8ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

6 – 8 Δεκεμβρίου, 2019

Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία, Κύπρος

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

Επιμελητής

Κωνσταντίνος Χρίστου

ISBN: 978-9925-580-79-8

Τεχνική Επιμέλεια: Νάγια Μαυρή

8^{o} Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

Ένωση Ερευνητών

Διδακτικής των Μαθηματικών

Εκδότης: ΕΝΕΔΙΜ

Κύπρος 2019

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ / POSTERS

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Το 8ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ που συνδιοργανώνεται από την Ένωση Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, το Τμήμα Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου, το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου και την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία διεξάγεται στους χώρους του Πανεπιστημίου Κύπρου στη Λευκωσία το τριήμερο 6-8 Δεκεμβρίου 2019.

Θέμα του συνεδρίου είναι οι «Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών». Στο πλαίσιο αυτό εντάσσονται οι κεντρικές εισηγήσεις που συζητούν θέματα αξιοποίησης ψηφιακών εργαλείων στη μαθησιακή διαδικασία, τη συμβολή της έρευνας στην αποτελεσματική διδασκαλία στα μαθηματικά και τον ρόλο της πανεπιστημιακής γνώσης στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών. Οι εισηγήσεις που έχουν υποβληθεί αναδεικνύουν τη σημασία των ψηφιακών εργαλείων στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, κοινωνικό-πολιτισμικές, πολιτικές και θεσμικές διαστάσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών, σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδασκαλία διαφορετικών μαθηματικών εννοιών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, καθώς και τον ρόλο της γνώσης των εκπαιδευτικών.

Το συνέδριο δίνει τη δυνατότητα σε έμπειρους και νεαρούς ερευνητές στη διδακτική των μαθηματικών να παρουσιάσουν τη δουλειά τους, συμβάλλοντας στη διάχυση της επιστημονικής γνώσης μεταξύ των μελών της ακαδημαϊκής και της εκπαιδευτικής κοινότητας. Το συνέδριο προσφέρει ουσιαστικές ευκαιρίες για επικοινωνία και ανταλλαγή απόψεων.

Προεδρεύων

Κωνσταντίνος Χρίστου

ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ

Paul Drijvers

Freudenthal Institute, Utrecht University and HU University of Applied Sciences Utrecht

Embodied instrumentation: two views on using digital technology in mathematics education

Nowadays, the omnipresence of powerful digital mathematical tools raises important questions about their impact on mathematics teaching and learning. These questions concern the curriculum, and the relationship between tool use and learning in particular. To address the latter question, I will first zoom out on some overall views on the didactical functionalities of digital technology in mathematics education, and the effects of using these tools on learning. Next, I will zoom in on two views on this phenomenon in some more detail: (1) the instrumental approach to tool use, and (2) embodied and extended views on cognition. Both will be illustrated by some examples. As a conclusion, I will claim that both an instrumentation and an embodiment view on tool use may contribute to identifying criteria for a meaningful integration of digital tools in mathematics education.

Προωθώντας την ποιότητα στην εκπαίδευση:
Η συμβολή της έρευνας για την αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά

Λεωνίδας Κυριακίδης

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κεφάλαιο αυτό υποστηρίζεται η ανάγκη συστηματικής διασύνδεσης της έρευνας για την αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά με την έρευνα για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, ώστε να επιτευχθεί βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης. Το κεφάλαιο χωρίζεται σε τέσσερα μέρη. Στο πρώτο μέρος, επιχειρείται μια κριτική ανασκόπηση της έρευνας για την αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά και αναφέρονται τα σημαντικότερα πορίσματά της, καθώς και θεωρητικά μοντέλα που προέκυψαν από την έρευνα αυτή. Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας επιτρέπει να επισημάνουμε τόσο τα σημαντικότερα επιτεύγματα της έρευνας για την αποτελεσματική διδασκαλία, όσο και τις αδυναμίες της. Τονίζεται ότι η έρευνα για την αποτελεσματική διδασκαλία δεν έχει καταφέρει να επηρεάσει σημαντικά την έρευνα για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και κατ' επέκταση δεν έχει συμβάλει στη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Στο δεύτερο μέρος, παρουσιάζονται τα σημαντικότερα πορίσματα της έρευνας για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και επισημαίνεται η έλλειψη συστηματικής αξιολόγησης των προγραμμάτων επιμόρφωσης, αλλά και των βασικών προσεγγίσεων επιμόρφωσης σε διεθνές επίπεδο. Τονίζεται, επίσης, ότι παρεμβάσεις που αποσκοπούν σε βελτίωση της ποιότητας των εκπαιδευτικών στο μάθημα των Μαθηματικών δεν στηρίζονται σε εμπειρικά τεκμηριωμένα θεωρητικά σχήματα. Στο τρίτο μέρος, παρουσιάζεται η *δυναμική προσέγγιση βελτίωσης της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών* που αναπτύχθηκε ώστε να επιτυγχάνεται με συστηματικό τρόπο διασύνδεση ανάμεσα στην έρευνα για την αποτελεσματική διδασκαλία και στην έρευνα για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Για το σκοπό αυτό, παρουσιάζεται συνοπτικά το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται η προσέγγιση αυτή, καθώς και οι βασικές αρχές και στάδια της δυναμικής προσέγγισης. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται έρευνες που διεξήχθησαν σε διάφορες χώρες του κόσμου και εξέτασαν την επίδραση της προσέγγισης αυτής στη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας και στην προώθηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων στα Μαθηματικά. Στο τελευταίο μέρος, διατυπώνονται εισηγήσεις προς την ερευνητική κοινότητα και τους υπεύθυνους χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής που θα επιτρέψουν τη συστηματική αξιοποίηση της δυναμικής προσέγγισης για σκοπούς βελτίωσης τόσο των προγραμμάτων επιμόρφωσης, όσο και της ποιότητας διδασκαλίας στα Μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Εισαγωγή

Η Έρευνα στον χώρο της Εκπαιδευτικής Αποτελεσματικότητας (ΕΕΑ) έχει παρουσιάσει ραγδαία ανάπτυξη κατά τη διάρκεια των τελευταίων τριών δεκαετιών τόσο αναφορικά με τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται, όσο και με τη δημιουργία μίας εκτενέστερης και πληρέστερης θεωρητικής βάσης. Αφενός, η μεθοδολογική πρόοδος που συντελέστηκε επέτρεψε την εξαγωγή αποτελεσματικότερων και σαφέστερων συμπερασμάτων σχετικά με την επίδραση των παραγόντων σε επίπεδο εκπαιδευτικού (τάξης) και σχολείου στις διαφορές που παρουσιάζονται στα μαθησιακά αποτελέσματα (Creemers, Kyriakides, & Sammons, 2010· Goldstein, 2003). Αφετέρου, η πρόοδος που έχει σημειωθεί στον θεωρητικό τομέα της εν λόγω ερευνητικής περιοχής έγκειται στη διατύπωση σαφέστερων ορισμών στις έννοιες που χρησιμοποιούνται καθώς και στην αποσαφήνιση των μεταξύ τους σχέσεων (π.χ., Levin & Lezotte, 1990· Scheerens & Bosker, 1997). Ωστόσο, φαίνεται να υπάρχει έλλειψη θεωρητικών μοντέλων τα οποία να είναι σε θέση να αποτελέσουν μια βάση για την περαιτέρω ανάπτυξη του θεωρητικού πλαισίου, ενώ το πρόβλημα οξύνεται με τη σπάνια αξιοποίηση των υπαρχόντων μοντέλων (Kyriakides, 2005). Συνεπώς, οι πλείστες έρευνες εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας αφορούν στην καθιέρωση στατιστικών σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και όχι στη δημιουργία και εξέταση θεωριών που θα μπορούσαν να ερμηνεύσουν τις εν λόγω σχέσεις (Scheerens, 2013).

Η ανάγκη για δημιουργία και εξέταση θεωρητικών μοντέλων σχολικής αποτελεσματικότητας έγκειται σε διάφορους λόγους. Πρώτον, ένα μοντέλο εξυπηρετεί στην ευκολότερη και απλούστερη ερμηνεία των ευρημάτων προηγούμενων εμπειρικών ερευνών. Δεύτερον, η καθιέρωση και ο έλεγχος θεωρητικών μοντέλων συμβάλει στην καθοδήγηση των νέων ερευνητών στον τομέα της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας, αποτρέποντας την άσκοπη διερεύνηση ήδη γνωστών θεμάτων και καταδεικνύοντας τομείς στους οποίους επιπρόσθετη έρευνα είναι αναγκαία. Τέλος, ένα μοντέλο μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για επαγγελματίες στο χώρο της εκπαίδευσης (π.χ. εκπαιδευτικούς, διευθυντές, φορείς χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής κ.α.), καθώς υπάρχουν ενδείξεις για την απουσία θεωριών εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας που να συμβάλουν στην προώθηση της εκπαιδευτικής γνώσης των εμπλεκομένων στην εκπαίδευση (Creemers & Kyriakides, 2006).

Κατά τη δεκαετία του 1990 οι ερευνητές έχουν καταβάλει προσπάθειες ενσωμάτωσης των ευρημάτων της έρευνας για τη σχολική αποτελεσματικότητα και της έρευνας για την αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού γεγονός που οδήγησε στην ανάπτυξη πολυεπίπεδων μοντέλων εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας τα οποία χαρακτηρίζονταν από συγκερασμό διαφορετικών θεωρητικών προσεγγίσεων της αποτελεσματικότητας, όπως την κοινωνιολογική και τη ψυχολογική προσέγγιση (π.χ., Creemers, 1994· Scheerens, 1992· Stringfield & Slavin, 1992). Τα μοντέλα αυτά χαρακτηρίζονται από μια πολυεπίπεδη δομή, όπου τα σχολεία εδράζονται σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα, οι τάξεις εδράζονται σε σχολεία και οι μαθητές εδράζονται σε τάξεις. Για τον εντοπισμό και την αιτιολόγηση των παραγόντων που περιλαμβάνονται στα μοντέλα γίνεται χρήση τόσο των θεωριών διοίκησης όσο και των θεωριών μάθησης.

Ένα από τα σημαντικότερα μοντέλα σε αυτή τη φάση των ερευνών εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας (Teddlie & Reynolds, 2000), θεωρείται το ολιστικό μοντέλο εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας (Creemers, 1994). Η εγκυρότητα του μοντέλου αυτού έχει αναδειχθεί μέσα από έξι έρευνες οι οποίες διενεργήθηκαν σε δύο διαφορετικές χώρες (de Jong, Westerhof, & Kruiter, 2004· Driessen & Sleegers, 2000· Kyriakides, 2005· Kyriakides, Campbell, & Gagatsis, 2000· Kyriakides & Tsangaridou, 2008· Reezigt, Guldemond, & Creemers, 1999). Οι έρευνες αυτές προσέφεραν εμπειρική υποστήριξη στις κυριότερες υποθέσεις του μοντέλου και αποκάλυψαν ότι οι επιδράσεις των διάφορων παραγόντων στην επίδοση των μαθητών είναι πολυεπίπεδες (Kyriakides, 2008). Το συμπέρασμα αυτό συνάδει με τα ευρήματα των πλείστων ερευνών εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας που διενεργούνται σε διάφορες χώρες (Teddlie & Reynolds, 2000) και στηρίζει την υπόθεση ότι τα θεωρητικά μοντέλα εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας θα πρέπει να είναι πολυεπίπεδα. Ωστόσο, εκτός από την πολυεπίπεδη φύση της αποτελεσματικότητας, οι έρευνες αυτές αποκάλυψαν ότι οι σχέσεις μεταξύ των παραγόντων που εδράζονται στα διάφορα επίπεδα είναι πιο σύνθετες από ότι υπέθεταν τα προηγούμενα μοντέλα (Kyriakides, 2008). Αυτό αφορά ιδιαίτερα τις επιδράσεις που προκύπτουν δια μέσου των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των παραγόντων που εδράζονται στα επίπεδα της τάξης και του μαθητή και καταδεικνύουν τη σημασία διερεύνησης της διαφοροποιημένης αποτελεσματικότητας (Campbell, Kyriakides, Muijs, & Robinson, 2004). Παράλληλα, μια σύνθεση των πιο πάνω ερευνών έχει καταλήξει σε εισηγήσεις για περαιτέρω ανάπτυξη του ολιστικού μοντέλου, λαμβάνοντας υπόψη τη δυναμική φύση της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας (Kyriakides, 2008). Έρευνες που αποσκοπούσαν στον έλεγχο της εγκυρότητας του ολιστικού μοντέλου, καθώς και έρευνες που είχαν ως στόχο τη διερεύνηση της σταθερότητας των σχολικών επιδράσεων (π.χ., Gray, Goldstein, & Jesson, 1996· Gray, Goldstein, & Thomas, 2001· Thomas, 2001· Thomas, Peng, & Gray, 2007) αποκάλυψαν ανησυχίες για την προσπάθεια των μοντέλων της προηγούμενης δεκαετίας να μελετήσουν τη σχολική αποτελεσματικότητα ως ένα στατικό φαινόμενο. Η διδασκαλία και μάθηση αποτελούν δυναμικές διαδικασίες οι οποίες προσαρμόζονται συνεχώς αναλόγως των μεταβαλλόμενων αναγκών και των εκπαιδευτικών ευκαιριών. Κατ' επέκταση, είναι απαραίτητη η θεώρηση της αποτελεσματικής εκπαίδευσης ως μιας δυναμικής και συνεχούς διαδικασίας (Donaldson, 2001). Στο πλαίσιο αυτό οι Creemers και Kyriakides (2008) έχουν αναπτύξει το Δυναμικό Μοντέλο Εκπαιδευτικής Αποτελεσματικότητας (ΔΜΕΑ) το οποίο επιδιώκει να ορίσει τις δυναμικές σχέσεις μεταξύ των πολλαπλών παραγόντων που έχουν βρεθεί να σχετίζονται με τα μαθησιακά αποτελέσματα.

Πιο κάτω, παρουσιάζεται συγκεκριμένα η έρευνα για την αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά και οι περιορισμοί της και ακολούθως παρουσιάζεται η ανάπτυξη του ΔΜΕΑ και παρέχονται ερευνητικά στοιχεία αναφορικά με την εγκυρότητά του. Παράλληλα, υποστηρίζεται ότι απώτερος στόχος της δημιουργίας και ελέγχου του ΔΜΕΑ ήταν η εγκαθίδρυση ισχυρότερων δεσμών μεταξύ της ΕΕΑ και της Έρευνας για Βελτίωση της

Αποτελεσματικότητας (ΕΒΑ). Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε στην Κύπρο και αξιοποίησε το ΔΜΕΑ και τέλος παρουσιάζονται εισηγήσεις για τα επόμενα βήματα που μπορούν να πραγματοποιηθούν αναπτύσσοντας κατάλληλες εκπαιδευτικές πολιτικές.

Η έρευνα για την αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά: Σημαντικότερα πορίσματα

Τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες, οι ερευνητές επιδιώκουν να εντοπίσουν παράγοντες που αναφέρονται στη διδακτική συμπεριφορά του εκπαιδευτικού και οι οποίοι μπορούν να προβλέψουν την αποτελεσματικότητά του. Στο πλαίσιο αυτό, ερευνητικό ενδιαφέρον αποτέλεσαν οι παράγοντες που αφορούσαν στην ποσότητα της διδασκαλίας και το ρυθμό μάθησης (amount learnt is related to opportunity to learn). Δια μέσου των ερευνών αυτών διαφάνηκε ότι όταν οι εκπαιδευτικοί θέτουν ως προτεραιότητα την ενασχόληση με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος και αφιερώνουν τον περισσότερο διδακτικό χρόνο σε συναφείς με το αναλυτικό πρόγραμμα δραστηριότητες, αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μεγιστοποιείται η μάθηση. Ακόμη, παρατηρήθηκε ότι αυτό που χαρακτηρίζει τον αποτελεσματικό εκπαιδευτικό είναι η ικανότητά του να οργανώνει την τάξη του με τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται ο χρόνος κατά τον οποίο οι μαθητές ασχολούνται ενεργά με διδακτικές δραστηριότητες (maximize engagement rates).

Πέραν από τα πιο πάνω, οι ερευνητές επικεντρώθηκαν και στις διδακτικές δεξιότητες που αφορούν στην οργάνωση/δομή του μαθήματος καθώς και στην ποιότητα του (form and quality of teacher’s organized lessons). Συγκεκριμένα, ένας από τους παράγοντες που μελετήθηκε εκτενώς από τους ερευνητές στο χώρο της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας ήταν η δόμηση (structuring). Η δόμηση αναφέρεται σε τρεις πτυχές: α) στην παρουσίαση της δομής του μαθήματος και στην επεξήγηση των επιμέρους πτυχών του και του τρόπου με τον οποίο αυτές σχετίζονται μεταξύ τους, β) στην επισήμανση των βασικών σημείων του μαθήματος και γ) στην ανακεφαλαίωση των βασικών σημείων στο τέλος του μαθήματος. Πέραν από την δόμηση, άλλος σημαντικός παράγοντας που φάνηκε να επηρεάζει είναι η σαφήνεια κατά την παρουσίαση βασικών εννοιών και η άμεση επικοινωνία με τους μαθητές. Επιπρόσθετα, σημαντικό ρόλο παίζει και η υποβολή ερωτήσεων και η εμπλοκή των μαθητών στο μάθημα. Οι ερωτήσεις που φάνηκε να υποβάλουν οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί, είναι τόσο κλειστού όσο και ανοικτού τύπου (product and process questions). Συνεπώς, οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί αναμένουν όχι μόνο ότι οι μαθητές θα μπορέσουν να δώσουν το αποτέλεσμα της σκέψης τους αλλά και ότι είναι σε θέση να εξηγήσουν την πορεία την οποία ακολούθησαν για να καταλήξουν στην απάντησή τους. Παράλληλα, παρέχουν επαρκή χρόνο για να σκεφτούν οι μαθητές πριν τους καλέσουν να δώσουν κάποια απάντηση ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας της ερώτησης και θέτουν ερωτήσεις οι οποίες ανταποκρίνονται στις γνωστικές ικανότητες των μαθητών τους. Τέλος ο κατάλληλος χειρισμός των απαντήσεων των μαθητών μέσω της παροχής κατάλληλης ανατροφοδότησης αποτελεί σημαντικό στοιχείο του παράγοντα αυτού. Οι έρευνες αναφέρουν ακόμη ότι οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή να εργαστεί ατομικά και σε μικρές ομάδες σε ασκήσεις εμπέδωσης. Θεωρείται ότι η παροχή στους μαθητές ευκαιριών εμπέδωσης και εφαρμογής της νέας γνώσης μπορεί να ενισχύσει τα μαθησιακά αποτελέσματα (Borich, 1992). Η εκμάθηση νέων πληροφοριών δεν μπορεί να είναι μια συνεχής διαδικασία, αφού σύμφωνα με τη Θεωρία Γνωστικού Φορτίου (cognitive load theory) η εργαζόμενη μνήμη μπορεί να επεξεργαστεί μόνο μια περιορισμένη ποσότητα πληροφοριών σε κάθε δεδομένη στιγμή (Kirschner, 2002· Paas, Renkl, & Sweller, 2003).

Ένας άλλος σημαντικός παράγοντας που βρέθηκε να επηρεάζει τα μαθησιακά αποτελέσματα, είναι το περιβάλλον μάθησης της τάξης. Στο περιβάλλον της τάξης, εμπερικλείονται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ εκπαιδευτικού-μαθητή, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών, η διαχείριση απειθαρχίας, η ενθάρρυνση συναγωνισμού και αποθάρρυνση των αρνητικών πτυχών του καθώς και η μεταχείριση των μαθητών από τον εκπαιδευτικό (students' treatment by the teacher). Οι αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικού-μαθητή και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών, φάνηκε να είναι βασικά στοιχεία μέτρησης του κλίματος της τάξης (den Brok, Brekelmans, & Wubbels, 2004). Η διαχείριση απειθαρχίας, η ενθάρρυνση συναγωνισμού και αποθάρρυνση των αρνητικών πτυχών του καθώς και η μεταχείριση των μαθητών από τον εκπαιδευτικό, συγκεκριμένα, αναφέρονται στην προσπάθεια του εκπαιδευτικού να δημιουργήσει ένα υποστηρικτικό μαθησιακό περιβάλλον μέσα στην τάξη.

Περιορισμοί της έρευνας για την αποτελεσματική διδασκαλία στα Μαθηματικά

Η έρευνα πρέπει να λάβει υπόψη της όλο το φάσμα των στόχων (γνωστικών, μεταγνωστικών, συναισθηματικών και ψυχοκινητικών). Ακόμη, σύγχρονες θεωρίες μάθησης χρειάζεται να ληφθούν υπόψη στην αναζήτηση παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα διδασκαλίας στα Μαθηματικά. Μεταναλύσεις φανερώνουν ότι ορισμένοι παράγοντες που συνάδουν με το μοντέλο της ενεργούς και άμεσης διδασκαλίας, καθώς και ορισμένοι παράγοντες που συνάδουν με σύγχρονες θεωρίες μάθησης προβλέπουν την αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού (Kyriakides, Christoforou, & Charalambous, 2013· Seidel & Shavelson, 2007).

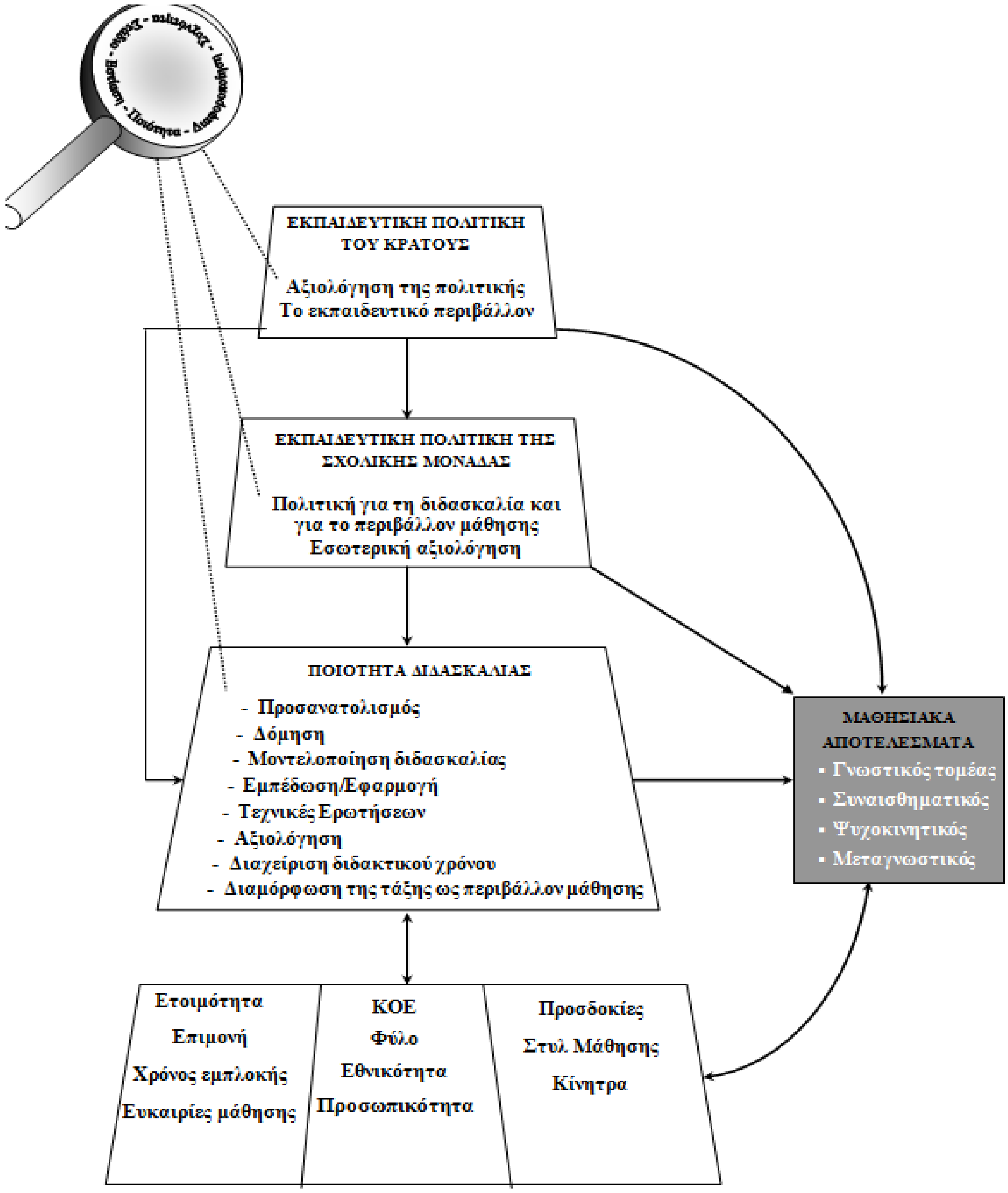
Η έρευνα για την αποτελεσματική διδασκαλία δεν έχει συμβάλει ουσιαστικά στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού γεγονός που οδηγεί σε αδυναμία δημιουργίας συνδέσμων ανάμεσα στη θεωρία και την πράξη (Creemers, Kyriakides, & Antoniou, 2013). Συγκεκριμένα, ελάχιστοι ερευνητές στο χώρο της επαγγελματικής κατάρτισης εκπαιδευτικών ανέπτυξαν παρεμβατικά προγράμματα λαμβάνοντας υπόψη τα πορίσματα της έρευνας για την αποτελεσματική διδασκαλία και ακόμη πιο λίγοι εξέτασαν την επίδραση των προγραμμάτων επιμόρφωσης στη βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης. Ακόμη, η χρήση των αποτελεσμάτων των ερευνών στο χώρο της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας με σκοπό την ανάπτυξη μεθόδων βελτίωσης της διδακτικής πράξης δεν αποτέλεσε σημείο ενδιαφέροντος για τους ερευνητές στο χώρο της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας.

