αυτός που την αμφισβητεί. Ενώ ο καθηγητής λέει «δεν μου αρέσουν καθόλου αυτές οι λέξεις», η μαθήτρια αντιπαραβάλει ότι «το υπόθεση ακούγεται καλύτερο». Η κουλτούρα των μαθηματικών ως συνεπαγόμενη μια πολύ αυστηρή γλωσσική ποικιλία εισάγεται εδώ στην τάξη από μια μαθήτρια. Αυτή η κατάσταση δεν ερμηνεύεται πλήρως από ένα από τα κύρια ερμηνευτικά σχήματα στην εκπαίδευση των μαθηματικών, σύμφωνα με το οποίο ένας στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να μετατρέψει τις άτυπες γλωσσικές ποικιλίες των μαθητριών στην επίσημη μαθηματική ποικιλία. Καθώς οι μαθήτριες κοινωνικοποιούνται στα μαθηματικά μέσω μιας ποικιλίας καναλιών (εντός και εκτός της τάξης), αναπαράγουν κανόνες, αξίες, και πτυχές των ακαδημαϊκών μαθηματικών στην τάξη, ακόμη και όταν αυτές δε συμβαδίζουν με τον στόχο του προγράμματος σπουδών του μαθήματος ή τον λόγο που προωθεί ο καθηγητής.

Οι δύο γλωσσικές ποικιλίες αναφορικά με τη χρήση της μαθηματικής ορολογίας που αναδεικνύονται σε αυτό το παράδειγμα βρίσκονται σε μία ανταγωνιστική σχέση μεταξύ τους. Από τη μία πλευρά, η φοιτήτρια - παρότι δεν γνωρίζει την λέξη «υπόθεση» - λειτουργεί εντός μιας γλωσσικής ποικιλίας που ιεραρχεί ψηλά τη χρήση της μαθηματικής ορολογίας. Από την άλλη, ο καθηγητής επικρίνει τη χρήση της μαθηματικής ορολογίας, εντός ενός πλαισίου στο οποίο υπάρχει σαφής και απλούστερος τρόπος για την περιγραφή των ίδιων μαθηματικών αντικειμένων («πρώτο μέλος», «δεύτερο μέλος»). Μέσα από το παράδειγμα, βλέπουμε τις δύο αυτές ποικιλίες να υπεισέρχονται σε μια ανταγωνιστική σχέση μεταξύ τους, με την έννοια ότι και οι δύο προσπαθούν να ορίσουν δύο αιωρούμενα σημαίνοντα: αφενός τον τρόπο που θα ονομάζεται το αριστερό μέλος/υπόθεση στην τάξη και αφετέρου γενικότερα τον τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιείται η ορολογία στην τάξη.

Παράδειγμα 2

Το παρακάτω παράδειγμα συμβαίνει αφού η τάξη έχει εισαχθεί στην απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή και αφορά στην απόδειξη μιας πρότασης με αυτή τη μέθοδο, ως παράδειγμα χρήσης της μεθόδου.

Καθηγητής: Άρα, απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή [prove by contrapositive]. Άρα, ποια θα είναι η πρώτη γραμμή της απόδειξης μας; Ναι;

Φοιτήτρια: Να γράψουμε τι είναι η αντιθετοαντιστροφή;

Καθηγητής: Α, θα μπορούσαμε να γράψουμε τι είναι η αντιθετοαντιστροφή! Ενδιαφέρον! Εμμ, νομίζω, ίσως είναι άδικο αυτό, αλλά νομίζω ότι το κοινό μας θα είναι- θα υποθέσουμε ότι το κοινό μας ξέρει τι είναι η αντιθετοαντιστροφή και άλλες μαθηματικές λέξεις όπως αυτή. Οπότε δε θα γράψουμε τι είναι η αντιθετοαντιστροφή, αν και θα μπορούσαμε αν θέλαμε. Ποια θα είναι η πρώτη γραμμή της απόδειξης μας;

Εδώ, βλέπουμε ότι η χρήση του όρου «απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή», αναφέρεται χωρίς να επεξηγείται κατά την παραγωγή μιας απόδειξης. Στη μαθηματική κουλτούρα αυτού του πρωτοετούς προπτυχιακού μαθήματος, θεωρείται ότι υπάρχει μια κοινή βάση μαθηματικών όρων, η οποία συμπεριλαμβάνει την «αντιθετοαντιστροφή». Παρόλα αυτά, το σχόλιο του καθηγητή ότι «ίσως είναι άδικο αυτό» είναι σημαντικό, καθώς δείχνει ότι η μη εξήγηση ενός όρου μπορεί να κάνει τη μαθηματική γραφή απρόσιτη σε κάποιους. Με άλλα λόγια, ο καθηγητής αναγνωρίζει τον δυνητικά συμπεριληπτικό/αποκλειστικό ρόλο της χρήσης συγκεκριμένων λέξεων και κατ' επέκταση γλωσσικών ποικιλιών. Ο προσδιορισμός της ένταξης/αποκλεισμού ως πτυχής της ακαδημαϊκής μαθηματικής πρακτικής συνιστά μια κριτική ανάγνωσή της, καθώς η μαθηματική κουλτούρα δεν αντιμετωπίζεται απλώς ως κάτι στο οποίο οι μαθήτριες πρέπει να κοινωνικοποιηθούν, αλλά ως κάτι του οποίες οι κοινωνικές προεκτάσεις αξίζουν διερεύνησης.

Επιπλέον, σε αυτό το παράδειγμα βλέπουμε μια άλλη έκφανση της ανταγωνιστικής σχέσης μεταξύ των δύο γλωσσικών ποικιλιών. Η χρήση ενός όρου χωρίς την εξήγησή του μπορεί να θεωρηθεί ως μια πτυχή της ποικιλίας που προσανατολίζεται στην ορολογία, ενώ η πρόταση της εξήγησης ενός όρου και η εξέταση του ρόλου συμπερίληψης/αποκλεισμού της χρήσης της ορολογίας είναι πτυχές της ποικιλίας που είναι κριτική ως προς τη χρήση ορολογίας. Έχει σημασία να παρατηρήσουμε ότι οι δύο ποικιλίες που εισέρχονται σε μια ανταγωνιστική σχέση, δεν εκφέρονται (μόνο από) διαφορετικά υποκείμενα. Για την ακρίβεια, και οι δύο γλωσσικές ποικιλίες εκφράζονται από τον ίδιο τον καθηγητή.

Συνολικά, τα δύο παραδείγματα εκτυλίσσονται σε ένα πλαίσιο στο οποίο οι νόρμες της τάξης είναι διαδραστικές και ο καθηγητής συχνά αναδεικνύει την ποικιλομορφία των τρόπων με τους οποίους μπορεί κανείς να προσεγγίσει τα μαθηματικά. Εντός αυτού του πλαισίου, τα παραδείγματα αναδεικνύουν την ύπαρξη και εκφορά εντός της τάξης εναλλακτικών γλωσσικών ποικιλιών από αυτή του καθηγητή ή του αναλυτικού προγράμματος. Ως εκ τούτου, το ερμηνευτικό σχήμα σύμφωνα με το οποίο η καθηγήτρια γνωρίζει την τυπική μαθηματική ορολογία, ενώ οι φοιτήτριες την μαθαίνουν είναι απλοϊκό και αδυνατεί να αναδείξει την πολυπλοκότητα των γλωσσικών ποικιλιών που εμφανίζονται στην τάξη.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Καθώς ο καθηγητής και οι φοιτήτριες πλοηγούνται στη χρήση της μαθηματικής ορολογίας, προκύπτουν διαφορετικοί βαθμοί και τρόποι ομιλίας αυτής της ορολογίας. Μέσα από τα δύο παραδείγματα, διέκρινα μεταξύ δύο γλωσσικών ποικιλιών που εμφανίζονται στο μάθημα με βάση τη χρήση της ορολογίας: μια ποικιλία που στρέφεται γύρω από τη χρήση ορολογίας και της αποδίδει αξία και μια ποικιλία που στέκεται κριτικά προς την ορολογία λαμβάνοντας υπόψη τον ρόλο της ως προς τη διευκόλυνση/δυσχέρεια της κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου.

Οι δύο γλωσσικές ποικιλίες υπεισέρχονται σε μια ανταγωνιστική σχέση. Όταν ο καθηγητής και μια φοιτήτρια διαφωνούν σχετικά με το ποιος όρος είναι καλύτερος, δεν εκφράζουν απλώς την (δυσ)αρέσκειά τους για μια συγκεκριμένη λέξη ή πρακτική. Φέρνουν δύο λόγους σε σύγκρουση. Κάθε ένας από αυτούς τους λόγους φέρει αξίες, ιδεολογικές παραδοχές και ισχυρισμούς σχετικά με το καθεστώς της πρακτικής. Μέσω αυτής της σύγκρουσης, οι γλωσσικές ποικιλίες συμπεριλαμβάνουν και αποκλείουν.

Αυτοί οι ανταγωνισμοί είναι πιο περίπλοκοι από την τοποθέτηση του καθηγητή στην πλευρά της γλωσσικής ποικιλίας που στρέφεται γύρω από τη χρήση ορολογίας και των φοιτητριών στην πλευρά μιας ποικιλίας που είναι κριτική απέναντι στην ορολογία. Μάλιστα, στο πρώτο παράδειγμα, η φοιτήτρια είναι αυτή που εκφέρει ένα λόγο που συνδέεται με μια παραδοσιακή, «σκληροπυρηνική», ακαδημαϊκή μαθηματική κουλτούρα, ενώ ο καθηγητής είναι αυτός που την αμφισβητεί. Ομοίως, όταν ο καθηγητής μιλά για το πως «μπορεί να είναι άδικο», αλλά δεν χρειάζεται να εξηγηθεί τι είναι η απόδειξη με αντιθετοαντιστροφή, βλέπουμε δύο γλωσσικές ποικιλίες να εκφέρονται από το ίδιο άτομο (τον καθηγητή). Αυτές οι παρατηρήσεις ενισχύουν την ιδέα ότι ο συζητούμενος ανταγωνισμός δεν εκδηλώνεται μεταξύ διαφορετικών υποκειμένων που ο καθένας υπερασπίζεται έναν από τους πόλους του ανταγωνισμού, αλλά αποτελεί έναν ανταγωνισμό ανάμεσα σε λόγους.

Μέσα από τα παραδείγματα, βλέπουμε ότι, σε συμφωνία με τον Barwell (2016), η έννοια της τυπικής μαθηματικής γλώσσας και της τυπικής μαθηματικής πρακτικής, δεν προϋπάρχει του πλαισίου της μαθηματικής τάξης (π.χ., ως ένα σύνολο εννοιών, όρων, και πρακτικών που είναι τυπικές), αλλά συγκροτείται μέσα από τον λόγο. Είναι μέσα από τις αλληλεπιδράσεις γύρω από τη χρήση της ορολογίας που συγκροτείται το τι θεωρείται τυπική μαθηματική πρακτική και ποια θεωρείται η αποδεκτή χρήση της τυπικής μαθηματικής γλώσσας σε αυτή τη μαθηματική τάξη και κατ’ επέκταση σε οποιοδήποτε κοινωνικό πλαίσιο. Με αυτόν τον τρόπο, η ίδια η έννοια της τυπικής μαθηματικής ορολογίας, σαν ένα κλειστό σύστημα που προϋπάρχει των μαθηματικών αλληλεπιδράσεων για την χρήση αυτής της ορολογίας, αναδεικνύεται ως προβληματική. Δε θα είχε άλλωστε νόημα να θεωρούμε την τυπική μαθηματική πρακτική ως εκ των προτέρων καθορισμένη, αν αναλογιστούμε τόσο το εύρος των πρακτικών με τις οποίες οι ίδιοι οι μαθηματικοί κάνουν μαθηματικά όσο και τη διαφορετικότητα των πλαισίων εντός των οποίων οι φοιτήτριες κάνουν μαθηματικά (π.χ., Lew & Mejía Ramos, 2020).

Γενικότερα, η ανάδειξη ανταγωνισμών μεταξύ διαφορετικών λόγων που συνυπάρχουν εντός της μαθηματικής τάξης συντελεί στο να δούμε τα μαθηματικά όχι ως το τελειωμένο προϊόν της εργασίας των μαθηματικών, παρά ως μια κοινωνική πρακτική. Ασφαλώς, ο ρόλος του καθηγητή σε αυτή τη διαδικασία είναι κομβικός λόγω του ρόλου του να οριοθετεί/παρουσιάζει το πρόγραμμα σπουδών, να αξιολογεί τις φοιτήτριες, και να συντονίζει την τάξη. Παρόλα αυτά, ο καθηγητής δεν είναι ο μοναδικός δρων στη διαδικασία της λογοθετικής συγκρότησης του τυπικού ή γενικότερα των μαθηματικών, καθώς οι φοιτήτριες κοινωνικοποιούνται σε ένα εύρος μαθηματικών λόγων και πρακτικών εντός και εκτός της τάξης.

Τέλος, είναι σημαντικό τα αποτελέσματα να ειδωθούν στο πλαίσιο μιας τάξης η οποία αφενός έχει διαδραστικές νόρμες και αφετέρου εντός αυτής η ποικιλομορφία αναδεικνύεται ως κυρίαρχος λόγος. Σε ένα διαφορετικό πλαίσιο, εναλλακτικές γλωσσικές ποικιλίες και λόγοι για τα μαθηματικά ενδεχομένως δεν εκφέρονται. Ωστόσο, η εν είδη υπαρξιακής απόδειξης συνθήκη που αναδεικνύεται στη συγκεκριμένη τάξη δείχνει ότι είναι εφικτό να υπάρχουν διαφορετικοί λόγοι εντός μιας τάξης, η οποίοι συντελούν – σιωπηλά ή ρητά – στην κοινωνικοποίηση των μαθητριών/φοιτητριών στα μαθηματικά. Με αυτή την έννοια έχει αξία να μελετάται η ύπαρξη αυτών των λόγων και η ενδεχόμενη ανταγωνιστική τους σχέση, πέρα από το κυρίαρχο γραμμικό πλαίσιο.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ το Ίδρυμα Ωνάση για την οικονομική υποστήριξη των διδακτορικών μου σπουδών.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Με το θηλυκό γένος υποδηλώνονται όλα τα φύλα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barwell, R. (2016). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(3), 331–345.

Jørgensen, M., & Phillips, L. (2011). *Discourse analysis as theory and method.* SAGE Publications.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Ablex.

Laclau, E., & Mouffe, C. (2001). *Hegemony and socialist strategy: Towards a radical democratic politics.* Verso.

Lew, K., & Mejía Ramos, J.P. (2020). Linguistic conventions of mathematical proof writing across pedagogical contexts. *Educational Studies in Mathematics 103*(1), 43–62.

Meyerhoff, M. (2006). *Introducing sociolinguistics.* Routledge.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, *23*, 139–159.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565–613.

Valero, P., & Knijnik, G. (2015). Governing the modern, neoliberal child through ICT research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *35*(2), 34–39.

Η ΑΙΣΘΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ: ΜΗΚΟΣ, ΕΜΒΑΔΟΝ, ΟΓΚΟΣ

Γιακουμή Μαρία, Μούτσιος–Ρέντζος Ανδρέας

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

magiakou@primedu.uoa.gr, moutsiosrent@primedu.uoa.gr

Στην παρούσα εργασία διερευνώνται οι ευκαιρίες για την ανάπτυξη αίσθησης της μέτρησης του μήκους, του εμβαδού και του όγκου, οι οποίες παρέχονται στα εγχειρίδια μαθηματικών του δημοτικού. Υποστηρίζεται ότι η αίσθηση της μέτρησης αναδύεται μέσα από τις σχέσεις ενός δικτύου αλληλεπιδράσεων μεταξύ επιλογών, εφαρμογών και αναστοχασμών σχετικά με τις μετρήσεις, εκτιμήσεις, μονάδες και διαδικασίες για ένα μέγεθος εντός δεδομένου πλαισίου. Η ανάλυση κατέδειξε την προώθηση των εφαρμογών τόσο στο σύνολο των έργων, όσο και για κάθε μέγεθος ξεχωριστά, ενώ, σχετικά με τις συνεμφανίσεις, συγκριτικά συχνότερη ήταν αυτή των εφαρμογών και αναστοχασμών. Τα ευρήματα συζητιούνται με γνώμονα τη μαθηματική εκπαίδευση και έρευνα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μετρήσεις μεγεθών, όπως το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, η μάζα, ο χρόνος, η θερμοκρασία και άλλα, αποτελούν σημαντικό μέρος της καθημερινότητάς μας και την κύρια ενασχόλησή μας με τους αριθμούς σε εξωσχολικά πλαίσια (Hope, 1989). Επιπλέον, η θεματική των μετρήσεων έχει αποτελέσει σε διεθνές επίπεδο έναν από τους βασικούς άξονες των προγραμμάτων σπουδών για τα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο (π.χ. Australian Curriculum, 2014· Department for Education, 2013). Στην Ελλάδα η διδασκαλία των μετρήσεων στο μάθημα των μαθηματικών αφορά τα μεγέθη του μήκους, της επιφάνειας, του όγκου, της μάζας και του χρόνου (ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, 2003). Παρόλο που οι μαθητές και μαθήτριες δημοτικού εξασκούνται στη διαδικασία της μέτρησης μεγεθών με τη χρήση τυπικών εργαλείων μέτρησης, παρατηρείται ότι συχνά δυσκολεύονται όταν τους δίνονται μη τυπικά εργαλεία μέτρησης· για παράδειγμα, ένα σχοινί ή ένας σπασμένος χάρακας για τη μέτρηση μήκους (Γκενέ κ.ά., 2015) ή μακρόστενες λωρίδες συγκεκριμένης επιφάνειας για τη μέτρηση εμβαδού (Βαϊτσίδη & Σκουμπουρδή, 2015). Έτσι, αναδεικνύονται ελλείψεις στην κατανόηση των μαθητών και μαθητριών όσον αφορά τις έννοιες που σχετίζονται με τις μετρήσεις (Sisman & Aksu, 2016), καθώς και για την *αίσθηση της μέτρησης* (measurement sense· Hope, 1989) που αδρομερώς αναγνωρίζεται στη βιβλιογραφία ως μια έννοια ανάλογη της αίσθησης του αριθμού, που αφορά τον τομέα των μετρήσεων (Joram & Garcia, 2006).

Στην παρούσα εργασία, συνθέτουμε την υπάρχουσα βιβλιογραφία για να προτείνουμε μια λειτουργική εννοιοποίηση της αίσθησης της μέτρησης που ρητά λαμβάνει υπόψιν τη σημασία του μεγέθους και του πλαισίου ως κρίσιμων παραγόντων για την ποιότητα εμπλοκής και ενεργοποίησης των επιμέρους στοιχείων του δικτύου που συνθέτουν την αίσθηση της μέτρησης. Στη συνέχεια εφαρμόζεται αυτό το σχήμα στη διερεύνηση των ευκαιριών που δίνονται στους μαθητές και τις μαθήτριες δημοτικού στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για την ανάπτυξη της αίσθησης της μέτρησης του μήκους, του εμβαδού και του όγκου.

Η ΑΙΣΘΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Η αίσθηση της μέτρησης εμπεριέχει γνώση και κατανόηση των εννοιών και των αρχών που σχετίζονται με τις μετρήσεις, ξεπερνώντας γεγονότα και διαδικασίες (Hannighofer κ.ά., 2011· Vasilyeva κ.ά., 2009)· για παράδειγμα, η ανάγκη για πλήρη κάλυψη του υπό μέτρηση αντικειμένου με την επιλεγμένη μονάδα μέτρησης χωρίς να υπάρχουν κενά, και η αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ του μεγέθους των μονάδων μέτρησης και του πλήθους τους (Joram, 2003). Στην αίσθηση της μέτρησης εντάσσεται ένα ευρύ πλήθος στοιχείων όπως η έμφαση στις μη τυπικές μονάδες ή, αλλιώς, τα σημεία αναφοράς (Hope, 1989· Joram, 2003). Επιπλέον, σημαντικά στοιχεία της αίσθησης της μέτρησης θεωρούνται η γνώση της διαδικασίας της μέτρησης, συμπεριλαμβάνοντας τη χρήση εργαλείων μέτρησης, και η γνώση ποικίλλων στρατηγικών εκτίμησης μέτρησης (Shaw & Pucket-Cliatt, 1989), η ικανότητα κρίσης της λογικότητας του αποτελέσματος της εκτίμησης (Muir, 2006), καθώς επίσης η ικανότητα σχεδίασης γραμμών δοσμένου μήκους (Clements, 1999). Η Hagena (2015) συνθέτει τη βιβλιογραφία προτείνοντας ότι η καλή αίσθηση της μέτρησης περιλαμβάνει: α) την ικανότητα αναγνώρισης του υπό μέτρηση μεγέθους, β) την ικανότητα διεξαγωγής μέτρησης, εκτίμησης και στρογγυλοποίησης, γ) την ικανότητα λήψης απόφασης για τη διεξαγωγή μέτρησης, εκτίμησης και στρογγυλοποίησης, δ) τη γνώση των μονάδων μέτρησης, που εμπεριέχει τον υπολογισμό και τις μετατροπές τους, και ε) την κατοχή ενός συνόλου σημείων αναφοράς, καθώς και την ικανότητα χρήσης αυτών των σημείων αναφοράς.

Στην παρούσα εργασία, για την εννοιοποίηση της αίσθησης της μέτρησης ενός μεγέθους οργανώνουμε την υπάρχουσα βιβλιογραφία μέσα από την οπτική της αποβλεπτικής σχέσης του δρώντος υποκειμένου με το ίδιο το μέγεθος, αλλά και με το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο καλείται να δράσει (πρβλ. Shaw & Pucket-Cliatt, 1989). Εντός αυτής της σχέσης, η αίσθηση της μέτρησης ενός μεγέθους αναδύεται σε ένα δίκτυο αλληλεπιδράσεων μεταξύ των επιλογών και εφαρμογών για μέτρηση ή εκτίμηση, μονάδες και διαδικασίες, καθώς και των αναστοχασμών σχετικά με τη λογικότητα των επιλογών και εφαρμογών. Με αυτόν τον τρόπο, δίνεται η δυνατότητα αναγνώρισης διαφορετικών ποιοτήτων αίσθησης της μέτρησης διαφορετικών μεγεθών (π.χ. μήκος, όγκος), η οποία μπορεί να διαφοροποιείται σε διαφορετικό πλαίσιο (π.χ. σχολείο, καθημερινή ζωή).

Σχήμα 1: Η αίσθηση της μέτρησης στην παρούσα έρευνα.

Η ΑΙΣΘΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Οι μετρήσεις αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα των προγραμμάτων σπουδών. Ωστόσο, αποτελέσματα ερευνών που έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων στη διεθνή βιβλιογραφία σε σχέση με την παρουσίαση των μεγεθών του μήκους, της επιφάνειας και του όγκου, συχνά αναδεικνύουν ανεπαρκή διδακτική κάλυψη (Hong κ.ά., 2019). Επίσης, η έμφαση στη διαδικαστική γνώση (Smith κ.ά., 2013) φαίνεται ότι δεν παρέχει τις ευκαιρίες ανάπτυξης των επιθυμητών ποιοτήτων της αίσθησης της μέτρησης. Στην ελληνική βιβλιογραφία τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα φαίνεται να είναι περιορισμένα. Συνεπώς, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των έργων των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στο δημοτικό σχολείο στην Ελλάδα αναφορικά με τις ευκαιρίες που παρέχουν στους μαθητές και τις μαθήτριες για την καλλιέργεια της αίσθησής τους για τη μέτρηση του μήκους, του εμβαδού και του όγκου.

Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που θα απασχολήσουν την παρούσα εργασία είναι τα εξής:

1. Ποιες οι ευκαιρίες για την ανάπτυξη της αίσθησης της μέτρησης, όπως αυτές καταδεικνύονται από τη συχνότητα εμφάνισης των επιμέρους στοιχείων του δικτύου της αίσθησης της μέτρησης;

2. Ποιες οι ευκαιρίες για την ανάπτυξη της αίσθησης της μέτρησης, όπως αυτές καταδεικνύονται από τη συχνότητα συνεμφάνισης των επιμέρους στοιχείων του δικτύου της αίσθησης της μέτρησης;
3. Πώς διαμορφώνονται οι ευκαιρίες για την ανάπτυξη της αίσθησης της μέτρησης ανάλογα με το υπό εξέταση μέγεθος (μήκος, επιφάνεια, όγκος);

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για τους σκοπούς της έρευνας, μελετήθηκαν τα σχολικά εγχειρίδια (όπως είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα *Φωτόδεντρο Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία,* http://ebooks.edu.gr) και, συγκεκριμένα, τα έργα των κεφαλαίων που αφορούν τη μέτρηση του μήκους, του εμβαδού και του όγκου στα Βιβλία Μαθητή, τα Τετράδια Εργασιών και τα Βιβλία Εκπαιδευτικού όλων των τάξεων του δημοτικού (Α΄–Στ΄). Συνολικά αναλύθηκαν 316 έργα που αφορούσαν τις μετρήσεις μήκους, εμβαδού και όγκου: 14 έργα από την Α΄ τάξη, 36 έργα από τη Β΄ τάξη, 24 έργα από τη Γ΄ τάξη, 74 έργα από τη Δ΄ τάξη, 85 έργα από την Ε΄ τάξη και 83 έργα από τη Στ΄ τάξη. Η μέτρηση του μήκους παρουσιάστηκε σε 153 έργα, του εμβαδού σε 126 έργα και του όγκου (ή της χωρητικότητας) σε 71 έργα, ενώ 34 έργα πραγματεύονταν τη μέτρηση περισσότερων του ενός μεγεθών.

Τα έργα των κεφαλαίων αυτών αναλύθηκαν με τη χρήση του λογισμικού Atlas.ti, σύμφωνα με την προτεινόμενη εννοιοποίηση της αίσθησης της μέτρησης σε σχέση με τις ευκαιρίες για: *επιλογή* (της μέτρησης ή της εκτίμησης, των μονάδων μέτρησης και των διαδικασιών), για *εφαρμογή* (της μέτρησης ή της εκτίμησης, των μονάδων μέτρησης και των διαδικασιών) και για *αναστοχασμό* (για τη λογικότητα των επιλογών και των εφαρμογών). Επισημαίνεται η απουσία διάκρισης των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του πλαισίου, επειδή όλα τα έργα εντάσσονται στο πλαίσιο της επίλυσης σχολικών μαθηματικών ασκήσεων.

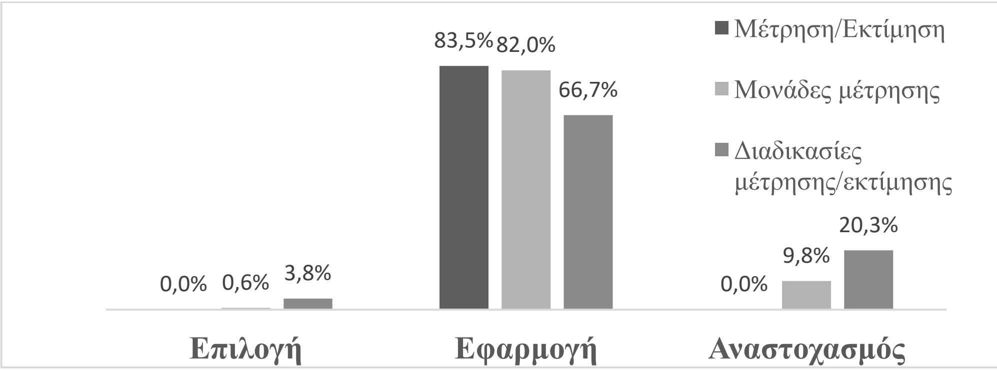
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ευκαιρίες ανάπτυξης αίσθησης της μέτρησης: εμφανίσεις στοιχείων

Η ανάλυση του περιεχομένου των έργων σε σχέση με τη συχνότητα εμφάνισης καθενός από τα στοιχεία που εντάσσονται στο δίκτυο της αίσθησης της μέτρησης κατέδειξε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των έργων (βλ. Πίνακα 1), σε ποσοστό 88,6% του συνολικού τους αριθμού, εστιάζουν στην εφαρμογή των μετρήσεων και των εκτιμήσεων μέσα από την εφαρμογή διαδικασιών και μονάδων μέτρησης. Τα έργα που στοχεύουν στην καλλιέργεια του αναστοχασμού σχετικά με τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μέτρησης ή της εκτίμησης, καθώς των μονάδων και των διαδικασιών αποτέλεσαν το 26,6%, ενώ 4,4% των έργων αφορά την επιλογή μέτρησης ή εκτίμησης, μονάδων και διαδικασιών.

Πίνακας 1: Εμφανίσεις και συνεμφανίσεις ευκαιριών ανάπτυξης αίσθησης μέτρησης

	Επιλογή	Εφαρμογή	Αναστοχασμός
Επιλογή	14 (4,4%)		
Εφαρμογή	14 (4,4%)	280 (88,6%)	
Αναστοχασμός	3 (0,9%)	57 (18%)	84 (26,6%)
Επιλογή-Εφαρμογή			3 (0,9%)



Σχήμα 2: Εμφανίσεις των στοιχείων της αίσθησης της μέτρησης ανά άξονα.

Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε ξεχωριστή ανάλυση για τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε κάθε άξονα (μέτρηση/εκτίμηση, μονάδες και διαδικασίες μέτρησης· βλ. Σχήμα 2). Φάνηκε ότι τα έργα των σχολικών εγχειριδίων πραγματεύονται αποκλειστικά την εφαρμογή της ακριβούς μέτρησης και της εκτίμησης σε ποσοστό 83,5%, ενώ δεν εντοπίστηκε κάποιο έργο που να στοχεύει στην καλλιέργεια της επιλογής διεξαγωγής μέτρησης ή εκτίμησης, καθώς και στον αναστοχασμό για την επιλογή αυτή. Όσον αφορά την προώθηση της γνώσης για τις μονάδες μέτρησης, προέκυψε ότι τα έργα των σχολικών εγχειριδίων εστιάζουν στην εφαρμογή τους σε ποσοστό 82%, στον αναστοχασμό για τη χρήση τους σε ποσοστό 9,8% και στην επιλογή τους σε ποσοστό μόλις 0,6%. Μάλιστα, το 27,8% των έργων που αναφέρονταν στις μονάδες μέτρησης (N=259) επικεντρωνόταν στις μετατροπές μεταξύ των μονάδων. Επιπρόσθετα, σχετικά με τη γνώση για τις διαδικασίες μέτρησης και εκτίμησης, αναδείχτηκε και πάλι η έμφαση των έργων των σχολικών εγχειριδίων στην εφαρμογή των διαδικασιών σε ποσοστό 66,7%, στον αναστοχασμό για τη χρήση τους σε ποσοστό 20,3% και στην επιλογή τους σε ποσοστό 3,8%.

Ευκαιρίες ανάπτυξης αίσθησης της μέτρησης: συνεμφανίσεις στοιχείων

Αναφορικά με τις συνεμφανίσεις ευκαιριών για επιλογή, εφαρμογή και αναστοχασμό (βλ. Πίνακα 1), παρατηρήθηκε ότι οι τρεις αυτοί άξονες καλλιεργούνται σπάνια στο ίδιο έργο, σε ποσοστό μόλις 0,9% του συνολικού αριθμού των έργων. Αναφορικά με τις συνεμφανίσεις δύο αξόνων, χαμηλή είναι η συνεμφάνιση της επιλογής με τον αναστοχασμό (σε ποσοστό 0,9% των έργων) και της επιλογής με την εφαρμογή (σε ποσοστό 4,4% των έργων). Αντιθέτως, η συνεμφάνιση της εφαρμογής και του αναστοχασμού σημειώθηκε συγκριτικά συχνότερα στο ίδιο έργο (σε ποσοστό 18% των έργων).

Ευκαιρίες ανάπτυξης αίσθησης της μέτρησης: μήκος, εμβαδόν, όγκος

Η ανάλυση των ευκαιριών εμφάνισης για επιλογή, εφαρμογή και αναστοχασμό για κάθε μέγεθος ξεχωριστά κατέδειξε ότι τα έργα των σχολικών εγχειριδίων τείνουν να δίνουν έμφαση στην εφαρμογή της μέτρησης και της εκτίμησης μέσα από την εφαρμογή των διαδικασιών και των μονάδων μέτρησης (92,2%, 92% και 76% για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα). Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα σημαντικό μέρος της εφαρμογής των διαδικασιών της μέτρησης στις τάξεις Ε’ και Στ’ (20,25% του συνολικού αριθμού των έργων) αφορά την εφαρμογή τύπων υπολογισμού (π.χ. υπολογισμός μήκους κύκλου και εμβαδού κανονικού πολυγώνου). Η καλλιέργεια του αναστοχασμού επί των επιλογών και των εφαρμογών παρατηρήθηκε σε χαμηλότερη συχνότητα (ποσοστό επί του συνόλου των έργων που αφορούν κάθε μέγεθος: 26,8%, 26,2% και 31% για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα), ενώ σπάνια καλλιεργείται η ικανότητα της επιλογής διεξαγωγής μέτρησης ή εκτίμησης, διαδικασιών και μονάδων μέτρησης (ποσοστό επί του συνόλου των έργων που αφορούν κάθε μέγεθος: 5,9%, 4,8% και 0% για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα).

Αναφορικά με τη συνεμφάνιση της επιλογής, της εφαρμογής και του αναστοχασμού (βλ. Πίνακα 2), παρατηρήθηκε ότι καλλιεργείται εξαιρετικά σπάνια ή και καθόλου (ποσοστό επί του συνόλου των έργων που αφορούν κάθε μέγεθος: 0%, 2,4% και 0% για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα), ενώ τα ίδια ποσοστά παρατηρούνται και στη συνεμφάνιση της επιλογής και του αναστοχασμού. Λίγο συχνότερη είναι η συνεμφάνιση της επιλογής και της εφαρμογής (ποσοστό επί του συνόλου των έργων που αφορούν κάθε μέγεθος: 5,9%, 4,8% και 0% για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα), ενώ αρκετά πιο συχνή είναι η συνεμφάνιση της εφαρμογής και του αναστοχασμού (ποσοστό επί του συνόλου των έργων που αφορούν κάθε μέγεθος: 19,6%, 19,8% και 11,3% για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα).

Πίνακας 2: Εμφανίσεις και συνεμφανίσεις ευκαιριών για κάθε μέγεθος

	Επιλογή	Εφαρμογή	Αναστοχασμός
Μήκος			
Επιλογή	9 (5,9%)		
Εφαρμογή	9 (5,9%)	141 (92,2%)	

Αναστοχασμός	0 (0%)	30 (19,6%)	41 (26,8%)
Επιλογή-Εφαρμογή			0 (0%)
Επιφάνεια			
Επιλογή	6 (4,8%)		
Εφαρμογή	6 (4,8%)	116 (92%)	
Αναστοχασμός	3 (2,4%)	25 (19,8%)	33 (26,2%)
Επιλογή-Εφαρμογή			3 (2,4%)
Όγκος			
Επιλογή	0 (0%)		
Εφαρμογή	0 (0%)	54 (76%)	
Αναστοχασμός	0 (0%)	8 (11,3%)	22 (31%)
Επιλογή-Εφαρμογή			0 (0%)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία είχε σκοπό αφενός να εννοιοποιήσει την αίσθηση της μέτρησης και αφετέρου να μελετήσει τις ευκαιρίες που παρέχονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για την καλλιέργειά της όσον αφορά το μήκος, το εμβαδόν και τον όγκο.

Η ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων κατέδειξε την προώθηση των ευκαιριών για εφαρμογή (82% των έργων), ενώ ελάχιστες είναι οι ευκαιρίες που παρέχονται για αναστοχασμό (9,8% των έργων) και επιλογή (0,6% των έργων). Το εύρημα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με προηγούμενες έρευνες που ανέδειξαν τον προσανατολισμό των εγχειριδίων στις διαδικασίες μέτρησης (Smith κ.ά., 2013), ενώ φαίνεται ότι η έμφαση σε αυτές, όπως στην περίπτωση των μετατροπών των μονάδων μέτρησης (27,8% των έργων), προσδίδει ελάχιστα στη βελτίωση της αίσθησης της μέτρησης (Van de Walle κ.ά., 2010).

Όσον αφορά την ανάπτυξη της αίσθησης της μέτρησης μέσω των συνεμφανίσεων ευκαιριών για επιλογή, εφαρμογή και αναστοχασμό, φαίνεται ότι καλλιεργείται σπάνια (0,9% των έργων), ενώ συγκριτικά συχνότερη πρακτική στα εγχειρίδια είναι οι μαθητές και οι μαθήτριες να καλούνται πρώτα σε εφαρμογή και εν συνεχεία σε αναστοχασμό (ποσοστό συνεμφάνισης: 18% των έργων). Η ύπαρξη έργων που προάγουν τον αναστοχασμό είναι πολύ ενθαρρυντική, αφού η αναγνώριση της λογικότητας ενός αποτελέσματος παραμένει δύσκολη ακόμη και στο γυμνάσιο (Alajmi & Reys, 2010).

Σχετικά με την ανάπτυξη της αίσθησης της μέτρησης για κάθε μέγεθος ξεχωριστά, φάνηκε ότι προωθείται σπάνια σε ό,τι αφορά την επιφάνεια (ποσοστό συνεμφάνισης επιλογής, εφαρμογής, αναστοχασμού: 2,4% των έργων επιφάνειας) και καθόλου αναφορικά με το μήκος και τον όγκο (0% των αντίστοιχων έργων). Αντιθέτως, σε όλα τα μεγέθη δίνεται μεγάλη έμφαση στην εφαρμογή (92,2%, 92% και 76% των έργων για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα), καθώς και στον συνδυασμό της με τον αναστοχασμό (19,6%, 19,8% και 11,3% των έργων για το μήκος, την επιφάνεια και τον όγκο, αντίστοιχα). Ωστόσο, το σημαντικό ποσοστό των έργων (20,25%) που προωθούν την εφαρμογή τύπων υπολογισμού προκαλεί προβληματισμό σε σχέση με την επίγνωση των μαθητών και μαθητριών για τις διαδικασίες που εφαρμόζουν και χρήζει περαιτέρω διερεύνησης μελλοντικά.

Συμπερασματικά, τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού παρέχουν ευκαιρίες ανάπτυξης ενός μόνο μέρους του δικτύου αλληλεπιδράσεων της αίσθησης της μέτρησης. Η πλειοψηφία των έργων εστιάζει στην εφαρμογή, ενώ παρέχονται ελάχιστες ευκαιρίες για αναστοχασμό και σχεδόν δε δίνονται ευκαιρίες για επιλογή. Με αυτόν τον τρόπο, η αίσθηση της μέτρησης προβάλλεται σε ανάπτυξη εντοπισμένων ικανοτήτων εφαρμογής σε δεδομένο μέγεθος και πλαίσιο, αποκόπτοντας με αυτό τον τρόπο την ανάπτυξη εποπτείας επί του συνόλου του πολύπλοκου όλου που συνιστά η αίσθηση της μέτρησης. Όσον αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση, είναι σημαντικό οι ελλείψεις αυτές να ληφθούν υπόψιν κατά τη συγγραφή νέων εγχειριδίων, καθώς τα μαθηματικά εκπίπτουν σε εσωστρεφείς διαδικασίες, δύσκολα ως αδύνατο να εφαρμοστούν σε εξω-μαθηματικό πλαίσιο. Συνεπώς, προτείνεται ότι η παρούσα εννοιοποίηση είναι χρήσιμο να αξιοποιηθεί και να αξιολογηθεί και σε άλλα μεγέθη (όπως ο χρόνος) για να διερευνηθούν τόσο ενδο-μαθηματικές, όσο και διεπιστημονικές σχέσεις και αλληλεπιδράσεις σχετικά με την αίσθηση της μέτρησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alajmi, A. H., & Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*, 11–139.

Australian curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA, 2014). *The Australian Curriculum: Mathematics.* Ανακτήθηκε 3/04/2022 από https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics

Βαϊτσίδη, Γ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2015). Σύγκριση επιφανειών μέσω εκτίμησης και μέτρησης με χρήση «βοηθητικών μέσων». Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (επιμ.). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις* (σ. 369-378). Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Γκενέ, Κ., Κανελλοπούλου, Β., & Κολέζα, Ε. (2015). Μέτρηση μήκους με μη τυπικές και τυπικές μονάδες από μαθητές της τετάρτης δημοτικού. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (επιμ.). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις* (σ. 409-418). Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: research challenges. *School Science and Mathematics*, *99*(1), 5–11.

Department for Education (DfE, 2013). *National curriculum in England: primary curriculum. The national curriculum programmes of study and attainment targets for key stages 1 and 2.* Ανακτήθηκε 3/04/2022 από https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-primary-curriculum

Hagena, M. (2015). Improving mathematical modelling by fostering measurement sense: An intervention study with pre-service mathematics teachers. In G. A. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 185–194). Springer International Publishing.

Hannighofer, J., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Weirich, S., & Robitzsch, A. (2011). Revealing German primary school students' achievement in measurement. *ZDM Mathematics Education 43*(5), 651–665.

Hong, D. S., Choi, K. M., Runnalls, C., & Hwang, J. (2019). How well aligned are common core textbooks to students' development in area measurement? *School Science and Mathematics*, *119*(5), 240–254.

Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *The Arithmetic Teacher*, *36*(6), 12–16.

Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and Teaching Measurement*, *2003 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 57-67). NCTM.

Joram, E., & Garcia, F. (2006). Taking a closer look at measurement – using teacher read alouds of nonfiction to develop students' measurement sense. *Iowa Council of Teachers of Mathematics Journal*, *33*, 47–53.

Muir, T. (2006). Developing an understanding of the concept of area. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *12*(4), 4–9.

Shaw, J., & Puckett-Cliatt, M. (1989). Developing measurement sense. In P. Trafton & A. Schule (Eds.), *New directions for elementary school mathematics: 1989 yearbook* (pp. 149–155). NCTM.

Sisman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1293–1319.

Smith, J. P., Males, L. M., Dietiker, L. C., Lee, K., & Mosier, A. (2013). Curricular treatments of length measurement in the United States: Do they address known learning challenges? *Cognition and Instruction, 31*(4), 388–433.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (7th Edition). Pearson Education.

Vasilyeva, M., Casey, B. M., Dearing, E., & Ganley, C. M. (2009). Measurement skills in low-income elementary school students: Exploring the nature of gender differences. *Cognition and Instruction, 27*(4), 401–428.

ΥΠΕΠΘ-ΠΙ (2003). *Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών μαθηματικών.* Ανακτήθηκε 3/04/2022 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Πήττα Γεωργία, Βαμβακούση Ξένια

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

g.pitta@uoi.gr, xvamvak@uoi.gr

Παρουσιάζουμε μέρος μιας θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού με στόχο την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία, εστιάζοντας σε μια δραστηριότητα στην οποία οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια εισάγονται για να περιγράψουν την πολλαπλασιαστική σχέση των φυσικών αριθμών 1-10 με τη μονάδα, με τους αριθμούς να αναπαριστώνται ως συνεχείς ποσότητες. Παρουσιάζουμε το σκεπτικό και το σχεδιασμό της δραστηριότητας και ευρήματα από την πρώτη εφαρμογή της με παιδιά του νηπιαγωγείου που δείχνουν οφέλη τόσο για την εκμάθηση των όρων, όσο και τη νοηματοδότησή τους. Συζητάμε ενδεχόμενες αναθεωρήσεις στον επανασχεδιασμό με βάση τα ευρήματα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Μέχρι και σχετικά πρόσφατα ήταν διαδεδομένη η πεποίθηση ότι η πολλαπλασιαστική/αναλογική σκέψη έπεται της προσθετικής, η οποία αποτελούσε και βάση για την οργάνωση των αναλυτικών προγραμμάτων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018), με αποτέλεσμα τα παιδιά της πρωτοσχολικής ηλικίας να εκτίθενται σημαντικά λιγότερο, ή και καθόλου σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Ωστόσο, πολλά ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να αναγνωρίσουν αντιληπτικά πολλαπλασιαστικές/αναλογικές σχέσεις (McCrink & Spelke, 2016; Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002) και να διαχειριστούν απλές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις με διακριτές, αλλά και συνεχείς ποσότητες (Hunting & Davis, 1991). Επιπλέον, η πρώιμη πολλαπλασιαστική σκέψη φαίνεται να ενισχύεται με την έκθεση σε σχετικές άτυπες ή τυπικές εμπειρίες (Hunting & Davis, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2020).

Τα δεδομένα αυτά δεν έχουν αξιοποιηθεί πλήρως στην πρωτοσχολική εκπαίδευση, παρόλο που στόχοι σχετικοί με την πολλαπλασιαστική σκέψη εντάσσονται ρητά στα αναλυτικά προγράμματα. Για παράδειγμα, μια ανάλυση του ελληνικού προγράμματος για το Νηπιαγωγείο και τις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018) έδειξε ότι οι στόχοι που αφορούν τις προσθετικές σχέσεις υπερτερούν αυτών που αφορούν τις πολλαπλασιαστικές, ως προς το πλήθος και τον προβλεπόμενο διδακτικό χρόνο. Επιπλέον, οι στόχοι που αφορούν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις με διακριτές ποσότητες προηγούνται και υπερτερούν σε πλήθος, σε σχέση με αυτές με συνεχείς. Τέλος, τα γλωσσικά εργαλεία για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων είναι περιορισμένα.

Είναι γεγονός ότι τα παραπάνω προβλήματα, για συνεχείς ποσότητες, παρουσιάζουν διαδικαστικές προκλήσεις για τα παιδιά. Πράγματι, μόνο στις διακριτές ποσότητες είναι εφαρμόσιμες στρατηγικές ευπρόσιτες στα παιδιά, όπως η αντιστοιχία «ένα προς πολλά», «πολλά προς ένα» και η επαναλαμβανόμενη μοιρασιά «από ένα». Ωστόσο, φαίνεται ότι η κατανόηση για τις αρχές που διέπουν τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις αναπτύσσεται παράλληλα για τα δύο είδη ποσοτήτων (Kornillaki & Nunes, 2005). Πολλοί ερευνητές, για διαφορετικούς αλλά συμπληρωματικούς λόγους, υποστηρίζουν την ενιαία αντιμετώπιση των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων στην εκπαίδευση. Για παράδειγμα, ο Steffe (2013) υποστηρίζει ότι η ίδια νοητική ενέργεια, αυτή της μοναδοποίησης, με την έννοια της «κατάτμησης της αισθητηριακής εμπειρίας σε μονάδες» υπόκειται της (νοητικής) κατασκευής διακριτών και συνεχών ποσοτήτων. Η Sophian (2004) αναδεικνύει ως παρόμοιο το ρόλο της μονάδας στη μέτρηση και την καταμέτρηση. Οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) επισημαίνουν ότι οι μαθηματικές ενέργειες που απαιτούνται στην περίπτωση των παραπάνω προβλημάτων (επανάληψη μιας ποσότητας, μέτρηση με διαφορετικές μονάδες και ισομερισμός) είναι κοινές στα δύο είδη ποσοτήτων.

Από την άλλη μεριά, τα γλωσσικά εργαλεία είναι καθοριστικής σημασίας προκειμένου τα παιδιά να αναγνωρίσουν ίδιες σχέσεις σε διαφορετικά πλαίσια και να οργανώσουν τις άτυπες και τυπικές τους εμπειρίες με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (Hunting & Davis, 1991). Πράγματι, πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι παιδιά που διαθέτουν απλό λεξιλόγιο για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων (π.χ. «διπλάσιο») στην 1η τάξη, υπερτερούν σε ικανότητες πολλαπλασιαστικής και αναλογικής σκέψης στη 2η (Vanluydt, Supply, Verschaffel, & Van Dooren, 2021).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μέρος μιας εν εξελίξει *θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού* (Gravemeijer & Prediger, 2019) με στόχο την ανάπτυξη ενός προγράμματος δραστηριοτήτων για την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική εκπαίδευση. Αυτό το είδος έρευνας σχεδιασμού δίνει την δυνατότητα της επιλογής τόσο του τρόπου με τον οποίο θα διδαχθεί το υπό μελέτη αντικείμενο όσο και της δομής της διδασκαλίας η οποία δεν αφορά ένα γενικό εκπαιδευτικό ερώτημα αλλά τον αναστοχασμό ενός εμπειρικού/ πρακτικού? διδακτικού θέματος (Hußmann and Prediger 2016). Βασικοί άξονες του προγράμματος είναι α) η ενιαία και παράλληλη αντιμετώπιση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, β) η παροχή εμπειριών που σχετίζονται και με τις τρεις μαθηματικές ενέργειες που είναι θεμελιώδεις για τις πολλαπλασιαστικές έννοιες και διαδικασίες (ισομερισμός, επανάληψη μονάδας και μέτρηση με διαφορετικές μονάδες) και γ) η εισαγωγή όρων για πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια. Έχει προηγηθεί μια εφαρμογή του προγράμματος σε αρχική μορφή με παιδιά του νηπιαγωγείου (Pitta, Kaldrimidou, & Vamvakoussi, 2021) και το πρόγραμμα έχει επανασχεδιαστεί, με βάση τα ευρήματα. Εδώ εστιάζουμε σε μια νέα δραστηριότητα που σχεδιάστηκε ως εισαγωγική στη δεύτερη εκδοχή της ακολουθίας, στην οποία οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια εισάγονται για να περιγράψουν την πολλαπλασιαστική σχέση των φυσικών αριθμών 1-10 με τη μονάδα (ν=νx1), με τους αριθμούς να αναπαριστώνται ως συνεχείς ποσότητες (μήκη). Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας βασίζεται στην αξιοποίηση της εμπειρίας των παιδιών για την ακολουθία των φυσικών αριθμών ως απόλυτα και ως τακτικά αριθμητικά, τόσο σε αριθμητικό επίπεδο, όσο και σε φωνολογικό επίπεδο και η ανάδειξη της πολλαπλασιαστικής σχέσης των φυσικών με τη μονάδα μέσω της μέτρησης. Τοπική μας υπόθεση (για τη δραστηριότητα αυτή) είναι ότι οι κανονικότητες που διέπουν την αριθμητική ακολουθία, αλλά και την παραγωγή των λέξεων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια θα υποστηρίξει την εξαγωγή των όρων αυτών, ενώ η πολλαπλασιαστική σύγκριση μέσω μέτρησης θα τους νοηματοδοτήσει.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Σχεδιασμός της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα είναι πλαισιωμένη σε ένα σενάριο με πρωταγωνιστές αθλητικές ομάδες φανταστικών πλασμάτων. Τα πλάσματα κατασκευάστηκαν ως ξύλινοι κύλινδροι, με ίδια διάμετρο βάσης και διαφορετικό ύψος. Με μονάδα μήκους (μ.μ.) ίση με 4 εκ. και 3 εκ. κατασκευάστηκαν 2 ομάδες των 10 πλασμάτων με ύψος 1μ.μ. – 10 μ.μ. «η ομάδα της Παμ» και «η ομάδα του Πομ», όπου «Παμ» και «Πομ» το όνομα των πλασμάτων με ύψος 1μ.μ.. Ως συμπληρωματικό υλικό κατασκευάστηκε ικανός αριθμός από μονάδες για κάθε περίπτωση (ξύλινοι κύλινδροι ύψους 4 εκ. και 3 εκ., αντίστοιχα), καθώς και «φανέλες» από χαρτόνι για τις παίκτριες.

Η δραστηριότητα εξελίσσεται ως εξής: Αρχικά δίνονται οι παίκτριες στα παιδιά για να τις παρατηρήσουν και γίνονται γενικές ερωτήσεις σχετικά με το ύψος τους. Οι παίκτριες αποσύρονται και παραμένει η παίκτρια που αντιστοιχεί στη μονάδα, που συστήνεται στα παιδιά ως «η αρχηγός της ομάδας» με το όνομα «Παμ». Τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τον κατάλληλο αριθμό στη φανέλα της, όπου αναγράφεται ήδη η συλλαβή «Παμ» (1 Παμ). Στη συνέχεια, καλούνται διαδοχικά οι επόμενες παίκτριες με χρήση των τακτικών αριθμητικών (η δεύτερη, η τρίτη, κ.λπ.) και τα ονόματά τους να προκύπτουν με διαδοχικές προσθήκες της συλλαβής «Παμ» (ΠαμΠαμ, ΠαμΠαμΠαμ, κ.λπ. – ηχητικό αναπτυσσόμενο μοτίβο). Τα παιδιά καλούν τις παίκτριες λέγοντας το όνομα της κάθε μιας και χτυπώντας παλαμάκια για κάθε συλλαβή. Από την τρίτη παίκτρια και μετά, ζητείται από τα παιδιά να προβλέψουν το όνομα της επόμενης.

Δεδομένου ότι με την αύξηση των συλλαβών γίνεται δυσχερής η εκφώνηση των ονομάτων, οι παίκτριες σειριακά, ξεκινώντας από τη δεύτερη, γνωρίζουν στα παιδιά το υποκοριστικό τους όνομα που προκύπτει από το κατάλληλο αριθμητικό πρόθεμα (δι-, τρι-,…) και την κατάληξη «Παμ» (π.χ. «Οι φίλες μου με φωνάζουν Τρι-Παμ»). Τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τον αριθμό της παίκτριας στη φανέλα της (3 Παμ), ως προοίμιο για τη συμβολική έκφραση ενός αποτελέσματος μέτρησης πολλαπλασιαστικά. Κάθε παίκτρια συγκρίνεται ως προς το ύψος με την Παμ, με ρητή ερώτηση (π.χ. «Τι σχέση έχει το ύψος της Τρι-παμ με το ύψος της Παμ;»). Εισάγεται η χρήση των μονάδων για τη σύγκριση των δύο υψών. Η σχέση περιγράφεται με εκφράσεις όπως «η Τρι-Παμ είναι ψηλή ίσαμε με 3 Παμ», για να ακολουθήσει η εισαγωγή του όρου για το αντίστοιχο πολλαπλάσιο (τριπλάσιο). Τέλος, οι δύο παίκτριες λεκτικοποιούν τη μεταξύ τους σχέση (π.χ. «είμαι το τριπλάσιό σου – είμαι το ένα σου τρίτο»). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με παραλλαγές ως προς τι ζητείται από τα παιδιά. Αρχικά, δίνεται το όνομα για να προβλέψουν το υποκοριστικό και να φτιάξουν τη φανέλα της κάθε παίκτριας. Στην πορεία, δίνεται η παίκτρια και πρέπει να βρουν το όνομά της, το υποκοριστικό της και να φτιάξουν τη φανέλα της, ή η φανέλα και ζητούνται τα υπόλοιπα. Η πολλαπλασιαστική σύγκριση του ύψους κάθε παίκτριας με αυτό της Παμ και η έκφραση της σχέσης με όρους πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων είναι σταθερό ζητούμενο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με την «ομάδα του Πομ» (ίδιες σχέσεις, διαφορετική μονάδα). Αυτή τη φορά, η τυχαία σειρά στην παρουσίαση των παικτών ξεκινά σχεδόν άμεσα.

Σημειώνουμε ότι η ταυτοποίηση της «παίκτριας», όταν αυτή παρουσιάζεται με τυχαία σειρά προϋποθέτει τη μέτρησή της με τη μονάδα, ενώ η αναζήτηση της παίκτριας όταν είναι γνωστό το «όνομά» της συνδέεται με την επανάληψη της μονάδας προκειμένου να κατασκευαστεί.

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν οκτώ παιδιά με μητρική γλώσσα τα ελληνικά, μέσης ηλικίας 5 ετών 9 μηνών (με εύρος 5 έτη 7 μήνες – 6 έτη 4 μήνες) νηπιακού τμήματος ιδιωτικού σχολείου των Ιωαννίνων. Τα πέντε ήταν κορίτσια (ψευδώνυμα: Γιάννα, Σωτηρία, Λόρα, Ελένη και Πένυ) και τα τρία ήταν αγόρια (ψευδώνυμα: Άρης, Κώστας και Νικήτας). Το μόνο κριτήριο για τη συμμετοχή των παιδιών του τμήματος ήταν η συγκατάθεση των γονέων τους. Τα παιδιά είχαν εξεταστεί ατομικά πριν την παρέμβαση για να διερευνηθεί η γνώση τους για όρους σχετικούς με τα πολλαπλάσια και τα πολλαπλάσια. Μόνο ο όρος «μισό» τους ήταν οικείος, ως λέξη (δε διέθεταν τρόπους να εξηγήσουν ή να δείξουν τι είναι το «μισό»).

Διαδικασία και έλεγχος διατήρησης

Ο αρχικός σχεδιασμός της έρευνας προέβλεπε την εφαρμογή ολόκληρης της ακολουθίας δραστηριοτήτων, κάτι που δεν κατέστη δυνατό εξαιτίας της πανδημίας. Δοκιμάστηκε μόνο η νέα εισαγωγική δραστηριότητα, όταν οι συνθήκες επέτρεψαν τη δια ζώσης διδασκαλία το Μάιο του 2021. Η εφαρμογή έγινε σε δύο ομάδες των τεσσάρων παιδιών, στο χώρο του σχολείου. Κάθε ομάδα συμμετείχε σε 4 συναντήσεις, διάρκειας περίπου 45΄ λεπτών η κάθε μία. Διεξήχθη έλεγχος διατήρησης ατομικά μετά την παύση για τη καλοκαιρινές διακοπές, περίπου 4 μήνες μετά την παρέμβαση.

Ο έλεγχος διατήρησης έγινε στο ίδιο πλαίσιο με αυτό της δραστηριότητας: Παρουσιάστηκε η «ομάδα της Παμ» και οι «φανέλες», χωρίς διάταξη. Η ερευνήτρια επέλεξε τρεις παίκτριες σε τυχαία σειρά. Τα παιδιά κλήθηκαν να α) αναγνωρίσουν την παίκτρια, αντιστοιχώντας το όνομά της και τη φανέλα της (Έργο Α), β) να ελέγξουν / εξηγήσουν την απάντησή τους (Έργο Β) και γ) να εκφράσουν τη σχέση μεταξύ της παίκτριας και της «αρχηγού» (Έργο Γ). Εξετάστηκαν οι σχέσεις 2:1, 3:1, 4:1 και οι αντίστροφές τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ανταπόκριση των παιδιών στην παρέμβαση

Τα παιδιά αξιοποίησαν την ακολουθία ως διαδοχή των αριθμολέξεων για να προβλέψουν το όνομα της «επόμενης παίκτριας», ενώ προέβλεψαν και την ύπαρξη «παικτριών» πέραν των 10 πρώτων. Για παράδειγμα:

Κώστας: Κυρία, εγώ ξέρω ποια είναι. (*Είναι*) η Τέσσερα-Παμ (…) Επειδή αυτές είναι το ένα-δύο-τρία [*δείχνει τις αντίστοιχες παίκτριες επάνω στο τραπέζι*] και αυτή θα είναι το τέσσερα. Μετά είναι το τέσσερα.

Πένυ: Να πάρουμε και μια πολύ μεγάλη, την Εικοσιτέσσερα-Παμ

Μετά την εύρεση των «συμπτυγμένων» ονομάτων και την εισαγωγή του όρου «διπλάσιο», τα παιδιά φάνηκε να προσαρμόζουν γρήγορα τα «ονόματα» σε όρους για τα πολλαπλάσια. Για παράδειγμα:

Ε: Για την Δι-Πάμ είπαμε πως είναι η διπλάσια της Παμ. Για την Τρι-Πάμ;

Πένυ - Κώστας: Τριπλάσια (μαζί).

Η κατασκευή των όρων δε στηριζόταν μόνο στην ηχητική ομοιότητα του ονόματος της παίκτριας με τον αντίστοιχο όρο. Για παράδειγμα, η Λόρα, έχοντας μπροστά της την Τετρα-Παμ δίπλα από τη στοίβα με τις τέσσερις μονάδες, ρωτήθηκε «τι σχέση έχει η Τετρα-Παμ με την Παμ» και απάντησε «η τεσσερα-πλάσια» γιατί χρειάστηκε «τέσσερις Παμ, Παμ-Παμ-Παμ-Παμ».

Όσον αφορά τα υποπολλαπλάσια, προέκυψε η εξής δυσκολία: Ο όρος «μισό» αρχικά είτε χρησιμοποιήθηκε για την έκφραση και των άλλων σχέσεων, είτε για την κατασκευή των άλλων όρων, όπως στο παρακάτω απόσπασμα όπου ζητείται η σχέση ανάμεσα στην Παμ και την Τρι-Πάμ:

Κώστας- Λόρα.: Ότι είναι το ένα της μισό (*μαζί)*

Ε: Το ένα της μισό; Μα χρειαστήκαμε 3 κουκλάκια για την Τρι-Πάμ.

Πένυ.: Το τρία σου μισό.

Η δυσκολία αυτή είναι απόρροια της έκφρασης της πρώτης σχέσης (1:2) ως «είμαι το ένα σου μισό», με το σκεπτικό ότι θα ήταν πιο οικεία στα παιδιά. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, η ερευνήτρια προέβη σε διορθωτική κίνηση, αντικαθιστώντας τον όρο «μισό» με τον όρο «ένα δεύτερο» και συνδέοντας τους όρους με την ακολουθία των τακτικών αριθμητικών. Παρατηρήθηκε βελτίωση, αλλά η κατασκευή των όρων για τα πολλαπλάσια ήταν σταθερά πιο εύκολη για τα παιδιά, σε σχέση με το αντίστοιχο υποπολλαπλάσιο, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα:

Ε: Και τι σχέση έχει η Πεντα-πάμ, η μεγάλη, με την Παμ, την μικρή;

Άρης: Πενταπλάσια.

Ε: Μπορείτε να μου πείτε και για την Παμ; Τι σχέση έχει με την Πεντα-πάμ;

Άρης: Είναι το ένα τέταρτο.

Ε: Μα είναι πέντε τα κομμάτια της Πεντα-πάμ.

Σωτηρία: Το ένα πέμπτο.

Τα παιδιά αξιοποίησαν τον αναδρομικό κανόνα της αριθμητικής ακολουθίας για να προβλέψουν το ύψος της επόμενης παίκτριας, κάτι που εξελίχθηκε σε έκφραση των πολλαπλασίων με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Παρακάτω, ο Άρης διατυπώνει τον κανόνα, εξηγώντας πώς επέλεξε την $5^{η}$ παίκτρια:

Άρης: Επειδή μέτρησα ότι η προηγούμενη ήταν η τέταρτη άρα τώρα θα χρειαστώ αυτή και άλλο ένα. Για να φτάσω στο πέμπτο [Δείχνει παίρνοντας την Τετρα-Παμ και βάζοντας επάνω της μία μονάδα]

Ε: Για να πάμε από την Πεντα-Παμ στην Εξα-Πάμ πόσες Παμ θα βάλεις;

Άρης: Μία.(…) Κάθε φορά θα βάζουμε ένα τέτοιο. [Δείχνει τη μονάδα]

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης τα παιδιά πραγματοποίησαν ή/και αναφέρθηκαν στις ενέργειες της μέτρησης και της επανάληψης μιας ποσότητας (μονάδα), είτε για να απαντήσουν, είτε για να αιτιολογήσουν. Στο πρώτο από τα παρακάτω αποσπάσματα ο Κώστας, έχοντας βρει το όνομα της παίκτριας από τη φανέλα της (Οχτα-πάμ) εξηγεί πώς θα την βρει και ποια σχέση έχει με την Παμ. Στο δεύτερο, ο Νικήτας εξηγεί και ονοματίζει τη σχέση της Παμ με την Τριπ-Παμ:

> Κώστας: Θα την φτιάξω πρώτα. Δε ξέρω πόση θα είναι. Θέλω οκτώ τέτοια [*τη φτιάχνει*] (…) Είναι οχταπλάσια. Είναι οκτώ Παμ.

> Νικήτας: Αφού τρία κομμάτια χρειαστήκαμε για να μετρήσουμε τη μεγάλη. (…) Αυτή [*δείχνει την Παμ*] είναι το ένα από τα τρία κομμάτια αυτηνής [*δείχνει την Τρι-Πάμ*]. Είναι το ένα της τρίτο.

Έλεγχος διατήρησης

Οι αποκρίσεις των παιδιών στο Έργο Α (Αναγνώριση) κωδικοποιήθηκαν ως 1 (Επιτυχής) και 0 (Μη Επιτυχής). Για το Έργο Β εξετάστηκε αν χρησιμοποίησαν μια έγκυρη διαδικασία για να ελέγξουν ή να εξηγήσουν πώς αναγνώρισαν την παίκτρια, είτε αυθόρμητα, είτε μετά από αίτημα (1: Ναι, 0: Όχι). Για το έργο Γ εξετάστηκε αν χρησιμοποίησαν τους όρους για τα πολλαπλάσια (Γ1) και τα υποπολλαπλάσια (Γ2) ή όχι (0: Όχι, 1: Ναι).

Τέλος, εξετάστηκε ο τρόπος με τον οποίο εξήγησαν τον όρο, ή περιέγραψαν τη σχέση (αν δεν χρησιμοποίησαν τον όρο). Όσον αφορά τα πολλαπλάσια εντοπίστηκαν 3 ειδών εξηγήσεις που κωδικοποιήθηκαν ως Π1: με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (π.χ. «Η Τρι-Παμ είναι μία Παμ και άλλη μία και άλλη μία»), Π2: μέσω μέτρησης (π.χ. «Είναι η Δι-Παμ γιατί χωράει δύο Παμ») ή ως αποτέλεσμα μέτρησης (π.χ. «Είναι δύο Παμ») και Π3: μέσω πολλαπλασιασμού (π.χ. «Είναι τρεις φορές όσο η Παμ»). Όσον αφορά τα υποπολλαπλάσια, εντοπίστηκαν 3 ειδών εξηγήσεις που κωδικοποιήθηκαν ως Υ1: μέσω της σχέσης μέρους-όλου (π.χ. «Είναι το μισό γιατί είναι το ένα από τα δύο κομμάτια της Δι-Παμ»), Υ2: με αναφορά στη μέτρηση (π.χ. «Είναι το ένα τέταρτο επειδή η Παμ χωράει τέσσερις φορές στην Τετραπάμ») και Υ3: με συνδυασμό των Υ1 και Υ2 (π.χ. «Η Δι-πάμ χωράει δύο κομμάτια και το μισό είναι το ένα από αυτά τα δύο»). Στην Εικόνα 1 παρουσιάζονται οι απαντήσεις και εξηγήσεις του κάθε παιδιού, ανά έργο και ανά σχέση.

Παιδί	Σχέση 1:2/2:1						Σχέση 1:3/3:1						Σχέση 1:4/4:1					
	Α	Β	Γ				Α	Β	Γ				Α	Β	Γ			
			Γ1		Γ2				Γ1		Γ2				Γ1		Γ2	
Νικήτας	1	1	1	$Π_1$	1	-	1	1	1	$Π_3$	1	-	1	1	1	$Π_3$	1	-
Λόρα	1	1	1	$Π_1$	1	-	1	1	1	$Π_3$	1	$Υ_2$	1	1	1	$Π_3$	0	-
Κώστας	1	1	1	$Π_1$	1	$Υ_1$	1	1	1	$Π_1$	0	-	1	1	1	$Π_1$	0	-
Πένυ	1	1	1	$Π_3$	1	-	1	1	1	$Π_3$	1	$Υ_2$	1	1	1	$Π_3$	1	$Υ_2$
Άρης	1	1	1	$Π_1$	1	$Υ_3$	1	1	1	$Π_3$	1	$Υ_3$	1	1	1	$Π_3$	1	$Υ_3$
Σωτηρία	1	1	1	$Π_1$	1	-	1	1	1	$Π_2$	0	-	1	1	1	$Π_2$	0	-
Γιάννα	1	1	1	$Π_2$	1	$Υ_3$	1	1	1	$Π_3$	1	$Υ_3$	1	1	1	$Π_3$	1	$Υ_3$
Ελένη	0	0	0	-	0	-	0	0	0		0	-	0	0	0		0	-

Υπόμνημα: Π1: Με εναλαμβανόμενη πρόσθεση; Π2: Με μέτρηση; Π3: Με πολλαπλασιασμό; Υ1: Με τη σχέση μέρους-όλου; Υ2: Με αναφορά στη μέτρηση; Υ3: Με συνδυασμό των Υ1,Υ2

Εικόνα 1: Απαντήσεις και εξηγήσεις ανά παιδί, ανά έργο και ανά σχέση

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, ένα παιδί (Ελένη) δεν ανταποκρίθηκε σε κανένα από τα έργα. Η Ελένη, ενώ ήταν πρόθυμη να συμμετάσχει, δεν έδειξε πρόθυμη να απαντήσει στις συγκεκριμένες ερωτήσεις που της τέθηκαν. Όλα τα υπόλοιπα παιδιά α) αναγνώρισαν και τις τρεις παίκτριες αντιστοιχώντας το όνομα και τη φανέλα τους (Έργο Α), β) χρησιμοποίησαν μια έγκυρη διαδικασία (μέτρηση) για να ελέγξουν ή καθώς εξηγούσαν την απάντησή τους (Έργο Β), γ) χρησιμοποίησαν τους όρους «διπλάσιο», «τριπλάσιο» και «τετραπλάσιο (Έργο Γ1) και δ) χρησιμοποίησαν όρο, συγκεκριμένα, τον όρο «μισό» για την έκφραση της σχέση 1:2 (Έργο Γ2).

Όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να εξηγήσουν τι σημαίνουν οι όροι για τα πολλαπλάσια που χρησιμοποίησαν. Δύο παιδιά έδωσαν συστηματικά τον ίδιο τύπο εξήγησης (ο Κώστας την Π1 και η Πένυ την Π3). Τα υπόλοιπα παιδιά έδωσαν από δύο διαφορετικούς τύπους εξήγησης. Με εξαίρεση τη Σωτηρία, η οποία δεν έδωσε την Π3 για καμία από τις τρεις σχέσεις, τα υπόλοιπα παιδιά άλλαξαν από Π1 ή Π2 για το 2:1, σε Π3 για τα δύο μεγαλύτερα πολλαπλάσια.

Μόνο δύο παιδιά (Άρης, Γιάννα) χρησιμοποίησαν και τους τρεις όρους για τα υποπολλαπλάσια και, επιπλέον, εξήγησαν την απάντησή τους (συστηματικά με Υ3). Άλλα δύο παιδιά (Νικήτας, Πένυ) χρησιμοποίησαν και τους τρεις όρους, αλλά με περιορισμούς στις εξηγήσεις. Η Πένυ εξήγησε για τα 1:3 και 1:4, αλλά όχι για το 1:2, ενώ ο Νικήτας δεν εξήγησε σε καμία περίπτωση. Η Λόρα χρησιμοποίησε τον όρο «μισό» και «ένα τρίτο», εξηγώντας μόνο το τελευταίο. Για το 1:4, ανέφερε το «ένα μισό της τέσσερα», χωρίς εξήγηση. Τέλος, ο Κώστας και η Σωτηρία δε χρησιμοποίησαν άλλους όρους, εκτός από το «μισό», και μόνο ο Κώστας το εξήγησε. Για τους υπόλοιπους όρους κατασκεύασαν εκφράσεις πατώντας στο «μισό», ακριβώς όπως η Λόρα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την πρώτη εφαρμογή της δραστηριότητας φαίνεται ότι, όπως υποθέσαμε, τα παιδιά αξιοποίησαν την εμπειρία τους με την αριθμητική ακολουθία ως διαδοχή των αριθμολέξεων και ως αριθμητική πρόοδο, και την κανονικότητα στην παραγωγή των όρων για τα πολλαπλάσια. Η εισαγωγή των όρων για τα υποπολλαπλάσια συνάντησε εμπόδια, κυρίως λόγω της επιλογής να χρησιμοποιηθεί ο όρος «μισό», που παραβίασε την κανονικότητα στην παραγωγή των όρων με βάση τα τακτικά αριθμητικά, κάτι που θα αναθεωρηθεί στον επανασχεδιασμό. Τα παιδιά οικειοποιήθηκαν τις ενέργειες της μέτρησης και της επανάληψης μιας ποσότητας και τις αξιοποίησαν στις εξηγήσεις τους. Ο έλεγχος διατήρησης έδειξε ότι 4 περίπου μήνες μετά την παρέμβαση, η περιγραφή των σχέσεων ν:1 μέσω των πολλαπλασίων και η ικανότητα εξήγησης είχε διατηρηθεί, με διαφορές ως προς τον τύπο εξήγησης μεταξύ των παιδιών και την παρατήρηση ότι τα μεγαλύτερα πολλαπλάσια επέσυραν πιο επεξεργασμένες εξηγήσεις (μέσω πολλαπλασιασμού) που θα αξιοποιηθεί στον επανασχεδιασμό. Από την άλλη μεριά, στις σχέσεις 1:ν παρατηρήθηκαν διαφορές μεταξύ των παιδιών, τόσο ως προς τη χρήση των όρων, όσο και ως προς την εξήγηση. Σημειώνουμε ότι η χρήση των όρων για τα υποπολλαπλάσια δε συνοδεύτηκε απαραίτητα από εξήγηση, αλλά δεν υπήρξε περίπτωση που να δόθηκε εξήγηση (να περιγράφτηκε η σχέση) χωρίς τη χρήση του όρου. Αυτό είναι μια ένδειξη για την υποστηρικτική λειτουργία του λεξιλογίου για την πολλαπλασιαστική σκέψη (Vanluydt et al., 2021).

Είναι εύλογο ότι μια μεμονωμένη δραστηριότητα δεν είναι αρκετή για την εκμάθηση και νοηματοδότηση όρων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Αυτή τη στιγμή υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ότι η ένταξη της συγκεκριμένης δραστηριότητας στο συνολικό πρόγραμμα δραστηριοτήτων (Pitta et al., 2021) θα λειτουργήσει συμπληρωματικά στην υποστήριξη των παιδιών ώστε πραγματευτούν μια ποικιλία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, κάτι που θα διερευνηθεί σε επόμενες εφαρμογές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 302-311). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compedium for early career researchers in mathematics education* (pp. 33-57). Cham: Switzerland: SpringerOpen.

Hunting, R. & Davis, G. (1991). *Early fraction learning*. New York: Springer-Verlag.

Kornilaki, K., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, *20,* 388-406.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, *142*, 66-82.

Mix, K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press.

Pitta, G., Kaldrimidou, M., & Vamvakoussi, X. (2021). Enhancing the development of multiplicative reasoning in early childhood education: a case study. In M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 481-490). Khon Kaen,Thailand: PME.

Sophian, C. (2004). Mathematics for the future: Developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 59-81.

Steffe, L. P. (2013). On children's construction of quantification. In R. L. Mayes & L.L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education: Papers from an International STEM Research Symposium* (pp. 13-41). Laramie, Wyoming: University of Wyoming.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Elia, I. (2020). Mapping kindergartners' quantitative competence. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 805–819.

Vanluydt, E., Supply, A. S., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2021). The importance of specific mathematical language for early proportional reasoning. *Early Childhood Research Quarterly*, *55*(2), 193-200.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΑΣΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

Τουλτσινάκη Μαρία

maria_toul@yahoo.gr

Η παρούσα εργασία μελετά τις διδακτικές πρακτικές που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία των μαθητών σε μαθητές με προβλήματα όρασης. Παράλληλα παρουσιάζονται διάφορα ζητήματα μάθησης που προκύπτουν μέσα από τη διδασκαλία σε ολιγομελή τάξη τυφλών μαθητών. Στην ευρύτερη έρευνα συμμετέχουν τρεις εκπαιδευτικοί από ένα ειδικό σχολείο στην Αθήνα, αλλά εδώ θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση του ενός. Μετά από συζητήσεις και παρατηρήσεις, συγκεντρώθηκαν στοιχεία που αναλύθηκαν μέσω της αφηγηματικής μεθόδου. Η περιγραφή εμπειριών και σκέψεων από τους συμμετέχοντες, φιλοδοξούμε να δώσουν την αφορμή για μελλοντικές έρευνες στον συγκεκριμένο τομέα ο οποίος μπορεί να προσφέρει συμπεράσματα για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ή χωρίς αναπηρίες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Διδακτικές πρακτικές στα μαθηματικά

Η διδακτική των μαθηματικών εμπεριέχει ποικιλία εφαρμογών και διεργασιών γι’ αυτό και οι μελέτες σχετικά με αυτήν επικεντρώνονται κυρίως σε θέματα γνώσης, αντίληψης, πεποιθήσεων, στάσεων, ικανοτήτων, πρακτικών και ταυτότητας (da Ponte, 2012). Οι Bishop και Whitfield (1972), θεώρησαν ότι οι διδακτικές αποφάσεις είναι πανταχού παρούσες και τις διαχώρισαν σε αποφάσεις έξω από την τάξη και εντός (pre- and within- lesson decisions), καθώς και σε μεσοπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες. Στις προ μαθήματος αποφάσεις, περιλάμβαναν θέματα όπως το διδακτικό περιεχόμενο, σκοπούς, υλικά και μεθόδους. Οι εντός τάξης αποφάσεις συνδέονται με την εκτέλεση ή/και τροποποίηση των παραπάνω αποφάσεων, με τους τύπους παραδειγμάτων που θα χρησιμοποιηθούν, τους τρόπους διόρθωσης πιθανών λαθών, την κινητοποίηση των μαθητών και τέλος κοινωνικές ιεραρχικές σχέσεις. Ο διάλογος παίζει πρωταρχικό ρόλο για τη δημιουργία μια κοινωνίας ενότητας και επιστοσύνης(Cobb et al., 1997).

Πιο συγκεκριμένα τώρα, τι ορίζεται ως διδακτική πρακτική; Μέσα στις συνηθέστερες διδακτικές πρακτικές συγκαταλέγονται οι κατάλληλες επιλογές, είτε αυτό αφορά το είδος αναπαραστάσεων, είτε των βιβλίων, είτε των στρατηγικών επίλυσης που θα χρησιμοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί. Επιπρόσθετα, είναι και η ενορχήστρωση εποικοδομητικών συζητήσεων, ο σχεδιασμός και η παράθεση ερωτήσεων, η άμεση απάντηση πιθανών αποριών και η επίδειξη διορθώσεων ή αποσαφηνίσεων μέσα στην τάξη (Ball et al., 2001). Όταν γίνεται διάλογος στην τάξη, η επιλογή του μαθητή που θα ακουστεί η ιδέα του ή η σειρά των απόψεων που θα ακουστούν, συνιστούν και αυτές προεκτάσεις διδακτικών πρακτικών. Μιλάμε λοιπόν για ένα μεγάλο, περίπλοκο και ασταθές σύστημα που βασίζεται στον κάθε καθηγητή ξεχωριστά, καθώς και στην παιδαγωγική και γνωστική επάρκεια που κατέχει αυτός.

Ειδική αγωγή και μαθητές με προβλήματα όρασης

Η ειδική αγωγή καλύπτει μια ευρεία γκάμα περιπτώσεων, όπως μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, μαθητές με προβλήματα όρασης ή ακοής, μαθητές με νοητική στέρηση αλλά και μαθητές που ανήκουν στο φάσμα του αυτισμού. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή και εξιδεικευμένοι μέθοδοι. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν αυτοί οι μαθητές, είναι εξαιρετικά διαφοροποιημένα και οφείλονται τόσο στη φύση της ιδιαιτερότητας τους όσο και στην οργάνωση και το περιεχόμενο της διδασκαλίας που τους παρέχεται (Παντελιάδου, 2007). Το μόνο σίγουρο είναι οτι η παραδοσιακή διδασκαλία δεν μπορεί να είναι αποτελεσματική. Σύμφωνα με έρευνα των Vaughn και Linan-Thompson (2003) φαίνεται οτι απαιτείται από τους εκπαιδευτικούς σαφήνεια, προσεκτικός σχεδιασμός και η άμεση εφαρμογή των πιθανών ακαδημαϊκών σπουδών. Στη συγκεκριμένη εργασία, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση των μαθητών με προβλήματα όρασης. Η οπτική αντίληψη είναι μια πολύ σημαντική γνωστική λειτουργία ή δραστηριότητα μέσω της οποίας τα πληροφοριακά ερεθίσματα του περιβάλλοντος που προσλαμβάνονται από τα αισθητήρια όργανα, αναγνωρίζονται ως αντικείμενα, γεγονότα, ήχοι, γεύσεις κτλ. (Roth, 1986). Παρά τις άρρηκτες συνδέσεις αντίληψης και αίσθησης, υπάρχει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα τους.

Ας εξετάσουμε τους όρους γλώσσα, χειρονομίες και απτική αντίληψη ξεχωριστά αλλά και ειδικά στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών, με σκοπό να διαμορφώσουμε μια εικόνα του τρόπου με τον οποίο ένας μαθητής με προβλήματα όρασης κατανοεί μαθηματικές έννοιες, συγκροτεί νοητικές εικόνες, επιχειρηματολογεί και αποδεικνύει. Κατά την Sfard (2008), η γλώσσα είναι ένα επικοινωνιακό- μεσολαβητικό συμβολικό σύστημα με κανόνες, για να δημιουργηθούν επιτρεπόμενα στοιχεία και εκφράσεις με νόημα, που έχουν ήδη προηγουμένως κατασκευαστεί. Συνεπώς η λεκτική επικοινωνία στα πλαίσια μίας τάξης θα πρέπει να βασίζεται σε όρους και έννοιες τα νοήματα των οποίων θα είναι κατανοητά στους μαθητές. Σε μαθητές με αναπηρία όρασης, σαφώς η λεκτική επικοινωνία αποκτά ένα περισσότερο σύνθετο και σημαντικό ρόλο. Επίσης μπορεί να δημιουργήσουν ένα μη τυπικό λεξιλόγιο για τα μαθηματικά αντίστοιχο με το τυπικό (Αργυρόπουλος, 2007) συνεπώς ο καθηγητής θα πρέπει να αναλύει τις λέξεις και τα νοήματα ώστε να έχει την καλύτερη δυνατή λεκτική επικοινωνία με έναν τυφλό μαθητή (Millar, 1994). Έρευνες δείχνουν οτι η αφή και η όραση μπορεί να εκπροσωπούν μια κοινή αναπαράσταση του μυαλού η οποία διαμορφώνεται με δύο τρόπους, τον απτικό και την οπτικό, που μέσω του πρώτου η μάθηση γίνεται περισσότερο ενεργή παρά παθητική (Shimomura et al., 2013).

Οι πηγές πληροφοριών απτικής αντίληψης δομούν μία αίσθηση πολυδιάστατη, η οποία αποτελεί ένα ισχυρό μέσο συλλογής πληροφοριών ειδικά για την περίπτωση των τυφλών μαθητών. Τέλος, οι χειρονομίες και γενικότερα η στάση του σώματος αποκτά κύρια πηγή έκφρασης που κατά ένα μεγάλο ποσοστό μας βοηθά να καταλάβουμε την βαθύτερη σκέψη του μαθητή. Πολλές φορές οι χειρονομίες λειτουργούν και σαν την αιτία να γεννηθούν ιδέες και όπως έχει παρατηρήσει ο Radford (2009) τελικά μπορούν για ένα μαθητή με προβλήματα όρασης να αποτελέσουν πηγή για την συγκρότηση της σκέψης του. Να σημειωθεί επιπρόσθετα, οτι για την ανάπτυξη της νόησης αλλά και άλλων ψυχικών λειτουργιών αποκτά κομβική σημασία η αξιοποίηση της βιωματικής εμπειρίας τους (hand personal experience)(Μπαλή, 2007). Οι μαθητές με προβλήματα όρασης δεν έχουν την δυνατότητα να παρατηρήσουν οπτικές εικόνες και άρα να μιμηθούν με το συνηθισμένο τρόπο. Κατά συνέπεια, μαθαίνουν μόνο μέσα από διαφορετικούς, δημιουργικούς δρόμους ακολουθώντας εναλλακτικές οδούς και πλάγιους δρόμους.

Ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της έρευνας μας είναι να δούμε πως όλα τα παραπάνω λαμβάνονται υπόψιν και εφαρμόζονται στην καθημερινή πρακτική των καθηγητών των μαθηματικών σε μαθητές με αναπηρία όρασης. Τα ερευνητικά ερωτήματα που αναδύονται είναι τα εξής:

1. Πώς διαμορφώνονται οι διδακτικές πρακτικές ενός εκπαιδευτικού κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με προβλήματα όρασης; Ποιες είναι οι πρόσθετες δυσκολίες και με ποιους τρόπους τις αντιμετωπίζει;

2. Τι ρόλο παίζει η γλώσσα και οι χειρονομίες των εκπαιδευτικών κατά τη διδακτική πράξη στα μαθηματικά και αν και με ποιο τρόπο γίνεται η επιλογή βιωματικών τρόπων διδασκαλίας;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα διεξήχθη σε ένα ειδικό σχολείο πρόσθετης στήριξης για νέους και ενήλικες με αναπηρία όρασης. Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης με τη συμμετοχή τριών εκπαιδευτικών, δύο γυναίκες και ένας άντρας. Για λόγους συντομίας και έκτασης, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση του εμπειρότερου εκπαιδευτικού, ο οποίος προσφωνείται με το ψευδώνυμο Άγγελος. Καθότι η αφηγηματική μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση των δεδομένων επιτάσσει την οικειότητα μεταξύ συμμετεχόντων και ερευνητών, χρειάστηκε να υπάρξουν περισσότερες από μια συναντήσεις με τους εκπαιδευτικούς. Στις συναντήσεις αυτές, έγιναν συνεντεύξεις με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, με τους τρεις συμμετέχοντες ξεχωριστά στις αίθουσες διδασκαλίας τους. Τα υλικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή των δεδομένων στην παρούσα έρευνα ήταν ένα Mp3 για την ηχογράφηση, μια φωτογραφική μηχανή και ένα μπλοκ σημειώσεων για τις συνεντεύξεις/παρατηρήσεις. Μετά το πέρας της διεξαγωγής της έρευνας ξεκίνησε η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν. Αρχικά απομαγνητοφωνήθηκαν οι τρεις συνεντεύξεις και μαζί με τις σημειώσεις/παρατηρήσεις που αντιστοιχούσαν στον καθένα εκπαιδευτικό, δημιουργήθηκαν τρεις φάκελοι επεξεργασίας. Ο τρόπος που θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των δεδομένων είναι η αφηγηματική μέθοδος. Σύμφωνα με τον Kaasila (2007), οι αφηγήσεις ενός ατόμου συνδέονται άμεσα με την ταυτότητα του, καθώς είναι ο ίδιος που επιλέγει τον τρόπο που θα αφηγηθεί τα γεγονότα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Άγγελος είναι παλιός συνεργάτης του σχολείου και με μεγάλη χαρά επέστρεψε στο χώρο που μέχρι πρότινος αποτελούσε την επαγγελματική του στέγη. Πέρα από την παρουσίαση των βασικών του εργαλείων, όπως η μηχανή Braille, μια σκληρή πλαστική επιφάνεια, μαρκαδόροι πολλών χρωμάτων για τους αμβλύωπες μαθητές και έναν χάρακα με τη μια πλευρά καμπυλωτή για να σχεδιάζει διαφορετικού είδους ανάγλυφες γραμμές σε σχήματα, αναφέρθηκε από νωρίς στον κώδικα Nemeth. Αυτό είναι κάτι που πρώτη φορά άκουσα από τους συμμετέχοντες στην έρευνα, οπότε ζήτησα περαιτέρω επεξήγηση:

> «Ο κώδικας Nemeth είναι συνδυασμοί πλήκτρων στη μηχανή Braille για να γράφουν οι τυφλοί μαθητές μαθηματικά σύμβολα, συνήθως σύμβολα ανώτερων μαθηματικών όπως ολοκληρώματα, συναρτήσεις, τριγωνομετρικούς αριθμούς κλπ. Υπήρχαν πολλές παρανοήσεις με τα σύμβολα Nemeth. Αλλιώς τα μάθαιναν κάποιοι μαθητές, αλλιώς κάποιοι άλλοι. Αυτό γίνεται γιατί δεν υπάρχει επίσημη μετάφραση στα ελληνικά. Δηλαδή εγώ τους έδειχνα το αγγλικό Nemeth, αυτό δεν τους το είχε δείξει κανένας άλλος ως τότε. Όταν βρήκα το αγγλικό εγχειρίδιο του Nemeth, είδα οτι κάποια σύμβολα ταυτίζονται με κάποια ελληνικά.».

Ο Άγγελος, στα πέντε χρόνια που δούλεψε στο σχολείο, δίδαξε σε μαθητές από Α’ γυμνασίου ως και Γ’ λυκείου.

Ξεκινάμε λοιπόν τη συζήτησή μας αναφορικά με το πλήθος των μαθητών που μπορεί να είχε μέσα σε ένα τμήμα. Ο συνηθισμένος λοιπόν αριθμός μαθητών ήταν 1-2 παιδιά, αλλά είχε τύχει να συνυπάρχουν στην αίθουσα έως και τέσσερα παιδιά. Φυσικά η φασαρία από τις μηχανές μπορούσαν πολύ εύκολα να αποσυντονίσουν το μάθημα αλλά ένα από το πιο σημαντικά θέματα που είχε να αντιμετωπίσει, ήταν οι συνεργατικές τάσεις που είχαν οι τυφλοί συμμαθητές μεταξύ τους. Ακολουθεί ένα απόσπασμα του διαλόγου μας, όπου ο Άγγελος θα αναφέρεται με τη συντομογραφία Κ3:

Κ3: Ένα αντικειμενικό πρόβλημα ήταν ο θόρυβος από τις μηχανές. Το οποίο βέβαια τα παιδιά το έχουν συνηθίσει, αλλά σαν καθηγητής λίγο σε αποσυντονίζει. [...]

Ε: Δηλαδή μπορούσες να πεις ένα πράγμα απευθυνόμενος σε όλα τα παιδιά και να σε ακούσουν όλα;

Κ3: Ναι σα μια συνηθισμένη τάξη. Εντάξει βέβαια, με κάποια διαφοροποίηση. Κάποιος το καταλάβαινε καλύτερα κάποιος άλλος όχι.

Ε: Σε αυτή την περίπτωση τι έκανες δηλαδή;

Κ3: Βασικά υπήρχε μια πολύ μεγάλη τάση να βοηθάει το ένα παιδί το άλλο. Σε γενικές γραμμές το είχαν αυτό μεταξύ τους. Τώρα αν ένα παιδί έμενε λίγο πίσω τότε εστίαζα σε αυτό και προσπαθούσα να του το δείξω με κάποιο άλλο τρόπο. Ίσως αν ήταν στη γεωμετρία να του έκανα ένα καλύτερο σχήμα, να έκανα λίγο καλύτερο το ανάγλυφο μέρος.

Ε: Τα άφηνες γενικά να αλληλοβοηθιούνται;

Κ3: Ναι τα άφηνα γιατί ήταν έτσι μαθημένα από τη ζωή τους και την καθημερινότητά τους. Ειδικά τα παιδιά που έμεναν μέσα στο οικοτροφείο του σχολείου, είναι όλη τη μέρα μαζί, είχαν μια τέτοια τάση συχνά. Και αυτό είχε συνήθως θετικά αποτελέσματα, δηλαδή μοιράζονταν μια κοινή εμπειρία που εγώ ίσως να μην μπορούσα να πω.

Παρακάτω στη συνομιλία μας, αναφέρεται στο οτι το γνωστικό αντικείμενο που τον δυσκολεύει περισσότερο διδακτικά ήταν η Ανάλυση. Εξηγεί: *« Πιο πολύ στη διδασκαλία με δυσκόλεψε η Ανάλυση (Β’-Γ’ λυκείου) από άποψη συμβόλων καθαρά. Δυσκολευόντουσαν τα παιδιά, δυσκολευόμουν και εγώ. Από άποψη χρόνου μας έπαιρνε πολύ χρόνο να γράψουμε ένα ολοκλήρωμα. Πέρναγε μια ώρα και κάναμε μόνο 1-2 παραδείγματα, δεν μπορούσαμε να κάνουμε δέκα παραδείγματα. Μια πρόταση ήθελε μισή σελίδα γράψιμο. Κουράζονταν το παιδί, μαζί και εγώ. Έχανα τον ειρμό. Γενικά δεν προχωρούσαμε όπως θα ήθελα. Διδακτικά αυτό ήταν το κύριο πρόβλημα, η ώρα. Ξεκίναγες με μια άσκηση, πέρναγε πολύ η ώρα, το παιδί δεν είχε τη δύναμη να προχωρήσει άλλο και εσύ δεν μπορούσες να βοηθήσεις. Προγραμμάτιζες να δείτε μαζί πέντε ασκήσεις και* *έκανες μόνο τη μια.»* και συνεχίζει παρακάτω τονίζοντας τη σημασία της γραφής *«Κάτι απλό μπορούσε να στο πει και λεκτικά αλλά κάτι πιο σύνθετο, πρέπει να στο γράψει. Δε γίνεται αλλιώς».* Ένα σημείο στο οποίο στάθηκε, ήταν η χρήση των παραδειγμάτων και αναφέρει χαρακτηριστικά: *«Παραδείγματα από την καθημερινότητα ήταν πολλά και πολύ συχνά. Ας πούμε στους θετικούς -αρνητικούς χρησιμοποιούσα πολύ συχνά τη θερμοκρασία. Γενικά όμως δεν έκανα κάποια ιδιαίτερη επιλογή. Όπως αν ήμουν σε μια τάξη βλεπόντων θα έδινα τη θεωρία και θα ξεκίναγα με παραδείγματα. Έτσι και εδώ το ίδιο. Ανάλογα βέβαια το μαθητή και το επίπεδό του. Πολλές φορές όμως δημιουργόντουσαν και παρανοήσεις, γιατί μάθαιναν μέσα από το παράδειγμα και δεν είχαν εμπεδώσει καλά τη θεωρία, οπότε προέκυπταν λάθη.».* Το σώμα είναι βασικό μέσο πρόσληψης πληροφοριών χωρικής φύσεως για τα άτομα με προβλήματα όρασης. Με κατάλληλη χρήση του όμως είναι και εργαλείο μάθησης. Ο Άγγελος ισχυρίζεται οτι είναι αναπόσπαστο μέρος του μαθήματος και συμμετοχικό καθ' όλη τη διδακτική πράξη. Πιο συγκεκριμένα αναφέρει: *«Μα τι να σου πω..έτσι και αλλιώς συμμετέχει το ολόκληρο το σώμα τους κατά τη διδακτική πράξη! Δηλαδή ενώ δεν έχω σχεδιάσει ποτέ κάτι που να απαιτεί βιωματική προσέγγιση, μέσα στο μάθημα αυτό γίνεται από μόνο του. Συμμετέχει το σώμα τους με πολλαπλούς τρόπους: από το να πιάσεις το χέρι τους και να τους κάνεις μια κίνηση, από όλες τις χειρονομίες -δεν ξέρω αν αυτό είναι βιωματικό όπως το εννοείς εσύ-, αλλά και γενικά όλο το σώμα τους, η στάση τους ... έχει τύχει να μου δείξουν τα παιδιά κάποια πράγματα, για να δείξουν οτι το έχουν κατανοήσει. Αυτό πώς έγινε; Για παράδειγμα να μου δείξουν με τα χέρια τους τις γραφικές παραστάσεις ή να σηκωθούν όρθια και να μου δείξουν τη καθετότητα στο χώρο, να πιάσουν τους τοίχους, την πόρτα, το θρανίο.».* Είναι εμφανές οτι αναπτύσσονται σαφείς κώδικες επικοινωνίας μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητή. Με αφορμή αυτό, προχωράει ο διάλογος μας εμβαθύνοντας στην πιθανή ανάπτυξη κωδικών και στο λεκτικό επίπεδο, καθώς και στο αν τελικά αλλάζει ο ίδιος τη γλώσσα που χρησιμοποιεί. Ο Άγγελος συμφωνεί σίγουρα με την πρώτη παραδοχή, όσο για το δεύτερο σκέλος, θεωρεί οτι δεν έκανε καμία αλλαγή στο λεξιλόγιο που χρησιμοποιούσε, ειδικά μετά από παρότρυνση των ίδιων των μαθητών του:

> «Προσπαθούσα η γλώσσα να είναι η ίδια [με τους βλέποντες] καθώς και τα παιδιά ήθελαν να είναι η ίδια. Λέγαμε 'δες το σχήμα', όλα αυτά που θα έλεγα κανονικά σε ένα παιδί. Ξέρω, φαίνεται λίγο παράξενο να πεις σε έναν τυφλό 'δες', το χρησιμοποιούνε όμως και μεταξύ τους. Λένε το ρήμα ΄βλέπω΄ γενικά στην καθομιλουμένη τους. Όταν πρωτοήρθα στο σχολείο το σκεφτόμουν παραπάνω. Τι θα λέω και πώς θα τα λέω, αλλά και τα παιδιά τα ίδια το ήθελαν έτσι εξαρχής, οπότε προσπαθούσα πάντα να μιλάω κανονικά.»

Ο στόχος κατά την προετοιμασία ενός μαθήματος, είναι η κατανόηση των εννοιών, η εμβάθυνση στη θεωρία και η επίλυση εφαρμογών. Στο τέλος κάθε μαθήματος, κάθε ενότητας, της σχολικής χρονιάς αυτοί οι μαθητές θα αξιολογηθούν για τις επιδόσεις τους. Με ποιον τρόπο κρίνει ο εκπαιδευτικός ένα μαθητή με προβλήματα όρασης; Πως τον αξιολογεί; Μέχρι ποιο σημείο θεωρούμε οτι έχει κατακτήσει το διδακτικό του στόχο; Ο Άγγελος μας εξηγεί: *«Η αξιολόγηση τους είναι ένα πρόβλημα γενικό. Δεν υπήρχε κάποιος στόχος. Ο στόχος δηλαδή ήταν γενικός και μη προσδιορισμένος στις δυνατότητες/ικανότητες του τυφλού μαθητή. Το να δεχτούμε μια απάντηση περιγραφική ως σωστό, πχ στη σύγκριση τριγώνων, γίνεται κάπως άτυπα. Δεν υπάρχει κάποια οδηγία. Δηλαδή αν φτάσει ο μαθητής ως 'αυτό το σημείο' είναι εντάξει, ως 'εκεί' τέλεια, ως το 'τέλος' ολόσωστη. Γίνεται με τη κρίση του καθηγητή και πολλές φορές από μόνος του μπορεί να ζητήσει κάτι που είναι πιο προσιτό στον μαθητή.»*. Κλείνοντας τη συζήτησή μας, ο Άγγελος αναφέρεται σε ζητήματα γύρω από τη μάθηση αλλά και στα σημεία που θα εστίαζε την προσοχή του ένας εκπαιδευτικός: *«Καταρχήν υποθέτουμε οτι κάθε άτομο που ασχολείται με τυφλούς μαθητές γνωρίζει τη γραφή braille και έχει κάποια ειδίκευση στην ειδική αγωγή. Στο κομμάτι της διδασκαλίας θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στη γλώσσα Nemeth, στα ανάγλυφα σχήματα και εννοώ πώς φτιάχνονται και τη σημασία της χρήσης τους. Πώς πρέπει να είναι καθαρές οι γραμμές, κυρίως πρακτικά θέματα. Κατά δεύτερο λόγο θα του μίλαγα για τη ψυχολογία αυτών των παιδιών και την αντιμετώπιση διαφόρων θεμάτων που μπορεί να έχει κάποιος όταν τα διδάσκει, όπως ψυχολογικές μεταπτώσεις του τύπου: 'εγώ δεν μπορώ να το κάνω αυτό', 'γιατί κάνουμε εμείς γεωμετρία αφού δεν βλέπουμε' κοκ»*. Βλέπουμε λοιπόν εδώ οτι θίγεται και το θέμα της διαχείρισης δυσκολιών ψυχολογικής φύσεως, όπου ο εκπαιδευτικός πρέπει να ανταπεξέλθει και να επαναφέρει το ενδιαφέρον και την αυτοπεποίθηση στον μαθητή του.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση επέδειξε σημαντικά ζητήματα αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με προβλήματα όρασης. Οι ουσιαστικές αποφάσεις που πρέπει να λαμβάνονται καθημερινά εντός και εκτός τάξης από τον εκπαιδευτικό, η καλή προετοιμασία του μαθήματός του αλλά και των διδακτικών εργαλείων που θα χρησιμοποιήσει, καθώς και η άρτια επαγγελματική κατάρτιση, είναι μερικά από τα κύρια στοιχεία που αναδείχθηκαν. Η γλώσσα, η απτική αντίληψη, οι χειρονομίες καθώς και όλο το σώμα που εμπλέκεται σε βιωματικές προσεγγίσεις μάθησης, είναι σημαντικά στοιχεία που πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν από τον εκπαιδευτικό. Πιο συγκεκριμένα, σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, η παραδοσιακή διδασκαλία αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να είναι αποτελεσματική σε μαθητές με προβλήματα όρασης (Παντελιάδου, 2007). Σίγουρα, αρχικά, απαιτείται περισσότερος χρόνος διδασκαλίας στα τυφλά παιδιά (Βουγιουκλίδης et al., 2007), όπως τονίζει ο Άγγελος. Η τυπική διδακτική ώρα δεν είναι αρκετή, καθώς χρειάζεται περαιτέρω χρόνος επεξήγησης και αφομοίωσης από τους μαθητές. Η σαφήνεια, ο προσεκτικός σχεδιασμός και η άμεση αναφορά σε εξειδικευμένες ακαδημαϊκές δεξιότητες είναι επίσης πρωταρχικά συστατικά στη διδασκαλία των συμμετεχόντων σε τυφλούς μαθητές (Vaughn & Linan-Thompson, 2005). Καθηγητές και μαθητές αναπτύσσουν κοινούς κώδικες επικοινωνίας και εισάγουν τη χρήση της γλώσσας και της σημειογραφείας τόσο από τις παρατηρήσεις των μαθητών όσο και από την καθημερινή τους επαφή. Σημαντικό ρόλο σίγουρα παίζει η ακρίβεια του εκπαιδευτικού στην έκφραση αλλά και η αναλυτική περιγραφή σε ό,τι κάνουν ή σχεδιάζουν. Αναγνωρίζεται η σημαντικότητα της σωστής διατύπωσης, οπότε ο Άγγελος καταφεύγει στη κατάλληλη διατύπωση ορισμών ως εργαλείο να βοηθήσει τους μαθητές σε βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση τους (Ball et al., 2001). Φαίνεται οι τυφλοί μαθητές να παρουσιάζουν συχνά παρανοήσεις ομοίως με αυτές των βλεπόντων, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Άγγελος, όταν για παράδειγμα εγκλωβίζονται σε πρωτοτυπικές εικόνες. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο μαθητής να ταυτίζει την εννοιακή εικόνα με το οπτικό αντικείμενο, που σε αυτή την περίπτωση λαμβάνει μέσω της απτικής αντίληψης (Hershkowitz, 1989). Τότε ο ίδιος θα πρέπει να παρέμβει με παρόμοιο τρόπο, δίνοντας περισσότερα παραδείγματα αλλά και να επανέλθει στους ορισμούς και τις ιδιότητες. Τέλος, σε σχέση με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, ο συμμετέχων εκπαιδευτικός παραδέχεται οτι δημιουργείται ένα άτυπο λεξιλόγιο καλύτερης επικοινωνίας με τους μαθητές του (Αργυρόπουλος, 2007), ενώ έχοντας μια τόσο στενή σχέση με αυτούς, εύκολα μπορεί να αναλύσει τις λέξεις που χρησιμοποιούν και τα νοήματα που θέλουν να αποδώσουν με αυτές (Millar, 1994). Εκτός από το λεκτικό κομμάτι, εξίσου σημαντικό για τον εκπαιδευτικό και τη διδασκαλία, είναι και το μη λεκτικό κομμάτι. Μέσα σ’ αυτό συμπεριλαμβάνονται κυρίως οι χειρονομίες, η στάση του σώματος κ.α. όπου δίνουν πολλές πληροφορίες στους εκπαιδευτικούς για τους τυφλούς μαθητές. Ο Άγγελος μας αναφέρει χαρακτηριστικά, οτι το μη λεκτικό κομμάτι είναι σύμφυτο με τη διδασκαλία των μη βλεπόντων μαθητών ενώ αποτελεί μια πραγματική επικοινωνιακή πράξη (Sfard, 2009). Από τα λεγόμενα τους θα μπορούσαμε επίσης να συμφωνήσουμε οτι οι χειρονομίες είναι ικανές να συγκροτήσουν τη σκέψη ενός τυφλού μαθητή (Radford, 2009) αλλά και ταυτόχρονα να αποτελέσουν και κριτήριο αξιολόγησης των επιδόσεων τους ή του επιπέδου κατανόησης ενός ορισμού.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η επιστήμη της ειδικής αγωγής είναι ένας ραγδαία αναπτυσσόμενος κλάδος για τα εκπαιδευτικά δεδομένα της χώρας μας. Δυστυχώς όμως το εκπαιδευτικό σύστημα εδώ, δεν εξασφαλίζει στους μαθητές με προβλήματα όρασης ίσες ευκαιρίες. Αφενός, βρισκόμαστε σε πρώιμο στάδιο ανάπτυξης της ειδικής αγωγής για άτομα με προβλήματα όρασης, αφετέρου καθημερινά γίνονται προσπάθειες ευαισθητοποίησης όλο και περισσοτέρων εκπαιδευτικών για απόκτηση ειδικών γνώσεων. Κρίνεται σημαντικό να γίνει περισσότερη έρευνα γύρω από την εκπαίδευση των μαθητών με τέτοιου είδους αναπηρία. Η ανάδειξη του ιδιαίτερου τρόπου της εκπαιδευτικής προσέγγισης των μη βλεπόντων μαθητών μπορεί τελικά να δώσει μια νέα διάσταση στην διδακτική των μαθηματικών και κατ' επέκταση στην πρακτική των καθηγητών για το σύνολο των μαθητών, βλεπόντων και μη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching*, *4*, 433-456.

Bishop, A. J., & Whitfield, R. C. (1972). *Situations in teaching*. McGraw-Hill.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for research in mathematics education*, *28*(3), 258-277.

da Ponte, J. P. (2012). Mathematics teacher education programs: practice and research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(5), 343-346.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry--Two Sides of the Coin. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 61-76.

Kaasila, R. (2007). Using narrative inquiry for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM*, *39*(3), 205-213.

Millar, S., & Millar, S. (1994). *Understanding and representing space: Theory and evidence from studies with blind and sighted children* (Vol. 198521421). Oxford: Clarendon Press.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational studies in mathematics*, *70*(2), 111-126.

Roth, I. (1986). An introduction to object perception. *Perception and Representation: A Cognitive Approach. Red. I. Roth–JP Frisby. Milton Keynes, Open University Press*.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press.

Shimomura, Y., Hvannberg, E. T., & Hafsteinsson, H. (2013). Haptic cues as a utility to perceive and recognise geometry. *Universal Access in the Information Society*, *12*(2), 125-142.

Vaughn, S., & Linan-Thompson, S. (2003). What is special about special education for students with learning disabilities?. *The Journal of Special Education*, *37*(3), 140-147.

Αργυρόπουλος Β. (2007). Μαθησιακό περιβάλλον και στρατηγικές διδασκαλίας στην εκπαίδευση τυφλών παιδιών. *Πρακτικά 1ο πανελλήνιο συνέδριο ειδικής αγωγής με διεθνή συμμετοχή, «Η ειδική αγωγή στην κοινωνία της γνώσης»*, Εταιρεία ειδικής παιδαγωγικής Ελλάδος, Αθήνα.

Βουγιουκλίδης Γ., Δεληγιάννης Ν. & Κολτσίδας Π. (2007). Μελέτη περίπτωσης αξιολόγησης και υποστήριξης μαθήτριας με προβλήματα όρασης. Από τη θεωρία στην πράξη. *Πρακτικά 1ο πανελλήνιο συνέδριο ειδικής αγωγής με διεθνή συμμετοχή, «Η ειδική αγωγή στην κοινωνία της γνώσης»*, Εταιρεία ειδικής παιδαγωγικής Ελλάδος, Αθήνα.

Μπαλή, Β. (2007). Η σημασία της βιωματικής εμπειρίας μέσω του παιχνιδιού στην εκπαίδευση των παιδιών με μερική ή ολική απώλεια όρασης. *Πρακτικά 1ο πανελλήνιο συνέδριο ειδικής αγωγής με διεθνή συμμετοχή, «Η ειδική αγωγή στην κοινωνία της γνώσης»,* Εταιρεία ειδικής παιδαγωγικής Ελλάδος, Αθήνα.

Παντελιάδου Σ. (2007). Μαθησιακές Δυσκολίες: Στοιχεία αποτελεσματικής εκπαίδευσης και διδασκαλίας. *Πρακτικά 1ο πανελλήνιο συνέδριο ειδικής αγωγής με διεθνή συμμετοχή, «Η ειδική αγωγή στην κοινωνία της γνώσης»,* Εταιρεία ειδικής παιδαγωγικής Ελλάδος, Αθήνα.

ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΛΗΨΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΣΕ ΖΩΤΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Κούρτη Στυλιανή-Κυριακή, Πόταρη Δέσποινα

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

stellakour@gmail.com, dpotari@math.uoa.gr

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στην ανάδειξη των σχέσεων των συναισθημάτων, των δράσεων και των παραγόντων που επηρεάζουν τα παραπάνω, όπως αυτά προκύπτουν κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων του εκπαιδευτικού σε ζωτικές στιγμές διδασκαλίας. Υιοθετούμε το πλαίσιο της Θεωρίας της Δραστηριότητας και μελετάμε την περίπτωση ενός έμπειρου εκπαιδευτικού μαθηματικών. Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τρεις βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες του εκπαιδευτικού, συνεντεύξεις με τον εκπαιδευτικό, καθώς και βιντεοσκοπημένες συναντήσεις. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας υπογραμμίζουν και σκιαγραφούν τις πολύπλοκες σχέσεις των εννοιών που μελετιούνται, κατά τις ζωτικές στιγμές διδασκαλίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη των συναισθημάτων έχει απασχολήσει αρκετά τη διεθνή βιβλιογραφία, όμως πολύ μικρός όγκος έρευνας εστιάζει στα συναισθήματα εκπαιδευτικών (Hagenauer κ.ά., 2015). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στις μεθοδολογικές δυσκολίες που έγκεινται στην ποιοτική μελέτη του συναισθήματος, εξαιτίας της αμφίσημης φύσης του, γι’ αυτό και οι περισσότερες από τις λίγες μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί, αφορούν κυρίως ποσοτικές προσεγγίσεις. Η έννοια του συναισθήματος που υιοθετούμε έχει δυναμικό χαρακτήρα καθώς το βλέπουμε ενσωματωμένο στην δραστηριότητα (διδασκαλία) στην οποία εμπλέκεται το υποκείμενο (εκπαιδευτικός). Σύμφωνα με την Θεωρία της Δραστηριότητας το συναίσθημα αποτελεί μια ολιστική έκφραση της τρέχουσας κατάστασης του υποκειμένου σε σχέση με το αντικείμενο, και την αίσθηση του για την πιθανότητα επιτυχίας στην πραγματοποίηση του αντικειμένου/κινήτρου που έχει αποδεχτεί (Leont'ev, 1978). Ο Burkitt (2021), βλέπει τα συναισθήματα να είναι ενσωματωμένα στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις και να λειτουργούν «ως εσωτερικά σήματα προς τον εαυτό μας αλλά και ως σήματα προς τους άλλους, συχνά αυθόρμητα, που εκφράζονται στη στιγμή, χωρίς πλήρη συνείδηση της πρόθεσής μας» (σελ. 13). Έτσι, το συναίσθημα κινείται μαζί με τη δραστηριότητα στο σύνολό της, ενώ εκδηλώνεται στις δράσεις του υποκειμένου, στην προσπάθεια επίτευξης των συνειδητών στόχων του. Οι εντάσεις και οι αντιφάσεις που μπορεί να προκύψουν, μπορεί να επηρεάσουν τα συναισθήματα του υποκειμένου σε σχέση με τους στόχους του, και έτσι τις δράσεις του, αναμορφώνοντας το πλαίσιο της όλης δραστηριότητας.

Σύμφωνα με τον Bishop (2008) η λήψη αποφάσεων βρίσκεται «στην καρδιά της διδασκαλίας» (σ.30) και υποστηρίζει ότι αν γνωρίζουμε για τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών, μπορούμε να συνδέσουμε τη διδασκαλία με μια σειρά από διαφορετικές πτυχές και έτσι να αναζητήσουμε τρόπους βελτίωσης της ποιότητάς της (Potari & Stouraitis, 2019). Ο Zembylas (2004) υπογραμμίζει ότι οι αποφάσεις των εκπαιδευτικών επηρεάζονται από τα συναισθήματα και αντανακλούν τις αξίες και τις πεποιθήσεις τους για τη διδασκαλία. Ωστόσο, η συναισθηματική διάσταση της λήψης αποφάσεων των καθηγητών μαθηματικών σπάνια αποτελεί το επίκεντρο της έρευνας.

Η λήψη αποφάσεων του εκπαιδευτικού ενεργοποιείται συνήθως σε αυτό που οι Stockero και Van Zoest (2013) αποκαλούν ζωτικές στιγμές διδασκαλίας (ΖΣΔ). Οι ερευνητές ορίζουν μια ΖΣΔ ως μια περίπτωση σε ένα μάθημα στην τάξη όπου μια διακοπή στη ροή του παρέχει στον εκπαιδευτικό την ευκαιρία να τροποποιήσει τη διδασκαλία, να επεκτείνει ή να αλλάξει τη φύση της μαθηματικής κατανόησης των μαθητών, ενώ αναγνώρισαν πέντε τύπους ΖΣΔ (Επέκταση Μαθηματικά Λάθη, Απόδοση Νοήματος, Μαθηματική Αντίφαση, Μαθηματική Σύγχυση). Καταλήγουν στο ότι η σύνδεση της λήψης αποφάσεων με τις ΖΣΔ και τον αντίκτυπό τους στη μάθηση των μαθητών είναι μια σημαντική κατεύθυνση για την έρευνα της λήψης αποφάσεων.

Οι εντάσεις που προκύπτουν τις ΖΣΔ θεωρούνται αγχωτικές για τους εκπαιδευτικούς και συνήθως αρνητικά συναισθήματα συνοδεύουν τη διαχείρισή τους (Pillen κ.ά., 2013). Ποιοι παράγοντες, όμως, συντελούν στην δημιουργία εντάσεων κατά τις ΖΣΔ; Πως τις διαχειρίζεται ο εκπαιδευτικός; Τι συναισθήματα δημιουργούνται και πως αυτά δρουν μέσα στην δραστηριότητα; Αυτά τα ερωτήματα προσπαθούμε να απαντήσουμε στην παρούσα έρευνα, προσδοκώντας να εμβαθύνουμε στις πολύπλοκες πτυχές της διαδικασίας λήψης αποφάσεων κατά την διδασκαλία των μαθηματικών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης ενός καθηγητή μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με πολυετή διδακτική εμπειρία στην ιδιωτική και την δημόσια εκπαίδευση στις τάξεις του Λυκείου. Ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός έχει μεταπτυχιακό στα Μαθηματικά, και έχει συμμετάσχει σε δύο επιμορφωτικά προγράμματα σχετικά με την διδακτική των μαθηματικών. Στο πλαίσιο του προγράμματος EDUCATE (http://www.ucy.ac.cy/educate/en/general-information/the-project), κατά το σχολικό έτος 2017-2018, ο ίδιος και άλλοι πέντε καθηγητές μαθηματικών συμμετείχαν σε επτά τρίωρες, εβδομαδιαίες, επιμορφωτικές συναντήσεις, με στόχο την σύλληψη της σημασίας της διαφοροποίησης και της μαθηματικής πρόκλησης. Οι εκπαιδευτικοί διαμόρφωναν κατάλληλες δραστηριότητες, τις εφάρμοζαν στις τάξεις τους και στις επόμενες συναντήσεις τις αποτιμούσαν, κάνοντας χρήση βιντεοσκοπημένων αποσπασμάτων των διδασκαλιών αυτών. Ο στόχος της εξισορρόπησης της διαφοροποιημένης μάθησης και της μαθηματικής πρόκλησης, αποτελεί πρόσφορο έδαφος για την δημιουργία ΖΣΔ, ενώ η διαδικασία που ακολουθήθηκε αποτέλεσε καινούριο και απαιτητικό πλαίσιο εργασίας για τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν. Η παραπάνω διαδικασία ακολουθήθηκε και από τους έξι εκπαιδευτικούς, όμως στο συγκεκριμένο άρθρο εστιάζουμε στον έναν από αυτούς. Ο εκπαιδευτικός (Εκπ) σχεδίασε τρεις διδασκαλίες στην άλγεβρα της Α’ Λυκείου (η πρώτη για την διαφοροποιημένη μάθηση, η δεύτερη για την μαθηματική πρόκληση και η τρίτη για την εξισορρόπησή τους). Οι διδασκαλίες έγιναν στο ίδιο τμήμα της Α’ Λυκείου, που συγκροτούταν από μαθητές μεικτών δυνατοτήτων.

Δεδομένα και Ανάλυση Δεδομένων

Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι τρεις βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες, οι επτά τρίωρες συναντήσεις των εκπαιδευτικών και τέσσερις ημιδομημένες συνεντεύξεις με τον εκπαιδευτικό. Στην αρχή αναλύσαμε τις βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες ώστε να αναγνωριστούν σε πρώτο στάδιο οι ΖΣΔ, τα συναισθήματα του κάθε εκπαιδευτικού και οι δράσεις του κατά την διαχείριση του κάθε περιστατικού, αντλώντας συμπληρωματικά δεδομένα από τον αναστοχασμό του εκπαιδευτικού για κάθε διδασκαλία κατά τις επιμορφωτικές συναντήσεις. Η πρώτη συνέντευξη στόχευσε στο να σκιαγραφηθεί το προφίλ του εκπαιδευτικού και οι γενικότεροι στόχοι που θέτει για τις διδασκαλίες του. Για κάθε μια από τις επόμενες τρεις συνεντεύξεις, ζητήθηκε από τον εκπαιδευτικό να έχει παρακολουθήσει τις βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες του, να έχει αναγνωρίσει περιστατικά που ο ίδιος θεωρεί σημαντικά και/ή αναγνωρίσει περιστατικά που εμφανίζουν δικά του συναισθήματα. Στο πρώτο μέρος της συνέντευξης, συζητούσαμε τα περιστατικά που επιλέχθηκαν από τον εκπαιδευτικό, ενώ στο δεύτερο μέρος της συνέντευξης τα περιστατικά που επιλέχθηκαν από τις ερευνήτριες, σε σχέση με τα συναισθήματα και τις δράσεις του εκπαιδευτικού. Μερικές από τις ερωτήσεις που απευθύναμε στον εκπαιδευτικό ήταν: Γιατί επέλεξες το συγκεκριμένο απόσπασμα; Πως αισθάνεσαι εκείνη την στιγμή; Γιατί; Πως αισθάνεσαι συνήθως σε αντίστοιχες καταστάσεις; Πως έδρασες εδώ; Γιατί;

Για την αναγνώριση των ζωτικών στιγμών διδασκαλίας που εμφανίστηκαν στην διάρκεια της διδασκαλίας χρησιμοποιήσαμε το πλαίσιο των Stockero και Van Zoest (2013). Για την αναγνώριση των συναισθημάτων του εκπαιδευτικού κατά τις ΖΣΔ, χρησιμοποιήσαμε σημειωτικά εργαλεία όπως χειρονομίες, εκφράσεις προσώπου, ματιές (βλ. Ekman & Friesen, 2003), και την ένταση/χροιά της φωνής. Για τον εντοπισμό των δράσεων του εκπαιδευτικού κατά την διδασκαλία χρησιμοποιήσαμε μεθόδους θεμελιωμένης θεωρίας. Έπειτα απομαγνητοφωνήσαμε τα δεδομένα των συνεντεύξεων και τα αναλύσαμε χρησιμοποιώντας την θεμελιωμένη θεωρία, ώστε να εξακριβώσουμε τα συναισθήματα του εκπαιδευτικού, να εντοπίσουμε τους παράγοντες που δρουν στην διαδικασία λήψης αποφάσεων, και να βρούμε σχέσεις μεταξύ των ΖΣΔ, της διαδικασίας λήψης στιγμιαίων αποφάσεων (δράσεων), των συναισθημάτων του εκπαιδευτικού και των παραγόντων που επηρεάζουν τα παραπάνω. Ο χαρακτηρισμός των συναισθημάτων όπως επαληθεύτηκαν και μετά τις συνεντεύξεις, βασίστηκε σε μια σύνθεση των μοντέλων των Plutchik (2001) και Ekman και Cordaro (2011) για τα βασικά και δευτερεύοντα συναισθήματα (π.χ. Χαρά (Ευχαρίστηση), Λύπη (Απογοήτευση), Έκπληξη, κλπ.) και για τα συναισθήματα που προκύπτουν από τους συνδυασμούς αυτών (π.χ. Περηφάνια (Ευχαρίστηση+Ικανοποίηση), Άγχος (Φόβος+Προσδοκία), Αποδοκιμασία (Λύπη+Έκπληξη), Εκνευρισμός (Έκπληξη+Θυμός), κλπ.). Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούνται ψευδώνυμα για λόγους ηθικής δεοντολογίας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να μπορέσουμε να εμβαθύνουμε στους δεσμούς των εννοιών που μελετιούνται, θα παρουσιάζουμε την ανάλυση δύο ΖΣΔ, που ανήκουν στην κατηγορία «Μαθηματικό Λάθος» και είναι αντιπροσωπευτικές της κατηγορίας τους. Η πρώτη ΖΣΔ, προέκυψε κατά την δεύτερη διδασκαλία που αφορούσε στην παραγοντοποίηση τριωνύμου. Ο εκπαιδευτικός διαμόρφωσε ένα φύλλο εργασίας που περιείχε δέκα περιπτώσεις τριωνύμων για τα οποία ζητούταν από τους μαθητές να βρουν τις ρίζες τους και να τα παραγοντοποιήσουν με όποιον τρόπο μπορούσαν. Στόχος του φύλλου εργασίας ήταν οι μαθητές να καταλήξουν στον τύπο παραγοντοποίησης τριωνύμου, $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$. Η δεύτερη ΖΣΔ, προέκυψε κατά την τρίτη διδασκαλία, που αφορούσε στην διερεύνηση του παραμετρικού τριωνύμου $\lambda x^2-4x+\lambda$ μέσω κατάλληλα διαμορφωμένου, από τον εκπαιδευτικό, φύλλου εργασίας.

1η ΖΣΔ: Μαθηματικό Λάθος

Στο 16ο περίπου λεπτό του μαθήματος, γίνεται συζήτηση στην τάξη σχετικά με το x^2+4. Ο Εκπ λέει «καταρχάς πες μας τι βρήκατε για την εξίσωση», μια μαθήτρια λέει «είναι αδύνατη». Ο Εκπ επιβεβαιώνει και λέει «ακριβώς, άρα παραγοντοποιείται;» και οι μαθητές όλων των ομάδων απαντούν «όχι». Ο Εκπ τους λέει «πείτε μου έναν λόγο». Δεν απαντάει κανείς. Ο Εκπ ρωτάει πιο δυνατά «Πείτε μου γιατί δεν παραγοντοποιείται; Τι θα συνέβαινε για να παραγοντοποιείται;», και γράφει στον πίνακα «ας υποθέσουμε ότι παραγοντοποιείται και θα ήταν $x^2 + 4 = (x + a)(x + b)$. Πείτε μου τι θα συνέβαινε τότε; (*δείχνει την σχέση που έγραψε*)». Ένας μαθητής λέει «οι λύσεις θα ήταν αρνητικές». Ο Εκπ του λέει «Γιατί θα έβγαιναν αρνητικές; (γράφει στον πίνακα) $(x + a)(x + b) = 0$, και ποιες είναι οι ρίζες εδώ;», ο μαθητής απαντάει «είναι -α η μία», ο εκπαιδευτικός ρωτάει «α! είναι αρνητική αυτή;», ένας άλλος μαθητής απαντάει «δεν ξέρουμε», ο Εκπ επιβεβαιώνει, γράφει και την άλλη ρίζα $x = -b$, και ρωτάει «ποιο είναι δηλαδή το πρόβλημα εδώ;». Μια μαθήτρια του λέει «αφού είπαμε ότι είναι αδύνατη», και ο Εκπ συνεχίζει «αα μπράβο! Είναι αδύνατη είπαμε. Τι θα συνέβαινε λοιπόν αν παραγοντοποιούταν; (*ψηλή ένταση φωνής, μικρό χαμόγελο, έντονες κινήσεις χεριών*)». Δεν παίρνει απάντηση. Ρωτάει ξανά «τι θα συνέβαινε αν παραγοντοποιούταν; Τι θα είχε αυτό το τριώνυμο;». Κάποιος μαθητής λέει «διακρίνουσα αρνητική». Ο Εκπ μοιάζει να είναι απεγνωσμένος (*αναστεναγμός, τίναγμα χεριών, σούφρωμα χειλιών*). Ξαναρωτάει «τι θα είχε ρε παιδιά; (*ξεροκαταπίνει, κουνάει έντονα τα χέρια του*) Το είδαμε εδώ (δείχνει τον πίνακα)…Τι θα είχε;» και ένας μαθητής λέει «θα είχε δύο ρίζες…». Ο Εκπ λέει «Θα είχε ρίζες ρε παιδιά (*ψηλή ένταση φωνής, τίναγμα χεριών, ανύψωση φρυδιών*). Θα είχε τουλάχιστον μια ρίζα. Έτσι δεν είναι; Τι συμπέρασμα λοιπόν μπορούμε να βγάλουμε;». Ένας μαθητής λέει «ότι οι ρίζες θα είναι ομόσημες;». Ο Εκπ σκύβει το κεφάλι του, και το κουνάει πέρα δώθε. Δίνει τον λόγο σε άλλη μαθήτρια που λέει «θα πρέπει για αρχή να έχει ρίζες», και ο Εκπ συνεχίζει «για να παραγοντοποιηθεί δηλαδή ένα τριώνυμο θα πρέπει να έχει ρίζες. Άρα ποιο γενικό συμπέρασμα βγαίνει εδώ;» και ένας μαθητής του λέει «οι ρίζες θα είναι πάντα αντίθετες;». Ο Εκπ χαμογελά νευρικά και λέει «πείτε μου τι θα συμβαίνει όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική (*έντονο ύφος*)», ένας μαθητής λέει «δεν θα έχουμε ρίζες», ο καθηγητής συνεχίζει «και τι θα γίνεται με την παραγοντοποίηση;», ένας άλλος μαθητής λέει «δεν θα γίνεται παραγοντοποίηση». Ο Εκπ συνοψίζει, και γράφει το συμπέρασμα στον πίνακα. (Διάρκεια επεισοδίου: περίπου 10 λεπτά)

Αποσπάσματα από την συνέντευξη

Εκπ: Εδώ ας πούμε μου φαίνεται λίγο περίεργο που δεν το λένε. Γιατί περίμενα να το συνδέσουν αυτό και όντας εκεί τώρα δεν έκαναν τη σύνδεση και όντως πώς να το πω, περίμενα να την κάνουν τη σύνδεση τελικά και το ότι δεν την έκαναν δεν μου άρεσε.

Ερ: Ναι εγώ εκείνη τη στιγμή έτσι όπως το έβλεπα νόμιζα ότι, όχι ακριβώς τσαντιστήκατε, αλλά σαν να έχετε απηυδήσει. Κάτι τέτοιο…Πείτε μου εσείς πως αισθανόσασταν…

Εκπ: Ε ναι όντως έχεις δίκιο γιατί λέω «δεν είναι δυνατόν». Έλεγα από μέσα μου «αποκλείεται» δηλαδή. Γιατί και τι άλλο να έκανα; Παρά την προσπάθεια, ίσως να μην είχαν καταλάβει και ακριβώς τι θέλουμε να κάνουμε. Παρόλο που μας φαίνεται εμάς εύκολο, ότι αν δεν έχει ρίζες δεν παραγοντοποιείται, ίσως δεν το είχαν κατανοήσει.

Ερ: Τι βλέπετε να κάνετε εδώ;

Εκπ: Τι να κάνω (γελάει); Και τι δεν έκανα δηλαδή… Τους ρωτούσα συνέχεια, μήπως βρεθεί κάποιος να μου πει κάτι… Και έστω και από τους καλούς μαθητές, περίμενα κάποιος να μου πει κάτι. Δεν ήθελα να το πω εγώ, γιατί όπως μου επεσήμανες και εσύ μου τα είχαν πει όλα. Έλλειπε αυτό το κάτι, η σύνδεση.

Ερ: Προς το τέλος κάνατε πολύ συγκεκριμένες ερωτήσεις…

Εκπ: Γιατί ήμασταν πόση ώρα σε αυτό και έπρεπε να προχωρήσω. Ο χρόνος πίεζε πολύ, και είχαμε αρκετά να δούμε ακόμα στο φύλλο εργασίας. Πίστευα επίσης ότι δεν θα το έβγαζαν τελικά μόνοι τους οι μαθητές, οπότε…

Στο πρώτο περιστατικό στόχος του εκπαιδευτικού ήταν οι μαθητές να κάνουν την σύνδεση των ριζών του τριωνύμου με την παραγοντοποιημένη του μορφή. Στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται οι δράσεις του εκπαιδευτικού κατά την διαχείριση του περιστατικού, τα συναισθήματά του και οι παράγοντες που φαίνεται να επηρεάζουν τα παραπάνω.

Δράσεις

- Κάνει ερωτήσεις που επιδιώκουν την έκφραση της σκέψης των μαθητών
- Κάνει διευκρινιστικές ερωτήσεις
- Επαναλαμβάνει τις ερωτήσεις
- Επαναδιατυπώνει τις ερωτήσεις
- Κάνει κλειστές ερωτήσεις
- Εμπλέκει όλους τους μαθητές
- Εξηγεί την λάθος απάντηση
- Γράφει στον πίνακα
- Υποδεικνύει έμμεσα την απάντηση

Παράγοντες που επηρεάζουν

- ✓ Μη ανταπόκριση των μαθητών
- ✓ Λάθη μαθητών
- ✓ Προσμονή γνωστικής σύνδεσης
- ✓ Μπέρδεμα μαθητών
- ✓ Προσμονή σωστής απάντησης από τους καλούς μαθητές
- ✓ Πίεση χρόνου

Συναισθήματα: Εκνευρισμός (Έκπληξη & Θυμός-Αναστάτωση)

Σχήμα 1: Δράσεις, Συναισθήματα και Παράγοντες επιρροής 1ης ΖΣΔ.

Τα περιστροφικά βέλη του σχήματος χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την συνεχή, αλληλεπιδραστική σχέση των τριών αυτών διαστάσεων. Οι δράσεις του εκπαιδευτικού επηρεάζονται από τους διάφορους παράγοντες, η προσπάθεια διαχείρισης των οποίων δίνει χώρο στην δημιουργία συναισθημάτων. Τα συναισθήματα και οι νέοι παράγοντες επιρροής των δράσεων που προκύπτουν στην διάρκεια του περιστατικού, οδηγούν σε νέες δράσεις, που επηρεάζουν και επηρεάζονται από τους διάφορους παράγοντες και τα συναισθήματα, κοκ.

2η ΖΣΔ: Μαθηματικό Λάθος

Στα τελευταία λεπτά του μαθήματος, σηκώνεται ένας μαθητής στον πίνακα να λύσει την ανίσωση $\Delta > 0 \leftrightarrow 4\lambda^2 - 16 > 0$. Ο μαθητής ξεκινάει να γράφει $16 - 4\lambda^2 > 0 \leftrightarrow (4 - 2\lambda)(4 + 2\lambda) > 0 \leftrightarrow 4 - 2\lambda > 0$ ή $4 + 2\lambda > 0 \leftrightarrow -2\lambda > -4$ ή $2\lambda > -4 \leftrightarrow \lambda < 2$ ή $\lambda > -2$. Ο Εκπ (*ρίχνει το κεφάλι κάτω, σουφρώνει τα χείλη του*) λέει «επειδή δεν έχουμε χρόνο παιδιά, να έρθει η ομάδα της Μαίρης στον πίνακα. Να έρθει η Μαίρη στον πίνακα παιδιά γιατί δεν έχουμε χρόνο, όχι για κάποιον άλλο λόγο, αλλά μας πιέζει πάρα πολύ ο χρόνος». Σηκώνεται η Μαίρη και ο Εκπ της λέει «λοιπόν, θέλω να δεις εκεί με τι συμφωνείς και με τι διαφωνείς». Η μαθήτρια εξηγεί το λάθος του προηγούμενου μαθητή, σβήνει τον πίνακα και ξαναλύνει την ανίσωση σωστά. Όση ώρα λύνει την ανίσωση η μαθήτρια ο Εκπ σιωπηλός (*χαμόγελο*) κοιτάζει την παρουσίαση της λύσης της μαθήτριας. (Διάρκεια επεισοδίου: 5 λεπτά)

Αποσπάσματα από την συνέντευξη

Εκπ: Είναι βασικό να ξέρεις να λύνεις σωστά μια ανίσωση δευτέρου βαθμού, και επειδή είναι κάτι απλό, και το έχουν δουλέψει, δεν περίμενα να μην το κάνει σωστά. Δεν είναι και κακός μαθητής να πεις. Δεν έπρεπε να το κάνει λάθος αυτός.

Ερ: Και μετά σηκώσατε άλλη ομάδα. Και συγκεκριμένα την Μαίρη…

Εκπ: Καλά, είχαν μείνει 4 λεπτά για τελειώσει το μάθημα, δεν γινόταν να το αφήσω έτσι αυτό το λάθος. Έπρεπε να σηκωθεί κάποιος γιατί ο χρόνος δεν έφτανε. Και σηκώθηκε η Μαίρη και έβαλε τα πράγματα στην θέση τους.

Στο δεύτερο περιστατικό στόχος του εκπαιδευτικού είναι στα λίγα λεπτά που είχαν απομείνει να προλάβει ώστε να διορθωθεί η λάθος επίλυση της ανίσωσης που είχε γραφτεί στον πίνακα και να ολοκληρωθεί η απάντηση του ερωτήματος. Στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται οι δράσεις του εκπαιδευτικού κατά την διαχείριση του περιστατικού, τα συναισθήματά του και οι παράγοντες που φαίνεται να επηρεάζουν τα παραπάνω.

Δράσεις
- Δεν διορθώνει το λάθος του μαθητή
- Σηκώνει άλλη μαθήτρια (πολύ καλή)

Παράγοντες που επηρεάζουν
- ✓ Λάθη μαθητή
- ✓ Προσδοκίες για τον μαθητή
- ✓ Πίεση χρόνου

Συναισθήματα: Αποδοκιμασία (για Βασίλη), Άγχος (για χρόνο), Περηφάνια (για Εστέλα)

Σχήμα 2: Δράσεις, Συναισθήματα και Παράγοντες επιρροής 2ης ΖΣΔ.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην πρώτη ΖΣΔ (περίπου στα δύο τρίτα του μαθήματος, 16ο λεπτό), ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να κατευθύνει τους μαθητές κάνοντάς τους διερευνητικές και διευκρινιστικές ερωτήσεις. Ενώσω οι μαθητές παραμένουν μπερδεμένοι και κάνουν λάθη ο εκπαιδευτικός επαναλαμβάνει/ επαναδιατυπώνει τις ερωτήσεις, προσμένοντας κάποιος μαθητής να φτάσει στην σύνδεση. Ενώ ο χρόνος περνάει και οι μαθητές δεν ανταποκρίνονται, ο εκπαιδευτικός κάνει πιο κλειστές, καθοδηγητικές ερωτήσεις. Η πίεση του χρόνου, τα λάθη και η μη ανταπόκριση των μαθητών (ή έστω των καλών μαθητών) φαίνεται να αλληλοεπιδρούν με την επιλογή δράσεων του εκπαιδευτικού, ενώ το αρνητικό συναίσθημα που αναδύεται, είναι ο εκνευρισμός. Στην δεύτερη ΖΣΔ (στα τελευταία λεπτά του μαθήματος), ο εκπαιδευτικός, βλέποντας την λάθος επίλυση της ανίσωσης από τον μαθητή αισθάνεται λύπη και έκπληξη (αποδοκιμασία), καθώς πρόσμενε ο συγκεκριμένος μαθητής να αποδώσει καλύτερα. Εξαιτίας αυτού και του άγχους, λόγω της έλλειψης χρόνου, ο εκπαιδευτικός δίνει τον λόγο σε μια καλή μαθήτρια ώστε εκείνη να διορθώσει το λάθος και να παρουσιάσει την σωστή απάντηση στον πίνακα. Το συναίσθημά του είναι η περηφάνια για την απόδοση της μαθήτριας.

Οι δράσεις του εκπαιδευτικού, και στις δύο ΖΣΔ, δείχνουν την προσπάθειά του να επανακατευθυνθεί στους στόχους του. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με την Θεωρία της Δραστηριότητας όπου οι δράσεις είναι τοπικές, καθοδηγούνται/κατευθύνονται από/προς έναν συνειδητό στόχο (Leont'ev, 1978), ενώ δεν είναι αποτέλεσμα της υποκειμενιστικής μοναδικότητας, αλλά πραγματοποιούν την συλλογική δραστηριότητα του αντικειμένου (Roth, 2007). Καθώς η δραστηριότητα διαμορφώνεται και από τα άτομα που συμμετέχουν σε αυτήν, το είδος της εμπλοκής και ανταπόκρισης των μαθητών, φαίνεται να παίζουν καθοριστικό ρόλο κατά την διαδικασία λήψης αποφάσεων του εκπαιδευτικού. Οι δράσεις του εκπαιδευτικού στις δύο ΖΣΔ διαφέρουν: στην πρώτη ΖΣΔ ο εκπαιδευτικός υιοθετεί δράσεις πιο διερευνητικού τύπου ενώ στην δεύτερη ΖΣΔ πιο διεκπεραιώτικές. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο πότε διαδραματίστηκε η κάθε ΖΣΔ κατά την διάρκεια του μαθήματος σε σχέση με τον διαθέσιμο χρόνο για την διαχείρισή της. Ο παράγοντας του χρόνου φαίνεται να είναι κεντρικός στην διαχείριση της κάθε ΖΣΔ από τον εκπαιδευτικό καθώς και στο είδος των αποφάσεών του σχετικά με τις δράσεις του. Σύμφωνα με τον Assude (2005), ο εκπαιδευτικός παίρνει αποφάσεις που βασίζονται στο κόστος των σχέσεων των διαφορετικών ειδών χρόνου κατά την διδασκαλία (π.χ. χρόνος για την μάθηση των μαθητών, διδακτικός χρόνος, χρόνος για μια δραστηριότητα κ.α.).

Τα συναισθήματα του εκπαιδευτικού και στις δύο ΖΣΔ είναι κυρίως αρνητικά, όμως φαίνεται να αναδύονται σε διαφορετικές στιγμές και για διαφορετικούς λόγους. Στην πρώτη ΖΣΔ, η συνεχής αναπροσαρμογή των δράσεων του εκπαιδευτικού, η μη ανταπόκριση των μαθητών και η πίεση του χρόνου, συνοδεύονται από εκνευρισμό, που έγινε αντιληπτός περίπου στην μέση του επεισοδίου. Στην δεύτερη ΖΣΔ τα συναισθήματα εκπαιδευτικού σχετίζονται με την απόδοση των μαθητών και τον διαθέσιμο χρόνο. Καθώς λοιπόν, τα συναισθήματα αντανακλούν σχέσεις μεταξύ κινήτρων (αναγκών) και επιτυχίας (ή τη δυνατότητα επιτυχίας), αναδύονται μέσω της δράσης του υποκειμένου που ανταποκρίνεται (ή προσπαθεί να ανταποκριθεί) σε αυτά τα κίνητρα (Leont'ev, 1978), και διαμορφώνονται από τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις στο περιβάλλον της τάξης, ενώ με τη σειρά τους παράγουν και αναπαράγουν τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις (Hargreaves, 2001a).

Κατά την διαχείριση των ΖΣΔ, λοιπόν, που είναι κομμάτι της δραστηριότητας της διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός υιοθετεί μια σειρά δράσεων, που φέρουν έναν συναισθηματικό χρωματισμό, οι οποίες αντανακλούν τους στόχους του και τους αναμορφώνουν ώστε να συναντήσουν τις ανάγκες του ως προς το αντικείμενο της διδασκαλίας, που είναι η μάθηση των μαθητών Η περεταίρω μελέτη αυτής της πολύπλοκης, συνεχούς και κυκλικής διαδικασίας, υπό το πλαίσιο που προτείνουμε, μπορεί να μας βοηθήσει να εμβαθύνουμε στις διάφορες πτυχές της διδασκαλίας των μαθηματικών και της ποιότητάς της. Σε συνέχεια αυτών, ενδιαφέρον έχει να μελετηθούν αντίστοιχα κι άλλα είδη ΖΣΔ, του ίδιου, αλλά και άλλων εκπαιδευτικών, προς συσχέτιση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Assude, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study: Integration of Cabri in primary school mathematics teaching. *Educational studies in mathematics*, *59*(1), 183−203.

Burkitt, I. (2021). The Emotions in Cultural-Historical Activity Theory: Personality, Emotion and Motivation in Social Relations and Activity. *Integrative Psychological and Behavioral Science*, 1−24.

Ekman, P., & Cordaro, D. (2011). What is meant by calling emotions basic. *Emotion review*, *3*(4), 364−370.

Ekman, P., & Friesen, W. V. (2003). *Unmasking the face: A guide to recognizing emotions from facial clues* (Vol. 10). Ishk.

Engeström, Y. (2001). Making expansive decisions: An activity-theoretical study of practitioners building collaborative medical care for children. In *Decision making: Social and creative dimensions* (pp. 281−301). Springer, Dordrecht.

Hagenauer, G., Hascher, T., & Volet, S. E. (2015). Teacher emotions in the classroom: associations with students' engagement, classroom discipline and the interpersonal teacher-student relationship. *European journal of psychology of education*, *30*(4), 385−403.

Hargreaves, A. (2001a). Classrooms, colleagues, communities, and change: The sociology of teaching at the turn of the century. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education & Development*, *4*(1), 101–129.

Leont'ev, A. N. (1978). Activity, consciousness, and personality.

Roth, W. M. (2007). Emotion at work: A contribution to third-generation cultural-historical activity theory. *Mind, culture, and activity*, *14*(1−2), 40−63.

Pillen, M., Beijaard, D., & Brok, P. D. (2013). Tensions in beginning teachers' professional identity development, accompanying feelings and coping strategies. *European Journal of Teacher Education*, *36*(3), 240−260.

Plutchik, R. (2001). The nature of emotions: Human emotions have deep evolutionary roots, a fact that may explain their complexity and provide tools for clinical practice. *American scientist*, *89*(4), 344−350.

Potari, D., & Stouraitis, K. (2019). Teacher decision making: Developments in research and theory. In *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1* (pp. 303−325). Brill Sense.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(2), 125−147.

Zembylas, M. (2004). Emotion metaphors and emotional labor in science teaching. *Science Education*, *88*(3), 301−324.

ΑΤΥΠΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ Γ` ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΩΝ

Σαπλαμίδου Σταυρούλα

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

stavsap@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στο πεδίο της στατιστικής εκπαίδευσης και εξετάζει τις άτυπες γνώσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη διενέργεια μιας στατιστικής διερεύνησης. Μέσω μιας μελέτης περίπτωσης, διερευνήθηκαν και αναλύθηκαν, με τεχνικές Θεμελιωμένης Θεωρίας, οι διάλογοι των μαθητών μιας τάξης Γ' Δημοτικού, καθώς αυτοί σχεδίασαν και διεξήγαγαν μία έρευνα στο σχολείο τους. Τα αποτελέσματα σκιαγραφούν την ύπαρξη διαφορετικών ειδών άτυπης γνώσης, που προέρχονται είτε από το ευρύτερο πλαίσιο των μαθητών, είτε από άτυπες στατιστικές ιδέες που διαθέτουν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η Στατιστική για μαθητές νεαρής ηλικίας συχνά περιορίζεται στην κατασκευή και «ανάγνωση» απλών αναπαραστάσεων δεδομένων, χωρίς να εμπερικλείει διαδικασίες όπως η λήψη αποφάσεων, ο προσδιορισμός των δεδομένων που απαιτούνται για τη λύση προβλημάτων και η εφαρμογή σχεδίου για την απόκτησή τους (Fielding-Wells, 2018). Δεδομένου πως τα προβλήματα που συναντούν οι μαθητές στην καθημερινή ζωή δεν περιλαμβάνουν απλά και διαχειρίσιμα δεδομένα, έρχεται στο προσκήνιο η διδακτική αξιοποίηση των στατιστικών διερευνήσεων (Wild & Pfannkuch, 1999). Προκειμένου να μοντελοποιήσουν τα βήματα μιας στατιστικής διερεύνησης, οι Wild & Pfannkuch (1999) επινόησαν τον διερευνητικό στατιστικό κύκλο, ο οποίος περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια: Πρόβλημα (συνειδητοποίηση δυναμικής συστήματος, ορισμός προβλήματος), Σχέδιο (δειγματοληψία, διαχείριση δεδομένων), Δεδομένα (συλλογή), Ανάλυση (υποθέσεις, διερευνήσεις) και Συμπεράσματα (ερμηνεία, νέες ιδέες, επικοινωνία).

Καθώς οι μαθητές εμπλέκονται στα διαφορετικά στάδια μιας στατιστικής διερεύνησης, παρέχουν εξηγήσεις (Wild & Pfannkuch, 1999). Οι Gill & Ben-Zvi (2011), μελετώντας τον ρόλο των εξηγήσεων των μαθητών στην Στατιστική, σημειώνουν πως η εξαγωγή συμπερασμάτων και ο σχηματισμός εξηγήσεων αποτελούν διαδικασίες που υποστηρίζουν ταυτόχρονα η μία την άλλη. Η εξήγηση ενός στατιστικού συμπεράσματος περιγράφει *το πώς* και *το γιατί* του συμπεράσματος. Μπορεί να περιλαμβάνει ενδείξεις, αποδεικτικό συλλογισμό και απαγωγικό συλλογισμό. Οι ενδείξεις είναι τα δεδομένα που υποστηρίζουν το συμπέρασμα. Αποδεικτικός συλλογισμός είναι η διαδικασία παραγωγής του συμπεράσματος, με την οποία αιτιολογείται γιατί τα δεδομένα πρέπει να θεωρηθούν κατάλληλες ενδείξεις που στηρίζουν το συμπέρασμα, αλλά και η διαδικασία εκτίμησης της ισχύος των ενδείξεων. Απαγωγικός συλλογισμός είναι η διαδικασία με την οποία παρέχεται μια υποστήριξη, από το πλαίσιο ή τη θεωρία, σχετικά με το γιατί τα δεδομένα έχουν τη μορφή που έχουν. Στη συγκεκριμένη εργασία θα εστιάσουμε στην πτυχή των εξηγήσεων που αναφέρεται στον απαγωγικό συλλογισμό των μαθητών και συγκεκριμένα στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν το πώς και το γιατί των αποφάσεων και των συμπερασμάτων τους, αναζητώντας στήριξη από το πλαίσιο, συγκεκριμένα, τις άτυπες γνώσεις που διαθέτουν.

Ως άτυπη γνώση εννοιοποιείται είτε η καθημερινή γνώση για τον πραγματικό κόσμο που φέρνουν οι μαθητές στην τάξη βάσει των εμπειριών τους εκτός σχολείου, είτε η λιγότερο «επίσημη» γνώση που προέρχεται από προηγούμενη τυπική διδασκαλία. Η άτυπη γνώση μπορεί να ειδωθεί ως συγκερασμός των δύο προηγούμενων και θεωρείται σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη της τυπικής κατανόησης (Zieffler, Garfield, delMas & Reading, 2008). Όσον αφορά τη Στατιστική, ως άτυπη γνώση μπορεί να θεωρηθεί η καθημερινή γνώση που σχετίζεται με το πλαίσιο του προβλήματος, η προηγούμενη γνώση για στατιστικές έννοιες, η γνώση για τον πραγματικό κόσμο και η εμπειρία, αλλά και η στατιστική γλώσσα (Zieffler κ.ά., 2008). Σχετικά με την πτυχή των στατιστικών εννοιών, η έρευνα στη στατιστική εκπαίδευση έχει αναδείξει πως μαθητές νεαρής ηλικίας διαθέτουν πληθώρα άτυπων γνώσεων για θεμελιώδεις στατιστικές έννοιες, τις οποίες δύνανται να εκφράσουν και να διαπραγματευτούν συμμετέχοντας σε κατάλληλα διαμορφωμένες δραστηριότητες (Leavy, Meletiou-Mavrotheris & Paparistodemou, 2018).

Η English (2018), σε μία προσπάθεια να προσδιορίσει τις θεμελιώδεις έννοιες που οριοθετούν το πεδίο της Στατιστικής για μαθητές νεαρής ηλικίας, συγκεράζει θεμελιώδη στοιχεία μαθηματικών, στατιστικής και τυχαιότητας. Στις θεμελιώδεις έννοιες περιλαμβάνει: δομές στατιστικής και τυχαιότητας (πιθανοτικό λεξιλόγιο, προβλέψεις, άτυπα μέτρα κεντρικής τάσης), μαθηματικές, στατιστικές και πιθανοτικές διαδικασίες που περιλαμβάνουν μέτρηση, ερμηνεία, αναπαράσταση, μοντελοποίηση, λήψη αποφάσεων, συνειδητοποίηση της αβεβαιότητας, αιτιολόγηση και επικοινωνία. Επιπλέον, εμπερικλείει διαδικασίες όπως ο σχηματισμός άτυπων συμπερασματολογιών και διαθέσεις όπως η κριτική αντίληψη των δεδομένων και η αναζήτηση συνδέσεων σε αυτά.

Βάσει της παραπάνω προβληματικής, η παρούσα εργασία επιχειρεί να διερευνήσει το ακόλουθο ερώτημα: Ποιες άτυπες γνώσεις ανιχνεύονται στις εξηγήσεις που παρέχουν οι μαθητές σε διαφορετικά στάδια του διερευνητικού στατιστικού κύκλου;

Μεθοδολογία

Το προηγούμενο ερώτημα διερευνήθηκε μέσω μελέτης περίπτωσης. Το ερευνητικό εργαλείο ήταν η ημιδομημένη παρατήρηση, ενώ τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω σημειώσεων πεδίου και ηχογράφησης των διαλόγων που αναπτύχθηκαν. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στον Ιούνιο του 2021 και σε αυτή συμμετείχαν 20 μαθητές Γ' τάξης (περίπου 8 ετών), ενός Δημοτικού σχολείου της περιφέρειας Αττικής. Την τάξη αποτελούσαν 9 αγόρια και 11 κορίτσια, που στην πλειοψηφία τους είχαν υψηλές δεξιότητες προφορικού λόγου και επιμονή κατά την επίλυση προβλημάτων. Είχαν επίσης, ασκηθεί καθόλη τη διάρκεια της χρονιάς στο να εξηγούν το «γιατί» της σκέψης και των απαντήσεων που έδιναν στην τάξη. Οι στατιστικές εμπειρίες των μαθητών πριν την παρούσα έρευνα αφορούσαν μια διερεύνηση μικρής κλίμακας που περιλάμβανε συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων από τη δική τους τάξη. Δεν είχαν κάποια επαφή με το λογισμικό δυναμικής αναπαράστασης δεδομένων Tinkerplots, παρά μιας επίδειξης των δυνατοτήτων αυτού.

Οι μαθητές κλήθηκαν να σχεδιάσουν και να πραγματοποιήσουν μια στατιστική διερεύνηση στο σχολείο τους, σχετική με ένα θέμα που τους ενδιέφερε. Έπειτα από συζήτηση και ψηφοφορία, οι μαθητές επέλεξαν να διερευνήσουν τις απόψεις και τις συνήθειες των μαθητών του σχολείου τους αναφορικά με τη φύση, τα ζώα και τα φυτά. Για τη διεξαγωγή της διερεύνησης οι μαθητές ακολούθησαν τα βήματα του στατιστικού διερευνητικού κύκλου (Wild & Pfannkuch, 1999). Η τάξη ήταν οργανωμένη σε πέντε ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Οι μαθητές συζητούσαν ως ομάδα τις αποφάσεις που έπρεπε να λάβουν σε κάθε στάδιο του στατιστικού κύκλου και έπειτα ένας εκπρόσωπος ανακοίνωνε την απόφαση στην ολομέλεια της τάξης. Οι απόψεις της κάθε ομάδας συζητούνταν στην ολομέλεια και βάσει αυτών σχηματιζόταν η τελική απόφαση που ήταν κοινή για όλους. Η ερευνήτρια δεν υιοθέτησε τον ίδιο ρόλο καθόλη τη διάρκεια της έρευνας. Σε περιπτώσεις που έπρεπε να διευθετηθούν οργανωτικά θέματα σχετικά με τη στατιστική διερεύνηση, δρούσε ως εκπαιδευτικός-ερευνητής, θέτοντας στους μαθητές ερωτήματα προκειμένου να ενεργοποιήσει τη συζήτηση σχετικά με κάθε στάδιο του στατιστικού κύκλου. Κατά τη διάρκεια των συζητήσεων, υιοθετούσε τον ρόλο του ενεργού παρατηρητή. Οι μαθητές εξέφραζαν ελεύθερα τις απόψεις τους, για τις οποίες η ερευνήτρια δεν πραγματοποιούσε διορθώσεις ή αξιολογικά σχόλια, μπορούσε, όμως, να ζητήσει από τους μαθητές να εξηγήσουν πτυχές της δραστηριότητάς τους.

Ανάλυση δεδομένων

Προκειμένου να απαντηθεί το ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της Θεμελιωμένης Θεωρίας. Αρχικά, οι σημειώσεις πεδίου και οι απομαγνητοφωνημένοι διάλογοι συνδυάστηκαν, ώστε να παραχθούν κείμενα που θα περιγράφουν τα λεγόμενα και τις δράσεις των μαθητών ανά στάδιο του διερευνητικού στατιστικού κύκλου. Για καθένα από αυτά τα κείμενα πραγματοποιήθηκε ανοιχτή κωδικοποίηση των δεδομένων γραμμή - γραμμή. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε η έννοια της άτυπης γνώσης, όπως προσδιορίστηκε από τον Zieffler και τους συνεργάτες του (2008). Στη φάση αυτή αναζητούνταν στα δεδομένα δράσεις και δηλώσεις των μαθητών που μπορούν να χαρακτηριστούν ως άτυπη γνώση, με σκοπό την ανάπτυξη αρχικών περιγραφών για κώδικες που σχετίζονται με τα είδη αυτής. Έπειτα, οι αρχικές περιγραφές της άτυπης γνώσης συγκρίθηκαν μεταξύ τους προκειμένου να ομαδοποιηθούν σε κατηγορίες. Η ονοματοδοσία των κατηγοριών επηρεάστηκε από το πλαίσιο των Zieffler κ.ά. (2008) και συγκεκριμένα τα είδη της άτυπης στατιστικής γνώσης που προσδιόρισαν, με ιδιαίτερη προσοχή προκειμένου να διαπιστωθεί αν οι κώδικες που παράχθηκαν από τα δεδομένα της παρούσας έρευνας ταιριάζουν με αυτά. Σε περίπτωση συμφωνίας, αξιοποιούταν για την ονοματοδοσία των κατηγοριών το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο. Σε περίπτωση ασυμφωνίας, επινοούταν ένα νέο όνομα για την κατηγορία άτυπης γνώσης, βάσει των χαρακτηριστικών που τη συνθέτουν. Σε περίπτωση που οι μαθητές ενσωμάτωναν στις εξηγήσεις τους πρώιμες στατιστικές ιδέες που ανήκουν σε αυτές που προσδιόρισε η English (2018), θεωρήθηκε πως η σκέψη τους κινούταν εντός του στατιστικού πλαισίου.

Αποτελέσματα

Τα είδη της άτυπης γνώσης που ανιχνεύτηκαν μπορούν να ομαδοποιηθούν σε κατηγορίες. Οι μαθητές χρησιμοποιήσαν *γνώση για τον πραγματικό κόσμο* σε περιπτώσεις που στις εξηγήσεις τους ενσωμάτωσαν πληροφορίες που έχουν αποκτήσει αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον τους, χωρίς συστηματική διδασκαλία. *Η γνώση σχετική με το πλαίσιο του προβλήματος* αναφέρεται σε πληροφορίες που γνωρίζουν οι μαθητές και σχετίζονται με τη φύση και τα ζώα. Οι εξηγήσεις που ενσωματώνουν *πρώιμη στατιστική γνώση*, αναφέρονται στις στατιστικές ιδέες που προσδιόρισε η English (2018), ενώ όσες ενσωματώνουν *εμπειρική γνώση* αφορούν πληροφορίες που οι μαθητές έχουν αποκτήσει από προσωπικά βιώματα. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αποσπάσματα από τους διαλόγους των μαθητών σε δύο στάδια του στατιστικού κύκλου, στα οποία ανιχνεύονται και διαπλέκονται τα παραπάνω είδη άτυπης γνώσης.

Οι μαθητές, συζητώντας στην ολομέλεια της τάξης για το ερευνητικό εργαλείο με το οποίο θα συλλέξουν τα δεδομένα για την έρευνά τους ανέπτυξαν τον παρακάτω διάλογο:

1 Ελευθερία: Αν τους πάρουμε συνέντευξη, θα μας δώσουν πολλές πληροφορίες για τη φύση.

2 Βασίλης: Έχουμε κορωνοϊό… Δεν πρέπει να μιλήσουμε με πολλά παιδιά!

3 Στέλιος: (Το ερωτηματολόγιο) Θα είναι λιγότερο κουραστικό, γιατί δε θα χρειάζεται να μιλάμε πολλές ώρες… Επίσης ο άλλος θα νιώθει πιο άνετα γιατί δε θα χρειάζεται να τον ρωτάς και να τα λέει σε κάποιον…

4 Μίλτος: Ναι και μπορεί κάποια απάντηση να θέλει να τη σκεφτεί και θα έχει χρόνο, ενώ στη συνέντευξη μπορεί να πιεστεί.

5 Πέτρος: Είναι και πιο γρήγορο, γιατί θα το μοιράζουμε και την επόμενη μέρα θα το παίρνουμε.

6 Στέλιος: Θέλω να συμπληρώσω και κάτι άλλο… (το ερωτηματολόγιο) είναι σχεδόν ίδιο με τη συνέντευξη αλλά μπορείς να πάρεις τις απαντήσεις που είναι γραμμένες, να τις προσθέσεις μαζί και να πάρεις με αριθμούς αυτό που θα σου έλεγε στη συνέντευξη.

Στο παραπάνω απόσπασμα οι ομάδες μαθητών ανατρέχουν σε διαφορετικά είδη άτυπης γνώσης προκειμένου να δικαιολογήσουν την επιλογή τους. Επιστρατεύουν *γνώση για τον πραγματικό κόσμο* [γραμμή 2], όπως η ύπαρξη της πανδημίας του κορωνοϊού προκειμένου να απορρίψουν το εργαλείο της συνέντευξης που εμπεριέχει προσωπική επαφή. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν *άτυπη στατιστική γνώση* για τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε εργαλείου [γραμμές 1, 3, 4, 5, 6 και 7], όπως την παραγωγή πληθώρας δεδομένων από μια συνέντευξη, ή την ταχύτητα συλλογής δεδομένων, την ανωνυμία και την ευκολότερη ποσοτικοποίηση ενός ερωτηματολογίου. Αφού επιλέχθηκε το ερωτηματολόγιο ως ερευνητικό εργαλείο, κατά τον σχεδιασμό της δειγματοληψίας, αναπτύχθηκε ο παρακάτω διάλογος:

7 Νίκος: Λέω να το δώσουμε στην Α΄ και τη Β΄ Δημοτικού, γιατί τα μεγάλα παιδιά μπορεί να βαρεθούν και να μην το συμπληρώσουν.

8 Δανάη: Συμφωνώ, τα μικρά παιδιά έχουν και πιο πολλές ιδέες και θα μας βοηθήσουν.

9 Βασίλης: Εγώ λέω να το δώσουμε στη Δ’, Ε’ και ΣΤ’ Δημοτικού, γιατί τα παιδιά εκεί είναι μεγαλύτερα και ξέρουν περισσότερα για τα φυτά και τα ζώα.

10 Ορέστης: Ναι, είναι πιο προχωρημένα, κάνουν και φυσική.

11 Θανάσης: Εγώ λέω να το δώσουμε σε όλο το σχολείο, για τον ίδιο λόγο με τη Δανάη και τον ίδιο λόγο με τον Βασίλη… Για να έχουμε και τα μικρά παιδιά που έχουν ωραίες ιδέες και τα μεγάλα που ξέρουν περισσότερα.

12 Πέτρος: Ναι, και να ξέρουμε την άποψη όλων των παιδιών!

13 Θοδωρής: Διαφωνώ… Αφού μιλάμε για τη φύση, αν δώσουμε το ερωτηματολόγιο σε όλο το σχολείο θα χρειαστούμε πάρα πολλά χαρτιά και τα χαρτιά κόβονται από τα δέντρα… άρα δε θα κάνουμε εμείς καλό στη φύση.

Μία ομάδα μαθητών στηρίζει την απόφασή της για το μέγεθος του δείγματος σε ιδιοσυγκρασιακές αντιλήψεις και συγκεκριμένα στα χαρακτηριστικά που πιστεύουν πως έχουν τα παιδιά μικρής και μεγαλύτερης ηλικίας [γραμμές 7, 8]. Μια άλλη ομάδα στηρίζει την απόφασή της σε άτυπη *γνώση για τον πραγματικό κόσμο*, δηλαδή τη σχολική πραγματικότητα και τα μαθήματα που διδάσκονται τα παιδιά σε μεγαλύτερες τάξεις [γραμμές 9, 10]. Μια τρίτη ομάδα, φαίνεται να λαμβάνει υπόψη το γεγονός πως το δείγμα πρέπει να αντικατοπτρίζει τα χαρακτηριστικά ολόκληρου του πληθυσμού για τον οποίο θα εξαχθούν συμπεράσματα [γραμμές 11,12]. Η πρόταση αυτή δέχτηκε κριτική από ένα μέλος ομάδας που υποστήριζε το ερωτηματολόγιο να δοθεί σε συγκεκριμένα τμήματα. Εξηγώντας το σκεπτικό του, ο μαθητής χρησιμοποίησε άτυπη *γνώση σχετική με το πλαίσιο του προβλήματος* και συγκεκριμένα με τον τρόπο παραγωγής του χαρτιού, η οποία ερχόταν σε αντίθεση με το ευρύτερο πλαίσιο του προβλήματος που ήταν η φύση [γραμμή 13].

Οι μαθητές, καθώς επεξεργάζονται τα αποτελέσματα των απαντήσεων στην ερώτηση «Από πού θα έπαιρνες ένα κατοικίδιο ζώο» και προσπαθούν να εξάγουν τα συμπεράσματά τους, αναπτύσσουν τον παρακάτω διάλογο.

14 Γιάννης: Τα λιγότερα παιδιά θα έπαιρναν ένα κατοικίδιο από τον φίλο τους.

15 Λυδία: Ναι, ενώ 87 από τα 125 παιδιά θα το έπαιρναν από καταφύγιο ζώων.

16 Ερευνήτρια: Άρα αν βρω ένα παιδί στο διάλειμμα και το ρωτήσω από πού θα έπαιρνε ένα κατοικίδιο ζώο, τι είναι πιο πιθανό πως θα μου απαντούσε;

17 Παναγιώτης: Από καταφύγιο… γιατί πρώτον είναι παράνομο να αγοράζεις ζώα και δεύτερον υπάρχουν πολλές επιλογές εκεί για να διαλέξεις.

18 Γιάννης: Δεν είναι παράνομο να πουλάς ζώα, όσοι έχουν τα μαγαζιά μπορούν να το κάνουν. Εγώ πιστεύω πως είναι πιο πιθανό να μας πει καταφύγιο, γιατί αυτό έχουν επιλέξει οι περισσότεροι.

19 Μίλτος: Δεν έχει σημασία όμως και η ηλικία; Ένα πιο μικρό παιδί είναι πιο πιθανό να μας πει το κατάστημα.

20 Ερευνήτρια: Γιατί το λες αυτό;

21 Μίλτος: Ε, τα μικρά παιδιά νομίζω πως δεν ξέρουν τι είναι το καταφύγιο, επίσης βλέπουν τις διαφημίσεις για τα μαγαζιά με ζώα και εκεί πάνε.

22 Ερευνήτρια: Μπορούμε να δούμε αν αυτό που λέει ο Μίλτος ισχύει;

23 Μαριάννα: Να δούμε τις απαντήσεις στην ερώτηση ανά τάξη.

Μελετώντας το διάγραμμα συχνοτήτων για τις απαντήσεις στην ερώτηση, οι μαθητές φαίνεται πως εξάγουν συμπεράσματα για το συγκεκριμένο δείγμα, χρησιμοποιώντας *άτυπη στατιστική γνώση* και συγκεκριμένα τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή ή τη συσχέτιση της συχνότητας με το μέγεθος του δείγματος [γραμμές 14,15]. Στη συνέχεια, η ερευνήτρια θέτει ένα ερώτημα προκειμένου να προκαλέσει συζήτηση σχετικά με τα δεδομένα και την τυχαιότητα [γραμμή 16]. Ο πρώτος μαθητής που παίρνει τον λόγο απαντά ενσωματώνοντας στην εξήγησή του διαφορετικών ειδών άτυπες γνώσεις. Αρχικά επικαλείται γνώσεις σχετικές *με το πλαίσιο του προβλήματος* και συγκεκριμένα την αγοραπωλησία ζώων ή τον αριθμό των ζώων που φιλοξενούν τα καταφύγια [γραμμή 17]. Ένας συμμαθητής του του ανταπαντά χρησιμοποιώντας μια διαφορετική γνώση που έχει σχέση με την αγοραπωλησία ζώων και έπειτα χρησιμοποιεί τα διαθέσιμα δεδομένα προκειμένου να υποστηρίξει το συμπέρασμά του, ενσωματώνει, δηλαδή στην εξήγησή του τα διαθέσιμα δεδομένα ως ενδείξεις [γραμμή 18]. Με αφορμή τον διάλογο που αναπτύχθηκε, ένας άλλος μαθητής συσχετίζει την απάντηση των μαθητών με την ηλικία τους, διατυπώνοντας μία υπόθεση που δε στηρίζεται στα διαθέσιμα δεδομένα, στο οποίο, όμως ενσωματώνει στοιχεία αβεβαιότητας [γραμμη 19]. Για την υπόθεσή του αυτή δίνει εξηγήσεις που ενσωματώνουν *εμπειρικές γνώσεις* που προέρχονται από προσωπικές του παρατηρήσεις [γραμμή 21]. Η ερευνήτρια ρωτά τους μαθητές πώς θα μπορούσαν να ελέγξουν την εγκυρότητα της εικασίας και μια μαθήτρια προτείνει την αλλαγή της γραφικής αναπαράστασης των δεδομένων με τη βοήθεια του λογισμικού Tinkerplots.

Συμπεράσματα-Συζήτηση

Πραγματοποιώντας μια σφαιρική εξέταση των αποτελεσμάτων προκύπτει πως οι μαθητές επιστρατεύουν διαφορετικά είδη άτυπης γνώσης κατά την οργάνωση και διεξαγωγή στατιστικών διερευνήσεων. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί λαμβάνοντας υπόψη πως βασικό στοιχείο της στατιστικής σκέψης αποτελεί η ικανότητα του ατόμου να ενσωματώνει πληροφορίες, γνώσεις και αντιλήψεις από τη στατιστική και από το πλαίσιο στο οποίο ανήκει (Langrall, Nisbet & Mooney, 2006). Τα δεδομένα δεν είναι απλώς αριθμοί, αλλά αριθμοί εντός πλαισίου, ως εκ τούτου ενεργοποιούν τις γνώσεις που έχουν τα άτομα για το πλαίσιο προκειμένου να τα κατανοήσουν και να τα ερμηνεύσουν, και όχι απλώς να εκτελέσουν αριθμητικές πράξεις (Moore, 1990).

Αναφορικά με τα είδη άτυπης γνώσης που ανιχνεύτηκαν, η άτυπη γνώση που σχετίζεται με το πλαίσιο του προβλήματος φάνηκε να επηρεάζει τις αποφάσεις των μαθητών κατά τη δειγματοληψία και συγκεκριμένα την επιλογή του μεγέθους του δείγματος. Μάλιστα, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν αυτό το είδος άτυπης γνώσης δεν έλαβαν υπόψη κανένα στατιστικό κριτήριο για τον καθορισμό του μεγέθους του δείγματος. Αυτή η δυσκολία των μαθητών να διαχειριστούν στοιχεία στατιστικού συλλογισμού και άτυπων γνώσεων που φέρουν από το πλαίσιο, έχει επίσης παρατηρηθεί σε έρευνες σχετικά με τη δειγματοληψία (Wroughton κ.ά., 2013). Οι μαθητές φάνηκε να χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο είδος άτυπης γνώσης και κατά την παραγωγή συμπερασμάτων από τα δεδομένα, προκειμένου να ερμηνεύσουν το γιατί τα δεδομένα έχουν τη μορφή που έχουν, τάση που έχει παρατηρηθεί και σε μαθητές τελευταίων τάξεων δημοτικού που επεξεργάζονταν δεδομένα (Langrall κ.ά., 2006). Κατά τη διάρκεια της στατιστικής διερεύνησης, οι μαθητές ενσωμάτωσαν στις εξηγήσεις τους και διάφορα στοιχεία άτυπης στατιστικής γνώσης. Κατά την επιλογή του ερευνητικού εργαλείου, οι μαθητές αναφέρθηκαν στα χαρακτηριστικά του ερωτηματολογίου και τις συνέντευξης ως διαδικασιών συλλογής δεδομένων, ενώ αναφέρθηκαν άτυπα και στην ιδέα της αντιπροσωπευτικότητας κατά την επιλογή του μεγέθους δείγματος. Στην ανάλυση και την ερμηνεία των δεδομένων χρησιμοποίησαν χαρακτηριστικά όπως η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή, αλλά και η συσχέτιση μιας παρατηρούμενης συχνότητας με το μέγεθος του δείγματος. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν άτυπη στατιστική γνώση για να εξάγουν συμπεράσματα που αφορούσαν το συγκεκριμένο δείγμα, φάνηκε όμως να δυσκολεύονται να εξάγουν συμπεράσματα πέρα των διαθέσιμων δεδομένων. Η δυσκολία τους αυτή ενδεχομένως να οφείλεται είτε στη σύγχυση των δεδομένων του δείγματος με την προσωπική τους εμπειρία, είτε στην αποκλειστική στήριξη στην αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος, θεωρώντας πως το δείγμα παρέχει πλήρεις πληροφορίες για τον πληθυσμό (Pratt & Ainley, 2008· Rubin, Bruce & Tenney, 1990). Υπήρξαν, όμως, και περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές κινήθηκαν πέρα από τα διαθέσιμα δεδομένα· όταν η ερευνήτρια έθεσε ένα ερώτημα που αφορούσε τον ευρύτερο πληθυσμό του σχολείου και όταν οι μαθητές διατύπωσαν μια εικασία βάσει των διαθέσιμων δεδομένων. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι μαθητές στηρίχθηκαν στα διαθέσιμα δεδομένα, αλλά ενσωμάτωσαν και πιθανοτικό λεξιλόγιο προκειμένου να δείξουν την αβεβαιότητα των συμπερασμάτων τους, γεγονός σημαντικό για την ανάπτυξη του στοχαστικού συλλογισμού τους (Pratt κ.ά., 2011).

Η άτυπη γνώση για τον πραγματικό κόσμο φάνηκε να επηρεάζει τις αποφάσεις των μαθητών σχετικά με τον σχεδιασμό της έρευνας (επιλογή ερευνητικού εργαλείου και μεγέθους δείγματος) και λιγότερο κατά την ερμηνεία των δεδομένων και εξαγωγή συμπερασμάτων. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο ότι, όπως επισημαίνουν οι Wild & Pfannkuch (1999), οι γνώσεις που προέρχονται από το πλαίσιο οδηγούν τα αρχικά στάδια μιας στατιστικής διερεύνησης (πρόβλημα, σχέδιο), ενώ είδη στατιστικής γνώσης υπεισέρχονται περισσότερο όταν η σκέψη αποκρυσταλλοποιείται. Οι άτυπες γνώσεις που προέρχονται από την προσωπική εμπειρία των μαθητών φάνηκε να χρησιμοποιούνται για την επαλήθευση των δεδομένων ή τη διατύπωση εικασιών με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα, γεγονός που παρατηρήθηκε και στην έρευνα των Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris (2008) σε μαθητές ίδιας ηλικίας. Αξίζει να σημειώσουμε πως η περιπτωσιακή μελέτη ως μεθοδολογία επιφέρει περιορισμούς στη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων. Όμως, η συγκεκριμένη έρευνα δεν αποσκοπεί στη γενίκευση των ειδών άτυπης γνώσης που παρατηρήθηκαν, αλλά στη σε βάθος μελέτη του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές επιχειρούν να εξάγουν νόημα από μια στατιστική διερεύνηση, διαχειριζόμενοι άτυπες γνώσεις και διαθέσιμα δεδομένα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

English, L. D. (2018). Young children’s statistical literacy in modelling with data and chance. In *Statistics in Early Childhood and Primary Education* (pp. 295-313). Springer, Singapore.

Gil, E., & Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students' informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 87-108.

Langrall, C., Nisbet, S., & Mooney, E. (2006, July). The interplay between students’ statistical knowledge and context knowledge in analyzing data. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil. Voorburg: The Netherlands: International Statistical Institute*.

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., &Paparistodemou, E. (Eds.). (2018). *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking*. Springer.

Fielding-Wells, J. (2018). Scaffolding statistical inquiries for young children. In *Statistics in early childhood and primary education* (pp. 109-127). Springer, Singapore.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*, 95-137.

Paparistodemou, E., &Meletiou-Mavrotheris, M. (2008). Developing young students’ informal inference skills in data analysis. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 83-106.

Pratt, D., &Ainley, J., (2008). Introducing the special issue on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 3-4.

Pratt, D., Batanero, C., Biehler, R., Eichler, A., Meletiou-Mavrotheris, M., &Paparistodemou, E. (2011). CERME7 Working Group 5: Stochastic thinking. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 193-194.

Rubin, A., Bruce, B., & Tenney, Y. (1990). Learning about sampling: Trouble at the core of statistic: In Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics (pp. 314–319). Dunedin, New Zealand.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, *67*(3), 223-248.

Wroughton, J. R., McGowan, H. M., Weiss, L. V., & Cope, T. M. (2013). Exploring the role of context in students' understanding of sampling. *Statistics Education Research Journal*, *12*(2).

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. Statistics Education Research Journal, 7(2), 40-58.

ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΕΝΟΡΧΗΣΤΡΩΣΗ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Τριανταφυλλάκος Ανδρέας[1], Κούρτη Στυλιανή-Κυριακή[1], Σαπλαμίδου Σταυρούλα[2]

[1]ΕΚΠΑ, [2]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

triandreas@windowslive.com, stellakour@gmail.com, stavsap@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης κατά τη διάρκεια της πανδημίας COVID-19 και εντοπίζει τα ψηφιακά εργαλεία και τον τρόπο που αξιοποιήθηκαν από εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την εξ αποστάσεως διδασκαλία Μαθηματικών. Μέσω περιπτωσιακής μελέτης διερευνήθηκαν και αναλύθηκαν, με μεθόδους Θεμελιωμένης Θεωρίας, οι συνεντεύξεις τριών εκπαιδευτικών στις οποίες συζητήθηκαν σενάρια διδασκαλίας σχεδιασμένα από τους ίδιους. Τα αποτελέσματα σκιαγραφούν τη χρήση ποικίλων τεχνολογικών εργαλείων και την ανάπτυξη διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων, υπό το πρίσμα των πεποιθήσεών τους σχετικά με την εξ αποστάσεως εκπαίδευση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Παρόλο που η εξ αποστάσεως διδασκαλία δεν αποτελεί νέα συνθήκη στην εκπαίδευση (Radmer & Goodchild, 2021), η εξάπλωση της πανδημίας COVID-19 παγκοσμίως και ξαφνική διακοπή της δια ζώσης διδασκαλίας σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες αποτέλεσε για τους εκπαιδευτικούς μια μετασχηματιστική πρόκληση (Lazarova, Miteva & Zenku, 2020). Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης, οδήγησαν τους ερευνητές να εντοπίσουν τις πρώτες εμπειρίες μαθητών και εκπαιδευτικών σε αυτή την περίοδο αλλαγής. Αναπτυσσόμενος όγκος έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση, διερευνά ζητήματα όπως οι προκλήσεις που αντιμετώπισαν οι εκπαιδευτικοί και η ετοιμότητά τους να ανταποκριθούν στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση, η αλληλεπίδραση μαθητή-εκπαιδευτικού, η εμπλοκή των μαθητών και η πρόσβασή τους στα τεχνολογικά εργαλεία (Drijvers κ.ά., 2021). Στο πλαίσιο αυτό δόθηκε έμφαση και στον προσδιορισμό νέων διδακτικών πρακτικών και τρόπων υποστήριξης της μαθηματικής εκπαίδευσης (NCTM, 2020).

Στην παρούσα εργασία μελετάμε τις αναδυόμενες πρακτικές των εκπαιδευτικών σε σχέση με διαθέσιμα ψηφιακά εργαλεία, κατά την εξ αποστάσεως εκπαίδευση. Ο Drijvers και οι συνεργάτες του (2021) εντόπισαν τέσσερις οπτικές που σε αλληλεπίδραση βοηθούν την περιγραφή της προετοιμασίας και διεξαγωγής διδακτικών πρακτικών εξ αποστάσεως. Η εργαλειακή ενορχήστρωση αναφέρεται στο πώς ο εκπαιδευτικός οργανώνει τις διδακτικές του πρακτικές. Εντός αυτής εντοπίζονται τρία στοιχεία: α) η διδακτική διαμόρφωση (κατανομή των τεχνουργημάτων στο περιβάλλον, η διαμόρφωση του διδακτικού περιβάλλοντος και των τεχνουργημάτων που θα εμπεριέχει), β) η διδακτική διαχείριση (ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός επιλέγει να εκμεταλλευτεί τη διδακτική διαμόρφωση προς όφελος των διδακτικών στόχων) και γ) η διδακτική απόδοση (επί τούτου αποφάσεις κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας που αναφέρονται στο πώς κάποιος πρέπει να δράσει εντός του συγκεκριμένου περιβάλλοντος).

Οι διδακτικές ενορχηστρώσεις των εκπαιδευτικών συνδέονται άμεσα με τις πεποιθήσεις τους, δηλαδή με ψυχολογικά εμπεδωμένες κατανοήσεις, υποθέσεις και προτάσεις που εκλαμβάνονται ως αληθείς από εκείνους. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την εξ αποστάσεως εκπαίδευση, οι οποίες συνδέονται με άλλα είδη πεποιθήσεων που διαθέτουν (Bütün & Karakuş, 2021). Οι πεποιθήσεις οργανώνονται σε συστήματα διαφορετικής ισχύος· οι ισχυρές πεποιθήσεις έχουν σχηματιστεί σε βάθος μιας μακράς περιόδου και εδράζονται σε προσωπικές εμπειρίες, είναι, επομένως, δύσκολο να αλλάξουν (Drijvers κ.ά., 2021).

Η τρίτη οπτική αναφέρεται στις διδακτικές προσεγγίσεις. Ως διδακτική προσέγγιση ορίζεται η δυναμική συσχέτιση ανάμεσα στις δράσεις, τις προθέσεις και τις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού. Αυτό συνεπάγεται πως η διδακτική προσέγγιση περιλαμβάνει τις πραγματικές δράσεις του εκπαιδευτικού στην τάξη, οι οποίες βασίζονται στις προθέσεις και τις πεποιθήσεις του (Briede, 2016). Οι Mesa κ.ά. (2011) τοποθέτησαν τις διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών σε έξι κατηγορίες. Οι εκπαιδευτικοί που ακολουθούν μια παραδοσιακή αποστασιοποιημένη προσέγγιση δίνουν έμφαση στην κάλυψη της ύλης που έχει οργανωθεί ώστε να αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τις ανάγκες των μαθητών ή τα μαθησιακά στυλ κατά την οργάνωση της διδασκαλίας. Εκείνοι που υιοθετούν μια παραδοσιακή προσαρμοστική προσέγγιση, δίνουν επίσης έμφαση στο περιεχόμενο διδασκαλίας, αλλά λαμβάνουν υπόψη και τις ανάγκες των μαθητών, προσαρμόζοντας τις στρατηγικές τους αν χρειάζεται. Υπάρχουν εκπαιδευτικοί που ακολουθούν την προσέγγιση της κατασκευής νοήματος με αποσαφήνιση, καθιστώντας σαφή στους μαθητές τα προσδοκώμενα αποτελέσματα χωρίς να αναπροσαρμόζουν τη δομή της διδασκαλίας ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών. Δρουν, δηλαδή, ως διευκολυντές της μάθησης. Όσοι ακολουθούν την προσέγγιση της κατασκευής νοήματος με σύνδεση, δρουν επίσης ως διευκολυντές της μάθησης, αναπτύσσοντας ταυτόχρονα τις διαμαθητικές σχέσεις αλλά και τις σχέσεις μαθητών-εκπαιδευτικού. Τέλος, ορισμένοι εκπαιδευτικοί καθιστούν σαφή τα προσδοκώμενα αποτελέσματα, δίνοντας έμφαση στην ενίσχυση της αυτοπεποίθησης των μαθητών. Οδηγούν τους μαθητές σε διαθέσιμα εργαλεία χωρίς να έχουν προδιαγεγραμμένες δομές διδασκαλίας που ανταποκρίνονται στις ανάγκες τους, ακολουθώντας την προσέγγιση της στήριξης των μαθητών με αποσαφήνιση. Όσοι ακολουθούν την προσέγγιση της στήριξης των μαθητών με σύνδεση δίνουν επίσης έμφαση στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης, λαμβάνουν, όμως, υπόψη τις σχέσεις των μαθητών μεταξύ τους και των μαθητών με τον εκπαιδευτικό.

Η τέταρτη οπτική αφορά τον παράγοντα της αξιολόγησης, όμως, για λόγους οικονομίας χώρου, δε θα αναλυθεί στην παρούσα εργασία. Βάσει της προβληματικής που τέθηκε, επιχειρούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία που συνθέτουν την εργαλειακή ενορχήστρωση, τη διδακτική προσέγγιση και τις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού κατά τη διενέργεια της εξ αποστάσεως διδασκαλίας, καθώς και το πώς αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης τριών εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο πρώτος εκπαιδευτικός (Εκπ1) διδάσκει στο Λύκειο και στο Γυμνάσιο και είναι η πρώτη του χρονιά στη δημόσια εκπαίδευση, ενώ στο παρελθόν εργαζόταν σε ΜΚΟ και δίδασκε εθελοντικά σε αυτοδιαχειριζόμενους χώρους. Η δεύτερη εκπαιδευτικός (Εκπ2) διδάσκει στο Γυμνάσιο κι έχει πολυετή εμπειρία στην ιδιωτική και στη δημόσια εκπαίδευση, τόσο σε Γυμνάσια όσο και σε Γενικά και Επαγγελματικά Λύκεια. Ο τρίτος εκπαιδευτικός (Εκπ3) διδάσκει και αυτός σε Γυμνάσιο κι έχει πολυετή εμπειρία στην ιδιωτική και στη δημόσια εκπαίδευση. Έχει παρακολουθήσει πολλές επιμορφώσεις και, πλέον, είναι και ο ίδιος επιμορφωτής. Και οι τρεις εκπαιδευτικοί έχουν μεταπτυχιακό στη «Διδακτική των Μαθηματικών». Επιπλέον, ο Εκπ1 είναι κάτοχος διδακτορικού τίτλου στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Οι τρεις εκπαιδευτικοί επιλέχθηκαν ως το δείγμα της παρούσας έρευνας, επειδή θεωρήθηκε ότι το ενδιαφέρον τους για τη διδακτική των μαθηματικών, καθώς και η επαγγελματική τους εμπειρία, θα ευνοούσαν την υιοθέτηση ποικίλων πρακτικών κατά τη διδακτική πράξη και αυτό, με τη σειρά του, την παραγωγή πλούσιων δεδομένων.

Παραγωγή και Ανάλυση Δεδομένων

Ζητήθηκε από κάθε εκπαιδευτικό να σχεδιάσει ένα σενάριο διδασκαλίας για σύγχρονη εξ αποστάσεως εκπαίδευση. Αφού μελετήθηκαν τα σενάρια από τους ερευνητές, πραγματοποιήθηκε μία συνέντευξη για κάθε εκπαιδευτικό παρουσία και των τριών ερευνητών. Η συνέντευξη ήταν ημιδομημένη με βάση τρεις άξονες: το προφίλ του/της εκπαιδευτικού, τις εμπειρίες που απέκτησε από την εξ αποστάσεως εκπαίδευση και το σενάριο διδασκαλίας που σχεδίασε στα πλαίσια της έρευνας. Στη συνέχεια, έγινε απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων. Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τα σενάρια που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί, καθώς και οι απομαγνητοφωνήσεις των συνεντεύξεων. Τα δύο είδη δεδομένων λειτούργησαν συμπληρωματικά, σε μια προσπάθεια τριγωνοποίησης.

Σε κάθε στάδιο ανάλυσης, ο κάθε ερευνητής ανέλυε τα δεδομένα των εκπαιδευτικών ξεχωριστά και, στη συνέχεια, συζητούνταν και διαμορφώνονταν τα αποτελέσματα. Για την ανάλυση των δεδομένων ακολουθήθηκε η προσέγγιση *από πάνω προς τα κάτω*, με βάση τους άξονες των Drijvers κ.ά. (2021) για την εργαλειακή ενορχήστρωση και τις πεποιθήσεις και των Mesa κ.ά. (2011) για τις διδακτικές προσεγγίσεις. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανοιχτής κωδικοποίησης, δημιουργήθηκαν υποκατηγορίες για τους τρεις άξονες, με στόχο την ακριβέστερη περιγραφή των δεδομένων της έρευνας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η εργαλειακή ενορχήστρωση (Διδακτική Διαμόρφωση και Διαχείριση) των εκπαιδευτικών.

Διδακτική Διαμόρφωση	Διδακτική Διαχείριση
Πλατφόρμα σύγχρονης εξ αποστάσεως διδασκαλίας (webex)	Διαμοιρασμός οθόνης για εισήγηση ή επεξήγηση σε σχέση με μια έννοια, με δυνατότητα συμμετοχής των μαθητών και επικοινωνία με μαθητές (*Εκπ1, Εκπ2, Εκπ3*). Χωρισμός των μαθητών σε ομάδες (working sessions) εργασίας, είσοδος στο δωμάτιο κάθε ομάδας και υποστήριξη (*Εκπ1*).
Εικονικός πίνακας (Openboard, Ziteboard)	Επιλογή και χρήση ψηφιακών γεωμετρικών οργάνων (*Εκπ2*) ή πραγματοποίηση αλλαγών σε πραγματικό χρόνο από την τάξη (Εκπ 1).
3. Ψηφιακό αποθετήριο (Φωτόδεντρο)	Χρήση διαθέσιμων μικροπειραμάτων από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία (*Εκπ2, Εκπ3*).
Ψηφιακή πλατφόρμα (geogebra classroom)	Δυνατότητα ταυτόχρονης διάδρασης μαθητών και εκπαιδευτικού (*Εκπ3*).
Ψηφιακό λογισμικό (geogebra)	Χρήση από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία (*Εκπ1, Εκπ2, Εκπ3*) και χρήση από τους μαθητές σε δεύτερο χρόνο (*Εκπ1*).

Διαδραστικά φύλλα εργασίας (liveworksheets, Quizizz)	Ανάθεση προς τους μαθητές κατά την διδασκαλία και σε δεύτερο χρόνο (*Εκπ3*).
Πλατφόρμα ασύγχρονης εξ αποστάσεως εκπαίδευσης (eclass)	Ανάθεση εργασιών/ασκήσεων προς τους μαθητές, αποστολή εργασιών/ασκήσεων προς τον εκπαιδευτικό, ανακοινώσεις, αποστολή γραπτών διαγωνισμάτων προς τον εκπαιδευτικό (*Εκπ1, Εκπ2, Εκπ3*), τεστ κλειστού τύπου αυτοαξιολόγησης μαθητών, ανάρτηση του ημερήσιου μαθήματος όπως διαμορφωνόταν στον εικονικό πίνακα (*Εκπ2*).
Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο	Επικοινωνία με μαθητές (*Εκπ1*).
Αποθετήριο ασκήσεων	Ιστολόγιο συγκέντρωσης υλικού διδασκαλίας (*Εκπ3*).

Πίνακας 1: Εργαλειακή Ενορχήστρωση

Όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 1, τα τεχνολογικά τεχνουργήματα που χρησιμοποιήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς αφορούν σε εργαλεία σύγχρονης (1-4) και ασύγχρονης (8-10) εξ αποστάσεως εκπαίδευσης, ενώ ορισμένα εργαλεία χρησιμοποιούνταν και για τις δύο μορφές (5-7).

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, όπως αυτές αναδύθηκαν από τα δεδομένα των συνεντεύξεων.

Δυνατότητες και Περιορισμοί
Προτίμηση της δια ζώσης διδασκαλίας εξαιτίας του παράγοντα της ζωντανής, ανθρώπινης επικοινωνίας (*Εκπ1, Εκπ2*). Απουσία βιωματικότητας στην τηλεκπαίδευση (*Εκπ3*). Απουσία άμεσης επικοινωνίας και συνέπειες αυτής στη διδακτική πράξη (*Εκπ3*). Μη εξυπηρέτηση εκπαιδευτικού χαρακτήρα του σχολείου μέσω της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης (π.χ. κοινωνικοποίηση μαθητών, κ.α.) (*Εκπ2*). Δυσκολία διενέργειας διαθεματικών projects και συνεργασίας με εκπαιδευτικούς άλλων ειδικοτήτων (*Εκπ1*). Μη ισότιμη πρόσβαση όλων των μαθητών σε τεχνολογικά εργαλεία (*Εκπ1*). Πολύ μεγαλύτερος φόρτος εργασίας του εκπαιδευτικού κατά την εξ αποστάσεως διδασκαλία (*Εκπ2, Εκπ3*).

Δυσχέρεια σύγχρονης εξ αποστάσεως διδασκαλίας λόγω τεχνικών προβλημάτων (*Εκπ2, Εκπ3*). Λιγότερος ουσιαστικός χρόνος διδασκαλίας και περισσότερα προβλήματα στη σύγχρονη εξ αποστάσεως διδασκαλία (*Εκπ2*). Περισσότερος χρόνος για την εφαρμογή του κάθε σχεδιασμού διδασκαλίας στην εξ αποστάσεως διδασκαλία (*Εκπ3*). Δυσκολία αντικατάστασης απτών γεωμετρικών οργάνων, με τα οποία πρέπει να εξοικειωθούν οι μαθητές, από ψηφιακά εργαλεία (*Εκπ3*). Χρησιμοποίηση εκπαιδευτικού υλικού που δημιουργήθηκε για την εξ αποστάσεως στη δια ζώσης με αλλαγές (*Εκπ2*). Εφαρμογή της σύγχρονης εξ αποστάσεως για εργασία των μαθητών στο σπίτι, συζητήσεις ή ενημερώσεις γονέων, συμπληρωματικά της δια ζώσης (*Εκπ1*). Χρήση εργαλείων τηλεκπαίδευσης (e-class, e-me, κ.ά.) ενισχυτικά της δια ζώσης διδασκαλίας (*Εκπ3*). Ωφέλιμος ο σχηματισμός κοινοτήτων εκπαιδευτικών που προέκυψε κατά την εξ αποστάσεως, εντός και εκτός σχολείου (*Εκπ3*). Ωφέλιμη η «αναγκαστική» δοκιμή πολλών καινούριων εργαλείων σε σύντομο χρόνο (*Εκπ2, Εκπ3*).
Μαθητές
Εικονική παρουσία μεγάλου ποσοστού μαθητών στο διαδικτυακό μάθημα (*Εκπ2, Εκπ3*). Μονόδρομη επικοινωνία εκπαιδευτικού προς τους μαθητές (Εκπ1). Μεγαλύτερη σωματική (*Εκπ2*) και ψυχολογική (*Εκπ3*) κόπωση των μαθητών κατά την εξ αποστάσεως. Αδρανοποίηση πολλών μαθητών κατά την εξ αποστάσεως (*Εκπ2, Εκπ3*). Αύξηση συμμετοχής αρκετών μαθητών στην εξ αποστάσεως διδασκαλία, που δε συμμετείχαν αρκετά στη δια ζώσης (*Εκπ1*).
Παρουσία/Παρέμβαση Τρίτων
Περιορισμός του εκπαιδευτικού, καθώς παραλήπτες των λεγομένων του δεν είναι μόνο τα παιδιά, αλλά και οι γονείς τους (*Εκπ1*). Απουσία εγκυρότητας στη διαδικασία αξιολόγησης των μαθητών λόγω παροχής βοήθειας από τρίτους (γονείς, άλλους καθηγητές, κ.α.) κατά τη διαδικτυακή εξέταση (*Εκπ2, Εκπ3*).

Πίνακας 2: Πεποιθήσεις εκπαιδευτικών

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών αφορούσαν κυρίως τις δυνατότητες και τους περιορισμούς της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης, την εικόνα των εκπαιδευτικών για τη συμμετοχή των μαθητών στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση και την παρουσία/παρέμβαση τρίτων σε αυτήν.

Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των Mesa κ.ά (2011) για τις διδακτικές προσεγγίσεις, ο Εκπ1 φαίνεται να υιοθετεί την προσέγγιση της στήριξης των μαθητών με σύνδεση. Αυτό γιατί διαθέτει τα εργαλεία εξ αποστάσεως εκπαίδευσης στους μαθητές, ζητώντας τους να πραγματοποιήσουν διερευνήσεις ομαδοσυνεργατικά, χωρίς προδιαγεγραμμένη πορεία. Η Εκπ2 φαίνεται να υιοθετεί την παραδοσιακή προσαρμοστική προσέγγιση. Αυτό γιατί χρησιμοποιεί κατά τη διδασκαλία της τα εργαλεία εξ αποστάσεως εκπαίδευσης κυρίως η ίδια, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση σε επεξηγήσεις σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο, προσαρμόζοντας τις στρατηγικές της στις ανάγκες των μαθητών, όπου ήταν απαραίτητο. Ο Εκπ3 υιοθετεί κυρίως την προσέγγιση της κατασκευής νοήματος με αποσαφήνιση, καθώς σχεδίαζε διδασκαλίες με στόχο την εννοιολογική κατανόηση, χωρίς να προκρίνει τη συνεργασία των μαθητών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, βάσει της θεωρητικής οπτικής των Drijvers κ.ά. (2021), αναζητήσαμε το πώς οι εκπαιδευτικοί ενορχηστρώνουν διδακτικά την εξ αποστάσεως εκπαίδευση, ποιες είναι οι πεποιθήσεις τους γι’ αυτήν και ποια είναι η διδακτική τους προσέγγιση.

Αρχικά θα αναφερθούν οι πεποιθήσεις που ανιχνεύτηκαν, προκειμένου να συσχετιστούν, έπειτα, με την εργαλειακή ενορχήστρωση που υιοθέτησαν οι εκπαιδευτικοί. Στα αποτελέσματα της έρευνας εντοπίστηκαν πεποιθήσεις που συνδέονται με τους περιορισμούς, αλλά και τις δυνατότητες της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης. Σχετικά με τους περιορισμούς, οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι η εξ αποστάσεως εκπαίδευση υστερεί σε σχέση με τη δια ζώσης ως προς τη γνωστική αλλά και την κοινωνική ανάπτυξη των μαθητών. Βασική αιτία αυτού φαίνεται να είναι η έλλειψη άμεσης επικοινωνίας των εμπλεκομένων στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι δεν υπάρχει ισότιμη πρόσβαση στην εκπαίδευση για όλους τους μαθητές, λόγω έλλειψης τεχνολογικού εξοπλισμού ή/και εξαιτίας τεχνικών προβλημάτων, γεγονός που αναδείχθηκε και σε συναφείς έρευνες (Lazarova κ.ά., 2020). Τέλος, θεωρούν ότι ο χρόνος που απαιτείται για την εξ αποστάσεως εκπαίδευση είναι περισσότερος, τόσο για την προετοιμασία του μαθήματος από τον εκπαιδευτικό, όσο και για την ίδια την εκπαιδευτική διαδικασία (Rodríguez-Muñiz κ.ά.,2021). Ως προς τα οφέλη της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας έρχονται σε συμφωνία με τους Rodríguez-Muñiz κ.ά. (2021), καθώς και οι εν λόγω εκπαιδευτικοί, λόγω της απότομης εισαγωγής τους στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση, θεώρησαν πως επεκτάθηκε η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου που διέθεταν σχετικά με τα τεχνολογικά εργαλεία. Μάλιστα, φαίνεται να πιστεύουν ότι η χρήση συγκεκριμένων ψηφιακών εργαλείων εξ αποστάσεως εκπαίδευσης μπορεί να εμπλουτίσει συμπληρωματικά και μια δια ζώσης διδασκαλία.

Αναφορικά με τη συμμετοχή των μαθητών στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση, οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας φαίνεται να εντοπίζουν διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με τη συχνά δυσχερή επικοινωνία μαθητών-εκπαιδευτικού, τη σωματική και ψυχολογική κούραση των μαθητών καθώς και τη μη εμπλοκή τους στη μαθησιακή διαδικασία, σε συμφωνία με συναφείς έρευνες από διάφορες ευρωπαϊκές χώρες (Drijvers κ.ά., 2021). Ενδιαφέρον εύρημα της έρευνάς μας αποτελεί η διαπίστωση της αύξησης της συμμετοχής ορισμένων μαθητών που δεν συμμετείχαν αρκετά στη δια ζώσης διδασκαλία. Προτείνεται η περαιτέρω μελέτη αυτού του φαινομένου, ώστε να εντοπιστούν οι παράγοντες που οδηγούν σε μια τέτοια διαφοροποίηση. Η παρουσία τρίτων φαίνεται να δρα περιοριστικά στην ελευθερία έκφρασης των εκπαιδευτικών κατά τη σύγχρονη διδασκαλία, και να επηρεάζει την απόδοση και αξιολόγηση των μαθητών. Η αξιολόγηση των μαθητών ενδέχεται να μην είναι αντικειμενική, διότι μπορεί να λαμβάνουν βοήθεια από τρίτους (Lazarova κ.ά., 2020).

Σχετικά με την εργαλειακή ενορχήστρωση, οι ψηφιακοί πόροι αποτέλεσαν βασική ανάγκη κατά την εξ αποστάσεως μάθηση και διδασκαλία (Lazarova κ.ά., 2020). Έτσι και οι εν λόγω εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν ποικιλία τεχνολογικών εργαλείων, με τρόπους που φαίνεται να συνδέονται με τις πεποιθήσεις τους σχετικά με την εξ αποστάσεως διδασκαλία. Ο Εκπ1 χρησιμοποιεί κυρίως τα εργαλεία με τρόπο που του επιτρέπουν την ομαδασυνεργασία μεταξύ των μαθητών. Αυτό ενδεχομένως να συνδέεται με τις πεποιθήσεις του σχετικά με τη σπουδαιότητα της διαπροσωπικής επικοινωνίας των μαθητών. Η Εκπ2 χρησιμοποιεί τα τεχνολογικά εργαλεία με τρόπο τέτοιο ώστε να επωφελείται των δυνατοτήτων τους με σκοπό την επεξήγηση των γνωστικών αντικειμένων. Αυτό πιθανόν να συνδέεται με τη διδακτική της προσέγγιση, η οποία δίνει έμφαση στο μαθησιακό περιεχόμενο. Ο Εκπ3 χρησιμοποιεί εργαλεία που του επιτρέπουν να διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών, εναλλάσσοντάς τα. Αυτό ενδεχομένως να σχετίζεται με τις πεποιθήσεις του σχετικά με τη μειωμένη συμμετοχή των μαθητών στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση. Επιπλέον, οι διαφορετικές διδακτικές ενορχηστρώσεις των εν λόγω εκπαιδευτικών πιθανόν να εμφανίστηκαν διότι εισήλθαν στην πλειοψηφία τους απροετοίμαστοι, χωρίς να έχουν στήριξη από τα εκπαιδευτικά ιδρύματα στα οποία ανήκουν (Lazarova κ.ά., 2020) επομένως δε διέθεταν κάποιες κοινές κατευθύνσεις.

Αναφορικά με τις διδακτικές προσεγγίσεις, αυτές φαίνεται να διαφοροποιούνται μεταξύ των εκπαιδευτικών της παρούσας έρευνας, γεγονός που συνδέεται άμεσα με τις πεποιθήσεις τους (Drijvers κ.ά., 2021). Ο Εκπ1 υιοθετεί την προσέγγιση της στήριξης των μαθητών με σύνδεση, καθώς θεωρεί σημαντική την επικοινωνία των μαθητών και την ανάπτυξη σχέσεων μεταξύ τους σε περίοδο που δεν μπορούν να έχουν δια ζώσης επικοινωνία. Η Εκπ2 υιοθετεί την παραδοσιακή προσαρμοστική προσέγγιση, καθώς ο περιορισμένος διαθέσιμος χρόνος για την εξ αποστάσεως διδασκαλία φαίνεται να την ωθεί να εστιάζει στη διδασκαλία του μαθηματικού περιεχομένου. Ο Εκπ3 υιοθετεί την προσέγγιση της κατασκευής νοήματος με αποσαφήνιση, καθώς με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και μέσων προσπαθεί να διευκολύνει την εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Η διαφοροποίηση αυτή παρατηρήθηκε και από τους Drijvers κ.ά. (2021) καθώς σε πολλές χώρες το κλείσιμο των σχολείων άφησε τους εκπαιδευτικούς με την πρόκληση της ανάπτυξης διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων. Χρήσιμη κρίνεται η περαιτέρω εμβάθυνση στις αιτίες που οδηγούν σε αυτή τη διαφοροποίηση (π.χ. εκπαιδευτική πολιτική ανά χώρα), πέρα όσων παρουσιάστηκαν ανωτέρω.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Briede, L. (2016). The Relationship between Mathematics Teachers' Teaching Approaches and 9th Grade Students' Mathematics Self. *Journal of Teacher Education for Sustainability*, *18*(1), 34-47.

Bütün, M., & Karakuş, F. (2021). Mathematics teachers’ views on distance education and their beliefs about integrating computer technology in mathematics courses. *Journal of Pedagogical Research*, *5*(2), 88-102.

Drijvers, P., Thurm, D., Vandervieren, E., Klinger, M., Moons, F., van der Ree, H., ... & Doorman, M. (2021). Distance mathematics teaching in Flanders, Germany, and the Netherlands during COVID-19 lockdown. *Educational Studies in Mathematics*, 1-30

Lazarova, L. K., Miteva, M., & Zenku, T. (2020). Teaching and Learning Mathematics during COVID period. *American Psychologist Association*.

Mesa, V., Celis, S., Suh, H., Lande, E., & Whittemore, T. (2011, May). Community college mathematics: Teaching, textbooks, and student understanding. In *Panel presentation at the Community College Interdisciplinary Research Forum’s Conference, Research and Innovation for 21st Century Students, University of Michigan Ann Arbor, MI*.

National Council of Supervisors of Mathematics & National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2020). Moving forward: Mathematics learning in the era of COVID-19. NCTM.

Radmer, F., & Goodchild, S. (2021). Online mathematics teaching and learning during the COVID-19 pandemic: The perspective of lecturers and students. *Nordic Journal of STEM Education*, *5*(1).

Rodríguez-Muñiz, L. J., Burón, D., Aguilar-González, Á., & Muñiz-Rodríguez, L. (2021). Secondary Mathematics Teachers' Perception of Their Readiness for Emergency Remote Teaching during the COVID-19 Pandemic: A Case Study. *Education Sciences*, *11*(5), 228.

ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΑ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΕΝΟΣ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΩΣ ΑΠΟΤΥΠΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΤΟΥ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Διαμαντίδης Δημήτρης, Σχίζα Κάτια, Κυνηγός Χρόνης

ΕΚΠΑ, ΦΣ, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

dimitrd@eds.uoa.gr, katia_schiza@hotmail.com, kynigos@eds.uoa.gr

Η χρήση των ψηφιακών εργαλείων για τη διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών έχει διαφορετικές πλευρές· αυτή της αξιοποίησης στην τάξη έτοιμων ψηφιακών πόρων, της υιοθέτησης με μικρές παραλλαγές ή της διασκευής τους, αλλά και της εξ αρχής κατασκευής νέων πόρων, από τον και την εκπαιδευτικό [1] με στόχο να τους προσαρμόσουν στη διδακτική τους ατζέντα. Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να εστιάσουμε σε μια περίπτωση εκπαιδευτικού που αξιοποιεί τον ίδιο ψηφιακό πόρο (μικρό-πείραμα) σε διαφορετικές περιόδους της επαγγελματικής του πορείας και να εντοπίσουμε στοιχεία ενδεικτικά της επαγγελματικής ανάπτυξής του.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών σύμφωνα με τη βιβλιογραφία συμβαίνει μέσα από πολύπλοκες και συμμετοχικές διαδικασίες της καθημερινής τους πρακτικής, π.χ. σχεδιάζοντας διδακτικές παρεμβάσεις και συζητώντας για αυτές με ομότεχνούς τους (Polin, 2010). Κοιτώντας τα ειδικά χαρακτηριστικά κάθε περίπτωσης που μελετάμε και αξιοποιώντας σχετικά και εξειδικευμένα θεωρητικά πλαίσια ενδεχομένως μπορούμε να εμπλουτίσουμε τα ερμηνευτικά μας εργαλεία και να εντοπίσουμε στοιχεία, τα οποία να είναι ενδεικτικά της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε στην περίπτωση εκπαιδευτικού που σχεδιάζει διδακτικές παρεμβάσεις με ψηφιακά εργαλεία και συγκεκριμένα μικρό-πειράματα, τα οποία είναι -από σχεδιαστική άποψη- ανοικτά για τον εκπαιδευτικό (αλλά και το μαθητή) σε παρεμβάσεις.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τα μικρό-πειράματα (ΜΠ) είναι ψηφιακοί πόροι για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, μέρος των επίσημων διδακτικών πακέτων του ΥΠΑΙΘ συνεπώς έχουν ως αναφορά το πρόγραμμα σπουδών (ΠΣ). Εμπεριέχουν έργα τα οποία έχουν στόχο να αυξήσουν το βαθμό της μαθηματικής πρόκλησης και τη δυνατότητα διερευνητικής δραστηριότητας, ώστε οι μαθητές για να τα επεξεργαστούν και να τα αντιμετωπίσουν, να θέσουν δικά τους ερωτήματα (Kynigos, 2020), να χρησιμοποιήσουν Μαθηματικά και να δημιουργήσουν νοήματα, είτε νέα για αυτούς, είτε με τρόπο που δεν τα έχουν ξαναχρησιμοποιήσει (Noss & Hoyles, 1996).

Τα ΜΠ από το σχεδιασμό τους είναι ανοικτά σε ενδεχόμενες τροποποιήσεις από έναν εκπαιδευτικό που θεωρεί χρήσιμο να το κάνει, ώστε να τα χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία του. Σε προηγούμενες έρευνες έχουμε διαπιστώσει ότι τα ΜΠ ενδέχεται να αποτελέσουν εφαλτήριο επαγγελματικής ανάπτυξης για τον εκπαιδευτικό, δίνοντάς του την ευκαιρία να αναστοχαστεί πάνω στις διδακτικές πρακτικές του (Διαμαντίδης, Κυνηγός, 2018). Κυρίως έχει φανεί ότι η ανάλυση από εμάς με ερευνητική ματιά της διαδικασίας τροποποίησης και προσαρμογής ΜΠ από εκπαιδευτικούς μπορεί να προσφέρει στοιχεία ώστε να κατανοήσουμε βαθύτερα τις πτυχές της επαγγελματικής τους γνώσης. Οι παραπάνω έρευνες εστίαζαν σε περιπτώσεις εκπαιδευτικών που τροποποίησαν ή σχεδίασαν ΜΠ για να τα χρησιμοποιήσουν. Τα συμπεράσματα προέρχονταν από την ανάλυση κρίσιμων περιστατικών α) συζητήσεων μεταξύ εκπαιδευτικών με διαφορετικές προσεγγίσεις για το σχεδιασμό και την αξιοποίηση ΜΠ και β) από διδασκαλίες των εκπαιδευτικών με τη χρήση ΜΠ όπου φαίνεται πώς χρησιμοποίησαν οι μαθητές τα τροποποιημένα ΜΠ και τι μαθηματική συζήτηση, πολλές φορές απρόσμενη για τον εκπαιδευτικό προκλήθηκε. Έτσι, κατά κάποιο τρόπο οι ενδεχόμενες δυσκολίες ή απρόσμενες καταστάσεις, οι χειρισμοί που προκλήθηκαν και οι αποφάσεις που λήφθηκαν ήταν ευκαιρίες για παραγωγή δεδομένων και ανάλυση. Άλλωστε, σύμφωνα με τον Fischer (2004), τα εμπόδια που προκύπτουν κατά το σχεδιασμό ενός τεχνουργήματος [2] είναι αφορμή και ευκαιρία για μάθηση για όσους συμμετέχουν. Έτσι, με αυτή την προσέγγιση φωτίσαμε τα κρίσιμα περιστατικά στο επίκεντρο των οποίων ήταν τέτοιου είδους εμπόδια. Στην παρούσα έρευνα επιχειρούμε να φωτίσουμε κρίσιμα περιστατικά χρήσης ΜΠ που είναι ενδεικτικά άλλου είδους εμποδίων από αυτά που αναλύθηκαν σε προηγούμενες έρευνες, τα οποία όμως μπορεί να προκύψουν κατά το σχεδιασμό και την αξιοποίηση τεχνουργημάτων. Πρόκειται για τα χρονικά εμπόδια, μια ιδέα του Fischer (2004) την οποία χρησιμοποίησε για τη μελέτη της Δημιουργικότητα ομάδων ειδικών που σχεδίαζαν ψηφιακά συστήματα, επαναφέροντάς την από τα 90s, όπου είχε αξιοποιηθεί όπου είχε πρωτοδιατυπωθεί (Fischer et al., 1992), αλλά δεν έχει χρησιμοποιηθεί για την μελέτη επαγγελματικής ανάπτυξης, γενικότερα. Χρονικά εμπόδια κατά το σχεδιασμό ή τη χρήση ενός τεχνουργήματος μπορεί να προκύψουν όταν κανείς επιχειρεί να προσαρμόσει ή και μόνο να χρησιμοποιήσει ένα τεχνούργημα που έχει σχεδιαστεί σε άλλη χρονική συγκυρία και εμφανίζονται ως εμφανείς διαφοροποιήσεις στη χρήση του τεχνουργήματος. Κατά τον Fischer, ο οποίος εστιάζει στην περίπτωση τεχνουργημάτων που σχεδιάζονται σε υπολογιστικό περιβάλλον, ακόμα και ο ίδιος άνθρωπος αν προσπαθήσει να προσαρμόσει ή μόνο να χρησιμοποιήσει ξανά κάτι που σχεδίασε και χρησιμοποίησε σε προηγούμενη και διακριτή [3] χρονική συγκυρία, τότε αυτό μπορούμε να το δούμε σαν μια ιδιότυπη «συνεργασία» στην οποία υπεισέρχονται χρονικά εμπόδια και η αντιμετώπιση αυτών των εμποδίων είναι ευκαιρία για μάθηση. Σε αυτό το άρθρο αναφερόμαστε σε μια τέτοια περίπτωση εκπαιδευτικού, επιχειρώντας να εντοπίσουμε τέτοιου είδους εμπόδια και αναλύοντας κρίσιμα περιστατικά με στόχο να κατανοήσουμε βαθύτερα ποια είναι η μάθηση που λαμβάνει χώρα σύμφωνα με τον Fischer (2004) και αν συνδέεται με την επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού.

Στην ερευνητική μας προσέγγιση, με στόχο τη σύνδεση των ευρημάτων με τον τομέα επαγγελματικής ανάπτυξης που εστιάζουμε αξιοποιούμε επίσης το θεωρητικό πλαίσιο του Ruthven (2014) που περιγράφει τα κρίσιμα δομικά στοιχεία για την ενσωμάτωση των ψηφιακών εργαλείων από τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία τους: α) το περιβάλλον εργασίας που αναφέρεται στο χώρο, τα μέσα στην τάξη και την οργάνωσή τους, β) τις πηγές που στην περίπτωσή μας κάποιες από αυτές είναι τα ΜΠ, γ) την εκδοχή του ΠΣ που υλοποιεί ο εκπαιδευτικός κατά τη διδασκαλία του μέσα από τις επιλογές του, δ) τη διαχείριση του χρόνου και ε) τη δομή δραστηριότητας, στην οποία θα εστιάσουμε περισσότερο και που είναι η περιγραφή του πότε και πώς εμπλέκονται οι μαθητές με προτροπή του εκπαιδευτικού, σε τι είδους δραστηριότητα και ποια φαίνεται να είναι η ατζέντα του εκπαιδευτικού πίσω από αυτή την επιλογή του.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Στην έρευνα που παρουσιάζουμε ένας εκπαιδευτικός Γυμνασίου της Αθήνας χρησιμοποιεί ξανά μετά από επτά (7) χρόνια ένα ΜΠ στη διδασκαλία του. Αυτό το ΜΠ είχε σχεδιαστεί από τον ίδιο μετά από τροποποίηση ενός ΜΠ των ΔΣΒ και το είχε χρησιμοποιήσει πρώτη φορά στην τάξη το 2014 σε μια διδασκαλία που είχε παρατηρηθεί και αναλυθεί ερευνητικά (Kynigos, 2017). Θα αναφερόμαστε στο ΜΠ των ΔΣΒ ως «αρχικό» και στο ΜΠ που, με βάση αυτό σχεδίασε ο εκπαιδευτικός ως «διασκευασμένο». Τα επόμενα χρόνια είχε αναρτημένο το διασκευασμένο ΜΠ στην ηλεκτρονική τάξη του και οι μαθητές, κάθε σχολικό έτος, απαντούσαν στα ερωτήματά του όταν τους το ανέθετε. Το 2021 ξαναχρησιμοποίησε το διασκευασμένο ΜΠ στην τάξη για μια διδασκαλία την οποία παρατήρησαν δύο ερευνητές στο πλαίσιο πρακτικής άσκησης φοιτητών μεταπτυχιακού μαθήματος για την αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχοντας το ρόλο του παρατηρητή χωρίς συμμετοχή. Οι ερευνητές είχαν μελετήσει τη διασκευή του ΜΠ που έκανε ο εκπαιδευτικός, καθώς και την ανάλυση κρίσιμων περιστατικών που αντλήθηκαν από την πρώτη διδασκαλία, το 2014 και αναλύθηκαν. Μετά το τέλος της διδασκαλίας οι ερευνητές πήραν ημιδομημένη συνέντευξη από τον εκπαιδευτικό (Robson & McCartan, 2016). Τα δεδομένα που παράχθηκαν ήταν η απομαγνητοφώνηση της συνέντευξης του εκπαιδευτικού, οι σημειώσεις των ερευνητών και του εκπαιδευτικού. Για τις ανάγκες της ανάλυσης της ευρύτερης έρευνας ακολουθήθηκε η μέθοδος της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας (Teppo, 2015), με την υποσημείωση ότι η θεωρητική μας «προκατάληψη», που συνδέεται και με την επιλογή του πλαισίου του Ruthven (2014) είναι ότι η επαγγελματική γνώση των εκπαιδευτικών μπορεί να γίνει ορατή μέσα από τις πρακτικές τους, χωρίς οι ίδιοι να συνειδητοποιούν την ύπαρξή της. Έτσι έχουμε στόχο να την εντοπίσουμε και να απαντήσουμε στο ερώτημα: «Στην περίπτωση μας, εφόσον υπάρχουν ενδείξεις για χρονικά εμπόδια κατά τη χρήση του διασκευασμένου ΜΠ αυτά μπορούν να συνδεθούν με την μελέτη της επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού;»

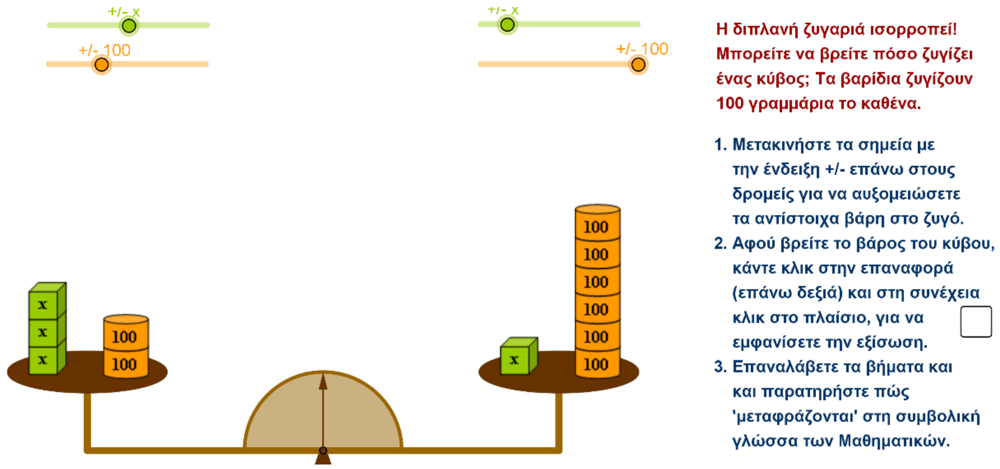
Μεθοδολογικά, η παρούσα έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης (Yin, 2014) η οποία εστιάζει στην διδακτική αξιοποίηση του διασκευασμένου ΜΠ από τον εκπαιδευτικό και στον αναστοχασμό του για την αξιοποίηση αυτή. Εμπεριέχει στοιχεία εθνογραφίας καθώς οι ερευνητές είχαν μελετήσει το αρχικό και το διασκευασμένο ΜΠ (Hammersley & Atkinson, 2010).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα παραγόμενα δεδομένα της έρευνας στα οποία εστιάσαμε. Πριν την παρουσίαση αυτή περιγράφουμε το αρχικό ΜΠ, το διασκευασμένο ΜΠ, καθώς και μια σύντομη περιγραφή του τρόπου που ο εκπαιδευτικός το αξιοποίησε το 2014, δηλαδή την πρώτη φορά.

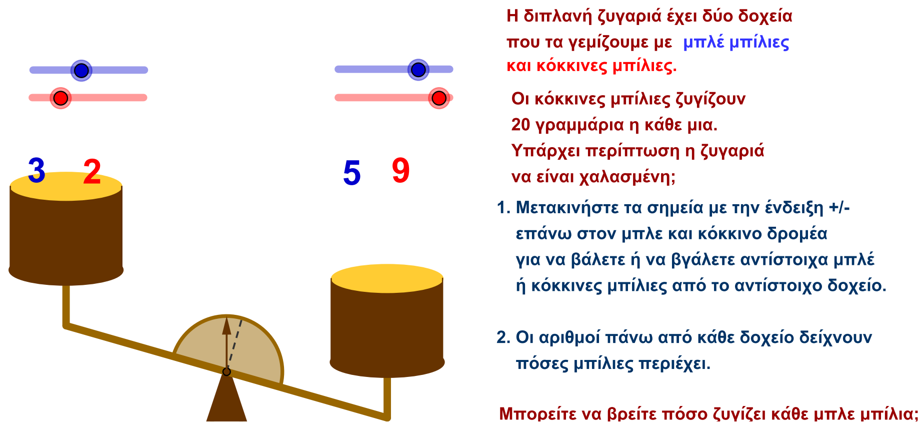
Το αρχικό, το διασκευασμένο ΜΠ και η πρώτη εφαρμογή του

Πρόκειται για το ΜΠ «η ζυγαριά και η έννοια της εξίσωσης» το οποίο βρίσκεται στο ΔΣΒ της β΄ γυμνασίου, στην παράγραφο «Εξισώσεις α΄ βαθμού», ως εισαγωγική δραστηριότητα για την έννοια της εξίσωσης α΄ βαθμού. Είναι μοντέλο εξίσωσης με τη «μεταφορά» της ζυγαριάς (εικόνα 1). Πρόκειται για μια ζυγαριά και βαρίδια με γνωστά και με άγνωστα βάρη αναπαριστώντας γνωστούς και αγνώστους, αντίστοιχα. Η ισορροπία της ζυγαριάς αναπαριστά την ισότητα των δύο μελών μιας εξίσωσης α΄ βαθμού. Στο αρχικό ΜΠ ζητείται από τους μαθητές να προσθέσουν και να αφαιρέσουν βαρίδια στη ζυγαριά, ώστε να βρουν το άγνωστο βάρος (Filloy, Rojano & Puig, 2008). Στη συνέχεια τους ζητείται να επαναλάβουν τα βήματα που έκαναν και να τα «μεταφράσουν» στη συμβολική γλώσσα των Μαθηματικών.



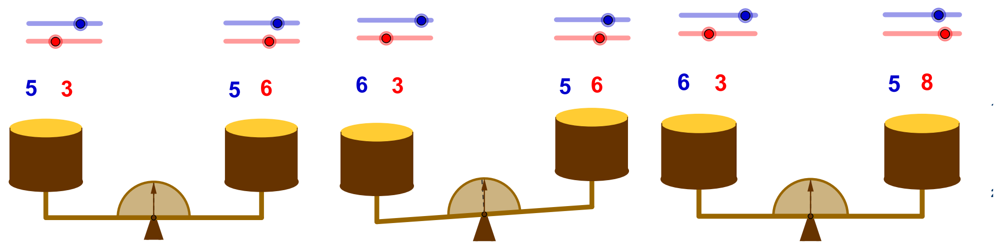
Εικόνα 7: Στιγμιότυπο του αρχικού ΜΠ, όπως ανοίγει διαδικτυακά.

Το 2014 το διασκευασμένο ΜΠ (εικόνα 3) αξιοποιήθηκε στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών, στην β΄ γυμνασίου, εισαγωγικά στην ενότητα της επίλυσης εξισώσεων α΄ βαθμού. Τα κόκκινα βαρίδια έχουν γνωστό βάρος και τα μπλε άγνωστο. Τα βαρίδια (μπίλιες) δεν είναι ορατά αυτή τη φορά, αλλά ο χρήστης μπορεί να αλλάζει το πλήθος τους και έτσι μεταβάλει την ισορροπία. Τίθεται η ίδια πρόκληση (να βρει το άγνωστο βάρος), με ένα επιπλέον ερώτημα: «Υπάρχει περίπτωση η ζυγαριά να είναι χαλασμένη;». Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των δύο μελών και σύντομα έφτασαν σε απαντήσεις. Η ζυγαριά ήταν πράγματι χαλασμένη. Ενδεικτικά, κάποιοι μαθητές το βρήκαν βάζοντας ίδιο αριθμό βαριδιών από κάθε χρώμα στις δύο μεριές της ζυγαριάς και παρατηρώντας ότι δεν ισορροπεί, όπως θα όφειλε. Στη συνέχεια πρόσθεσαν ένα μπλε βαρίδι στην αριστερή μεριά και κόκκινα βαρίδια στη δεξιά μέχρι να ισορροπήσει. Παρατήρησαν ότι με δύο κόκκινα ισορροπούσε. Άρα 1 μπλε ζύγιζε όσο 2 κόκκινα (εικόνα 3).



Εικόνα 8: Στιγμιότυπο του διασκευασμένου ΜΠ, όπως δόθηκε από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές.

Η ιδέα του διασκευασμένου ΜΠ, σύμφωνα με τον εκπαιδευτικό ήταν να νοηματοδοτήσουν οι μαθητές τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης ως μια διαδοχή ισοδύναμων μετασχηματισμών, εστιάζοντας στους μετασχηματισμούς. Υποστήριξε ότι στο αρχικό ΜΠ οι μαθητές μετέφραζαν μόνο την τελική ισορροπία της ζυγαριάς για να λύσουν την εξίσωση. Έτσι «χάλασε» τη ζυγαριά, ώστε να πρέπει να καταγράφουν τους μετασχηματισμούς που έκαναν σε κάθε μεριά της μέχρι να ισορροπήσει.



Εικόνα 9: Τρία διαδοχικά στιγμιότυπα που αντιστοιχούν σε διαδοχικούς χειρισμούς των μαθητών και δείχνουν πώς έφτασαν κάποιοι μαθητές στη λύση.

Η δεύτερη εφαρμογή του διασκευασμένου ΜΠ στην τάξη: «Εμπιστευόμαστε μια χαλασμένη ζυγαριά;»

Το 2021 το διασκευασμένο ΜΠ αξιοποιήθηκε για την εισαγωγή στην ίδια ενότητα. Αυτή τη φορά η διδασκαλία έγινε στην τάξη, όπου τα παιδιά χρησιμοποιούσαν tablets, ανά δύο. Το ένα χειριζόταν το ΜΠ και το άλλο κατέγραφε τι ιδέες τους ή απαντήσεις σε ένα τετράδιο. Έλεγαν τις ιδέες τους στην ολομέλεια και ο εκπαιδευτικός τις υλοποιούσε στο διαδραστικό πίνακα και τις συζητούσαν. Στο ερώτημα «υπάρχει περίπτωση η ζυγαριά να είναι χαλασμένη;», οι μαθητές απάντησαν σχετικά γρήγορα ακολουθώντας παρόμοιες στρατηγικές όπως το 2014. Η διερεύνηση για να βρουν το βάρος της μπλε μπίλιας είχε επίσης παρόμοια χαρακτηριστικά, αλλά εδώ θα εστιάσουμε σε αυτές τις ιδέες τους που αξιοποίησε ως ευκαιρία ο εκπαιδευτικός δίνοντας χώρο στους μαθητές να δημιουργήσουν διαφορετικά νοήματα, από την πρώτη εφαρμογή, το 2014. Παρακάτω παρατίθεται σχετικό απομαγνητοφωνημένο απόσπασμα από το διάλογο μεταξύ του εκπαιδευτικού (Ε) και τριών ομάδων μαθητών (Μ11-Μ12, Μ21-Μ22 και Μ31-Μ32). Έχουν απαντήσει ότι η ζυγαριά είναι χαλασμένη και έχουν, ως ομάδες βρει το βάρος της μπλε μπίλιας, ωστόσο έχουν θέσει επιπρόσθετα ζητήματα σχετικά με τη λειτουργία της ζυγαριάς.

50 Ε: Μ12, τι εννοείς «πώς ξέρουμε ότι είναι σωστή η λύση»;

51 Μ12: Κύριε είναι χαλασμένη, πώς την εμπιστευόμαστε όταν ισορροπεί;

52 Μ22: Δεν την εμπιστευόμαστε. Βάζουμε βάρη και ξαναϊσορροπεί.

53 Μ21: Δηλαδή κάθε φορά «χάνει» το ίδιο;

54 Ε: Τι εννοείς Μ21;

55 Μ21: Κάθε φορά που φαίνεται ότι ισορροπεί είναι το ίδιο χαλασμένη;

56 Μ31: Ισορροπεί σε 2 μπλε και 0 κόκκινα με 0 μπλε και 7 κόκκινα, μετά σε 2 μπλε και 3 κόκκινα με 2 μπλε και έξι κόκκινα, […].

Οι μαθητές οδηγήθηκαν σε διερεύνηση εντοπίζοντας θέσεις ισορροπίας της ζυγαριάς, ώστε να διαπιστώσουν αν πράγματι χάνει το ίδιο σε κάθε θέση. Ένας μαθητής πρότεινε την εξής στρατηγική: «Να κρατήσουμε το ίδιο μπλε και στις δύο μεριές», το οποίο ήταν άγνωστο. Άρα να μεταβάλλουν το κόκκινο βαρίδι, που ήταν γνωστού βάρους. Έτσι διαπίστωσαν ότι η δεξιά μεριά έχανε κάθε φορά κατά 3 κόκκινα, δηλαδή 60 γραμμάρια.

94 Ε: Άρα την εμπιστευόμαστε για τη λύση;

95 Μ21: Ναι, αφού σε τόσες περιπτώσεις ισχύει το ίδιο. 60 γραμμάρια χάνει.

96 Μ31: Δεν ξέρουμε ότι γίνεται πάντα όμως! Αυτό που μπορούμε να πούμε μόνο είναι ότι σε κάποιες περιπτώσεις $y=x+60$.

Η Μ31 όταν ρωτήθηκε από τον εκπαιδευτικό εξήγησε ότι εννοούσε y το συνολικό βάρος δεξιά και x το συνολικό βάρος αριστερά. Στη συνέχεια συμφώνησε με μια πρόταση του Μ22 να διατυπώσουν την εξής απάντηση: «αν ισχύει ότι χάνει πάντα το ίδιο, τότε το κάθε μπλε ζυγίζει 40 γραμμάρια», που είναι η δημιουργία μιας υπόθεσης κάτω από την οποία έδωσαν τη λύση.

Ο αναστοχασμός του εκπαιδευτικού

Στη συνέντευξη, ο εκπαιδευτικός ισχυρίστηκε ότι αυτή τη φορά άνοιξαν περισσότερα θέματα για συζήτηση στην τάξη σε σύγκριση με το 2014, κάτι που δεν είχε προβλέψει. Έκρινε ως σημαντικά τα εξής: α) Οι μαθητές θεώρησαν αναγκαίο να διερευνήσουν αν η ζυγαριά είναι το ίδιο χαλασμένη κάθε φορά και β) τελικά απάντησαν στο πρόβλημα υπογραμμίζοντας ότι η λύση τους είναι σωστή, εφόσον ισχύει η υπόθεση: «η ζυγαριά είναι το ίδιο χαλασμένη, πάντα». Στην ερώτηση των ερευνητών αν είχε τεθεί από τους μαθητές το ερώτημα «η ζυγαριά είναι πάντα το ίδιο χαλασμένη;» το 2014, απάντησε ότι μάλλον δεν είχε τεθεί, αλλά επισήμανε ότι ενδεχομένως αν είχε τεθεί να τους είχε πει να θεωρήσουν ότι η ζυγαριά ήταν το ίδιο χαλασμένη, ώστε να προχωρήσουν στους μετασχηματισμούς για να επιτευχθεί ο αρχικός του σχεδιασμός. Ο λόγος που ισχυρίστηκε κάτι τέτοιο ήταν ότι θυμόταν να είχε προαποφασίσει αυτόν το χειρισμό, λόγω του πολύ συγκεκριμένου χρόνου που είχε στη διάθεσή του, σε περίπτωση που άνοιγε το θέμα το 2014. Σημείωσε δε, ότι θα μπορούσε να αξιοποιήσει το διασκευασμένο ΜΠ και στην ενότητα των γραμμικών συναρτήσεων, λόγω της δήλωσης της Μ31 (γραμμή 96). Επισήμανε ότι αυτό ήταν κάτι που το είχε σκεφτεί και στο παρελθόν και ότι θα ήταν μια καλή ιδέα. Ανέφερε ότι «αξίζει να προσαρμόσω τη ροή υλοποίησης του ΠΣ εφόσον φάνηκε να προκύπτει αυθόρμητα από τη συζήτηση στην τάξη, καθώς είναι στο πνεύμα των σύγχρονων ΠΣ να εμπλέκονται οι μαθητές στη δημιουργία συνδέσεων και εντός μαθηματικού περιεχομένου, π.χ. εξισώσεις με συναρτήσεις, κτλ.»

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η αξιοποίηση του διασκευασμένου ΜΠ στην διδασκαλία του 2021 έδωσε την ευκαιρία στην τάξη για μαθηματική επικοινωνία, όπως είχε γίνει και το 2014. Ωστόσο, τα ζητήματα που τέθηκαν ήταν αρκετά διαφορετικά αυτή τη φορά. Ο εκπαιδευτικός αξιοποίησε αυτά τα ζητήματα, όχι μόνο δεν προσπάθησε να καθοδηγήσει τη συζήτηση προς την κατεύθυνση που είχε αρχικά στο μυαλό του και βάσει του σχεδιασμού, αλλά παρότρυνε με τις ερωτήσεις του να συζητηθεί και να διερευνηθεί το ερώτημα «πόσο χάνει η ζυγαριά κάθε φορά;». Η διερεύνηση αυτού του ερωτήματος οδήγησε τους μαθητές σε μαθηματική δραστηριότητα που δεν ήταν στους αρχικούς σχεδιασμούς του εκπαιδευτικού. Ωστόσο αξιοποίησε την ευκαιρία και οι μαθητές έχτισαν τις υποθέσεις («εφόσον χάνει πάντα το ίδιο..») κάτω από τις οποίες θα μπορούσαν να χειριστούν το διασκευασμένο ΜΠ, έτσι ώστε οι κινήσεις τους να είναι ισοδύναμοι μετασχηματισμοί. Εδώ θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ο εκπαιδευτικός είχε έναν «διάλογο» με τους χειρισμούς του ίδιου, του 2014, ειδικά όταν αναστοχαζόμενος είπε ότι ενδεχομένως το 2014 να απέτρεπε τους μαθητές να διερευνήσουν αν η ζυγαριά ήταν το ίδιο χαλασμένη.

Σύμφωνα με το μοντέλο του Ruthven (2014) δύο δομικά στοιχεία της ενσωμάτωσης ψηφιακών εργαλείων εμφανίζονται να έχουν αλλάξει στις πρακτικές του εκπαιδευτικού. Το ένα είναι η δομή δραστηριότητας, καθώς θεωρεί σημαντικό να δώσει περισσότερο χώρο στους μαθητές να θέσουν τα ερωτήματά τους, έστω κι αν αλλάξουν λίγο το θέμα της διερεύνησης, Το άλλο είναι η εκδοχή του ΠΣ που θεωρεί ότι νομιμοποιείται να υλοποιήσει: η νομιμοποίηση για να επιφέρει αλλαγές φαίνεται να τεκμηριώνεται με μαθησιακούς όρους, δηλαδή βασίζεται στην αξία της δημιουργίας συνδέσεων για τους μαθητές (και όχι σε μια πιο χαλαρή προσέγγιση, για το πόσο δεσμευμένος είναι απέναντι στο ΠΣ, γενικότερα). Έτσι, σύμφωνα με το μοντέλο του Ruthven έχουμε τουλάχιστον δύο στοιχεία που δείχνουν μεταβολή στην επαγγελματική πρακτική του εκπαιδευτικού (θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε μεταβολές και στα υπόλοιπα τρία στοιχεία του μοντέλου).

Μεταξύ του 2014 και 2021 ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί ψηφιακά εργαλεία πολύ συχνά (τουλάχιστον μία φορά την εβδομάδα) στην τάξη του, όπως προέκυψε από τη συνέντευξη, πολλά από τα οποία τα έχει σχεδιάσει ο ίδιος για τους μαθητές του. Επίσης έχει εμπλακεί συχνά σε δραστηριότητες σχεδιασμού ΠΣ Μαθηματικών και προγραμμάτων επιμόρφωσης εκπαιδευτικών. Έτσι, η πρώτη με τη δεύτερη αξιοποίηση του διασκευασμένου ΜΠ στην τάξη είναι χρονικά διακριτή για τον εκπαιδευτικό, όχι μόνο με ποσοτικούς όρους: ο χρόνος που πέρασε ήταν πυκνός με όρους επαγγελματικής δραστηριοποίησης του στο διάστημα που πέρασε. Συνεπώς, εφόσον έχουμε, επαγγελματικά, χρονικά διακριτές στιγμές για τον εκπαιδευτικό, κατά Fischer (2004). Από τη μία η εμφανής διαφοροποίηση του στον τρόπο που αξιοποίησε το διασκευασμένο ΜΠ τότε και τώρα, αλλά και η ευελιξία του σε σχέση με τα μελλοντικά του σχέδια, όπως προκύπτει μέσα από ό,τι συνέβη στην τάξη (η παρατήρηση της Μ31 στην γραμμή 96 και η γραμμική σχέση) μας οδηγούν να μιλήσουμε για την εμφάνιση χρονικών εμποδίων κατά Fischer (2004). Από την άλλη, η ανάλυση αυτής της διαφοροποίησης με το μοντέλο του Ruthven, μας επιτρέπει να εντοπίσουμε επαγγελματική εξέλιξη στις πρακτικές του εκπαιδευτικού. Επομένως θα λέγαμε ότι σε αυτή την περίπτωση όπου προέκυψαν χρονικά εμπόδια, η πρακτική του εκπαιδευτικού για να τα προσπεράσει ήταν ενδεικτική πτυχών της επαγγελματικής του ανάπτυξης. Δεν είναι τόσο ότι «έμαθε» κάτι νέο προσπερνώντας τα, όσο ότι έγινε ρητή και εμφανής η μεταβολή στην επαγγελματική του γνώση. Ωστόσο, για αυτό χρειάζεται λεπτομερέστερη έρευνα της δραστηριότητας και της συμμετοχής του εκπαιδευτικού ως μέλος της ευρύτερης επαγγελματικής του κοινότητας.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Στο εξής θα χρησιμοποιείται ο γενικευμένος όρος «ο εκπαιδευτικός» εννοώντας τον και την εκπαιδευτικό και άλλοι, αντίστοιχοι, όπως «ο μαθητής», για λόγους απλότητας του κειμένου.
2. Τα συμπεράσματα του Fischer αναφέρονται στο σχεδιασμό με ψηφιακά εργαλεία, γενικότερα.
3. Με την έννοια ότι δεν έχει περάσει μόνο χρόνος, αλλά ο χρόνος αυτός έχει επιφέρει αλλαγές στο άτομο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra*. A Theoretical and Empirical Approach. New York: Springer.

Fischer, G. (2004). Social creativity: Turning barriers into opportunities for collaborative design. *Proceedings of the 8th Conference on Participatory Design Artful Integration: Interweaving Media, Materials and Practices - PDC*, 4(1), 152-161.

Fischer, G., Grudin, J., Lemke, A., McCall, R., Ostwald, J., Reeves, B., & Shipman, F., (1992) Supporting Indirect Collaborative Design With Integrated Knowledge-Based Design Environments, *Human–Computer Interaction*, 7(3), 281-314.

Hammersley, M., & Atkinson, P. (2010). *Ethnography: Principles in practice*. Routledge.

Kynigos, C. (2017). Innovations Through Institutionalized Infrastructures: The Case of Dimitris, His Students and Constructionist Mathematics. In E. Faggiano, F. Ferrara, & A. Montone (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education*, (Vol. 9, pp. 197-214). Springer.

Kynigos, C. (2020). Half-baked Constructionism: The Challenge of Infusing Contrusctionism in Education in Greece. In N. Holbert, M. Berland, & Y. B. Kafai (Eds.), *Designing constructionist futures: The art, theory, and practice of learning designs*. The MIT Press.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on Mathematical Meanings. Springer Netherlands.

Polin, L. G. (2010). Graduate Professional Education from a Community of Practice Perspective: The Role of Social and Technical Networking. In C. Blackmore (Ed.), *Social Learning Systems and Communities of Practice* (pp. 163-178). Springer: London.

Robson, C., & McCartan, K. (2016). Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings (4th Edition). Wiley.

Ruthven, K. (2014). Frameworks for analysing the expertise that underpins successful integration of digital technologies into everyday teaching practice. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (eds.), *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development*, vol. 2, Springer: Dordrecht.

Teppo, A. R. (2015). Grounded Theory Methods. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. C. Presmeg (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods. Springer.

Yin, R. K. (2014). Case study research: Design and methods (Fifth edition). SAGE.

Διαμαντίδης, Δ., & Κυνηγός, Χ. (2018). Μελέτη της επαγγελματικής γνώσης και των πρακτικών εκπαιδευτικών που διασκευάζουν εκπαιδευτικό ψηφιακό υλικό για τα Μαθηματικά. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*, (pp. 356-365).

ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗΝ «ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΘΡΑΝΙΑ»

Μπογιατζή Αικατερίνη

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

kbogiatz@math.uoa.gr

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τις δράσεις μιας εκπαιδευτικού κατά την «διδασκαλία ανάμεσα στα θρανία» ή κατά τους ιάπωνες εκπαιδευτικούς επεισόδιο μαθήματος «kikan-shido». Η εκπαιδευτικός δίνει μια ≪ανοιχτή≫ δραστηριότητα που αφορά την ανακάλυψη των κριτηρίων ισότητας των τριγώνων. Κύριος στόχος μας είναι να εντοπιστούν εκείνες οι δράσεις που υποστηρίζουν την αυτόνομη εργασία των μαθητών σε μια ≪ανοιχτή≫ δραστηριότητα στην γεωμετρία. Οι μαθήτριες φάνηκε να ευνοήθηκαν από τον «ανοιχτό» χαρακτήρα της δραστηριότητας, σε συνδυασμό με τις δράσεις της εκπαιδευτικού που ήταν σύμφωνες με τα χαρακτηριστικα του «kikan-shido».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γεωμετρία στη μέση εκπαίδευση ασχολείται με κύρια θέματα: τη μέτρηση του μήκους, του εμβαδού και του όγκου καθώς και την εξερεύνηση των εννοιών της ισότητας και της ομοιότητας (Wu, 2005). Όταν οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να εξερευνήσουν πιθανές συνθήκες ισότητας τριγώνων, είναι σε θέση να αναπτύξουν επιχειρήματα για το ποιοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί γωνιών και πλευρών. Ο βασικός λόγος, για τον οποίο ένας ελάχιστος αριθμός συνθηκών αρκεί, είναι μια βασική έννοια που πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές. Τα ευρήματα της έρευνας έχουν δείξει ότι οι μαθητές ενδέχεται να μην είναι σε θέση να αντιληφθούν μια γεωμετρική ιδιότητα χωρίς να τοποθετηθεί το πραγματικό αντικείμενο μπροστά τους (Fujita, Jones & Yamamoto, 2004). Όταν θέλουμε να κατανοήσουν και να δικαιολογήσουν ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, προτείνεται να δείξουμε στους μαθητές δύο πανομοιότυπα τρίγωνα από κομμένο χαρτί , τοποθετώντας το ένα πάνω στο άλλο. Παρόλο που δεν έχουν κάνει μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη, το έχουν δει να συμβαίνει μπροστά στα μάτια τους (Piatek-Jimenez, 2008).

Η Boaler (1998) αναφέρει πως οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών έχουν αντιληφθεί ότι οι μαθητές δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν μεθόδους και κανόνες που έχουν μάθει στο σχολείο επειδή δεν τους κατανοούν πλήρως, μάλιστα συσχετίζουν αυτήν την έλλειψη κατανόησης με τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά. Αυτό και παρόμοια επιχειρήματα έχουν συμβάλει στην αυξανόμενη υποστήριξη για «ανοιχτές» μορφές μαθηματικών δραστηριοτήτων. Εάν στους μαθητές δίνεται «ανοιχτή», ερευνητική εργασία που απαιτεί να παίρνουν τις δικές τους αποφάσεις, να σχεδιάζουν τις δικές τους διαδρομές, να επιλέγουν μεθόδους και να εφαρμόσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους, θα επωφεληθούν με διάφορους τρόπους. Το «*κλειστό*» σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μία αποδεκτή διαδρομή, απάντηση, προσέγγιση ή δικαιολόγηση. Το «*ανοιχτό*» αναφέρεται στην ύπαρξη περισσότερων από μια πιθανές οδούς, απαντήσεις, προσεγγίσεις ή πορείες συλλογισμού (Sullivan, Warren & White, 2000).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι εκπαιδευτικοί είναι βασικοί παράγοντες της διδασκαλίας στην τάξη και οι πρακτικές που υιοθετούν έχουν σημαντικό αντίκτυπο στη μάθηση των μαθητών (Hiebert & Morris, 2012). Για αυτό τον λόγο οι ερευνητές της εκπαίδευσης των μαθηματικών έχουν δείξει μεγάλο ενδιαφέρον για τη διερεύνηση της διδασκαλίας στην τάξη των μαθηματικών (Sun & Wang, 2018). Η πρόθεσή μας είναι να περιγράψουμε τις αλληλεπιδράσεις, ως μοτίβο συμμετοχής ολόκληρης της τάξης και να χαρακτηρίσουμε τις ενέργειες του εκπαιδευτικού και των μαθητών σε σχέση με το επεισόδιο μαθήματος: *«kikan-shido»* (Clarke, 2003).

Οι Ιάπωνες δάσκαλοι χρησιμοποιούν τον όρο *«kikan-shido»* που σημαίνει «*Between Desk Instruction» (BDI),* δηλαδή διδασκαλία ανάμεσα στα θρανία, περιγράφοντας τη φάση του μάθηματος που οι μαθητές συμμετέχουν στο κάθισμά τους, μερικές φορές μεμονωμένα ή σε ομάδες, ενώ ο δάσκαλος περιπλανιέται στην τάξη, παρέχοντας υποστήριξη και αλληλεπιδρώντας με τους μαθητές, ανάλογα με τις απαιτήσεις (O'Keefe, Xu & Clarke, 2006). Ο λόγος που μελετάμε την διδασκαλία με τον χαρακτηρισμό *«kikan-shido»* είναι γιατί είναι μια δραστηριότητα που είναι οικεία στους εκπαιδευτικούς σε κάθε χώρα (Roche & Clarke, 2015).

Δράσεις Εκπαιδευτικού	Ορισμοί
Παρακολούθηση της δραστηριότητας των μαθητών (Monitoring)	Η διαδικασία με την οποία ο δάσκαλος παρατηρεί την πρόοδο των δραστηριοτήτων και της εργασίας στο σπίτι, επιβεβαιώνει την κατανόηση των μαθητών ή επιλέγει την εργασία τους, με πρόθεση να παρακολουθεί την πρόοδο των μαθητών και να καταγράφει τα επιτεύγματα των μαθητών.
Καθοδήγηση της Δραστηριότητας των Μαθητών (Guiding)	Η διαδικασία με την οποία ο δάσκαλος δίνει πληροφορίες, προκαλεί την ανταπόκριση των μαθητών προκειμένου να προωθήσει τον προβληματισμό ή διευκολύνει την εμπλοκή στη

	δραστηριότητα, με πρόθεση να ενεργοποιήσει ενεργά την ανάπτυξη της συμμετοχής των μαθητών και της κατανόησης του αντικειμένου.
Οργάνωση (Organizational)	Η διαδικασία με την οποία ο δάσκαλος διανέμει και συλλέγει υλικό ή οργανώνει το φυσικό περιβάλλον στην τάξη, με σκοπό να υποστηρίξει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών και να διευκολύνει τη συμμετοχή των μαθητών στις μαθησιακές δραστηριότητες.
Κοινωνική συζήτηση (Social Talk)	Ο καθηγητής ασχολείται με συνομιλίες που δεν σχετίζονται με το αντικείμενο ή την τρέχουσα δραστηριότητα κατά την εργασία

Πίνακας 1. Ορισμός των κύριων δράσεων στο «*Kikan-Shido*», (O'Keefe, Xu, & Clarke, 2006)

Η παρούσα εργασία αφορά την μελέτη ενός βίντεο-μαθήματος. Η εκπαιδευτικός δίνει μια «ανοιχτή» δραστηριότητα που αφορά την ανακάλυψη των κριτηρίων ισότητας των τριγώνων. Θα μελετήσουμε, μέσα στην διάρκεια της διδασκαλίας, την διαχείριση από την εκπαιδευτικό στην φάση της αυτόνομης εργασίας των μαθητών, με στόχο να εντοπιστούν οι δράσεις που υποστηρίζουν τα χαρακτηριστικά της. Συγκεκριμένα, θέτονται τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

ΕΕ1: Ποιες είναι οι δράσεις της εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν τα χαρακτηριστικά μιας «διδασκαλίας ανάμεσα στα θρανία» ή αλλιώς επεισόδιο μαθήματος *«kikan-shido»* ;

ΕΕ2: Με ποιο τρόπο οι δράσεις της εκπαιδευτικού υποστηρίζουν την αυτόνομη εργασία των μαθητών σε μια «ανοιχτή» δραστηριότητα στην γεωμετρία;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πρόβλημα

Το πρόβλημα που δόθηκε στις μαθήτριες ήταν μια δραστηριότητα που αφορά τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Είναι μια «ανοιχτή» δραστηριότητα, ζητάει την κατασκευή ενός τριγώνου και την περιγραφή των βημάτων με στόχο να «ανακαλυφθεί» ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός τους ώστε τα τρίγωνα να «εφαρμόζουν» , άρα να είναι ίσα.

Πλαίσιο της έρευνας και δεδομένα

Το βίντεο που θα αναλυθεί επιλέχθηκε απο την μελέτη: «The Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) 1999 Video Study», που έχει διεξαχθεί σε 7 χώρες, για διδασκαλίες μαθηματικών της

8ης τάξης. Η συγκεκριμένη διδασκαλία έχει πραγματοποιηθεί στην Αυστραλία, σε ένα γυμνάσιο θηλέων, σε μια τάξη 26 μαθητριών και αποτελεί το δεύτερο μάθημα, από μια σειρά 12 μαθημάτων, στην ενότητα για την ισότητα των τριγώνων. Τα ερευνητικά δεδομένα που έχουμε είναι: το βίντεο διάρκειας 46 λεπτών, η απομαγνητοφώνηση των διαλόγων, το φύλλο εργασίας που δόθηκε στις μαθήτριες και σύντομος σχολιασμός της εκπαιδευτικού και των ερευνητών.

Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση βασίζεται στο βίντεο καθώς και στους διαλόγους εκπαιδευτικού και μαθητριών. Υιοθετούμε την ποιοτική ανάλυση περιεχομένου -*deductive content analysis*- (Mayring, 2004), καθώς έχουμε προηγουμένως καθορισμένες θεωρητικές αρχές, με κυρίαρχες κατηγορίες τις χαρακτηριστικές δράσεις στο επεισόδιο *«Kikan-Shido»*, σαφή ορισμό τους (βλ.Πίνακα 1.) και έτοιμους κωδικούς (βλ.Πίνακα 2.) . Αρχικά, είδαμε το βίντεο πολλές φορές ώστε να υπάρξει εξοικείωση με τις δράσεις της εκπαιδευτικού. Στο εξής θεωρούμε την διδασκαλία με τα χαρακτηριστικα του *«Kikan-Shido»*, ως ένα «επεισόδιο μαθήματος» (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006). Στο δεύτερο στάδιο, η ανάλυση περιλαμβάνει μελέτη σε βάθος του βίντεο σε συνδυασμό με τους διαλόγους στην απομαγνητοφώνηση, γίνεται κωδικοποίηση ώστε να προκύψουν σαφή μοτίβα που θα αναδείξουν τα χαρακτηριστικά του επεισοδίου που μελετάμε, απατώντας τελικά στα ερευνητικά ερωτήματα.

Κωδικοποίηση

Επιλέγουμε την κωδικοποίηση με βάση τους κωδικούς που παρουσίασαν οι O'Keefe et al. (2006) με στόχο να εντοπίσουμε τις ενέργειες της εκπαιδευτικού, μέσα στις κατηγορίες που έχουν ήδη οριστεί (βλ.Πίνακας 1.). Η κωδικοποίηση έγινε με βάση την απομαγνητοφώνηση γραμμή-γραμμή, βλέποντας παράλληλα το βίντεο ώστε να εμπλουτιστούν τα δεδομένα με χειρονομίες, με στάσεις της εκπαιδευτικού και την κυκλοφορία ανάμεσα στα θρανία, πού επιμένει και την αλληλεπίδραση με τις μαθήτριες. Η εστίαση ήταν στις ερωτήσεις της εκπαιδευτικού και σε επιμέρους διαχείριση μικρών μεμονωμένων επεισοδίων αλληλεπίδρασης με κάποια μαθήτρια ή ομάδα μαθητριών.

Κωδικοί δράσεων Εκπαιδευτικού	
M1: επιλογή λύσης για παρουσίαση	M2: παρακολούθηση προόδου
M3: ερώτηση σε μαθητή	M4: παρακολούθηση εργασίας για το σπίτι
G1: ενθάρρυνση μαθητή	G2: καθοδήγηση/συμβουλή στο θρανίο

G3: καθοδήγηση με ερωτήσεις	G4: επαναφορά μαθητή που δεν προσέχει
G5: απάντηση σε ερώτηση	G6: συμβουλές στον πίνακα
G7: καθοδήγηση όλης της τάξης	O1: μοίρασμα υλικών
O2: μάζεμα υλικών	O3: οργάνωση της τάξης
S1: συζήτηση για το σχολείο	S2: συζήτηση για θέματα όχι του σχολείου

Πίνακας 2. «*Kikan-Shido*» 16 Κωδικοί δράσεων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σύμφωνα με τον ορισμό του *«kikan-shido»* η συγκεκριμένη διδασκαλία έχει 2 επεισόδια με αυτά τα χαρακτηριστικα, το πρώτο με διάρκεια από 04:46 έως 32:55, συνολικά δηλαδή 26 λεπτά και το δευτερο από 40:03 έως 45:28, δηλαδή 5 λεπτά , η αυτόνομη εργασία των μαθητών καλύπτει περίπου το 62% της συνολικής διάρκειας του μαθήματος. Στο πρώτο επεισόδιο γίνεται κυρίως η διαχείριση της δραστηριότητας και η συμπλήρωση του φύλλου εργασίας ενώ στο δεύτερο η εκπαιδευτικός αναθέτει τις εργασίες για το σπίτι και γυρνά γύρω από της μαθήτριες για να ελέγξει ποιος έκανε τις προηγούμενες μέχρι να τελειώσει το μάθημα.

Δράσεις οργάνωσης

Η εκπαιδευτικός ξεκινά να κινείται ανάμεσα στα θρανία και μοιράζει το φύλλο εργασίας στις μαθήτριες. Εξηγεί ότι θα δουλέψουν σε ομάδες των 3 ή 4 και προσπαθεί να χωρίσει τις μαθήτριες, η ίδια στα σχόλια για το μάθημα, αναφέρει ότι αφήνει ελευθερη την επιλογη ομάδας ώστε να αισθάνονται άνετα. Πρώτη από της κατηγορίες εμφανίζεται η οργάνωση της τάξης και η παρουσίαση των υλικών που χρειάζονται οι μαθητές.

Κ: «Λοιπόν εσείς οι δύο Άντζελα και Λάουρα, αν μπορείτε να καθίσετε μπροστά και να εργαστείτε με τα δυο κορίτσια... Απλά κατεβάστε τις καρέκλες σας, μην ανησυχείτε...»(O3)

Κ: «Τι χρειάζεσαι; Χρειάζεστε τα μοιρογνωμόνια σας...(O1) Μπορείτε να φέρετε ένα γραφείο αν θέλετε λίγο περισσότερο χώρο για να δουλέψετε....(O3)

Κ: «Φέρτε μια καρέκλα. Ναι, μπορείτε να το φέρετε ... ναι, να φέρετε το τραπέζι.»(O3)

Δράσεις παρακολούθησης

Καθώς κινείται, περνά από όλες τις ομάδες με την σειρά και παρακολουθεί την πορεία της εργασίας των μαθητριών (κοιτάζει πάνω από τα γραπτά τους, M1), δίνει διευκρινήσεις, δεν φαίνεται να καταγράφει κάπου τις λύσεις τους, μόνο νοερά παρατηρεί και ζητά δικαιολόγηση για τα βήματα που ακολουθούν. Στο δεύτερο συμβάν *«kikan-shido»* αναθέτει την εργασία και ξεκινούν οι μαθήτριες αλλά δεν προλαβαίνει να παρακολουθήσει στενά την εργασία τους (M4) , καθώς εξετάζει ταυτόχρονα ποιος έχει κάνει τις προηγούμενες ασκήσεις.

K: «Δεν πρόκειται να είναι το ίδιο με την Kate; Πρέπει να το βρείτε, εξαρτάται από το πώς θα το σχεδιάσετε. Σκεφτείτε, πώς θέλετε να το σχεδιάσουν;» (M3)

K: «Μπορείτε είτε να βρείτε γωνίες είτε να βρείτε πλευρές. Ή συνδυασμός και των δύο.» (M2)

K: «Εξαρτάται, αν λειτουργεί, αν σχεδιάζετε το ίδιο τρίγωνο με το οποίο αυτό είναι ίσο. Εάν όχι, το αλλάζετε. Εντάξει; Πρέπει να το δοκιμάσετε.» (M2)

K: «Δούλεψε;» (M2)

K: «Αποφασίσατε λοιπόν ότι αυτό ήταν σημαντικό ή το μήκος της γραμμής ήταν σημαντικό;» (M3)

K: «Λοιπόν, καταλήξατε να καταλάβετε πόσες οδηγίες χρειάζεστε πραγματικά για κάθε μία;» (M3)

K: «Λοιπόν, ποιες γωνίες εσείς - ποιες γωνίες δώσατε;» M: «Έδωσα μια γραμμή πέντε εκατοστών και έπειτα μια ορθή γωνία με μια άλλη γραμμή πέντε εκατοστών.» (M2)

Δράσεις καθοδήγησης

Ξεχωρίσαμε τα αποσπάσματα στα οποία δίνει βοήθεια είτε με την μορφή ‘σκαλωσιάς’ είτε με κατάλληλες ερωτήσεις με στοχο την εξέλιξη της σκέψης τους και δίνει απαντήσεις στις ερωτήσεις τους.

K: «Σωστά, έτσι χρειάστηκαν όλες αυτές οι οδηγίες για να τελειώσουν το τρίγωνό σας;» (G3)

K: «Αυτό είναι λοιπόν ένα από όλα, σκεφτείτε εάν θα μπορούσατε να δώσετε διαφορετικές οδηγίες για να κάνετε το ίδιο τρίγωνο.» (G1)

K: «Όλες οι πλευρές, ναι. Ναι, καταλήγεις με όλες τις ίδιες γωνίες, αλλά τι τους είπες να σχεδιάσουν, πλευρές ή γωνίες;» (G3)

K: «Μέχρι στιγμής είχαμε μόνο δύο τύπους. Υπάρχουν τέσσερα. Υπάρχουν τέσσερις τρόποι που μπορείτε να κάνετε.» (G7)

K: «Έτσι πρέπει να καταλήξετε στον ελάχιστο αριθμό που χρειάζεστε. Λοιπόν, σε πόσα στάδια έχουν σχεδιάσει το τρίγωνό σας χωρίς να χρειάζεται να προσθέσετε τις υπόλοιπες οδηγίες;» (G3)

Κ: « Ίσως να έχετε πολλές οδηγίες για να ξεκινήσετε και στη συνέχεια θα βρείτε μετά από ένα ζευγάρι ότι το σχεδίασαν.» (G2)

Μ: «Ποια είναι η διαφορά μεταξύ διχοτόμησης και ...;» Κ: «Η διχοτόμηση σημαίνει να το κόβουμε στη μέση.» (G5)

Δράσεις κοινωνικής συζήτησης

Εδώ εξετάσαμε αν υπάρχουν στην διάρκεια της διδασκαλίας σημεία όπου η κουβέντα δεν αφορά την δραστηριότητα, τα σημεία αυτά είναι ελάχιστα και προκύπτουν κυρίως στο δεύτερο συμβάν «kikan-shido» που αφορά την ενασχόληση με τις εργασίες για το σπίτι.

Κ: «Elise, δεν ήσουν εδώ.»

Μ: «Ήμουν στο κρεβάτι.»

Κ: «Συγνώμη;»

Μ: «Ήμουν στο κρεβάτι με παρωτίτιδα.» (S2)

Μελετώντας τις δράσεις της εκπαιδευτικού, με στόχο να απαντήσουμε στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, βλέπουμε ότι οι κωδικοί με την χαμηλότερη συχνοτητα είναι οι S1-S2 που αφορουν σε συνομιλίες που δεν σχετίζονται με σχολικές δραστηριότητες. Ο κωδικός G4, που αφορά την επαναφορά μαθητή που δεν προσέχει στο μάθημα δεν εμφανίστηκε καθόλου όπως και ο G6, που θα εμφανιζόταν αν η καθηγήτρια έδινε οδηγίες στον πίνακα. Άρα η καθηγήτρια δεσμεύετε μόνο με δράσεις που αφορούν την μαθηματική δραστηριότητα με την οποία ασχολούνται οι μαθήτριες. Μέσα στα δεδομένα δεν εμφανίστηκαν καθόλου οι κωδικοί G4, G6, M1, O2.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Κατά τη διάρκεια του επεισοδίου *«kikan-shido»,* η καθηγήτρια παρακολούθησε την πρόοδο των μαθητριών, έκανε ερωτήσεις που απαιτούσαν απαντήσεις από τις μαθήτριες, παρείχε οδηγίες ή συμβουλές ατομικά, έκανε ερωτήσεις καθοδήγησης ή ‘σκαλωσιάς’ και απάντησε σε ερωτήσεις των μαθητριών. Ζήτησε επίσης από τις μαθήτριες να κάνουν εικασίες και να τις δικαιολογήσουν, με στόχο να καταλήξουν στην ανακάλυψη των προτάσεων που δίνουν δυο ίσα τρίγωνα.

Με κύριο ερώτημα του μαθήματος να ανακαλύψουν τον ελάχιστο αριθμό πλευρών ή γωνιών που απαιτούνται για να κατασκευάσουν δυο ίσα τρίγωνα, μέσα στα πλαίσια συνεργατικής μάθησης, οι δράσεις της εξυπηρετούν αυτόν τον στόχο. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές «κατασκευάζουν τη γνώση κοινωνικά, μέσω του λόγου, της δραστηριότητας και της αλληλεπίδρασης που σχετίζονται με ουσιαστικά προβλήματα» (NCTM, 2014, σελ. 9). Έχει χωρίσει τις μαθήτριες σε ομάδες και η καθοδήγησή της κρίνεται χαμηλή καθώς, βλέπουμε πως δεν δίνει κλειστές οδηγίες και βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν αλλά, εξετάζει την σκέψη των μαθητών, ενθαρρύνει και επαναδιατυπώνει πολλές φορές αυτό που τις λένε οι μαθήτριες προκειμένου να κατανοηθεί. Αφήνει να μιλήσουν με δικά τους λόγια και ας μην είναι η αυστηρή ορολογία της γεωμετρίας. Συνειδητά δεν επιμένει στις ορολογία για τις πλευρές και τις γωνιες από την αρχή για να δώσει την ελευθερία να ξεκινήσουν από την προηγούμενη εμπειρία τους (σχόλια εκπαιδευτικού, TIMSS 1999). Δεν αποδοκιμάζει το λάθος και τελικά όλοι συμμετέχουν και προσπαθούν.

Η δραστηριότητα που βλέπουμε εδώ χαρακτηρίζεται «ανοιχτή» και με μεγάλη μαθηματική πρόκληση. Η δραστηριότητα έχει πολλαπλές λύσεις και η καθηγήτρια το τονίζει από την αρχή. Οι επιμέρους δράσεις που υποστηρίζουν την διατήρηση της πρόκλησης και των χαρακτηριστικών που την διατηρούν «ανοιχτή» μελετήθηκαν διεξοδικά με στόχο την απάντηση στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα. Δίνει αρκετό χρόνο για την ενασχόληση των μαθητριών, είδαμε στο αρχικό επεισόδιο να είναι γύρω στα 26 λεπτά και αφού δώσουν τις πρώτες ιδέες όσες μαθήτριες έχουν τελειώσει τις προκαλεί να βρουν κι άλλους τρόπους, να φτιάξουν οδηγίες για το ίδιο τρίγωνο, να σκεφτούν κάτι διαφορετικό, να εξελίξουν την σκέψη τους. Ως κυρίαρχη δράση ξεχωρίζουμε την ενθάρυνση των μαθητριών να συνεχίσουν να σχεδιάζουν, να γράψουν οδηγίες για το τρίγωνο που έφτιαξαν και στην συνέχεια να τις δοκιμάσουν. Η ενθάρρυνση των μαθητών έχει το όφελος της αύξησης της εμπιστοσύνης και των κινήτρων των μαθητών. Εάν πιστεύουν ότι οι προσπάθειές τους αναγνωρίζονται και εκτιμώνται, είναι πιο πιθανό να αφιερωθούν στη δική τους μάθηση (O'Keefe et al., 2006). Η ίδια η εκπαιδευτικός αναφέρει:

> «κινήθηκα στην τάξη μέχρι να μιλήσω σε όλες τις ομάδες. Είναι σημαντικό κάθε μαθητής να νιώθει ότι είναι σημαντικό μέλος της τάξης και ότι ενδιαφέρομαι για την δουλειά του» (σχόλια εκπαιδευτικού, TIMSS 1999).

Τελικά, οι μαθήτριες φάνηκε να ευνοήθηκαν από τον «ανοιχτό» χαρακτήρα της δραστηριότητας, σε συνδυασμό με τις δράσεις της εκπαιδευτικού στην φάση της αυτόνομης εργασίας τους, που ήταν σύμφωνες με τα χαρακτηριστικα του *«kikan-shido»*. Ο Schoenfeld (1988) λέει: «οι μαθητές αναπτύσσουν την κατανόησή τους για το μαθηματικά από την εμπειρία τους στην τάξη» και εδώ είδαμε ότι οι μαθήτριες είχαν αυτήν την εμπειρία. Οι δράσεις της εκπαιδευτικού ευνόησαν την δημιουργία εικασιών και τον έλεγχο από τις ίδιες τις μαθήτριες μέσα από συνεργασία με την ομάδα τους, ενέπνευσαν πολλαπλές λύσεις και στρατηγικές. Στην τελική παρουσίαση των λύσεων φάνηκε ότι όλοι είχαν δουλέψει, κατάφεραν να περιορίσουν τις οδηγίες τους σε συνδιασμό τριων στοιχείων των τριγώνων, με μόνο περιορισμό ότι δεν κατάφεραν να προκύψουν και οι 4 διαφορετικοί τρόποι από πριν, κατά την διάρκεια της αυτόνομης εργασίας, αλλά με την συζήτηση στον πίνακα. Επίσης, οι λόγοι για την εμμονή των μαθητριών σε ορθή γωνία (Κ: *«Ώστε κάνατε όλοι ορθές γωνίες...οπότε καμμία φαντασία...(γέλια*)) προκαλεί το ενδιαφέρον μας για περαιτερω εστίαση και έρευνα γύρω από το θέμα.

Περιορισμοί της έρευνας: λόγω της περιόδου της καραντίνας για τον περιορισμό της μεταδοσης του covid-19 η παρούσα μελέτη βασίστηκε στην μελέτη βίντεο και όχι κάποιας νέας διδασκαλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. Journal for research in mathematics education, 41-62.

Clarke, D. (2003, April). Practice, role and position: Whole class patterns of participation. In *Paper presented as part of the symposium "Patterns of Participation in the Classroom" at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago*.

Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E., & Mok, I. A. C. (2006). The learner's perspective study and international comparisons of classroom practice. In *Making Connections* (pp. 1-22). Brill Sense.

Fujita, T., Jones, K., & Yamamoto, S. (2004). Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry.

Hiebert, J., & Morris, A. K. (2012). Teaching, rather than teachers, as a path toward improving classroom instruction. *Journal of teacher Education*, *63*(2), 92-102.

Mayring, P. (2004). Qualitative content analysis. *A companion to qualitative research*, *1*(2004), 159-176.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2014). *Position statement on access and equity in mathematics education.* Reston, VA: NCTMhttps://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/Access_and_Equity.pdf

O'Keefe, C., Xu, L. H., & Clarke, D. (2006). Kikan-shido: Between desks instruction. In *Making Connections* (pp. 73-105). Brill Sense.

Piatek-Jimenez, K. (2008). Congruence Conditions. *Mathematics Teacher*, *101*(6).

Roche, A., & Clarke, D. (2015). Describing the nature and effect of teacher interactions with students during seat work on challenging tasks.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses. *Educational psychologist*, *23*(2), 145-166.

Sullivan, P., Warren, E., & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics education research journal*, *12*(1), 2-17.

Sun, L., & Wang, Y. (2018). Chinese and American Elementary Mathematics Teachers' Between Desk Instruction. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, *17*(4).

The Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) 1999 Video Study https://www.timssvideo.com/

Wu, H. (2005, September). Key mathematical ideas in grades 5–8. In *annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Anaheim*.

200 ΧΡΟΝΙΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (1821-2021): ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗΣ ΣΤΙΣ ΣΧΟΛΙΚΕΣ ΤΑΞΕΙΣ

Σδρόλιας Κωνσταντίνος

Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ksdrolias@uth.gr

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών που χρησιμοποιήθηκαν, κατά καιρούς, στο δημοτικό, αποτέλεσαν βασικό εργαλείο της διδακτικής πράξης. Η παρουσία τους στα σχολεία, διαμόρφωσε τη διδασκαλία και καλλιέργησε στάσεις των παιδιών απέναντι στα μαθηματικά, καθορίζοντας, ως ένα βαθμό, την πορεία της μαθηματικής εκπαίδευσης στη χώρα μας. Στην εργασία μας εστιάζουμε στις πολιτικές που εφαρμόστηκαν και σχετίζονταν με την δυνατότητα εισαγωγής και χρήσης ενός ή περισσότερων εγχειριδίων ανά τάξη για τα μαθηματικά, από την Επανάσταση μέχρι σήμερα. Μέσα από τη μελέτη σχετικών νομοθετημάτων και εγκεκριμένων σχολικών εγχειριδίων, συζητούμε τις πολιτικές εναλλαγής του μοναδικού ή «πολλαπλού» εγχειριδίου μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με την ανασύσταση του ελληνικού κράτους, κυρίαρχο ζήτημα αποτέλεσε η οργάνωση και λειτουργία της εκπαίδευσης. Έτσι, ιδρύθηκαν και λειτούργησαν τα πρώτα αλληλοδιδακτικά σχολεία, τα οποία επεκτάθηκαν σε πολλές περιοχές πέρα από την πρωτεύουσα. Η εύρυθμη λειτουργία τους, προσέκρουε σε πλήθος δυσχερειών, όσον αφορά τις υποδομές, εξαιτίας της φτώχειας του πληθυσμού, της ένδειας του κράτους αλλά και της έλλειψης εγγράμματων πολιτών. Κυρίαρχο ζήτημα, ανάμεσα στα άλλα, ήταν η έλλειψη κατάλληλου διδακτικού υλικού, κατά κύριο λόγο σχολικών εγχειριδίων, για τη διδασκαλία των μαθημάτων. Μέχρι τότε οι όποιες δομές στοιχειώδους εκπαίδευσης υπήρχαν, χρησιμοποιούσαν εκκλησιαστικά βιβλία ή μεταφρασμένα ευρωπαϊκά εγχειρίδια όχι και τόσο συμβατά με τις νεότερες αντιλήψεις για την εκπαίδευση (Μαυροσκούφης, 2011). Δημιουργήθηκε έτσι ένα πλαίσιο συγγραφής, παραγωγής, έγκρισης και εισαγωγής εγχειριδίων στα σχολεία για το οποίο γινόταν προσπάθειες να οριοθετηθεί από νομοθετικά κείμενα, που τροποποιούνταν ή εμπλουτίζονταν διαρκώς. Το πλαίσιο αυτό αφορούσε τα εγκεκριμένα κυρίως εγχειρίδια των γνωστικών αντικειμένων, κυρίως του γλωσσικού και δευτερεύοντος των υπολοίπων, όπως τα μαθηματικά.

Στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε στο πλαίσιο αυτό, απαντώντας στο ερώτημα «τι είδους πολιτικές επιχειρήθηκαν που σχετίζονταν με τα εγχειρίδια των μαθηματικών της δημοτικής εκπαίδευσης». Μέσα από τη μελέτη των σημαντικότερων νομοθετημάτων[1], κειμένων και τεκμηρίων, κυρίως σχολικών εγχειριδίων και οδηγιών για τους εκπαιδευτικούς, επιχειρούμε να αναδείξουμε ζητήματα που συνεχώς αναπαράγονται ως τις μέρες μας και αφορούν κυρίως τη δυνατότητα οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματικά αλλά και τα παιδιά να έχουν ουσιαστική πρόσβαση σε περισσότερα τους ενός εγχειρίδια κατά τη διδασκαλία.

ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα, κατά καιρούς, σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού διακρίνονταν σε εγχειρίδια αριθμητικής, εγχειρίδια γεωμετρίας, συλλογές ασκήσεων και προβλημάτων, εγχειρίδια γραμμικής ιχνογραφίας, κοινά εγχειρίδια αριθμητικής-γεωμετρίας, εγχειρίδια μαθηματικών και εγχειρίδια τετραδίων εργασιών. Σε αυτά μπορούμε να προσθέσουμε τα λεγόμενα «βιβλία για το δάσκαλο» με διδακτικές οδηγίες χρήσης των εγχειριδίων. Αν αναλογιστεί κανείς ότι το πρώτο δωρεάν εγχειρίδιο μαθηματικών του δημοτικού εκδόθηκε και διανεμήθηκε από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων το 1969, για τα παιδιά της ΣΤ΄ τάξης και το αντίστοιχο για τα παιδιά της Α΄ τάξης μόλις το 1982, κατανοούμε ότι για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα τα εγχειρίδια τα χρησιμοποιούσαν πρωτίστως οι εκπαιδευτικοί, ενώ ένας περιορισμένος αριθμός μαθητών και μαθητριών, κυρίως των μεγαλύτερων τάξεων, των ευπορότερων οικογενειών και των αστικών κέντρων συνήθως, είχε δικά του εγχειρίδια (Σδρόλιας, 2016). Αρχικά, στα αναλυτικά και ωρολόγια προγράμματα, η διδασκαλία της αριθμητικής ήταν ανεξάρτητη από εκείνη της γεωμετρίας, γι’ αυτό και τα σχολικά εγχειρίδια αριθμητικής και γεωμετρίας ήταν διακριτά ενώ, για πολλές δεκαετίες, η γεωμετρία διδάσκονταν μόνο στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη σε διακριτές ώρες σε σχέση με την Αριθμητική.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η εργασία μας είναι μέρος γενικότερης έρευνας που σχετίζεται με τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού, από την ανασύσταση του ελληνικού κράτους ως τις μέρες μας και στοχεύει να συζητήσει το ζήτημα της εναλλαγής του μοναδικού ή του πολλαπλού εγχειριδίου υπό το πρίσμα των πολιτικών που εφαρμόστηκαν και της πολυνομίας που παρήγαγαν. Όπου τα στοιχεία μας επέτρεπαν αναφέρουμε την προβλεπόμενη και πραγματική διάρκεια χρήσης τους. Δεν συζητούμε εδώ ζητήματα σχετικά με την δομή και το περιεχόμενο των εγχειριδίων ούτε εξετάζουμε σύνδεση με τα εκάστοτε αναλυτικά προγράμματα.

Στην έρευνά μας βασιστήκαμε στη μελέτη αρχειακού υλικού, κυρίως νομοθετικών κειμένων και εγκύκλιων οδηγιών επίσημων φορέων της παιδαγωγικής καθοδήγησης των εκπαιδευτικών (Κ.Ε.Μ.Ε, Π.Ι., Ι.Ε.Π). Τα δεδομένα της έρευνας που ξεκίνησε το 2016, αντλήθηκαν από ψηφιακές ή έγχαρτες βάσεις δεδομένων του Εθνικού Τυπογραφείου και των αρχείων παλαιών σχολικών μονάδων της Διεύθυνσης Π.Ε. Μαγνησίας. Μελετήθηκαν επίσης έγχαρτα ή ψηφιοποιημένα τεκμήρια ελεύθερης πρόσβασης, κυρίως εγχειρίδια και οδηγοί εκπαιδευτικών, από την Εθνική Βιβλιοθήκη, τη συλλογή των ψηφιοποιημένων εγχειριδίων του Ι.Ε.Π., την ψηφιακή βιβλιοθήκη «Ανέμη» του Πανεπιστημίου Κρήτης, το αρχείο ψηφιοποιημένων εκδόσεων της Ακαδημίας Αθηνών, τις ψηφιακές συλλογές της βιβλιοθήκης του Α.Π.Θ, καθώς και έγχαρτα τεκμήρια της προσωπικής μας συλλογής.

Επιλέχθηκαν 56 εγχειρίδια της περιόδου 1821-2021 με κριτήριο την έγκρισή τους από το Υπουργείο Παιδείας. Στη συνέχεια μελετήθηκαν τα νομοθετήματα στα οποία βασίστηκε η έγκριση αυτή, καθώς και εγκύκλιες οδηγίες για τη χρήση τους. Αναζητήθηκαν στοιχεία που αφορούσαν την μοναδικότητα ή μη των εγχειριδίων ανά περίοδο, το προβλεπόμενο αλλά και το πραγματικό διάστημα χρήσης τους. Επιλέξαμε την σειριακά χρονική παρουσίαση των δεδομένων, αποφεύγοντας ομαδοποιήσεις, για να παρουσιαστεί εμφατικά η συνεχής εναλλαγή των πολιτικών και η πολυνομία που παρήγαγε. Στο πλαίσιο μιας εργασίας συνεδρίου σαν και την παρούσα δεν ήταν δυνατόν να παρουσιαστούν όλα τα τεκμήρια της περιόδου. Αυτά όμως που επιλέχθηκαν είναι ενδεικτικά, διότι απαντούν στα ζητήματα της μελέτης μας και καλύπτουν με συνέχεια την εξεταζόμενη περίοδο.

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΟ 1821 ΕΩΣ ΤΟ 1900

Μετά την επανάσταση ήταν σπάνιες οι εγχώριες εκδόσεις εγχειριδίων μαθηματικών και σε πολύ μικρό αριθμό αντιτύπων. Πληροφορίες σχετικές με χρησιμοποιούμενα εγχειρίδια βρίσκουμε σε καταλόγους παραλαβής βιβλίων από σχολικές εφορίες. Εκεί, καταγράφονται τίτλοι όπως η Αριθμητική της «Μελίτης» όπως ονομαζόταν το μεταφρασμένο εγχειρίδιο Αριθμητικής που εκδόθηκε το 1832 στη Μάλτα, η σειρά των Παιδαγωγικών Μαθημάτων του Σ. Κομμητά με την Αριθμητική του, που εκδόθηκε στην Πέστη το 1827 και το μεταφρασμένο εγχειρίδιο Αριθμητικής του E.F. Jomard. Αυτά ήταν εγχειρίδια που απευθύνονταν και κατάρτιζαν τους δασκάλους των αλληλοδιδακτικών σχολείων. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τους «Πίνακες Αριθμητικής» αναρτώντας και μελετώντας τους στην τάξη με τη βοήθεια των πρωτόσχολων, υπό την εποπτεία του δασκάλου. Ενδεικτικά, να αναφέρουμε τους μεταφρασμένους πίνακες του Jomard, τους πίνακες του Γ. Κλεόβουλου και εκείνους που συνέταξε ο Α. Πολίτης το 1820. Η σύνταξη Πινάκων συνεχίστηκε και από άλλους συγγραφείς με δημοφιλέστερους εκείνους του Ι. Δραΐκη (Σδρόλιας, 2021; Αβδαλή, 1994).

Η Πολιτεία επιχείρησε να παρέμβει στην ελεύθερη επιλογή εγχειριδίων, με το Νόμο «Περί δημοτικών σχολείων» του 1834 (Φ.Ε.Κ. 11/3-03-1834) δηλώνοντας ότι για την εισαγωγή των διδακτικών βιβλίων θα σχεδιασθούν οδηγίες που τελικά δεν εκδόθηκαν ποτέ και αντ' αυτών ιδρύθηκε, το 1836, το «Βιβλιοπωλείο» του Βασιλικού Τυπογραφείου. Στόχος του ήταν αφ' ενός, να παρέχει βιβλία καλά και χρήσιμα, σε μέτριες τιμές και αφ' ετέρου, να εισάγει ομοιόμορφο τρόπο διδασκαλίας του λαού, όπως περιγράφεται στο άρθρο 1 του σχετικού Διατάγματος (Φ.Ε.Κ. 13/ 13-04-1836). Τα σχολεία ήταν υποχρεωμένα να χρησιμοποιούν μόνο βιβλία του Βιβλιοπωλείου, αλλά η προσπάθεια αυτή απέτυχε πολύ σύντομα, λόγω της έντονης αντίδρασης συγγραφέων και εκδοτών. Όπως αναφέρει ο Λέφας (1942, σ.321) μετά την αποτυχία μονοπώλησης των σχολικών εγχειριδίων και μέχρι το 1856, κυκλοφορούσαν στα σχολεία, χωρίς έγκριση, όσα βιβλία εκδίδονταν από τους εκδοτικούς οίκους, κατά την κρίση των διδασκόντων. Μόνη επίσημη σύσταση αποτελούσαν οι προτάσεις του Οδηγού Αλληλοδιδακτικής του Ι. Κοκκώνη, ο οποίος ήταν υποχρεωτικό εγχειρίδιο λειτουργίας των σχολείων. Στην αρχική έκδοση του 1830, γίνεται αναφορά στην μεταφρασμένη Αριθμητική του Jomard, τους Πίνακες του Κλεόβουλου και στην μεταφρασμένη Γραμμική Ιχνογραφία του Ι. Β. Φραγκιέρου. Στις επόμενες εκδόσεις του Οδηγού, από το 1842 ως το 1864, τα προτεινόμενα εγχειρίδια για το μάθημα «Αριθμητικής και Γεωμετρίας» ήταν περισσότερα, λόγω και των νέων εκδόσεων που προέκυπταν. Ενδεικτικά αναφέρουμε για τους δασκάλους τη «Στοιχειώδη Αριθμητική» και τη «Στοιχειώδη Γεωμετρία και Τριγωνομετρία» του Γ. Γεράκη, την μεταφρασμένη «Στοιχειώδη Αριθμητική και Στοιχειώδη Γεωμετρία» του Lagrange, ενώ για τους μαθητές προτείνονταν οι «Πίνακες» και η «Προπαίδεια» του Ι. Δραΐκη, η «Στοιχειώδης Αριθμητική» του Ε. Ξυδέα, το «Εγχειρίδιο Αριθμητικής» του Η. Χριστοφίδη, η «Αριθμητική» του Π. Κωνσταντινίδη, η «Διαμετρική ή Γραμμική Ιχνογραφία» του Ι. Δραΐκη κ.ά. Η κατάσταση αυτή συνεχίστηκε μέχρι το 1880, που αποφασίστηκε η κατάργηση της αλληλοδιδακτικής και επιχειρήθηκε η εφαρμογή αυστηρότερου πλαισίου με το Βασιλικό Διάταγμα «Περί διδακτικών βιβλίων κτλ.» (Φ.Ε.Κ. 101/3-10-1880), με έντονη σύσταση προς τους εκπαιδευτικούς να μην χρησιμοποιούν εγχειρίδια μη εγκεκριμένα και να μην καθοδηγούν τους μαθητές τους στην αγορά βοηθημάτων από συγκεκριμένα βιβλιοπωλεία και εκδοτικούς οίκους.

Με το νόμο ΑΜΒ΄ «Περί των διδακτικών βιβλίων της μέσης και κατωτέρας εκπαιδεύσεως» (Φ.Ε.Κ. 61/6-7-1882), προετοιμάστηκε διαγωνισμός συγγραφής εγχειριδίων, ο οποίος προέβλεπε ως εγχειρίδιο μαθηματικών τη «Συλλογή Αριθμητικών Προβλημάτων». Το 1893 επανήλθε η λογική του ενός εγχειριδίου ανά μάθημα με το νόμο ΒΡΛ΄

«Περί μεταβολής διατάξεων τινών των ΑΜΒ' και ΑΧΓ΄ νόμων περί διδακτικών βιβλίων της μέσης και στοιχειώδους εκπαιδεύσεως» (Φ.Ε.Κ. 10/19-01-1893). Η λογική αυτή ανατράπηκε πάλι με τους νόμους ΒΤΓ΄ «Περί διδακτικών βιβλίων της τε δημοτικής και της μέσης εκπαιδεύσεως» (Φ.Ε.Κ. 14/14-07-1895) και ΒΤΜΘ΄ «Περί της στοιχειώδους ή δημοτικής εκπαιδεύσεως» (Φ.Ε.Κ. 37/5-10-1895), που επανάφεραν τη λογική των πολλών εγκεκριμένων εγχειριδίων. Η ισχύς τους έληγε στη πενταετία, αλλά εισάγονταν εκ νέου με επανυποβολή τους. Έτσι χρησιμοποιήθηκαν εγχειρίδια εγκεκριμένα με τους νόμους του 1895 για δύο ή περισσότερες δεκαετίες. Ενδεικτικά εγχειρίδια με το νόμο ΒΤΓ΄ ήταν η «Συλλογή Αριθμητικών Προβλημάτων» του Μ. Σακελαρόπουλου του 1899, οι «Αριθμητικαί Ασκήσεις» του Π. Π. Οικονόμου του 1897 και του Δ. Ζαλούχου του 1896 κ.ά.

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΟ 1900 ΕΩΣ ΣΗΜΕΡΑ

Μέχρι το 1907 διήρκησε η πολιτική των πολλών εγκεκριμένων εγχειριδίων. Με το νόμο 3201 (ΓΣΑ΄) «Περί διδακτικών βιβλίων» (Φ.Ε.Κ. 60/4-04-1907), επανήλθε η λογική του μοναδικού εγχειριδίου και επετράπηκε στο δημοτικό μόνο η χρήση αναγνωστικών. Το 1916, εκδίδεται Νομοθετικό Διάταγμα με τίτλο «Περί αναστολής διατάξεων τινών του νόμου ΓΣΑ' περί διδακτικών βιβλίων» (Φ.Ε.Κ. 214/26-11-1916), στο οποίο επαναβεβαιώνεται η απαγόρευση χρήσης άλλων εγχειριδίων στο δημοτικό εκτός των αναγνωστικών.

Ένα χρόνο αργότερα η προσωρινή Κυβέρνηση Βενιζέλου στη Θεσσαλονίκη, εκδίδει το Διάταγμα 2585 (Φ.Ε.Κ. 96/30-05-1917), το οποίο επικυρώθηκε με το Νομοθετικό Διάταγμα «Περί διδακτικών βιβλίων κ.λ.π.» (Φ.Ε.Κ. 138/11-07-1917). Στο άρθρο 10 του διατάγματος, αναφέρεται ότι στα δημοτικά σχολεία «ουδενός άλλου βιβλίου γίνεται χρήσις πλην του αναγνωστικού και βιβλίου αριθμητικών ασκήσεων…και της Καινής Διαθήκης». Για τις συλλογές αριθμητικών ασκήσεων προβλέπονταν χωριστά τεύχη για τις τέσσερις ανώτερες τάξεις, γραμμένα στη δημοτική γλώσσα. Τον Σεπτέμβριο του 1917 δημοσιεύεται ο νόμος 827 «Περί κυρώσεως του από 11 Ιουλίου 1917 αναγκαστικού Β. Δ. ‘περί κυρώσεως του από 11 Μαΐου 1917 Ν. Δ. της προσωρινής κυβερνήσεως’» (Φ.Ε.Κ. 188/5-09-1917). Όπως αναφέρει η Βεντούρα (1992), ο νόμος αυτός, που συντάχθηκε από τον Δ. Γληνό, αποτελεί τη βάση της μεταρύθμισης Βενιζέλου. Επέτρεπε να εισαχθούν στις τέσσερις ανώτερες τάξεις του δημοτικού εγκεκριμένα εγχειρίδια συλλογών ασκήσεων και προβλημάτων γραμμένα στη δημοτική γλώσσα. Ο αριθμός τους δεν περιορίζονταν, ούτε και το διάστημα ισχύος της έγκρισής τους. Ένα χρόνο αργότερα, το 1918, με το νόμο 1332 «Περί τροποποιήσεως διατάξεων του νόμου 827» (Φ.Ε.Κ. 89/ 27-04-1918), περιορίστηκε εκ νέου η χρήση εχειριδίων μαθηματικών στις δύο μεγαλύτερες τάξεις, ενώ το 1923, με

Νομοθετικό Διάταγμα (Φ.Ε.Κ. 209/31-07-1923), επανήλθε και πάλι η χρήση τους στις τέσσερις ανώτερες τάξεις. Με το Νόμο 3180 του 1924 «Περί τροποποιήσεως και συμπληρώσεως του νόμου 1332 ‘περί διδακτικών βιβλίων’ ως ούτος ετροποποιήθη διά μεταγενεστέρων νόμων» (Φ.Ε.Κ. 186/7-08-1924), προβλέπονταν ότι η ισχύς της έγκρισης των εγχειριδίων ήταν δεκαετής, ενώ στο άρθρο 13 του Νομοθετικού Διατάγματος «Περί των διδακτικών βιβλίων της δημοτικής εκπαιδεύσεως» (Φ.Ε.Κ. 145/7-05-1926), ορίστηκαν και πάλι οι συλλογές αριθμητικών και γεωμετρικών προβλημάτων ως υποχρεωτικό εγχειρίδιο μαθηματικών για τις τρεις μεγαλύτερες τάξεις. Η ελεύθερη επιλογή και χρήση εγχειριδίων αποτυπώνεται στο παράδειγμα της «Συλλογής Αριθμητικών Ασκήσεων και Προβλημάτων» του Δ. Νικολαΐδη με 7η έκδοση το 1926, στο εξώφυλλο του οποίου αναγράφεται ότι είναι συμβατό με τα αναλυτικά προγράμματα του σχολικού έτους 1913-14 και εγκεκριμένο με βάση το νόμο ΒΤΓ΄ του 1895. Η ελευθερία αυτή επιχειρήθηκε να οριοθετηθεί με το νόμο 3438 «Περί διδακτικών βιβλίων» (Φ.Ε.Κ. 307/23-12-1927), ο οποίος όριζε αφ’ ενός, ότι δεν μπορούν να εγκριθούν περισσότερα από τέσσερα αναγνωστικά και τρία βοηθήματα για κάθε άλλο μάθημα και αφ’ ετέρου ότι η ισχύς των εγκεκριμένων εγχειριδίων είναι τριετής. Ενδεικτικά εγχειρίδια της περιόδου είναι οι συλλογές «Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικά» του Ι.Ν. Βαϊνόπουλου και «Ασκήσεις και Προβληματα Αριθμητικής» του Κ. Ξ. Παπανικητόπουλου, του 1929 και «Αριθμητικά Προβλήματα» των Α. Σακελλαρίου και Α. Κοντομάρη, του 1927 κ.ά.

Οι πολιτικές που εφαρμόστηκαν στην εκπαίδευση στα τέλη της δεκαετίας του 1920, ευνόησαν τη διάδοση των αρχών του «σχολείου εργασίας» ή του «Νέου Σχολείου» όπως αποκαλούνταν. Οι καινοτόμες αντιλήψεις των εκπροσώπων του για το ρόλο των εκπαιδευτικών, την εκπαιδευτική διαδικασία και τη συμμετοχή των παιδιών ήρθαν σε έντονη αντιπαράθεση με το εκπαιδευτικό και κοινωνικό κατεστημένο της εποχής. Τον Ιούνιο του 1931 εκδόθηκε ο νόμος 5045 «Περί των σχολικών βιβλίων» (Φ.Ε.Κ. 165/23-06-1931), που κατέτασσε όλα τα σχολικά βιβλία σε τρεις κατηγορίες, τα διδακτικά βιβλία – υποχρεωτικά για δασκάλους και μαθητές – τα βοηθήματα – υποχρεωτικά δύο αντίτυπά τους στη σχολική βιβλιοθήκη για χρήση – και τα ελεύθερα αναγνώσματα με απλή σύσταση για προαιρετική χρήση από δασκάλους και μαθητές. Η χρήση μοναδικού εγχειριδίου θεωρούνταν ανεπαρκής για την επίτευξη των στόχων του «Νέου Σχολείου». Η έγκρισή τους ίσχυε για μια πενταετία. Εγχειρίδια μαθηματικών του δημοτικού στη φιλοσοφία του νόμου αυτού, ήταν η σειρά «Αριθμητικά Προβλήματα» του Μ. Παπαμαύρου με διακριτά τεύχη για τις τάξεις Β΄ έως ΣΤ΄, του 1933-34 και «Ο Μικρός Γεωμέτρης» του Ε. Μιχαηλίδη με επανεκδόσεις από το 1927 ώς το 1946.

Οι συντηρητικές αντιδράσεις σε συνδυασμό με τη πολιτική αλλαγή που διαδέχθηκε την κυβέρνηση Βενιζέλου, οδήγησε στην έκδοση του νόμου 5911 «Περί διδακτικών βιβλίων» (Φ.Ε.Κ. 357/18-11-1933), που επανέφερε το ζήτημα στην παλαιότερη κατάσταση. Καταργήθηκαν οι διατάξεις που ενθάρρυναν τη χρήση περισσότερων εγχειριδίων ανά τάξη και μάθημα, ενώ επανήλθε η χρήση εγχειριδίων μαθηματικών στις δύο τελευταίες τάξεις, γραμμένα σε απλή καθαρεύουσα. Εγκεκριμένα εγχειρίδια της περιόδου αυτής είναι ενδεικτικά τα «Αριθμητικά Προβλήματα» του Χ Μπαρμπαστάθη του 1934, των Μ. Λιουδάκη και Σ. Αλοΐζου του 1936, το «Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής» του Π. Τόγκα του 1937 κ.ά. Ο νόμος αυτός ίσχυσε μέχρι την ίδρυση του Οργανισμού Εκδόσεων Σχολικών Βιβλίων (Ο.Ε.Σ.Β) με τον αναγκαστικό νόμο 952 του 1937 (Φ.Ε.Κ. 469/19-11-1937), του Ι. Μεταξά. Αν και ο Οργανισμός στόχευε στην έκδοση και διάθεση εγκεκριμένων διδακτικών και βοηθητικών βιβλίων, το πρώτο δωρεάν εγχειρίδιο μαθηματικών για το δημοτικό όπως προαναφέραμε, η Αριθμητική-Γεωμετρία του Ν. Διαμαντόπουλου, εκδόθηκε πολύ αργότερα, το 1969.

Την δεκαετία 1940-1950, της κατοχής και του εμφυλίου, στα λειτουργούντα δημοτικά σχολεία, χρησιμοποιήθηκαν εγκεκριμένα εγχειρίδια προηγούμενων περιόδων ή «με σύσταση», μέσω εγκυκλίων, του Υπουργείου Παιδείας. Αυτό δηλώνονταν από τους συγγραφείς και τους εκδότες στο εξώφυλλο, το εσώφυλλο ή την τελευταία σελίδα του βιβλίου. Ενδεικτικά παραδείγματα τέτοιων εγχειριδίων είναι τα «Αριθμητικά Προβλήματα» του Χ. Μπαρμπαστάθη του 1946, τα «Αριθμητικά Προβλήματα» του Π. Πούντζα του 1947, το «Ασκήσεις και Προβλήματα Αριθμητικής και Γεωμετρίας» του Κ. Κωνσταντά του 1948, το «Αριθμητική και Προβλήματα» των Κ. Στεργιόπουλου και Γ. Σακκά του 1949 κ.ά.

Την περίοδο 1950-1970 αυξήθηκαν οι ιδιωτικές εκδόσεις εγχειριδίων μαθηματικών για όλες τις τάξεις του δημοτικού. Το γεγονός αυτό συνάδει με την αύξηση του μαθητικού πληθυσμού και την βελτίωση της φοίτησης στη στοιχειώδη εκπαίδευση. Παγιώνεται η πρότερη κατάσταση να εισάγεται ένα εγχειρίδιο αριθμητικής και ένα γεωμετρίας, στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, με απόφαση του συλλόγου διδασκόντων. Η έγκριση δίνονταν με σχετικές Υπουργικές Αποφάσεις με ισχύ τριετίας. Ενδεικτικά εγχειρίδια της περιόδου αυτής είναι η «Πρακτική Αριθμητική» και η «Πρακτική Γεωμετρία» του Γ. Καφεντζή, η «Πρακτική Αριθμητική» των Κ. Βοσταντζή και Ε. Αναγνωστόπουλου και η «Πρακτική Γεωμετρία» των Α. Μπάμπαλη και Σ. Βουρνά, η «Αριθμητική και Προβλήματα» του Σ. Ράλλη και η «Πρακτική Γεωμετρία» της Ο. Μακρή που εκρίθηκαν μόνο για το έτος 1968-69 κ.ά. Οι μικρότερες τάξεις χρησιμοποιούσαν μη εγκεκριμένα βοηθήματα του ελεύθερου εμπορίου. Με το νομοθετικό διάταγμα 4379 «Περι οργανώσεως και διοικήσεως της γενικής (στοιχειώδους και μέσης) εκπαιδεύσεως» του 1964 (Φ.Ε.Κ. 182/24-10-1964), προβλέπονταν η παραγωγή σχολικών εγχειριδίων και για το δημοτικό από τον Οργανισμό Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Το 1970 εκδόθηκε το Ν.Δ. 749 «Περί διδακτικών βιβλίων» (Φ.Ε.Κ. 277/18-12-1970), στο οποίο προβλέπονταν οι διαδικασίες συγγραφής και δωρεάν διανομής των εγχειριδίων που θα ίσχυαν για μια πενταετία, ενώ σημειώνονταν ότι μπορούσαν να εγκριθούν περισσότερα του ενός βιβλία. Στις μικρότερες τάξεις δίνονταν η δυνατότητα χρήσης βοηθημάτων του ελεύθερου εμπορίου, ύστερα από σχετική υπουργική απόφαση. Τα εγχειρίδια που διανεμήθησαν κατά τη δικτατορία από το 1969 ως το 1972, ήταν η «Αριθμητική-Γεωμετρία» του Ν. Καρκάνη για την Γ΄τάξη, του Η. Σαμαρά για την Δ΄ τάξη, των Α. Κυριαζόπουλου και Β. Αλεξόπουλου για την Ε΄ τάξη και του Ν. Διαμαντόπουλου για την ΣΤ΄ τάξη. Στις μικρές τάξεις εξακολουθεί η χρήση των γνωστών βοηθημάτων των Κώτσιρα-Μάγου ή των εκδόσεων Καμπανά κ.λ.π.

Η κυβέρνηση «Εθνικής Ενότητας» του Καραμανλή με το Νομοθετικό Διάταγμα 56 «Περί επανακρίσεως των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δημοτικής Εκπαιδεύσεως κ.λ.π.» (Φ.Ε.Κ. 258/ 23-09-1974) στόχευε στην αντικατάσταση των σχολικών εγχειριδίων της δικτατορίας. Αυτό πραγματοποιήθηκε δυο χρόνια αργότερα με την «Αριθμητική-Γεωμετρία» της Γ. Κωστάκη στην Γ΄ τάξη, των Ι. και Μ. Τζούφλα στην Δ΄ τάξη, του Η. Σαμαρά και των Α. Καρφοπούλου, Ε. Χαλκιαδάκη, Ι. Τζούφλα και Μ. Τζούφλα στην Ε΄τάξη και του Π. Μέγα στην ΣΤ΄τάξη. Με την πολιτική αλλαγή της κυβέρνησης Παπανδρέου, το 1982, ανατέθηκε, ύστερα από σχετική προκήρυξη, σε συγγραφικές ομάδες η παραγωγή «διδακτικών πακέτων» για όλες τις τάξεις με τον τίτλο «Τα μαθηματικά μου» που αποτελούνταν από τεύχη εγχειριδίων και τετραδίων εργασιών για τα παιδιά, καθώς και «βιβλίο δασκάλου» για την υποβοήθηση των εκπαιδευτικών. Στο νόμο 1566 του 1985 με τίτλο «Δομή και λειτουργία της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και άλλες διατάξεις» (Φ.Ε.Κ. 167/30-09-1985), σημειώνεται ότι στα διδακτικά βιβλία περιλαμβάνονται και όλα τα βιβλία ή έντυπα ή τεχνικά μέσα, όπως κασέτες ή μαγνητοταινίες, τα οποία βοηθούν τους εκπαιδευτικούς στο έργο τους. Στο νόμο 2525 του 1997, με τίτλο «Ενιαίο Λύκειο, πρόσβαση των αποφοίτων στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου και άλλες διατάξεις» (Φ.Ε.Κ. 188/23-09-1997), προβλέπονταν η εισαγωγή περισσότερων του ενός εγκεκριμένων διδακτικών πακέτων ανά τάξη και μάθημα. Τα διδακτικά πακέτα εγχειριδίων του 1982 ήταν τα τελευταία του 20^{ου} αιώνα και αντικαταστάθηκαν το 2005 από νέα διδακτικά πακέτα που χρησιμοποιούνται έως σήμερα, με εξαίρεση μία αντικατάσταση που αφορούσε το διδακτικό πακέτο μαθηματικών της Ε΄ δημοτικού, που πραγματοποιήθηκε το 2018. Σήμερα συζητείται και αναμένεται, ύστερα και από την ολοκλήρωση νέων αναλυτικών προγραμμάτων η εισαγωγή νέων εγχειριδίων μαθηματικών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι πολιτικές που ακολουθήθηκαν στην εισαγωγή και χρήση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών στο δημοτικό, χαρακτηρίζονται από την συνεχή εναλλαγή επικράτησης του ενός ή των περισσότερων εγκεκριμένων εγχειριδίων από εποχή σε εποχή. Ακολούθησαν περισσότερο τις πολιτικές του ελεύθερου ανταγωνισμού και του κρατικού μονοπωλείου και λιγότερο την πολιτική του ρυθμιστικού κρατικού παρεμβατισμού (Χαραλάμπους, 2009).