Το Δυναμικό Μοντέλο Εκπαιδευτικής Αποτελεσματικότητας (ΔΜΕΑ): Συνοπτική Παρουσίαση

Βασικά χαρακτηριστικά του ΔΜΕΑ

Στους πιο πάνω περιορισμούς που έχουν αναφερθεί, στηρίχθηκε η ανάπτυξη του ΔΜΕΑ (Creemers & Kyriakides, 2008) τα βασικά χαρακτηριστικά του οποίου περιγράφονται στη συνέχεια. Αρχικά, το ΔΜΕΑ λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι οι έρευνες εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας που έχουν διενεργηθεί σε διάφορες χώρες αποκάλυψαν ότι οι επιδράσεις στα μαθησιακά αποτελέσματα είναι πολυεπίπεδες (Teddlie & Reynolds, 2000). Συνεπώς, το ΔΜΕΑ είναι πολυεπίπεδο και αναφέρεται σε παράγοντες που δρουν στα τέσσερα διαφορετικά επίπεδα (μαθητή, τάξης, σχολείου και εκπαιδευτικού συστήματος) που παρουσιάζονται στο διάγραμμα 1. Δίνεται έμφαση στις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης και οι ρόλοι των βασικών εμπλεκομένων (δηλαδή μαθητή και εκπαιδευτικού) αναλύονται. Πέραν όμως από αυτά τα δύο επίπεδα, το ΔΜΕΑ αναφέρεται σε παράγοντες που εδράζονται στο επίπεδο του σχολείου και οι οποίοι αναμένεται να επηρεάζουν τις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης μέσω της ανάπτυξης και αξιολόγησης της σχολικής πολιτικής για τη διδασκαλία και της πολιτικής για τη δημιουργία ενός υποστηρικτικού περιβάλλοντος μάθησης στο σχολείο. Το επίπεδο του συστήματος αναφέρεται στην επίδραση του εκπαιδευτικού συστήματος, ιδιαίτερα μέσω της ανάπτυξης και αξιολόγησης της επίσημης εκπαιδευτικής πολιτικής σε εθνικό επίπεδο. Οι διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης επηρεάζονται παράλληλα από το ευρύτερο εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μαθητές, εκπαιδευτικοί και σχολικοί οργανισμοί δρουν. Παράγοντες όπως οι κοινωνικές αξίες που προωθούν τη μάθηση, καθώς και η σημασία που προσδίδεται στη μάθηση από την κοινωνία διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στη διαμόρφωση των προσδοκιών από εκπαιδευτικούς και μαθητές, όσο και στη διαμόρφωση των αντιλήψεων των διάφορων εμπλεκομένων αναφορικά με τις αποτελεσματικές διδακτικές πρακτικές.

Διάγραμμα 1: Το Δυναμικό Μοντέλο Εκπαιδευτικής Αποτελεσματικότητας



Επιπλέον το ΔΜΕΑ υποστηρίζει ότι οι παράγοντες σε επίπεδο σχολείου και συστήματος έχουν τόσο έμμεσες όσο και άμεσες επιδράσεις στα μαθησιακά αποτελέσματα, καθώς εκτός από την επίδοση των μαθητών είναι σε θέση να επηρεάζουν και τις διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης. Ταυτόχρονα, το ΔΜΕΑ υποθέτει ότι η επίδραση των παραγόντων που εδράζονται στο επίπεδο του σχολείου και του συστήματος είναι απαραίτητο να ορίζονται και να υπολογίζονται με διαφορετικό τρόπο από ότι οι παράγοντες σε επίπεδο τάξης. Συγκεκριμένα, η πολιτική για τη διδασκαλία και οι δράσεις που αναλαμβάνονται για βελτίωση της διδακτικής πρακτικής πρέπει να μετρούνται διαχρονικά και σε σχέση με τις αδυναμίες που παρατηρούνται σε ένα σχολείο. Η υπόθεση είναι ότι τα σχολεία και τα εκπαιδευτικά συστήματα, τα οποία είναι σε θέση να εντοπίζουν τις αδυναμίες τους και να αναπτύσσουν πολιτική αναφορικά με τις πτυχές της διδασκαλίας και του μαθησιακού περιβάλλοντος που χρήζουν βελτίωσης, είναι παράλληλα σε θέση να βελτιώνουν τη λειτουργία των παραγόντων στο επίπεδο της τάξης και κατ' επέκταση την αποτελεσματικότητά τους. Μόνο οι αλλαγές σε παράγοντες στους οποίους τα σχολεία αντιμετωπίζουν σημαντικά προβλήματα αναμένεται να σχετίζονται με τη βελτίωση της αποτελεσματικότητάς τους. Αυτό υπονοεί ότι η επίδραση των παραγόντων σε επίπεδο σχολείου και συστήματος εξαρτάται από τις εκάστοτε συνθήκες υπό τις οποίες βρίσκονται τα υπό διερεύνηση υποκείμενα (Creemers & Kyriakides, 2009). Επιπρόσθετα, το ΔΜΕΑ υποθέτει ότι υπάρχει ανάγκη αναγνώρισης και ενδελεχούς διερεύνησης των σχέσεων μεταξύ των διάφορων παραγόντων αποτελεσματικότητας που εδράζονται στο ίδιο επίπεδο. Μια τέτοια προσέγγιση στην προσπάθεια μοντελοποίησης της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας μπορεί να αποκαλύψει ομαδοποιήσεις παραγόντων που συμβάλλουν στην αποτελεσματικότητα των εκπαιδευτικών και των σχολείων. Κατά συνέπεια, δια μέσου της προσέγγισης αυτής, πιθανόν να προκύψουν ολιστικές στρατηγικές βελτίωσης της αποτελεσματικότητας (βλ. Creemers & Kyriakides, 2012).

Τέλος, η εξέταση του κάθε παράγοντα εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας δεν γίνεται μονοδιάστατα με βάση κάποιο λειτουργικό ορισμό, αλλά στη βάση πέντε πιο εξειδικευμένων διαστάσεων μέτρησης του κάθε παράγοντα. Οι πέντε διαστάσεις που χρησιμοποιούνται για να ορίσουν έναν παράγοντα είναι: η συχνότητα, η εστίαση, το στάδιο, η ποιότητα και η διαφοροποίηση. Η συχνότητα αφορά στο βαθμό στον οποίο μια δραστηριότητα που σχετίζεται με έναν παράγοντα αποτελεσματικότητας παρουσιάζεται σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα, σχολείο ή τάξη. Στην *εστίαση* λαμβάνονται υπόψη δύο πτυχές. Η πρώτη αφορά στο πόσο συγκεκριμένη είναι η συμπεριφορά και αναμένεται ότι θα πρέπει να υπάρχει μια ισορροπία ανάμεσα σε συγκεκριμένες και γενικές δραστηριότητες. Η δεύτερη πτυχή αφορά στο σκοπό για τον οποίο εκδηλώνεται μια δραστηριότητα ή συμπεριφορά/πράξη στη σχολική μονάδα, αφού μπορεί για παράδειγμα, μια συμπεριφορά να επιδιώκει να επιτύχει μόνο ένα στόχο ή πολλαπλούς στόχους. Στην περίπτωση όπου αναμένεται από όλες τις δραστηριότητες να επιτύχουν τον ίδιο στόχο, τότε αν και η πιθανότητα να επιτευχθεί αυτός ο στόχος είναι υψηλή, η επίδραση ενός παράγοντα μπορεί τελικά να είναι μικρή λόγω του ότι δεν θα έχουν επιτευχθεί οι υπόλοιποι στόχοι. Ωστόσο, αν όλες οι δραστηριότητες αναμένεται να επιτύχουν πολλαπλούς στόχους, υπάρχει ο κίνδυνος συγκεκριμένοι στόχοι να μην αντιμετωπιστούν με τρόπο που να επιτρέπει την επίτευξή τους. Το *στάδιο* αναφέρεται στην περίοδο κατά την οποία ενεργοποιούνται οι δραστηριότητες που σχετίζονται με έναν παράγοντα και μπορεί να μετρηθεί λαμβάνοντας υπόψη αν οι δραστηριότητες λαμβάνουν χώρα σε μία μόνο χρονική στιγμή ή σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Αναμένεται ότι οι διάφοροι παράγοντες πρέπει να εμφανίζονται για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Η *ποιότητα* αναφέρεται στις ιδιότητες του συγκεκριμένου παράγοντα αυτού καθ' αυτού, όπως αυτές αναφέρονται στη βιβλιογραφία (π.χ., η αξιολόγηση του μαθητή αναμένεται να συμβάλει στην επίτευξη του διαμορφωτικού σκοπού). Τέλος, η *διαφοροποίηση* αναφέρεται στο βαθμό στον οποίο οι δραστηριότητες που σχετίζονται με έναν παράγοντα εφαρμόζονται πανομοιότυπα για όλα τα θέματα/φορείς που σχετίζονται με αυτόν τον παράγοντα. Αναφέρεται σε όλες τις πτυχές κάθε δραστηριότητας (περιεχόμενο, χρόνο, ποιότητα, ποσότητα) και αναμένεται ότι σε κάθε παράγοντα πρέπει να υπάρχει προσαρμοστικότητα ανάλογα με τις ανάγκες και τα χαρακτηριστικά κάθε ατόμου, ομάδας εκπαιδευτικών, μαθητών, σχολείου και γονιών.

Η αντίληψη του πολυδιάστατου χαρακτήρα των παραγόντων αποτελεσματικότητας συμβάλλει τόσο στην καλύτερη απεικόνιση του τρόπου με τον οποίο τα σχολεία και οι εκπαιδευτικοί καθίστανται αποτελεσματικοί, αλλά συνεισφέρει επίσης και στην ανάπτυξη συγκεκριμένων στρατηγικών βελτίωσης της διδακτικής πράξης.

Παράγοντες αποτελεσματικότητας στο επίπεδο της τάξης

Με βάση τα κυριότερα πορίσματα των ερευνών για την αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού (π.χ., Brophy & Good, 1986· Muijs & Reynolds, 2001· Rosenshine & Stevens, 1986) το ΔΜΕΑ αναφέρεται σε παράγοντες οι οποίοι περιγράφουν το διδακτικό ρόλο του εκπαιδευτικού και σχετίζονται με τα μαθησιακά αποτελέσματα. Οι παράγοντες αυτοί αναφέρονται στη διδακτική συμπεριφορά των εκπαιδευτικών μέσα στην τάξη και όχι σε παράγοντες που μπορούν να ερμηνεύσουν τη συμπεριφορά αυτή (π.χ., τις πεποιθήσεις και γνώσεις των εκπαιδευτικών και τις διαπροσωπικές τους δεξιότητες). Οι οκτώ παράγοντες που περιλαμβάνονται στο μοντέλο στο επίπεδο της τάξης είναι οι ακόλουθοι:

1) Προσανατολισμός (orientation)

Ο προσανατολισμός, αναφέρεται στις δραστηριότητες που βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν το λόγο για τον οποίο διδάσκονται συγκεκριμένες ενότητες σε κάθε αντικείμενο. Ακόμη, οι ίδιοι οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τους λόγους αυτούς και ακολούθως γίνονται δεκτοί οι λόγοι που αναφέρει το κάθε παιδί και συζητούνται. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αναμένεται ότι οι δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια των μαθημάτων αλλά και ολόκληρα τα μαθήματα γενικότερα, θα έχουν νόημα για τους μαθητές και συνεπώς θα αυξήσουν τα κίνητρά τους για ενεργό συμμετοχή στην τάξη (π.χ., De Corte, 2000· Paris & Paris, 2001). Συνεπώς, υποστηρίζεται ότι οι δραστηριότητες προσανατολισμού πρέπει να πραγματοποιούνται όχι μόνο σε ένα μέρος του μαθήματος, αλλά να κατανέμονται ομοιόμορφα στα διάφορα τμήματα ενός μαθήματος ή μιας σειράς μαθημάτων (π.χ. αρχή, μέση και τέλος). Επιπλέον, για να υποστηριχθεί ότι οι δραστηριότητες προσανατολισμού μπορούν να συμβάλουν στην αύξηση της εμπλοκής των μαθητών στο μάθημα, είναι σημαντικό, αυτές να είναι κατανοητές και σαφείς στους μαθητές και να προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη τις απόψεις όλων των μαθητών.

2) Δόμηση μαθήματος (structuring)

Η δόμηση αποτελεί έναν παράγοντα για τον οποίο η έρευνα στον τομέα της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας είχε πρώιμες ενδείξεις σχετικά με τη συμβολή του στη μάθηση των μαθητών. Ακόμα και από τα μέσα της δεκαετίας του '80, εντοπίστηκε το γεγονός ότι η μάθηση των μαθητών επηρεάζεται θετικά όταν οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν ενεργά τη δομή των μαθημάτων: (α) ξεκινώντας με επισκοπήσεις ή/και ανασκόπηση των στόχων, β) περιγράφοντας το περιεχόμενο που αναμένεται να καλυφθεί και σηματοδοτώντας τις μεταβάσεις μεταξύ των διάφορων μερών του μαθήματος, (γ) καλώντας την προσοχή στα κύρια σημεία και (δ) προχωρώντας σε ανασκόπηση των βασικών σημείων στο τέλος του μαθήματος (Rosenshine & Stevens, 1986). Επιπλέον, οι έρευνες έχουν δείξει ότι τα αποτελέσματα των μαθητών μπορούν να ενισχυθούν όταν οι εκπαιδευτικοί τους παρέχουν συνοπτικές ανακεφαλαιώσεις, καθώς αναμένεται ότι συμβάλουν στην οργάνωση της γνώσης και τον εντοπισμό βασικών σημείων (Brophy & Good, 1986). Τέλος, ο παράγοντας της δόμησης δεν περιορίζεται στην απλή διασύνδεση μεταξύ των διαφόρων τμημάτων των μαθημάτων ή των ενοτήτων των μαθημάτων, αλλά αναφέρεται επίσης στη σταδιακή αύξηση του επιπέδου δυσκολίας των μαθημάτων, που αναμένεται να παρέχει σε όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από τις ικανότητές τους, την ευκαιρία να συμμετάσχουν στις διαδικασίες του μαθήματος (Creemers & Kyriakides, 2006).

3) Τεχνικές ερωτήσεων (questioning techniques)

Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η έρευνα έχει δείξει πως οι δεξιότητες διατύπωσης και διαχείρισης των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών συνδέονται στενά με τα αποτελέσματα των μαθητών, αυτός ο παράγοντας συμπεριλήφθηκε στο δυναμικό μοντέλο και ορίζεται σύμφωνα με πέντε στοιχεία. Πρώτον, σημειώνεται ότι οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί αναμένεται όχι μόνο να παράσχουν ένα μεγάλο αριθμό ερωτήσεων ανάκλησης γνώσεων, αλλά και ερωτήσεις επεξήγησης μιας διαδικασίας οι οποίες να καλούν τους μαθητές να δώσουν λεπτομέρειες που υποδεικνύουν την πορεία που ακολούθησαν για να καταλήξουν στην απάντησή τους (Askew & William, 1995· Evertson, Anderson, Anderson, & Brophy, 1980). Δεύτερον, αναμένεται ότι οι εκπαιδευτικοί παρέχουν στους μαθητές επαρκή χρόνο να σκεφτούν πριν ζητήσουν τις απαντήσεις τους, με το χρόνο που τους δίνεται να είναι ανάλογος με το επίπεδο δυσκολίας κάθε ερωτήματος. Τρίτον, θα πρέπει να διαπιστωθεί ότι τα ερωτήματα που θέτει ο δάσκαλος είναι σαφή και εύκολα κατανοητά από τους μαθητές, ώστε να μην προκαλούνται παρερμηνείες. Τέταρτον, όταν θέτει μια ερώτηση, ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάμβάνει υπόψη την ικανότητα των μαθητών να ανταποκριθούν, αποφεύγοντας πολύ δύσκολα ερωτήματα που αναπόφευκτα θα προκαλέσουν αποτυχία απάντησης (Brophy & Good, 1986). Τέλος, υπογραμμίζεται ότι μια σημαντική πτυχή αυτού του παράγοντα είναι ο τρόπος με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν τις απαντήσεις των μαθητών. Συγκεκριμένα, πρέπει να αναγνωριστούν οι σωστές απαντήσεις, ώστε να διαπιστωθεί ότι όλοι οι μαθητές γνωρίζουν τη σωστή απάντηση στο τέλος της συζήτησης. Σε περίπτωση που η απάντηση ενός μαθητή δεν είναι πλήρως σωστή, τότε ο εκπαιδευτικός πρέπει να αναγνωρίσει το σωστό μέρος και να βοηθήσει τον μαθητή να ανακαλύψει τη σωστή απάντηση ή να δώσει μια βελτιωμένη απάντηση, παρέχοντας διευκρινίσεις ή χρήσιμες οδηγίες (Rosenshine & Stevens, 1986).

4) Μοντελοποίηση μαθήματος (teaching-modelling)

Μία πτυχή της εκπαίδευσης που έχει λάβει μεγάλη προσοχή τις τελευταίες δύο δεκαετίες είναι αυτή της αυτορυθμιζόμενης μάθησης (Self-Regulated Learning), λόγω της εκτεταμένης έμφασης που δόθηκε στην επίτευξη των νέων στόχων της εκπαίδευσης (Muijs et al. 2014). Ωστόσο, παρόλο που η αυτορυθμιζόμενη μάθηση έχει λάβει μεγάλη προσοχή στην εκπαιδευτική έρευνα (Winne, 2005), έχει συγκριτικά λάβει λιγότερη προσοχή από άλλες πτυχές από τη διδακτική πράξη. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, ο παράγοντας της μοντελοποίησης που σχετίζεται με την αυτορυθμιζόμενη μάθηση περιλαμβάνεται μεταξύ των παραγόντων του επιπέδου της τάξης του δυναμικού μοντέλου. Ο παράγοντας αυτός προβλέπει ότι οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί προωθούν τη χρήση από τους μαθητές στρατηγικών ή/και την ανάπτυξη στρατηγικών για την αντιμετώπιση διαφορετικών τύπων προβλημάτων (Grieve, 2010) και την ανάπτυξη δεξιοτήτων προαγωγής της ενεργού μάθησης. Έτσι, ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ακολουθήσουν δύο εναλλακτικές προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση αφορά στην παρουσίαση της στρατηγικής επίλυσης προβλημάτων από τον εκπαιδευτικό χωρίς να ζητείται η συνεισφορά των μαθητών. Η δεύτερη προσέγγιση απαιτεί την πιο ενεργό συμμετοχή των μαθητών και ξεκινάει με ένα μάλλον αντίστροφο τρόπο, καθώς οι μαθητές ενθαρρύνονται να περιγράψουν τρόπους με τους οποίους οι ίδιοι θα αντιμετώπιζαν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός αναμένεται να χρησιμοποιήσει αυτές τις πληροφορίες για την προώθηση της ιδέας της μοντελοποίησης και την ενθάρρυνση της ανάπτυξης των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (Aparicio & Moneo, 2005· Gijbels, Van de Watering, Dochy, & Van den Bossche, 2006).Οι στρατηγικές που αναπτύσσονται μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο στα μαθηματικά και θετικές επιστήμες όσο και στα άλλα μαθήματα.

5) Εμπέδωση (application)

Οι δραστηριότητες εμπέδωσης αποσκοπούν στην εμπέδωση και εφαρμογή γνώσεων που διδάχθηκαν οι μαθητές. Αυτό που χαρακτηρίζει τους αποτελεσματικούς εκπαιδευτικούς είναι η ορθή κατανομή των νέων στοιχείων και των ευκαιριών εμπέδωσης αφού σύμφωνα με τη θεωρία γνωστικού φορτίου ο άνθρωπος μπορεί να επεξεργαστεί περιορισμένη ποσότητα νέας γνώσης ανά δεδομένη στιγμή. Οι ασκήσεις εμπέδωσης, ωστόσο, δεν θα πρέπει να αποτελούν μόνο επανάληψη του υλικού που διδάσκονται οι μαθητές στην τάξη, αλλά πρέπει να επεκτείνονται ένα βήμα προς τα εμπρός προσθέτοντας πιο περίπλοκα και νοητικά απαιτητικότερα στοιχεία τα οποία να συνδέονται με επόμενα μαθήματα. Οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί αναμένεται όχι μόνο να παρατηρούν τους μαθητές που συμμετέχουν σε εργασίες εμπέδωσης, αλλά και επιβλέπουν την πρόοδό τους παρέχοντας εποικοδομητική ανατροφοδότηση (Brophy & Good, 1986).

6) Περιβάλλον μάθησης στην τάξη (classroom as a learning environment)

Στον παράγοντα αυτό, εμπερικλείονται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ εκπαιδευτικού-μαθητών, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών, ο συναγωνισμός ανάμεσα στους μαθητές, η απειθαρχία και η γενικότερη αντιμετώπιση των παιδιών από τον εκπαιδευτικό. Τα πρώτα δύο από αυτά τα στοιχεία μπορούν να θεωρηθούν σημαντικά για τη μέτρηση του κλίματος στην τάξη (βλ. Cazden, 1986· Den Brok, Brekelmans, & Wubbels, 2004· Harjunen, 2012) ενώ τα υπόλοιπα τρία στοιχεία αποτελούν προσπάθειες για τη δημιουργία ενός καλά οργανωμένου και ευνοϊκού περιβάλλοντος για μάθηση στην τάξη (Walberg, 1986). Το δυναμικό μοντέλο υποστηρίζει επίσης ότι πρέπει να εξεταστούν οι τύποι αλληλεπιδράσεων σε μια τάξη και οι ενέργειες των εκπαιδευτικών για την προώθηση τέτοιων αλληλεπιδράσεων που σχετίζονται με τη μάθηση. Η τάξη μπορεί να εδραιωθεί ως μαθησιακό περιβάλλον εξετάζοντας τη συμπεριφορά του εκπαιδευτικού στην ανάπτυξη και τη διατήρηση κανόνων και εξασφαλίζοντας το σεβασμό και τη συνεργασία των μαθητών.

7) Διαχείριση διδακτικού χρόνου (management of time)

Με τον παράγοντα αυτό, εννοούμε τον σωστό προγραμματισμό του χρόνου που απαιτείται για κάθε δραστηριότητα και για κάθε μαθητή, έτσι ώστε να μην υπάρχουν κενά στη διδασκαλία (off-task) αλλά και ούτε να υπερβαίνονται τα χρονικά πλαίσια που υπάρχουν. Για να εξεταστεί αυτός ο παράγοντας, διερευνάται ο χρόνος που χρησιμοποιείται ανά μάθημα για δραστηριότητες που σχετίζονται με τους στόχους του μαθήματος (on-task). Αναμένεται ότι οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί θα είναι σε θέση να οργανώσουν και να διαχειριστούν το περιβάλλον της τάξης μειώνοντας κάθε άσκοπη απώλεια του χρόνου μάθησης, μεγιστοποιώντας τα ποσοστά συμμετοχής. Έτσι, το κύριο ενδιαφέρον αυτού του παράγοντα είναι κατά πόσο οι μαθητές ασχολούνται με δραστηριότητες που σχετίζονται με τους στόχους του μαθήματος και κατά πόσο ο εκπαιδευτικός είναι σε θέση να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά κάθε είδους διαταραχή στην τάξη χωρίς να σπαταλάει το χρόνο διδασκαλίας. Είναι επίσης σημαντικό να διερευνηθεί κατά πόσον ο εκπαιδευτικός καταφέρνει να μειώσει την απώλεια χρόνου για διαφορετικές ομάδες μαθητών λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορετικές μαθησιακές τους ανάγκες και ικανότητες (π.χ., διαθέτοντας συμπληρωματικές εργασίες σε μαθητές που ολοκληρώνουν την εργασία νωρίτερα από άλλους).

8) Αξιολόγηση του μαθητή (assessment)

Η αξιολόγηση θεωρείται ουσιαστικό και αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας (Stenmark, 1992). Ειδικότερα, η διαμορφωτική αξιολόγηση έχει αποδειχθεί ότι είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που σχετίζονται με την αποτελεσματικότητα σε όλα τα επίπεδα, ειδικά σε επίπεδο τάξης (π.χ., de Jong, Westerhof, & Kruiter, 2004· Kyriakides, 2008· Shepard, 1989). Στην πραγματικότητα, αρκετές μελέτες (π.χ. Brookhart, 2001· Tunstall & Gsipps, 1996· Wiliam, Lee, Harrison, & Black, 2004) καθώς και η μετα-ανάλυση των Bangert-Drowns, Kulik και Kulik (1991) έδειξε ότι η συχνότητα της αξιολόγησης σχετίζεται με τα μαθησιακά αποτελέσματα (Marzano, 2007). Επομένως, το δυναμικό μοντέλο δίνει έμφαση στην αξιολόγηση των μαθητών και υποθέτει ότι οι πληροφορίες που συγκεντρώνονται μέσω αξιολόγησης αναμένεται να χρησιμοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό για τουλάχιστον δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος σχετίζεται με τον προσδιορισμό των ιδιαίτερων αναγκών των μαθητών, ώστε να προχωρήσει στην παροχή ανατροφοδότησης και διορθωτικών μέτρων όπου χρειάζεται. Ο δεύτερος λόγος έγκειται στην αυτοαξιολόγηση των εκπαιδευτικών, καθώς τα αποτελέσματα των μαθητών ενδέχεται να αντανακλούν πιθανές αδυναμίες στη διδακτική πρακτική και να υποδεικνύουν τομείς για βελτίωση. Υπογραμμίζεται συνεπώς ότι τα δεδομένα της αξιολόγησης πρέπει να εξετάζονται από την άποψη της ποιότητας (δηλ. Εάν είναι αξιόπιστα και έγκυρα) προκειμένου να προωθηθεί ο διαμορφωτικός και όχι ο συγκριτικός σκοπός της αξιολόγησης. Το δυναμικό μοντέλο εξετάζει επίσης στο κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν τις απαραίτητες δεξιότητες που τους επιτρέπουν να ανταποκριθούν αποτελεσματικά σε κάθε μία από τις κύριες φάσεις της διαδικασίας αξιολόγησης (σχεδιασμός/ανάπτυξη εργαλείων μέτρησης, χορήγηση αξιολόγησης, καταγραφή αποτελεσμάτων, κοινοποίηση αποτελεσμάτων) (Black & Wiliam, 2009).

Οι οχτώ πιο πάνω παράγοντες δεν αναφέρονται σε μια μόνο συγκεκριμένη μέθοδο διδασκαλίας όπως τη συνεργατική μέθοδο, την μετωπική διδασκαλία (Joyce, Weil, & Calhoun, 2000) ή σε μεθόδους που σχετίζονται με τον οικοδομισμό (Schoenfeld, 1998). Αντίθετα, υιοθετείται μία διαδραστική δυναμική προσέγγιση που δεν επικεντρώνεται μόνο στην κατάκτηση βασικών δεξιοτήτων (μέσω π.χ. της δόμησης και των τεχνικών ερωτήσεων), αλλά και στην επίτευξη νέων στόχων της εκπαίδευσης (όπως μεταγνωστικές δεξιότητες) καθώς και στους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τους επιτύχουμε (μέσω π.χ. του προσανατολισμού και της μοντελοποίησης) (Kyriakides & Creemers, 2008).

Μέχρι σήμερα η εγκυρότητα του ΔΜΕΑ έχει εξεταστεί μέσα από διάφορες έρευνες. Συγκεκριμένα, έχουν διενεργηθεί δεκαεννέα εμπειρικές έρευνες και δύο μετα-αναλύσεις οι οποίες αποσκοπούσαν στην εξέταση των κυριότερων υποθέσεων του μοντέλου. Τα ευρήματα από τις έρευνες και τις μετα-αναλύσεις συνοψίζονται στον πίνακα 1. Ο πίνακας αυτός παρουσιάζει την εμπειρική υποστήριξη στις βασικές παραδοχές του μοντέλου μέσα από τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών. Πρώτον, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι καμία από αυτές τις έρευνες και μετα-αναλύσεις δεν δείχνει ότι κάποιος παράγοντας ή διάσταση σχετίζεται αρνητικά με την επίδοση των μαθητών. Επιπλέον, μέσα από όλες τις έρευνες υποστηρίζεται ο πολυεπίπεδος χαρακτήρας του μοντέλου. Δεύτερον, αποκαλύπτουν ότι οι παράγοντες σε επίπεδο τάξης και σχολείου σχετίζονται με τα μαθησιακά αποτελέσματα σε περισσότερα από ένα γνωστικά αντικείμενα και τρίτον, όλες οι έρευνες αποκάλυψαν ότι οι παράγοντες σε επίπεδο τάξης και σχολείου μπορούν να μετρηθούν με τη χρήση των πέντε διαστάσεων που προτείνονται από το ΔΜΕΑ.

Πίνακας 1: Εμπειρική στήριξη στις βασικότερες υποθέσεις του ΔΜΕΑ και στη σημασία των παραγόντων εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας μέσα από τις διαχρονικές έρευνες και τις μετα-αναλύσεις

Υποθέσεις του ΔΜΕΑ	**Έρευνες**	**Μετα-αναλύσεις**
1. Πολυεπίπεδο μοντέλο	όλες	Όλες
2. Χρήση 5 διαστάσεων μέτρησης:		
α) παραγόντων στο επίπεδο της τάξης	1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16	
β) παραγόντων στο επίπεδο του σχολείου	1, 3, 4, 17, 19	
3. Επίδραση των παραγόντων στο επίπεδο της τάξης στα μαθησιακά αποτελέσματα	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17	2
4. Επίδραση των παραγόντων στο επίπεδο του σχολείου στα μαθησιακά αποτελέσματα	1, 3, 4, 17, 18, 19	1
5. Επίδραση των παραγόντων στο επίπεδο του συστήματος στα μαθησιακά αποτελέσματα	15	
6. Περιπτωσιακός χαρακτήρας των σχολικών παραγόντων	1	
7. Σχέσεις μεταξύ των παραγόντων που εδράζονται στο ίδιο επίπεδο: στάδια αποτελεσματικής διδασκαλίας (συμπεριλαμβανομένου της αξιολόγησης)	1, 5, 6, 7, 8, 9, 10	2
8. Αλλαγές στη λειτουργία των σχολικών παραγόντων που ερμηνεύουν αλλαγές στην αποτελεσματικότητα των σχολείων	3, 19	
Αρνητικά αποτελέσματα σε σχέση με οποιαδήποτε υπόθεση	Καμία	Καμία

Η Δυναμική Προσέγγιση Βελτίωσης της Αποτελεσματικότητας και η έρευνα για επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών

Θεωρητικές παραδοχές

Κάθε προσπάθεια βελτίωσης της αποτελεσματικότητας πρέπει να στηρίζεται σε ένα στέρεο θεωρητικό σχήμα και να είναι σύμφωνη με εμπειρικά δεδομένα που αποκαλύπτουν τις βασικές ανάγκες ενός οργανισμού (evidence-based and theory-driven approach). Η δυναμική προσέγγιση βρίσκεται ανάμεσα στις δύο κυρίαρχες προσεγγίσεις στο χώρο της επιμόρφωσης εκπαιδευτικών και προσπαθεί να ξεπεράσει τα βασικά μειονεκτήματα κάθε προσέγγισης. Οι δύο αυτές κυρίαρχες προσεγγίσεις είναι οι εξής: α) Ανάπτυξη ξεχωριστών κάθε φορά διδακτικών δεξιοτήτων (Competency Based Approach) και β) Ολιστική προσέγγιση (Holistic Approach).

Η πρώτη προσέγγιση που αφορά στην ανάπτυξη ξεχωριστών διδακτικών δεξιοτήτων βασίζεται στην ιδέα ότι οι στόχοι της κατάρτισης των εκπαιδευτικών πρέπει να καθορίζονται εκ των προτέρων και να είναι γνωστοί στον εκπαιδευόμενο. Υποθέτει ότι με την επίτευξη σαφών στόχων και την ανάληψη συγκεκριμένων δράσεων για την επίτευξή τους, προσφέρεται καθοδήγηση και αυξάνεται η πιθανότητα επίτευξης των στόχων αυτών. Με βάση την προσεγγιση αυτή, κατά τον καθορισμό παραγόντων για ένα πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι βέλτιστες πρακτικές διδασκαλίας. Αυτοί οι παράγοντες καθορίζονται πριν από την υλοποίηση του προγράμματος και συνήθως αναφέρονται ως ικανότητες που περιγράφουν τι μπορούν να κάνουν οι εκπαιδευτικοί όταν ολοκληρώνουν με επιτυχία το πρόγραμμα κατάρτισης. Οι δεξιότητες που τίθενται ως στόχοι στα προγράμματα κατάρτισης με βάση την προσέγγιση ανάπτυξης ξεχωριστών δεξιοτήτων γνωστοποιούνται στους εκπαιδευόμενους και αναμένεται ότι η διδασκαλία και η αξιολόγηση θα ευθυγραμμιστούν μαζί τους. Για το σκοπό αυτό, οι εμπειρογνώμονες έχουν αναπτύξει λεπτομερείς καταλόγους σαφών δεξιοτήτων και στρατηγικών (Sprinthall, Reiman, & Thies-Sprinthall, 1996) (π.χ. πώς να χρησιμοποιούν τον έπαινο ή να θέτουν ερωτήσεις υψηλού επιπέδου). Παρόλο που οι κατάλογοι δεξιοτήτων ή τα πρότυπα διδασκαλίας φαίνεται να υποστηρίζονται έντονα από τους υπεύθυνους για τη χάραξη πολιτικής (Becker, Kennedy, & Hundersmarck, 2003) φαίνεται ότι έχουν οδηγήσει σε σοβαρά προβλήματα. Πρώτον, μπορεί να υποστηριχθεί ότι τέτοιοι μεγάλοι και λεπτομερείς κατάλογοι δεξιοτήτων μπορεί να οδηγήσουν σε κατακερματισμό του ρόλου του εκπαιδευτικού. Επιπλέον, αναγνωρίζεται ότι είναι αρκετά δύσκολο να καλυφθεί ένας μεγάλος αριθμός απομονωμένων δεξιοτήτων ανεξάρτητα από τη διάρκεια του προγράμματος κατάρτισης. Επιπλέον, η ανάλυση κόστους / ωφέλειας μπορεί να επικριθεί όσον αφορά τη μη παροχή στους εκπαιδευτικούς της ευκαιρίας να επεκτείνουν την κριτική και δημιουργική τους σκέψη, καθώς η προσέγγιση αυτή δίνει έμφαση στην μάλλον μηχανιστική εφαρμογή των καθοδηγημένων κατευθυντήριων γραμμών για κάθε είδους συμπεριφορά των εκπαιδευτικών χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι τρέχουσες πρακτικές των εκπαιδευτικών και οι υπάρχουσες δεξιότητές τους.

Η δεύτερη προσέγγιση (δηλ. η Ολιστική) επικεντρώνεται κυρίως στην ενθάρρυνση του αναστοχασμού σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές, εμπειρίες και πεποιθήσεις (Golby & Viant, 2007). Βασίζεται στην υπόθεση ότι η εμπειρογνωμοσύνη των εκπαιδευτικών και ο βαθμός στον οποίο μπορούν να βελτιωθούν, σχετίζεται με την ικανότητά τους να αμφισβητούν συνεχώς και να διερευνούν τους όρους και τις προϋποθέσεις που διέπουν τις δικές τους αλληλεπιδράσεις με τους μαθητές (Tan, 2008). Στο πλαίσιο αυτό, οι Van Manen και Li (2002) προτείνουν τρία επίπεδα αναστοχασμού: τεχνικός αναστοχασμός, πρακτικός αναστοχασμός και κριτικός αναστοχασμός. Ο τεχνικός αναστοχασμός ασχολείται με τεχνικές και στρατηγικές για συγκεκριμένους στόχους, ενώ ο κριτικός αναστοχασμός εξετάζει ευρύτερα δεοντολογικά ζητήματα. Ο πρακτικός ανστοχασμός βρίσκεται μεταξύ αυτών των δύο τύπων αναστοχασμού και επεκτείνεται και στην αμφισβήτηση των ίδιων των στόχων. Προβλέπονται επίσης προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν την ανάπτυξη αναστοχαστικών δεξιοτήτων παρατήρησης, ανάλυσης, ερμηνείας και λήψης αποφάσεων που βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να αναθεωρήσουν κριτικά τη διδακτική τους πρακτική (Schon, 1983· Zeichner, 1987). Αν και ο αναστοχασμός έχει προωθηθεί ευρέως σε όλους τους τομείς της επαγγελματικής κατάρτισης των εκπαιδευτικών, φαίνεται ότι η πρακτική συμβολή του στη βελτίωση των διδακτικών πρακτικών δεν έχει λάβει ικανοποιητική υποστήριξη μέσω ερευνητικών δεδομένων (Cornford, 2002· Antoniou & Kyriakides, 2013). Συγκεκριμένα, υπάρχουν ελάχιστα στοιχεία που υποστηρίζουν ότι ο γενικός/ασαφής αναστοχασμός που δεν βασίζεται σε ένα στέρεο θεωρητικό πλαίσιο μπορεί να οδηγήσει σε πρόοδο τόσο στις εκπαιδευτικές δεξιότητες όσο και στα μαθησιακά αποτελέσματα (π.χ. Creemers, Kyriakides & Antoniou, 2013· Stoiber, 1991· Johnston & Usher, 1996· Ottesen, 2007). Επομένως, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι και οι δύο προσεγγίσεις έχουν κριθεί εκτενώς (π.χ., Cruickshank & Metcalf, 1990· Korthagen, 2004· Smith & Hatton, 1992) και ότι υπάρχουν λίγα εμπειρικά στοιχεία για να υποστηρίξουν την αποτελεσματικότητά τους στην προώθηση της αποτελεσματικής διδασκαλίας.

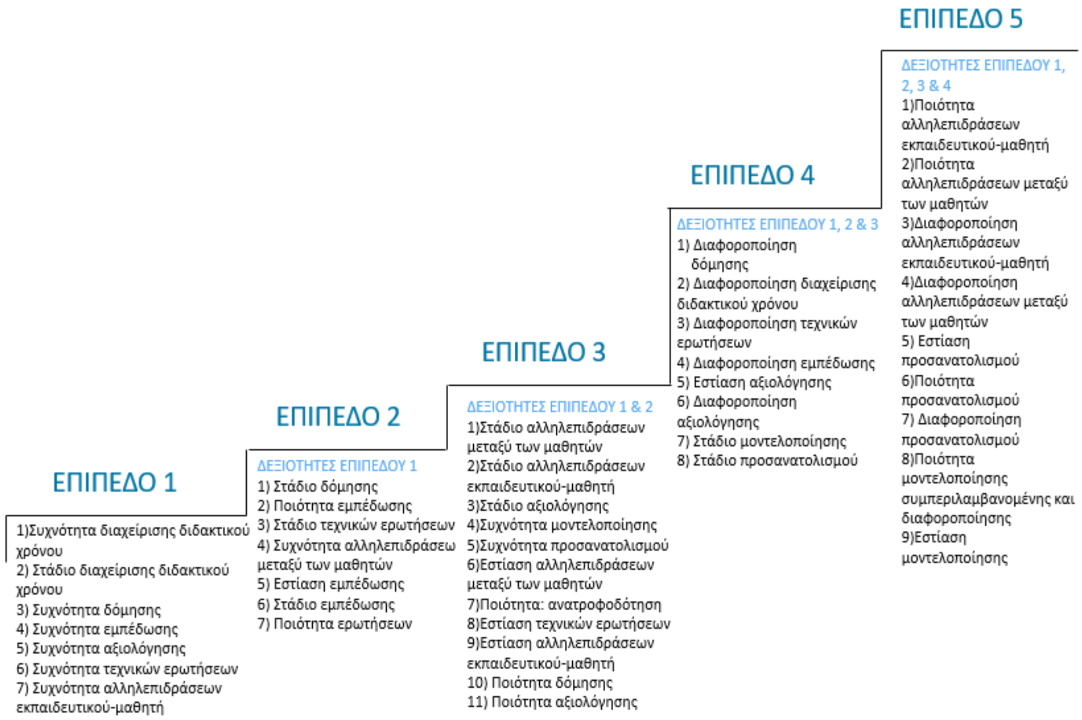
Λαμβάνοντας υπόψη τις αδυναμίες της κάθε μίας από τις πιο κάνω προσεγγίσεις, προτάθηκε η Δυναμική Προσέγγιση για βελτίωση της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών και του εκπαιδευτικού έργου (Cremers, Kyriakides & Antoniou, 2013) σε μια προσπάθεια να συνδεθεί η έρευνα της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας με την έρευνα για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών. Αυτή η προσέγγιση βασίζεται στην υπόθεση ότι οι προσπάθειες βελτίωσης των εκπαιδευτικών πρέπει να στοχεύουν στην ανάπτυξη δεξιοτήτων διδασκαλίας που σχετίζονται με θετικά μαθησιακά αποτελέσματα. Υποστηρίζεται ότι η κατάρτιση των εκπαιδευτικών και η επαγγελματική εξέλιξη πρέπει να επικεντρωθούν στη βελτίωση συγκεκριμένων παραγόντων διδασκαλίας σε σχέση με τη μάθηση των μαθητών και όχι σε ένα απομονωμένο διδακτικό παράγοντα (όπως προτείνεται από την προσέγγιση ανάπτυξης ξεχωριστών δεξιοτήτων) ή σε όλο το φάσμα των παραγόντων του επιπέδου της τάξης όπως υποδηλώνει η ολιστική προσέγγιση), χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι επαγγελματικές ανάγκες των εκπαιδευτικών. Επομένως, η δυναμική προσέγγιση βρίσκεται ανάμεσα στις δύο κυρίαρχες προσεγγίσεις και στοχεύει να ξεπεράσει τις κύριες αδυναμίες τους. Ιδιαίτερα, η δυναμική διάσταση αυτής της προσέγγισης αποδίδεται στο γεγονός ότι το περιεχόμενό της προέρχεται από την ομαδοποίηση παραγόντων διδασκαλίας που περιλαμβάνονται στο δυναμικό μοντέλο εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας (Creemers & Kyriakides, 2008). Με βάση τα βασικά ευρήματα της έρευνας της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας, το δυναμικό μοντέλο αναφέρεται στους οκτώ παράγοντες που περιγράφουν τον εκπαιδευτικό ρόλο των εκπαιδευτικών και συνδέονται με τα μαθησιακά αποτελέσματα και οι οποίοι έχουν αναφερθεί πιο πάνω. Το δυναμικό μοντέλο βασίζεται στην υπόθεση ότι οι παράγοντες των εκπαιδευτικών είναι αλληλένδετοι και έχει αποδειχθεί η σημασία της ομαδοποίησης παραγόντων. Συγκεκριμένα, οι διαχρονικές μελέτες που διεξήχθησαν σε διάφορες χώρες αποκάλυψαν ότι οι παράγοντες του εκπαιδευτικού που περιλαμβάνονται στο δυναμικό μοντέλο μπορούν να ταξινομηθούν σε στάδια αποτελεσματικής διδασκαλίας, δομημένα σε αναπτυξιακή σειρά και συνδεδεμένα με μαθησιακά αποτελέσματα (Christoforidou & Xyrafidou, 2014· Kyriakides, Archambault, & Janosz, 2013· Kyriakides, Creemers, & Antoniou, 2009). Έτσι, η δυναμική προσέγγιση προτείνει όπως η επαγγελματική κατάρτιση των εκπαιδευτικών διαφοροποιείται, ώστε να ικανοποιεί τις ανάγκες και τις προτεραιότητες των εκπαιδευτικών σε κάθε στάδιο. Η ολοκληρωμένη διάσταση αυτής της προσέγγισης αποδίδεται στο γεγονός ότι παρόλο που το περιεχόμενο της αναφέρεται σε διδακτικές δεξιότητες που βρέθηκαν να σχετίζονται θετικά με την επίτευξη των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί συμμετέχουν επίσης σε συστηματική και καθοδηγούμενο κριτικό αναστοχασμό για τις διδακτικές τους πρακτικές. Συγκεκριμένα, στα προγράμματα επαγγελματικής κατάρτισης με βάση τη δυναμική προσέγγιση οι εκπαιδευτικοί αναπτύσσουν το σχέδιο δράσης τους και κατά την υλοποίηση του αξιοποιούν και τον αναστοχασμό για σκοπούς αξιολόγησης της παρέμβασής τους και βελτίωσης του σχεδίου δράσης τους (κατά τη διάρκεια υλοποίησής του).

Στάδια Ανάπτυξης Διδακτικών Δεξιοτήτων

Μια σειρά από έρευνες που έγιναν σε διαφορετικές χώρες, έδειξαν ότι οι διδακτικές δεξιότητες μπορούν να ταξινομηθούν σε ιεραρχικά δομημένα στάδια διδακτικών δεξιοτήτων. Οι εκπαιδευτικοί που βρίσκονται σε πιο ψηλό στάδιο είναι πιο αποτελεσματικοί από όσους βρίσκονται σε χαμηλότερα στάδια σε σχέση με τη δυνατότητα που έχουν να προωθήσουν την επίτευξη τόσο γνωστικών όσο και συναισθηματικών στόχων των Μαθηματικών. Ακόμη, διαχρονικές έρευνες έδειξαν ότι ορισμένοι από τους εκπαιδευτικούς που κατάφεραν να βελτιώσουν τις διδακτικές τους δεξιότητες μετακινήθηκαν από ένα στάδιο στο αμέσως πιο δύσκολο. Συγκεκριμένα, σε έρευνα η οποία αποσκοπούσε στη μέτρηση της εγκυρότητας του ΔΜΕΑ αλλά και στην ομαδοποίηση των παραγόντων και διαστάσεων του μοντέλου που αποτελούν το επίπεδο της τάξης – εκπαιδευτικού, διαφάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν μπορούσαν να ομαδοποιηθούν ανάλογα με τις διδακτικές τους δεξιότητες σε στάδια (Kyriakides et al., 2009). Στην εν λόγω έρευνα, συμμετείχαν 50 δάσκαλοι και οι μαθητές τους (ν=2503). Με τη χρήση εστιασμένων παρατηρήσεων διδασκαλίας (εξωτερικές παρατηρήσεις) και ερωτηματολογίων στους μαθητές τους, μετρήθηκαν οι διδακτικές δεξιότητες των εκπαιδευτικών. Ακόμη, μετρήθηκαν οι γνώσεις των παιδιών στα Μαθηματικά κατά την αρχή και το τέλος της φοίτησής τους στην Ε' τάξη με τη χρήση εξισωμένων δοκιμίων. Ο αναλύσεις έγιναν αρχικά με τη βοήθεια του μοντέλου Rasch και αργότερα του Saltus για ομαδοποίηση των διδακτικών δεξιοτήτων. Τέλος, έγινε χρήση πολυεπίπεδων μοντέλων ανάλυσης για εντοπισμό της αποτελεσματικότητας εκπαιδευτικών που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα.

Στο διάγραμμα 2 που ακολουθεί, συνοψίζονται τα στάδια αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών που προέκυψαν.

Διάγραμμα 2: Επίπεδα/στάδια ανάπτυξης διδακτικών δεξιοτήτων



Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο συνδυασμός των παραγόντων με τις διαστάσεις δημιουργούν διδακτικές δεξιότητες οι οποίες ομαδοποιούνται σε 5 επίπεδα, προχωρώντας από το πιο εύκολο στο πιο δύσκολο. Από τις αναλύσεις φάνηκε ότι το χάσμα μεταξύ των επιπέδων 1 με 2 και 2 με 3 είναι μικρότερο από ότι το κενό μεταξύ των επιπέδων 3 με 4 και 4 με 5. Αυτό δείχνει ότι η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν είναι γραμμική και η μετάβαση από το επίπεδο 3 στο 4 και από το επίπεδο 4 στο 5 είναι πιο δύσκολη από ότι η μετάβαση μεταξύ των τριών πρώτων επιπέδων.