Με εξαίρεση τη μικρή περίοδο εφαρμογής του νόμου 5045 και των αρχών του σχολείου εργασίας όπου τα παιδιά και οι εκπαιδευτικοί είχαν στη διάθεσή τους περισσότερα του ενός βιβλία ανά τάξη, σε όλες τις άλλες περιόδους δεν υλοποιήθηκε η χρήση «πολλαπλού» βιβλίου στα μαθηματικά. Αυτό που υλοποιούνταν ήταν η επιλογή ενός από τα διαθέσιμα εγκεκριμένα. Ίσως για το λόγο αυτό η Βεντούρα (1992) χαρακτηρίζει το νόμο 5045 «μοναδικό» σχετικά με τη στάση του απέναντι στο διδακτικό βιβλίο.

Οι εναλλαγές ανάμεσα στο μοναδικό ή τα περισσότερα εγχειρίδια και η επιλογή του ενός από τα πολλά, συντηρούσαν μια διαρκή αντιπαλότητα και διαπλοκή ανάμεσα σε εκδοτικούς οίκους, συγγραφείς και εκπαιδευτικούς και οδηγούσαν σε συνεχείς αποτυχίες και παλινδρομίσεις, τις προσπάθειες της Πολιτείας να ελέγξει την κατάσταση. Η χρήση βοηθημάτων στις σχολικές τάξεις, απαντάται και σήμερα, ως ένα βαθμό και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, καταδεικνύοντας ίσως την ανάγκη των εκπαιδευτικών για μεγαλύτερη υποστήριξη στο έργο τους (Δίκαρου & Τριανταφύλλου, 2019).

Η άγονη κριτική του παρόντος με νότες νοσταλγίας του παρελθόντος και προσδοκίες βελτίωσης του μέλλοντος χαρακτηρίζει ενίοτε το «τοπίο» εισαγωγής νέων εγχειριδίων των μαθηματικών. Το ζητούμενο, κατά την άποψή μας, είναι η χρήση περισσότερων εγχειριδίων, συμβατών με τις εκπαιδευτικές ανάγκες των παιδιών και τις μεγάλες προκλήσεις (πολυπολιτισμικότητα, διαφορετικότητα, τεχνολογικές εξελίξεις, ισότητα ευκαιριών κ.λπ.), που διατηρούν όμως τις αρχές της μαθηματικής επιστήμης.

Σημείωση

1. Τα νομοθετικά κείμενα που αναφέρονται στην παρούσα εργασία, ανακτήθηκαν προς μελέτη από τη διεύθυνση http://www.et.gr/index.php/anazitiseis του Εθνικού Τυπογραφείου. Παραθέτουμε και το Φ.Ε.Κ. κάθε νομοθετήματος για ασφαλέστερη αναζήτηση τους από κάθε ενδιαφερόμενο/η.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αβδαλή, Κ. Α. (1994). Ο Καποδίστριας και η Επιτροπή της Προπαιδείας. Δωδώνη. *Επιστημονική Επετηρίδα Τμήματος Ιστορίας και Αρχαιολογίας Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων*, τ. 23 (1), 5-80. Ανακτήθηκε από http://195.251.197.192/jspui/handle/123456789/6383?mode=more

Βεντούρα, Λ. (1992). Η νομοθεσία περί διδακτικών βιβλίων. Μία εστία συγκρούσεων εκπαιδευτικού δημοτικισμού και αντιμεταρρυθμιστών (1907-1937), Μνήμων 14, 91-114. Ανακτήθηκε στις 31/01/2021 από τη διεύθυνση https://doi.org/10.12681/mnimon.170

Δίκαρου, Α. & Τριανταφύλλου, Χ. (2019). Μη θεσμικές πηγές που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών. Στο Κ. Χρήστου (Επ.). Πρακτικά 8ου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ., 401- 410. Λευκωσία: Εν.Ε.Δι.Μ.

Λέφας, Χ. (1942). Ιστορία της Εκπαιδεύσεως. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Μαυροσκούφης Κ. Δ. (2011). Προσπάθειες για τη θεμελίωση εκπαιδευτικού συστήματος στα χρόνια του Αγώνα και του Καποδίστρια, 1821-1832: συνέχειες και ασυνέχειες. Στο Σ. Μπουζάκης (Επ.) *Πανόραμα Ιστορίας της Εκπαίδευσης. Όψεις και Απόψεις*, τ. Β΄, 69-97. Αθήνα: Gutenberg.

Σδρόλιας, Κ. (2016). Η εξέλιξη της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο μέσα από τα διδακτικά εγχειρίδια της τελευταίας πεντηκονταετίας. Στο Σ. Γρόσδος (Επ.). *Προγράμματα Σπουδών - Σχολικά εγχειρίδια: Από το παρελθόν στο παρόν και το μέλλον. Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου* , τ. Γ΄, 279-289.

Σδρόλιας, Κ. Α. (2021). «Περί των βιβλίων των εις χρήσιν των δημοτικών σχολείων…εις το μάθημα Αριθμητικής και Γεωμετρίας»: τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών των αλληλοδιδακτικών σχολείων. Στο Ε. Καταρτζή, Γ. Παπαδημητρίου & Χ. Κωσταρή (Επ.) *«Εκπαίδευση στον 21ο αιώνα: Ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, της δημιουργικότητας και της καινοτομίας»*. Πρακτικά 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου του ΕΚΕΔΙΣΥ, τ. Ε΄, 50-62.

Χαραλάμπους, Δ. (2009). Το σχολικό βιβλίο στην Ελλάδα και 'οι πολιτικές των άκρων'. *Συγκριτική και Διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση*, 13, 53-85.

ΟΡΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΥΠΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΤΥΠΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ

Χούτου Χρυσούλα

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

chrychou@math.uoa.gr

Η εργασία [1] ασχολείται με το όριο μεταξύ τυπικών και άτυπων μαθηματικών ανάμεσα στα μαθηματικά (Μ) και τις εικαστικές τέχνες (ΕΤ) όπως εμφανίζεται κατά τη συνεργασία των εκπαιδευτικών τους. Τα δεδομένα από 10 συναντήσεις μιας ομάδας εκπαιδευτικών Μ και ΕΤ ενός καλλιτεχνικού σχολείου, όπου με τη βοήθεια της ερευνήτριας (Ε) προσπαθούν να συνδέσουν τα δυο πεδία στη διδασκαλία, αναλύονται με τεχνικές θεμελιωμένης θεωρίας. Τα αποτελέσματα αφορούν στην εμφάνιση του ορίου στα ίδια τα αντικείμενα και τη μάθηση, και στη διαπραγμάτευσή του από τα μέλη, ενώ αναδεικνύουν τη σημασία της σύνδεσης τυπικών και άτυπων μαθηματικών για τη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς και της συνεργασίας των εκπαιδευτικών ως προς αυτό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία βασίζεται στη σύνδεση ανάμεσα στα Μ και τις ΕΤ (π.χ. κοινές έννοιες και διαδικασίες), συνδέσεις που μπορούν να φτάσουν ακόμα και σε επίπεδο ενός ενιαίου καθολικού αναλυτικού προγράμματος, όπου οι εκπαιδευτικοί των δύο πεδίων καλούνται να συνεργαστούν για να τα αναδιαμορφώσουν (Bickley-Green, 1999). Τα οφέλη ενσωμάτωσης των εικαστικών κι άλλων τεχνών στα μαθηματικά για τη μάθηση περιλαμβάνουν την εμπλοκή σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης (Jacobs, 2000), την υποστήριξη διερευνητικών μαθησιακών προσεγγίσεων μέσω της διαδικασίας δημιουργίας τέχνης (von Renesse & Ecke, 2016), την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης και τη σύνδεση των μαθηματικών της τάξης με τις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών (Presmeg, 2009).

Τυπικά και άτυπα μαθηματικά

Οι μαθηματικές πρακτικές που εμφανίζονται σε πλαίσια όπως η τέχνη, παρατηρούνται συχνά ως μη τυπικές έναντι των τυπικών μαθηματικών της σχολικής τάξης. Πολλοί καλλιτέχνες και τεχνίτες φαίνεται να χρησιμοποιούν άτυπα μαθηματικά στην εργασία τους όπως η άτυπη κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. Stathopoulou, 2007) και οι άτυπες διαδικασίες μέτρησης και τα άτυπα μαθηματικά εργαλεία (Χούτου, 2017) σε πολιτισμικά τεχνουργήματα. Ακόμα και εντός της μαθηματικής εκπαίδευσης, τα μαθηματικά έχουν τυπικές και άτυπες πτυχές (Raman, 2002). Αντίθετα με τα άτυπα μαθηματικά, τα τυπικά περιλαμβάνουν μία ρητά διατυπωμένη γραμματική με κανόνες και σύμβολα, ενώ αναφέρεται ο άτυπος λόγος (π.χ. απλή λεκτική μορφή) έναντι του τυπικού (π.χ. μορφή εκφράσεων με σύμβολα) (Caspi & Sfard, 2012). Ακόμα, οι επιστημονικές έννοιες «έχουν τη δική τους αφηρημένη και τυπική συνοχή», ενώ οι καθημερινές έννοιες «προκύπτουν στον πλούτο της καθημερινής ζωής» (Daniels, 2017, σελ. 20). Οι άτυπες πτυχές (π.χ., μη αυστηρά επιχειρήματα, προαισθήσεις, διαισθήσεις) συχνά θεωρούνται θεμελιώδεις για πιο τυπικές (π.χ. αυστηρά επιχειρήματα, τυπική απόδειξη) (Raman, 2002), π.χ. μοντέλα άτυπης αιτιολόγησης που μαθηματικοποιούνται παράγοντας μοντέλα για τυπική αιτιολόγηση (Cobb, 2002). Επιπλέον, ο Arcavi (1994) εστιάζει στην κατανόηση των τυπικών (σύμβολα) μέσω άτυπων προσεγγίσεων. Περιγράφει μία άτυπη απόδειξη μέσω μιας δίπλωσης origami και την χαρακτηρίζει «ευφυέστατη και όμορφη λύση από μόνη της: εντελώς γενική, χωρίς καθόλου σύμβολα και οπτικά ελκυστική». Αναφέρει την αναγνώριση από έναν μαθητή ότι «παρότι δεν χρησιμοποιεί καθόλου σύμβολα, συνδέεται πολύ στενά με την αλγεβρική επίλυση που παρουσιάστηκε», αναγνωρίζοντας το νόημα των συμβόλων στην δίπλωση (σελ. 30). Τονίζει όμως τη δυσκολία των μαθητών να συντονίσουν τους δύο τύπους, αποτυγχάνοντας να αξιοποιήσουν τις άτυπες κατανοήσεις για να παράγουν τυπικά επιχειρήματα ή χειριζόμενοι τυπικώς τα σύμβολα χωρίς βαθιά κατανόηση του τι σημαίνουν (Raman, 2002). Αιτιολογεί δε τη δυσκολία αυτή με το ότι οι μαθητές έχουν πολύ λίγη εμπειρία σε αυτόν το συντονισμό, ώστε να αναπτύξουν την τάση να το κάνουν από μόνοι τους.

Στο Χούτου & Πόταρη (2017) παρουσιάζονται οι συνδέσεις που εμφανίζονται μεταξύ Μ και ΕΤ κατά τη συνεργασία των εκπαιδευτικών των δύο κοινοτήτων με στόχο την ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Χούτου & Πόταρη, 2017). Όπως συμβαίνει συνήθως στις συνεργασίες μεταξύ διαφορετικών κοινοτήτων, φαίνεται να αναδύονται κάποια *όρια* (Akkerman & Bakker, 2011) μεταξύ τους. Από αυτά, τα όρια που αφορούν στις μαθηματικές πρακτικές και στα εργαλεία παρουσιάζονται στο Choutou & Potari (in press). Εδώ, εστιάζουμε συγκεκριμένα στο όριο «τυπικά έναντι άτυπων μαθηματικών» όπως αυτό αναδύεται μεταξύ της διδασκαλίας των Μ και των ΕΤ κατά τη συνεργασία αυτή. Το ερευνητικό ερώτημα είναι: Σε ποιες πτυχές αφορά το όριο «τυπικά έναντι άτυπων μαθηματικών» μεταξύ της διδασκαλίας των Μ και των ΕΤ και τι διαπραγμάτευση υφίσταται κατά τη συνεργασία των εκπαιδευτικών των δυο κοινοτήτων;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ενσωμάτωση της τέχνης - Κοινότητες πρακτικής (ΚΠ) - Όρια

Οι Burnaford et al. (2007) αναγνωρίζουν την ενσωμάτωση των τεχνών, μεταξύ άλλων, ως μια διαδικασία διδακτικών συνδέσεων, π.χ. οικοδόμηση δεσμών μεταξύ της μάθησης στις τέχνες και της μάθησης σε άλλο πεδίο, και ως συνεργατική σύμπλεξη (σελ. 11), π.χ. η επαγγελματική ανάπτυξη ως στοιχείο που την ορίζει ως ενσωμάτωση ανθρώπων παρά περιεχομένου (σελ. 18), υπονοώντας την έννοια της κοινότητας. Ως προς αυτό, ο Wenger (1998) περιγράφει τις ΚΠ ως ομάδες ανθρώπων αμοιβαίως εμπλεκομένων σε ένα από κοινού επιχείρημα που δημιουργεί ένα κοινό ρεπερτόριο, όπου η διαπραγμάτευση του νοήματος δημιουργείται μέσω της συμμετοχής και της εκπραγμάτωσης.

Εστιάζοντας στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ κοινοτήτων, μιλά για τα *όρια* και τη *διέλευσή* τους. Αυτά ορίζονται ως «κοινωνικο-πολιτισμικές διαφορές που οδηγούν σε ασυνέχεια στη δράση ή την αλληλεπίδραση», υποδηλώνοντας ταυτόχρονα «μια ομοιότητα και ασυνέχεια με την έννοια ότι εντός της ασυνέχειας δύο ή περισσότερα πλαίσια σχετίζονται μεταξύ τους με συγκεκριμένο τρόπο» (Akkerman & Bakker, 2011, σελ. 133). Η διέλευσή τους αναφέρεται στις αλληλεπιδράσεις ενός ατόμου σε διαφορετικά πλαίσια (Suchman, 1994) για την εδραίωση συνέχειας μέσω «διαπραγμάτευσης και συνδυασμού στοιχείων» (Engeström et al., 1995, σελ. 319) (στο Akkerman & Bakker 2011, σελ. 133), όπου νέο νόημα και δυνατότητες ίσως προκύψουν. Εδώ, οι *διαμεσολαβητές* εισάγουν στοιχεία μιας πρακτικής σε μια άλλη (δημιουργία συνδέσεων, μετακίνηση γνώσης, εξερεύνηση νέων περιοχών), ενώ τα *οριακά αντικείμενα* (τεχνουργήματα, ομιλίες, διαδικασίες) επιτρέπουν στις πρακτικές να διαπραγματεύονται σχέσεις και να συνδέουν οπτικές (Wenger, 1998). Έτσι, τα όρια είναι πιθανοί πόροι μάθησης. Ο Wenger (1998) αναφέρει 3 διαδικασίες ως γέφυρες διέλευσης ορίων: συντονισμός (προσαρμογή/τυποποίηση πρακτικών, συντονισμένες δράσεις για συμμετοχή όλων), διαφάνεια (πρόσβαση σε έννοιες/κατανοήσεις πρακτικών) και γ) διαπραγματευσιμότητα (διαπραγμάτευση προοπτικών, πολλαπλών φωνών). Ομοίως, οι Akkerman & Bakker (2011) ονομάζουν 4 μηχανισμούς μάθησης στα όρια: αναγνώριση [τι αφορά κάθε πρακτική, πώς σχετίζονται ή όχι μεταξύ τους], συντονισμός (προσπάθειες μετάφρασης μεταξύ τους, διαδικασίες τυποποίησης), αναστοχασμός (καθορισμός διαφορετικών οπτικών, το να κοιτάς την πρακτική σου μέσα από τα μάτια του άλλου) και μετασχηματισμός (αλλαγές στις πρακτικές, δημιουργία ενδιάμεσης πρακτικής).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα λαμβάνουν μέρος δυο καλλιτεχνικά σχολεία στην Ελλάδα (Γυμνάσιο-Λύκειο). Αρχικά, ακολουθήθηκαν εθνογραφικές προσεγγίσεις (Allan, 2017) (σε κάθε σχολείο: 2 επισκέψεις/εβδομάδα, 1 ολόκληρη ημέρα/ επίσκεψη, διάρκεια 8 μηνών, σημειώσεις από παρατηρήσεις στην τάξη Μ και ΕΤ, οπτικοακουστικά αρχεία μαθημάτων και εκδηλώσεων, ανεπίσημες συζητήσεις με εκπαιδευτικούς). Την 2η σχολική χρονιά σχηματίστηκε 1 ομάδα συνεργασία σε κάθε σχολείο (2 εκπαιδευτικοί Μ, 5 εκπαιδευτικοί ΕΤ και η Ε). Οι συναντήσεις (17 σύνολο), ενσωματωμένες στο καθημερινό σχολικό περιβάλλον, πραγματοποιούνταν στο γραφείο των εκπαιδευτικών 1 φορά κάθε 2 εβδομάδες. Οι 10 πρώτες συναντήσεις αφορούσαν σε μια φάση εξοικείωσης μεταξύ των δύο κοινοτήτων. Ειδικοί πόροι (εικαστικά-καλλιτεχνικά αντικείμενα, δράσεις μαθητών, κοινοί τόποι στα προγράμματα σπουδών, θέματα διδασκαλίας) επιλέχθηκαν ως πιθανά οριακά αντικείμενα και δόθηκαν στην ομάδα για διαπραγμάτευση. Στις τελευταίες 7 συναντήσεις, οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να σχεδιάσουν και εφαρμόσουν από κοινού δραστηριότητες ενσωμάτωσης στις τάξεις τους και να αναστοχαστούν το τι συνέβη. Τα δεδομένα περιλάμβαναν σημειώσεις πεδίου, οπτικο-ακουστικά αρχεία (συναντήσεων και εφαρμογών), σχέδια μαθημάτων και γραπτές αναφορές αναστοχασμού. Στο Choutou (2019), παρέχεται μια λεπτομερής άποψη για το σχεδιασμό της μελέτης και τη διευκόλυνση της συνεργασίας.

Για το παρόν, αντλούμε τα δεδομένα από τις 10 πρώτες συναντήσεις της μιας ομάδας και εστιάζουμε στο αναδυόμενο όριο μεταξύ τυπικών και άτυπων μαθηματικών κατά τη σύνδεση της διδασκαλίας των Μ και των ΕΤ όπως εμφανίζεται στη συνεργασία της ομάδας [υιοθετώντας τον ορισμό των Akkerman & Bakker (2011)]. Στην ανάλυση, χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις θεμελιωμένης θεωρίας (Charmaz, 2014) χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Atlas.ti, προσδιορίζοντας θέματα και κατηγορίες. Το 1ο επίπεδο ανάλυσης πρόσφερε μια σφαιρική εικόνα των δεδομένων και στο συστημικό δίκτυο που αναδύθηκε ταυτοποιήθηκαν οι κατηγορίες που αφορούν στο εν λόγω όριο. Σε 2ο επίπεδο έγινε η ιχνηλάτησή του μέσα στις υπόλοιπες κατηγορίες. Στη συνέχεια, περιγράφουμε τις σχετικές κατηγορίες και υποκατηγορίες που αναδύθηκαν προσφέροντας παραδείγματα από τα δεδομένα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν το όριο «τυπικά έναντι άτυπων μαθηματικών» μεταξύ της διδασκαλίας Μ και ΕΤ ως προς δύο κατηγορίες, τις *πτυχές* στις οποίες αφορά και τη *διαπραγμάτευση* που υφίσταται μέσα στην ομάδα. Στην εικόνα 1 παρουσιάζεται το συστημικό δίκτυο. Τα Μ1, Μ2 και ΕΤ1, …, ΕΤ5 αντιπροσωπεύουν τους εκπαιδευτικούς Μ και ΕΤ, αντίστοιχα.

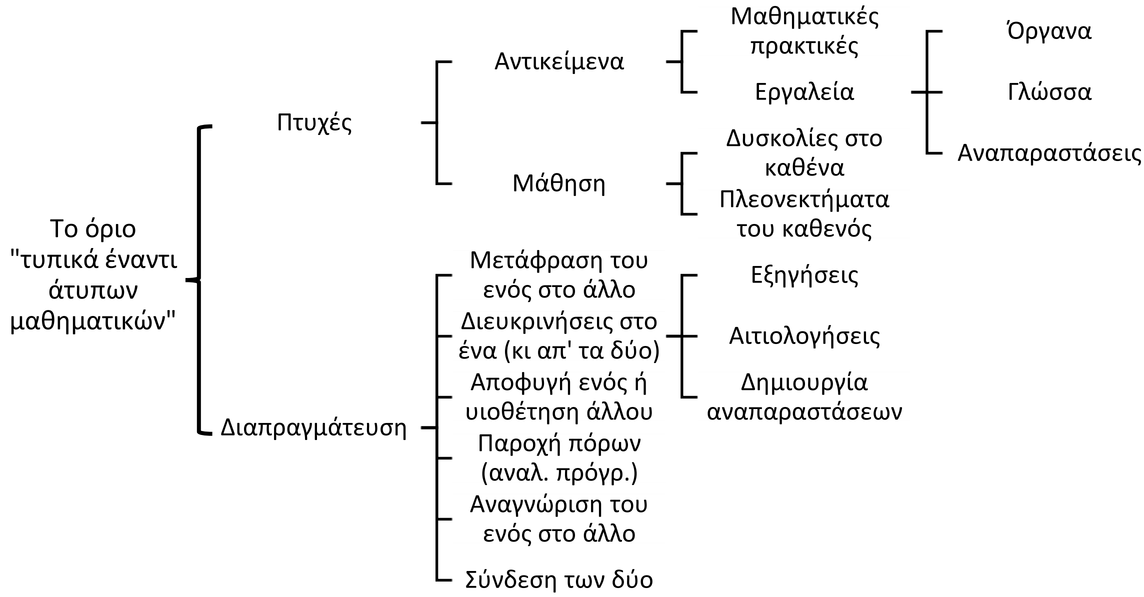
Πρώτον, το όριο εμφανίζεται να αφορά σε δυο *πτυχές*: από τη μία στα ίδια τα *αντικείμενα* και από την άλλη στη *μάθηση*. Ως προς τα αντικείμενα, αφορά σε: *Μαθηματικές πρακτικές*. Εδώ περιλαμβάνονται διαδικασίες (π.χ. μέτρηση), διεργασίες (π.χ. αιτιολόγηση), κατασκευές (π.χ.

γεωμετρικές). Για παράδειγμα, εμφανίζονται τυπικές διαδικασίες και κατασκευές και τυπικοί μέθοδοι διερεύνησης ή αιτιολόγησης, όπως η αλγεβρική επίλυση και η αναλυτική προσέγγιση, η τυπική μέτρηση και η γενίκευση μέσω μετασχηματισμών (π.χ. αξονική συμμετρία) από τους μαθηματικούς έναντι άτυπων οπτικών μεθόδων εκ μέρους των εικαστικών. Για παράδειγμα, η Ε περιγράφει την άτυπη κατασκευή κύκλου από έναν καλλιτέχνη που αρχικά φτιάχνει ένα τετράγωνο, παίρνει τα μέσα των διαγωνίων και μετά παίρνει:

> περίπου το μέσο αυτής της απόστασης (του μισού μίας διαγωνίου) και λίγο πιο πέρα. Το κάνει αυτό σε κάθε σημείο (κάθε διαγώνιο), τα ενώνει όσο μπορεί κυκλικά και του βγαίνει περίπου κύκλος. Αν το κάνετε αλγεβρικά (εύρεση σημείου τομής κύκλου και διαγωνίου), βγαίνει ρίζα, άρρητος, για αυτό δεν βγαίνει ακριβώς στη μέση. Η απόσταση αυτή (του σημείου του κύκλου από το σημείο τομής των διαγωνίων) προς αυτή (μισή διαγώνιος), δεν είναι ακέραιος.

Επιπλέον, διερευνώντας το γιατί το πεντάγωνο δεν πλακοστρώνει (χωρίς κενά) το επίπεδο, η Μ1 αναφωνεί «κάτι με τους διαιρέτες δεν έχει να κάνει;» και βρίσκει τον αλγεβρικό τύπο (γωνία κανονικού πολυγώνου), ενώ η ΕΤ2 ακολουθεί μία οπτική προσέγγιση χωρίζοντας τα κανονικά πολύγωνα (τετράγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, εξάγωνο) σε επιμέρους τρίγωνα ώστε να δει «με το μάτι» τι συμβαίνει με τις γωνίες. Επίσης, σε ένα μαθηματικό πρόβλημα με ένα πολυγωνικό πλακάκι, η ΕΤ2 διερωτάται εάν δύο πλευρές είναι όντως ίσες, όπως της φαίνονται. Η Μ1 βλέπει τις μετρήσεις που δίνονται στην υπόθεση και απαντά καταφατικά, ενώ η ΕΤ2 λέει: «αυτό φαντάζομαι παίζει ρόλο (στο ότι πλακοστρώνει το επίπεδο). Και φαντάζομαι ότι κάποια πλευρά θα είναι διπλάσια από μία άλλη». Ομοιοτρόπως η Μ1 απαντά καταφατικά και η ΕΤ2 λέει ότι «μπορείς να το δεις με το μάτι σου! Γιατί όπως είναι αυτές εδώ, το ίδιο θα πρέπει να είναι κι αυτές (για να συνεχιστεί το μοτίβο)».

Εργαλεία. Εδώ περιλαμβάνονται: α) *όργανα*. Για παράδειγμα, σχοινί και πινέζα ή κυκλικά αντικείμενα (άτυπο) αντί για διαβήτης (τυπικό) για τη δημιουργία κύκλων και «οπτική μέτρηση» και βελόνα μέτρησης (ελεύθερο σχέδιο) (άτυπο) ως μέσα μέτρησης και σύγκρισης αντί για χάρακα (τυπικό) ή χρήση μόνο των χεριών και του σχεδιαστικού ενστίκτου. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα χειραπτικά υλικά καθοδηγούν τις μαθηματικές πρακτικές που θα χρησιμοποιήσει ο καλλιτέχνης (άτυπες ή τυπικές) (π.χ., χρήση γεωμετρικών/ εμπειρικών εργαλείων με τυπική/άτυπη μέτρηση αντίστοιχα)· β) *γλώσσα*. Για παράδειγμα, καθρέφτης αντί για αξονική συμμετρία και κουλουράκι αντί για κύκλο. Περιλαμβάνονται περιγραφές με χρήση μεταφορών, όπως, κατευθύνσεις και συναντήσεις των γραμμών (άτυπο) αντί για γωνίες (τυπικό), γυρίζοντας σαν ανεμόμυλος αλλά σε ίσες αποστάσεις (άτυπο) αντί για περιστροφή ίσων μοιρών (τυπικό)· γ) *αναπαραστάσεις*. Εδώ περιλαμβάνονται άτυπες εικαστικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας (π.χ. θετικό-αρνητικό ως εσώγλυφο – ξώγλυφο) ή αναπαραστάσεις με τα χέρια [π.χ. αναπαράσταση των y=x και y=-x με τα χέρια (δύο διαγώνιοι) στον αέρα].



Εικόνα 1: Το όριο «τυπικά έναντι άτυπων μαθηματικών» μεταξύ Μ και ΕΤ

Ως προς τη *μάθηση*, η εμφάνιση του ορίου αφορά σε: *Δυσκολίες*. α) *Στα τυπικά*. Εδώ αναφέρονται δυσκολίες των μαθητών στα τυπικά μαθηματικά. Συχνά είναι η έλλειψη κατανόησης, η απουσία νοηματοδότησης, η θεωρητική και αφηρημένη φύση τους και η απουσία εφαρμογής τους, η έλλειψη μιας προβληματικής προς διερεύνηση, ο χειρισμός των εργαλείων, προκαλώντας τους αρνητικά συναισθήματα προς αυτά. Για παράδειγμα, στη συζήτηση για τις πλακοστρώσεις, η ΕΤ3 τονίζει τη δυσκολία που προκαλεί στους μαθητές των Μ ο φορμαλισμός, λέγοντας χαρακτηριστικά: «Πάντως τα καταλαβαίνουν πάρα πολύ (με τις ΕΤ). Δηλαδή το είδες. Δεν είναι ανάγκη να το πω εγώ, δεν χρειάζεται δεύτερη κουβέντα. Αλλά άμα τους τα πεις με ένα τύπο…. Εκεί είναι το δύσκολο»· β) *Στα άτυπα*. Εδώ αναφέρονται η δυσκολία κατανόησης και ορθής εφαρμογής τεχνικών και μοντέλων των εικαστικών, καθώς και του λόγου που αυτά είναι έγκυρα, η μη βαθιά κατανόηση της φόρμας (των μορφών), η δυσκολία οπτικής μέτρησης, η δυσκολία οπτικοποίησης και ρεαλιστικής παρατήρησης, και η δυσκολία εικαστικής εργασίας, είτε με είτε χωρίς τη χρήση γεωμετρικών οργάνων. Για παράδειγμα, η ΕΤ2 αναφέρει ότι οι μαθητές απλά αντιγράφουν το μοντέλο της προοπτικής που τους δίνεται, χωρίς να καταλαβαίνουν τι αναπαριστά και γιατί ισχύει, εφαρμόζοντάς το έτσι λάθος στο δικό τους έργο. Σε αυτό ρόλο παίζει και η ίδια η φύση της μεθόδου, καθώς η αποτύπωση των 3 διαστάσεων στις 2 «μπερδεύει το μυαλό. Π.χ., το σημείο φυγής είναι εκεί που δύο παράλληλες συναντιούνται! Που ο ορισμός τους είναι εκεί που δεν συναντιούνται ποτέ!».

Πλεονεκτήματα. α) *Στα τυπικά*. Εδώ αναφέρεται η επιτυχής κατανόηση των τυπικών μαθηματικών να οδηγεί σε επιτυχή κατανόηση των μαθητών στα εικαστικά, και στην ανάπτυξη της δημιουργικότητάς τους. Αυτό οφείλεται στο ότι η μαθηματική γνώση είναι συχνά προαπαιτούμενη της εικαστικής δημιουργίας ως εργαλείο, και στην καλλιέργεια της σκέψης των μαθητών, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει η ΕΤ3· β) *Στα άτυπα*. Εδώ εμφανίζεται η ευελιξία και η έλλειψη αυστηρότητας των άτυπων πρακτικών, σε συνδυασμό με την παιγνιώδη φύση τους εντός του εικαστικού πλαισίου και μέσα σε μία συχνά διερευνητική κατάσταση έναντι κάποιου προβληματισμού. Επίσης, η πρακτική – και όχι θεωρητική ή αφηρημένη – φύση τους και τα χειραπτικά και οπτικά ερεθίσματα που προσφέρονται. Μάλιστα, τα λόγια των εκπαιδευτικών υποδεικνύουν ότι όλα αυτά βοηθούν τη διευκόλυνση της κατανόησης των τυπικών μαθηματικών και την προώθηση θετικών συναισθημάτων απέναντι στα Μ από τους μαθητές. Αναφέρεται η εφαρμογή της θεωρητικής γνώσης, η απόδοση νοήματος στις εμπλεκόμενες έννοιες ή διαδικασίες και η ανάπτυξη της οπτικοποίησης και της δημιουργικότητας.

Δεύτερον, η *διαπραγμάτευσή* του από τα μέλη της ομάδας περιλαμβάνει: *Μετάφραση του ενός στο άλλο*. Εδώ περιλαμβάνονται μεταφράσεις τυπικών σε άτυπα και αντίστροφα. Συνήθως αφορούν στα εργαλεία (όργανα, γλώσσα, αναπαραστάσεις), στις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, αλλά και τους τρόπους διερεύνησης που εμφανίζονται. Για παράδειγμα, το άτυπο εργαλείο «σκοινί και πινέζα» μεταφράζεται από τον ΕΤ1 ως «σαν διαβητάκι». Επίσης, η Μ1 μεταφράζει την οπτική διερεύνηση της ΕΤ2 επί της πλακόστρωσης με το πεντάγωνο ως το «γεωμετρικό αντίστοιχο της αλγεβρικής επίλυσης».

Διευκρινήσεις στο ένα (κι απ' τα δύο). Εδώ περιλαμβάνονται: α) *Εξηγήσεις*. Συχνά, οι μαθηματικοί εξηγούν τις τυπικές πρακτικές στους εικαστικούς και οι εικαστικοί εξηγούν άτυπες, εικαστικές πρακτικές στους μαθηματικούς. Πιο σπάνια, κάποιοι εικαστικοί εξηγούν τυπικές πρακτικές σε όλους. Για παράδειγμα, η Ε (ως μαθηματικός) εξηγεί τι σημαίνει «κανονικά πολύγωνα», ενώ η ΕΤ2 εξηγεί την κατασκευή ενός 12εδρου χρησιμοποιώντας άτυπες μεθόδους, και την κατασκευή γεωμετρικών εικόνων με διακοσμητικά τύπου «doodling», τυπικά (με γεωμετρικά όργανα) και άτυπα (με το χέρι)· β) *Αιτιολογήσεις*. Για παράδειγμα, η ΕΤ4 αιτιολογεί το γιατί δουλεύει το μοντέλο της προοπτικής, εξηγώντας τα μαθηματικά στη βάση της Οπτικής· γ) *Δημιουργία αναπαραστάσεων*. Για παράδειγμα, η αναπαράσταση των y=x και y=-x, με τα χέρια για να εξηγήσει η Ε στους εικαστικούς τη λειτουργία τους.

Αποφυγή του ενός ή την υιοθέτηση του άλλου. Αυτή αφορά στην αποφυγή τυπικών όρων από τα μαθηματικά, και χρήση απλής γλώσσας, αλλά και αντίστροφά, χρήση τυπικών μαθηματικών όρων και διαδικασιών από τους εικαστικούς, για καλύτερη συνεννόηση και συντονισμό. Για παράδειγμα, η Ε αναφέρεται σε σχήματα, αντί για πολύγωνα. Επίσης, η ΕΤ2 αρνείται να δεχθεί τις άτυπες μαθηματικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή ενός κοστουμιού από δυο μαθητές και προτιμάει την «τυπική» στερεομετρία.

Παροχή πόρων από το αναλυτικό πρόγραμμα. Εδώ αναφέρεται η τροφοδότηση των μελών με τμήματα του αναλυτικού προγράμματος των δύο αντικειμένων. Για παράδειγμα, η κατασκευή κανονικών πολυγώνων στη Β' λυκείου σε συνδυασμό με την άτυπη κατά τα άλλα κατασκευή του προαναφερθέντος 12εδρου. Επίσης, η χρήση της αναλογίας, της κλίμακας και του καννάβου από τα εικαστικά της Β' γυμνασίου, σε συνδυασμό με την άτυπη κατασκευή ενός καννάβου από έναν μαθητή (χωρίς να χρησιμοποιεί τυπικά εργαλεία).

Αναγνώριση του ενός στο άλλο. Εδώ αναφέρεται η αναγνώριση του ενός στην άλλη πρακτική. Για παράδειγμα, σε μία εικόνα με τετράγωνα πλακάκια ενός δαπέδου τα μέλη ερωτήθηκαν για την ύπαρξη των μαθηματικών εννοιών που υπάρχουν. Αντί αυτών, αυτό που έβλεπε η ΕΤ5 ήταν η γραμμική προοπτική, καθώς η εικόνα δεν ήταν σε μορφή κάτοψης αλλά εμφάνιζε την ψευδαίσθηση του βάθους (τα τετράγωνα σιγά σιγά γινόντουσαν ρόμβοι). Επίσης, η Μ1, στο άτυπο εργαλείο «κάνναβος», βλέπει το καρτεσιανό επίπεδο.

Σύνδεση των δύο. Αυτή αφορά στη βελτίωση της μάθησης. Για παράδειγμα, στην άτυπη κατασκευή ενός κοστουμιού (κώλουρου κώνου), η Μ1 προτείνει τη μεταφορά από τις άτυπες μαθηματικές πρακτικές των ΕΤ στις τυπικές των Μ, ξεκινώντας από «τους μαθητές που τους αρέσουν τα γεωμετρικά όργανα, που είπε η ΕΤ2, και να δούμε πόσο μακριά μπορούν να φτάσουν από αυτό στο πιο θεωρητικό» και «εξηγώντας οτι υπάρχουν τύποι, πώς υπολογίζουμε ή κατασκευάζουμε (τυπικό). Εκμεταλλευόμενοι τον στόχο της κατασκευής».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα περιγράφουν το ζεύγος τυπικά – άτυπα μαθηματικά ως ένα όριο ανάμεσα στη διδασκαλία των Μ και των ΕΤ που αναφέρεται στα ίδια τα αντικείμενα [μαθηματικές πρακτικές, εργαλεία (όργανα, γλώσσα, αναπαραστάσεις)] και στη μάθηση εκ μέρους των μαθητών (δυσκολίες και πλεονεκτήματα στο κάθε τύπο μαθηματικών). Επίσης, περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η διαπραγμάτευσή του από τα μέλη της ομάδας [μετάφραση του ενός στο άλλο, διευκρινήσεις επί του ενός (εξηγήσεις, αιτιολογήσεις, δημιουργία αναπαραστάσεων), αποφυγή του ενός ή υιοθέτηση του άλλου, παροχή πηγών από το αναλυτικό πρόγραμμα, αναγνώριση του ενός στο άλλο, ένωση των δύο]. Αναδεικνύεται, επίσης, η χρήση απλής καθημερινής γλώσσας, άτυπων εικαστικών αναπαραστάσεων ή με τα χέρια και οπτικών μεθόδων διερεύνησης ή αιτιολόγησης, συμφωνώντας με τους Stathopoulou (2007), Χούτου (2015) περί άτυπων μαθηματικών πρακτικών, τους Caspi & Sfard (2012) περί του άτυπου λόγου και τον Raman (2002) περί μη αυστηρών επιχειρημάτων ή διαισθήσεων, αντίστοιχα. Ως όριο, διαχωρίζει τους δύο τύπους μαθηματικών, μα παράλληλα τους ενώνει, αναδεικνύοντας μέσα στην «ασυνέχεια» αυτή, μία «συνέχεια» μεταξύ τους (Akkerman & Bakker, 2011). Οι ίδιοι οι συμμετέχοντες φαίνεται να προτείνουν την ένωση των δυο μέσω συντονισμού ως βοηθητική για τη μάθηση των μαθηματικών από μέρους των μαθητών, συμφωνώντας με τον Arcavi (1994) (π.χ. παρέχοντας καλύτερη κατανόηση, πιο θετικά συναισθήματα απέναντι στα μαθηματικά, εφαρμογή της αφηρημένης γνώσης). Τα αποτελέσματα φαίνεται να υπονοούν: α) ότι η διαπραγμάτευσή του μέσα στην ομάδα συνδέεται με θέματα συντονισμού, διαφάνειας, ταυτοποίησης ή αναστοχασμού μεταξύ των δύο τύπων· β) τον ρόλο οπτικών κάποιων συμμετεχόντων (π.χ. «σαν διαβητάκι», ΕΤ1), εργαλείων (π.χ. κάνναβος) και πόρων (π.χ. τεχνουργήματα κατασκευασμένα από άτυπες μαθηματικές δράσεις μαθητών) ως σημεία ένωσης των δύο και οικοδόμησης του νοήματος κατά τη διαπραγμάτευση και γ) τη σημασία της σύνδεσης των δυο για την υποστήριξη της μάθησης των μαθητών. Προτείνουν, έτσι, τη διερεύνηση της μάθησης από μέρους των εκπαιδευτικών, του ρόλου διαμεσολαβητών και οριακών αντικειμένων και της σύνδεσης των δύο για τη βελτίωση της μάθησης των μαθητών.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. «Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας» (MIS-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ)»

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of educational research*, *81*(2), 132-169.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Bickley-Green, C. A. (1995). Math and art curriculum integration: A post-modern foundation. *Studies in Art Education*, *37*(1), 6-18.

Burnaford, G., Brown, S., & Doherty, J. (2007). Arts Integration Frameworks, Research & Practice». *Washington, DC: Arts Education Partnershipp.*

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step towards school algebra. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 45-65. doi:10.1016/j.ijer.2011.121.006

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory*. London: Sage.

Choutou, C. (2019). *Supporting collaboration between visual art and mathematics teachers*. ICMI Study 25, Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups, Lisbon, Portugal, 3-7 February 2020.

Choutou, C., Potari, D. (in press). Boundaries between mathematics and visual art teaching communities. In *Proc. of 12th CERME.* Bozen-Bolzano, Italy.

Cobb, P. (2002). Reasoning with tools and inscriptions. *Journal of the Learning Sciences, 11*(2&3), 187-215.

Daniels, H. (2017). Introduction to the third edition. In H. Daniels (Ed.), *Introduction to Vygotsky* (pp. 1-34). London & New York: Routledge.

Jacobs, V. (2000). *What happens when the artistic world and a teacher's world meet?* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Presmeg, N. (2009). Mathematics education research embracing arts and sciences. *ZDM*, *41*(1-2), 131-141.

Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(2), 135-150. doi:10.1016/S0732-3123(02)00119-0

Stathopoulou, C. (2007). Traditional patterns in Pyrgi of Chios: Mathematics and Community. *Nexus Network Journal*, 9(1), 103-118.

von Renesse, C., & Ecke, V. (2016). Discovering the art of mathematics: Using string art to investigate calculus. *PRIMUS*, *26*(4), 283-296.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge university press.

Χούτου, Χ (2015). Η μαθηματική πρακτική ενός αγγειοπλάστη. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ.), *Πρακ. 7ου Π. Σ. ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματική Γνώση Και Διδακτικές Πρακτικές*, 1-3 Δεκ. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Χούτου, Χ. Πόταρη, Δ. (2019). Διδακτικές και μαθησιακές συνδέσεις μαθηματικών και εικαστικών τεχνών: Οπτικές εκπαιδευτικών. Στο Κ. Χρίστου (επιμ.), *Πρακ. 8ου Π. Σ. ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 6-8 Δεκ. Λευκωσία: ΕΝΕΔΙΜ.

Η ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΕΙΡΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Αντωνόπουλος Ματθαίος

Υποψήφιος Διδάκτορας Πανεπιστήμιο Αθηνών Μαθηματικό Τμήμα

m.antonopoulos@outlook.com

Η συγκεκριμένη εργασία μελετά τον τρόπο που οι μαθητές συγκρίνουν άπειρα σύνολα κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης και συγκεκριμένα στη ΣΤ Δημοτικού, στη Γ Γυμνασίου και στη Γ Λυκείου. Μέσα από τη μελέτη φαίνεται να υπάρχουν αντιφάσεις στις απαντήσεις που δίνει ο κάθε μαθητής, όταν υπάρχουν διαφορές στον τρόπο που δίνονται αντίστοιχες ερωτήσεις. Εξετάζοντας αυτές τις απαντήσεις συνολικά και για τις τρεις τάξεις δεν προκύπτουν ιδιαίτερες διαφοροποιήσεις στις στρατηγικές σύγκρισης των άπειρων συνόλων, οι οποίες φαίνεται να έχουν ως αφετηρία τη διαίσθηση για την έννοια του απείρου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το άπειρο είναι μία σύνθεση της φιλοσοφίας, των μαθηματικών και της φυσικής και αποτελεί συστηματικά αντικείμενο μελέτης μέσα στους χρόνους. Ο πραγματικός κόσμος, είναι πεπερασμένος και γι’ αυτό δεν υπάρχουν αφορμές για συζητήσεις για το άπειρο, τη στιγμή που οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τα πράγματα καλύτερα όταν βασίζονται στις προηγούμενες εμπειρίες τους (Monaghan, 2001; Jirotková & Littler, 2004). Η έννοια του απείρου έχει αντιφατική φύση, καθώς έρχεται αντιμέτωπη με τα νοητικά μας σχήματα τα οποία έχουν προσαρμοστεί σε έναν πεπερασμένο κόσμο (Fischbein et al. 1979). Οι στρατηγικές των μαθητών αντιστοιχούν στους τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικοί αντιμετώπισαν το άπειρο ιστορικά μέχρι τον Cantor και τη θεωρία συνόλων που ανέπτυξε. Στα περισσότερα σχολικά βιβλία των μαθηματικών η έννοια του απείρου, ενώ υπεισέρχεται σε ορισμένα θέματα, δε φαίνεται να γίνεται αντικείμενο μελέτης. Στα σχολικά χρόνια οι μαθητές ασχολούνται με τη σύγκριση μόνο αριθμήσιμων συνόλων, δηλαδή με σύνολα πεπερασμένα ή ισοδύναμα του συνόλου των φυσικών αριθμών και όχι με υπεραριθμήσιμα όπως π.χ. το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ειδικά στο Δημοτικό, η κατανόηση της έννοιας του απείρου παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες, παρ’ όλα αυτά γεννάται το ερώτημα σε τι βαθμό οι στρατηγικές σύγκρισης των άπειρων συνόλων θα μπορούσαν να βοηθήσουν στην κατανόηση του έστω διαισθητικά όσον αφορά τις μικρές ηλικίες.

Η συγκεκριμένη εργασία μελετά τον τρόπο που οι μαθητές συγκρίνουν άπειρα σύνολα κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης και συγκεκριμένα στη ΣΤ Δημοτικού, τη Γ Γυμνασίου και τη Γ Λυκείου.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο αριθμός των ερευνών που εξετάζει διεξοδικά τις στρατηγικές σύγκρισης άπειρων συνόλων είναι περιορισμένος. Υπάρχουν δύο άδηλες αντιλήψεις, η πρώτη είναι ότι το μεγαλύτερο έχει πάντα περισσότερα στο πλήθος σημεία από κάτι μικρότερο και η δεύτερη το άπειρο είναι ισοδύναμο με το ανεξάντλητο άρα όλα τα άπειρα είναι ίδια. Τα παραπάνω δείχνουν ότι υπάρχει μια διαισθητική αντίφαση στην έννοια του απείρου (Fischbein 2001). Οι Tsamir και Tirosh (2006), έκαναν μία έρευνα καλώντας τους μαθητές να συγκρίνουν σύνολα τα οποία αποτελούνταν από άπειρους αριθμούς για παράδειγμα άρτιους αριθμούς με περιττούς αριθμούς ή φυσικούς αριθμούς με άρτιους αριθμούς. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές συνήθως δεν χαρακτηρίζουν τα σύνολα ως ίσα μεταξύ τους και μάλιστα χρησιμοποιούν στην πλειοψηφία τους διαισθητικά κριτήρια για τη σύγκριση των συνόλων. Οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν στρατηγικές σύγκρισης που αφορούν τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων και μόνο λιγότερο από το 1% χρησιμοποιούν την 1-1 αντιστοιχία, μάλιστα ορισμένοι από αυτούς που χαρακτήρισαν τα σύνολα ως ίσα ανέφεραν ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι πάντοτε ίσα μεταξύ τους. Ανάλογα αποτελέσματα χρήσης κριτηρίων σύγκρισης πεπερασμένων συνόλων παρατήρησαν και οι Singer και Voica (2003) οι οποίοι ζήτησαν από τους μαθητές να συγκρίνουν άπειρα σύνολα και εκείνοι κατά τη σύγκριση των φυσικών αριθμών με τους περιττούς απάντησαν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι διπλάσιοι άρα και περισσότερο ενώ κάποιοι άλλοι αιτιολόγησαν την απάντησή του λέγοντας πως αν μετρήσουμε έως το 10 τότε υπάρχουν περισσότεροι φυσικοί αριθμοί απ' ότι περιττοί. Παρ' όλα αυτά ορισμένα παιδιά αξιοποίησαν την 1-1 αντιστοιχία και προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν κάποιο κανόνα για να συγκρίνουν τα στοιχεία του πρώτου και του δεύτερου συνόλου. Οι ερευνητές στο τέλος σημειώνουν ότι παρόλο πού στο μυαλό ενός δεκάχρονου παιδιού η διαίσθηση του απείρου έχει ήδη διαμορφωθεί οι συζητήσεις μπορούν να θέσουν αυτή τη διαίσθηση υπό αμφισβήτηση. Σε άλλη έρευνα των ίδιων ερευνητών το 2008, σε μαθητές 10-11 ετών, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές είναι δυνατό να σημειώνουν την 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στην ακολουθία των φυσικών αριθμών και σε αναδρομικές ακολουθίες των ρητών αριθμών (Singer & Voica, 2008).

Έπειτα από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη σύγκριση άπειρων συνόλων μπορούν κατηγοριοποιηθούν σε: α)μέρος- όλον (δηλαδή ένα σύνολο το οποίο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου πάντα θα έχει λιγότερα στοιχεία από αυτό), β) όλα τα άπειρα είναι ίσα καθώς δεν έχουν τέλος, γ)1-1 αντιστοιχία, δ) οι αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων (για παράδειγμα οι άρτιοι αριθμοί έχουν μικρότερες αποστάσεις μεταξύ τους από τα αντίστοιχα τετράγωνα τους) και ε) δε γίνεται να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα (Tsamir, 1999; Tsamir & Tirosh 1999; Tall & Tirosh, 2001; Tsamir & Dreyfus, 2002).

Τα κριτήρια σύγκρισης δύο απείρων συνόλων που είδαμε προηγουμένως πολλές φορές οδηγούν σε αντιφατικές απαντήσεις καθώς μπορεί να δούμε τον ίδιο μαθητή σε ένα ερώτημα να αναφέρεται σε ίσα σύνολα και στο επόμενο να αναφέρει ότι το ένα σύνολο είναι μεγαλύτερο από το άλλο εφόσον έχει περισσότερους αριθμούς (Tsamir & Tirosh, 2006). Σύμφωνα με τους Tsamir και Dreyfus (2002) ένας μαθητής στον οποίο πήραν συνέντευξη αποφασίζει ότι πρέπει να αντιμετωπίσει την αντίφασή του με κάποιο τρόπο μόνο αφού πρώτα μάθει περισσότερα για τα άπειρα σύνολα, κάνει δηλαδή μια γνωστική μετατόπιση από μόνος του. Παρ’ όλα αυτά οι μαθητές πολλές φορές δε συνειδητοποιούν αυτές τις αντιφάσεις. Μελέτη των Narli και Baser (2008) έδειξε πώς μία διδακτική παρέμβαση η οποία συνυπολογίζει τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών μπορεί να οδηγήσει στη συνειδητοποίηση τους ότι χρησιμοποιούν αντιφατικές στρατηγικές και στο ότι ο σωστός τρόπος αιτιολόγησης θα έπρεπε να είναι κοινός για όλα τα ερωτήματα.

Τέλος σημαντικός είναι ο ρόλος των αναπαραστάσεων ενός συνόλου με άπειρους αριθμούς. Για παράδειγμα οι απαντήσεις των μαθητών είναι ασυνεπείς σε διαφορετικές αναπαραστάσεις άπειρων συνόλων (οριζόντια ή το ένα κάτω από το άλλο) (Tall & Tirosh, 2001).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί μέρος μια εκτενέστερης μελέτης που αφορά την έννοια του απείρου. Η διαδικασία συλλογής δεδομένων που ακολουθήθηκε ήταν η εξής: Το ακαδημαϊκό έτος 2020-2021 μοιράστηκαν ερωτηματολόγια σε 398 μαθητές (132 ΣΤ Δημοτικού, 153 Γ Γυμνασίου, 113 Γ Λυκείου γενικής παιδείας). Από αυτά ένα μικρό μέρος (16 ερωτηματολόγια) αφαιρέθηκε καθώς είτε δεν είχαν απαντηθεί καθόλου είτε οι απαντήσεις δε μπορούσαν να αξιοποιηθούν. Ζητήθηκε η συμπλήρωση ψευδώνυμου από τους μαθητές ώστε, σε δεύτερη φάση, σύμφωνα με το ενδιαφέρον που κρίθηκε ότι είχαν οι απαντήσεις των μαθητών να γίνουν συνεντεύξεις σε όσους μαθητές επιλέχθηκαν. Για τη συγκεκριμένη εργασία αξιοποιήθηκαν μόνο οι απαντήσεις που δόθηκαν στα ερωτηματολόγια που μοιράστηκαν. Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι ποιες είναι οι στρατηγικές σύγκρισης άπειρων συνόλων που αξιοποιούν οι μαθητές και ποιες διαφοροποιήσεις προκύπτουν στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης; Τα ερωτήματα ελέγχονται μέσα από δύο ερωτήσεις που βρίσκονταν σε ένα ευρύτερο ερωτηματολόγιο. Συγκεκριμένα:

1) Δίνονται οι παρακάτω σειρές αριθμών:

Σειρά Α: 1,2,3,4,5,6,7,.....

Σειρά Β: 1,4,9,16,25,36,49,.....

Οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών ή κάποια σειρά έχει μεγαλύτερο πλήθος αριθμών από κάποια άλλη; Να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας.

2) Δίνονται οι παρακάτω σειρές αριθμών:

Σειρά Α: 1,2,3,4,5,6,7,.....

Σειρά Β: 2,4,6,8,10,12,14,.....

Διαβάστε προσεκτικά τις απαντήσεις που έδωσαν κάποιοι μαθητές και γράψτε αν συμφωνείτε ή διαφωνείτε μαζί τους **αιτιολογώντας** την απάντησή σας.

Μαρία: Στη δεύτερη σειρά οι αριθμοί είναι περισσότεροι γιατί είναι μεγαλύτεροι οι αριθμοί.

Κώστας: Μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς μεταξύ τους άρα οι δύο σειρές είναι ίδιες στο πλήθος.

Σοφία: Η πρώτη σειρά έχει πιο πολλούς αριθμούς από τη δεύτερη γιατί στη δεύτερη λείπουν ορισμένοι αριθμοί που είναι στην πρώτη.

Μιχάλης: Οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών καθώς οι αριθμοί που έχουν είναι άπειροι.

Η σωστή απάντηση που αναμένουμε είναι αυτή του Κώστα. Οι υπόλοιπες απαντήσεις κατασκευάστηκαν έπειτα από τη μελέτη της βιβλιογραφίας και κάποιας πιλοτικής έρευνας που είχε προηγηθεί και βασίζονται σε συχνές παρανοήσεις των μαθητών. Έγινε κατηγοριοποίηση των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές και υπολογισμός των ποσοστών της συχνότητας κάθε κατηγορίας που προέκυψε.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ερώτηση 1

Το ποσοστό των μαθητών που θεωρούν ότι η σειρά Α έχει μεγαλύτερο πλήθος αριθμών από τη σειρά Β είναι σταθερό σε κάθε τάξη (αν και θα αναμέναμε να μειωθεί με το πέρασμα των χρόνων) (6,19%-7,30%-6,32%), ενώ αυτών που θεωρεί πως η σειρά Β έχει περισσότερους αριθμούς (26,54%-8,76%-8,43%) μειώνεται κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Αυτό ίσως σε κάποιο βαθμό οφείλεται στο ότι μειώνεται το ποσοστό των μαθητών που θεωρεί ότι η σειρά Β έχει πιο πολλά ψηφία άρα μεγαλύτερο πλήθος (4,42%-3,65%-2,11%) είτε επειδή έχει μεγαλύτερους αριθμούς (7,08%-1,46%-2,11%). Στο Δημοτικό ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών για να συγκρίνει δύο σύνολα αριθμών υπολογίζει το άθροισμα των αριθμών (8,85%-0,73%-1,05%). Οι μαθητές που απάντησαν ότι οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών (62,81%-74,46%-71,58%) παρουσιάζουν μία μικρή αύξηση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Παρ' όλα αυτά η αιτιολόγηση διαφέρει αρκετά ανάλογα με την τάξη. Οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν ότι αυτό συμβαίνει καθώς τα δύο σύνολα αριθμών έχουν άπειρους αριθμούς (18,58%-27,01%-33,68%).

Αρκετοί μαθητές αγνοούν τις τελείες στο τέλος και θεωρούν ότι τα σύνολα αποτελούνται μόνο από επτά αριθμούς (12,39%-18,25%-13,68%) με αποτέλεσμα να πιστεύουν ότι είναι ίδια στο πλήθος. Ένα μέρος των μαθητών θεωρεί ότι είναι ίδια στο πλήθος αλλά κάνει παράλληλη αναφορά στο ότι στη δεύτερη σειρά έχουμε μεγαλύτερους αριθμούς (8,85%-9,49%-6,32%). Μάλιστα κάποιοι κάνουν αναφορά και στη σύγκριση του πλήθους των ψηφίων των αριθμών (7,08%-4,38%-7,37%). Το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά είναι (0,88%-3,65%-0%). Ένα σημαντικό μέρος των μαθητών θεωρεί ότι δε μπορούμε να συγκρίνουμε δύο σύνολα άπειρων αριθμών καθώς οι αριθμοί είναι ασταμάτητοι ή δεν έχουν τέλος (4,42%-9,49%-13,68%).

Ερώτηση 2

Το ποσοστό των μαθητών που συμφωνούν με τη Μαρία, αν αθροίσουμε τα ποσοστά των επιμέρους κατηγοριών, μειώνεται με το πέρασμα των χρόνων (16,94%-12,59%-3,13%). Για ορισμένους μαθητές το σύνολο με τους μεγαλύτερους αριθμούς είναι και το μεγαλύτερο (6,45%-3,50%-1,04%). Μεγάλο ποσοστό των μαθητών διαφώνησε χωρίς όμως να δώσει κάποια αιτιολόγηση (21,77%-25,17%-28,13%). Οι περισσότεροι που προσπάθησαν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους ανέφεραν ότι κατά τη σύγκριση δεν έχει σημασία αν οι αριθμοί ενός συνόλου είναι μεγαλύτεροι από κάποιου άλλου (17,74-15,38%-29,17%). Το ποσοστό των μαθητών που θεωρούν ότι τα σύνολα είναι άπειρα επομένως είναι και ίσα παραμένει σχεδόν σταθερό με το πέρασμα των χρόνων (13,71%-16,78%-17,71%). Ένα ποσοστό των μαθητών (6,45%-11,19%-5,21%) έκανε αναφορά στο ίσο πλήθος των αριθμών χωρίς να αιτιολογήσει όμως την απάντησή του. Ένα μέρος των μαθητών ακόμα και στις μεγαλύτερες τάξεις αγνόησε την ύπαρξη τελειών που υποδηλώνουν τη συνέχιση των αριθμών με αποτέλεσμα να θεωρήσουν ότι και τα δύο σύνολα αποτελούνται μόνο από επτά αριθμούς (9,68%-5,59%-4,17%). Τέλος ελάχιστοι ήταν αυτοί που έδωσαν απάντηση όμοια με αυτή του Κώστα που αποτελεί και τη σωστή αιτιολόγηση (3,23%-2,10%-1,04%).

Το ποσοστό των μαθητών που συμφωνούν με τον Κώστα παραμένει σχεδόν σταθερό στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο και αυξάνεται σημαντικά στο Λύκειο (33,67%-32,52%-48,96%). Παρ' όλα αυτά ένα μεγάλο ποσοστό από αυτούς δεν αιτιολόγησε την απάντησή του (13,27%-18,70%-27,08%). Ένα μέρος των μαθητών που μίλησε για σύνδεση-ζευγάρωμα των αριθμών (10,20%-5,69%-10,42%) είτε βρήκε κάποια σχέση μεταξύ των δύο σειρών (π.χ. η μία είναι διπλάσια της άλλης) (2,04%-2,44%-0%). Οι μαθητές που διαφωνούν χωρίς να αιτιολογούν την απάντησή τους είναι (18,37%-31,71%-19,79%). Οι περισσότεροι διαφωνούν καθώς οι αριθμοί είναι άπειροι (φαίνεται να διαφωνούν στον τρόπο αιτιολόγησης και όχι στο συμπέρασμα για το πλήθος των αριθμών) (9,18%-10,57%-11,46%). Ορισμένοι διαφωνούν στις μικρότερες τάξεις γιατί θεωρούν ότι από τη δεύτερη σειρά λείπουν αριθμοί (6,12%-6,50%) είτε γιατί η δεύτερη σειρά αποτελείται από μεγαλύτερους αριθμούς (6,12%-1,63%-1,04%). Μάλιστα ένα μέρος των μαθητών (11,22%-0,81%-7,29%) θεωρεί ότι δε μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς επειδή είναι διαφορετικοί.

Το ποσοστό των μαθητών που συμφωνούν με τη Σοφία αν αθροίσουμε τα ποσοστά των επιμέρους κατηγοριών παραμένει σταθερό με το πέρασμα των χρόνων (14,96%-13,14%-10,52%). Από αυτούς κάποιοι έκαναν αναφορά στο ότι στη δεύτερη σειρά λείπουν ορισμένοι αριθμοί ή στην πρώτη υπάρχουν όλοι οι αριθμοί (8,66%-3,65%-5,26%). Μεγάλο ποσοστό των μαθητών διαφώνησε μη αιτιολογώντας την απάντησή του (22,83%-33,58%-30,53%). Το ποσοστό των μαθητών που θεωρεί ότι τα σύνολα είναι ίσα γιατί οι αριθμοί είναι άπειροι αυξάνεται σημαντικά στο πέρασμα των χρόνων (3,94%-9,49%-15,79%). Παρόμοιες είναι οι απαντήσεις αυτών που έκαναν αναφορά σε ατελείωτους αριθμούς (3,15%-3,65%-3,16%) ή σε αριθμούς που πάνε στο άπειρο το οποίο σύμφωνα με τους μαθητές δεν ορίζεται (0%-1,46%-1,05%) ή ανέφεραν ότι δε ξέρουμε οι σειρές σε ποιο αριθμό τελειώνουν (0%-2,19%-4,21%). Αρκετοί μαθητές έκαναν αναφορά στο πλήθος των αριθμών το οποίο είναι ίδιο (10,24%-10,22%-16,84%). Παρόμοιες είναι οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι αυτό που έχει σημασία είναι το πόσοι είναι αριθμοί και όχι αν λείπουν (5,51%-2,92%-4,21%) ή δεν έχει σημασία αν είναι ίδιοι οι αριθμοί (2,36%-4,38%-2,11%). Το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν σωστά είναι ιδιαίτερα χαμηλό (4,72%-4,38%-0%). Ένα σημαντικό μέρος των μαθητών έκανε αναφορά σε σύνολα που αποτελούνται από επτά αριθμούς αγνοώντας τις τελείες στο τέλος των δύο σειρών (11,02%-3,65%-3,16%).

Οι περισσότεροι μαθητές συμφώνησαν με την άποψη του Μιχάλη (77,31%-77,77%-77,90%). Παρ' όλα αυτά ένα μεγάλο ποσοστό ειδικά στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο δεν αιτιολόγησε την απάντησή του (30,25%-50,37%-46,32%). Από εκείνους τους μαθητές που συμφώνησαν ένα μεγάλο μέρος των μαθητών έκανε αναφορά στην απειρία των συνόλων είτε στο ότι οι αριθμοί είναι ατελείωτοι ((42,86%-23,70%-25,26%). Το ποσοστό των μαθητών που βρήκε κάποιο μοτίβο μεταξύ των δύο σειρών ή κάποια σχέση αντιστοίχισης είναι (1,68%-0,74%-0%). Οι μαθητές που διαφωνούν χωρίς να αιτιολογούν την απάντησή τους είναι (4,20%-6,67%-5,26%). Τα ποσοστά των μαθητών που διαφώνησαν αιτιολογώντας την απάντησή τους μοιράστηκαν. Κάποιοι μαθητές ανέφεραν ότι στη δεύτερη λείπουν κάποιοι αριθμοί (3,36%-4,44%-3,16%), το 3,70% του Γυμνασίου απάντησε ότι δύο σύνολα δε μπορεί να είναι άπειρα. Ένα ποσοστό των μαθητών ανέφερε ότι οι αριθμοί είναι ίσοι στο πλήθος αλλά δεν είναι άπειροι (3,36%-1,48%-4,21%) είτε ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα επειδή αποτελούνται από επτά αριθμούς (2,52%-0,74%-1,05%).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην πρώτη ερώτηση βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών θεωρεί ότι τα σύνολα είναι ίσα, παρ' όλα αυτά για διαφορετικούς λόγους. Οι περισσότεροι αναφέρονται στην απειρία των αριθμών των δύο συνόλων (με σταθερή αύξηση στο πέρασμα των χρόνων) κάτι που φαίνεται και στη βιβλιογραφία καθώς οι μαθητές τείνουν να θεωρούν όλα τα άπειρα μεταξύ τους ίσα (Fischbein 2001). Ένα μικρότερο ποσοστό των μαθητών βλέπει ότι και στις δύο σειρές έχουμε επτά αριθμούς αγνοώντας τις τελείες στο τέλος της κάθε σειράς.

Κάποιοι από αυτούς ένιωσαν την ανάγκη να αναφέρουν ότι στη δεύτερη σειρά έχουμε μεγαλύτερους αριθμούς, παρουσιάζεται δηλαδή μία πιθανή σύγχυση μεταξύ της σύγκρισης συνόλων και της σύγκρισης αριθμών.

Ενώ το ποσοστό των μαθητών που αιτιολογούν σωστά την απάντησή τους είναι σχεδόν μηδενικό όπως φάνηκε και σε ανάλογη μελέτη των Tsamir και Tirosh (2006).

Ένα ποσοστό των μαθητών θεωρεί ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε δύο σύνολα άπειρων αριθμών καθώς αυτοί είτε δε σταματάνε είτε δεν έχουν τέλος. Η αύξηση αυτού του ποσοστού κατά τη μετάβαση σε μεγαλύτερες τάξεις ίσως να οφείλεται στο ότι στο Δημοτικό θεωρούν ότι πάντα πρέπει να έχουμε μία απάντηση σε κάθε ερώτημα, άρα δε γίνεται τα δύο σύνολα να μη μπορούν να συγκριθούν. Ανάλογα είδαμε και στη βιβλιογραφία που κάποιοι θεώρησαν ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα (Tsamir & Tirosh 1999; Tsamir, 1999; Tall & Tirosh, 2001; Tsamir & Dreyfus, 2002).

Οι μαθητές που θεωρούν ότι η σειρά Α έχει μεγαλύτερο πλήθος έχουν σταθερό ποσοστό σε όλες τις τάξεις, ενώ αυτοί που θεωρούν ότι στη σειρά Β βρίσκονται οι περισσότεροι μαθητές παρουσιάζουν μείωση του ποσοστού τους. Μάλιστα κάποιοι από αυτούς αναφέρονται σε μεγαλύτερα ψηφία ή στους μεγαλύτερους αριθμούς της δεύτερης σειράς. Εντύπωση προκαλεί πως στο Δημοτικό αρκετοί μαθητές αθροίζουν τους αριθμούς κάτι που δείχνει ότι δεν είναι καθόλου εξοικειωμένοι με τη σύγκριση συνόλων. Πολλές φορές δεν μπερδεύονται μόνο με τους τρόπους σύγκρισης πεπερασμένων συνόλων όπως αναφέρει η βιβλιογραφία (Singer και Voica 2003) αλλά μπορεί να έρθουν σε σύγχυση με την απλή σύγκριση αριθμών ακόμη και με άλλες στρατηγικές όπως το άθροισμα των αριθμών καθώς για ορισμένους η λέξη πλήθος ταυτίζεται με τη λέξη άθροισμα.

Στη δεύτερη ερώτηση παρατηρούμε και εδώ ορισμένοι μαθητές να χρησιμοποιούν τα κριτήρια σύγκρισης των αριθμών για να συγκρίνουν δύο σύνολα αριθμών κάτι το οποίο όμως απουσιάζει από το Λύκειο. Μεγάλο ποσοστό των μαθητών δεν αιτιολογεί την απάντηση του, ενώ ελάχιστοι ήταν εκείνοι που έδωσαν τη σωστή απάντηση.

Όταν αναφέρθηκε ως πιθανή απάντηση η 1-1 αντιστοιχία ένας στους τρεις μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου και σχεδόν ένας στους δύο μαθητές Λυκείου συμφώνησε. Η αύξηση είναι εντυπωσιακή αν σκεφτούμε ότι στην πρώτη ερώτηση ήταν ελάχιστοι οι μαθητές που αξιοποίησαν την αντιστοίχιση. Φαίνεται πως η διαίσθηση του απείρου έχει ήδη διαμορφωθεί όμως η αναφορά σε άλλους τρόπους αντιμετώπισης μπορούν να θέσουν αυτή τη διαίσθηση υπό αμφισβήτηση (Singer &Voica 2003). Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα ίσως σε ένα βαθμό να οφείλονται στη μορφή που δόθηκαν οι δύο ερωτήσεις (στην πρώτη ερώτηση η μία σειρά ήταν μετατοπισμένη ενώ στη δεύτερη η μία σειρά ήταν κάτω από την άλλη) καθώς οι απαντήσεις των μαθητών είναι ασυνεπείς σε διαφορετικές αναπαραστάσεις άπειρων συνόλων (Tall & Tirosh, 2001).

Παρατηρούμε αλλαγές στα ποσοστά ανάλογα με τον τρόπο που δίνεται το ερώτημα και αντιφάσεις μεταξύ των απαντήσεων του ίδιου μαθητή, ίσως λοιπόν η λύση είναι αυτό που αναφέρουν οι Narli και Baser (2008), οι οποίοι υποστηρίζουν πως μία κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να οδηγήσει στη συνειδητοποίηση από τους μαθητές ότι χρησιμοποιούν αντιφατικές στρατηγικές και στο ότι ο σωστός τρόπος αιτιολόγησης θα έπρεπε να είναι κοινός για όλα τα ερωτήματα.

Παρ' όλα αυτά οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με την ένα προς ένα αντιστοίχιση όταν έρχονται αντιμέτωποι με αυτήν είναι σε θέση να την κατανοήσουν όπως φαίνεται. Μάλιστα ένα μέρος των μαθητών μίλησε για ζευγάρωμα αριθμών ενώ σε άλλες περιπτώσεις βρήκε και κάποια σχέση μεταξύ των δύο σειρών, ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι στο Δημοτικό οι μαθητές φαίνεται να έχουν μεγαλύτερη τάση στην αντιστοίχιση των αριθμών των δύο σειρών από άλλες τάξεις.

Ένα σημαντικό ποσοστό συμφωνεί, όπως η Σοφία, ότι στη δεύτερη σειρά λείπουν αριθμοί άρα είναι λιγότεροι. Ακόμα και αυτοί που διαφωνούν με τη συγκεκριμένη πρόταση παρουσιάζουν αδυναμία αιτιολόγησης των απαντήσεων τους.

Τέλος βλέπουμε να είναι τεράστια τα ποσοστά εκείνων που συμφωνούν πως όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίσα ενώ είναι τα ποσοστά αυτά είναι σταθερά στο πέρασμα των χρόνων. Παρόλα αυτά ένα μεγάλο ποσοστό συμφώνησε μία αιτιολογώντας την απάντησή του. Από τους μαθητές που συμφώνησαν ένα μεγάλο ποσοστό έκανε αναφορά είτε στην απειρία των συνόλων είτε στο ότι οι αριθμοί να ατελείωτοι.

Μελετώντας τα ποσοστά των απαντήσεων βλέπουμε να υπάρχουν μεγάλες αντιφάσεις στις απαντήσεις που δίνει ο κάθε μαθητής καθώς άλλοτε οι μαθητές θεωρούν όλα τα άπειρα σύνολα ίσα μεταξύ τους ενώ άλλες φορές τους πείθει η 1-1 αντιστοίχιση είτε άλλοι τρόποι σύγκρισης ανάλογα με τη μορφή του κάθε ερωτήματος. Όμως παρατηρούμε, στις περισσότερες περιπτώσεις, να μην προκύπτουν διαφοροποιήσεις στις στρατηγικές σύγκρισης των άπειρων συνόλων στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης, οι οποίες φαίνεται να έχουν ως αφετηρία τη διαίσθηση για την έννοια του απείρου. Παρότι η έννοια υπεισέρχεται σε πολλά αντικείμενα της Μαθηματικής εκπαίδευσης δεν φαίνεται να διδάσκεται οργανωμένα με αποτέλεσμα οι διαισθητικές αντιλήψεις να επικρατούν. Η μη ενασχόληση με το άπειρο οδηγεί σε μονοδιάστατη–διαισθητική αντιμετώπιση και άρα στη σταθερότητα των αντιλήψεων. Παρόλα αυτά ορισμένοι μαθητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με την 1-1 αντιστοίχιση φαίνεται να την κατανοούν με αποτέλεσμα να γεννάται το ερώτημα αν θα μπορούσε να εμπλουτίσει τη διδασκαλία των Μαθηματικών διαχρονικά από το Δημοτικό έως το Λύκειο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P. (1979). The intuition of infinity. Educational Studies in Mathematics 10, 3-40.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. Educational Studies in Mathematics, 48(2-3), 309-329.

Jirotková, D. & Littler, G. (2004). Insight into pupils’ understanding of infinity in a geometrical context. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (eds.), Proceedings of the 28 th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway: Bergen University College, 97-104.

Monaghan, J. (2001). Young peoples’ ideas of infinity. Educational Studies in Mathematics 48, 239-257.

Narli, S., & Baser, N.(2008). Cantorian set theory and teaching prospective teachers. International Journal of Environmental & Science Education, 3(2),99-107.

Singer, M., & Voica, C. (2003). Perception of infinity does it really help in problem solving? In A. Rogerson (Eds.), Proc. of the 6th Int. Conference of The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education (252-256). Brno, Czech Republic: The Mathematics Education into the 21st Century Project.

Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. The Journal of Mathematical Behavior, 27(3), 188-205.

Tall, D., & Tirosh, D. (2001). Infinity-the never-ending struggle. Educational Studies in Mathematics, 48(2), 129-136.

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers. Educational Studies in Mathematics, 38(1-3), 209-234.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets - a process of abstraction: The case of Ben. The Journal of Mathematical Behavior, 21(1), 1-23.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. Journal for Research in Mathematics Education, 30(2), 213-219.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2006). PME 1 to 30 - Summing up and looking ahead: A personal perspective on infinite sets. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, 49-63). Prague: PME.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΕΝΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καλέσης Βασίλειος

Μαθηματικός, M.Ed., Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

vkalessis@gmail.com

Ίσως η πιο πολυμελετημένη έννοια των Μαθηματικών αλλά και της Διδακτικής των Μαθηματικών, είναι η συνάρτηση. Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε στη μελέτη της συνάρτησης μέσα από το πρίσμα της αναγνώρισης και της εναλλαγής μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων της συνάρτησης. Σε αυτή συμμετείχαν 75 μαθητές της Γ΄ τάξης Γενικών Λυκείων του Νομού Θεσσαλονίκης, συμπληρώνοντας ένα οκτασέλιδο ερωτηματολόγιο. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίσουν μια συνάρτηση ανεξαρτήτως του αναπαραστατικού πλαισίου που θα τους δοθεί. Παρόλα αυτά, δεν είναι σε θέση να κινηθούν με επιτυχία μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων, με δυσκολότερη τη μετάβαση από το αλγεβρικό στο γραφικό πλαίσιο και αντίστροφα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο της Ανάλυσης αλλά και της διδακτέας ύλης των τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Έρευνες έδειξαν ότι εκτός από εφόδιο για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, αποτελεί και μια περίπλοκη στην κατανόηση έννοια (Hitt, 1998; Tall & Vinner,1981). Από τη φύση της η συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικούς αναπαραστατικούς τρόπους, όπως λεκτικά, αριθμητικά, γραφικά, αλγεβρικά ενώ κάθε ένας από αυτούς τους τρόπους δίνει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας. Οι διάφορες αναπαραστάσεις αλληλοσυμπληρώνονται και δίνουν την πλήρη εικόνα της έννοιας (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992). Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια να διερευνηθεί το βάθος της γνώσης και κατανόησης που έχουν οι μαθητές της Γ΄ τάξης του Γενικού Λυκείου πάνω στην έννοια της συνάρτησης. Η ολοκληρωμένη γνώση της έννοιας της συνάρτησης προϋποθέτει ευχέρεια στην αναγνώριση και την εναλλαγή μεταξύ των αναπαραστατικών της πλαισίων. Αυτές οι διαστάσεις της έννοιας της συνάρτησης καθώς και η συσχέτιση μεταξύ τους ερευνήθηκαν, έτσι ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα που θα οδηγήσουν στην κατανόηση του τρόπου που αντιλαμβάνονται και χειρίζονται τις συναρτήσεις οι μαθητές. Η σημαντικότητα, λοιπόν, της έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν στο τελευταίο μέρος της εργασίας θα ωφελήσουν τους διδάσκοντες να αντιληφθούν την εικόνα της έννοιας που έχουν οι μαθητές και να αναπροσαρμόσουν την διδασκαλία τους ώστε να εξαλείψουν λανθασμένες αντιλήψεις ή γνωστικά εμπόδια. Απώτερος στόχος του όλου εγχειρήματος είναι η δόμηση μιας ολοκληρωμένης εικόνας της έννοιας από πλευράς μαθητών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μια νοητική κατασκευή που για τον ορισμό της και μόνο χρειάστηκαν 300 χρόνια. Λαμβάνοντας υπόψη τον χρόνο που χρειάστηκε για να εξελιχθεί και να οριστεί πλήρως συμπυκνώνοντας γνώση από διαφορετικά μαθηματικά πεδία, την εξέχουσα θέση της στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών αλλά και τον αριθμό των ερευνών που αφορούν τις δυσκολίες/παρανοήσεις των μαθητών γύρω από αυτή, είναι σαφές ότι η συνάρτηση αποτελεί μία πολύπλοκη και δύσκολη στην κατανόηση έννοια (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Even, 1998; Sfard, 1992; Γραββάνη, 2006; Hitt, 1998; Janvier, 1987).

Α. Δυσκολίες και αντιλήψεις γύρω από την έννοια της συνάρτησης

Με σκοπό την διερεύνηση της εικόνας της έννοιας που έχουν στο μυαλό τους, οι Tall & MdNor (1992) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές διακατέχονται από ορισμένες λανθασμένες αντιλήψεις. Συγκεκριμένα, σε επίπεδο γραφικής παράστασης, οι μαθητές έχουν συνδέσει νοερά τα βασικά είδη συναρτήσεων με τις αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις μέσω πρωτοτυπικών σχημάτων. Σε επίπεδο αλγεβρικού τύπου, οι μαθητές θεωρούν ότι οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση, όπου το y παρουσιάζεται ως μια έκφραση του x, αποτελεί συνάρτηση. Οι Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992) κατέγραψαν τρεις διαφορετικές κατηγορίες εννοιολογικών αντιλήψεων για την συνάρτηση: την αλγεβρική, την συναρτησιακή και την γεωμετρική. Κατά τον Dubinsky (1991) η δυσκολία στην κατανόηση οφείλεται στην επιστημολογική πολυμορφία της συνάρτησης. Αναλόγως το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται, μπορεί να θεωρηθεί ως μια *ενέργεια* (action), μια *διαδικασία* (process) ή ένα *αντικείμενο* (object). Οι Kaldrimidou & Ikonomou (1998) επιβεβαιώνουν τα προβλήματα που προκύπτουν από τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της συνάρτησης, σημειώνοντας πως οι μαθητές αδυνατούν να δεχτούν ότι οι διάφοροι αναπαραστατικοί τρόποι της ίδιας συνάρτησης αλληλοσυμπληρώνονται και συμβάλλουν στη συνολική της εικόνα. Οι ίδιοι (ibid, 1998) καθώς και οι Janvier (στο Hitt, 1998), Gagatsis & Shiakalli (2004) συμφωνούν στο γεγονός ότι οι μαθητές –και δάσκαλοι– όχι μόνο δυσκολεύονται στην κατανόηση αλλά και τη συσχέτιση των συναρτήσεων, λόγω της αναπαραστατικής τους ποικιλίας.

Β. Μεταβάσεις μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων της συνάρτησης και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται

Η γνώση της συνάρτησης σε καθένα από τα αναπαραστατικά της πλαίσια είναι αποσπασματική και δεν αρκεί για να δομηθεί μια σωστή εικόνα της συνάρτησης. Κατά τον Hitt (1998), καταλυτικό ρόλο παίζει η ευχέρεια εναλλαγής μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων αλλά και η δυνατότητα συσχέτισης αυτών. Για τους Lesh et al. (1987) η αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας συνίσταται από την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας σε μια ποικιλία διαφορετικών αναπαραστατικών πεδίων, την ικανότητα διαχείρισης της έννοιας εντός του δοθέντος αναπαραστατικού πεδίου καθώς και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από ένα πεδίο στο άλλο. Αυτό, όμως, αποτελεί και τον πυρήνα της δυσκολίας στην διδασκαλία της έννοιας συνάρτηση, αφού η εναλλαγή και συσχέτιση δυσκολεύουν τους μαθητές λυκείου (Hitt, 1998), τους απόφοιτους λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992; Even, 1998) αλλά και τους εκπαιδευτικούς (Hitt, 1998). Γι’ αυτό το λόγο, η ανάπτυξη ευχέρειας στην εναλλαγή μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων χωρίς απώλεια πληροφοριών, αποτελεί τον βασικό στόχο της διδασκαλίας της έννοιας συνάρτηση (Janvier, 1987a; Even, 1998; Hitt, 1998). Οι Kaldrimidou & Ikonomou (1998) υποστηρίζουν ότι ο χειρισμός και η επεξεργασία κάθε τρόπου αναπαράστασης απαιτεί διαφορετικό πλαίσιο επεξεργασίας της πληροφορίας. Για παράδειγμα ο αναλυτικός τύπος, σύμφωνα με τη γνωστική προσέγγιση, απαιτεί σειριακή επεξεργασία των δεδομένων, ενώ στη γραφική αναπαράσταση τα δεδομένα δίνονται ολιστικά. Δεν αρκεί, όμως, η ικανότητα επεξεργασίας πληροφοριών σε κάθε πλαίσιο μεμονωμένα, αλλά και η μετάβαση από το ένα πλαίσιο στο άλλο, σε πλήρη συμφωνία με τον ορισμό της συνάρτησης αλλά και χωρίς την απώλεια πληροφοριών. Η μετάβαση αυτή ορίζεται ως μετάφραση αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα, μεταξύ του αλγεβρικού τύπου και της γραφικής παράστασης προκύπτουν δύο μεταφράσεις: από τον τύπο στην γραφική παράσταση και από την γραφική παράσταση στον τύπο. Στην έρευνα που πραγματοποίησε σε φοιτητές μαθηματικών, η Even (1998) εστίασε στη σχέση γνώσης της συνάρτησης με την ευχέρεια εναλλαγής μεταξύ των αναπαραστατικών πλαισίων. Τα αποτελέσματα κατέδειξαν την ισχυρή σχέση της ικανότητας σύνδεσης των διαφόρων αναπαραστάσεων της συνάρτησης με τους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης των συναρτήσεων, το πλαίσιο παρουσίασης και τη γνώση για τις υποκείμενες ιδέες που την περιβάλλουν. Απ’ όλες τις μεταβάσεις, αυτή που έχει απασχολήσει περισσότερο τους ερευνητές είναι το πέρασμα από το αλγεβρικό στο γραφικό πεδίο και αντίστροφα. Το ενδιαφέρον οφείλεται στην φύση αυτής της μετάβασης αφού πρόκειται για να μια ριζική αλλαγή στον τρόπο ανάγνωσης και επεξεργασίας των προσλαμβανόμενων πληροφοριών. Κατά τους Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992) οι μαθητές δυσκολεύονται να απομονώσουν τις πληροφορίες που περιέχει η γραφική παράσταση γι' αυτό και δεν της δίνουν την απαιτούμενη σημασία. Συνηθίζουν να χειρίζονται μονομερώς αλγεβρικές εκφράσεις και διαδικασίες, ώστε να προβούν σε αναγνώριση ή πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων. Οι ίδιοι (ibid, 1992) επισημαίνουν πως η πηγή αυτών των δυσκολιών είναι γνωστικής, επιστημολογικής και συναισθηματικής φύσης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 75 μαθητές (46 αγόρια και 29 κορίτσια) της Γ τάξης του Γενικού Λυκείου, από τους οποίους ζητήθηκε η συμπλήρωση ενός οχτασέλιδου ερωτηματολογίου. Οι συγκεκριμένοι μαθητές προέρχονταν από δημόσια και ιδιωτικά σχολεία του Νομού Θεσσαλονίκης, ενώ οι 31 ακολούθησαν την κατεύθυνση των Σπουδών Πληροφορικής – Οικονομίας και οι 44 την κατεύθυνση των Θετικών Σπουδών. Ο χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους ήταν μια σχολική ώρα και τα ερωτηματολόγια μοιράστηκαν δύο εβδομάδες πριν διαγωνιστούν στις Πανελλαδικές εξετάσεις. Το ερευνητικό εργαλείο της παρούσας εργασίας ήταν το ερωτηματολόγιο, το οποίο αποτελείτο από 2 ομάδες ερωτήσεων. Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου δόθηκαν 14 μαθηματικές εκφράσεις με 3 διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης (αριθμητική, αλγεβρική και γραφική) και ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να αναγνωρίσουν ποια πιστεύουν ότι παριστάνει συνάρτηση. Για τις εκφράσεις που δεν αποτελούσαν αναπαράσταση συνάρτησης ζητήθηκε αιτιολόγηση. Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων είχε σκοπό να απαντήσει στο ερευνητικό ερώτημα: Πόσο ικανοί είναι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου στην αναγνώριση μιας συνάρτησης στο αριθμητικό, το αλγεβρικό και το γραφικό πλαίσιο. Στο δεύτερο μέρος δόθηκαν 7 μαθηματικές εκφράσεις και ζητήθηκε να μεταφραστούν από το δοθέν πλαίσιο στα άλλα δύο. Επιπροσθέτως, στο τέλος κάθε ερώτησης ζητήθηκε να επιλεχθεί η ευκολότερη μετάφραση. Η δεύτερη ομάδα ερωτήσεων είχε σκοπό να απαντήσει στο ερευνητικό ερώτημα: Πόσο ικανοί είναι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου στη μετάφραση μιας συνάρτησης από ένα αναπαραστατικό πλαίσιο σε ένα άλλο. Τέλος, τα αποτελέσματα των 2 προηγούμενων ερωτημάτων συσχετίστηκαν ώστε να απαντηθεί το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, αν υπάρχει συσχέτιση της ικανότητας αναγνώρισης με την ικανότητα μετάφρασης μιας συνάρτησης στα αναπαραστατικά της πλαίσια. Το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε στους συμμετέχοντες και συμπληρώθηκε υπό την επίβλεψη του γράφοντος. Τα αποτελέσματα κωδικοποιήθηκαν καταλλήλως, αναλύθηκαν, συσχετίστηκαν και παρουσιάζονται παρακάτω.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στους παρακάτω πίνακες παρατίθενται τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης (χρήση λογισμικού IBM SPSS V.22) στην Α ομάδα ερωτήσεων του ερωτηματολογίου.

Αναγνώριση (N=75)					
	A1	A2	A3	A4	M.O.
Σωστή	54 (72%)	62 (82.67%)	50 (66.67%)	57 (76%)	55.75 (74.34%)
Αιτιολόγηση (N=75)					
Σωστή	38 (50.67%)	-	-	-	38 (50.67%)

Πίνακας 1: Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α1 έως Α4 (αριθμητικό πλαίσιο).

Από τις παραστάσεις των μαθηματικών εκφράσεων που δόθηκαν στο αριθμητικό πλαίσιο το 74.34% έκανε σωστή αναγνώριση. Ένας πιθανός λόγος που οι μαθητές χειρίζονται με ευκολία το εν λόγω πλαίσιο είναι η αντιμετώπισή του ως διαδικασία, προσέγγιση που δείχνει να αναπτύσσεται πρωταρχικά στους μαθητές. Επιπλέον, οι εκφράσεις αυτού του είδους είναι αναλογικές, δηλαδή παρουσιάζουν μια πληροφορία ως μια αλληλουχία προτάσεων, που μπορεί να διαβαστεί και να αναγνωριστεί ευκολότερα. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα θα πρέπει να αξιολογηθούν παράλληλα με τις σωστές αιτιολογήσεις. Ειδικότερα, στο ερώτημα Α1, όπου οι συμμετέχοντες σε ποσοστό 72% αναγνώρισαν σωστά, μόλις το 50.67% έδωσε ορθή αιτιολόγηση. Το χαμηλό ποσοστό μπορεί να αποδοθεί στη σύγχυση της $x = 4$ με την $y = 4$. Επίσης, αξίζει να σχολιαστεί το υψηλό ποσοστό επιτυχίας στο ερώτημα Α2, όπου δόθηκε η αριθμητική αναπαράσταση της εξίσωσης $y = 3x$. Η πλειοψηφία των μαθητών (82.67%) παρατήρησαν ότι οι τιμές του y ήταν τριπλάσιες του x, γεγονός που παραπέμπει σε διαδικασία αντιστοίχισης. Οι μαθητές είναι οικείοι με την εν λόγω γραμμική εξίσωση, οπότε για αυτούς αποτέλεσε μια πρωτοτυπική έκφραση και την αναγνώρισαν εύκολα.

Αναγνώριση (N=75)					
	A5	A6	A7	A8	M.O.
Σωστή	63 (84%)	52 (69.33%)	37 (49.33%)	68 (90.67%)	55 (73.33%)
Αιτιολόγηση (N=75)					
Σωστή	-	25 (33.33%)	11 (14.67%)	-	18 (24%)

Πίνακας 2: Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α5 έως Α8 (αλγεβρικό πλαίσιο).

Στην ομάδα ερωτήσεων Α5 έως Α8 ο μέσος όρος ορθής αναγνώρισης κυμάνθηκε στο 73.33%. Το ποσοστό δείχνει μια ευχέρεια στην αναγνώριση αλγεβρικών εκφράσεων ως συναρτήσεις και μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις, ως τρόποι έκφρασης μιας συνάρτησης, είναι αναλογικοί και παρουσιάζουν μια πληροφορία ως αλληλουχία προτάσεων. Εστιάζοντας στην ερώτηση Α7, όπου δόθηκε η έκφραση $y^2 = x$, οι μισοί συμμετέχοντες (49.33%) αναγνώρισαν σωστά, ενώ μόλις το 14.67% κατάφερε να αιτιολογήσει επαρκώς. Τα ποσοστά αναγνώρισης και αιτιολόγησης αποκλίνουν πολύ από το μέσο όρο της ομάδας και μπορούν να αποδοθούν στην ομοιότητα της δοθείσας με την οικεία $y = x^2$. Η δυσκολία στην αναγνώριση μπορεί να οφείλεται στην λανθασμένη αντίληψη των μαθητών ότι οποιαδήποτε αλγεβρική έκφραση όπου το y παρουσιάζεται ως μια έκφραση του x, αποτελεί συνάρτηση. Σε ότι αφορά την ερώτηση Α6, όπου δόθηκε η έκφραση $x = -9$, το 69.33% αναγνώρισε ότι δεν παριστάνει συνάρτηση, παρόλα αυτά, μόλις το 1/3 των συμμετεχόντων έδωσε σωστή αιτιολόγηση. Το εύρημα αυτό μπορεί επίσης να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί την εξίσωση, έχει τονιστεί ότι δεν παριστάνει συνάρτηση, αλλά δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν επαρκώς το λόγο.

Αναγνώριση (N=75)							
Ερώτηση	Α9	Α10	Α11	Α12	Α13	Α14	Μ.Ο.
Σωστή	60 (80%)	47 (62.67%)	50 (66.67%)	69 (92%)	48 (64%)	51 (68%)	54.17 (72.23%)
Αιτιολόγηση (N=75)							
Σωστή	-	27 (36%)	25 (33.33%)	-	27 (36%)	31 (41.33%)	27.5 (36.66%)

Πίνακας 3: Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) επιτυχούς αναγνώρισης και αιτιολόγησης των ερωτήσεων Α9 έως Α14 (γραφικό πλαίσιο).

Στις ερωτήσεις Α9 έως Α14, δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις εξισώσεων και ο μέσος όρος ορθής αναγνώρισης κυμάνθηκε στο 72.23%. Το ποσοστό, σε πρώτη ανάγνωση, δείχνει μια ευχέρεια των συμμετεχόντων στην αναγνώριση γραφημάτων ως συναρτήσεις, παρόλα αυτά, ο μέσος όρος αιτιολόγησης βρίσκεται στο χαμηλό 36.66%, γεγονός που μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: οι περισσότεροι μαθητές γνώριζαν τον κανόνα της κατακόρυφης ευθείας, όπως αυτός αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια των Α και Γ΄ Λυκείου, τον οποίο και έκαναν χρήση. Αναγνώρισαν εμπειρικά τις γραφικές αναπαραστάσεις με χρήση του κανόνα, όμως, η αιτιολόγηση ότι μια τυχαία κάθετη ευθεία $x = k$ τέμνει το γραφικό σε 2 σημεία θεωρήθηκε ελλιπής, αφού αποτέλεσε προϊόν μεθοδολογίας και όχι βαθιάς κατανόησης του κανόνα. Στο ερώτημα Α10 παρουσιάστηκε μια γραφική παράσταση που έμοιαζε με αυτήν της $f(x) = x^2$, με τη διαφορά ότι είχε περιστραφεί κατά 90ο δεξιόστροφα. Σε αυτό σημειώθηκε το χαμηλότερο ποσοστό αναγνώρισης (66.67%) ανάμεσα στα ερωτήματα της ίδιας ομάδας και το χαμηλό ποσοστό αιτιολόγησης (36%).

Σωστή Μετάφραση (N=75)	
Ερώτηση	B2 (Αρ.)
αλγεβρικό πλαίσιο	44 (58.67%)
γραφικό πλαίσιο	50 (66.67%)

Πίνακας 4: Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων μετάφρασης της ερώτησης B2, στην οποία η συνάρτηση δόθηκε στο αριθμητικό πλαίσιο.

Στο ερώτημα B2, όπου δόθηκε η αριθμητική αναπαράσταση της $y = -1$, παρατηρήθηκε ότι το 66.67% των συμμετεχόντων κατάφεραν να χαράξουν σωστά τη γραφική παράσταση έναντι του 58.67% που έδωσε σωστά τον αλγεβρικό της τύπο. Σε βαθύτερη ανάλυση, παρατηρήθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ποσοστών μετάφρασης $z = 1.013 < 1.96 = z_{0.05}$.

Σωστή Μετάφραση από Αλγεβρικό πλαίσιο σε (N=75)				
Ερώτηση	B1	B3	B4	M.O.
αριθμητικό πλαίσιο	62 (82.67%)	49 (65.33%)	45 (60%)	52 (69.33%)
γραφικό πλαίσιο	47 (62.67%)	26 (34.67%)	30 (40%)	34.33 (45.78%)

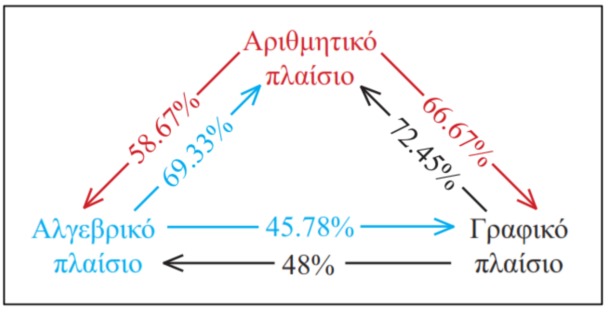
Πίνακας 5: Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων μετάφρασης των ερωτήσεων B1, B3, B4, στις οποίες η συνάρτηση δόθηκε στο αλγεβρικό πλαίσιο.

Στα ερωτήματα B1, B3, B4 οι συναρτήσεις εκφράστηκαν μέσω του αλγεβρικού τους τύπου. Τα ποσοστά επιτυχούς μετάφρασης στο γραφικό πλαίσιο κυμάνθηκαν από 34.67% έως 62.67%, με μέσο όρο 45.78%. Τα αντίστοιχα ποσοστά μετάφρασης στο αριθμητικό πλαίσιο κυμάνθηκαν από 60% έως 82.67%, με μέσο όρο 69.33%. Βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων όρων μετάφρασης στο αλγεβρικό έναντι του γραφικού πλαισίου ($z = 2.9190 > 1.96 = z_{0.05}$).

Σωστή Μετάφραση από Γραφικό πλαίσιο σε (N=75)				
Ερώτηση	Β5	Β6	Β7	Μ.Ο.
αριθμητικό πλαίσιο	53 (70.67%)	51 (68%)	59 (78.67%)	54.33 (72.45%)
αλγεβρικό πλαίσιο	48 (64%)	29 (38.67%)	31 (41.33%)	36 (48%)

Πίνακας 6: Συχνότητες και σχετικές συχνότητες (%) αποτελεσμάτων μετάφρασης των ερωτήσεων Β5, Β6, Β7, στις οποίες η συνάρτηση δόθηκε στο γραφικό πλαίσιο.

Στα ερωτήματα Β5, Β6, Β7 οι συναρτήσεις εκφράστηκαν μέσω του γραφικού τους τύπου. Τα ποσοστά επιτυχούς μετάφρασης στο αλγεβρικό πλαίσιο κυμάνθηκαν από 38.67% έως 64%, με μέσο όρο 48%, ενώ σε υψηλότερα ποσοστά καταγράφηκε η μετάβαση στο αριθμητικό πλαίσιο με τα ποσοστά αυτής να διαμορφώθηκαν από 68% έως 78.67%, με μέσο όρο 72.45%. Με βάση τα z-scores υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο συγκρινόμενων μέσων όρων, αφού $z = 3.0578 > 1.96 = z_{0.05}$.



Διάγραμμα 1: Μέσοι όροι ποσοστών επιτυχούς μετάφρασης ανά πλαίσιο

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της περιγραφικής και της επαγωγικής στατιστικής ανάλυσης, μπορούν να διακριθούν τα εξής αποτελέσματα: Πρώτον, δοθείσης της συνάρτησης στο αριθμητικό πλαίσιο, οι συμμετέχοντες μετέφρασαν με στατιστικά μη σημαντική διαφορά προς το γραφικό (66.67%) και το αλγεβρικό πλαίσιο (58.67%). Δεύτερον, δοθείσης της συνάρτησης στο αλγεβρικό πλαίσιο, οι συμμετέχοντες μετέφρασαν με μεγαλύτερη επιτυχία στο αριθμητικό πλαίσιο (69.33%), έναντι του γραφικού (34.33%). Τρίτον, δοθείσης της συνάρτησης στο γραφικό πλαίσιο, οι συμμετέχοντες μετέφρασαν με μεγαλύτερη επιτυχία στο αριθμητικό πλαίσιο (72.45%), έναντι του αλγεβρικού (48%).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Προς απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος, οι μαθητές της έρευνας ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν μια συνάρτηση εξίσου καλά, ανεξαρτήτως δοθέντος πλαισίου. Όταν, όμως, ζητήθηκαν οι αιτιολογήσεις, τα σκορ εμφάνισαν χαρακτηριστική μείωση, γεγονός που αποδίδεται στη χρήση μεθοδολογιών ή πρωτοτυπικών σχημάτων, τα οποία οι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν χωρίς να κατανοούν. Το εύρημα έρχεται σε αντίθεση με αντίστοιχες έρευνα, όπου η αναγνώριση στο γραφικό πλαίσιο παρουσιάστηκε ως δυσκολότερη, λόγω της φύσης του πλαισίου (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Kaldrimidou & Ikonomoy, 1998; Tall & MdNor, 1992; Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992). Σε επίπεδο μετάφρασης και προς απάντηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος, παρατηρήθηκε ότι οι μεταβάσεις από και προς το αριθμητικό πλαίσιο παρουσίασαν τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας. Το εν λόγω εύρημα έρχεται σε συμφωνία με τις έρευνες των Sfard (1991; 1992) και Leinhardt et al., (1990, στο Γραββάνη 2006), αφού ο αριθμητικός αποτελεί έναν αναλογικό τρόπο έκφρασης της συνάρτησης, ο οποίος είναι ευκολότερος στην επεξεργασία και ανάγνωση. Η μετάβαση από το αλγεβρικό στο αριθμητικό πλαίσιο αποτελεί μια απλή αντικατάσταση, η οποία δεν απαιτεί ιδιαίτερη επεξεργασία και προσεγγίζεται λειτουργικά από τους μαθητές. Αντίστοιχα η χάραξη της γραφικής παράστασης προαπαιτεί τη δημιουργία πίνακα τιμών, διαδικασία με την οποία είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές. Συνεπώς, αντιμετωπίζουν την μετάβαση ως μια ενέργεια (Dubinsky, 1991), η οποία μετά από επανειλημμένη χρήση τείνει να γίνει διαδικασία. Οι ερωτήσεις Β1, Β3, και Β4 ανέδειξαν την δυσκολία στη μετάβαση από το αλγεβρικό στο γραφικό πλαίσιο, ενώ οι ερωτήσεις Β5, Β6 και Β7 την δυσκολία στην αντίθετη μετάβαση. Το εύρημα είναι σύμφωνο με τις έρευνες των Sfard (1992), Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992), Gagatsis & Shiakalli (2004) και Lesh et al., (1987), αφού απαιτείται ριζική αλλαγή στον τρόπο ανάγνωσης και επεξεργασίας των προσλαμβανόμενων πληροφοριών. Προς απάντηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος, από τον έλεγχο που πραγμα-τοποιήθηκε (Spearman's rho), διαπιστώθηκε στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της ικανότητας αναγνώρισης και μετάφρασης (Correlation coefficient score: 0.606). Η σχέση είναι θετική μεταξύ των μεταβλητών, δηλαδή ανάλογη και αξιολογείται σε μέτρια προς δυνατή σχέση. Για σκοπούς μελλοντικής έρευνας θα ήταν χρήσιμο να διερευνηθεί η σύνδεση των παραπάνω ικανοτήτων με την επίδοση των συμμετεχόντων στις Πανελλαδικές εξετάσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95–126. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645-657.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Janvier, C. (1987a). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, 27-32. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum

Kaldrimidou M. & Ikonomou A., (1998). Epistemological and metacognitive conceptions as factors involved in the learning of mathematics: A study which focuses on graphic representations of functions. In M. Bartolini-Bussi, A. Sierpinska, H. Steinbring (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, 271-288. NCTM: Reston VA.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, 33-40. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 59-84. Washington: The Mathematical Association of America.

Tall, D. & MdNor, Bakar. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology*, *23*(1), 39–50.

Γραββάνη, Κ. (2006). Αναπαραστάσεις συναρτήσεων και ο μετασχηματισμός τους από μαθητές Λυκείου. *Διπλωματική Μεταπτυχιακή εργασία.* Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών–Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα χειρισμού γραφικών παραστάσεων αποφοίτων Λυκείου. Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, *10-11*, 21-43.

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Τσαμπουράκη Αγγελική, Καφούση Σόνια

1ο Δημοτικό Σχολείο Κορίνθου, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

psed15002@rhodes.aegean.gr, kafoussi@aegean.gr

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τα στοιχεία μιας έρευνας για τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών/τριών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια του απείρου με σκοπό τη δημιουργία δραστηριοτήτων που βοηθούν στην εμπλοκή με πτυχές του απείρου και τη δημιουργία δευτερογενών αντιλήψεων κοντά στη μαθηματική διάσταση της έννοιας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις ηλικιακές ομάδες των 6-8ετών, 8-10ετών και 10-12ετών σε δύο φάσεις: στην Α΄ φάση μελετήθηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο ως αντικείμενο και ως διαδικασία και στη συνέχεια, στην Β΄ φάση πραγματοποιήθηκαν μαθηματικές δραστηριότητες λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της Α΄ φάσης. Στην εργασία παρουσιάζονται στοιχεία της έρευνας για μαθητές της Δ΄ Δημοτικού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών η διαισθητική αντίληψη βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να αναγνωρίζουν την έννοια του απείρου χωρίς όμως κάποια συνέπεια στη χρήση της (Monaghan, 1986). Η διδακτική παρέμβαση που λαμβάνει υπόψη της διαισθητικές ιδέες των παιδιών και την τάση τους να γενικεύουν τα χαρακτηριστικά των πεπερασμένων συνόλων στα απειροσύνολα μπορεί να συμβάλλει στη συνειδητοποίηση ότι χρησιμοποιούν αντιφατικές στρατηγικές και ότι μπορούν να φανούν συνεπείς επιλέγοντας μόνο μία, την ‘‘1 προς 1’’ αντιστοίχιση, όπως υπόδειξε στην θεωρία απειροσυνόλων ο Cantor, ως μοναδικό κριτήριο για τη σύγκριση απειροσυνόλων (Tsamir, 1999). Καθώς η έννοια του απείρου είναι ενσωματωμένη στην κατανόηση των αριθμητικών συνόλων, απόψεις που σχετίζονται με το άπειρο μπορούν να αποτελέσουν πολύ νωρίς αντικείμενο συζήτησης μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων για τα παιδιά, όταν προκύπτουν ανάλογα θέματα μέσα στη σχολική τάξη, χωρίς να οδηγούμαστε σε μια πιο συστηματική ενασχόληση-διδασκαλία της έννοιας του μαθηματικού απείρου (Singer & Voica, 2008).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το άπειρο είναι μια βασική έννοια που σχετίζεται με τη δημιουργία των αριθμών. Τα παιδιά από τα πρώτα βήματα στο μάθημα των μαθηματικών, εργάζονται με τους φυσικούς αριθμούς, 1, 2, 3,… μαθαίνοντας αρίθμηση, απαρίθμηση, συγκρίσεις και πράξεις. Έρχονται επομένως πολύ νωρίς σε επαφή με την άπειρη ακολουθία των φυσικών αριθμών, την οποία οι μαθητές/τριες μπορούν να κατανοήσουν μέσω της διαδικασίας δημιουργίας του επόμενου κάθε φορά αριθμού, προσθέτοντας τη μονάδα και να αναγνωρίζουν το σύνολο των φυσικών αριθμών ως απειροσύνολο, σταδιακά, μέχρι την ηλικία των 11-12 ετών (Pehkonen et al., 2006). Ωστόσο, οι μαθητές/τριες αναπτύσσουν από πολύ μικρή ηλικία διαισθητικές ιδέες για το άπειρο εξαιρετικά ασταθείς που οδηγούν τα παιδιά σε αντιφατικές σκέψεις όταν προσπαθούν να απαντήσουν σχετικά ερωτήματα, καθώς η μαθηματική γνώση οικοδομείται αυστηρά και με συνέπεια στο πεπερασμένο (Falk, 2010). Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μαθητές/τριες με τις καλύτερες επιδόσεις στα μαθηματικά δίνουν τις πιο λανθασμένες απαντήσεις στα ερωτήματα για τα άπειρο, μπλοκάροντας τις διαισθητικές αντιλήψεις τους, όπως στην ερώτηση ‘‘ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός;’’ απαντούν το άπειρο, θεωρώντας το άπειρο ως αριθμό (Singer & Voica, 2008; Τσαμπουράκη & Καφούση, 2014). Το γεγονός αυτό, εξηγείται εν μέρει από την αναγνώριση της εγγενούς αντιφατικής φύσης του απείρου (Monaghan, 1986) και ενισχύεται αφού το άπειρο δεν αποτελεί μέρος της εκπαίδευσης όσον αφορά την μάθηση των μαθηματικών (Singer & Voica, 2008).

Όπως έχει προκύψει από τις σχετικές έρευνες η κατανόηση του απείρου ως μαθηματική έννοια συνδέεται με το άπειρο ως διαδικασία και ως αντικείμενο (Fischbein et al., 1979). Το άπειρο ως διαδικασία είναι πιο εύκολα αποδεκτό από τους μαθητές/τριες, επειδή οι σχετικές δραστηριότητες τους υποδεικνύουν την επανάληψη βημάτων ή πράξεων σύμφωνα με γνωστές προηγούμενες δράσεις τους, όπως είναι η δημιουργία ενός μεγαλύτερου αριθμού προσθέτοντας μονάδες, ή η μεγέθυνση του εμβαδού ενός τετραγώνου μεγαλώνοντας το μήκος της πλευράς του. Οι δραστηριότητες που ζητούν από τους/τις μαθητές/τριες πράξεις με άπειρα σύνολα π.χ. να προσθέσουν αντικείμενα σε μια ήδη άπειρη συλλογή, ή να συγκρίνουν μεταξύ τους άπειρες συλλογές, απαιτούν την κατανόηση και το χειρισμό του άπειρου ως μαθηματικό αντικείμενο. Το άπειρο ως αντικείμενο γίνεται κατανοητό από τα παιδιά, ως κάτι ανεξάντλητο, απέραντο, ανέκφραστο, ημιτελές, απροσδιόριστο, τεράστιο, ενώ πραγματοποιούν πράξεις με το άπειρο όπως με τους φυσικούς αριθμούς: άπειρο + άπειρο = 2 άπειρα, άπειρο + 1 > άπειρο, (Fischbein et al., 1979; Monaghan, 1986· Tirosh & Tsamir, 1996; Singer & Voica, 2008). Τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν την ιδέα της συνέχειας προς ένα συνεχώς μικρότερο αριθμό, ιδιαίτερα όταν αυτό ζητείται μέσω ενός γεωμετρικού πλαισίου: το εμβαδόν ενός τριγώνου που συνεχώς μικραίνει κάποια στιγμή μηδενίζεται ή ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνεχώς διαιρείται στο μέσον του κάποτε θα έχει μηδενικές διαστάσεις, ο χώρος φαίνεται να εξαντλείται, να τελειώνει, και υπάρχει ιδιαίτερη δυσκολία των παιδιών για το ‘‘απείρως μικρό’’ (Monaghan, 1986; Kolar & Cadez, 2012; Τσαμπουράκη & Καφούση, 2014).

Όταν παρουσιάζονται στους/τις μαθητές/τριες προβλήματα σύγκρισης πληθαρίθμων άπειρων συνόλων χρησιμοποιούν κριτήρια που υποβάλλονται από τις γνώσεις τους για τα πεπερασμένα σύνολα, όπως το κριτήριο μέρος με όλο, το ενιαίο άπειρο, το αδύνατο της σύγκρισης απειροσυνόλων, αλλά και το κριτήριο σύγκρισης της ένας προς ένα αντιστοίχισης των στοιχείων των απειροσυνόλων (Duval, 1983; Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Tirosh & Tsamir, 1996). Επιπλέον επηρεάζονται στις απαντήσεις τους από τις αναπαραστάσεις των απειροσυνόλων, όπως οριζόντια ή κάθετη, αριθμητική ή γεωμετρική (Tsamir & Dreyfus, 2002). Αν καθοδηγούνται με κατάλληλες αναπαραστάσεις όπως αναλυτικές αριθμητικές ή γεωμετρικές, ώστε να επιλέξουν το κριτήριο της ‘‘1 προς 1’’ αντιστοιχίας τότε δίνουν σωστές μαθηματικά απαντήσεις (Tsamir, 1999).

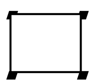
Στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο εκπόνησης διδακτορικής διατριβής μελετήθηκαν οι αρχικές διαισθήσεις των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για το άπειρο τόσο ως διαδικασία και όσο και ως αντικείμενο. Στη συνέχεια προχωρήσαμε στο σχεδιασμό και πραγματοποίηση μαθησιακών δραστηριοτήτων για να αποσαφηνιστούν αρχικές διαισθήσεις και παρανοήσεις των μαθητών. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τρεις τάξεις (Β΄, Δ΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού) με απώτερο σκοπό το σχεδιασμό μιας προτεινόμενης τροχιάς μάθησης (Clements & Sarama, 2009) ανάλογα με το επίπεδο της κατανόησης των παιδιών σε κάθε τάξη. Τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν τα ακόλουθα: α) Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές/τριες του δημοτικού το άπειρο ως διαδικασία και ως αντικείμενο; β) Μπορούν οι μαθητές/τριες του δημοτικού να οδηγηθούν σε δευτερογενείς αντιλήψεις για το άπειρο πιο κοντά στην μαθηματική έννοια, μέσω της συζήτησης μαθησιακών δραστηριοτήτων στην τάξη; Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας για την Δ΄ Δημοτικού ως αντιπροσωπευτικό παράδειγμα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η έρευνα είναι ποιοτική και εντάσσεται στην αναπτυξιακή μέθοδο έρευνας (developmental research) (Gravemeijer, 1998). Πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις: στην Α΄ φάση μελετήθηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο ως αντικείμενο και ως διαδικασία και στη συνέχεια, στην Β΄ φάση πραγματοποιήθηκαν μαθηματικές δραστηριότητες λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της Α΄ φάσης. Η

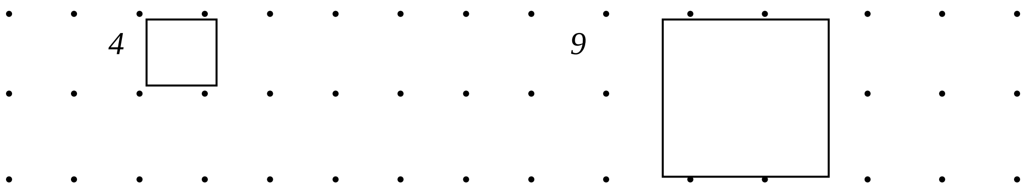
Α΄ φάση της κύριας έρευνας πραγματοποιήθηκε το γ΄ τρίμηνο του σχολικού έτους σε σύνολο 90 μαθητών/τριών, 30 μαθητές/τριες από κάθε τάξη, Α΄, Γ΄ και Ε΄ αντίστοιχα. Η Β΄ φάση πραγματοποιήθηκε το επόμενο σχολικό έτος σε διαφορετικούς μαθητές, συγκεκριμένα το 1ο τρίμηνο του επόμενου σχολικού έτους, στην ίδια ηλικιακή ομάδα, σε έξι τμήματα μαθητών/τριων, δύο από κάθε τάξη και συμμετείχαν 42 μαθητές της Β΄ τάξης, 58 μαθητές της Δ΄ τάξης και 47 μαθητές της ΣΤ΄ τάξης. Στη δημιουργία των δραστηριοτήτων για το άπειρο αξιοποιήσαμε την ιστορία των μαθηματικών, καθώς το θέμα του απείρου είναι ένα από τα πιο πολυσυζητημένα θέματα στη διάρκεια της μαθηματικής επιστήμης, αλλά και της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Η επιλογή πλαισίων από την ιστορία των μαθηματικών βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να βιώσουν τα μαθηματικά ως μια κοινωνικά και πολιτισμικά κατασκευασμένη δραστηριότητα, η οποία εξελίσσεται στο χώρο και το χρόνο (Jankvist, 2009; Thomaidis & Tzanakis, 2007). Στη συνέχεια αναφερόμαστε στις 2 δραστηριότητες που πραγματοποιήθηκαν στην Δ΄ τάξη.

Πρώτη δραστηριότητα: Στην αρχή παρουσιάσαμε στα παιδιά τους τετράγωνους αριθμούς και συζητήσαμε την κατασκευή τους σύμφωνα με την πυθαγόρεια θεωρία. Στόχος της 1ης δραστηριότητας είναι τα παιδιά να συζητήσουν ότι η δημιουργία των τετράγωνων αριθμών είναι μια διαδικασία που δεν σταματά, αντιστοιχώντας τις αριθμητικές με τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις των τετράγωνων αριθμών, επαναλαμβάνοντας τη δημιουργία ενός συνεχώς μεγαλύτερου τετραγώνου που διαισθητικά καταλαβαίνουν ότι δεν περιορίζεται από το χώρο. Παρουσιάζουμε τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 9 με τη βοήθεια χαλικιών όπως τους παρίσταναν οι Πυθαγόρειοι. Αναδιατάσσοντας τα χαλίκια φτιάχνουμε, αν αυτό είναι δυνατόν, ένα τετράγωνο και έχουμε έναν τετράγωνο αριθμό:

Αριθ.: 1	•	•	*Για τους Πυθαγόρειους ήταν ο πρώτος τετράγωνος αριθμός* ***1Χ1= 1***
Αριθ.: 2	••	••	*Δε φτιάχνεται ένα τετράγωνο.*
Αριθ.: 3	•••	•••	*Δε φτιάχνεται ένα τετράγωνο.*
Αριθ.: 4	••••		*ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ* ***4= 2Χ2*** *ΚΑΙ* ***4 = 1+ 3***
Αριθ.:5	•••••	••• ••	*Δε φτιάχνεται ένα τετράγωνο.*
Αριθ.: 6	••••••	••• •••	*Δε φτιάχνεται ένα τετράγωνο.*
Αριθ.: 7	•••••• •	••• ••• •	*Δε φτιάχνεται ένα τετράγωνο.*

Αριθ.: 8	•••••• ••	••• ••• ••	*Δε φτιάχνεται ένα τετράγωνο.*
Αριθ.: 9	•••••• •••		*ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ* ***9= 3Χ3*** *ΚΑΙ* ***9 = 1 + 3 + 5***

Ερώτηση 1: Μπορούμε να συνεχίσουμε να σχηματίζουμε τετράγωνους αριθμούς; Προσπαθήστε να σχηματίσετε τους 3 επόμενους τετράγωνους αριθμούς.

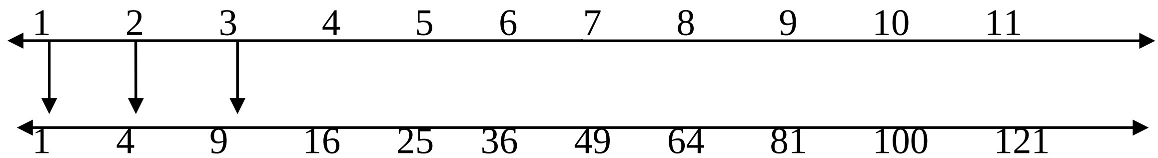


Ερώτηση 2: Αυτή η διαδικασία, να φτιάχνουμε τετράγωνους αριθμούς, κάποτε θα σταματήσει ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Δεύτερη δραστηριότητα. Στοχεύουμε να γίνει συζήτηση με τα παιδιά για το άπειρο πλήθος των φυσικών αριθμών. Δίνονται στα παιδιά δύο αριθμογραμμές η πρώτη με τους φυσικούς αριθμούς και η δεύτερη με τους τετράγωνους αριθμούς.

Ερώτηση : Αν σε μια αριθμογραμμή έχουμε τους φυσικούς αριθμούς και σε μια άλλη τους τετράγωνους αριθμούς, κάποια αριθμογραμμή θα έχει περισσότερους αριθμούς ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Για την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών κατασκευάστηκε μια κλίμακα βαθμολόγησης. Πιο αναλυτικά η βαθμολόγηση της 1ης δραστηριότητας ήταν η ακόλουθη:

- 1 βαθμός για καθέναν από τους τετράγωνους αριθμούς 16, 25, 36 που σχημάτισαν τα παιδιά,
- 1 βαθμός για οποιοδήποτε άλλον τετράγωνο αριθμό που σχημάτισαν αντί κάποιου από τους ζητούμενους,
- 1 βαθμός για την απάντηση ότι αυτή η διαδικασία θα σταματήσει σε κάποιον τετράγωνο αριθμό,

- 2 βαθμοί για την απάντηση ότι αυτή η διαδικασία δεν θα σταματήσει ποτέ και
- 3 βαθμοί για την απάντηση ότι η διαδικασία δεν θα σταματήσει ποτέ γιατί οι τετράγωνοι αριθμοί είναι άπειροι.

Επίσης, η βαθμολόγηση 2ης δραστηριότητας ήταν η ακόλουθη:

- 1 βαθμός αν η αντιστοίχιση των φυσικών με τους τετράγωνους αριθμούς στις δύο αντίστοιχα αριθμογραμμές ήταν σωστή,
- 1 βαθμός αν απάντησαν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι περισσότεροι από τους τετράγωνους ή αντίστροφα ότι οι τετράγωνοι είναι περισσότεροι,
- 2 βαθμοί αν η απάντηση ήταν ότι οι φυσικοί και οι τετράγωνοι αριθμοί έχουν ίσο πλήθος στοιχείων.

Το ανώτερο σύνολο βαθμών για τη σωστή ολοκλήρωση της πρώτης δραστηριότητας είναι 6 βαθμοί και της δεύτερης είναι 3 βαθμοί.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πριν την πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων, οι απαντήσεις των παιδιών της Γ τάξης στα ερωτήματα των συνεντεύξεων που είχαν προηγηθεί για το άπειρο είχαν δείξει ότι: α) οι μαθητές στην εύρεση του μεγαλύτερου φυσικού αριθμού απαντούσαν δίνοντας έναν αριθμό 57% ή θεωρώντας το άπειρο ως αριθμό 13% ή ότι οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ είναι άπειροι 30%, β) στη σύγκριση με τη βοήθεια αριθμογραμμών του πλήθους των φυσικών με το πλήθος των διπλασίων τους απαντούσαν ότι είναι περισσότεροι οι φυσικοί ή οι διπλάσιοί τους 83%, ότι είναι ίσα αυτά τα απειροσύνολα 17% και γ) στο πρόβλημα δημιουργίας τετραγώνων μεγαλύτερης πλευράς από δοσμένο τετράγωνο απαντούν ότι μπορούν να φτιάξουν μέχρι έναν αριθμό τετραγώνων το 33%, πάρα πολλά το 24% και άπειρα τετράγωνα το 43%.

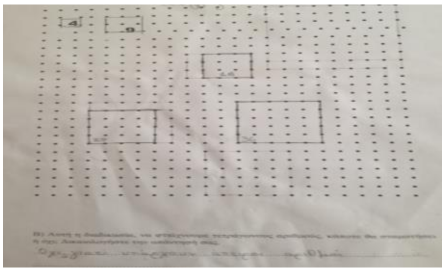
Οι δραστηριότητες δόθηκαν συνολικά σε 58 παιδιά, 28 αγόρια (48%) και 30 κορίτσια (52%), της Δ΄ τάξης. Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει συνοπτικά τις απαντήσεις των μαθητών στην 1η δραστηριότητα

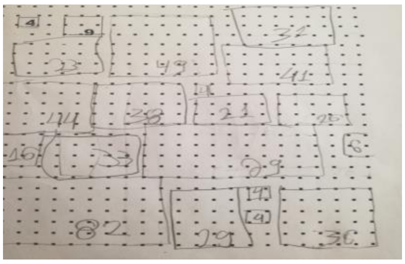
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1ης ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ				
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	ΒΑΘΜΟΙ			
	0	1	2	3
ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘ. 16	17	41		
ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘ. 25	22	36		
ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘ. 36	35	23		

ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘ. ΑΛΛΟΣ	30	28		
ΣΤΑΜΑΤΑ/ΔΕ ΣΤΑΜ.	18	15	25	
ΑΠΕΙΡΟΙ	-	-		9

Πίνακας 1. Αποτελέσματα πρώτης δραστηριότητας

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 σε σύνολο 58 παιδιών, 41 παιδιά (70%) παρουσίασαν τον τετράγωνο αριθμό 16, 36 παιδιά (60%), τον αριθμό 25, 23 παιδιά τον αριθμό 36 (40%) και 28 παιδιά (50%) παρουσίασαν άλλους τετράγωνους αριθμούς όπως το 49,64,81,100,121,144.





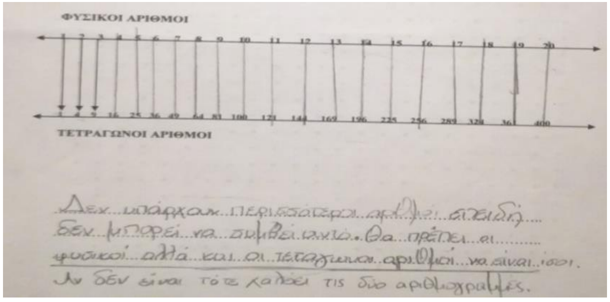
Στη δεύτερη ερώτηση, 25 μαθητές/τριες, (43%) απάντησαν ότι αυτή η διαδικασία να φτιάχνουν τετράγωνους αριθμούς δεν θα σταματήσει ποτέ, ενώ 15 (26%) απάντησαν ότι θα σταματήσουν σε κάποιο αριθμό. Επίσης, 18 (30%) δεν απάντησαν. Επιπλέον 9 μαθητές/τριες (20%) 6 αγόρια και 3 κορίτσια απάντησαν ότι οι τετράγωνοι αριθμοί είναι άπειροι.

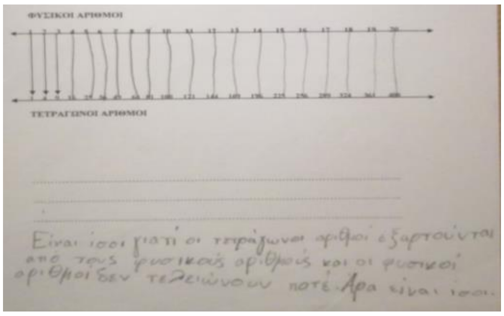
Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει συνοπτικά τις απαντήσεις των μαθητών/τριών στην 2η δραστηριότητα

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2ης ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ			
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	ΒΑΘΜΟΙ		
	0	1	2
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ	4	54	
ΦΥΣΙΚΟΙ	-	8	
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ	-	15	
ΙΣΟΙ	-	-	16
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	19		

Πίνακας 3. Αποτελέσματα δεύτερης δραστηριότητας

Στη δεύτερη δραστηριότητα 54 παιδιά (93%) έκαναν σωστά την αντιστοίχιση, οι 8 (14%) μαθητές/τριες απάντησαν ότι περισσότεροι σε πλήθος είναι οι φυσικοί αριθμοί, οι 15 (26%) ότι περισσότεροι σε πλήθος είναι οι τετράγωνοι αριθμοί και 16 παιδιά (28%) απάντησαν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι ίσοι στο πλήθος με τους τετράγωνους αριθμούς. Δεν έδωσαν καμιά απάντηση 19 (31%) παιδιά.





Οι μαθητές/τριες απαντούν:

Μιρέλλα: Οι φυσικοί αριθμοί είναι περισσότεροι γιατί μπορεί να φτιάξουν πολλά μικρά τετράγωνα.

Εριέττα: Οι τετράγωνοι φαίνονται περισσότεροι γιατί είναι πιο μεγάλοι.

Αναστασία: Είναι ίσοι γιατί οι τετράγωνοι αριθμοί εξαρτώνται από τους φυσικούς. Οι φυσικοί αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ άρα είναι ίσοι.

Σταυρούλα: Δεν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί επειδή δεν μπορεί να συμβεί αυτό. Θα πρέπει οι φυσικοί αλλά και οι τετράγωνοι αριθμοί να είναι ίσοι. Αν δεν είναι τότε χαλάει τις δυο αριθμογραμμές. (Όταν ρωτήθηκε τι εννοεί, απάντησε ότι κάθε αριθμός από επάνω φυσικός, πάει σε κάποιον κάτω, τετράγωνο αριθμό.)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας οι μαθητές/τριες της Δ΄ τάξης ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στις προτεινόμενες δραστηριότητες καθώς η πλειοψηφία σχεδίασε τους ζητούμενους τετράγωνους αριθμούς ενώ το 43% απάντησαν ότι δεν θα σταματήσουν να φτιάχνουν τετράγωνους αριθμούς και επιπλέον το 20% ότι οι τετράγωνοι αριθμοί είναι άπειροι. Επιπλέον, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της δεύτερης δραστηριότητας με τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων της α΄ φάσης της έρευνας παρατηρούμε ότι κατά την αντιστοίχιση των στοιχείων των φυσικών με τους διπλάσιούς τους αριθμούς μόνο 17% των παιδιών απάντησαν ότι έχουν ίσο πλήθος στοιχείων, ενώ στην αντιστοίχιση των φυσικών με τους τετράγωνους αριθμούς το ποσοστό αυτό έφτασε στο 28%, που δηλώνει μια περαιτέρω εξοικείωση με την 1 προς 1 αντιστοιχία.

Σύμφωνα με τον Fishbein (2002) τα παιδιά στην ηλικία των 11 έχουν αποκτήσει μια σταθερή διαίσθηση για την έννοια του απείρου. Θεωρεί όπως και πολλοί άλλοι ερευνητές (Singer & Voica, 2008; Kolar & Čadež, 2012) ότι μπορούν να δημιουργηθούν μαθησιακές καταστάσεις σε μικρότερες ηλικίες ώστε τα παιδιά να αντιληφθούν τις λανθασμένες διαισθητικές ερμηνείες τους π.χ. για τις συγκρίσεις απειροσυνόλων. Επιλέξαμε τη συμμετοχή των παιδιών σε μια κατασκευαστική δραστηριότητα ώστε να προκληθεί μια συζήτηση γύρω από το ‘‘άπειρο μεγάλο’’ μέσα από μια γεωμετρική αναπαράσταση δίνοντας επίσης την ευκαιρία να αντιληφθούν την 1-1 αντιστοίχιση ως μέσο για την επιτυχή σύγκριση απειροσυνόλων.

Τα παραπάνω αποτελέσματα αποκαλύπτουν ότι παρόμοιες συζητήσεις επιτρέπουν στα παιδιά τη διαμόρφωση αντιλήψεων για το άπειρο πιο κοντά στην μαθηματική έννοια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach.* New York & London: Routledge.

Duval, R. (1983). L’Obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14,* 385- 414.

Jankvist T., (2009). A categorization of the “whys” and “hows” on using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 235-261.

Falk, R. (2010). The Infinite Challenge: Levels of Conceiving the Endlessness of Numbers. *Cognition and Instruction*, *28,* 1-38.

Fischbein, E. (2002). *Intuition in Science and Mathematics.* Mathematics Education Library.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10,* 3-40.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental Research as a Research Method. In A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 277-295). Kluwer Academic Publishers. Printed in Great Britain.

Kolar, V. M., & Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412.

Monaghan, J. (1986*). Adolescents' understanding of limits and infinite*. PhD Thesis University of Warwick.

Pehkonen, E., Hannula, M. S., Maijala, H. & Soro, R. (2006). Infinity of numbers: How students understand it. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 345-352. Prague: PME.

Singer F. M.· C. Voica, (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188-205.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical “parallelism” revisited: Historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 165–183.

Tirosh, D. & Tsamir, P. (1996). The role of representations in student’s intuitive thinking about infinity. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27,* 33-40.

Tsamir, P. (1999). When ‘the same’ is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 1-3, 209-34.

Tsamir, P. & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets. A process of abstraction: The case of Ben. Journal of Mathematical Behavior, *21*(1), 1-23.

Τσαμπουράκη, Α. & Καφούση, Σ. (2014). Η έννοια του απείρου. Σκέψεις και προσεγγίσεις από μαθητές της Στ τάξης Δημοτικού. *Πρακτικά 31ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 940-949.

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΤΕΡΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ιακωβίδου Ευθυμία, Σακονίδης Χαράλαμπος

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

efi_iak@sch.gr, xsakonid@eled.duth.gr

Η παρούσα μελέτη εξετάζει τις αντιλήψεις εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε ζητήματα γλωσσικής ετερότητας και της διαχείρισής της στην τάξη των μαθηματικών. Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι απαντήσεις 103 δασκάλων σε ένα ερωτηματολόγιο και οι απαντήσεις μιας εκπαιδευτικού στις ερωτήσεις μιας δομημένης συνέντευξης που στόχευε στο να εμβαθύνει σε ορισμένα από τα ευρήματα του ερωτηματολογίου. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί του δείγματος αντιλαμβάνονται επαρκώς τη σημασία της γλώσσας στη μάθηση των μαθηματικών αλλά όχι τη διαχείριση της γλωσσικής ετερότητας κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών.

ΕΤΕΡΟΓΛΩΣΣΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ο όρος πολυγλωσσία-ετερογλωσσία χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία για να περιγράψει τις διαφορετικές γλώσσες που λειτουργούν παράλληλα σε ένα δεδομένο πλαίσιο (Planas & Setati, 2009). Κατά τον Barwell (2014) η πολυγλωσσία αφορά την «κοινωνική ποικιλομορφία των τύπων ομιλίας» που υπάρχουν μέσα σε μία τάξη μαθηματικών, η οποία χαρακτηρίζεται ως ‘πολύγλωσση’ όταν έστω και ένας από τους συμμετέχοντες χρησιμοποιεί περισσότερες από μία γλώσσες στην καθημερινή του ζωή.

Η μάθηση των μαθηματικών απαιτεί ευχέρεια στη γλώσσα διδασκαλίας τους, καθώς η κατανόηση των αφηρημένων εννοιών που αποτελούν αντικείμενο μελέτης τους στηρίζεται στη γλωσσική επεξεργασία (Xenofontos, 2015). Επιπλέον, μέρος του μαθηματικού περιεχομένου των σχολικών μαθηματικών παρουσιάζεται μέσα από λεκτικά προβλήματα, γεγονός που δημιουργεί δυσκολίες στους μαθητές που δεν ομιλούν τη γλώσσα διδασκαλίας (Setati, 2005).

Η απόφαση για το ποια γλώσσα θα χρησιμοποιηθεί, πώς και με ποιο σκοπό στην τάξη των μαθηματικών συνιστά πολιτικό ζήτημα, καθώς η γλώσσα διδασκαλίας είναι συνήθως η γλώσσα της ισχυρής ελίτ ή η κοινωνικά κυρίαρχη γλώσσα (Halai & Clarkson, 2016; Morgan et al., 2014). Αυτό οδηγεί συχνά σε χαμηλές επιδόσεις μαθητές που διδάσκονται μαθηματικά σε γλώσσα διαφορετική της μητρικής, όχι εξαιτίας των ικανοτήτων ή της μόρφωσής τους, αλλά λόγω γλωσσικής ετερότητας που εγείρει, ανάμεσα σε άλλες, δυσκολίες οφειλόμενες σε ανεπαρκή γνώση του βασικού λεξιλογίου της γλώσσας διδασκαλίας (McLean, 1999). Κατά τους Planas, Morgan και Schütte (2018) οι ευκαιρίες μάθησης για τους πολύγλωσσους μαθητές είναι περιορισμένες στην τάξη των μαθηματικών λόγω απουσίας ευαισθητοποίησης των εκπαιδευτικών σε θέματα ετερότητας. Οι Botes & Mji (2010) τονίζουν την αναγκαιότητα ανάπτυξης διαφόρων στρατηγικών από τους εκπαιδευτικούς, με στόχο τη διευκόλυνση των μαθητών και την αποτελεσματική αξιοποίηση της πολυγλωσσίας στην τάξη των μαθηματικών. Στην ίδια κατεύθυνση ο Cuevas (1991) προτείνει σειρά από στρατηγικές υποστήριξης των μαθητών με χαμηλή επάρκεια χρήσης της επίσημης γλώσσας, ώστε να συμμετέχουν ενεργά στην τάξη των μαθηματικών, όπως: (α) αποσαφήνιση όρων και λέξεων κλειδιών, (β) χρήση της μητρικής γλώσσας των μαθητών στην τάξη, (γ) διατήρηση κλίματος ενθάρρυνσης συμμετοχής στην τάξη μαθητών με περιορισμένη επάρκεια στη γλώσσα διδασκαλίας, (δ) διερεύνηση και συζήτηση των διαδικασιών λύσεων των προβλημάτων από τους μαθητές και (ε) εστίαση των σκέψεων των μαθητών στα βασικά σημεία του μαθήματος. Στην ίδια κατεύθυνση η Moschkovich, (2002) επισημαίνει ότι η χρήση της πρώτης γλώσσας των πολύγλωσσων μαθητών συμβάλλει στην ενεργή συμμετοχή τους στην τάξη των μαθηματικών και ειδικότερα στην ανάπτυξη λεξιλογίου, την κατασκευή νοημάτων και την συμμετοχή σε συζητήσεις, δράσεις με κρίσιμο ρόλο στην εκμάθηση τόσο της γλώσσας όσο και των μαθηματικών.

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΤΕΡΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο ρόλος της γλώσσας έχει απασχολήσει πολλές έρευνες, οι οποίες επιχειρούν να προσφέρουν απαντήσεις σε γλωσσικά ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών. Έτσι, ο Manu (2005) διερεύνησε τη σχέση μεταξύ αλλαγής της γλώσσας και ανάπτυξης της μαθηματικής κατανόησης και διαπίστωσε ότι οι μαθητές, διαβάζοντας τα ερωτήματα, αμέσως άλλαζαν τη γλώσσα για να εργαστούν με τη μητρική τους. Έτσι, αμφισβητείται η υπόθεση ότι οι δίγλωσσοι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο στα μαθηματικά, όταν τα διδάσκονται στη δεύτερη γλώσσα τους, καθώς φάνηκε πως η μαθηματική κατανόηση επιτυγχάνεται με τις ιδέες και τις εικόνες, και όχι με τις λέξεις.

Οι Stathopoulou και Kalabasis (2007) ερεύνησαν τον τρόπο που οι γλωσσικοί ρόλοι και τα χαρακτηριστικά των Ρομά επηρεάζουν τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Παρατήρησαν ότι, όταν οι μαθητές επιλέγουν τις δικές τους στρατηγικές, πραγματοποιούν εύκολα νοερούς υπολογισμούς ή υιοθετούν μεθόδους διαφορετικές από τις τυπικές και χρησιμοποιούν στρατηγικές καταμέτρησης στην επίλυση προβλημάτων. Αντιμετωπίζουν, όμως, δυσκολίες στην κατανόηση προβλημάτων που εκφράζονται με σύμβολα και στη διαχείριση των συμβατικών αλγορίθμων.

Οι Planas και Setati (2009) διερεύνησαν τον τρόπο που δίγλωσσοι μετανάστες μαθητές χρησιμοποιούν τη μητρική τους γλώσσα στην εκμάθηση των μαθηματικών. Η ανάλυσή τους επιβεβαιώνει τη χρήση και των δύο γλωσσών κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, με τη γλώσσα διδασκαλίας να χρησιμοποιείται για την εξοικείωση με την εργασία και το μαθηματικό λεξιλόγιο και τη μητρική γλώσσα να χρησιμοποιείται για την επίλυση και την αξιολόγηση της εργασίας και για την ανάπτυξη μαθηματικών εξηγήσεων σε μικρές ομάδες, ενώ στις αλληλεπιδράσεις με τον δάσκαλο, οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν τη γλώσσα διδασκαλίας ή να παραμένουν σιωπηλοί.

Ο Barwell (2014) μελέτησε τη σχέση των μαθηματικών με την εκμάθηση της γλώσσας σε μαθητές δημοτικού σχολείου στον Καναδά. Τα αποτελέσματα κατέστησαν σαφή την κυριαρχία της αγγλικής γλώσσας, με εξαίρεση τις περιπτώσεις προσφοράς βοήθειας από τον ένα μαθητή στον άλλον, όπου χρησιμοποιούνταν η γλώσσα Cree.

Ο Xenofontos (2015) διαπίστωσε ότι οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνά του συμφώνησαν ότι πολλά από τα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών οφείλονται στη γλώσσα. Επίσης, κάποιοι υποστήριξαν ότι τα μαθηματικά είναι παγκόσμια γλώσσα και πως, αν δεν υπάρχει πρόβλημα επικοινωνίας, τότε τα μαθηματικά είναι εύκολα και απλά. Τέλος, δήλωσαν πως δεν χρησιμοποιούν την μητρική γλώσσα των μαθητών ως πόρο, για να υποστηρίξουν την κατανόηση της μαθηματικής γνώσης από αυτούς. Σε μεταγενέστερη σχετική έρευνα του Xenofontos (2016) οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί υπέδειξαν ως στρατηγικές γλωσσικά ευαισθητοποιημένης διδασκαλίας στα μαθηματικά την υποστήριξη της γλώσσας κατά τη διάρκεια μαθημάτων υποδοχής, την εξεικόνιση μαθηματικών εννοιών, και τη λήψη βοήθειας από ‘μεταφραστές-συμμαθητές’.

Συνοψίζοντας, η ποικιλομορφία που αποκτούν οι τάξεις των μαθητών σε όλον τον κόσμο επιβάλλει την ανάγκη εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών σε θέματα γλωσσικής ετερότητας, ώστε να είναι σε θέση να διαχειριστούν αποτελεσματικά τις διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε ζητήματα γλωσσικής ετερότητας και τη διαχείρισή της στην τάξη των μαθηματικών. Ειδικότερα, τα Ερευνητικά Ερωτήματα (ΕΕ) που τέθηκαν έχουν ως ακολούθως:

ΕΕ1: Πώς αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί τον ρόλο της γλώσσας σε πολυπολιτισμικές[2] τάξεις στα μαθηματικά;

ΕΕ2: Πώς αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί τις διδακτικές τους πρακτικές σε ζητήματα γλωσσικής ετερότητας στην τάξη των μαθηματικών;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέθοδος. Για την υλοποίηση της έρευνας επιλέχθηκε μεικτή μεθοδολογία ώστε να δοθεί η δυνατότητα μιας απάντησης στα Ερευνητικά Ερωτήματα που περιλαμβάνει στοιχεία μακρο- αλλά και μικρο-επιπέδου. Στην ποσοτική συνιστώσα χρησιμοποιήθηκε η περιγραφική μέθοδος (πρώτη φάση) και στην ποιοτική η μέθοδος μελέτης περιπτώσεων (δεύτερη φάση).

Συμμετέχοντες. Στην πρώτη φάση της έρευνας συμμετείχαν 103 εκπαιδευτικοί (69,9% γυναίκες και 30,1% άντρες) δημόσιων δημοτικών σχολείων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, των Νομών Δράμας (κατά κύριο λόγο), Καβάλας, Σερρών και Κιλκίς. Πρόκειται για νομούς όπου παρατηρείται συχνά η παρουσία Ρομά, τις τελευταίες δυο δεκαετίες παιδιών από την πρώην Σοβιετική Ένωση και την τελευταία πενταετία προσφυγόπουλων κυρίως από Συρία, Ιράν και Ιράκ. Στη δεύτερη φάση συμμετείχαν τρεις εκπαιδευτικοί (2 γυναίκες και 1 άντρας), ένας από κάθε ομάδα ετών υπηρεσίας που εντοπίστηκαν στην πρώτη φάση (1-10 έτη, 11-20 έτη, πάνω από 20 έτη). Οι εκπαιδευτικοί επιλέχθηκαν με κριτήριο την διαθεσιμότητα και την επιθυμία συμμετοχής τους στην έρευνα.

Σχεδιασμός - εργαλεία μέτρησης. Στην πρώτη φάση της έρευνας χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου, το οποίο κατασκευάστηκε για τους σκοπούς της έρευνας. Αφορούσε δύο διαστάσεις, την πολιτισμική και τη γλωσσική. Η εστίαση στην παρούσα εργασία βρίσκεται στη γλωσσική διάσταση (8 ερωτήσεις για το 1ο ΕΕ και 2 ερωτήσεις για το 2ο ΕΕ). Στη δεύτερη φάση τρεις εκπαιδευτικοί, οι οποίοι συμμετείχαν και στην πρώτη φάση, απάντησαν στις ερωτήσεις μιας ημι-δομημένης συνέντευξης που στόχευαν στην εμβάθυνση σε κρίσιμα ζητήματα που ανέδειξε η πρώτη φάση της έρευνας (9 ερωτήσεις για το 1ο ΕΕ και 2 ερωτήσεις για το 2ο ΕΕ)

Δεδομένα και διαδικασία συλλογής. Η πρώτη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε στο τέλος του εαρινού εξαμήνου του 2020. Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε στους εκπαιδευτικούς κυρίως μέσω διαδικτύου (ηλεκτρονικό ταχυδρομείο) και σε ελάχιστες περιπτώσεις δια ζώσης. Ο χρόνος συμπλήρωσής του ήταν 15 λεπτά. Η συμμετοχή στην

[2] Τάξεις οι οποίες φιλοξενούν πλέον μεγάλους αριθμούς παιδιών με ποικιλία καταγωγής, κοινωνικής τάξης, οικονομικών δυνατοτήτων και θρησκεύματος.

έρευνα ήταν ανώνυμη. Η δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε τον Οκτώβριο του 2020, μετά την ολοκλήρωση της καταγραφής των αποτελεσμάτων της πρώτης φάσης. Οι συνεντεύξεις διήρκησαν περίπου 30 λεπτά η κάθε μία και πραγματοποιήθηκαν μέσω διαδικτύου. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και από-μαγνητοφωνήθηκαν για την επεξεργασία των δεδομένων. Οι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν για την ανωνυμία της συμμετοχής τους.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων και στις δύο φάσεις της έρευνας.

Πρώτη φάση (Περιγραφική μέθοδος): Ο πίνακας 1 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της ανάλυσης των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1-8 (ΕΕ1) και στις ερωτήσεις 9-10 (ΕΕ2). Η διαβάθμιση των απαντήσεων στην αρχική έρευνα ήταν σε πεντάβαθμη κλίμακα Likert, οι οποίες για τους σκοπούς του άρθρου συγχωνεύτηκαν σε 3 κλίμακες.

	Διαφωνία		Αβεβαιότητα		Συμφωνία	
	N	%	N	%	N	%
1.Η μάθηση των μαθηματικών δεν συνδέεται με τη μητρική γλώσσα των μαθητών, καθώς τα μαθηματικά συνιστούν μια παγκόσμια γλώσσα.	34	33,0	16	15,5	53	51,5
2.Σε μια πολυπολιτισμική τάξη των μαθηματικών πρέπει να χρησιμοποιείται αποκλειστικά η επίσημη γλώσσα διδασκαλίας	48	46,6	30	29,1	25	24,3
3.Είναι δυσκολότερο να διδάξει ο εκπαιδευτικός μαθηματικά σε δι/πολύγλωσσους από ότι σε μονόγλωσσους μαθητές	28	27,2	27	26,2	48	46,6
4.Η μητρική γλώσσα των μαθητών μειονοτήτων δυσκολεύει τη μάθηση των μαθηματικών	35	34,0	30	29,1	38	36,9
5.Το ανεπαρκές βασικό λεξιλόγιο που διαθέτουν οι μαθητές μειονοτήτων δυσχεραίνει την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών	7	6,8	22	21,4	74	71,8
6.Είναι σημαντικό να μπορεί ο εκπαιδευτικός να εξηγήσει τα μαθηματικά στη μητρική γλώσσα των μαθητών μειονοτήτων	13	12,6	21	20,4	69	67,0
7.Οι μαθητές μειονοτήτων δυσκολεύονται περισσότερο από τους υπόλοιπους μαθητές στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων	7	6,8	6	5,8	90	87,4
8.Οι μαθητές μειονοτήτων δυσκολεύονται περισσότερο από τους υπόλοιπους μαθητές στους τυπικούς αλγορίθμους	73	70,9	19	18,4	11	10,7
	Ελάχιστη χρήση		Μέτρια χρήση		Συχνή Χρήση	
	N	%	N	%	N	%
9.Χρησιμοποιείτε στη διδασκαλία σας τη μητρική γλώσσα των μαθητών μειονοτήτων που έχετε στην τάξη σας	89	86,4	10	9,7	4	3,9

10.Ενθαρρύνετε τους μαθητές μειονοτήτων να χρησιμοποιούν μεταξύ τους τη μητρική τους γλώσσα για να κατανοήσουν καλύτερα τα μαθηματικά	23	22,3	32	31,1	48	46,6

Πίνακας 1. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών στις ερωτήσεις που αφορούν την γλωσσική ετερότητα και τη διαχείρισή της στην τάξη των μαθηματικών.

Οι μισοί εκπαιδευτικοί του δείγματος (51,5%) συμφωνούν ότι η μάθηση των μαθηματικών δεν συνδέεται με τη μητρική γλώσσα των μαθητών. Ωστόσο, οι υπόλοιποι διαφωνούν ή είναι αβέβαιοι για την ισχύ της πρότασης (33% και 15,5% αντίστοιχα). Διαφοροποίηση υπάρχει μεταξύ τους για το αν σε μια πολυπολιτισμική τάξη των μαθηματικών πρέπει να χρησιμοποιείται αποκλειστικά η επίσημη γλώσσα διδασκαλίας, με τους μισούς σχεδόν (46,6%) να διαφωνούν και τους υπόλοιπους να συμφωνούν (24,3%) ή να είναι αβέβαιοι (29,1%). Ακόμη, σχεδόν οι μισοί εκπαιδευτικοί (46,6%) υποστηρίζουν ότι είναι δυσκολότερο να διδάξουν μαθηματικά σε δι/πολύγλωσσους μαθητές από ότι σε μονόγλωσσους, ενώ οι υπόλοιποι διαφωνούν ή είναι αβέβαιοι (27,2% και 26,2% αντιστοίχως).

Άλλη μια πρόταση στην οποία αποτυπώνεται διχογνωμία των εκπαιδευτικών αφορά το αν η μητρική γλώσσα των μαθητών μειονοτήτων δυσκολεύει τη μάθηση των μαθηματικών, όπου οι εκπαιδευτικοί μοιράζονται σχεδόν εξίσου στις τρεις βαθμίδες απαντήσεων. Παρ' όλα αυτά, η πλειοψηφία τους (71,8%) ισχυρίζεται ότι το ανεπαρκές βασικό λεξιλόγιο που διαθέτουν οι μαθητές μειονοτήτων δυσχεραίνει την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών και υποστηρίζει τη σπουδαιότητα επεξήγησης των μαθηματικών στη μητρική γλώσσα των μαθητών μειονοτήτων.

Τέλος, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (87,4%) συμφωνεί ότι οι μαθητές μειονοτήτων δυσκολεύονται περισσότερο από τους υπόλοιπους στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων και διαφωνούν (70,9%) με την άποψη ότι δυσκολεύονται περισσότερο από τους υπόλοιπους μαθητές στις τυπικές διαδικαστικές πράξεις/τυπικούς αλγορίθμους. Όσον αφορά τις πρακτικές που υποστηρίζουν οι εκπαιδευτικοί ότι χρησιμοποιούν, η απόλυτη πλειοψηφία (86,4%) δε χρησιμοποιεί τη μητρική γλώσσα των μαθητών μειονοτήτων, ενώ σχεδόν οι μισοί (46,6%) ενθαρρύνουν συχνά τους μαθητές να χρησιμοποιούν μεταξύ τους τη μητρική τους γλώσσα για την κατανόηση των μαθηματικών και οι υπόλοιποι τους ενθαρρύνουν αρκετές φορές ή λιγότερο (32% και 22,3% αντιστοίχως).

Οι ερωτήσεις αναλύθηκαν με χ^2-τεστ σε μια αναζήτηση ενδεχόμενων συσχετίσεων. Οι απαντήσεις που έδειξαν ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά αφορούσαν στο φύλο και στα χρόνια υπηρεσίας για την ερώτηση 5 (0,049 και 0,021 αντίστοιχα) και στο φύλο για την ερώτηση 10 (0,003).

Δεύτερη φάση (Μελέτη περίπτωσης): Η υπο-ενότητα εστιάζει στα βασικά ευρήματα που προέκυψαν από την θεματική ανάλυση των απαντήσεων της Μαίρης, εκπαιδευτικού με 29 έτη υπηρεσίας, με τουλάχιστον 12 από τα οποία σε πολυπολιτισμική τάξη, στις ερωτήσεις της συνέντευξης. Η θεματική ανάλυση υπέδειξε κάποια κρίσιμα χαρακτηριστικά στις απαντήσεις της Μαίρης στις ερωτήσεις που αφορούσαν καθένα από τα Ερευνητικά Ερωτήματα, που προσδιορίστηκαν με βάση τη βιβλιογραφία, τα οποία ομαδοποιήθηκαν στις ακόλουθες κατηγορίες: (α) σύνδεση της μάθησης των μαθηματικών με τη μητρική γλώσσα των μαθητών, (β) δυσκολία στην εννοιολογική κατανόηση και (γ) στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, (δ) αξία της χρήσης της γλώσσας των μαθητών και (ε) πρακτικές διδασκαλίας των μαθηματικών.

Η Μαίρη συμφωνεί με την άποψη ότι τα μαθηματικά συνιστούν μια παγκόσμια γλώσσα, αν και θεωρεί ότι η μάθηση των μαθηματικών συνδέεται με τη μητρική γλώσσα των μαθητών, όχι όμως στενά, καθώς το λεξιλόγιο των μαθηματικών είναι συγκεκριμένο και μπορεί να κατακτηθεί εύκολα. Για τον ίδιο λόγο θεωρεί ότι η μητρική γλώσσα των μαθητών μειονοτήτων δεν δυσκολεύει τη μάθηση των μαθηματικών και ότι σε μια πολυπολιτισμική τάξη στο μάθημα των μαθηματικών δεν πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο η επίσημη γλώσσα διδασκαλίας αλλά και η μητρική από τον εκπαιδευτικό, αν τη γνωρίζει.

> «Συνδέεται, όχι όμως στενά. Θεωρώ ότι τα παιδιά που είναι από διαφορετικούς πολιτισμούς, το μάθημα των μαθηματικών το προσεγγίζουν πιο εύκολα από ότι οποιοδήποτε άλλο, γιατί ακριβώς είναι παγκόσμια γλώσσα τα μαθηματικά, αλλά σίγουρα οι βασικές λέξεις τους βοηθάνε να κατανοήσουν καλύτερα τα μαθηματικά.»

Υποστηρίζει ότι το ανεπαρκές βασικό λεξιλόγιο που διαθέτουν οι μαθητές μειονοτήτων δυσχεραίνει την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών, αλλά μπορεί να κατακτηθεί γρήγορα. Επίσης, αναφέρει ότι ένα χαρακτηριστικό της μητρικής γλώσσας των μαθητών που επηρεάζει τη μάθηση των μαθηματικών, είναι το συντακτικό, καθώς το «συντακτικό είναι μαθηματικά».

> «… Ότι τη δυσχεραίνει αρχικά τη δυσχεραίνει αλλά είναι εύκολο, πώς να το πω, νομίζω ότι τα μαθηματικά είναι ένα εύκολο μάθημα για παιδιά μειονοτήτων να κατακτηθούν πλήρως, γρήγορα…»,

Θεωρεί, ακόμη, ότι οι μαθητές μειονοτήτων δυσκολεύονται στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων αλλά όχι στις τυπικές πράξεις, κάτι το οποίο συνδέεται με τη διαφορετική μητρική γλώσσα, καθώς και με πολιτικούς λόγους που μπορεί να υπάρχουν, αν και αναφέρει ότι «παίζει πάρα πολύ μεγάλο ρόλο το σχολείο· και η τάξη και ο δάσκαλος. Πόσο δηλαδή μπορούν τα παιδιά να το ξεπεράσουν αυτό που ίσως να το κουβαλάνε από το σπίτι τους αλλά να το ξεπεράσουν».

> «Νομίζω πως … δεν έχουν κατακτήσει καλά τη γλώσσα, δεν καταλαβαίνουν καλά την έννοια … δεν τους βοηθάει…εεε, επειδή έχουν να κατακτήσουν και μια γλώσσα που έχει πάρα πολλά συνώνυμα... Αυτό τους δυσκολεύει πολύ.»

Στις βασικές πρακτικές που υποστηρίζει ότι χρησιμοποιεί στη διδασκαλία των μαθηματικών, η Μαίρη συμπεριλαμβάνει τη χρήση της μητρικής γλώσσας των μαθητών μειονοτήτων και, αν δεν είναι γνώστης αυτής, βρίσκει άλλο κώδικα επικοινωνίας (νοηματική, ζωγραφική, αγγλικά). Επίσης, μεταφράζει τα λεκτικά προβλήματα και στις 2 γλώσσες εναλλακτικά κάθε πρόταση, ώστε να εμπλέξει όλους ανεξαιρέτως τους μαθητές στο ‘παιχνίδι’.

> «… μπορεί να ξέρουν κάποιες αγγλικές λέξεις, οπότε τις χρησιμοποιώ … θα βρούμε έναν τρόπο να επικοινωνήσουμε· εεε…τη νοηματική, τη γλώσσα ολονών, τη ζωγραφική πάρα πολύ, το σχέδιο, εεε...γιατί και το σχέδιο είναι γλώσσα, και βέβαια αν ξέρω κάποια λέξη από τη γλώσσα τους … τις χρησιμοποιώ για να βοηθήσω».

Τέλος, αναφέρει ότι χρησιμοποιεί στο μάθημα των μαθηματικών και στοιχεία από την κουλτούρα των μαθητών (συνταγές, μονάδες μέτρησης, αρίθμηση σε διάφορες γλώσσες), ώστε να τους κάνει να νιώσουν άνετα και να συμμετέχουν και θεωρεί ότι τα μαθηματικά πρέπει να γίνουν με πιο παιγνιώδη μορφή σε αυτούς τους μαθητές και ότι πρέπει να ενταχθεί και να γίνει αποδεκτή η γλώσσα τους από τους εκπαιδευτικούς.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά το ΕΕ1 και το θέμα της παγκόσμιας γλώσσας των μαθηματικών και της σύνδεσης της μητρικής γλώσσας των μαθητών με τη μάθηση των μαθηματικών, αναφορικά με το οποίο οι μισοί εκπαιδευτικοί του δείγματος συμφωνούν, ο Xenofontos (2015) εντόπισε αντίστοιχη συμφωνία του δείγματός του, αν και βιβλιογραφικά έχει αποδειχθεί τελικά πως αυτή η αντίληψη δεν ευσταθεί. Επίσης, στο θέμα της δυσκολίας των εκπαιδευτικών να διδάξουν σε δι/πολύγλωσσους από ότι σε μονόγλωσσους μαθητές, με την οποία οι μισοί εκπαιδευτικοί του δείγματος συμφωνούν, ο ίδιος υποδεικνύει ως κύριο λόγο αυτής της δυσκολίας τα γλωσσικά ζητήματα

Οι εκπαιδευτικοί του δείγματος της παρούσας έρευνας υποστηρίζουν ότι δεν πρέπει να χρησιμοποιείται αποκλειστικά η επίσημη γλώσσα διδασκαλίας σε μια πολυπολιτισμική τάξη. Ωστόσο, η Setati (2008) ισχυρίζεται ότι οι γλώσσες των μαθητών μειονοτήτων δεν είναι ευπρόσδεκτες στις μαθηματικές τάξεις και ότι παίζει σημαντικό ρόλο ο πολιτικός ρόλος της γλώσσας.

Ένα θέμα που διαφοροποιεί τους εκπαιδευτικούς του δείγματος μεταξύ τους, αλλά παρουσιάζει διαφοροποίηση και στη βιβλιογραφία, είναι το θέμα της δυσκολίας που συναντούν οι μαθητές μειονοτήτων στη μάθηση των μαθηματικών λόγω της διαφορετικής μητρικής τους γλώσσας. Ο Xenofontos (2015) συμφωνεί με αυτήν τη θέση, καθώς το πλαίσιο διδασκαλίας των μαθηματικών συνδέεται αναπόφευκτα με γλωσσικά και πολιτισμικά θέματα. Ωστόσο, ο Manu (2005) υποστηρίζει ότι η κατανόηση των μαθηματικών επιτυγχάνεται με τις εικόνες και τις ιδέες και όχι με τις λέξεις.

Ο McLean (1999) και οι Stathopoulou και Kalabasis (2007) συμφωνούν με τη διαπίστωση ότι το ανεπαρκές βασικό λεξιλόγιο που διαθέτουν οι μαθητές μειονοτήτων δυσχεραίνει την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών, με τους τελευταίους να εντοπίζουν, επίσης, στην έρευνά τους δυσκολίες στα μαθηματικά λόγω της έλλειψης γνώσης κάποιων βασικών όρων, όπως σχήμα, μέγεθος κ.α.

Αναφορικά με τη σπουδαιότητα της επεξήγησης των μαθηματικών στη μητρική γλώσσα των μειονοτικών μαθητών από τον εκπαιδευτικό, όπου οι εκπαιδευτικοί του δείγματος συμφωνούν, η Setati (2005) υποστηρίζει ότι η μητρική γλώσσα των μαθητών συνιστά πόρο μάθησής τους.

Τέλος, σε άλλο ένα θέμα που συγκλίνουν τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας με τη βιβλιογραφία αφορά στο γεγονός ότι οι μαθητές μειονοτήτων δυσκολεύονται περισσότερο από τους υπόλοιπους μαθητές στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, αλλά όχι στις τυπικές διαδικαστικές πράξεις/τυπικούς αλγορίθμους. Συγκεκριμένα, ο Barwell (2014) και ο Xenofontos (2015) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές μειονοτήτων δυσκολεύονται, όταν καλούνται να επιλύσουν λεκτικά προβλήματα, εξαιτίας της γλωσσικής δομής των προβλημάτων, αλλά όχι με εργασίες που έχουν απλές διαδικασίες, όπως επίλυση απλών πράξεων.

Όσον αφορά το ΕΕ2 και τις κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών σε πολυπολιτισμικές τάξεις, η απουσία χρήσης της μητρικής γλώσσας των μαθητών μειονοτήτων στο μάθημα των μαθηματικών που καταγράφηκε στις τάξεις των εκπαιδευτικών του δείγματος εντοπίστηκε και στην έρευνα του Xenofontos (2015). Ακόμη, η πρακτική της ενθάρρυνσης των μαθητών μειονοτήτων να χρησιμοποιούν μεταξύ τους τη μητρική τους γλώσσα, που χρησιμοποιείται- κατά δήλωσή τους- από τους μισούς εκπαιδευτικούς του δείγματος, υποστηρίζεται από την έρευνά του (2016), καθώς μπορεί να υποστηρίξει την επικοινωνία και τη συμμετοχή τους στην τάξη των μαθηματικών.

Οι λόγοι διαφοροποίησης των ευρημάτων του ερωτηματολογίου με τη βιβλιογραφία θα πρέπει να αναζητηθούν στη φτωχή μαθηματική εκπαίδευση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, στις περιορισμένες εμπειρίες αρκετών στη διδασκαλία των μαθηματικών σε πολυπολιτισμικές τάξεις και στο γεγονός ότι, στους νομούς που πραγματοποιήθηκε η έρευνα, οι περισσότεροι μειονοτικοί μαθητές μιλάνε αρκετά καλά την ελληνική γλώσσα. Επίσης, όσον αφορά τον πολιτικό ρόλο της γλώσσας, ενδεχομένως οι εκπαιδευτικοί του δείγματος να μην έχουν ουσιαστική επίγνωση της πολιτικής διάστασης της επίσημης γλώσσας του σχολείου (η γλώσσα που καθορίζει το ποιος συμμετέχει και ποιος όχι στους επίσημους λόγους) ή να επιλέγουν να δηλώσουν την πολιτικά ορθή θέση (Morgan et al., 2014).

Εν κατακλείδι, με βάση τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα ανά ερευνητικό ερώτημα.

Σχετικά με **το πρώτο ερευνητικό ερώτημα** που αφορά τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη γλωσσική ετερότητα στην τάξη των μαθηματικών, τα ευρήματα έδειξαν αξιοσημείωτες διαφοροποιήσεις. Ειδικότερα, οι αντιλήψεις τους συγκλίνουν σε όλα τα θέματα εκτός από το ποια γλώσσα πρέπει να χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθηματικών, το θέμα της δυσκολίας της μάθησης των μαθηματικών εξαιτίας της μητρικής γλώσσας των μαθητών και της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί και οι μειονοτικοί μαθητές στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπου διαφοροποιούνται.

Σε ό,τι αφορά **το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα** που εστιάζει στις διδακτικές πρακτικές που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία των μαθηματικών σε πολυπολιτισμικές τάξεις, οι απόψεις των εκπαιδευτικών του δείγματος συγκλίνουν αναφορικά με την ελλειμματική αξιοποίηση της γλώσσας των μαθητών μειονοτήτων. Ωστόσο, διαφοροποιούνται όσον αφορά την ενθάρρυνση της χρήσης της γλώσσας των μαθητών μειονοτήτων μεταξύ τους.

Γενικά, τόσο οι συγκλίσεις όσο και οι αποκλίσεις στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών αναφορικά με τα γλωσσικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης των μειονοτικών μαθητών υποδεικνύουν ότι, παρά την εμπειρία και την ευαισθητοποίησή τους σε σχετικά ζητήματα, εμφανίζεται να είναι δύσκολο να λειτουργήσουν με κατάλληλους τρόπους σε αντίστοιχα περιβάλλοντα, καθώς κάτι τέτοιο προϋποθέτει σε βάθος επαγγελματική γνώση και εξειδίκευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barwell, R. (2014). Centripetal and centrifugal language forces in one elementary school second language mathematics classroom. *ZDM*, 46(6), 911-922.

Botes, H., & Mji, A. (2010). Language diversity in the mathematics classroom: does a learner companion make a difference? *South African Journal of Education*, *30*(1), 123-138.

Cuevas, G. J. (1991). Developing communication skills in mathematics for students with limited English proficiency. *Maths Teacher*, 84(2), 134-144.

Halai, A., & Clarkson, P. (2016). *Teaching and learning mathematics in multilingual classrooms*. Sense Publishers, Rotterdam.

Manu, S. S. (2005). Growth of mathematical understanding in a Bilingual context: Analysis and implications. In H. L. Chick and J. L. Vincent, (Eds.), *Proceedings of the 29th international group for the psychology of Mathematics Education*, vol. 3. pp. 289- 296. Melbourne: PME.

McLean, A. (1999). The predictive approach to teaching statistics. *Journal of Statistics Education*, 8(3).

Morgan, C., Craig, T., Schutte, M. & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. *ZDM: The International Journal of Mathematics Education*, *46 (6)*, 843-853.

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical thinking and learning*, *4*(2-3), 189-212.

Planas, N., Morgan, C., & Schütte, M. (2018). *Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research.* Routledge.

Planas, N., & Setati, M. (2009). Bilingual students using their languages in learning mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(3),36-59.

Setati, M. (2005). Teaching mathematics in a primary multilingual classroom. *Journal for research in Mathematics Education 36*(5), 447-466.

Stathopoulou, C., & Kalabasis, F. (2007). Language and culture in mathematics education: Reflections on observing a Romany class in a Greek school. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(2), 231-238.

Xenofontos, C. (2015). Immigrant pupils in elementary classrooms of Cyprus: How teachers view them as learners of mathematics. *Cambridge journal of education*, *45*(4), 475-488.

Xenofontos, C. (2016). Teaching mathematics in culturally and linguistically diverse classrooms: Greek-Cypriot elementary teachers' reported practices and professional needs. *Journal of Urban Mathematics Education*, *9*(1), 94-116.

ΕΜΦΥΛΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ: ΑΡΡΕΝΩΠΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μπαλαμπανίδου Ζαφείρα, Φωτιάδου Βάγια, Σταθοπούλου Χαρούλα

Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση,

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΠΤΕΑ

balabazaf@gmail.com, vagia95@hotmail.com, hastath@uth.gr

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος δύο ερευνών σχετικά με την έμφυλη ταυτότητα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και είναι συγκριτική. Αντλεί δεδομένα από συνεντεύξεις που έγιναν σε εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών αλλά και ενήλικα ΛΟΑΤΚΙ+ άτομα, που έχουν διδαχθεί Μαθηματικά στο σχολείο. Τα δεδομένα αυτά ενισχύουν την αντίληψη που επικρατεί περί αρρενωπότητας των Μαθηματικών, η οποία νοείται μάλιστα ως κανονικότητα. Επιπλέον, επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι οι έμφυλοι λόγοι και πρακτικές είναι τόσο ισχυρά συνδεδεμένες με τις κοινωνικές νόρμες, που διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό ακόμη και τα υποκείμενα που αποκλίνουν από αυτές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι σημερινές κοινωνίες είναι ποικιλόμορφες και βιώνουν έντονα την παγκοσμιοποίηση και την ταχεία οικονομική, πολιτική και πολιτισμική εξάπλωση (Appelbaum & Stathopoulou, 2015). Όσον αφορά την εκπαιδευτική διαδικασία, η μάθηση ξεφεύγει πια από τη γνωστική διάσταση και επηρεάζεται μεταξύ άλλων, από κοινωνικούς παράγοντες (Kersey & Voigt, 2020). Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, η Μαθηματική Εκπαίδευση κάνει επίσης την “κοινωνική στροφή” και αποτελεί βασικό πυλώνα κοινωνικής ανάπτυξης (Appelbaum & Stathopoulou, 2015). Υποχρέωση της κοινωνικά φορτισμένης Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι να εξασφαλίσει την κοινωνική δικαιοσύνη, δηλαδή το να απευθύνεται σε όλα τα άτομα και να τους παρέχει ίδιες και ίσες ευκαιρίες μάθησης και συμμετοχής, ανεξαρτήτως χαρακτηριστικών όπως η εθνικότητα, η κοινωνική τάξη και το φύλο. Με τον τρόπο αυτό συμπράττει στην οικοδόμηση της κοινωνικής δικαιοσύνης, που αποτελεί στόχο των σύγχρονων και εξελιγμένων κοινωνιών (Appelbaum & Stathopoulou, 2015).

Ωστόσο, είναι ευρέως γνωστό ότι αυτό όχι μόνο δε συμβαίνει στην πράξη, αλλά υποβαθμίζεται συχνά και σαν θεωρητική αρχή (Walkerdine, 2013). Τα σχολικά Μαθηματικά στην πραγματικότητα, λειτουργούν από πολύ νωρίς ως ένα ισχυρό σύστημα κατηγοριοποίησης των παιδιών, καθώς ιστορικά έχουν εξισωθεί με την έμφυτη ευφυΐα και την ικανότητα

(Walshow, 2016). Ταυτόχρονα, θεωρούνται ένα αξιοκρατικό και αντικειμενικό κριτήριο αξιολόγησης τους. Κατά συνέπεια, τείνουν να ενδυναμώνουν τα προνομιούχα παιδιά, ενώ έχουν αρνητικό αντίκτυπο στους μαθητές που προέρχονται από περιθωριοποιημένες ομάδες (Voigt & Reinholz, 2020).

Η ΕΜΦΥΛΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η έμφυλη διάσταση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, η οποία οικοδομήθηκε αρχικά με βάση τις βιολογικές διαφορές στο ζήτημα του φύλου. Με τη μετατόπιση όμως της ερευνητικής βαρύτητας σε κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες, ήρθε στο επίκεντρο της προσοχής το κοινωνικό φύλο και το βαθιά ριζωμένο και καθιερωμένο δίπολο αγόρι-κορίτσι. Οι σχετικές θεωρητικές και εμπειρικές έρευνες βασίστηκαν μάλιστα σε ποικίλες θεωρίες και προσέγγισαν το θέμα από διάφορες οπτικές γωνίες (Walshow, 2016).

Κοινό συμπέρασμα των ερευνών αυτών, είναι ότι το ανδρικό μυαλό εγγράφεται και μυθοποιείται ως ιδανικό και μαθηματικό, ικανό για αφαιρετική σκέψη και αντικειμενική λογική (Χρονάκη, 2013). Αντίθετα, το γυναικείο μυαλό κατατάσσεται ως λιγότερο ικανό για τα Μαθηματικά, γιατί λείπει από τις γυναίκες το έμφυτο ταλέντο και το πάθος για αυτά και για τις επιστήμες που σχετίζονται με αυτά. Έτσι τα Μαθηματικά βαπτίζονται αντρικά, με το «γυναικείο» και τη «θηλυκότητα» να αντιπροσωπεύουν ένα σύνολο ιδιοτήτων αντίθετων των Μαθηματικών. Ως επακόλουθο, υπονομεύονται οι προσπάθειες των κοριτσιών και των γυναικών, υποβιβάζοντας τις ικανότητες τους και τις επιτυχίες τους και καθηλώνοντας τες σε «έμφυλες και ταξικές υποκειμενικότητες» (Χρονάκη, 2013, σ. 22). Οι ιδεολογικές αυτές κατασκευές του φύλου, αν και αδιόρατες, εξακολουθούν και σήμερα να αποτελούν εμπόδια για τη δράση και την επιτυχία των γυναικών στα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά μάλιστα, φαίνεται πως λειτουργούν σαν ένα αόρατο τοίχος, που υψώνεται για τις γυναίκες και τις φέρνει συχνά αντιμέτωπες με την έμφυλη ανισότητα και τον αποκλεισμό στη Μαθηματική Εκπαίδευση και κατά συνέπεια με περιορισμένες ακαδημαϊκές και επαγγελματικές επιλογές (Χρονάκη, 2013).

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι το να συμμετέχει κανείς στη Μαθηματική Εκπαίδευση, σημαίνει το να νιώθει ευπρόσδεκτος σε ένα κατεξοχήν ανδρικό περιβάλλον (Yeh & Rubel, 2020). Όπως προαναφέρθηκε, οι γυναίκες βιώνουν εχθρικό κλίμα κι αντιμετωπίζουν δυσκολίες εξαιτίας του φύλου τους και μόνο (Voigt & Reinholz, 2020). Είναι συνεπώς απορίας άξιο, τι συμβαίνει με ανθρώπους που ξεφεύγουν τόσο από τα όρια της ετεροκανονικότητας[1] αλλά και της ετεροσεξισμού[2], που έχουν χαραχθεί σε σχέση με τη Μαθηματική Εκπαίδευση. Τα άτομα της ΛΟΑΤΚΙ+ κοινότητας αποτελούν παράδειγμα μίας μη προνομιούχας μειονότητας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Οι ταυτότητες τους είναι αόρατες και ασύνδετες με τον ανδρικό χαρακτήρα των Μαθηματικών και κατά συνέπεια καταπιεσμένες και περιθωριοποιημένες (Voigt & Reinholz, 2020). Επιπλέον οι εμπειρίες τους δεν αποτελούν επίκεντρο στη μελέτη της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Dubbs, 2016).

Συμπερασματικά, αν και η Μαθηματική Εκπαίδευση νοείται από πολλούς ως ουδέτερη και αντικειμενική και ταυτίζεται με την ανάπτυξη του τυπικού μαθηματικού γραμματισμού (Yeh & Otis, 2019), φαίνεται ότι τα Μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο έχουν εξουσία που οδηγεί σε κοινωνικό διαχωρισμό και σε πολιτικοποίηση καταστάσεων (Yeh & Rubel, 2020). Επιπλέον, η Μαθηματική Εκπαίδευση έχει θεμελιώδη ρόλο στην ανάπτυξη της ταυτότητας των μαθητών και των μαθητριών και είναι ικανή να επηρεάσει καθοριστικά τις αντιλήψεις τους για τους κοινωνικούς ρόλους (Yeh & Otis, 2019). Τέλος, ζούμε σε μία άκρως πατριαρχική και σεξιστική κοινωνία, όπου η αρρενωπότητα των Μαθηματικών νοείται ως κανονικότητα, ενώ κάθε ομάδα που ξεφεύγει από το έμφυλο και σεξουαλικό κατεστημένο και τονίζει την περίπλοκη πραγματικότητα στην οποία ζούμε, αποτελεί πρόκληση (Voigt & Reinholz, 2020).

Γίνεται λοιπόν εμφανές ότι η κοινωνική στροφή στη Μαθηματική Εκπαίδευση είναι καίριας σημασίας, ενώ ταυτόχρονα για την προσέγγιση της κοινωνικής δικαιοσύνης έχει δημιουργηθεί η ανάγκη και ο χώρος ανάπτυξης για την Κουήρ[3] στροφή στα Μαθηματικά. Αυτή βασίζεται στην Κουήρ Θεωρία, που αποτελεί διασταύρωση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης με τις ταυτότητες των ατόμων που σπάνε το καλούπι και ξεφεύγουν από τις νόρμες του φύλου και της σεξουαλικότητας (Dubbs, 2016).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το παρόν άρθρο αποτελεί μια συγκριτική μελέτη και παρουσίαση των ερευνητικών δεδομένων δύο ερευνών εν εξελίξει, αναφορικά με την έμφυλη ταυτότητα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, κι έχει στοιχεία ερμηνευτικής-φαινομενολογικής ανάλυσης. Εστιάζει στην αρρενωπότητα των Μαθηματικών και προχωρώντας πέρα από τη δυαδικότητα του φύλου, παρουσιάζει ερευνητικά δεδομένα και σε σχέση με τα Μαθηματικά και την ΛΟΑΤΚΙ+ κοινότητα. Η μία έρευνα αφορά εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών μιας επαρχιακής πόλης και κινείται μέσα στο δίπολο γυναίκες/άντρες και κορίτσια/αγόρια. Η άλλη έρευνα έχει ως δείγμα ενήλικα άτομα της ΛΟΑΤΚΙ+ κοινότητας, που έχουν ολοκληρώσει τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση κι έχουν παρακολουθήσει μαθήματα Μαθηματικών στο σχολείο. Οι αντιλήψεις των ατόμων της ΛΟΑΤΚΙ+ κοινότητας παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι ενώ σπάνε τα έμφυλα στεγανά γενικά στη ζωή, τείνουν να μην εντοπίζουν το κοινωνικό πρόσημο των Μαθηματικών, ούτε τη σχέση τους με ζητήματα όπως αυτό του φύλου. Αντίθετα, διατηρούν μία παγιωμένη εικόνα για την έμφυλη μαθηματική ταυτότητα. Από τα ερευνητικά δεδομένα αξιοποιούνται και παρατίθενται στοιχεία από 10 ημιδομημένες συνεντεύξεις (πέντε από κάθε έρευνα). Το πραγματολογικό υλικό αναλύεται στο πλαίσιο της συγκριτικής ανάλυσης λόγου και με την αξιοποίηση της μεταδομιστικής φουκωικής προσέγγισης. Επιπλέον, η επεξεργασία των δεδομένων ακολουθεί τις αρχές της θεματικής ανάλυσης, που στοχεύει στη συστηματική αναγνώριση, οργάνωση και κατανόηση επαναλαμβανόμενων μοτίβων νοήματος, μέσα στις υποκειμενικές δηλώσεις των συμμετεχόντων.

Η θεωρία του Μισέλ Φουκώ τονίζει την κατασκευή των υποκειμένων, μέσα από τους έμφυλους λόγους (discourses), τις έμφυλες λογοθετικές πρακτικές (discursive practices) και τις πρακτικές διαίρεσης (dividing practices) της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, καθώς και τη σύγκρουση των υποκειμενικοτήτων μέσα από τις ξεχωριστές και επικαλυπτόμενες ταυτότητές, όπως του φύλου (Κοταρίνου κ.ά., 2015). Επιπροσθέτως, αναπτύσσει την εναλλακτική γλώσσα, που μπορεί να αξιοποιηθεί για να αμφισβητηθούν οι φυσιοκρατικές αντιλήψεις και να κατανοηθεί η συγκρότηση των υποκειμένων μέσα στις τάξεις των Μαθηματικών. Τέλος, δίνει τη δυνατότητα κατανόησης του πώς η εξουσία – με τη σχεσιακή της έννοια- μέσα στις σχολικές τάξεις, δημιουργεί αποκλεισμούς και καθιστά άλλους περισσότερο κι άλλους λιγότερο σημαντικούς για το μάθημα των Μαθηματικών (Walshaw, 2016).

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Τα Μαθηματικά και η Μαθηματική Εκπαίδευση νοούνται από μεγάλο ποσοστό των ανθρώπων ως διαχρονικά, αντικειμενικά, ουδέτερα και ανεξάρτητα από την κουλτούρα, την πολιτική και κάθε είδους επίμαχο ζήτημα (Appelbaum & Stathopoulou, 2015). Επίσης, πολλοί είναι οι άνθρωποι που δεν αντιμετώπισαν προβλήματα στη Μαθηματική Εκπαίδευση λόγω της έμφυλης ή και σεξουαλικής ταυτότητάς τους. Μάλιστα ορισμένοι αναφέρουν θετικές εμπειρίες, που επηρέασαν και τη μετέπειτα ακαδημαϊκή και επαγγελματική πορεία τους -μεταξύ των οποίων και πολλοί από τους συμμετέχοντες- και διαμόρφωσαν τις ιδέες τους σχετικά με την έμφυλη ταυτότητα των Μαθηματικών, πέρα από το καλούπι της αρρενωπότητας. Ωστόσο, η συζήτηση μαζί τους ανέδειξε ποικίλα παραδείγματα από την προσωπική τους εμπειρία, που υπογραμμίζουν την έμφυλη διάσταση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και την αρρενωπότητα που έχει προσδοθεί στα Μαθηματικά.

Οι ΛΟΑΤΚΙ+ ενήλικες ερωτήθηκαν μεταξύ άλλων για την έμφυλη διάσταση των Μαθηματικών. Παρακάτω παρατίθενται ορισμένες ενδεικτικές απαντήσεις των συνεντεύξεών τους, στα οποία γίνεται φανερό ότι αν και δεν κάνουν συσχέτιση του φύλου και των Μαθηματικών, θεωρούν ότι οι άντρες είναι περισσότερο συμβατοί με τη μαθηματική σκέψη.

> «[…] θα έλεγα ότι τα άτομα αρσενικού φύλου έχουν μεγαλύτερη έφεση σε αυτόν τον τομέα. Έρχεται δηλαδή αυθόρμητα το στερεότυπο, ότι οι άντρες είναι καλύτεροι στα Μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες.» (σις τζέντερ[4] αμφισεξουαλικός άνδρας)

> «Κοίταξε, όσον αφορά το δικό μου το μυαλό, οι άντρες κι αυτοί που αισθάνονται άντρες έχουν λίγο πιο τετράγωνη λογική. Είναι πολύ καλύτεροι στις θετικές επιστήμες απ' ότι οι γυναίκες.» (τρανς[5] στρέιτ άνδρας)

> «[…] αν εννοούμε αν σε κάποιο φύλο είναι πιο εύκολο να αφομοιώσει τα Μαθηματικά […]. Ναι, γιατί θεωρώ ότι ίσως για τις γυναίκες είναι πιο δύσκολο να καταλάβουν τη Μαθηματική σκέψη.» (σις τζέντερ ομοφυλόφιλος άνδρας)

Η αντίληψη ότι οι άντρες και τα αγόρια υπερτερούν στη μαθηματική σκέψη και στη λογική, φαίνεται να κυριαρχεί και μέσα στη σχολική κοινότητα. Αποτυπώνεται μάλιστα στο λόγο των ανδρών και γυναικών που διδάσκουν Μαθηματικά.

> «Τα αγόρια θεωρούν πιο δεδομένο ότι είναι καλά στα μαθηματικά τα έχουν και μεγαλωμένα έτσι, ξέρεις εγώ επειδή είμαι αγόρι είμαι καλύτερος από τα κορίτσια στα Μαθηματικά» (γυναίκα)

> «Βλέποντας τις τάξεις, βλέπω ότι τα αγόρια έχουν έναν άλλο τρόπο σκέψης, είναι πιο πρακτικά. Πολλά πράγματα τα αντιλαμβάνονται και πιο γρήγορα, και τα βλέπουν πιο σφαιρικά. […] Το δύσκολο το ερώτημα στο τέλος που θα πιάνει λίγο, για το είκοσι, θα το χάσουνε τα κορίτσια για κάποιο λόγο, ενώ τα αγόρια θα το βρουν και μπορεί να μην έχουν κάνει κάτι πιο απλό […] αλλά στο δύσκολο το ερώτημα θα πάνε καλύτερα.» (γυναίκα)

> «Στους ορισμούς είναι πιο καλά τα κορίτσια. Τα αγόρια δεν μαθαίνουν τους ορισμούς έτσι όπως πρέπει. Όταν έρθει η ώρα όμως, στην πράξη, αυτά τα αγόρια που δεν μπορούν να γράψουν πρώτα τους ορισμούς, δουλεύουν πιο καλά, ίσως επειδή είναι πιο... (παύση) πιο ελεύθερα ας το πούμε; Τι να πω τώρα; Έχουν κι αυτό τα κορίτσια. Έχουν την ντροπή. Μαθαίνουν ορισμούς, ε... μαθαίνουν τεχνική. Παρόλο που είναι πιο διαβασμένες. Στην πράξη λίγο εκεί χωλαίνουν, ναι […] Ξέρεις που... που εκτιμώ χωλαίνουν λίγο τα κορίτσια; Σκέφτονται πάρα πολύ, ναι. Συναισθηματικά.» (άνδρας)

Φαίνεται, τόσο στο λόγο των ατόμων από τη ΛΟΑΤΚΙ+ κοινότητα, όσο και στο λόγο των εκπαιδευτικών, ότι οι σχέσεις φύλου-εξουσίας διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό την ιεραρχική ταξινόμηση των υποκειμένων, μέσα στον κυρίαρχο λόγο για τα Μαθηματικά (Πεχτελίδης, 2012). Το κανονιστικό πλαίσιο της ανδρικής ταυτότητας είναι σε ένα βαθμό έτσι κατασκευασμένο, ώστε να θεωρεί ότι οι άνδρες είναι ορθολογικοί και καλοί στα Μαθηματικά, ενώ οι γυναίκες όχι. Έτσι μέσα από έναν ηγεμονικό λόγο, παράγονται συγκεκριμένες μορφές υποκειμένων. Όσον αφορά τα υποκείμενα που προσδίδουν στον εαυτό τους χαρακτηριστικά που δεν ταυτίζονται με την αρρενωπότητα των Μαθηματικών, συχνά οδηγούνται στην παθητικότητα σε σχέση με αυτά, καθώς η έμφυλη ταυτότητά τους έρχεται σε σύγκρουση με τους κυρίαρχους λόγους για τα Μαθηματικά (Κοταρίνου κ.ά., 2015).

Οι συνεντευξιαζόμενοι από τη ΛΟΑΤΚΙ+ κοινότητα ανέφεραν ακόμη, ότι τα έμφυλα ζητήματα δε θίγονται στα Μαθηματικά. Ωστόσο, έχουν παρατηρήσει έμφυλες λογοθετικές πρακτικές στην τάξη των Μαθηματικών. Όπως αναφέρουν:

> «Ίσα ίσα που πολλοί καθηγητές αναπαράγουν κιόλας στερεότυπα αρνητικά, ότι οι άντρες είναι για τα μαθηματικά και οι γυναίκες για τα θεωρητικά ή και για το σπίτι τους, έχει τύχει να το ακούσω κι αυτό από καθηγητή.» (σις τζέντερ αμφισεξουαλικός άνδρας)

> «Όσον αφορά την τάξη και τον δάσκαλο, πιστεύω ότι κάπως υπάρχει μία υποκειμενικότητα ότι τα αγόρια και οι άντρες είναι πιο γρήγοροι, τα κάνουν πιο εύκολα, ότι θα είναι καλύτεροι, οπότε πιστεύω ότι υπάρχει κάποια διαφορά. [..] Ότι οι άντρες είναι καλύτεροι στις θετικές επιστήμες, οι γυναίκες θα είναι καλύτερες στις θεωρητικές επιστήμες.» (τρανς στρέιτ άνδρας)

> «Στο δημοτικό αρχίζει να παίζει ένα μικρό ρόλο και κορυφώνει στη μέση εκπαίδευση [..] πείθουν περισσότερο τα αγόρια να κατευθυνθούν προς αυτές τις κατευθύνσεις που περιέχουν Μαθηματικά, Χημεία, Φυσική και τα κορίτσια περισσότερο σε ανθρωπιστικούς κλάδους και στους κλάδους υγείας και ζωής, επειδή υπάρχει και το στερεότυπο.» (τρανς γυναίκα, ίντερσεξ, λεσβία)

Οι ίδιες αναφορές εμφανίζονται και στις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά μέσα στο λόγο τους, για τα δικά τους μαθητικά χρόνια ή για τη σημερινή εμπειρία τους και τη συναναστροφή τους με τα παιδιά.

> «Προφανώς ναι, προφανώς επηρέασε το φύλο στο ότι μου έλεγαν να γίνω πολιτικός μηχανικός. Προφανώς επηρέασε το φύλο (έμφαση)... και νομίζω ότι αυτό ακόμη το κουβαλάει ο άνθρωπος.» (άνδρας)

> «Εμάς μας είχανε και λίγο των πιο, των φιλολογικών. Το θεωρούσανε πιο φυσική ροπή προς τα εκεί, κλίση. Ότι ήτανε η κλίση μας. […] Ναι! Το θεωρούσαν πιο δεδομένο ότι οι... οι γυναίκες είναι πιο εύκολο γι' αυτές να πάνε σε κάποια σχολή δασκάλες ή φιλόλογοι ας πούμε. Ενώ θεωρούσαν ότι εκείνοι θα διαπρέψουν ας πούμε στα μαθηματικά. Επειδή ήταν αγόρια, ναι!» (γυναίκα)

> «Ξέρεις τι μου έτυχε πολλές φορές; Εξαιτίας ενός καθηγητή που είχε αυτά τα στεγανά, πολλά κορίτσια άλλαξαν γνώμη για τα Μαθηματικά και πήγαν στη θεωρητική κατεύθυνση, γιατί... πίστεψαν ότι δεν τα καταφέρνουν.» (άνδρας).

> «Τα κορίτσια, αν δεν είναι σίγουρα είναι διστακτικά και έχουν πολύ κόντρες οι άντρες (μαθηματικοί) με τα παιδιά και έτσι όπως τους βλέπω νομίζω τα αγόρια είναι εκείνα που κοιτάν πιο πολύ. Τα αγόρια είναι πιο ευνοούμενα.» (γυναίκα)

Και στα παραπάνω αποσπάσματα, γίνεται φανερό ότι, τόσο στο λόγο των υποκειμένων από τη ΛΟΑΤΚΙ+ κοινότητα, όσο και των εκπαιδευτικών, γυναικών και ανδρών, οι λογοθετικές πρακτικές υπάρχουν στην τάξη των Μαθηματικών. Επιπλέον, διακρίνεται το ισχυρό πλέγμα σχέσεων εξουσίας, που στόχο έχει να δομήσει και να οριοθετήσει το πεδίο δράσης όλων όσων δεν ταυτίζονται με την ανδρική ταυτότητα, που αποτελεί κατεστημένο, σε σχέση με τα Μαθηματικά και τα επαγγέλματα STEM. Επίσης, ο προσανατολισμός σπουδών με βάση το φύλο εμφανίζει μια διαχρονική σταθερότητα (Μαραγκουδάκη, 2007). Η σταθερότητα αυτή φαίνεται και στα αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις που πάρθηκαν και δίνει τη δυνατότητα να ερμηνευτεί η επιλογή σπουδών στη βάση κλίσεων και εγγενών χαρισμάτων για τα φύλα. Όμως, η ασυμβατότητα των κοριτσιών και των ατόμων που ξεφεύγουν από τη νόρμα της αρρενωπότητας με τα Μαθηματικά, ας μην θεωρηθεί απλά ως μια παρανόηση ή ένα απλό λάθος, αλλά ως μια παραγωγική εξουσία που έχει ως αποτελέσματα την απομάκρυνσή τους από τα επαγγέλματα STEM και τη διατήρηση της υπάρχουσας κατάστασης (Walkerdine, 2013). Όσοι δεν ταυτίζονται με την ανδρική ταυτότητα, χαρακτηριστικό της οποίας είναι η ορθολογική μαθηματική σκέψη, βιώνουν μια αντίφαση ανάμεσα στην ταυτότητά τους που συχνά λειτουργεί αρνητικά και στην ενασχόλησή τους με αυτά. Επιπλέον, τα κορίτσια υποκύπτουν και στις κοινωνικές πιέσεις σχετικά με τα γυναικεία επαγγέλματα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το ζήτημα του κοινωνικού φύλου και του δίπολου άνδρας-γυναίκα είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο και περίπλοκο, τόσο στο επίπεδο της κοινωνικής ζωής όσο και σε αυτό της εκπαίδευσης. Είναι κατά συνέπεια δύσκολο να δοθεί μία απάντηση σχετικά με το ποια είναι η αλήθεια για τα κορίτσια και τα Μαθηματικά, που έχει απασχολήσει έντονα τις έρευνες στη

Μαθηματική Εκπαίδευση. Το βέβαιο είναι, πως ο προβληματισμός για τους μύθους και τους λόγους που αφορούν αυτή την αλήθεια, αλλά και «*την ανάγκη να αποδειχθεί η μαθηματική κατωτερότητα των κοριτσιών*» είναι καίριας σημασίας (Walkerdine, 2013, σ. 103). Αυτό, διότι η αποδόμηση των "καθεστώτων αλήθειας" και των βεβαιοτήτων για τα Μαθηματικά και τα κορίτσια, αποτελεί την κινητήρια δύναμη που θα προκαλέσει την αλλαγή (Walshaw, 2016). Είναι σημαντικό να αναρωτηθούμε τι είδους υποκειμενικότητες διαμεσολαβούν σήμερα στα σχολικά Μαθηματικά και γενικότερα τα Μαθηματικά καθώς, η μαθηματική ικανότητα θεωρείται ως δείκτης ευφυΐας με έμφυλο και ταξικό χαρακτήρα (Χρονάκη, 2013).

Ταυτόχρονα, ζούμε σε μία εποχή κοινωνικών ζυμώσεων και αλλαγών, που στρέφουν το βλέμμα των ανθρώπων σε μία πιο ρευστή εκδοχή του φύλου, που κυμαίνεται σε ένα ευρύ φάσμα. Είναι καιρός η Μαθηματική Εκπαίδευση να ρίξει τα καλά οχυρωμένα τείχη της και να αποτινάξει τα στενά πλαίσια της ετεροκανονικότητας, που είναι βαθιά ριζωμένα ακόμη και στα άτομα που αποκλίνουν από αυτά. Δημιουργείται λοιπόν η επιτακτική ανάγκη του να αποκτήσει η Μαθηματική Εκπαίδευση Κουήρ χαρακτήρα, μιας κι έτσι θα παρέχει ευκαιρίες εξέλιξης για το σύνολο των μαθητών και δε θα έχει ως κέντρο βάρους της τον άντρα και την αρρενωπότητα (Dubbs, 2016).

Προς αυτή την κατεύθυνση, είναι καίριας σημασίας η αναγνώριση των πρακτικών με τις οποίες οι διάφοροι φορείς κοινωνικοποίησης, ανάμεσα στους οποίους και το σχολείο, συμβάλουν στη συντήρηση και στην αναπαραγωγή της ανισότητας και του σχολικού και κατ' επέκταση κοινωνικού διαχωρισμού. Στο πλαίσιο αυτό θα βοηθούσε αδιαμφισβήτητα η επιμόρφωση και η ευαισθητοποίηση των εκπαιδευτικών σε θέματα που σχετίζονται με το φύλο, ώστε να κατανοήσουν τα βαθύτερα αίτια για τα οποία η επιτυχία των γυναικών κι όσων αποκλίνουν από το προφίλ αρρενωπότητας είναι μία απειλή που συνεχώς πρέπει να αμφισβητείται (Walkerdine, 2013). Επίσης, έχει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον η μελέτη κι άλλων παραγόντων, όπως της οικογένειας, που μπορούν να επηρεάσουν τις επιλογές των ατόμων σε επαγγελματικό κι όχι μόνο επίπεδο.

Τέλος, η ανάδυση μιας θεώρησης που περιλαμβάνει την αναδιανομή, την αναγνώριση και τη συμμετοχή (Fraser, 2013), μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη παιδαγωγικών που εστιάζουν στην ισότητα και την κοινωνική δικαιοσύνη στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Η διαμόρφωση ηθικών και κοινωνικά δίκαιων πρακτικών, σε όλα τα επίπεδα και τις κοινωνικές ομάδες, είναι η παροχή πρόσβασης σε βαθιά μάθηση στα Μαθηματικά και σε επιτυχία στη «δημιουργία μαθηματικής γνώσης» (Jorgensen, 2014).

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Ετεροκανονικότητα: Η πεποίθηση ότι οι άνθρωποι χωρίζονται σε διακριτά και συμπληρωματικά φύλα (άνδρας/γυναίκα) με φυσικούς ρόλους στη ζωή.
2. Ετεροσεξισμός: Η πεποίθηση πως η ετεροφυλοφιλία είναι ο μόνος φυσιολογικός σεξουαλικός προσανατολισμός.
3. Κουήρ (Queer): Όρος-ομπρέλα, που χρησιμοποιείται από άτομα που δεν αποδέχονται τις παραδοσιακές έννοιες φύλων και σεξουαλικότητας και δεν ταυτίζονται/ καλύπτονται με κάποιο από τους υπόλοιπους όρους του ακρωνυμίου ΛΟΑΤΙ+.
4. Σις τζέντερ (cis gender/cis) ή μη τρανς: Άτομο του οποίου η ταυτότητα φύλου δε διαφέρει από το φύλο που του αποδόθηκε στη γέννηση.
5. Τράνς (Trans)/Διεμφυλικό άτομο: Άτομο του οποίου το φύλο δεν συμβαδίζει με το φύλο που του αποδόθηκε κατά τη γέννηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Appelbaum, P., & Stathopoulou, C. (2015). 13 Critical Issues in Culture and Mathematics Learning. *Handbook of international research in mathematics education*, 336.

Dubbs, C. (2016). A Queer Turn in Mathematics Education Research: Centering the Experience of Marginalized Queer Students. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Fraser, N. (2013). *Fortunes of feminism: From state-managed capitalism to neoliberal crisis.* Verso Books.

Jorgensen, R. (2014). Social Theories of Learning: A Need for a New Paradigm in Mathematics Education. *Mathematics Education Research Group of Australasia.*

Kersey, E., & Voigt, M. (2020). Finding Community and Overcoming Barriers Experiences of Queer and Transgender Postsecondary Students in Mathematics and other STEM Fields. *Mathematics Education Research Journal*, 1-24.

Voigt, M., & Reinholz, D. L. (2020). Calculating Queer Acceptance and Visibility A Literature Synthesis on Queer Identity in Mathematics. Ανακτήθηκε στις 28/11/2021 από: https://osf.io/pumqe

Yeh, C., & Otis, B. M. (2019). Mathematics for whom Reframing and humanizing mathematics. *Occasional Paper Series*, 21(8), 83-98.

Yeh, C., & Rubel, L. (2020). Queering Mathematics Disrupting Binary Oppositions in Mathematics Pre-service Teacher Education. In *Borders in Mathematics Pre-Service Teacher Education* (pp. 227-243). Cham: Springer.

Walshaw, M. (2016). Michel Foucault. In E. Freitas & M. Walsaw (eds), *Alternative Theoretical Frameworks for Mathematics Education Research* (pp. 39-64). Springer International Publishing Switzerland.

Walkerdine, V. (2013). *Αποκλείοντας τα Κορίτσια:Κορίτσια και μαθηματικά* (Ι. Φ. Βλαχόπουλος μτφρ.). Αθήνα: Gutenberg. (Πρωτότυπη έκδοση 1998).

Κοταρίνου, Π., Σταθοπούλου, Χ. & Γκανά, Ε. (2015). ‘Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση’ και Υβριδικός Χώρος στη Διδασκαλία της Γεωμετρίας. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (Επιμ.), 6ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματικά ΜΕ Διάκριση και ΧΩΡΙΣ Διακρίσεις, 4-6 Δεκεμβρίου 2015 (σσ. 318-347). Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ

Μαραγκουδάκη, Ε. (2007). Η Παρουσία των δύο Φύλων στη Δευτεροβάθμια και Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Στο Β. Δεληγάννη-Κουϊμτζή, & Δ. Σακκά (επιμ.), *Από την εφηβεία στην ενήλική ζωή: μελέτες για τις ταυτότητες φύλου στη σύγχρονη ελληνική πραγματικότητα* (σσ. 285-312). Αθήνα: Gutenberg.

Πεχτελίδης, Γ. (2012). Κοινωνιολογία του «Ανδρισμού» στο Σχολείο. Στο Σ. Αθανασοπούλου-Κυπρίου, Π. Βουτσινά, Μ. Κοτζάμπαση, Μ. Νικηφορίδης, Ρ. Ποθητάκη (Επιμ.), *Να κοιτάς με Άλλα Μάτια να Βλέπεις Διαφορετικά, Έμφυλες Προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση* (σσ. 197-216). Αθήνα: Σχολή Μωραΐτη.

Χρονάκη, Α. (2013). Εισαγωγή της Επιμελήτριας. Αποκλείοντας τα Κορίτσια: Μύθοι, Σκιές και Πραγματικότητες για τη σχέση φύλου και μαθηματικών. Στο Α. Χρονάκη (Επιμ.), *Αποκλείοντας τα Κορίτσια: Κορίτσια και Μαθηματικά* (σσ. 13-43). Αθήνα: Gutenberg.

Η ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΒΥΓΚΟΤΣΚΙΑΝΗΣ PEREZHIVANIE ΩΣ ΡΙΖΙΚΗΣ ΥΠΕΡΒΑΤΟΛΟΓΙΚΗΣ ΖΩΣΑΣ ΕΜΠΕΙΡΙΑΣ, ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΥ ΕΠΕΙΣΟΔΙΟΥ

Ζαγοριανάκος Αντώνης

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

matheart7@math.uoa.gr

Στο άρθρο γίνεται χρήση ενός μαθησιακού επεισοδίου και των συνεπειών που είχε για την Ντιάνα, μια υποψήφια καθηγήτρια Μαθηματικών της Β' βάθμιας εκπαίδευσης. Η ριζική μεταβολή των πεποιθήσεων της Ντιάνας για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, εξαιτίας της νοηματικής της επιβίωσης στη μαθησιακή της εμπειρία δίνει μια περιγραφή της perezhivanie ως ριζικής υπερβατολογικής ζώσας εμπειρίας, για τον καθορισμό της προσωπικής της ανάπτυξης μέσα από τη διάθλαση του περιβάλλοντος. Στόχος του άρθρου είναι να αναδειχθεί η αμετάφραστη ως τώρα έννοια της perezhevanie ως κρίσιμη για τον συνδυασμό των αναλυτικών δυνατοτήτων της φαινομενολογικής σκοπιάς και της Βυγκοτσκιανής προσέγγισης της Θεωρίας Δραστηριότητας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η θεωρητική περιγραφή που ακολουθεί, αποτυπωμένη σε ένα εμπειρικό παράδειγμα *επιβίωσης νοήματος* της φοιτήτριας, με *ριζικές συνέπειες* για την *μαθησιακή* της *εξέλιξη* και τις *πεποιθήσεις της*—με αφόρμηση την λύση που έδωσε κατά τη διάρκεια μιας ανοικτής μαθηματικής δραστηριότητας, διοργανωμένης από έναν καθηγητή που απέφευγε εντελώς την διδακτική καθοδήγηση—έχει ως *ερευνητικό σκοπό* και *ερώτημα* την δημιουργία εδάφους για επικοινωνία μεταξύ φαινομενολογίας και C.H.A.T., στο πεδίο της διδακτικής των Μαθηματικών. Η έρευνα που αποτυπώνεται εδώ, αποσκοπεί στη μελέτη μιας έννοιας του ύστερου Βυγκότσκυ, η οποία φαίνεται πως μπορεί να λειτουργήσει σαν γέφυρα μεταξύ της Θεωρίας Δραστηριότητας (C.H.A.T.) και της φαινομενολογικής γνωσιολογικής αντίληψης και μεθοδολογίας. Η Φαινομενολογία εξετάζει την γνωσιακή εμπειρία ως εμπειρία νοήματος—ο κόσμος εντός του οποίου ζούμε είναι ένας κόσμος νοήματος—*αποβλεπτικού* και *διυποκειμενικού νοήματος,* το οποίο είναι δυνατόν να αποκωδικοποιηθεί, αν και όχι πλήρως, μέσω της συστηματικής μελέτης της αποβλεπτικής λειτουργίας της συνείδησης. Η Θεωρία Δραστηριότητας θεωρεί την γνωσιακή εμπειρία ως μία πολιτισμικογενή εμπειρία, με την *εσωτερίκευση* των πολιτισμικογενών εργαλείων να αποτελεί τη Λυδία λίθο της κατανόησης της γνωσιακής εμπειρίας και εξέλιξης. Η σύγκλιση των δύο ρευμάτων επιχειρείται εδώ μέσω της perezhivanie, μιας αμετάφραστης έως τώρα έννοιας (Blunden, 2016α) του ύστερου Βυγκότσκυ, στην οποία το «πρόβλημα του περιβάλλοντος» (Vygotsky, 1934/1994) αντικρύζει την *επίδραση του περιβάλλοντος στο άτομο*—το ριγμένο στον κόσμο κατά Σαρτρ/Χάιντεγκερ (1943/2007) σύμφωνα με τον φαινομενολογικό υπαρξισμό και ταυτόχρονα το διαλεκτικά εμπλεκόμενο στο περιβάλλον του υποκείμενο κατά την αποξένωσή του από τους σκοπούς στους οποίους εμπλέκεται, σύμφωνα με την Μαρξιστική/ Βυγκοτσκιανή προοπτική. Ταυτόχρονα, η perezhivanie εμπλέκει την *υπερβατολογική ανταπόκριση του ατόμου προς το περιβάλλον του,* την επιβίωσή του ως νέο άτομο δι' εαυτώ, παρά και κατά την ατομική (*οριζοντική*) του καταληψία και ανα-παράσταση (re-presentation) του περιβάλλοντος—εν εαυτώ, μέσα από το ίδιο το άτομο, το εγγενώς εμποτισμένο στις πολιτισμικές του συντεταγμένες (Σαρτρ, 1943/2007· Husserl, 2001). Η προσέγγιση του ύστερου Βυγκότσκυ αναφορικά με την πολύ σημαντική για αυτόν έννοια της perezhevanie έχει γνωσιολογικό και επιστημολογικό χαρακτήρα (Veresov, 2017, σ. 49). Και αποτελεί το κλειδί της κατανόησης της *αμφίδρομης* σχέσης του γνωσιολογικού υποκειμένου με το περιβάλλον και της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης ως ενταγμένης στους ορίζοντες του υποκειμένου της μάθησης (Veresov, 2017). Η Ντιάνα του μαθησιακού επεισοδίου που θα χρησιμοποιηθεί εδώ, χωρίς να επικεντρωθούμε στην ανάλυση αυτού του επεισοδίου—λόγω περιορισμών χώρου και επιλογής αναλυτικής σκόπευσης—*επιβιώνει νοηματικά*, παρά τις 'προβλέψεις' και χάριν της αναγνώρισης της λύσης της από τον καθηγητή.[1] Η Ντιάνα υπερβαίνει την αποξένωσή της από τις κατανοήσεις των συμφοιτητών της και από τους άρρητους μαθησιακούς σκοπούς του διδάσκοντα, καταφέρνοντας να συνδεθεί με τους τελευταίους μέσα από μια 'δική της λύση' του προβλήματος· με αποτέλεσμα την *ριζική αλλαγή* των πεποιθήσεών της για τη μάθηση και τη διδασκαλία Μαθηματικών. Με άλλα λόγια, η νοηματική της επιβίωση μέσα στη δραστηριότητα είχε ως αποτέλεσμα ριζικές μεταβολές στην αναπτυξιακή της προοπτική για τον ρόλο της στη διδασκαλία Μαθηματικών, κάτι που από μόνο του δικαιώνει την επιλογή αυτού του μαθησιακού επεισοδίου ως μιας 'στιγμής' perezhivanie για τον Βυγκότσκυ (1934/1994). Με δεδομένους τους χωρικούς περιορισμούς θα δοθεί το βάρος στην *παραδειγματική αποτύπωση* της perezhivanie (ζώσας εμπειρίας)[2] της Ντιάνας με εργαλεία (artifacts) ιστορικο–πολιτισμικά και φαινομενολογικά, στοχεύοντας έτσι στην κατάδειξη συγκοινωνούντων αναλυτικών δυνατοτήτων της Βυγκοτσκιανής και της φαινομενολογικής προοπτικής. Με την *δυνατότητα* της αποτύπωσης που προαναφέρθηκε να αποτελεί το ερευνητικό ερώτημα του παρόντος πονήματος, το ερώτημα δηλαδή της δυνατότητας επικοινωνίας της φαινομενολογικής ερευνητικής διάστασης—βασισμένης σε φαινομενολογικά στοιχεία της μέσης και της ώριμης περιόδου του Χούσσερλ (από το 2014)—με φαινομενολογικά στοιχεία που μπορούν να εντοπιστούν στον ύστερο Βυγκότσκυ (βλ. MacDonald, 2000· Veresov, 1996· Vygotsky, 1934/1994).

ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΕΚΚΙΝΗΣΗ ΤΟΝ ΛΕΟΝΤΙΕΦ ΚΑΙ ΤΗΣ ΒΥΓΚΟΤΣΚΙΑΝΗΣ ΑΝΤΙΛΗΨΗΣ ΤΗΣ ΖΩΣΑΣ ΕΜΠΕΙΡΙΑΣ

Ο Radford (2021) αναδεικνύει τις αντινομίες στην έννοια της *εσωτερίκευσης* της πολιτισμικά εκπορευόμενης ζώσας εμπειρίας, την οποία είχε αναθεωρήσει ο Βυγκότσκυ στην ύστερη σκέψη του (π.χ. Vygotsky's Notebooks, 2010, p. 354). Σύμφωνα με μελετητές του Βυγκότσκυ στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, όπως ο Luis Radford και η Anna Shvarts, ο ύστερος Βυγκότσκυ αναθεώρησε τις απόψεις του για την *εσωτερίκευση* και αυτό ήταν ένα σημείο διαφωνίας του με τον Λεόντιεφ στη δεκαετία του 1930, το οποίο οδήγησε στην ανάπτυξη της Θεωρίας Δραστηριότητας σε διάσταση με την πολιτισμικο-ιστορική προσέγγιση του Βυγκότσκυ. Η ουσία της διαφωνίας του Βυγκότσκυ με τον Λεόντιεφ αφορά στην κεντρική θέση για τον Βυγκότσκυ της αυτονομίας/ελευθερίας του υποκειμένου στη διαμόρφωση της πραγματικότητάς του, παρ' όλη την επίδραση του περιβάλλοντός του (Zavershneva, 2010).

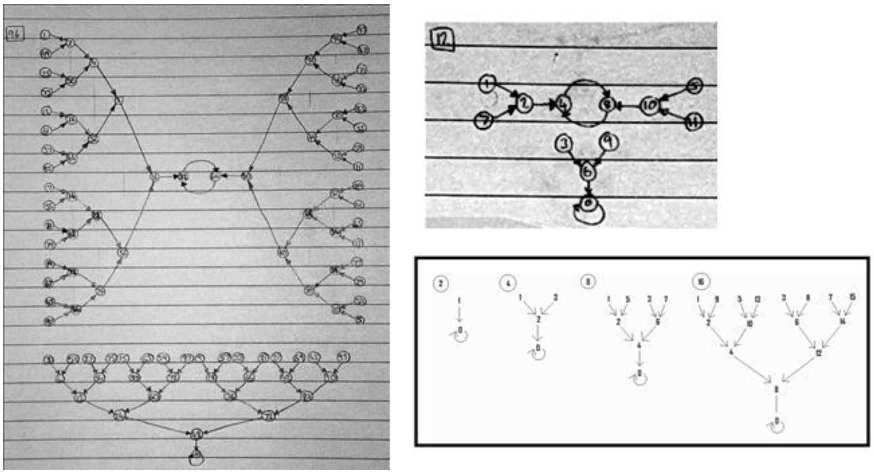
Ο Βυγκότσκυ παρατηρεί πως και άτομα χωρίς την ικανότητα της ομιλίας ή της όρασης αναπτύσσουν αισθητηριακά σήματα που υπολαμβάνουν την γλωσσική υπόσταση, βοηθώντας έτσι την ανάπτυξη των ατόμων αυτών μέσα στο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον. Σύμφωνα με τον Βυγκότσκυ, η προσαρμογή των αντικειμένων σε διαφοροποιημένα χαρακτηριστικά τους απαιτεί ιδιάζουσα προσπάθεια από το ίδιο το άτομο, ενώ με τη χρήση πολιτισμικών σημείων το άτομο σπρώχνει απείρως πιο πέρα τα σύνορα της μικρο-εμπειρίας του και οικοδομεί τη συμπεριφορά του σύμφωνα με προγράμματα πέρα από το άτομο, δημιουργημένα μέσα στην κοινωνία και προσβάσιμα σε όλους. Έτσι καταλήγει πως «είναι το *νόημα* που έχει σημασία, όχι το γλωσσικό σημείο, καθώς μπορούμε να αλλάξουμε το σημείο αλλά να διατηρήσουμε το νόημα» (απόσπασμα Βυγκότσκυ από Veresov, 1996, σ. 6).

Λίγο πριν το τέλος της σύντομης ζωής του ο Βυγκότσκυ κάνει τη σημαντική διάκριση μεταξύ νοήματος (meaning) και αίσθησης (sense), θεωρώντας πως «κατάλληλη ανάλυση της συνείδησης είναι δυνατή ως ανάλυση της δυναμικής ενότητας νοήματος και αίσθησης» (Veresov, 1996, σ. 14). Αυτό έμελλε να είναι το τελευταίο πρόγραμμα του Βυγκότσκυ για τη διερεύνηση της συνείδησης (στο ίδιο). Στα πλαίσια αυτά, η σύζευξη της φαινομενολογικής αναλυτικής σκοπιάς με την Βυγκοτσκιανή αντίληψη μπορεί να διανοίξει δυνατότητες επανόδου της Θεωρίας Δραστηριότητας στην Βυγκοτσκιανή της κατεύθυνση.

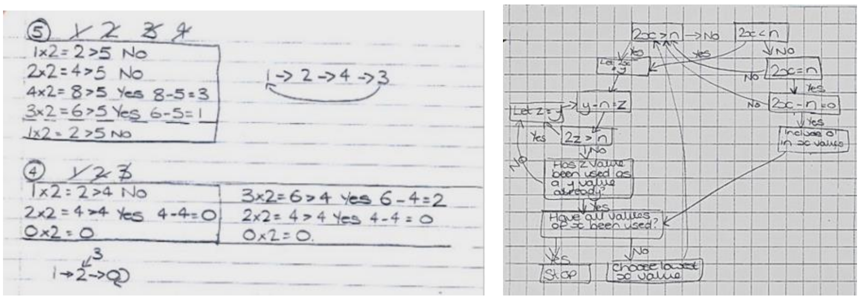
Η ΝΟΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΒΙΩΣΗ ΤΗΣ ΝΤΙΑΝΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΡΙΖΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΗΣ

Όπως έχει ήδη περιγραφεί σε προηγούμενα άρθρα μου (2013, 2017) η Ντιάνα, φοιτήτρια και υποψήφια καθηγήτρια Μαθηματικών της αγγλικής Β' βάθμιας εκπαίδευσης σε ένα διετές πρόγραμμα σπουδών, αντιμετώπισε τη λύση ενός 'ανοιχτού' προβλήματος, σε μία από τις 20 δραστηριότητες που έλαβαν χώρα το 2011, στα πλαίσια του μαθήματος *Η φύση της μαθηματικής ανάπτυξης*. Η διδασκαλία του μαθήματος διοργανώθηκε από τον καθηγητή Έβανς (ψευδώνυμα), και παρακολούθησα τα μαθήματα αυτά προκειμένου να διερευνήσω τις στρατηγικές και τους τρόπους εμφάνισης των μαθηματικών αντικειμένων που χρησιμοποιούσαν οι φοιτητές, χωρίς καμία καθοδήγηση ή συμμετοχή στις ιδέες των φοιτητών από τον καθηγητή ή από εμένα.

Το πρόβλημα που τέθηκε στη συγκεκριμένη δραστηριότητα αφορούσε στην αναζήτηση γενικεύσεων εκ μέρους των φοιτητών, αναφορικά με τη μαθηματική αποτύπωση της συμπεριφοράς των φυσικών αριθμών, κατά τη διεργασία 'διπλασιαζόμενο μόντουλο' (doubling modulo): Για παράδειγμα, για τον αριθμό 7, έχοντας ως εκκίνηση τον αριθμό 1, μετά από συνεχείς διπλασιασμούς του 1 παίρνουμε 2, 4 και φτάνουμε στον αριθμό 8, ο οποίος, καθώς υπερβαίνει το 7 αντικαθίσταται με το 1 (8-**7**=1)· έτσι προκύπτει επανάληψη αριθμού που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί. Τότε επιλέγουμε έναν αριθμό μικρότερο του 7 που δεν έχει χρησιμοποιηθεί, στη συγκεκριμένη περίπτωση το 3, το οποίο διπλασιαζόμενο μας δίνει το 6, μετά το 12, το οποίο υπερβαίνει το 7 και αντικαθίσταται με το 5 (12-**7**=5), το οποίο διπλασιαζόμενο μας δίνει 10, οπότε αντικαθίσταται από το 3, το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί. Έχοντας ολοκληρώσει την επιλογή όλων των αριθμών μικρότερων του 7 ολοκληρώνεται η διαδικασία 'διπλασιαζόμενο μόντουλο' για τον αριθμό 7. «Με ποιον τρόπο συμπεριφέρονται οι αριθμοί όταν εφαρμόζεται σε αυτούς η διαδικασία 'διπλασιαζόμενο μόντουλο'; Μπορούν να ανιχνευθούν γενικεύσεις για την συμπεριφορά των αριθμών κατά τη διαδικασία 'διπλασιαζόμενο μόντουλο';» Αυτή ήταν η διατύπωση της δραστηριότητας που τέθηκε στους φοιτητές, οι οποίοι αφέθηκαν ελεύθεροι να την διερευνήσουν, λειτουργώντας σε ομάδες. Η δραστηριότητα του Ιβάν (Εικόνα 1) τον οδήγησε σε μαθηματικοποιήσιμη γενίκευση για τις δυνάμεις του 2. Οι φοιτητές, εργαζόμενοι σε ομάδες και με διομαδική επικοινωνία άρχισαν να επεξεργάζονται τη συμπεριφορά διάφορων αριθμών και να προσπαθούν να εξηγήσουν τις κατανοήσεις τους στη Ντιάνα, χωρίς όμως αποτέλεσμα. Όπως αναφέρει η Ντιάνα στη συνέντευξή της «μερικοί συμφοιτητές μου προσπάθησαν να μου εξηγήσουν τι έκαναν. Ακόμη και τώρα δεν μπορώ να το καταλάβω, με τον δικό τους τρόπο». Η Ντιάνα προσέλαβε τον τρόπο εργασίας των άλλων ως «διαγράμματα ροής», όπως αναφέρει στη συνέντευξή της. Μη έχοντας την επιλογή της καθοδήγησης από τον καθηγητή άρχισε να καταγράφει δομημένες ερωταπαντήσεις για κάθε αριθμό, από το 4 έως και το 18 (βλ. παραδείγματα στο αριστερό σχεδιάγραμμα της Εικόνας 2). Αυτή η μέθοδος θύμιζε έντονα την εμπειρική μέθοδο της *δοκιμής–και–βελτίωσης*, την οποία επανειλημμένα χρησιμοποιούσε σε προηγούμενες δραστηριότητες του μαθήματος. Και τότε ουσιαστικά εμφανίστηκε ο αρχικός της αλγόριθμος (εικόνα 2 δεξιά), μετασχηματίζοντας έτσι τις ερωτήσεις/απαντήσεις σε πρωτόλεια τοπικών αλγορίθμων τον οποίο συνέχισε και ολοκλήρωσε σπίτι της.[1]



Εικόνα 1: Διαγράμματα του Ιβάν αριστερά και πάνω δεξιά, σχεδιαγράμματα άλλου φοιτητή δεξιά κάτω.



Εικόνα 210: Δομημένα σετ ερωταπαντήσεων (αλγοριθμικά σχεδιάσματα) μεμονωμένων αριθμών αριστερά και ο αρχικός αλγόριθμος της Ντιάνας, δεξιά.

Όπως έγινε φανερό στις συνεντεύξεις με τη Ντιάνα είχε διαπαιδαγωγηθεί σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα όπου οι απαντήσεις στις απορίες και η καθοδήγηση από τον καθηγητή θεωρούνταν άμεσες και δεδομένες. Οι πεποιθήσεις της για τη διδασκαλία αφορούσαν στην άμεση τροφοδοσία των μαθητών με έτοιμες απαντήσεις. Έτσι, όταν στις δραστηριότητες του συγκεκριμένου μαθήματος δεν παρέχονταν καμία καθοδήγηση από τον καθηγητή η Ντιάνα αισθανόταν άβολα και στρεφόταν στις ιδέες των συμφοιτητών της. Καθώς μάλιστα είχε έλλειψη μαθηματικής αυτοπεποίθησης έφτασε να θεωρεί πως όταν οι ιδέες της διέφεραν από αυτές των συμφοιτητών της τότε οι δικές της ήταν λανθασμένες, κάτι που εξέφρασε ρητά και στη μεγάλης διάρκειας συνέντευξη που της πήρα. Στη συγκεκριμένη όμως δραστηριότητα ήταν η πρώτη φορά όπου στο συγκεκριμένο μάθημα, όσο και αν της εξηγούσαν οι συμφοιτητές της τι έκαναν, δεν μπορούσε να το καταλάβει. Έτσι έφτασε σε απόλυτο αδιέξοδο και αναγκάστηκε για πρώτη φορά να καταγράψει την αποκλειστικά δική της κατανόηση της δραστηριότητας.

Ξεκίνησε με την καταγραφή της συμπεριφοράς των αριθμών από το 4 έως και το 18, χρησιμοποιώντας δομημένα σετ ερωταπαντήσεων (εικόνα 2, αριστερά). Καθώς γέμιζε σελίδες με ακολουθίες ερωταπαντήσεων αυτές απέκτησαν για την Ντιάνα το νόημα εντολών σε έναν αλγόριθμο, δηλαδή εξελίχθηκαν σε μία αφηρημένη εποπτεία, η οποία αποτυπώθηκε σε έναν αρχικό αλγόριθμο (εικόνα 2, δεξιά), με τον οποίο επιχείρησε να περιγράψει τη διαδικασία 'διπλασιαζόμενο μόντουλο' *για κάθε* φυσικό αριθμό. Βασιζόμενη στις προηγούμενες *εμπειρικές* της εποπτείες, τις βασισμένες με τη σειρά τους σε πρωτόλεια ενσώματα εμπειρικά δεδομένα (δοκιμή-και-σφάλμα, δοκιμή-και-βελτίωση) που είχε εσωτερικεύσει [3], η Ντιάνα ανέπτυξε την αφηρημένη εποπτεία του αλγορίθμου, την οποία ο Χούσσερλ αποκαλεί θέαση ουσίας (Wesensshau). Αν και περιορισμοί χώρου δεν επιτρέπουν την ανάπτυξη γύρω από το ζήτημα αυτό η εποπτεία του αλγορίθμου από την Ντιάνα είναι ένα καλό παράδειγμα αυτού του είδους της εποπτείας του Χούσσερλ (της θέασης ουσίας), ως προς την έλλειψη μεταφυσικής οπτικής του Χούσσερλ στο ζήτημα της εποπτείας αυτής (και όχι μόνο), καθώς μέσω της εποπτείας 'θέαση ουσίας' συγκροτείται ένα αντικείμενο νέας τάξης, με τον διαχωρισμό ενός ιδιάζοντος χαρακτηριστικού (τον/την αλγοριθμικό/-ή χαρακτήρα/ουσία) ενός πλήθους αντικειμένων (εν προκειμένω των δομημένων σετ ερωταπαντήσεων των αριθμών από το 4 έως και το 18), το οποίο συγκροτεί το αντικείμενο νέας τάξης (τον αλγόριθμο).[4]

Η γενίκευση του αλγορίθμου, χωρίς περαιτέρω μαθηματική διερεύνηση πάνω σε κλάσεις φυσικών αριθμών ως προς τη συμπεριφορά τους κατά την εφαρμογή της διαδικασίας 'διπλασιαζόμενο μόντουλο' ήταν αρκετή ώστε ο καθηγητής να αποδεχθεί τη λύση της Ντιάνας, η οποία τελειοποίησε περισσότερο το λογικό της διάγραμμα στο σπίτι, «για να γίνει πιο κατανοητό από τον καθηγητή» τι είχε κατασκευάσει μέσα στην τάξη (όπως είπε στη συνέντευξή της). Επρόκειτο περί νοηματικής επιβίωσης της Ντιάνας, καθώς η δική της λύση, χωρίς βοήθεια από τις ιδέες των συμφοιτητών της ή από ιδέες κάποιου άλλου αποδείχθηκε πως ήταν έγκυρη. Έχοντας κατ' ανάγκην απεκδυθεί το μοντέλο παροχής έτοιμων απαντήσεων και καθοδήγησης, μέσα στο οποίο είχε ανατραφεί, διαπίστωσε πως η αποκλειστική της αντιμετώπιση της δραστηριότητας ήταν έγκυρη· πως οι ιδέες της δεν ήταν λανθασμένες, παρ' όλο που διέφεραν από κάθε άλλου/-ης συμφοιτητή/-τριας. Έτσι, μια *ριζική αλλαγή πεποιθήσεων* επήλθε για τη Ντιάνα, των πεποιθήσεών της για το μάθημα, την άβολη θέση στην οποία την έφερνε, και (κυρίως) για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Λέει η ίδια μερικούς μήνες μετά: «Νομίζω πως όταν διδάσκω πρέπει να ξεπεράσω την παρόρμηση να δίνω απαντήσεις… όχι αμέσως». «[Β]οηθά τους ανθρώπους περισσότερο αν τους βοηθάς με την κατανόησή τους από το απλώς να τους δώσεις αμέσως μια απάντηση». Και, «να τους κάνεις να σκεφτούν για αυτό και για το τι κάνουν και γιατί το κάνουν». Καθώς πλέον θεωρεί αυτά τα στοιχεία «προφανώς πολύ σημαντικά για να θέλει κάποιος να γίνει καθηγητής» (αποσπάσματα από τη συνέντευξη της Ντιάνας). Στο τελευταίο μάθημα, όπου έπρεπε να μπει στον ρόλο του διδάσκοντα, είχε 'μεταμορφωθεί', απέχοντας πλήρως της παροχής έτοιμων απαντήσεων. Παρακολουθώντας την και μετά από το συγκεκριμένο μάθημα, σε μαθήματα με πολύ διαφορετική μεθοδολογία, σε κλασσικά, θεματικά μαθήματα Θεωρίας Αριθμών ή Γεωμετρίας ή διερευνητικά, αλλά με καθοδηγητική νόρμα η αυτοπεποίθησή στις δικές της κατανοήσεις και η αλλαγή που είχε επέλθει στις πεποιθήσεις της την ακολουθούσαν. Αν επέλεγε κάποιος να προβάλλει τις πιο σημαντικές στιγμές της φοίτησής της αυτή θα ήταν σίγουρα μία από αυτές.

Η PEREZHIVANIE ΩΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΩΝ, ΩΣ ΜΟΝΑΔΑ ΤΗΣ ΓΝΩΣΙΑΚΗΣ ΕΜΠΕΙΡΙΑΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η φαινομενολογική ανάλυση βοήθησε στον εντοπισμό και την περιγραφή της κρίσιμης εποπτείας θέαση ουσίας (Zagorianakos, 2013) και των κρίσιμων αλλαγών που επέφερε—μετά την εγκυρότητα που έδωσε στη λύση της Ντιάνας ο καθηγητής—για τις πεποιθήσεις της για τη διδασκαλία και τη μάθηση (Ζαγοριανάκος, 2017). Αλλά ταυτόχρονα, η αποτύπωση της μαθησιακής της ζώσας εμπειρίας ως perezhivanie, όπως εν συντομία περιγράφηκε στην περίπτωση της Ντιάνας, της δίνουν τη διάσταση

- Μιας μονάδας (unit) της προσωπικότητας, μιας *αναπτυξιακής* μονάδας (Blunden, 2016β), όπως έδειξε η εξέλιξη της φοιτήτριας στη διάρκεια των σπουδών της, η οποία είναι «ένα μικρό θραύσμα του όλου, τέτοιο ώστε το όλο να μπορεί να ιδωθεί ως φτιαγμένο μόνο από πάρα πολλά τέτοια θραύσματα» (Blunden, 2016β, σ. 3).

- αλλά και ενός πρίσματος, μέσα από το οποίο διαθλάται η επίδραση του περιβάλλοντος στην ανάπτυξη του ατόμου (Vygotsky, 1994, σ. 340· Veresov, 2017, σ. 57).

Και η *διάθλαση* δεν έχει εδώ απλώς μεταφορική σημασία, καθώς συναρτάται απόλυτα με την ατομική πρόσληψη και συνειδητοποίηση του περιβάλλοντος από το συγκεκριμένο άτομο. Το περιβάλλον καθορίζει την ανάπτυξη του ατόμου μέσα από την βιωμένη από το άτομο perezhivanie του περιβάλλοντός του.

Ας δούμε την διάθλαση του περιβάλλοντος όπως συνέβη στη ζώσα εμπειρία της Ντιάνας: Η Ντιάνα, παρά την αδυναμία κατανόησης των μεθόδων που χρησιμοποιούσαν οι συμφοιτητές της και την πλήρη απουσία καθοδήγησης εκ μέρους του καθηγητή παρήγαγε ένα αποτέλεσμα που έφερε το *αποτύπωμα* των μεθόδων των συμφοιτητών της, με την διάθλαση της δικής της κατανόησης των μεθόδων τους—τις οποίες χαρακτήριζε στη συνέντευξή της ως «διαγράμματα ροής» (flow charts). Μήπως η λύση της Ντιάνας δεν ήταν ένα διάγραμμα ροής; Και μήπως η *διάθλαση* της απουσίας καθοδήγησης εκ μέρους του καθηγητή δεν αφορούσε στην δικής της κοπής γενίκευση (της διαδικασίας) του προβλήματος; Η οποία έτσι κατάφερε να συναντηθεί με τους άρρητους (ακατανόητους ως τότε για αυτήν) διδακτικούς ορίζοντες του καθηγητή και του μαθήματος;

Εδώ ακριβώς γίνεται ορατή η επικοινωνία των αναλυτικών εργαλείων της φαινομενολογικής αναλυτικής οπτικής με την Βυγκοτσκιανή [5] αναλυτική πρόσληψη της Θεωρίας Δραστηριότητας: Η Βυγκοτσκιανή προοπτική θεωρεί το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον ως την πηγή και τον ρυθμιστή της αναπτυξιακής πορείας του ατόμου. Ταυτόχρονα, αποδέχεται την διάθλαση του κοινωνικο-πολιτισμικού περιβάλλοντος μέσα από την ιδιάζουσα ενάργεια και συνύπαρξη του ατόμου με και ως προς αυτό. Η μεταφορά της διάθλασης είναι κομβική, καθώς αποτρέπει μια αιτιοκρατική ερμηνεία του γνωσιολογικού φαινομένου και καλεί

- την μελέτη του εκ των πραγμάτων υπερβατολογικού τρόπου απόκρισης του ατόμου ως προς το περιβάλλον του,
- την μελέτη του *τρόπου* επιβίωσης του ατόμου εντός της perezhivanie, καθώς το περιβάλλον του τροφοδοτεί την εξέλιξη του ατόμου (μέσα στο περιβάλλον του).

Αυτή η μελέτη είναι αντικείμενο της φαινομενολογικής προοπτικής, καθώς αυτή προσφέρει ουσιώδεις περιγραφές αυτής της διάθλασης, μέσα από την αποβλεπτικά διαπλεκόμενη επιβίωση του υποκειμένου της perezhivanie, ως ενσώματα και διανοητικά πραγματωμένης επιβίωσης. Καθώς «το νόημα μόνο από την υποκειμενικότητα μπορεί να κατάγεται»

(Σαρτρ, 1943/2007, σ. 829) και καθώς ο καθορισμός της προσωπικής ανάπτυξης προσδιορίζεται από τη διάθλαση του περιβάλλοντος, μέσα από το (κοινωνικο-πολιτισμικό) άτομο. Έτσι, οι φαινομενολογικοί ορίζοντες του ατόμου μέσα στο περιβάλλον του καθορίζονται από, όσο και υφαίνουν την perezhivanie. Και το μαθησιακό περιστατικό της Ντιάνας, με τη νοηματική της *επιβίωση*—η οποία είναι το κρίσιμο χαρακτηριστικό της perezhivanie—τη θετική επίδραση στη μαθηματική της αυτοπεποίθηση και (ιδιαίτερα) τις συνέπειες που είχε για τη στάση και τις πεποιθήσεις της ως προς τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, αναδεικνύει το περιστατικό αυτό ως ένα ‘κλασσικό’ περιστατικό perezhivanie, ως μια ριζική υπερβατολογική ζώσα εμπειρία. Οι ακριβέστερες περιγραφές αυτής της εμπειρίας γίνονται δυνατές χάρη στη συνέργεια φαινομενολογικής προοπτικής και Βυγκοτσκιανής προσέγγισης της Θεωρίας Δραστηριότητας. Φωτίζοντας αμφίπλευρα την αδιαίρετη ενότητα των προσωπικών και περιβαλλοντικών χαρακτηριστικών της perezhivanie της Ντιάνας. Όπως το θέτει ο Βυγκότσκυ (1934/1994, σ. 342):

> Γι’ αυτό το λόγο, από τη μεθοδολογική σκοπιά φαίνεται πρόσφορο να πραγματοποιούμε μια ανάλυση όταν μελετούμε τον ρόλο που παίζει το περιβάλλον στην ανάπτυξη του παιδιού, μια ανάλυση από τη σκοπιά των perezhivanija [6] του παιδιού, γιατί όπως έχω ήδη πει, όλα τα προσωπικά χαρακτηριστικά του παιδιού που πήραν μέρος στον καθορισμό των στάσεών του στη δεδομένη κατάσταση έχουν ληφθεί υπ’ όψη στην perezhivanie.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η πλήρης περιγραφή του μαθησιακού επεισοδίου έχει εκτεθεί στο Zagorianakos, 2013. Η ανάλυση της φαινομενολογικής σημασιολογίας για την περιγραφή της νοηματικής επιβίωσης της Ντιάνας και για τις ριζικές συνέπειες που είχε για τις αντιλήψεις της για τη μάθηση και τη διδασκαλία έχει εκτεθεί σε άρθρο μου τού 2017.
2. Η απόδοση της perezhivanie ως ‘ζώσα εμπειρία’ σε αυτό το σημείο του άρθρου, αποτελεί απόδοσή μου του γερμανικού όρου Erlebnis, τον οποίο αποδίδουν στην perezhivanie οι Der Veer, Valsiner (1994, σ. 354). Η ζώσα εμπειρία, με συγγενή ερμηνεία με αυτήν της πρώτης περιόδου της perezhivanie για τον Βυγκότσκυ, έχει τις ρίζες της στους Dilthey, Dewey και James (Veresov, 2017, σ. 48).
3. Η Ντιάνα χρησιμοποιούσε συχνά τις μεθόδους δοκιμή-και-σφάλμα, δοκιμή-και-βελτίωση στις προηγούμενες δραστηριότητες του μαθήματος.
4. Βλέπε Hintikka, 2003.
5. Την Βυγκοτσκιανή ανάλυση σε αντιδιαστολή με αυτήν της Θεωρίας Δραστηριότητας η οποία εξελίχθηκε υπό την επήρεια του Λεόντιεφ.
6. Πληθυντικός του perezhivanie.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blunden, A. (2016α). Translating *Perezhivanie* into English, *Mind, Culture, and Activity,* 23:4, 274-283, DOI: 10.1080/10749039.2016.1186193

Blunden, A. (2016β). The Problem of the Environment. A Defense of Vygotsky. For academia.edu. Corpus ID: 197623905

Hintikka, J. (2003). The notion of intuition in Husserl. *Revue internationale de philosophie*, 2003/2(224), 169-191.

Husserl, E. (2001). *Analyses concerning passive and active synthesis. Lectures on transcendental logic.* A. J. Steinbock (Trans.) Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Macdonald, P. Phenomenological factors in Vygotsky's mature psychology. *History of the Human Sciences*, 13(3), 69-93, DOI: 10.1177/09526950022120773

Radford, L. (2021). The theory of objectification: a Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning. Brill: The Netherlands.

Veresov, N. N. (1996). The problem of human consciousness in L. Vygotsky's approach. A I N O (Electronic Journal of the Department of Behavioural sciences of Oulu University), 1. www.edu.oulu.fi.

Veresov, N. N. (2017). *The Concept of Perezhivanie in Cultural-Historical Theory: Content and Contexts.* Springer Nature Singapore Pte Ltd.: Singapore.

Vygotsky, L. S. (1934/1994). The problem of the environment. In R. Van Der Veer & J. Valsiner (Eds), *The Vygotsky reader*, 338–354. New York, NY: Plenum Press.

Zavershneva, E. & Van Der Veer, R. (Eds). (2010). *Vygotsky's notebooks. A selection*. Singapore: Springer.

Zagorianakos, A. (2013). The study of intuitions in one prospective teacher's constructions of mathematical objects. Smith, C. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 33*(1), 55-60.

Ζαγοριανάκος, Α. (2017). Φαινομενολογική ανάλυση των συνέπειων του ξεπεράσματος του μαθησιακού αδιέξοδου μιας μέλλουσας καθηγήτριας μαθηματικών. *7ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.7)*: Αθήνα

Σαρτρ, Ζ.Π. (1943/2007). *Το Είναι και το Μηδέν. Δοκίμιο φαινομενολογικής οντολογίας.* Μτφρ. Κωστής Παπαγιώργης. Εκδόσεις Παπαζήση: Αθήνα.

COMMOGNITIVE ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΟΥ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Σαλαμανάκη Ασημούλα, Σακονίδης Χαράλαμπος

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

asimoulasal@gmail.com, xsakonid@eled.duth.gr

Ο μαθηματικός λόγος των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης επιτρέπει τον προσδιορισμό του τύπου συμμετοχής τους στη μαθησιακή διαδικασία και αποτελεί μοχλό για αλλαγές στη διδακτική προσέγγιση. Η παρούσα μελέτη, υιοθετώντας το commognition πλαίσιο για τη μάθηση, εστιάζεται στα χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου μιας μαθήτριας Γυμνασίου κατά την εμπλοκής της με σχετικά μαθηματικά έργα. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι μαθητές Γυμνασίου λειτουργούν επαρκώς μόνο με κάποιες από τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης και, ενώ τείνουν προς τελετουργικές διεργασίες, κατάλληλες προτροπές μπορούν να δημιουργήσουν ευκαιρίες για συμμετοχή σε πιο εξερευνητική σκέψη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης αναδεικνύεται θεμελιώδους σημασίας για τη μαθησιακή εξέλιξη των μαθητών στα μαθηματικά, πλήθος ερευνών καταδεικνύουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μάθησή της (Watson, 2009; Sierpinska, 1992). Βασικοί παράγοντες που συντελούν σε αυτό είναι η συνθετότητα της ίδιας της έννοιας, η κυριαρχία της στο πεδίο των μαθηματικών, η πολλαπλότητα και η συσχέτιση των αναπαραστάσεών της, αλλά και η διττή της φύση, ως διαδικασία και σε ως αντικείμενο. Από διδακτική σκοπιά, η πληρέστερη και σε βάθος κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθητών στα μαθηματικά εφοδιάζει τους εκπαιδευτικούς με νέες πεποιθήσεις και πιο αποτελεσματικά δομημένες γνώσεις, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικές αλλαγές στη διδασκαλία τους (Σακονίδης, 2012).

Η παρούσα εργασία αξιοποιεί το Επικοινωνιογνωστικό Θεωρητικό Πλαίσιο για τη μάθηση (commognition) (ΕΘΠ), το οποίο, υπό κοινωνικο-πολιτισμική θέαση, υποστηρίζει την ιδέα της μάθησης των μαθηματικών ως αλλαγή στον μαθηματικό λόγο του ατόμου, η οποία επέρχεται με το κοινωνικό φαινόμενο της συμμετοχής στις επικοινωνιακές δραστηριότητες μιας συγκεκριμένης κοινότητας (Sfard, 2008). Η εστίαση είναι στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, προκειμένου να αποτυπωθεί η μαθησιακή κατάστασή τους, αμέσως μετά την εισαγωγή τους στην έννοια της συνάρτησης. Μέσω ολιστικών περιγραφών που αναδεικνύουν τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου τους, ο κεντρικός στόχος της μελέτης είναι να ανιχνεύσει τον τρόπο σκέψης και τις κατανοήσεις των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Υπό τη συμμετοχική προσέγγιση για τη μάθηση, το ΕΘΠ (Sfard, 2008) αποδίδει με τον όρο *commognition* την αδιαχώριστη σύνδεση της επικοινωνίας (communication) και της γνώσης (cognition), συμπεριλαμβάνοντας στην επικοινωνία και τη σκέψη ως μια εξατομικευμένη εκδοχή της διαπροσωπικής επικοινωνίας. Κάθε λόγος (discourse), δηλαδή κάθε συγκεκριμένος τύπος επικοινωνίας, καθορίζεται από τα αντικείμενά του, τους διαμεσολαβητές του και τους κανόνες του. Έτσι, αποκτά υπόσταση ο ‘μαθηματικός λόγος’. Η μάθηση των μαθηματικών ορίζεται ως «αλλαγή ή εξέλιξη στον μαθηματικό λόγο του ατόμου» (Tabach & Nachlieli, 2016), ενώ η ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου μπορεί να μελετηθεί εντοπίζοντας τροποποιήσεις σε καθένα από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματά του (Sfard, 2008). Τα commognitive χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου είναι η *χρήση των λέξεων* (words use), οι *οπτικοί διαμεσολαβητές* (visual mediators), οι *αφηγήσεις* (narratives) και οι *ρουτίνες* (routines).

Η χρήση των λέξεων αναφέρεται στην αμιγώς μαθηματική ορολογία αλλά και σε καθημερινές λέξεις με συγκεκριμένο νόημα για τα μαθηματικά, όπως, για την παρούσα μελέτη, μεταβλητή και συνάρτηση. Οπτικοί διαμεσολαβητές είναι τα ορατά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται για την ενίσχυση της μαθηματικής επικοινωνίας, όπως σύμβολα, διαγράμματα, γραφήματα. Αφήγηση είναι οποιαδήποτε ακολουθία εκφράσεων που περιγράφει αντικείμενα, σχέσεις μεταξύ αντικειμένων, ή διεργασιών με ή από αντικείμενα, και η οποία τίθεται προς έγκριση ή απόρριψη βάσει διαδικασιών τεκμηρίωσης που σχετίζονται με τον λόγο (Sfard, 2008, σελ.134). Οι αφηγήσεις αποκαλούνται *επικυρωμένες* (endorsed), όταν μπορούν να χαρακτηριστούν ως αληθείς. Παραδείγματα επικυρωμένων αφηγήσεων είναι οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι αποδείξεις. Τα κριτήρια επικύρωσης ποικίλλουν και συχνά επηρεάζονται από ζητήματα σχέσεων εξουσίας μεταξύ των συνομιλητών.

Οι ρουτίνες είναι σύνολα μετα-κανόνων που «ορίζουν πρότυπα στις ενέργειες των συνομιλητών, δηλαδή, καθορίζουν ή απλά περιορίζουν το μοτίβο διαδρομής της δράσης λόγου και των συνθηκών κάτω από τις οποίες αυτή η δράση μπορεί να αναληφθεί» (Sfard, 2009, σελ.57). Με άλλα λόγια, οι ρουτίνες είναι μαθηματικές κανονικότητες για οποιαδήποτε πτυχή του μαθηματικού λόγου, όπως στους τρόπους εντοπισμού αν μια κατάσταση είναι η ίδια ή διαφορετική με άλλες ή στη διαδικασία δημιουργίας και τεκμηρίωσης των αφηγήσεων (Tabach κ.ά., 2016). Για παράδειγμα, μια συχνά αναφερόμενη ρουτίνα από τους μαθητές Γυμνασίου είναι η «αλλάζω πλευρά, αλλάζω πρόσημο», όταν επιλύουν πρωτοβάθμιες εξισώσεις (Roberts, 2016). Αλλά ρουτίνα είναι και η πρακτική έμφασης στους ορισμούς για την έγκριση ή την απόρριψη αφηγήσεων. Κατά την εξέλιξη του ΕΘΠ, οι ρουτίνες όχι μόνο περιορίζουν και επιτρέπουν τη λειτουργία μας στον κόσμο, αλλά φέρνουν την καινοτομία, συχνά απλώς με την εφαρμογή ή τον συνδυασμό τους με μη συμβατικούς τρόπους (Lavie & Sfard, 2018).

Οι ρουτίνες λόγου (discursive), δηλαδή τα μοτίβα ενεργειών του ατόμου που ερμηνεύει την κατάσταση ως να απαιτεί επικοινωνιακή δράση, διακρίνονται σε *τελετουργίες* (rituals) και *εξερευνήσεις* (explorations), οι οποίες διαφέρουν κυρίως αναφορικά με το είδος των εργασιών που επιδιώκουν να επιτύχουν (Sfard 2008; Lavie & Sfard, 2018). Οι τελετουργίες χαρακτηρίζονται από αυστηρούς κανόνες που καθορίζονται από μια αρχή και περιορίζονται στην αιτιολόγηση του τρόπου για να συμβεί κάτι, αλλά όχι του πότε ή του γιατί. Αναφέρονται στο στάδιο της μάθησης, στο οποίο οι μαθητές μιμούνται τους άλλους, υποδηλώνοντας την επιθυμία τους να γίνουν συμμετέχοντες, κι έτσι, μπορούν να χαρακτηριστούν ως κοινωνικά προσανατολισμένες. Στο ΕΘΠ, αυτό θεωρείται αποδεκτή ενδιάμεση φάση της μαθησιακής διαδικασίας. Οι εξερευνήσεις αποσκοπούν στην παραγωγή και προώθηση επικυρωμένων αφηγήσεων, θεωρούνται η πιο εξελιγμένη μορφή ρουτίνας, ενώ ταυτόχρονα συμπληρώνουν το κενό του ‘πότε’ και του ‘γιατί’ που αφήνουν οι τελετουργίες.

Στο ΕΘΠ (Sfard, 2008) επισημαίνονται κι άλλα αναγνωριστικά στοιχεία των τελετουργιών και των εξερευνήσεων. Οι τελετουργίες εκτελούνται με και για τους άλλους, ενώ ο μαθητής εκτελεί ατομικά τις εξερευνήσεις μέσα σε εσωτερικά πειστικό λόγο. Η εφαρμοσιμότητα των τελετουργιών είναι καλά πλαισιοθετημένη, σε αντίθεση με το ευρύ φάσμα εφαρμογής μιας εξερεύνησης. Για να διορθωθεί μια τελετουργία, ο μαθητής επαναλαμβάνει τη διαδικασία στο σύνολό της, ενώ στην εξερεύνηση αναγνωρίζει τις υπορουτίνες και μπορεί να επέμβει τοπικά. Αντίστοιχα διαφέρουν και ως προς την ευελιξία τους, δηλαδή τον βαθμό ελευθερίας κατά τη δράση. Τέλος, στη χρήση λέξεων και διαμεσολαβητών, η τελετουργική δράση χαρακτηρίζεται από περιγραφικότητα ενώ στις εξερευνήσεις παρατηρείται αντικειμενοποιημένη χρήση. Η εξέλιξη του ΕΘΠ (Lavie & Sfard, 2018), αναγνωρίζει ότι οι καθαρές τελετουργίες και οι απόλυτες εξερευνήσεις είναι σπάνιες. Θεωρεί πιο αξιόπιστο να μιλάμε για ένα πλήρες φάσμα δυνατοτήτων, για τις οποίες η τελετουργία και η εξερεύνηση είναι απλώς οι ακραίες περιπτώσεις. Τα προαναφερθέντα στοιχεία του χαρακτήρα των ρουτινών αποτελούν αναγνωριστικά της βαθμιαίας αποτελετουργιοποίησης (deritualization).

Η ΜΕΛΕΤΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί τμήμα μιας ευρύτερης μελέτης, στην οποία τρεις μαθήτριες της Β΄ Γυμνασίου κλήθηκαν να εκφράσουν προφορικά τις σκέψεις τους, καθώς αντιμετώπιζαν μαθηματικά έργα σχετικά με την έννοια της συνάρτησης. Ο μαθηματικός λόγος τους αναλύθηκε προκειμένου να αναγνωριστούν τα commognitive χαρακτηριστικά του, να εντοπιστούν οι κατανοήσεις τους αλλά και ο συνδυασμός των χαρακτηριστικών του μαθηματικού λόγου που τις συνόδεψε. Ούσα καθηγήτρια των τριών μαθητριών, η συγγραφέας ήταν σε θέση να γνωρίζει αρκετά καλά το μαθησιακό προφίλ αλλά και τον λόγο των μαθητριών του δείγματος, γεγονός που συνέβαλε στην ενίσχυση της αξιοπιστίας της μελέτης. Κύριο ζητούμενο κατά την επιλογή των συμμετεχόντων ήταν να έχουν εκδηλώσει διάθεση για μάθηση. Η εστίαση εδώ είναι σε μία μαθήτρια, τη Μαρία, μια καλή μαθήτρια για τα σχολικά δεδομένα αλλά με εμφανή σημεία δυσκολίας ολοκληρωμένων κατανοήσεων, που, ωστόσο, διέθετε αναπτυγμένη ικανότητα προφορικής έκφρασης των σκέψεών της.

Το ερευνητικό ερώτημα είναι: Ποια είναι τα κατά commognition χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου (discourse) που αρθρώνουν οι μαθητές του Γυμνασίου για την έννοια της συνάρτησης κατά την εμπλοκή τους με σχετικά μαθηματικά έργα, ποιες σχετικές κατανοήσεις αναδύονται και από ποια commognitive χαρακτηριστικά συνοδεύονται;

Το ερευνητικό εργαλείο ήταν ένα φυλλάδιο με τέσσερα μαθηματικά έργα. Στο πρώτο, από τρεις γραφικές παραστάσεις ζητούνταν να επιλεγεί αιτιολογημένα εκείνη που δεν αναπαριστά συνάρτηση. Στο δεύτερο, με δοσμένο πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $y = 3x + 3$ και για την κατακόρυφη μετατόπισή της κατά δύο μονάδες προς τα κάτω, ζητούνταν ο προσδιορισμός του τύπου της δεύτερης. Στο τρίτο, με δοσμένο πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $y=x^2+3x+3$, ζητούνταν η συμπλήρωση πίνακα τιμών της $y=x^2+3x$. Στο τέταρτο έργο, από τη ρεαλιστικού πλαισίου λεκτική αναπαράσταση μιας συνάρτησης ζητούνταν ο τύπος, το πεδίο ορισμού, η γραφική παράσταση και ερμηνείας της, όπως επίσης και τιμές των μεταβλητών υπό προϋποθέσεις.

Τα δεδομένα της μελέτης αποτέλεσαν οι προφορικά εκφρασμένες σκέψεις της Μαρίας. Για την ανάλυση των δεδομένων αξιοποιήθηκε συνδυασμός της λογικής των τεχνικών της Ανάλυσης Περιεχομένου και της Ανάλυσης Λόγου. Από τη φύση της έννοιας της συνάρτησης, οπτικοί διαμεσολαβητές είναι οι αναπαραστάσεις της και, κατά την ανάλυση, διαβαθμίστηκε η λειτουργική επάρκεια για την καθεμία ανάλογα με την ευχέρεια στη χρήση ή/και η πρόθεση καταφυγής σε αυτήν. Για τις ρουτίνες, η διαφαινόμενη δυνατότητα της μαθήτριας να ενεργήσει με πιο 'εξερευνητικό' τρόπο οδήγησε στον χαρακτηρισμό 'προς εξερεύνηση'. Κατανοήσεις θεωρήθηκαν οι αντιλήψεις που 'έμειναν' στη μαθήτρια από την έννοια της συνάρτησης και αυθόρμητα αναδύθηκαν. Όμοια με τις αναπαραστάσεις, για κάθε κατανόηση ανιχνεύθηκε η επάρκειά της.

Τέλος, για λόγους αξιοπιστίας και για την αποφυγή του κινδύνου μεροληψίας από τη συγγραφέα λόγω του διττού ρόλου της, σε όλη τη διάρκεια των πολλαπλών και ενδελεχών αναγνώσεων των δεδομένων, πραγματοποιούνταν συζητήσεις μεταξύ των δύο ερευνητών κατά τις οποίες επανατοποθετούνταν όροι και δομές ώστε να υπάρχει συμφωνία για τα διαφαινόμενα χαρακτηριστικά και τις αναδυόμενες κατανοήσεις.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Commognitive χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου

Λέξεις/Χρήση λέξεων: Λέξεις επίσημου λεξιλογίου, όπως γραφική παράσταση και αντιστοιχίζεται, προέκυπταν αυθόρμητα στον λόγο της μαθήτριας. Ωστόσο, καταγράφηκε και χρήση ανεπίσημου λεξιλογίου. Ενδεικτικά, η Μαρία για να αναφερθεί στο σημείο τομής μιας ευθείας με τον έναν άξονα κατέφυγε στην έκφραση 'εκεί που πάει ο άξονας'. Συνολικά, παρατηρήθηκε μίξη επίσημου και ανεπίσημου λεξιλογίου, με εμφανή υπερίσχυση του ανεπίσημου.

Οπτικοί διαμεσολαβητές: Η μαθήτρια για οπτικούς διαμεσολαβητές χρησιμοποίησε κύρια τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Η αυθόρμητη καταφυγή σε πίνακες τιμών και γραφικές παραστάσεις χαρακτήρισε ικανοποιητική τη λειτουργική επάρκειά τους. Λόγου χάρη, για να αποφανθεί αν μια γραφική παράσταση αναπαριστά συνάρτηση χρησιμοποίησε πίνακα τιμών, ενώ σε ερώτηση που παρείχε τον τύπο της συνάρτησης, αποφάσισε να εκτιμήσει γραφικά τη ζητούμενη τιμή της μεταβλητής. Αντίστοιχα, ο τύπος της συνάρτησης αναδείχθηκε περιορισμένης λειτουργικής επάρκειας, ενώ η έντονη ανάγκη για παροχή εναυσμάτων χαρακτήρισε χαμηλή τη λειτουργική επάρκεια των λεκτικών αναπαραστάσεων.

Ρουτίνες: Η αναγνώριση του είδους των ρουτινών που εντοπίστηκαν βασίστηκε στα αναγνωριστικά στοιχεία τους (βλ.σελ.3). Ενδεικτικά, παρατίθενται τρία αποσπάσματα από τη συνάντηση με τη Μαρία και ο συλλογισμός που οδήγησε στον χαρακτηρισμό της ρουτίνας. Μεταξύ των ομοίων τους, επιλέχθηκαν με γνώμονα η έκταση τους να είναι ικανή να δώσει το δυνατόν πιο 'ζωντανή' εικόνα των προφορικών εκφράσεων του συλλογισμού της μαθήτριας.

Μαρία: Άρα μετά από 2 ώρες θα έχουν μείνει 32 λίτρα. Και νομίζω ότι αυτό μου φτάνει για να κάνω τον τύπο. Εμ… ας κάνω… νομίζω ότι είναι ψ=αχ, οπότε το … πρέπει να βρω τον αριθμό α ουσιαστικά.

Εκπαιδευτικός: Αν είναι ψ=αχ μπορείς να το καταλάβεις;

Μαρία: Νομίζω ότι περνάει από την αρχή των αξόνων… Αν το χ είναι μηδέν, το ψ είναι μηδέν.

Η Μαρία επέλεξε την ψ=αχ χωρίς να αναρωτηθεί αν τα ποσά είναι ανάλογα ή χωρίς την απαραίτητη προεργασία που θα της έδινε τη δυνατότητα να υποψιαστεί τον τύπο της. Η αυθόρμητη κατεύθυνσή της προς τους τύπους βασικών συναρτήσεων τοποθέτησε τη συγκεκριμένη διεργασία στις τελετουργικές ρουτίνες.

Εκπαιδευτικός: Εμένα το βασικό μου ερώτημα είναι ότι μου ζητάει να βρω έναν τύπο ενώ μου δίνει και μια άλλη συνάρτηση, η οποία ίσως για κάποιο λόγο υπάρχει. Μήπως θα μπορούσε να με βοηθήσει η παρατήρηση αυτών των δύο;

Μαρία: Βλέπω ότι …ε … αν δούμε τους αριθμούς ψ και στους δύο πίνακες, είτε αυξάνονται είτε μειώνονται κατά δύο.

Εκπαιδευτικός: Αυξάνονται ή μειώνονται; Ας πούμε, από τον αριστερά στον δεξιά.

Μαρία: Αυξάνονται. Από αυτόν που δεν δίνει τον τύπο στον άλλον. … Άρα… μπορεί να είναι … όχι … Δεν γίνεται να είναι ο ίδιος τύπος και απλά να βάλουμε συν δύο;

Ενώ η σκέψη της Μαρίας ήταν εγκλωβισμένη σε τελετουργικές διαδικασίες, η παρότρυνση από τη συνομιλήτρια λειτούργησε καταλυτικά για την κατεύθυνση της σκέψης της μαθήτριας και κατέταξε τη διεργασία στις ‘προς εξερεύνηση’.

Μαρία: Όπως βλέπω το μόνο που αλλάζει στις δύο συναρτήσεις είναι το συν τρία που στη δεύτερη … λείπει, στον δεύτερο τύπο. Οπότε … κάτι που μου πέρασε πρώτο απ’ το μυαλό είναι να αφαιρέσω τρία από τα ψ της αριστερής στήλης και… ουσιαστικά θα είναι το ίδιο. … έχω μηδέν, αν αφαιρέσω τρία βγαίνει πάλι μηδέν στο ψ…εμ… για το 1 έχω 4, για το 2 έχω 10, για το 3 έχω 18 και για το 4 έχω 31 … εεε … είναι 28.

Η διεργασία χαρακτηρίστηκε εξερεύνηση, επειδή η Μαρία, χωρίς την ανάγκη μεσολάβησης του συνομιλητή και αντικατάστασης στον τύπο, συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών αντιμετωπίζοντας ολιστικά την κατάσταση.

Με την παραπάνω συλλογιστική, στον λόγο της Μαρίας ανιχνεύθηκαν έντεκα ρουτίνες τελετουργίας, δώδεκα αποσπάσματα ‘προς εξερεύνηση’ και δύο αποσπάσματα που αναμφίβολα χαρακτηρίζονται εξερευνήσεις. Συνεπώς, συνολικά στον λόγο της Μαρίας, είτε με την παρότρυνση του συνομιλητή είτε χωρίς αυτήν, εμφανίστηκαν με λίγο μεγαλύτερη συχνότητα εξερευνητικά παρά τελετουργικά χαρακτηριστικά.

Αφηγήσεις: Εντοπίστηκαν δεκαπέντε αφηγήσεις της Μαρίας, εκ των οποίων οι εφτά μπορούν να χαρακτηριστούν επικυρωμένες. Ενδεικτικά από τις μη επικυρωμένες παρατίθεται η αφήγηση «Δεν είναι συνάρτηση επειδή μια γραφική παράσταση πρέπει να περνάει από το κέντρο» και από τις επικυρωμένες η αφήγηση «(Δεν είναι συνάρτηση) εάν ένας αριθμός χ αντιστοιχίζεται σε δύο διαφορετικούς αριθμούς». Από το πλήθος των αφηγήσεων της Μαρίας, προκύπτει ότι κατά τη συνάντηση εμφάνισε τον ίδιο περίπου αριθμό επικυρωμένων και μη επικυρωμένων αφηγήσεων.

Κατανοήσεις και συνδυασμός commognitive χαρακτηριστικών

Η μαθήτρια εμφανίστηκε με ικανοποιητική επάρκεια για τις κατανοήσεις του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης, για τη μετακίνηση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης, για την έννοια της σχέσης εξάρτησης ως αντιστοίχιση, για τη διέλευση της γρ.παρ. της ψ=αχ από την αρχή των αξόνων και τον ρόλο του β στην ψ=αχ+β, για τον ρόλο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης στη σχεδίαση της γραφικής παράστασής της. Μέσης επάρκειας κατανοήσεις αναδείχθηκαν για τη μαθήτρια ο τύπος συνάρτησης, πώς από τον πίνακα τιμών μιας σχέσης γίνεται φανερό αν αυτή η σχέση είναι συνάρτηση, για την έννοια του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης και την εύρεσή του από τη λεκτική αναπαράσταση. Η λεκτική αναπαράσταση, η έννοια της συνάρτησης ως συγκεκριμένη σχέση εξάρτησης και η κλίση μιας ευθείας αναδείχθηκαν χαμηλής επάρκειας.

Τα commognitive χαρακτηριστικά για κάθε μία από τις ομάδες των παραπάνω κατανοήσεων αποτυπώνονται στον Πίνακα 1.

Κατανοήσεις με επάρκεια:	**Commognitive χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου**									
	Λεξιλόγιο		**Οπτικοί διαμεσολαβητές** με λειτουργική επάρκεια:			**Ρουτίνες**			**Αφηγήσεις**	
	Ανεπ	Επίσ	Χαμηλή	Περιορ	Ικανοπ	Τελετ	Προς εξερ	Εξερ	Μη επ	Επικ
Ικανοποιητική	✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓
Μέση	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	
Χαμηλή	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	

Πίνακας 1. Τάση σύνδεσης κατανοήσεων και χαρακτηριστικών του μαθηματικού λόγου της Μαρίας

Από την παραπάνω αποτύπωση προκύπτει ότι ο χαρακτήρας του λεξιλογίου δεν φαίνεται να σχετίζεται εμφανώς με τις κατανοήσεις και την επάρκεια αυτών. Οι επικυρωμένες αφηγήσεις που παρήχθησαν από τη μαθήτρια αφορούσαν κάποιες από τις ικανοποιητικώς επαρκείς κατανοήσεις της. Ρουτίνες που έφεραν εξερευνητικά χαρακτηριστικά συνόδεψαν κατανοήσεις ικανοποιητικής επάρκειας. Οι μέσης και χαμηλής επάρκειας κατανοήσεις εμφανίστηκαν μέσα από μίξη τελετουργιών και ‘προς εξερεύνηση’ ρουτινών. Οι κατανοήσεις ικανοποιητικής επάρκειας αναδύθηκαν μέσω της χρήσης οπτικών διαμεσολαβητών με τους οποίους η μαθήτρια λειτουργούσε επαρκώς. Στις μέσης επάρκειας κατανοήσεις, η μαθήτρια αναζήτησε υποστήριξη από όλους τους οπτικούς διαμεσολαβητές, ενώ στις χαμηλής επάρκειας κατανοήσεις της δεν χρησιμοποίησε κανέναν οπτικό διαμεσολαβητή με τον οποίο λειτουργούσε επαρκώς.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Από τα αποτελέσματα, περιορισμένα ως έχουν κυρίως λόγω του μικρού δείγματος, διαφαίνεται ότι μαθητές Γυμνασίου με ενδιαφέρον για μάθηση, όταν έχουν ολοκληρώσει την εισαγωγή τους στην έννοια της συνάρτησης, χρησιμοποιούν κυρίαρχα ανεπίσημο λεξιλόγιο, οι οπτικοί διαμεσολαβητές τους είναι οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης, για τις οποίες λειτουργούν επαρκώς με κάποιες αλλά όχι με όλες, τείνουν προς τελετουργικές διεργασίες αλλά κατάλληλες προτροπές μπορούν να δημιουργήσουν ευκαιρίες για τη συμμετοχή τους σε πιο εξερευνητική σκέψη και η ικανότητα τους να πλαισιώσουν τη σκέψη τους με επικυρωμένες αφηγήσεις είναι σχετικά περιορισμένη. Τα συμπεράσματα αυτά συγκλίνουν με τα αντίστοιχα των ερευνών των Tabach και Nachlieli (2016), Gcasamba (2014), Roberts (2016) και Kotsopoulos κ.ά. (2010).

Σχετικά με τις κατανοήσεις τους, διαφαίνεται να μην έχουν αντιληφθεί επαρκώς τη συνθήκη που καθιστά συνάρτηση μια αντιστοίχιση, νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως διαδικασία αλλά ανταποκρίνονται θετικά στην πρόκληση σταδιακά να τη νοηματοδοτήσουν και ως αντικείμενο και μετακινούνται με μέση ευχέρεια μεταξύ των αναπαραστάσεων. Η ανάδυση των ικανοποιητικά επαρκών κατανοήσεων τους γίνεται μέσα σε πλέγμα κυρίως ανεπίσημου λεξιλογίου, ικανοποιητικής λειτουργικής επάρκειας διαμεσολαβητών, ρουτινών που φέρουν εξερευνητικά χαρακτηριστικά και αφηγήσεων κυρίως μη επικυρωμένων. Αντίστοιχα, οι μη ικανοποιητικής επάρκειας κατανοήσεις συνοδεύονται από ανεπίσημο λεξιλόγιο, μέσης ή περιορισμένης λειτουργικότητας διαμεσολαβητές, ρουτίνες τελετουργικού χαρακτήρα και έλλειψη αφηγήσεων ή μη επικυρωμένες αφηγήσεις, όπως αναδείχθηκε και από τους Kotsopoulos κ.ά. (2010) και Gcasamba (2014).

Υπογραμμίζεται η θετική ανταπόκριση της μαθήτριας στις προτροπές να δει τη συνάρτηση-αντικείμενο πάνω από τη συνάρτηση-διαδικασία και η διατήρηση αυτής της οπτικής κατά τη συνέχεια της δράσης της. Αυτό ενισχύει αρχικά τη σημασία των επιλογών των μαθηματικών έργων, έργα τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν την ολοένα και ικανότερη συμμετοχή των μαθητών στον νέο λόγο. Επιπρόσθετα, ενισχύεται η σημασία του χαρακτήρα του λόγου του εκπαιδευτικού, του οποίου η εξερευνητική απόχρωση μπορεί να δημιουργήσει για τους μαθητές ευκαιρίες για αντίστοιχους τρόπους σκέψης, έστω και αρχικά μέσω της μίμησης. Άλλωστε, στο πλαίσιο της commognition, επισημαίνεται ότι «είναι επιτακτική ανάγκη οι μαθητές να εκτίθενται και να υποστηρίζονται ενεργά για να συμμετάσχουν στον λόγο του ειδικού συμμετέχοντα (expert participant) και να ενθαρρύνονται να συνεχίσουν, παρόλο που αυτός ο λόγος είναι νέος και φαινομενικά ασυμβίβαστος με τον δικό τους» (Sfard και Cobb, 2014, σελ. 24).

Θεωρώντας τη μελέτη του μαθηματικού λόγου ως εργαλείο για την αναγνώριση της μαθησιακής κατάστασης των μαθητών και μοχλό για πιθανές αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές, ως μελλοντική ερευνητική προέκταση της παρούσας εργασίας προτείνεται η καταγραφή και μελέτη του μαθηματικού λόγου μαθητών για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, ώστε πέρα από τη στιγμιαία αποτύπωση να διαφανεί και η εξέλιξή του. Τέλος, με τα ίδια εργαλεία, αυτά του ΕΘΠ, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί ο λόγος των εκπαιδευτικών κατά τη διδακτική πράξη και να ανιχνευθεί η συνεισφορά του στην εξέλιξη της συμμετοχής των μαθητών στον νέο λόγο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Σακονίδης, Χ. (2012, Οκτώβριος). *Διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας και συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη: μια κρίσιμη σχέση για την ανάπτυξη της διδακτικής πρακτικής*. Πρακτικά Συνεδρίου Καινοτόμες Προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση: Σχεδιασμός και Δικτύωση. ΤΕΙ Μεσολογγίου & Πανεπιστήμιο Πάτρας, Πάτρα, 109-132.

Gcasamba, L. C. (2014). *A Discursive Analysis of Learners' Mathematical Thinking: The Case of Functions* (Doctoral dissertation, University of the Witwatersrand, Faculty of Science, School of Science Education).

Kotsopoulos, D., Lee, J., Heide, D. C., & Schell, A. (2009). Discursive Routines and Endorsed Narratives as Instances of Mathematical Cognition. *In Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 42-49).

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2018). Routines we live by: From ritual to exploration. Educational Studies in Mathematics, 101(2), 153-176.

Roberts, A. (2016). *A study of Grade 8 and 9 learner thinking about linear equations, from a commognitive perspective* (Master's thesis, University of Cape Town).

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A., & Cobb, P. (2014). Research in mathematics education: What can it teach us about human learning. *The Cambridge Handbook of the learning sciences*, 545-563.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 23-58.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics*, 91(3), 299-306.

Watson, A. (2009). *Paper 7: Modelling, problem-solving and integrating concepts*. T. Nunes, P. Bryant and A. Watson, University of Oxford: 1-42. Nuffield Foundation: London.

Η ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Δίκαρου Αγγελική, Τριανταφύλλου Χρυσαυγή

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

angeliki_ad@hotmail.com, chrtriantaf@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα μελετά τη συνεργασία δύο εκπαιδευτικών, ενός εκπαιδευτικού τάξης και ενός εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής, κατά την αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Μέσα από τη θεωρία δραστηριότητας έγινε η ερμηνεία των δράσεων κατά τη συνεργασία των δύο εκπαιδευτικών. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε γενικό Γυμνάσιο, τα ερευνητικά δεδομένα συλλέχθηκαν από το ερευνητικό ημερολόγιο του εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής και η ποιοτική ανάλυση πραγματοποιήθηκε μέσα από τα τέσσερα στάδια του κύκλου αξιολόγησης. Προέκυψαν οι δράσεις της αλληλοενημέρωσης για διάφορα θέματα αξιολόγησης και της διαχείρισης μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων αξιολόγησης μαθητών. Κατά τη δεύτερη δράση εντοπίστηκαν εντάσεις σχετικά με την εγκυρότητα της διαδικασίας της αξιολόγησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αξιολόγηση της επίδοσης μαθητών και ειδικότερα των μαθητών που συναντούν δυσκολίες στα μαθηματικά, σε ένα σχολείο εκπαιδευτικής συμπερίληψης είναι ένα θέμα ανοικτό για τη μαθηματική εκπαίδευση (Campbell et al., 2004; Morgan & Watson, 2002). Οι εκπαιδευτικοί κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης των μαθητών καλούνται να αντιμετωπίσουν πολύπλοκα ζητήματα ισότητας και δίκαιης αντιμετώπισης όλων των μαθητών. Αυτό σημαίνει πως όλοι οι μαθητές πρέπει να έχουν ίσες ευκαιρίες να παρουσιάσουν τη δουλειά τους και ότι τα μέσα αξιολόγησης δεν έχουν συστηματική προκατάληψη εναντίον συγκεκριμένων ομάδων μαθητών (π.χ. κοινωνικών ομάδων ή μαθητών με μαθηματικές δυσκολίες). Επιπλέον, η διαφοροποίηση στην αξιολόγηση εξετάζεται ως προς τον βαθμό που οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν διαφορετικές τεχνικές για τη μέτρηση των αναγκών των μαθητών ή/και διαφορετικούς τρόπους παροχής ανατροφοδότησης σε διαφορετικές ομάδες μαθητών, λαμβάνοντας υπόψη το υπόβαθρο και τα προσωπικά τους χαρακτηριστικά (Christoforidou, Kyriakides, Antoniou & Creemers, 2014).

Ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, ορίζονται θεσμοθετημένες μορφές διδασκαλίας στο Ελληνικό πλαίσιο, όπως η 'παράλληλη στήριξη' και το 'τμήμα ένταξης' (Άρθρο 6 ΦΕΚ 199/Α'/2.10.2008) και συναντάται και σε πρακτικές άλλων χωρών ως πλαίσιο συνδιδασκαλίας του εκπαιδευτικού της τάξης και του εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής (Friend, Cook, Hurley-Chamberlain & Shamberger, 2010). Σε αυτές τις περιπτώσεις εκπαιδευτικοί ειδικής αγωγής, υλοποιούν εξατομικευμένα προγράμματα διδασκαλίας και υποστήριξης για μαθητές που αντιμετωπίζουν ήπιες δυσκολίες στα μαθηματικά, όπως αδυναμία μνήμης σε αριθμητικά δεδομένα, δυσκολίες στην εκτέλεση μαθηματικών πράξεων και αλγοριθμικών διαδικασιών καθώς και στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων (Dowker, 2004). Αναδεικνύεται η ανάγκη συνεργασίας του εκπαιδευτικού της τάξης και του εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής και αποτελεί θεσμοθετημένη δράση στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα (ΦΕΚ 449). Παρότι η συνεργασία αυτή έχει μελετηθεί σχετικά με θέματα οργάνωσης, όπως συχνότητα και διάρκεια συναντήσεων, κοινός σχεδιασμός μαθήματος (Rimpola, 2014), γενικά δεν έχει μελετηθεί ιδιαίτερα το περιεχόμενο αυτής της συνεργασίας και ειδικότερα σε θέματα αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών. Στη βιβλιογραφία συναντάμε κυρίως ποσοτικές μελέτες που αφορούν είτε την αξιολόγηση των μαθητών διαφορετικών εθνικοτήτων (Jeltova et al., 2011) είτε την εφαρμογή συγκεκριμένων παρεμβάσεων για μαθητές με μαθηματικές δυσκολίες που αφορούν όμως κυρίως μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Chodura, Kuhn, & Holling, 2015).

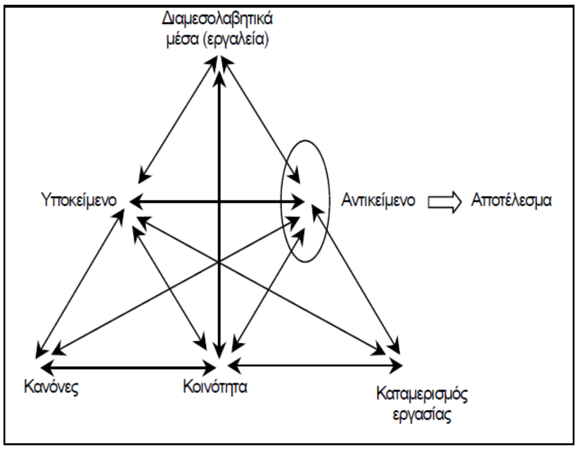
Στην παρούσα εργασία μελετάμε τη συνεργασία του Εκπαιδευτικού της Τάξης (ΕκΤ) και του Εκπαιδευτικού Ειδικής αγωγής σε τμήμα ένταξης (Εκ Ε.Α.) με στόχο την αξιολόγηση της επίδοσης δύο μαθητών (Μ1, Μ2) που είναι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Η ΕκΕ.Α. είναι η ερευνήτρια μαθηματικός και πρώτη συγγραφέας της εργασίας.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι

ΕΕ1: Ποιες είναι οι δράσεις της συνεργασίας των δύο εκπαιδευτικών με στόχο την αξιολόγηση δύο μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά; ΕΕ2: Τι είδους προκλήσεις συναντούν οι δύο εκπαιδευτικοί κατά τη συνεργασία τους σχετικά με την αξιολόγηση της επίδοσης των δύο μαθητών;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας είναι το μοντέλο 2ης γενιάς της Θεωρίας Δραστηριότητας (Engeström & Cole, 1997). Στο μοντέλο αυτό, οι ερευνητές αντιλαμβάνονται τη δραστηριότητα ως ένα σύστημα Δραστηριότητας (activity system), (p. 304) το οποίο ενσωματώνει εκτός των διαφόρων εργαλείων διαμεσολάβησης μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου και την κοινότητα στην οποία ανήκει το υποκείμενο, τους κανόνες που διέπουν αυτήν την κοινότητα και τον καταμερισμό εργασίας του υποκειμένου σε σχέση με τα υπόλοιπα μέλη της. Το αντικείμενο της δραστηριότητας παριστάνεται με ένα οβάλ σχήμα, για να δείξει ότι οι δράσεις των μελών αυτής της κοινότητας, οδηγούνται σε κάποιο στόχο ο οποίος χαρακτηρίζεται από αμφισβήτηση, τριβές και αντιφάσεις και επιδέχεται ερμηνείας και αλλαγής.



Σχήμα 1: Σύστημα Δραστηριότητας

Οι σχέσεις των μελών της κοινότητας (community) καθοδηγούνται από κανόνες (rules) και από τον καταμερισμό εργασίας (division of labour).

Στην παρούσα εργασία μελετάται η δραστηριότητα της συνεργασίας του εκπαιδευτικού της τάξης (ΕκΤ) και της εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής (ΕκΕ.Α.) με αντικείμενο/στόχο την αξιολόγηση των μαθητών Μ1 και Μ2 που είναι μαθητές με ιδιαίτερες δυσκολίες στα μαθηματικά. Ως υποκείμενα της δραστηριότητας αναγνωρίζουμε τους δύο εκπαιδευτικούς και ως διαμεσολαβητικά μέσα (εργαλεία) τα ΑΠΣ, την ύλη εξέτασης, τα εργαλεία αξιολόγησης που σχεδιάζει ο ΕκΤ αλλά και τις συνθήκες εξέτασης αυτών των μαθητών. Ως κοινότητα, αναγνωρίζουμε την εκπαιδευτική κοινότητα, η οποία διέπεται από κανόνες που αφορούν τη συνεργασία των δύο εκπαιδευτικών αλλά και την διασφάλιση των ποιοτικών χαρακτηριστικών της αξιολόγησης όπως εγκυρότητα και αξιοπιστία. Τα υποκείμενα της δραστηριότητας είχαν διαφορετικό καταμερισμό εργασίας. Συγκεκριμένα, ο ΕκΤ που έχει γνώση του προγράμματος σπουδών, αναλαμβάνει την ευθύνη της οργάνωσης και της υλοποίησης της διδασκαλίας και της αξιολόγησης όλων των μαθητών της τάξης. Η ΕκΕ.Α. ως εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής οφείλει να έχει τις απαραίτητες δεξιότητες που σχετίζονται με τον σχεδιασμό και την υλοποίηση εξατομικευμένου προγράμματος σπουδών καθώς και την αξιολόγηση των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, η οποία πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στις ανάγκες τους (Dettmer et al., 2002). Και οι δύο εκπαιδευτικοί θα πρέπει να συνεργάζονται σε όλη της διάρκεια της χρονιάς. Το θέμα της συνεργασίας εκπαιδευτικού της τάξης και εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής έχει αναγνωριστεί βιβλιογραφικά (π.χ. Da Fonte, & Barton-Arwood, 2017; Tzivinikou, 2015). Οι ερευνητές αναφέρονται στο κοινωνικό μέρος της συνεργασίας και στην διαχείριση τυχόν συγκρούσεων που θα προκύψουν. Για τη διαχείριση των συγκρούσεων προτείνουν την ύπαρξη προσωπικής εμπιστοσύνης ανάμεσα στα μέλη, την ευελιξία, τις οργανωτικές δεξιότητες καθώς και την ομαδική εργασιακή εμπειρία.

Στην παρούσα μελέτη, ο ΕκΤ έχει την ευθύνη για τη διδασκαλία και την αξιολόγηση των μαθητών Μ1 και Μ2 ενώ η ΕκΕ.Α. έχει την ευθύνη της παροχής εξατομικευμένων παρεμβάσεων στους Μ1 και Μ2 και της ενημέρωσης του ΕκΤ για την συνολική πορεία των δύο μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Οι εκπαιδευτικοί συναντούν πολλαπλές προκλήσεις στην υλοποίηση της διαδικασίας της αξιολόγησης (π.χ. σχεδιασμός κατάλληλων αξιολογικών εργαλείων, ερμηνεία των αποτελεσμάτων κ.α.), κατά την οποία θα πρέπει να λάβουν υπόψη τις διαφοροποιημένες ανάγκες των μαθητών (Christoforidou et al., 2014). Ταυτόχρονα θα πρέπει να υιοθετήσουν πολλαπλούς ρόλους όπως του εξεταστή που χρησιμοποιεί κριτήρια που καθορίζονται από εξωτερικούς παράγοντες, του εξεταστή που θέτει και χρησιμοποιεί ατομικά κριτήρια, του συνήγορου που αναζητά ευκαιρίες για να υποστηρίξει τους μαθητές του (Morgan, Tsatsaroni & Lerman, 2002). Η έρευνα σε θέματα αξιολόγησης μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, αναφέρεται σε ‘προσαρμογές αξιολόγησης’ (assessment accommodations) που οι ειδικοί ορίζουν ως τροποποιητικές διαδικασίες αξιολόγησης όπως η αυξημένη χρονική διάρκεια, τα προτεινόμενα υλικά (π.χ. υπολογιστές τσέπης) και γενικότερα οι συνθήκες υλοποίησης μιας αξιολογικής διαδικασίας που να επιτρέπει την αξιολόγηση των ικανοτήτων των παραπάνω μαθητών και όχι των δυσκολιών τους (Maccini, & Gagnon, 2006). Οι Morgan & Watson (2002) μελετάνε την ανισότητα που προκύπτει όχι τόσο από τη φύση των δραστηριοτήτων αξιολόγησης αλλά απ’ τον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν την απόδοση των μαθητών τους και τα κριτήρια που χρησιμοποιούν. Σύμφωνα με τους ερευνητές για να θεωρείται δίκαιη μια αξιολόγηση πρέπει, τα άτομα που αξιολογούν να εφαρμόζουν και να ακολουθούν κριτήρια απαλλαγμένα από επιφανειακά χαρακτηριστικά και συμπεριφορές μαθητών ή προσδοκίες εκπαιδευτικών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο Έρευνας

Σύμφωνα με το εκπαιδευτικό σύστημα, για τους μαθητές που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες προβλέπεται εξειδικευμένη εκπαιδευτική υποστήριξή στα σχολικά πλαίσια (Άρθρο 6 ΦΕΚ 199/Α'/2.10.2008) και σε κάποιες περιπτώσεις, προβλέπονται συγκεκριμένες συνθήκες αξιολόγησης όπως προφορικός έλεγχος (Άρθρο 9, ΠΔ126/2016). Για τη συνεργασία των δύο εκπαιδευτικών ορίζεται με σχετική απόφαση (ΦΕΚ Β 449/2007, σ. 9390) ότι ο/η εκπαιδευτικός του τμήματος ένταξης πρέπει να συνεργάζεται με τον/την εκπαιδευτικό της τάξης, ώστε να υπάρχει σύνδεση μεταξύ του κοινού και του εξειδικευμένου προγράμματος ως προς το περιεχόμενο και τον τρόπο υλοποίησής του (π.χ. συνδιδασκαλία).

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα γενικό Γυμνάσιο, κατά το σχολικό έτος 2020-21, κατά το χρονικό διάστημα της δια ζώσης διδασκαλίας. Στο σχολείο λειτουργούσε τμήμα ένταξης, τάξη στην οποία εφαρμόζεται εξατομικευμένο πρόγραμμα από έναν εκπαιδευτικό ειδικής αγωγής και αφορά μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Πιο συγκεκριμένα αναφέρεται ο μαθητής (Μ1) που φοιτούσε στο τμήμα ένταξης με υπεύθυνη δήλωση γονέα, μετά από παρότρυση των εκπαιδευτικών της τάξης και άτυπη αξιολόγηση της ΕκΕ.Α. και ο μαθητής (Μ2), για τον οποίο υπήρχε χαρτί γνωμάτευσης με αναφορές για εκδήλωση ήπιου άγχους επίδοσης και προτροπή για συμπληρωματική προφορική εξέταση. Η πρώτη συγγραφέας είναι η ΕκΕ.Α. και συνεργάστηκε με τον ΕκΤ σε θέματα αξιολόγησης των Μ1, Μ2. Τα ερευνητικά δεδομένα αφορούν συζητήσεις των εκπαιδευτικών κατά τη διαδικασία σχεδιασμού και υλοποίησης εργαλείου τελικής αξιολόγησης (εξετάσεις του 1^{ου} τετράμηνου) ως προς τους δύο μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της έρευνας είναι δύο εκπαιδευτικοί μαθηματικών, ο εκπαιδευτικός τάξης (ΕκΤ) και η εκπαιδευτικός ειδικής Αγωγής (ΕκΕ.Α.) που ήταν είχε και τον ρόλο της ερευνήτριας στην παρούσα εργασία.

Ερευνητικό Εργαλείο

Το ερευνητικό εργαλείο ήταν το ερευνητικό ημερολόγιο (Research Diary). Στο ερευνητικό ημερολόγιο κατέγραφε η ΕκΕ.Α. όλες τις συζητήσεις που έκανε με τον εκπαιδευτικό της τάξης. Η καταγραφή ήταν είτε σε μορφή σημειώσεων πεδίου κατά τη διάρκεια της συζήτησης είτε στο σπίτι αναλογιζόμενη τις αντίστοιχες συζητήσεις. Ο ΕκΤ ήταν ενημερωμένος για το θέμα μελέτης της ερευνήτριας και οι συζητήσεις ήταν άτυπες και ως επί το πλείστον μη μαγνητοφωνημένες. Στο ημερολόγιο αναφερόταν επίσης η ημερομηνία, το θέμα συζήτησης, η χρονική διάρκεια, ο σχετικός σχολιασμός της ερευνήτριας καθώς και σημειώσεις πεδίου όπως τα εργαλεία αξιολόγησης των μαθητών. Οι συζητήσεις αυτές αφορούσαν θέματα διαμορφωτικής αξιολόγησης (π.χ. σύγκριση της πορείας του μαθητή μέσα στην τάξη και στο τμήμα ένταξης), τους διδακτικούς και αξιολογικούς στόχους του εκπαιδευτικού (π.χ. ιδιαίτερα σημεία έμφασης της ύλης), τα αξιολογικά εργαλεία (π.χ. τεστ και καταλληλότητα ερωτημάτων) και τέλος την ανατροφοδότηση και αποτίμηση των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης (π.χ. σχολιασμός των γραπτών αποτελεσμάτων για κάθε μαθητή). Ως αξιολογικά εργαλεία εννοούμε το σύνολο των γραπτών ασκήσεων, των προφορικών ερωτημάτων, των θεμάτων σε γραπτές δοκιμασίες, των εργασιών για το σπίτι ή των δραστηριοτήτων σε άλλα πλαίσια. Τα ερευνητικά δεδομένα αποτελούν οι καταγραφές στο ερευνητικό ημερολόγιο και το εθνογραφικό υλικό (εργαλεία αξιολόγησης που συνέλεξε η ερευνήτρια) αλλά και η δική της ανατροφοδότηση στα θέματα συζήτησης (π.χ. πόσο παρεμβατική ήταν ή ποιες ακόμα πληροφορίες θα μπορούσε να δώσει στον ΕκΤ).

Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Στην παρούσα εργασία ο κύκλος αξιολόγησης των Antoniou et al. (2014) αποτελεί το μοντέλο ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων που καταγράφονταν στο ερευνητικό ημερολόγιο. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά δεδομένα χωρίστηκαν ανά στάδιο του κύκλου αξιολόγησης: 1^{ο} στάδιο: *τον σχεδιασμό των εργαλείων αξιολόγησης*, 2^{ο} στάδιο: *την υλοποίηση της αξιολόγησης*, 3^{ο} στάδιο: *την τεκμηρίωση των αποτελεσμάτων της αξιολόγησης*, και 4^{ο} στάδιο: *την επικοινωνία των αποτελεσμάτων αξιολόγησης στα μέλη της εκπαιδευτικής κοινότητας* (όπως μαθητές και γονείς) (Antoniou et al., 2014). Οι σχετικές καταγραφές κωδικοποιήθηκαν σύμφωνα με τις δράσεις συνεργασίας των δύο εκπαιδευτικών (απάντηση στο ΕΕ1) και οι προκλήσεις που αναδείχθηκαν μέσα από τις δράσεις τους (απάντηση στο ΕΕ2). Τέλος, χρησιμοποιήθηκε το θεωρητικό μοντέλο της Θεωρίας Δραστηριότητας με σκοπό να αναλυθούν οι δράσεις συνεργασίας των δύο εκπαιδευτικών και να ερμηνευτούν οι εντάσεις που αναπτύχθηκαν.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρουσιάζονται δύο κύριες δράσεις της συνεργασίας των δύο εκπαιδευτικών. Η πρώτη δράση αφορά α) *την αλληλοενημέρωσή τους για διάφορα θέματα αξιολόγησης* και β) *τη διαχείριση μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων αξιολόγησης μαθητών.* Τα αποσπάσματα που παρουσιάζονται παρακάτω προέρχονται από τις καταγραφές της ερευνήτριας στο ερευνητικό ημερολόγιο.

Δράση Α: Αλληλοενημέρωση για θέματα αξιολόγησης

Ο ΕκΤ ενημερώνει την ΕκΕ.Α. για την ύλη εξέτασης και αφήνει περιθώρια αναθεώρησης της εξεταστέας ύλης του εργαλείου αξιολόγησης:

> Συζητάμε για το τι είναι αυτό που θέλει να εξετάσει, μου δείχνει αναλυτικά στο βιβλίο ποια ύλη έχει καλύψει. Αναφέρει από μόνος του πως πρακτικά είναι όλη η ύλη της γεωμετρίας και όλα αυτά που ο ίδιος θέλει να ελέγξει. Με ρωτάει πως μου φαίνονται και τι πιστεύω. Απαντώ ότι ‘είναι αρκετά’ και μου απαντά: ‘ίσως να μη βάλω το τελευταίο κεφάλαιο’(1ο στάδιο, 1/2/2021).

Απ' τη συζήτηση φάνηκε πως ο ΕκΤ επηρεάστηκε και σκέφτηκε να μειώσει την εξεταστέα ύλη.

Η ΕκΕ.Α. προτείνει την εξέταση των μαθητών έξω απ' τα πλαίσια της τάξης γνωρίζοντας ότι ο Μ1 σε προηγούμενη γραπτή εξέταση στην τάξη δεν κατάφερε να ανταποκριθεί (παρέδωσε λευκή κόλλα) ενώ για τον Μ2 σκοπός ήταν την μείωση του άγχους επίδοσης σύμφωνα και με τη σχετική γνωμάτευση. Ταυτόχρονα, η ΕκΕ.Α. γνωστοποιεί τις δυσκολίες που συνήθως συναντούν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά, ενημερώνει τον ΕκΤ για τρόπους προσαρμογής (assessment accommodations) ενός εργαλείου αξιολόγησης που συνιστώνται και από τη βιβλιογραφία.

> Αναφέρω πως γενικότερα για τους μαθητές αυτούς υπάρχει δυσκολία στο να διαβάσουν και να αποδώσουν νόημα σε ένα γραπτό κείμενο (δυσκολία τονισμού λέξεων κατά την ανάγνωση του εργαλείου αξιολόγησης) γιαυτό και προτείνεται στις θεωρητικές ασκήσεις να υπάρχουν ασκήσεις πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης ή σύντομης συμπλήρωσης (1ο στάδιο, 2/2/2021).

Δράση Β: Διαχείριση μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων αξιολόγησης μαθητών.

Οι δύο εκπαιδευτικοί προσπαθούν να διαχειριστούν ζητήματα που προκύπτουν σχετικά με την απόδοση των δύο μαθητών στο διαγώνισμα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές Μ1 και Μ2 αξιολογήθηκαν με 14, που θεωρήθηκε βαθμός μη αναμενόμενος από τους δύο εκπαιδευτικούς. Ο ΕκΤ μεταφέρει τις παρατηρήσεις του και επικοινωνεί στην ΕκΕ.Α. τον προβληματισμό του για την επίδοση των δύο μαθητών στο διαγώνισμα. Η ΕκΕ.Α. κατανοώντας τον προβληματισμό του τον ενημερώνει για τους τρόπους προσαρμογής (assessment accommodations) που υιοθέτησε κατά τη διαχείριση του εργαλείου αξιολόγησης για τους δύο μαθητές.

> [Σχετικά με τον Μ1 αναφέρω ότι] του έκανα ερωτήσεις για να μου περιγράψει πως το φαντάζεται […] του εξήγησα πως θέλετε ένα αριθμητικό παράδειγμα οξείας γωνίας […]του ζήτησα να σχεδιάσει ένα σχήμα που θυμήθηκε και μου το έδειξε με χειρονομίες [Σχετικά με τον Μ2 αναφέρω ότι] του έκανα το σχήμα των παραπληρωματικών γωνιών […] τον παρότρυνα να σχεδιάσει το ζητούμενο της άσκησης για να οδηγηθεί πιο εύκολα στην απάντηση […] τον παρότρυνα να δώσει μια τυχαία απάντηση (3ο στάδιο, 3/2/2021).

Η ΕκΕ.Α. δίνει τη δική της οπτική σχετικά με την επίδοση των δύο μαθητών.

> Ανέφερα στον ΕκΤ ότι κατά την άποψή μου ο Μ1, σε αντίθεση με αυτό που ανέμενα, είχε προετοιμαστεί για το διαγώνισμα. Ο Μ2 παραδέχτηκε ότι δεν είχε προετοιμαστεί για το διαγώνισμα ωστόσο με αρκετά καθοδηγητικές

> ερωτήσεις κατάφερε να οδηγηθεί μόνος του σε σχετικά σωστές απαντήσεις». (3ο στάδιο, 3/2/2021).

Ο ΕκΤ προβληματίζεται για τη διαχείριση θεμάτων δίκαιης αξιολόγησης.

> Μου αναφέρει πως ο βαθμός αυτός [14] για τον μαθητή Μ2 τον προβληματίζει διότι έρχεται σε αντίθεση με την εικόνα του μαθητή στην τάξη όπου δεν φαίνεται να προσπαθεί τόσο. Ο ΕκΤ αναφέρει πως ο βαθμός αυτός τον δυσκολεύει πάρα πολύ για τον βαθμό τετραμήνου, γιατί δεν θέλει να του βάλει μεγάλο βαθμό εφόσον θεωρεί πως έτσι θα αδικήσει άλλα παιδιά που πραγματικά προσπαθούν σταθερά και προσεγγίζουν το 15 (4ο στάδιο, 3/2/2021).

Η ΕκΕ.Α. παροτρύνει τον ΕκΤ να αντιμετωπίσει τα αποτελέσματα του αξιολογικού εργαλείου ως μια ένδειξη των δυνατοτήτων του Μ2, όμως για την τελική αξιολόγηση του τετραμήνου να λάβει υπόψη όλες τις παραμέτρους της διαμορφωτικής αξιολόγησης, όπως η ελλιπής συμμετοχή και η ασυνέπεια στις δραστηριότητες του μαθήματος τόσο στην κανονική τάξη όσο και στο τμήμα ένταξης, καταλήγοντας ως εξής: «μιας και στην τάξη όλο αυτό το διάστημα δεν έχει ενεργή παρουσία τότε δεν πιστεύω πως θα πρέπει να πάρει απαραίτητα τον ίδιο βαθμό με αυτόν που έγραψε» (4ο στάδιο, 3/2/2021).

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι η Δράση Α, κύλησε χωρίς εντάσεις και στηρίχθηκε κυρίως στη αλληλοενημέρωση των εκπαιδευτικών για την υλοποίηση της αξιολόγησης και τα διαμεσολαβητικά εργαλεία που αξιοποίησαν. Σε αντίθεση με τη Δράση Α, στη Δράση Β οι ρόλοι που υιοθέτησαν οι εκπαιδευτικοί με βάση τους κανόνες και τον καταμερισμό εργασίας τους, δημιούργησαν εντάσεις στη συνεργασία τους. Συγκεκριμένα, τέθηκαν υπό αμφισβήτηση απ’ τον ΕκΤ οι προσαρμογές αξιολόγησης που υιοθέτησε η ΕκΕ.Α. λόγω του καταμερισμού εργασίας της. Ο προβληματισμός του ΕκΤ αφορά την εγκυρότητα της διαδικασίας αξιολόγησης για τους δύο μαθητές σε σχέση με τον ρόλο του ως εξεταστή που έχει την ευθύνη αξιολόγησης όλης της τάξης. Στην προσπάθειά της να αμβλύνει την ένταση η ΕκΕ.Α. προτείνει στον ΕκΤ να μη στηριχθεί αποκλειστικά στα αποτελέσματα αυτού του αξιολογικού εργαλείου αλλά να αξιοποιήσει στοιχεία απ’ τη συμμετοχή και τη συνολική εικόνα των μαθητών στην τάξη.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η συνεργασία μεταξύ του εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής και του εκπαιδευτικού της τάξης αφορούσε *θέματα αλληλοενημέρωσης* στο πλαίσιο των συνθηκών διαχείρισης της αξιολόγησης αλλά και των ζητημάτων που προέκυψαν ως προς την *εγκυρότητα της διαδικασίας της αξιολόγησης* (Moss, 1994). Οι εκπαιδευτικοί, κατά τη συνεργασία τους, συναντάνε προκλήσεις που οφείλονται στις προσαρμογές αξιολόγησης που διενεργήθηκαν για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (Maccini, & Gagnon, 2006), στις αμφιβολίες που εγείρονται ως προς την εγκυρότητα της αξιολόγησης από τον Εκπαιδευτικό της τάξης, στα κριτήρια που εφαρμόζουν κατά την ερμηνεία της επίδοσης των μαθητών, στον προβληματισμό που δημιουργήθηκε απ' την διενέργεια της αξιολόγησης σε διαφορετική τάξη. Επιπλέον, φάνηκε πως η συνεργασία των δύο εκπαιδευτικών αποτελεί πηγή πληροφοριών και αναστοχασμού για τον εκπαιδευτικό της τάξης καθώς η οπτική της ΕκΕ.Α. για τον όγκο της ύλης τον επηρέασε με αποτέλεσμα να αναπροσαρμόσει την ύλη για το σύνολο των μαθητών. Η εξισορρόπηση της αξιολόγησης ανάμεσα στο σύνολο των μαθητών της τάξης και των μαθητών που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά φαίνεται να αποτελεί κυρίαρχη πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς της τάξης, ενώ θέματα ισότητας και συμπερίληψης είναι στο επίκεντρο των εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων (Campbell et al., 2004; Morgan & Watson, 2002).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Campbell, J., Campbell, R. J., Kyriakides, L., Muijs, D., & Robinson, W. (2004). *Assessing teacher effectiveness: Developing a differentiated model*. Psychology Press.

Chodura, S., Kuhn, J. T., & Holling, H. (2015). Interventions for children with mathematical difficulties. *Zeitschrift für Psychologie*.

Christoforidou, M., Kyriakides, L., Antoniou, P., & Creemers, B. P. (2014). Searching for stages of teacher's skills in assessment. *Studies in Educational Evaluation*, *40*, 1-11.

Da Fonte, M. A., & Barton-Arwood, S. M. (2017). Collaboration of general and special education teachers: Perspectives and strategies. *Intervention in School and Clinic*, *53*(2), 99-106.

Dettmer, P., Thurston, L. P., & Dyck, N. (2002). *Consultation, collaboration, and teamwork for students with special needs*. Allyn & Bacon.

Dowker, A. (2004). *What works for children with mathematical difficulties?* (Vol. 554). Nottingham: DfES Publications.

Engeström, Y., & Cole, M. (1997). *Situated cognition in search of an agenda* (pp. 301-309). Routledge.

Friend, M., Cook, L., Hurley-Chamberlain, D., & Shamberger, C. (2010). Co-teaching: An illustration of the complexity of collaboration in special education. *Journal of educational and psychological consultation*, *20*(1), 9-27.

Jeltova, I., Birney, D., Fredine, N., Jarvin, L., Sternberg, R. J., & Grigorenko, E. L. (2011). Making instruction and assessment responsive to diverse students' progress: Group-administered dynamic assessment in teaching mathematics. *Journal of learning disabilities*, *44*(4), 381-395.

Maccini, P., & Gagnon, J. C. (2006). Mathematics instructional practices and assessment accommodations by secondary special and general educators. *Exceptional children*, *72*(2), 217-234.

Morgan, C., & Watson, A. (2002). The interpretative nature of teachers' assessment of students' mathematics: Issues for equity. *Journal for research in mathematics education*, *33*(2), 78-110.

Morgan, C., Tsatsaroni, A., & Lerman, S. (2002). Mathematics teachers' positions and practices in discourses of assessment. *British Journal of Sociology of Education*, *23*(3), 445-461.

Moss, P. A. (1994). Can there be validity without reliability?. *Educational researcher*, *23*(2), 5-12.

Rimpola, R. C. (2014). Collaborative Planning and Teacher Efficacy of High School Mathematics Co-teachers. *Educational Planning*, *21*(3), 41-53.

Tzivinikou, S. (2015). Collaboration between general and special education teachers: Developing co-teaching skills in heterogeneous classes. *Problems of Education in the 21st Century*, *64*(1), 108-119.

ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Παλαμιώτη Νικολέττα, Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

nikipalam@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr

Στην παρούσα εργασία διερευνάται η αντίληψη καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια του απείρου μέσα από την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες με διαφορετικό πλαίσιο. Οι δραστηριότητες βασίζονταν σε δύο υποθετικά σενάρια, όπου παρουσιάζονταν ισχυρισμοί φοιτητών σχετικά με τις σειρές πραγματικών αριθμών και το παράδοξο Ping-Pong Ball αντίστοιχα. Στην εργασία αναλύονται δεδομένα δύο εκπαιδευτικών που αξιολόγησαν τους ισχυρισμούς των φοιτητών, τεκμηριώνοντας την απάντησή τους γραπτώς και μέσω συνέντευξης. Από τα ευρήματα προέκυψε ότι το διαφορετικό πλαίσιο των σεναρίων και η τυπική μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών επηρέασαν την προσέγγιση και την αντίληψή τους σχετικά με το άπειρο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το άπειρο ως αντικείμενο μάθησης έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον της έρευνας στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Montes, Carrillo & Ribeiro, 2014). Οι Dubinsky, Weller, McDonald και Brown (2005a) επισημαίνουν ότι ακόμα και "φιλόσοφοι, μαθηματικοί, ιστορικοί των μαθηματικών, μαθητές καθώς και ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών μεταξύ άλλων", έχουν αντιμετωπίσει δυσκολίες στην επίλυση παράδοξων και στην κατανόηση του απείρου. Σε αυτό το πλαίσιο, οι Montes, et al. (2014) τονίζουν ότι η μελέτη της κατανόησης, της γνώσης και της πρακτικής των εκπαιδευτικών για το άπειρο αποτελεί αντικείμενο έρευνας και επισημαίνουν την ανάγκη για εστίαση της έρευνας στους εν ενεργεία καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Montes, et al., 2014).

Ως ένα ακόμα μέσο για τη μελέτη της αντίληψης του απείρου, χρησιμοποιούνται παράδοξα που αφορούν άπειρες διαδικασίες. Σύμφωνα με την Mamolo (2014), μέσω αυτών μπορεί να αποκαλυφθεί και να ερμηνευθεί η κατανόηση της έννοιας αλλά και να αναγνωρισθούν οι δυσκολίες που πηγάζουν από το εν ενεργεία άπειρο. Από τέτοιου τύπου διαδικασίες προκύπτουν παράδοξα συμπεράσματα σχετικά με το άπειρο που έρχονται σε αντίθεση με προϋπάρχουσες θεμελιώδεις αντιλήψεις (Mamolo & Zazkis, 2008). Τέλος, οι Kolar και Čadež (2012) εστιάζοντας σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, επισήμαναν ότι η αντίληψη τους για το άπειρο διαφοροποιείται στο αλγεβρικό και στο γεωμετρικό πλαίσιο.

Η παρούσα εργασία, η οποία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, μελετά την αντίληψη εν ενεργεία καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με το άπειρο σε διαφορετικό πλαίσιο.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η αντίληψη του απείρου είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη διττή φύση της έννοιας, ως *εν δυνάμει* και ως *εν ενεργεία άπειρο*. Ειδικότερα, το εν δυνάμει άπειρο θεωρείται ως μια διαδικασία χωρίς τέλος και το εν ενεργεία άπειρο ως μια ολοκληρωμένη διαδικασία (Dubinsky, et al., 2005a). Σε αυτό το πλαίσιο, οι Dubinsky, Weller, McDonald και Brown (2005a και 2005b) μελέτησαν την κατανόηση της έννοιας του απείρου και των επιμέρους πτυχών της, μέσα από το πρίσμα της APOS Theory. Το εν δυνάμει άπειρο γίνεται αντιληπτό ως *διαδικασία* (process) απείρως επαναλαμβανόμενων βημάτων, ενώ το εν ενεργεία άπειρο ως το νοητικό *αντικείμενο* (object) που προκύπτει μέσα από τον εγκλεισμό (encapsulation) της διαδικασίας σε αυτό, τονίζοντας ότι αποτελούν δύο γνωστικές αντιλήψεις που συνδέονται με νοητικούς μηχανισμούς (Dubinsky, et al., 2005a; 2005b).

Σε μεταγενέστερη έρευνα, οι Dubinsky, Arnon, και Weller (2013), μελετώντας την αντίληψη μελλοντικών εκπαιδευτικών για την ισότητα 0,999…= 1, προσδιόρισαν ένα ενδιάμεσο στάδιο στην APOS Theory, το στάδιο της *Ολότητας* (Totality – TOT). Αυτό το στάδιο εντοπίζεται μεταξύ των σταδίων της *Διαδικασίας* (Process) και του *Αντικειμένου* (Object) και σύμφωνα με τους ερευνητές, χαρακτηρίζεται από τη σύλληψη "όλων των 9 ταυτόχρονα" αλλά όμως υπάρχει δυσκολία στη σύλληψη του 0.999… ως αντικείμενο. Συνοψίζοντας, το εν ενεργεία άπειρο μπορεί να κατασκευαστεί μέσα από τις διαδικασίες της εσωτερίκευσης (*interiorization*), κινούμενοι από τη δράση στη διαδικασία, στη συνέχεια της «αποχρονικοποιήσης» (*detemporalization*), μεταβαίνοντας από τη διαδικασία στην ολότητα, και τέλος του εγκλεισμού (*encapsulation*), όπου από την ολότητα σχηματίζεται το αντικείμενο.

Οι Dubinsky, Weller, Stenger και Vidakovic (2008) καθώς και οι Mamolo και Zazkis (2008) μελέτησαν παράλληλα την κατανόηση του απείρου με χρήση παράδοξων που στηρίζονται στην ολοκλήρωση άπειρων διαδικασιών σε πεπερασμένο χρόνο. Οι Dubinsky et al. (2008) διαπίστωσαν ότι κατά την επίλυση του παραδόξου Tennis Ball οι φοιτητές θεώρησαν ότι η διαδικασία είναι ατελής ή ότι οι μπάλες σε κάθε καλάθι θα είναι άπειρες. Οι Mamolo και Zazkis (2008) μελέτησαν τις απαντήσεις εκπαιδευτικών μαθηματικών που συμμετείχαν σε μεταπτυχιακό πρόγραμμα και φοιτητών κοινωνικών επιστημών στα παράδοξα "Το ξενοδοχείο του Hilbert" και " Ping-Pong Ball". Όσον αφορά στο παράδοξο Ping-Pong Ball, κάποιοι από τους συμμετέχοντες στη μελέτη απάντησαν ότι στο τέλος του χρόνου θα υπάρχουν άπειρες μπάλες στο καλάθι και κάποιοι άλλοι ότι η διαδικασία είναι αδύνατη. Το επιχείρημα για τη δεύτερη απάντηση ήταν ότι αφού ο χρόνος (60 δευτερόλεπτα) διαιρείται σε άπειρα χρονικά διαστήματα, δεν θα τελειώσει.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το ερευνητικό ερώτημα που αντιμετωπίζεται στην παρούσα εργασία είναι πως το διαφορετικό πλαίσιο των σεναρίων επηρεάζει την αντίληψη των καθηγητών για το άπειρο. Η ευρύτερη έρευνα, μέρος της οποίας παρουσιάζεται σε αυτή την εργασία, αποτελεί πολλαπλή μελέτη περίπτωσης. Συγκεκριμένα, διερευνώνται οι αντιλήψεις για το άπειρο δέκα εν ενεργεία καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με ποικίλη διδακτική εμπειρία οι οποίοι κατά τη διάρκεια της έρευνας ήταν φοιτητές σε Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί ενημερώθηκαν για το στόχο της έρευνας, συμφώνησαν να συμμετάσχουν σε αυτή. Στην εργασία αυτή αναλύουμε δύο περιπτώσεις καθηγητών, την Διδώ και τον Σέργιο. Η επιλογή τους έγινε βάση της διαφορετικής αντίληψής τους στο δεύτερο σενάριο και της προσέγγισής τους στις άπειρες διαδικασίες.

Το ερευνητικό εργαλείο αποτελείται από δύο έργα, υπό τη μορφή υποθετικών σεναρίων, τα οποία βασίζονται σε ευρήματα σχετικών ερευνών, καθώς και στην εμπειρία της διδασκαλίας και της μάθησης των σειρών πραγματικών αριθμών. Στόχος ήταν, μέσα από την εμπλοκή των συμμετεχόντων στον εντοπισμό και σχολιασμό των παρανοήσεων των φοιτητών των σεναρίων, να διερευνηθούν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το άπειρο.

Έργο 1

Δίνεται το παρακάτω υποθετικό σενάριο:

«Ζητήθηκε από δύο φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος να υπολογίσουν το άπειρο άθροισμα $\frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \ldots$ *. Οι δύο φοιτητές σκέφτηκαν λίγο και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:*

Φοιτ. Α*: Αυτή είναι η άπειρη γεωμετρική σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}$*, η οποία συγκλίνει, επειδή* $|\frac{1}{9}| < 1$*. Σωστά;* ***Φοιτ. Β:*** *Ναι, άρα το άπειρο άθροισμα συγκλίνει στο* $\frac{1}{8}$*.* ***Φοιτ. Α:*** *Όχι, είναι ίσο με* $\frac{1}{8}$*.* ***Φοιτ. Β:*** *Δεν μπορεί να γίνει ίσο με* $\frac{1}{8}$*, λόγω του ότι είναι άπειρο άθροισμα, όσο προσθέτουμε όρους συνεχώς αυξάνεται. Άρα, θα* *συγκλίνει στο* $\frac{1}{8}$. ***Φοιτ.Α:*** *Συνεχώς αυξάνεται, αλλά όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία θα ισούται με* $\frac{1}{8}$. ***Φοιτ. Β****: Στο άπειρο άθροισμα η διαδικασία είναι άπειρη. Δεν τελειώνει ποτέ. Άρα, αυτό δεν μπορεί να ισούται με έναν αριθμό αλλά τον πλησιάζει συνεχώς, οσοδήποτε κοντά. Επομένως, τείνει στον αριθμό.»*

Ερωτήσεις:

α) Θεωρείτε ότι μια από τις δύο παραπάνω απόψεις είναι σωστή; Δικαιολογείστε την απάντηση σας. β) Αν θεωρείτε ότι και οι δύο απόψεις είναι λανθασμένες, ποια νομίζετε ότι είναι η σωστή απάντηση; Δικαιολογείστε την απάντηση σας. γ) Για τον φοιτητή ή τους φοιτητές που θεωρείτε λάθος την απάντηση τους, ποια πιστεύετε ότι είναι η παρανόηση που τους οδήγησε στην απάντηση αυτή;

Το πρώτο σενάριο βασίζεται στην τυπική μαθηματική γνώση σχετικά με τη σειρά καθώς και στο ότι η ορολογία που χρησιμοποιείται στις σειρές μπορεί να προκαλέσει σύγχυση. Όπως επισημαίνει ο Spivak (2008, p.389), ο τρόπος με τον οποίο αναφερόμαστε στις σειρές, δηλαδή «ότι η σειρά μπορεί να είναι συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα», είναι ιδιάζων, επειδή το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δηλώνει το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της (a_n) όταν αυτή συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, δηλαδή δηλώνει έναν αριθμό (οπότε δεν μπορεί να συγκλίνει).

Έργο 2

Δίνεται το παρακάτω υποθετικό σενάριο:

«Σε τρεις φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα: Έστω ότι κάνετε το ακόλουθο νοητικό πείραμα με διάρκεια ακριβώς 1 λεπτό. Υποθέτουμε ότι έχετε άπειρες μπάλες αριθμημένες 1, 2, 3, . . . και τις τοποθετείτε σε ένα καλάθι με την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά, τοποθετείτε τις πρώτες 10 μπάλες στο κουτί και στη συνέχεια αφαιρείτε τη μπάλα νούμερο 1 σε 30 δευτερόλεπτα. Έπειτα, στο μισό του υπολειπόμενου χρόνου, τοποθετείτε στο κουτί τις μπάλες με νούμερο από 11 έως 20 και αφαιρείτε τη μπάλα νούμερο 2. Στη συνέχεια, στο μισό του υπολειπόμενου χρόνου (και με πιο γρήγορες κινήσεις), τοποθετείτε στο κουτί τις μπάλες με νούμερα 21 έως 30 και αφαιρείτε τη μπάλα νούμερο 3, με τη διαδικασία αυτή να συνεχίζεται. Μετά από 60 δευτερόλεπτα, στο τέλος του πειράματος, πόσες μπάλες θα υπάρχουν στο καλάθι;» Οι τρεις φοιτητές σκέφτηκαν το πρόβλημα και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Φοιτ. Α: *Νομίζω ότι στο τέλος του πειράματος, θα υπάρχουν άπειρες μπάλες στο καλάθι, γιατί αυτές που βάζουμε κάθε φορά είναι περισσότερες από αυτές που βγάζουμε. Για την ακρίβεια, σε κάθε βήμα αυτής της διαδικασίας βάζουμε στο καλάθι 10 μπάλες και αφαιρούμε 1, δηλαδή ουσιαστικά προσθέτουμε 9 μπάλες. Επειδή, τα βήματα της διαδικασίας είναι άπειρα μετά από 60 δευτερόλεπτα θα έχουμε άπειρες μπάλες.* ***Φοιτ. Β:*** *Αυτό που λες ισχύει αλλά δεν σημαίνει ότι στο τέλος μένουν άπειρες. Σκέφτομαι μήπως τελικά μείνει άδειο το καλάθι.* ***Φοιτ. Α:***

Δε μου φαίνεται δυνατό να είναι άδειο. Πώς το σκέφτεσαι; ***Φοιτ. Β:*** *Σκέφτομαι ότι πρώτα θα βγάλουμε τη μπάλα με νούμερο 1, μετά τη μπάλα με νούμερο 2 και τελικά θα βγάλουμε όλες τις μπάλες.* ***Φοιτ. Γ:*** *Μήπως, επειδή το πείραμα έχει άπειρα βήματα δεν θα ολοκληρωθεί;*»

Ερωτήσεις:

α) Θεωρείτε ότι μια από τις τρεις παραπάνω απόψεις είναι σωστή; Δικαιολογείστε την απάντηση σας. β) Αν θεωρείτε ότι και οι τρεις απόψεις είναι λανθασμένες, ποια νομίζετε ότι είναι η σωστή απάντηση; Δικαιολογείστε την απάντηση σας. γ) Για τον φοιτητή ή τους φοιτητές που θεωρείτε λάθος την απάντηση τους, ποια πιστεύετε ότι είναι η παρανόηση που τους οδήγησε στην απάντηση αυτή;

Το δεύτερο σενάριο είναι βασισμένο σε μια εκδοχή του παράδοξου Ping-Pong Ball (Mamolo & Zazkis, 2008), το οποίο προωθεί ένα μη-τυπικό πλαίσιο εμπλέκοντας περισσότερες από μια άπειρες διαδικασίες. Ειδικότερα, αναφέρεται σε μια άπειρη διαδικασία που ολοκληρώνεται σε πεπερασμένο χρόνο και ο χρόνος χωρίζεται σε μια ακολουθία (δ_n) χρονικών διαστημάτων. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ότι όταν συμπληρωθούν τα 60 δευτερόλεπτα το καλάθι θα μείνει κενό, γιατί η μπάλα με αριθμό *n* θα εξαχθεί στο δ_n χρονικό διάστημα.

Τα δεδομένα της έρευνας αποτελούνται από τις γραπτές απαντήσεις των εκπαιδευτικών στα δύο έργα και από τις απογνητοφωνήσεις των ημι-δομημένων συνεντεύξεων με τον κάθε εκπαιδευτικό. Στις συνεντεύξεις, οι οποίες διήρκησαν περίπου μια και μισή ώρα και μαγνητοσκοπήθηκαν με τη συγκατάθεση των συμμετεχόντων, οι εκπαιδευτικοί αιτιολόγησαν τις γραπτές τους απαντήσεις και ανάπτυξαν το συλλογισμό τους. Κατά την ανάλυση δεδομένων, αναλύθηκαν οι γραπτές απαντήσεις των εκπαιδευτικών και αναγνωρίστηκαν λέξεις-κλειδιά που να φανερώνουν την αντίληψη τους για το άπειρο. Στα ευρήματα αυτά βασίστηκαν οι συνεντεύξεις που ακολούθησαν, οι οποίες στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν και αναλύθηκαν.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρακάτω παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις εκπαιδευτικών, της Διδώς και του Σέργιου.

Η περίπτωση της Διδώς

Η Διδώ στη γραπτή της απάντηση για το πρώτο σενάριο, σχολίασε τα επιχειρήματα των φοιτητών χωρίς όμως να δηλώσει με ποιόν συμφωνεί και εστίασε στη σημασία του ορίου.

> «[Ο Φοιτητής Β] Βλέπει το όριο σαν μια διαδικασία η οποία δεν σταματά ποτέ (δυνητικά), ενώ το όριο αποτελεί το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας και ουσιαστικά έναν αριθμό.[…] Ο Φοιτητής Α αντιμετωπίζει το όριο ως μια

> πεπερασμένη διαδικασία η οποία όταν τελειώσει μας δίνει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα.»

Έπειτα, σχολιάζοντας τη θέση του Φοιτητή Α για την ολοκλήρωση της διαδικασίας, έγραψε ότι «Με μπερδεύει πιο πολύ. Συνεχώς αυξάνεται αλλά η διαδικασία θα ολοκληρωθεί; Με ποιον τρόπο θα συμβεί αυτό;»

Κατά τη συνέντευξη, διευκρίνισε ότι συμφωνεί με την ισότητα της σειράς λέγοντας «Το άθροισμα είναι ίσο με $\frac{1}{8}$», αλλά στη συνέχεια αμφιταλαντεύτηκε

> «Η σειρά είναι μια ακολουθία. […]. Αλλά όταν θέλω να δω αν είναι ίση με κάτι θέλω να δω αν έχει ένα όριο, γιατί το βλέπω σαν μια ακολουθία. […] Άρα, αν υπάρχουν άπειροι όροι που είναι κοντά σε έναν αριθμό, ναι θα συγκλίνει.»

Έτσι, φαίνεται η προσέγγιση της σειράς ως ακολουθία, να ενισχύει την εν δυνάμει αντίληψη και να οδηγεί στην αμφισβήτηση της ισότητας της σειράς.

Ακόμη, διακρίνει το πεπερασμένο άθροισμα από τη σειρά σημειώνοντας ότι:

> «[Το πεπερασμένο άθροισμα] Νιώθω ότι είναι πράγμα και το άλλο [τη σειρά] δεν το βλέπω σαν πράγμα.[…] Μάλλον το βλέπω σαν διαδικασία εν τέλει, όχι σαν κάτι ολοκληρωμένο. […] Ίση είναι [η σειρά] αλλά όχι με αυτόν τον τρόπο [το πεπερασμένο άθροισμα]. […] Μη προσπαθήσεις να με πείσεις ότι η σειρά συγκλίνει. Δεν συγκλίνει. […] Μπορώ να πω ότι θα ισούται, αλλά επειδή δεν μπορώ να το δω, δεν μπορώ να το καταλάβω με τον ίδιο τρόπο όπως το 2 +3.»

Τέλος, σχολιάζοντας τη θέση του Φοιτητή Α για την ολοκλήρωση της διαδικασίας αναφέρει ότι την σχετίζει με την ύπαρξη τέλους, τονίζοντας ότι:

> «Γι’ αυτό με μπερδεύει. […] ή θα πρέπει να το βλέπεις σαν τελειωμένη διαδικασία, που δεν καταλαβαίνω τι σημαίνει “τελειωμένη διαδικασία” ή μία διαδικασία η οποία θα γίνεται συνεχώς και δεν τερματίζει.»

Έτσι, φαίνεται η αντίληψή της να είναι μεταξύ της εν ενέργεια λόγω της θέσης της για την ισότητα της σειράς βασισμένη στην τυπική γνώση της, και της εν δυνάμει γιατί αδυνατεί να προσεγγίσει τη σειρά ως ολοκληρωμένη ολότητα.

Όσον αφορά στο δεύτερο σενάριο, η Διδώ στη γραπτή της απάντηση θεωρεί ότι το κουτί θα μείνει άδειο, στηριζόμενη στην πληθικότητα των συνόλων, επειδή, όπως έγραψε, «τα σύνολα Α = 10ν και Β = ν μπορούμε να βρούμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Β και σύνολο τιμών το Α, 1-1 και επί». Αν και τα σύνολα που αναφέρει (με λανθασμένο συμβολισμό) είναι ισοπληθικά, από αυτά δεν προκύπτει ότι το καλάθι θα μείνει άδειο.

Κατά τη συνέντευξη, επισήμανε ότι η σειρά αφαίρεσης των μπαλών δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα («Δεν νομίζω ότι παίζει ρόλο η σειρά […] αν θα βγάλω τη 2η ή την 4η.»), με συνέπεια να παραβλέπει το στοιχείο εκείνο που παραπέμπει στην αντιστοιχία μεταξύ των διαστημάτων χρόνου και των εξαγόμενων μπαλών στην οποία στηρίζεται το άδειο καλάθι.

Στη συνέχεια όμως αμφισβήτησε την ολοκλήρωση του πειράματος στο δοσμένο πεπερασμένο χρόνο λέγοντας ότι:

> «Δεν είναι ολοκλήρωση με την έννοια του τέλους, αλλά δεν σημαίνει ότι δεν μπορώ να βγάλω απάντηση. […] Το πείραμα δεν θα ολοκληρωθεί. […] Παρόλα αυτά εγώ μπορώ να πω ότι τείνει στο 0 αυτό, η διαδικασία, το πέρας του χρόνου.»

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, η Διδώ παρουσιάζει ενδιάμεση αντίληψη εκφράζοντας την εν δυνάμει, λόγω της θέσης της για τη μη ολοκλήρωση του πειράματος και την εν ενεργεία υποστηρίζοντας την ύπαρξη αποτελέσματος της άπειρης διαδικασίας της εισαγωγής-εξαγωγής μπαλών.

Η περίπτωση του Σέργιου

Στις γραπτές απαντήσεις στο πρώτο σενάριο, ο Σέργιος διαφωνεί και με τους δύο φοιτητές, επειδή υπολόγισε τα μερικά αθροίσματα της σειράς ξεκινώντας από k=0. Έτσι, έγραψε ότι $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{9^{\kappa}}=\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}$ και $\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{1}{9^{\kappa}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{9^{\kappa}}\right)=\frac{9}{8}$ και συμπέρανε ότι «αυτή η γεωμετρική σειρά με α = $\frac{1}{9}$, όπου | α | <1, είναι συγκλίνουσα». Σχετικά με την απάντηση του Φοιτητή Β, ανάφερε «Εσφαλμένος υπολογισμός, πιθανόν από απροσεξία ή δεν θυμόταν σωστά τον τύπο». Την απάντηση του Φοιτητή Α την σχολίασε ως εξής:

> «Θεωρεί ότι η διαδικασία θα ολοκληρωθεί και ότι το άπειρο άθροισμα είναι ίσο με $\frac{1}{8}$, γεγονός που φανερώνει ότι δεν έχει κατανοήσει πως το άπειρο άθροισμα είναι το όριο μιας ακολουθίας μερικών αθροισμάτων.»

Κατά τη συνέντευξη, έγινε σαφές ότι η σειρά ξεκινάει από το k = 1 με αποτέλεσμα το $\frac{1}{8}$. Στη συνέχεια, σχολιάζοντας τον Φοιτητή Α, ανέφερε «…Με ενόχλησε το ότι αφενός έλεγε συγκλίνει και μετά έλεγε ίσο.». Ερωτώμενος για το αν συμφωνεί με τον Φοιτητή Β, ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος

Σέργιος: Με έχεις προβληματίσει. Εγώ λέω ότι συγκλίνει. …εν τέλει τα μερικά αθροίσματα συγκλίνουν στην τιμή $\frac{1}{8}$. Είναι σύγκλιση. Δεν είναι ίσο. Δεν είναι μία άλλη αναπαράσταση του $\frac{1}{8}$ αυτό.

Ερευνήτρια: ΟΚ. Η σειρά τι κάνει;

Σέργιος: Η σειρά, εννοείς το άπειρο άθροισμα, είναι το όριο μερικών αθροισμάτων.

Ερευνήτρια: Άρα η σειρά ισούται ή συγκλίνει με το $\frac{1}{8}$;

Σέργιος: Ισούται με την τιμή που συγκλίνει… Ωραία, ισούται με $\frac{1}{8}$. Δεν ξέρω, έχω ανάμεικτα συναισθήματα, γιατί φάσκω και αντιφάσκω…

Έπειτα, όταν ρωτήθηκε αν διαφωνεί και με τους δύο φοιτητές, απάντησε ότι:

«Διαφωνώ και με τους δύο με τη στάση τους ως προς την ολοκλήρωση της διαδικασίας. Ο ένας λέει όταν ολοκληρωθεί, αλλά δεν θα ολοκληρωθεί ποτέ και ο άλλος λέει ότι επειδή δεν θα ολοκληρωθεί ότι δεν μπορώ να αποφασίσω… δεν παίρνω το μέρος του Α, αλλά ούτε παίρνω το μέρος του Β…Αποδεχόμαστε ότι αν είχαμε άπειρο χρόνο, θα έκανε $\frac{1}{8}$. Αν σταματήσεις κάπου… τότε είσαι κοντά στο $\frac{1}{8}$, αλλά δεν το έφτασες... Αν δεν σταματήσεις θα κάνει $\frac{1}{8}$».

Έτσι, παρατηρείται ότι ο εκπαιδευτικός δεν είναι βέβαιος για την ισότητα ή τη σύγκλιση της σειράς με την τιμή. Επιπλέον, θέτει τη διάσταση του χρόνου και θεωρεί ότι το άπειρο άθροισμα θα ισούται με την τιμή σε άπειρο χρόνο.

Επομένως, φαίνεται η αντίληψη του Σέργιου να βρίσκεται ανάμεσα στην εν ενέργεια υποστηρίζοντας την ισότητα της σειράς στηριζόμενος στην πρότερη τυπική γνώση του, και στην εν δυνάμει, αφού δεν προσεγγίζει την άπειρη διαδικασία ως ολοκληρωμένη ολότητα.

Αναφορικά με το δεύτερο σενάριο, ο Σέργιος στις γραπτές του απαντήσεις το συνέδεσε με το παράδοξο του Ζήνωνα και έγραψε «Τείνω να συμφωνήσω με τον Α» ενώ ανέφερε ότι «… αλλά τι συμβαίνει στο πέρας δεν θεωρώ πως μπορούμε να αποφανθούμε.».

Κατά τη συνέντευξη, σημείωσε ότι :

«Εκεί διαφωνώ, στα αν θα φτάσει στο τέλος. Οπότε, δεν ξέρω αν μπορείς να μιλάς για το τέλος του πειράματος … Έχουμε δύο χρόνους. Τον χρόνο που βιώνει αυτός που είναι μέσα στο πείραμα και αυτός που το παρατηρεί. Αυτός που είναι μέσα στο πείραμα θα έχει πάντα το μισό του υπολειπόμενου του χρόνου. Δεν θα σταματήσει… αυτός που είναι μέσα στο πείραμα θα τείνει να έχει άπειρες μπάλες, γιατί συνεχώς κρατάει όλο και περισσότερες στα χέρια του [εννοεί στο καλάθι] αλλά δεν μπορώ να πω με σιγουριά ότι όταν [το πείραμα] φτάσει στο τέλος, γιατί δεν θα φτάσει.»

Επομένως, σημειώνει ότι το άπειρο άθροισμα των χρονικών διαστημάτων δεν πρόκειται να ολοκληρωθεί παρόλο που δίνεται πεπερασμένος χρόνος για την ολοκλήρωση του πειράματος. Επιπλέον, υποστηρίζει ότι η διαδικασία της εισαγωγής και αφαίρεσης μπαλών δεν μπορεί να εξάγει αποτέλεσμα, λόγω ότι η διαδικασία είναι ατελής. Καταλήγοντας, αφού ερωτήθηκε, δήλωσε ότι τελικά υποστηρίζει το συλλογισμό του Φοιτητή Γ, εκφράζοντας έτσι την εν δυνάμει αντίληψη για το άπειρο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την παραπάνω ανάλυση, προκύπτει η αντίληψη των εκπαιδευτικών για το άπειρο. Παρόλο που η βιβλιογραφία αναφέρει ότι το άπειρο γίνεται αντιληπτό είτε ως εν δυνάμει είτε ως εν ενεργεία (Dubinsky et al., 2005a), φαίνεται να εκφράζεται μια ενδιάμεση αντίληψη μεταξύ των δύο, όπως και στο ενδιάμεσο στάδιο των Dubinsky et al. (2013). Σε αυτήν συνυπάρχουν στοιχεία της εν δυνάμει και της εν ενεργεία αντίληψης.

Οι εκπαιδευτικοί εξέφρασαν διαφορετικές αντιλήψεις στα δύο σενάρια. Στο πρώτο, η αντίληψη των δύο εκπαιδευτικών είναι μεταξύ της εν δυνάμει και της εν ενεργεία, κατανοώντας τη σειρά ως ολότητα αλλά όχι ολοκληρωμένη ολότητα. Ωστόσο, στο δεύτερο διαφοροποιήθηκαν, με την Διδώ να εκφράζει την ενδιάμεση αντίληψη, ενώ ο Σέργιος την εν δυνάμει. Ειδικότερα, η Διδώ φαίνεται να κατανοεί την ισότητα της σειράς, υποστηρίζοντας την ύπαρξη αποτελέσματος της άπειρης διαδικασίας και την εν ενεργεία αντίληψη. Ωστόσο, η λανθασμένη θεώρηση της σειράς ως ακολουθία, ενίσχυσε την εν δυνάμει αντίληψη. Ο Σέργιος υποστηρίζει την ισότητα της σειράς, επηρεασμένος από τη τυπική του γνώση, ωστόσο θεωρεί ότι η διαδικασία δεν ολοκληρώνεται, βασικό στοιχείο της εν δυνάμει αντίληψης.

Στο δεύτερο σενάριο, το πλαίσιο της παραδοξότητας φαίνεται να επηρεάζει την αντίληψη των εκπαιδευτικών. Σημειώνεται, ότι ειδοποιός διαφορά των δύο περιπτώσεων είναι η προσέγγισή τους για την ύπαρξη αποτελέσματος της άπειρης διαδικασίας και ο τρόπος με τον οποίο διαχειρίστηκαν τις άπειρες διαδικασίες. Η Διδώ, αν και θεωρεί ότι το πείραμα δεν ολοκληρώνεται λόγω του άπειρου χρόνου, υποστηρίζει την εξαγωγή αποτελέσματος μιας άπειρης διαδικασίας, στηρίζοντας όμως λανθασμένα την απάντησή της στην ισοπληθικότητα των δύο άπειρων συνόλων. Αντιθέτως, ο Σέργιος εστιάζει στην ατελή διαδικασία ταυτίζοντάς την με την απειρία του πλήθους των χρονικών διαστημάτων, παραβλέποντας τον συνολικό πεπερασμένο χρόνο. Έτσι, παρατηρείται ότι στις σειρές, που το πλαίσιο ενθάρρυνε την ανάκληση τυπικής μαθηματικής γνώσης, ο Σέργιος μπόρεσε να υποστηρίξει την ύπαρξη αποτελέσματος ενώ στο πλαίσιο της παραδοξότητας, όπου δεν είναι προφανής η αναγκαία μαθηματική γνώση για την επίλυση του, δεν επετεύχθη αυτό.

Από τα παραπάνω ευρήματα αναδεικνύεται ο ρόλος του πλαισίου της δραστηριότητας και της πρότερης μαθηματικής γνώση στην αντίληψη των εκπαιδευτικών για το άπειρο. Η εφαρμογή τέτοιου τύπου έργων σε προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών και η επίδραση της στη γνώση του περιεχομένου προτείνεται για περαιτέρω έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of $0.\bar{9}$ and 1. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13(3), 232–258.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: Part 1. Educational Studies in Mathematics, 58(3), 335–359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. Educational Studies in Mathematics, 60(2), 253–266.

Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, C., & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The tennis ball problem. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 1(1), 99–121.

Kolar, V., & Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. Educational Studies in Mathematics, 80(3), 389–412.

Mamolo, A. (2014). How to act? A question of encapsulating infinity. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14(1), 1–22.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. Research in Mathematics Education, 10(2), 167–182.

Montes, M., Carrillo, J., & Ribeiro, C. (2014). Teachers' Knowledge of Infinity, and Its Role in Classroom Practice. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36. Vol. 4, pp. 234–241. Vancouver, Canada: PME.

Spivak, M. (1967). Calculus. W. A. Benjamin.

Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΕΥΡΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Μουσαδάκου Δήμητρα

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

mousa.dim@outlook.com

Η παρούσα μελέτη ασχολείται με τις ευρετικές και μεταγνωστικές στρατηγικές που αναπτύσσουν μαθήτριες Α' Λυκείου κατά την επίλυση ενός ανοικτού, ρεαλιστικού προβλήματος, που αφορά την έννοια της ακολουθίας, αλλά και με τους παράγοντες που τις επηρεάζουν θετικά. Τα ευρήματα αναδεικνύουν ότι οι μαθήτριες αναπτύσσουν αρκετές ευρετικές στρατηγικές, ενώ παράλληλα ελέγχουν τα αποτελέσματά τους αναπτύσσοντας μια σημαντική μεταγνωστική στρατηγική, η οποία σύμφωνα και με προηγούμενες έρευνες έχει παρατηρηθεί ότι αγνοείται από τους μαθητές. Ακόμη, διαπιστώνεται ότι αρκετοί παράγοντες, όπως η συνεργασία, τις επηρεάζουν θετικά κατά την επίλυση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί την τελευταία δεκαετία εστία ενδιαφέροντος και μελέτης στη διδακτική των μαθηματικών. Σύμφωνα με τους Alexander και Winne (2012), η επίλυση προβλήματος ορίζεται ως η γνωστική διαδικασία που επικεντρώνεται στη μετατροπή μιας δεδομένης κατάστασης σε μία κατάσταση που δεν υπάρχει προφανής διαθέσιμη μέθοδος λύσης. Τα αυθεντικά-ρεαλιστικά προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση για την εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών (Chapman, 2007) μέσα από την ερμηνεία του πραγματικού κόσμου και να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τη δημιουργική και κριτική τους σκέψη κατά την επίλυσή. Με αυτόν τον τρόπο παράλληλα, συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά είναι ένα προσιτό εργαλείο που τους βοηθάει να διαχειριστούν και να επιλύσουν με καλύτερο τρόπο προβλήματα της καθημερινότητας. Έτσι, καταρρίπτεται και η άποψη που επικρατεί σύμφωνα και με τους De Corte et al (1997), ότι τα μαθηματικά της τάξης είναι τυποποιημένα, μη – διαπραγματεύσιμα και ασύνδετα με τον έξω κόσμο. Παρόλα αυτά, έχει παρατηρηθεί ότι τόσο οι μαθητές όσο και οι ίδιοι οι δάσκαλοι, δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά ως διαδικασία μαθηματικοποίησης της πραγματικότητας (Βρυώνης & Μπαραλής, 2015). Αυτό τεκμηριώνεται άλλωστε και από τα αποτελέσματα της PISA (2003), όπου μόνο το 20% των 15χρονών μαθητών μπορεί να θεωρηθούν ως ικανοί λύτες προβλημάτων (OECD, 2004).

Ωστόσο η χρήση διαφορετικών-δημιουργικών προσεγγίσεων, όπως η χρήση ανοικτών προβλημάτων, ίσως να μπορούσε να συμβάλλει στην αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών. Ένα ανοιχτό πρόβλημα ορίζεται ως ένα πρόβλημα που είτε υποστηρίζει την επίλυσή του με πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις είτε είναι ανοιχτό σε πολλές διαφορετικές λύσεις (Sullivan, 2003). Η ύπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει την ευκαιρία στον κάθε μαθητή να ανταποκριθεί στο πρόβλημα αναπτύσσοντας διάφορες στρατηγικές επίλυσης, εργαζόμενος με το δικό του τρόπο και να εργαστεί στο δικό του επίπεδο, είτε ξεχωρίζει στα μαθηματικά είτε όχι.

Στην παρούσα έρευνα θα μελετηθεί η χρήση στρατηγικών που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός ανοιχτού ρεαλιστικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, θέτονται τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

ΕΕ1: Τι είδους στρατηγικές αναπτύξαν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος;

ΕΕ2: Ποιοι παράγοντες επηρέασαν θετικά τους μαθητές στη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στη μαθηματική εκπαίδευση και συγκεκριμένα στα σχολικά βιβλία παρατηρείται ότι δίνεται έμφαση σε κλειστού τύπου προβλήματα, με αποτέλεσμα να προωθείται η «συγκλίνουσα σκέψη», καθώς οι μαθητές απομνημονεύουν κανόνες και τους εφαρμόζουν σε προβλήματα για να βρουν μια μοναδική λύση. Άμεσο επακόλουθο αυτού είναι να απομακρύνονται από την εξερεύνηση διαφορετικών ιδεών και ίσως και από τα ίδια τα μαθηματικά. Από την άλλη πλευρά, η ενασχόληση των μαθητών με ανοικτά προβλήματα συμβάλλει στη διερεύνηση, στη γενίκευση, στην αναζήτηση μοτίβων αλλά και στον εντοπισμό εναλλακτικών λύσεων (Sullivan et al, 2000). Στο πλαίσιο αναζήτησης διαφορετικών λύσεων και διαφορετικών προσεγγίσεων, οι μαθητές μπορούν να προωθήσουν πολλές ιδέες ελεύθερα (ευχέρεια), να κάνουν προσπάθειες για να σχεδιάσουν νέες στρατηγικές για την αντιμετώπιση του προβλήματος όταν οι προηγούμενες δεν είχαν επιφέρει κάποιο αποτέλεσμα (ευελιξία) και να σκεφτούν απροσδόκητες ιδέες (πρωτοτυπία) (Κόσυβας, 1996). Ακόμη σύμφωνα και με τους Polya (2004) και Schoenfeld (1985) στη διδασκαλία των μαθηματικών η λύση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις συνδέεται με τη βαθύτερη κατανόηση και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού. Ωστόσο, και η ενασχόληση με τα μοτίβα, επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα, συμβάλλει επίσης στην ανάπτυξη τόσο του μαθηματικού συλλογισμού των παιδιών όσο και της αλγεβρικής τους σκέψης (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Σημείο αναφοράς στην επίλυση προβλημάτων αποτέλεσε το έργο του Polya (2004) το οποίο έδωσε το έναυσμα σε πολλούς ερευνητές να μελετήσουν την επίλυση προβλημάτων. Ο Polya (2004) σημείωσε ότι υπάρχουν αρκετές βασικές ευρετικές στρατηγικές, η χρήση των οποίων την κατάλληλη στιγμή οδηγεί στην επιτυχή επίλυση. Συγκεκριμένα αυτές είναι: α) η κατασκευή σχήματος , β) η απλοποίηση προβλήματος, γ) η εύρεση μοτίβου, δ) ο πειραματισμός- η παρατήρηση, ε) η αντίστροφη πορεία, στ) η διατύπωση και ο έλεγχος μιας υπόθεσης ζ) η εύρεση μιας εξίσωσης κ.ά. Ο Schoenfeld (1985) επισημαίνει ότι η επίλυση προβλήματος συνδέεται τόσο από γνωστικής φύσης διαδικασίες, όπως η χρήση αναπαραστάσεων και η αναδιατύπωση του προβλήματος, όσο και από μεταγνωστικές φύσης διαδικασίες, όπως η παρακολούθηση και η αξιολόγηση των αποφάσεων σχετικά με την επιλογή και την χρήση των κατάλληλων πηγών και στρατηγικών. Ειδικότερα, η μεταγνώση είναι ένα μέσο με τη βοήθεια του οποίου ο μαθητής μπορεί να αξιολογεί την ορθότητα της απάντησης ή της λύσης που έδωσε σε ένα πρόβλημα. Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2007), οι διαδικασίες ελέγχου επιτρέπουν στους μαθητές να αξιολογούν την ορθότητα των αποφάσεων, της λύσης και της απάντησης κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος και να προβαίνουν στις απαραίτητες διορθώσεις εφόσον κάτι τέτοιο είναι αναγκαίο. Πολλοί ερευνητές στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης εργάστηκαν πάνω σε αυτές τις ιδέες και διαπίστωσαν ότι τόσο οι γνωστικές όσο και οι μεταγνωστικές στρατηγικές διαδραματίζουν ουσιαστικό ρόλο στην αποτελεσματική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Garofalo & Lester, 1985).

Εκτός των παραπάνω, σύμφωνα με την Stacey (2005) υπάρχουν και άλλοι παράγοντες πέρα από τις στρατηγικές, οι οποίοι βοηθούν στην επιτυχή επίλυση των προβλημάτων. Συγκεκριμένα, η ουσιαστική μαθηματική γνώση, τα προσωπικά χαρακτηριστικά του μαθητή (όπως η εμπιστοσύνη, η επιμονή και η οργάνωση), η ικανότητα επικοινωνίας και συνεργασίας και οι βοηθητικές πεποιθήσεις είναι ορισμένοι από αυτούς τους παράγοντες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πλαίσιο και δεδομένα

Η πειραματική διδασκαλία πραγματοποιήθηκε σε δύο μαθήτριες της Α' Λυκείου, οι οποίες εργάστηκαν ομαδικά. Η επιλογή των συγκεκριμένων μαθητριών έγινε με βάση την τάξη που βρίσκονται, αλλά και από το γεγονός ότι οι συγκεκριμένες μαθήτριες γνωρίζονται αρκετά χρόνια και έχουν μάθει να δουλεύουν συνεργατικά. Ο χρόνος ενασχόλησης με το πρόβλημα ήταν μία ώρα. Τα ερευνητικά δεδομένα που συλλέχθηκαν είναι οι σημειώσεις των μαθητριών στην προσπάθεια τους να λύσουν το πρόβλημα, αλλά και οι συζητήσεις μεταξύ τους. Για τις ανάγκες της έρευνας, έγινε μαγνητοφώνηση. Επίσης, συλλέχθηκαν στιγμιότυπα της διαδικασίας επίλυσης μέσω φωτογραφιών.

Ανάλυση των δεδομένων

Πραγματοποιήθηκε απομαγνητοφώνηση της συζήτησης. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με βάση το μοντέλο της ανάλυσης περιεχομένου. Συγκεκριμένα, όσο αναφορά τη μελέτη και την διερεύνηση των στρατηγικών που ανέπτυξαν οι μαθήτριες, αυτές κατηγοριοποιήθηκαν σύμφωνα με τις ευρετικές και τις μεταγνωστικές στρατηγικές, σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Schoenfeld. Όσο αναφορά τους παράγοντες που επηρέασαν θετικά τις μαθήτριες στη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος, αυτοί κατηγοριοποιούνται σύμφωνα με την Stacey (2005) σε ουσιαστική μαθηματική γνώση, στις ευρετικές στρατηγικές, στα προσωπικά χαρακτηριστικά των μαθητριών, στην ικανότητα επικοινωνίας και συνεργασίας και στις βοηθητικές πεποιθήσεις.

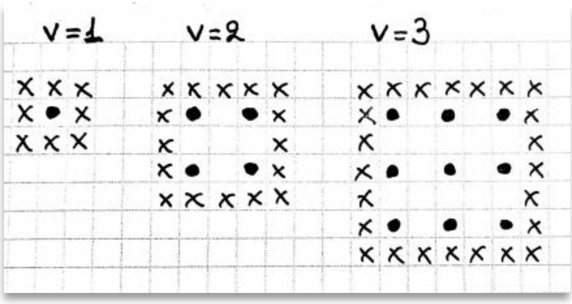
Πρόβλημα

Στις μαθήτριες δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα, το οποίο αφορούσε τη φύτευση δέντρων πορτοκαλιάς και κυπαρισσιού.

Το κτήμα με τις πορτοκαλιές

Ένας αγρότης επιθυμεί να φυτέψει πορτοκαλιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Σκέφτεται να προστατέψει τις πορτοκαλιές από τον αέρα, περιφράζοντάς τις με κυπαρίσσια. Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε τη διάταξη των δέντρων, όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από πορτοκαλιές.

(ν = σειρές από πορτοκαλιές)



Χ= κυπαρίσσι
●= πορτοκαλιά

Ο αγρότης θέλει να φυτέψει ακριβώς το ίδιο πλήθος δέντρων πορτοκαλιάς και κυπαρισσιού. Πόσες σειρές από πορτοκαλιές πρέπει να βάλει;

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κατά τη διάρκεια της επίλυσης του ανοιχτού προβλήματος διαπιστώθηκε ότι οι μαθήτριες ανέπτυξαν τόσο ευρετικές όσο και μεταγνωστικές στρατηγικές. Ειδικότερα, αρχικά και οι δυο πήραν το χρόνο τους διαβάζοντας και ξαναδιαβάζοντας το πρόβλημα, ώστε να γίνει κατανοητό μιας και έδινε αρκετές πληροφορίες, τις οποίες έπρεπε να αξιοποιήσουν, προκειμένου να φτάσουν στην λύση του. Στην προσπάθειά τους, λοιπόν, η μια μαθήτρια προχώρησε στο πρώτο είδος ευρετικής στρατηγικής, δηλαδή ***στον πειραματισμό και στην παρατήρηση***, ενώ η δεύτερη αντιλήφθηκε μετά από αρκετές αναγνώσεις του προβλήματος ότι πρέπει ***να βρουν κάποιο μοτίβο***, δηλαδή άρχισε να αναπτύσσει το δεύτερο είδος ευρετικής στρατηγικής. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 1, η Μ2 αποφάσισε να πειραματιστεί με τα δεδομένα του προβλήματος και ειδικότερα εκμεταλλευόμενη το διάγραμμα που της είχε δοθεί σε ένα τετραγωνισμένο φύλλο χαρτί συνέχισε να σχεδιάζει τις πορτοκαλιές και τα κυπαρίσσια που θα υπήρχαν σε τέσσερις σειρές από πορτοκαλιές, προκειμένου να δει πόσα θα χρειαστούν. Την ίδια στιγμή, η συμμαθητριά της Μ1 επισήμανε ότι οι πορτοκαλιές και τα κυπαρίσσια αυξάνονται με βάση κάποιο μοτίβο.

Απόσπασμα 1

Μ2: Εγώ θα συνεχίσω το διάγραμμα ανάλογα να δω τι γίνεται.

Μ1: Λοιπόν εγώ σκέφτομαι ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο μοτίβο εδώ.

Ακολούθως η Μ2, κατά την διάρκεια που η Μ1 σχεδίαζε το διάγραμμα αντιλήφθηκε ότι το πλήθος των δέντρων πορτοκαλιάς ισούται κάθε φορά με το τετράγωνο της σειράς από πορτοκαλιές, κάτι το οποίο επιβεβαίωσε στη συνέχεια και η συμμαθήτρια της με βάση το διάγραμμα το οποίο είχε φτιάξει, όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 2.

Απόσπασμα 2

Μ1: Στην 4η σειρά θα έχουμε 4^2 δηλαδή 16 πορτοκαλιές.. έτσι όπως το σκέφτηκα εγώ.

Μ2: Κάτσε κάτσε και εγώ τόσο βρίσκω εδώ αν μετρήσεις έχουμε 16 πορτοκαλιές.

Μ1: Άρα σωστό!!οι πορτοκαλιές είναι $ν^2$.

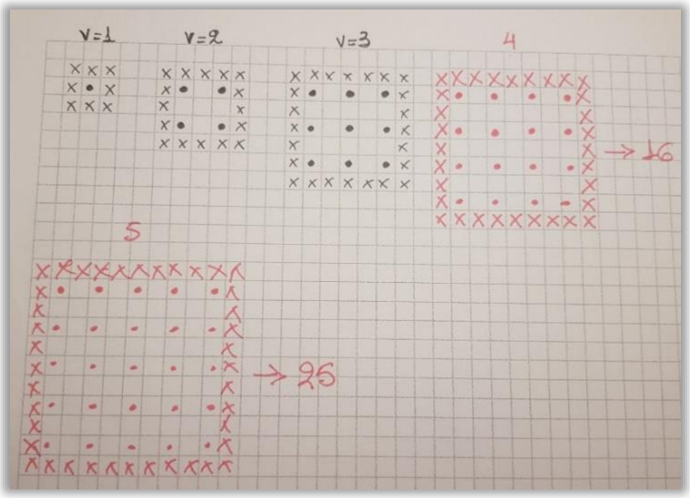
Μ2: Εμμμ ναι άρα λογικά για την 5η σειρά πρέπει να μας βγαίνει 5 επι 5.. 25.. Θες να το ελέγξουμε κιόλας; Να συνεχίσω δηλαδή αυτό που έκανα;

Μ1: Νομίζω σωστό είναι.. Κυρία είναι σωστό αυτό που λέμε;

Κ: Δεν ξέρω αν δεν είστε σίγουρες μπορείτε να το ελέγξετε και μόνες σας για να βεβαιωθείτε.

Μ1: Καλά Μ2 για κάνε, αν και είμαι 90% σίγουρη μην σου πω και 95% ότι είναι αυτό.

Ωστόσο, στο σημείο αυτό παρατηρήθηκε ότι οι μαθήτριες ανέπτυξαν και μια μεταγνωστική στρατηγική, καθώς αποφάσισαν ***να ελέγξουν το αποτέλεσμά τους,*** διαπιστώνοντας μέσω της βοήθειας του διαγράμματος ότι πράγματι για 5 σειρές από πορτοκαλιές χρειάζονται 25 κυπαρίσσια, όπως φαίνεται στην εικόνα 1. Στο σημείο αυτό παρατηρήθηκε ότι η Μ1 ήταν αρκετά σίγουρη για τη λύση που έδωσε και είχε εμπιστοσύνη στον εαυτό της, οπότε πολύ πιθανό αν έλυνε μόνη της το πρόβλημα να μην είχε αναπτύξει την συγκεκριμένη μεταγνωστική στρατηγική.



Εικόνα 1

Στη συνέχεια, οι μαθήτριες φάνηκε να δυσκολεύονται στην εύρεση του τύπου για τα κυπαρίσσια. Συγκεκριμένα, η Μ1 επειδή δεν μπήκε στην διαδικασία να μετρήσει ένα-ένα τα κυπαρίσσια, όπως έκανε η Μ2, αλλά μέτρησε το εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος, υπολόγιζε λάθος των αριθμό των κυπαρισσιών για κάθε σειρά από πορτοκαλιές, με αποτέλεσμα να βρίσκεται σε σύγχυση και να μην μπορεί να βρει το σωστό τύπο (απόσπασμα 3). Έτσι με την βοήθεια της Μ2 στην προκειμένη περίπτωση, η Μ1 διαπίστωσε το λάθος της και αμέσως συνειδητοποίησαν ότι το πλήθος κυπαρισσιών είναι οκταπλάσιο κάθε φορά της σειράς από πορτοκαλιές.

Απόσπασμα 3

Μ1: Άρα θα αυξάνεται συνολικά κατά 4.. όχι κατά 8 από το προηγούμενο ..κάτι δεν πάει καλά .. βασικά περίμενε είναι 9 κυπαρίσσια στην πρώτη μετά 5^2 =25 και μετά 49.

Μ2: Συγκεντρώνω μέχρι στιγμής ότι έχουμε βρει γιατί έχω μπερδευτεί.

Μ1: Αα αυξάνεται κατά 24 γιατί 25+24=49..αλλά όχι γιατί 9 +16=25.. άκυρο.. (σκέφτεται) πρέπει να κάνουμε κάτι με ακολουθία τώρα εδώ πέρα.

Μ2: Ρε συ πόσα έχεις βρει εσύ τα κυπαρίσσια στη 1η 2η και 3η σειρά που έλεγες εσύ πριν;

Μ1: 9, 25, 49.

Μ2: Ρε εγώ τα μετράω τώρα εδώ και βρίσκω 8, 16, 24, 32.. κοίτα πχ στο 8 λείπει το μεσαίο (δείχνει το κυκλάκι της πορτοκαλιάς) άρα είναι 8 κυπαρίσσια.

Μ1: Οπα κάτσε έχεις δίκιο.. εγώ τόση ώρα έκανα εμβαδόν.. άρα εσύ έχεις βρει σωστά τα κυπαρίσσια είναι όντως 8 μετά 25-9=16 (αφαιρεί τα κουτάκια που δεν χρειάζονται) 49-25=24.. κάτσε τώρα βγαίνει κάτι καλό εδώ.

Στο απόσπασμα 3 επομένως, διαπιστώνω ότι οι παράγοντες της *ικανότητας επικοινωνίας και συνεργασίας* μεταξύ των μαθητριών βοήθησε τελικά στην επιτυχή εξέλιξη του προβλήματος.

Έπειτα, οι μαθήτριες ανέπτυξαν μια ακόμη ευρετική στρατηγική, καθώς βρήκαν και ***έγραψαν*** την ζητούμενη ***εξίσωση***, δηλαδή $8v=v^2$. Ακολούθως, προχωρώντας και οι δύο μαθήτριες στην επίλυση της εξίσωσης παρατηρήθηκε ότι χρησιμοποίησαν μια τελευταία ευρετική στρατηγική και συγκεκριμένα αυτή της ***εύρεσης εναλλακτικού τρόπου λύσης***, αφού η κάθε μαθήτρια πρότεινε τον δικό της τρόπο, όπως επισημαίνεται και στο απόσπασμα 4.

Απόσπασμα 4

Μ1: Θα διαιρέσουμε με το ν.

Μ2: Γιατί να διαιρέσουμε με το ν.. εγώ άλλο θα έκανα.

Μ1: Για να φύγει από το ένα μέλος και άρα θα έχουμε τη λύση ν=8.

Κ: Μπορείς να διαιρέσεις με το ν;

Μ1 : Ναι γιατί το ν είναι σειρές οπότε δεν γίνεται να είναι 0 άρα μπορώ να κάνω την διαίρεση. Σωστά;

Κ: Οκ.. εσύ Μ2 είπες ότι δεν θα το έλυνες έτσι.. τι θα έκανες δηλαδή;

Μ2 : Θα πήγαινα το 8ν από την άλλη μεριά και άρα θα είχα (γράφει) v^2 -8ν=0 και μετά θα έκανα παραγοντοποίηση.

Τέλος οι μαθήτριες ανέπτυξαν για ακόμη μια φορά την μεταγνωστική στρατηγική του ***ελέγχου του αποτελέσματός τους***, αφού όπως παρατίθεται και στο απόσπασμα 5, βλέπουμε την Μ2 να ελέγχει το αποτέλεσμα πάλι από το διάγραμμα που είχε κατασκευάσει και την Μ1 να δοκιμάζει την τιμή που βρήκαν στους τύπους που έφτιαξαν για το πλήθος δέντρων πορτοκαλιάς και κυπαρισσιών, προκειμένου να επαληθεύσει και να διαπιστώσει την ορθότητα του αποτελέσματος τους.

Απόσπασμα 5

M2: Μπορούμε να το επαληθεύσουμε πάλι και από το σχέδιο, όπως έκανα και πριν για να δούμε αν στην 8η σειρά βγαίνουν ίσα δέντρα.

M1: Καλά όχι αφού το ξεκινήσαμε ας δούμε και αυτό που είπες και εσύ, αλλά μπορούμε πολύ απλά να βάλουμε οπού ν το 8 που βρήκαμε και άρα το χ δηλαδή τα κυπαρίσσια θα είναι 8 επί 8=64 και οι κουκκίδες δηλαδή οι πορτοκαλιές θα είναι 8^2 =64.. άρα έχουμε τον ίδιο αριθμό δέντρων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, διαπιστώθηκε ότι οι μαθήτριες ανέπτυξαν αρκετές ευρετικές στρατηγικές, όπως τον πειραματισμό και την παρατήρηση, την εύρεση μοτίβου, την δημιουργία μιας εξίσωσης και τον εναλλακτικό τρόπο λύσης, αλλά και την μεταγνωστική στρατηγική του ελέγχου του αποτελέσματός τους, οι οποίες συνέλαβαν αποτελεσματικά στην επιτυχή επίλυση του ανοιχτού προβλήματος. Επομένως, ένας από τους παράγοντες που επηρέασαν θετικά τις μαθήτριες κατά την διεκπεραίωση του προβλήματος ήταν το γεγονός ότι διαμόρφωσαν διαφορετικές στρατηγικές την κατάλληλη στιγμή κατά την διάρκεια της επίλυσης τους. Το συγκεκριμένο εύρημα, επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών, όπως των Garofalo & Lester (1985), στα οποία αποδεικνύεται ότι πράγματι η χρήση στρατηγικών βοηθάει τους μαθητές. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη έρευνα παρατηρήθηκε ότι οι μαθήτριες προέβησαν στον έλεγχο του αποτελέσματός τους, κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την έρευνα της Pettersson (1991), όπου είχε συμπεράνει ότι οι μαθητές συχνά αμελούσαν να ελέγξουν την ορθότητα του αποτελέσματός τους και επικεντρώνονταν περισσότερο στην διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος παρά στο να κατανοήσουν το ίδιο το πρόβλημα. Παράλληλα, ένας ακόμη παράγοντας, ο οποίος φάνηκε ιδιαίτερα σημαντικός, ήταν η ικανότητα των μαθητριών να επικοινωνούν μεταξύ τους και κυρίως να συνεργάζονται. Άλλωστε, η κύρια ιδέα της συνεργατικής μάθησης είναι ότι οι μαθητές κατασκευάζουν κοινές γνώσεις, διαπραγματεύονται κοινές έννοιες και επιχειρηματολογούν. Επίσης, αναπτύσσουν αμοιβαία εξήγηση και συλλογιστική, καθώς και χτίζουν νέες συνεργατικές γνώσεις και δημιουργούν κάτι που υπερβαίνει αυτό που μπορεί να πετύχει ο καθένας μόνος του (Stahl, 2006). Με λίγα λόγια, ο παράγοντας της συνεργασίας και της επικοινωνίας έρχεται και σε συμφωνία με προηγούμενη έρευνα των Galton & Williamson (1992), όπου διαπιστώνεται ότι η ομαδική εργασία βελτιώνει τελικά την παρακίνηση των μαθητών όταν ενθαρρύνονται να εργαστούν για ένα κοινό σκοπό, με αποτέλεσμα αυτό να επηρεάζει θετικά και την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Εκτός των παραπάνω παραγόντων, φαίνεται ότι προφανώς και η ουσιαστική μαθηματική γνώση των μαθητριών βοήθησε στην επιτυχή εξέλιξη της επίλυσης του προβλήματος, αφού μετά από αρκετές αναγνώσεις του προβλήματος και έχοντας περάσει το στάδιο κατανόησης του, σύμφωνα με τον Polya, η Μ1 συγκεκριμένα αντιλήφθηκε αρκετά νωρίς ότι πρόκειται για μια ακολουθία. Ωστόσο, αξίζει να αναφερθεί ότι οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν εμπειρική επαγωγή και δεν σκέφτηκαν την ανάγκη να τεκμηριώσουν θεωρητικά τον ισχυρισμό τους για το τυχαίο ν, κάτι το οποίο απαιτείται από μαθητές Α' Λυκείου. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι στους παράγοντες πρέπει να προστεθεί και η επιλογή του ανοικτού προβλήματος. Μέσω της ανάπτυξης διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης, της σύγκρισης των διαφορετικών τρόπων λύσεων που έδωσαν και της συζήτησης που ανέπτυξαν μεταξύ τους πάνω σ' αυτές, ενισχύθηκε η μαθηματική τους σκέψη και γνώση, καθώς και το ενδιαφέρον τους. Άρα, θεωρείται επιτακτική ανάγκη, η επίλυση ανοικτών προβλημάτων να ενσωματωθεί στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στη σχολική εκπαίδευση, καθώς αυτά ενθαρρύνουν ποικίλες σκέψεις, με αποτέλεσμα να ενισχύεται η αποκλίνουσα σκέψη και να προωθείται η βαθιά κατανόηση των μαθητών. Επομένως, μια μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να μελετήσει τα πλεονεκτήματα που αποφέρει η ενασχόληση των μαθητών με ανοικτά προβλήματα, καθώς επίσης και να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με αυτά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alexander, P. A., & Winne, P. H. (2012). *Handbook of educational psychology*. Routledge.

Chapman, O. (2007). Mathematical modelling in high school mathematics: teachers' thinking and practice. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 325-332). Springer, Boston, MA.

Galton, M., & Williamson, J. (1992). Group work in the primary classroom. Routledge.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for research in mathematics education*, *16*(3), 163-176.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

OECD. 2004. Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003. Paris: OECD

Pettersson, A. (1991). Pupils' mathematical performance in grades 3 and 6. A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(5), 439-450.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (No. 246). Princeton university press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando Florida: Academic Press.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 341-350.

Stahl, G. (2006). *Group cognition: Computer support for building collaborative knowledge (acting with technology)*. The MIT Press.

Sullivan, P. A. (2003). The potential of open-ended mathematics tasks for overcoming barriers to learning. In *Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2003* (pp. 813-816). Deakin University.

Sullivan, P., Warren, E., & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics education research journal*, *12*(1), 2-17.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. *Lisse, The Netherlands*, *224*, 224.

Βρυώνης, Ν., Μπαραλής, Γ. (2015). Τα αυθεντικά – ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινής ζωής ως πηγή δημιουργικότητας στη μαθηματική εκπαίδευση. *Πρακτικά 6ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ). σελ. 96-105. Θεσσαλονίκη, Ελλάδα.

Κόσυβας, Γ. (1996), Η πρακτική τον ανοιχτού προβλήματος στο Δημοτικό Σχολείο. Γόνιμος χαρακτήρας και ανατροπή παγιωμένων αντιλήψεων. Αθήνα, Gutenberg.

Τζεκάκη, Μ. (2007). Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα. *Αθήνα: Gutenberg*.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΤΗΣ TIMSS 2019

Παναγή-Λουκά Νεκταρία, Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Χρίστου Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Κύπρου

panagi.nektaria@ucy.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy

Η παρούσα μελέτη επιδιώκει την ανάπτυξη ενός εννοιολογικού πλαισίου που να εξηγεί τους παράγοντες που συμβάλλουν στην επίδοση των Κύπριων μαθητών Δ' Δημοτικού, μέσα από τα αποτελέσματα της TIMSS 2019. Η πολυεπίπεδη ανάλυση έδειξε ότι παράγοντες που αφορούν τον μαθητή, την τάξη και το σχολείο επηρεάζουν τη συνολική επίδοση στα μαθηματικά και τονίζουν τη σημαντικότητα ενίσχυσης διαφόρων παραγόντων για την αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα για την εκπαιδευτική αποτελεσματικότητα (ΕΕΑ) οδήγησε στην ανάπτυξη θεωριών που εξηγούν τις επιδόσεις των μαθητών σε διάφορα θέματα του αναλυτικού προγράμματος (Creemers, Kyriakides & Sammons, 2010; Scheerens, 2016). Παράλληλα, διεθνείς συγκριτικές μελέτες, όπως η TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) επιδιώκουν την αξιολόγηση παραγόντων που συμβάλλουν στη διαμόρφωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων, παρέχοντας δεδομένα για την επίδοση των μαθητών και των παραγόντων που σχετίζονται με τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά (Van Damme, Liu, Vanhee & Pustjens, 2010).

Παρά τη διεξαγωγή πολλών ερευνών στο πλαίσιο της TIMSS (Demosthenous, Christou & Pitta-Pantazi, 2019; Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012) λίγες μελετούν πολυεπίπεδα τις επιδράσεις στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά (Scheerens & Blömeke, 2016). Από τη στιγμή που τα μαθησιακά αποτελέσματα επηρεάζονται από το πλαίσιο μαθητή, τάξης και σχολείου (Creemers & Kyriakides, 2008), η έρευνα εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας πρέπει να εστιάζει στη συνολική διερεύνηση του σχολικού συστήματος (Scheerens & Blomeke, 2016).

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Σε επίπεδο μαθητή, φαίνεται ότι η προηγούμενη ικανότητα στα μαθηματικά (Creemers & Kyriakides, 2008), έχει θετική επίδραση στην επίδοση των μαθητών (Kyriakides, 2005). Επίσης, παράγοντες που αφορούν το υπόβαθρο του μαθητή (Creemers & Kyriakides, 2008) σχετίζονται με την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Οι Sun et al. (2012) έδειξαν ότι τα αγόρια και οι μαθητές από οικογένειες με υψηλή κοινωνικοοικονομική κατάσταση έχουν καλύτερα αποτελέσματα στην επιστήμη.

Ένας άλλος παράγοντας που σχετίζεται με τα μαθησιακά αποτελέσματα είναι το κίνητρο των μαθητών, όπως οι στάσεις και η αυτοπεποίθησή τους για τα μαθηματικά (De Jong et al., 2004), Τα αποτελέσματα της TIMSS 2015 τεκμηριώνουν τη θετική επίδραση της αυτοπεποίθησης των μαθητών για τα μαθηματικά στην επίδοσή τους (Panagi-Louka et al., 2020). Επίσης, ο χρόνος για μάθηση, όπως η συχνότητα απουσίας από το σχολείο (De Jong et al., 2004) και ο χρόνος για ιδιωτική εκπαίδευση (Kyriakides, 2005), και η ευκαιρία για μάθηση που δίνεται στους μαθητές να αποκτήσουν δεξιότητες και γνώσεις (Creemers & Kyriakides, 2008), επηρεάζουν τα μαθησιακά αποτελέσματα.

Σε επίπεδο τάξης, η τυπική μόρφωση και εμπειρία, η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, η επαγγελματική ικανοποίηση και η αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού συμβάλλουν στα μαθησιακά αποτελέσματα (Scheerens, 2016). Φαίνεται ότι η ομοιομορφία στη μόρφωση των εκπαιδευτικών πιθανόν να μη δημιουργεί σημαντικές διαφορές στην επίδοση των μαθητών (Scheerens, 2016), ενώ ο Kyriakides (2005) έδειξε ότι η εμπειρία του εκπαιδευτικού δεν συμβάλλει στα μαθησιακά αποτελέσματα.

Σχετικά με την ποιότητα διδασκαλίας, ο χρόνος και η ευκαιρία για μάθηση αποτελούν παράγοντες που συμβάλλουν στη μάθηση (Scheerens, 1992). Στο πλαίσιο της TIMSS, η ευκαιρία για μάθηση αναφέρεται στα θέματα του αναλυτικού προγράμματος που διδάσκονται (Mullis et al., 2012). Επιπρόσθετα, λόγω του σημαντικού ρόλου του εκπαιδευτικού, λαμβάνονται υπόψη παράγοντες όπως η διαχείριση της διδασκαλίας, η δομή και σαφήνεια του μαθήματος, η ανάθεση κατ’ οίκον εργασίας, η υποβολή ερωτήσεων και η αξιολόγηση (Creemers & Kyriakides, 2008). Ο Scheerens (2016) έδειξε ότι το μεθοδικό και παραγωγικό περιβάλλον μάθησης και η δομή της διδασκαλίας συμβάλλει στα μαθησιακά αποτελέσματα.

Στο επίπεδο σχολείου, λαμβάνονται υπόψη οι προσεγγίσεις των Creemers (1994), Creemers & Kyriakides (2008) και Scheerens (1992, 2016) που θεωρούν ότι η αποτελεσματικότητα της εκπαίδευσης αφορά την ποιότητα διδασκαλίας και τη δημιουργία μαθησιακού περιβάλλοντος. Στο πλαίσιο της TIMSS 2015, παράγοντες που αφορούν το κλίμα του σχολείου και συγκεκριμένα η έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία έχουν θετική επίδρασή στα μαθησιακά αποτελέσματα στα μαθηματικά (Panagi-Louka et al., 2020). Τέλος, στα αποτελέσματα της PISA, η επίδραση του χρόνου για μάθηση στα μαθηματικά, σε επίπεδο σχολείου εμφανίζεται να είναι μικρή (OECD, 2014).

Ο κύριος στόχος της παρούσας μελέτης είναι η ανάπτυξη ενός εννοιολογικού πλαισίου, που να επεξηγεί τους παράγοντες που συμβάλλουν στην επίδοση των μαθητών Δ΄ τάξης Δημοτικού στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, απαντήθηκε το πιο κάτω ερώτημα:

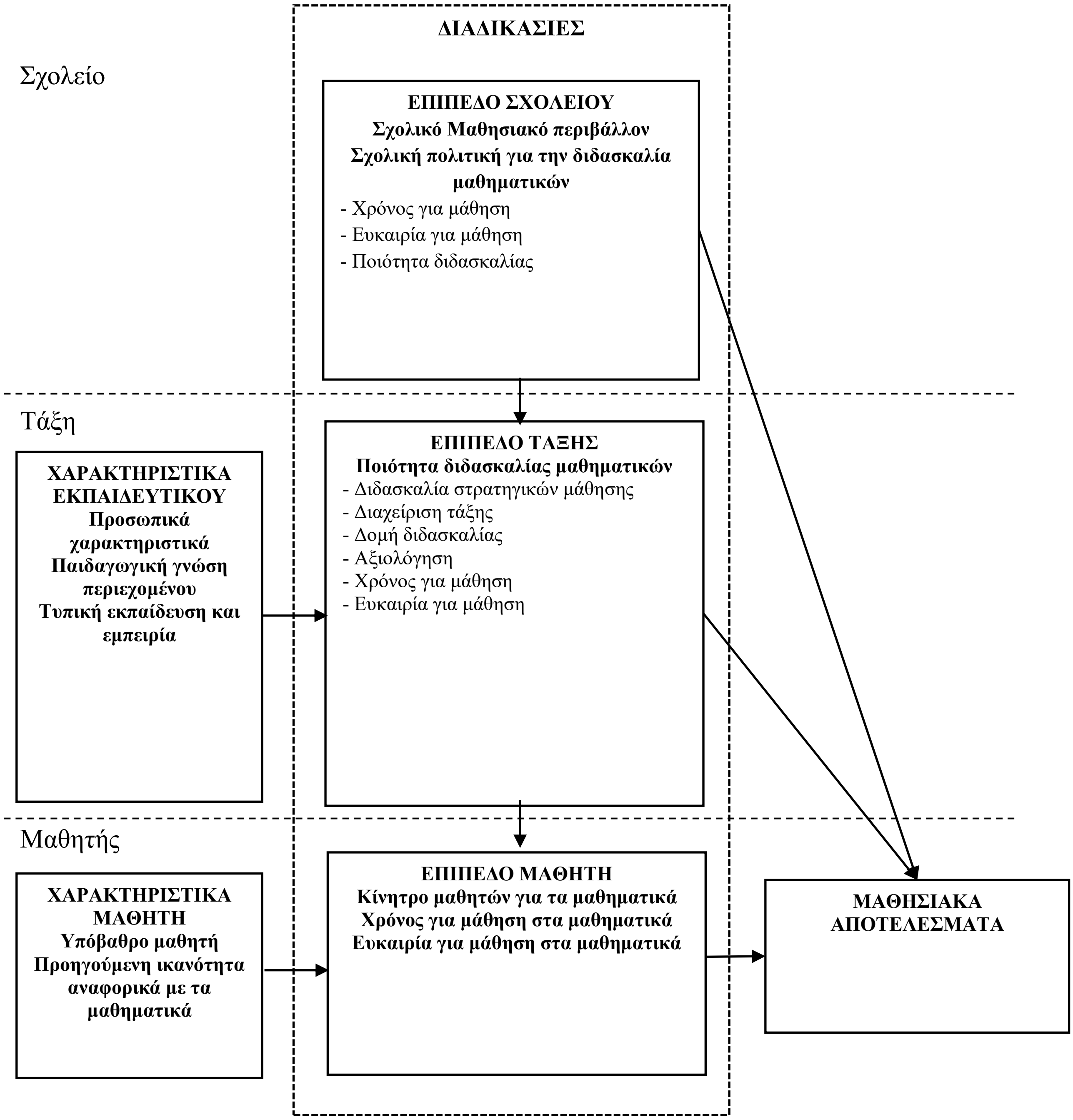
Ποιοι παράγοντες σε επίπεδο μαθητή, τάξης και σχολείου συμβάλλουν στην επίδοση των Κύπριων μαθητών Δ' τάξης στα μαθηματικά, όπως προκύπτουν από τα δεδομένα της TIMSS;

Για τη διερεύνηση του ερευνητικού ερωτήματος, εξετάζονται οι παράγοντες του εννοιολογικού πλαισίου της μελέτης, ενώ διερευνώνται οι επιδράσεις τους, στις διαφορές της επίδοσης των μαθητών, στα μαθηματικά.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Για την ανάπτυξη του εννοιολογικού πλαισίου έρευνας λήφθηκαν υπόψη κυρίως τρία θεωρητικά μοντέλα, τα οποία εξετάστηκαν σε βάθος στην έρευνα εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας (ΕΕΑ) (Creemers, 1994; Creemers & Kyriakides, 2008; Scheerens, 1992) καθώς και βασικές υποδείξεις εμπειρικών μελετών (π.χ Scheerens, 2016). Στο Διάγραμμα 1, παρουσιάζεται η γενική δομή του εννοιολογικού πλαισίου.

Αρχικά, περιλαμβάνονται χαρακτηριστικά του μαθητή και του εκπαιδευτικού, καθώς αναγνωρίζεται η συνεισφορά των παραγόντων αυτών στη μάθηση των μαθηματικών. Ως διαδικασίες του εκπαιδευτικού συστήματος, περιλαμβάνονται παράγοντες που αφορούν τη διδακτική διαδικασία, στα τρία επίπεδα. Συγκεκριμένα, σε επίπεδο μαθητή, περιλαμβάνονται τα κίνητρα των μαθητών για τα μαθηματικά, ο χρόνος και η ευκαιρία για μάθηση των μαθηματικών. Σε επίπεδο τάξης, περιλαμβάνεται η ποιότητα της διδασκαλίας μαθηματικών, εστιάζοντας στον ρόλο του εκπαιδευτικού, ο χρόνος και η ευκαιρία που παρέχει ο εκπαιδευτικός για μάθηση στα μαθηματικά. Τέλος, στο επίπεδο του σχολείου, ως διαδικασίες περιλαμβάνονται η πολιτική για τη διδασκαλία των μαθηματικών και το σχολικό μαθησιακό περιβάλλον. Η σχολική πολιτική για τη διδασκαλία των μαθηματικών αφορά την ποιότητα διδασκαλίας των εκπαιδευτικών του σχολείου, και τον χρόνο και την ευκαιρία για μάθηση στα μαθηματικά που παρέχεται από το σχολείο. Από την άλλη, το σχολικό μαθησιακό περιβάλλον, περιλαμβάνει τη δημιουργία ενός θετικού κλίματος, την πειθαρχία και ασφάλεια και την έμφαση που δίνεται στην ακαδημαϊκή επιτυχία. Ως αποτέλεσμα της εκπαιδευτικής διαδικασίας, θεωρείται η συνολική επίδοση του μαθητή στα μαθηματικά.



Διάγραμμα 1: Το εννοιολογικό πλαίσιο της έρευνας για την διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μαθητές, εκπαιδευτικοί και διευθυντές σχολείων της Κύπρου που συμμετείχαν στην TIMMS 2019. Συγκεκριμένα, 2419 μαθητές Δ΄ Δημοτικού, που φοιτούσαν σε 180 τάξεις 129 σχολείων συμμετείχαν σε αυτή τη έρευνα. Τα δεδομένα οργανώθηκαν σε τρία επίπεδα: στο πρώτο επίπεδο οι παράγοντες που αφορούν τον μαθητή, στο δεύτερο επίπεδο οι παράγοντες που αφορούν την τάξη και στο τρίτο επίπεδο παράγοντες που αφορούν το σχολείο.

Για την ανάλυση του μοντέλου έρευνας πραγματοποιήθηκε πολυεπίπεδη ανάλυση για τη διερεύνηση των παραγόντων που σχετίζονται με τα μαθησιακά αποτελέσματα, λαμβάνοντας υπόψη την ιεραρχική δομή του εκπαιδευτικού συστήματος (Rhoads, 2011). Χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό HLM (Raudenbush, Bryk, & Congdon, 2019), με βάση το οποίο διερευνήθηκε η συμβολή των παραγόντων στην επίδοση του μαθητή στα τρία επίπεδα.

Κατά την προετοιμασία των δεδομένων έγινε ανάλυση αξιοπιστίας, ώστε να διερευνηθεί κατά πόσο οι μεταβλητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παράγοντες. Όταν η τιμή Cronbach’s α ήταν χαμηλή, έγινε παραγοντική ανάλυση για την δημιουργία νέων παραγόντων. Επιπρόσθετα, πραγματοποιήθηκε ανάλυση συσχέτισης μεταξύ των παραγόντων ανά επίπεδο, για τη διερεύνηση πολυσυγραμμικότητας. Όταν ο δείκτης Pearson r ήταν υψηλός, οι παράγοντες που συσχετίζονταν μεταξύ τους εισήχθησαν ξεχωριστά κατά την πολυεπίπεδη ανάλυση του μοντέλου.

Στην πολυεπίπεδη ανάλυση διερευνήθηκαν όλοι οι παράγοντες όπως αναπτύχθηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο της έρευνας (Διάγραμμα 1) ως εξής: Αρχικά εξετάστηκε το μηδενικό μοντέλο, χωρίς τη συνεισφορά παραγόντων (ανεξάρτητων μεταβλητών). Έπειτα εξετάστηκαν οι παράγοντες για το μοντέλο 1, χαρακτηριστικά μαθητή. Στη συνέχεια προστέθηκαν οι παράγοντες του μοντέλου 2, διαδικασίες μάθησης σε επίπεδο μαθητή. Στο επίπεδο τάξης, προστέθηκαν οι παράγοντες του μοντέλου 3, χαρακτηριστικά εκπαιδευτικού ενώ για το μοντέλο 4 έγιναν ενδιάμεσες αναλύσεις, όπου εξετάστηκαν ξεχωριστά οι παράγοντες της ποιότητας διδασκαλίας των μαθηματικών. Τέλος, προστέθηκαν οι παράγοντες του σχολείου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Πίνακας 1 (βλ. Παράρτημα) παρουσιάζει τους παράγοντες για την πολυεπίπεδη ανάλυση των μαθησιακών αποτελεσμάτων στα μαθηματικά.

Στο μηδενικό μοντέλο η διακύμανση της επίδοσης στα μαθηματικά είναι 5307.82. Το 85.9% αφορά το επίπεδο μαθητή, το 4.1% την τάξη και το 10.0% το σχολείο.

Το μοντέλο 1 εξηγεί το 19.2% της συνολικής διακύμανσης, ενώ ο στατιστικός δείκτης likelihood (x2) δείχνει στατιστικά σημαντική αλλαγή από το μηδενικό μοντέλο ($p<.001$). Το κοινωνικοοικονομικό επίπεδο των μαθητών φαίνεται ότι επιδρά στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά, ενισχύοντας τα ευρήματα των Sun et al. (2012). Επίσης, τα αγόρια επιτυγχάνουν υψηλότερη επίδοση στα μαθηματικά, γεγονός που συμφωνεί με τους Sun et al. (2012). Οι προσδοκίες των γονέων επιδρούν, επίσης, θετικά στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Τέλος, η ετοιμότητα των μαθητών κατά την έναρξη της φοίτησής τους αναφορικά με τις πράξεις και τη μέτρηση συμβάλλει στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά (Creemers και Kyriakides, 2008).

Στο μοντέλο 2, παράγοντες που αφορούν τα κίνητρα, τον χρόνο και την ευκαιρία μάθησης στα μαθηματικά σε επίπεδο μαθητή, συμβάλλουν στην επίδοσή τους στα μαθηματικά. Η αυτοπεποίθηση στα μαθηματικά και η ατομική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων έχουν θετική επίδραση στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά, αποτέλεσμα που ενισχύει τη θέση των Panagi-Louka et al. (2020). Αντίθετα, η απουσία από το σχολείο και ο χρόνος που αφιερώνεται για ιδιωτική εκπαίδευση έχουν αρνητική επίδραση στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Τα ευρήματα αυτά, ενισχύουν την άποψη των De Jong et al. (2004) για τη σημαντική συμβολή του χρόνου που αξιοποιεί ο μαθητής για μάθηση ενώ σε αντίθεση με τον Kyriakides (2005), η αρνητική επίδραση της ιδιωτικής διδασκαλίας εκτός σχολείου, πιθανόν να οφείλεται στην ενίσχυση πιο αδύναμων μαθητών.

Το μοντέλο 3 ερμηνεύει το 34.4% της διακύμανσης. Η επαγγελματική ικανοποίηση των εκπαιδευτικών έχει αρνητική επίδραση στην επίδοση των μαθητών, γεγονός που έρχεται σε διαφωνία με τη θέση του Scheerens (2016). Τα αποτελέσματα δείχνουν επίσης ότι η μόρφωση και εμπειρία του εκπαιδευτικού δεν συμβάλλει στα μαθησιακά αποτελέσματα, ενισχύοντας τα ευρήματα του Kyriakides (2005) ενώ καμία επίδραση δεν έχει η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου.

Το μοντέλο 4 εξηγεί το 34.2% της διακύμανσης. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι για τη διαχείριση της τάξης οι περιορισμοί στη διδασκαλία αναφορικά με τους μαθητές έχει αρνητική επίδραση στην επίδοση των μαθητών. Επίσης η αξιολόγηση στη διδασκαλία, μέσω της υποβολής ερωτήσεων, συμβάλλει θετικά στα μαθησιακά αποτελέσματα, ένδειξη που επιβεβαιώνει τους Creemers και Kyriakides (2008).

Τέλος, το μοντέλο 5, ερμηνεύει το 37.3% της διακύμανσης, με το φαινόμενο του σχολικού εκφοβισμού να έχει αρνητική επίδραση στην επίδοση των μαθητών, ενισχύοντας την άποψη των (Scheerens, 2016) για την συμβολή του θετικού σχολικού μαθησιακού κλίματος στα μαθησιακά αποτελέσματα.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα ευρήματα της μελέτης τονίζουν την ανάγκη ενίσχυσης της αυτοπεποίθησης των μαθητών για τα μαθηματικά την αξιοποίηση περισσότερων ευκαιριών μάθησης από τον ίδιο τον μαθητή, ενώ αποδεικνύουν τη σημαντικότητα του χρόνου μάθησης εντός του σχολικού πλαισίου. Επιπρόσθετα, τονίζουν την κατάλληλη διαχείριση της τάξης κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών και τη χρήση ερωτήσεων για ανατροφοδότηση και αξιολόγηση. Τέλος, δηλώνουν την ανάγκη για δημιουργία θετικού σχολικού μαθησιακού κλίματος. Μελλοντικές μελέτες μπορούν να δώσουν περισσότερο φως στη διερεύνηση των επιδράσεων των παραγόντων του μοντέλου έρευνας σε διαφορετικές χώρες όπως και στη μεταβολή τους με την πάροδο του χρόνου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Creemers, B.P.M. (1994). *The Effective Classroom*. London: Cassell.

Creemers, B. P. M., & Kyriakides, L. (2008). *The dynamics of educational effectiveness: A contribution to policy, practice and theory in contemporary schools*. London and New York: Routledge.

Creemers, B. P., Kyriakides, L., & Sammons, P. (2010). *Methodological advances in educational effectiveness research*. London and New York: Routledge.

De Jong, R., Westerhof, K. J., & Kruiter, J. H. (2004). Empirical evidence of a comprehensive model of school effectiveness: A multilevel study in mathematics in the first year of junior general education in the Netherlands. *School Effectiveness and School Improvement*, 15(1), 3–31.

Demosthenous, E., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (in press). Factors that contribute to students' learning of mathematics according to TIMSS data. *Proceedings of the 8th Panhellenic Conference of the Researchers in Mathematics Education* (ENEDIM), Nicosia, Cyprus.

Kyriakides, L. (2005). Extending the comprehensive model of educational effectiveness by an empirical investigation. School Effectiveness and School Improvement, 16 (2), 103–152.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-results-mathematics.html

OECD. (2014). *Education at a glance 2014: OECD indicators*. Paris: OECD Publishing.

Raudenbush, S., Bryk, A., & Congdon, R. (2019). HLM 8 for Windows [Computer software]. Scientific Software International.

Rhoads, C. H. (2011). The implications of "contamination" for experimental design in education. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, *36*(1), 76-104.

Panagi-Louka, N., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020, August 23-28). *Factors affecting fourth-year students' mathematical achievement in Chinese Taipei, Ireland and Cyprus*. European Conference on Educational Research (ECER), Glasgow, Scotland.

Scheerens, J. (1992). *Effective schooling: research theory and practice*. London: Cassell.

Scheerens, J. (2016). *Educational effectiveness and ineffectiveness: A critical review of the knowledge base*. Dordrecht: Springer.

Scheerens, J., & Blömeke, S. (2016). Integrating teacher education effectiveness research into educational effectiveness models. *Educational Research Review*, *18*, 70–87.

Sun, L., Bradley, K. D., & Akers, K. (2012). A multilevel modelling approach to investigating factors impacting science achievement for secondary school students: PISA Hong Kong sample. *International Journal of Science Education*, *34*(14), 2107–2125.

Van Damme, J., Liu, H., Vanhee, L., & Pustjens, H. (2010). Longitudinal studies at the country level as a new approach to educational effectiveness: explaining change in reading achievement (PIRLS) by change in age, socio-economic status and class size. *Effective Education*, 2(1), 53-84.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 1: Παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση στα μαθηματικά

Παράγοντες	Μοντέλο 0	Μοντέλο 1	Μοντέλο 2	Μοντέλο 3	Μοντέλο 4	Μοντέλο 5
Σταθερά (Intercept)	536.40 (2.80)	362.16 (12.26)	408.54 (10.95)	409.08 (10.77)	408.90 (10.79)	410.31 (10.65)
Επίπεδο μαθητή						
<u>Υπόβαθρο μαθητή</u>						
SES		25.24 (2.76)	19.21 (2.38)	19.25 (2.37)	19.08 (2.36)	18.52 (2.35)
Φύλο		18.63 (2.78)	13.71 (2.58)	13.69 (2.49)	13.69 (2.50)	13.67 (2.49)
Προσδοκίες γονέων		16.89 (1.85)	12.06 (1.53)	11.94 (1.53)	12.04 (1.54)	11.90 (1.53)
<u>Προηγούμενη ικανότητα</u>						
Ετοιμότητα (πράξεις)		14.08 (1.73)	11.15 (1.46)	11.23 (1.46)	11.22 (1.46)	11.23 (1.46)
Ετοιμότητα (μέτρηση)		11.50 (2.10)	7.33 (1.72)	7.24 (1.71)	7.24 (1.71)	7.28 (1.71)
Αρχικές αριθμητικές δραστηριότητες		ΜΣΣ				
Φοίτηση στην προδημοτική		ΜΣΣ				
<u>Κίνητρο για τα μαθηματικά</u>						
Αυτοπεποίθηση στα μαθηματικά			34.27 (2.05)	34.61 (1.73)	34.60 (1.72)	34.64 (1.72)
Στάσεις για τα μαθηματικά			ΜΣΣ			
<u>Ευκαιρία για μάθηση</u>						
Δομή και σαφήνεια			ΜΣΣ			
Αποκλίνουσα συμπεριφορά			ΜΣΣ			
Ατομική επίλυση προβλημάτων			7.14 (1.44)	7.08 (1.46)	7.08 (1.45)	7.09 (1.45)
<u>Χρόνος για μάθηση</u>						
Απουσία από το σχολείο			-6.65 (1.26)	-6.70 (1.26)	-6.70 (1.26)	-6.73 (1.26)
Ιδιωτική εκπαίδευση			-11.90 (1.39)	-12.00 (1.37)	-12.00 (1.37)	-12.03 (1.37)
Επίπεδο Τάξης						
<u>Προσωπικά χαρακτηριστικά</u>						
Επαγγελματική ικανοποίηση				-18.23** (5.82)	-19.281** (6.13)	-18.26** (5.68)
Αυτο-αποτελεσματικότητα				ΜΣΣ		

(continued)

Πίνακας 1. *(Continued)*

Παράγοντες	M0	M1	M2	M3	M4	M5
Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου				ΜΣΣ		
Τυπική εκπαίδευση και εμπειρία				ΜΣΣ		
Ποιότητα διδασκαλίας μαθηματικών						
Στρατηγικές μάθησης					ΜΣΣ	
Διαχείριση τάξης						
Περιορισμοί διδασκαλίας					-10.09* (4.71)	ΜΣΣ
Αποκλίνουσα συμπεριφορά					ΜΣΣ	
Δομή και σαφήνεια διδασκαλίας					ΜΣΣ	
Αξιολόγηση						
Ανάθεση κατ' οίκον εργασίας					-9.35* (3.60)	ΜΣΣ
Υποβολή ερωτήσεων					37.20 (7.75)	32.69 (6.63)
Χρόνος για μάθηση					ΜΣΣ	
Ευκαιρία για μάθηση					ΜΣΣ	
Επίπεδο σχολείου						
Σχολικό μαθησιακό περιβάλλον						
Σχολικό κλίμα						ΜΣΣ
Σχολικός εκφοβισμός						-14.18* (5.72)
Αίσθημα του ανήκειν						ΜΣΣ
Πειθαρχία και ασφάλεια						ΜΣΣ
Σχολική πολιτική διδασκαλίας						ΜΣΣ
Variance Components						
Σχολείο	10.0	5.6	7.0	9.3	8.6	5.0
Τάξη	4.1	6.0	6.8	4.0	4.8	5.2
Μαθητής	85.9	69.2	52.5	52.5	52.5	52.5
Absolute	5307.8	4287.8	3518.6	3495.85	3494.9	3326.77
Explained		19.2	33.7	34.4	34.2	37.3
Significance test						
x^2		511.7	1126.7	1139.3	1135.9	1162.9
Deviance	27433.0	26921.3	26306.3	26293.8	26297.1	26270.1
Degrees of freedom		7	12	18	16	23
p- value		< .001	< .001	< .001	<.001	<.001

ΜΣΣ Μη στατιστικά σημαντική επίδραση, *p < .05, **p < .01, p < .001

Η ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Μαγαλιού Σταματή, Σακονίδης Χαράλαμπος

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

matamagaliou@gmail.com, xsakonid@eled.duth.gr

Αξιοποιώντας την οπτική του κριτικού μαθηματικού γραμματισμού η εργασία εστιάζει στις διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί στα μαθηματικά. Για τη μελέτη των διδακτικών πρακτικών αξιοποιήθηκαν οι προσανατολισμοί ακρόασης, τους οποίους τέσσερις εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επιλέγουν για να ανταποκριθούν στις συνεισφορές των μαθητών καθώς και οι τρόποι αξιοποίησής τους κατά την επεξεργασία των μαθηματικών έργων. Τα ευρήματα, συνεπή με τη βιβλιογραφία, δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί δεν εστιάζουν στους τρόπους σκέψης των μαθητών, επιβάλλουν ένα υποκειμενικό πρότυπο κατασκευής των μαθηματικών εννοιών, συντηρώντας, έτσι, ένα χαμηλό επιστημολογικό πλαίσιο χειραφέτησης των μαθητών και εν δυνάμει μελλοντικών πολιτών.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Ο μαθηματικός γραμματισμός αποτελεί κρίσιμο αναλυτικό εργαλείο της κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικής προσέγγισης της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναπτύσσεται δυναμικά τα τελευταία και αντιμετωπίζει τα μαθηματικά όχι ως απλούς ποσοτικούς δείκτες και πηγή ισχύος, αλλά ως εργαλείο κριτικής διερεύνησης των κοινωνικών αντιφάσεων που διέπουν το σύγχρονο κοινωνικο-οικονομικό σύστημα, βοηθώντας τους μαθητές να βελτιώνουν τις ικανότητές τους στην επίλυση προβλημάτων και στη λήψη αποφάσεων, αναπτύσσοντας ταυτόχρονα κρίσιμες δημοκρατικές πρακτικές ως μελλοντικοί πολίτες. Για να καταστεί, όμως, αυτό δυνατό είναι σημαντικό η διδασκαλία στην τάξη και κατά συνέπεια οι διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού να υποστηρίζουν αυτήν την προοπτική. Η παρούσα εργασία επιχειρεί να διερευνήσει αυτές τις πρακτικές εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης μέσα από την οπτική του μαθηματικού γραμματισμού.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Οι μελέτες στο πεδίο των γραμματισμών προσεγγίζονται μέσα από δύο κατευθύνσεις, τον λειτουργικό (functional) και τον κριτικό (critical) γραμματισμό. Ο λειτουργικός μαθηματικός γραμματισμός καθορίζεται από τις ικανότητες που διαθέτει ένα άτομο «να ανταποκρίνεται στις δεδομένες ανάγκες και τους περιορισμούς της κοινωνίας» (Jablonka, 2003: 78-79). Ο κριτικός μαθηματικός γραμματισμός, αντίθετα, περιλαμβάνει την «ικανότητα ανάγνωσης μιας δεδομένης κατάστασης και της ποσοτικής της έκφρασης ως ανοιχτής διαδικασίας για αλλαγή» (Skovsmose και Valero, 2008). Η συμμετοχή σε μια δημοκρατική κοινωνία απαιτεί κατανόηση, ερμηνεία και κριτική αξιολόγηση των μαθηματικών δεδομένων και μοντέλων, βασικά στοιχεία για ένα χειραφετητικό (Jablonka, 2003) μαθηματικό γραμματισμό.

Πολλοί ερευνητές, μελετώντας τη σχέση της διδασκαλίας των μαθηματικών με τη δημοκρατία εστιάζουν στην έννοια της ενδυνάμωσης/χειραφέτησης, που παρέχει στο άτομο και στην ομάδα τη δυνατότητα να κατανοήσουν και να διατυπώσουν κοινωνικές και πολιτικές κριτικές για τα κοινωνικά δρώμενα και να παρέμβουν ενεργά μετασχηματίζοντάς τα (Radford, 2012). Η δημοκρατία γίνεται αντιληπτή ως μια συλλογική, πολιτική δράση που διέρχεται, μέσω της καθημερινής εμπειρίας, την τάξη των μαθηματικών (Skovsmose και Valero, 2008). Για το σκοπό αυτό προτείνεται η υλοποίηση ερευνητικών σχεδίων εργασίας στην τάξη και η χρήση ανοιχτού υλικού δραστηριοτήτων για τη σύνδεση των μαθηματικών με ευρύτερα κοινωνικά ζητήματα (Frankenstein, 2014· Gutierrez, 2013).

Σε αυτό το πλαίσιο, οι πρακτικές μαθηματικού γραμματισμού εμπεριέχουν και ορίζονται από μια σειρά κοινωνικών πρακτικών, πολιτικών κανόνων, θεσμικών περιορισμών και πολιτισμικών παραγόντων (Skott, Mosvold & Sakonidis, 2018) που διαμορφώνονται σε συγκεκριμένες ιστορικές-πολιτικοκοινωνικές συνθήκες. Δίνουν σιωπηρά μηνύματα στους μαθητές για τις δομές εξουσίας και τους ρόλους που επιτελούνται στο σχολείο και στην ευρύτερη κοινωνία. Μια αυταρχική διάρθρωση της τάξης, με τον εκπαιδευτικό να λειτουργεί ως αυθεντία και τους μαθητές σε ρόλο υπάκουου και παθητικού δέκτη διδάσκει ότι η κοινωνία λειτουργεί με το αντίστοιχο μοντέλο, προετοιμάζοντας τα παιδιά να ζήσουν σε ένα πολιτικό σύστημα όπου μια ομάδα αριστείας κατέχει όλη τη δύναμη, ενώ η πλειοψηφία συμμορφώνεται στο αξιακό σύστημα των κυρίαρχων υιοθετώντας αντιλήψεις ανωτερότητας και αποκλεισμών (Gerofsky, 2009). Η ρητορική που επιμένει να βλέπει τις διδακτικές πρακτικές ως ένα ουδέτερο πλέγμα καθολικών κανονιστικών μεθοδολογικών αρχών κατάλληλες για κάθε περίπτωση, αντιμετωπίζει τη μάθηση και τα υποκείμενά της παθητικά (διεκπεραίωση ύλης, καθοδήγηση, λήψη από το μαθητή). Στην ουσία, αποσιωπά ή επικαλύπτει τον επιλεκτικό ρόλο του σχολείου ως μηχανισμού αναπαραγωγής κυρίαρχων εξουσιαστικών σχέσεων (Valero, 2017).

Ο ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΑΣΗΣ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Ο Davis (2013) αξιοποιεί την ακρόαση ως μέσο ερμηνείας των φαινομένων της τάξης, παράγοντα κατανόησης των διδακτικών πρακτικών και μετασχηματισμού της διδασκαλίας στην κατεύθυνση της μαθηματικής ενδυνάμωσης και της δημοκρατικής συγκρότησης των μαθηματικών εννοιών. Διακρίνει τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς ακρόασης που οι εκπαιδευτικοί υιοθετούν στην τάξη: τον «αξιολογητικό» (evaluative orientation), τον «ερμηνευτικό/επεξηγηματικό» (interpretive orientation) και τον «ερμηνευτικό/μετασχηματιστικό» (hermeneutic orientation). Ο Coles (2002) χρησιμοποιεί για τον τρίτο προσανατολισμό τον όρο «transformative listening», ενώ τονίζει ότι δεν είναι όλοι οι προσανατολισμοί ευνοϊκοί προς την κατεύθυνση της επιστημολογικής χειραφέτησης των μαθητών.

Ο εκπαιδευτικός με αξιολογητικό προσανατολισμό ακρόασης εστιάζει στη διάγνωση και διόρθωση του «λάθους» σε μια διαδικασία απόκτησης προκαθορισμένων και καθολικών αληθειών. Προσεγγίζει την εργασία των μαθητών με υποκειμενικό τρόπο και με βάση τις προσδοκίες του για τον τρόπο επίλυσης, ενώ δεν προσανατολίζεται στην κατανόηση του σκεπτικού του μαθητή. Κυριαρχούν οι διαδικασίες απομνημόνευσης και αναπαραγωγής οι οποίες λειτουργούν αποξενωτικά και αλλοτριωτικά για τους μαθητές αλλά και για την εννοιολογική κατανόηση.

Στον ερμηνευτικό/επεξηγηματικό προσανατολισμό η ακρόαση αποτελεί ζωτικό στοιχείο της διδακτικής δράσης. Εμπλέκεται μια ενεργή ερμηνεία - ένα είδος προσέγγισης- οπότε η ακρόαση γίνεται συνειδητή και σκόπιμη για την κατανόηση του υποκειμενικού νοήματος που κατασκευάζει ο μαθητής. Στην ουσία, ο αξιολογητικός και ο ερμηνευτικός/επεξηγηματικός αντιλαμβάνονται, την ανθρώπινη ταυτότητα και πρακτική ως υποκειμενική, αυτόνομη, απομονωμένη και μοναχική διαδικασία, όπου «τα καθήκοντα και οι ρόλοι εκπαιδευτικού και μαθητή παραμένουν διακριτοί και ασυμβίβαστα διαχωρισμένοι μεταξύ τους» (Davis, 2013: 52).

Ο «ερμηνευτικός/μετασχηματιστικός» προσανατολισμός συνιστά την ιδανικότερη μορφή ακρόασης. Ο εκπαιδευτικός προσανατολίζεται στις ιδέες των μαθητών, αλληλεπιδρά και συμμετέχει μαζί τους σε μια «μη τυπικά» προσχεδιασμένη και οργανωμένη διαδικασία διαπραγμάτευσης του νοήματος (Davis, 2013), δείχνει εμπιστοσύνη στη συνεισφορά του μαθητή και αντίστοιχα ο μαθητής εμπιστεύεται τον εκπαιδευτικό ή το συμμαθητή του. Η ερμηνευτική/μετασχηματιστική προσέγγιση ενθαρρύνει την ευρύνοια και την ανοιχτότητα προς νέες δυνατότητες, ενώ χαρακτηρίζεται από μια βαθιά συμβατότητα μεταξύ της πολυπλοκότητας της σκέψης και της ερμηνευτικής φιλοσοφίας/έρευνας.

Οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις υποδηλώνουν την προσπάθεια αντίληψης του τρόπου ερμηνείας του προβλήματος αλλά και την πολλαπλότητα των αναδυόμενων ιδεών των μαθητών σε μια διαλεκτική διαδικασία (Davis, 2013). Σε μια τέτοια συνθήκη «τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως πεδίο αναζήτησης, παρά ως ένα δεδομένο αντικείμενο μάθησης» και η εργασία των μαθητών «ανάλογη με αυτήν που ακολουθείται στην κοινότητα των επαγγελματιών μαθηματικών» (Σακονίδης, 2011).

Η ΜΕΛΕΤΗ

Στόχος του εμπειρικού μέρους της εργασίας αποτελεί η ανίχνευση των χαρακτηριστικών του μαθηματικού γραμματισμού που αναπτύσσονται στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, ως πεδίου συγκρότησης του μελλοντικού ενεργού, δημοκρατικού και κριτικού πολίτη, ενταγμένη στο πλαίσιο μελέτης των διδακτικών πρακτικών. Συγκεκριμένα, διερευνάται ποιες διδακτικές πρακτικές υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί κατά την αλληλεπίδραση με τους μαθητές (Ερευνητικό Ερώτημα 1) και πώς αυτές διαμορφώνουν τον προσανατολισμό ακρόασης (Ερευνητικό Ερώτημα 2).

Για την μελέτη των διδακτικών πρακτικών υιοθετήθηκε η μελέτη περίπτωσης και ως ερευνητικά εργαλεία αξιοποιήθηκαν η μη συμμετοχική παρατήρηση, οι «περιγραφικές» σημειώσεις πεδίου, η ηχογράφηση διδασκαλίας (δύο διδακτικά δίωρα για καθένα/καθεμιά) και η ημιδομημένη συνέντευξη. Συμμετείχαν τέσσερις εκπαιδευτικοί με πολυετή διδακτική εμπειρία, με επιμορφώσεις/μεταπτυχιακές σπουδές και συμμετοχή σε τρέχοντα επιμορφωτικά προγράμματα. Η επιλογή τους έγινε στη βάση της σκόπιμης δειγματοληψίας. Μετά τη μελέτη των απομαγνητοφωνημένων διδασκαλιών διαμορφώθηκαν οι ερωτήσεις μιας ημι-δομημένης συνέντευξης που στόχευσαν στην κατανόηση των πρακτικών και τη διερεύνηση των σχετικών αντιλήψεων των εκπαιδευτικών. Στις ερωτήσεις αξιοποιήθηκαν διδακτικά αποσπάσματα που θεωρήθηκαν κρίσιμα για την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές (ενεργή εμπλοκή, αιτιολόγηση ιδεών, αξιοποίηση αναδυόμενων διαισθητικών γνώσεων, διαμαθητική μαθηματική επικοινωνία-αλληλεπίδραση) και τη δημοκρατική συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος (αναγνώριση σκέψης των μαθητών ως πόρου γνώσης, διαπραγμάτευση, αμοιβαία αλληλεπίδραση, εκχώρηση ευθυνών, λήψη αποφάσεων).

Ο σχεδιασμός της ερευνητικής διαδικασίας πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις, την αρχική και την κύρια φάση, ενώ τα δεδομένα αναλύθηκαν αξιοποιώντας τις αρχές της θεμελιωμένης θεωρίας και της θεματικής ανάλυσης περιεχομένου. Οι διδακτικές πρακτικές που εντοπίστηκαν δομήθηκαν σε ένα δίκτυο τριών αξόνων με βάση τους προσανατολισμούς ακρόασης, ενώ η συνέντευξη που ακολούθησε αποσκοπούσε στην κατανόηση και ερμηνεία των διδακτικών πρακτικών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των δεδομένων, προκύπτει ότι οι διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν οι τρεις από τους τέσσερις εκπαιδευτικούς συγκεντρώνουν τα χαρακτηριστικά του αξιολογητικού προσανατολισμού ακρόασης, ενώ διαφοροποίηση παρουσιάζουν οι διδακτικές πρακτικές της τέταρτης εκπαιδευτικού, καθώς εντοπίζονται χαρακτηριστικά από τον ερμηνευτικό/επεξηγηματικό προσανατολισμό που τροφοδοτούνται με στοιχεία τόσο από τον πρώτο όσο και από τον τρίτο προσανατολισμό ακρόασης. Λόγω περιορισμένου χώρου επιλέγεται η εστίαση στη συνέχεια στα δεδομένα δύο εκπαιδευτικών, του Σωτήρη, ενός από τους τρεις εκπαιδευτικούς με συγκλίνοντες προσανατολισμούς ακρόασης και της Ευγενίας, της οποίας ο προσανατολισμός ακρόασης διέφερε των υπολοίπων.

Η ακρόαση του Σωτήρη περιορίζεται στη συγκεκριμένη απάντηση που αναμένει από τον/την μαθητή/μαθήτρια με βάση ένα υποκειμενικό, προκαθορισμένο πρότυπο ορθότητας. Σπάνια διερευνά περαιτέρω τη μονολεκτική απάντηση που λαμβάνει, «Εκ. Όταν τελείωσαν τη διαδρομή, όταν κατεβήκαν, Μα8, θα έδειχνε περισσότερο ή λιγότερο απ' ότι στην αρχή; Στην αρχή έγραφε 26,030 χμ, έτσι; Στο τέλος, τι θα έγραφε περισσότερο ή λιγότερο αφού έκαναν μια διαδρομή;» «Μα8. Περισσότερο», «Εκ. Άλλαξε ο αριθμός;», «Μα8. Ναι.», «Εκ. Μεγάλωσε ή μίκρυνε;», «Μα8. Μεγάλωσε», «Εκ. Γιατί μεγάλωσε;», «Μα8. Γιατί, γιατί είναι πιο μεγάλος (14.40)», ενώ αγνοούνται ή ελάχιστα αποτιμώνται οι συνεισφορές των μαθητών, «Μα19. Κύριε, ο κρεοπώλης βάζει πάνω στη μπριζόλα, πόσο λίπος έχει; Δε βάζει.», «Εκ. Δεν τον συμφέρει, μάλλον, ε; Άρα το ποσοστό, κυρίως, το βάζουν στις εκπτώσεις, εκεί τους συμφέρει το μεγάλο ποσοστό….. Κατά περίπτωση, λοιπόν, το ποσοστό μπορεί να λέει ψέματα μπορεί να λέει αλήθεια δεν είναι από μόνο του καλό ή κακό, σύμφωνοι;»(14.55), καθώς δεν επιδρούν στην πορεία ανάπτυξης του μαθήματος.

Η επίκληση της «επανάληψης», της «θεωρίας» και των «κανόνων» στη μαθηματική επεξεργασία είναι κυρίαρχη σε κάθε διδακτικό βήμα, «Εκ. στο 2,9 που έχει 9 δέκατα αν του δώσουμε ακόμη 1 δέκατο ποιος αριθμός θα μας προκύψει;», «Μα8. Το είπαμε..», «Εκ. Το είπαμε αλλά…», «Μα8. Μια θεωρία…», «Εκ. Ποια θεωρία, Μα8; Για πες την κι εσύ», «Μα8. Ότι βλέπουμε, ότι αλλάζει τάξη», […] «Εκ. Πού στέκει το αριθμητικό μας σύστημα αυτό που μελετάμε όλα τα χρόνια από την Α δημοτικού; Πώς το λέμε; Ποιο αριθμητικό σύστημα έχουμε;», (38.75), αφήνοντας να εννοούνται τόσο ρητά όσο και άρρητα, πεποιθήσεις για τη φύση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, που ενισχύουν την ιδέα ενός στατικού, κλειστού και αδιαμφισβήτητου σύμπαντος γνώσεων με σταθερούς, αντικειμενικούς, αυστηρούς κανόνες και θεωρίες, ανεξάρτητα από το πλαίσιο που δημιουργούνται και την εμπειρική προσπάθεια κι εν τέλει ενός κλειστού αυτοαναφορικού διδακτικού αντικείμενου σε αντίθεση με τα υπόλοιπα.

Η συγκρότηση των εννοιών αποτελεί, περισσότερο, ατομική ευθύνη του μαθητή παρά συλλογική, η αλληλεπίδραση περιορίζεται ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τον/την μαθητή/τρια ενώ οι μαθηματικές έννοιες προκύπτουν, κατά κύριο λόγο, μέσω επιβολής, επαναλήψεων, εξηγήσεων, απομνημόνευσης κανόνων, επικύρωσης και αναστοχασμού της γνώσης από τον εκπαιδευτικό.

Στη συνέντευξη που ακολούθησε σχετικά με τις κυρίαρχες πρακτικές που εντοπίστηκαν, ο Σωτήρης υποστήριξε ότι συνειδητά επιδιώκει την ατομική αλληλεπίδραση σε αντίθεση με συνεργατικές πρακτικές θεωρώντας ότι διατηρεί τον έλεγχο της προσωπικής μάθησης του μαθητή, «θέλω να βλέπω άμεσα, εγώ, τη δράση και τη δραστηριότητα κάθε παιδιού» (4.50). Επιπλέον, αμφισβητεί τη συνεργατική προοπτική, «κάθε φορά που βλέπω συνεργασία [...] θα υπάρξει ένας φυσικός ηγέτης, θα πάει μπροστά και θα ακολουθήσει ο άλλος […] βλέπεις ότι κάποια παιδιά θα βολευτούν [...]. Πολλές εργασίες είναι και ομαδικές κι εκεί επιμένω στο όχι. Όχι, ο καθένας μόνος του, απέναντί μου και απέναντι στη δράση που έχει να κάνει» (5.56), διατηρώντας με αυτό τον τρόπο συνειδητά τον έλεγχο και το ρόλο εξουσίας/αυθεντίας στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Οι διδακτικές πρακτικές της Ευγενίας εντάσσονται κυρίως στον ερμηνευτικό/επεξηγηματικό προσανατολισμό. Επιδιώκει συνειδητά να έχει πρόσβαση στο υποκειμενικό και αναδυόμενο μαθηματικό νόημα που κατασκευάζει ο/η μαθητής/τρια, «Εκ. Άμα θες να κάνεις παράδειγμα έλα να το κάνεις στον πίνακα. Νιώθεις ότι θα σε βοηθήσει σ' αυτό που λες, ε; ωραία. Θα κάνεις το παράδειγμα αλλά ταυτόχρονα, θα μας λες και τι κάνεις» (1.86). Προσανατολίζεται στη σκέψη των μαθητών ως πηγή γνώσης, τους ενθαρρύνει να δώσουν περισσότερες εξηγήσεις/αιτιολογήσεις για τις στρατηγικές που αξιοποιούν, «Μα1. Ποιον αριθμό;», «Εκ. Ποιον θέλεις; …. Ό,τι θέλεις εσύ βάλε.», ….. «Εκ. Ωραία. Προχώρα. Λέγε μας και τι κάνεις» (3.80), σε άλλο σημείο, «Εκ. πολύ ωραία. Λέει η Μκ2, λοιπόν. Τι είπες μες στο μυαλό σου, Μκ2;», «Μκ2. ⅔ που έχουμε δια το 1/6 που θα χρησιμοποιήσω και τώρα θα βρούμε πόσες αφίσες μπορώ να φτιάξω.»(33.49). Όπως υποστηρίζει, υιοθετεί συνειδητά αυτήν την πρακτική ακρόασης, «θέλω να σε καταλάβω κι επίσης θέλω να καταλάβεις ότι σε άκουσα και σε κατάλαβα και αν δε σε κατάλαβα διόρθωσέ με» (23.10), αξιοποιώντας την ερμηνεία των μαθητών ως μεταγνωστική δεξιότητα και ως πόρο γνώσης για τους συμμαθητές, «το κάνω συνειδητά […] γιατί θέλω ο ίδιος ο μαθητής να καταλάβει τι σκέφτεται και πώς έφτασε εκεί, δηλαδή, έχω δύο πράγματα στο μυαλό μου, έτσι τους βοηθάω να καλλιεργήσουν τις μεταγνωστικές τους δεξιότητες [...] θα είναι μια στρατηγική που θα έχει γίνει ρητή θα την ξέρει, θα την έχει σαν εργαλείο στα χέρια του αν καταφέρει να σκεφτεί πώς σκέφτηκε».

Η πρακτική της Ευγενίας τοποθετείται σε ένα πιο συμμετοχικό και διαδραστικό προσανατολισμό κατασκευής των εννοιών που αξιοποιεί σύνθετες και διαπραγματευτικές μορφές ακρόασης, ενώ συνδέεται με την εμπειρία και τα ενδιαφέροντα των μαθητών: «Εκ. 2. Τα βάλαμε κάτω αυτά τα (3/20 της τούρτας) κομμάτια και τα φάγαμε. Άρα υπάρχει σαν πρόβλημα αυτό στη ζωή σας. Κάτι που δε είναι ολόκληρο και μετά κάθεστε και το τρώτε. 2 άτομα. ….. Να δούμε πόσο εν τέλει έφαγε η καθεμιά σας, εσύ και η μαμά;». Οι συνεισφορές των μαθητών και στις δύο διδασκαλίες της Ευγενίας επιδρούν τροποποιώντας συχνά τη σχεδιασμένη πορεία του μαθήματος. Στη δεύτερη διδασκαλία οι διδακτικές πρακτικές της μετακινούνται σε πιο ανοιχτές, συνδιαμορφωτικές πρακτικές που εντοπίζονται στον τρίτο προσανατολισμό ακρόασης, «Εκ. Ωραία. Τότε εγώ έχω να σας κάνω μία πρόταση. Σε ομάδες που εσείς θα επιλέξετε, δηλαδή, μπορεί να είστε δύο άτομα, μπορεί να είστε τρία άτομα. Θα διαλέξετε μία ερώτηση από αυτές ή όποια άλλη θέλετε εσείς, θα κάνετε έρευνα με τους συμμαθητές σας εδώ μέσα. …», «Τάξη. Αναστάτωση (Τα παιδιά χωρίζονται μεταξύ τους σε 5 μεικτές ομάδες», «Μα11. Κυρία δεν καταλαβαίνω τι πρέπει να κάνουμε;», «Εκ. Να ρωτήσετε την ομάδα σας…» (40.28), μετατοπίζοντας το μοντέλο διδασκαλίας από πολιτισμικά θεσμοποιημένες και δεδομένες ορθότητες στις υποκειμενικές κατασκευές των μαθητών. Παρατηρείται η υποστήριξη της δυναμικής αλληλεπίδρασης στην τάξη που προωθεί παράλληλα μια δημοκρατική αντίληψη μέσα από το σεβασμό στη συνεισφορά των μαθητών και τη συνεργατική πρακτική. Οι ρόλοι εκπαιδευτικού - μαθητών συμπλέκονται σε ένα μοντέλο συν-ερευνητών, «Ναι, να πεις ερωτήσεις, τι θα ήθελες να μάθεις;», «Δεν ξέρω. Άμα θέλεις να το ψάξουμε με ένα ερωτηματολόγιο. Για πες μία ερώτηση που θα έκανες;», «εγώ νομίζω ότι είναι συνολικά αλλά δεν ξέρω κιόλας», «Αυτή είναι η προσωπική μου άποψη», στην πορεία κατανόησης και κατασκευής του νοήματος των μαθηματικών.

Κοινές πρακτικές εντοπίζονται και στις δύο περιπτώσεις. Οι πρωτοβουλίες των μαθητών αντιμετωπίζονται ως προσωπικό μαθησιακό εμπόδιο του μαθητή. Τις διαχειρίζονται με συγκεντρωτικό και άμεσο τρόπο σε μια εξατομικευμένη αλληλεπίδραση, χαρακτηριστικά που εντοπίζονται στον αξιολογητικό προσανατολισμό ακρόασης. Η πρακτική και των δύο εκπαιδευτικών διαπερνάται από λόγους (discourses) και ενέργειες που θεωρούν τα μαθηματικά ως γνώση που δε βασίζεται στον προσωπικό/εμπειρικό τρόπο κατασκευής των μαθητών αλλά δημιουργείται έξω από την τάξη και επαναλαμβάνεται στο περιβάλλον της τάξης, «Εκ. Μπερδεύτηκε γιατί μάλλον ξεχάσαμε τη θεωρία, έτσι; Ενώ στην πράξη το κάνουμε πολύ απλά είναι πιο εύκολο. Έτσι, λοιπόν, αν στο 2,9 δώσουμε 1/10 θα γίνει 3…..» (48.50) (Σωτήρης), «Εκ. 3/40 (έφαγαν) και η μια και η άλλη το ίδιο, εντάξει; Έλα, Μα10, «Μα10. Δεν μπορούσαν να φάνε ενάμισι ο καθένας;», «Εκ. Ε, αυτό έκαναν ενάμισι η καθεμιά έφαγε.», «Μα10.

ναι, αλλά όμως 3/40;», «Εκ. ναι, [...] Απλώς το είπαμε με μαθηματικά.» (60.05) (Ευγενία) και παρά τις απόψεις που εκφράστηκαν, ότι «τα μαθηματικά είναι επινόηση», «εργαλείο γνωστικό νοητικό» «ανθρώπινη κατασκευή», «η επιστημονική γνώση […] αυτοαναιρείται ή αντικαθίσταται από νέες θεωρίες», τελικά, «δεν επηρεάζει το μάθημά μου», (Σωτήρης), «προσεγγίζω τα μαθηματικά πιο απόλυτα σε σχέση με τα άλλα πεδία» (Ευγενία).

Στην ερώτηση αν ο μαθηματικός γραμματισμός μπορεί να αποτελεί εργαλείο εκδημοκρατισμού (π.χ. συνδιερεύνηση, συνκατασκευή του νοήματος, κουλτούρα σεβασμού, ποικιλίας απόψεων) και οι δύο εκπαιδευτικοί διατυπώνουν τις αμφιβολίες τους. Αναγνωρίζουν ως σημαντικό και κρίσιμο φίλτρο-κλειδί το μαθηματικό γραμματισμό για την προσωπική και τη μελλοντική ζωή των μαθητών-μελλοντικών πολιτών συναρτώντας το με οικονομικούς και κοινωνικούς παράγοντες αλλά δε τον συνδέουν με τις εξουσιαστικές σχέσεις που αναπτύσσονται στην τάξη των μαθηματικών, «Μια μικρή αυθεντία την κρατάω για μένα» (1.21.50) (Σωτήρης), «Τα μαθηματικά είναι ένα δύσκολο εργαλείο […] Όλη η επιστημονική γνώση (αλλάζει) και τα μαθηματικά αλλά είναι από αυτά που αλλάζουν πιο δύσκολα» (49.53) (Ευγενία) και την επίδραση που αυτές έχουν στην κοινωνικοπολιτική ταυτότητα του μαθητή-μελλοντικού πολίτη.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στις διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί του δείγματος αποτυπώνεται κυρίαρχα ο έλεγχος και η επικύρωση της γνώσης/απάντησης. Αποτελεί ατομική ευθύνη του μαθητή η πρόσβαση στο μαθηματικό νόημα ενώ οι ρόλοι του εκπαιδευτικού – μαθητή είναι απόλυτα διακριτοί. (Davis, 2013). Στις διαδικασίες προωθείται η εργαλειακή χρήση των μαθηματικών, χαρακτηριστικά που ενισχύουν το μοντέλο μετάδοσης της γνώσης, ευρήματα που συμβαδίζουν με τη βιβλιογραφία (Mhlolo & Schafer, 2012). Για τους μαθητές παραμένει ο ρόλος της παθητικής αποδοχής των δηλώσεων της αυθεντίας του εκπαιδευτικού και της επανάληψής τους, χαρακτηριστικά που δεν ενθαρρύνουν την εννοιολογική κατανόηση, την ανεξαρτησία της μαθηματικής σκέψης και την αξιοποίηση των μαθηματικών ως εργαλείο σκέψης και δράσης. Η μεταβίβαση ευθύνης για διαμαθητική αλληλεπίδραση δεν διευκολύνεται, πρακτική που συντηρεί ένα πλαίσιο μάθησης λιγότερο δημοκρατικό, επομένως και λιγότερο χειραφετητικό που δεν προωθεί τη επιστημολογική ενδυνάμωση (Ernest, 2002) των μαθητών (Davis, 2013· Coles, 2002). Όσον αφορά τον προσανατολισμό ακρόασης, τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά διαμορφώνουν τον αξιολογητικό προσανατολισμό ακρόασης ενώ εντάσσονται σε ένα εξαρτητικό και ιεραρχικό μοντέλο γραμματισμού, μετατρέποντας τη μαθηματική επεξεργασία σε τετριμμένη εξάσκηση για τα παιδιά και τη διδασκαλία σε τυποποιημένη διαδικασία συμπεριφοριστικού τύπου.

Μικρή αλλά σημαντική μετατόπιση, αποτυπώνουν οι διδακτικές πρακτικές της Ευγενίας, που εναρμονίζονται, κυρίως, με τον δεύτερο προσανατολισμό ακρόασης. Ενεργά και σκόπιμα υποστηρίζεται η προσωπική διαδρομή κατανόησης των μαθητών και παρέχονται ευκαιρίες μιας πιο συμμετοχικής και κριτικής εμπλοκής τους στη συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος. Η μετακίνηση του προσανατολισμού ακρόασης της Ευγενίας στη δεύτερη διδασκαλία μπορεί να αποδοθεί στο είδος της θεματολογίας του διδακτικού αντικειμένου συνδυαστικά με το προσωπικό/επαγγελματικό ενδιαφέρον και τη γνώση για τη συγκεκριμένη θεματική (Davis, 2013), όπως επίσης και στην ανταπόκριση των μαθητών.

Τα χαρακτηριστικά των τριών προσανατολισμών που εντοπίζονται στη διδασκαλία της Ευγενίας αποτελούν παράδειγμα συνύφανσής τους σε μια μορφή «σύνθετης ακρόασης» που υποδεικνύει πως ο προσανατολισμός ακρόασης συνιστά μια δυναμική, δημοκρατική και αναστοχαστική πορεία από τον πρώτο στον τρίτο με στόχο το μετασχηματισμό των διδακτικών πρακτικών σε πιο συμμετοχικές και κατασκευαστικές κατευθύνσεις (Coles, 2002· Davis, 2013). Αν και από τη συνέντευξη προκύπτουν αντιφάσεις και αντινομίες, που οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν, η επίγνωση αυτή δεν φαίνεται ικανή από μόνη τους να μετασχηματίσει την πρακτική.

Καταλήγοντας, οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών εμπεριέχουν συνδυασμό στοιχείων παραδοσιακών μορφών διδασκαλίας και επιστημολογίας του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού με προοπτική στο γνωστικό άτομο, ανεξάρτητα από το νόημα που οικοδομεί, τα κοινωνικοπολιτικά συγκείμενα και την κοινωνική σημασία της ανάπτυξης της κριτικής αντίληψης για τη χρήση και το ρόλο του μαθηματικού γραμματισμού. Η ισχυρή παρακαταθήκη της διάσπασης της γνώσης σε μετρήσιμους στόχους και οι ανταγωνιστικές μορφές αξιολόγησης που διέπουν την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση στο σύνολό της φαίνεται να διαμορφώνουν δομικά εμπόδια στο μετασχηματισμό της στην κατεύθυνση της δημοκρατικής συγκρότησης των μαθηματικών εννοιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Coles, A. (2002). Teaching strategies related to listening and hearing in two secondary classrooms. *Research in mathematics education*, *4*(1), 21-34.

Davis, B. (2013). *Teaching mathematics: Toward a sound alternative*. UK: Routledge.

Ernest, P. (2002). Empowerment in mathematics education. *Philosophy of mathematics education Journal*, *15*(1), 1-16.

Frankenstein, M. (2014). A Different third r: Radical math. *Radical Teacher*, *100*, 77-82.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 37-68.

Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *2nd International Handbook of Mathematics Education* (pp. 75-102). The Netherlands, Dordecht: Kluwer.

Mhlolo, M. K., & Schafer, M. (2012). Towards empowering learners in a democratic mathematics classroom? *Pythagoras*, *33*(2), 1-9.

Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. Educational Studies in Mathematics, 80(1), 101-118.

Skott, J., Mosvold, R., & Sakonidis, C. (2018). Classroom practice and teachers' knowledge, beliefs, and identity. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education* (pp. 162-180). London and New York: Routledge

Skovsmose, O., & Valero, P. (2008). 17 Democratic access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*: *Directions for the 21st Century*, (pp.37-55) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Valero, P. (2017). Mathematics for all, economic growth, and the making of the citizen-worker. In T. Popkewitz, J. Diaz, & C. Kirchgasler (Eds.), *A political sociology of educational knowledge: Studies of exclusions and difference*, (pp. 117-132). New York: Routledge.

Σακονίδης, Χ. (2011). Διδάσκοντας Μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Προτάσεις για την αξιοποίηση του διδακτικού υλικού. Ανακτήθηκε στις 21/1/2020 από http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/2455/739.pdf

ΚΑΛΥΨΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΑΝΑΓΚΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΤΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ - ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Βερβέρας Νίκος, Κακουλίδη Άννα-Νεφέλη, Μούντζια Αθηνά, Μπογιατζή Κατερίνα, Προμπονάς Κωνσταντίνος

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

ververasnikos@gmail.com, akakoylidi@cgs.edu.gr, athinamntz@hotmail.com, kat.bogiatzi@hotmail.com, kostis.17988@gmail.com

Τα τελευταία χρόνια είναι αδιαμφισβήτητο το πόσο ισχυρή παρουσία έχει το φροντιστήριο και το σχολείο στη ζωή των μαθητών. Οι De Silva et al. (1991) εισήγαγαν την έννοια της «shadow education» στον ακαδημαϊκό χώρο χρησιμοποιώντας τον όρο «ιδιωτική συμπληρωματική διδασκαλία» όταν αναφέρονταν σε αυτό το είδος εκπαίδευσης. Στόχος της παρούσας μελέτης είναι η ανάδειξη των αναγκών στα μαθηματικά για 2 μαθήτριες Γ Λυκείου και ο τρόπος με τον οποίο καλύπτονται συνδυαστικά και από τα δυο πλαίσια. Η αξιοποίηση της Self Determination Theory (SDT) αποκαλυπτει τη συνθετότητα αυτών των αναγκών, αναδεικνύοντας ως προτεραιότητα την κοινωνικοποίηση, την αίσθηση επάρκειας στα μαθηματικά, την αξιοποίηση πηγών και τον ρόλο του καθηγητή των μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε παγκόσμιο επίπεδο παρατηρείται ότι, παράλληλα με την ανάπτυξη και μαζικοποίηση του θεσμού της οργανωμένης επίσημης εκπαίδευσης, εμφανίζονται και δομές συμπληρωματικής εκπαίδευσης που δεν εντάσσονται στο εκπαιδευτικό σύστημα. Το φαινόμενο της εμφάνισης αυτών των δομών προσδιορίζεται από τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών με την εισαγωγή του όρου «shadow education» ή «σκιώδης εκπαίδευση» (Baker et al., 2001). Είναι δεδομένο πως είναι ένα φαινόμενο που παρατηρείται σε διακρατικό επίπεδο, με μεγάλη ένταση και μαζικότητα, έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας (Mori & Baker, 2010). Στην παρούσα ερευνητική εργασία υιοθετούμε τον ορισμό των Baker et al. (2001, σελ 2):

> «Μαθησιακές δραστηριότητες εκτός σχολείου, παράλληλες με τα χαρακτηριστικά της επίσημης εκπαίδευσης, που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αυξήσουν τις δικές τους εκπαιδευτικές ευκαιρίες».

Έρευνες δείχνουν πως στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση, το 59% των μαθητών του γενικού λυκείου παρακολούθησαν φροντιστηριακά μαθήματα , ποσοστό που γίνεται πολύ υψηλότερο στις δύο τελευταίες τάξεις του λυκείου (Kassotakis & Verdis, 2013). Επιπλέον, οι Kassotakis και Verdis διακρίνοντας τις ανάγκες των μαθητών σε εκπαιδευτικές, συναισθηματικές και ψυχολογικές συμπεραίνουν πως η σκιώδης εκπαίδευση στην Ελλάδα δεν παίζει μόνο συμπληρωματικό εκπαιδευτικό ρόλο, αλλά ικανοποιεί και άλλες ψυχολογικές και κοινωνικές ανάγκες των μαθητών και των οικογενειών τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση

Σύμφωνα με τη Valero (2010), η διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να οριστεί ως πεδίο πρακτικής που περιλαμβάνει πρακτικές φορέων και θεσμών οι οποίοι πραγματοποιούνται από διαφορετικά άτομα σε διαφορετικούς τόπους, διαμορφώνουν τον τρόπο που τα μαθηματικά διδάσκονται στα σχολεία και στις τάξεις. Η κοινωνικοπολιτισμική οπτική μας επιτρέπει να διερευνήσουμε ζητήματα που αφορούν τόσο στην υλοποίηση της διδασκαλίας όσο και στον ρόλο που διαδραματίζει το πλαίσιο (θεσμικό, κοινωνικό) μέσα στο οποίο αυτή συμβαίνει. Μια τέτοια προσέγγιση λοιπόν αντιλαμβάνεται τη μάθηση όχι μόνο ως ατομική προσπάθεια, αλλά ως συλλογικό προϊόν που προκύπτει μέσα από την κοινωνική και πολιτισμική αλληλεπίδραση (Πετροπούλου, 2018).

> «Τα άτομα είναι πάντοτε μέλη πολλών ιδρυμάτων... οι εμπειρίες τους εξαρτώνται από το θεσμικό πλαίσιο, τη γλώσσα του και το είδος των κοινωνικών αλληλεπιδράσεών του» (Recio & Godino , 2001, σελ. 96).

Οι ανάγκες των μαθητών

Το κεντρικό ζήτημα για τη διδακτική των μαθηματικών είναι «πώς μπορεί να είναι μία διδασκαλία, που ανταποκρίνεται αποτελεσματικά στις ανάγκες μάθησης των μαθητών» (Hiebert & Grouws, 2007,σελ.399). Μάλιστα κομβική ανάγκη των μαθητών αποτελεί το να μαθαίνουν σε ένα περιβάλλον το οποίο αναγνωρίζει αυτές τις ανάγκες και δομείται αναλόγως καθώς και η ανάγκη δέσμευσής τους στην διαδικασία του μαθήματος μέσω των κινήτρων που παρέχονται από τον εκπαιδευτικό. Όσον αφορά τις γνωστικές ανάγκες μπορεί να υπάρξει μεγάλη εξειδίκευση π.χ. ανάπτυξη διαδικαστικής επάρκειας, επιχειρηματολογίας κτλ (ACME, 2011). Παρ’όλα αυτά τονίζεται ότι ενώ οι γνωστικές ανάγκες είναι εύκολο να καθοριστούν και να αξιοποιηθούν στο σχεδιασμό της διδασκαλίας, τελικά η αναγνώριση των κοινωνικών και συναισθηματικών αναγκών μπορούν να διευκολύνουν σε μεγάλο βαθμό τη διδασκαλία αλλά και την ικανοποίηση των αναγκών στο γνωστικό επίπεδο.

Self determination theory

Η Self Determination Theory (SDT) και η ερμηνεία των δεδομένων μας με βάση αυτήν είναι αποκαλυπτική για τη συνθετότητα αυτών των αναγκών. Σύμφωνα με τους Ryan και Deci (2008) η Self Determination Theory είναι μία θεωρία βασισμένη στην εμπειρία που αφορά το κίνητρο, την ανάπτυξη και τη θέληση των ανθρώπων και προκειμένου να επιτευχθεί πρέπει να υποστηρίζονται οι βασικές ψυχολογικές ανάγκες για αίσθηση του «ανήκειν» (relatedness), την ικανότητα (competence) και την αυτονομία (relatedness) . Η πρώτη από αυτές τις ανάγκες είναι η «συγγένεια» ή συναισθήματα ασφάλειας και ανήκουν στο κοινωνικό περιβάλλον που παρακινούν τα άτομα να ακολουθήσουν κανόνες. Το δεύτερο είναι η «ικανότητα», η οποία προέρχεται από την αποτελεσματική λειτουργία και αποτελεί σημαντικό συστατικό για την ανάπτυξη της αυτοεκτίμησης. Η τρίτη ανάγκη είναι η «αυτονομία», η αντίληψη ενός ατόμου για τον έλεγχο των ενεργειών του και της επιτυχίας που είναι ζωτικής σημασίας για την προώθηση των κινήτρων (Ryan & Deci, 2008).

Ερευνητικό πρόβλημα

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην κάλυψη των αναγκών μαθητριών Γ' Λυκείου, όπως προκύπτουν από τις αντιλήψεις και τους ισχυρισμούς των ίδιων. Πέρα από την ανάδειξη των αναγκών τους, μας ενδιαφέρει το πώς καλύπτονται αυτές από τους δύο θεσμούς στους οποίους συμμετέχουν οι μαθήτριες, πάντα στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών. Έτσι θέτουμε το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

ΕΕ: Με ποιον τρόπο το φροντιστήριο και το σχολείο καλύπτουν τις ανάγκες δύο μαθητριών της Γ' Λυκείου, στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών, σύμφωνα με τις ίδιες;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αν και η πρόσβαση σε μαθητές ήταν περιορισμένη, λόγω των ειδικών συνθηκών της περιόδου της καραντίνας λόγω του ιού COVID-19, καταφέραμε να μελετήσουμε περιπτώσεις 2 μαθητριών με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Η παρούσα έρευνα μελέτησε την περίπτωση δύο μαθητριών Γ' λυκείου θετικής κατεύθυνσης, με καλή σχέση με τα μαθηματικά και καλές επιδόσεις σε αυτά. Για την λήψη των δεδομένων μας χρησιμοποιήθηκε το ερευνητικό εργαλείο των ημιδομημένων συνεντεύξεων. Σχεδιάστηκαν εκ των προτέρων μερικές βασικές ερωτήσεις (18 ερωτήσεις) αλλά επιλέχθηκε να δοθεί μεγάλη ευελιξία και ελευθερία στις μαθήτριες να εκφράσουν τις αντιλήψεις τους. Επιτρέψαμε επίσης στους συνεντευκτές απρογραμμάτιστες ερωτήσεις, παραλλαγές και ερωτήσεις αποσαφήνισης (Zaskis & Hazzan, 1999) που προσαρμόζονταν ανάλογα με τις απαντήσεις και τις θεματικές που αναδεικνύονταν. Οι συνεντεύξεις έγιναν μέσω Skype, είχαν διάρκεια 1 ώρα περίπου η κάθεμια και πραγματοποιήθηκαν τον μήνα Απρίλιο 2019 στη διάρκεια των διακοπών των σχολείων, προς διευκόλυνση του προγράμματος των μαθητριών. Οι συνομιλίες καταγράφηκαν (ήχος και εικόνα), παρακολουθήθηκαν σε δεύτερο χρόνο από όλους τους ερευνητές και απομαγνητοφωνήθηκαν.

Οι κύριοι Άξονες της συνέντευξης ήταν: <u>Στρατηγική επιλογής</u> (ερ2: Ποιοι ήταν οι λόγοι που σε οδήγησαν να ξεκινήσεις το φροντιστήριο;) <u>Συμμετοχή στην διδακτική διαδικασία μέσα στο κάθε πλαίσιο</u> (ερ5: Περιέγραψέ μας τη συμμετοχή σου κατά τη διάρκεια του μαθήματος στο σχολείο και στο φροντιστήριο) <u>Μελλοντικοί στόχοι</u> (ερ15: Ποιοι είναι οι στόχοι σου για το μέλλον (σπουδές, επάγγελμα) α. Πώς βοηθάει το σχολείο στην επίτευξη αυτών των στόχων; β. Πώς βοηθάει το φροντιστήριο στην επίτευξη αυτών των στόχων;).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στο πρώτο στάδιο κάθε ερευνητής ξεχωριστά έκανε μία πρώτη ανάγνωση των κειμένων των απομαγνητοφωνήσεων γραμμή-γραμμή ώστε να παρατηρηθούν κατηγορίες και θεματικές. Σε δεύτερο στάδιο η ομάδα των ερευνητών συμφώνησε ποιες κατηγορίες αναγκών προκύπτουν για τις μαθήτριες και προχώρησαν στην συγχώνευση των κωδικών για κάθε κατηγορία (με βαση τις κατηγορίες της SDT) και επέλεξαν αυτούς που ήταν συνηθέστεροι, πιο αποκαλυπτικοί και πιο κοντά στο ερευνητικό ερώτημα που αφορά τις ανάγκες των μαθητριών. Παραδείγματα κατηγοριοποίησης των αναγκών:

Σύνδεση με το κοινωνικό περιβάλλον: Μ2: «γενικά νιώθω πιο άνετα να μιλάω στην τάξη (εννοεί στο φροντιστήριο), συμμετέχω πιο πολύ, βλέπω εκεί πέρα ότι μιλάω με πιο πολλά άτομα και χαίρομαι γιατί τις προηγούμενες χρονιές δε γινόταν τόσο αυτό»

Η δεύτερη αποτελεί σημαντικό συστατικό για την ανάπτυξη της αυτοεκτίμησης Μ1: «… αλλά έχω γράψει και ένα 93 το λέω γιατί είχα χαρεί»

Η τρίτη αφορά στην αυτονομία των μαθητριών: Μ1: «Και έτσι σιγά-σιγά άρχισα να οργανώνω την μελέτη μου, μετά από μήνες άρχισα να μπαίνω σε ένα πρόγραμμα…»

Στο τελευταίο στάδιο έγινε η τελική ταξινόμηση των κωδικών όπως φαίνεται στον Πίνακα 1

Σύνδεση με το κοινωνικό περιβάλλον	**Μαθηματική επάρκεια**	**Αυτονομία-έλεγχος δράσεων**
Προσαρμογή Πλαίσιο Νόρμες τάξης Συμμαθητές Κοινωνικοποίηση Αίσθηση ασφάλειας Εμπιστοσύνη Σχέση με καθηγητή Κοινωνικές επιρροές Εκπαιδευτικός Οικογένεια Κοινωνικές νόρμες	Αυτοπεποίθηση Επιρροή καθηγητή Σύγκριση με συμμαθητές Σχέση με τα μαθηματικά (παρόν-παρελθόν-μέλλον) Συμμετοχή Επιδόσεις Επανάληψη-ανατροφοδότηση Κίνητρο(παρόν-μέλλον)	Οργάνωση διαβάσματος (προγραμματισμός) Επιλογή-πρόσβαση σε πηγές Καθηγητής Θεσμικές (επίσημα συγγράματα) Shadow πηγές Συμμαθητές Ίντερνετ Μελλοντικοί στόχοι Σπουδές Επάγγελμα Αποκατάσταση οικονομική

Πίνακας 1. Κατηγορίες με βάση τη Self-determination θεωρία και την κωδικοποίηση των δεδομένων

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν ανάγκες διαφόρων μορφών, τις οποίες κατηγοριοποιήσαμε με βάση τη συχνότητα εμφάνισης και τα χαρακτηριστικά και τον σκοπό που αυτές εξυπηρετούσαν. Συγκεκριμένα, η ανάγκη της κοινωνικοποίησης ήταν φανερή τόσο στο σχολείο, όσο και στο φροντιστήριο, η οποία άλλοτε καλυπτόταν μέσω της συναναστροφή με τους συμμαθητές στο σχολείο, κι άλλοτε λειτουργούσε ως παράγοντας προσαρμογής στο πλαίσιο του φροντιστηρίου.

Μ1: «… η αλήθεια είναι ότι μ' αρέσει που συναναστρέφομαι με παιδιά της ηλικίας μου, είναι ένας πολύ σημαντικός λόγος που ξυπνάω με διάθεση και θα πάω στο σχολείο..»

Μ2: «…Νιώθω καλύτερα στην τάξη του φροντιστηρίου γιατί ήμασταν και από πέρυσι μαζί και είμαστε και πιο λίγα άτομα εκεί πέρα είμαστε και πιο άνετα μεταξύ μας και κάνουμε παρέα και στα διαλείμματα»

Ως προς το γνωστικό κομμάτι, αναδείχθηκε η ανάγκη ύπαρξης πηγών, αλλά και η ανάγκη σωστής οργάνωσης του χρόνου και προγραμματισμού της ύλης. Φάνηκε πως στο πλαίσιο του σχολείου, η βεβιασμένη κάλυψη του αναλυτικού προγράμματος δεν οδηγούσε στην κάλυψη της ανάγκης αυτής, ενώ αντίθετα η καλοκαιρινή προετοιμασία του φροντιστηρίου την ολοκλήρωνε.

Μ1: «Το σχολικό βιβλίο σου μαθαίνει τα βασικά δεν σε πάει ένα βήμα παραπάνω. Οπότε σίγουρα χρειάζεται μία βοήθεια.»

Μ1: «… και πρέπει να βγάλουν την ύλη και όταν βλέπουν ότι έχουν μείνει πίσω αρχίζουν να λένε πιο πολλά πράγματα πιο γρήγορα και στην ουσία δεν αποδίδει αυτό απλά προσπαθούν να καλύψουν την ύλη δεν τους νοιάζει αν έχουμε καταλάβει»

Μ1: «…το καλοκαίρι είχαμε ξεκινήσει ήδη την ύλη σε όλα τα μαθήματα για φέτος (στο φροντιστήριο)»

Ως προς την οργάνωση του διαβάσματος φάνηκε πως η αναλυτική ολοκλήρωση της ύλης και οι στρατηγικές συμβουλές του φροντιστηρίου δημιούργησαν μία αίσθηση ασφάλειας καλύπτοντας την ανάγκη των μαθητριών.

Μ2: «Συνήθως ξαναλύνω τις ήδη λυμένες γιατί το έχω συνηθίσει από την πρώτη λυκείου που μας το έλεγε ο καθηγητής στο σχολείο να το κάνουμε αυτό …»

Μ1: «Ήξερα ότι μετά τους επόμενους μήνες θα το ξαναπούμε στις επαναλήψεις (εννοεί στο φροντιστήριο), οπότε δεν είχα αυτό το άγχος.»

Ως προς τους μελλοντικούς τους στόχους , οι συμμετέχουσες της έρευνας συμπεριέλαβαν τόσο το σχολείο όσο και το φροντιστήριο ως παράγοντες εκπλήρωσης των στόχων τους, είτε εκφράζοντας τον θαυμασμό τους σε κάποιον καθηγητή-πρότυπο που μπορεί να τους ενέπνεε, είτε αναγνωρίζοντας τη συμβολή τους μέσω της προετοιμασίας που τους παρείχαν για τις Πανελλαδικές.

Μ1: «.. θαυμάζω κι όλους τους καθηγητές (…) θέλω να ασχοληθώ με την εκπαίδευση.. γι’ αυτό κιόλας»

Μ2: «Γενικά ο μαθηματικός που έχω με έχει κάνει να το αγαπήσω τόσο το (…) και στο φροντιστήριο το ίδιο, οι μαθηματικοί βλέπω ότι είναι πάρα πολύ καλοί (…) και θέλω γενικά να το κάνω κι εγώ γενικά αυτό στο μέλλον»

Μ1: «… στο φροντιστήριο έγραφα μία φορά το μήνα, γράφαμε προσομοιώσεις μπορεί και δύο, γράφαμε κάθε Σάββατο τρίωρα οπότε από την αρχή είχα μπει στο κλίμα των πανελληνίων (…) αυτό με βοήθησε πάρα πολύ»

Ως προς την ανάγκη της σχέσης με το πλαίσιο και τον εκπαιδευτικό, τα συναισθήματα απέναντι στους καθηγητές ήταν και στις δύο περιπτώσεις κυρίως θετικά. Στην περίπτωση όμως του σχολείου, φάνηκε πως υπήρχε έντονος ανταγωνισμός στο πλαίσιο του μαθήματος, πολλοί περισπασμοί , ενώ αναφέρθηκε μεγάλος αριθμός ατόμων στις τάξεις και η διδασκαλία ως «καθηγητοκεντρική». Αντίθετα, στο φροντιστήριο υπήρξε στενή σύνδεση μεταξύ των μαθητών, λίγοι μαθητές στις τάξεις και η διδασκαλία αναφέρθηκε ως «συνεργατική».

Μ1: «… στο Φροντιστήριο (…) πραγματικά έχουμε δεθεί και συνεργαζόμαστε πάρα πολύ κι εμένα με βοηθάνε και τους βοηθάω (…) που στο σχολείο ποτέ»

Μ1: «… στα μαθηματικά στο σχολείο είναι ο καθηγητής μόνος του στην τάξη, αυτός μιλάει μόνο, αυτός λύνει μόνο στον πίνακα, δεν έχει σηκωθεί ποτέ παιδί στον πίνακα να γράψει κάτι (…) στο φροντιστήριο… υπάρχει μια συνεργασία κι από τον καθηγητή και με τον μαθητή»

Οι πιο σημαντικές συγκρούσεις που φαίνεται να έχουν τα δυο πλαίσια ως προς την κάλυψη των αναγκών αφορούν στον χρόνο που χρειάζονται οι μαθήτριες για εμπέδωση και επανάληψη της ύλης που καλύπτεται από το φροντιστήριο. Ο τρόπος διδασκαλίας ως επί το πλείστον είναι διαφορετικός σε κάθε περίπτωση καθώς στο σχολείο αναφέρεται ως καθηγητοκεντρικός ενώ στο φροντιστήριο περισσότερο συνεργατικός, γεγονός που διευκολύνει την κοινωνικοποίηση και καλές σχέσεις μεταξύ των μαθητών και μεταξύ μαθητών με τους καθηγητές.

Κάτι που φάνηκε να διαπερνά όλες τις ανάγκες των μαθητριών ήταν οι συναισθηματικοί παράγοντες. Μέσα από τα λεγόμενα των μαθητριών αναδεικνύονται συναισθήματα άγχους, αισθήματα επάρκεια/ανεπάρκειας, θαυμασμού, ανταγωνισμού και εμπιστοσύνης, αυτοπεποίθησης ή ανασφάλειας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα των δεδομένων αναδεικνύουν πόσο ισχυρή παρουσία έχει το φροντιστήριο και το σχολείο στη ζωή των μαθητών. Και τα δύο επιδρούν τόσο πάνω στην κοινωνική ζωή, όσο και στη μαθησιακή διαδικασία, στην προετοιμασία και αντίληψη για την ενήλικη ζωή αλλά και στους μελλοντικούς τους στόχους. Μάλιστα κάποιες φορές το ένα πλαίσιο επηρεάζει το άλλο αλλά με διαφορετικό τρόπο (Mori & Baker, 2010). Το φροντιστήριο επηρεάζεται εξ αρχής θεσμικά από την επίσημη εκπαίδευση προφανώς, αφού έχει μιμητικά και συμπληρωματικά χαρακτηριστικά ενώ το σχολείο επηρεάζεται ως προς τις πρακτικές του εκπαιδευτικού, ο οποίος φαίνεται να λαμβάνει υπόψιν τον παράγοντα ‘φροντιστήριο’ στην οργάνωση της διδασκαλίας του.

Ως προς το ερευνητικό μας ερώτημα οι ανάγκες των μαθητών καλύπτονται και από τα δυο πλαίσια είτε συνδυαστικά είτε οι μαθητές αξιοποιούν τα θετικά του κάθε πλαισίου. Τελικά φαίνεται να ευνοούνται και από τα δύο, όπως συχνά συμβαίνει σύμφωνα με τον Bray (2011). Έτσι η κάλυψη των αναγκών των μαθητών είναι μια δυναμική διαδικασία που αναδεικνύει τη διαλεκτική σχέση που αναπτύσσεται συνολικά και σε πολλά επίπεδα και από τα δύο πλαίσια. Μάλιστα, συμπεραίνουμε από τα δεδομένα μας, πως σε κάποιες περιπτώσεις το κέντρο βάρους κάλυψης υψηλά ιεραρχημένων αναγκών των μαθητών (μελλοντικοί στόχοι) μετατοπίζεται προς το φροντιστήριο. Συμπεραίνουμε λοιπόν τον κεντρικό 'συντονιστικό' ρόλο του φροντιστηρίου στη Γ' λυκείου στην κάλυψη αυτής της ανάγκης. Μάλιστα αποτελεί και παράγοντα αποσυμφόρησης άγχους για τους μαθητές αυτή η δυνατότητα του φροντιστηρίου (επανάληψη, ανατροφοδότηση, θερινή προετοιμασία).

Στην μελέτη μας προκύπτει για τις μαθήτριες μια διαρκή ανάγκη για πηγές. Σίγουρα το φροντιστήριο παρέχει πολλές επιλογές για την κάλυψη αυτής της ανάγκης, άλλα ο εκπαιδευτικός του σχολείου στο οποίο φοιτούν οι μαθήτριες, προσφέρει κι αυτός ακόμα περισσότερες επιλογές -προς ικανοποίηση των μαθητριών. Αυτό μας δείχνει πως η ανάγκη για πηγές, η οποία μένει συνεχώς ως ένα βαθμό ανικανοποίητη, σχετίζεται κυρίως με τη φύση των μαθηματικών και τις απαιτήσεις των πανελλαδικών εξετάσεων.

Σημαντικό συμπέρασμά μας αποτελεί ότι η ανάγκη που επικαθορίζει σε μεγάλο βαθμό το κίνητρο αλλά και την εμπλοκή των μαθητριών στη διδακτική πράξη και τη μάθηση των μαθηματικών είναι η σχέση με το πλαίσιο στο οποίο μαθαίνουν και η σχέση με τον εκπαιδευτικό. Οι σχέσεις αυτές είναι δυναμικές και μεταβάλλονται σε αλληλεπίδραση με το πλαίσιο. Κάθε αλλαγή απαιτεί και ένα χρόνο προσαρμογής είτε στις κοινωνικομαθηματικές νόρμες της τάξης είτε στο διδακτικό προφίλ του εκπαιδευτικού. Αναδείχθηκε ο κομβικός ρόλος του καθηγητή και στα δύο πλαίσια, ο οποίος λειτουργώντας άλλοτε ως πρότυπο, άλλοτε ως παράγοντας κινήτρου μάθησης και άλλοτε ως σύμβουλος οργάνωσης μελέτης, αποτελεί βασικό πυρήνα στην κάλυψη των εκπαιδευτικών αναγκών των μαθητών. Οι μαθήτριες μάλιστα φάνηκε να αδυνατούν να διαχωρίσουν τα προσωπικά χαρακτηριστικά του κάθε εκπαιδευτικού από την εκπαιδευτική πολιτική και τους θεσμικούς περιορισμούς. Κάτι παρόμοιο έχει παρατηρηθεί σε μια σειρά από έρευνες όπου οι μαθητές αδυνατούν να εκφράσουν τις γνωστικές τους ανάγκες τους, αλλά οι απαντήσεις τους κυριαρχούνται από το πως ο εκπαιδευτικός και οι πρακτικές του επηρεάζουν τα συναισθήματά τους, και την αίσθηση μαθηματικής επάρκειάς τους (ACME, 2011.). Πέρα από αυτή την παρατήρηση βέβαια έχει ενδιαφέρον μία παραπάνω εμβάθυνση στο ρόλο του εκπαιδευτικού και του πλαισίου, όχι με όρους συμπεριφορισμού, αλλά στα πλαίσια της Self Determination Theory (SDT) .