Το πρώτο επίπεδο περιλαμβάνει συμπεριφορές του εκπαιδευτικού και, συγκεκριμένα, βασικά στοιχεία της άμεσης και ενεργούς διδασκαλίας. Οι εφτά διδακτικές δεξιότητες, οι οποίες ανήκουν στο επίπεδο αυτό, αναφέρονται κυρίως σε ποσοτικά χαρακτηριστικά των παραγόντων που σχετίζονται με την άμεση διδασκαλία (δίνεται έμφαση στη συχνότητα). Είναι αξιοσημείωτο ότι οι δύο πρώτες δεξιότητες με το χαμηλότερο δείκτη δυσκολίας σχετίζονται με τη διαχείριση του χρόνου. Αυτό δείχνει ότι η ποσότητα της διδασκαλίας είναι βασική προϋπόθεση. Ακολούθως, το δεύτερο επίπεδο περιλαμβάνει πτυχές της ποιότητας της άμεσης διδασκαλίας και γίνεται αρχική αναφορά στην ενεργή διδασκαλία. Συγκεκριμένα, στο επίπεδο αυτό περιλαμβάνονται δεξιότητες που σχετίζονται με την ποιότητα τριών παραγόντων διδασκαλίας: δόμηση, εφαρμογή, διατύπωση ερωτήσεων.

Το τρίτο επίπεδο περιλαμβάνει διδακτικές δεξιότητες που έχουν να κάνουν με την ποιότητα της ενεργούς διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, οι έντεκα αυτές δεξιότητες, που περιλαμβάνονται, αναφέρονται στα ποιοτικά χαρακτηριστικά της ενεργούς διδασκαλίας, τα οποία δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί σε αυτό το επίπεδο εμπλέκουν τους μαθητές ενεργά στη διδασκαλία. Στη συνέχεια, το τέταρτο επίπεδο περιλαμβάνει τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας με πτυχές της ποιότητας στη διδασκαλία. Οι οχτώ διδακτικές δεξιότητες, που περιλαμβάνονται στο επίπεδο αυτό, σχετίζονται με τη διάσταση της διαφοροποίησης των παραγόντων που συνδέονται με την άμεση διδασκαλία. Άρα, οι εκπαιδευτικοί που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο είναι σε θέση να διαφοροποιήσουν τη διδασκαλία τους ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών τους, προσφέροντας τις κατάλληλες δραστηριότητες εφαρμογής και δόμησης για την κάθε ομάδα μαθητών. Επίσης, διαφοροποιούν και τις ερωτήσεις που διατυπώνουν, αλλά και τις τεχνικές αξιολόγησης που χρησιμοποιούν.

Τέλος, το πέμπτο επίπεδο αναφέρεται στην επίτευξη της ποιότητας και της διαφοροποίησης στη διδασκαλία, χρησιμοποιώντας διάφορες προσεγγίσεις. Συγκεκριμένα, οι εννέα διδακτικές δεξιότητες, που ανήκουν στο επίπεδο αυτό, εμπερικλείουν τα πιο δύσκολα ποιοτικά χαρακτηριστικά των παραγόντων που σχετίζονται τόσο με την ενεργή διδασκαλία όσο και με τη νέα διδακτική προσέγγιση. Οι πρώτες τέσσερις δεξιότητες αναφέρονται στη διάσταση της ποιότητας και της διαφοροποίησης του περιβάλλοντος μάθησης που δημιουργείται στην τάξη και περιλαμβάνει τις αλληλεπιδράσεις, τόσο μεταξύ των μαθητών όσο και μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών. Οι άλλες πέντε δεξιότητες σχετίζονται με την εστίαση, την ποιότητα και τη διαφοροποίηση της νέας διδακτικής προσέγγισης.

Σε γενικές γραμμές, μπορεί να αναφερθεί ότι τα τρία πρώτα επίπεδα σχετίζονται με την άμεση και ενεργή διδασκαλία. Στη συνέχεια, γίνεται μεταφορά από τα βασικά χαρακτηριστικά - που εμπερικλείουν ποσοτικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας - σε πιο απαιτητικά χαρακτηριστικά, που εμπερικλείουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των παραγόντων. Άρα, οι δεξιότητες που περιλαμβάνουν τα επίπεδα μεταφέρονται από τον δασκαλοκεντρικό χαρακτήρα της διδασκαλίας στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών στη μάθηση. Τα δύο τελευταία επίπεδα είναι πιο απαιτητικά, καθώς αναμένεται από τον εκπαιδευτικό να διαφοροποιήσει τη διδασκαλία, προσφέροντας στους μαθητές δραστηριότητες ανάλογες με τις ικανότητές τους.

Η συγκεκριμένη έρευνα (Kyriakides et al., 2009) εξέτασε κατά πόσο η κατηγοριοποίηση της αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού σε 5 επίπεδα μπορεί να ερμηνεύσει τη διασπορά των μαθησιακών αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα μαθησιακά αποτελέσματα των εκπαιδευτικών που ανήκουν στο πρώτο επίπεδο ήταν τα πιο χαμηλά. Επίσης, τα μαθησιακά αποτελέσματα των εκπαιδευτικών που ανήκουν στο τέταρτο και πέμπτο επίπεδο ήταν πιο ψηλά από αυτά των τριών πρώτων επιπέδων.

Ο πίνακας 2 που ακολουθεί, συνοψίζει τα ερευνητικά προγράμματα που χρησιμοποίησαν την Δυναμική Προσέγγιση για σκοπούς επαγγελματικής βελτίωσης των εκπαιδευτικών.

Πίνακας 2. Σύνοψη των ερευνητικών προγραμμάτων που χρησιμοποίησαν την Δυναμική Προσέγγιση για σκοπούς επαγγελματικής βελτίωσης των εκπαιδευτικών

Υποθέσεις που διερευνήθηκαν	Ερευνητικά Προγράμματα
Υπόθεση 1 : Ομαδοποίηση των παραγόντων Οι παράγοντες του εκπαιδευτικού και οι διαστάσεις τους μπορούν να ταξινομηθούν σε διαφορετικά στάδια αποτελεσματικής διδασκαλίας.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Υπόθεση 2 : Η επίδραση των παραγόντων / επιπέδων Οι εκπαιδευτικοί που ανήκουν σε ψηλότερα επίπεδα, φάνηκε να είναι πιο αποτελεσματικοί από αυτούς που ανήκουν σε χαμηλότερα επίπεδα όσον αφορά την προώθηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων σε κάθε γνωστικό αντικείμενο.	1, 2, 3, 5, 6, 7
Υπόθεση 3 : Η προστιθέμενη αξία της δυναμικής προσέγγισης Η προστιθέμενη αξία της χρήσης της δυναμικής προσέγγισης (δυναμική προσέγγισης VS ολιστική προσέγγιση) εντοπίστηκε, καθώς η δυναμική προσέγγιση φάνηκε να έχει επίδραση στη βελτίωση των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών και των μαθησιακών αποτελεσμάτων.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Υπόθεση 4 : Η επίδραση της δυναμικής προσέγγισης παραμένει και όταν δεν προσφέρεται η παρέμβαση (sustainability) Δεν παρατηρήθηκε βελτίωση ή απόκλιση σε καμία από τις ομάδες, κάτι το οποίο δείχνει ότι η επίδραση της δυναμικής προσέγγισης στη βελτίωση των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών ούτε μειώθηκε ούτε αυξήθηκε ένα χρόνο μετά το τέλος της παρέμβασης.	1, 2
Υπόθεση 5 : Η επίδραση της δυναμικής προσέγγισης στη βελτίωση των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών και στην ενίσχυση των μαθησιακών αποτελεσμάτων, δεν εξαρτάται από το κατά πόσο προσφέρεται εξωτερικά ή σε σχολική βάση	3
Υπόθεση 6: Η σημασία της προσφοράς της δυναμικής προσέγγισης για περισσότερα από ένα χρόνο (duration effect) Η επίδραση της δυναμικής προσέγγισης στις δεξιότητες των εκπαιδευτικών είναι μεγαλύτερη όταν το πρόγραμμα προσφέρεται για τρία παρά για ένα μόνο σχολικό έτος	4

Συμπεράσματα και Εισηγήσεις για Περαιτέρω Έρευνα

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με την ανάπτυξη και τον έλεγχο του ΔΜΕΑ καθώς μετά από μια κριτική επισκόπηση των μοντέλων εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας που αναπτύχθηκαν το 1990, έχει αναπτυχθεί ένα μοντέλο το οποίο επιχειρεί να λάβει υπόψη το δυναμικό χαρακτήρα της εκπαίδευσης. Το ΔΜΕΑ ενσωματώνει τα αποτελέσματα των ερευνών οι οποίες αποσκοπούσαν στον έλεγχο των μοντέλων της προηγούμενης δεκαετίας και κυρίως του ολιστικού μοντέλου, καθώς και τα ευρήματα των ερευνών για την αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού. Συνεπώς, παρουσιάζονται και συζητούνται οι βασικές παραδοχές του ΔΜΕΑ, καθώς και οι παράγοντες και οι διαστάσεις που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται στοιχεία που παρέχουν εμπειρική στήριξη στις βασικότερες υποθέσεις του ΔΜΕΑ και τονίζουν τη σημασία των παραγόντων εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας μέσα από τις διαχρονικές έρευνες και τις μετα-αναλύσεις. Κατόπιν, παρουσιάζονται οι δύο κυρίαρχες προσεγγίσεις στο χώρο της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών και εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο η δυναμική προσέγγιση προσπαθεί να ξεπεράσει τα βασικά μειονεκτήματα τους. Η προτεινόμενη δυναμική προσέγγιση βασίζεται στην υπόθεση ότι η υπάρχουσα γνώση στον τομέα της ΕΕΑ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό στρατηγικών και σχεδίων δράσης για βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης. Κατ’ επέκταση, περιγράφονται αναλυτικά τα κύρια χαρακτηριστικά και στάδια της προσέγγισης αυτής για βελτίωση της αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού. Συνεπώς, σε κατοπινό στάδιο, τονίζεται η ανάγκη για ανάπτυξη ξεκάθαρης εθνικής πολιτικής σε σχέση με την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα, η εθνική πολιτική πρέπει να τονίζει ότι κάθε εκπαιδευτικός πρέπει να εμπλέκεται συνεχώς σε προγράμματα επιμόρφωσης που να αποσκοπούν σε βελτίωση της αποτελεσματικότητάς τους. Επίσης, να γίνεται καταρτισμός ερευνητικής και συμβουλευτικής ομάδας που να στηρίζει τους εκπαιδευτικούς στην ανάπτυξη παρεμβατικών προγραμμάτων βελτίωσης της αποτελεσματικότητάς τους. Επιπρόσθετα, χρήσιμη θα ήταν η συστηματική αξιολόγηση των επιμορφωτικών προγραμμάτων, καθώς επίσης η ανάπτυξη μηχανισμών αξιολόγησης των εκπαιδευτικών που να έχουν ως επίκεντρο την αξιολόγηση και βελτίωση των διδακτικών τους δεξιοτήτων και τέλος, η σταδιακή ανάπτυξη θετικών στάσεων απέναντι στη μάθηση και στην ανάγκη συνεχούς βελτίωσης της αποτελεσματικότητας στην εκπαίδευσή μας.

Αναφορές

Antoniou, P., & Kyriakides, L. (2011). The impact of a dynamic approach to professional development on teacher instruction and student learning: Results from an experimental study. *School Effectiveness and School Improvement*, *22*(3), 291-311.

Antoniou, P., & Kyriakides, L. (2013). A dynamic integrated approach to teacher professional development: Impact and sustainability of the effects on improving teacher behavior and student outcomes. *Teaching and Teacher Education, 29*(1), 1-12.

Aparicio, J.J. & Moneo M.R. (2005). Constructivism, the so-called semantic learning theories, and situated cognition versus the psychological learning theories. *Spanish Journal of Psychology*, *8* (2), 180-198.

Askew, M. & William, D. (1995). *Recent Research in Mathematics Education 5-16.* London: Office for Standards in Education, 53.

Azigwe, J.B., Kyriakides, L., Panayiotou, A., & Creemers, B.P.M. (2016). The impact of effective teaching characteristics in promoting student achievement in Ghana. *International Journal of Educational Development, 51,* 51-61.

Azkiyah, S.N., Doolaard, S., Creemers, B.P.M., & Van Der Werf, M.P.C. (2014). The effects of two intervention programs on teaching quality and student achievement. *Journal of Classroom Interaction, 49*(1), 4-11.

Bangert-Drowns, R. L., Kulik, C. L. C., Kulik, J. A., & Morgan, M. (1991). The instructional effect of feedback in test-like events. *Review of Educational Research, 61,* 213-238. doi:10.3102/00346543061002213

Becker, B.J., Kennedy, M.M., Hundersmarck, S. (2003, April). *Hypothesis about 'quality': A decade of debates.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. Chicago.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing a theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31.

Borich, G. D. (1992). *Effective Teaching Methods* (2nd ed.). New York: Macmillan.

Brookhart, S. M. (2011). Educational assessment knowledge and skills for teachers. *Educational Measurement: Issues and Practice, 30*(1), 3–12.

Brophy, J., & Good, T.L. (1986). Teacher behaviour and student achievement. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 328–375). New York: MacMillan.

Campbell, R.J., Kyriakides, L., Muijs, R.D., & Robinson, W. (2004). *Assessing Teacher Effectiveness: A Differentiated Model.* London: Routledge/Falmer.

Cazden, C. B. (1986). Classroom Discourse. In M. C. Wittrock (Ed.) *Handbook of Research on Teaching* (pp. 432-463). New York: MacMillan.

Christoforidou, M. (2013). *Teacher professional development in classroom assessment: using the dynamic model of educational effectiveness to improve* *assessment practice*. Doctoral thesis. Nicosia, Cyprus: University of Cyprus, Department of Education.

Christoforidou, M., Kyriakides, L., Antoniou, P., & Creemers, B.P.M. (2014). Searching for stages of teacher skills in assessment. *Studies in Educational Evaluation*, *40*, 1-11.

Christoforidou, M., & Xirafidou, E. (2014). Using the dynamic model to identify stages of teacher skills in assessment. *Journal of Classroom Interaction, 49*(1), 12-25.

Cornford, I.R. (2002). Reflective teaching: Empirical research findings and some implications for teacher education. *Journal of Vocational Education & Training, 54*(2), 219–236.

Creemers, B.P.M. (1994). *The Effective Classroom*. London: Cassell.

Creemers, B.P.M., & Kyriakides, L. (2006). Critical analysis of the current approaches to modelling educational effectiveness: The importance of establishing a dynamic model. *School Effectiveness and School Improvement, 17*(3), 347–366.

Creemers, B.P.M., & Kyriakides, L. (2008). *The dynamics of educational effectiveness: A contribution to policy, practice and theory in contemporary schools.* London and New York: Routledge.

Creemers, B.P.M., & Kyriakides, L. (2009). Situational effects of the school factors included in the dynamic model of educational effectiveness. *South African Journal of Education, 29*(3), 293-315.

Creemers, B.P.M., & Kyriakides, L. (2010). Explaining stability and changes in school effectiveness by looking at changes in the functioning of school factors. *School Effectiveness and School Improvement, 21*(4), 409–427.

Creemers, B.P.M., & Kyriakides, L. (2012). *Improving quality in education: Dynamic approaches to school improvement.* London: Routledge.

Creemers, B.P.M., Kyriakides, L., & Antoniou, P. (2013). *Teacher professional development for improving quality of teaching*. Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Creemers, B.P.M., Kyriakides, L., & Sammons, P. (2010). *Methodological Advances in Educational Effectiveness Research*. London and New York: Taylor & Francis.

Cruickshank, D., & Metcalf, K. (1990). Training within teacher preparation. In W. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 469–497). New York: Macmillan.

De Corte, E. (2000). Marrying theory building and the improvement of school practice: A permanent challenge for instructional psychology. *Learning and Instruction*, *10*(3), 249-266.

de Jong, R., Westerhof, K.J., & Kruiter, J.H., (2004). Empirical evidence of a comprehensive model of school effectiveness: A multilevel study in mathematics in the 1st year of junior general education in the Netherlands. *School Effectiveness and School Improvement*, *15*(1), 3–31.

Den Brok, P., Brekelmans, M., & Wubbels, T. (2004). Interpersonal teacher behaviour and student outcomes. *School Effectiveness and School Improvement, 15*(3/4), 407–442.

Dimosthenous, A., Kyriakides, L., & Panayiotou, A. (2020). Short- and long-term effects of the home learning environment and teachers on student achievement in mathematics: A longitudinal study. *School Effectiveness and School Improvement, 31*(1), 50-79. DOI: 10.1080/09243453.2019.1642212

Donaldson, L. (2001). *The Contingency Theory of Organizations: Foundations for Organisational Science.* Thousands Oaks, CA: Sage.

Driessen, G., & Sleegers, P. (2000). Consistency of Teaching Approach and Student Achievement: An Empirical Test. *School Effectiveness and School Improvement, 11*(1), 57–79.

Evertson, C. M., Anderson, C., Anderson, L., & Brophy, J. (1980). Relationships between classroom behaviour and student outcomes in junior high math and English classes. *American Educational Research Journal, 17*, 43-60.

Gijbels, D., Van de Watering, G., Dochy, F., & Van den Bossche, P. (2006). New learning environments and constructivism: The students' perspective. *Instructional Science*, *34*(3), 213-226.

Golby, M., & Viant, R., (2007). Means and ends in professional development. *Teacher Development*, *11*(2), 237–243.

Goldstein, H. (2003) (3rd Edition). *Multilevel statistical models.* London: Edward Arnold.

Gray, J., Goldstein, H., & Jesson, D. (1996). Changes and improvements in schools' effectiveness: trends over five years. *Research Papers in Education, 11*(1), 35–51.

Gray, J., Goldstein, H., & Thomas, S. (2001). Predicting the future: the role of past performance in determining trends in institutional effectiveness at A-level. *British Educational Research Journal, 27*(4), 1–15.

Grieve, A. M. (2010). Exploring the characteristics of "teachers for excellence": Teachers' own perceptions. *European Journal of Teacher Education, 33*(3), 265–277.

Guldemond, H., & Creemers, B.P.M. (1999). Empirical Validity for a Comprehensive Model on Educational Effectiveness. *School Effectiveness and School Improvement, 10*(2), 193–216.

Harjunen, E. (2012). Patterns of control over the teaching–studying–learning process and classrooms as complex dynamic environments: a theoretical framework. *European Journal of Teacher Education, 34*(2), 139-161.

Ioannou, C. (2017). *The dynamic model of educational effectiveness tested by investigating the impact of classroom level factors on slow learners' outcomes in language: An effectiveness study on a specific student population*.

(Unpublished doctoral dissertation). Department of Education, University of Cyprus, Nicosia, Cyprus.

Johnston, R., & Usher, R. (1996). Adult learning and critical practices: Towards a re-theorisation of experience. *Australian Journal of Experiential Learning, 35,* 50-61.

Joyce, B., Weil, M., & Calhoun, E. (2000) *Models of teaching*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Kirschner, P. A. (2002). Cognitive load theory: Implications of cognitive load theory on the design of learning. *Learning and instruction*, *12*(1), 1-10.

Korthagen, F.A. (2004). In search of the essence of a good teacher: towards a more holistic approach in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 20*(1), 77–97.

Kyriakides, L. (2005). Extending the Comprehensive Model of Educational Effectiveness by an Empirical Investigation. *School Effectiveness and School Improvement*, *16*(2), 103–152.

Kyriakides, L. (2008). Testing the validity of the comprehensive model of educational effectiveness: a step towards the development of a dynamic model of effectiveness. *School Effectiveness and School Improvement, 19*(4), 429–446*.*

Kyriakides, L., Anthimou, M., & Panayiotou, A. (2020). Searching for the impact of teacher behavior on promoting students' cognitive and metacognitive skills. *Studies in Educational Evaluation, 64.*

Kyriakides, L., Archambault, I., & Janosz, M. (2013). Searching for stages of effective teaching: A study testing the validity of the dynamic model in Canada. *Journal of Classroom Interaction, 48*(2), 11-24.

Kyriakides, L., Campbell, R.J., & Gagatsis, A. (2000). The Significance of the Classroom Effect in Primary Schools: An Application of Creemers' Comprehensive Model of Educational Effectiveness. *School Effectiveness and School Improvement*, *11*(4), 501–529.

Kyriakides, L., & Creemers, B.P.M. (2008a). A longitudinal study on the stability over time of school and teacher effects on student learning outcomes. *Oxford Review of Education, 34*(5), 521-545.

Kyriakides, L., & Creemers, B.P.M. (2008b). Using a multidimensional approach to measure the impact of classroom level factors upon student achievement: A study testing the validity of the dynamic model. *School Effectiveness and School Improvement, 19*(2), 183-205.

Kyriakides, L., & Creemers, B.P.M. (2009). The effects of teacher factors on different outcomes: Two studies testing the validity of the dynamic model. *Effective Education, 1*(1),61-86.

Kyriakides, L., Creemers, B.P.M. & Antoniou, P. (2009). Teacher behaviour and student outcomes: Suggestions for research on teacher training and professional development. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 12-23*.*

Kyriakides, L., Christoforidou, M., Panayiotou, A., & Creemers, B.P.M. (2017). The impact of a three-year teacher professional development course on quality of teaching: Strengths and limitations of the dynamic approach. *European Journal of Teacher Education, 40*(4), 465-486.

Kyriakides, L., Christoforou, C., & Charalambous, C.Y. (2013). What matters for student learning outcomes: A meta-analysis of studies exploring factors of effective teaching. *Teaching and Teacher Education, 36,* 143-152.

Kyriakides, L., Creemers, B.P.M. & Antoniou, P. (2009). Teacher behaviour and student outcomes: Suggestions for research on teacher training and professional development. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 12-23.

Kyriakides, L., Creemers, B.P.M., Antoniou, P., & Demetriou, D. (2010). A synthesis of studies searching for school factors: Implications for theory and research. *British Educational Research Journal, 36*(5), 807-830.

Kyriakides, L., Creemers, B.P.M., Antoniou, P., Demetriou, D., & Charalambous, C. (2015). The impact of school policy and stakeholders' actions on student learning: A longitudinal study. *Learning and Instruction, 36,* 113-124.

Kyriakides, L., Georgiou, M.P., Creemers, B.P.M., Panayiotou, A., & Reynolds, D. (2018). The impact of national educational policies on student achievement: A European study. *School Effectiveness and School Improvement*, *29*(2), 171-203.

Kyriakides, L., Panayiotou, A., Creemers, B.P.M., & Antoniou, P. (2013). *Integrating research on teacher effectiveness with research on teacher professional development.* Paper presented at the American Educational Research Association (AERA) 2013 Conference. San Francisco, California, April 27- May 1, 2013.

Kyriakides, L., & Tsangaridou, N. (2008). Towards the development of generic and differentiated models of educational effectiveness: a study on school and teacher Effectiveness in Physical Education. *British Educational Research Journal, 34*(6), 807–838.

Kyriakides, E., Tsangaridou, N., Charalambous, C., & Kyriakides, L. (2018). Integrating generic and content-specific teaching practices in exploring teaching quality in primary physical education. *European Physical Education Review, 24*(4), 418–448.

Lelei, H. (2019). *A case study of policy and actions of Rivers State, Nigeria to improve teaching quality and the school learning environment*. (Unpublished doctoral dissertation). School of Education, UNSW, Sydney, Australia.

Levine, D.U., & Lezotte, L.W. (1990). *Unusually effective schools: a review and analysis of research and practice.* Madison (USA): National Center for Effective Schools Research and Development.

Marzano, R. J. (2007). *The art and science of teaching*. Virginia: ASCD Publications.

Muijs, D., & Reynolds, D. (2001). *Effective teaching: Evidence and practice*. London: Sage.

Muijs, R.D., Kyriakides, L., van der Werf, G., Creemers, B.P.M., Timperley, H., & Earl, L. (2014). State of the art-teacher effectiveness and professional learning. *School Effectiveness and School Improvement, 25*(2), 231-256.

Ottesen, E. (2007). Reflection in teacher education. *Reflective Practice, 8*(1), 31-46.

Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational psychologist*, *38*(1), 1-4.

Paget, C. (2018). Exploring school resource and teacher qualification policies, their implementation and effects on schools and students' educational outcomes in Brazil. (Unpublished doctoral dissertation). Department of Education, University of Oxford, UK.

Panayiotou, A., Kyriakides, L., Creemers, B.P.M., McMahon, L., Vanlaar, G., Pfeifer, M., …, & Bren, M. (2014). Teacher behavior and student outcomes: Results of a European study. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, *26*(1), 73-93.

Paris S.G., & Paris, A.H. (2001). Classroom applications of research on self-regulated learning. *Educational Psychologist*. *36*(2), 89–101.

Reezigt, G.J., Guldemond, H., & Creemers, B.P.M. (1999). Empirical validity for a comprehensive model on educational effectiveness. *School Effectiveness and School Improvement, 10*(2), 193-216.