Η ανάλυση των δεδομένων μας ανέδειξε το ρόλο του καθηγητή αλλά και του κοινωνικού πλαισίου και στην διαμόρφωση των κινήτρων. Τελικά το κίνητρο των μαθητών φαίνεται να επηρεάζει τόσο τη συνολική σχέση με τα μαθηματικά και την αυτοεκτίμησή τους όσο και την αίσθηση μαθηματικής επάρκειας, τη συμμετοχή τους στη διδακτική πράξη, τις επιδόσεις τους και τους μελλοντικούς στόχους. Πράγματι, η έρευνα μέσω της SDT υπογράμμισε μια κοινωνικο-γνωστική προοπτική (Dweck & Leggett, 1988). Τα λεγόμενα της Μ1 μας έδειξαν ότι ο κλονισμός μία εκ των τριών αναγκών της SDT (αίσθηση μαθηματικής επάρκειας) λόγω της αδυναμίας προσαρμογής στη διδασκαλία του εκπαιδευτικού του σχολείου, είναι ικανή να κλονίσει συνολικά τη χρόνια καλή της σχέση με τα μαθηματικά. Παρ'όλα αυτά η μαθήτρια κατάφερε τελικά να προσαρμοστεί και να εμπιστεφτεί τη διδακτική και επαγγελματική επάρκεια του εκπαιδευτικού και αποκατέστησε τη σχέση της με το αντικείμενο του μαθήματος και τελικά βρήκε το κίνητρό της.

Η ικανοποίηση των συναισθηματικών αναγκών των μαθητών υπό το πρίσμα της Self Determination Theory αποτελεί από μόνη της μια πολυπαραγοντική διαδικασία και σε συνδυασμό με την συμμετοχή τους σε δυο διαφορετικά μαθησιακά πλαίσια αποκτά ακόμα μεγαλύτερη συνθετότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ACME, (2011). Advisory Committee on Mathematics Education. Ανακτήθηκε στις 2/4/2019 από: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwifyPKNr_f2AhWDNewKHUavC0cQFnoECAMQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.nuffieldfoundation.org%2Fsites%2Fdefault%2Ffiles%2Ffiles%2FACME_Theme_B_final.pdf&usg=AOvVaw2sGzlXAbCH43zDZhW5jmWE

Baker, D. P., Akiba, M., LeTendre, G. K., & Wiseman, A. W. (2001). Worldwide shadow education: Outside-school learning, institutional quality of schooling, and cross-national mathematics achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *23*(1), 1-17.

Bray, T. M. (2011). *The challenge of shadow education: Private tutoring and its implications for policy makers in the European Union*. European Commission.

De Silva, W. A., Gunawardane, C., Jayaweera, S., Perera, L., & Rupasinghe, S. (1991). *Extra school instruction, social equity and educational quality (Sri Lanka).*

Dweck, C. S., & Leggett, E. L. (1988). A social-cognitive approach to motivation and personality.*Psychological review*, *95*(2), 256.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 371-404.

Kassotakis, M., & Verdis, A. (2013). Shadow education in Greece: Characteristics, consequences and eradication efforts. In *Private tutoring across the Mediterranean* (pp. 93-113). Brill Sense.

Mori, I., & Baker, D. (2010). The origin of universal shadow education: What the supplemental education phenomenon tells us about the postmodern institution of education. *Asia Pacific Education Review*, *11*(1), 36-48.

Πετροπούλου, Γ. (2018). *Η διδασκαλία των μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, *48*(1), 83-99.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2008). A self-determination theory approach to psychotherapy: The motivational basis for effective change. *Canadian Psychology/Psychologie canadienne*, *49*(3), 186.

Valero, P. (2010, January). Mathematics education as a network of social practices. In *Proceedings of the sixth congress of the European society for research in mathematics education*.

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 429-439.

ΠΑΡΕΜΒΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δεσποτόπουλος Γιώργος, Πιττάλης Μάριος

Β΄ Αρσάκειο Ψυχικού, Φιλεκπαιδευτική εταιρία, Αρσάκεια-Τοσίτσεια Σχολεία,
Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

despotopoulos.g@e-arsakeio.gr, m.pittalis@ucy.ac.cy

Η αλγεβρική σκέψη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών και αποτελεί ενοποιητικό στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος. Παρόλα αυτά παρατηρείται απουσία ενός ευρέως αποδεκτού ορισμού του όρου και ασυμφωνία ως προς το τι περιλαμβάνει. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός παρεμβατικού προγράμματος για την μάθηση βασικών εννοιών του Γυμνασίου, όπως η έννοια της μεταβλητής, ο σχηματισμός μιας εξίσωσης πάνω σε ένα λεκτικό πλαίσιο και η διάκριση της έννοιας της ανίσωσης από την εξίσωση. Οι βασικές πτυχές που οικοδομούν την αλγεβρική σκέψη στηρίζονται στην ερμηνεία της έννοιας της ισότητας ως σχέση ποσοτήτων, ως συντακτικό δείκτη, και ως μαθηματικό αντικείμενο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα για την πρώιμη αλγεβρική σκέψη, εδώ και αρκετές δεκαετίες, έχει αναπτυχθεί σημαντικά λόγω του σπουδαίου ρόλου που διαδραματίζει στην αφομοίωση βασικών μαθηματικών εννοιών, όπως είναι η έννοια της εξίσωσης, της ανίσωσης και του αγνώστου, που συναντούν οι μαθητές στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η βιβλιογραφία παραθέτει διαφορετικούς ορισμούς για την αλγεβρική σκέψη με αποτέλεσμα να μην υπάρχει μια κοινώς αποδεκτή περιγραφή του όρου (Blanton, et al. 2018). Οι εξηγήσεις που υπάρχουν συνδέονται με το υπόβαθρο του ατόμου και τις αντιλήψεις του για τη φύσητης αλγεβρικής σκέψης.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός παρεμβατικού προγράμματος για τη διδασκαλία των παραπάνω εννοιών της Άλγεβρας στην Β΄ Γυμνασίου. Μέσω κατάλληλα διαμορφωμένων δραστηριοτήτων που αξιοποιούν ψηφιακά εργαλεία, έγινε σύνδεση της έννοιας της εξίσωσης με εκείνη της ανίσωσης. Το παρεμβατικό πρόγραμμα αποτελείται από οκτώ διδακτικές ώρες, εκ των οποίων οι δύο εφαρμόστηκαν πιλοτικά σε τέσσερις μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, για να διερευνηθεί ο βαθμός ανταπόκρισής τους στις έννοιες αυτές και να ανιχνευτούν πιθανές δυσκολίες.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Αυξημένο ενδιαφέρον στην μαθηματική κοινότητα παρουσιάζει η διδασκαλία της Άλγεβρας τις τελευταίες δεκαετίες (Cooper & Warren, 2011). Συγκεκριμένα, αυτό που ερευνάται είναι αν οι νεαροί μαθητές είναι πραγματικά σε θέση να διδαχθούν την άλγεβρα (Carraher, & Schliemann, 2018) και αν μια πρόωρη έκθεση στις στοιχειώδεις αλγεβρικές έννοιες μπορεί να αμβλύνει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Blanton & Kaput, 2017; Blanton, et al. 2018). Παρακάτω παρουσιάζονται μοντέλα περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης που είναι αποδεκτά στην διεθνή βιβλιογραφία.

Το μοντέλο της αλγεβρικής σκέψης των Kaput και Blanton

Ο Kaput (2008) προσδιόρισε την αλγεβρική σκέψη ως τη δημιουργία και την έκφραση των γενικεύσεων σε τυπικά συμβολικά συστήματα και την δράση των συμβόλων εντός των συστημάτων μέσω των γραφημάτων, των πινάκων και των μεταβλητών. Για παράδειγμα, όπως ο ίδιος έχει δηλώσει, αν ένα παιδί μελετήσει πολλές περιπτώσεις του αθροίσματος ενός περιττού με έναν άρτιο, θα καταλήξει στο συμπέρασμα πως το άθροισμα αυτό θα είναι πάντα περιττός αριθμός ανεξαρτήτου επιλογής αριθμών. Υποστήριξε, λοιπόν, ότι οι συγκεκριμένες πτυχές υλοποιούνται σε τρία πεδία: (α) Η άλγεβρα ως η μελέτη δομών και συστημάτων που αντλούνται από υπολογισμούς και σχέσεις, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που αφορούν την ποσοτική και αριθμητική συλλογιστική. (β) Η άλγεβρα ως η μελέτη συναρτήσεων και σχέσεων. (γ) Η άλγεβρα ως εφαρμογή ενός συστήματος μοντελοποίησης.

Η Blanton και οι συνεργάτες της (2018), επηρεασμένοι από την τοποθέτηση του Kaput έδωσαν τη δική τους οπτική στην αλγεβρική σκέψη. Ειδικότερα, πρότειναν ότι η αλγεβρική σκέψη πραγματώνεται μέσω των διαδικασιών της γενίκευσης, της αναπαράστασης, της αιτιολόγησης και του συλλογισμού της μαθηματικής δομής. Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής θέλει να επιχειρηματολογήσει για την εγκυρότητα της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης, θα μπορούσε να σχηματίσει ένα τρένο από 9 βαγόνια εκ των οποίων τα 5 θα ήταν κόκκινα και τα άλλα 4 μπλε και να παρατηρήσει ότι όποιο χρώμα βαγονιών και να είναι πρώτο, το συνολικό άθροισμα των βαγονιών παραμένει ίδιο (4+5=5+4) . Τέλος, προσδιορίζοντας την συναρτησιακή σκέψη ως το πεδίο γενίκευσης για τις συν-μεταβαλλόμενες ποσότητες, την χαρακτήρισαν ως πεδίο-κλειδί εφαρμογής της αλγεβρικής σκέψης.

Το μοντέλο της αλγεβρικής σκέψης της Kieran

Η Kieran (2004, 2008) κατηγοριοποίησε τη σχολική άλγεβρα με κριτήριο το είδος των δραστηριοτήτων στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές: (α) Δραστηριότητες γενίκευσης, (β) Δραστηριότητες μετατροπής που ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες, και (γ) Μετα- αλγεβρικές δραστηριότητες (*meta-level activities*), δηλαδή μαθηματικές δραστηριότητες που στηρίζονται στην αλγεβρική σκέψη και περιλαμβάνουν γενικευμένες μαθηματικές μεθόδους, όπως επίλυση προβλημάτων, μοντελοποίηση, διατύπωση εικασιών, αιτιολόγηση και απόδειξη.

Το μοντέλο της αλγεβρικής σκέψης του Radford

Επηρεασμένος από την οπτική της Kieran, ο Radford (2018) υποστήριξε ότι ο συμβολισμός δεν είναι επαρκής για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και η διαδικασία της γενίκευσης δεν μπορεί να συλλάβει την εξειδίκευση της προαναφερθείσας. Έτσι, πρότεινε τη δική του θεώρηση (*The Theory of Objectification*), κατά την οποία η σκέψη εκλαμβάνεται ως μια μορφή λογισμού και δράσης ταυτόχρονα. Διέκρινε την αριθμητική από την αλγεβρική σκέψη, με βάση τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: (α) η απροσδιοριστία, σύμφωνα με την οποία το πρόβλημα περιλαμβάνει άγνωστες ποσότητες, όπως μεταβλητές, παραμέτρους και γενικευμένους αριθμούς, (β) οι άγνωστες ποσότητες αναπαρίστανται με πολλούς σημειωτικούς τρόπους (π.χ. ερωτηματικά ή κουτιά) και όχι απαραίτητα με στοιχεία του αλφαριθμητικού συστήματος και (γ) οι άγνωστες ποσότητες τυγχάνουν χειρισμού σαν να είναι γνωστές.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΔΙΕΘΝΩΣ

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε ενδεικτικά δύο βασικές προσεγγίσεις της άλγεβρας στα αναλυτικά προγράμματα της Κίνας και της Αυστραλίας, οι οποίες λήφθηκαν υπόψιν στον σχεδιασμό του παρεμβατικού μας προγράμματος. Η επιλογή των συγκεκριμένων αναλυτικών προγραμμάτων έγινε με γνώμονα την σύγκλιση τους με τη δομή του παρεμβατικού. Κοινό γνώρισμα με το πρόγραμμα της Κίνας είναι η χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών τρόπων αναπαράστασης των ποσοτικών σχέσεων κατά την επίλυση των εξισώσεων, ενώ η κύρια ομοιότητα με το πρόγραμμα της Αυστραλίας είναι η χρήση μοτίβων για την ανάδειξη της πρώιμης συναρτησιακής σκέψης.

Το αναλυτικό πρόγραμμα της Κίνας

Σκοπός της διδακτέας ύλης της Κίνας είναι να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις ποσοτικές σχέσεις, αριθμητικά και συμβολικά. Έννοιες όπως οι μεταβλητές, η επίλυση εξίσωσης και η ιδέα της συνάρτησης συνιστούν αντικείμενο μελέτης στο δημοτικό σχολείο από την πρώτη μέχρι την τέταρτη τάξη. Οι εξισώσεις και η επίλυση τους εισάγονται τυπικά στο πρώτο μισό της πέμπτης τάξης, ενώ τα κλάσματα, τα ποσοστά και οι αναλογίες παρουσιάζονται στην αρχή της έκτης τάξης. Ο όρος μεταβλητή συγκεκριμένα, δεν ορίζεται στην διδακτέα ύλη και η έννοια της αναπαρίσταται με σύμβολα όπως το ερωτηματικό ή το κουτί, με ολόκληρες λέξεις και ως αναπαράσταση σχέσεων, όπως η αναλογία. Η νοοτροπία του αναλυτικού προγράμματος στοχεύει στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών μέσα από τρία στάδια: (α) την εξέταση των ποσοτικών σχέσεων και τον τρόπο αναπαράστασής τους, (β) τη χρήση των αντίστροφων πράξεων στη διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων και (γ) τη γενίκευση.

Το αναλυτικό πρόγραμμα της Αυστραλίας

Στην Αυστραλία, κάποιες αλγεβρικές έννοιες εισάγονται ουσιαστικά στην πέμπτη τάξη. Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές διδάσκονται πώς να κατασκευάζουν και να απλοποιούν αλγεβρικές εκφράσεις μιας μεταβλητής. Παράλληλα δε, γίνεται λόγος για την έννοια των γραμμάτων ως μεταβλητές. Στη διδακτέα ύλη παρέχονται τρεις προσεγγίσεις: επίλυση προβλήματος, γενίκευση και συναρτησιακός λογισμός, προκειμένου να αναπτυχθεί η αλγεβρική σκέψη των παιδιών. Συγκεκριμένα, οι μαθητές λύνουν λεκτικά τα προβλήματα των εξισώσεων προσπαθώντας να δώσουν εικονικές αναπαραστάσεις σε αυτά. Μέσω της συναρτησιακής προσέγγισης ενισχύεται η εννοιολογική κατανόηση των μεταβλητών, ενώ με τη χρήση των αριθμητικών μοτίβων οι μαθητές αναπτύσσουν τις διαδικασίες της γενίκευσης και της εξειδίκευσης.

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ζητήματα κατά τη διδασκαλία της άλγεβρας

Πολλές παρανοήσεις δημιουργούνται στους μαθητές εξαιτίας της μετάβασης τους από τον αριθμητικό συλλογισμό στον αλγεβρικό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα παρερμηνείας είναι η αδυναμία των μαθητών να δεχτούν το σύμβολο της ισότητας ως σχέση μεταξύ των ποσοτήτων ή σύμβολο ισοδυναμίας, αφού το ερμηνεύουν ως συντακτικό δείκτη (Kieran, 2018). Ο Welder (2012) από την άλλη, παρατήρησε το πρόβλημα της αλληλουχίας στις αλγεβρικές εκφράσεις (π.χ. $39x + 4 = 35x$), καθώς τα παιδιά τις χωρίζουν σε μεμονωμένα συστατικά. Τέλος, η μαθηματικοποίηση των προβλημάτων δείχνει να είναι ένα τεράστιο εμπόδιο για τους μαθητές, με αποτέλεσμα να συμβάλλει πολλές φορές στην ανάπτυξη αρνητικής προδιάθεσης. Επιπρόσθετα, επιλύουν στοιχειώδη αλγεβρικά προβλήματα με αριθμητικές προσεγγίσεις και προσπαθούν αργότερα σε προβλήματα ανωτέρου επιπέδου να τις εφαρμόσουν.

Η τεχνολογία στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Η ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών, ως εργαλείο έκφρασης και διερεύνησης μαθηματικών εννοιών μέσα από ειδικά λογισμικά. Οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι δύσκολα και ότι οι χρονοβόρες πράξεις εκτελούνται πιο γρήγορα και κατά συνέπεια έχουν χρόνο να σκεφτούν κριτικά και να κάνουν εικασίες. Επιπλέον, η παρατήρηση και ο πειραματισμός είναι οι κύριες δυνατότητες που δίδονται στον μαθητή κατά την εμπλοκή του με την δραστηριότητα. Τέλος, η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας είναι αναγκαία για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών που γίνονται δύσκολα κατανοητές με τις κλασσικές τεχνικές διδασκαλίας, και επιτυγχάνει την επαφή των μαθητών με τα τεχνολογικά μέσα.

ΠΑΡΕΜΒΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Αρχές

Οι αρχές πάνω στις οποίες σχεδιάστηκε το πρόγραμμα βασίζονται στην βιβλιογραφία και είναι οι εξής: (α) Οι μαθητές να κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, οι οποίες παίρνουν τη μορφή εύκολων και άλλοτε δύσκολων προβλημάτων (Kieran, 2018). (β) Ενισχύεται η μάθηση του παιδιού, όταν οικοδομούμε τη νέα γνώση του πάνω στην ήδη υπάρχουσα και τονίζουμε την εννοιολογική κατανόηση και τη σύνδεση των εννοιών (Sfard, 1992). (γ) Η διδακτική μέθοδος και η φύση των δραστηριοτήτων σε συνδυασμό με τη χρήση της τεχνολογίας, όπου ο μαθητής συμμετέχει ενεργά, επιδρά θετικά στην ανάπτυξη της αλγεβρικής του σκέψης (Carpenter et al., 2005). (δ) Το νόημα που προσδίδει ο μαθητής στον συμβολισμό πηγάζει από την αλληλεπίδρασή του με τις δραστηριότητες της άλγεβρας (Radford, 2018).

Περιγραφή παρέμβασης

Με βάση τις δυσκολίες και τα εμπόδια της διδασκαλίας σχεδιάστηκε μια σειρά 8 μαθημάτων (45’-60’ το καθένα). Ο κύριος κορμός καθενός βασιζόταν στην επαφή των μαθητών με τα λογισμικά εργαλεία (π.χ. GeoGebra, Desmos) μέσω tablet από κοινού με ένα φύλλο εργασίας, όπου οι μαθητές, είτε ατομικά, είτε ομαδικά κατέθεταν τις απόψεις τους. Τα μαθήματα που εφαρμόστηκαν στους μαθητές ήταν το 4ο και το 7ο και πραγματοποιήθηκαν σε ένα καλά διαμορφωμένο δωμάτιο με δύο πίνακες και tablets. Πιο αναλυτικά, στο 4ο μάθημα με μια ερώτηση ανοικτού τύπου: «Η πορτοκαλιά είναι το μοναδικό δέντρο;», εισάγεται ο προβληματισμός της έννοιας της μεταβλητής. Εν συνεχεία, με δραστηριότητες, όπως αυτή του διαγράμματος 1 (βλ. παρακάτω) και αυτή του διαγράμματος 2, γίνεται μια προσπάθεια εμπέδωσης της έννοιας και αναπαράστασης των μεταβλητών. Ακολούθως, στο 7ο μάθημα, με μια «ζωντανή» και ελκυστική δραστηριότητα: «Το σχολείο μας πήρε επιχορήγηση αξίας 6500 ευρώ και αγόρασε tablets, όπως αυτά που κρατάνε κάποιοι από εσάς τώρα! Κάθε tablet κόστισε 220 ευρώ. Πόσα tablet το πολύ θα μπορούσε να αγοράσει;», επιχειρείται η γνωριμία με την έννοια της ανίσωσης.

Η κατασκευή των δραστηριοτήτων

Η οικοδόμηση των δραστηριοτήτων βασίστηκε κυρίως στην εννοιολογική κατανόηση, τη σύνδεση των εννοιών μεταξύ τους, καθώς και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών. Ειδικότερα, το υλικό είχε ως στόχο να νοηματοδοτήσει την έννοια της ισότητας και της συνάρτησης, συγχρόνως δε, και το πώς αυτές υπεισέρχονται στην κατασκευή μιας εξίσωσης/ανίσωσης δια της μαθηματικοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων.

Μάθημα	Στόχοι	Περιγραφή
1ο	Νοηματοδότηση συμβόλου ισότητας	Η εισαγωγική δραστηριότητα του φύλλου εργασίας παρουσιάζει μια ζυγαριά με φρούτα. Οι μαθητές καλούνται να αποτυπώσουν με μια αριθμητική έκφραση την ισορροπία του ζυγού.
2ο	Αριθμητικά - Γεωμετρικά μοτίβα. Έκφραση και ερμηνεία γενικεύσεων.	Η εισαγωγική δραστηριότητα περιλαμβάνει βαγόνια-μινιατούρες διαφορετικού χρώματος και ζητείται η σχεδίαση επαναλαμβανομένων μοτίβων επιχειρώντας την εισαγωγή των μαθητών στα πρώιμα στάδια της συναρτησιακής σκέψης.
3ο	Διαισθητική εμπέδωση των αρνητικών αριθμών. Απόλυτη τιμή.	Η εισαγωγική δραστηριότητα περιλαμβάνει παραγωγή αλγεβρικών εκφράσεων από καθημερινές καταστάσεις και διερεύνηση της απόλυτης τιμής στον πραγματικό άξονα.
4ο	Κατανόηση της μεταβλητής για μετάφραση λεκτικών πλαισίων σε μαθηματικές εκφράσεις.	Η εισαγωγική δραστηριότητα περιλαμβάνει δύο ασκήσεις με την έννοια της μεταβλητής (α΄ μέρος). Το β΄ μέρος της πραγματεύεται την ισορροπία μιας ράβδου και μέσω αυτής εξετάζεται το σύμβολο της ισότητας.
5ο	Τοποθέτηση σημείου σε ορθοκανικό σύστημα αξόνων	Η εισαγωγική δραστηριότητα περιλαμβάνει εμπλοκή των μαθητών με τεχνολογικό εργαλείο προκειμένου να προσδιορίσουν ένα σημείο στο σύστημα συνταγμένων.
6ο	Διαισθητική οπτική της έννοιας της συνάρτησης μέσω της γραφικής παράστασης ανάλογων ποσών.	Εισάγεται η έννοια με ένα οικείο πρόβλημα: *«Κάθε μέρα για να έρθω στο σχολείο περπατάω από το σπίτι μου καθαρά 20΄ και κάνω μια στάση για να πάρω καφέ. Αν περπατάω με σταθερή ταχύτητα 1 m/s, πόσο απέχει το σχολείο από το σπίτι μου;»*. Έπειτα, δίνεται ένα πρόβλημα έκπτωσης προϊόντος: ζητείται να οργανώσουν σε έναν πίνακα τις διάφορες τιμές του πριν και μετά την έκπτωση. Στη συνέχεια μέσω της εφαρμογής GeoGebra αποτυπώνουν γραφικά τον πίνακα.
7ο	Εισαγωγή ανίσωσης	Η εισαγωγική δραστηριότητα περιλαμβάνει ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που πραγματεύεται μια επιχορήγηση του σχολείου των μαθητών με σκοπό την αγορά tablet. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται η σύνδεση της λύσης μιας εξίσωσης με το πεδίο λύσεων της ανίσωσης.
8ο	Μαθηματικοποίηση.	Κατά την εισαγωγή ζητείται ένα πρόβλημα αλγεβρικής και γραφικής κατασκευής και ένα πρόβλημα από εξισώσεις, στην καθεμία εκ των οποίων πρέπει να δοθούν δύο ιστορίες.

Πίνακας 1: Περιγραφή μαθημάτων παρεμβατικού προγράμματος

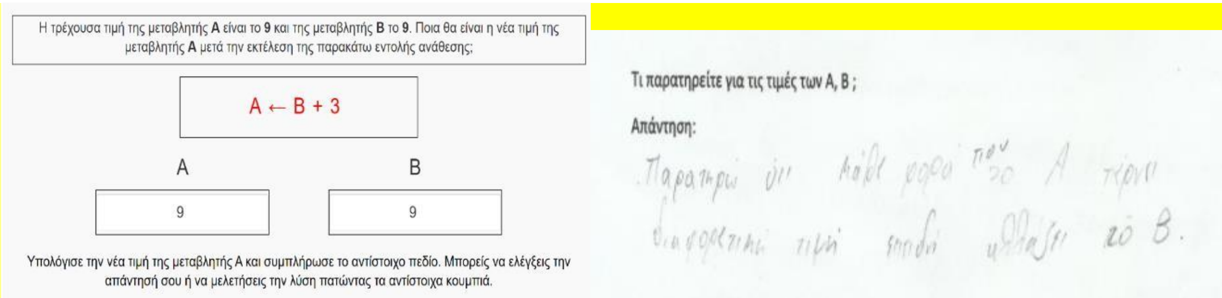
Δείγμα μαθητών παρέμβασης – Διαδικασία – Συλλογή δεδομένων

Για την υλοποίηση της παραπάνω παρέμβασης επιλέχθηκαν τέσσερις μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές εργάστηκαν στα μαθήματα 4 και 7, τα οποία πραγματοποιήθηκαν σε δύο ξεχωριστές μέρες και είχαν διάρκεια 60 λεπτά το καθένα. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν tablet για την εργασία τους. Η συλλογή των δεδομένων στηρίχθηκε στις αντιδράσεις των μαθητών και την αλληλεπίδραση τους με τα ψηφιακά εργαλεία, τις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας και στις μεταξύ τους συζητήσεις. Ο πρώτος ερευνητής λειτούργησε σε ρόλο συντονιστή - καθοδηγητή του μαθήματος, ενώ δεύτερο άτομο λειτούργησε ως παρατηρητής.

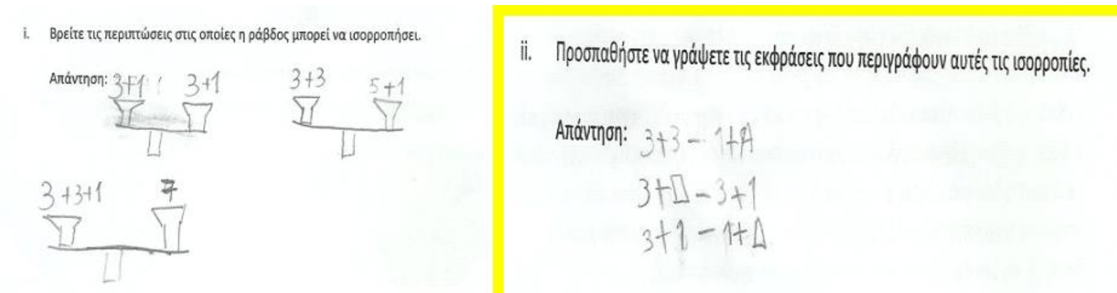
Απαντήσεις μαθητών σε ενδεικτικές δραστηριότητες

Η 1η εισαγωγική δραστηριότητα είχε ως στόχο την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Λεπτομερέστερα, με το πρόβλημα ανάθεσης τιμών (photodentro), οι μαθητές θέτοντας διαφορετικές τιμές κάθε φορά στα γράμματα παρατηρούσαν τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών. Για παράδειγμα, ο μαθητής στο παρακάτω διάγραμμα παρατήρησε ότι αν δώσει μια τιμή στο Α και μια τιμή στο Β τότε η νέα μεταβλητή Α ($A \leftarrow A + B$) παίρνει μια νέα τιμή (Δείτε Διάγραμμα 1).

Στο πρόβλημα της ισότητας οι μαθητές, είτε έδωσαν με λεκτική διατύπωση την ισορροπία της ράβδου, είτε την παρομοίασαν με την ζυγαριά ως ένα οικείο τους παράδειγμα. Το αξιοσημείωτο των απαντήσεων είναι ότι οι μαθητές διέκριναν τις περιπτώσεις της ισορροπίας ακόμα και αν υπήρχαν δύο άγνωστες ποσότητες να χειριστούν. Το Διάγραμμα2 παρουσιάζει ενδεικτικές απαντήσεις.

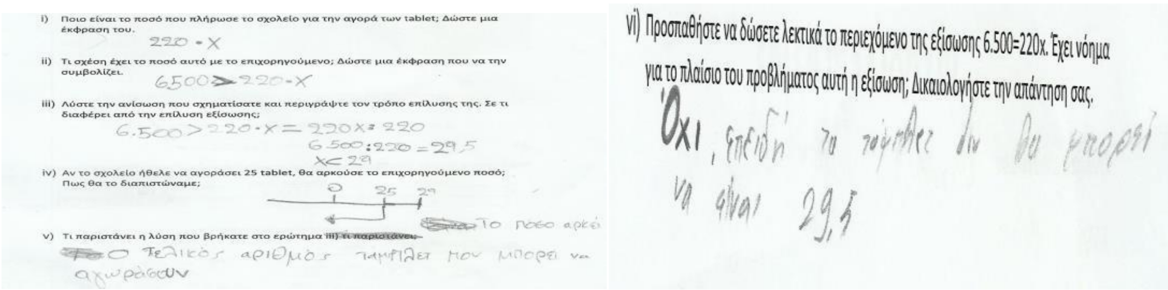


Διάγραμμα 1: Ενδεικτική απάντηση μαθητή για τιμές μεταβλητών



Διάγραμμα 2: Ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών στο μοντέλο ζυγαριάς

Στην εισαγωγική δραστηριότητα του 7ου μαθήματος τα παιδιά επέδειξαν ικανοποιητική κατανόηση του προβλήματος, αφού κατάφεραν να βρουν τις ποσότητες και τη σχέση που τις συνδέει με βάση το λεκτικό πλαίσιο. Το διάγραμμα 3 παρουσιάζει ενδεικτικές απαντήσεις.



Διάγραμμα 3: Ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών στην κατασκευή της ανίσωσης

Σύνοψη αποτελεσμάτων πιλοτικής παρέμβασης

Τα αποτελέσματα της πιλοτικής παρέμβασης χωρίζονται στα αποτελέσματα της 1ης και 2ης διδακτικής ώρας: Στην 1η διδακτική ώρα (α΄ μέρος), από τις απαντήσεις των μαθητών στο πρόβλημα ανάθεσης, παρατηρούμε ότι μπορούν να αντιληφθούν την έννοια της μεταβλητής, εφόσον κατανοούν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των Α και Β και ότι αυτά παίρνουν τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο μοντέλο της ζυγαριάς (β΄ μέρος), οι μαθητές επέδειξαν κατανόηση, καθώς έδωσαν την ισορροπία της ζυγαριάς ή λεκτικά ή αριθμητικά. Παρόλα αυτά, όταν τους ζητήθηκε να εκφράσουν τις ισορροπίες αυτές, φάνηκε να μην μπορούν να αποτυπώσουν το σύμβολο της ισότητας και αντί για τη χρήση γραμμάτων έκαναν χρήση άλλων σχημάτων για τις μεταβλητές. Στη 2η διδακτική ώρα (έννοια ανίσωσης - διάγραμμα 3), παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα στην αλγεβρική έκφραση του ποσού, στον σχηματισμό της ανίσωσης, στην ερμηνεία της και τέλος στην επίλυσή της. Από την άλλη, κανείς από τους μαθητές δεν μπόρεσε να δώσει την ερμηνεία του ερωτήματος vi. Οι απαντήσεις, ωστόσο, των μαθητών ήταν ιδιαίτερα κατατοπιστικές για την πιθανή ερμηνεία της εξίσωσης αυτής.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η συνεισφορά της παραπάνω έρευνας εστιάζει στην ανάδειξη των τρόπων με τους οποίους λειτούργησαν οι συγκεκριμένοι μαθητές απέναντι στις παρουσιαζόμενες έννοιες των μαθημάτων που πραγματοποιήθηκαν. Οι μαθητές επινόησαν έξυπνες και πρωτότυπες μεθόδους ερμηνείας της ισότητας και της μεταβλητής εμπλουτίζοντας το εννοιολογικό τους πεδίο (Blanton et al., 2018). Επίσης, έδωσαν λεκτικά και συμβολικά την ερμηνεία της ανίσωσης δείχνοντας ότι μπορούν να κατανοήσουν την έννοια.

Η εργασία αυτή συνεισφέρει στο εκπαιδευτικό έργο κυρίως με την επιλογή των εισαγωγικών δραστηριοτήτων, καθώς οι μαθητές μέσω αυτών ενεργοποιήθηκαν και τους φάνηκε πιο ευχάριστη μια ζωντανή διαδικασία από ένα βαρετό και σύνηθες πρόβλημα. Η γενικότερη αντίληψη που άφησε στα παιδιά η συγκεκριμένη εκπαιδευτική διαδικασία είναι ότι τα μαθηματικά συμβαίνουν γύρω μας και δεν είναι απλώς ένα εργαλείο υπολογισμού και ένασχολικό αντικείμενο, αλλά κάτι πιο σύνθετο και πιο κοντά στην πραγματικότητα. Συνεπώς, αυτό που καλούμαστε ως εκπαιδευτικοί να κάνουμε είναι να επινοούμε πραγματικά και ελκυστικά πλαίσια προβλημάτων για τους μαθητές, ώστε να εισάγουμε μια έννοια και να μην μένουμε σε ξεπερασμένες αντιλήψεις και μεθόδους παλαιών χρόνων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2017). Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. In *Algebra in the Early Grades* (pp. 361-388). Routledge.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., ... & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 27-49). Springer, Cham.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 53-59.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 107-138). Springer, Cham.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Springer-Verlag.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades, 2008*, 5-17.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 79-105). Springer, Cham.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 3-25). Springer, Cham.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 59-84.

Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School Science and Mathematics*, *112*(4), 255- 264.

ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ ΜΟΤΙΒΑ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ Α΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΛΕΤΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΟΦΘΑΛΜΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

Δημοσθένους Ελένη[1], Πίττα-Πανταζή Δήμητρα[1], Χρίστου Κωνσταντίνος[1], Lilienthal Achim J.[2], Schindler Maike[3]

[1]Πανεπιστήμιο Κύπρου, [2]Orebro University, [3]University of Cologne

edemos03@ucy.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy, achim.lilienthal@oru.se, maike.schindler@uni-koeln.de

Η ικανότητα των μαθητών σε έργα μοτίβων φαίνεται να σχετίζεται με την κατανόηση δομικών σχέσεων και την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Παρόλα αυτά δεν έχει μελετηθεί με συστηματικό τρόπο ποιες στρατηγικές αξιοποιούνται από τους μαθητές. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα μελετώντας 21 μαθητές Α' τάξης δημοτικού σχολείου χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά. Οι μαθητές συμμετείχαν στην επέκταση μοτίβων συλλέγοντας δεδομένα από τις οφθαλμικές τους κινήσεις κατά τη συμπλήρωση των έργων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές αξιοποιούν δομικές και σειριακές στρατηγικές και συχνά ξεκινούν από το τέλος του μοτίβου για να το συμπληρώσουν και όχι από την αρχή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ενασχόληση των μαθητών προσχολικής και σχολικής ηλικίας με τα μοτίβα θεωρείται πλέον αναπόσπαστο μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων (NCTM, 2000). Η ικανότητα των μαθητών να ανταποκριθούν σε έργα πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, όπως τα μοτίβα, παρουσιάζει μέτρια με υψηλή συσχέτιση με την μαθηματική τους επίδοση (Rittle-Johnson, Zippert, & Boice, 2019) και συμβάλει ουσιαστικά στην μετέπειτα επιτυχία των μαθητών στα μαθηματικά (Wijns et al., 2019).

Στη βιβλιογραφία, οι αναφορές σε στρατηγικές των μαθητών σε έργα μοτίβων βασίζονται κυρίως σε συνεντεύξεις μαθητών (e.g., Lüken & Sauzet, 2021), το οποίο προϋποθέτει την ικανότητα των μαθητών να επικοινωνούν λεκτικά τη σκέψη τους. Έχει όμως διαφανεί ότι συχνά οι μαθητές μικρών τάξεων είτε μπορεί μην είναι σε θέση να επικοινωνήσουν αποτελεσματικά τον τρόπο σκέψης τους είτε δεν έχουν επίγνωση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν (van Nes & de Lange, 2007). Η μελέτη των οφθαλμικών κινήσεων των μαθητών φαίνεται να προσφέρει τη δυνατότητα διερεύνησης των στρατηγικών τους σε τέτοια έργα (Schindler et al., 2020). Όμως, μέχρι στιγμής δεν έχουν εντοπιστεί σχετικές έρευνες στη βιβλιογραφία, οι οποίες να έχουν μελετήσει τις στρατηγικές των μαθητών σε έργα μοτίβων. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές Α' τάξης δημοτικού σε έργα με επαναλαμβανόμενα μοτίβα αξιοποιώντας τη μελέτη των οφθαλμικών κινήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Τα μοτίβα με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές διακρίνονται κυρίως σε: (1) επαναλαμβανόμενα μοτίβα, στα οποία υπάρχει μια ευδιάκριτη μονάδα επανάληψης, η οποία βασίζεται στην εναλλαγή στοιχείων (π.χ. σχήματα) ή/και χαρακτηριστικών (π.χ. χρώμα, μέγεθος), και (2) αναπτυσσόμενα μοτίβα, όπου στοιχεία του μοτίβου αναπτύσσονται ή μειώνονται με ένα συστηματικό τρόπο (e.g., Wijns et al., 2019). Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

Η ικανότητα κατανόησης των μοτίβων ορίζεται ως η ικανότητα εντοπισμού της κανονικότητας που διέπει τα στοιχεία (Clements & Sarama, 2007). Στην περίπτωση των επαναλαμβανόμενων μοτίβων, η βασική ικανότητα αφορά στην αναγνώριση της επαναλαμβανόμενης μονάδας (Papic et al., 2011). Η βασική αυτή ικανότητα εμπλέκεται κατά την ενασχόληση των μαθητών με την επέκταση και τη συμπλήρωση του μοτίβου, την κατασκευή μοτίβου, τη μετάφραση μοτίβου και την αναφορά στον κανόνα του μοτίβου. Η δυσκολία στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα εξαρτάται από την πολυπλοκότητα της μονάδας επανάληψης (π.χ. αυξάνοντας τον αριθμό των στοιχείων ΑΒ, ΑΒΓ, αυξάνοντας τον αριθμό των στοιχείων που επαναλαμβάνονται ΑΑΒ, ΑΑΒΒ) (Clements & Sarama, 2009).

Σύμφωνα με τους Lüken και Sauzet (2021), οι οποίοι διεξήγαγαν συνεντεύξεις με μαθητές (μέσης ηλικίας: 3 χρόνια και 6 μήνες), εντόπισαν τις εξής στρατηγικές σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα: (α) Απουσία κανονικότητας στα μοτίβα των μαθητών, για παράδειγμα οι μαθητές μαντεύουν πώς συνεχίζεται το μοτίβο, (β) Εντοπισμός μεμονωμένων χαρακτηριστικών του μοτίβου, για παράδειγμα επιλέγοντας το ίδιο χρώμα που εμφανίζεται στο μοτίβο, (γ) Σύγκριση και κατηγοριοποίηση των στοιχείων εντός ή μεταξύ των μοτίβων, όπως αναγνωρίζοντας ότι τα στοιχεία με το κίτρινο χρώμα είναι τα ίδια, κοιτάζοντας στην αρχή του μοτίβου και συγκρίνοντας κάθε μονάδα με την αρχική, (δ) Εντοπισμός της ακολουθίας των στοιχείων, χωρίς ξεκάθαρη αναγνώριση της δομής του μοτίβου, (ε) Αναγνώριση και χρήση της μονάδας επανάληψης. Μεγάλες ατομικές διαφορές εντοπίζονται ανάμεσα σε μαθητές ίδιας ηλικίας αλλά και στην εξέλιξη των στρατηγικών από 3 μέχρι 5 ετών (e.g., Lüken & Sauzet, 2021).

Πολλοί ερευνητές συσχέτισαν την ικανότητα αναγνώρισης μοτίβων με την ικανότητα αναγνώρισης και χρήσης δομών (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Hutchinson & Pournara, 2011). Η αναγνώριση της δομής σύμφωνα με τον Battista αναφέρεται στη νοητική λειτουργία της κατασκευής μιας οργάνωσης ή μιας μορφής για ένα αντικείμενο ή ένα σύνολο αντικειμένων, συνδέοντας και συνδυάζοντας αυτά τα συστατικά και καθιερώνοντας αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συστατικών και του νέου αντικειμένου (van Nes & de Lange, 2008). Καθώς οι μαθητές εξετάζουν ένα μοτίβο, πρέπει να κάνουν συγκρίσεις, να βρουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των στοιχείων του μοτίβου. Ο Lüken (2012) διαπίστωσε ότι η πρώιμη αίσθηση της δομής στην αρχή της πρώτης τάξης αποτελεί προγνωστικό παράγοντα των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών στο τέλος της δευτέρας τάξης. Η δομή είναι αναπόσπαστο στοιχείο των μαθηματικών, για παράδειγμα στην κατανόηση των ίσων μερών από τα οποία αποτελούνται άλλα μέρη, όπως στον πολλαπλασιασμό (Steffe, 1988).

Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι στρατηγικές των μαθητών κατά την επέκταση επαναλαμβανόμενων μοτίβων αξιοποιώντας δεδομένα από τις βιντεογραφημένες οφθαλμικές κινήσεις. Η μελέτη των οφθαλμικών κινήσεων βασίζεται στην υπόθεση ότι στα σημεία στα οποία το μάτι εστιάζει σχετίζονται στενά με τι επεξεργάζεται το μυαλό (e.g. Schindler & Lilienthal, 2019). Η εργασία υλοποιήθηκε στα πλαίσια του Ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος Erasmus+, *Digital Identification and Support of Under-Achieving Students*.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Συμμετείχαν 21 μαθητές Α΄ τάξης (μέσης ηλικίας: 6.5 ετών), οι οποίοι φοιτούσαν σε δημοτικό σχολείο της Κύπρου. Οι γονείς είχαν δώσει τη γραπτή συγκατάθεσή τους για τη συμμετοχή των παιδών στην έρευνα και διασφαλίστηκε η ανωνυμία των συμμετεχόντων. Σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς, οι μαθητές δεν παρουσίαζαν δυσκολίες στα μαθηματικά και όλοι οι μαθητές διδάσκονταν το ίδιο αναλυτικό πρόγραμμα. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πρώτο τρίμηνο της Α΄ Δημοτικού, ώστε να διερευνηθούν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην αρχή του δημοτικού σχολείου.

Συλλογή δεδομένων

Χρησιμοποιήσαμε ανιχνευτή οφθαλμικών κινήσεων, Tobii x3-120 σε ρυθμό δειγματοληψίας δεδομένων 120 Hz (υπέρυθρες, διόφθαλμες, βαθμονόμηση 9 σημείων) για να καταγράψουμε τις οφθαλμικές κινήσεις των μαθητών. Η ακρίβεια παρακολούθησης των οφθαλμικών κινήσεων στη μελέτη μας ήταν 0.51° κατά μέσο όρο (SD 0.17°). Ο ανιχνευτής οφθαλμικών κινήσεων συνδέθηκε σε οθόνη υπολογιστή 22 ιντσών Full HD. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε επέτρεπε τις φυσικές κινήσεις του κεφαλιού των μαθητών. Κατά τη συλλογή δεδομένων, ο κάθε μαθητής καθόταν μπροστά από την οθόνη του υπολογιστή σε αίθουσα εκτός της τάξης του. Αναφέρθηκε στους μαθητές ότι θα έπαιζαν ένα παιχνίδι με τον ερευνητή για να τον βοηθήσουν να ανακαλύψει πώς μαθαίνουν μαθηματικά. Επεξηγήθηκε ότι ο ερευνητής θα τους έθετε κάποιο ερώτημα και καλούνταν να απαντήσουν γρήγορα και ορθά. Ο ερευνητής έδινε τις οδηγίες (π.χ. «Ποιο θα είναι το επόμενο χρώμα στο μοτίβο;») προτού εμφανιστεί το έργο στην οθόνη. Παρουσιάστηκαν έργα που αφορούσαν απαρίθμηση ποσοτήτων, σύγκριση ποσοτήτων και επέκταση μοτίβων. Το λογισμικό του ανιχνευτή οφθαλμικών κινήσεων είχε τη δυνατότητα να συλλέγει δεδομένα σχετικά με τις οφθαλμικές κινήσεις των μαθητών και τον χρόνο ανταπόκρισης τους. Στην παρούσα εργασία αξιοποιήσαμε μόνο τα βίντεο (overlaid-gaze videos) που παρουσιάζουν τη σειρά των οφθαλμικών κινήσεων από τη στιγμή που ο μαθητής άρχιζε να βλέπει το έργο μέχρι και τη στιγμή που έδινε την απάντηση καθώς και το διάγραμμα με τις οφθαλμικές κινήσεις (gazeplot) σε έργα με επέκταση επαναλαμβανόμενων μοτίβων. Επιπρόσθετα, οι εκφωνήσεις και απαντήσεις των μαθητών ηχογραφούνταν. Με αυτό τον τρόπο γινόταν η συλλογή των δεδομένων για την ορθότητα της απάντησης τους.

Έργα Μοτίβων

Όλα τα έργα παρουσιάστηκαν στους μαθητές με την ίδια σειρά. Πριν από κάθε έργο, παρουσιαζόταν στην οθόνη ένα αστέρι, το οποίο οι μαθητές έπρεπε να κοιτάξουν, ώστε να διασφαλίζεται ότι οι οφθαλμικές κινήσεις όλων των μαθητών αρχίζουν από το ίδιο σημείο. Αξιοποιήθηκαν τρία επαναλαμβανόμενα μοτίβα με εναλλαγή του χρώματος και διαφορετικό κανόνα, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Κανόνας	ΑΒ	ΑΒΓ	ΑΑΒ
Μορφή			

Πίνακας 1. Έργα μοτίβων

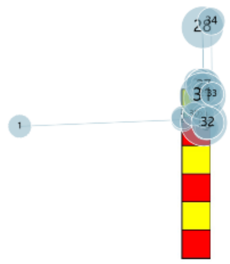
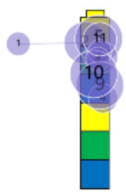
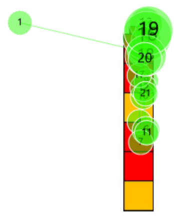
Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων ακολούθησε τέσσερα στάδια. Στο πρώτο στάδιο, δόθηκαν αρχικές περιγραφές των στρατηγικών που αξιοποίησε κάθε μαθητής παρακολουθώντας τα βίντεο με τις οφθαλμικές κινήσεις και αξιοποιώντας συμπληρωματική πληροφόρηση από τα διαγράμματα (gazeplots). Οι αρχικές περιγραφές οδήγησαν στο σχηματισμό κατηγοριών, οι οποίες βασίζονταν στη βιβλιογραφία και στα δεδομένα. Στο δεύτερο στάδιο, μέσω της σταθερής συγκριτικής μεθόδου, φτάσαμε στον κορεσμό και οριστικοποιήσαμε την περιγραφή των κατηγοριών συνοδεύοντας την με ένα ενδεικτικό παράδειγμα. Στο τρίτο στάδιο, κωδικοποιήθηκαν όλα τα βίντεο μαζί με τα διαγράμματα. Επίσης, όλες οι απαντήσεις των μαθητών (από την ηχογράφηση) κωδικοποιήθηκαν ως ορθές ή λανθασμένες. Στο τέταρτο στάδιο, το 25% των δεδομένων κωδικοποιήθηκαν από δύο ανεξάρτητους ερευνητές (Mayring, 2014) για να υπολογιστεί η αξιοπιστία της κωδικοποίησης (interrater reliability) χρησιμοποιώντας το Cohen's kappa. Η αξιοπιστία υπολογίστηκε στο 0.83, το οποίο θεωρείται σχεδόν τέλειο.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εντοπίστηκαν τρεις στρατηγικές κατά την ενασχόληση των μαθητών με την επέκταση επαναλαμβανόμενων μοτίβων. Η Στρατηγική 1 περιγράφει την άμεση αναγνώριση της επαναλαμβανόμενης μονάδας. Η Στρατηγική 2 περιγράφει τη διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές φαίνεται να αναγνώριζαν την επαναλαμβανόμενη μονάδα και στη συνέχεια «μετέβαιναν» σε άλλες επαναλαμβανόμενες μονάδες. Στη Στρατηγική 1 και 2 βασίζονταν σε μερικά στοιχεία του μοτίβου για να αποφασίσουν πώς το μοτίβο επεκτείνεται και εντόπιζαν τις επαναλαμβανόμενες μονάδες. Ακόμη και εάν οι μαθητές χρησιμοποίησαν την περιφερειακή τους όραση, φαίνεται να εστιάζαν μόνο σε επιλεγμένα στοιχεία, εκείνα που συνθέτουν την μονάδα επανάληψης. Η Στρατηγική 3 περιγράφει την παρατήρηση όλων των δοσμένων στοιχείων του μοτίβου. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι στρατηγικές με παραδείγματα.

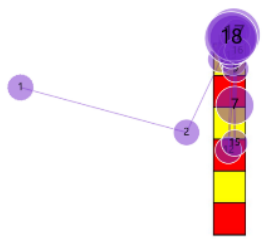
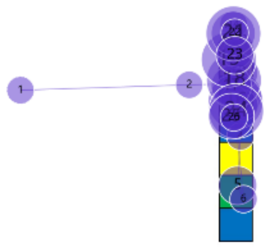
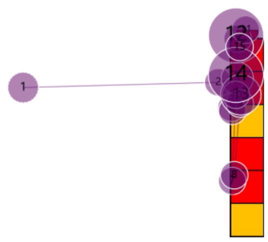
1. Σάρωση και αναγνώριση της επαναλαμβανόμενης μονάδας

(α) Μοτίβο ΑΒ	(β) Μοτίβο ΑΒΓ	(γ) Μοτίβο ΑΑΒ
		

Πίνακας 2. Παραδείγματα Στρατηγικής 1

Η παρατήρηση (gaze) είναι στην κορυφή του μοτίβου. Η παρατήρηση εστιάζει (α) μόνο σε μια επαναλαμβανόμενη μονάδα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2(α) (κόκκινο, κίτρινο) ή (β) σε μια επαναλαμβανόμενη μονάδα και ένα γειτονικό στοιχείο από την επόμενη επαναλαμβανόμενη μονάδα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2(γ) (κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο, κόκκινο).

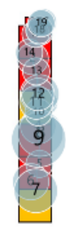
2. Εντοπισμός και «άλμα» μεταξύ επαναλαμβανόμενων μονάδων

(α) Μοτίβο ΑΒ	(β) Μοτίβο ΑΒΓ	(γ) Μοτίβο ΑΑΒ
		

Πίνακας 3. Παραδείγματα Στρατηγικής 2

Η παρατήρηση κατευθύνεται σε μια επαναλαμβανόμενη μονάδα (εστιάζει σε κάθε στοιχείο της μονάδας) και μετά μετακινείται στο κάτω ή στο μεσαίο τμήμα μιας άλλης μονάδας(ών). Στον Πίνακα 3(α) φαίνεται ότι ο μαθητής εστιάζει αρχικά στο τέλος του μοτίβου (κόκκινο, κίτρινο), στη συνέχεια «πετάγεται» στην επόμενη μονάδα όπου εστιάζει κυρίως στο ένα στοιχείο (κόκκινο) και επιστρέφει στην κορυφή του μοτίβου.

3. «Διαβάζοντας» ολόκληρο το μοτίβο

(α) Μοτίβο ΑΒ	(β) Μοτίβο ΑΒΓ	(γ) Μοτίβο ΑΑΒ
		

Πίνακας 4. Παραδείγματα Στρατηγικής 3

Η παρατήρηση φαίνεται να γίνεται (α) σε όλα τα στοιχεία του δοσμένου μοτίβου ή (β) σε όλα τα στοιχείο εκτός από ένα (πάνω ή κάτω). Αυτό μπορεί να επαναληφθεί περισσότερες από μία φορές σε διαφορετικές κατευθύνσεις (π.χ. από πάνω προς τα κάτω, από κάτω προς τα πάνω, από τη μέση προς τα κάτω). Στον Πίνακα 3(β) φαίνεται ότι ο μαθητής εστιάζει σε κάθε στοιχείο του μοτίβου παρατηρώντας πάνω-κάτω πέραν της μίας φοράς.

Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει τη συχνότητα εμφάνισης κάθε στρατηγικής ανά έργο μοτίβου. Φαίνεται ότι οι μαθητές αξιοποίησαν συχνότερα τις στρατηγικές 2 και 3.

Έργα Μοτίβων	Στρατηγική 1	Στρατηγική 2	Στρατηγική 3
ΑΒ	3	15	3
ΑΒΓ	1	6	14
ΑΑΒ	2	5	14
Σύνολο	6	26	31
	9.5%	41.3%	49.2%

Πίνακας 5. Συχνότητα στρατηγικών ανά έργο μοτίβου

Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει τον αριθμό των ορθών και λανθασμένων απαντήσεων. Επίσης, οι απαντήσεις κατηγοριοποιούνται περαιτέρω σε δομικές και σειριακές. Η στρατηγική 1 και 2 ονομάστηκαν δομικές στρατηγικές ενώ η στρατηγική 3 ως σειριακή στρατηγική. Στις δομικές στρατηγικές, οι μαθητές βασίστηκαν σε επιλεγμένα στοιχεία για να συνεχίσουν το μοτίβο και συνεπάγεται ότι πιθανόν να αντιλαμβάνονται ένα είδος δομής που τους βοήθησε να εστιάσουν σε μερικά στοιχεία με τρόπο ώστε να αντιληφθούν το σύνολο των πληροφοριών που παρουσιάζονται στο έργο. Στις σειριακές στρατηγικές, οι μαθητές εστίασαν σε όλα τα στοιχεία για να ανταποκριθούν στο έργο.

Έργα Μοτίβων	Ορθή απάντηση			Λανθασμένη απάντηση		
	Δομική	Σειριακή	Σύνολο	Δομική	Σειριακή	Σύνολο
ΑΒ	16	2	18	2	1	3
ΑΒΓ	7	13	20	0	1	1
ΑΑΒ	7	13	20	0	1	1
Σύνολο	30	28	58	2	3	5

Πίνακας 6. Συχνότητα ορθών και λανθασμένων απαντήσεων ανά είδος στρατηγικής

Οι ορθές απαντήσεις αποτελούν το 92.1% του συνολικού αριθμού των απαντήσεων. Επίσης, οι ορθές απαντήσεις αξιοποιώντας δομικές στρατηγικές εμφανίζονται σε μεγαλύτερη συχνότητα στο μοτίβο ΑΒ (f=16) σε σύγκριση με το μοτίβο ΑΒΓ (f=7) και το μοτίβο ΑΑΒ (f=7). Ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων είναι σχεδόν ίσος μεταξύ αυτών που χρησιμοποίησαν δομική και σειριακή στρατηγική (3.2% και 4.8%).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία η μελέτη των οφθαλμικών κινήσεων των μαθητών έδωσε περαιτέρω πληροφορίες για το πώς οι μαθητές εργάζονται κατά την επέκταση επαναλαμβανόμενων μοτίβων. Οι στρατηγικές που έχουν εντοπιστεί είναι: (1) άμεση εστίαση στη μονάδα επανάληψης, (2) εστίαση στη μονάδα επανάληψης και «άλμα» σε επόμενη μονάδα, (3) εστίαση σε όλα τα στοιχεία του μοτίβου.

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν στην πλειοψηφία τους τη στρατηγική 2 για το μοτίβο ΑΒ ενώ τη στρατηγική 3 για τα μοτίβα ΑΒΓ και ΑΑΒ, τα οποία θεωρούνται και δυσκολότερα (e.g., Clements & Sarama, 2009). Λιγότερο από το 8% των απαντήσεων ήταν λανθασμένες, το οποίο δεν έδωσε τη δυνατότητα διερεύνησης μη-επιτυχημένων στρατηγικών. Φαίνεται ότι οι δομικές στρατηγικές υπερίσχυσαν στο μοτίβο ΑΒ ενώ η σειριακή στα μοτίβα ΑΒΓ και ΑΑΒ.

Τα δεδομένα δείχνουν ότι οι μαθητές σε απλά μοτίβα (π.χ. ΑΒ) δεν διαβάζουν απαραίτητα σειριακά όλα τα στοιχεία του μοτίβου για να εντοπίσουν ποιο θα ακολουθήσει αλλά φαίνεται να εστιάζουν κατευθείαν στα στοιχεία που επαναλαμβάνονται (π.χ., ένα κόκκινο και το διαδοχικό κίτρινο), δηλαδή εντοπίζουν άμεσα τη μονάδα επανάληψης. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι οι μαθητές εντοπίζουν τη δομή του μοτίβου για να απαντήσουν σε ερώτημα επέκτασής του. Επίσης, φαίνεται ότι ακόμα και αν εντοπίσουν τη μονάδα επανάληψης, αρκετοί μαθητές προχωρούν σε άλλα στοιχεία του δοσμένου μοτίβου για να εντοπίσουν ή να επιβεβαιώσουν την επανάληψη της. Επιπλέον, φαίνεται ότι οι μαθητές εστιάζουν στο τέλος του δοσμένου μοτίβου. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας δίνουν περισσότερη πληροφόρηση για τις στρατηγικές των μαθητών, όπως παρουσιάζονται από τους Lüken και Sauzet (2021). Η στρατηγική 1 και 2 φαίνεται να πλησιάζει στην περιγραφή της στρατηγικής (ε) και η στρατηγική 3 αυτήν της (δ). Στο δείγμα της εργασίας δεν παρουσιάστηκε η στρατηγική όπου οι μαθητές συγκρίνουν ένα-προς-ένα τα στοιχεία εντός του μοτίβου (Collins & Laski, 2015).

Σημειώνεται ότι το δείγμα αποτελούσαν μαθητές, οι οποίοι δεν παρουσίαζαν δυσκολίες στα μαθηματικά. Σε μελλοντικές ερευνητικές μελέτες, ένα μεγαλύτερο δείγμα συμπεριλαμβανομένων και μαθητών με χαμηλότερη επίδοση, θα μπορούσε να δώσει περαιτέρω στοιχεία καθώς και τη δυνατότητα συσχέτισης των στρατηγικών με την επίδοση των μαθητών. Αξίζει επίσης να μελετηθεί σε ποιο βαθμό οι στρατηγικές που αξιοποιούν οι μαθητές σε τέτοια έργα, πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, αποτελούν προγνωστικό παράγοντα της μετέπειτα επίδοσής τους στα μαθηματικά και σε ποιο βαθμό επιτρέπουν την αναγνώριση μαθητών με δυσκολίες. Ένα βήμα περαιτέρω είναι η διερεύνηση των διδακτικών πρακτικών που θα μπορούσαν να ενισχύσουν τη χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών από τους μαθητές.

Καταληκτικά, παρόλο που η μελέτη των στρατηγικών των μαθητών βασισμένη στις οφθαλμικές τους κινήσεις βρίσκεται ακόμη σε αρχικά στάδια, φαίνεται να μας πληροφορούν ότι οι μαθητές είτε αναγνωρίζουν δομές και τις χρησιμοποιούν για να ανταποκριθούν στα έργα είτε ακολουθούν μια ενιαία και σειριακή διαδικασία.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Με συγχρηματοδότηση από το πρόγραμμα «Erasmus+» της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D.H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp.461–555). Information Age Publishing.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Collins, M. A., & Laski, E. V. (2015). Preschoolers’ strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, *32*, 204–214.

Hutchinson, E., & Pournara, C. (2011). Pre-school children’s understanding of mathematical patterns. *South African Journal of Childhood Education, 1*(2), 92–111.

Lüken, M.M. (2012). Young children’s structure sense. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33*, 263–285.

Lüken, M.M., & Sauzet, O. (2021). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children’s patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28–48.

Mayring, P. (2014). Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution. Beltz.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. http://standards.nctm.org/

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237–268.

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly, 4*6, 166–178.

Schindler, M. & Lilienthal, A.J. (2019). Domain-specific interpretation of eye tracking data: onwards a refined use of eye-mind hypothesis for the field of geometry. *Educational Studies in Mathematics, 101*, 123–139.

Schindler, M., Schovenberg, V., & Schabmann, A. (2020). Enumeration processes of children with mathematical difficulties: An explorative eye-tracking study on subitizing, groupitizing, counting, and pattern recognition. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 18*(2), 193–211.

Steffe, L. P. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operation in the middle grades* (pp. 119–140). NCTM.

Van Nes, F., & de Lange, J. (2008). Mathematics education and neurosciences. Relating spatial structures to the development of spatial sense and number sense. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(2), 210–229.

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: a review. In K.M. Robison, H.P. Osana, & D. Kotsopoulos (Eds), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood: Integrating Interdisciplinary Research into Practice* (pp. 139–161). Springer.

Η ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ: ΜΙΑ ΒΑΣΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Χειμωνή Μαρία, Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Χρίστου Κωσταντίνος

Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

chimoni.m@cyearn.pi.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy

Στην εργασία αυτή γίνεται αναφορά στον ρόλο της αριθμητικής στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης. Οι συμμετέχοντες ήταν 203 μαθητές της Στ' δημοτικού, οι οποίοι συμπλήρωσαν δύο δοκίμια που περιλάμβαναν έργα σχετικά με τις έννοιες των ιδιοτήτων των αριθμών, των πράξεων και της ισότητας. Το πρώτο δοκίμιο περιλάμβανε έργα που μπορούσαν να επιλυθούν είτε με αριθμητικές είτε με αλγεβρικές στρατηγικές. Το δεύτερο δοκίμιο περιλάμβανε έργα που μπορούσαν να επιλυθούν μόνο με αλγεβρικές στρατηγικές. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν αλγεβρικές στρατηγικές στην επίλυση των έργων του πρώτου αριθμητικού δοκιμίου μπορούσαν να επιλύσουν με επιτυχία και τα έργα του δεύτερου αλγεβρικού δοκιμίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γενίκευση αποτελεί μία από τις βασικές διαδικασίες της άλγεβρας (Kaput, 2008). Η εργασία των μαθητών στην αριθμητική είναι δυνατόν να τους βοηθήσει να αναπτύξουν την ικανότητα για οικοδόμηση γενικεύσεων (Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016). Σύμφωνα με την Kieran (2018), η βάση για την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών για γενίκευση είναι η ικανότητα για αναζήτηση και αντίληψη της δομής και των σχέσεων που διέπουν τους αριθμούς και τις πράξεις στο πεδίο της αριθμητικής.

Η αναζήτηση και αντίληψη της δομής και των σχέσεων αναφέρεται στον χειρισμό των αριθμών και των πράξεων ως αντικειμένων, τα οποία οι μαθητές μπορούν να αναλύσουν ή να τα χρησιμοποιήσουν για δημιουργία πιο σύνθετων καταστάσεων (Kieran, 2018). Για παράδειγμα, μερικοί από τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αναλυθεί ο αριθμός 6 είναι $5+1$, $1+5$, 2×3, $2+2+2$, 2^2+2. Όλοι αυτοί οι τρόποι αναπαριστούν τη δομή του αριθμού 6 και εκφράζουν ισοδύναμες αριθμητικές παραστάσεις.

Παρόλο που η διαδικασία της γενίκευσης έχει διερευνηθεί από πληθώρα ερευνών, οι οποίες έχουν αναδείξει τη σημασία της και την άρρηκτη σύνδεσή της με την αλγεβρική σκέψη, η διαδικασία της αναζήτησης και της αντίληψης της δομής και των σχέσεων στην περιοχή της αριθμητικής δεν έχει διερευνηθεί σε βάθος (Kieran, 2018). Χρειάζονται περισσότερα ερευνητικά δεδομένα, ώστε να προσδιοριστεί η διαδικασία κατά την οποία γενικεύονται οι αριθμητικοί κανόνες και ιδιότητες και να αναδειχθούν διδακτικές προσεγγίσεις που θα επιτυγχάνουν την ανάπτυξή της ανάμεσα στους μαθητές. Στο πλαίσιο αυτό, η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην περιγραφή της διαδικασίας αναζήτησης και αντίληψης της δομής και των σχέσεων μέσα από την ανάλυση της συμπεριφοράς μαθητών της Στ' δημοτικού σε έργα αριθμητικής και τον ρόλο της στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η διαδικασία της γενίκευσης των αριθμητικών κανόνων και ιδιοτήτων μπορεί να αξιοποιηθεί, ώστε η αριθμητική και η άλγεβρα να μην διδάσκονται αποκομμένα. Η γενίκευση στην αριθμητική έχει ως στόχο οι μαθητές να κατανοήσουν (α) τις ιδιότητες των αριθμών, όπως άρτιοι και περιττοί αριθμοί (Bastable & Schifter, 2008), (β) τις ιδιότητες των πράξεων και τις σχέσεις μεταξύ των πράξεων, οι οποίες εφαρμόζονται για τον μετασχηματισμό αριθμητικών παραστάσεων (Britt & Irwin, 2011) και (γ) το ίσον ως σύμβολο που αναπαριστά μια σχέση μεταξύ ισοδύναμων αριθμητικών παραστάσεων και όχι ως σύμβολο που δίνει την οδηγία «υπολόγισε το αποτέλεσμα (Jones, Inglis, Gilmore & Dowens, 2012). Οι γνώσεις και οι ικανότητες αυτές είναι δυνατόν να ενδυναμωθούν στο πλαίσιο της τάξης μέσα από δραστηριότητες αριθμητικής που δεν εστιάζονται στους υπολογισμούς, ενώ δεν είναι απαραίτητο οι δραστηριότητες αυτές να περιλαμβάνουν ή να απαιτούν τη χρήση γραμμάτων/μεταβλητών (Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016).

Πολλοί ερευνητές έχουν επικεντρωθεί στην περιοχή της αριθμητικής και έχουν επισημάνει τον ρόλο της στην καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών για αναζήτηση της δομή και των σχέσεων στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, έχει διαφανεί ότι η έμφαση στις ιδιότητες των πράξεων, όπως η αντιμεταθετική, η επιμεριστική και η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, συμβάλλει στην ερμηνεία μιας πράξης όχι μόνο ως μιας διαδικασίας που εφαρμόζεται για τον υπολογισμό ενός αποτελέσματος, αλλά ως η έκφραση μιας σχέσης μεταξύ ποσοτήτων που μπορεί να είναι είτε γνωστές είτε άγνωστες (Warren, 2003). Επιπλέον, οι σχέσεις μεταξύ των πράξεων (αντίθετες και αντίστροφες πράξεις) βοηθούν τους μαθητές να απλοποιήσουν αριθμητικές παραστάσεις και να κατανοήσουν ότι δεν χρειάζεται να εκτελούν πράξεις με σειριακό τρόπο (Linchevski & Livneh, 1999).

Οι δραστηριότητες που εστιάζουν στο σύμβολο του ίσον και την έννοια της ισότητας σε αριθμητικά πλαίσια αποτελούν ένα άλλο παράδειγμα υποστήριξης της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών (Britt & Irwin, 2011). Η χρήση στρατηγικών στην πρόσθεση και στην αφαίρεση για μετασχηματισμό αριθμών και εκτέλεση γρήγορων υπολογισμών με βολικούς αριθμούς (π.χ. 27+6=30+3 και 75-29=76-30), συμβάλλουν στη γενίκευση σχέσεων μεταξύ των αριθμών και τη μετέπειτα αναπαράσταση των σχέσεων αυτών με τη χρήση μεταβλητών, όπως $a + b = (a + c) + (b - c)$. Με τον ίδιο τρόπο, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι οι μετασχηματισμοί που εκτελούν στη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης, όπως $4x - 8 = 3x + 1$, λαμβάνουν υπόψη την ανάγκη για διατήρηση της ισότητας μεταξύ των δύο αριθμητικών παραστάσεων.

Τέλος, η διερεύνηση του αποτελέσματος των πράξεων με αριθμούς που διακρίνονται από συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως άρτιοι και περιττοί αριθμοί, συμβάλουν στην σύνθεση και ανασύνθεση των αριθμών με βάση την προσθετική και πολλαπλασιαστική τους δομή και αργότερα στην έκφραση αυτής της δομής με γενικό τρόπο. Για παράδειγμα, η παρατήρηση μέσα από πολλαπλά αριθμητικά παραδείγματα ότι το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι πάντα ένας άρτιος αριθμός $(3 + 5 = 8, 7 + 11 = 18, 25 + 27 = 52)$ εκφράζεται ως $(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Λαμβάνοντας υπόψη την ανάγκη για προσδιορισμό των τρόπων με τους οποίους η περιοχή της αριθμητικής είναι δυνατόν να υποστηρίξει την ανάπτυξη της διαδικασίας της γενίκευσης σε παιδιά δημοτικού σχολείου, η παρούσα εργασία επιχειρεί να απαντήσει το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

Με ποιο τρόπο επηρεάζει η χρήση αλγεβρικών στρατηγικών την επιτυχία των μαθητών στην επίλυση αριθμητικών και αλγεβρικών έργων;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην παρούσα έρευνα ήταν 203 μαθητές της Στ’ τάξης δημοτικού, οι οποίοι προέρχονταν από 4 διαφορετικά αστικά σχολεία και 7 διαφορετικά τμήματα. Οι μαθητές αυτοί είχαν ολοκληρώσει, πριν από τη διεξαγωγή της έρευνας, την ενότητα Άλγεβρας που περιλαμβάνεται στα σχολικά τους βιβλία και η οποία είχε ως περιεχόμενο την έννοια της μεταβλητής, την χρήση των ιδιοτήτων των πράξεων για απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων και τον υπολογισμό της τιμής αλγεβρικών παραστάσεων, την έννοια της ισότητας και τις ιδιότητες της ισότητας, την επίλυση εξισώσεων με τη χρήση των ιδιοτήτων της ισότητας, την έννοια της συνάρτησης και των σχηματικών μοτίβων.

Διαδικασία και μέσα συλλογής δεδομένων

Οι μαθητές εξετάστηκαν σε δύο δοκίμια. Το πρώτο δοκίμιο περιλάμβανε 12 αριθμητικά έργα, ενώ το δεύτερο περιλάμβανε 12 αλγεβρικά έργα (Πίνακας 1). Οι μαθητές είχαν χρόνο 40 λεπτών για την επίλυση των έργων σε κάθε δοκίμιο.

<table>
<tr><th></th><th>Αριθμητικά έργα</th><th>Αλγεβρικά έργα</th></tr>
<tr><td>Ιδιότητες των πράξεων</td><td>Να υπολογίσεις το αποτέλεσμα. Να δείξεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκες.
(α) $237 + 89 + 262 - 92 + 92 - 89$
(β) $846 \div 28 \cdot 28 \div 2$</td><td>Η Βασιλική ισχυρίζεται ότι μπορεί να υπολογίσει την τιμή της πιο κάτω παράστασης, παρόλο που δεν γνωρίζει ποιες είναι οι τιμές του χ και του ψ. Είναι ορθή η σκέψη της Βασιλικής; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.
(α) $420 - 3\chi - 4\psi + 3\chi + 3\psi + \psi =$
(β) $35 \cdot 3\chi \div 4\psi \div 3\chi \cdot 4\psi =$</td></tr>
<tr><td>Ιδιότητες της ισότητας – επίλυση εξίσωσης</td><td>Να βρεις δύο διαφορετικούς τρόπους, για να δείξεις ότι η πιο κάτω ισότητα είναι ορθή.
$16 + 16 = 15 + 17$</td><td>Ο Ιάκωβος χρησιμοποιεί την πιο κάτω στρατηγική, για να υπολογίσει αθροίσματα όπως, $27 + 15$ και $34 + 19$.
<table><tr><th>Άθροισμα</th><th>Υπολογισμός</th></tr><tr><td>$34 + 19$</td><td>$33 + 20 = 53$</td></tr><tr><td>$27 + 15$</td><td>$30 + 12 = 42$</td></tr></table>
Να χρησιμοποιήσετε την στρατηγική του Ιάκωβου, για:
(α) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $298 + 57 =$
(β) Να συμπληρώσετε την ισότητα: $58 + \nu = 60 +$
(γ) Να συμπληρώσετε την ισότητα: $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) +$ ________</td></tr>
</table>

Ιδιότητες των αριθμών	Να ονομάσεις τον αριθμό γ σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιώντας μία από τις ονομασίες: περιττός αριθμός, πολλαπλάσιο του 10, διψήφιος αριθμός. (α) $\gamma = (10 \times 3) + 8$ (β) $\gamma = 246\,779\,568 + 1$ (γ) $\gamma = 10 \times 1245$	Να ονομάσεις τον αριθμό γ σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιώντας μία από τις ονομασίες: άρτιος αριθμός, περιττός αριθμός, πολλαπλάσιο του 10, διψήφιος αριθμός. (α) $\gamma = 10\alpha + \beta$ (β) $\gamma = 2\alpha$ (γ) $\gamma = 2\beta + 1$ (δ) $\gamma = 10\gamma$

Πίνακας 1: Παραδείγματα έργων γενικευμένης αριθμητικής στα δύο δοκίμια

Ανάλυση

Το πρώτο βήμα για την ανάλυση των δεδομένων ήταν η βαθμολόγηση των δοκιμίων ως εξής: 1 βαθμός δινόταν για τις ορθές λύσεις και 0 βαθμοί για τις λανθασμένες λύσεις. Στη συνέχεια, εφαρμόστηκε περιγραφική στατιστική για ανάλυση της επίδοσης των μαθητών σε κάθε δοκίμιο και η ανάλυση paired sample t-test, ώστε να συγκριθεί η επίδοση των μαθητών στα δύο δοκίμια. Στη συνέχεια, μέσα από ποιοτική ανάλυση, έγινε κατηγοριοποίηση των λύσεων των μαθητών σε κάθε άσκηση του δοκιμίου με τα αριθμητικά έργα με βάση τη στρατηγική που χρησιμοποιούσαν σε: (α) αριθμητικές στρατηγικές, (β) αλγεβρικές στρατηγικές και (γ) καθόλου στρατηγική. Οι αριθμητικές στρατηγικές αφορούσαν την εκτέλεση υπολογιστικών διαδικασιών και τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων. Οι αλγεβρικές στρατηγικές αφορούσαν την αναγνώριση της δομής των αριθμών και των πράξεων και την εφαρμογή ιδιοτήτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της περιγραφικής στατιστικής έδειξαν ότι ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών ήταν .777 στο δοκίμιο με τα αριθμητικά έργα και .664 στο δοκίμιο με τα αλγεβρικά έργα. Η διαφορά στον μέσο όρο επίδοσης στα δύο δοκίμια ήταν στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας $p<0.001$. Επιπρόσθετα, διαφάνηκε ότι ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών σε όλα τα είδη έργων που περιλάμβαναν τα δύο δοκίμια ήταν πάντα ψηλότερος για τα αριθμητικά έργα και με σημαντική στατιστική διαφορά από τα αλγεβρικά έργα (Πίνακας 2).

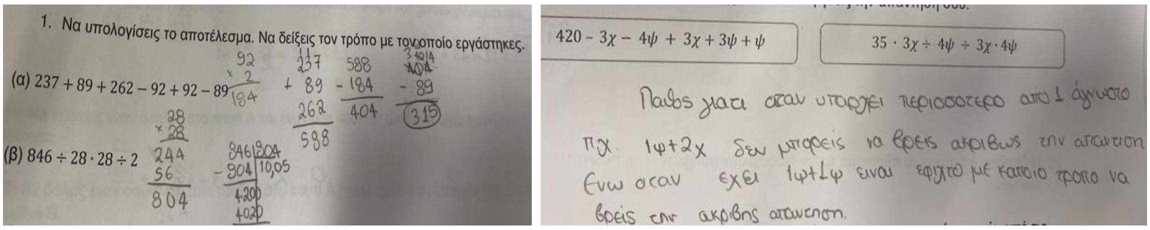
	N	M.O	T.A	t	df	p
Ιδιότητες των πράξεων (αριθμητικά έργα)	203	.757	.202	7.465	202	<0.01
Ιδιότητες των πράξεων (αλγεβρικά έργα)	203	.654	.241			
Ιδιότητες της ισότητας/ επίλυση εξίσωσης (αριθμητικά έργα)	203	.787	.214	8.104	202	<0.01
Ιδιότητες της ισότητας/ επίλυση εξίσωσης (αλγεβρικά έργα)	203	.674	.239			
Ιδιότητες των αριθμών (αριθμητικά έργα)	203	.789	.293	5.590	202	<0.01
Ιδιότητες των αριθμών (αλγεβρικά έργα)	203	.664	.294			

Πίνακας 2: Η επίδοση των μαθητών στις διαφορετικές κατηγορίες έργων των δύο δοκιμίων

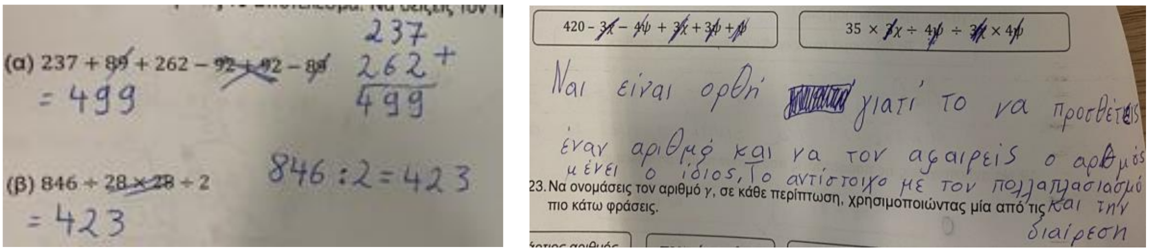
Μελετώντας τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, για να επιλύσουν τα αριθμητικά έργα, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν αριθμητικές στρατηγικές δεν είχαν επιτυχία στην επίλυση των αντίστοιχων αλγεβρικών έργων. Αντίθετα, οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν αλγεβρικές στρατηγικές στην επίλυση των αριθμητικών έργων ήταν σε θέση να επιλύσουν με επιτυχία και τα αντίστοιχα αλγεβρικά έργα. Πιο κάτω παρουσιάζεται ως παράδειγμα η εργασία δύο μαθητών, του Χρίστου και της Δώρας, σε αριθμητικά και αλγεβρικά έργα, η οποία αναδεικνύει τη διαφορετική προσέγγιση κάθε μαθητή προς τα αριθμητικά έργα και η επίδραση κάθε προσέγγισης στην αντιμετώπιση των αλγεβρικών έργων.

Στην Εικόνα 1 παρουσιάζονται παραδείγματα στρατηγικών σε σχέση με τα έργο που αφορούσαν τις σχέσεις των πράξεων (αντίθετες και αντίστροφες πράξεις). Ο Χρίστος (Εικόνα 1α) χρησιμοποίησε αριθμητική στρατηγική, για να υπολογίσει το αποτέλεσμα κάθε αριθμητικής παράστασης, αφού εκτέλεσε με τη σειρά τις πράξεις. Στο αντίστοιχο αλγεβρικό έργο, απάντησε ότι είναι λάθος η σκέψη της Βασιλικής, γιατί δεν γνωρίζει την τιμή του χ και του ψ. Η αδυναμία του Χρίστου να αναζητήσει και να αντιληφθεί τη δομή της αριθμητικής παράστασης και τη δυνατότητα εφαρμογής των σχέσεων μεταξύ των πράξεων μεταφέρεται και στην περίπτωση της αλγεβρικής παράστασης.

(α) Χρίστος



(β) Δώρα



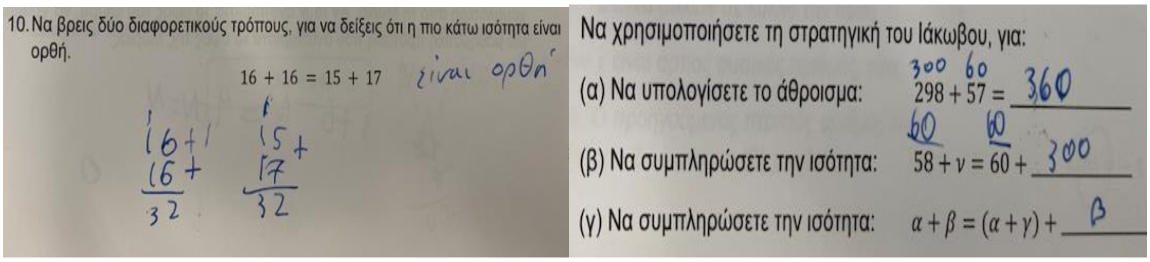
Εικόνα 1. Στρατηγικές επίλυσης έργων που περιλαμβάνουν την έννοια των ιδιοτήτων των πράξεων – αντίθετες και αντίστροφες πράξεις

Αντίθετα, η Δώρα (Εικόνα 1β) χρησιμοποιεί αλγεβρική στρατηγική για την επίλυση του αριθμητικού έργου, αφού διαγράφει τους αντίθετους και αντίστροφους αριθμούς και εκτελεί μόνο τις απαραίτητες πράξεις. Με τον ίδιο τρόπο χειρίζεται και τις αλγεβρικές παραστάσεις.

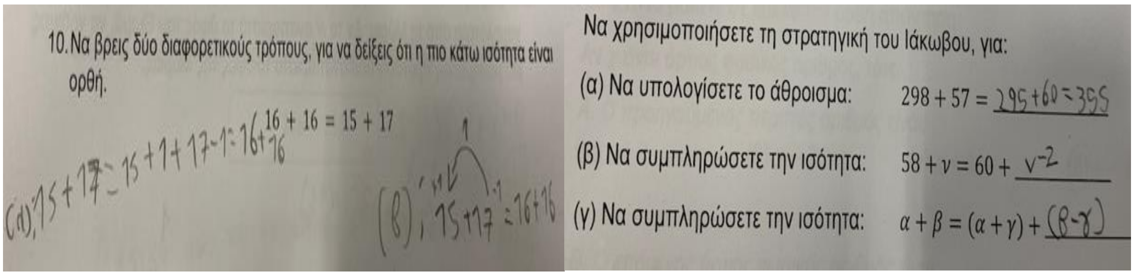
Στην Εικόνα 2 παρουσιάζονται οι λύσεις που έδωσαν οι ίδιοι μαθητές σε έργα που αφορούσαν την έννοια της ισότητας. Ο Χρίστος (Εικόνα 2α) υπολογίζει το αποτέλεσμα των αριθμητικών παραστάσεων στις δύο πλευρές της ισότητας, για να δείξει ότι είναι ορθή. Παράλληλα, δεν μπορεί να δείξει με ένα εναλλακτικό τρόπο γιατί είναι ορθή η ισότητα. Στο αλγεβρικό έργο, χρησιμοποιεί λανθασμένα τη στρατηγική του Ιάκωβου στην περίπτωση της αριθμητικής παράστασης και δεν μπορεί να την εφαρμόσει, για να εκφράσει μια ισοδύναμη παράσταση όταν σε αυτή περιλαμβάνονται μεταβλητές.

Η Δώρα (Εικόνα 2β) δείχνει ότι η αριθμητική παράσταση $15 + 1 + 17 - 1$ είναι ισοδύναμη με την αριθμητική παράσταση $16 + 16$, γιατί $+1 - 1 = 0$. Παράλληλα, δείχνει να αντιλαμβάνεται ότι ο αριθμός 16 μπορεί να αναλυθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, όπως είναι το $15 + 1$ και το $17 - 1$. Αντίστοιχα, στο αλγεβρικό έργο, εκφράζει ορθά τη γενική σχέση των προσθετέων.

(α) Χρίστος



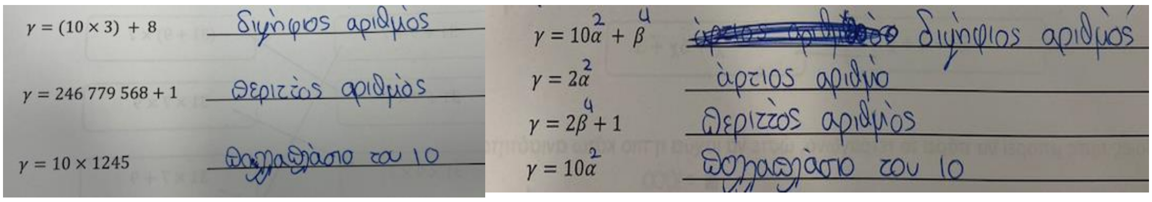
(β) Δώρα



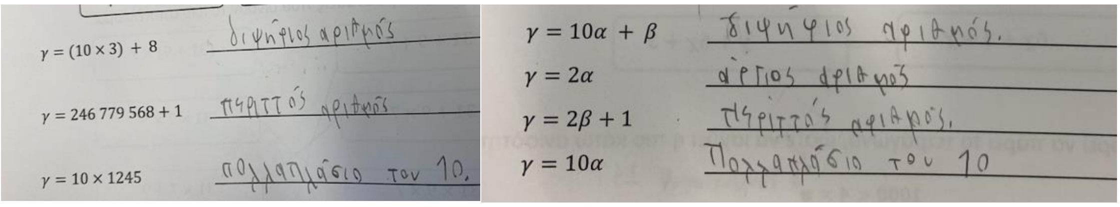
Εικόνα 2. Στρατηγικές επίλυσης έργων που περιλαμβάνουν την έννοια των ιδιοτήτων της ισότητας

Με τον ίδιο τρόπο οι δύο μαθητές συμπεριφέρονται και στην περίπτωση έργων που αφορούσαν τις ιδιότητες των αριθμών (Εικόνα 3). Ο Χρίστος υπολογίζει το αποτέλεσμα των πράξεων, για να αποφασίσει κατά πόσο ο αριθμός είναι διψήφιος, περιττός και πολλαπλάσιο του 10. Στην περίπτωση που η δομή του αριθμού εκφράζεται με ένα γενικό τρόπο, δίνει ο ίδιος μία τιμή σε κάθε μεταβλητή. Η Δώρα απαντά ορθά, κρίνοντας με βάση την προσθετική και πολλαπλασιαστική δομή κάθε αριθμού.

(α) Χρίστος



(β) Δώρα



Εικόνα 3: Στρατηγικές επίλυσης έργων που περιλαμβάνουν τη διαδικασία της επίλυσης εξίσωσης

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να περιγράψει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές, για να επιλύσουν έργα αριθμητικής και να διερευνήσει με ποιο τρόπο οι στρατηγικές αυτές είναι δυνατόν να επηρεάζουν την επίλυση αλγεβρικών έργων με παρόμοιο περιεχόμενο. Τα αποτελέσματα δείχνουν οι μαθητές που ήταν ικανοί να αναλύσουν και να χρησιμοποιήσουν τη δομή αριθμητικών παραστάσεων ήταν επίσης ικανοί να αναλύσουν και να χρησιμοποιήσουν τη δομή αλγεβρικών παραστάσεων. Αντίθετα, οι μαθητές που ήταν προσανατολισμένοι στην εκτέλεση πράξεων, αδυνατούσαν να αναζητήσουν ή να αντιληφθούν τη δομή και τις σχέσεις στις αριθμητικές παραστάσεις. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δίνουν ορθές απαντήσεις στα αριθμητικά έργα, αλλά να αποτυγχάνουν στα αντίστοιχα αλγεβρικά.

Η παρούσα εργασία παρέχει ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν με ποιο τρόπο η διαδικασία της γενίκευσης στην αριθμητική, δηλαδή η χρήση των ιδιοτήτων των αριθμών, των πράξεων και της ισότητας αποτελεί βασικό στοιχείο για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών και την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής. Παράλληλα, τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν δηλώνουν ότι μια βασική διαδικασία, η οποία υποστηρίζει την οικοδόμηση και ερμηνεία γενικεύσεων, είναι η αναζήτηση και η αντίληψη της δομής και των σχέσεων σε αριθμητικά πλαίσια (Kieran, 2018). Ως εκ τούτου, είναι σημαντικό οι μαθητές να διερευνούν τις έννοιες της αριθμητικής, αξιοποιώντας παράλληλα τα εργαλεία που παρέχει η άλγεβρα, ώστε να είναι σε θέση να χειρίζονται τις αριθμητικές παραστάσεις ως αντικείμενα που αναπαριστούν σχέσεις, παρά ως οδηγίες για εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165–184). Routledge

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for algebraic thinking. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40*, 39–53. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_10

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(1), 166–176. https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.jecp.2012.05.003

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds). *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge

Kieran, C. (2018) Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 79–105). Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter D., & Fong Ng, S. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. Springer.Knuth, E., Alibali, M.W., McNeil, N.M, Weinberg, A., & Stephens, A.C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. In J. Cai & E. Knuth (Eds), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (259-275). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts, *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173–196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Subramaniam K., & Banerjee R. (2011) The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. In J. Cai & E. Knuth (Eds), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (87-107). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_6

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122–137. https://doi.org/10.1007/BF03217374

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΨΕΥΔΟΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Μούντζια Αθηνά, Προμπονάς Κωνσταντίνος

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

athinamntz@hotmail.com, kostis.17988@gmail.com

Το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας, δηλαδή η εφαρμογή αναλογικών στρατηγικών επίλυσης σε μη αναλογικά προβλήματα, είναι διαχρονικό και επίμονο στις τάξεις των μαθηματικών. Στην παρούσα ερευνητική εργασία, μέσα από μία εξ αποστάσεως διδακτική παρέμβαση σε δύο μαθητές, μελετάμε την επιχειρηματολογία τους κατά την επίλυση αναλογικών και μη αναλογικών προβλημάτων, αξιοποιώντας το μοντέλο επιχειρηματολογίας του Toulmin. Χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο αναλογικού συλλογισμού για να αναλύσουμε την αναλογική τους σκέψη και αναδεικνύουμε τη σημασία της τρίτης διάστασης του μοντέλου, η οποία αφορά το μεταγνωστικό επίπεδο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα συνηθισμένο λάθος που γίνεται τόσο στις τάξεις των μαθηματικών όσο και στην καθημερινή ζωή είναι η εφαρμογή γραμμικών σχέσεων ανεξαρτήτως κατάστασης (Gagatsis & Kyriakides, 2000). Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται κυρίως σε λεκτικά προβλήματα όπου μαθηματικές διαδικασίες, όπως η μέθοδος των τριών, εφαρμόζονται χωρίς να ληφθούν υπόψη οι ρεαλιστικοί τους περιορισμοί (Verschaffel et al., 2000). Αυτό συμβαίνει λόγω της ακούσιας αντίδρασης των μαθητών στη γλωσσική μορφή ενός προβλήματος, το οποίο έχουν μάθει να αντιμετωπίζουν με γραμμικό τρόπο κατά τη σχολική τους ζωή. Αποτελεί δηλαδή μια στερεοτυπική σύνδεση γλωσσικής και μαθηματικής δομής των προβλημάτων που οδηγεί στην ψευδαίσθηση της αναλογίας (Verschaffel et al., 2000). Στη βιβλιογραφία το φαινόμενο που περιγράφουμε αναφέρεται ως ψευδοαναλογία (pseudo-proportionality) και είναι επαναλαμβανόμενο, καθολικό και εξαιρετικά ανθεκτικό σε παρεμβάσεις εξάλειψής του (Modestou & Gagatsis, 2007).

Στην παρούσα εργασία μελετάμε πώς αποτυπώνεται στη δομή και το είδος της επιχειρηματολογίας των μαθητών το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας κατά την επίλυση αναλογικών και μη αναλογικών γεωμετρικών προβλημάτων μήκους-εμβαδού-όγκου. Έτσι θέτουμε τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

ΕΕ1: Πώς διακρίνονται οι διαστάσεις της αναλογικής σκέψης των μαθητών κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων μήκους-εμβαδού-όγκου, μέσα από την επιχειρηματολογία τους;

ΕΕ2: Αναδεικνύεται το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας στα επιχειρήματα των μαθητών και πώς;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μοντέλο αναλογικού συλλογισμού

Οι Verschaffel et al. (2000) ισχυρίζονται πως χρειάζεται ριζική εννοιολογική αλλαγή για να ξεπεραστεί το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας και οι Gagatsis & Modestou (2007) ισχυρίζονται πως τα λάθη ψευδοαναλογίας οφείλονται στο επιστημολογικό εμπόδιο της γραμμικότητας. Οι Modestou & Gagatsis (2010) υποστήριξαν την ανάγκη για αναμόρφωση της έννοιας της αναλογικής σκέψης καθώς θεωρούν πως δεν αφορά μόνο την ικανότητα διαχείρισης αναλογικών προβλημάτων, αλλά εγκολπώνει ένα ευρύτερο και πιο σύνθετο φάσμα γνωστικών ικανοτήτων που έχουν και ψυχολογική και εκπαιδευτική διάσταση. Σε αντίθεση λοιπόν με τις προϋπάρχουσες έρευνες που αντιμετώπιζαν τον αναλογικό συλλογισμό ως μονοδιάστατο, οι Modestou & Gagatsis (2010) πρότειναν και επιβεβαίωσαν ερευνητικά ένα μοντέλο τριών διαστάσεων:

I. Ο **αναλογικός συλλογισμός** (analogical reasoning) αναφέρεται στο ψυχολογικό επίπεδο και περιλαμβάνει την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν λεκτικές και αριθμητικές αναλογίες σε ένα πλαίσιο μη μαθηματικό.

II. Ο **μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός** (routine proportionality) αφορά στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών προβλημάτων.

III. Η **μετα-αναλογική ενημερότητα** (meta-analogical awareness) αφορά στο μεταγνωστικό επίπεδο και περιλαμβάνει την ικανότητα αναγνώρισης και διάκρισης αναλογικών και μη αναλογικών καταστάσεων και την ικανότητα επίλυσης μη αναλογικών προβλημάτων.

Επιχειρηματολογία (argumentation)

Οι Schwarz & Linchevski (2007) ισχυρίζονται ότι η επιχειρηματολογία (argumentation) των μαθητών μπορεί να αποκαλύψει την εννοιολογική αλλαγή στη σκέψη τους. Για τον λόγο αυτό μελέτησαν τα επιχειρήματά τους κατά την επίλυση προβλημάτων αναλογικής σκέψης. Επίσης, οι Misailidou & Williams (2004) εξέτασαν την επιχειρηματολογία των μαθητών σε αναλογικά προβλήματα χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Toulmin (1958) για να ανιχνεύσουν τους παράγοντες που οδηγούν στην αλλαγή των επιχειρημάτων και ίσως και της σκέψης των μαθητών. Οι Prusak, Hershkowitz και Schwarz (2012) αναφέρουν πως το μοντέλο Toulmin (1958) χρησιμοποιείται ως μοντέλο για τον εντοπισμό της ανάπτυξης των επιχειρημάτων στις διαδικασίες μάθησης στις αίθουσες διδασκαλίας. Στην παρούσα έρευνα αποτελεί ένα επιπλέον εργαλείο για να διερευνήσουμε τις ικανότητες αναλογικής σκέψης των μαθητών, πέρα από το αν έλυσαν σωστά ένα πρόβλημα ή όχι.

Στο μόντελο του Toulmin, αν και έχουν εμφανιστεί πλήθος εκδοχών του, ο πυρήνας ενός επιχειρήματος αποτελείται από τέσσερα κύρια στοιχεία. Τα δεδομένα (data), τα συμπεράσματα (conclusions), τις εγγυήσεις (warrants) και τις υποστηρίξεις (backings). Τα «δεδομένα» απαιτούνται για τη θεμελίωση του συμπεράσματος, οι «εγγυήσεις» έχοντας ως βάση τα «δεδομένα» αποτελούν την αιτιολόγηση, που οδηγεί σε ένα αποδεκτό και νόμιμο συμπέρασμα, ενώ οι «υποστηρίξεις» διασφαλίζουν την εγκυρότητα των «εγγυήσεων» παρέχοντάς τους υποστήριξη. Το μοντέλο αυτό λοιπόν τονίζει τα δομικά στοιχεία της επιχειρηματολογίας. Οι Fiallo και Gutiérrez (2017) χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Toulmin για την αναπαράσταση της επιχειρηματολογίας των μαθητών διέκριναν δύο είδη επιχειρημάτων, τα επαγωγικά (deductive) και τα εμπειρικά (empirical). «Τα επαγωγικά επιχειρήματα αποτελούν ένα είδος επαγωγικής αλυσίδας, που εκφράζεται με φυσική γλώσσα και δεν υποστηρίζεται απαραίτητα από τη μαθηματική θεωρία» και «τα εμπειρικά επιχειρήματα βασίζονται στην παρατήρηση ή χειρισμό συγκεκριμένων περιπτώσεων για να προσδιοριστεί μια ιδιότητα ή ένα γεγονός, που όταν αποδοθεί (γενικευθεί) στο σύνολο των περιπτώσεων, μπορεί να διατυπωθεί ως μια γενική δήλωση που δίνει την απάντηση σε ένα πρόβλημα.» (σελ. 148).

Γεωμετρικά προβλήματα «μήκους-όγκου-εμβαδού»

Τύποι προβλημάτων που αναζητούν σχέσεις μεταξύ μήκους , εμβαδού και όγκου σχημάτων εμπλέκουν το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας κι έχουν χρησιμοποιηθεί σε πλήθος ερευνητικών μελετών του φαινομένου (Gagatsis & Modestou 2007, Modestou et al., 2004, De Bock et al., 1998, De Bock et al., 2003, Modestou & Gagatsis, 2010, Modestou & Gagatsis, 2013, Osman & Stavy, 2006, Stavy & Babai, 2010). Η συνήθης εμφάνιση του φαινομένου της ψευδοαναλογίας εδώ συνίσταται στο ότι οι μαθητές θεωρούν πως όσο αυξάνεται η μία ποσότητα (μήκος), τόσο αυξάνεται και η άλλη (εμβαδό, όγκος).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εργαλεία-Μαθηματικά έργα

Σε δύο μαθητές της Β’ Γυμνασίου δόθηκαν έξι λεκτικά γεωμετρικά προβλήματα μήκους-εμβαδού-όγκου σε δύο φάσεις (Α’ φάση: A_1,A_2,A_3 και Β’ φάση: B_1,B_2,B_3) με διαφορετική σειρά ως προς την δομή των προβλημάτων έτσι ώστε να μην υπάρχει ευθεία αντιστοιχία των μεθόδων επίλυσης. Συνολικά η παρέμβαση διήρκησε 2 διδακτικές ώρες.

Στην Α' φάση το πρόβλημα Α1 είναι μεταγνωστικό πρόβλημα έμμεσης μέτρησης της περιμέτρου (αναλογικό), διατυπωμένο με τη στερεοτυπική γλωσσική δομή των τεσσάρων ποσοτήτων, η οποία αποτελείται από τέσσερις ποσότητες (α,β,γ,δ) εκ των οποίων η μία είναι άγνωστη και έναν υπαινιγμό πως η ίδια σχέση συνδέει την α με την β και την γ με τη δ (Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004) Το πρόβλημα Α2 (μη αναλογικό) έχει την ίδια στερεοτυπική γλωσσική δομή των τεσσάρων ποσοτήτων εκ των οποίων η μία είναι άγνωστη και περιλαμβάνει την έμμεση μέτρηση εμβαδού. Το πρόβλημα Α3 είναι πρόβλημα όγκου (μη αναλογικό), πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, όπου δινόταν μόνο μια τιμή ως δεδομένο.

Στη Β' φάση αλλάξαμε τη σειρά και τη δομή των προβλημάτων ώστε να μην υπάρχει ευθεία αντιστοιχία των μεθόδων επίλυσης για τους μαθητές. Το Β1 είναι πρόβλημα εμβαδού (μη αναλογικό) πολλαπλασιαστικής σύγκρισης, όπου δινόταν μόνο μια τιμή ως δεδομένο. Το Β2 (αναλογικό) με τη γλωσσική δομή των τεσσάρων ποσοτήτων και το Β3 είναι μεταγνωστικό πρόβλημα έμμεσης μέτρησης του όγκου (μη αναλογικό) διατυπωμένο με γλωσσική δομή των τεσσάρων ποσοτήτων.

Τα αναλογικά προβλήματα είχαν ως στόχο να διερευνηθεί η δεύτερη διάσταση του μοντέλου αναλογικής σκέψης των μαθητών, ενώ τα μη αναλογικά είχαν ως στόχο να διερευνηθεί η τρίτη (Modestou & Gagatsis, 2010).

Στην αρχή, ζητήθηκε από τους μαθητές να λύσουν με τη σειρά τρία προβλήματα, δίνοντας έμφαση στην προφορική έκφραση των σκέψεών τους, τη συνεργασία και την ανάπτυξη επιχειρημάτων. Τους δόθηκε ελευθερία στη χρήση μέσων (π.χ. χαρτί και μολύβι) για την επίλυση και τους ζητήθηκε να παρουσιάσουν τις λύσεις τους προφορικά όταν ολοκληρωθούν. Με το πέρας της παρουσίασης των λύσεων των μαθητών, προχωρήσαμε σε παρέμβαση (15 λεπτά) εξηγώντας τους τα προβλεπόμενα από τη βιβλιογραφία λάθη. Ειδικότερα, εστιάσαμε στην αναζήτηση της φύσης των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων. Η παρέμβαση είχε ως εκκίνηση την παρουσίαση ενός παραδείγματος που θα προκαλέσει γνωστική σύγκρουση στους μαθητές και θα συμβάλει στην εννοιολογική αλλαγή των μαθητών, διαφοροποιώντας τη συμπεριφορά τους κατά την επίλυση προβλημάτων ψευδοαναλογίας (Modestou et al., 2004, Verschaffel et al., 2000).

Ανάλυση δεδομένων

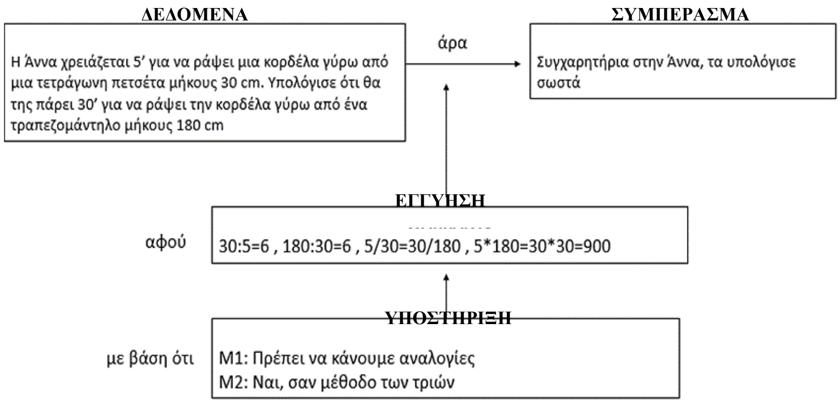
Χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο του Toulmin για την ανάλυση της επιχειρηματολογίας των μαθητών και το μοντέλο αναλογικής σκέψης των Modestou & Gagatsis (2010), προκειμένου να διερευνήσουμε τις ικανότητές τους στις δύο από τις τρεις διαστάσεις της αναλογικής τους σκέψης. Η μία ήταν η $2^η$ διάσταση «*μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός*» και εργαλείο εξερεύνησής της αποτέλεσαν τα δύο αναλογικά προβλήματα. Η άλλη ήταν η $3^η$ διάσταση «*μετα-αναλογική ενημερότητα*» και εργαλείο εξερεύνησής της τα τέσσερα μη αναλογικά προβλήματα. Η διερεύνηση έγινε με βάση τις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές, αλλά και την επιχειρηματολογία που τους οδήγησε σε αυτές. Επίσης, αναλύθηκε η διαφοροποίηση (ή η μη διαφοροποίηση) των απαντήσεων των μαθητών μετά την παρέμβαση των ερευνητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Toulmin μόνο στην Α φάση, καθώς στη Β φάση τα επιχειρήματα των μαθητών έχουν την ίδια δομή και φύση με την Α φάση εκτός από μία περίπτωση όπου ‘έσπασε’ η συνεργατική κατασκευή των επιχειρημάτων και οι μαθητές κατέληξαν σε διαφορετική λύση ο καθένας.

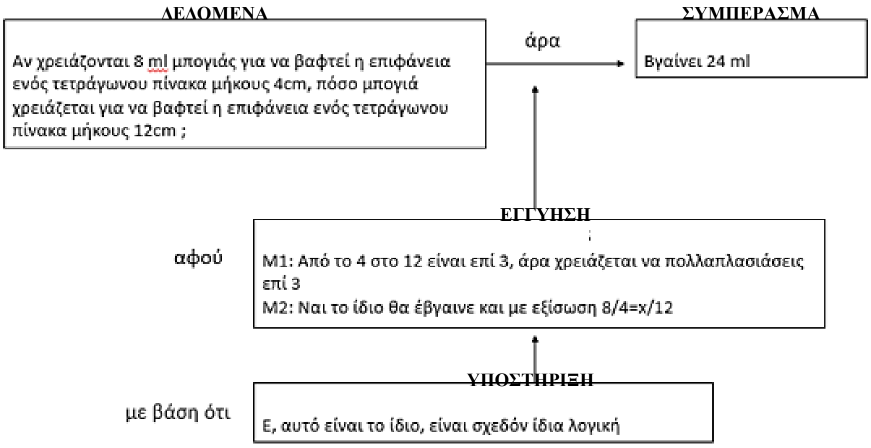
Α φάση

Οι μαθητές επέλυσαν σωστά το αναλογικό Πρόβλημα Α1, αναπτύσσοντας την επιχειρηματολογία τους (εικόνα 1). Παρόλα αυτά δεν παρείχαν καμία αιτιολόγηση στο γιατί έχουμε αναλογία.



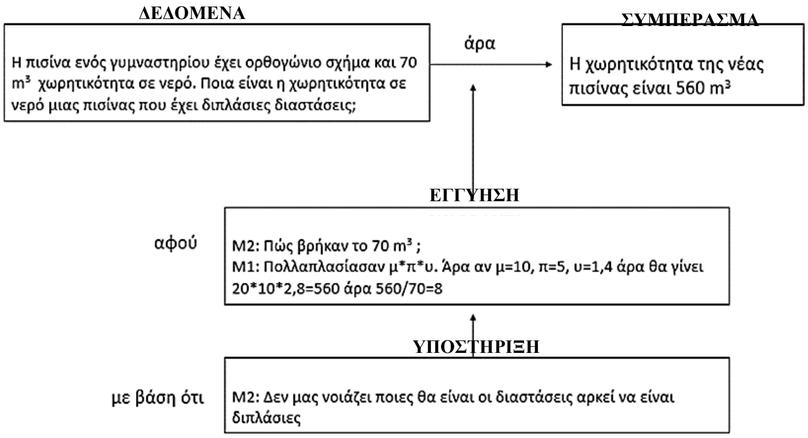
Εικόνα 1. Η επιχειρηματολογία των μαθητών στο μαθηματικό έργο Α1

Στο μη αναλογικό πρόβλημα Α2 οι μαθητές εφάρμοσαν αναλογική μέθοδο σε μη αναλογικό πρόβλημα (ψευδοαναλογία). Ανέπτυξαν την επιχειρηματολογία τους (εικόνα 2), ταυτίζοντας τη λογική του προβλήματος με αυτή του προβλήματος Α1.



Εικόνα 211. Η επιχειρηματολογία των μαθητών στο μαθηματικό έργο Α2

Στο Πρόβλημα Α3 οι μαθητές εφαρμόζοντας εμπειρικά, αριθμητικά επιχειρήματα (εικόνα 3) και αξιοποιώντας ένα τυχαίο παράδειγμα επέλυσαν σωστά το πρόβλημα. Παρόλα αυτά δεν εμφανίζονται σίγουροι για την ορθότητα της λύσης τους, αφού το ότι οχταπλασιάζεται ο όγκος της πισίνας δεν τους φαίνεται ερμηνεύσιμο.



Εικόνα 12. Η επιχειρηματολογία των μαθητών στο μαθηματικό έργο Α3

> Μαθητής 1: 560/70=8.. Κάτσε δε μου βγήκε σωστό μάλλον.
>
> Μαθητής 2: Μμμ.. μήπως να ΄χαμε μία πιο επαρκή λύση.. Μα έχει σχέση το 70 με το 560;

Μάλιστα αρχικά είχαν κάνει την εικασία ότι ο όγκος θα τριπλασιαστεί επειδή έχουμε τρεις διαστάσεις στην πισίνα (ψευδοαναλογία), αλλά η προσπάθεια για εμπειρική επιβεβαίωση της εικασίας τους, τους διέψευσε.

> Μαθητής: Επειδή έχει 3 διαστάσεις , άμα έχει διπλάσιες σημαίνει ότι θα πάρουμε όγκο 70*3.

Με βάση το μοντέλο Αναλογικής σκέψης Modestou & Gagatsis (2010) οι μαθητές έχουν την ικανότητα να επιλύσουν αναλογικά προβλήματα ρουτίνας (2η διάσταση), αλλά ενώ στο πρόβλημα Α3 φάνηκε ότι μπορούν να επιλύσουν ένα μη αναλογικό πρόβλημα, σε καμία περίπτωση δε μπορούν να αναγνωρίσουν ή να διακρίνουν ένα αναλογικό από ένα μη αναλογικό (3η διάσταση). Αυτό αναδεικνύεται τόσο από την εφαρμογή αναλογικής μεθόδου σε μη αναλογικό πρόβλημα (πρόβλημα Α2) τόσο από την αδυναμία ερμηνείας του ορθού αποτελέσματος στο πρόβλημα Α3.

Β φάση

Κατά την παρέμβαση μας (μετά το τέλος της Α' φάσης) οι δύο μαθητές φάνηκε να αντιλαμβάνονται τόσο τη σωστή λύση στο πρόβλημα που επέλυσαν λανθασμένα όσο και τη μη γραμμική φύση των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων που εμπλέκονταν.

Κατά την επίλυση των προβλημάτων της Β' φάσης οι μαθητές δεν άλλαξαν στρατηγική και τα επιχειρήματά τους είχαν ίδια δομή και φύση με αυτά της πρώτης φάσης. Δηλαδή στο πρόβλημα Β1 (μη αναλογικό εμβαδού) χρησιμοποίησαν εμπειρικά επιχειρήματα, δίνοντας ένα παράδειγμα με τυχαίες διαστάσεις και καταλήγοντας σε σωστή λύση. Δεν έκαναν καμία αναφορά στη φύση της σχέσης ούτε δοκίμασαν να την προβλέψουν εξαρχής.

Μαθητής 2: Πρέπει να βρούμε κάτι που κάνει 16, δηλαδή 4*4=16, να διπλασιάσουμε και τέλος τελειώσαμε.

Ενδιαφέρον έχει η πορεία επίλυσης των μαθητών στο πρόβλημα Β2 (αναλογίας-περιμέτρου). Ενώ στην Α φάση επέλυσαν το αντίστοιχο πρόβλημα με χαρακτηριστική ευκολία, τώρα δυσκολεύτηκαν και έδειξαν αβεβαιότητα για τη λύση τους. Μάλιστα σταμάτησαν να συνεργάζονται και ο καθένας κατέληξε σε διαφορετική λύση, την οποία και μας παρουσίασαν ξεχωριστά.

Ο ένας μαθητής εφάρμοσε μη αναλογική στρατηγική, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα την προηγούμενη επιτυχημένη στρατηγική του τυχαίου παραδείγματος, υπολογίζοντας όμως εμβαδά! Ο δεύτερος χρησιμοποίησε αναλογική στρατηγική επιλύοντας σωστά το πρόβλημα, εκφράζοντας όμως αβεβαιότητα για την ορθότητά της

Μαθητής 2: 20*3=60 άρα 10*3=30. Αυτό βγαίνει, πραγματικά βγαίνει σε μένα αλλά νομίζω ότι είναι τυχαίο

Μάλιστα δεν αντικρούει το επιχείρημα του Μ1 που χρησιμοποιεί εμβαδά για την επίλυση, ούτε είναι σε θέση να το χαρακτηρίσει λανθασμένο.

Μαθητής 2: Μου ακούστηκε λίγο περίπλοκο, δεν ξέρω..

Τέλος στο πρόβλημα Β3 (μη αναλογικό-όγκου), όπου όπως στο Α1 τους ζητήθηκε να αξιολογήσουν την ορθότητα μιας απάντησης, βρήκαν ορθά τον όγκο της πισίνας με διπλάσιες διαστάσεις εφαρμόζοντας τη στρατηγική τους με τις τυχαίες τιμές, χωρίς όμως να προβλέψουν εξ' αρχής τη μεταβολή του.

Η μη επίλυσή του προβλήματος Β2 κι η εφαρμογή μη αναλογικής στρατηγικής σε αναλογικό πρόβλημα από τον Μ1 και η γεμάτη αβεβαιότητα, χωρίς δυνατότητα τεκμηρίωσης από τον Μ2 θα μπορούσε να αμφισβητήσει ακόμα και την 'ικανότητα επίλυσης αναλογικών προβλημάτων' των μαθητών, το οποίο θα αποτελούσε ένα αντιφατικό εύρημα σε σχέση με τα αποτελέσματα της Α φάσης αλλά και της μεταγνωστικής μας παρέμβασης. Όμως οι Gagatsis & Modestou (2007) ανέφεραν ότι σύμφωνα με τις έρευνες των (De Bock et al., 2002, Van Dooren et al., 2004), οι διδακτικές παρεμβάσεις που έχουν στόχο το μεταγνωστικό έλεγχο των μαθητών σε αναλογικά και μη αναλογικά προβλήματα πολλές φορές έχουν το αντίθετο αποτέλεσμα. Δηλαδή οι μαθητές εφαρμόζουν μη αναλογικές στρατηγικές σε αναλογικά προβλήματα. Μάλιστα αυτά τα ευρήματα συμβαδίζουν με τον ισχυρισμό των Gagatsis & Modestou (2007) ότι το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας οφείλεται κατά κύριο λόγο στο επιστημολογικό εμπόδιο της γραμμικότητας. Έτσι η αντίφαση που προέκυψε στα δικά μας αποτελέσματα μπορεί να ερμηνευθεί και από την αναφορά της Sierpinska (1987) για τα 'δυαδικά εμπόδια' (dual obstancles). Δυαδικό εμπόδιο αποτελεί οποιαδήποτε προσπάθεια να ξεπεραστεί ένα επιστημολογικό εμπόδιο, απλά αντικαθιστώντας μια βαθιά ριζωμένη πεποίθηση που είναι συνδεδεμένη με αυτό, με την ακριβώς αντίθετη πεποίθηση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα ουσιαστικά αποτέλεσε μια μελέτη περίπτωσης και τα συμπεράσματά της δε μπορούν να είναι γενικεύσιμα. Παρ' όλα αυτά μας επέτρεψε να αποκτήσουμε μια πιο διεισδυτική ματιά στο φαινόμενο της ψευδοαναλογίας και να δοκιμάσουμε νέες μεθόδους διερεύνησης και ανάλυσής του.

Παρατηρήσαμε ότι η δομή και το περιεχόμενο των επιχειρημάτων των μαθητών είναι ίδια τόσο κατά την ορθή επίλυση αναλογικών προβλημάτων όσο και κατά την λανθασμένη επίλυση προβλημάτων ψευδοαναλογίας.

Το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας είναι βαθύ και πολυδιάστατο. Διαπιστώσαμε πως η ορθή επίλυση ενός μη αναλογικού προβλήματος δε συνεπάγεται απαραίτητα την ικανότητα διάκρισης αναλογικών από μη αναλογικές καταστάσεις και είναι χρήσιμο να λαμβάνεται υπόψιν το είδος των επιχειρημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές για να φτάσουν στη λύση. Τα αποτελέσματά μας δείχνουν πως τα εμπειρικά επιχειρήματα των μαθητών μπορεί να έφεραν τη σωστή λύση του προβλήματος αλλά όχι την ικανότητα διάκρισης αναλογικών από μη αναλογικών προβλημάτων. Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί το είδος των επιχειρημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την ορθή επίλυση μη αναλογικών προβλημάτων, όταν όμως συνοδεύεται από την ικανότητα διάκρισης αναλογικών και μη αναλογικών καταστάσεων.

Τέλος, επιβεβαιώνεται η σημασία του μοντέλου αναλογικής σκέψης και αναδεικνύεται η κομβική σημασία της διάστασης «μετα-αναλογική ενημερότητα» στην αναλογική σκέψη. Ενώ οι μαθητές είχαν την ικανότητα επίλυσης αναλογικών προβλημάτων (2η διάσταση «μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός») στην Α’ φάση, η αδυναμία τους να διακρίνουν τα αναλογικά από τα μη αναλογικά προβλήματα έθεσε σε αμφισβήτηση ακόμα και αυτή τους την ικανότητα στη Β’ φάση. Αυτό συνέβη με την εμφάνιση του «δυαδικού εμποδίου» (Sierpinska, 1987) και είναι απόρροια του επιστημολογικού εμποδίου της γραμμικότητας (Gagatsis & Modestou, 2007). Δηλαδή η μη «ικανότητα διάκρισης αναλογικών από μη αναλογικές καταστάσεις» μπορεί να επηρεάσει, ακόμα και να θέσει υπό αμφισβήτηση, την κεκτημένη ικανότητα επίλυσης αναλογικών προβλημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 65-83.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical thinking and learning*, 4(1), 65-89.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students’ performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and instruction*, 13(4), 441-463.

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 145-167.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers’ attitudes towards their pupils’ mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24-58.

Misailidou, C., & Williams, J. (2004). Helping children to model proportionally in group argumentation: Overcoming the constant sum error. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group* *for the Psychology of Mathematics Education (PME28)* (Vol. 3, pp. 321-328).

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 36-53.

Modestou, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students Improper Proportional Reasoning: The Case of Area and Volume of Rectangular Figures. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Osman, M., & Stavy, R. (2006). Development of intuitive rules: Evaluating the application of the dual-system framework to understanding children's intuitive reasoning. *Psychonomic Bulletin & Review*, 13(6), 935-953.

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 19-40.

Schwarz, B. B., & Linchevski, L. (2007). The role of task design and argumentation in cognitive development during peer interaction: The case of proportional reasoning. *Learning and Instruction*, 17(5), 510-531.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.

Stavy, R., & Babai, R. (2010). Overcoming intuitive interference in mathematics: Insights from behavioral, brain imaging and intervention studies. *ZDM*, 42(6), 621-633.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction*, 14(5), 485-501.

Verschaffel, L., Greer, B., and De Corte, E.(2000). Making Sense of Word Problems. Netherlands: Swets & Zeitlinger. *İlköğretim Online, 6(2)*.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΥ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΤΗΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ I-INQUIRY

Κλώθου Άννα[1], Χατζηλεοντιάδου Σοφία[1], Πετρίδου Αντωνία[2]

[1]ΠΤΔΕ, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης,
[2]1ο Πειραματικό Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης

aklothou@eled.duth.gr, schatzil@eled.duth.gr, pantonia65@gmail.com

Η εργασία αξιοποιεί τη μαθηματικοποίηση ως πλαίσιο ανάλυσης του αναστοχασμού μίας εκπαιδευτικού πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την εμπειρία της από τη συμμετοχή της στην κοινότητα δυναμικής γεωμετρίας i- INQUIRY. Για την παραγωγή και την επεξεργασία των δεδομένων αξιοποιήθηκε η αφηγηματική συνέντευξη και οι τεχνικές της θεματικής ανάλυσης και της θεμελιωμένης θεωρίας. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν πτυχές και συνδυασμούς των γνώσεων της εκπαιδευτικού ως προς την τεχνολογική, παιδαγωγική προσέγγιση του μαθηματικού περιεχόμενου κατά μήκος των σταδίων της μαθηματικοποίησης, οι οποίες εκφράστηκαν σε ατομικό και κοινωνικό επίπεδο. Η προτεινόμενη προσέγγιση αναδεικνύει τη δυνατότητα αξιοποίησης του πλαισίου της μαθηματικοποίησης για την εμβάθυνση, σε μικροεπίπεδο, σε διαδικασίες συμμετοχής σε κοινότητες επαγγελματικής ανάπτυξης στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ερευνητικό ενδιαφέρον της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει εστιαστεί σημαντικά στη συνεχιζόμενη επαγγελματική ανάπτυξη (Continuing Professional Development, CPD) των εκπαιδευτικών, η οποία μπορεί να οριστεί ως το πλαίσιο αλλαγών που προκύπτουν σε βάθος χρόνου και έχουν ως αποτέλεσμα ποιοτικές μετατοπίσεις των εκπαιδευτικών ως προς τον εκπαιδευτικό επαγγελματισμό τους (Fraser et al., 2007). Σε μια προσπάθεια οριοθέτησης του όρου, οι Fraser et al. (2007) πρότειναν μια σειρά παραγόντων που ασκούν επιρροή στη CPD και αναπτύσσονται με βάση τις πτυχές της επαγγελματικής μάθησης (ΕΜ) του εκπαιδευτικού και τους αντίστοιχους παράγοντες, ως εξής: α) Ατομική πτυχή (παράγοντες: πεποιθήσεις, αξίες και στάσεις, αυτο-αποτελεσματικότητα, αυτοπεποίθηση, ενδιαφέρον και κίνητρα), β) Κοινωνική πτυχή (παράγοντες: σχέσεις μεταξύ εκπαιδευτικού και ομάδων/ύπαρξη υποστηρικτικού περιβάλλοντος για τη δραστηριοποίηση και την ανάληψη ρίσκου από την πλευρά του εκπαιδευτικού και γ) Επαγγελματική πτυχή (παράγοντας: ισχυρές συνδέσεις μεταξύ της θεωρίας και της πράξης).

Η δυναμική γεωμετρία συνιστά ένα πεδίο: (α) ανάπτυξης δυνατοτήτων αξιοποίησης της τεχνολογίας στη μάθηση και τη διδασκαλία και (β) επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών. Παρέχει στον χρήση δυνατότητες για διατύπωση και επιβεβαίωση/απόρριψη υποθέσεων, επιχειρηματολογία, μαθηματικοποίηση, καθώς και συνεργατικές και αναστοχαστικές διαδικασίες προσέγγισης των γεωμετρικών καταστάσεων. Το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας αποτελεί έναν νέο πόρο (resource) αναπαράστασης της γεωμετρικής γνώσης, ωστόσο, μέσω του δυναμικού χαρακτήρα του, λειτουργεί και ως εργαλείο σκέψης και μετασχηματισμού των πρακτικών του εκπαιδευτικού (Jonassen, 2000).

Το μοντέλο Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) ενσωματώνει γνώσεις των εκπαιδευτικών, οι οποίες είναι απαραίτητες ώστε να εντάξουν την τεχνολογία στο μάθημά τους (Mishra & Koehler, 2006): (1) Content Knowledge (CK)-η γνώση του γνωστικού περιεχομένου προς διδασκαλία/μάθηση, (2) Pedagogical Knowledge (PK)-η γνώση σχετικά με τις διαδικασίες και πρακτικές ή μεθόδους διδασκαλίας/ μάθησης και ο τρόπος με τον οποίο εξυπηρετούν τους εκπαιδευτικούς στόχους, (3) Pedagogical Content Knowledge (PCK)-η γνώση της κατάλληλης παιδαγωγικής προσέγγισης για τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου γνωστικού περιεχομένου, (4) Technology Knowledge (TK)-η επικαιροποιημένη γνώση εργαλείων, ψηφιακών και μη, και οι δεξιότητες αξιοποίησής τους στο διδακτικό/μαθησιακό έργο, (5) Technological Content Knowledge (TCK)-η γνώση σχετικά με τον τρόπο εμπλουτισμού των αναπαραστάσεων του περιεχομένου, (6) Technological Pedagogical Knowledge (TPK)-η γνώση του τρόπου με τον οποίο η διδασκαλία και η μάθηση μπορούν να αλλάξουν με τη χρήση συγκεκριμένων τεχνολογιών, και (7) Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)-η σύνθεση των επιμέρους μορφών γνώσεων και η βάση για την αποτελεσματική διδασκαλία με αξιοποίηση της τεχνολογίας. Η ανάπτυξη των σταδίων αυτών δεν είναι απαραίτητα γραμμική, καθώς εξαρτάται από το πλαίσιο (context) εντός του οποίου λαμβάνει χώρα η ενσωμάτωση-ανάπτυξη του μοντέλου αυτού (Psycharis & Kalogeria, 2018).

Η αξιοποίηση της δυναμικής γεωμετρίας με βάση την TPACK μπορεί να υποστηρίζει έναν βασικό στόχο της διδασκαλίας των μαθηματικών, δηλαδή την ανάπτυξη της ικανότητας για μαθηματικοποίηση, η οποία είναι τόσο σημαντική όσο και η ίδια η γνώση των μαθηματικών (Gravemeijer, 2000).

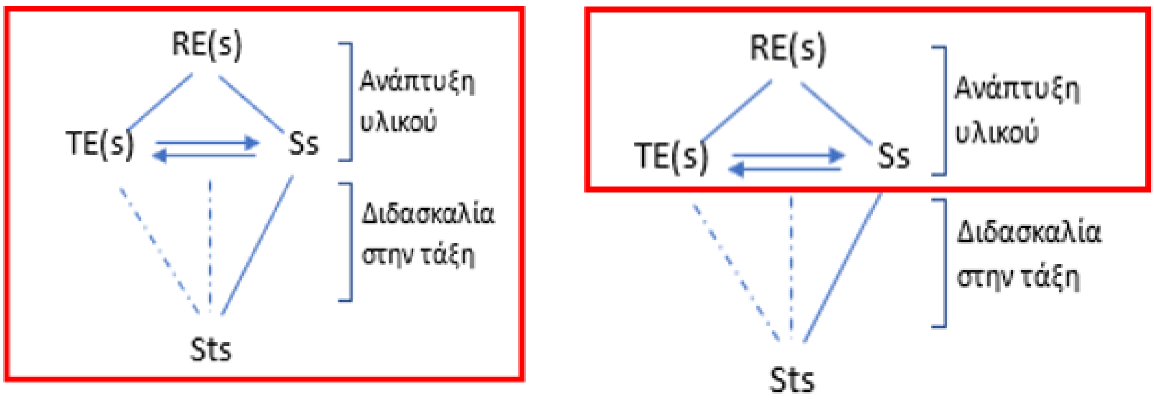
Μια συνήθης περιγραφή της πορείας μαθηματικοποίησης εκκινεί από μια πραγματική κατάσταση που τίθεται ως πρόβλημα και συνεχίζει με την καταγραφή του σταδιακού μετασχηματισμού της κατάστασης αυτής σε μαθηματικό πρόβλημα (Σακονίδης & Κλώθου, 2020). Η πορεία της μαθηματικοποίησης, με βάση το PISA, περιλαμβάνει τη μετακίνηση μεταξύ του πραγματικού κόσμου και του μαθηματικού κόσμου και έχει δύο μέρη, τη Διατύπωση (formulating) και την Ερμηνεία (interpreting). Η Διατύπωση ενός προβλήματος ως μαθηματικού προβλήματος μπορεί να περιλαμβάνει τη διάρθρωση, τον σχεδιασμό, την πραγματοποίηση υποθέσεων και/ή την κατασκευή ενός μοντέλου. Η Ερμηνεία περιλαμβάνει τον προσδιορισμό του εάν και του πώς τα αποτελέσματα της μαθηματικής εργασίας συνδέονται με το αρχικό πρόβλημα και την εκτίμηση της επάρκειάς τους και σχετίζεται άμεσα με τις διαδικασίες διατύπωσης και ερμηνείας του πλαισίου (OECD, 2014). Παρακάτω παρουσιάζονται τα στάδια μαθηματικοποίησης (ΣΤ), όπως έχουν προσαρμοστεί από το OECD (2014): ΣΤ1: Εκκίνηση με ένα πρόβλημα που τοποθετείται στην πραγματικότητα, ΣΤ2: Οργάνωση του προβλήματος σύμφωνα με μαθηματικές έννοιες και προσδιορισμός των μαθηματικών γνώσεων που απαιτούνται, ΣΤ3: Σταδιακή απομάκρυνση από την πραγματικότητα μέσω διαδικασιών παραγωγής παραδοχών, γενίκευσης και τυποποίησης, που προωθούν τα μαθηματικά χαρακτηριστικά της κατάστασης και μετατρέπουν το πραγματικό πρόβλημα σε ένα μαθηματικό πρόβλημα που αντιπροσωπεύει πιστά την κατάσταση, ΣΤ4: Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος, ΣΤ5: Κατανόηση της μαθηματικής λύσης ως προς την πραγματική κατάσταση και προσδιορισμός των περιορισμών της λύσης (Σακονίδης & Κλώθου, 2020).

Αξιοποιώντας το πλαίσιο της κοινότητας διερεύνησης (Jaworski, 2012), το 2018-2019 δημιουργήθηκε η κοινότητα διερεύνησης i-INQUIRY με αντικείμενο την ανάπτυξη της TPACK στη διδακτική/μαθησιακή αξιοποίηση της δυναμικής γεωμετρίας. Στην i-INQUIRY συμμετέχουν Sts (μαθητές) και TE(s) (εκπαιδευτικοί) από πειραματικό δημοτικό σχολείο αστικής περιοχής της βόρειας Ελλάδας, μεταξύ των οποίων και η τρίτη συγγραφέας της παρούσας εργασίας, οι υπόλοιπες συν-συγγραφείς ως REs (ερευνήτριες), καθώς και οι Ss (μελλοντικοί εκπαιδευτικοί-φοιτητές/ριες της πρώτης και της δεύτερης συν-συγγραφέων-διδασκουσών σε προπτυχιακό μάθημα δυναμικής γεωμετρίας).

Η ΜΕΛΕΤΗ

Η συμμετοχή στην κοινότητα διερεύνησης i-INQUIRY επιφέρει σημαντικά οφέλη σε πολλαπλά επίπεδα για το σύνολο των συμμετεχόντων. Για την περιγραφή και την κατανόηση του τρόπου συγκρότησης και λειτουργίας της κοινότητας διερεύνησης που μελετάται και των τρόπων με τους οποίους τα μέλη της κατανοούν τις δυνατότητες επαγγελματικής ανάπτυξής τους και νοηματοδοτούν τη συμμετοχή τους, θεωρήθηκε κατάλληλο και αξιοποιήθηκε το ερευνητικό σχέδιο της ‘μελέτης περίπτωσης’, δεδομένου ότι το ενδιαφέρον της έρευνας εστιάζεται περισσότερο στις δράσεις των ατόμων που συμμετέχουν σε αυτήν (Bryman, 2017). Η μελέτη περίπτωσης συνιστά μια ενδεδειγμένη ερευνητική επιλογή όταν το φαινόμενο που διερευνάται, όπως η ανάπτυξη μιας κοινότητας πρακτικής (π.χ. i-INQUIRY) ή η αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται στη μαθηματική τάξη, δεν μπορεί να διαχωριστεί από το πλαίσιο αναφοράς του (Bryman, 2017).

Η εστίαση της παρούσας εργασίας στη συμμετοχή της εκπαιδευτικού-τρίτης συν-συγγραφέως (στο εξής εκπαιδευτικός) στην i-INQUIRY κρίνεται ιδιαίτερα ‘δυνατή’ λόγω της πορείας της στην κοινότητα διερεύνησης και για τον λόγο αυτόν αποτέλεσε το δείγμα της έρευνας. Η εκπαιδευτικός έχει 23 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, καθώς και πλήθος συμμετοχών σε ομάδες συνεργασίας με αντικείμενο τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία τους. Ενδεικτικά, συμμετείχε στην Πιλοτική Εφαρμογή του Νέου Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα, κατά το χρονικό διάστημα 2011-2012.



(α) (β)

Σχήμα 1. (α) i-INQUIRY_1, (β) i-INQUIRY_2 (RE(s) ερευνητής/ές, TE(s) εν ενεργεία εκπαιδευτικός/οί, Ss, μελλοντικοί εκπαιδευτικοί (προπτυχιακοί φοιτητές/ριες), Sts, μαθητές/ριες)

Η λειτουργία της i-INQUIRY μπορεί να μελετηθεί από διαφορετικές οπτικές εστιάζοντας κάθε φορά σε πτυχές του τρόπου λειτουργίας της. Στο Χατζηλεοντιάδου κ.συν. (2019), μελετήθηκε η συμμετοχή της εκπαιδευτικού στο πρόγραμμα «κάτοψη» με σχήμα συνεργασίας το i-INQUIRY_1 (βλ. Σχήμα 1(α)), ενώ στην παρούσα εργασία μελετάται η συμμετοχή της στο πρόγραμμα «εμβαδόν» με σχήμα συνεργασίας το i-INQUIRY_2 (βλ. Σχήμα 1(β)), δηλαδή με τις REs και τους Ss τους για τον σχεδιασμό μαθηματικού έργου.

Πιο συγκεκριμένα, δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα: «Για το δωμάτιο της τραπεζαρίας θέλουμε να αγοράσουμε ένα χαλί. Τα χρήματα που διαθέτουμε φτάνουν για χαλί με Εμβαδόν 12 τ.μ. (κλίμακα 1:100). Να λάβετε υπόψη ότι το μήκος το πλευρών του χαλιού πρέπει να είναι φυσικός αριθμός: α) Τι σχήμα μπορεί να έχει το χαλί μας; και β) Πόσα διαφορετικά ορθογώνια χαλιά μπορούν να έχουν εμβαδόν 12 τ.μ.;».

Η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στο να απαντήσει στο παρακάτω ερευνητικό ερώτημα: Το πλαίσιο της μαθηματικοποίησης μπορεί να αξιοποιηθεί για την ανάδειξη της TPACK μέσα από τον αναστοχασμό της εκπαιδευτικού, η οποία συμμετέχει στο πρόγραμμα CPD i-INQUIRY_2;

Το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για τη συλλογή δεδομένων στο πλαίσιο της έρευνας ήταν η αφηγηματική συνέντευξη (Bryman, 2017), η οποία αφορούσε τον αναστοχασμό της εκπαιδευτικού σχετικά με την αξιοποίηση της δυναμικής γεωμετρίας στον σχεδιασμό του έργου «εμβαδόν», ως προς τις πτυχές της CPD. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η ατομική και η κοινωνική πτυχή. Οι απαντήσεις της εκπαιδευτικού μελετήθηκαν προσεκτικά με βάση τις πτυχές της CPD. Για την ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τον αναστοχασμό της εκπαιδευτικού υιοθετήθηκαν συνδυαστικά τεχνικές θεματικής ανάλυσης και θεμελιωμένης θεωρίας (Bryman, 2017). Ειδικότερα, στο πλαίσιο της θεματικής ανάλυσης αξιοποιήθηκαν τα στάδια μαθηματικοποίησης ως ευαισθητοποιητικές κατηγορίες οργάνωσης των δεδομένων, ενώ στο πλαίσιο της θεμελιωμένης θεωρίας διενεργήθηκε αρχική κωδικοποίηση μορφών γνώσης του TPACK ανά στάδιο της μαθηματικοποίησης. Στη συνέχεια, τα διάφορα ‘στιγμιότυπα’ που ανήκαν σε κάθε κωδικό περιορίστηκαν στα πλέον αντιπροσωπευτικά του κωδικού (κατηγορίας) και οι διάφοροι κωδικοί ομαδοποιήθηκαν εκ νέου στον βαθμό που ήταν δυνατό.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

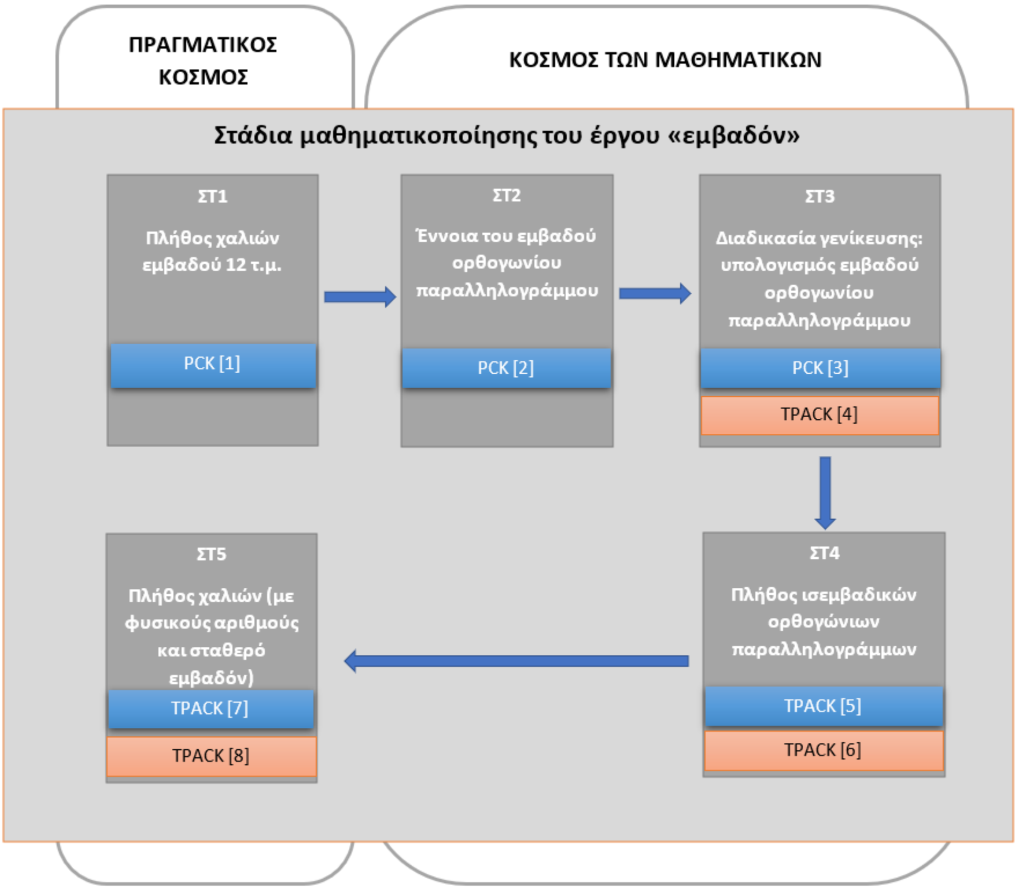
Στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται: α) τα στάδια μαθηματικοποίησης του προβλήματος με το χαλί, και β) ανά στάδιο ο αναστοχασμός της εκπαιδευτικού σχετικά με την TPACK στις δύο πτυχές της επαγγελματικής ανάπτυξης, την ατομική (με σιελ χρώμα) και την κοινωνική (με ροζ χρώμα).

Πιο συγκεκριμένα, παρακάτω παρατίθενται χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τον αναστοχασμό της εκπαιδευτικού με βάση τα οποία νοηματοδοτήθηκε το περιεχόμενο των σταδίων μαθηματικοποίησης στο Σχήμα 2, όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια.

[1] Εκπαιδευτικός: Ξεκινήσαμε λοιπόν με ένα πρόβλημα δικό μου (που με αφορούσε) …… είναι ένα πραγματικό πρόβλημα που κλήθηκα να επιλύσω η ίδια, στο πλαίσιο της αναζήτησής μου, για την αγορά χαλιού. Δημιούργησα, λοιπόν, ένα

σενάριο που να μοιάζει πραγματικό, το σχεδίασα και κάλεσα τους μαθητές μου να βοηθήσουν στην επίλυσή του.

Η εκπαιδευτικός σχεδιάζει (ατομικά) ένα πραγματικό πρόβλημα αξιοποιώντας παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (PCK), γεγονός που αναδεικνύει το ΣΤ1_*Εκκίνηση με πραγματικό πρόβλημα*.



Σχήμα 2. Αποτελέσματα της κωδικοποίησης του αναστοχασμού της εκπαιδευτικού σχετικά με την TPACK της, ως προς α) τα στάδια μαθηματικοποίησης (ΣΤ1-ΣΤ5) β) πτυχές της επαγγελματικής ανάπτυξης (ατομική-με σιελ χρώμα) και (κοινωνική-ροζ χρώμα) και γ) πτυχές της TPACK που ενεργοποιήθηκαν ανά στάδιο αναστοχασμού [αρίθμηση αποσπάσματος αναστοχασμού]

[2] Εκπαιδευτικός: Ο σχεδιασμός βασίστηκε στην εννοιολογική κατανόηση του εμβαδού και τη διδασκαλία του ως έννοια (ως κάλυψη επιφάνειας), μονάδες μέτρησης, διαστάσεις μήκος-πλάτος, ποιο είναι το αναλλοίωτο στοιχείο (εμβαδόν) κατά την αλλαγή των διαστάσεων.

Ακολούθως η εκπαιδευτικός δηλώνει ότι το πρόβλημα αφορά την έννοια του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, εργαζόμενη επίσης σε ατομικό επίπεδο αξιοποιεί την παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (PACK) και ορίζει τη μαθηματική έννοια και τις γνώσεις πίσω από το πραγματικό πρόβλημα, προχωρεί δηλαδή στο ΣΤ2_*Μαθηματικές έννοιες και μαθηματικές γνώσεις*.

Η εκπαιδευτικός μέχρι αυτό το σημείο εργάστηκε ατομικά και στη συνέχεια συνδέθηκε με την i-INQUIRY_2 προκειμένου να γίνει συνεργασία στην κοινότητα πάνω σε αυτό το μαθηματικό έργο, σύμφωνα με τον τρόπο συνεργασίας που φαίνεται στο Σχήμα 1(β). Η έναρξη της συνεργασίας αυτής έγινε με πρωτοβουλία της εκπαιδευτικού, η οποία αυτοδύναμα επέλεξε το συγκεκριμένο έργο και ενημέρωσε την κοινότητα για τα ΣΤ_1 και ΣΤ_2. Η ενημέρωση αυτή αποτέλεσε την έναρξη της συνεργασίας μέσα στην i-INQUIRY_2.

[3] Εκπαιδευτικός: Ο σχεδιασμός βασίστηκε στη ‘συμπεριφορά’ του εμβαδού στο πλαίσιο του μετασχηματισμού επιφανειών/σχημάτων (διατήρηση εμβαδού, αναλλοίωτο στοιχείο κατά την αλλαγή των διαστάσεων του ορθογωνίου).

Η εκπαιδευτικός μέσα στην i-INQUIRY_2 αρχικά προσδιόρισε στοιχεία σχεδιασμού των έργων που αντανακλούν την αυτοπεποίθησή της στον σχεδιασμό με βάση την PACK της. Περνώντας από το ατομικό στο κοινωνικό επίπεδο η εκπαιδευτικός ανέφερε:

[4] Εκπαιδευτικός: Όμως η συνεργασία με τους ερευνητές και η συμμετοχή στην ομάδα σχεδιασμού των δραστηριοτήτων, με τη χρήση του λογισμικού μού έδωσε τη δυνατότητα να δω τρόπους αξιοποίησής του και να μάθω πώς δημιουργείς έναν δρομέα και πώς μπορείς να τον εντάξεις στον σχεδιασμό μιας δραστηριότητας. Ταυτόχρονα ένιωσα ασφαλής γιατί οι ερευνητές θα αναλάμβαναν την καθοδήγηση των φοιτητών στα τεχνικά ζητήματα που αφορούσαν το λογισμικό.

Η εκπαιδευτικός στο κοινωνικό επίπεδο ανέπτυξε σχέσεις με τα μέλη της i-INQUIRY_2 και ενεπλάκη στον σχεδιασμό και την υλοποίηση ενός δρομέα με στόχο τη διερεύνηση ισεμβαδικών ορθογωνίων με μεταβολή του μήκους και του πλάτους τους στο περιβάλλον του geogebra, διατηρώντας σταθερό το εμβαδόν και αναδεικνύοντας στοιχεία TPACK με σχετικά αδύναμη την TK στην οποία συνέβαλλαν τα λοιπά μέλη της i-INQUIRY_2.

Με βάση τα παραπάνω αποσπάσματα [3] και [4], η εκπαιδευτικός απομακρύνεται σταδιακά από την πραγματικότητα μέσα από την παραδοχή για αναλλοίωτο εμβαδόν, μετρήσεις με φυσικούς αριθμούς και διαδικασίες όπως η γενίκευση (ισεμβαδικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα), προκειμένου να γίνει αντιληπτός ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου με αξιοποίηση της δυναμικής γεωμετρίας, προχωρώντας με αυτόν τον τρόπο στο ΣΤ3_*Απομάκρυνση από την πραγματικότητα*.

[5] Εκπαιδευτικός: Με το geogebra μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν ισεμβαδικά σχήματα, να κάνουν υποθέσεις και να δοκιμάσουν.

Σε ατομικό επίπεδο οι πεποιθήσεις της εκπαιδευτικού αντανακλούν TPACK, όπως και στο κοινωνικό επίπεδο, με βάση το ακόλουθο απόσπασμα του αναστοχασμού της.

[6] Εκπαιδευτικός: Το γεγονός ότι αξιοποιήθηκαν διαφορετικού τύπου έργα (στις παρεμβάσεις των δύο ετών) με διαφορετική προσέγγιση (καθοδηγητική, διερευνητική), μας έδωσε τη δυνατότητα να συγκρίνουμε και να δούμε τα υπέρ και τα κατά καθεμίας. Τα πολλά μέλη στην ομάδα εμπλούτισαν με τις ιδέες τους τη συζήτηση. Κατασκευάστηκε έργο με διερευνητική προσέγγιση και με ερωτήσεις του τύπου: 'Τι πιστεύετε; Κάντε εκτιμήσεις! Αλλάζει το εμβαδόν;'

Από τα αποσπάσματα [5] και [6] φαίνεται ότι η εκπαιδευτικός ενεργοποιεί την TPACK της και στο ατομικό αλλά και στο κοινωνικό επίπεδο, προχωρώντας με αυτόν τον τρόπο στο ΣΤ4_*Επίλυση προβλήματος*.

[7] Εκπαιδευτικός: Με τη συνδρομή του geogebra οι μαθητές αναμένεται να μπορούν να υπολογίσουν το πλήθος των χαλιών με εμβαδόν του καθενός 12 τ.μ. με τους περιορισμούς που τέθηκαν.

[8] Εκπαιδευτικός: Στην ομάδα συζητήσαμε ενδιαφέρουσες προτάσεις για την εμφάνιση της δραστηριότητας, όπως η εισαγωγή εικόνων και ηρώων στο περιβάλλον του geogebra, στοιχεία τα οποία είναι ελκυστικά για τα παιδιά αυτής της ηλικίας και μπορούν να δημιουργούν συνδέσεις με τα παιχνίδια, τα οποία παίζουν συνήθως, έτσι ώστε τα μαθηματικά να αποτελέσουν πιθανά παιχνίδι για αυτούς.

Με βάση τα αποσπάσματα [7] και [8], η εκπαιδευτικός ενεργοποιεί την TPACK σε ατομικό και κοινωνικό επίπεδο προχωρώντας με αυτόν τον τρόπο στο ΣΤ5_ *Κατανόηση της μαθηματικής λύσης ως προς την πραγματική κατάσταση και προσδιορισμός των περιορισμών της λύσης*.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με αφορμή ένα μαθηματικό έργο η εκπαιδευτικός συμμετείχε στη CPD i-INQUIRY_2 προκειμένου να υποστηριχθεί στον σχεδιασμό στο πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας και με έννοια αναφοράς το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Ο αναστοχασμός της εκπαιδευτικού σχετικά με τη συμμετοχή της στη CPD εμπεριέχει δεδομένα που μπορούν να κωδικοποιηθούν σε πτυχές της TPACK της. Ο τρόπος με τον οποίο ενεργοποιούνται αυτές κατά τη διάρκεια σχεδιασμού μαθηματικών έργων με αξιοποίηση του geogebra μπορεί να αναδείξει σημεία περαιτέρω υποστήριξης της εκπαιδευτικού στο πλαίσιο ενός CPD.

Καθώς τα μαθηματικά συνδέονται στενά με τη μαθηματικοποίηση, η ανάλυση του αναστοχασμού της εκπαιδευτικού από αυτή την οπτική μπορεί να αναδείξει πτυχές της TPACK που ενεργοποιούνται σε κάθε στάδιό της σε δύο επίπεδα, το ατομικό και το κοινωνικό, όπως τεκμηριώνεται με βάση τον αναστοχασμό της εκπαιδευτικού (βλ. Σχήμα 2). Ειδικότερα, η σταδιοποίηση της μαθηματικοποίησης επέτρεψε την ευαισθητοποίηση των ερευνητριών για την οργάνωση του περιεχομένου του αναστοχασμού της εκπαιδευτικού ανά στάδιο. Με αυτό τον τρόπο η αξιοποίηση των σταδίων της μαθηματικοποίησης ως πλαισίου ανάλυσης επιτρέπει σε μικροεπίπεδο τη μελέτη του τρόπου με τον οποίο η εκπαιδευτικός προσέγγισε την ενσωμάτωση του geogebra στην i-INQUIRY_2. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της εκπαιδευτικού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, αυτή φάνηκε 'αδύναμη' όσον αφορά την TK στο ΣΤ_3, καθώς στο ατομικό επίπεδο αναδεικνύεται μόνο η PCK. Ωστόσο, στο κοινωνικό επίπεδο, μέσα από τη συνεργασία αναπτύσσει την TK αναφορικά με την κατασκευή του δρομέα στο περιβάλλον του geogebra. Στη συνέχεια, έχοντας κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο αυτός μπορεί να υλοποιήσει τη ζητούμενη γενίκευση, προχωρεί στα επόμενα στάδια εντάσσοντας στον αναστοχασμό της τη λειτουργία του (βλ. Σχήμα 2, ΣΤ_4 και ΣΤ_5, την ανάδειξη TPACK στα δύο επίπεδα, ατομικό και κοινωνικό). Έτσι, η αξιοποίηση του πλαισίου της μαθηματικοποίησης παρέχει τη δυνατότητα εμβάθυνσης στον τρόπο σκέψης της εκπαιδευτικού σε κάθε στάδιο (της μαθηματικοποίησης) και αποτελεί μια ανάλυση στο μικροεπίπεδο του τρόπου με τον οποίο αυτή κατακτά γνώσεις σχετικά με πτυχές της TPACK. Η περίπτωση του αναστοχασμού της εκπαιδευτικού λειτουργεί παραδειγματικά σε αυτή την εργασία και απαντά θετικά στο ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε.

Στην παρούσα εργασία η προτεινόμενη προσέγγιση αξιοποίησης της μαθηματικοποίησης ως πλαίσιο ανάλυσης δεδομένων επεκτείνει άλλες ερευνητικές προσπάθειες, οι οποίες αφορούν κυρίως την οργάνωση και επίλυση αυθεντικών προβλημάτων (Gravemeijer, 2000· OECD, 2014), την ανίχνευση δυσκολιών των μαθητών στα μαθηματικά (Wijaya, et al., 2014) και συμβάλλει στην ανάδειξη αναστοχαστικών διαδικασιών, με χρήση δυναμικής γεωμετρίας, στο πλαίσιο της επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι κοινωνικής έρευνας* (μτφ. Π. Σακελλαρίου). Αθήνα: Gutenberg. (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 2016).