Rosenshine, B., & Stevens, R. (1986). Teaching functions. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed.), (pp. 376-391). New York: Macmillan.

Scheerens, J. (1992). *Effective Schooling: Research, Theory and Practice*. London: Cassell.

Scheerens, J. (2013). The use of theory in school effectiveness research revisited. *School Effectiveness and School Improvement*, *24*(1), 1-38.

Schoenfeld, A.H. (1998). Toward a theory of teaching in context. *Issues in Education*, *4* (1), 1–94.

Schon, D.A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York: Basic Books.

Scheerens, J., & Bosker, R.J. (1997). *The foundations of educational effectiveness.* Oxford: Pergamon.

Seidel, T., & Shavelson, R. J. (2007). Teaching effectiveness research in the past decade: The role of theory and research design in disentangling meta-analysis results. *Review of educational research*, *77*(4), 454-499.

Shepard, L. A. (1989). Why we need better assessment. *Educational Leadership, 46* (2), 4-8.

Smith, D., & Hatton, N. (1992). Towards reflection in teacher education. What counts as evidence? *Paper presented at the Annual Conference of the*

Australian Association for Research in Education. Deakin University, November, 1992.

Sprinthall, N., Reiman, A., & Thies-Sprinthall, L. (1996). Teacher professional development. In J. Sikula, T. Buttery, & E. Guyton (Eds.), *Handbook of research on teacher education* (2nd ed., pp. 666–703). New York: Macmillan.

Stenmark, J.K. (1992). *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions and Practical Suggestions.* Reston, Virginia, NCTM

Stoiber, K. (1991). The effect of technical and reflective instruction on pedagogical reasoning and problem solving. *Journal of Teacher Education, 42*(2), 131-139.

Stringfield, S.C., & Slavin, R.E. (1992). A hierarchical longitudinal model for elementary school effects. In B.P.M. Creemers & G.J. Reezigt (Eds.), *Evaluation of Educational Effectiveness*, pp. 35–69. Groningen: ICO.

Tan, C. (2008). Improving schools through reflection for teachers: Lessons from Singapore. *School Effectiveness and School Improvement*, *19*(2), 225-238.

Teddlie, C., & Reynolds, D. (2000). *The international handbook of school effectiveness research*. London: Falmer Press.

Thomas, S. (2001). Dimensions of secondary school effectiveness: Comparative analyses across regions. *School Effectiveness and School Improvement, 12*(3), 285–322.

Thomas, S., Peng, W.J., & Gray, J. (2007). Modelling patterns of improvement over time: value added trends in English secondary school performance across ten cohorts. *Oxford Review of Education, 33*(3), 261–295.

Tunstall, P., & Gsipps, C. (1996). Teacher feedback to young children in formative assessment: A typology. *British educational research journal*, *22*(4), 389-404.

Van Manen, M., & Li, S. (2002). The pathic principle of pedagogical language. *Teaching and Teacher Education, 18*(2)*,* 215–224.

Walberg, H.J. (1986b). Syntheses of research on teaching. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed.), (pp. 214-229). New York: Macmillan.

Wiliam, D., Lee, C., Harrison, C., & Black, P. J. (2004). Teachers developing assessment for learning: Impact on student achievement. *Assessment in Education: Principles Policy and Practice, 11*(1), 49–65.

Winne, P. H. (2005). A perspective on state-of-the-art research on self-regulated learning. *Instructional science*, *33*(5/6), 559-565.

Zeichner, K.M. (1987). Preparing reflective teachers: An overview of instructional strategies which have been employed in preservice teacher education. *International Journal of Educational Research*, 11(5), 565-575.

Έρευνες

1. A longitudinal study measuring teacher and school effectiveness in different subjects (i.e., Mathematics, Language and Religious Education) and different learning domains (cognitive and affective) (Kyriakides & Creemers, 2008b).

2. A study investigating the impact of teacher factors on achievement of Cypriot students at the end of pre-primary school (Kyriakides & Creemers, 2009).

3. A follow-up study testing the validity of the model at the school level by looking at the extent to which changes in the functioning of school factors can predict changes in the effectiveness status of schools in different subjects (i.e., Mathematics and Language) (see Creemers & Kyriakides, 2010).

4. A European study testing the validity of the dynamic model at teacher, school and system level (Panayiotou et al., 2014).

5. A study in Canada searching for grouping of teacher factors included in the dynamic model and revealing specific stages of effective teaching (Kyriakides, Archambault, & Janosz, 2013).

6. An experimental study investigating the impact upon student achievement of a teacher professional development approach based on the dynamic approach (Antoniou & Kyriakides, 2011).

7. Searching for not only the impact but also the sustainability of the dynamic approach on improving teacher behaviour and student outcomes (Antoniou & Kyriakides, 2013).

8. Searching for stages of teacher's skills in assessment (Christoforidou, Kyriakides, Antoniou, & Creemers, 2014).

9. The effects of two intervention programs on teaching quality and student achievement revealing the added value of the dynamic approach (Azkiyah, Doolaard, Creemers, & Van Der Werf, 2014).

10. Using the dynamic model to identify stages of teacher skills in assessment in two different countries (Cyprus and Greece) (Christoforidou & Xirafidou, 2014).

11. Using observation and student questionnaire data to measure the impact of teaching factors on mathematics achievement of primary students in Ghana (Azigwe, Kyriakides, Panayiotou, & Creemers, 2016).

12. Searching for the impact of teacher behaviour on promoting students' cognitive and metacognitive skills (Kyriakides, Anthimou, & Panayiotou, 2020).

13. Investigating the impact of teacher factors on slow learners' outcomes in language (Ioannou, 2017).

14. Integrating generic and content-specific teaching practices in exploring teaching quality in primary physical education (Kyriakides, Tsangaridou, Charalambous, & Kyriakides, 2018).

15. A European study searching for the impact of national educational policies on student achievement (Kyriakides, Georgiou, Creemers, Panayiotou, & Reynolds, 2018).

16. A longitudinal study searching for the short- and long-term effects of the home learning environment and teacher factors included in the dynamic model on student achievement in mathematics (Dimosthenous, Kyriakides, Panayiotou, 2020).

17. A case study of policy and actions of Rivers State, Nigeria to improve teaching quality and the school learning environment (Lelei, 2019).

18. Exploring school resource and teacher qualification policies, their implementation and effects on schools and students' educational outcomes in Brazil (Paget, 2018).

19. A longitudinal study investigating the impact of school policy and stakeholders' actions on student achievement gains in mathematics (Kyriakides, Creemers, Antoniou, Demetriou, & Charalambous, 2015).

<u>Μετα-αναλύσεις:</u>

1. A quantitative synthesis of 67 studies exploring the impact of school factors on student achievement (Kyriakides, Creemers, Antoniou, & Demetriou, 2010).

2. A quantitative synthesis of 167 studies searching for the impact of generic teaching skills on student achievement (Kyriakides, Chirstoforou, & Charalambous, 2013).

Ερευνητικά Προγράμματα:

1. Antoniou, P., & Kyriakides, L. (2011). The impact of a dynamic approach to professional development on teacher instruction and student learning: results from an experimental study. *School Effectiveness and School Improvement*, *22*(3), 291-311.
2. Antoniou, P., & Kyriakides, L. (2013). A Dynamic Integrated Approach to Teacher Professional Development: Impact and Sustainability of the Effects on Improving Teacher Behavior and Student Outcomes. *Teaching and Teacher Education, 29*(1), 1-12.
3. Kyriakides, L., Panayiotou, A., Creemers, B.P.M., & Antoniou, P. (2013). Integrating Research on Teacher Effectiveness with Research on Teacher Professional Development. *Paper presented at the American Educational Research Association (AERA) 2013 Conference.* San Francisco, California, April 27- May 1, 2013.
4. Kyriakides, L., Christoforidou, M., Panayiotou, A., & Creemers, B.P.M. (2017). The impact of a three-year teacher professional development course on quality of teaching: strengths and limitations of the dynamic approach. *European Journal of Teacher Education, 40*(4), 465-486.
5. Christoforidou, M., Kyriakides, L., Antoniou, P., & Creemers, B.P.M. (2014). Searching for stages of teacher skills in assessment. *Studies in Educational Evaluation*, *40*, 1-11.
6. Christoforidou, M. (2013). Teacher professional development in classroom assessment: using the dynamic model of educational effectiveness to improve assessment practice. *Doctoral thesis.* Nicosia, Cyprus: University of Cyprus, Department of Education.
7. Erasmus+ FORMAS: www.ucy.ac.cy/formas

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεοδόσης Ζαχαριάδης

Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μαθηματική γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο είναι αντικείμενο μελέτης και έχουν προταθεί διαφορετικές προσεγγίσεις όσον αφορά στα συστατικά της στοιχεία. Παράλληλα, έχουν διερευνηθεί οι απόψεις εκπαιδευτικών σχετικά με την αξιοποίηση στη διδασκαλία τους στο σχολείο των μαθηματικών γνώσεων που απέκτησαν στο πανεπιστήμιο. Οι περισσότεροι φαίνεται ότι αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα της γνώσης που απέκτησαν στο πανεπιστήμιο μόνο στις περιπτώσεις που αυτή αποτελεί διδακτικό αντικείμενο στο σχολείο. Όμως η μαθηματική γνώση που είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία δεν περιορίζεται στην απλή γνώση του διδακτικού αντικειμένου. Περιλαμβάνει γνώσεις οι οποίες, αν και δεν αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας, είναι σημαντικές για το σχεδιασμό του μαθήματος, τη διδακτική διαχείριση της τάξης, την αντιμετώπιση αναμενόμενων και, κυρίως, μη αναμενόμενων ερωτήσεων και απαντήσεων των μαθητών. Επίσης είναι σημαντικές για την αναγνώριση παρανοήσεων των μαθητών, καθώς και την ανίχνευση των λόγων που οδήγησαν σε αυτές και τη διδακτική διαχείρισή τους.

Πώς όμως χρησιμοποιείται η πανεπιστημιακή γνώση στις παραπάνω περιπτώσεις και γενικότερα πως αυτή συνδέεται με τα σχολικά μαθηματικά; Μέσα από ερευνητικά ευρήματα και συγκεκριμένα παραδείγματα θα επιχειρήσω να απαντήσω σε αυτά τα ερωτήματα, αναδεικνύοντας την ιδιαίτερη σημασία που έχει η πανεπιστημιακή γνώση στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών.

ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το θέμα της γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία έχει απασχολήσει ιδιαίτερα την ερευνητική κοινότητα. Ο L. Schulman, στην προμετωπίδα της εργασίας του, η οποία σηματοδότησε την έρευνα στο συγκεκριμένο θέμα (Schulman 1986), αναφέρει το απόφθεγμα του George Bernard Shaw *«He who can, does. He who cannot, teaches»*. Στη συνέχεια, σε αυτή την πλήρως απαξιωτική για τους δασκάλους και γενικότερα για τη διδασκαλία άποψη του Άγγλου συγγραφέα, ο Schulman αντιπαραθέτει την άποψη του Αριστοτέλη ο οποίος αιώνες πριν, στο έργο του Τα Μετά τα Φυσικά, έγγραφε:

«Παρ' όλα αυτά, η κατοχή του είδους των πραγμάτων και η βαθιά τους κατανόηση υπάρχει κατά την γνώμη μας στην τέχνη περισσότερο και όχι στην εμπειρία.... Οι εμπειρικοί βέβαια κατέχουν το «ότι», αλλά το «διότι» δεν το κατέχουν. Στους άλλους [στους τεχνίτες] όμως το διότι και η αιτία είναι γνώριμη. ......Σύμφωνα με τη σκέψη πως η υπεροχή της σοφία τους [των τεχνιτών] δεν εξαρτάται από την πρακτική τους, αλλά από το ότι κατέχουν τον λόγο και διακρίνουν τις αιτίες και γενικά είναι σημάδι που ξεχωρίζει αυτόν που ενσυνείδητη γνώση κατέχει, το ότι ημπορεί να διδάσκη. Και γι' αυτό κάνομε τη σκέψη πως η τέχνη είναι σε μεγαλύτερο βαθμό επιστήμη από την εμπειρία. Γιατί οι τεχνίτες ημπορούν να διδάσκουν όχι όμως και οι εμπειρικοί.»[1]

Δηλαδή, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, αυτό που ξεχωρίζει αυτόν που μπορεί να διδάξει ένα αντικείμενο είναι ότι, εκτός από την απλή γνώση του αντικειμένου, γνωρίζει «το λόγο και διακρίνει τις αιτίες», κατέχει «ενσυνείδητη γνώση» του αντικειμένου. Αυτή όμως η ενσυνείδητη γνώση είναι αρκετή για τη διδασκαλία; Σύμφωνα με τον Ούγγρο μαθηματικό E. Beke, στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο δεν μπορούμε να πούμε όλη την αλήθεια, πρέπει όμως να μην την στρεβλώσουμε (Artigue, 1997). Επομένως, για τη διδασκαλία στο σχολείο απαιτείται καλή μαθηματική γνώση του προς διδασκαλία αντικειμένου και ταυτόχρονα γνώση για τη διδασκαλία του στη σχολική τάξη, ώστε αυτό να γίνει κατανοητό από τους μαθητές και παράλληλα να μην αλλοιωθεί η επιστημονική του ουσία.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία είναι σύνθετη, έχει πολλές διαστάσεις και ως τέτοια αντιμετωπίστηκε ερευνητικά. Ο Shulman (1986) ανέλυσε τη γνώση για τη διδασκαλία στη Γνώση του Περιεχομένου (Subject Matter Knowledge), την Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge) και την Γνώση των Προγραμμάτων Σπουδών (Curricular Knowledge). Ως Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου ο Schulman θεωρεί τη γνώση του μετασχηματισμού της επιστημονικής γνώσης σε γνώση για τη διδασκαλία της.

[1] Γεωργούλης, Δ. Κ. (2005). Αριστοτέλους Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά). Εκδόσεις Παπαδήμας.

Αυτή η εργασία του Schulman αποτέλεσε σημείο αναφοράς για την έρευνα που αφορά στη γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία. Ειδικότερα για τη γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών, σημαντικοί ερευνητές του χώρου της Διδακτικής των Μαθηματικών μελέτησαν το θέμα (Rowland, Huckstep και Thwaites, 2005, Ball, Thames και Phelps, 2008, Silverman, Thompson, 2008 κ.α.).

Ειδικότερα, οι Ball, Thames και Phelps (2008) επεξεργάστηκαν και εξειδίκευσαν τις συνιστώσες που πρότεινε ο Schulman στη περίπτωση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, διέκριναν τη γνώση του περιεχομένου στην Κοινή Γνώση του Περιεχομένου (Common Content Knowledge) (ΚΓΠ) – γνώση που δεν είναι αναγκαία μόνο για τη διδασκαλία αλλά και για άλλους χώρους στους οποίους χρησιμοποιούνται μαθηματικά - στην Εξειδικευμένη Γνώση του Περιεχομένου (Specialized Content Knowledge) (ΕΓΠ) – γνώση που χρειάζεται ειδικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών - και στη Γνώση του Ορίζοντα του Περιεχομένου (Horizon Content Knowledge) (ΓΟΠ) – γνώση της συσχέτισης των υπό διδασκαλία μαθηματικών θεμάτων με το εύρος των μαθηματικών που περιέχονται στο πρόγραμμα σπουδών. Επίσης, διέκριναν την Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου στη Γνώση του Περιεχομένου και Μαθητή (Knowledge of Content and Student) (ΓΠΜ) – γνώση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές για τη μάθηση του γνωστικού αντικειμένου - στη Γνώση του Περιεχομένου και Διδασκαλίας (Knowledge of Content and Teaching) (ΓΠΔ) – γνώση του μετασχηματισμού του γνωστικού αντικειμένου - και στη Γνώση του Περιεχομένου και του Προγράμματος Σπουδών (Knowledge of Content and Curriculum) (ΓΠΠΣ) – γνώση της θέσης του γνωστικού αντικειμένου στο πρόγραμμα σπουδών και σύνδεσης του με προηγούμενες και επόμενες διδακτικές ενότητες.

Οι D. Ball και H. Bass (2009) εστιάζοντας στη ΓΟΠ την επεξέτειναν πέρα από τα σχολικά μαθηματικά, ορίζοντας αυτή ως «επίγνωση του ευρύτερου μαθηματικού πεδίου στο οποίο εντάσσεται το θέμα διδασκαλίας» και τη θεώρησαν ως «ένα είδος στοιχειώδους αντίληψης της ανώτερης γνώσης που εξοπλίζει τους εκπαιδευτικούς με μια ευρύτερη αλλά συγκεκριμένη οπτική και προσανατολισμό για το έργο τους». Αυτή η αντίληψη, όπως αναφέρουν, είναι συμπληρωματική της οπτικής του Felix Klein για τα «στοιχειώδη μαθηματικά από ανώτερη σκοπιά», η οποία αποτελεί και τον τίτλο του σχετικού βιβλίου του (Felix Klein, 1939). Οι Ball και Bass θεωρούν ότι αυτό το είδος γνώσης είναι σημαντικό για τη διδασκαλία επειδή μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να αξιολογήσει τη μαθηματική σημασία του διδακτικού αντικειμένου και να αναδείξει τις σημαντικές ιδέες που υπάρχουν πίσω από αυτό, να δημιουργήσει συνδέσεις, να αξιοποιήσει ιδέες των μαθητών, να διαγνώσει μαθηματικές στρεβλώσεις και να προλάβει πιθανές μετέπειτα μαθηματικές παρανοήσεις.

Οι Ball και Bass (2009) διακρίνουν στη ΓΟΠ τέσσερα βασικά συστατικά στοιχεία:

α) την αίσθηση του μαθηματικού περιβάλλοντος που πλαισιώνει τη διδασκόμενη μαθηματική γνώση,

β) τις μεγάλες επιστημονικές ιδέες και δομές,

γ) τις σημαντικές μαθηματικές πρακτικές, και δ) τον πυρήνα των μαθηματικών αξιών και ευαισθησιών.

Η γενικότητα των ορισμών των παραπάνω πεδίων γνώσης είναι σαφές ότι καθιστά τα όρια τους μη διακριτά. Για παράδειγμα, η γνώση της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών αποτελεί τμήμα της ΕΓΠ, εφόσον αφορά στους πραγματικούς αριθμούς που αποτελούν διδακτικό αντικείμενο στο σχολείο ή ανήκει στο ευρύτερο μαθηματικό πεδίο του διδακτικού αντικειμένου και αποτελεί τμήμα της ΓΟΠ; Η μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες αποτελούν ΓΟΠ για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ή αφού μπορούν να αξιοποιηθούν άμεσα στη διδασκαλία της, όπως θα δούμε παρακάτω, αποτελούν ΕΓΠ; Όμως, παρά τα μη σαφή όρια τους, οι συνιστώσες του μοντέλου των Ball, Thames και Phelps προσφέρουν ένα χρήσιμο πλαίσιο για τη μελέτη της γνώσης για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Kleickmann et al., 2013)

Ειδικότερα, όσον αφορά στη γνώση του περιεχομένου, η μαθηματική γνώση που αποκτάται στο σχολείο περιέχεται κυρίως στην ΚΓΠ, ενώ η ΕΓΠ και η ΓΟΠ συγκροτούνται κυρίως από πανεπιστημιακές γνώσεις. Συνδέοντας τις συνιστώσες της γνώσης του περιεχομένου με την άποψη του Αριστοτέλη που αναφέρθηκε παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι η ΚΓΠ αφορά στο "ότι", η ΕΓΠ στο 'διότι" και η ΓΟΠ συνδέεται με την ενσυνείδητη γνώση του διδακτικού αντικειμένου.

Ειδικότερα η μελέτη της ΓΟΠ και του ρόλου της στη διδασκαλία απασχόλησε αρκετούς ερευνητές. Οι Jakobsen, Thames, Ribeiro και Delaney (2012), Jakobsen, Thames και Ribeiro (2013), Wasserman και Stockton (2013) κ.α. ασχολήθηκαν με τη ΓΟΠ στην κατεύθυνση των Ball και Bass (2009). Οι Zazkis & Mamolo (2011) προσέγγισαν τον ορίζοντα της γνώσης μέσα από τη φιλοσοφική ιδέα του Husserl, ο οποίος διακρίνει τον εσωτερικό (inner) και τον εξωτερικό (outer) ορίζοντα. Ο εσωτερικός ορίζοντας ενός αντικειμένου περιλαμβάνει πτυχές του αντικειμένου οι οποίες δεν είναι στην εστίαση της προσοχής μας, ενώ ο εξωτερικός ορίζοντας περιλαμβάνει χαρακτηριστικά τα οποία δεν είναι τα ίδια πτυχές του αντικειμένου αλλά συνδέονται με τον κόσμο στον οποίο το αντικείμενο υπάρχει. Η αντίληψή τους για τον ορίζοντα, όπως αναφέρουν, επηρεάζεται από την κοινή χρήση του όρου που είναι «εκεί που η γη φαίνεται να συναντά τον ουρανό», με τη διευκρίνηση ότι ο ορίζοντας είναι η περιοχή που η γνώση των πανεπιστημιακών μαθηματικών (ο ουρανός) φαίνεται να συναντά τη σχολική μαθηματική γνώση (τη γη). Θεωρούν ότι η γνώση των Ανώτερων Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς, τους επιτρέπει μια «υψηλή» θέαση και ευρύτερη οπτική του ορίζοντα σε σχέση με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του ίδιου του αντικειμένου (εσωτερικός ορίζοντας) και σε σχέση με τις σημαντικές ιδέες και δομές που περιβάλλουν τον κόσμο στον οποίο υπάρχει το αντικείμενο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Οι Zazkis και Leikin (2010) όρισαν ως Ανώτερη Μαθηματική Γνώση (ΑΜΓ) τη μαθηματική γνώση που αποκτάται στις προπτυχιακές σπουδές σε κολλέγια ή πανεπιστήμια και διερεύνησαν τις απόψεις καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όσον αφορά στην αξιοποίηση αυτής της γνώσης στη διδασκαλία. Συγκεκριμένα, ζήτησαν από 52 καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης να απαντήσουν στα παρακάτω:

- Σε ποια έκταση χρησιμοποιείτε ΑΜΓ στη διδασκαλία σας στο σχολείο;
- Δώστε ένα παράδειγμα (ή αν μπορείτε περισσότερα) μαθηματικού θέματος που περιέχεται στο σχολικό πρόγραμμα για το οποίο η ΑΜΓ είναι ουσιαστική για τους εκπαιδευτικούς. Για κάθε τέτοιο θέμα προσδιορίσατε τη χρήση της ΑΜΓ.
- Δώστε ένα παράδειγμα (ή αν μπορείτε περισσότερα) από την προσωπική σας εμπειρία για την χρήση ΑΜΓ στη διδακτική πρακτική (όπως αλληλεπίδραση με τους μαθητές, προετοιμασία μαθήματος, έλεγχος εργασιών μαθητών κ.α.). Δώστε λεπτομέρειες για το κάθε παράδειγμα.
- Δώστε ένα παράδειγμα (ή αν μπορείτε περισσότερα) μαθηματικών προβλημάτων ή έργων από το σχολικό πρόγραμμα για τα οποία η ΑΜΓ είναι αναγκαία ή χρήσιμη για τον εκπαιδευτικό. Για κάθε παράδειγμα περιγράψτε τη χρήση της ΑΜΓ.

Όπως αναφέρεται στο σχετικό άρθρο, στους εκπαιδευτικούς διευκρινίστηκε η σημασία του όρου ΑΜΓ, δεν υπήρξε χρονικό όριο για να απαντήσουν στις παραπάνω ερωτήσεις, μπορούσαν να ανατρέξουν σε πηγές που αυτοί θεωρούσαν χρήσιμες και τους δόθηκε η δυνατότητα να απαντήσουν γραπτά ή προφορικά με συνέντευξη.