Fraser, C., Kennedy, A., Reid, L. & Mckinney, S. (2007). Teachers' continuing professional development: contested concepts, understandings and models. *Journal of In-Service Education*, *33*(2), 153-169.

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). Hans Gravemeijer a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM*, *44*, 613-625.

Jonassen, D.H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking* (2nd ed). Upper Saddle River, Prentice Hall.

Mishra, P. & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teachers' knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Psycharis, G. & Kalogeria, E. (2018). Studying the process of becoming a teacher educator in technology-enhanced mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 631-660.

OECD (2014), *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science* (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264208780-en.

Σακονίδης, Χ. & Κλώθου, Ά. (2020). Μαθηματικός Γραμματισμός [Powerpoint slides]. Ανακτήθηκε από ΙΕΠ: Γραμματισμός στα Μαθηματικά. https://elearning.iep.edu.gr/study/my/.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M. & Robitzsch, A.. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, *11*, 555-584.

Χατζηλεοντιάδου, Σ., Κλώθου, Ά., Πετρίδου, Α. & Σακονίδης, Χ. (2019). Συνεχιζόμενη επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών στη δυναμική γεωμετρία, Στα πρακτικά του 8ου *Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 686-694, Κύπρος.

ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΠΑΝΔΗΜΙΑ COVID-19 ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Prodromou Theodosia

University of New England, Australia

tprodromou@une.edu.au

Η πανδημία COVID-19 έχει αλλάξει τη μαθηματική εκπαίδευση παγκοσμίως. Αυτή η αλλαγή θα αναλυθεί εξετάζοντας δύο τάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας και τη φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η σχέση μεταξύ της πανδημίας COVID-19 και της ψηφιακής τεχνολογίας στην εκπαίδευση εγείρει επιστημολογικά ζητήματα που αναδεικνύονται από τη φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Χρησιμοποιώντας την ιδέα ότι η βασική μονάδα παραγωγής γνώσης σε όλη την ιστορία είναι οι άνθρωποι με τα μέσα ενημέρωσης, συζητώ πώς οι άνθρωποι σχετίζονται με τον ιό, και πώς θα αλλάξει την εμπλοκή αυτών των δύο τάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι επιπτώσεις της πανδημίας και οι αντιδράσεις των κρατών σε αυτή είναι συγκλονιστικές, με εγκλεισμό ανθρώπων στα σπίτια τους, κοινωνική απομόνωση, χρήση μασκών, κλείσιμο των σχολείων όλων των βαθμίδων, κ.λπ.– και έχουν αφήσει τους περισσότερους ανθρώπους με ερωτηματικά για το μέλλον της ανθρωπότητας. Σε όλο τον κόσμο οι συνθήκες ζωής έχουν αλλάξει δραματικά και ξαφνικά. Η πανδημία είχε και έχει ακόμα επιπτώσεις σε όλες τις τάξεις της κοινωνίας και σε όλους τους τομείς συμπεριλαμβανομένου της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η μαθηματική διδασκαλία γινόταν μέσω του διαδικτύου κατά τη διάρκεια του εγκλεισμού γιατί ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας συνέστησε την κοινωνική απομόνωση ως μια κίνηση περιορισμού της διασποράς του κορωνοϊού. Ξαφνικά, δάσκαλοι, και καθηγητές αναγκάστηκαν να δημιουργήσουν διαδικτυακά μαθήματα μαθηματικών για να καλύψουν τη διδακτέα ύλη, καθώς ο ιός μπορούσε να μεταδοθεί μέσω ανθρώπινης επαφής — τόσο μεταξύ ανθρώπων όσο και μεταξύ ανθρώπων και μη έμβιων πραγμάτων.

Αυτή η κρίσης υγείας, μας οδήγησε σε κάποιο προβληματισμό σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτό το άρθρο θα εγείρει ορισμένα ερωτήματα στην κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης που προκλήθηκαν από τον ιό SARS-CoV-2, που προκαλεί το COVID-19.

Οι Engelbrecht et al. (2020, σ. 838) γράφουν:

> Το ερώτημα είναι, τι σχέση έχει ο [COVID-19] με τη μαθηματική εκπαίδευση και την ψηφιακή τεχνολογία; Εκτός από το αντίκτυπο που έχει στον τρόπο που γίνονται τα συνέδρια και τις μεταβαλλόμενες αίθουσες διδασκαλίας των μαθηματικών, ίσως χρειαστεί να θέσουμε ευρύτερα ερωτήματα: Η ψηφιακή τεχνολογία συνέτεινε στην αύξηση των ταξιδιών και άλλαξε καθοριστικά τον τρόπο ζωής μας, συνεπώς, είναι επίσης εν μέρει υπεύθυνη για την παρούσα κρίση. Είναι δυνατόν η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας να προκαλέσει παρόμοια κρίση στη μαθηματική εκπαίδευση; Εάν η κρίση διαρκέσει για μεγάλο χρονικό διάστημα, θα είναι σε θέση οι ψηφιακές τεχνολογίες να παρέχουν εναλλακτικούς τρόπους για την εφαρμογή της μαθηματικής εκπαίδευσης; Δεν υπάρχουν αρκετές ερευνητικές εργασίες σχετικά με τη διαδικτυακή μαθηματική εκπαίδευση στα δημοτικά σχολεία, αλλά αν η κρίση διαρκέσει πολύ, θα την εφαρμόσουμε χωρίς επαρκή έρευνα; Εάν η τρέχουσα κρίση τελειώσει σύντομα, θα αναπτύξουμε έρευνα για την μαθηματική εκπαίδευση για μια πιθανή μελλοντική κρίση "COVID-2X"; Σε αυτό το άρθρο, μεταξύ άλλων, έχουμε ανθρωπομορφοποιημένα μέσα, όταν αναφερόμαστε στην έννοια "agency", που θεωρούμε ως την πράξη παραγωγής ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος που στην περίπτωση μας είναι η μαθηματική γνώση. Η έννοια των ανθρώπων-με-τα-μέσα μαζικής ενημέρωσης ως συλλογικότητα που παράγει γνώση, μπορούν να συνδεθούν, όπως θα συζητήσουμε σε αυτό το άρθρο. Ο ιός COVID-19 (SARS-CoV-2) είναι ένα μη ζωντανό ον: μπορούμε να συζητήσουμε για τη δράση (agency) του COVID-19 στην μαθηματική εκπαίδευση και στον κόσμο;

Αυτό το άρθρο θα ασχοληθεί με τις ερωτήσεις από το πιο πάνω απόσπασμα ως ακολούθως: Θα συζητήσω πώς μπορεί να προκύψουν ή να αλλάξουν οι νέες τάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης με τη συνεχιζόμενη κρίση και θα προσπαθήσω να απαντήσω σε ορισμένες από αυτές τις ερωτήσεις. Θα χρησιμοποιήσω το θεωρητικό κατασκεύασμα των ανθρώπων-με-μέσα ενημέρωσης για να συνδέσω την πανδημία με δύο διαφορετικές τάσεις: τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας και τη φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στο πλαίσιο της τάσης της χρήσης ψηφιακής τεχνολογίας, θα συζητήσω τις δυνατότητες και τα μειονεκτήματα της ολοένα αυξανόμενης τηλεκπαίδευσης καθώς και τις νέες απαιτήσεις αυτής της τάσης.

Με αυτόν τον τρόπο, θα επανεξετάσω την έννοια των ανθρώπων-με-μέσα ενημέρωσης και την προοπτική για συλλογική παραγωγή γνώσης που περιλαμβάνει ανθρώπους και μη ανθρώπινους παράγοντες όπως οι υπολογιστές και ο SARS- CoV-2. Αυτό θα θέσει νέα ζητήματα στην ημερήσια διάταξη για τη φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης, εστιάζοντας στην πράξη παραγωγής (agency) των «πραγμάτων» και στη σχέση των ανθρώπων με αυτά και τον ιό.

Πιστεύω ότι αυτές οι συζητήσεις μπορεί να είναι σημαντικές για να κατανοήσουμε τις τρέχουσες κοινωνικές αλλαγές που ζούμε, πέρα από την ίδια τη μαθηματική εκπαίδευση. Μπορούν επίσης να συμβάλουν στον καθορισμό ενός θεματολογίου έρευνας και δράσης στην τάξη για όσους ενδιαφέρονται για αυτές τις τάσεις και τη σύνδεσή τους με την πανδημία.

ΨΗΦΙΑΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Λαμβάνοντας υπόψη τις τάσεις που συζητήθηκαν παραπάνω, οι ερευνητικές εργασίες που μελετούν τη σύνδεση της μαθηματικής εκπαίδευσης και των «νέων τεχνολογιών» —πληροφορική, ψηφιακή τεχνολογία επικοινωνιών και πληροφοριών, κ.ά. — παρουσιάστηκαν σε συνέδρια για περισσότερα από 30 χρόνια. Συγγραφείς όπως ο Jim Kaput (1992, 1998) παρουσίασαν έρευνες για τη χρήση υπολογιστών στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι Borba et al. (2016) εκπόνησαν μια έρευνα που παρουσιάστηκε στο ICME-13 και παρουσίασε τέσσερις φάσεις για τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση από πολλούς ερευνητές, δασκάλους και μαθητές. Οι δύο πρώτες φάσεις, χαρακτηρίστηκαν αντίστοιχα από τη χρήση του Logo και λογισμικών σπουδών (π.χ. Cabri-Géomètre). Η τρίτη φάση της χρήσης της ψηφιακής τεχνολογίας χαρακτηρίστηκε από την εμφάνιση του Διαδικτύου και των διαδικτυακών μαθημάτων. Αυτό το φαινόμενο έγινε σημαντικό γύρω στο τέλος του αιώνα, ανάλογα με τη χώρα. Ορισμένες από τις λεγόμενες αναπτυγμένες χώρες είδαν το Διαδίκτυο να γίνεται δημοφιλές στα μέσα της δεκαετίας του 1990 και σε ορισμένες άλλες χώρες πολύ νωρίς αυτόν τον αιώνα. Η Αυστραλία ήταν από τις πρώτες χώρες που ξεκίνησαν διαδικτυακά μαθήματα σε πτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο, σε μια εποχή που άλλες χώρες ήταν πολύ προστατευτικές με τη διατήρηση του παραδοσιακού τρόπου εκπαίδευσής (πρόσωπο-με-πρόσωπο).

Η σημερινή τέταρτη φάση χαρακτηρίζεται από την άφιξη του γρήγορου Διαδικτύου, που αναμόρφωσε τις δυνατότητες της διαδικτυακής εκπαίδευσης. Καθώς αυτή η φάση αναπτύσσεται, οι Engelbrecht et al. (2020) επεσήμαναν ότι οι διάφορες μορφές μεικτής μάθησης είναι σημαντικές, ιδιαίτερα για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών. Ο όρος «υβριδική» εκπαίδευση (blended ή hybrid learning) έχει γίνει πιο σημαντικός για να εκφράσει την παροχή προγραμμάτων μαθηματικής εκπαίδευσης που συνδυάζουν παραδοσιακό χώρο διδασκαλίας και διαδικτυακή εκπαίδευση: «Ένα ευρύ φάσμα μέσων και τεχνολογίας είναι διαθέσιμο για τη δημιουργία νέων υβριδικών μορφών διδασκαλίας. Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να δημιουργούν μαθησιακές εμπειρίες μάθησης που προσελκύουν ενεργά και ουσιαστικά τους μαθητές στο περιεχόμενο των μαθηματικών.» Αυτή η τεχνολογία μπορεί να σχηματίσει συλλογική σκέψη (Lévy, 1993) με δασκάλους που μπορούν να υπερβούν τα φυσικά τείχη της αίθουσας διδασκαλίας που συνδέεται με το παραδοσιακό χώρο διδασκαλίας”. (Engelbrecht et al., 2020, σελ.838)

Αν θεωρήσουμε μια τάση ως μια προσπάθεια να βρούμε απαντήσεις σε ένα δεδομένο ζήτημα, η πανδημία είχε προωθήσει την ατζέντα της τάσης της ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Με την ανάγκη κοινωνικής απομόνωσης, έγινε αναγκαία η προσφορά εκπαίδευσης σε μαθητές δημοτικού, γυμνασίου και λυκείου όπως και προπτυχιακούς φοιτητές από το σπίτι. Στο μεγαλύτερο μέρος του κόσμου, το πρώτο εξάμηνο της εκπαίδευσης του 2020 ανεστάλθηκε και τέθηκε σε διαδικτυακή λειτουργία. Κατά τη διάρκεια του 2021, διάφορα είδη υβριδικής εκπαίδευσης εφαρμόστηκαν, καθώς οι συνθήκες υγείας επέτρεψαν στους μαθητές και στους εκπαιδευτικούς να επιστρέψουν στα σχολεία και στα πανεπιστήμια.

Όμως παρόλο που έχουμε πολλές έρευνες σχετικά με την εφαρμογή της εκπαίδευσης στο διαδίκτυο σχετικά με την προπτυχιακή εκπαίδευση (Engelbrecht & Harding, 2002, 2004, 2005), αυτό δεν ισχύει για την εκπαίδευση μαθητών δημοτικού. Υπάρχουν ελάχιστες έρευνες σχετικά με την ηλεκτρονική εκπαίδευση των παιδιών. Καθώς αναπτύσσεται αυτό το θέμα, η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να ασχοληθεί με δομικά ζητήματα, όπως η συμμετοχή των γονέων στην εκπαίδευση.

Οι εκπαιδευτικοί ανά το παγκόσμιο κλήθηκαν να επιβλέπουν τους μαθητές τους μέσω πλατφορμών στο διαδίκτυο και να ασχολούνται με τους μαθητές τους 24 ώρες την ημέρα, 7 ημέρες την εβδομάδα, συμπεριλαμβανομένου της αντιμετώπισης των «προσωπικών» προβλημάτων των μαθητών – συμπεριλαμβανομένων των προβλημάτων που σχετίζονται με το COVID-19 ή τη χρόνια κοινωνική ανισότητα που προκλήθηκε από την πανδημία.

Η κρίση είναι επίσης μια ευκαιρία για αλλαγή: οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν πολλές ώρες την εβδομάδα δεν θα έχουν χρόνο να μάθουν να χρησιμοποιούν την ψηφιακή τεχνολογία για τη διδασκαλία.

Με όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα κρατών να αναγκάζονται να συνδεθούν στο διαδίκτυο λόγω της πανδημίας, το επιχείρημα για τη χρήση της τεχνολογίας είναι πολύ ισχυρό. Είναι πιθανό ότι θα έχουμε πολλές έρευνες που σχετίζονται με αυτή τη νέα πραγματικότητα. Για τους σκοπούς αυτού του άρθρου, δεν μπόρεσα να συλλέξω επίσημα δεδομένα το 2020 και 2021, αλλά μόνο ανεπίσημες αναφορές από δασκάλους που εκφράζουν την ανάγκη έρευνας σχετικά με τη διαδικτυακή διδασκαλία νεαρών εφήβων και παιδιών.

Αλλά η εστίαση αυτών των ερευνών δεν μπορεί να είναι μόνο στους εκπαιδευτικούς. Έρευνες πρέπει να εστιαστούν στις εμπειρίες των παιδιών και το πώς βιώνουν τα παιδιά αυτή την εκδοχή της εκπαίδευσης και το πως μαθαίνουν. Υπήρχαν επίσης πολλά αστεία στα κοινωνικά δίκτυα σχετικά με τους γονείς που χάνουν τον έλεγχο καθώς γίνονται κατ᾽οίκον δάσκαλοι, επομένως ο ρόλος των γονέων στην διαδικτυακή μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να είναι ένας άλλος τομέας έρευνας (με ή χωρίς τη συνεργασία τους με εκπαιδευτικούς). Η συμμετοχή των γονέων στη μαθηματική εκπαίδευση υπήρξε θέμα ορισμένων ερευνών, συμπεριλαμβανομένης της συμμετοχής τους καθώς χρησιμοποιούν τη ψηφιακή τεχνολογία (Ford, 2015). Άλλες νέες προκλήσεις συμπεριλαμβάνουν την αναφορά και την έρευνα της διαδικτυακής αξιολόγησης.

Κατά τη διάρκεια της πανδημίας, το Αυστραλιανό υπουργείο παιδείας δημιούργησε διδακτικό υλικό για τους γονείς ώστε να μπορούν να υποστηρίξουν τις μαθηματικές δεξιότητες και την κατανόηση των παιδιών τους με διασκεδαστικές, πρακτικές και δημιουργικές δραστηριότητες που μπορούν ταυτοχρόνως να αξιολογηθούν.

Μια άλλη ιδέα είναι η πρόσκληση μαθητών να εκφράσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις με βίντεο ή να κάνουν έρευνα με βίντεο. Η παραγωγή βίντεο μπορεί να είναι μια εναλλακτική λύση αξιολόγησης για την εκπαίδευση κατά τη διάρκεια της πανδημίας και μετά την πανδημία. Μπορούμε να έχουμε μαθητές που παράγουν βίντεο στο διαδίκτυο για να εκφράσουν αυτά που έμαθαν κατά τη διάρκεια της πανδημίας. Τα βίντεο μπορούν να παραχθούν συλλογικά, με τη βοήθεια γονέων, φίλων χρησιμοποιώντας διαφορετικά μέσα. Όλοι αυτοί οι παράγοντες συμπεριλαμβανομένου του βαθμού της γονικής βοήθειας, μπορούν να ληφθούν υπόψη από τους εκπαιδευτικούς και τα σχολικά συστήματα ως ένας τρόπος αξιολόγησης.

Η παραγωγή ψηφιακών βίντεο μαθηματικών από μαθητές και εκπαιδευτικούς αυξήθηκε παγκοσμίως στη περίοδο της πανδημίας. Διαδικτυακές βιβλιοθήκες είχαν χρησιμοποιηθεί ως διδακτικό υλικό για δασκάλους και μαθητές και ως έμπνευση για το είδος των εργασιών που μπορούν να παράγουν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί. Επιπλέον, ζητήματα που έχουν αποτελέσει αντικείμενα προηγούμενων ερευνών μπορούν να αποκτήσουν νέα ζωή, καθώς η πανδημία έδωσε νέα πνοή στην εκπαίδευση.

Σε ένα άρθρο αναθεώρησης, Engelbrecht et al., (2020), κατέστη σαφές ότι διαφορετικές τεχνολογίες που χρησιμοποιούνται σε μια αίθουσα διδασκαλίας, από τον μαυροπίνακα μέχρι το πιο σύγχρονο κινητό τηλέφωνο, δεν είναι απαραίτητα μόνο μεσολαβητές αλλά και παράγοντες δημιουργίας γνώσης. Αυτό είναι ένα επιστημολογικό ζήτημα, και είναι μέρος μιας τάσης που έχει συζητηθεί στο πλαίσιο της ψυχολογίας της μαθηματικής εκπαίδευσης και της φιλοσοφίας της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ-ΜΕ-ΜΕΣΑ

Τα βασικά ερωτήματα που απασχόλησαν τη φιλοσοφία της εκπαίδευσης είναι τα ακόλουθα: «Γιατί έχουμε εκπαίδευση; Ποιες είναι οι σχέσεις μεταξύ εκπαίδευσης και κοινωνίας; Πως μαθαίνουμε;" Αυτά είναι τα βασικά ερωτήματα που απασχόλησαν τους ερευνητές που ασχολούνται με τη φιλοσοφία της εκπαίδευσης. "Πώς μαθαίνουμε;" συνδέεται με το "Πώς ξέρουμε;", και έτσι ερωτήματα σχετικά με την επιστημολογία, τη θεωρία της γνώσης, έχουν επίσης συζητηθεί από ερευνητές που ασχολούνται με τη ψυχολογία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι έρευνες για τη Φιλοσοφία και τη Ψυχολογία της μαθηματικής εκπαίδευσης αναζητούν θεμέλια για τη μαθηματική εκπαίδευση και συζητούν τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική εκπαίδευση αρθρώνεται στην αίθουσα μαθηματικών, την έρευνα που αναπτύσσεται σχετικά με αυτήν και την «επιστροφή» της σε πρακτικές ρυθμίσεις: ρυθμίσεις (settings) όπως τα δωμάτιο διδασκαλίας που δεν χρησιμοποιούνταν για πολλούς μήνες λόγω της πανδημίας. Αρκετοί συγγραφείς έχουν συζητήσει για τις αίθουσες διδασκαλίας, τα σχολεία, τα τεχνουργήματα και τη μαθηματική γνώση που παράγονται από ομάδες ανθρώπων-με-τεχνουργήματα (Villarreal και Borba, 2010). Δεν προκαλεί έκπληξη, λοιπόν, ότι το ερώτημα για το ποιος είναι ο φορέας (agent) της γνώσης συζητείται από ερευνητικές ομάδες που ασχολούνται με τη ψηφιακή τεχνολογία, τη φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης και τη ψυχολογία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Διαφορετικοί συγγραφείς της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. Faggiano et al., 2017) έχουν ισχυριστεί ότι οι υπολογιστές, για παράδειγμα έχουν φορέα δράσης (agency) για την παραγωγή γνώσης. Χρησιμοποιώντας ως πηγή έμπνευσης το έργο του Lévy (1993) και τη φαινομενολογική προσέγγιση ότι οι άνθρωποι είναι «όντα-με-άλλους» (being-with-others), προέκυψε η έννοια των ανθρώπων-με-μέσα. Ο Borba, (1993) χρησιμοποίησε την έννοια της αμοιβαίας μοντελοποίησης για να δείξει ότι όχι μόνο τα διαφορετικά μέσα διαμορφώνουν τους ανθρώπους, αλλά έδωσε επίσης εμπειρικά δεδομένα για το πώς οι άνθρωποι διαμορφώνουν το σχεδιασμό και τη λειτουργία λογισμικών. Όντας μέλος της ομάδας σχεδιασμού λογισμικού το οποίο χρησιμοποίησα στη διδακτορική διατριβή μου και εκπαιδευτικός μαθηματικών που έκανε έρευνα, μπορούσα να δω μια δυναμική συνεργασία και αλληλεπίδραση μεταξύ του λογισμικού—γεμάτου από τις ιδέες μιας διεπιστημονικής ομάδας προγραμματιστών, εκπαιδευτικών μαθηματικών, μαθηματικών και ούτω καθεξής—και, πως οι μαθητές αλληλοεπιδρούσανε με το λογισμικό, με τη μαθητική γνώση που ήταν ενσωματωμένη στο λογισμικό και μαζί μου, την ερευνήτρια. Οι μαθητές, για παράδειγμα, μπορούσαν να επηρεαστούν από τις ερωτήσεις του ερευνητή, ή από το σχεδιασμό του λογισμικού και να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό με τρόπους που δεν είχαν προβλεφθεί από την διεπιστημονική ομάδα που δημιούργησε το λογισμικό. Ο τρόπος χρήσης του λογισμικού από τους μαθητές παρείχε σχόλια στη διεπιστημονική ομάδα για τον επανασχεδιασμό του λογισμικού, έτσι ο σχεδιασμός του λογισμικού συν-εξελισσόταν με τις γνώσεις των μαθηματικών που δημιουργούσαν οι χρήστες.

Επομένως, η γνώση δεν ήταν αποκλειστικά κοινωνική με την έννοια ότι περιλαμβάνει περισσότερα από ένα άτομα, αλλά ότι περιλαμβάνει επίσης αντικείμενα. Η έννοια των ανθρώπων-με-μέσα προτάθηκε για να τονιστεί ότι η παραγωγή γνώσης είναι αποτέλεσμα μιας συλλογικότητας ανθρώπων και αντικειμένων. Από τον Tikhomirov και Lave προέκυψε η ιδέα ότι στη γνώση εμπλέκονται αξίες. Αργότερα, ο Borba (2012) συζήτησε σχετικά με τις αξίες, τα συναισθήματα και τα μέσα που εμπλέκονται στη μαθηματική γνώση όταν χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε λογισμικό και επεκτάθηκε στην ιδέα ότι τα ίδια τα μέσα και η τεχνολογία αλλάζουν αυτά που ήδη γνωρίζουμε και αυτό που εμείς είμαστε. Ως εκ τούτου, τα μέσα ενημέρωσης είναι συστατικά όχι μόνο αυτού που γνωρίζουμε αλλά και αυτού που είμαστε.

Οι Kaptelinin και Nardi (2006) ανέλυσαν επίσης την ιδέα της επέκτασης της δράσης (agency) σε μη ανθρώπους. Αυτοί οι συγγραφείς συνέκριναν τις ικανότητες να παράγουν αποτελέσματα, να ενεργούν και να εκπληρώσουν τις προθέσεις διαφορετικών φορέων δράσης: πράγματα (φυσικά), πράγματα (πολιτισμικά), μη ανθρώπινα έμβια όντα (φυσικά), μη ανθρώπινα έμβια όντα (πολιτιστικά) και τα ανθρώπινα όντα ως κοινωνικές οντότητες.

Η δράση (agency) δεν πρέπει να θεωρείται ως δυαδική, ή ως παρούσα, ή ως απούσα, αλλά σε διαφορετικά επίπεδα. Βλέπω αυτή την έννοια της δράσης να αποτελείται από πολλούς παράγοντες δράσης, που δυναμικά αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους. Οι Kaptelinin και Nardi (2006) προτείνουν τρεις διαστάσεις δράσης: με βάση την αναγκαιότητα (η δράση βασίζεται σε βιολογικούς και πολιτιστικούς λόγους), μεταβιβάζονται (πράγματα ή έμβια όντα ενεργούν ως αντιληπτές προθέσεις που εκχωρούνται από άλλους ανθρώπους και πράγματα) και υπό όρους (ενέργειες πραγμάτων ή ανθρώπων που καταλήγουν σε ακούσια αποτελέσματα).

Φαίνεται ότι η εμφάνιση του SARS-CoV-2 έχει κάνει την υιοθέτηση μιας διαφορετικής προοπτικής της γνώσης επειδή, σύμφωνα με συγγραφείς όπως ο Racaniello (2004, σελ. 1), «Οι ιοί δεν είναι ζωντανά όντα. Οι ιοί είναι πολύπλοκα συγκροτήματα μορίων, νουκλεϊκά οξέα, λιπίδια και υδατάνθρακες, αλλά από μόνοι τους δεν μπορούν να κάνουν τίποτα μέχρι να εισέλθουν σε ένα ζωντανό κύτταρο. Χωρίς κύτταρα, οι ιοί δεν θα μπορούσαν να πολλαπλασιαστούν. Επομένως, οι ιοί δεν είναι ζωντανά όντα». Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι ο ιός δεν είναι ζωντανός, έχει αλλάξει δραματικά τον τρόπο ζωής των ανθρώπων. Μπορούμε να πούμε ότι ο ιός έχει δράση (agency) υπό την έννοια ότι έχει αλλάξει τον τρόπο που πρέπει να κάνουμε τα πράγματα.

Χρησιμοποιώντας αυτήν τη μεταφορά για τον ιό, το λογισμικό χρειάζεται επίσης ανθρώπους για να «επιβιώσει». Το λογισμικό, και αργότερα στο Διαδίκτυο, άλλαξαν το περιβάλλον των εκπαιδευτικών πλαισίων, με παρόμοιο τρόπο με τον τρόπο ο SARS-CoV-2 μετέτρεψε ξαφνικά τα υπνοδωμάτια των παιδιών σε αίθουσες διδασκαλίας.

Ο SARS-CoV-2 εξαπλώνεται μέσω των ανθρώπων για να επιβιώσει και να αναπαραχθεί, και αυτή η δράση προκαλεί αντίδραση—δράση—από τους ανθρώπους. Φυσικά, κάθε σύγκριση ή μεταφορά έχει τα όριά της. Όμως ο κορωνοϊός έχει μεταμορφώσει τις ζωές μας με δραματικό τρόπο. Οι υπολογιστές —που αντιπροσωπεύονται πλεόν από κινητά τηλέφωνα— έχουν αλλάξει τον τρόπο που μπορούμε να βιώσουμε τα μαθηματικά, ιδιαίτερα τον τρόπο που μπορούμε να «πειραματιστούμε» με τα μαθηματικά.

Το Διαδίκτυο έχει γίνει μια κοινότητα, ένας φορέας δράσης (agent) και ένα τεχνούργημα. Τα βίντεο που παράγονται και κοινοποιούνται από μαθητές με ψηφιακή τεχνολογία σύντομα γίνονται και τα ίδια μέρος νέων συλλογικοτήτων ανθρώπων και μέσων που εμπλέκονται στην παραγωγή γνώσης. Είναι δύσκολο να γνωρίζουμε, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, πού θα μας οδηγήσουν οι εξελίξεις της τρέχουσας υγειονομικής κρίσης, αλλά φαίνεται ότι το να σκεφτόμαστε την αντιπροσώπευση των μη ζωντανών πραγμάτων όπως συζητήθηκε σε αυτήν την ενότητα θα είναι μέρος της. Επίσης, σημαντικές ερωτήσεις είναι οι ακόλουθες: Ποιοι είναι οι συγκεκριμένοι ρόλοι των χώρων/τεχνουργημάτων όπως οι αίθουσες εκπαίδευσης, ή φυσική παρουσία μαθητών στην αίθουσα (σχολείου ή πανεπιστημίου) που φτιάχνονται για την έντονη χρήση του Διαδικτύου στην εκπαίδευση, ή οι διαδικτυακές, και υβριδικές αίθουσες εκπαίδευσης;

Η όλη συζήτηση για τους ανθρώπους-με-μέσα μπορεί να αποκτήσει μια νέα διάσταση, όπως προτείνεται σε αυτή την ενότητα, που σχετίζεται με μερικά από τα βασικά ερωτήματα της φιλοσοφίας της (μαθηματικής) εκπαίδευσης. Η πανδημία προβάλλει τον ρόλο του σπιτιού και των γονέων ως συλλογικότητες που παράγουν γνώση και η κρίση έχει ενισχύσει του δεσμούς μεταξύ δασκάλων και γονέων. Για άλλη μια φορά θέτουμε όλα τα βασικά ερωτήματα της φιλοσοφίας της μαθηματικής εκπαίδευσης και της ψυχολογίας της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ποίος είναι ο ρόλος της μαθηματικής εκπαίδευσης; Ποιος είναι ο ρόλος της εκπαίδευσης των γονέων στη μαθηματική εκπαίδευση; Ποιος είναι ο ρόλος των μη ζωντανών πραγμάτων, όπως οι ιοί, τα λογισμικά και τα σπίτια, στον τρόπο που γνωρίζουμε και μαθαίνουμε μαθηματικά;

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ο σκοπός αυτού το άρθρου είναι να συζητήσει ιδέες για ερευνητικές εργασίες, ώστε να μάθουμε πως η πανδημία επηρέασε τη μαθηματική εκπαίδευση, και τις διαφορετικές επιστημολογικές θέσεις που χαρακτηρίζουν τη κοινωνία της πανδημίας και την κοινωνία μας όταν οι μαθητές επιστρέφουν στις αίθουσες διδασκαλίας.
Φυσικά, θα επηρεαστούν και άλλοι τομείς, όπως τα εθνομαθηματικά, η εκπαίδευση μαθηματικών στη δημοτική και προσχολική ηλικία, η κοινωνική ανάπτυξη των μαθητών, κ.ο.κ. Για παράδειγμα, πώς η κοινωνική ανάπτυξη των μαθητών συνάδει με την ακαδημαϊκή τους ανάπτυξη όταν τα παιδιά που διδάσκονται μέσω τηλεκπαίδευσης; Ποια είναι η συνέπεια της ενίσχυσης του δεσμού μεταξύ των δασκάλων και γονέων στην απόδοσης των μαθητών στα μαθηματικά διαγωνίσματα;
Τα ζητήματα που εγείρονται σε αυτό το άρθρο θα πρέπει να μετασχηματιστούν από τους αναγνώστες και θα πρέπει οι ίδιοι να γίνουν αντικείμενα έρευνας.
Σε αυτό το άρθρο, επιλέγω να ασχοληθώ με την ψηφιακή τεχνολογία και τη φιλοσοφία της μαθηματικής εκπαίδευσης, επειδή η πανδημία φαίνεται να έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στις αλλαγές των ημερήσιων διατάξεων αυτών των δύο τάσεων.
Η υιοθέτηση τεχνολογικών εργαλείων αποτελεί πλέον θέμα ενδιαφέροντος (ή έρευνας) για όλους (Engelbrecht et al., 2020a, b). Η κατ' οίκον εκπαίδευση, ο εγκλεισμός και ο αποκλεισμός, μπορεί να βοηθήσουν πολλούς να σκεφτούν φιλοσοφικά ζητήματα σχετικά με το ρόλο του χώρου (place) στην παραγωγή γνώσης/μάθησης και τις έννοιες όπως “άνθρωποι με μέσα ενημέρωσης”.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Borba, M. C. (1993). Students understanding of transformations of functions using multi-representational software (Doctoral Dissertation) Cornell University. Cornell.

Borba, M. C. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM-Mathematics Education, 44*(6), 802–814.

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinare, & Aguilar, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education, 48*, 589–610.

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2002). A qualitative investigation on the impact of web-based undergraduate mathematics teaching on developing academic maturity. *Technical Report UPWT*, *13*.

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2004). Combining online and paper assessment in a web-based course in undergraduate mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *23*(3), 217–231.

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2005). Teaching undergraduate mathematics on the Internet. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 253–276.

Engelbrecht, J., Llinares, S., & Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM-Mathematics Education*, *52*, 825–841.

Faggiano, E., Ferrara, F., & Montone, A. (2017). *Innovation and technology enhancing mathematics education: Perspectives in the Digital Era*. Springer.

Ford, P. (2015). Flipping a math content course for pre-service elementary school teachers. *Primus*, *25*(4), 369- 380. https://doi.org/10.1080/10511970.2014.981902

Kaptelinin, V., & Nardi, B. (2006). *Acting with technology: Activity theory and interaction design*. The MIT Press.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). Macmillan.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265–281.

Lévy, P. (1993). *As tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática. [The Intelligence technologies: The future of thinking in the information era]* (1st ed.). Editora 34.

Racaniello, V. (2004). *Are viruses living?* Recovered from: https://www.virology.ws/2004/06/09/are-viruses-living/.

Villarreal, M., & Borba, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: Notebooks, blackboards. calculators, computers.and notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM-Mathematics Education*, *42*, 49–62.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΕ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΑΣΗΣ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Σταυρόπουλος Παναγιώτης

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων

stavropoulos.panagiotis@gmail.com

Η Διδακτική των Μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες, έχει να επιδείξει έρευνες με αρκετά σαφή συμπεράσματα σχετικά με τις δυσκολίες των φοιτητών να αποκτήσουν μια αξιόπιστη και ισχυρή εικόνα της έννοιας του ορίου. Η συγκεκριμένη εργασία έχει σαν στόχο να διερευνήσει κατά πόσο η οπτικοποίηση της έννοιας του ορίου μίας ακολουθίας μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση του τυπικού ορισμού σε φοιτητές με προβλήματα όρασης. Η βασική ιδέα στηρίζεται στην άποψη ότι η πιθανή αντικατάσταση ενός αισθητήριου οργάνου από ένα άλλο όργανο μπορεί να προκαλέσει μια βαθιά αναδιάρθρωση της σκέψης και της προσωπικότητας του τυφλού ατόμου (Vygotsky, 1997).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η εννοιολογική ανάλυση του θεμελιώδους ε-N ορισμού των συγκλινουσών ακολουθιών έχει μελετηθεί από διάφορους ερευνητές τις τελευταίες δύο δεκαετίες (Cory and Garofalo, 2011). Σχετικές έρευνες δείχνουν ότι οι δυσκολίες των φοιτητών με την εκμάθηση του ορισμού ε-N, μετά την έκθεσή τους σε αυτόν, σχετίζονται με την ασυμβατότητα μεταξύ της δευτερογενούς διαισθητικής κατανόησης, δηλαδή την διαίσθηση που δεν παράγεται από τη φυσική, φυσιολογική εμπειρία ενός ατόμου (Fischbein, 1987), της σύγκλισης και ενός αυστηρού ορισμού (Davis and Vinner 1986, Roh 2010).

Οπτικοποίηση

Ο πολύπλοκος ρόλος της οπτικοποίησης έχει άμεση σχέση με τον διαισθητικό τρόπο κατανόησης μίας μαθηματικής έννοιας και τον σχηματισμό εννοιακών εικόνων, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορεί ο διαισθητικός αυτός τρόπος να οδηγήσει σε παρανοήσεις. Οι οπτικές εικόνες μπορούν να συμπυκνώσουν πληροφορίες, να προτείνουν νέα αποτελέσματα ή πιθανές προσεγγίσεις σε αποδείξεις (Harel & Sowder, 1998; Presmeg, 1986), και με αυτό τον τρόπο να απεικονίζουν και να υποστηρίζουν ουσιαστικά συμβολικά αποτελέσματα. Μια καλή οπτική εικόνα μπορεί να χρησιμεύσει για να «συγκεκριμενοποιήσει την αναφορά» (Presmeg, 1986), υπογραμμίζοντας τις εννοιολογικές βάσεις που μπορεί να είναι λιγότερο σημαντικές σε επίσημες παρουσιάσεις

(Arcavi, 2003).

Απτική αντίληψη

Η πιθανή αντικατάσταση ενός αισθητήριου οργάνου από ένα άλλο μπορεί να συμβεί για διάφορους λόγους, όπως σε ένα τυφλό άτομο, για παράδειγμα. Αυτή η υποκατάσταση μπορεί να αναμένεται να προκαλέσει μια βαθιά αναδιάρθρωση των γνωστικών και εκτελεστικών λειτουργιών και της προσωπικότητας του τυφλού ατόμου (Vygotsky, 1997, p 99).

Γλώσσα

Η περίπλοκη σχέση μεταξύ γλώσσας και αντίληψης τονίζεται σαφώς στο ειδικό πλαίσιο της διδασκαλίας των τυφλών μαθητών. Ειδικά η λεκτική επικοινωνία για τους φοιτητές με προβλήματα όρασης ή και ειδικότερα ολική απώλεια όρασης, σαφώς και αποκτά ένα περισσότερο σύνθετο και σημαντικό ρόλο. Για παράδειγμα, ρήματα όπως τα βλέπω, αντιλαμβάνομαι και πλησιάζω αποκτούν άλλη σημασία και λειτουργία στην διαδικασία της μαθηματικής σκέψης. Επίσης μαθητές με προβλήματα όρασης μπορεί να δημιουργήσουν ένα μη τυπικό λεξιλόγιο όρων αντίστοιχο με το τυπικό (Αργυρόπουλος, 2003).

Χειρονομίες

Στα άτομα με προβλήματα όρασης οι χειρονομίες και γενικότερα η στάση του σώματος αποκτά κύρια πηγή έκφρασης. Χρησιμοποιούν όσο το δυνατόν περισσότερο τις αυθόρμητες χειρονομίες συνοδεύοντας παράλληλα και τις άλλες μορφές έκφρασης στην εκμάθηση καταστάσεων, και που έχουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών τους εννοιών (Goldin-Meadow, 2003). Η εστίαση της ανάλυσης σε τέτοιες περιπτώσεις χρειάζεται να γίνει σε χειρονομίες που αποδεικνύουν κάποια διαδικασία μαθηματικής γενίκευσης, κάτι που δεν αποτυπώνεται ικανοποιητικά από τη εικονική/μεταφορική επικοινωνία, φωτίζοντας τις σχέσεις μεταξύ των αισθητήριων εμπειριών των τυφλών φοιτητών και των μαθηματικών εννοιών (Healy&Fernandes, 2011). Τέλος, πολλές είναι οι φορές που οι χειρονομίες λειτουργούν και σαν την αιτία να γεννηθούν ιδέες, όπως έχει παρατηρήσει ο Radford (2009), και τελικά μπορούν για ένα τυφλό μαθητή να αποτελέσουν πηγή για την συγκρότηση της σκέψης του.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πρόκειται για μία ποιοτική έρευνα, και πιο συγκεκριμένα για μία μελέτη περίπτωσης μίας φοιτήτρια μαθηματικού τμήματος με ολική απώλεια όρασης. Οι δύο ημι-δομημένες συνεντεύξεις σχεδιάστηκαν ώστε να πραγματοποιηθούν στο χρονικό διάστημα ενός μήνα. Η Άννα (ψευδώνυμο) είναι φοιτήτρια μαθηματικού τμήματος στο 5ο έτος, μία περίπτωση εκ γενετής τυφλού παιδιού. Η μελέτη αυτή διεξήχθη σε ένα δημόσιο πανεπιστήμιο στην Αθήνα την άνοιξη του 2017, σε μία αίθουσα ειδικά διαμορφωμένη με τα κατάλληλα διδακτικά μέσα και εργαλεία για φοιτητές με προβλήματα όρασης. Όπως η μηχανοκίνητη γραφομηχανή Braille, τα ανάγλυφα σχήματα των γραφικών παραστάσεων και οι ιδιαίτερες κατασκευές προσαρμοσμένες στην έρευνα, όπως αυτή της ε-λωρίδας. Η φοιτήτρια είχε τις προαπαιτούμενες γνώσεις σχετικά με τις ακολουθίες, τα γραφήματά τους, το όριο αλλά και τον τυπικό ορισμό ε-Ν. Ερευνητικό ερώτημα: Ποιος ο ρόλος της οπτικοποίησης, της γλώσσας και των χειρονομιών στην κατανόηση του τυπικού ορισμού του ορίου ακολουθίας, σε φοιτητές με ολική απώλεια όρασης; Τα βήματα της έρευνας: Βήμα 0: Έλεγχος των αρχικών αντιλήψεων της φοιτήτριας σε σχέση με τη σύγκλιση μιας ακολουθίας. (Ερώτηση 0).

(i) $\alpha_n = \frac{1}{n}$	(ii) $\alpha_n = \frac{n^2}{n+1}$	(iii) $\alpha_n = \sqrt{n}$
(iv) $\alpha_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	(v) $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n}$	(vi) $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n < 10 \\ 1+\frac{1}{n}, & n \geq 10 \end{cases}$
(vii) $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$	(viii) $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ περιττός} \\ n, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$	(ix) $\alpha_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$
(x) $\alpha_n = 1$	(xi) $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ περιττός} \\ 1, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$	$n \in N$

Πίνακας 1

Βήμα 1: Παρουσίαση ακολουθιών αριθμητικά. (Ερώτηση 1) (*πίνακας 1)*. Βήμα 2: Παρουσίαση ακολουθιών γραφικά. (Ερώτηση 2). Βήμα 3: Εξετάστε πόσοι όροι είναι μέσα ή έξω από τις ε-λωρίδες όταν οι ε-λωρίδες επικεντρώνονται στην οριακή τιμή (Ερώτηση 3). Βήμα 4: Εξετάστε πόσοι όροι είναι μέσα ή έξω από τις ε-λωρίδες όταν οι ε-λωρίδες δεν επικεντρώνονται στην οριακή τιμή. (Ερώτηση 4). Βήμα 5: Αξιολογήστε την εγκυρότητα των ορισμών Α & Β της ε-λωρίδας. (Ερώτηση 5). Ορισμός Α της ε-λωρίδας: L είναι ένα όριο μιας ακολουθίας όταν για κάθε ε-λωρίδα, άπειρα σημεία στο γράφημα της ακολουθίας είναι μέσα στην ε-λωρίδα όσο η ε-λωρίδα είναι με κέντρο τον L. Ορισμός Β της ε-λωρίδας: L είναι ένα όριο μιας ακολουθίας όταν για κάθε ε-λωρίδα, μόνο πεπερασμένα σημεία στο γράφημα της ακολουθίας είναι έξω από την ε-λωρίδα αρκεί η ε- λωρίδα να επικεντρώνεται στο L. Βήμα 6: Συγκρίνετε τον ορισμό της ε-λωρίδας Β με τον τυπικό ορισμό ε-Ν. (Ερώτηση 6).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Βήμα 0: Στην πρώτη ερώτηση η Άννα προτίμησε να ασχοληθεί με το όριο μίας ακολουθίας δίνοντας από την αρχή κάποιες μεταφορικές απτικές συμπεριφορές σχετικές με την απεικόνιση της ακολουθίας (i) $\alpha_n=1/n,\ n\in N$. Αναφέρει χαρακτηριστικά: «*Όριο μιας ακολουθίας […] καλύτερα αν πάρουμε την ακολουθία 1/n, τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει άπειρο ή αλλιώς ότι συγκεντρώνονται πολλοί όροι σε ένα σημείο*». Στην ερώτηση αν θα προτιμούσε να αναφέρει τον ορισμό, απάντησε ότι: «*προσπαθώ να σκεφτώ τον ορισμό και να τον αναπαραστήσω σαν εικόνα ή με πιο απλά λόγια ίσως για να γίνει πιο κατανοητός*» για να καταλήξει στην τελική της διατύπωση δηλαδή τον προσωπικό της εννοιακό ορισμό (concept definition) του ορίου ότι «*κοντά σε αυτόν, απείρως κοντά σε αυτόν τον αριθμό [το όριο της ακολουθίας] βρίσκονται άπειροι όροι της ακολουθίας*». Βήμα 1 (i) (πίνακας 1) βρίσκει εύκολα την σύγκλισή της στο μηδέν υπολογίζοντας τους πρώτους όρους και στην συνέχεια παρατηρεί ότι η ακολουθία (ii) θα αποκλίνει αλλά χωρίς να βρει κάποιους από τους όρους της (iii) βρίσκει σχετικά γρήγορα και διαισθητικά ότι θα τείνει προς το άπειρο και για την (iv) ισχυρίζεται ότι: « *όσο μεγαλώνουν οι όροι, ο παρονομαστής θα μεγαλώνει άρα το κλάσμα θα πηγαίνει στο μηδέν* », (v) η Άννα ξεκίνησε την προσέγγισή της δίνοντας τιμές στο n=1, 2, για να παρατηρήσει ότι: «*Ουσιαστικά ο παρονομαστής θα μεγαλώνει άπειρα να το πούμε, και (η ακολουθία) θα τείνει στο μηδέν και από τις δύο πλευρές και από τους άρτιους όρους στα θετικά και από τους αρνητικούς στα αρνητικά*» Στην ακολουθία (vii) αναφέρει ότι: «*τείνει στο μηδέν γιατί και η δύο υπακολουθίες τείνουν στο μηδέν*» ενώ στην (viii) παρατηρεί ότι: «*Δεν έχει όριο γιατί, μπορεί να πάρει δύο υπακολουθίες οι οποίες η μία υπακολουθία συγκλίνει στο 0 ενώ η δεύτερη στο άπειρο*» ενώ παρόμοια ήταν η απάντησή της στην (xi). (ix) η Άννα παρατηρεί ότι: «*αυτή δεν θα συγκλίνει καθώς η μισή θα πηγαίνει στο 1 και η άλλη μισή στο -1*» ενώ για την σταθερή (x) αναφέρει ότι συγκλίνει στο 1. Βήμα 2: Εδώ οι χειρονομίες είναι δεικτικές, αρχικά δείχνοντας ενωμένα τα σημεία των όρων σαν σκαλάκια όπως λέει, και στη συνέχεια δείχνοντας τα σημεία των όρων μεμονωμένα, καταλήγει σε μία μεταφορική χειρονομία καθώς η ακολουθία θα τείνει στο προς το 0. (iv) με τον ίδιο τρόπο βρίσκει τρεις από τους πρώτους όρους. (ii), βρίσκει του όρους μέχρι και για n=4 και τα αντίστοιχα σημεία με εικονικές και δεικτικές χειρονομίες (iii) βρίσκει επίσης του όρους μέχρι και n=4, με μεγαλύτερη δυσκολία λόγω των ριζών του 2 και του 3 (v), βρίσκει του πρώτους όρους και παρατηρεί ότι θα συγκλίνει στο 0 με τα σημεία εναλλάξ πάνω και κάτω από τον άξονα. Για τις δίκλαδες ακολουθίες (vi), (vii), (viii) & (xi), η Άννα ακολουθεί την ίδια διαδικασία, με μεγαλύτερη εξοικείωση από τις προηγούμενες δραστηριότητες. Στην συνέχεια, η Άννα με την κατάλληλη καθοδήγηση τοποθέτησε την κατασκευή της ε-λωρίδας στο γράφημα της ακολουθίας (i) με πλάτος 2ε = 0.1 και με τον κεντρικό άξονα να συμπίπτει με τον x'x του ανάγλυφου σχήματος. Στην ερώτηση, πόσα σημεία της ακολουθίας πιστεύεις ότι είναι εκτός και πόσα εντός της ε-λωρίδας, η Άννα άρχισε να μετράει τα σημεία αυτά, αναγνωρίζοντας ότι: «*είναι λίγα, και σε κάθε περίπτωση πεπερασμένα*» και στην περίπτωση που μειώνουνε το πλάτος της ε-λωρίδας απάντησε ότι «*πάλι θα είναι άπειροι όροι εντός, όσο και να το μειώσουμε θα υπάρχουν άπειροι όροι εντός της λωρίδας*». Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και στην επόμενη ακολουθία όπου η φοιτήτρια με ολική απώλεια όρασης τοποθέτησε την κατασκευή της ε-λωρίδας στο γράφημα της σταθερής ακολουθίας (xi), με πλάτος 2ε = 0.5 και κατέληξε σε παρόμοια συμπεράσματα με την προηγούμενη δραστηριότητα δηλαδή ότι όσο και να μειωθεί το πλάτος της ε-λωρίδας δεν θα αλλάξει κάτι, με τους άπειρους όρους να βρίσκονται εντός και κανένας εκτός της ε-λωρίδας. Στην συνέχεια η φοιτήτρια περισσότερο εξοικειωμένη με την βασική ιδέα των δραστηριοτήτων τοποθέτησε την κατασκευής της ε-λωρίδας στο γράφημα της ακολουθίας (v), με πλάτος 2ε = 0.4 με κέντρο το y=0, και απάντησε με σχετική ευκολία και σιγουριά ότι θα έχουμε πάλι τους άπειρους όρους μέσα στην ε-λωρίδα καθώς το πλάτος τείνει στο μηδέν. Η ακολουθία (ix), δυσκόλεψε περισσότερο την Άννα καθώς της πήρε περισσότερο χρόνο να επεξεργαστεί το σχήμα και να τοποθετήσει την ε-λωρίδας στο γράφημα της ακολουθίας αυτής με πλάτος 2ε = 0.4 με κέντρο τον x'x. Μετά από αρκετή επεξεργασία απάντησε ότι: «*εδώ θα έχουμε άπειρους μέσα και άπειρους όρους έξω από την λωρίδα και μειώνοντας το πλάτος ε της λωρίδας δεν αλλάζει κάτι*» καθώς και συνδύασε αυτή την διαφορά σε σχέση τις προηγούμενες δραστηριότητες στο ότι πρόκειται για μία ακολουθία η οποία δεν συγκλίνει. Βήμα 4: (i) τοποθέτησε την ε-λωρίδας με πλάτος 2ε = 0.1 στην θέση y=0.2 αναγνώρισε ότι τα πεπερασμένα σημεία σε αυτή την περίπτωση βρίσκονται εντός της ε-λωρίδας και τα άπειρα εκτός. Βήμα 5: διατύπωσε αρχικά τον τυπικό ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας ως εξής: «*η ακολουθία συγκλίνει στο L, αν για κάποιο ε θετικό, δηλαδή όποια περιοχή πάρεις, υπάρχει κάποιος δείκτης n_0 έτσι ώστε αν πάρεις κάποιο δείκτη μεγαλύτερο ή ίσο από το n_0 η απόσταση του ορίου από τον αντίστοιχο όρο να είναι μικρότερη από ε, να είναι τελικά όλοι οι όροι για κάθε ε περιοχή μέσα σε αυτή*». Στην συνέχεια δόθηκαν οι δύο ορισμοί της ε-λωρίδας για συζήτηση σε σχέση με τις δραστηριότητες. Για τον ορισμός Α διατύπωσε το εξής: «*Για κάθε ε > 0 υπάρχει n_0 φυσικός τέτοιος ώστε αν $n > n_0$ τότε $| L - a_n | < \varepsilon$*» και για τον ορισμός Β ανέφερε «*η ακολουθία a_n συγκλίνει στο L αν για κάθε ε > 0 υπάρχουν πεπερασμένοι όροι της a_n τέτοιοι ώστε $| L - a_n | \geq \varepsilon$*». Ακολούθως στην ερώτηση για το ποιος είναι ο σωστός ορισμός για την σύγκλιση μιας ακολουθίας, η Άννα κατέληξε ότι: «*το πρώτο είναι σωστό [αρχική αντίδραση], συμφωνώ με αυτό (τον ορισμό Α)*» *ενώ σχετικά με τον ορισμό Β ανέφερε: «ναι σωστά είναι και τα δύο νομίζω».* Βήμα 6: Στην συνέχεια ζητήθηκε από την φοιτήτρια να συγκρίνει ποια είναι η σχέση των δύο αυτών ορισμών με τον τυπικό ορισμό του ορίου ακολουθίας. Σε αυτή την ερώτηση και ύστερα από τον προβληματισμό της Άννας σχετικά με την απάντηση της πρότεινα να ξαναχρησιμοποιήσει την λωρίδα-ε στην περίπτωση της δίκλαδης ακολουθίας(ix). Μετά από απτική επεξεργασία του ανάγλυφου σχήματος και της ε-λωρίδας με χειρονομίες κτύπου η Άννα ισχυρίστηκε: (Α: Άννα, Ε: Ερευνητής).

Α: Άρα πρέπει να έχει πεπερασμένα σημεία και εκτός, άρα θα πρέπει να ισχύουν και τα δύο ταυτόχρονα, μάλλον, άπειρα μέσα και εκτός, […] μπορεί να ήταν λάθος και οι δύο

Ε: Και ο ορισμός Β λάθος;

Α: Το Β έλεγε εκτός να είναι πεπερασμένοι […] δεν λέει εντός να είναι άπειροι

Ε: Λέει για κάθε ε!

Α: […] άρα ναι, σωστό είναι το Β, άρα είναι ισοδύναμος με τον τυπικό ορισμό

Ε: μπορείς να βρεις το λάθος του Α;

Α: γιατί ο Α ουσιαστικά λέει μόνο ότι εντός κάθε περιοχής ε πρέπει να υπάρχουν άπειροι όροι αυτό δεν είναι σωστό γιατί μπορεί να υπάρχουν και εκτός άπειροι όροι που σημαίνει ότι τότε δεν υπάρχει το όριο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπερασματικά, η Άννα δεν αποτελεί εξαίρεση στον ισχυρισμό ότι πολλές αντιλήψεις στον λογισμό είχαν πιθανώς σχηματιστεί ήδη από το λύκειο, με την πανεπιστημιακή της μόρφωση στα μαθηματικά να προσθέτει νέες λανθασμένες συνδέσεις στις ήδη υπάρχουσες (Przenioslo, 2004). Δηλαδή, η περίπτωση της συγκεκριμένης φοιτήτριας ενίσχυσε την άποψη ότι, η εικόνα του ορίου που αποκτήθηκε από προηγούμενη μάθηση μπορεί να εμποδίσει την εκμάθηση του ε-Ν ορισμού του ορίου (Roh, 2010). Η πιθανή αντικατάσταση ενός αισθητήριου οργάνου από ένα άλλο όργανο όπως ένα τυφλό άτομο χρησιμοποιεί την αφή σε αντικατάσταση της όρασης, μπορεί να προκαλέσει μια βαθιά αναδιάρθρωση της σκέψης και της προσωπικότητας του τυφλού ατόμου (Vygotsky, 1997). Συνεπώς, είναι σημαντικό να ανοίξει μία ευρύτερη συζήτηση για τον τρόπο που θα πρέπει να αντιμετωπίζουμε τη διδακτική των μαθηματικών σε άτομα με διαφορετικούς τρόπους κατανόησης και να διευρυνθεί το περιορισμένο για την ώρα πεδίο των διαφορετικών αυτών προσεγγίσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυρόπουλος, Β. (2003). Μία πιλοτική έρευνα σε ειδικό σχολείο (τυφλοί μαθητές) με εφαρμογή της θεωρίας του van Hiele για επίπεδα κατανόησης στη Γεωμετρία, *Μέντορας*, 7, 94-107.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Cory, B. L., &Garofalo, J. (2011).Using dynamic sketches to enhance preservice secondary mathematics teachers' understanding of limits of sequences. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(1), 65-97.

Davis, R. B., &Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The journal of mathematical behavior*.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Goldin-Meadow, S., & Singer, M. A. (2003).From children's hands to adults' ears: gesture's role in the learning process. *Developmental psychology*, *39*(3), 509.

Harel, G., &Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III*, 234-283.

Healy, L., &Fernandes, S. H. A. A. (2011).The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3), 157-174.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, *6*(3), 42-46.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1), 103-132.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 111-126.

Roh, K. H. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 263-279.

Vygotsky, L. S. (1997). *The collected works of LS Vygotsky: Problems of the theory and history of psychology* (Vol. 3). Springer Science & Business Media.

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ˙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

Πετροπούλου Γεωργία, Μπακογιάννη Διονυσία

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

gpetrop@math.uoa.gr, dbakogianni@math.uoa.gr

Στο πλαίσιο της νέας συνθήκης που διαμόρφωσε η εξ αποστάσεως εκπαίδευση την περίοδο της πανδημίας COVID-19, νέοι πόροι μπήκαν στην διδασκαλία των μαθηματικών, και επιπλέον άλλαξε η χρήση πόρων που αξιοποιούνταν μέχρι σήμερα. Η παρούσα μελέτη διερευνά τον ρόλο των πόρων στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος κατά την εξ αποστάσεως διδασκαλία, μέσα από το παράδειγμα δύο εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αξιοποιώντας την ιδέα της διαφάνειας των πόρων μέσα στην πρακτική-μέσα στο πλαίσιο (Adler, 2000) βλέπουμε να διαμορφώνονται νέα επίπεδα διαφάνειας που φαίνεται να επηρεάζουν σημαντικά την πορεία προς τη μάθηση των μαθηματικών μέσα στη νέα αυτή συνθήκη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πανδημία COVID-19 δημιούργησε αλλαγές στην εκπαίδευση και ανάγκασε, για μεγάλο χρονικό διάστημα, όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες να μετακινηθούν από τη δια ζώσης διδασκαλία σε μεθόδους εξ αποστάσεως διδασκαλίας. Το διεθνές αυτό φαινόμενο έφερε νέα θέματα στην ατζέντα της έρευνας για τη Διδακτική των Μαθηματικών με ερωτήματα σχετικά με την ισότητα και την πρόσβαση (Borba, 2021), τις διδακτικές μεθόδους και τους πόρους για την εξ αποστάσεως διδασκαλία, αλλά και με τις επιπτώσεις που θα έχει η κατάσταση αυτή στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών γενικότερα (π.χ. Bakker & Wagner, 2020; Bakker, Cai & Zenger, 2021).

Μέσα στο πλαίσιο της νέας συνθήκης (διδασκαλία από απόσταση χωρίς φυσική παρουσία), η συζήτηση για τους πόρους και την πρόσβαση σε αυτούς αποκτά κεντρική θέση στον χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών (Yılmaz, Dede, Sears & Nielsen, 2021). Είναι όμως η προσβασιμότητα στους πόρους, εκτός από αναγκαία, και ικανή συνθήκη για τη νοηματοδότηση των μαθηματικών στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση; Στην παρούσα μελέτη, εστιάζοντας στο παράδειγμα δύο εκπαιδευτικών, αρκετά εξοικειωμένων με τα ψηφιακά εργαλεία, διερευνούμε:

Ποιος είναι ο ρόλος των πόρων στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος κατά την εξ αποστάσεως διδασκαλία δύο εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Με τον όρο «διδακτικός πόρος» αναφερόμαστε στα υλικά ή πολιτιστικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται ή αναπτύσσονται από τους εκπαιδευτικούς μέσα στη διδασκαλία (π.χ. μαθηματικά αντικείμενα, αναλυτικό πρόγραμμα, ψηφιακά εργαλεία, πίνακας, κ.α.). Πρόσφατες έρευνες έχουν εστιάσει σε διαφορετικές πτυχές και χρήσεις των πόρων και έχουν αναδείξει τον σημαντικό ρόλο τους στη διαμόρφωση της διδασκαλίας των μαθηματικών (Adler 2000, Gueudet & Trouche 2009, Μπακογιάννη 2019).

Η Adler (2000) έχοντας μια ευρεία οπτική για τους πόρους, βλέπει τους *πόρους-μέσα στην πρακτική-μέσα στο πλαίσιο* και τους διακρίνει σε πόρους βασικούς που σχετίζονται με το σχολείο και τη λειτουργία του (κτίριο, ηλεκτροδότηση, θρανία, το μέγεθος του πληθυσμού της τάξης, ο λόγος καθηγητής/μαθητές κτλ) και πόρους που σχετίζονται με τη διαδικασία της μάθησης. Τους τελευταίους τους διακρίνει σε *υλικούς, ανθρώπινους* και *πολιτισμικούς*. Μέσα σε αυτή την ευρεία κοινωνικο-πολιτισμική οπτική των πόρων, η Adler χρησιμοποιεί τον όρο διαφάνεια (transparency) (Lave & Wenger, 1991) για να αντιμετωπίσει την πολυπλοκότητα της λειτουργίας των πόρων *μέσα στα* και *για τα* σχολικά μαθηματικά. Η διαφάνεια των πόρων, μέσα από τον δυισμό του ορατού και του μη ορατού «δεν αποτελεί την ιδιότητα του πόρου, αλλά τη λειτουργία του, πώς αυτός χρησιμοποιείται και γίνεται κατανοητός *μέσα στην πρακτική-μέσα στο πλαίσιο*» (Adler, 2000, σελ. 217). Έτσι, προκειμένου να γίνουν ορατά (visible) τα μαθηματικά στον μαθητή, χρειάζεται οι πόροι που χρησιμοποιούμε ως μέσα για τη διδασκαλία να έρθουν σε δεύτερο πλάνο, να γίνουν μη ορατοί (invisible).

Έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στην περίοδο της πανδημίας έχουν αναδείξει την αλλαγή που υπάρχει στους βασικούς πόρους της πρακτικής στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης (π.χ. δίκτυο, υπολογιστής, κάμερα, ηχείο, οικογένεια, χώρος εργασίας στο σπίτι) (Bakker, Cai & Zenger, 2021). Η μεγάλη αυτή αλλαγή στους βασικούς πόρους δημιουργεί νέες προϋποθέσεις για την αλληλεπίδραση ανάμεσα στον μαθητή και τα μαθηματικά. Η πρόσβαση εκπαιδευτικών και μαθητών στους βασικούς πόρους της τηλεκπαίδευσης φάνηκε να αποτελεί εμπόδιο στην ομαλή λειτουργία της τηλεκπαίδευσης (π.χ. Giorgio-Doherty κ.α., 2021). Επιπλέον, η μάθηση των μαθηματικών με μέσα τηλεκπαίδευσης φάνηκε να αποτελεί ένα πολυδιάστατο και πολύπλοκο τερέν δραστηριότητας με έντονη κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση που επεκτείνεται πέρα από το ζήτημα της προσβασιμότητας (Yilmaz κ.α., 2021) Ο Borba (2021) συζητά για τον μετασχηματισμό στο τρίγωνο της θεωρίας της δραστηριότητας (Engeström, 1999) στο νέο πλαίσιο: το internet θα μπορούσε να μεταπηδήσει από τη θέση του εργαλείου, στη θέση του υποκειμένου ή της κοινότητας.

Η αλλαγή από τη φυσική τάξη στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση εκτός από τους πόρους διαφοροποίησε και τη λειτουργία τους σε σχέση με τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά αντικείμενα ορίζουν ένα επίπεδο διαπραγμάτευσης που προϋποθέτει την διαπραγμάτευση σε δύο άλλα επίπεδα (α) την πρόσβαση στο νέο περιβάλλον μάθησης (Chirinda, 2021; Yilmaz κ.α., 2021) και (β) τη δυνατότητα του εκπαιδευτικού να χρησιμοποιήσει κατάλληλα διδακτικά εργαλεία για να κάνει προσβάσιμο το περιεχόμενο των μαθηματικών στο νέο περιβάλλον μάθησης (Giorgio-Doherty, Baniahmadi, κ.α., 2021; Tabach, 2021). Η πορεία μέσα από τα διάφορα επίπεδα διαπραγμάτευσης του νοήματος μέχρι να γίνουν ορατά τα μαθηματικά στον μαθητή, μετασχηματίζει και επαναδιαμορφώνει όλες τις διαστάσεις της πρακτικής στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας. Η ιδέα της διαφάνειας των πόρων φαίνεται να είναι χρήσιμη σε αυτό το πλαίσιο καθώς δίνει τη δυνατότητα να διερευνηθεί η πολυπλοκότητα που υπάρχει προκειμένου να γίνουν τα μαθηματικά ορατά στον μαθητή.

Στο άρθρο αυτό προσπαθούμε να φωτίσουμε πτυχές της πορείας ώστε τα μαθηματικά να γίνουν ορατά και προσβάσιμα για διαπραγμάτευση από τον μαθητή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα αναφορά αποτελεί μέρος μίας ευρύτερης έρευνας με στόχο την αποτύπωση των αντιλήψεων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τις επιπτώσεις της εξ αποστάσεως διδασκαλίας λόγω της πανδημίας Covid-19. Στο πλαίσιο της ευρύτερης έρευνας, δημιουργήθηκαν ομάδες από 6-7 εκπαιδευτικούς της ίδιας βαθμίδας οι οποίοι συμμετείχαν εθελοντικά σε μαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις διάρκειας 2 ωρών. Τα δεδομένα για το άρθρο προήλθαν από ημιδομημένη συνέντευξη 2 εκπαιδευτικών μαθηματικών της περιφέρειας με εμπειρία στη διδασκαλία και στα ψηφιακά εργαλεία οι οποίοι συμμετείχαν σε μία ομάδα 6 εκπαιδευτικών με κοινό χαρακτηριστικό ότι δίδασκαν όλοι σε Λύκειο. Στην ομάδα των 6 εκπαιδευτικών συμμετείχαν επίσης 1 φυσικός και 3 φιλόλογοι. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης απευθύνθηκαν σε όλους τους εκπαιδευτικούς της ομάδας. Η συνέντευξη πραγματοποιήθηκε εξ αποστάσεως, με ανοιχτές κάμερες, από την πρώτη ερευνήτρια, και απομαγνητοφωνήθηκε πλήρως.

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με μεθόδους θεμελιωμένες (grounded) σε αυτά (Charmaz, 2006), και από τις δύο ερευνήτριες, μέχρι να υπάρξει συμφωνία για τα ζητήματα που αναδύονταν. Επειδή σε κάποια σημεία της συνέντευξης οι μαθηματικοί συμφωνούσαν με τους άλλους συναδέλφους τους, αναλύθηκαν τα δεδομένα από όλους τους συμμετέχοντες. Όταν υπήρξε συμφωνία μεταξύ των ερευνητριών για τα ζητήματα που αποτύπωναν οι μαθηματικοί (αναφέρονται ως Κ1 και Κ2) για την εξ αποστάσεως διδασκαλία τους, η ανάλυση προχώρησε σε κατηγοριοποίηση αυτών των ζητημάτων με αναδρομική αναφορά στα δεδομένα. Η κατηγοριοποίηση ανέδειξε τους πόρους και τη χρήση τους στη διδασκαλία ως κεντρική πτυχή της πορείας διαπραγμάτευσης του μαθηματικού νοήματος στο εξ αποστάσεως πλαίσιο. Στη συνέχεια δίνουμε στοιχεία για αυτή την πορεία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι πόροι που αξιοποίησαν στην εξ αποστάσεως διδασκαλία τους οι δύο εκπαιδευτικοί περιλαμβάνουν: α) τους *βασικούς πόρους* για τη νέα συνθήκη (πρόσβαση στο διαδίκτυο, εργαλεία σύνδεσης), β) τους *διδακτικούς πόρους* που σχετίζονται με τα μαθηματικά (μαθηματικές δραστηριότητες από ψηφιακά αποθετήρια, μαθηματικά λογισμικά) και που επέλεγαν οι ίδιοι με βάση τον διδακτικό τους σχεδιασμό, και γ) τα *μαθηματικά αντικείμενα* που οι μαθητές επιδιώκονταν να νοηματοδοτήσουν. Η πρόσβαση των μαθητών στους βασικούς πόρους δεν ήταν δεδομένη, ωστόσο αποτελούσε προϋπόθεση για την εμπλοκή τους με τους διδακτικούς πόρους που αφορούσαν τα μαθηματικά. Οι διδακτικοί πόροι με τη σειρά τους αξιοποιούνταν με την πρόθεση να αναδείξουν τα μαθηματικά αντικείμενα ώστε αυτά να έχουν νόημα για τους μαθητές. Παρατηρήσαμε δηλαδή μία πορεία προς τη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος στην οποία ο ρόλος των πόρων ήταν κεντρικός. Σε ότι ακολουθεί αναλύουμε αυτή την πορεία και επιχειρούμε να την αποδώσουμε σχηματικά στο τέλος της ενότητας.

Η πρόσβαση σε βασικούς πόρους

Στο πλαίσιο της διαδικτυακής τάξης φάνηκε ότι νέοι, βασικοί πόροι διαμεσολάβησαν ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές τους καθορίζοντας την πρόσβαση όλων στη μαθησιακή διαδικασία. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, η σύνδεση στο διαδίκτυο, η κάμερα και το μικρόφωνο έγιναν τα απαραίτητα μέσα για την εξ αποστάσεως διδασκαλία. Η διαθεσιμότητα όμως αυτών των μέσων δεν είναι αυτονόητη. Επιπλέον, βασικοί πόροι όπως το κτίριο, η τάξη, το θρανίο, ο διπλανός συμμαθητής, αντικαταστάθηκαν από πόρους όπως ο χώρος του σπιτιού, οι γονείς που ακούν δίπλα, τα παιδιά ή μικρότερα αδέρφια που παίζουν κοντά κ.λπ.:

> «Γνωρίζοντας αυτά τα παιδιά ότι τους ακούν όχι μόνο οι συμμαθητές τους πια, γιατί είχαν πέσει οι τοίχοι των τάξεων, αλλά και οι γονείς των συμμαθητών τους, οι άλλοι συγγενείς ή γνωστοί που τυχόν βρίσκονταν στο σπίτι, οι οποίοι παρακολούθησαν πλέον κανονικά την τάξη μας και την αξιολογούσαν, αυτό τους προκαλούσε να μη συμμετέχουν στο μάθημα.»
> (σχόλιο άλλου εκπαιδευτικού με το οποίο συμφωνούν οι Κ1, Κ2, 18΄03΄΄)

Επομένως, ακόμα και αν οι μαθητές είχαν πρόσβαση στους βασικούς πόρους-μέσα στο πλαίσιο, το ίδιο το πλαίσιο, πολλές φορές, καθόριζε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τους βασικούς πόρους. Η (μη) χρήση των πόρων από τους μαθητές είχε αντανάκλαση στην ανατροφοδότηση που αντλούσε ο εκπαιδευτικός από την τάξη του και ανέδειξε νέες προκλήσεις σχετικά με τον ρόλο του:

> «Όταν δεν βλέπεις το πρόσωπο του μαθητή και δεν βλέπει το πρόσωπό σου δεν μπορείς να ξέρεις τι γίνεται. Έπειτα δεν μπορείς να παρέμβεις. Σου λέει "έχω πρόβλημα, δεν ακούω". Το ρωτάς το παιδί και δεν σου απαντάει. Ρωτάς ξαναρωτάς. Ακούει; Βλέπεις ένα chat: "Δεν μπορώ να μιλήσω, δεν έχω μικρόφωνο". Δεν μπορείς να το ελέγξεις αυτό, αναγκάζεσαι και το δέχεσαι. … Νομίζω το μεγαλύτερο μειονέκτημα για μένα είναι οι κλειστές κάμερες. Δεν μπορεί να κάνω μάθημα σε τοίχο, να μη βλέπω ποιον έχω απέναντί μου.» (Κ1, 11΄37΄΄)

Είδαμε ότι στην εξ αποστάσεως συνθήκη, η (μη) πρόσβαση στους βασικούς πόρους και η χρήση αυτών μπορεί να ορθώσει έναν «τοίχο» στην πορεία για τη μάθηση των μαθηματικών. Αν η πρόσβαση και η χρήση των βασικών πόρων εξασφαλιστεί, το τοίχος γίνεται διάφανος (με την ιδιότητα του μη ορατού) και αναδύεται ένα δεύτερο επίπεδο προκλήσεων, αυτό της εμπλοκής των μαθητών με τους διδακτικούς πόρους, αυτούς που ο εκπαιδευτικός επιλέγει για να διαπραγματευθεί τα μαθηματικά. Το επίπεδο αυτό αναδεικνύουμε στη συνέχεια.

Η εμπλοκή με διδακτικούς πόρους σχετικούς με τα μαθηματικά

Οι δύο εκπαιδευτικοί αξιοποίησαν ένα πλήθος νέων διδακτικών πόρων σχετικών με τα μαθηματικά (γραφίδα, λογισμικά, ψηφιακά αποθετήρια, ηλεκτρονική τάξη, διαδραστικά σχολικά βιβλία) τους οποίους επέβαλε η εξ αποστάσεως συνθήκη. Για παράδειγμα, η σημασία των γραπτών επεξηγήσεων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών και η απουσία του πίνακα, έκαναν αναγκαία την αξιοποίηση νέων πόρων όπως η γραφίδα.

> «Πέρυσι στην πρώτη φάση της πανδημίας, που ήταν η αρχή, για μας τουλάχιστον τους μαθηματικούς είναι λίγο δύσκολο να κάνουμε μάθημα εξ αποστάσεως. Αν δεν έχουμε πίνακα για να γράψουμε. Δεν είναι ότι τους δίνεις ένα κείμενο και το διαβάζεις. Πρέπει να καταλαβαίνουν και τα παιδιά αυτό που γράφεις, αυτό, αυτή η σχέση που θα γράφεις έτσι ώστε δεν μπορούν να πουν να συνειδητοποιούν κάτι μαθηματικό που ακούν και να το

αντιλαμβάνονται πολύ γρήγορα. Ενώ όταν το βλέπουν γραμμένο το συνειδητοποιούν. Οπότε ήταν το πρόβλημα το πώς θα τα γράφω για να τα βλέπουν. Οπότε λύθηκε από το τέλος της περσινής χρονιάς που αγόρασα μία γραφίδα και κατάφερα και έκανα το μάθημα βέβαια πολύ πιο εύκολο. Γιατί μετά κατευθείαν, με το που έκανα το μάθημα, το έσωζα και το ανέβαζα στο e-class. Οπότε τα παιδιά το απόγευμα, και κάποιος να μην προλάβαινε κάτι, γιατί μου έλεγαν πολλές φορές πας πολύ γρήγορα, γράφετε γρήγορα, μπορούσαν να δουν το μάθημα στο e-class. Και ήτανε πολύ πιο καλό από αυτό που έκανα πέρυσι που τα έγραφα σε ένα χαρτί, τα σκάναρα και τους τα έδειχνα εκείνη τη στιγμή. Ήταν τελείως απρόσωπο το περυσινό μάθημα.»

(Κ2, 37΄13΄΄)

Επιπλέον, ακόμα και πόροι που υπήρχαν και αξιοποιούνταν σε έναν βαθμό πριν την εξ αποστάσεως διδασκαλία, όπως η ηλεκτρονική τάξη, άλλαξαν χρήση στο νέο πλαίσιο. Για παράδειγμα, όπως βλέπουμε στο παραπάνω απόσπασμα, η ηλεκτρονική τάξη χρησιμοποιείται για να ανεβαίνει το υλικό της ημέρας. Γενικότερα, η ηλεκτρονική τάξη φάνηκε να αποκτά έναν ισχυρό ρόλο στην οργάνωση και διάθεση διδακτικού υλικού, στην επικοινωνία με τους μαθητές, αλλά αξιοποιήθηκε και ως μέσο για την αξιολόγηση των μαθητών. Τα ακόλουθα αποσπάσματα αναδεικνύουν τις νέες πτυχές στην αξιοποίηση της ηλεκτρονικής τάξης.

«Ναι. Και εγώ θα πω ότι κάτι που δεν το χρησιμοποιούσαμε σίγουρα τα προηγούμενα χρόνια γιατί τα διαγωνίσματα ήταν καθαρά βάζω το διαγώνισμα, γράφουν οι μαθητές, τους επιτηρείς. Χρησιμοποίησα τις ασκήσεις που έχει το e-class, που έπρεπε βέβαια… Έφτιαξα τράπεζα ερωτήσεων κάτι που είναι πολύ σημαντικό γιατί μένει.»

(σχόλιο άλλου εκπαιδευτικού με το οποίο συμφωνούν οι Κ1, Κ2, 50 ΄53΄΄)

«Η πλατφόρμα το e-class έτσι κι αλλιώς είναι πάρα πολύ χρήσιμη ακόμη και για ένα γρήγορο τεστ, για να ανεβάσουν εργασίες τα παιδιά, να δίνεται μία δεύτερη ευκαιρία. Έτσι κι αλλιώς είναι ένα χρήσιμο εργαλείο. Ακόμη και για εξωδιδακτικές, δηλαδή όταν έχουμε διάφορα προγράμματα.»

(σχόλιο άλλου εκπαιδευτικού με το οποίο συμφωνούν οι Κ1, Κ2, 1ω14΄ 03΄΄)

Φαίνεται επίσης πώς, στην περίπτωση των δύο εκπαιδευτικών, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να εμπλακούν με νέους πόρους (π.χ. ψηφιακές δραστηριότητες στο λογισμικό Geogebra), να πειραματιστούν οι ίδιοι με τα μαθηματικά, οπότε έδειχναν και μεγαλύτερο ενδιαφέρον για την όλη διαδικασία:

«Την είχα μελετήσει εγώ πιο πριν τη δραστηριότητα, έδειχνα στα παιδιά πώς δουλεύει και υπήρχε μία αλληλεπίδραση δηλαδή έδειχναν πολύ μεγαλύτερο ενδιαφέρον τα παιδιά για αυτό που βλέπουν από τον στείρο στον πίνακα το να γράφω εγώ συνέχεια την άσκηση…» (Κ1, 50΄53΄΄)

Ωστόσο, είναι ενδιαφέρον ότι η εμπλοκή των μαθητών με νέους διδακτικούς πόρους σχετικούς με τα μαθηματικά δεν εξασφάλισε απαραίτητα τη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος μέσα στη διαδικτυακή τάξη, όπως δείχνουμε στη συνέχεια.

Η ανάπτυξη νοήματος για τα μαθηματικά αντικείμενα

Στο τελευταίο επίπεδο διαπραγμάτευσης του μαθηματικού νοήματος, οι μαθητές, κυρίως εκείνοι οι οποίοι είχαν εμπλακεί με τους διδακτικούς πόρους, δούλεψαν με μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. μαθηματικές έννοιες, αναπαραστάσεις) σε ένα μάθημα που διέφερε από αυτό της φυσικής τάξης:

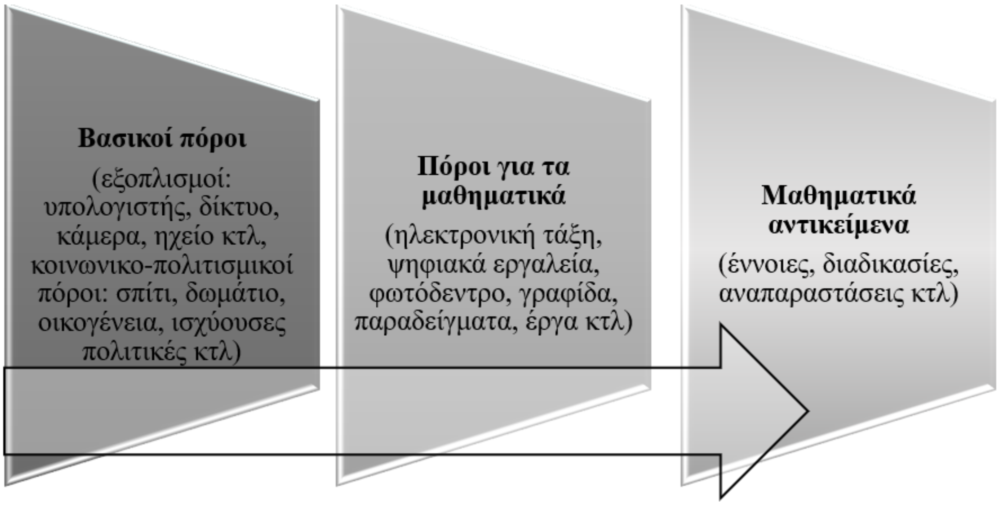
> «Μπόρεσα και έκανα πράγματα τα οποία δεν μπορούσα να τα κάνω μέσα στην τάξη γιατί το σχολείο μας δεν έχει κάποιο εργαστήριο για να πάω, οπότε πολλά πράγματα που ήθελα να δείξω, μία γραφική παράσταση, μπορούσα να το κάνω πολύ εύκολα από το geogerba ή από κάποιο άλλο πρόγραμμα, και να το δουν τα παιδιά ή μπορούσα να τους βάλω κάποια άσκηση εφόσον τους είχα δείξει πώς δουλεύει για να πειραματιστούν. Δηλαδή έκαναν ασκήσεις διαφορετικού είδους που δεν τις έκαναν τα άλλα χρόνια. Δηλαδή ήταν περισσότερο τυπικό το μάθημα μέσα στην τάξη.»
> (Κ2, 30΄38΄΄)

Βλέπουμε πώς αξιοποιήθηκαν ψηφιακοί πόροι ώστε οι μαθητές να «πειραματιστούν» με γραφικές παραστάσεις και έργα «διαφορετικού είδους». Ωστόσο, όπως αναφέρουν σε πολλά σημεία οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί, «κάποιοι, αρκετοί» μαθητές της ψηφιακής τάξης, «έμειναν πίσω»:

> Υπάρχουν οι καλοί οι οποίοι παρακολούθησαν κανονικά, και πήραν και τις δεξιότητες και πήραν και ότι έπρεπε να πάρουν, και υπάρχει ένα ποσοστό μέτριων μαθητών, που αυτοί, κάποιοι, αρκετοί, έμειναν πίσω. Αρκετοί από αυτούς θα μπορούσε δηλαδή ενδεχομένως μέσα στην τάξη να τους τραβήξεις περισσότερο. (Κ1, 25΄39΄΄)

Φαίνεται δηλαδή ότι η πρόσβαση, ακόμα και η εμπλοκή, με τους νέους πόρους για την εξ αποστάσεως διδασκαλία δεν έκανε ορατά τα μαθηματικά σε όλους τους μαθητές. Έτσι, η ανάπτυξη μαθηματικού νοήματος παρέμεινε πρόκληση για κάποιους μαθητές και μάλιστα περισσότερους σε σχέση με τη φυσική τάξη.

Η πρόσβαση σε βασικούς πόρους, η εμπλοκή με διδακτικούς πόσους σχετικούς με τα μαθηματικά και η ανάπτυξη νοήματος για τα μαθηματικά αντικείμενα που είδαμε παραπάνω αποτελούν τρία επίπεδα διαπραγμάτευσης των πόρων για την εξ αποστάσεως διδασκαλία που φάνηκε να διαμορφώνουν μία πορεία προς τη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές. Το σχήμα που ακολουθεί συνοψίζει τα τρία επίπεδα διαπραγμάτευσης των πόρων και πως φάνηκε να επηρεάζουν την πορεία προς τη μάθηση των μαθηματικών στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας.



Σχήμα 1: Τα επίπεδα διαπραγμάτευσης των πόρων στην πορεία προς τη μάθηση των μαθηματικών στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως διδασκαλίας

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η συνθήκη της τηλεκπαίδευσης έφερε μεγάλες αλλαγές τόσο στο πλαίσιο της διδασκαλίας (ψηφιακή τάξη αντί για φυσική) όσο και στην ίδια την πρακτική (νέοι πόροι, νέες λειτουργίες).Υιοθετώντας τον φακό της Adler (2000) για τους πόρους *μέσα στην πρακτική-μέσα στο πλαίσιο*, διερευνήσαμε τον ρόλο τους στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος στην εξ αποστάσεως διδασκαλία. Στην περίπτωση της εξ αποστάσεως διδασκαλίας παρατηρήσαμε αλλαγές και στην πρακτική και στο πλαίσιο αξιοποίησης των διδακτικών πόρων. Σε σχέση με την πρακτική αλλάζει ο τρόπος πρόσβασης στην τάξη (ψηφιακά μέσα αντί φυσικής τάξης), ο τρόπος παρουσίασης του περιεχομένου του μαθήματος (γραφίδα και ψηφιακά αρχεία αντί πίνακα), η πρόσβαση των μαθητών στα υλικά του μαθήματος (σημειώσεις στην ηλεκτρονική τάξη και e-mail αντί σημειώσεις στο τετράδιο), η αξιολόγηση των μαθητών (ηλεκτρονικά διαγωνίσματα). Σε σχέση με το πλαίσιο βλέπουμε να αλλάζει η συμμετοχή των μαθητών (ο καθηγητής δεν τους βλέπει, κάποιους δεν ακούει), αλλάζει το περιβάλλον μάθησης (συχνά είναι παρόντες στη διαδικασία γονείς, παππούδες, αδέρφια κτλ), αλλά και οι νόρμες συμμετοχής (υποχρεώσεις, θεσμικές επιταγές κτλ). Οι αλλαγές αυτές αναδεικνύονται έντονα στη συζήτηση για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο περιβάλλον της τηλεκπαίδευσης ((Chirinda, 2021; Yilmaz, κ.α. 2021; Borba, 2021)

Η μελέτη των πόρων *μέσα στην πρακτική-μέσα στο πλαίσιο* βοήθησε να διακρίνουμε νέα επίπεδα πολυπλοκότητας για τη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος. Συγκεκριμένα, η λειτουργία των πόρων φάνηκε να απαιτεί νέα επίπεδα διαφάνειας (transparency) που επηρεάζουν σημαντικά την πορεία προς τη μάθηση των μαθηματικών (Σχήμα 1). Ο μετασχηματισμός των βασικών πόρων που υποστηρίζουν τη διδασκαλία, η πρόσβαση και η εμπλοκή των μαθητών σε αυτούς φάνηκαν να καθιστούν τα μαθηματικά ορατά στους μαθητές υπό την προϋπόθεση ότι οι πόροι για τη διδασκαλία είναι, οι ίδιοι, διαφανείς (μη ορατοί).

Οι μεγάλες αλλαγές στην πρακτική και στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσα στο περιβάλλον της εξ αποστάσεως διδασκαλίας δημιουργούν την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα. Ο Borba (2021) κοιτώντας μέσα από τον φακό της Θεωρίας Δραστηριότητας (Engeström, 1999) και εστιάζοντας στα ψηφιακά μέσα όπως internet, βίντεο, κ.α. συζήτησε για τους πολλαπλούς ρόλους των πόρων μέσα στο τρίγωνο της δραστηριότητας και για την νέα μορφή δραστηριότητας που φαίνεται να αναδύεται. Ζητήματα σχετικά με τον μετασχηματισμό της εξ αποστάσεως διδασκαλίας ως δραστηριότητας που υποστηρίζει την προϋπόθεση της διαφάνειας των αξιοποιούμενων πόρων φαίνεται να αποτελούν ένα νέο πεδίο αναζήτησης για την έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 205-224.

Bakker, A., & Wagner, D. (2020). Pandemic: Lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics, 104*, 1–4.

Bakker, A., Cai, J. & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics 107*, 1–24.

Borba, M. C. (2021). The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things. *Educational Studies in Mathematics*, 1-16.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis.* sage.

Chirinda, B. (2021). An exploration of the teaching of mathematics during the covid-19 lockdown in a resource-constrained environment. In Inprasitha, M., Changsri, N., & Boonsena, N. (Eds). (2021). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1*, pp. 135. Khon Kaen, Thailand: PME.

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. *Perspectives on activity theory, 19(38)*, 19-30.

Giorgio-Doherty, K., Baniahmadi, M., Newton, J., Olson, A. M., Ferguson, K., Sammons, K., ... & Drake, C. (2021). COVID and Curriculum: Elementary Teachers Report on the Challenges of Teaching and Learning Mathematics Remotely. *Journal of Multicultural Affairs*, *6*(2), 3.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. Educational studies in mathematics, 71(3), 199-218.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press.

Μπακογιάννη, Δ. (2019). Διαμορφώνοντας την ιδέα του ανθρώπινου πόρου κατά τη μελέτη της ανάπτυξης της διδασκαλίας της στατιστικής. *Πρακτικά 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Πανεπιστήμιο Κύπρου στις 6-8 Δεκεμβρίου 2019, Λευκωσία, Κύπρος.

Tabach, M. (2021). Competencies for teaching mathematics in the digital era: are we ready to characterize them? In Inprasitha, M., Changsri, N., & Boonsena, N. (Eds). (2021). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.1)*. Khon Kaen, Thailand: PME.

Yılmaz, Z., Dede, H. G., Sears, R., & Nielsen, S. Y. (2021). Are we all in this together?: mathematics teachers' perspectives on equity in remote instruction during pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, 1-25.

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟ ΚΟΥΝΙΑ»: ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΑΙΔΙΚΩΝ ΣΤΑΘΜΩΝ

Μερίκα Ελένη, Σιάτρας Αναστάσιος, Χρονάκη Άννα

Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

meeleni@uth.gr, asiatras@uth.gr, chronaki@uth.gr

Στόχος της εργασίας είναι να αναλυθεί το περιεχόμενο του Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) παιδικών σταθμών «Για την καλλιέργεια, αγωγή και φροντίδα παιδιών προσχολικής ηλικίας» και να διερευνηθεί η αλληλεπίδραση του λόγου εντατικοποίησης της μαθηματικής εκπαίδευσης και του λόγου για την ολιστική προσέγγιση των μαθηματικών πρακτικών ή εμπειριών στην εκπαίδευση παιδιών πρώιμης παιδικής ηλικίας. Οι άξονες ανάλυσης αναφέρονται στο εννοιολογικό περιεχόμενο, τη φύση περιεχομένου, τις επιστημονικές μεθόδους και τα κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα, απ' όπου προκύπτει σημαντική επιρροή του ακαδημαϊκού λόγου, μέσα από τη συγκρότηση ανταγωνιστικών μαθησιακών ταυτοτήτων «ικανών» παιδιών, στο πεδίο της πρώιμης αγωγής και εκπαίδευσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πεδίο της αγωγής και εκπαίδευσης στην πρώιμη παιδική ηλικία βρίσκεται στο επίκεντρο ερευνών διεθνών οργανισμών (βλ. OECD, 2020), ακολουθώντας υφιστάμενα μοντέλα διερεύνησης επιδόσεων δεκαπεντάχρονων μαθητριών/τών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η ερευνητική μετατόπιση από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην πρώιμη αγωγή έχει αναδείξει σημαντικές παιδαγωγικές ανησυχίες για την εστίαση στην επίδοση των μικρών παιδιών σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα (Pence, 2016), μεταξύ των οποίων και τα μαθηματικά. Οι προβληματισμοί αφορούν στο παιδαγωγικό και μαθησιακό πλαίσιο που διαμορφώνεται μέσα από την πρώιμη διδασκαλία των μαθηματικών στην προσχολική ηλικία, όπως για παράδειγμα ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζονται συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και πώς αυτές μετουσιώνονται σε Μαθησιακούς Στόχους (ΜΣ) στα ΠΣ παιδικών σταθμών στο πλαίσιο του μαθηματικού γραμματισμού στην προσχολική εκπαίδευση (Χρονάκη, 2012α). Αντίστοιχοι προβληματισμοί για την αποπλαισιωμένη διαδικασία της μαθηματικής εκπαίδευσης παρατηρούνται και σε μεγαλύτερες βαθμίδες εκπαίδευσης, όπως και στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών, που ενισχύουν την αποστασιοποίηση των ατόμων από την ενασχόληση με τα μαθηματικά και την παρεμπόδιση της προσέγγισης της μαθηματικής εκπαίδευσης ως μιας δυναμικής για την ενσώματη και βιωματική γνώση (βλ. Chronaki, 2018).

Η συγκρότηση και οργάνωση των ΠΣ εδράζεται σε εκπαιδευτικές πολιτικές που συχνά εναρμονίζονται με ερευνητικές στρατηγικές διεθνών οργανισμών (Apple, 1993). Με αυτό τον τρόπο, τα ΠΣ συμβάλλουν στην εργαλειοποίηση των γνωστικών αντικειμένων, όπως των μαθηματικών, με στόχο τη συγκρότηση απαιτητικών μαθησιακών ταυτοτήτων για τα μικρά παιδιά που θα πρέπει να ανταποκρίνονται σε όλο και πιο εντεινόμενες διδακτικές πρακτικές που αναφέρονται σε ένα συσσωρευμένο περιεχόμενο στο πεδίο της πρώιμης αγωγής και εκπαίδευσης. Υποστηρίζεται, δε, ότι η εντατικοποίηση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην πρώιμη παιδική ηλικία εμποδίζει την ανάπτυξη της δημιουργικότητας και φαντασίας (Σιάτρας, 2016), αναχαιτίζοντας την πολυφωνικότητα της έκφρασης των παιδιών στην αίσθηση, τη μεταμόρφωση και την υπέρβαση στο χώρο και το χρόνο (Chronaki & Mountzouri, 2012). Με αυτό τον τρόπο, διαμορφώνεται ένα γόνιμο πλαίσιο για την ‘πειρατική’ εισχώρηση της τεχνοκρατικής μαθηματικής εκπαίδευσης στην πρώιμη αγωγή, στοχεύοντας στην ανάδειξη μετρήσιμων και τυποποιημένων αξιολογικών στρατηγικών στα εκπαιδευτικά συστήματα (Sahlberg, 2013).

Συνεπώς, είναι σημαντικό να διερευνηθούν οι λόγοι που συγκροτούνται γύρω από τις διαφοροποιημένες νοηματοδοτήσεις μαθηματικών εννοιών και την αλληλεπίδρασή τους με τις μαθησιακές ταυτότητες των μικρών παιδιών, καθώς και τις αξιολογικές στρατηγικές που αξιοποιούνται στην πρώιμη αγωγή και εκπαίδευση (Πεχτελίδης, 2020, Χρονάκη, 2012α). Στην κατεύθυνση αυτή, σε προηγούμενη έρευνά μας αναλύθηκαν οι λόγοι που διαμορφώνονται μέσα από τις λειτουργίες των ΜΣ των μαθηματικών στην υποχρεωτική προσχολική εκπαίδευση (π.χ. νηπιαγωγείο), εστιάζοντας στην ανάδειξη της σύγκρουσης του λόγου για τη διδασκαλία αφηρημένων μαθηματικών εννοιών και του λόγου της ολιστικής εννοιολογικής μαθηματικής προσέγγισης στην καθημερινή ζωή των παιδιών (βλ. Chronaki & Lazaridou, 2019; Κουκουρίδης, Σιάτρας, Πεχτελίδης & Χρονάκη, 2021).

Στην παρούσα εργασία, η έρευνα εστιάζει στο ΠΣ της ενότητας των μαθηματικών στην πρώιμη αγωγή και εκπαίδευση στο πλαίσιο της λειτουργίας των παιδικών σταθμών. Ειδικότερα, διερευνώνται οι αλληλεπιδρώσες σχέσεις μεταξύ του ακαδημαϊκού λόγου και του λόγου των καθημερινών πρακτικών ή εμπειριών (Siatras & Koumaras, 2013). Πιο συγκεκριμένα, μελετώνται οι λειτουργίες των ΜΣ της ενότητας των μαθηματικών που διαμορφώνουν πλαίσια αλληλεπίδρασης μεταξύ: (α) της διδασκαλίας αφηρημένων ακαδημαϊκών εννοιών και της ολιστικής εννοιολογικής προσέγγισης για την καθημερινή ζωή των παιδιών, (β) της προώθησης μιας ελιτίστικης «εικόνας» των μαθηματικών που δεν αφορούν όλα τα παιδιά και της ενίσχυσης της μεταβλητότητας της γνώσης και τη σύνδεσή της με τις κοινωνικοπολιτισμικές αξίες των παιδιών, (γ) της θεμελίωσης αποπλαισιωμένων εκπαιδευτικών εφαρμογών για τα κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα και της ενδυνάμωσης της κριτικής επιστημονικής νοοτροπίας των παιδιών για την καλλιέργεια της έννοιας της πολιτειότητας -μια αλληλεπίδραση που συγκροτείται μέσα από πολιτικές παγκοσμιοποίησης (Chronaki & Yolcu, 2021).

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζονται στην παρούσα εργασία είναι: (α) Ποια ιδεολογία αναδύεται για τη μαθηματική εκπαίδευση στο ΠΣ παιδικών σταθμών; (β) Ποιοι λόγοι αναδεικνύονται στην ενότητα των μαθηματικών και πώς αυτοί αλληλεπιδρούν μεταξύ τους; (γ) Ποια εικόνα συγκροτείται για την ταυτότητα των ικανών παιδιών όσον αφορά στις απαιτήσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης μέσα από τους ΜΣ του ΠΣ παιδικών σταθμών;

ΜΕΘΟΔΟΣ

Κειμενικό υλικό

Στην εργασία αναλύεται το ΠΣ με τίτλο *«Πρόγραμμα για την καλλιέργεια, την αγωγή και τη φροντίδα παιδιών προσχολικής ηλικίας»* που αναφέρεται στους παιδικούς σταθμούς (ΥΠ.ΕΣ., 2009). Το εν λόγω ΠΣ εκδόθηκε από τη Διεύθυνση Οργάνωσης και Λειτουργίας Οργανισμών Τοπικής Αυτοδιοίκησης (ΟΤΑ) της Γενικής Διεύθυνσης Τοπικής Αυτοδιοίκησης του Υπουργείου Εσωτερικών. Συμπεριλαμβάνονται οκτώ (8) ενότητες γνωστικών αντικειμένων: (1) Σώμα, κίνηση και υγεία, (2) Κοινωνική και πολιτιστική ζωή, (3) Επικοινωνία: γλώσσες, γραπτός πολιτισμός και Μέσα, (4) Καλλιτεχνική δημιουργικότητα, (5) Θεατρική έκφραση, (6) Μουσική, (7) Βασικές εμπειρίες στα μαθηματικά, (8) Φυσικές επιστήμες και τεχνολογία. Η παρούσα έρευνα εστιάζει στην ανάλυση της ενότητας «Βασικές εμπειρίες στα μαθηματικά».

Άξονες ανάλυσης περιεχομένου

Στην έρευνα αξιοποιούνται τέσσερις (4) άξονες ανάλυσης περιεχομένου (Κουκουρίδης, Σιάτρας, Πεχτελίδης & Χρονάκη, 2021, Siatras & Koumaras, 2013). Ειδικότερα, ο άξονας 1, *Εννοιολογικό περιεχόμενο*, αφορά στις μαθηματικές έννοιες που αναφέρονται στους ΜΣ διερευνώντας τη σχέση ανάμεσα στον λόγο της αφηρημένης ακαδημαϊκής γνώσης (π.χ. αποστήθιση και απαγγελία επιστημονικών κανόνων, όρων και ορισμών) και τον λόγο που αναδεικνύει τη συνάφεια των μαθηματικών με τη ζωή των παιδιών (π.χ. επαφή των μικρών παιδιών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής) (Σιάτρας, 2013, Χρονάκη, 2012α). Ο άξονας 2, *Φύση περιεχομένου*, εξετάζει την «εικόνα» της μαθηματικής γνώσης (Chronaki, 2009). Πιο συγκεκριμένα, η ανάλυση στον εν λόγω άξονα εστιάζει στην αλληλεπίδραση του λόγου που αναδεικνύει τα μαθηματικά ως μια ελιτίστικη διαδικασία που οριοθετεί τη σκέψη και δράση των παιδιών σε ένα αυστηρά απαιτητικό και ανταγωνιστικό εκπαιδευτικό περιβάλλον και του λόγου που αναφέρεται στα μαθηματικά ως μια μεταβαλλόμενη διεργασία στο πλαίσιο της ανάπτυξης κοινωνικών πρακτικών για την ενίσχυση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και των κοινωνικών και πολιτισμικών αξιών των παιδιών (Στάμου & Χρονάκη, 2007). Ο άξονας 3, *Επιστημονικές μέθοδοι*, εστιάζει στην ανάλυση ΜΣ που αναφέρονται στην ανάπτυξη κριτικής νοοτροπίας στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ειδικότερα, μελετάται ο τρόπος με τον οποίο εκλαμβάνεται η επιστημονική νοοτροπία είτε ως μύηση των παιδιών σε μια αυστηρή αλγοριθμική ακολουθία αφηρημένων ακαδημαϊκών πρακτικών (π.χ. μαθαίνουν για ακολουθίες, μοτίβα, συμμετρίες) είτε ως κριτική επιστημονική σκέψη (π.χ. τα παιδιά αξιοποιούν τις παρατηρήσεις τους, συλλέγουν δεδομένα και καταλήγουν σε τεκμηριωμένα συμπεράσματα) (Σιάτρας, 2013). Στον άξονα 4, *Κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα*, εξετάζεται η συμβολή της ενότητας των μαθηματικών του ΠΣ παιδικών σταθμών στην προώθηση μιας ουδέτερης και αποστασιοποιημένης αντίληψης των παιδιών για τα προβλήματα της καθημερινής ζωής ή στην ενδυνάμωση των παιδιών ως συμμετοχικών πολιτών που προστατεύουν το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον και παρεμβαίνουν στις κοινωνικές και πολιτικές δομές (Πεχτελίδης, 2020).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην εργασία παρουσιάζονται οι αναλύσεις εκατόν δεκαεπτά (N_1=117) ΜΣ της ενότητας «Βασικές εμπειρίες στα μαθηματικά» που αναπτύσσονται σε τέσσερις θεματικές κατηγορίες του ΠΣ παιδικών σταθμών: (1) Θεωρητική Εισαγωγή, (2) Προσωπικός Κόσμος, (3) Κοινότητα Παιδιών, (4) Ζώντας & Ανακαλύπτοντας τον κόσμο (ΥΠ.ΕΣ., 2009). Διευκρινίζεται ότι από την ανάλυση ΜΣ προκύπτουν περιπτώσεις που αυτοί αναφέρονται σε δύο ή περισσότερους άξονες ανάλυσης. Οι εν λόγω ΜΣ ταξινομήθηκαν στον κάθε άξονα, με αποτέλεσμα το γενικό σύνολο των ειδικών αναφορών των ΜΣ (N_2=142) να εμφανίζεται μεγαλύτερο από τους ΜΣ του ΠΣ (N_1=117).

Θεματική κατηγορία / Άξονες ανάλυσης	**Εννοιολογικό περιεχόμενο**	**Φύση περιεχομένου**	**Επιστημονικές μέθοδοι**	**Κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα**
Θεωρητική Εισαγωγή	ΘΕ.1, ΘΕ.3, ΘΕ.5, ΘΕ.7, ΘΕ.10	ΘΕ2, ΘΕ.3, ΘΕ.4, ΘΕ.5, ΘΕ.6, ΘΕ.9, ΘΕ.11, ΘΕ.12, ΘΕ.13	ΘΕ.4, ΘΕ.8, ΘΕ.11, ΘΕ.13	ΘΕ.1, ΘΕ.13

Προσωπικός Κόσμος	ΠΚ.2, ΠΚ.4, ΠΚ.9, ΠΚ.10, ΠΚ.11, ΠΚ.12, ΠΚ.13, ΠΚ.14, ΠΚ.15, ΠΚ.16, ΠΚ.17, ΠΚ.18, ΠΚ.19, ΠΚ.20, ΠΚ.23, ΠΚ.27, ΠΚ.29, ΠΚ.32	ΠΚ.1, ΠΚ.3, ΠΚ.6, ΠΚ.7, ΠΚ.9, ΠΚ.18, ΠΚ.24, ΠΚ.25, ΠΚ.28, ΠΚ.31, ΠΚ.33, ΠΚ.35	ΠΚ.1, ΠΚ.5, ΠΚ.6, ΠΚ.8, ΠΚ.21, ΠΚ.22, ΠΚ.23, ΠΚ.26, ΠΚ.30, ΠΚ.34	ΠΚ.8, ΠΚ.12
Κοινότητα Παιδιών	ΚΠ.1, ΚΠ.2, ΚΠ.3, ΚΠ.4, ΚΠ.9, ΚΠ.12, ΚΠ.17, ΚΠ.20, ΚΠ.22, ΚΠ.28, ΚΠ.29, ΚΠ.30	ΚΠ.6, ΚΠ.7, ΚΠ.8, ΚΠ.9, ΚΠ.10, ΚΠ.11, ΚΠ.13, ΚΠ.14, ΚΠ.15, ΚΠ.16, ΚΠ.18, ΚΠ.23, ΚΠ.24, ΚΠ.25, ΚΠ.26	ΚΠ.1, ΚΠ.11, ΚΠ.16, ΚΠ.19, ΚΠ.21, ΚΠ.27, ΚΠ.31	ΚΠ.5
Ζώντας & Ανακαλύπτοντας τον κόσμο	ΖΑ.4, ΖΑ.5, ΖΑ.8, ΖΑ.10, ΖΑ.12, ΖΑ.14, ΖΑ.16, ΖΑ.17, ΖΑ.18, ΖΑ.20, ΖΑ.23, ΖΑ.24, ΖΑ.27, ΖΑ.30, ΖΑ.32, ΖΑ.33	ΖΑ.1, ΖΑ.2, ΖΑ.6, ΖΑ.7, ΖΑ.13, ΖΑ.14, ΖΑ.25, ΖΑ.29, ΖΑ.31, ΖΑ.35, ΖΑ.36	ΖΑ.6, ΖΑ.7, ΖΑ.11, ΖΑ.21, ΖΑ.22, ΖΑ.24, ΖΑ.26, ΖΑ.33, ΖΑ.34, ΖΑ.35, ΖΑ.37	ΖΑ.3, ΖΑ.5, ΖΑ.9, ΖΑ.15, ΖΑ.19, ΖΑ.28, ΖΑ.38
Σύνολο	**51**	**47**	**32**	**12**

Πίνακας 1: Ανάλυση ΜΣ με βάση τους τέσσερις άξονες περιεχομένου

Εννοιολογικό περιεχόμενο

Από τον Πίνακα 1 προκύπτει ότι στον άξονα 1, *Εννοιολογικό περιεχόμενο*, εντάσσονται πενήντα ένα (51) ειδικές αναφορές ΜΣ που αναδεικνύουν αφηρημένες πτυχές της ακαδημαϊκής γνώσης. Ειδικότερα, από την ανάλυση παρατηρείται εστίαση των ΜΣ στο εννοιολογικό περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης που πρέπει να κατακτηθεί από τα μικρά παιδιά (π.χ. *«δεν μπορούμε να τα καταφέρουμε αν δεν έχουμε καταλάβει βασικές έννοιες στα μαθηματικά»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 95), καθώς και στην καθιέρωση και υιοθέτηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών στη ρουτίνα των παιδιών (π.χ. *«να προσδίδουν στις καθημερινές δραστηριότητες τη μαθηματική τους διάσταση, μιλώντας [...] με μεγάλη ακρίβεια»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 95). Ακόμη, αναδεικνύεται η κατάκτηση εννοιολογικού περιεχομένου που δεν παρουσιάζει συνάφεια με την καθημερινή ζωή των παιδιών. Για παράδειγμα, καταδεικνύεται η σημασία της χρήσης απαιτητικών αριθμητικών πράξεων καθώς και της αναγνώρισης και δημιουργίας αποπλαισιωμένων γεωμετρικών σχημάτων από τα παιδιά (π.χ. «[...] *εμπειρίες στις αρχές της προοπτικής και στα επίπεδα και στερεά σώματα, δηλαδή στους κύκλους, στα τρίγωνα, στα ορθογώνια και στα τετράγωνα, καθώς και στις σφαίρες, στους κώνους, στους κυλίνδρους, στις πυραμίδες, στα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και στους κύβους*», ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 95). Στην ίδια κατεύθυνση, οι ΜΣ ενισχύουν τη χρήση συμβατικών ιστοριών και τραγουδιών ώστε να μυηθούν τα παιδιά σε μαθηματικές πράξεις όπως μέτρηση, υπολογισμός και αρίθμηση, δίνοντας έμφαση στην απομνημόνευση νέων μαθηματικών εννοιών κατά την εκπαιδευτική διαδικασία (π.χ. «*να λέει ιστορίες που περιέχουν έναν αριθμητικό ρυθμό· να απαριθμεί τραγούδια και στιχάκια*», ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 101). Επιπρόσθετα, υποστηρίζεται η χρήση αφηρημένου εποπτικού υλικού στη διδασκαλία των μαθηματικών στον παιδικό σταθμό (π.χ. «[…] *άβακας για πρόσθεση και αφαίρεση· αριθμημένα πλακάκια-μοκέτες*», ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 103). Με άλλα λόγια, προωθείται η χρήση συστηματοποιημένου εποπτικού υλικού στην εκπαιδευτική διαδικασία για την εκμάθηση της αριθμητικής, εντείνοντας με αυτό τον τρόπο τα παιδιά να χρησιμοποιούν αριθμούς και σύμβολα για να πραγματοποιούν υπολογισμούς και πράξεις μυούμενα στη μαθηματική σκέψη (π.χ. [τίτλοι βιβλίων όπως] «*Ανακαλύψεις στις χώρες των αριθμών*», «*Διαχειριζόμαστε τα χρήματα*», ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 101).

Φύση περιεχομένου

Στον άξονα 2, *Φύση περιεχομένου*, ταξινομούνται σαράντα επτά (47) ειδικές αναφορές ΜΣ που από την ανάλυση φαίνεται να παρουσιάζουν διττή προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Από τη μία μεριά, η γνώση παρουσιάζεται ως αδιαμφισβήτητη και συγκεκριμένη που προωθεί την εντατικοποίηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από παιχνίδια ρουτίνας στον παιδικό σταθμό (π.χ. «*παίζει διάφορα παιχνίδια, όταν λέει τραγουδάκια που απαιτούν μέτρημα*», ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 98). Από την άλλη μεριά, η γνώση αναδεικνύεται ως μεταβαλλόμενη διεργασία που συνδέεται με διαφοροποιημένες κοινωνικοπολιτισμικές αξίες για την ανάπτυξη ενός πλέγματος μαθηματικών ικανοτήτων στα μικρά παιδιά (π.χ. «*να αναγνωρίζει την πιθανότητα άλλα παιδιά να ακολουθούν διαφορετικούς τρόπους για να επιλύσουν ένα πρόβλημα*», ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 99). Επίσης, δίνεται έμφαση στην αλληλεπίδραση της επιστημονικής γνώσης με την καθημερινή ζωή των παιδιών για την ανάπτυξη δημιουργικών περιβαλλόντων μάθησης στα μαθηματικά, ενθαρρύνοντας τη συμμετοχή των παιδιών σε περαιτέρω αναζητήσεις και διερευνήσεις χωρίς να εστιάζει σε ακαδημαϊκές και αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (π.χ. «*Τα παιδιά σε όλα τα επίπεδα της ανάπτυξής τους διασκεδάζουν με τις μαθηματικές δομές της διάταξης που είναι ιδιαίτερα ελκυστικές*», ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 95). Επιπλέον, τα παιδιά υποστηρίζονται να αντιληφθούν τη μοναδικότητα του ατόμου και τους πολλούς διαφορετικούς τρόπους που μπορούν να επιλύουν ένα πρόβλημα αξιοποιώντας τα δικά τους λάθη στη μαθησιακή διαδικασία (π.χ. *«να βλέπει τα λάθη και τις πλάνες ως προκλήσεις, να ανακαλύπτει τις αιτίες τους»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 99). Ομοίως, το ΠΣ εστιάζει στα ενδιαφέροντα, τις ανάγκες και τη διαφορετικότητα των παιδιών, λαμβάνοντας υπόψιν διαφορετικές κουλτούρες καθώς και επιρροές που μπορεί να έχουν στις εμπειρίες τους (π.χ. *«Υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές στις μαθηματικές προσεγγίσεις που σχετίζονται με την κουλτούρα των παιδιών»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 100). Προωθείται το παιχνίδι με βάση τα ενδιαφέροντα των παιδιών ως ευχάριστος τρόπος μάθησης των μαθηματικών εννοιών, ενισχύοντας την υπευθυνότητα και τη συνεργασία με σκοπό την εξοικείωση χρήσης μαθηματικών διαδικασιών στις καθημερινές τους δραστηριότητες (π.χ. *«παιχνίδια κίνησης, τραγούδια και χοροί»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 101). Επιπρόσθετα, διερευνάται η εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης από το παρελθόν έως το σήμερα, αξιοποιώντας εμπειρίες από το οικογενειακό περιβάλλον των παιδιών (π.χ. *«Πώς υπολόγιζαν, μετρούσαν, ζύγιζαν, έκαναν ανταλλαγές οι άνθρωποι σε παλαιότερες εποχές; Ποια μέτρα και σταθμά ξέρουν οι γονείς, οι παππούδες και οι γιαγιάδες;»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 102). Τέλος, από την ανάλυση προκύπτει ότι τα παιδιά καλούνται να αξιοποιήσουν τις καθημερινές τους εμπειρίες στη μαθησιακή διαδικασία ώστε να αναπτύσσουν νέες γνώσεις και ικανότητες (π.χ. *«να εξοικειώνει τα παιδιά με τα ΜΜΕ»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 103).

Επιστημονικές μέθοδοι

Στον άξονα 3, *Επιστημονικές μέθοδοι,* εντάσσονται τριάντα δύο (32) ειδικές αναφορές ΜΣ που φαίνεται να προωθούν τη μύηση των παιδιών σε μια αυστηρή αλγοριθμική ακολουθία μαθηματικών πρακτικών. Πιο συγκεκριμένα, από την ανάλυση προκύπτει ότι οι ΜΣ ενισχύουν τη χρήση εξειδικευμένου εποπτικού υλικού για την πραγματοποίηση μετρήσεων, συγκρίσεων και πειραμάτων, δίνοντας έμφαση σε αφηρημένες μεθοδολογικές διεργασίες για την αλληλεπίδραση των παιδιών με τα μαθηματικά (π.χ. *«χρήση γεωγραφικών χαρτών, διαγραμμάτων ή πινάκων»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 95). Σε αντίθεση με την παραπάνω προσέγγιση, στο ΠΣ συμπεριλαμβάνονται επιμέρους ΜΣ που ενισχύουν τα παιδιά να διερευνούν μαθηματικές έννοιες αναπτύσσοντας διαφοροποιημένες μεθοδολογικές προσεγγίσεις με στόχο την ολόπλευρη ανάπτυξή τους (π.χ. *«Οι μέθοδοι που χρησιμοποιεί το κάθε παιδί μπορεί να διαφέρουν»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 96). Επίσης, προωθείται η κριτική επιστημονική σκέψη, καθώς οι ΜΣ εστιάζουν στον πειραματισμό και την ενεργή εμπλοκή των παιδιών σε μεγάλο εύρος μεθόδων και στρατηγικών, όπως είναι η παρατήρηση, ταξινόμηση, σύγκριση και καταγραφή για την οικοδόμηση νέας γνώσης (π.χ. *«να απολαμβάνει τη διερεύνηση και την* *ανακάλυψη»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 99). Τέλος, ενισχύεται η ουσιαστική συμμετοχή των παιδιών σε διερευνήσεις με σκοπό την ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων χρησιμοποιώντας μη τυπικές μονάδες μέτρησης (π.χ. «[μετράμε] *με όργανα τις παλάμες, τα πόδια, τα βήματά μας»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ.101).

Κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα

Στον άξονα 4, *Κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα*, αναλύονται δώδεκα (12) ειδικές αναφορές ΜΣ που καλλιεργούν την έννοια της πολιτειότητας στο πλαίσιο της ενεργού συμμετοχής των παιδιών στη λήψη αποφάσεων. Ειδικότερα, αναφέρονται σε ενότητες που άπτονται της καθημερινής ζωής των παιδιών, αναδεικνύοντας τη σημασία αποδόμησης των κοινωνικών στερεοτύπων που συσχετίζουν την έννοια του φύλου με τις επιδόσεις των παιδιών στη μαθηματική εκπαίδευση (π.χ. *«Η στρατηγική για την κατάκτηση* [...] *εννοιών μπορεί να είναι διαφορετική σε ατομικό επίπεδο, αλλά αν είναι «καλύτερη» ή «χειρότερη» δεν εξαρτάται από το φύλο του παιδιού»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 96). Επίσης, προωθείται η συμμετοχή των παιδιών στο οικογενειακό και εκπαιδευτικό τους περιβάλλον, γεγονός που ενθαρρύνει την εμπλοκή των γονέων στην εκπαιδευτική διαδικασία μέσω της συνεργατικής μάθησης (π.χ. *«Πώς μπορούμε να εντάξουμε στο πρόγραμμα τους γονείς των παιδιών ή άλλους ενήλικες;»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 102). Η προσέγγιση αυτή ενισχύεται με την αναφορά στη χρήση απλών αντικειμένων που σχετίζονται με οικείες δραστηριότητες του οικογενειακού περιβάλλοντος (π.χ. *«μαχαιροπήρουνα ή τα πιάτα»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 98). Ακόμη, αναδεικνύεται η αξία της συνεργασίας μεταξύ των παιδιών για την ομαδοσυνεργατική εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων (π.χ. *«να βοηθάει άλλα παιδιά να ψωνίζουν, να μετράνε…· να μοιράζεται τις γνώσεις του»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 103). Τέλος, τα παιδιά ενισχύονται να παίρνουν πρωτοβουλίες σχετικά με τη φροντίδα και υποστήριξη συμμαθητριών/τών τους, συμβάλλοντας ενεργητικά στη διαμόρφωση του εκπαιδευτικού έργου (π.χ. *«Ποια παιδιά μπορούν να αναλαμβάνουν μικρές δουλειές, π.χ. να ψωνίζουν για το πρωινό της ομάδας;»*, ΥΠ.ΕΣ., 2009, σελ. 102).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία διερευνήθηκαν οι λόγοι που αναδεικνύονται στους ΜΣ του ΠΣ παιδικών σταθμών για την ενότητα των Μαθηματικών (ΥΠ.ΕΣ., 2009). Από τα αποτελέσματα αναδεικνύεται η αλληλεπίδραση μεταξύ ενός αφηρημένου λόγου για μαθηματικές έννοιες και ενός λόγου καθημερινών πρακτικών ή εμπειριών χωρίς να λαμβάνονται υπόψιν οι περίπλοκες εννοιολογικές διασυνδέσεις. Ειδικότερα, από την ανάλυση φαίνεται ότι η πλειονότητα (35,9%) των ΜΣ αναφέρεται στον άξονα του εννοιολογικού περιεχομένου που εστιάζει στην προώθηση και καθιέρωση απαιτητικών μαθηματικών εννοιών για τα μικρά παιδιά, κάτι που επιβεβαιώνεται από άλλες έρευνες (βλ. Στάμου & Χρονάκη, 2007, Χρονάκη, 2013, Chronaki, 2018, Siatras & Koumaras, 2013). Ο δεύτερος σε συχνότητα εμφάνισης (33,1%) άξονας αφορά στη φύση περιεχομένου. Πιο συγκεκριμένα, από τα αποτελέσματα αναφέρεται ότι το ΠΣ στοχεύει στην οικοδόμηση ανταγωνιστικών μαθητικών ταυτοτήτων (Πεχτελίδης, 2020) που προετοιμάζουν τα μικρά παιδιά να αναπαράγουν τυποποιημένα μαθηματικές έννοιες διακινδυνεύοντας την κατασκευή ετερότητας (Χρονάκη, 2012β). Στον ίδιο, όμως, άξονα, η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχουν ΜΣ που συμβάλλουν στην ενίσχυση αλληλεπιδράσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών και κοινωνικών και πολιτισμικών αξιών των παιδιών. Στη συνέχεια, ο άξονας που αναδείχθηκε σε ποσοστό 22,5% αφορά στις επιστημονικές μεθόδους, απ' όπου προκύπτει ότι το ΠΣ αναφέρεται, από τη μια μεριά, στην καλλιέργεια της κριτικής επιστημονικής σκέψης των παιδιών, ενώ εμφανίζονται περιορισμένοι ΜΣ που καταδεικνύουν τα μαθηματικά ως αυστηρή αλγοριθμική ακολουθία αφηρημένων ακαδημαϊκών πρακτικών, όπως έχει υποστηριχθεί και αλλού (βλ. Χρονάκη, 2012α). Ο τελευταίος άξονας αφορά στα κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα, που παρουσίασε το μικρότερο ποσοστό εμφάνισης (8,5%) στην ανάλυση των ΜΣ. Ειδικότερα, οι ΜΣ φαίνεται να συμβάλουν στη διαμόρφωση ενός πλαισίου μαθηματικής εκπαίδευσης που στοχεύει στην ενδυνάμωση των παιδιών ως συμμετοχικών πολιτών που προστατεύουν το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον (Σιάτρας, 2016). Συμπερασματικά, υποστηρίζεται ότι στην ενότητα «Βασικές εμπειρίες στα μαθηματικά» του ΠΣ παιδικών σταθμών αναδεικνύεται μια σύγκρουση μεταξύ του αφηρημένου ακαδημαϊκού λόγου στα μαθηματικά και του λόγου των καθημερινών μαθηματικών πρακτικών ή εμπειριών, χαρακτηριστικό που πρέπει να διερευνηθεί και στις υπόλοιπες ενότητες του ΠΣ παιδικών σταθμών (ΥΠ.ΕΣ., 2009).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Apple, M. W. (1993). *Εκπαίδευση και εξουσία*. Θεσσαλονίκη: Παρατηρητής.

Chronaki, A. (2009) (Ed.). *Mathematics, Technologies, Education: The gender perspective*. Volos: University of Thessaly Press.

Chronaki, A. (2019). Affective bodying of mathematics, children and difference: Choreographing 'sad affects' as affirmative politics in early mathematics teacher education. *ZDM*, *51*(2), 319-330.

Chronaki, A., & Kollosche, D. (2019). Refusing mathematics: A discourse theory approach on the politics of identity work. *ZDM*, *51*(3), 457-468.

Chronaki, A., & Lazaridou, E. (2019). Mathematics education out in the rural scape: Experimenting with radical democracy for commons. In J. Subramanian (Ed.), *10th International Conference on Mathematics Education and Society, Hyderabad India, Jan. 28 - Feb. 2, 2019,* (pp. 212-216). Hyderabad, India: MES 10 & Sri Satya Sai Designing Studio Pvt Ltd.

Chronaki, A., & Mountzouri, G. (2012). Playing with numbers in cultures: Beginning to trouble essentialist views of mathematical knowledge re-production. *Journal Quaderni di Ricerca in Didatticca (Mathematics)*, *22*, pp. 90-95.

Chronaki, A., & Yolcu, A. (2021). Mathematics for "citizenship" and its "other" in a "global" world: Critical issues on mathematics education, globalisation and local communities. *Research in Mathematics Education*, *23*(3), 241-247.

Κουκουρίδης, Α., Σιάτρας, Α., Πεχτελίδης, Ι., & Χρονάκη, Α. (2021). Μια κριτική διερεύνηση της εντατικοποίησης των προγραμμάτων σπουδών μαθηματικών και φυσικών επιστημών στην προσχολική εκπαίδευση. Στο Χ. Ζάγκος & Θ. Θάνος (επιμ.), *Κοινωνία, πολιτική & εκπαίδευση: Κοινωνιολογία της εκπαίδευσης και εκπαιδευτική πολιτική* (σσ. 357-369). Αθήνα: Πεδίο.

OECD. (2020). *Early learning and child well-being: A study of five-year-olds in England, Estonia, and the United States*. Paris: OECD Publishing.

Pence, A. (2016). Baby PISA: Dangers that can arise when foundations shift. *Journal of Childhood Studies*, *41*(3), 54-58.

Πεχτελίδης, Ι. (2020). *Για μια εκπαίδευση των κοινών εντός και πέραν των «τειχών»*. Αθήνα: Gutenberg.

Sahlberg, P. (2013). *Φινλανδικά μαθήματα: Τι μπορεί να μάθει ο κόσμος από την εκπαιδευτική αλλαγή στη Φινλανδία;* Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Siatras, A., & Koumaras, P. (2013, April). Science education as public and social wealth: The notion of citizenship from a European perspective. In D. Blades (Discussant), *Rethinking the citizen in science education: subjectivity, critical thinking, eco-justice, and equity. Symposium conducted at 2013 International Conference of the American Educational Research Association, San Francisco, LA*. Ανακτήθηκε από https://eric.ed.gov/?id=ED543244

Σιάτρας, Α. (2013). *Πρόγραμμα σπουδών φυσικών επιστημών και κοινωνικός αποκλεισμός: Μια παιδαγωγική προσέγγιση* (Διδακτορική διατριβή). Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπ/σης, Αριστοτέλειο Παν/μιο Θεσ/νίκης.

Σιάτρας, Α. (2016). Επαναπροσδιορίζοντας την αριστεία στην εκπαίδευση: Από τη χαρισματικότητα και το ταλέντο στη διασφάλιση ισότιμων υψηλών εκπαιδευτικών αποτελεσμάτων. Στο Κ. Καρράς, Μ. Σακελλαρίου, Α. Πεδιαδίτης, & Μ., Δρακάκης (Επιμ.), *Παιδαγωγική της χαράς, προς ένα αντισυμβατικό σχολείο, Pedagogy of happiness, towards an unconventional school* (σσ. 353-368). Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε. /ΚΕΜΕΙΕΔΕ.

Στάμου, Α. & Χρονάκη, Α. (2007). Πως γράφονται τα σχολικά μαθηματικά: Επιστημονικοί λόγοι και έμφυλες διαστάσεις στα κείμενα του περιοδικού Ευκλείδης Α. *Κριτική Επιστήμη και Εκπαίδευση*, *5*, 25-45.

Υπουργείο Εσωτερικών. (2009). *Πρόγραμμα για την καλλιέργεια, την αγωγή και τη φροντίδα παιδιών προσχολικής ηλικίας.* Ανακτήθηκε από http://www.ppps.ecd.uoa.gr/

Χρονάκη, Α. (2012α). Το ‘δικαίωμα’ στο δικαίωμα εκπαίδευσης: ο απόηχος ενός εθνογραφικού πειράματος για τα σχολικά μαθηματικά. Στο Α. Λυδάκη (Επιμ.), *Κοινωνικές Ανισότητες στην Ελλάδα: Η περίπτωση των Ρομά* (σσ. 105-131). Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Χρονάκη, Α. (2012β). Η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων ως τόπος παράγωγης ετερότητας. *Επιθεώρηση Κοινωνικών Ερευνών*, *137*, 173-200.

Χρονάκη, Α. (2013). Αφήγηση-σε-δράση και συμβολική έκφραση στα μαθηματικά των μικρών παιδιών. Στο Τ. Τσιλιμένη, Α. Σμυρναίος, & Ν. Γραικός (Επιμ.), *Αφήγηση και φιλαναγνωσία στην εκπαίδευση* (σσ. 36-64). Βόλος: Εργαστήριο Λόγου και Πολιτισμού (Κατεύθυνση Λογοτεχνίας) & Πανελλήνιος Όμιλος Φίλων Αφήγησης.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΙΣ ΦΥΛΑΚΕΣ: ΜΙΑ ΕΝ ΕΞΕΛΙΞΕΙ ΕΡΕΥΝΑ-ΔΡΑΣΗΣ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΕ ΝΕΑΡΟΥΣ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥΣ

Φόβος Ιωάννης

Π.Τ.Ε.Α., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ifovos@uth.gr

Η παρούσα εργασία βασίστηκε σε έρευνα που είναι σε εξέλιξη και εκπονείται σε Κατάστημα Κράτησης με νεαρούς κρατούμενους-μαθητές γυμνασίου με προσφυγικό/μεταναστευτικό υπόβαθρο. Αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής δράσης εστιασμένης στη διαμόρφωση ενός προγράμματος σπουδών (ΠΣ) για τα μαθηματικά, που βασίζεται στις αρχές της εκπαίδευσης ενηλίκων και της πολιτισμικά ανταποκρινόμενης διδασκαλίας (ΠΑΔ). Στοχεύει στην αύξηση της ουσιαστικής εμπλοκής των κρατουμένων-μαθητών, την ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού μέσω δραστηριοτήτων, που έχουν νόημα γι' αυτούς, και τελικά στην ενδυνάμωσή τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΙΣ ΦΥΛΑΚΕΣ

Η στρατηγική για την Ευρώπη 2020 δίνει έμφαση στην εκπαίδευση ενηλίκων ως μέσον για τη δημιουργία προϋποθέσεων κοινωνικής ένταξης, πολιτειότητας και προσωπικής ανάπτυξης όλων των πολιτών, χωρίς διακρίσεις (EC, 2010b, p.1). Η στρατηγική αυτή, για την ευάλωτη ομάδα των κρατουμένων, υπαγορεύει την ανάγκη για μια εκπαίδευση, αντίστοιχη των παρόμοιων ηλικιακών ομάδων και για μεγάλου εύρους εκπαιδευτικές ευκαιρίες (Council of Europe, 2011, p.1), καθώς είναι σημαντική η δια βίου μάθηση των κρατουμένων που φτάνουν στις φυλακές με περιορισμένη τυπική εκπαίδευση και συνήθως με αρνητική σχολική εμπειρία (Moreira et al., 2017).

Παρότι από μια σειρά ερευνών των τελευταίων χρόνων έχει αναδειχθεί η κρισιμότητα της εκπαίδευσης, τόσο για την ατομική ανάπτυξη των κρατουμένων—συμβάλλοντας στην απομάκρυνση από τις αρνητικές αξίες της υποκουλτούρας των φυλακών (Gill, & Wilson, 2017)— όσο και στη δημιουργία προϋποθέσεων επανένταξης και αποφυγής της υποτροπής (π.χ. Jonck, et al., 2015), εκφράζεται έντονος προβληματισμός για την αποτελεσματικότητα των υφιστάμενων εκπαιδευτικών πρακτικών. Ο μαθητικός πληθυσμός του σχολείου στη φυλακή και ιδιαίτερα οι έγκλειστοι νέοι, συχνά εμφανίζουν σχολική άρνηση, χαμηλή επίδοση, ακαδημαϊκή ανεπάρκεια και αποτυχία, που οδηγεί και σε χαμηλή αυτοεκτίμηση (Mallett, 2014; Hirschfield, 2014), αλλά και οι δεξιότητες αλφαβητισμού είναι αρκετά χαμηλότερες από αυτές των συμμαθητών τους στα άλλα δημόσια σχολεία (Wexler, Pyle, Flower, Williams, Cole, 2014), και κυρίως αυτών που προέρχονται από διαφορετικά πολιτισμικά και γλωσσικά περιβάλλοντα (Pytash, & Li, 2014). Επιπλέον, εξειδικεύοντας στην ελληνική πραγματικότητα, ενώ η εκπαίδευση των νεαρών κρατουμένων χρειάζεται να ακολουθεί τις αρχές της εκπαίδευσης ενηλίκων, δεδομένων των ηλικιών τους, τα Π.Σ. που εφαρμόζονται δεν τις λαμβάνουν υπόψη, όπως, επίσης δε λαμβάνουν υπόψη και τα διαφορετικά επίπεδα γραμματισμού τους.

Η βασική πρόκληση για την εκπαίδευση στις φυλακές είναι η αναζήτηση εκείνων των εκπαιδευτικών πρακτικών που θα τους απομακρύνουν από τις αρνητικές αξίες της υποκουλτούρας των φυλακών και θα δημιουργήσουν προϋποθέσεις επανένταξης, όπως εκφράζεται και από μια νεο-Freierian θεώρηση, σύμφωνα με την οποία η διδασκαλία πρέπει ««*να προσφέρει πνευματική ενδυνάμωση σε άτομα που στερούνται την κουλτούρα και την ελευθερία τους*» (Flores, 2012, σελ. 287). Επισημαίνεται, έτσι, η ανάγκη για εναλλακτικές εκπαιδευτικές πρακτικές, που θα στοχεύουν στην ενεργή ανάπτυξη της μάθησης των κρατουμένων και στην άμβλυνση των πιθανών αρνητικών εμπειριών τους. Επίσης, θα καλλιεργούν την οικοδόμηση εμπιστοσύνης σε άτομα που έχουν αποξενωθεί και την ενδυνάμωσή τους, σ' ένα πλαίσιο όπου αμβλύνεται ο πειθαρχικός λόγος (discource) —κυρίαρχος στη φυλακή— ενώ αξιοποιούνται οι πόροι γνώσης και γενικά οι εμπειρίες ζωής τους. Ως προς τα ΠΣ, η σύγχρονη έρευνα έχει αναδείξει την ανάγκη για αναθεώρηση, ώστε να λαμβάνονται υπόψη οι ιδιαίτερες συνθήκες των κρατουμένων, εστιάζοντας τόσο στην ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού[3], χρήσιμου και μετά την αποφυλάκισή τους, όσο και στο μετασχηματισμό της ταυτότητάς τους (Farley, & Pike, 2016).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μέρος μιας ευρύτερης έρευνας-δράσης, η οποία είναι σε εξέλιξη σε κατάστημα κράτησης νέων και αφορά στην ανάπτυξη και εφαρμογή ενός ΠΣ στα μαθηματικά γυμνασίου, που λαμβάνει υπόψη τις ιδιαιτερότητες των νεαρών μαθητών-κρατουμένων και στοχεύει να απαντήσει στις ανάγκες μαθηματικού γραμματισμού τους με απώτερο στόχο την ενδυνάμωση και την προετοιμασία τους για κοινωνική ένταξη, πριν και μετά την αποφυλάκισή τους.

ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΝΟΜΕΝΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Για την υποστήριξη του παραπάνω στόχου, υπάρχουν πολλές προκλήσεις που υπαγορεύουν την ανάπτυξη ενός εκπαιδευτικού σχεδιασμού και μιας πρακτικής η οποία θα ανταποκρίνεται στις εκπαιδευτικές ανάγκες όλων

[3] Μαθηματικός Γραμματισμός: ανάπτυξη βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων καθημερινής ζωής (McCrone & Dossey, 2007)

των κρατουμένων. Όπως παρατηρούν οι Hawley et al. (2013, σ. 5) "... *απαιτούνται καινοτόμες μέθοδοι μάθησης, οι οποίες δίνουν έμφαση στον μαθητή και βασίζονται στις γνώσεις και την εμπειρία τους, για την προσέλκυση κρατουμένων στη μάθηση*".

Η πολιτισμικά ανταποκρινόμενη (culturally responsive) διδασκαλία (ΠΑΔ), που εστιάζει στην εκπαίδευση μαθητών από περιθωριοποιημένες ομάδες, οι οποίες θυματοποιούνται μέσω της χαμηλής τους επίδοσης (Gay, 2018), φαίνεται να απαντά σε αυτή την πρόκληση. Από αυτή την προσέγγιση υποστηρίζεται πως όταν οι ακαδημαϊκές γνώσεις και δεξιότητες συνδέονται με βιωμένες εμπειρίες και με πλαίσια αναφοράς των μαθητών, παρέχουν προσωπικό νόημα στους ίδιους και έτσι κατακτούνται ευκολότερα. Τα ακαδημαϊκά επιτεύγματα, δηλαδή, των πολιτισμικά διαφορετικών μαθητών βελτιώνονται, όταν διδάσκονται μέσω των δικών τους πολιτισμικών και βιωματικών φίλτρων (Gay, 2002), επιτρέποντάς τους να εμπλακούν πιο εύκολα στη μαθησιακή διαδικασία, για να διαπραγματευτούν και να κατανοήσουν τα σχολικά περιεχόμενα, δημιουργώντας προϋποθέσεις για την ένταξή τους στο εκπαιδευτικό πλαίσιο και δυναμικές ως προς τη σχολική τους επίδοση.

Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών στη φυλακή είναι μια εξαιρετικά ειδική περίπτωση, καθώς, πέρα από τη συνθήκη εγκλεισμού, οι κρατούμενοι συνήθως είναι περιθωριοποιημένα άτομα με διαφορετικά γλωσσικά και πολιτισμικά υπόβαθρα. Αυτή η διάσταση δε λαμβάνεται υπόψη στον εκπαιδευτικό σχεδιασμό, καθώς η κυρίαρχη αντίληψη για τα μαθηματικά είναι ότι αποτελούν μια πολιτισμικά ουδέτερη γνώση (Nasir et al., 2008). Οι κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις και κυρίως αυτή των εθνομαθηματικών έχει αναδείξει τη σύνδεση των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης με κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παραμέτρους (Appelbaum, & Stathopoulou, 2020), μια αντίληψη συμβατή με αυτή της πολιτισμικά ανταποκρινόμενης διδασκαλίας.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

α. Μεθοδολογία- η μέθοδος της έρευνας

Η παρούσα μελέτη προσπαθεί να απαντήσει στο κεντρικό ερώτημα: κατά πόσο ένα ΠΣ βασισμένο στις αρχές της ΠΑΔ και των εθνομαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού των νεαρών κρατουμένων, ενισχύοντας τη συμμετοχή τους. Επιπλέον στοχεύει στη βελτίωση της ποιότητας δράσης του εκπαιδευτικού μέσα σ' αυτό το πλαίσιο.

Οι Carr και Kemmis (2004: 162) υποστηρίζουν ότι η έρευνα-δράσης είναι: «*…μια μορφή αυτό-στοχαστικής διερεύνησης που πραγματοποιείται από τους συμμετέχοντες σε κοινωνικές καταστάσεις με σκοπό να βελτιώσουν τη λογική και τη δικαιοσύνη των δικών τους πρακτικών, την* *κατανόησή τους όσον αφορά τις πρακτικές αυτές και τις καταστάσεις όπου εφαρμόζονται αυτές οι πρακτικές».*

Παράλληλα με τη μεθοδολογία της έρευνας-δράσης αξιοποιήθηκε και η κριτική εθνογραφία τόσο ως προς τη στόχευση –αυτή, της ενδυνάμωσης—όσο και ως προς τις τεχνικές συλλογής δεδομένων. Το πραγματολογικό υλικό προέκυψε κυρίως από ατομικές συνεντεύξεις, συνεντεύξεις σε ομάδες (focus group) και σημειώσεις πεδίου. Η απαγόρευση βιντεοσκόπησης και ηχογράφησης υποχρέωσε, τον εκπαιδευτικό-ερευνητή, να κρατάει περιεκτικές σημειώσεις μετά από κάθε συνεδρία μαθήματος-παρατήρησης, οι οποίες συνέβαλαν σημαντικά στη διαμόρφωση των πραγματολογικών δεδομένων της έρευνας, τα οποία αξιολογήθηκαν και ερμηνεύτηκαν σε σχέση με το πλαίσιο στο οποίο έλαβαν χώρα. Επίσης, στο πλαίσιο της έρευνας-δράσης, κάθε παρέμβαση παρείχε μια ευκαιρία στον εκπαιδευτικό-ερευνητή επανεξέτασης της εμπειρίας, αναστοχασμού και σχεδιασμού του επόμενου κύκλου, όπως υπαγορεύεται από τις αρχές της (Diesing, 1979).

β. Το πλαίσιο της έρευνας: χώρος, χρόνος, συμμετέχοντες

Η έρευνα, στην οποία βασίζεται η παρούσα εργασία, πραγματοποιείται σε κατάστημα κράτησης νέων σε περιοχή της Ελλάδας και η μέχρι τώρα χρονική της διάρκεια είναι δέκα μήνες. Οι συμμετέχοντες είναι περίπου 20 κρατούμενοι-μαθητές της Α΄ και Β΄ γυμνασίου, αλλοδαποί με προσφυγικό/μεταναστευτικό υπόβαθρο και καταγωγή από χώρες της Ν.Δ. Ασίας, Β. Αφρικής και των Βαλκανίων και ελάχιστοι Έλληνες Ρομά.

Παρατηρείται μια ποικιλία στα προφίλ των μαθητών από τις προηγούμενες εμπειρίες τους στην εκπαίδευση και στο γνωστικό τους υπόβαθρο και ως προς τη μαθηματική γνώση. Η στέρηση ακόμη και των πιο βασικών εκπαιδευτικών δεξιοτήτων τους έκανε πιο επιρρεπείς σε αποκλίνουσα συμπεριφορά, ενώ η μαθησιακή τους ικανότητα δεν εξαρτάται μόνο από τους ίδιους, αλλά και από το πλαίσιο στο οποίο εξελίσσεται η μαθησιακή διαδικασία. Είναι νεαροί ενήλικες και ανταποκρίνονται οριακά στις απαιτήσεις των σχολικών μαθηματικών. Οι περισσότεροι έχουν αρνητικές σχολικές εμπειρίες —όπως προέκυψε από την ανάλυση αναγκών—και ιδιαίτερα από τα σχολικά μαθηματικά, καθιστώντας τα κίνητρά τους για εκπαίδευση «εύθραυστα» (π.χ. Ahl et al., 2017), ενώ κάποιοι υποφέρουν από διάφορες δυσκολίες μάθησης, όπως δυσλεξία, ΔΕΠΥ κ.α. Ζητήματα που συνδέονται με εξαρτήσεις και ψυχολογική αστάθεια—συχνά συνδεδεμένη με δικαστικές εκκρεμότητες—επηρεάζουν επίσης την επίδοσή τους. Επιπλέον, ο αριθμός των μαθητών δεν παραμένει σταθερός, γιατί οδηγούνται σε άλλες εργασίες εντός της φυλακής ή μεταφέρονται σε άλλες φυλακές, χωρίς προειδοποίηση, με αποτέλεσμα να είναι δύσκολος ο μακροπρόθεσμος εκπαιδευτικός προγραμματισμός. Ωστόσο, για μερικούς μαθητές η κράτηση αποτέλεσε νέα εκπαιδευτική ευκαιρία καθώς, όπως οι ίδιοι ομολογούν, απουσίαζαν οι εξωτερικές αρνητικές επιρροές.

Σημαντικοί περιορισμοί της έρευνας παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της πανδημίας, λόγω της απαγόρευσης όχι μόνο της δια ζώσης διδασκαλίας αλλά και αυτή της εξ αποστάσεως. Έτσι, η μόνη δυνατότητα ήταν η παράδοση εκπαιδευτικού υλικού –σε δυο γλώσσες— στους μαθητές σε εβδομαδιαία βάση, και η επιστροφή του μετά την αξιολόγησή του.

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Αξιοποιώντας τη λογική μιας πολιτισμικά ανταποκρινόμενης διδασκαλίας και το ερευνητικό πλαίσιο της έρευνας-δράσης, σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν μια σειρά από μαθηματικές δραστηριότητες. Στην παρούσα εργασία δε θα παρουσιάσουμε τους ερευνητικούς κύκλους και πως ο καθένας έχει πληροφορήσει τον επόμενο, αλλά ένα πανόραμα από αυτές τις δραστηριότητες για να συζητήσουμε τις συνέπειες που είχαν στην ενίσχυση της συμμετοχής των νεαρών κρατουμένων, καθώς και στην ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού.

Για την οργάνωση και παρουσίαση των παρεμβάσεων, οι οποίες ακολούθησαν μια αποτύπωση της κατάστασης, όπου διερευνήθηκαν οι πόροι γνώσης και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, αξιοποιήθηκε ο επιγραμματικός οδηγός μαθηματικής εκπαίδευσης σύμφωνα με τον Leinwand (2009). Συγκεκριμένα:

Προετοιμασία για τη διδασκαλία

- σαφή αίσθηση των συγκεκριμένων μαθησιακών προσδοκιών και αναγκών των μαθητών
- επιλογή και δοκιμή ενός ευρύτερου συνόλου προβλημάτων, εργασιών ή/και δραστηριοτήτων,
- πρόβλεψη πιθανών λανθασμένων αντιλήψεων και προετοιμασία στρατηγικών αντιμετώπισής τους,
- προσδιορισμός εκπαιδευτικών μέσων και παιδαγωγικής διαχείρισης για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων.

Εστίαση σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και τεχνικές

- στις βασικές μαθηματικές έννοιες,
- στην κατάλληλη χρήση όρων—και συμβόλων—στη γλωσσική ποικιλία (register) των μαθηματικών,
- στην ανάπτυξη δεξιοτήτων για την επίλυση προβλημάτων

Υλοποίηση της διδασκαλίας με βάση τις παρακάτω αρχές:

- οι μαθητές καλούνται να αιτιολογούν τις απαντήσεις τους
- ο εκπαιδευτικός:

- διαθέτει ευελιξία και προσαρμόζει το εκπαιδευτικό περιεχόμενο και το υλικό του, ώστε να γίνεται κατανοητός,
- αξιοποιεί πολλαπλές αναπαραστάσεις,
- λαμβάνει υπόψη την πραγματικότητα της πολυγλωσσικής και πολυπολιτισμικής τάξης,
- αξιοποιεί τους πόρους γνώσης των μαθητών, αναπτύσσοντας συνδέσεις με τα σχολικά μαθηματικά.

Να σημειωθεί ότι κρίσιμη διάσταση για αυτές τις διδασκαλίες αποτέλεσε το ζήτημα της γλώσσας, δεδομένου ότι οι νεαροί κρατούμενοι/μαθητές είναι αλλοδαποί και ως εκ τούτου διδάσκονται σε μια γλώσσα που δεν είναι η μητρική τους. Έτσι, έπρεπε να αντιμετωπιστούν ζητήματα καθημερινού λόγου και ταυτόχρονα κατανόησης της γλωσσικής ποικιλίας (register) που αφορά στα μαθηματικά. Ο εκπαιδευτικός-ερευνητής, αξιοποιώντας και την πολύχρονη προσωπική του εμπειρία στο συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον, επέλεξε γλωσσικές στρατηγικές, που θεώρησε κατάλληλες για την ενίσχυση της σύνδεσης μεταξύ των κινήτρων, της γνώσης και της μαθησιακής ετοιμότητας των μαθητών και των στόχων των δραστηριοτήτων και των έργων, οι οποίες αποδείχτηκαν αποτελεσματικές. Για παράδειγμα, μια τέτοια στρατηγική που επιλέχθηκε ήταν η παρουσίαση των μαθηματικών όρων και εννοιών σε δίγλωσση μορφή, κυρίως στην πρώτη επαφή των μαθητών μ’ αυτούς, η οποία έγινε αποδεκτή με μεγάλο ενθουσιασμό, αφενός επαναλαμβανόμενα στο πλαίσιο του μαθήματος και αφετέρου συνδέονταν με οικείες σ’ αυτούς λέξεις, μέχρι να εμπεδωθούν (Leinward, 2009). Ενδεικτικά:

- Περίμετρος είναι το «γύρω-γύρω» ενός σχήματος
- Περιφέρεια είναι το «γύρω-γύρω» ενός κύκλου
- Κύκλος είναι το στρόγγυλο σχήμα (η λέξη στρόγγυλο τους είναι οικεία)
- Εμβαδόν είναι το μέρος που καλύπτεται, το μέρος που πιάνει ένα σχήμα
- Διαίρεση είναι όταν μοιράζεις κάτι σε ίσα μέρη
- Κύλινδρος είναι ένα κουτάκι μπύρα

Άλλες υποστηρικτικές στρατηγικές, ήταν η χρήση ενός μαθητή που γνώριζε καλά την ελληνική γλώσσα, ως διερμηνέα-μεσολαβητή και η αξιοποίηση των ΤΠΕ, καθώς συνέβαλλαν στην άρση εμποδίων στην επικοινωνία και την κατανόηση. Σύμφωνα με τους τρεις τρόπους αναπαράστασης της γνώσης του Bruner (Bruner, 1966, όπ. αναφ. στο Sauerwein, 2019) ενεργητική – εικονική – συμβολική, τα εικονοποιημένα αντικείμενα διαθέτουν εικονικά και συμβολικά στοιχεία. Ο εικονικός χαρακτήρας επέτρεπε στους μαθητές, να υπερβούν δυσκολίες που συνδέονται με μη επαρκή κατανόηση της γλώσσας διδασκαλίας και μπόρεσαν να αναπτύξουν μαθηματική γνώση.

Η πρόσβαση στην τεχνολογία με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών αποτέλεσε πρωτόγνωρη πρόκληση για τους κρατούμενους, καθώς κινητοποίησε το ενδιαφέρον τους, ενώ έδωσε την ευκαιρία για μοντελοποίηση και πολλαπλές αναπαραστάσεις, υποστηρικτικές στην επίλυση προβλημάτων. Υποστηρίχθηκε η συζήτηση και η συμμετοχή ολόκληρης της τάξης μέσω πρόσβασης που τους δόθηκε στα ψηφιακά μέσα, ενθαρρύνοντας την ενεργό συμμετοχή στη μαθησιακή διαδικασία.

Τέλος, για να γίνουν ακόμη πιο προσιτές και ελκυστικές οι νέες μαθηματικές έννοιες, αξιοποιήθηκε η διδασκαλία μέσω σεναρίων (topic-based teaching) σε συνδυασμό με τη δραστηριοκεντρική ή εργασιοκεντρική μάθηση (Task-Based Learning, Sullivan, 2008), η οποία έδινε την ευκαιρία να γίνονται συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών ενοτήτων και του αντίστοιχου προγράμματος σπουδών και να αναδεικνύονται τα μαθηματικά στοιχεία «φανερά» ή μη. Η αποδοχή αυτής της προσέγγισης ήταν έκδηλη, καθώς οι δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν ήταν σχετικές με τους μαθητές και τις καταστάσεις στις οποίες είχαν βρεθεί ή βρίσκονται ή που, ενδεχομένως, θα βρεθούν μετά την αποφυλάκισή τους. Επίσης, συνέβαλε συνεπικουρικά στην εκμάθηση της γλώσσας και η συμμετοχή τους στις συζητήσεις που ακολουθούσαν έδειχνε σημάδια αλλαγής στάσης και συμπεριφοράς. Τα μαθησιακά αποτελέσματα από την εφαρμογή των παραπάνω στρατηγικών και εργαλείων αποτυπώθηκαν κατά την επίλυση επόμενων δραστηριοτήτων, που απαιτούνταν η χρήση προηγούμενων εννοιών, όπου φάνηκε η κατανόηση και η εμπέδωσή τους.