Οι μισοί από τους εκπαιδευτικούς απάντησαν ότι δεν χρησιμοποιούν ή χρησιμοποιούν ελάχιστα ΑΜΓ, ενώ μόνο το 1/6 δήλωσε ότι την χρησιμοποιεί πάντοτε. Οι υπόλοιποι δήλωσαν ότι εξαρτάται από το αντικείμενο που διδάσκουν. Οι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν την ΑΜΓ στη διδασκαλία τους σπάνια, συχνά ή πάντοτε, ανέφεραν ότι την χρησιμοποιούν κυρίως σε θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης, δευτερευόντως στη διδασκαλία Στατιστικής και Πιθανοτήτων και υπήρξαν λίγοι εκπαιδευτικοί που δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν ΑΜΓ σε θέματα Γραμμικής Άλγεβρας (πίνακες και συστήματα εξισώσεων), Θεωρίας Αριθμών και Συνδυαστικής. Αν και στους εκπαιδευτικούς τονίστηκε ότι στον όρο ‘διδακτική πρακτική’ συμπεριλαμβάνονται όλες οι ενέργειες που συνδέονται με τη διδασκαλία, όπως ο σχεδιασμός του μαθήματος, η προετοιμασία των διδακτικών υλικών, η παρουσίαση στην τάξη, η αλληλεπίδραση με τους μαθητές και ο αναστοχασμός της διδασκαλίας, από τις απαντήσεις προέκυψε ότι αυτοί τείνουν να θεωρούν πως χρησιμοποιούν ΑΜΓ μόνο όταν τμήμα αυτής της γνώσης αποτελεί αντικείμενο διδασκαλίας. Στο τέλος της εργασίας οι δύο ερευνήτριες διερωτώνται αν οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα ή απλώς αυτοί δεν έχουν επίγνωση της χρήσης της ΑΜΓ και προτείνουν να διερευνηθούν οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε συγκεκριμένα εκπαιδευτικά σενάρια και όχι απλώς οι γενικές απόψεις τους για τη χρήση της ΑΜΣ.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο περιστατικά χρήσης ΑΜΓ από τη βιβλιογραφία τα οποία αναδεικνύουν τη σημασία που έχει η πανεπιστημιακή γνώση στη διδακτική πράξη. Το πρώτο αφορά στην αντιμετώπιση μιας απρόσμενης απάντησης μαθητή πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και το δεύτερο στο σχεδιασμό διδασκαλίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Οι Jakobsen, Thames, Ribeiro, & Delaney (2012) αναφέρουν το παρακάτω παράδειγμα από τάξη 2ας δημοτικού σχολείου. Ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές να ζωγραφίσουν δύο ορθογώνια και να τα χωρίσουν σε τέσσερα ισεμβαδικά μέρη με διαφορετικούς τρόπους. Ένας μαθητής σηκώθηκε στον πίνακα και παρουσίασε τους τρόπους με τους οποίους χώρισε τα δύο ορθογώνια (σχ. 1) και μια μαθήτρια, η Μαρία, πρότεινε και έναν άλλο τρόπο (σχ. 2)

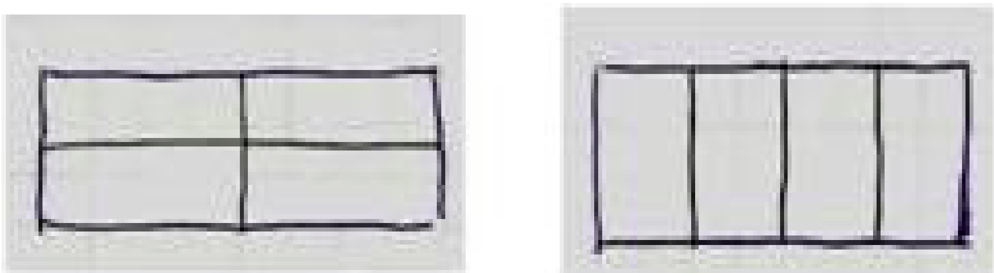
Στην τάξη ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

Μαρία: Το ξέρω ότι στο σχήμα τα κομμάτια δεν είναι ίσα αλλά μπορούμε να σύρουμε τις γραμμές ώστε να γίνουν ίσα.

Gerome: Τα μεσαία είναι πολύ μεγάλα και τα ακριανά πολύ μικρά.

Μαρία: Για αυτό πρέπει να σύρουμε τις γραμμές. Δεν το ζωγράφισα σωστά.

Alicia: Δεν μπορείς να τα κάνεις αυτά ίσα.

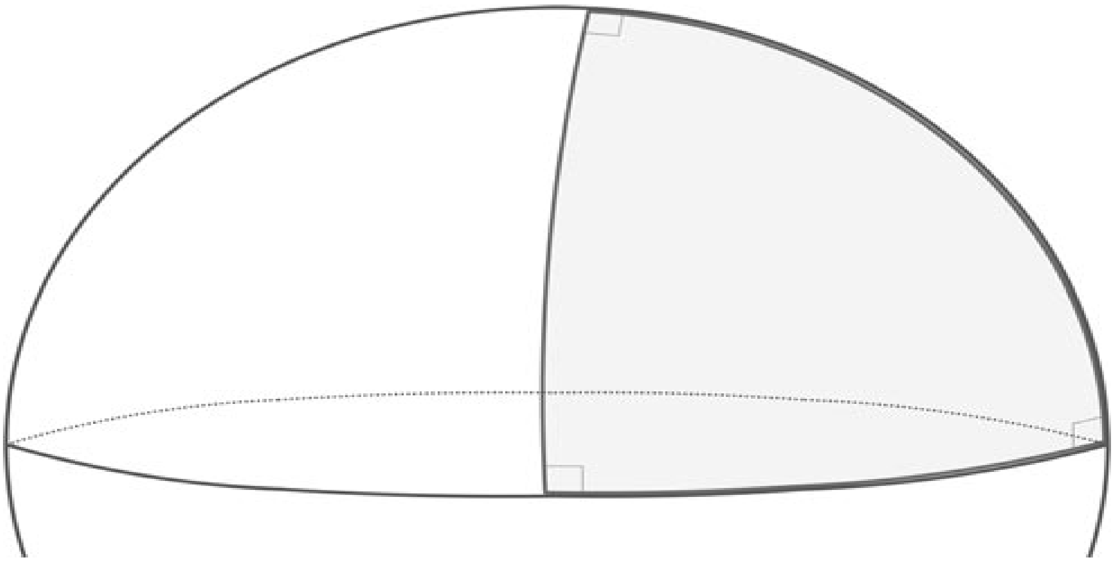


Σχήμα 1

Σχήμα 2

Για τον χωρισμό του ορθογωνίου που πρότεινε η Μαρία υπάρχουν δύο αντικρουόμενες διαισθητικές απόψεις και ο δάσκαλος πρέπει να αποφασίσει ποια άποψη είναι σωστή, καθώς και πως να χειριστεί το θέμα στην τάξη ώστε να πείσει τους μαθητές και να τους βοηθήσει να αναπτύξουν τη μαθηματική τους γνώση. Το μαθηματικό υπόβαθρο της διαισθητικής άποψης της Μαρίας είναι το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών που αφορά στις συνεχείς συναρτήσεις (για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, αν y_1, y_2 είναι δύο τιμές της συνάρτησης με $y_1 < y_2$ και $y_1 < \eta < y_2$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \eta$). Αυτή η μαθηματική γνώση, την οποία οι συγγραφείς του άρθρου την εντάσουν στην ΓΟΠ, δημιουργεί στο δάσκαλο τη βεβαιότητα ότι η διαισθητική άποψη της Μαρίας είναι σωστή. Όμως, είναι προφανές ότι στην τάξη δεν μπορεί να ειπωθεί αυτό το θεώρημα. Πώς μπορεί ο δάσκαλος να διαχειριστεί το θέμα ώστε να μην διαστρεβλωθεί η μαθηματική αλήθεια; Βάση για μια τέτοια αντιμετώπιση μπορεί να αποτελέσει η διαισθητική αντίληψη για τις συνεχείς συναρτήσεις και το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα τότε μπορούμε να την σχεδιάσουμε χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Επομένως, αν μια τέτοια συνάρτηση πάρει σε ένα σημείο α μια τιμή και σε ένα σημείο β μια διαφορετική τιμή, τότε κάθε αριθμός μεταξύ αυτών των δύο τιμών είναι τιμή της συνάρτησης για κάποιο σημείο που βρίσκεται μεταξύ των α και β. Η γνώση αυτή, η οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εντάσσεται στην Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου και ειδικότερα στην ΓΠΔ, αποτελεί τη βάση για μια διαισθητική διαχείριση του θέματος που δεν διαστρεβλώνει τη μαθηματική γνώση. Αυτές οι δύο πτυχές της μαθηματικής γνώσης για συνεχείς συναρτήσεις, η τυπική και η διαισθητική, για τους δασκάλους πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης συνήθως δεν αποτελούν σχολική γνώση, αλλά γνώση που μπορεί να αποκτήσουν στο πανεπιστήμιο.

Οι Wasserman και Stockton (2013), θέλοντας να αναδείξουν τον ρόλο της ΓΟΠ στο σχεδιασμό της διδασκαλίας, αναφέρουν ως παράδειγμα τον σχεδιασμό ενός καθηγητή μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της απόδειξης του θεωρήματος που αφορά στο άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Επειδή οι μαθητές γνώριζαν την ιδιότητα από προηγούμενες τάξεις χωρίς όμως να την έχουν αποδείξει, ο καθηγητής, θέλοντας να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση και ουσιαστικό μαθηματικό προβληματισμό στη τάξη, κατέφυγε στις γνώσεις που είχε από το πανεπιστήμιο για τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Συγκεκριμένα, προγραμμάτισε για το μάθημα α) να ρωτήσει τους μαθητές του πως σχεδιάζουν ένα τρίγωνο στη σφαίρα β) να τους ζητήσει να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο στη σφαίρα που θα αναπαριστά το ένα τέταρτο ενός ημισφαιρίου (σχ. 3) γ) να τους ρωτήσει πόσο είναι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του, και δ) να επιβεβαιώσουν οι μαθητές ότι το τρίγωνο έχει τρεις ορθές γωνίες, επομένως το άθροισμα τους είναι 270^o και όχι 180^o. Στόχος του ήταν να προκαλέσει συζήτηση στην τάξη και να αναδείξει ότι η ιδιότητα που γνωρίζουν και θα αποδείξουν αφορά μόνο επίπεδα τρίγωνα στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.



Σχήμα 3

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στην προηγούμενη ενότητα αναφέρθηκαν παραδείγματα που αφορούσαν άμεση αξιοποίηση πανεπιστημιακής γνώσης στη διδασκαλία. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν παραδείγματα πανεπιστημιακής γνώσης τα οποία, μπορεί να μην αξιοποιούνται με άμεσο τρόπο στη διδασκαλία στο σχολείο, συνδέονται όμως με τα σχολικά μαθηματικά και συμβάλλουν στη βαθύτερη γνώση του διδακτικού αντικειμένου και του μαθηματικού περιβάλλοντος στο οποίο αυτό ανήκει. Με την έννοια αυτή αποτελούν μέρος της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία στο σχολείο, ειδικότερα της ΕΓΠ και της ΓΟΠ.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν τη βάση των Μαθηματικών. Η διδασκαλία των αριθμών αρχίζει από το νηπιαγωγείο και συνεχίζεται σε ολόκληρη τη σχολική εκπαίδευση. Οι μαθητές διδάσκονται πρώτα τους φυσικούς αριθμούς, στη συνέχεια μαθαίνουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς, αργότερα τους ακέραιους, τους ρητούς και τέλος τους άρρητους αριθμούς. Ολοκληρώνοντας τις σχολικές τους σπουδές αναμένουμε ότι θα μπορούν να διακρίνουν τα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή φυσικούς, ακέραιους, ρητούς και άρρητους, τις ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης, καθώς και ότι οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικές αναπαραστάσεις πραγματικών αριθμών. Μελέτες στην Ελλάδα, στην Κύπρο και σε άλλες χώρες δείχνουν ότι πολλοί μαθητές και φοιτητές δεν έχουν σαφή αντίληψη των παραπάνω (π.χ. Fischbein, Jehiam και Kohen, 1995; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Zazkis & Sirotic, 2010; Zachariades, Christou, & Pitta-Pantazi, 2012).

Στη συνέχεια θα περιγραφούν ορισμένες πτυχές πανεπιστημιακής γνώσης που αφορούν στους πραγματικούς αριθμούς και θα συνδεθούν με σχολικά μαθηματικά.

Οι στοιχειώδεις γνώσεις για το σύνολο των πραγματικών αριθμών και τα υποσύνολα του, φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί και άρρητοι αριθμοί, δηλαδή οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες τους σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών και στα υποσύνολα του, η δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών, καθώς και οι βασικές ιδιότητες των φυσικών και των ακεραίων αριθμών (πρώτοι αριθμοί, άρτιοι, περιττοί, διαιρετότητα) αποτελούν σχολική γνώση και περιέχονται στην ΚΓΠ. Είναι, όμως, αρκετή αυτή η γνώση για τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών στο σχολείο; Αν ανατρέξουμε στον Αριστοτέλη, η γνώση αυτή αφορά στο "ότι" αλλά δεν απαντάει στο "διότι". Είναι η γνώση του εμπειρικού. Δεν είναι η "ενσυνείδητη γνώση" που κατά τον Αριστοτέλη διαφοροποιεί τον τεχνίτη από τον εμπειρικό και είναι αναγκαία για τη διδασκαλία. Ποια είναι όμως η γνώση πέραν της σχολικής, που θα απαντήσει σε ερωτήματα όπως:

- πως προκύπτουν μαθηματικά τα διάφορα σύνολα αριθμών;
- γιατί στους φυσικούς και στους ακέραιους αριθμούς υπάρχει επόμενος και δεν υπάρχει στους ρητούς;
- γιατί ο επαγωγικός συλλογισμός δεν αποτελεί μαθηματική απόδειξη;
- τι είναι η τέλεια επαγωγή και γιατί μπορεί να εφαρμοστεί μόνο για φυσικούς αριθμούς;
- πως προκύπτει η δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών;

Στη συνέχεια θα προσδιοριστούν κάποια στοιχεία αυτής της γνώσης.

Θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών: Για να υπάρξει συνειδητή γνώση ενός αντικειμένου, βασικό είναι να γνωρίζουμε τι είναι αυτό το αντικείμενο, πώς προέκυψε. Συνεπώς, για τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών χρειάζεται η μαθηματική γνώση που αφορά στο τι είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Πώς αυτό θεμελιώνεται μαθηματικά. Εδώ αναδεικνύεται η ανάγκη της πανεπιστημιακής γνώσης. Η αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών γίνεται στο πλαίσιο της αξιωματικής θεωρίας συνόλων. Πρώτα ορίζεται το σύνολο των φυσικών αριθμών και, με βάση τα αξιώματα της συνολοθεωρίας, προκύπτει ότι είναι το μοναδικό σύνολο το οποίο ικανοποιεί τα πέντε αξιώματα του Peano (το 0 είναι φυσικός αριθμός, κάθε φυσικός έχει επόμενο φυσικό αριθμό, το μηδέν δεν είναι επόμενος κάποιου φυσικού αριθμού, διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί έχουν διαφορετικούς επόμενους και το αξίωμα της επαγωγής). Στη συνέχεια, σε αυτό το σύνολο ορίζονται δύο πράξεις, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός, μια διμελής σχέση, η διάταξη, και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες τους. Ακολούθως, το σύνολο των φυσικών αριθμών επεκτείνεται στο σύνολο των ακεραίων, αυτό στο σύνολο των ρητών και τελικά το σύνολο των ρητών επεκτείνεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σε κάθε τέτοια επέκταση, επεκτείνονται οι πράξεις και η διάταξη στο αντίστοιχο σύνολο. Όλες οι ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης στο κάθε ένα από τα παραπάνω σύνολα, καθώς και η πληρότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών αποδεικνύονται με βάση τα γενικά αξιώματα της συνολοθεωρίας.

Αυτή η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών είναι μια απαιτική μαθηματικά διαδικασία, η οποία δεν περιλαμβάνεται στα προπτυχιακά προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών Τμημάτων και με την έννοια αυτή ξεπερνάει την γνώση που αποκτά ένας εκπαιδευτικός στο πανεπιστήμιο. Υπάρχει όμως μια άλλη, λιγότερο απαιτητική, διαδικασία θεμελίωσης του συνόλου των πραγματικών αριθμών και αυτή συνήθως διδάσκεται στο πανεπιστήμιο. Στη διαδικασία αυτή δεχόμαστε αξιωματικά την ύπαρξη ενός συνόλου με δύο πράξεις, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, και μια διμελή σχέση, τη διάταξη, οι οποίες ικανοποιούν 14 αξιώματα. Τα 13 από αυτά τα αξιώματα αφορούν στην αλγεβρική δομή των πραγματικών αριθμών, δηλαδή στις βασικές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης, και το τελευταίο αφορά στην πληρότητα των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο αυτό, το οποίο συμβολίζουμε με ℝ και τα στοιχεία του τα καλούμε πραγματικούς αριθμούς, αποδεικνύεται ότι είναι το μοναδικό σύνολο που ικανοποιεί αυτά τα 14 αξιώματα. Με βάση τα 13 από τα 14 αξιώματα αποδεικνύουμε τις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, ορίζουμε τα υποσύνολα των φυσικών, των ακέραιων και των ρητών αριθμών και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες που έχουν αυτά τα υποσύνολα. Με τη χρήση του14ου αξιώματος αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν μη ρητοί αριθμοί, τους οποίους ονομάζουμε άρρητους. Πίσω από όλες τις προτάσεις και τα θεωρήματα που αφορούν πραγματικούς αριθμούς βρίσκονται κάποια από αυτά τα 14 αξιώματα.

Αυτή η αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, χωρίς να είναι ιδιαίτερα απαιτητική από μαθηματική άποψη, εφοδιάζει το δάσκαλο των μαθηματικών με μια επαρκή μαθηματικά εικόνα της δημιουργίας του ℝ και των υποσυνόλων του, καθώς και τις θεμελιώδεις ιδιότητες τους. Απαντάει στα «διότι» και κάνει ενσυνείδητη τη γνώση που θα διδάξει στο σχολείο.

Θα αναφέρω κάποια παραδείγματα που αναδεικνύουν τη σημασία αυτής της γνώσης για τον εκπαιδευτικό που διδάσκει μαθηματικά στο σχολείο.

Προσεταιριστική ιδιότητα: Το πρώτο αφορά στη σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Από τα πρώτα χρόνια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης διδάσκεται στους μαθητές η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ και για τον πολλαπλασιασμό $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Οι ιδιότητες αυτές φαίνεται λογικό να ισχύουν και δεν δημιουργούν ιδιαίτερο πρόβλημα στους μαθητές, οι οποίοι τις χρησιμοποιούν για να διευκολύνονται στους υπολογισμούς. Ποια είναι όμως η κύρια μαθηματική σημασία αυτών των ιδιοτήτων; Απλώς το να μας διευκολύνουν στους υπολογισμούς; Είναι και αυτό, αλλά η σημαντική συνεισφορά της επιμεριστικής ιδιότητας είναι άλλη.

Στην αξιωματική θεμελίωση, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, δεχόμαστε ότι στο ℝ έχουμε δύο πράξεις που ικανοποιούν ορισμένα αξιώματα. Αυτό σημαίνει ότι δεχόμαστε την ύπαρξη δύο συναρτήσεων από το ℝ x ℝ στο ℝ που ικανοποιούν αυτά τα αξιώματα. Τη μια συνάρτηση την καλούμε πρόσθεση και την άλλη πολλαπλασιασμό. Την εικόνα του $(\alpha, \beta) \in$ ℝ x ℝ μέσω της πρόσθεσης την ονομάζουμε άθροισμα των α, β και την συμβολίζουμε $\alpha + \beta$ και την εικόνα μέσω του πολλαπλασιασμού την ονομάζουμε γινόμενο των α, β και την συμβολίζουμε $\alpha \cdot \beta$. Κάθε πράξη ικανοποιεί 4 αξιώματα (η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου, του μηδενός για την πρόσθεση και του ένα για τον πολλαπλασιασμό, η ύπαρξη αντίθετου για την πρόσθεση και αντίστροφου για τον πολλαπλασιασμό, καθώς και η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα για τις δύο πράξεις) και ένα αξίωμα που συνδέει τις δύο πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα). Επομένως, αυτό που έχουμε αρχικά με την αξιωματική θεμελίωση είναι το άθροισμα και το γινόμενο δυο αριθμών. Πως μπορούμε να επεκτείνουμε π.χ. το άθροισμα σε τρεις αριθμούς; Δηλαδή πως μπορούμε να προσθέσουμε τρεις αριθμούς α, β, γ; Με δεδομένη την αντιμεταθετική ιδιότητα, μπορούμε να προσθέσουμε δύο από αυτούς, όποιους θέλουμε, και στο αποτέλεσμα να προσθέσουμε τον τρίτο. Έτσι, έχουμε τρεις δυνατότητες. Να βρούμε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και σε αυτό να προσθέσουμε το γ, να βρούμε το άθροισμα $\beta + \gamma$ και σε αυτό να προσθέσουμε το α ή να βρούμε το άθροισμα $\alpha + \gamma$ και να προσθέσουμε το β. Αν αυτές οι τρεις διαδικασίες μας έδιναν διαφορετικό αποτέλεσμα, ποιο από αυτά θα ήταν το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$; Δηλαδή, αν το αποτέλεσμα εξαρτάτο από το ποιος αριθμός *προσεταιρίστηκε* ποιον, ο α τον β ή ο β τον γ ή ο α τον $\gamma\beta$, τότε το άθροισμα των τριών αριθμών δεν θα ήταν καλά ορισμένο. Η προσεταιριστική ιδιότητα μας λέει ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το ποιος αριθμός θα προσεταιριστεί ποιον και έτσι μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε το άθροισμα τριών αριθμών και να γράφουμε $\alpha + \beta + \gamma$. Στη συνέχεια, έχοντας ορίσει το άθροισμα τριών αριθμών, με βάση πάλι την προσεταιριστική ιδιότητα μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα τεσσάρων αριθμών, μετά πέντε κ.ο.κ. Έτσι, γενικά ορίζουμε το άθροισμα οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους αριθμών. Δηλαδή, για κάθε φυσικό αριθμό n και κάθε πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$ η παράσταση $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι καλά ορισμένη λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης. Το αντίστοιχο ισχύει και για τον πολλαπλασιασμό.

Είναι, όμως, μόνο η προσεταιριστική ιδιότητα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για την επέκταση των δύο πράξεων σε οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος αριθμών; Στη διαδικασία που ακολουθήσαμε, από δύο αριθμούς επεκτείναμε σε τρεις, μετά από τρεις σε τέσσερεις, από τέσσερεις σε πέντε κ.ο.κ. Πώς είμαστε όμως βέβαιοι ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει για κάθε n αριθμούς; Δηλαδή, πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι η παράσταση $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ μπορεί να οριστεί για κάθε πλήθος n πραγματικών αριθμών $a_1, \dots, a_n$; Για να το αποδείξουμε χρειαζόμαστε μια σημαντική ιδιότητα των φυσικών αριθμών, τη μαθηματική επαγωγή.

Μαθηματική επαγωγή: Η μαθηματική επαγωγή είναι το δεύτερο παράδειγμα στο οποίο θα αναφερθώ. Ο επαγωγικός συλλογισμός χρησιμοποιείται συχνά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση για να προκύψει ένα συμπέρασμα, όπως για παράδειγμα η εύρεση του γενικού όρου ενός μοτίβου. Με τον επαγωγικό συλλογισμό καταλήγουμε ότι μια σχέση που ισχύει για πολλούς όρους ισχύει για όλους. Αυτός όμως ο συλλογισμός δεν αποτελεί μαθηματική απόδειξη. Πως μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι μια σχέση που έχουμε ελέγξει ότι ισχύει για πολλούς όρους δεν θα πάψει να ισχύει σε κάποιον επόμενο όρο; Για να αποδειχθεί με αυστηρό μαθηματικό τρόπο μια ιδιότητα που αφορά στο σύνολο των φυσικών αριθμών, όπως για παράδειγμα ο τύπος που μας δίνει τον γενικό όρο ενός μοτίβου, απαιτείται η μαθηματική ή τέλεια επαγωγή. Την επαγωγή αυτή την ονομάζουμε τέλεια σε αντιδιαστολή με την ατελή επαγωγή που είναι ο επαγωγικός συλλογισμός. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής λέει ότι: αν μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής για το 0 και επιπλέον, αν όντας αληθής για ένα φυσικό αριθμό k είναι αληθής και για τον k+1, τότε είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό. Αν δεν αρχίσουμε από το 0 αλλά από κάποιον φυσικό αριθμό ν_0 τότε έχουμε ως συμπέρασμα ότι η πρόταση είναι αληθής για όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του ν_0. Με τον επαγωγικό συλλογισμό, δηλαδή την ατελή επαγωγή, δημιουργούμε μια εικασία ότι κάτι είναι σωστό για όλους τους φυσικούς αριθμούς, δεν μπορούμε όμως να είμαστε σίγουροι. Με την τέλεια επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε, άρα να είμαστε σίγουροι, ότι μια σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Η τέλεια ή μαθηματική επαγωγή αποδεικνύει την εικασία που δημιουργεί ο επαγωγικός συλλογισμός. Αυτή είναι μια γνώση απαραίτητη στη διδασκαλία για να μην δημιουργηθεί στους μαθητές η λανθασμένη αντίληψη ότι ο επαγωγικός συλλογισμός αποτελεί μαθηματική απόδειξη. Και αναγκαία προϋπόθεση για να αποκτήσουν οι μαθητές σωστή αντίληψη για τη μαθηματική απόδειξη είναι να είναι σαφές για τον ίδιο τον δάσκαλο τι αποτελεί απόδειξη, τι δεν αποτελεί απόδειξη και γιατί.