Τα ενδεικτικά παραδείγματα που παρουσιάζονται παρακάτω και υπαγόρευσαν την παραγωγή αντίστοιχου εκπαιδευτικού υλικού, βασίστηκαν στις έξι παγκόσμιες δραστηριότητες του Bishop: αρίθμηση, μέτρηση, προσδιορισμό στο χώρο (εντοπισμός), σχεδίαση, παιχνίδι, εξήγηση (Bishop, 1988). Να σημειωθεί ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, αξιοποιήθηκαν μαθησιακές ευκαιρίες για τη δημιουργία νέων θεμάτων που προέκυπταν είτε μέσω μιας συζήτησης, που έθετε κοινωνικά ζητήματα που αφορούσαν τις δικές τους κοινότητες και κοινωνικές δομές, είτε μέσω της έκφρασης συγκεκριμένων ενδιαφερόντων κάποιων μαθητών, τα οποία μπορούσαν να «μαθηματικοποιηθούν». Η μέθοδος αυτή συνέβαλε ουσιαστικά στη συμμετοχή των ίδιων των μαθητών στην παραγωγή εκπαιδευτικού υλικού με διαδικασίες από τη βάση (bottom up curriculum):

- Υπολογισμοί και εκτιμήσεις που αφορούν στην καθημερινή ζωή και την υγεία.
- Εκτίμηση του κόστους διάφορων τεχνικών εργασιών

- Η λειτουργία ενός μαγειρείου-και αυτού της φυλακής-(π.χ. υπηρεσία τροφίμων, έλεγχος αποθεμάτων, προετοιμασία γευμάτων, υγιεινή τροφίμων)
- Η δημιουργία ενός παζλ ή ενός παιχνιδιού.
- Ανακάλυψη ενδιαφερόντων μαθηματικών μοτίβων και δεδομένων.
- Μαθηματικά στο γυμναστήριο.
- Ναρκωτικά και εν γένει εξαρτησιογόνες ουσίες
- Το κτίριο και το περιβάλλον της φυλακής
- Η πολιτική των ποινών
- Τυχερά παιχνίδια
- Μουσική και μαθηματικά
- Έρευνα σχετική με τις φυλακές σε όλο τον κόσμο
- Δραστηριότητες βασισμένες σε κοινωνικά γεγονότα, όπως η δραστηριότητα «Valentine's Day, Μέρα των Ερωτευμένων», η οποία περιλάμβανε από κλάσματα, ποσοστά, όγκο, εμβαδόν μέχρι χωρητικότητα και αναλογίες και προκάλεσε και αντίστοιχη συζήτηση για τη μέρα αυτή στις πατρίδες τους και ανέδειξε τη μεγάλη σημασία της διαθεματικότητας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε η εμπειρία από μια έρευνα σε εξέλιξη, που εκπονείται σε Κατάστημα Κράτησης με αλλοδαπούς νεαρούς κρατούμενους-μαθητές γυμνασίου με στόχο την ανάπτυξη ενός εναλλακτικού προγράμματος για τον μαθηματικού γραμματισμό των νεαρών μαθητών/κρατουμένων. Η έρευνα βασίστηκε μεθοδολογικά στην έρευνα-δράσης και την κριτική εθνογραφία, ενώ έλαβε υπόψη τόσο τις αρχές εκπαίδευσης ενηλίκων όσο και της πολιτισμικά ανταποκρινόμενης παιδαγωγικής—συμβατής, επίσης, με την προσέγγιση των εθνομαθηματικών.

Σ' αυτό το πλαίσιο, ευθυγραμμιζόμενοι με την επισήμανση των Hawley et al. (2013, σ. 5) για την ανάγκη να δοθεί έμφαση στον μαθητή μέσω της αξιοποίησης της γνώσης και της εμπειρίας του ώστε να γίνει η ελκυστική η εκπαίδευση, προσπαθήσαμε να οικοδομήσουμε την ανάπτυξη μαθηματικής γνώσης, αντλώντας από τους πόρους γνώσης των νεαρών κρατουμένων. Το υπό ανάπτυξη ΠΣ, το οποίο επικυρώνει τις πολιτισμικές εμπειρίες που φέρουν μαζί τους οι μαθητές/νεαροί κρατούμενοι, και αξιοποιεί κατάλληλες διδακτικές πρακτικές βοήθησε στην αναπλαισίωση της εκπαίδευσής τους, με αποτέλεσμα την ενεργή συμμετοχή τους στη μάθηση των μαθηματικών. Σ' αυτό το πλαίσιο δόθηκε η ευκαιρία να μετριαστούν οι πειθαρχικοί λόγοι και οι σχέσεις εξουσίας, ανάγκη που επισημαίνεται από ερευνητές της εκπαίδευσης στις φυλακές, για παράδειγμα, Flores (2012). Ταυτόχρονα, δημιούργησε πρόσφορες συνθήκες, ώστε να διαπραγματευτούν με επιτυχία και να κατανοήσουν τα σχολικά περιεχόμενα, δημιουργώντας έτσι προϋποθέσεις ως προς την ένταξή τους στο εκπαιδευτικό πλαίσιο, καθώς και συνθήκες αποδοχής, αναγνώρισης και ενδυνάμωσης, μέσω της ουσιαστικής εμπλοκής τους. Δοκίμασαν νέους τρόπους χρήσης των δικών τους δεξιοτήτων που τους οδήγησαν όχι μόνο σε σχολικά επιτεύγματα, πρωτόγνωρα για μερικούς από αυτούς, αλλά και να ονειρεύονται μια ομαλή κοινωνική επανένταξη, με διαφορετικές, όμως, αντιλήψεις και κοινωνικές συμπεριφορές, απομακρύνοντάς τους έτσι από τις αρνητικές αξίες της υποκουλτούρας των φυλακών (Gill, & Wilson, 2017).

Η όλη εμπειρία για τον ερευνητή και δάσκαλο, του έδωσε την ευκαιρία, να αναπτύξει καλύτερη επικοινωνία και ανατροφοδότηση μεταξύ αυτών των δυο συμπληρωματικών ρόλων του, να αναστοχαστεί και να επανεξετάσει τις πρακτικές του, καθώς και να βελτιώσει την ποιότητα δράσης του μέσα σ' αυτό το πλαίσιο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ahl, L. M., Aguilar, M. S., & Jankvist, U. T. (2017). Distance mathematics education as a means for tackling impulse control disorder: The case of a young convict. *For the learning of mathematics*, *37*(3), 27-32.

Appelbaum, P., & Stathopoulou, C. (2020). The taking of Western/Euro Mathematics as reappropriation/repair. *Revemop*, *2*, e202003-e202003.

Bishop, A. (1988). "*Mathematics Education in its Cultural Context*". Educational Studies in Mathematics, 19(2), 180-191.

Carr, W., & Kemmis, S. (2004). *Becoming critical: Education, knowledge and action research*. Taylor & Francis e-Library.

Diesing, P. (1979). *Patterns of discovery in the social sciences*. Transaction Publishers.

Farley, H., & Pike, A. (2016). Engaging prisoners in education: Reducing risk and recidivism. *Advancing Corrections: Journal of the International Corrections and Prisons Association*, *1*, 65-73

Flores, J. (2012). Jail pedagogy: Liberatory education inside a California juvenile detention facility. *Journal of Education for Students Placed at Risk*, *17*(4), 286-300.

Gay, G. (2002). *Preparing for Culturally Responsive Teaching*. Journal of Teacher Education *2002; 53; 106*.

Gay, G. (2018). *Culturally responsive teaching: Theory, research, and practice*. teachers college press.

Gill, C., & Wilson, D. B. (2017). Improving the success of reentry programs: Identifying the impact of service–need fit on recidivism. *Criminal Justice and Behavior, 44(3)*, 336-359.

Hawley, J., Murphy, I., and Souto-Otero, M. (2013) *Prison Education and Training in Europe: Current state-of- play and challenges.*

Hirschfield, P. J. (2014). Effective and promising practices in transitional planning and school reentry. *Journal of Correctional Education (1974)*, *65*(2), 84-96.

Jonck, P., Goujon, A., Testa, M. R., & Kandala, J. (2015). Education and crime engagement in South Africa: A national and provincial perspective. *International Journal of Educational Development, 45,* 141-151.

Leinwand S. (2009). *Accessible mathematics: ten instructional shifts that raise student achievement.* Heinemann, Portsmouth, NH 03801–3912.

McCrone, S. S., & Dossey, J. A. (2007). Mathematical Literacy--It's Become Fundamental. *Principal Leadership*, *7*(5), 32-37.

Mallett, C. A. (2014). The “learning disabilities to juvenile detention” pipeline: A case study. Children & Schools, 36(3), 147-154.

Moreira, J. A., Monteiro, A., & Machado, A. (2017). Adult higher education in a portuguese prison. *European journal for Research on the Education and Learning of Adults*, *8*(1), 37-53.

Nasir, N. I. S., Hand, V., & Taylor, E. V. (2008). Culture and mathematics in school: Boundaries between “cultural” and “domain” knowledge in the mathematics classroom and beyond. *Review of research in education*, *32*(1), 187-240.

Pytash, K. E., & Li, J. (2014). The writing dispositions of youth in a juvenile detention center. *Journal of Correctional Education (1974)*, *65*(3), 24-42.

Sauerwein, M. (2019). Teaching mathematics in an international class: Designing a path towards productive disposition. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. hal-02435388

Sullivan, P. (2008). Designing task-based mathematics lessons as teacher learning. In *Proceedings of the 32nd annual conference of the international group of psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 133-138).

Wexler, J., Pyle, N., Flower, A., Williams, J. L., & Cole, H. (2014). A synthesis of academic interventions for incarcerated adolescents. *Review of Educational Research*, *84*(1), 3-46.

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ (POSTERS)

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

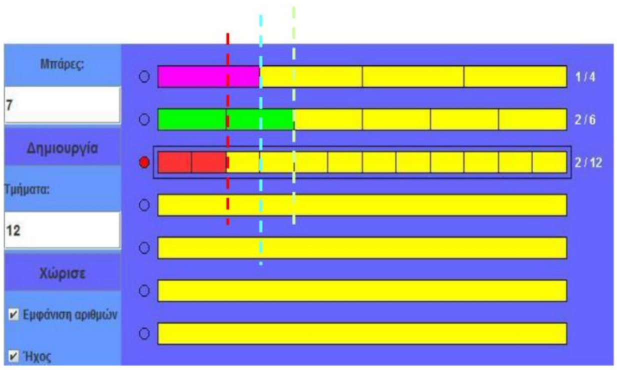
Γιώργος Πολύδωρος[1], Χριστίνα Μισαηλίδου[1], Αγγελική Βουδούρη[1], Κωνσταντίνος Αρτίκης[2]

[1]Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, ΕΚΠΑ,
[2]Τμήμα Τουρισμού, Ιόνιο Πανεπιστήμιο

georgiospolydoros@gmail.com, C.Misailidou@primedu.uoa.gr,
avoudou@primedu.uoa.gr, kartikis@ionio.gr

Η έρευνα που παρουσιάζεται εδώ είχε ως αντικείμενο την μελέτη της χρήσης του λογισμικού του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου «Τα Παιδιά κάνουν Μαθηματικά» ως βοηθητικού εργαλείου για την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Ένα από τα διδακτικά σενάρια που σχεδιάστηκαν με βάση το λογισμικό αυτό, είχε ως στόχο να καταφέρουν οι μαθήτριες και οι μαθητές της έκτης δημοτικού να κάνουν σύγκριση κλασμάτων πριν διδαχθούν τις τυπικές στρατηγικές για αυτό το σκοπό.

Ένα δείγμα 42 παιδιών χωρίστηκε σε ομάδες και χρησιμοποίησε το λογισμικό για να απαντήσει στην ερώτηση «*Εξετάστε ποιο από τα κλάσματα* $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{12}$ *είναι μεγαλύτερο*». Μια ομάδα παιδιών έδωσε, για παράδειγμα, την «οπτική» απάντηση που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Η άμεση οπτική ανατροφοδότηση που παρέχει το συγκεκριμένο λογισμικό φάνηκε να ενισχύει την ουσιαστική κατανόηση της έννοιας του «κλάσματος». Τα ενθαρρυντικά αυτά αποτελέσματα κάνουν επιτακτική την επέκταση της μελέτης σε μεγαλύτερο δείγμα.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΩΣ ΕΞΩΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΚΗΠΟΥ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ

Λαζαρίδου Ειρήνη

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

eilazari@uth.gr

Η παρούσα μελέτη εξετάζει το παιδαγωγικό εγχείρημα ο Κήπος των Παιδιών, στους πρόποδες του όρους Βόρας. Αν και η ανάλυση βασίζεται σε δεδομένα παλαιότερης μελέτης (Chronaki & Lazaridou, 2019, Chronaki & Lazaridou, in press), το κείμενο τα ξαναδιαβάζει μέσω της *εξωπαιδαγωγικής* του T. Lewis (2012). Στόχος είναι να αναδείξουμε δράσεις και εμπειρίες που ανοίγουν νέες οπτικές για την μαθηματική γνώση. Η εξωπαιδαγωγική είναι μια παιδαγωγική προσέγγιση που ισορροπεί ανάμεσα στο ιδιωτικό/προσωπικό, στο δημόσιο/κρατικό ή στο ανθρώπινο/μη-ανθρώπινο. Οι παιδαγωγοί *πειρατές* αναγνωρίζουν ότι τα σύνορα ανάμεσα σε έννοιες και διαμόρφωση της γνώσης είναι μεταβλητά και μετακινούμενα. Υπό αυτό το πρίσμα, δράσεις στον Κήπο των Παιδιών όπως η καλλιέργεια της γης, η μαγειρική, η ξυλουργική, η πεζοπορία, η μελέτη της τοπικής ιστορίας συνδέουν το προσωπικό με το ομαδικό και το τοπικό με το παγκόσμιο. Αυτές οι δράσεις που αφορούν την αποχώρηση προς μια άγνωστη περιοχή για τους επίσημους χάρτες της γνώσης ονομάζονται από τον Lewis *ακτογραμμές*. Ταυτόχρονα ενεργοποιούν μαθηματικές γνώσεις, όπως ποσοτικές σχέσεις, υπολογισμούς, καταμετρήσεις, συγκρίσεις, εναλλακτικές χαρτογραφήσεις, χωρικό προσανατολισμό, εντοπισμό θέσης και τοποθέτηση δημιουργώντας ακτογραμμές προς νέες κατανοήσεις της εμπειρίας, της δημιουργίας, της εφεύρεσης, της απορίας, της εξερεύνησης, του πειραματισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chronaki, A., & Lazaridou, E. (in press). Subverting epistemicide through ‘the commons’: Mathematics as re/making space and time for learning in H., E. Vandendriessche & R., Pinxten (eds.), *Indigenous Knowledge and Ethnomathematics*. Berlin: Springer.

Chronaki, A., & Lazaridou, E. (2019). Mathematics education out in the rural scape: Experimenting with radical democracy for commons. In J. Subramanian (Ed.), *Proceedings of the Tenth International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 212-216). Hyderabad, India.

Lewis, T., E. (2012). Exopedagogy: On pirates, shorelines, and the educational commonwealth. *Educational Philosophy and Theory, 44* (8), 845-861. doi: 10.1111/j.1469-5812.2011.00759.x

ΕΞΙΣΟΡΡΟΠΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΡΟΚΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕΣΩ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΣΥΜΒΑΝΤΩΝ: ΕΝΑ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Δημοβασίλη Ελένη, Ψυχάρης Γιώργος

ΕΚΠΑ

eleni.dim265@gmail.com, gpsych@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα έλαβε χώρα στο πλαίσιο ενός Ευρωπαϊκού προγράμματος επαγγελματικής εκπαίδευσης εκπαιδευτικών (EDUCATE) που στόχευε στη σύζευξη μαθηματικής πρόκλησης και διαφοροποιημένης διδασκαλίας. Μελετήθηκε μία ομάδα έξι εν ενεργεία εκπαιδευτικών, οι οποίοι βιντεοσκοπούσαν τις διδασκαλίες τους και παρουσίαζαν στις συναντήσεις της ομάδας κρίσιμα συμβάντα που αναδείκνυαν τη σύζευξη των δύο εννοιών. Το ερευνητικό ενδιαφέρον στράφηκε στον τρόπο που παρατηρούσαν και ανέλυαν οι εκπαιδευτικοί αυτά τα κρίσιμα συμβάντα. Χρησιμοποιώντας το πλαίσιο 'πώς οι εκπαιδευτικοί παρατηρούν' της van Es (2011), δημιουργήθηκε ένα αναλυτικό εργαλείο για την περιγραφή της ικανότητας των εκπαιδευτικών να ερμηνεύουν αυτά τα συμβάντα. Το εργαλείο αποτελείται από τέσσερα επίπεδα ερμηνειών των εκπαιδευτικών που διαβαθμίστηκαν ανάλογα με το βαθμό εστίασης στην εξισορρόπηση μαθηματικής πρόκλησης και διαφοροποίησης: Επίπεδο 1 (Βασικό) - παρέχουν γενικές εντυπώσεις για το συμβάν, Επίπεδο 2 (Περιγραφικό) - επισημαίνουν αξιοσημείωτα συμβάντα και αρχίζουν να αξιολογούν τις ενέργειές τους, Επίπεδο 3 (Εστιασμένο) - αξιολογούν τις ενέργειές τους και τις αλληλεπιδράσεις τους με τους μαθητές με μερικά ερμηνευτικά σχόλια, Επίπεδο 4 (Εκτεταμένο) - κάνουν συνδέσεις μεταξύ των συμβάντων και των αρχών μάθησης και διδασκαλίας και προτείνουν εναλλακτικές παιδαγωγικές ενέργειες. Η ανάλυση ανέδειξε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κάθε επιπέδου και ενδείξεις για την αξιοποίησή του στην περιγραφή της προοδευτικής εξέλιξης της ικανότητας των εκπαιδευτικών να ερμηνεύουν συμβάντα και να προτείνουν πρακτικές για την εξισορρόπηση της μαθηματικής πρόκλησης και της διαφοροποίησης στη διδασκαλία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In M.G. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.) *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge: New York.

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ

ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

Συντονίστριες: Μπιζά Ειρήνη[1], Ναρδή Έλενα[1]
Συν-διοργανωτές/ώτριες: Αργύρης Δημήτρης[2], Καλυκάκης Δημήτρης[3], Κανέλλος Ιωάννης[1,3], Κοταρίνου Πότα[4], Κουκουλάκης Χάρης[5], Μπαλαμπανίδου Ζαφείρα[6], Παπαδάκη Εύη[1], Στυλιανίδου Αγγελική[1]

[1]University of East Anglia (UEA, UK), [2]5º ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Αττικής, [3]ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Κρήτης, [4]2º ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Αττικής, [5]ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Κεντρικής Μακεδονίας, [6]ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Δυτικής Μακεδονίας

i.biza@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk, dimitarg2006@yahoo.gr, kalikakis1@sch.gr, i.kanellos@uea.ac.uk, pkotarinou@gmail.com, xkou2009@gmail.com, balabazaf@gmail.com, p.papadaki@uea.ac.uk, a.stylianidou@uea.ac.uk

Η αφόρμηση της προτεινόμενης ομάδας ανταλλαγών έρχεται από τον κύκλο τεσσάρων εργαστηρίων που πραγματοποιήθηκαν έξι φορές το 2021 από μία ομάδα ερευνητριών και Συντονιστών/ριών Εκπαιδευτικού Έργου (Σ.Ε.Ε.) σε πέντε Περιφερειακά Κέντρα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού (ΠΕ.Κ.Ε.Σ) της χώρας – στην Αττική, Κεντρική και Δυτική Μακεδονία και Κρήτη. Τα εργαστήρια απευθύνονταν σε εκπαιδευτικούς μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και προσφέρθηκαν διαδικτυακά. Η θεματική των εργαστηρίων ήταν η *μαθηματική επιχειρηματολογία* με επιμέρους θέματα την εισαγωγή των μαθητών/τριών στη μαθηματική απόδειξη, τι θεωρείται αποδεκτή απόδειξη στην τάξη, τι αποτελεί πειστικό και τι έγκυρο επιχείρημα (για τους/τις μαθητές/ήτριες και για τους/τις εκπαιδευτικούς), ποιος είναι ο ρόλος της γλώσσας και της οπτικοποίησης στη μαθηματική επιχειρηματολογία κ.ά.. Επιπλέον, τα εργαστήρια απέβλεπαν στην ανάδειξη της σημασίας της συμμετοχής των μαθητών/τριών στην διαπραγμάτευση των μαθηματικών νοημάτων, στο ρόλο του λάθους ως ευκαιρία για διαπραγμάτευση στην τάξη και στην αποδοχή της ποικιλότητας διδακτικών πρακτικών καθώς και ερμηνείας διδακτικών καταστάσεων. Η επιλογή να εστιαστούν τα εργαστήρια πάνω στη μαθηματική επιχειρηματολογία ήρθε από την έρευνα των Kanellos et al. (2018) που έδειξε ότι μαθητές/ήτριες της Γ΄ Γυμνασίου μπορούν να εμπλακούν με παραγωγικές αποδεικτικές διαδικασίες στην Άλγεβρα (π.χ., ταυτότητες) και στη Γεωμετρία (π.χ., ισότητα τριγώνων) ακόμα και αν η επιχειρηματολογία τους έχει ακόμα αντιληπτικά ή τελετουργικά στοιχεία.

Το υλικό των εργαστηρίων βασίστηκε στις αρχές σχεδιασμού του προγράμματος MathTASK (Biza et al., 2007). Οι αρχές αυτές στηρίζονται σε αποτελέσματα από την έρευνα σύμφωνα με τα οποία η εμπλοκή εκπαιδευτικών με συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις (κρίσιμα συμβάντα) είναι πιο αποδοτική από θεωρητική και γενική συζήτηση. Επιπλέον, αναστοχασμός και συζήτηση συγκεκριμένων διδακτικών καταστάσεων διευκολύνει τους εκπαιδευτικούς να εντοπίσουν και να ερμηνεύσουν φαινόμενα που βιώνουν στην τάξη και να αναπτύξουν τεχνικές για να τα αντιμετωπίσουν. Οι δραστηριότητες (‘*mathtasks’*) προσομοιώνουν τις δυσκολίες που ενδέχεται να εμφανιστούν στην τάξη των μαθηματικών. Τα mathtasks πάντα ξεκινούν με ένα μαθηματικό πρόβλημα και ένα κρίσιμο συμβάν που λαμβάνει χώρα σε μια τάξη όταν οι μαθητές/τριες και ο/η καθηγητής/ήτριά τους αντιμετωπίζουν αυτό το πρόβλημα (Μπιζά & Ναρδή, 2019). Μία καινοτομία αυτών των εργαστηρίων βρίσκεται στο ότι, μαζί με τις δραστηριότητες mathtask για εκπαιδευτικούς, προτάθηκαν και δραστηριότητες για μαθητές/ήτριες. Κάθε κύκλος είχε τέσσερα εργαστήρια σε απόσταση περίπου δύο εβδομάδων μεταξύ τους. Μεταξύ δύο διαδοχικών εργαστηρίων οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν προετοίμαζαν (προαιρετικά) μία πρόταση για το επόμενο εργαστήριο: εφαρμογή στην τάξη μιας δραστηριότητας εμπνευσμένης από τα εργαστήρια ή κάτι που δοκίμασαν στο μάθημα της ημέρας. Το υλικό αυτό αποστέλλονταν στις συντονίστριες και τροφοδοτούσε τη συζήτηση του επόμενου εργαστηρίου. Η δομή των εργαστηρίων περιλάμβανε τα παρακάτω μέρη: εισαγωγή ή σύνδεση με το προηγούμενο εργαστήριο, σύνοψη των προτάσεων των εκπαιδευτικών, συζήτηση τουλάχιστον ενός mathtask σε ομάδες και μετέπειτα συλλογική συζήτηση, ανατροφοδότηση από τις ερευνήτριες με στοιχεία από την έρευνα και προτάσεις για δραστηριότητες για μαθητές/ήτριες. Χρόνου επιτρέποντος, υπήρχε και η δυνατότητα παρουσίασης διδακτικών προτάσεων από ομάδες εκπαιδευτικών. Πραγματοποιήθηκαν συνολικά έξι κύκλοι τεσσάρων εργαστηρίων (πέντε στο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Κρήτης και ένας στα άλλα ΠΕ.Κ.Ε.Σ. μαζί) στις οποίες συμμετείχαν συνολικά 91 εκπαιδευτικοί.

Τα σχόλια των εκπαιδευτικών μετά την ολοκλήρωση του κύκλου των εργαστηρίων ήταν θετικά. Θεωρούμε ότι η επιτυχία οφείλεται στην παραγωγική συνεργασία των μελών της ομάδας καθώς και στη δομή των εργαστηρίων που επέτρεψε αμοιβαία ανατροφοδότηση μεταξύ ερευνητριών, θεσμικών παραγόντων και εκπαιδευτικών. Με αυτή την αφόρμηση, το θέμα της ομάδας ανταλλαγών είναι η συζήτηση *πιθανών μοντέλων επιμόρφωσης με στόχο την ανατροφοδότηση από την έρευνα στη διδακτική πράξη της διδασκαλίας των μαθηματικών και αντίστροφα.*

Στην πρώτη συνάντηση, θα περιγραφούν σύντομα οι στόχοι των εργαστηρίων, οι αρχές του σχεδιασμού τους και η δομή τους. Θα ακολουθήσει εμπλοκή των συνέδρων με δραστηριότητες mathtask που χρησιμοποιήθηκαν στα εργαστήρια σε ομάδες και μετά σε συλλογική συζήτηση. Οι (συν)διοργανωτές/ώτριες της ομάδας θα κλείσουν την συνάντηση με παρατηρήσεις από τη διεξαγωγή των εργαστηρίων και παραδείγματα από το υλικό της αμοιβαίας ανατροφοδότησης.

Η δεύτερη συνάντηση θα εστιάσει στον αναστοχασμό πάνω στη διεξαγωγή των εργαστηρίων με στόχο την αναζήτηση μοντέλων επιμόρφωσης εκπαιδευτικών των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, θα γίνουν σύντομες εισηγήσεις από τις ερευνήτριες και τους/τις Συντονιστή/ίστριες Εκπαιδευτικού Έργου (Σ.Ε.Ε.) σχετικά με την εμπειρία, τα οφέλη αλλά και τις δυσκολίες εργαστηρίων αυτού του τύπου. Έπειτα θα ακολουθήσει ανοικτή συζήτηση για μοντέλα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών τα οποία έχουν την δυνατότητα της αμοιβαίας ανατροφοδότησης μεταξύ ερευνητών/τριών και εκπαιδευτικών. Η συζήτηση θα εστιάσει σε ερωτήματα όπως: Πώς η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών μπορεί να γίνει προσβάσιμη και κατ' επέκταση χρήσιμη στους εκπαιδευτικούς; Ποιός είναι ο 'κοινός τόπος' της διδακτικής πράξης και της έρευνας; Ποιος είναι ο ρόλος των Σ.Ε.Ε. ή άλλων θεσμικών οργάνων στην ποιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης;

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε θερμά τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στα εργαστήρια. Η φάση του προγράμματος MathTASK στη οποία αναφερόμαστε στο σχεδιασμό αυτών των εργαστηρίων χρηματοδοτήθηκε από το *Pro-Vice Chancellor's Impact Fund* (No ICF202105) στο UEA.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 301–309.

Μπιζά, Ε., & Ναρδή, Ε. (2019). MathTASK και CAPTeaM: Συγκεκριμένες καταστάσεις από την τάξη ως έναυσμα για διδακτικό αναστοχασμό. Στο Κ. Χρίστου (Επ.), 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (σελ. 758-760). Λευκωσία, Κύπρος.

Kanellos, I., Nardi, E. & Biza, I. (2018). Proof Schemes combined: Mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Thinking and Learning 20*(4), 277–294.

ΝΕΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΚΡΙΣΙΜΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΔΡΑΣΗΣ ΣΕ ΜΙΚΡΟ- ΚΑΙ ΜΑΚΡΟ-ΕΠΙΠΕΔΟ

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος[1], Καλδρυμίδου Μαρία[2], Πόταρη Δέσποινα[1], Σακονίδης Χαράλαμπος[3], Τζεκάκη Μαριάννα[4]

[1]Πανεπιστήμιο Αθηνών, [2]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, [3]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, [4]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

tzaharia@math.uoa.gr, mkladrim@uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr, xsakonid@eled.duth.gr, tzekaki@nured.auth.gr

Η ανάπτυξη ενός νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) αποτελεί σημαντική πρόκληση για κάθε εκπαιδευτικό σύστημα. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για τα Μαθηματικά, για τα οποία επικρατεί η αντίληψη ότι έχουν την ισχύ να επηρεάζουν το μέλλον των ατόμων και των κοινωνιών. Η δημοσιοποίηση των νέων ΠΣ για τα μαθηματικά όλων των βαθμίδων της ελληνικής σχολικής εκπαίδευσης τον Νοέμβριο του 2021, τα οποία έρχονται να αντικαταστήσουν τα ΔΕΠΠΣ – ΑΠΠΣ, που βρίσκονται σε ισχύ από το 2003, υπήρξε η κατάληξη μιας μακροχρόνιας πορείας ανάπτυξής τους που ξεκίνησε πριν δέκα χρόνια (2011). Ξεκινά έτσι μια εποχή για ουσιαστικό αναστοχασμό, στην προοπτική της διαμόρφωσης των εκπαιδευτικών πολιτικών και των παιδαγωγικών πρακτικών της μαθηματικής εκπαίδευσης που οραματιζόμαστε για τον πολίτη στο πρώτο μισό του 21ου αιώνα.

Η σύγχρονη βιβλιογραφία αναγνωρίζει την ύπαρξη τριών ομάδων στελεχών της εκπαίδευσης που επηρεάζουν με καθοριστικό τρόπο την ανάπτυξη ενός ΠΣ για τα μαθηματικά: τους υπεύθυνους χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής, τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά και τους ακαδημαϊκούς δασκάλους των μαθηματικών, καθώς και της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι διαφορετικές στοχεύσεις καθεμιάς από αυτές τις ομάδες αναπόφευκτα οδηγούν στην ανάδειξη εντάσεων τόσο κατά την συγκρότηση όσο και κατά την εφαρμογή του ΠΣ. Όσο μικρότερη είναι η ευθυγράμμιση μεταξύ των ‘ενδιαφερόμενων μερών’ (stakeholders), τόσο μεγαλύτερες μπορεί να είναι οι εντάσεις που αναδεικνύονται και, επομένως, τόσο μεγαλύτερη είναι η ανάγκη να συζητηθούν, να γίνουν κατανοητές και να επιλυθούν, ώστε να αποσαφηνιστεί και να διευκολυνθεί στο μέγιστο δυνατό βαθμό η περίπλοκη σχέση μεταξύ του επιδιωκόμενου (intended) και του θεσπισμένου (implemented) ΠΣ (Dietiker & Riling, 2018).

Τα σύγχρονα ΠΣ προσφέρουν ευελιξία στους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι καλούνται να προβούν στις κατάλληλες ενέργειες προκειμένου να επιτύχουν στην πράξη τη λειτουργική σύνδεση των ΠΣ με τις τοπικές εκπαιδευτικές και άλλες ανάγκες. Οι εκπαιδευτικοί θεωρούνται φορείς αλλαγής και αναμένεται να εμπλέκονται ενεργά στην ανάπτυξη και την εφαρμογή των νέων ΠΣ.

Ωστόσο, η έρευνα δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί συνήθως ‘ενεργοποιούν’, ‘μεταφράζουν’ ή ‘μεσολαβούν’ (Braun, Maguire & Ball, 2010) στην υλοποίηση των νέων ΠΣ στην πράξη μέσω μιας διαδικασίας ‘επαναληπτικής διάθλασης’ (Supovitz, 2008) που φιλτράρεται από την επαγγελματική τους γνώση, τις διαθέσεις και τις πεποιθήσεις τους. Έτσι, η ανάπτυξη ενός ΠΣ για τα μαθηματικά γίνεται κατανοητή ως μια διαδικασία αλληλεπίδρασης εκπαιδευτικών, μαθητών, υλικών και του επίσημου πλαισίου, η οποία συνεπάγεται την κατασκευή προσωπικού νοήματος από τους συμμετέχοντες.

Μια σημαντική απαίτηση των σύγχρονων ΠΣ είναι η οικοδόμησή τους με βάση τα ερευνητικά δεδομένα και η συμβατότητά τους με τα διεθνώς αποδεκτά standards αναφορικά με τον τρόπο που οραματίζονται οι σύγχρονες κοινωνίες το μέλλον τους. Ωστόσο, ο μετασχηματισμός των ευρημάτων της έρευνας σε εκπαιδευτικές πολιτικές και πρακτικές συνιστά μια εξαιρετικά περίπλοκη και, κατά συνέπεια, απαιτητική διαδικασία. Παράλληλα, η κριτική ερευνητική βιβλιογραφία έχει τεκμηριώσει τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους παγκόσμιες πολιτικές για τη γνώση και το ΠΣ υιοθετούνται, αναδιαμορφώνονται σε εθνικό επίπεδο και αναπροσαρμόζονται σε τοπικά σχολικά πλαίσια. Για παράδειγμα, τις τελευταίες δεκαετίες, φορείς όπως ΟΟΣΑ και η UNESCO έχουν προωθήσει επίμονα πολιτικές για το περιεχόμενο της γνώσης, τις δεξιότητες και τις βασικές ικανότητες παγκοσμίως, με το επιχείρημα ότι αποτελούν κρίσιμα μέσα αντιμετώπισης των οικονομικών και κοινωνικών προκλήσεων, όπως η ενίσχυση της ανταγωνιστικότητας και η ενεργή συμμετοχή του πολίτη στα κοινά. Ωστόσο, αυτή η παγκοσμιοποιημένη ατζέντα για τη γνώση είναι γεμάτη εντάσεις και αντιφάσεις (Koutsiouri, Antoniou, Tsatsaroni, 2021).

Οι εργασίες της Ομάδας Ανταλλαγών έχουν ως στόχο να αναδείξουν τη λειτουργία κρίσιμων παραγόντων που δρουν στο μικρο-επίπεδο (‘ενδιαφερόμενα μέρη’/stakeholders και εκπαιδευτικοί) και στο μακρο-επίπεδο (ερευνητικά δεδομένα και πολιτικές) της ανάπτυξης ενός ΠΣ για τα μαθηματικά, με ειδικότερη αναφορά στα νέα ΠΣ για τα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η ανάπτυξή τους ξεκίνησε το 2011, περίοδο οικονομικής κρίσης για την χώρα, στο πλαίσιο μιας μεγάλης κλίμακας μεταρρύθμισης των ΠΣ όλων των σχολικών μαθημάτων που στόχευε στην προώθηση της ενεργής μάθησης για μαθητές ηλικίας 5-15 ετών και την παροχή επαρκούς αυτονομίας δράσης στον εκπαιδευτικό. Το ΠΣ αναπτύχθηκε από επιτροπή αποτελούμενη από ακαδημαϊκούς, ερευνητές, σχολικούς συμβούλους και εκπαιδευτικούς και εφαρμόστηκε πιλοτικά για ένα σχολικό έτος σε περιορισμένο αριθμό σχολείων. Μια παρόμοια ατζέντα μεταρρύθμισης του ΠΣ των μαθηματικών του Λυκείου δρομολογήθηκε το 2014. Ωστόσο, τίποτα άλλο δεν συνέβη για τα δύο ΠΣ μέχρι και το 2019, καθώς οι πολλαπλές οικονομικές, πολιτικές και άλλες κρίσεις διαδέχονταν η μια την άλλη. Το 2020, η τότε κυβέρνηση αποφάσισε να επικαιροποιήσει τα ΠΣ του 2011 & 2014 και να ενεργοποιήσει τη δική της ατζέντα αλλαγών στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών ηλικίας 5-18 ετών, αναθέτοντας το έργο σε επιτροπή με σύνθεση αντίστοιχη εκείνης του 2011. Τα επικαιροποιημένα ΠΣ των μαθηματικών δόθηκαν στη δημοσιότητα τον Νοέμβριο του 2021 και τέθηκαν άμεσα σε πιλοτική εφαρμογή.

Η *οργάνωση* των συνεδριών της Ομάδας Ανταλλαγών έχει ως εξής:

1η συνεδρία: Παρουσίαση του σχετικού προβληματισμού (10λεπτες παρουσιάσεις)

- *«Νέο ΠΣ για τα μαθηματικά: προκλήσεις και προβληματισμοί στην σκιά πολλαπλών κρίσεων»* Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη & Χ. Σακονίδης
- *«Νέα Προγράμματα για την Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία: Εξέλιξη ή πισωγύρισμα;»* Μ. Τζεκάκη & Μ. Καλδρυμίδου
- *«Νέο ΠΣ για τα μαθηματικά: ευκαιρίες για πολιτισμικά ανταποκρινόμενη διδασκαλία;»* Χ. Σταθοπούλου & Κ. Ξενοφώντος

Συζήτηση (διάρκεια 20 λεπτά): Κριτική θεώρηση των θέσεων που αναπτύχθηκαν σε αλληλεπίδραση με το ακροατήριο, οργάνωση της 2ης συνεδρίας, υπόδειξη υλικού προς μελέτη.

2η συνεδρία: Συζήτηση σε ομάδες, με βάση την προεργασία της 1ης συνεδρίας και χωρισμένο το ακροατήριο σε ομάδες (40 λεπτά), συνεδρίαση σε ολομέλεια για διατύπωση συμπερασμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Braun, A., Maguire, M., & Ball, S. J. (2010). Policy enactments in the UK secondary school: Examining policy, practice and school positioning. Journal of Education Policy, 25, 547–560

Dietiker, Leslie & Riling, Meghan. (2018). Design (In)tensions in mathematics curriculum. International Journal of Educational Research. 92. 10.1016/j.ijer.2018.09.001.

Koutsiouri, S., Antoniou, I., Tsatsaroni, A. (2021). Enactments of Curriculum Policies in Greek Secondary Education: Regulative Discourses and the Reproduction of Social Inequalities *Open Journal for Sociological Studies*, *5*(2), 57-70.

Supovitz, J. A. (2008). Implementation as iterative refraction. In J. Supovitz & E. Weinbaum (Eds.), *The implementation gap: Understanding reform in high schools* (pp. 151–172). NY: Teachers College Press.

Ο ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Μούτσιος-Ρέντζος Ανδρέας[1], Καλαβάσης Φραγκίσκος[2], Κρητικός Γεώργιος[2]

[1]Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών,
[2]Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

moutsiosrent@primedu.uoa.gr, kalabas@aegean.gr, gkritikos@aegean.gr

Το Εργαστήριο επικεντρώνεται στην αξιοποίηση του διεπιστημονικού αναστοχασμού κατά τη διεργασία της μάθησης των Μαθηματικών, καθώς και στην ανάπτυξη διδακτικών διεπιστημονικών συνδέσεων και εκπαιδευτικών σχέσεων που δημιουργούν επιστημολογική συνοχή, ώστε να διευκολύνουν τον μετασχηματισμό της σχολικής μονάδας σε μανθάνοντα οργανισμό. Σε αυτό το πλαίσιο, τα μαθηματικά ανα-νοηματοδοτούνται συμπεριληπτικά ως προς τις άλλες επιστήμες, κρατώντας ταυτόχρονα την εννοιολογική τους αυθεντικότητα και τον ανθρωπολογικό τους χαρακτήρα. Η Διδακτική των Μαθηματικών επικοινωνεί με τη Διδακτική άλλων Επιστημών, διευκρινίζοντας την πολυπλοκότητα της εκμαθηματικευμένης νοηματοδότησης στο κάθε πεδίο, διευκολύνοντας τη συνεργατική διαχείριση των μαθηματικών χαρακτηριστικών και των διεπιστημονικών όψεων του εκπαιδευτικού υλικού από τους/τις εκπαιδευτικούς σε μια σχολική μονάδα. Οι συμμετέχοντες και οι συμμετέχουσες του προτεινόμενου Εργαστηρίου θα αλληλεπιδράσουν σε μια αλληλουχία δραστηριοτήτων, στο επίκεντρο των οποίων βρίσκεται ο ατομικός και συλλογικός διεπιστημονικός αναστοχασμός για τα Μαθηματικά στο εκπαιδευτικό υλικό και τις εκφάνσεις των ορατών ή αποσιωπημένων αλληλεπιδράσεων της εκπαιδευτικής λειτουργίας τους σε επίπεδο σχολικής μονάδας.

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΒΙΩΜΑΤΑ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

Η μάθηση των Μαθηματικών συμβαίνει στην αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών πρωταγωνιστών σε μια μαθηματική δραστηριότητα, όπου δεν αρκούν οι όποιες δράσεις, αλλά απαιτείται ο ρητός αναστοχασμός σε αυτές τις δράσεις που αποβλέπει στην κατασκευή μιας μαθηματικής ιδέας. Σε αυτό το πλαίσιο, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να στηρίξουν τις μαθησιακές πορείες των μαθητών και των μαθητριών προς μια καθοδηγούμενη επανα-επινόηση των Μαθηματικών και μια σχεσιακή κατασκευή της γνώσης. Ταυτόχρονα, τα αιτήματα των σύγχρονων κοινωνιών καλούν την Μαθηματική Εκπαίδευση να προάγει τις διεπιστημονικές αναγνώσεις των φαινομένων, καθώς τα μαθηματικά φαίνεται να είναι στο επίκεντρο της εννοιολογικής συγκρότησης και επιστημονικής επικοινωνίας των σύγχρονων φυσικών, οικονομικών κοινωνικών και πληροφορικών επιστημών. Σε συμφωνία με αυτά τα αιτήματα, υποστηρίζουμε μια διεπιστημονική προσέγγιση στις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2016) η οποία αντλεί από την θεώρηση της σχολικής μονάδας ως μανθάνοντος οργανισμού (Davis & Simmt, 2003)· ενός ανοικτού, δυναμικού κοινωνικού συστήματος στο οποίο εμπλέκονται (υπό)δομές, ρόλοι και διεργασίες. Για παράδειγμα, η πολλαπλότητα των ρόλων φαίνεται όταν ένας εκπαιδευτικός μπορεί να έχει και το ρόλο του πατέρα, ή όταν μια μαθηματικός καλείται να διδάξει Φυσική. Ταυτόχρονα, η τεχνολογία διευρύνει και μετασχηματίζει τον εκπαιδευτικό χωροχρόνο, αλλά και τις σχέσεις εξουσίας μιας σχολικής μονάδας (Moutsios-Rentzos κ.ά., 2017).

Σε μια τέτοια πολυπλοκότητα, η μάθηση των μαθηματικών χρειάζεται να αποκτήσει ποιότητες που διαπερνούν τις σχέσεις και τις συλλογιστικές εντός των μαθηματικών (σχεσιακή κατανόηση· Skemp, 1976), καθιστώντας ορατές διεπιστημονικές σχέσεις ενδο-μαθηματικών μαθησιακών σχέσεων με εξω-μαθηματικές μαθησιακές σχέσεις. Συνεπώς, προτείνεται η εννοιοποίηση της μάθησης ως σχέσης σχέσεων «που μετασχηματίζουν το γνωστικό σύστημα σε μια νέα ποιοτική κατάσταση λειτουργικής ισορροπίας» (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2016).

Ωστόσο, διαφορετικοί εκπαιδευτικοί πρωταγωνιστές βιώνουν διαφορετικές όψεις συστημικής μάθησης, που καθορίζονται από την αποβλεπτική τους σχέση με ένα σύστημα που το συγκροτούν και ανήκουν. Επίσης, το εκπαιδευτικό υλικό ιδωμένο ως εργαλείο μιας κοινότητας πρακτικής, αλλά και ως επικοινωνιακό κείμενο (πολυτροπικό ή μονοτροπικό), (δύναται να) αποτελεί σημείο συσσώρευσης διαφορετικών πρακτικών, αποβλέψεων και νοηματοδοτήσεων. Για παράδειγμα, η ίδια σημειογραφία (π.χ. η σημειογραφία «=», Moutsios-Rentzos κ.ά., 2020) σε εγχειρίδια διαφορετικών μαθημάτων δεσμεύεται σε διαφορετικά νοήματα, καθώς οι ερμηνευτές και τα καταδεικνυόμενα επιστημικά αντικείμενα διαφέρουν.

Στο παρόν Εργαστήριο, προσομοιώνοντας μια ανοδική πορεία εκπαιδευτικού σχεδιασμού (από τον/την εκπαιδευτικό της τάξης, στη συνεργασία εκπαιδευτικών σε μια σχολική μονάδα· Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2015), οι συμμετέχοντες και οι συμμετέχουσες θα αλληλεπιδράσουν σε μια αλληλουχία δραστηριοτήτων, στο επίκεντρο των οποίων βρίσκεται ο συλλογικός και ατομικός διεπιστημονικός αναστοχασμός για το εκπαιδευτικό υλικό για τα μαθηματικά (έργα σχολικών εγχειριδίων, διαδικτυακές εφαρμογές κ.ά.), όπως αυτό φανερώνεται στην αλληλεπίδραση μονο-επιστημονικά αόρατων, αλλά διεπιστημονικά ορατών όψεων της σχολικής μονάδας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Davis, B., & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 137–167.

Jay, J. K., & Johnson, K. L. (2002). Capturing complexity: a typology of reflective practice for teacher education. *Teaching and Teacher Education*, *18*, 73–85.

Moutsios-Rentzos, A., & Kalavasis, F. (2016). Systemic approaches to the complexity in mathematics education research. *International Journal for Mathematics in Education (HMS-i-JME)*, *7*, 97–119.

Moutsios-Rentzos, A., Kalavasis, F., & Sofos, E. (2017). Learning paths and teaching bridges: The emergent mathematics classroom within the open system of a globalised virtual social network. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, & U. Gellert. *Mathematics and technology* (pp. 371-393). Springer.

Moutsios-Rentzos, A., Pinnika, V., Kritikos, G., & Kalavasis, F. (2020). Appearances of the equal sign in primary school mathematics and natural sciences: an interdisciplinary, systemic approach. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *7*, 285–294.

Nissilä, S. P. (2005). Individual and collective reflection: How to meet the needs of development in teaching. *European Journal of Teacher Education*, *28*(2), 209–219.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΨΗΦΙΑΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ

Σωτηρόπουλος Σπυρίδων

Ιδιώτης Μαθηματικός, MSc

spiros-sot@hotmail.com

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ/ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Αντικείμενο της παρέμβασης αποτέλεσε, ο τρόπος με τον οποίο νέα υπολογιστικά εργαλεία μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών, ποια είναι τα χαρακτηριστικά των περιβαλλόντων, όπου αυτή η αξιοποίηση λαμβάνει χώρα και πώς η προκαλούμενη σε αυτό το πλαίσιο επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή επηρεάζει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ

Η δραστηριότητα αφορούσε ένα ψηφιακό παιχνίδι, όπου υπήρχαν δύο μεταβλητές γνωστές και μια τυχαία μεταβλητή και είχε ως τίτλο e-game και αφορά ένα κοινωνικό πρόβλημα. Ο μαθητής καλείται να αναλάβει τον ρόλο του δημάρχου της πόλης και να κτίσει κτήρια, τα οποία θα εξυπηρετούν τις ανάγκες των άστεγων συμπολιτών του ή αυτές των ήδη στεγασμένων συμπολιτών του, οι οποίες όμως διαφέρουν μεταξύ τους. Ο στόχος του παιχνιδιού είναι να αυξήσει όσο μπορεί την δυνατότητα επανεκλογής του, που επηρεάζεται με τρόπο τυχαίο. Τέλος, οι μαθητές πριν τα φύλλα εργασίας συμπλήρωσαν ένα pre test με σκοπό να δει ο ερευνητής τις αντιλήψεις των μαθητών γύρω από τις πιθανότητες και μετά το τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα post test με σκοπό να παρατηρήσει ο ερευνητής, αν η παρέμβαση επέφερε αλλαγές στις αντιλήψεις των μαθητών γύρω από τις έννοιες των πιθανοτήτων.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Με την παρέμβαση φάνηκε ότι οι μαθητές είναι ικανοί σε ένα μαθησιακό περιβάλλον να κατασκευάζουν προσωπικά νοήματα για τις πιθανότητες, την επινόηση στρατηγικών και τη λήψη αποφάσεων, με αξιολόγηση ρίσκου στη λύση ενός καθόλου προφανούς προβλήματος. Πολλές από τις καλύτερες μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών αποκτήθηκαν όταν οι μαθητές εμπλέχτηκαν ενεργά στη σχεδίαση, δημιουργία και επινόηση με το λογισμικό (Papert, 1980). Μέσα από το παιχνίδι οι μαθητές μαθαίνουν να λειτουργούν συνεργατικά, να μοιράζονται και να επικοινωνούν αποτελεσματικά (De Lope, Medina-Medina, Paderewski, & Gutierrez-Vela, 2015). Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών, που στηρίχθηκε στις κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, για τη διερεύνηση της έννοιας της πιθανότητας σε ένα πολυδιάστατο πρόβλημα του πραγματικού κόσμου τους οδήγησε να συνδέσουν την θεωρητική με την πειραματική προσέγγιση της πιθανότητας. Άλλωστε τα ψηφιακά παιχνίδια μπορούν να σχεδιαστούν ως περίπλοκα συστήματα τα οποία εμπλέκουν γνωστικά τους μαθητές σε δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν ικανότητες επίλυσης προβλημάτων και λήψης αποφάσεων για να αντιμετωπιστούν προβλήματα ανοιχτά, όχι καλά καθορισμένα και δομημένα με αναπάντεχες και μη προβλέψιμες εξελίξεις μέσα από τις δυνατότητες του παιχνιδιού και των μηχανισμών του (Avila-Pesantez, Rivera, & Alban, 2017). Οι μαθητές διερευνούν τις πιθανότητες μέσα από ένα ψηφιακό περιβάλλον όπου καλούνται να λάβουν αποφάσεις με αβέβαιες συνέπειες, να καταστρώσουν στρατηγικές αξιολογώντας τα δεδομένα του παιχνιδιού, να προβλέψουν τα αποτελέσματα των επιλογών τους και να εκτιμήσουν την πιθανότητα εμφάνισης ενδεχομένων μέσα στο παιχνίδι. Μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με το λογισμικό γενικεύουν τα συμπεράσματά τους καταφέρνοντας έτσι να μονιμοποιήσουν τις νέες τους ανακαλύψεις στα γνωστικά τους σχήματα (Papert, 1980). Η μελέτη και επεξεργασία των ποιοτικών δεδομένων που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της συνολικής ενεργητικής εμπλοκής των μαθητών στο περιβάλλον του ChoiCo στέκεται ικανή προκειμένου να επιβεβαιωθεί η συνεισφορά του στη μαθησιακή διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Avila-Pesantez, D., Rivera, L. A., & Alban, M. S. (2017). Approaches for Serious Game Design: A Systematic Literature Review. *COMPUTERS IN EDUCATION JOURNAL*, 8(3).

De Lope, Medina-Medina, Paderewski, & Gutierrez-Vela, (2015). Design methodology for educational games based on interactive screenplays. Design methodology for educational games based on interactive screenplays. *CEUR Workshop Proceedings. 1394.*

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

ΑΜΕΣΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Τσιγγερλιώτη Άννα

Νηπιαγωγός Π.Ε.60 και MSc στη «Διδακτική των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

atsiggerlioti@gmail.com

Η παρούσα διδακτική πρόταση αφορά την διδασκαλία της πρώτης αρίθμησης στο νηπιαγωγείο αναφορικά με την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών/τριών άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ένα πρόγραμμα παρέμβασης στο οποίο διερευνάται η ανάπτυξη ικανοτήτων άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων σε σύνδεση με την κατανόηση του αριθμητικού νοήματος σε παιδιά προσχολικής ηλικίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν άμεσα το πλήθος των αντικειμένων σε μικρά σύνολα και να τα κατονομάζουν, χωρίς να ακολουθούν την διαδικασία της καταμέτρησης. Η αναγνώριση ποσοτήτων θεωρείται σημαντική ικανότητα για την αντίληψη του αριθμητικού νοήματος και την μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών (Sarama & Clements, 2009). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές μέσω αυτής προσεγγίζουν την έννοια της πληθικότητας, τις σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα και αποκτούν αναστοχαστική σκέψη (Van de Walle, 2007, Τζεκάκη, 2010). Η κατάκτηση των στοιχείων αυτών: πληθικότητα, τακτικότητα και σχέσεις του αριθμού θεωρείται βασική για την κατανόηση του αριθμητικού νοήματος (Τζεκάκη, 2010) όπως σκιαγραφείται στα Νέα πρόγραμματα σπουδών του Νηπιαγωγείου (ΔΕΕΠΠΣ, 2003, ΝΠΣ,2011). Η παρούσα διδακτική πρόταση επικεντρώνεται στην συστηματική ενασχόληση των μαθητών/τριών με δραστηριότητες άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων και σχεδιάστηκε με σκοπό να διερευνήσει τις ικανότητες, έννοιες και διαδικασίες που αναπτύσσουν οι μαθητές.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Τα ερευνητικά ερωτήματα που διερευνά η προταθείσα διδακτική παρέμβαση είναι:

- Ποιά γνώση των αριθμών έχουν οι μαθητές της προσχολικής ηλικίας πριν και μετά το πρόγραμμα πρώτης αρίθμησης;

- Ποιά ικανότητα άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων έχουν πριν και μετά από το πρόγραμμα πρώτης αρίθμησης;

- Πώς σχετίζεται η άμεση αναγνώριση ποσοτήτων με την αριθμητική μάθηση;

Για την υλοποίηση της πραγματοποιήθηκαν προσωπικές συνεντεύξεις με προτεινόμενα έργα σε δυο ομάδες παιδιών (πειραματική και ελέγχου) πριν και μετά την διδακτική παρέμβαση. Η διδακτική παρέμβαση περιλαμβάνει παιχνίδια που αποσκοπούν στην εξάσκηση για άμεση αναγνώριση ποσοτήτων με τη χρήση αναπαραστατικού υλκού σε ποικίλους σχηματισμούς με δομημένη και τυχαία διάταξη και στην οργάνωση των αριθμών σε ομάδες που εδραιώνουν το δεκαδικό σύστημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης δείχνουν ότι η εμπλοκή των μαθητών/τριών σε δραστηριότητες άμεσης αναγνώρισης συντελεί στην ανάπτυξη αριθμητικών εννοιών και υποστηρίζει την αριθμητική μάθηση. Επίσης καταδεικνύουν την θετική συμβολή της διδακτικής παρέμβασης στην διδασκαλία της πρώτης αρίθμησης από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, καθώς μόλις το 2011 στο ΝΠΣ προωθείται η ανάπτυξη της ικανότητας για άμεση αναγνώριση ποσοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Van de Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003), *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.*

Πρόγραμμα Σπουδών (2011) *Νηπιαγωγείο. ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. ΕΣΠΑ 2007-2013.*

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΕΡΒΑΣΗ ΔΕΚΑΔΑΣ ΣΤΗΝ Α΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΡΑΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παπαβασιλείου Γεώργιος

Δάσκαλος Π.Ε. 70 και MSc στη «Διδακτική των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

geopapavas@sch.gr, pinakas04@gmail.com

Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση διερευνάται η επίδραση του πλαισίου της διερευνητικής δραματοποίησης με τη χρήση θεατρικών – δραματικών τεχνικών στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας και στην αφαίρεση ως πρόσθεση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τον Παπαδόπουλο (2007c) η μάθηση στο δημοτικό σχολείο καθίσταται φυσική και αποτελεσματική, όταν προκύπτει μέσα από περιβάλλοντα μάθησης παρόμοια με αυτά της καθημερινότητας. Η Δραματοποίηση μέσω της διερεύνησης μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση των μαθηματικών. Έτσι η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης καθίσταται αποτελεσματικότερη (Παπαδόπουλος, 2007c) και θα πρέπει να προσεγγίζεται μέσα από μια ποικιλία δραστηριοτήτων, όπως και το θεατρικό παιχνίδι (Τζεκάκη, 2001). Ένα σημαντικό πεδίο έρευνας αποτελεί και ο νοερός υπολογισμός. Ο νοερός υπολογισμός εκτελείται με τη βοήθεια στρατηγικών και περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα από αυτές (Heirdsfield & Cooper, 2002). Μια πολύ σημαντική στρατηγική των νοερών υπολογισμών αποτελεί και η υπέρβαση της δεκάδας. Με την εκμάθησή της μπορούν να επιλυθούν πολλά από τα βασικά δεδομένα της πρόσθεσης (Van de Walle et al., 2017).

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Τα ερευνητικά ερωτήματα που διερευνά η προταθείσα διδακτική παρέμβαση είναι:

- Η διερευνητική δραματοποίηση επιδρά θετικά στην κατανόηση της υπέρβασης δεκάδας προσθετικά, αφαιρετικά ή στην αφαίρεση ως πρόσθεση;
- Οι σταθερές σχέσεις των αριθμών στην πρώτη δεκάδα συμβάλλουν στην κατανόηση της πρόσθεσης στην υπέρβαση δεκάδας;
- Μπορούν οι μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων;

- Έχει διατηρηθεί η γνώση στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά μετά από δύο μήνες;

Για την υλοποίηση της έρευνας πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις (ατομικές) με προτεινόμενα έργα σε δύο ομάδες παιδιών (πειραματική και ελέγχου) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η διερευνητική δραματοποίηση σε δύο άξονες δραστηριοτήτων. Το αναπαραστατικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση της παρέμβασης ήταν η βάση του δέκα (ten frame) η οποία μπορεί να στηρίξει μεγάλο κομμάτι της κατανόησης των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων, καθώς τροφοδοτούν τα παιδιά με δυναμικές νοερές παραστάσεις (Τζεκάκη, 2010).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας τα κύρια αποτελέσματα και τα ευρήματα από τις μελέτες των άρθρων μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διερευνητική δραματοποίηση επιδρά θετικά στην υπέρβαση δεκάδας, οι σταθερές σχέσεις συμβάλλουν στην κατανόησή της, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν συνδέσεις των δύο πράξεων, και έχει διατηρηθεί η γνώση στην υπέρβαση δεκάδας προσθετικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Heirdsfield, A., & Cooper, T. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, pp. 57–74.

Παπαδόπουλος, Σ. (2007c). Η Διερευνητική Δραματοποίηση και η Διαθεματική Προσέγγιση των Μαθηματικών. *Νέα Παιδεία, 122*, 118-126.

Τζεκάκη, Μ. (2001). Η μαθηματική τάξη στον 21ο αιώνα. Στο ‘‘*Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση*’’ (σ.77-78). Α.Π.Θ. Θεσσαλονίκη.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική Εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Van de Walle J., Louann Lovin H., Karen Karp S., Jennifer Bay-Williams M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο. Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. Αθήνα: Gutenberg.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ «ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ» ΣΤΗΝ Ε' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕ «ΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙ ΤΟΥ ΑΛΧΗΜΙΣΤΗ»

Μούτση Ελένη, Σακούλη Ασημένια, Σαμιωτάκη Ευαγγελία, Χατζησάββα Νικολέτα

Εκπαιδευτικοί

elmoutsh@gmail.com, asimeniasakouli@gmail.com, esamiota@eled.auth.gr, nikolxv.1@gmail.com

Η παρούσα διδακτική πρόταση περιλαμβάνει ένα 13ωρο σχέδιο διδασκαλίας για τη θεματική ενότητα «Γωνίες και Τρίγωνα» της Ε' Δημοτικού. Κεντρικός της στόχος είναι η εξοικείωση των μαθητών/τριών με τις γωνίες, τα τρίγωνα, τις ιδιότητες και τα είδη τους. Το διδακτικό σχέδιο πλαισιώνεται από το σενάριο «Το εργαστήρι του αλχημιστή», σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές/τριες θα υποδυθούν τον ρόλο αποκρυπτογράφων που ειδικεύονται στη μελέτη αλχημιστικών συμβόλων. Για τις ανάγκες του σεναρίου, σχεδιάστηκε ένας διαδραστικός ψηφιακός χώρος στην πλατφόρμα canvas, όπου οι μαθητές/τριες μπορούν να αλληλεπιδράσουν με τις αναρτημένες δραστηριότητες και γρίφους. Η παραπάνω ιδέα, στηρίχτηκε στα εκπαιδευτικά δωμάτια απόδρασης, τα οποία προσφέρουν ένα συνεργατικό περιβάλλον επίλυσης γρίφων και προάγουν την κριτική σκέψη (Wiemker, Elumir & Clare, 2015).

Το συγκεκριμένο μοντέλο διδασκαλίας αξιοποιεί ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες και διαρθρώνεται σε τρεις φάσεις: την «Εξερεύνηση», τη «Διερεύνηση» και τον «Αναστοχασμό» (Van de Walle, Bay-Williams, κ.α., 2017). Η «Εξερεύνηση» περιλαμβάνει εισαγωγικές δραστηριότητες που λειτουργούν ως σκαλωσιά ανάμεσα στην προϋπάρχουσα και τη νέα γνώση και κινητοποιούν τους/τις μαθητές/τριες. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η δραστηριότητα κατά την οποία οι μαθητές/τριες καλούνται να δημιουργήσουν με το σώμα τους γωνίες και να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά τους. Η «Διερεύνηση», συνιστά τον κύριο κορμό της ενότητας, καθώς στη διάρκειά της συντελείται η ενεργητική ανακάλυψη της νέας γνώσης. Χαρακτηριστική είναι η δραστηριότητα, στην οποία δίνονται τρίγωνα διαφορετικού είδους, με ένα ύψος σχεδιασμένο στο καθένα. Οι μαθητές/τριες καλούνται να διερευνήσουν τα κοινά στοιχεία αυτών των ευθειών, να ανακαλύψουν τον ορισμό του ύψους, να σχεδιάσουν τα υπόλοιπα ύψη και να εξάγουν συμπεράσματα για τα σημεία τομής των υψών σε κάθε περίπτωση. Κατά τον «Αναστοχασμό», πραγματοποιείται η συστηματοποίηση της γνώσης που κατακτήθηκε. Σε μία από τις αναστοχαστικές δραστηριότητες, για παράδειγμα, οι μαθητές/τριες δουλεύουν συνεργατικά πάνω σε έναν πίνακα ζωγραφικής, μελετώντας και εξετάζοντας τα διάφορα είδη γωνιών και τριγώνων που απεικονίζονται. Το σχέδιο διδασκαλίας ολοκληρώνεται μέσα από τη συμπληρωματική φάση της «Επίλυσης Προβλήματος», που εξασφαλίζει την εξάσκηση στην αντιμετώπιση ζητημάτων με μη προφανή λύση και τη σκέψη με μη τυποποιημένο τρόπο. Σε ένα από τα προβλήματα, δίνεται στους μαθητές/τριες μία σύνθεση από διαδοχικά τρίγωνα που σχηματίζονται από οδοντογλυφίδες, προκειμένου οι μαθητές/τριες, ακολουθώντας τα στάδια επίλυσης του Polya, να διερευνήσουν τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό των οδοντογλυφίδων και των τριγώνων και να δουλέψουν με την ευρετική «βρες το μοτίβο».

Θα πρέπει να σημειωθεί, πως ο κονστρουκτιβιστικός και μαθητοκεντρικός χαρακτήρας της παρέμβασης, σε συνδυασμό με το λεπτομερώς δομημένο σενάριο, διατήρησαν αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών και εξασφάλισαν την ενεργητική τους συμμετοχή στο μάθημα. Παρόλα αυτά, διαπιστώθηκε πως η έλλειψη ομαδοσυνεργατικής κουλτούρας και η πολύχρονη εξοικείωση των μαθητών/τριών με την ατομική εργασία, θέτουν τροχοπέδες στην ομαλή εφαρμογή του διδακτικού σχεδίου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Van de Walle, J. A., Bay-Williams, J. M., Lovin, L. H., & Karp, K. S. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο*. Αθήνα: Gutenberg.

Wiemker, M., Elumir, E., & Clare, A. (2015). *Escape room games: “Can you transform an unpleasant situation into a pleasant one?*”. Ανακτήθηκε στις 20/8/2021 από: https://www.researchgate.net/publication/348870975_Escape_Room_Games_Can_you_transform_an_unpleasant_situation_into_a_pleasant_one

ΠΩΣ ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΣΥΝΘΕΤΟΥΝ ΑΦΗΓΗΜΑΤΑ ΣΕ 3D ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ

Μαυρομμάτης Άρης, Παπανικολάου Απόστολος, Σταθοπούλου Σοφία

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Βαρβάκειο Πρότυπο Γυμνάσιο, Αρσάκεια Σχολεία

ar.mavrommatis@gmail.com, papanik200@gmail.com, sosta@e-arsakeio.gr

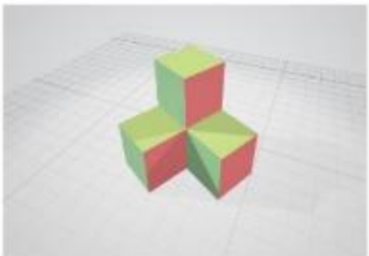
Η παρούσα εργασία αποτελεί μια διδακτική πρόταση, η οποία στηρίζεται στις εκπαιδευτικές (και όχι μόνον) εφαρμογές τρισδιάστατης διαδραστικής εξομοίωσης και έχει ως στόχο, να συνδυάσει τη δημιουργική φαντασία (Αφήγημα) με τον τρόπο αναπαράστασης των χαρακτήρων και του χώρου (Στερεά και Επίπεδη Γεωμετρία) εντός του οποίου οι χαρακτήρες αναπτύσσουν τις σχέσεις τους.

ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ

Η χρήση των τεχνολογιών μάθησης με τη βοήθεια εφαρμογών τρισδιάστατης διαδραστικής εξοικείωσης στην εκπαίδευση, φαίνεται να είναι ευρέως αποδεκτή τα τελευταία χρόνια και ως εκ τούτου, έχει γίνει κορυφαίο ζήτημα μεταξύ των ερευνητικών κοινοτήτων, οι οποίες προσπαθούν να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες όπως η χωρική συμπεριφορά των αντικειμένων, μέσω πιο ουσιαστικών προσεγγίσεων από τις παραδοσιακές. Η Hillary McLellan επεσήμανε ότι η μαγική ποιότητα των εικονικών περιβαλλόντων βοηθάει στην οπτικοποίηση και τη χωρική μνήμη, αποδεδειγμένα κλειδιά για τη μάθηση. Επίσης παρέχει στους μαθητές ένα περιβάλλον όπου μπορούν να οικοδομήσουν στη γνώση που ανακαλύπτουν, χειραγωγώντας αντικείμενα σε εικονικούς κόσμους και στοχαζόμενοι σε έννοιες τις οποίες στηρίζουν πάνω σ’ αυτούς τους κόσμους.

Περιγραφή της πρότασης

Γίνεται αξιοποίηση των δυνατοτήτων που μας παρέχουν οι σύγχρονες 3D δυναμικές ψηφιακές εφαρμογές, προκειμένου να αποδοθεί όχι μόνο η γεωμετρική αναπαράσταση του χώρου και των αντικειμένων, αλλά και η κίνηση των αντικειμένων σ’ αυτόν τον χώρο, σε χρόνο πραγματικό. Αυτό σημαίνει ότι το αφήγημα αποκτά ρεαλιστικό διαδραστικό χαρακτήρα και οι ψηφιακοί χαρακτήρες οι οποίοι αντιπροσωπεύουν φυσικούς χαρακτήρες, μπορούν δυναμικά να αλλάζουν θέσεις, μεγέθη, μορφές καθώς και ποιοτικά χαρακτηριστικά που εκφράζουν συναισθήματα, ανάλογα με την εξέλιξη της ροής και της πλοκής του αφηγήματος, όπως το βιώνουν οι φυσικοί δημιουργοί του. Παράλληλα αναπτύσσονται ερωτήματα για την ίδια τη δομή του χώρου και των αντικειμένων τα οποία βρίσκονται μέσα σ' αυτόν. Τα ερωτήματα αυτά οδηγούν στον τρόπο σχεδιασμού αυτών των πραγμάτων, ο οποίος ακολούθως αναδεικνύει την αναγκαιότητα των Μαθηματικών. Η διδακτική πρόταση σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε μέσω δυο δραστηριοτήτων: α) «Της σύνθεση τριών κύβων» (Εικόνα 1) και β) «Της δημιουργίας ενός Αρχαίου Ναού» (Εικόνα 2), σε παιδιά ηλικίας 9-15 ετών στο Ίδρυμα Θεοχαράκη, όπου και συνεχίζει να υλοποιείται. Η εφαρμογή με την οποία γίνονται οι τρισδιάστατες συνθέσεις είναι η 3D – Builder, η οποία παρέχεται δωρεάν στο περιβάλλον των Windows, παρόμοιες όμως εφαρμογές είναι επίσης δωρεάν διαθέσιμες σε περιβάλλον Mac αλλά και Android. Παρατηρήσαμε ότι η εφαρμογή της πρότασης μέσω των παραπάνω δυο δραστηριοτήτων, οδήγησε στην εξαγωγή συμπερασμάτων όπως: τη δημιουργία κλίματος ενδιαφέροντος για τα Μαθηματικά, την ανάπτυξη της ουσιαστικής συνεργασίας μαθητών με διαφορετικό γνωστικό επίπεδο στα μαθηματικά, την αντιμετώπιση των μαθηματικών χωρίς το σύνδρομο της μαθηματικοφοβίας, τον παρεμβατικό ρόλο της μη τυπικής εκπαίδευσης στη μάθηση και ιδιαίτερα εκείνης που χρησιμοποιεί την 3D ψηφιακή τεχνολογία κ.α.



Εικόνα 1. Σύνθεση τριών κύβων

Εικόνα 2. Δημιουργία Αρχαίου Ναού

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

McLellan, H. (1996). Virtual realities. In D. H. Jonassen (Ed.), Handbook of research for educational communications and technology (pp. 457-487). New York: Macmillan Library Reference, USA.

Kaufmann H, Schmalstieg D, Wagner M, Construct3D: A Virtual Reality Application for Mathematics and Geometry Education; in: "Education and Information Technologies", Kluwer Academic Publishers, 2000, 263 - 276.

ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Κούκιου Αλεξάνδρα, Σωτηροπούλου Δήμητρα, Ρουμπή Κατερίνα

1ο γυμνάσιο Νέας Ιωνίας, 7ο γυμνάσιο Αμαρουσίου, 1ο γυμνάσιο Αμαρουσίου

Kalex@math.uoa.gr, sotiropouloudimitra1@gmail.com, katerina.maroussi@gmail.com

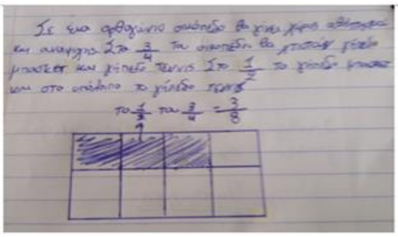
Είναι γνωστό ότι στην τάξη των μαθηματικών δίνεται έμφαση στη διαδικαστική γνώση των μαθητών και όχι στην εννοιολογική. Ειδικά στο κεφάλαιο των κλασμάτων οι μαθητές που έρχονται στο γυμνάσιο ξέρουν από το δημοτικό να κάνουν πρόσθεση, αφαίρεση, πολ/μό, διαίρεση κλασμάτων, δεν μπορούν να απαντήσουν όμως στο ερώτημα πόσο είναι το μισό του ½ ή πόσα τέταρτα χωράνε σε 2 μονάδες. Η έρευνα έχει δείξει ότι δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών εμφανίζονται σε μαθητές από όλες τις τάξεις του σχολείου. Σύμφωνα με τον Siegler και τους συνεργάτες του (2010, p. 26-34), για την καλύτερη κατανόηση των πράξεων με κλάσματα, απαιτείται η χρήση μοντέλων και οπτικοποίησης, εκτίμηση, αντιμετώπιση των παρανοήσεων και κατασκευή πλαισίων. Έχοντας υπόψη όλα τα παραπάνω προσπαθήσαμε να προτείνουμε δραστηριότητες οι οποίες ενσωματώνουν πολλαπλές αναπαραστάσεις (εικόνες, σύμβολα, αριθμογραμμή, λωρίδες, σχήματα, χειραπτικά υλικά, παιχνίδια κ.ά.) στην τάξη με απώτερο σκοπό να βοηθήσουμε τους μαθητές μας ώστε να εμβαθύνουν στην έννοια του κλάσματος και στις πράξεις κλασμάτων. Προβλήματα που αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις, παιχνίδια, χρωματικοί πίνακες κ.α. επιστρατεύτηκαν προκειμένου να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να κεντρίσουν το ενδιαφέρον τους. Ενδεικτικά παραθέτουμε μερικές:

Πραγματικές καταστάσεις:

- Οι μαθητές φέρνουν το κολατσιό τους και το μοιράζουν αναπαριστώντας κλάσματα

  Πχ. Το ένα από τέσσερα κομμάτια του κολατσιού μου το κόβω σε τρία ίσα κομμάτια. Τι μέρος ολόκληρου του κολατσιού μου είναι το κάθε ένα από αυτά τα τρία αυτά κομμάτια που μόλις έκοψα.

- Καλούνται να μοιράσουν ένα οικόπεδο σε χώρους άθλησης, αναψυχής και παιχνιδιού.



Χρωματικός πίνακας

Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα μπορείς να βρεις ποιο είναι μεγαλύτερο το 1/3 ή το 2/8 Πόσο μεγαλύτερο; Επαληθεύστε με πράξεις……..

Παιχνίδια

➢ <u>Τάγκραμ</u>: δημιουργούν σχήματα με τα κλάσματα στα οποία αυτό διαιρείται.

«Το Τάγκραμ»

Η μονάδα

«Σπιτάκι στο λόφο»

$\frac{7}{16}$ της μονάδας

«Ένα μαγιό μπικίνι»

$\frac{6}{16}$ ή $\frac{3}{8}$ της μονάδας

«Ένα δέντρο»

$\frac{19}{16}$ της μονάδας

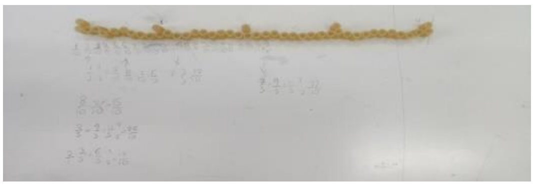
➢ <u>Puzzle</u>: ταξινομούν τα κομμάτια εφαρμόζοντας πράξεις κλασμάτων και ισοδύναμα κλάσματα

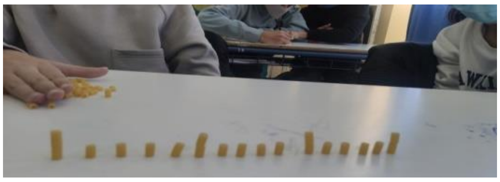
➢ <u>Lego</u>: δραστηριότητες όπως:

Τι μέρος του  *(η μονάδα) είναι η* *(κλασματική μονάδα);*

Αριθμογραμμή

Ζητείται από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν κοφτό μακαρονάκι για να δημιουργήσουν αριθμογραμμές και να τοποθετήσουν επάνω σε αυτές τα παρακάτω κλάσματα $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}$





Οι παραπάνω δραστηριότητες παρουσιάστηκαν στην τάξη και κέρδισαν το ενδιαφέρον των μαθητών μας. Διαπιστώσαμε ότι υπήρξε σημαντική βελτίωση στην ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών και κυρίως των αδυνάτων. Η στάση τους επίσης ως προς τα μαθηματικά φάνηκε να αλλάζει και να τα θεωρούν πιο ελκυστικά και ενδιαφέροντα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Siegler, R., Carpenter, T., Fennel, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J.(2010) *Developing effective fractions instruction for kindergarden through 8th grade* (NCEE # 2010-4039).

https://nrich.maths.org/5467/solution

«ΒΟΗΘΗΣΤΕ ΤΟΝ ΟΜΑΡ ΝΑ ΤΑΞΙΔΕΨΕΙ»: ΜΙΑ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΓΙΑ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥΣ ΝΕΑΡΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΦΥΓΙΚΗ/ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ

Φόβος Ιωάννης, Καλμπένη Σωτηρία

Π.Τ.Ε.Α, Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ifovos@uth.gr, kalmpeni@uth.gr

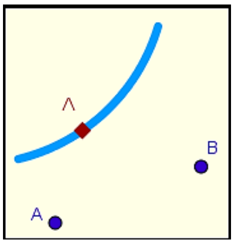
Η παρούσα διδακτική παρέμβαση εκκινεί από προβληματισμούς που αναδύονται στο πλαίσιο της εκπαίδευσης στις φυλακές. Λαμβάνοντας υπόψη τα εκπαιδευτικά χαρακτηριστικά των μαθητών Α΄ Γυμνασίου σε συγκεκριμένο Κατάστημα Κράτησης (νεαροί ενήλικες 18-22 χρόνων με προσφυγικό/μεταναστευτικό υπόβαθρο και ποικίλα κοινωνιογλωσσικά προφίλ) αξιοποιεί τη μέθοδο επίλυσης προβλήματος σε συνδυασμό με τη χρήση νέων τεχνολογιών, σε ένα πλαίσιο μιας πολυπολιτισμικής σχολικής τάξης.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Για τους σκοπούς της εν λόγω διδακτικής παρέμβασης αξιοποιήθηκε η διερευνητική-ανακαλυπτική μέθοδος και η μάθηση μέσα από την επίλυση προβλήματος, σε συνδυασμό με την κοινωνική αλληλεπίδραση μέσω της ομαδικής συνεργασίας των μαθητών, με τη διαφοροποίηση του περιεχομένου (Drapeau, 2004) και με τη χρήση μέσων νέας τεχνολογίας. Η διαθεματικότητα του σεναρίου έγκειται στο συνδυασμό τεσσάρων γνωστικών αντικειμένων (γλώσσα, γεωγραφία, φυσική και μαθηματικά).

Οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από φύλλα εργασίας, καλούνται να απαντήσουν σε δραστηριότητες στις οποίες λαμβάνονται υπόψη τα βιώματά τους και η πρότερη γνώση και εμπειρία τους (González et al, 2011). Αξιοποιήθηκε η χρήση εποπτικών μέσων, ώστε να οπτικοποιηθούν οι σχέσεις ανάμεσα σε όρους, έννοιες ή φάσεις, προκειμένου να κατακτηθούν εις βάθος οι βασικές υπό εξέταση έννοιες. Το φύλλο εργασίας χωρίζεται σε τέσσερις θεματικές ενότητες, οι οποίες περιέχουν δραστηριότητες διατυπωμένες σε δυο γλώσσες (ελληνικά και αραβικά). Η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει την ενθάρρυνση παραγωγής προφορικού και γραπτού λόγου σε όποια γλώσσα επιθυμούν οι μαθητές με αφόρμηση δυο πραγματικές ιστορίες προσφύγων κρατουμένων, μέσω της προβολής οπτικού υλικού σχετικά με το προσφυγικό/μεταναστευτικό ταξίδι. Η ανάδειξη και αξιοποίηση της μητρικής γλώσσας των μαθητών συνάδει με τη θεώρηση του Barwell (2018) σχετικά με τη χρήση της μαθηματικής γλώσσας, καθώς τα πολύγλωσσα άτομα δε χρησιμοποιούν απλά τη μαθηματική γλώσσα, αλλά όλο το φάσμα των ρεπερτορίων τους ως πηγές νοήματος. Με βάση αυτή τη θεώρηση, στις δραστηριότητες της γεωγραφίας, επιχειρείται να καταγραφεί από τους μαθητές η πορεία των προσφύγων πρωταγωνιστών των ιστοριών, από την αναχώρησή τους από τη χώρα προέλευσης μέχρι την άφιξή τους στην Ελλάδα. Ακολουθούν οι δραστηριότητες στο μάθημα της φυσικής και η τελευταία και μεγαλύτερη θεματική περιλαμβάνει δραστηριότητες από τα μαθηματικά στις οποίες τίθενται υπό συζήτηση: οι αριθμητικές πράξεις, η προτεραιότητα τους, αριθμητικά προβλήματα και η έννοια της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος, συνδεδεμένα με τα προς αφόρμηση κείμενα και ως μια φυσική συνέχεια αυτών. Ενδεικτικό παράδειγμα:

Βοηθήστε τον Ομάρ να ταξιδέψει.



Μια ομάδα προσφύγων ξεκίνησε από την πόλη Α και μια άλλη ομάδα από την πόλη Β για να συναντηθούν σε ένα μέρος της παραλίας Λ, όπου θα τους περιμένει η βάρκα για να τους πάει απέναντι στο νησί. Η ομάδα Β όμως παραπονέθηκε ότι δεν είναι σωστό να τους περιμένει εκεί η βάρκα. Έχει δίκιο; Γιατί; Μπορείτε να βρείτε και να σχεδιάσετε το σωστό σημείο που πρέπει να τους περιμένει όλους η βάρκα;

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Λαμβάνοντας υπόψη την ανακολουθία του αναλυτικού προγράμματος στην εκπαίδευση στις φυλακές με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, ανάγκες και ενδιαφέροντα των έγκλειστων μαθητών, μέσω των παραπάνω διαθεματικών πρακτικών προκλήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών, καθώς οι ίδιοι συνέδεσαν το σχολείο με την προσωπική τους ζωή και γεφύρωσαν τις υπάρχουσες τους εμπειρίες με τις νέες γνώσεις ή με την επανάληψη και εμπέδωση των ήδη γνωστών εννοιών. Η παρούσα παρέμβαση ενίσχυσε το κίνητρο για μάθηση των έγκλειστων μαθητών συμβάλλοντας στη νοηματοδότηση της σχέσης ανάμεσα στα ενδιαφέροντά τους και τη μαθησιακή διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barwell, R. (2018). From language as a resource to sources of meaning in multilingual mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior, 50*, 155-168.

Drapeau, P. (2004). *Differentiated instruction: Making it work: A practical guide to planning, managing, and implementing differentiated instruction to meet the needs of all learners*. Scholastic/Teaching Resources.

González, N., Wyman, L., & O'Connor, B. H. (2011). and Future of "Funds of Knowledge". *A Companion to the Anthropology of Education, 481*.

Η ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ LEARNING DESIGNER

Καββαδία Αθανασία, Μάλλιαρης Χρήστος

3ο Γυμνάσιο Κέρκυρας, Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

atkavvadia@yahoo.gr, chrismalliaris@gmail.com

Η παρούσα πρακτική επικεντρώνεται στα οφέλη που απορρέουν από τη συνεργασία δύο εκπαιδευτικών για το σχεδιασμό διδακτικού σεναρίου αξιοποιώντας ψηφιακά εργαλεία εκπαιδευτικού σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, συνεργάσθηκαν δύο εκπαιδευτικοί από διαφορετικά σχολεία και περιφέρειες με στόχο τη συνδιαμόρφωση άρτιου εκπαιδευτικού σεναρίου αποβλέποντας στη βελτίωση της διδασκαλίας μέσω της ενδυνάμωσης και της επαγγελματικής ανάπτυξης που προσφέρει η συμμετοχή σε μια ομάδα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του εκπαιδευτικού σχεδιασμού τόσο στη δια ζώσης όσο και στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση σχετίζεται με τη σχεδίαση, την ανάπτυξη, την εφαρμογή, την ενσωμάτωση ψηφιακών εργαλείων και την αξιολόγηση της μαθησιακής διαδικασίας. Ο εκπαιδευτικός έχει να επιλέξει σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας, διαδικτυακά ή δια ζώσης, το βαθμό αυτονομίας των εκπαιδευομένων, το ρόλο του διδάσκοντα, το είδος των δραστηριοτήτων, ομαδικές ή ατομικές, γεγονός που καθιστά σημαντική τη διαδικασία του εκπαιδευτικού σχεδιασμού ώστε να προσφέρει μια πλούσια μαθησιακή εμπειρία. Αρωγός στο έργο αυτό αποτελεί η εξέλιξη της εκπαιδευτικής τεχνολογίας με την ανάπτυξη ψηφιακών εργαλείων ικανών να τον καθοδηγήσουν στο σχεδιασμό και στην οργάνωση μιας διδακτικής παρέμβασης αλλά και να συμβάλλουν στην ανάπτυξη της έννοιας της συνεργασίας μεταξύ εκπαιδευτικών (Adams, Ross, & Vescio, 2006).

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Για το σχεδιασμό σεναρίου σχετικά με τη διδασκαλία βασικών εννοιών της Στατιστικής: του πληθυσμού, του δείγματος και των γραφικών παραστάσεων, από το βιβλίο των μαθηματικών της Β Γυμνασίου επιλέχθηκε η πλατφόρμα ελεύθερης χρήσης Learning Designer που αναπτύχθηκε από το πανεπιστήμιο University College London, η οποία είναι διαθέσιμη και στα ελληνικά. Η επιλογή έγινε λόγω της εύκολης πρόσβασης στην πλατφόρμα (απαιτείται απλή εγγραφή) και της απλής διεπαφής. Παράλληλα, υποστηρίζει το έργο των εκπαιδευτικών με το διαμοιρασμό καλών διδακτικών ιδεών και πρακτικών, μέσω της βιβλιοθήκης που διατίθεται με επιλεγμένα σχέδια, διαθέσιμα για επισκόπηση αλλά και προσαρμογή στη βάση συγκεκριμένου μαθησιακού σεναρίου. Η πλατφόρμα επιτρέπει στο χρήστη να ακολουθήσει αυτοματοποιημένες διαδικασίες, απλοποιώντας το μαθησιακό σχεδιασμό, τον οποίο στη συνέχεια μπορεί να μοιραστεί και με άλλους εκπαιδευτικούς, να δοθεί πρόσβαση σε αυτούς για επεξεργασία, ή ακόμα και να γίνει εξαγωγή του σχεδίου σε αρχείο Word.

ΦΑΣΕΙΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Η παραγωγή του εκπαιδευτικού σεναρίου στηρίχθηκε στη δυνατότητα συνεργατικής γραφής που προσφέρει η πλατφόρμα Learning Designer. Για την επικοινωνία (σύγχρονα ή ασύγχρονα) αξιοποιήσαμε τις δυνατότητες που προσφέρουν τα συνεργατικά έγγραφα Google και ορίσθηκαν συναντήσεις μία φορά την εβδομάδα διαδικτυακά. Αρχικά μέσω συνεργατικού εγγράφου έγινε ένας σχεδιασμός με το θέμα και το σκοπό της παρέμβασης. Λαμβάνοντας υπόψη τους άξονες που περιέχει η πλατφόρμα για το σχεδιασμό, στο συνεργατικό έγγραφο δηλώθηκαν τα εξής θέματα: όνομα του σεναρίου, θέμα, περιγραφή, χρόνος μάθησης, χρόνος σχεδίασης, μέγεθος τάξης, τρόπος διδασκαλίας, στόχοι σύμφωνα με την ταξινομία του Bloom (Bower, Craft, Laurillard, & Masterman, 2011) και ορίσθηκαν οι δραστηριότητες. Στη συνέχεια δημιουργήθηκε ένα νέο σχέδιο στην πλατφόρμα, από τον έναν εκπαιδευτικό και ακολούθησε κοινοποίηση του σχεδίου στον άλλον. Κάθε εκπαιδευτικός αναλάμβανε να προσθέσει μία δραστηριότητα, επιλέγοντας από τους έτοιμους τύπους που προσφέρει η πλατφόρμα και να συμπληρώσει τις πληροφορίες που απαιτούνται. Σε κάθε επόμενη συνάντηση γινόταν συζήτηση σύμφωνα με την παράθεση των δραστηριοτήτων με χρωματικές διαφοροποιήσεις και την ανάλυση της μαθησιακής εμπειρίας που προσφέρει η πλατφόρμα και καταγράφονταν προτάσεις βελτίωσης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αποτέλεσμα της συνεργασίας ήταν η συνδιαμόρφωση σεναρίου το οποίο εφαρμόσθηκε στην τάξη τη σχολική χρονιά 2020-2021, και η οποία συνεργασία αποδείχθηκε θετική αναλογιζόμενοι τα αποτελέσματα από τη διδασκαλία της ενότητας. Η επιλογή της πλατφόρμας για το σχεδιασμό λειτούργησε συνεπικουρικά στο σχεδιαστικό έργο των εκπαιδευτικών παρά το γεγονός ότι εμφανίζει μειονεκτήματα όπως τη μη υποστήριξη χώρου επικοινωνίας, σύγχρονα ή ασύγχρονα καθώς και τη μη διατήρηση ιστορικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adams, A., Ross, D., & Vescio, V., (2006). A review of research on professional learning communities: What do we know? Paper presented at the NSRF Research Forum.

Bower, M., Craft, B., Laurillard, D., & Masterman, L. (2011). Using the learning designer to develop a conceptual framework for linking learning design tools and systems. (pp. 61-71). LAMS Foundation.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΝΤΑΣ ΟΚΤΑΓΩΝΟ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ

Βασιλειάδης Αλέξανδρος

1ο Δημοτικό Σχολείο Πρέβεζας

alvasileiadis@gmail.com

Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση επιχειρείται η χρήση των Αναλογιών σε σμικρύνσεις και μεγεθύνσεις γεωμετρικών σχημάτων συγκεκριμένων διαστάσεων. Η κατασκευή και ο σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων εκτός από βασικός στόχος των ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ, υποδεικνύεται ότι είναι και πρόσφορο έδαφος για την εφαρμογή της πρόσφατα αποκτηθείσας γνώσης (Λόγοι – Αναλογίες) σε ένα διαφορετικό πλαίσιο, όπως αυτό της Γεωμετρίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Υιοθετείται η άποψη ότι η μαθηματική γνώση δεν εξαντλείται νοούμενη ως μία τέχνη, με επεξεργασία τεχνικών (Γαγάτσης κ.ά, 2006), αλλά οφείλει να αποκτά νόημα για τους/τις μαθητές/-ήτριες σε σημαντικά για αυτούς/-ές θέματα (Στράντζαλος, 2017: 21) με περιεχόμενο (Λιναρδάκης, 1993: 242), στοχεύοντας έτσι στη “μάθηση Μαθηματικών που είναι χρήσιμα για όλους και παραμένουν Μαθηματικά” (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011: 4). Σε αυτό το πλαίσιο, η διδακτική πράξη των Μαθηματικών οφείλει να διαμορφώνει αναγκαιότητες [1], για τις οποίες οι μαθηματικές δομές και έννοιες είναι τα κατάλληλα εργαλεία, προκειμένου οι μαθητές/-ήτριες, διαμορφώνοντας και προσαρμόζοντας τα (και την αποτελεσματικότητά τους), στη συνέχεια να διευρύνουν την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών γνώσεων που αποκτήθηκαν σε ευρύτερα πεδία, κινούμενοι και στην κατεύθυνση της άποψης του G. Brousseau για “ρήξη του διδακτικού συμβολαίου” (Brousseau, 1984, στο Γαγάτσης κ.ά., 2006: 41) για να προκύψει γνώση.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ [2]

Πλαίσιο και υλοποίηση διδακτικής παρέμβασης

Αφού οι μαθητές/-ήτριες επεξεργαστούν την ενότητα “Λόγοι-Αναλογίες” και αφού σχεδιάσουν σε χαρτί μιλιμετρέ τυχαία οκτάγωνα με χάρακα και διαβήτη, αλλά και χρησιμοποιώντας το εργαλείο της μεσοκαθέτου, τίθεται το ερώτημα *“Πώς θα κατασκευάσουμε οκτάγωνο με διπλάσια πλευρά;”*.

Σε αυτή την περίπτωση η χρήση των Αναλογιών αποτελεί “κλειδί” για τη συνέχεια, καθώς αναδεικνύονται ως το βασικό “εργαλείο” για τις κατασκευές που οι μαθητές/-ήτριες θα φέρουν σε πέρας. Με τη βοήθεια του/της εκπαιδευτικού, ο/η οποίος/-α υποστηρίζει τη διδακτική διαδικασία, οι μαθητές/-ήτριες καλούνται να μελετήσουν τους λόγους «πλευρά προς ακτίνα», με σκοπό να βρεθεί και να κατασκευαστεί η απαιτούμενη ακτίνα του νέου κύκλου, που πρέπει να κατασκευαστεί για να ακολουθήσει η κατασκευή του τετραγώνου και του οκταγώνου με τη διπλάσια διάσταση, μιας και *"τελικά η απλή μέθοδος των τριών χρησιμοποιείται και στη Γεωμετρία"*. Είναι άξια αναφοράς η μεταβολή της στάσης των μαθητών/-τριών από την αρχική (εύλογη) απορία τους: *"μα τώρα πώς θα γίνει αυτό;"* στο *"μα τόσο απλό!"*.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Μέσω των Προγραμμάτων Σπουδών και της Διδακτικής Παρέμβασης του/της εκπαιδευτικού
2. Τα παρατιθέμενα υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο διπλωματικής εργασίας του Μ.Π.Σ. του Τμήματος Φ.Κ.Σ. του Πανεπιστημίου Κρήτης κατά το σχολικό έτος 2016-2017, ως μέρος της Έρευνας-Δράσης με τίτλο: *"Συμβολή στη Νοηματοδότηση και Υιοθέτηση Μαθηματικών Εννοιών από τους Μαθητές και τις Μαθήτριες της Στ΄ Τάξης του Δημοτικού Σχολείου: Έρευνα-Δράση με Παρεμβάσεις στον Μετασχηματισμό Διδακτικού Υλικού και Διδασκαλίας"*, με επιβλέπουσα καθηγήτρια την κ. Ελένη Κατσαρού, μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής τις καθηγήτριες κκ. Δ. Δεσλή και Ά. Χρονάκη και κριτικό φίλο το συνάδελφο Α. Στράντζαλο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γαγάτσης, Α., Λοΐζου, Ά., Στυλιανού, Μ., Τόφαρου, Στ. (2006). Διδακτικό Συμβόλαιο και Μάθηση των Μαθηματικών. Στο Φτιάκα, Ε., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι. & Μοδέστου, Μ. (Επιμ.), *Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο, Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, 2-3 Ιουνίου 2006* (σσ. 39-54). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Λιναρδάκης, Π. (1993). Η Περιπλάνηση των Μαθηματικών Εννοιών από το Σχολείο στο Φροντιστήριο. Στο Καλαβάσης, Φ. & Μεϊμάρης, Μ. (Επιμ.), *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙ, 3η Διεθνής Επιστημονική Διημερίδα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 26-27/03/1993* (σσ. 241-248). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 1994.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην υποχρεωτική Εκπαίδευση*, ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ(Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450

Στράντζαλος, Α. (2017). Προβλήματα τύπου "Επιστημολογικού Εμποδίου" κατά την Έρευνα-Δράση σε θεματικές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, με ενδεικτικές επισημάνσεις από αντίστοιχους προβληματισμούς της Κριτικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Στο Αυγητίδου, Σ., Κατσαρού, Ε. & Τσάφος, Β. (επιμ.), *2ο συμπόσιο για την Εκπαιδευτική Έρευνα – Δράση: Ζητούμενα, Συγκρούσεις και Προοπτικές, 1-2 Απριλίου 2017. Βιβλίο Περιλήψεων* (σσ. 21-22). Φλώρινα.

ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΥΠΕΡΙΣΧΥΟΝ ΜΑΤΙ ΣΑΣ; ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Καλούτση Κωνσταντίνα[1], Γιαννακάκη Μαρία[1], Δαφνοπούλου Δανάη[2], Παλαμιώτη Νικολέττα[3]

[1]ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ,
[2]Linnaeus University, Σουηδία,
[3]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

konstantinakaloutsi@gmail.com, giannakakimaria@gmail.com, danai.dafnopoulou@lnu.se, nikipalam@math.uoa.gr

Η παρούσα διδακτική πρόταση στοχεύει στη σύνδεση βασικών εννοιών της στατιστικής και των πιθανοτήτων στη Β΄ Γυμνασίου με χρήση του ψηφιακού λογισμικού TinkerPlots.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πρακτική που παρουσιάζεται αποτελεί μια πρόταση για τη σύνδεση των βασικών εννοιών της στατιστικής και των πιθανοτήτων μέσω της άτυπης στατιστικής συμπερασματολογίας. Η άτυπη στατιστική συμπερασματολογία έχει τρεις πτυχές: (α) τη γενίκευση «πέρα από τα δεδομένα», (β) τη χρήση των δεδομένων ως αποδεικτικό στοιχείο που θα υποστηρίξει τη γενίκευση και (γ) τη μη-ντετερμινιστική γλώσσα που εκφράζει κάποια αβεβαιότητα σχετικά με τη γενίκευση (Makar & Rubin, 2009). Οι Konold & Kazak (2008) αναφέρουν ότι οι ιδέες *model fit, distribution, signal-noise, law of large numbers* χρησιμοποιούνται από τους μαθητές στην ανάλυση δεδομένων και στις πιθανότητες. Ειδικότερα, model fit είναι οι προσδοκίες σχετικά με τα χαρακτηριστικά των δεδομένων που στηρίζονται στη διαίσθηση, το signal αντικατοπτρίζει τις αμετάβλητες πτυχές του πληθυσμού, ενώ το noise εισάγεται μέσω της τυχαίας μεταβλητότητας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η παρούσα διδακτική πρόταση που σχεδιάσαμε εφαρμόστηκε σε ιδιωτικό σχολείο που ακολουθεί το βρετανικό πρόγραμμα σπουδών, σε 3 διδακτικές ώρες και προτείνεται για τη Β' Γυμνασίου. Στη δραστηριότητα έγινε χρήση του TinkerPlots. Οι μαθητές κλήθηκαν να εξετάσουν ποιο είναι το υπερισχύον μάτι τους (McManus, 1999), ιδέα που βασίστηκε σε αντίστοιχη του σχολικού βιβλίου. Τα ερωτήματα της δραστηριότητας βασίστηκαν στις ιδέες των *model fit, distribution, signal-noise και law of large numbers.*

Ο πρώτος στόχος ήταν η αναγνώριση του βαθμού επιρροής του model fit, αν π.χ. οι μαθητές συσχετίζουν το υπερισχύον χέρι με το αντίστοιχο μάτι, ενώ προτρεπόταν η χρήση της ορολογίας των πιθανοτήτων. Έπειτα, ζητήθηκε από τους μαθητές να ελέγξουν το υπερισχύον μάτι τους με το εξής πείραμα: τοποθετήθηκε κουκίδα στον τοίχο σε ίση απόσταση από όλες τις ομάδες μαθητών και τους ζητήθηκε να σχηματίσουν με το δείκτη και τον αντίχειρα έναν κύκλο. Με τεντωμένο χέρι και τοποθετώντας την κουκίδα μέσα στον κύκλο έλεγξαν εάν η κουκκίδα διατηρείται σε αυτόν κλείνοντας εναλλάξ τα μάτια τους και συμπέραναν ποιο είναι το υπερισχύον μάτι. Με τη χρήση του TinkerPlots έγινε αναπαράσταση των δεδομένων που εξήχθησαν από το πείραμα σε pie charts και γράφημα συχνοτήτων. Τότε ρωτήθηκαν «α) Τι πιστεύετε ότι θα συμβεί εάν συλλέξουμε τα δεδομένα της Β’ Γυμνασίου; β) Έχουμε συλλέξει τα δεδομένα του Γυμνασίου. Τι περιμένετε να δείτε σε αυτά;» αναμένοντας την εσφαλμένη γενίκευση του δείγματος και στοχεύοντας στη νοηματοδότηση της κατανομής (distribution) των δεδομένων που επεξεργάζονται. Έπειτα, μέσω του TinkerPlots απαντήθηκαν διαδοχικά οι ερωτήσεις «Σύμφωνα με τα δεδομένα που είδατε, ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαίος μαθητής του σχολείου να έχει υπερισχύον α)το δεξί μάτι; β) το αριστερό μάτι; γ) και τα δύο;». Σκοπός ήταν να συσχετιστούν τα αποτελέσματα που παρατηρούν στο λογισμικό μέσω γραφημάτων με τις πιθανότητες και να δημιουργηθεί πεδίο που θα ευνοεί την επιχειρηματολογία βάσει αυτών. Τέλος, ερωτήθηκαν «Πώς μπορείτε να βελτιώσετε την ακρίβεια της πρόβλεψής σας;», με στόχο να διαπιστώσουν την επιρροή του δείγματος στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων, μέσα από διάλογο και πειραματισμό με το εργαλείο, οπότε και να οδηγηθούν στο νόμο των μεγάλων αριθμών.

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Η χρήση του TinkerPlots ήταν καταλυτική στην εισαγωγή των μαθητών στο νόμο των μεγάλων αριθμών, αφού τους έδινε τη δυνατότητα να πειραματιστούν ενεργά και να παρατηρήσουν δείγματα μεγάλου πληθυσμού άμεσα. Παράλληλα, βοήθησε στην οργάνωση των δεδομένων της διδασκαλίας με διαφορετικές αναπαραστάσεις, οδηγώντας τους μαθητές στην άτυπη στατιστική συμπερασματολογία και στην ανάπτυξη ευρύτερων συνδέσεων μεταξύ στατιστικής και πιθανοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology innovations in statistics education*, *2*(1), Article 1. Retrieved from http://escholarship.org/uc/item/38p7c94.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82–105.

McManus, I. (1999). Eye-dominance, writing hand, and throwing hand. *Laterality: Asymmetries of Body, Brain and Cognition*, *4*(2), 173–192.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Βερβέρας Νικόλαος, Μπογιατζή Αικατερίνη

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

ververasnikos@gmail.com, kat.bogiatzi@hotmail.com

Υπάρχουν πολλά οφέλη που έχουν συνδεθεί με μια διεπιστημονική οπτική για την εκπαίδευση, «η έρευνα δείχνει ότι ένα διεπιστημονικό πρόγραμμα σπουδών δίνει πολλές ευκαιρίες για μάθηση, γνώσεις λιγότερο κατακερματισμένες και ενθαρρυντικές εμπειρίες για τους μαθητές » (Furner & Kumar, 2007). Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε μια προσπάθεια σύνδεσης γεωμετρικής απόδειξης με επιχειρήματα από την φυσική, με στόχο την διερεύνηση των διαστάσεων μιας τέτοιας προσπάθειας καθώς και των προκλήσεων και των δυσκολιών που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι εκπαιδευτικοί.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστό ότι η απόδειξη θεωρείται κεντρική για την επιστήμη των μαθηματικών και έχει καθοριστική σημασία για τη μαθηματική δραστηριότητα. Είναι γνωστό, επίσης, από σχετικές έρευνες, ότι στη συντριπτική πλειοψηφία τους οι μαθητές συναντούν μεγάλα προβλήματα στην κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και δεν είναι σε θέση να κατασκευάσουν ακόμα και απλές αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων. Επειδή όμως, σε πολλές περιπτώσεις, τα επιχειρήματα από τη φυσική είναι ένας τρόπος για τον μαθηματικό να παράγει μια πιο κομψή απόδειξη και ίσως να αποκαλύψει τα βασικά χαρακτηριστικά μιας σύνθετης μαθηματικής δομής, ή να επισημάνει με μεγαλύτερη σαφήνεια τη σημασία ενός θεωρήματος με άλλους τομείς των μαθηματικών, αυξάνεται το ενδιαφέρον μας για την μελέτη αυτού του θέματος.

Για την μελέτη αυτή παρουσιάζουμε την αποδείξη του θεωρήματος: «τα μέσα των πλευρών ενός τετράπλευρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου», γνωστό και ως θεώρημα Varignon. Δίνονται 2 αποδείξεις, μια μέσω της φυσικής με την χρήση της έννοιας του κέντρου βάρους και έπειτα η κλασική απόδειξη της γεωμετρίας. Ζητήσαμε να συγκριθούν οι δυο αποδείξεις στα πλαίσια μιας μικρής συνέντευξης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα πρώτα ευρήματα αφορούν επιστημολογικά εμπόδια, τον ρόλο του σχήματος στην απόδειξη, την αξία της χρήσης χειραπτικών υλικών και αναδεικνύουν έντονα την έννοια του αξιώματος.

M1: Με πείθει η γεωμετρική απόδειξη αλλά μου αρέσει περισσότερο της φυσικής (....) η γεωμετρική χρειάζεται το κλασικό, θεώρημα, πόρισμα κλπ ενώ στη φυσική δίνει μια διάσταση λίγο πιο πρακτική...

M2: Κράτησα τον χάρακα με κλίση για να δω που είναι το κέντρο βάρους.... για να με πείσει ότι το Η ήταν όντως το κέντρο....

M1: Δεν το είχα σκεφτεί ποτέ στην ζωή μου , ότι υπάρχουν αξιώματα και στην φυσική...

M2: Στη γεωμετρία το είχα στο μυαλο μου ότι είναι στο επίπεδο 2x2 , ενω την φυσική την είχα σαν τρόπο σκέψης στον τρισδιάστατο χώρο....

Εδώ συγκεκριμένα θα θέλαμε την χρήση ενός αξιώματος από την φυσικη να μας δώσει το πάτημα για να κατασκευάσουμε μια απόδειξη που διαφέρει μεν από την γεωμετρική αλλά προσδίδει μια επεξηγηματική έννοια στο ίδιο το θεώρημα. Με αυτόν τον τρόπο, συνειδητοποιώντας ότι τα γεωμετρικά θεωρήματα μπορούν να εξεταστούν σε διαφορετικά πλαίσια και να αποδειχθούν με διαφορετικούς τρόπους, οι μαθητές μπορεί να έρθουν να προβληματιστούν με έναν νέο και πιο κατάλληλο τρόπο σχετικά με την έννοια της απόδειξης.

Η ερευνα αυτή αποτελεί προκαταρκτική μελέτη του θέματος της σύνδεσης των δυο πεδίων και θα επεκταθεί στα πλαίσια της συνεργασίας που μπορεί να προκύψει για εκπαιδευτικούς διαφορετικών πεδίων με στόχο την υλοποίηση τέτοιων δραστηριοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Furner, J. M., & Kumar, D. D. (2007). The mathematics and science integration argument: A stand for teacher education. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 3(3), 185-189.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002). Another approach to proof: arguments from physics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 1-8.

Redish, E. F., & Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education*, *24*(5), 561-590.

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΙΑΣ ΠΟΛΥΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΗΣ ΤΑΞΗΣ ΣΕ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

Φακούδης Ευάγγελος

Μαθηματικός, Γυμνάσιο Σουφλίου

fakoudis@sch.gr

Ως εργαλείο ταξινόμησης των παραγόντων που εκτιμήθηκε από την έρευνα (Walshaw & Anthony, 2008) ότι συντελούν σε μία κοινότητα μάθησης αλλά και ως εργαλείο ανάλυσης στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε η Διδακτική Τριάδα (Potari & Jaworski, 2002) που έχει τρεις διαστάσεις. Η διάσταση (Α) 'διαχείριση της μαθησιακής διαδικασίας' συμπεριέλαβε τους παράγοντες: 'Α1-Εγκαθίδρυση κατάλληλων νορμών συμμετοχής', 'Α2-Συγκρότηση συνεργατικής τάξης', 'Α3-Διάθεση χρόνου για ατομική σκέψη', 'Α4-Υποστήριξη των μαθητών στη συζήτηση στην ολομέλεια', 'Α5-Υποστήριξη της ισότητας μέσα στην τάξη'. Η διάσταση (Β) 'ευαισθησία προς τους μαθητές' συμπεριέλαβε: 'Β1-Δημιουργία ενός φιλόξενου και φιλικού περιβάλλοντος με φροντίδα για τον κάθε μαθητή', 'Β2-Πρόσβαση των μαθητών στη γνώση', 'Β3-Ανταλλαγή ιδεών με σεβασμό', 'Β4-Υποστήριξη για την κατανόηση του μαθηματικού έργου', 'Β5-Υποστήριξη κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών'. Ενώ η διάσταση (Γ) 'μαθηματική πρόκληση' συμπεριέλαβε: 'Γ1-Μαθηματικά έργα με πρόκληση' και 'Γ2-Έμφαση στη μεταγνωστική επεξεργασία'.

Σε ένα πολυπολιτισμικό τμήμα της Β΄ Γυμνασίου (με 9 πλειονοτικούς και 10 μειονοτικούς μαθητές) αναπτύχθηκε μία έρευνα δράση με στόχο την εγκαθίδρυση μιας κοινότητας μάθησης στην οποία όλοι οι μαθητές θα συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία. Η έρευνα δράση είχε διάρκεια 6 μήνες και τα ερευνητικά εργαλεία ήταν το ημερολόγιο του εκπαιδευτικού, σημειώσεις πεδίου, ερωτηματολόγια/δοκίμια, ημιδομημένες συνεντεύξεις, 39 απομαγνητοσκοπημένες διδασκαλίες, γραπτές δοκιμασίες και συνεντεύξεις πάνω σ' αυτές.

1^{η} φάση της έρευνας δράσης (1η με 14η δ.ω.): Ο εκπαιδευτικός με βάση τις αδυναμίες που αναγνώρισε στη διδασκαλία πριν την έρευνα δράση και με βάση την έρευνα και τη ΔΤ, προσπάθησε να αλλάξει τις νόρμες συμμετοχής (Α1), να συγκροτήσει μια συνεργατική τάξη σε ανομοιογενείς ομάδες (Α2), η πρακτορεία των μαθητών να είναι εννοιολογική (Α5), η λογοδοσία να είναι στην κοινότητα (Α5), οι αλλαγές για τη διδασκαλία να είναι απόφαση της τάξης (Α5), να υπάρχει προσωπική εστίαση στις ανάγκες των μαθητών (Β1), τα μαθηματικά έργα να είναι με πρόκληση (Γ1) και διαβαθμισμένα (Β2), να εμπλουτίσει τις μεταγνωστικές επεξεργασίες (Γ2). Στο τέλος της 1^{ης} φάσης πολλοί μαθητές (ακόμα και μειονοτικοί που είχαν πρόβλημα στην ελληνική γλώσσα) άρχισαν να μιλούν, να λένε ιδέες και στρατηγικές και να αισθάνονται ότι κι αυτοί μπορούν να έχουν σημαντικές ιδέες.

2η φάση της έρευνας δράσης (15η με 29η δ.ω.): Οι αδυναμίες που εντοπίστηκαν ήταν στις νόρμες συμμετοχής (Α1). Συνέχιζαν να υπάρχουν μαθητές που δεν μιλούσαν καθόλου ή δεν μιλούσαν συστηματικά. Η απόφαση αλλαγής αφορούσε την κατανομή εργασίας, ορίζοντας τον θεσμό του ‘εκπροσώπου’. Ανά δυάδα θα έπρεπε να μιλάει ως εκπρόσωπος της ομάδας ο μαθητής που είχε χαμηλότερη συμμετοχή μέχρι τότε (οι περισσότεροι μειονοτικοί μαθητές θέλησαν να ορισθούν ‘εκπρόσωποι’). Αυτό άλλαξε ριζικά την τάξη. Έπαιρναν τον λόγο μαθητές που δεν μιλούσαν ποτέ και επειδή τις περισσότερες φορές ήταν σωστά αυτά που έλεγαν, το χαίρονταν ιδιαίτερα.

3η φάση της έρευνας δράσης (30η με 44η δ.ω.): Οι αδυναμίες που εντοπίστηκαν αφορούσαν πάλι τις νόρμες συμμετοχής (Α1). Έδιναν σωστές απαντήσεις που πολλές φορές δεν ήταν ιδέα δική τους αλλά δεν ρωτούσαν περισσότερα, για να κατανοήσουν αυτό που λένε. Αποφασίστηκε να μπει ως κανόνας της τάξης «ρωτώ ό,τι δεν καταλαβαίνω και όσες φορές χρειαστεί». Οι μαθητές οικειοποιήθηκαν τον νέο κανόνα της τάξης και αυξήθηκε σημαντικά η έκφραση αποριών.

Η έρευνα δράση έφερε σημαντικές αλλαγές στην κουλτούρα της τάξης. Εγκαθιδρύθηκε σε σημαντικό βαθμό μία κοινότητα μάθησης στην οποία υπήρχε η αίσθηση του «ανήκειν», η κοινή δράση, η αμοιβαία εμπλοκή και το κοινό ρεπερτόριο. Η αίσθηση της κοινότητας ώθησε όλους τους μαθητές να εμπλακούν περισσότερο με τα μαθηματικά, ώστε να ανταποκριθούν καλύτερα στις ανάγκες της ομάδας τους και της τάξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). Creating productive learning communities in the mathematics classroom: An international literature review. *Pedagogies: an international journal*, *3*(3), 133-149.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tacking complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5* (4), 351–380.

Η ΕΝΔΥΝΑΜΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΕΓΚΑΘΙΔΡΥΣΗΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΣΕ ΜΙΑ ΠΟΛΥΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΗ ΤΑΞΗ

Φακούδης Ευάγγελος

Γυμνάσιο Σουφλίου

fakoudis@sch.gr

Η έρευνα κάτω από κοινωνικοπολιτισμικές οπτικές, ορίζει τη μάθηση ως μία διαδικασία ‘συμμετοχής’ ενώ αρκετές έρευνες εστιάζουν στην εγκαθίδρυση κοινοτήτων μάθησης ως εναλλακτικό τρόπο της σχολικής εκπαίδευσης. Ο Wenger (1998) για τις μορφές συμμετοχής διακρίνει: (α) την πλήρη συμμετοχή, (β) την περιφερειακή συμμετοχή στην οποία υπάρχει ένα ποσοστό μη συμμετοχής και μία συμμετοχή που είναι λιγότερη από πλήρης, (γ) την περιθωριακή συμμετοχή στην οποία κυριαρχεί η μη συμμετοχή, και (δ) την πλήρη μη συμμετοχή. Την ίδια κατηγοριοποίηση ακολουθεί και ο Ewing (2017) που εξειδικεύει για το μάθημα των μαθηματικών στο σχολείο.

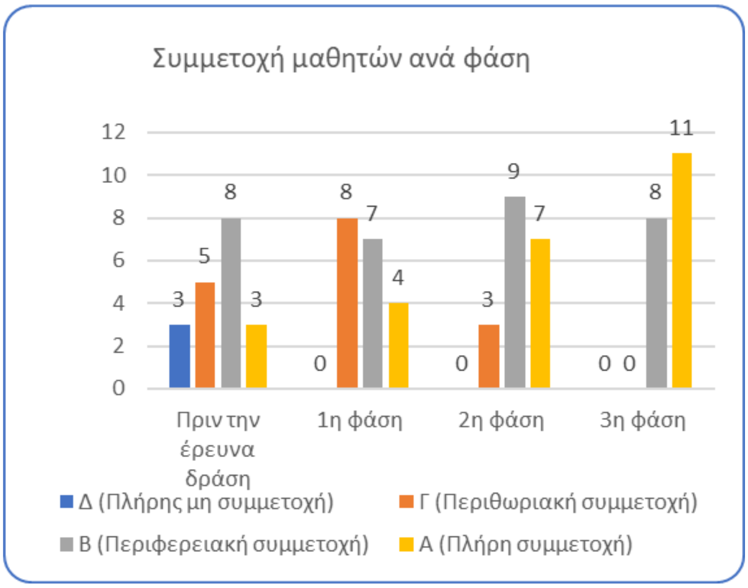
Σε μία έρευνα δράση με στόχο την εγκαθίδρυση μιας κοινότητας μάθησης σε μία πολυπολιτισμική τάξη της Β΄ Γυμνασίου στην περιοχή της Θράκης (με 9 πλειονοτικούς και 10 μειονοτικούς μαθητές), μελετήθηκε η ανάπτυξη της συμμετοχής των μαθητών. Η έρευνα δράση είχε διάρκεια 6 μήνες και τα ερευνητικά εργαλεία ήταν το ημερολόγιο του εκπαιδευτικού, σημειώσεις πεδίου, ερωτηματολόγια/δοκίμια, ημιδομημένες συνεντεύξεις, 39 απομαγνητοσκοπημένες διδασκαλίες, γραπτές δοκιμασίες και συνεντεύξεις πάνω σ’ αυτές.

<u>Πριν την έρευνα δράση:</u> η συμμετοχή των περισσότερων μαθητών ήταν αρκετά περιορισμένη αφού υπήρχαν τρεις μαθητές με πλήρη μη συμμετοχή και πέντε με περιθωριακή συμμετοχή (Γράφημα).

<u>1η φάση της έρευνας δράσης</u> (1η με 14η δ.ω.): Στην 1η φάση άλλαξαν πολλές συνιστώσες της διδασκαλίας όπως η οργάνωση της τάξης σε ανομοιογενείς ομάδες, η προσπάθεια εγκαθίδρυσης κατάλληλων νορμών συμμετοχής στην ομάδα και στη συζήτηση στην ολομέλεια, μαθηματικά έργα με πρόκληση και σκαλωσιές μάθησης που θα ενίσχυαν την εννοιολογική πρακτορεία, η μετατόπιση της ισχύος του εκπαιδευτικού στην κοινότητα (όπως η επικύρωση των μαθηματικών ιδεών και η λήψη αποφάσεων σχετικά με τις αλλαγές στη διδακτική διαχείριση) και η προσωπική εστίαση του εκπαιδευτικού στις ανάγκες των μαθητών. Η 1η φάση μετατόπισε τρεις μαθητές από την πλήρη μη συμμετοχή σε περιθωριακή, και έναν μαθητή από περιφερειακή σε πλήρη συμμετοχή (Γράφημα).

2η φάση της έρευνας δράσης (15η με 29η δ.ω.): Στη 2η φάση αποφασίστηκε οι μαθητές σε κάθε ομάδα (ομάδες των 2 ή των 4 ανάλογα με το μαθηματικό έργο) να ορίσουν έναν μαθητή 'εκπρόσωπο', ο οποίος θα έλεγε τα συμπεράσματα της ομαδικής εργασίας στην ολομέλεια της τάξης. Αυτό οδήγησε στη μετατόπιση πέντε μαθητών από περιθωριακή συμμετοχή σε περιφερειακή και τριών από περιφερειακή σε πλήρη συμμετοχή (Γράφημα).

3η φάση της έρευνας δράσης (30η με 44η δ.ω.): Στην 3η φάση αποφασίστηκε να τεθεί ένας νέος κανόνας στην τάξη «ρωτώ ό,τι δεν καταλαβαίνω και όσες φορές χρειαστεί». Αυτό οδήγησε στη μετατόπιση τριών μαθητών από περιθωριακή συμμετοχή σε περιφερειακή και τεσσάρων μαθητών από περιφερειακή σε πλήρη συμμετοχή.



Γράφημα: Ραβδόγραμμα αριθμού μαθητών ανά μορφή συμμετοχής στις διάφορες φάσεις.

Η κουλτούρα της κοινότητας μάθησης ενέταξε στους κόλπους της όλους τους μαθητές, και ως έτσι αναδεικνύεται απαραίτητη προϋπόθεση για μία συμπεριληπτική μαθηματική εκπαίδευση για όλους τους μαθητές, σε αντίθεση με τις πολιτικές που εφαρμόζονται σε παγκόσμιο επίπεδο για την εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ewing, B. (2017). Theorizing participation, engagement and community for primary and secondary mathematics classrooms. *Creative Education*, *8*(6), 788-812.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

STEAME PROJECT: ΚΑΘΟΔΗΓΗΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΟΛΕΙΩΝ STEAME

Παπαγεωργίου Ελένη (Επιμέλεια), εκ μέρους της Κοινοπραξίας του Ευρωπαϊκού Έργου STEAME

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

papageorgiou.e@cyearn.pi.ac.cy

Το έργο STEAME: Guidelines for Developing and Implementing STEAME Schools (www.steame.eu) αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του ERASMUS + KA2, στο χρονικό διάστημα Νοεμβρίου 2019-Δεκεμβρίου 2021. Συντονιστικός φορέας του έργου είναι η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία και ως εταίροι συμμετέχουν έξι οργανισμοί: Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, το Pedagogical University of Krakow (Πολωνία), το Ivan Apostolov Private English Language School (Βουλγαρία), το Ινστιτούτο Επιταχυντικών Συστημάτων και Εφαρμογών (IASA) (Ελλάδα), τα Εκπαιδευτήρια ΔΟΥΚΑΣ (Ελλάδα) και το σχολείο Μέσης Εκπαίδευσης ITC Pacle Morante Limbiate (Ιταλία).

Στο πλαίσιο των δράσεων του έργου αναπτύχθηκε πρωτότυπο σχέδιο αρχιτεκτονικής και οργανωτικής δομής για σχολεία STEAME, που καλύπτει το πλήρες φάσμα των προτεραιοτήτων της ΕΕ "Επιστήμη, Τεχνολογία, Μηχανική, Τέχνες, Μαθηματικά και Επιχειρηματικότητα". Η προσθήκη του τελευταίου Ε για την Επιχειρηματικότητα στο ακρωνύμιο STEAME υποδηλώνει έμφαση στην ανάπτυξη επιχειρηματικών δεξιοτήτων, απαιτούμενων σε έναν μεταβαλλόμενο κόσμο και, ως εκ τούτου, το έργο έχει επιχειρήσει τη διασύνδεση του σχολείου με τη βιομηχανία και την αγορά εργασίας γενικότερα (Jäggle, κ.ά., 2018). Επιπρόσθετα, έχουν αναπτυχθεί, και βρίσκονται στο «Αποθετήριο» του έργου (www.steame.eu), κατευθυντήριες γραμμές για ένα δυναμικό πρόγραμμα σπουδών, σχέδια μάθησης και δημιουργικότητας για δύο ηλικιακές ομάδες μαθητών/μαθητριών, ρούμπρικες αξιολόγησης, καθώς και πρόγραμμα κατάρτισης εκπαιδευτικών για το πώς μπορούν να εργαστούν αποτελεσματικά και παραγωγικά σε ένα σχολείο STEAME (Margot & Kettler, 2019). Ο προτεινόμενος δυναμικός σχεδιασμός των σχολείων STEAME προωθεί την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, τη δημιουργικότητα, την καινοτομία και την έρευνα, αξιοποιώντας τη μάθηση μέσω projects και τη διερευνητική προσέγγιση. Εστιάζει στην ανάπτυξη του τεχνολογικού αλφαβητισμού και άλλων βασικών δεξιοτήτων για τη διαχείριση σύγχρονων προκλήσεων, όπως αναφέρονται στις εκπαιδευτικές πολιτικές διάφορων κρατών (David, & Ortiz-Revilla, 2021: Marcelo, κ.ά., 2021). Το προτεινόμενο μοντέλο «Σχολείο STEAME» προωθεί τη διεπιστημονική προσέγγιση, συνδυάζοντας τα διάφορα γνωστικά αντικείμενα με την επιχειρηματικότητα, τα οποία χρησιμοποιεί ως σημεία αναφοράς για την καθοδήγηση της ερευνητικής δραστηριότητας των νέων για την επίλυση ρεαλιστικών θεμάτων. Γενικά, το προτεινόμενο σχολείο STEAME αποσκοπεί στην οικοδόμηση μιας ολιστικής αντίληψης για το πώς λειτουργεί ο κόσμος και στην ενθάρρυνση των νέων να αξιοποιούν δημιουργικά διάφορες στρατηγικές για να βρίσκουν λύσεις στις διάφορες προκλήσεις (Stebbins & Goris, 2019: Ng & Adnan, 2018).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

David, & Ortiz-Revilla (2021). STEM vs. STEAM Education and Student Creativity: A Systematic Literature Review. *Education Sciences* 11(7), 331. https://doi.org/10.3390/educsci11070331.

Jäggle, G., Lepuschitz, W., Girvan, C., Schuster, L., Ayatollahi, I., & Vincze, M. (2018). Overview and Evaluation of a Workshop Series for Fostering the Interest in Entrepreneurship and STEM. In *IEEE 10th International Conference on Engineering Education (ICEED)*, pp. 89-94, doi: 10.1109/ICEED.2018.8626980.

Marcelo, J. A.-J., Deyanira, L. A.-V., Margoth, I.-S., & Jacinto, V. R.-L. (2021). Environments and contexts STEM–STEAM education: A Systematic Literature Review. In *16th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI)*, pp. 1-6, doi: 10.23919/CISTI52073.2021.9476436.

Margot, K. C. & Kettler T. (2019). Teachers' perception of STEM integration and education: a systematic literature review. International Journal of STEM Education, 6(2), https://doi.org/10.1186/s40594-018-0151-2.

Ng, C. H., & Adnan, M. (2018). Integrating STEM education through Project-Based Inquiry Learning (PIL) in topic space among year one pupils. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Volume 296, Issue 1, pp. 012020.

Steame project. http://steame.eu/

Stebbins, M & Goris, T. (2019). Evaluating STEM education in the U.S. Secondary schools: Pros and cons of the «project lead the way» platform. *International Journal Engineering Pedagogy, 9(1)*, 50–56.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΟΙΝΩΝ ΧΩΡΩΝ ΙΣΟΤΙΜΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΤΩΝ ΡΟΜΑ

Χρυσικού Βασιλική, Φόβος Ιωάννης, Σταθοπούλου Χαρούλα

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

chrysikou@uth.gr, ifovos@uth.gr, hastath@uth.gr

Το επιδοτούμενο από την Ευρωπαϊκή Ένωση πρόγραμμα «Common Spaces for Integration of Roma (CoSpIRom)», διάρκειας 28 μηνών, το οποίο συντόνιζε το Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας –με εταίρους από την Ιταλία και τη Ρουμανία– αφορούσε στη δημιουργία κοινών χώρων ισότιμης συμμετοχής με στόχο την ενσωμάτωση των Ρομά (cospirom.sed.uth.gr).

Θεωρώντας ότι η αναπαραγωγή διακρίσεων και αποκλεισμού σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την έλλειψη θετικών εμπειριών αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών της κοινότητας των Ρομά με μέλη ή δομές της κυρίαρχης ομάδας, το CoSpIRom παρείχε ευκαιρίες για τη δημιουργία κοινών χώρων ισότιμης αλληλεπίδρασης και συμμετοχής. Έτσι με διττό στόχο, αφενός την ενδυνάμωση των Ρομά και αφετέρου την ευαισθητοποίηση και την αμφισβήτηση των στερεοτύπων για τους Ρομά από την ευρύτερη κοινωνία, δημιουργήθηκαν οι εξής κοινοί χώροι: α) νεαροί Ρομά κρατούμενοι και φοιτητές, β) νεαροί Ρομά και αστυνομικοί, γ) νεαροί Ρομά και εκπροσώποι των ΜΜΕ, και δ) Ρομά και μη Ρομά μαθητές και γονείς.

Ενδεικτικά θα αναφερθούμε στις δράσεις που υλοποιήθηκαν στους κοινούς χώρους νεαρών κρατούμενων με φοιτητές. Με στόχο την ενεργή συμμετοχή όλων καθώς και την ανάπτυξη γλωσσικού και μαθηματικού γραμματισμού σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν δραστηριότητες βασισμένες στην αξιοποίηση πόρων γνώσης των νεαρών κρατουμένων. Συγκεκριμένα, επιλέχθηκε ένα παραμύθι από τη συλλογή «12 Παραμύθια των Ρομά», το οποίο διασκευάστηκε ώστε να είναι κατανοητό από τους κρατούμενους, ενώ ταυτόχρονα εμπλουτίστηκε με μαθηματικούς γρίφους και προβλήματα, γλωσσικές ασκήσεις, κ.ά. Με την αξιοποίηση τεχνικών δραματικής τέχνης δημιουργήθηκε κλίμα συνεργασίας ανάμεσα στις δύο ομάδες, και έτσι συνθήκες ισότιμης συμμετοχής και ουσιαστικής αλληλεπίδρασης. Η συνολική εμπειρία είχε ως συνέπεια να αμβλυνθούν οι στερεοτυπικές εικόνες αμφοτέρων των ομάδων και να βιώσουν αποδοχή οι νεαροί κρατούμενοι ενώ δημιουργήθηκαν ρωγμές στα συμβολικά όρια που τοποθετούν τους νεαρούς κρατούμενους στην 'άλλη πλευρά' της 'αβυσσαλέας γραμμής' (de Sousa Santos, 2017).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

de Sousa Santos, B. (2017). The resilience of abyssal exclusions in our societies: Toward a post-abyssal law. *Tilburg Law Review*, *22*(1-2), 237-258.

STEAM EDUCATION FOR TEACHING PROFESSIONALISM (STEAMTEACH)

Diego-Mantecon Jose-Manuel[1], Kynigos Chronis[2], Lavicza Zolt[3], Vass Vilmos[4], Fenyvesi Kristof[5], Ortiz-Laso Zaira[1], Diamantidis Dimitris[2], Karavakou Myrto[2], Houghton Tony[3], Imam Rahmadi Imam[3]

[1]University of Cantabria, [2]National and Kapodistrian University of Athens, [3]Johannes Kepler University Linz, [4]Budapest Metropolitan University, [5]University of Jyväskylä

josemanuel.diego@unican.es, kynigos@eds.uoa.gr, zsolt.lavicza@jku.at, vvass@metropolitan.hu, kristof.fenyvesi@jyu.fi, zaira.ortiz@unican.es, dimitrd@eds.uoa.gr, karavakou@ppp.uoa.gr, ajh249@gmail.com, imamrahmadi@unpam.ac.id

Το πρόγραμμα STEAMTeach (https://www.steamteach.unican.es/) στοχεύει στη διαμόρφωση ενός θεωρητικού πλαισίου για την επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών, με τη μέθοδο STEAM και με εστίαση στην αξιοποίηση της ως στρατηγική διδακτικού σχεδιασμού (Thibaut et al., 2018). Στο πλαίσιο του προγράμματος, δεδομένα που παράχθηκαν και αναλύθηκαν σε πέντε ευρωπαϊκές χώρες, την Ισπανία, την Ελλάδα, την Αυστρία, την Ουγγαρία και τη Φινλανδία (Diego-Mantecón et al., 2022) μετά από συνεντεύξεις εικοσιπέντε εκπαιδευτών εκπαιδευτικών, μας οδήγησαν στην ανάπτυξη της πρώτης έκδοσης του θεωρητικού πλαισίου. Οι συνεντεύξεις εστίασαν στις απόψεις των εκπαιδευτών σχετικά με τα χαρακτηριστικά της εκπαίδευσης εκπαιδευτικών στη μέθοδο STEAM σε κάθε χώρα, εφόσον υλοποιείται, τα εμπόδια και τις προτάσεις τους για την αποτελεσματική εφαρμογή της μεθόδου στην τάξη και τις διδακτικές πρακτικές που είναι σχετικές με το STEAM. Παράλληλα με την ανάπτυξη του πλαισίου σχεδιάσαμε ένα σχετικό πρόγραμμα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών, το οποίο στοχεύουμε να υλοποιηθεί σε δύο κύκλους. Ο πρώτος κύκλος έχει ολοκληρωθεί σε όλες τις χώρες. Σε κάθε μια από αυτές συμμετείχαν εικοσιπέντε εκπαιδευτικοί, ενώ στην Ισπανία και την Ελλάδα η εστίαση ήταν στους εκπαιδευτικούς Μαθηματικών. Στόχος ήταν να αξιολογήσουμε (Diego-Mantecón et al., 2021) τη δυνατότητα του θεωρητικού πλαισίου να στηρίξει την επιμόρφωση εκπαιδευτικών και στη συνέχεια να το αναθεωρήσουμε και να προχωρήσουμε στον δεύτερο κύκλο εφαρμογής, φάση στην οποία βρισκόμαστε. Μετά την υλοποίηση του δεύτερου κύκλου επιμόρφωσης σε άλλους εκπαιδευτικούς (του ίδιου πλήθους με τον πρώτο), θα προχωρήσουμε σε εφαρμογή στην τάξη από όπου θα παραχθούν επιπλέον δεδομένα για ανάλυση. Τουλάχιστον πέντε εκπαιδευτικοί σε κάθε χώρα, οι οποίοι συμμετείχαν στο επιμορφωτικό πρόγραμμα θα σχεδιάσουν και θα εφαρμόσουν διδασκαλίες με τη μέθοδο STEAM, ακολουθώντας ένα πρότυπο σχεδιασμού έργων το οποίο συνδέεται με το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύσσουμε. Μετά την ανάλυση και αυτής της φάσης, το τελικό παραγόμενο του προγράμματος θα είναι μια εκλεπτυσμένη έκδοση του θεωρητικού πλαισίου επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών με τη μέθοδο STEAM.

The STEAMTeach project (https://www.steamteach.unican.es/) is aiming to the design and the refinement of a transcultural STEAM teacher professional development (TPD) framework for in-service and pre-service teachers, focused on the integration of STEAM education practices in their teaching strategies (Thibaut et al., 2018). Data produced and analyzed in five European countries (Diego-Mantecón et al., 2022), Spain, Greece, Austria, Hungary, and Finland led to a first iteration of the framework; after interviewing twenty-five STEAM trainers from all countries, we pointed out educators' views on the local standards around STEAM related TPD training, obstacles, and recommendations around STEAM education implementation in each country, and more effective teaching approaches that may be relevant to STEAM education. In parallel, based on the first version of the framework we designed a STEAM TPD program for in-service and pre-service teachers that to be conducted in all five countries to monitor the framework's effectiveness. The program in Spain and Greece focused on Mathematics teachers' training . In the first cycle of these courses at least twenty-five teachers participated in each country. After evaluating this first cycle (Diego-Mantecón et al., 2021), we will refine the TPD and another cycle will be conducted. We are now in this phase of the project, aiming to train the same number of teachers, reaching a total number of fifty trainees in each country. The next step of the project involves classroom implementation of STEAM approaches in line with the framework developed. At least five teachers from each country, that have already participated in the STEAM TPD program will conduct STEAM learning activities in their classroom, that they have designed following a template for STEAM focused task design, that we have developed in consistency with the framework. The final step of the project will be to establish interaction among teachers from different countries, and to refine the framework as the end-product of the STEAMTeach project, based on all this experience and the data produced from the previous steps.

AFFILIATIONS - ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

STEAMTeach (STEAM Education for Teaching Professionalism, 2020-1-ES01-KA201-082102) is a project funded with the support from the

European Commission Erasmus+ Programme under the key action ‘Cooperation for innovation and the exchange of good practices’.

REFERENCES - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z., Diamantidis, D., & Kynigos, C. (2022). Toward a STEAM professional development program to exploit school mathematics. In *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (Eds.), (pp. XX). ERME.

Diego-Mantecón, J. M., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. F., & Ortiz-Laso, Z. (2021). An attempt to evaluate STEAM Project-Based Instruction from a school mathematics perspective. *ZDM Mathematics Education.*

Thibaut, L., Ceuppens, S., De Loof, H., De Meester, J., Goovaerts, L., Struyf, A., ... & Depaepe, F. (2018). Integrated STEM education: A systematic review of instructional practices in secondary education. *European Journal of STEM Education*, *3*(1), 02.

https://doi.org/10.20897/ejsteme/85525

ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΑ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Τριανταφύλλου Χρυσαυγή[1], Ζαχαριάδης Θεοδόσης[1], Σπηλιωτοπούλου Βασιλική[2], Πόταρη Δέσποινα[1], Ψυχάρης Γιώργος[1], Φαράχ Μάχα[1]

[1]Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ, [2]Παιδαγωγικό Τμήμα, Ανώτατη Σχολή Παιδαγωγικής και Τεχνολογίας

chrtriantaf@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr, vaspiliot@aspete.gr, dpotari@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr, maha.farah@gmail.com

To Erasmus+ project ENvironmental Socio-scientific Issues in Initial Teacher Education (ENSITE) (2019-2022) στοχεύει στην ευαισθητοποίηση και την προετοιμασία των μελλοντικών εκπαιδευτικών που σπουδάζουν Μαθηματικά και Φυσικές επιστήμες με σκοπό να συμπεριλάβουν στη διδασκαλία τους προβλήματα που να αφορούν περιβαλλοντικής φύσης κοινωνικό-επιστημονικά ζητήματα.

Όπως όλοι γνωρίζουμε, η κοινωνία μας αντιμετωπίζει σοβαρές παγκόσμιες περιβαλλοντικές προκλήσεις. Για την ανάπτυξη βιώσιμων λύσεων σ' αυτές τις προκλήσεις, τα εκπαιδευτικά μας συστήματα έχουν την υποχρέωση να εξοπλίσουν τους μελλοντικούς πολίτες όχι μόνο με επιστημονικές γνώσεις και τεχνογνωσία αλλά και την ανάπτυξη κριτικής και δημιουργικής σκέψης διατηρώντας ταυτόχρονα ηθικές, πολιτισμικές και οικολογικές ευαισθησίες (Barwell, 2013; Maaß et al., 2019).

Στο ENSITE συμμετέχουν 11 επιστημονικές ομάδες από ΑΕΙ 11 Ευρωπαϊκών χωρών. Ο συντονιστής του προγράμματος είναι το Πανεπιστήμιο του Freiburg. Από την Ελλάδα συμμετέχει το Μαθηματικό Τμήμα του ΕΚΠΑ.

Στα πλαίσια του προγράμματος αναπτύχθηκαν 13 θεματικές ενότητες (IOs) που καλύπτουν, μεταξύ άλλων, τις γνώσεις περιεχομένου σχετικά με κοινωνικο-επιστημονικής φύσης θέματα, πώς να τα αντιμετωπίσουν οι εκπαιδευτικοί διδακτικά και πώς να σχεδιάσουν σχετικά μαθηματικά έργα οι ίδιοι για τους μαθητές τους. Κάθε φάση ανάπτυξης ακολουθείται από αναθεώρηση, πιλοτική εφαρμογή και τέλος παραγωγή και οριστικοποίηση του τελικού διδακτικού υλικού. Η Ελληνική ομάδα έχει αναλάβει τη διαμόρφωση της θεματικής ενότητας IO7 που προτείνει τρόπους με τους οποίους περιβαλλοντικής φύσης θέματα μπορούν να συνδεθούν με τα ΑΠΣ στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες στις χώρες της Ευρώπης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barwell, R. (2013). The mathematical formatting of climate change: critical mathematics education and post-normal science. *Research in Mathematics Education, 15*(1), 1-16.

Maaß K., Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2019). Promoting active citizenship in mathematics teaching. *ZDM*, *51*(6), 991-100.

Η ΜΕΛΕΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΜΕΣΟ ΓΙΑ ΤΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ψυχάρης Γιώργος, Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Πόταρη Δέσποινα, Τριανταφύλλου Χρυσαυγή

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

gpsych@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr, chrtriantaf@math.uoa.gr

Το πρόγραμμα Erasmus+ με τίτλο ‘Η Μελέτη Μαθήματος ως Μέσο για τη Βελτίωση της Επίδοσης στα Μαθηματικά’ – ‘Lesson Study as a Vehicle for Improving Achievement in Mathematics’ (LESSAM) (2020-2023) στοχεύει στη διερεύνηση του ρόλου της Μελέτης Μαθήματος (ΜΜ) στην επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών, αλλά και στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στη σχολική τάξη. Στο βασικό μοντέλο ΜΜ ομάδες εκπαιδευτικών συνεργάζονται σε ένα σχολείο και διερευνούν συνεργατικά τις διδακτικές τους πρακτικές. Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει: α) συναντήσεις σχεδιασμού μαθημάτων, β) διδασκαλία και παρατήρηση, και γ) συναντήσεις συζήτησης/αναστοχασμού. Οι παραλλαγές του μοντέλου που υιοθετεί το LESSAM περιλαμβάνουν την παρουσία συντονιστή ΜΜ ή συμβούλου ΜΜ που παρέχουν διαφοροποιημένη υποστήριξη στους εκπαιδευτικούς. Παρά την πολλά υποσχόμενη φύση του μοντέλου ΜΜ (Hart et al., 2011), χρειάζεται περαιτέρω έρευνα ώστε να μελετηθεί σε βάθος η διαδικασία της επαγγελματικής μάθησης των εκπαιδευτικών στο πλαίσιο της ΜΜ και η επιρροή της στις διδακτικές πρακτικές τους και στην κατανόηση των μαθητών. Το LESSAM εστιάζεται στον μαθηματικό συλλογισμό, μια κεντρική μαθηματική ικανότητα που περιλαμβάνει εξερεύνηση, εικασία και αιτιολόγηση (Harel & Sowder, 2007). Στο πρόγραμμα συμμετέχουν 4 ερευνητικές ομάδες από την Κύπρο, την Ελλάδα, την Ολλανδία και το Βέλγιο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Education* (pp. 805-842). Information Age Pub Inc., Greenwich.

Hart, L., Alston, A. & Murata, A. (Eds.) (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9

ΕΝΙΣΧΥΟΝΤΑΣ ΤΙΣ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗΣ ΤΩΝ ΚΟΡΙΤΣΙΩΝ ΜΕ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ STEM ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ψυχάρης Γιώργος[1], Πόταρη Δέσποινα[1], Τριανταφύλλου Χρυσαυγή[1], Σπηλιωτοπούλου Βασιλική[2], Ζαχαριάδης Θεοδόσιος[1]

[1]Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, [2]Παιδαγωγικό Τμήμα, Ανώτατη Σχολή Παιδαγωγικής και Τεχνολογίας

gpsych@math.uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr, chrtriantaf@math.uoa.gr, vaspiliot@aspete.gr, tzaharia@math.uoa.gr

Το πιλοτικό πρόγραμμα Ενισχύοντας τις Προοπτικές Ενασχόλησης των Κοριτσιών με τις Ψηφιακές Τεχνολογίες και την Επιχειρηματικότητα - Empower Girls to Embrace their Digital and Entrepreneurial Potential (GEM) (2020-2022). Το GEM έχει στόχο να ενισχύσει τις προοπτικές ενασχόλησης των νεαρών κοριτσιών της Ευρώπης με αντικείμενα STEM και την επιχειρηματικότητα και να ενθαρρύνει τις κοινωνίες των χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης να υποστηρίξουν αυτή την προσπάθεια. Στο πλαίσιο του έργου οργανώνονται θερινά σχολεία σε 11 Ευρωπαϊκές χώρες για κορίτσια 13-18 ετών από ερευνητικές ομάδες ιδρυμάτων τριτοβάθμιας εκπαίδευσης σε συνεργασία με φορείς από τον επαγγελματικό χώρο και φορείς εκπαιδευτικής πολιτικής που θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την μελλοντική επαγγελματική ενασχόληση των κοριτσιών με αντικείμενα STEM. Στα θερινά σχολεία οι μαθήτριες έχουν την ευκαιρία να εμπλακούν σε δραστηριότητες και εργαστήρια που σχετίζονται με αντικείμενα STEM όπως επίλυση προβλήματος, διερεύνηση ρεαλιστικών καταστάσεων (π.χ. από τον χώρο εργασίας), παιχνίδια, προγραμματισμό, κ.λπ. Επίσης, έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν ομιλίες γυναικών και να συζητήσουν με γυναίκες που έχουν διαγράψει σημαντική επαγγελματική και επιστημονική πορεία στα αντικείμενα STEM όπως και διαλέξεις που αναδεικνύουν τον ρόλο των γυναικών στην επιστήμη. Το GEM στην Ελλάδα συντονίζεται από το Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ. Το καλοκαίρι του 2021 οργανώθηκε διαδικτυακά το πρώτο θερινό σχολείο και σχεδιάζεται ένα ακόμη θερινό σχολείο για το καλοκαίρι του 2022. Στο σχολείο 2021 οργανώθηκαν μεταξύ άλλων δύο στρογγυλά τραπέζια με ομιλήτριες από τα ακόλουθα πεδία STEM: μαθηματικά, μοριακή βιολογία, ωκεανογραφία, πληροφορική, βιοεπιστήμες (ανάπτυξη φαρμάκων), μετεωρολογία, μηχανολογία. Ανάλογες δράσεις θα υπάρξουν και στο θερινό σχολείο 2022.

DEVELOPING MATHEMATICS TEACHING UNITS FOR MIGRANT STUDENTS- MATH4MIGRANTS

Κυριακόπουλος Γεώργιος, Τσίτσος Βασίλης, Γκανά Λένα, Σταθοπούλου Χαρούλα

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

gvk_6@yahoo.gr, vtsitsos@sch.gr, egana@uth.gr, hastath@uth.gr

Ο πολυπολιτισμικός χαρακτήρας των τάξεων αποτελεί σημαντική πρόκληση σε πολλές ευρωπαϊκές χώρες. Η δουλειά του εκπαιδευτικού καθίσταται ολοένα και πιο δύσκολη γιατί συνήθως δεν είναι επαρκώς προετοιμασμένος να αντιμετωπίσει ένα πλαίσιο τάξης με μαθητές που έχουν μεταναστευτικό υπόβαθρο και διαφορετικά κοινωνικό-πολιτισμικά και γλωσσικά στοιχεία. Διδακτικό υλικό με επίκεντρο τους μετανάστες μαθητές υφίσταται κυρίως στο γλωσσικό αντικείμενο και όχι στα Μαθηματικά.

Οι εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών αισθάνονται την ανάγκη για επιμόρφωση και παροχή υλικού που να αντικατοπτρίζει τις ανάγκες των τάξεων τους όσον αφορά τις γλωσσικές και πολιτισμικές διαφορές, αφού οι μαθητές με μεταναστευτικό υπόβαθρο αντιμετωπίζουν ακόμη περισσότερες δυσκολίες από τους γηγενείς συμμαθητές τους στην απόκτηση θεμελιωδών μαθηματικών δεξιοτήτων (Turner & Johnson, 2018).

Οι επτά εταίροι αυτού του έργου είναι τέσσερα ιδρύματα κατάρτισης και έρευνας εκπαιδευτικών και τρία σχολεία. Στόχος είναι να σχεδιαστεί η ανάπτυξη διδακτικών ενοτήτων, θεμελιωδών εννοιών και πρακτική εφαρμογή τους προσφέροντας στους εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών μια κατευθυντήρια γραμμή, πιθανές στρατηγικές και μια συλλογή περιπτωσιολογικών μελετών που τους δείχνει πώς άλλοι εκπαιδευτικοί μετέτρεψαν τις μαθηματικές έννοιες που υφίστανται στο κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο σε συγκεκριμένες διδακτικές ενότητες.

Αποτελεί επίσης στόχο να αναπτύξει την έννοια της διδακτικής μονάδας ως ένα περίγραμμα που περιέχει ένα θεωρητικό πλαίσιο και σημεία αγκύρωσης με σκοπό να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία ολοκληρωμένων διδακτικών μονάδων σε πολλαπλά πλαίσια και μαθηματικά θέματα.

Τα κύρια αποτελέσματα θα είναι 45 έτοιμες προς χρήση διδακτικές ενότητες στα μαθηματικά, χωρίς να αποτελούν πλήρως επεξεργασμένη διδασκαλία ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να ενσωματώσουν δικές τους στρατηγικές και μεθόδους με στόχο την προσαρμογή στα μεταβαλλόμενα περιβάλλοντα. Η καθεμία θα αποτελείται από εισαγωγή, βασικές πληροφορίες, ένα πρόγραμμα-χρονοδιάγραμμα και όλο το απαραίτητο διδακτικό υλικό ειδικά σχεδιασμένα για μαθητές με ποικίλα μεταναστευτικά υπόβαθρα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Newkirk-Turner, B. L., & Johnson, V. E. (2018). Curriculum-based language assessment with culturally and linguistically diverse students in the context of mathematics. *Language, Speech, and Hearing Services in Schools*, *49*(2), 189-196.

ΜΙΑ ‘ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ’ ΔΙΑΝΟΙΞΗ ΧΩΡΟΥ ΓΙΑ ΚΡΙΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΑΣ: ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ‘ΜΙΑ ΝΕΑ ΑΡΧΗ ΣΤΑ ΕΠΑΛ’

Χρονάκη Άννα, Κατσαρού Ελένη

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Πανεπιστήμιο Κρήτης

chronaki@uth.gr, katsarou@uoc.gr

Τις τελευταίες δεκαετίες, συγκεκριμένα ρεύματα στον χώρο της μαθηματικής και της γλωσσικής εκπαίδευσης συγκλίνουν αναγνωρίζοντας την ανάγκη για διάνοιξη ενός ανοιχτά δημοκρατικού χώρου για κριτική και δημιουργική σκέψη στο παιδαγωγικό και διδακτικό πλαίσιο θέτοντας ως προτεραιότητα τα παιδιά και την μετατόπιση προς μια σχεσιακή οντο/επιστημολογική προσέγγιση της γνώσης. Η έννοια της ‘κριτικής’ στο πλαίσιο αυτό συνδέεται με την παραδοχή ότι τόσο η γλώσσα όσο και τα μαθηματικά δεν αποτελούν ουδέτερα πεδία ανα/κατασκευής, ανα/παραγωγής, επαν/επινόησης ή/και επανά/χρησης της γνώσης αλλά, αντίθετα, συνυφαίνεται με κοινωνικούς, πολιτισμικούς και πολιτικούς λόγους για το υποκείμενο, την δραστηριότητα και την δράση συγκροτώντας συνθήκες συμπερίληψης και αποκλεισμού στη μάθηση (βλ. αναλυτικά προγράμματα, σχολικά εγχειρίδια, εξετάσεις). Στο πρόγραμμα του ΙΕΠ (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής) ‘Μία Νέα Αρχή στα ΕΠΑ.Λ’ επεξεργαστήκαμε βασικές αρχές για την κριτική και δημιουργική σκέψη στη διδασκαλία της Γλώσσας και των Μαθηματικών. Δόθηκε έμφαση στην δημιουργία υλικού και μεθοδολογίας για τη διδασκαλία και την επιμόρφωση με στόχο την ενδυνάμωση των μαθητριών και των μαθητών που σπουδάζουν στο Επαγγελματικό Λύκειο και που ανήκουν κύρια σε ευάλωτες μαθησιακά ομάδες. Το υλικό που παρήχθη προκάλεσε εποικοδομητικό διάλογο και έναυσμα για δοκιμή συναφών πρακτικών σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης όπως έχει αναδειχθεί και από πρότερη ερευνητική μας δραστηριότητα (βλ. Κατσαρού, 2020, Chronaki et al, 2022 και Πολιτειότητα και Μαθηματική εκπαίδευση http://www.citizenship-and-mathematics.eu/).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κατσαρού, Ε. 2020. Η Δημοκρατία στο Σχολείο. Προοπτικές από την αξιοποίηση διαδικασιών έρευνας-δράσης και κριτικού γραμματισμού. Αθήνα. Εκδ. Κριτική

Chronaki, A. Planas, N. and Svensson-Kallberg, P. (2022). Onto/Epistemic Violence and Dialogicality in Translanguaging Practices Across Multilingual Classrooms. *Teachers College Record* Volume 124 Number 5, 2022 / https://www.tcrecord.org ID Number: 24048

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
9ΟΥ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ
ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ISBN: 978-618-82277-2-9