Πως προέκυψε όμως αυτή η ιδιότητα των φυσικών αριθμών; Γιατί δεν μπορεί να εφαρμοστεί για όλους τους αριθμούς ή έστω τους ρητούς που είναι, όπως και οι φυσικοί, αριθμήσιμο σύνολο; Μπορεί να εφαρμοστεί στους ακέραιους; Αυτές είναι ερωτήσεις των οποίων η απάντηση, το «διότι», συνδέεται άμεσα με τον ορισμό των φυσικών αριθμών.

Στην αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών που αναφέρθηκε παραπάνω, οι φυσικοί αριθμοί ορίζονται ως το μικρότερο υποσύνολο του με την ιδιότητα να περιέχει το 0 και για κάθε στοιχείο του α το $\alpha+1$ να ανήκει σε αυτό. Ένα σύνολο με αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται επαγωγικό σύνολο, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών υπάρχουν πολλά επαγωγικά υποσύνολα και οι φυσικοί αριθμοί είναι το μικρότερο από αυτά. Δηλαδή κάθε επαγωγικό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών περιέχει τους φυσικούς αριθμούς. Από τον ορισμό των φυσικών αριθμών προκύπτει ως θεώρημα η αρχή της μαθηματικής επαγωγής και στη συνέχεια η αρχή της καλής διάταξης – κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο. Αυτές οι δύο αρχές δεν ισχύουν στους ακέραιους αλλά, χρησιμοποιώντας τον ορισμό των ακεραίων, μπορούμε να τις αξιοποιήσουμε και να αποδείξουμε ιδιότητες των ακεραίων. Δεν μπορούμε, όμως, να τις αξιοποιήσουμε για να αποδείξουμε ιδιότητες των ρητών. Στην αρχή της καλής διάταξης οφείλεται η ύπαρξη αμέσως επόμενου στους φυσικούς και στους ακέραιους αριθμούς. Αυτή η ιδιότητα, ωστόσο, δεν ισχύει στους ρητούς και αυτή η διαφορά δημιουργεί προβλήματα σε πολλούς μαθητές (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004) ακόμη και φοιτητές (Zachariades, Christou & Pitta-Pantazi 2013).

Το τελευταίο παράδειγμα στο οποίο θα αναφερθώ σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς αφορά στη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών.

Δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών: Στο σχολείο μαθαίνουμε ότι για να γράψουμε έναν πραγματικό αριθμό χρησιμοποιούμε τα ψηφία 0, 1, 2, …, 9, καθώς και τη σημασία που έχει η θέση του ψηφίου στη γραφή του αριθμού. Π.χ. ο φυσικός αριθμός 2379 αποτελείται από 2 χιλιάδες, 3 εκατοντάδες, 7 δεκάδες και 9 μονάδες και γράφουμε $2379=2\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 7\cdot10 + 9$. Επίσης γνωρίζουμε ότι ένας ρητός αριθμός έχει πεπερασμένη ή άπειρη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση, ενώ ένας άρρητος έχει άπειρη μη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση, καθώς και ότι τα δεκαδικά ψηφία είναι δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά κ.ο.κ. Για παράδειγμα, ο αριθμός 0,237 αποτελείται από 2 δέκατα, 3 εκατοστά και 7 χιλιοστά, δηλαδή $0{,}237 = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3}$. Η γνώση των παραπάνω είναι ΚΓΠ. Πως όμως προέκυψε αυτή η γραφή των αριθμών; Γιατί μπορούμε με 10 σύμβολα να αναπαραστήσουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς; Για την απάντηση αυτών των ερωτήσεων απαιτείται πανεπιστημιακή γνώση.

Από τα αξιώματα της θεμελίωσης του συνόλου των πραγματικών αριθμών προκύπτουν άμεσα δύο στοιχεία του, το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, το οποίο συμβολίζουμε με 0, και το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, το οποίο συμβολίζουμε με 1. Από τον ορισμό του συνόλου των φυσικών αριθμών ως το μικρότερο επαγωγικό σύνολο προκύπτει ότι το 0 και το 1 είναι φυσικοί αριθμοί. Στη συνέχεια συμβολίζουμε τον φυσικό αριθμό 1+1 με το σύμβολο 2, τον 2+1 με το με το σύμβολο 3 και συνεχίζουμε δίνοντας διαδοχικά σύμβολα μέχρι και το 10.

Από την αρχή της καλής διάταξης που αναφέρθηκε προηγουμένως προκύπτει ότι για κάθε δύο φυσικούς αριθμούς n, m με $n > m$, υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π, υ, ώστε $n = m \cdot \pi + \upsilon$ και $0 \leq \upsilon < m$. Δηλαδή, ο γνωστός Ευκλείδειος αλγόριθμος της διαίρεσης.

Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο προκύπτει το επόμενο θεώρημα το οποίο αφορά στην αναπαράσταση των φυσικών αριθμών στο δεκαδικό σύστημα.

Θεώρημα: Για κάθε φυσικό αριθμό $m \neq 0$ υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ ώστε, $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{0,1,2, \dots, 9\}$, $\alpha_n \neq 0$ και $\mathrm{m} = \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$.

Με βάση αυτό το θεώρημα συμφωνούμε τον αριθμό m να τον συμβολίζουμε $\alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_0$, δηλαδή $m = \alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_0$ και τον αντίθετο του $-\alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_0$, δηλαδή $-m = -\alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_0$. Έτσι προκύπτει η δεκαδική αναπαράσταση των ακέραιων αριθμών, ως απόρροια ενός θεωρήματος και μιας σύμβασης. Για παράδειγμα, τον αριθμό $6\cdot10^3+2\cdot10^2+7\cdot10+3$ συμφωνούμε να τον γράφουμε 6273 και τον αντίθετο του -6273.

Πως όμως προκύπτει η γραφή των υπόλοιπων αριθμών; Ενώ για όλες τις αποδείξεις μέχρι εδώ αρκούν τα πρώτα 13 αξιώματα, για τη δεκαδική γραφή των μη ακεραίων απαιτείται και το 14ο αξίωμα, το αξίωμα της πληρότητας. Από αυτό το αξίωμα προκύπτει ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο. Αυτό ίσως ακούγεται λίγο περίεργο, αλλά από τον ορισμό του συνόλου των φυσικών αριθμών και τα 13 αξιώματα δεν προκύπτει ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε $a \geq n$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Για να αποδειχθεί αυτή η ιδιότητα απαιτείται το αξίωμα της πληρότητας. Η μη ύπαρξη άνω φράγματος για τους φυσικούς αριθμούς έχει ως συνέπεια την επόμενη πρόταση η οποία αφορά στην κατανομή των ακεραίων μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Πρόταση: Για κάθε πραγματικό αριθμό α υπάρχει μοναδικός ακέραιος m με την ιδιότητα $m \leq \alpha < m + 1$.

Ο ακέραιος αυτός καλείται ακέραιο μέρος του α και συμβολίζεται $[\alpha]$.

Επομένως ένας αριθμός αν δεν είναι ακέραιος θα είναι μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων, δηλαδή θα είναι άθροισμα ενός ακεραίου και ενός αριθμού μεταξύ του 0 και του 1. Άρα, για να δούμε πως προκύπτει ο συμβολισμός των μη ακεραίων πρέπει να δούμε πως προκύπτει ο συμβολισμός των αριθμών μεταξύ του 0 και του 1. Για τη δεκαδική αναπαράσταση αυτών των αριθμών απαιτούνται άπειρα αθροίσματα, δηλαδή σειρές πραγματικών αριθμών. Συνεπώς, απαιτείται η γνώση της σύγκλισης ακολουθίας πραγματικών αριθμών και της έννοιας του άπειρου αθροίσματος $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$.

Από τα κριτήρια σύγκλισης σειρών προκύπτει ότι για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ με $\alpha_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$ για n=1,2,..., η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$ συγκλίνει και ισχύει $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n} \leq 1$. Δηλαδή, κάθε τέτοιο άπειρο άθροισμα είναι ίσο με έναν αριθμό στο διάστημα $[0,1]$. Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο. Συγκεκριμένα, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα: Για κάθε $0 \leq \alpha \leq 1$ υπάρχει ακολουθία $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$, με $\alpha_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$ για κάθε n=1,2,... , ώστε $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$.

Άρα κάθε αριθμός του διαστήματος $[0,1]$ ισούται με ένα άπειρο άθροισμα αυτής της μορφής και η ερώτηση που προκύπτει είναι αν για έναν αριθμό $0 \leq \alpha \leq 1$ μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια ακολουθίες με την παραπάνω ιδιότητα.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε $\alpha \in [0,1]$ υπάρχουν το πολύ δύο ακολουθίες οι οποίες ικανοποιούν το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος. Συγκεκριμένα, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω $0 \leq \alpha \leq 1$ και δύο ακολουθίες $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ και $(\beta_n)_{n=1}^{+\infty}$ ώστε $\alpha_n, \beta_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$ και $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{10^n}$.

Τότε ισχύει ένα από τα επόμενα:

i) $\alpha_n = \beta_n$ για κάθε $n = 1,2,\dots$

ii) Υπάρχει $n_0 \in$ ▯ ώστε $\alpha_n = \beta_n$ για κάθε $n = 1,2,\dots,n_0 - 1$, $\beta_{n_0} = \alpha_{n_0} - 1$, $\alpha_n = 0$ και $\beta_n = 9$ για κάθε $n = n_0 + 1, n_0 + 2 \dots$

Συμφωνούμε κάθε αριθμό $0 \leq \alpha \leq 1$ να τον αναπαριστούμε με το σύμβολο $0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$, είναι μια ακολουθία που ικανοποιεί το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος. Έτσι, προκύπτει η γνωστή μας δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Επίσης, από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που έχουν μοναδική δεκαδική αναπαράσταση και αριθμοί που έχουν δύο δεκαδικές αναπαραστάσεις.

Για παράδειγμα, για τον αριθμό $\frac{1}{3}$ υπάρχει μόνο μια ακολουθία που ικανοποιεί το παραπάνω θεώρημα και είναι η $\alpha_n = 3$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Δηλαδή ισχύει

$\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^n}$ και γράφουμε $\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots$. Για τον αριθμό $\frac{1}{4}$ υπάρχουν δύο ακολουθίες που ικανοποιούν το παραπάνω θεώρημα, η $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$, με $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 5$ και $\alpha_n = 0$ για κάθε $n > 2$ και η $(\beta_n)_{n=1}^{+\infty}$, με $\beta_1 = 2,\ \beta_2 = 4$ και $\beta_n = 9$ για κάθε $n > 3$. Δηλαδή ισχύει $\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$ και γράφουμε $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}24999 \ldots$.

Αν έχουμε έναν αριθμό που δεν είναι ακέραιος και είναι μεγαλύτερος του 1 τότε αυτός είναι μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων, επομένως είναι άθροισμα ενός ακεραίου και ενός αριθμού μεταξύ του 0 και του 1. Για παράδειγμα, για τον αριθμό $\frac{25}{4}$ ισχύει $6 < \frac{25}{4} < 7$. ‘Ετσι έχουμε $\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6 + 0{,}25 = 6 + 0{,}24999 \ldots$ Έτσι γράφουμε $\frac{25}{4} = 6{,}25 = 6{,}24999 \ldots$

Επιπλέον ισχύει $1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$ και έτσι γράφουμε $1 = 0{,}999 \ldots$. Άρα και κάθε ακέραιος έχει δύο δεκαδικές αναπαραστάσεις. Π.χ. $246 = 245 + \sum_{n=1}^{+\infty} 9.10^{-n} = 245{,}999 \ldots$.

Τα παραπάνω αποτελούν πανεπιστημιακή γνώση η οποία φωτίζει πολλά από αυτά που διδάσκονται στο σχολείο για τους πραγματικούς αριθμούς, αναδεικνύει τις αιτίες τους και κάνει ενσυνείδητη τη γνώση του διδακτικού αντικειμένου. Είναι γνώση χρήσιμη για τη διδασκαλία, αλλά δεν είναι απαραίτητη σε άλλους χώρους που χρησιμοποιούνται μαθηματικά. Π.χ. ένας μηχανικός ή ένας οικονομολόγος, δεν χρειάζεται να γνωρίζει τις συνέπειες της καλής διάταξης στο σύνολο των φυσικών αριθμών ή πως προέκυψε η δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς μπορούμε να ισχυριστούμε ότι με βάση το μοντέλο των Ball, Thames και Phelps (2008) η γνώση αυτή ανήκει στην *Εξειδικευμένη Γνώση του Αντικειμένου*.

Μέσα από την αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, ο εκπαιδευτικός αποκτά και μια ευρύτερη γνώση. Τη γνώση του τρόπου που οικοδομείται μια μαθηματική θεωρία. Θεμέλια της θεωρίας είναι ορισμένες ιδιότητες που είναι ανεξάρτητες (κάθε μια από αυτές δεν μπορεί να αποδειχθεί από τις υπόλοιπες) και συμβατές (δεν οδηγούν σε αντιφάσεις), οι οποίες δεχόμαστε ότι ισχύουν και τις ονομάζουμε αξιώματα. Με βάση τα αξιώματα αποδεικνύουμε κάποιες πρώτες προτάσεις και η οικοδόμηση της θεωρίας συνεχίζεται με την απόδειξη προτάσεων και θεωρημάτων που βασίζονται στα αξιώματα και σε ότι έχει ήδη αποδειχθεί. Η γνώση της διαδικασίας αξιωματικής θεμελίωσης μιας μαθηματικής θεωρίας δεν συνδέεται άμεσα με το διδακτικό αντικείμενο αλλά, με βάση τα χαρακτηριστικά που αναφέρουν οι Ball και Bass (2009), μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εντάσσεται στη *Γνώση του Ορίζοντα του Αντικειμένου*.

ΑΠΕΙΡΟ

Η έννοια του απείρου είναι μια από τις ποιο σημαντικές μαθηματικές ιδέες. Ο όρος άπειρο χρησιμοποιείται στα μαθηματικά για να δηλώσει όριο και πλήθος. Το άπειρο ως όριο διδάσκεται στην τελευταία ή στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και αφορά κυρίως στους μαθητές που θα συνεχίσουν πανεπιστημιακές σπουδές σε σχολές στις οποίες τα μαθηματικά έχουν ιδιαίτερη βαρύτητα, ενώ η έννοια του απείρου ως πλήθος στοιχείων συνόλου δεν διδάσκεται στο σχολείο. Ωστόσο, ο όρος «άπειρο» για να δηλώσει πλήθος χρησιμοποιείται τόσο από τους εκπαιδευτικούς, σε φράσεις όπως «υπάρχουν άπειροι αριθμοί» ή «ο αριθμός 0,333... έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία», όσο και στα σχολικά βιβλία, όταν για παράδειγμα αναφέρονται στη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών και των άρρητων αριθμών. Μέσα από τη χρήση του όρου στο σχολείο αλλά και εκτός αυτού, οι μαθητές διαμορφώνουν διάφορες αντιλήψεις για το άπειρο ως πλήθος. Σε πολλές μελέτες έχουν διερευνηθεί αυτές οι αντιλήψεις (π.χ. Fischbein, 2001; Monaghan, 2001; Tirosh & Tsamir, 1996; Tsamir, 2001) και από τα ερευνητικά ευρήματα προκύπτει ότι πολλοί μαθητές δημιουργούν παρανοήσεις και αντικρουόμενες αντιλήψεις για την έννοια του απείρου ως πληθικότητα, καθώς και ότι μεταφέρουν στα άπειρα σύνολα ιδιότητες που ισχύουν στα πεπερασμένα. Μια τέτοια αντίληψη είναι ότι το πλήθος των στοιχείων κάθε γνήσιου υποσυνόλου ενός συνόλου είναι πάντοτε μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων ολόκληρου του συνόλου. Αυτό ισχύει όταν αναφερόμαστε σε πεπερασμένα σύνολα αλλά δεν ισχύει στα άπειρα σύνολα. Συνεπώς, βασικές γνώσεις της πληθαριθμικής έννοιας του απείρου είναι απαραίτητες για τους δασκάλους των μαθηματικών ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να δημιουργήσουν σωστές αντιλήψεις για την έννοια και να αντιμετωπίσουν διάφορες παρανοήσεις που δημιουργούνται.

Ποιες όμως είναι αυτές οι απαραίτητες γνώσεις; Ας παρακολουθήσουμε έναν υποθετικό διάλογο ενός μαθητή με τον δάσκαλο των μαθηματικών.

Μ: Πότε ένα σύνολο είναι άπειρο;

Δ: Όταν δεν μπορούμε να μετρήσουμε τα στοιχεία του.

Μ: Δηλαδή όταν είναι πάρα πολλά;

Δ: Όχι. Ένα εκατομμύριο στοιχεία είναι πάρα πολλά, αλλά ένα σύνολο με ένα εκατομμύριο στοιχεία δεν είναι άπειρο, είναι πεπερασμένο.

Μ: Τι σημαίνει πεπερασμένο σύνολο.

Δ: Όταν μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος των στοιχείων του.

Μ: Κατάλαβα. Π.χ. οι τρίχες των μαλλιών μου είναι άπειρες γιατί δεν μπορώ να τις μετρήσω.

Δ: Όχι. Οι τρίχες των μαλλιών σου μπορούν να μετρηθούν.

Μ: Πόσες είναι;

Δ: ....

Από τον παραπάνω διάλογο προκύπτει η θεμελιώδης ερώτηση: πως μετράμε; Αυτό το πρόβλημα απασχόλησε τους ανθρώπους πολύ νωρίς και οι ρίζες της απάντησης σε βρίσκονται πολλούς αιώνες πίσω. Στην Οδύσσεια ο Κύκλωπας μέτραγε τα πρόβατα του αντιστοιχώντας σε κάθε πρόβατο ένα πετραδάκι. Σε αρχαίους πολιτισμούς οι άνθρωποι για να μετρήσουν χάρασσαν για κάθε ένα αντικείμενο ένα σημάδι πάνω σε σκληρή επιφάνεια, δηλαδή αντιστοιχούσαν τα αντικείμενα με σημάδια. Δεν γνώριζαν μαθηματικά αλλά η διαίσθηση τους οδηγούσε ότι για να είναι σίγουροι ότι δύο ποσότητες έχουν ίδιο πλήθος πρέπει να δημιουργήσουν μια τέτοια αντιστοιχία. Μετά από πολλούς αιώνες, μόλις τον 19ο αιώνα, ο Cantor όρισε μαθηματικά την έννοια της ισοπληθικότητας: δύο σύνολα είναι *ισοπληθικά* αν υπάρχει μια συνάρτηση από το ένα στο άλλο 1-1 και επί. Με βάση αυτό τον ορισμό, ένα σύνολο ονομάζεται *πεπερασμένο* αν είναι ίσο με το κενό σύνολο ή υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε το σύνολο αυτό να είναι ισοπληθικό με το σύνολο {1, 2, 3,....., n}. Τότε λέμε ότι το σύνολο έχει n στοιχεία. Ένα σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο ονομάζεται *άπειρο.*

Από τον ορισμό της ισοπληθικότητας προκύπτει, επίσης, ότι ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνο αν είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του. Έτσι, έχουμε το «παράδοξο» ένα άπειρο σύνολο να μπορεί να χωριστεί σε δύο ισοπληθικά με αυτό υποσύνολα του. Για παράδειγμα, το σύνολο των φυσικών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των άρτιων και το σύνολο των περιττών αριθμών. Επομένως, αν από το σύνολο των φυσικών βγάλουμε τους άρτιους, που είναι όσοι και οι φυσικοί, μένουν άλλοι τόσοι, οι περιττοί. Αυτό το, φαινομενικά παράδοξο, συμπέρασμα βασίζεται σε μια απολύτως συμβατή με τη διαίσθηση μας έννοια, την ισοπληθικότητα, όπως την όρισε ο Cantor. Έτσι, βλέπουμε ότι στις άπειρες ποσότητες δεν ισχύουν αυτά που ισχύουν στις πεπερασμένες. Αυτή η γνώση είναι απαραίτητη για να δημιουργηθεί μια αρχική και σωστή μαθηματικά εικόνα σχετικά με τις έννοιες του πεπερασμένου, του απείρου και τις διαφορές τους και μπορεί να βοηθήσει το δάσκαλο των μαθηματικών να αντιμετωπίσει πιθανές "περίεργες" ερωτήσεις ή λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών και να τους δημιουργήσει σωστές αντίστοιχες.

Υπάρχει, όμως, και μια άλλη βασική ερώτηση που αφορά στο άπειρο η οποία συνδέεται και με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά; Τα σύνολα των πραγματικών, των ρητών, των αρρήτων, των ακεραίων και των φυσικών αριθμών έχουν όλα το ίδιο πλήθος στοιχείων; Και σε αυτό το ερώτημα απάντηση έδωσε ο Cantor αποδεικνύοντας ότι το πλήθος των στοιχείων κάθε συνόλου A είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δυναμοσυνόλου του $\mathcal{P}(A)$, δηλαδή του συνόλου που έχει στοιχεία όλα τα υποσύνολα του A. Από αυτό προκύπτει ότι, όχι μόνον ότι δεν είναι ισοπληθικά όλα τα άπειρα σύνολα αλλά και ότι υπάρχουν άπειρα το πλήθος σύνολα με διαφορετικό πλήθος στοιχείων. Ο Cantor επίσης απέδειξε ότι υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το σύνολο των φυσικών αριθμών στο σύνολο των ρητών, άρα αυτά τα σύνολα είναι ισοπληθικά, αλλά δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών. Επομένως, το πλήθος των πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των ρητών αριθμών. Οι φυσικοί αριθμοί είναι το άπειρο σύνολο με το μικρότερο πλήθος στοιχείων και κάθε σύνολο ισοπληθικό με τους φυσικούς το ονομάζουμε άπειρο *αριθμήσιμο*. Ένα άπειρο σύνολο που δεν είναι αριθμήσιμο το ονομάζουμε *υπεραριθμήσιμο*. Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών αριθμών είναι άπειρα αριθμήσιμα, ενώ τα σύνολα των αρρήτων και των πραγματικών είναι υπεραριθμήσιμα.

Εκτός όμως από τις παραπάνω τυπικές μαθηματικές γνώσεις που αφορούν στην έννοια του απείρου, από ερευνητικά ευρήματα προκύπτει ότι χρήσιμες για τη διδασκαλία είναι και γνώσεις που αφορούν στη φύση του απείρου. Η φύση της έννοιας του απείρου είναι διττή. Το άπειρο ως μια αέναη διαδικασία, το «εν δυνάμει» άπειρο, και το άπειρο ως ολοκληρωμένη διαδικασία, το «εν ενεργεία άπειρο». Ο Ζωϊτσάκος (2019) στο πλαίσιο της διδακτορικής του διατριβής μελέτησε την ΑΜΓ που αξιοποιούν καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την αναγνώριση λανθασμένων απαντήσεων μαθητών όσον αφορά στους περιοδικούς δεκαδικούς με περίοδο 9, καθώς και τον αναστοχασμό τους πάνω σε αυτές. Αρκετοί καθηγητές που συμμετείχαν στην έρευνα, ερμηνεύοντας την αντίληψη ενός υποθετικού μαθητή ότι η παράσταση 0,3999... είναι ένας αριθμός που τείνει στο 0,34, θεώρησαν ότι ο μαθητής αυτός αντιλαμβάνεται το άπειρο μόνο ως μια διαδικασία που εξελίσσεται και δεν ολοκληρώνεται, δηλαδή ως «εν δυνάμει» άπειρο, και δεν μπορεί να το συλλάβει ως ολοκληρωμένη διαδικασία, δηλαδή ως «εν ενεργεία άπειρο». Αυτοί οι καθηγητές, για να ερμηνεύσουν μια λανθασμένη απάντηση μαθητή, χρησιμοποίησαν γνώσεις για το άπειρο που είναι πέρα από τις τυπικές γνώσεις που αφορούν στο άπειρο και συνδέονται με την οντολογία του. Αυτές οι γνώσεις δεν συνδέονται άμεσα αλλά ανήκουν στην ευρύτερη περιοχή του αντικειμένου και παράλληλα αφορούν μια σημαντική μαθηματική ιδέα. Με την έννοια αυτή και αυτές ανήκουν στον *Ορίζοντα της Γνώσης του Περιεχομένου*, όπως τον εννοούν οι Ball, Thames και Phelps (2008) και Ball και Bass (2009)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο περιλαμβάνει εκτός από τη σχολική μαθηματική γνώση και γνώση που αποκτάται στο πανεπιστήμιο. Αυτή η γνώση αποτελείται από μαθηματικά που συνδέονται άμεσα με αυτά που διδάσκονται στο σχολείο, μαθηματικά του ευρύτερου πεδίου στο οποίο εντάσσονται τα σχολικά μαθηματικά αλλά και στοιχεία επιστημολογίας και ιστορίας των μαθηματικών. Η μαθηματική πανεπιστημιακή γνώση μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να μετασχηματίσει τη μαθηματική γνώση σε διδακτική χωρίς να την στρεβλώσει και να σχεδιάσει το μάθημα με τρόπο ώστε να δημιουργήσει μαθηματική πρόκληση, να συμβάλει στην ανάπτυξη ουσιαστικού μαθηματικού προβληματισμού στην τάξη και να αναδείξει σημαντικές μαθηματικές ιδέες. Επίσης, τον βοηθάει να κατανοήσει το μαθηματικό υπόβαθρο σωστών διαισθητικών αντιλήψεων των μαθητών και να προωθήσει τη μαθηματική γνώση τους, να αναγνωρίσει λάθη και να διαγνώσει τις υποκείμενες αιτίες, καθώς και να αντιμετωπίσει με σωστό μαθηματικά τρόπο απρόβλεπτες ερωτήσεις τους. Τον βοηθάει να αισθάνεται σίγουρος και ασφαλής στη διδασκαλία του.

Αρκεί όμως η τυπική γνώση των πανεπιστημιακών μαθηματικών για να αξιοποιηθούν αυτά στη διδασκαλία; Ο Felix Klein (1939) εντόπισε δύο βασικές ασυνέχειες στην μαθηματική εκπαίδευση. Η πρώτη ασυνέχεια είναι ότι η μελέτη των πανεπιστημιακών μαθηματικών δεν αναπτύσσεται ως συνέχεια των σχολικών μαθηματικών που οι φοιτητές (και μελλοντικοί καθηγητές) γνώριζαν και η δεύτερη είναι η αποσύνδεση των μαθηματικών γνώσεων που οι εκπαιδευτικοί διδάχθηκαν στο πανεπιστήμιο με το μαθηματικό περιεχόμενο που καλούνται να διδάξουν στο σχολείο. Για να μπορέσουν να αξιοποιηθούν δημιουργικά τα πανεπιστημιακά μαθηματικά στο σχολείο χρειάζεται η άρση των δύο ασυνεχειών. Η άρση της πρώτης ασυνέχειας θα δώσει τη δυνατότητα στους φοιτητές να επικοινωνήσουν ουσιαστικά με τα πανεπιστημιακά μαθηματικά και να τα κάνουν κτήμα τους. Η άρση της δεύτερης ασυνέχειας θα δώσει τα απαραίτητα εφόδια στους μελλοντικούς καθηγητές για να αξιοποιήσουν την πανεπιστημιακή γνώση που θα έχουν κάνει κτήμα τους στη διδασκαλία στο σχολείο. Οι πανεπιστημιακές σπουδές, οι οποίες αποτελούν το ενδιάμεσο στάδιο στην πορεία του εκπαιδευτικού που αρχίζει από το σχολείο με την ιδιότητα του μαθητή και καταλήγει πάλι στο σχολείο με την ιδιότητα του δάσκαλου, έχουν καθοριστικό ρόλο στην άρση αυτών των ασυνεχειών. Τα πανεπιστημιακά τμήματα που εκπαιδεύουν τους μελλοντικούς δασκάλους μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πρέπει, μέσα από κατάλληλα διαμορφωμένα μαθήματα, να εφοδιάσουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς με την απαραίτητη, ανάλογα με την εκπαιδευτική βαθμίδα στην οποία αυτοί θα διδάξουν, μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία ώστε αυτοί να μπορούν να την αξιοποιήσουν κατάλληλα στη διδακτική πράξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M. (1997). Teaching and learning elementary analysis: What can we learn from didactical researchand curriculum evolution? In G. A. Makridis (ed.), Proccedings of the first Mediterranean Conference on Mathematics, 207-219: Cyprus.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *Beiträge Zum Mathematikunterricht 2009*, 11–22.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 309–329.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29–44.

Jakobsen, A., Thames, M. H., & Ribeiro, C. M. (2013). Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. *Eight Congress of European Research in Mathematics Education (CERME-8)*, (2009), 3125–3134.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. *12th International Congress on Mathematical Education (12th ICME)*, (April 2014), 4635–4644.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2013). Teachers' Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: The Role of Structural Differences in Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, *64*(1), 90–106.

Klein, F. (1939). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Part I: Arithmetic, Algebra, Analysis. Part II: Geometry. (E. R. Hedrick & C. A. Noble, Trans.). New York: Dover Publications.

Monaghan, J. (2001) Young peoples' ideas of infinity, Educational Studies in Mathematics 48, 239–257.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4–14.

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Silverman, J., & Thompson, P. W. (in press). Toward a framework for the development of mathematics content knowledge for teaching. *Mathematics Teacher*, 499–511.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 33–40.

Tsamir, P. (2001). When "the same" is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 289–307.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453–467.

Wasserman, N. H., & Stockton, J. C. (2013). Horizon content knowledge in the work of teaching: A focus on planning. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 20–23.

Zachariades, T., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 5–22.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263–281.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8–13.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *16*(7), 1–27.

Ζωϊτσάκος, Σ. (2019). Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Ανώτερων Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Η ΔΙΠΛΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ: ΑΣΥΜΦΩΝΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ

Γώγου Βασιλική[1], Γαγάτσης Αθανάσιος[2], Γρίδος Παναγιώτης[3], Ηλία Ιλιάδα[2], Δεληγιάννη Ελένη[4]

[1]4ο Γυμνάσιο Άνω Λιοσίων, [2]Πανεπιστήμιο Κύπρου, [3]Εργαστήριο Μαθηματικών, Διδακτικής τους και Πολυμέσων, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, [4]Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου

vasogogou@hotmail.gr, gagatsis@ucy.ac.cy, p.gridos@aegean.gr, elia.iliada@ucy.ac.cy, deliyianni6@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι διπλός: (α) η διερεύνηση του βαθμού στον οποίο οι μαθητές του γυμνασίου χρησιμοποιούν το γεωμετρικό σχήμα ως εικόνα όταν υπάρχει ασυμφωνία μεταξύ αυτού που βλέπουν και αυτού που το γεωμετρικό σχήμα σκοπεύει να αναπαραστήσει, και (β) το πόσο και αν επηρεάζει η ηλικία των μαθητών τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν το γεωμετρικό σχήμα. Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 358 μαθητές των τριών τάξεων του γυμνασίου, ενώ τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω γραπτού δοκιμίου που δόθηκε σε δύο φάσεις. Τα αποτελέσματα της έρευνας ενισχύουν την υπόθεση μας ότι οι μαθητές επηρεάζονται από το λάθος δοσμένο σχήμα καθώς και ότι ο βαθμός στον οποίο παρασύρονται επηρεάζεται από την ηλικία τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Στη γεωμετρία υπάρχουν δύο εμπλεκόμενα στοιχεία: το σχήμα, προκειμένου να δούμε και η γλώσσα προκειμένου να εξηγήσουμε (Duval, 2006). Τα σχήματα στη γεωμετρία, ακόμη και αν είναι κατασκευασμένα με ακρίβεια, είναι απλώς αναπαραστάσεις με συγκεκριμένες τιμές που δε σχετίζονται πάντα με τη πραγματικότητα και ούτε μπορούν να ληφθούν ως απόδειξη (Duval, 1999). Ο τρόπος "που βλέπει" κάποιος ένα σχήμα είναι ένας κρίσιμος γνωστικός παράγοντας για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Συχνά παρατηρείται μία ισχυρή ασυμφωνία μεταξύ αυτού που φαίνεται στο σχήμα και αυτού που δηλώνεται στην εκφώνηση του προβλήματος (Duval, 2014). Πολλοί μαθητές δε μπορούν να προχωρήσουν πέρα από τη πρώτη ματιά, βλέποντας μόνο τα εμφανή, ούτε μπορούν να διαχωρίσουν αυτά που βλέπουν σε αναγκαία και μη ώστε να μην οδηγηθούν σε πιθανές παραπλανήσεις και λάθη (Γαγάτσης, 2011).

Σύμφωνα με τον Duval (2006), συχνά συγχέεται το μαθηματικό αντικείμενο με την αναπαράσταση του ή διαχωρίζονται δύο αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου σα να ήταν δύο διαφορετικά αντικείμενα, γι' αυτό απαιτείται συντονισμός τουλάχιστον δύο συστημάτων αναπαράστασης, της λεκτικής έκφρασης και της οπτικοποίησης. Αυτό που τελικά μετατρέπει την εικόνα σε εργαλείο σκέψης είναι η εννοιολογική κατανόηση (Arcavi, 2003).

Τα αποτελέσματα ερευνών δίνουν δύο κύριους παράγοντες που επηρεάζουν τη λειτουργία των γεωμετρικών αναπαραστάσεων. Ο πρώτος είναι η διπλή φύση τους. Οι αναπαραστάσεις είναι αντικείμενα με δικές τους ιδιότητες και ταυτόχρονα παραστάσεις κάτι άλλου. Οι μαθητές δυσκολεύονται να εστιάσουν σε αυτό που τα σχήματα σκοπεύουν να αναπαραστήσουν και τελικά παρατηρούν μόνο τις προφανείς και φυσικές τους ιδιότητες (DeLoche, 2000; Mesquita, 1998). Ο δεύτερος παράγοντας είναι η ηλικία-εμπειρία. Η εξοικείωση, η προϋπάρχουσα γνώση, η μαθηματική εμπειρία του μαθητή, καθορίζουν την επίδραση που έχουν οι αναπαραστάσεις στην επίδοσή του (Schnotz, 2002).

Λαμβάνοντας υπόψη τις συζητήσεις των ερευνητών γύρω από τη φύση της αναπαράστασης, ορίζουμε δύο κατηγορίες αναπαράστασης, με βάση τη δυνατότητα συναγωγής γεωμετρικών σχέσεων από αυτές. Αυτές που έχουν φύση αντικειμένου, κατά τις οποίες υπάρχει γνωστική ασυμφωνία μεταξύ γεωμετρικού σχήματος και γεωμετρικού αντικειμένου και δεν είναι δυνατή η εξαγωγή γεωμετρικών σχέσεων από την κατασκευή του σχήματος. Το σχήμα "παραπλανεί" και η οπτική του σύλληψη έρχεται σε σύγκρουση με την εκφώνηση του προβλήματος. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι αναπαραστάσεις που έχουν φύση εικόνας, όπου το αναπαριστώμενο γεωμετρικό αντικείμενο και το γεωμετρικό σχήμα βρίσκονται σε γνωστική συμφωνία. Σε αυτές είναι δυνατή η εξαγωγή σχέσεων από την κατασκευή του σχήματος και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις αποδεικτικές διαδικασίες.

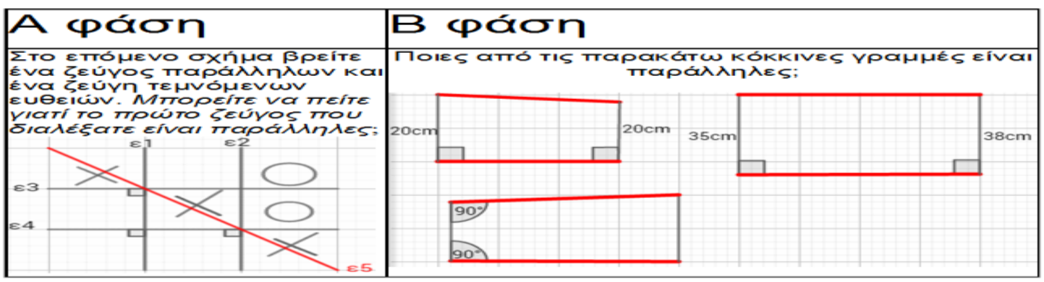
Στη παρούσα έρευνα μελετάμε αποκλειστικά το βαθμό που επηρεάζει τις απαντήσεις των μαθητών η σύγκρουση που δημιουργείται όταν η γεωμετρική έννοια που περιγράφετε λεκτικά, ή πάνω στο ίδιο το σχήμα του εκάστοτε έργου, δεν συνάδει με το γεωμετρικό σχήμα που σκόπιμα δεν έχει κατασκευαστεί με ακρίβεια. Εξετάζουμε τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: (α) Πώς επηρεάζονται οι απαντήσεις των μαθητών όταν η αναγνώριση του σχήματος με τη πρώτη ματιά συγκρούεται με τις ιδιότητες του γεωμετρικού αντικειμένου που δίνονται λεκτικά; και (β) επηρεάζει η ηλικία το βαθμό στον οποίο παρασύρονται οι μαθητές από μια μη ακριβή κατασκευή σχήματος;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα έρευνας & Συλλογή δεδομένων

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 358 μαθητές Γυμνασίου. Πιο συγκεκριμένα επιλέχθηκαν 113 μαθητές Α΄ Γυμνασίου, 117 μαθητές Β΄ Γυμνασίου και 128 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, καθώς μας ενδιέφερε να εξετάσουμε το αν επηρεάζει η ηλικία των μαθητών τις μεταβλητές της έρευνας.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε σε δύο φάσεις μέσω γραπτού δοκιμίου. Η Α΄ φάση περιείχε πέντε ομάδες έργων που στόχευαν στον έλεγχο γνώσης των μαθητών πάνω σε απλές γεωμετρικές έννοιες (διχοτόμος γωνίας, είδος γωνιών, παράλληλες ευθείες, μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος, άθροισμα γωνιών τριγώνου), δίνοντάς τους σχήματα κατασκευασμένα με ακρίβεια. Στη Β΄ φάση υπήρχαν επίσης πέντε ομάδες έργων που αφορούσαν τις προηγούμενες έννοιες, όμως εδώ οι πληροφορίες που δίνονταν λεκτικά ή πάνω στο ίδιο το σχήμα δε συμβάδιζαν με την όψη που έπρεπε να έχει το σχήμα σε κάθε περίπτωση. Παραδείγματα έργων των δύο φάσεων δίνονται στον Πίνακα 1.



Πίνακας 1: Παράδειγμα έργων Α΄& Β΄ φάσης που αφορά παράλληλες ευθείες.

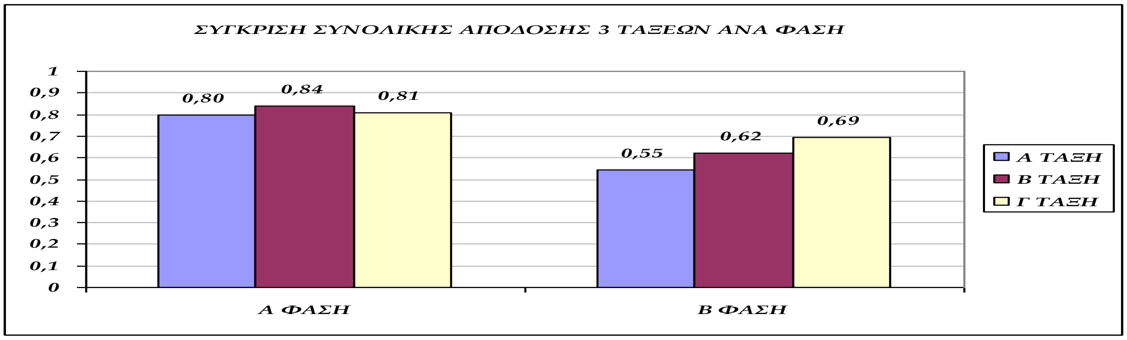
Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε περιγραφική στατιστική. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε ανάλυση ομοιότητας και συνεπαγωγική ανάλυση χρησιμοποιώντας το λογισμικό C.H.I.C. Η στατιστική ανάλυση ομοιότητας είναι μια μέθοδος ανάλυσης που προσδιορίζει τις συνδέσεις ομοιότητας των μεταβλητών ενώ η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στη σκέψη των μαθητών (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

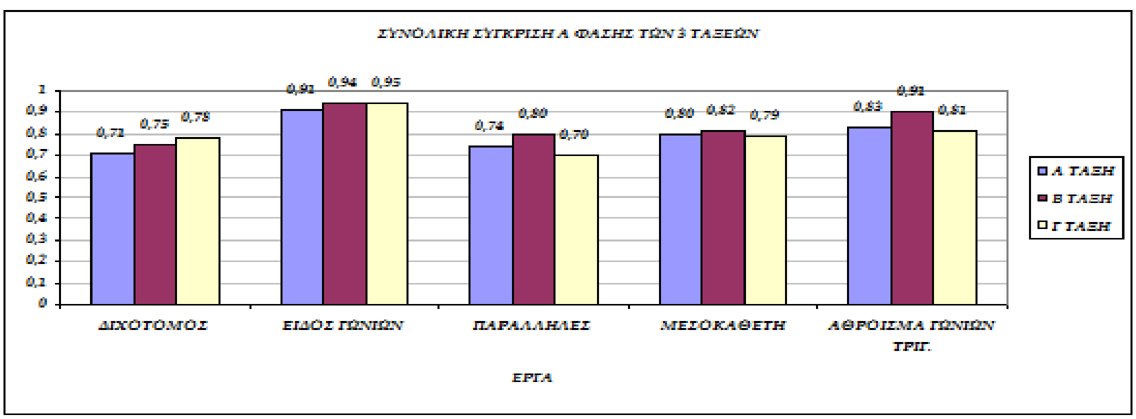
Περιγραφική Στατιστική

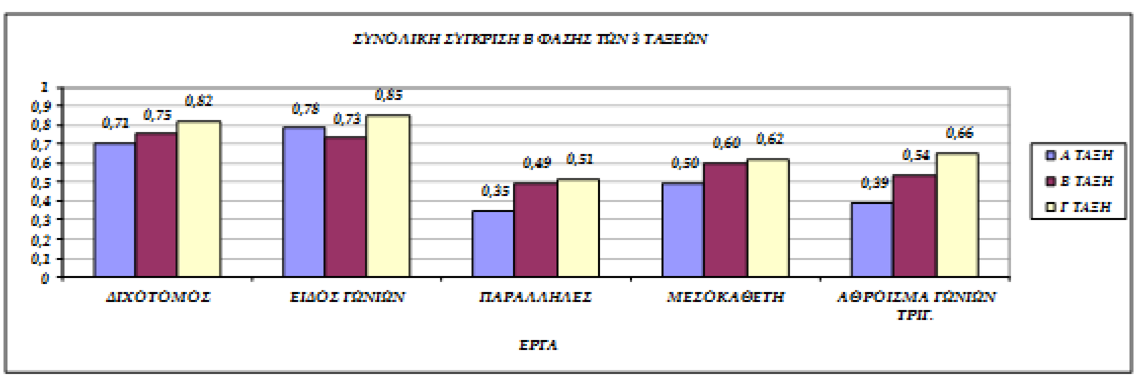
Μπορεί να θεωρείται αυτονόητο ότι η ηλικία, άρα και η τριβή των μαθητών με τις αναπαραστάσεις στη γεωμετρία, θα τους παρέχει μεγαλύτερη ευχέρεια στον χειρισμό τους, στην έρευνα παρ' όλ' αυτά δεν φάνηκε κάτι τέτοιο σε πρώτη ανάγνωση. Δηλαδή, ενώ η περιγραφική στατιστική έδειξε ότι η βελτίωση ήταν ελάχιστη από τάξη σε τάξη, 7% για τη Β΄ φάση (Πίνακας 2), χρειάστηκαν τα συνεπαγωγικά και τα διαγράμματα ομοιότητας για να γίνει ορατή η διαφοροποίηση, που εμφανίστηκε μέσω του διαφορετικού τρόπου σύνδεσης των έργων σε κάθε τάξη.



Πίνακας 2: Σύγκριση των δύο φάσεων ανά τάξη.

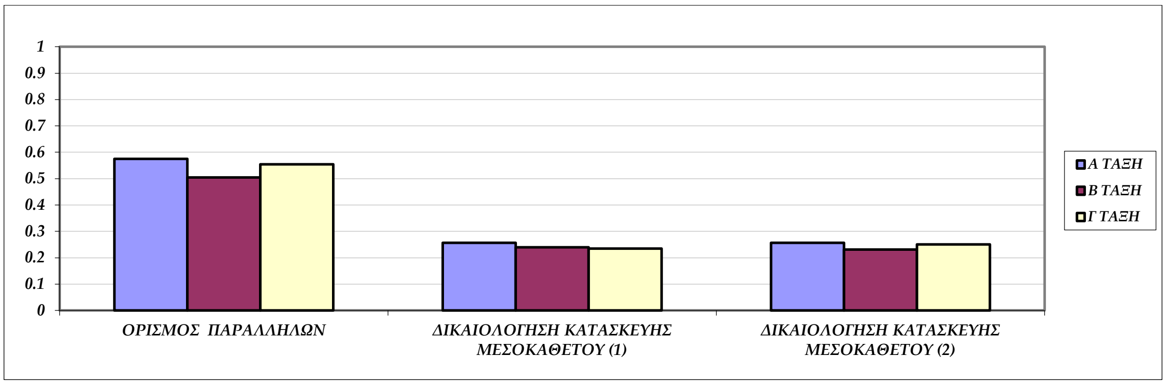
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα έργα που αφορούν παράλληλες ευθείες, μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος και άθροισμα γωνιών τριγώνου, όπου παρατηρείται μεγάλη απόκλιση στο ποσοστό επιτυχίας μεταξύ Α΄ και Β΄ φάσης γι' αυτές τις έννοιες (Πίνακας 3).





Πίνακας 3: Συγκριτικοί πίνακες επιτυχίας Α΄ και Β΄ φάσης για τις 3 τάξεις.

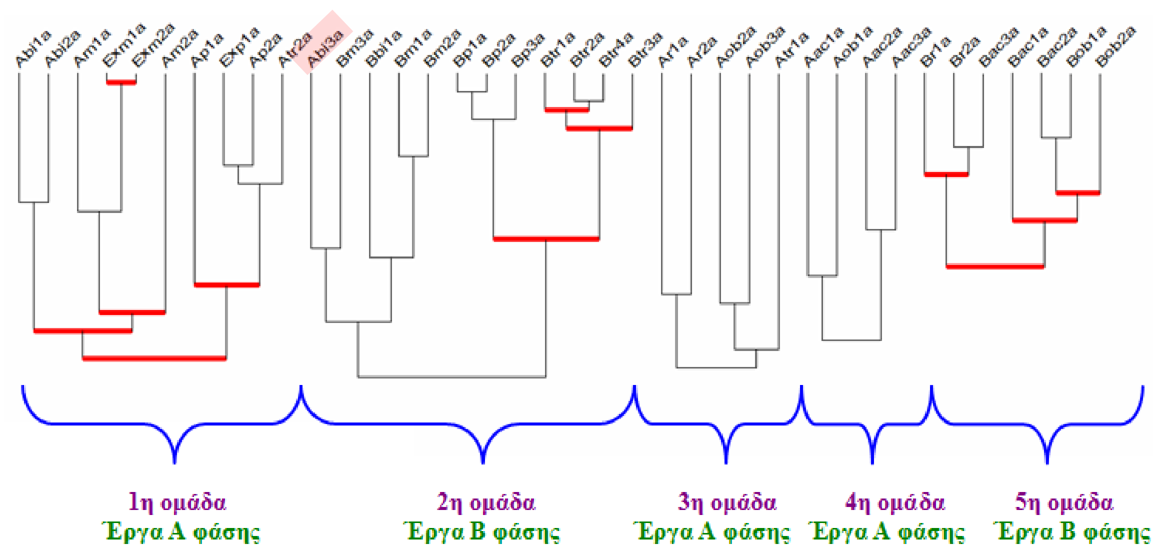
Κάτι που αξίζει επίσης να σημειωθεί είναι η μεγάλη αποτυχία που σημείωσαν οι μαθητές στην απόδοση του ορισμού παραλληλίας ευθειών και στη δικαιολόγηση κατασκευής των μεσοκαθέτων σε έργα της Α΄ φάσης (Πίνακας 4). Οι μαθητές φαίνεται να έχουν ελλιπή εννοιολογική κατανόηση οπότε παγιδεύονται στη μία-συγκεκριμένη εικόνα της έννοιας που γνωρίζουν χωρίς να μπορούν να μεταφέρουν τη γνώση τους σε ένα άλλο, διαφορετικό πλαίσιο.



Πίνακας 4: Σύγκριση εξηγήσεων για παράλληλες-μεσοκάθετη των 3 τάξεων.

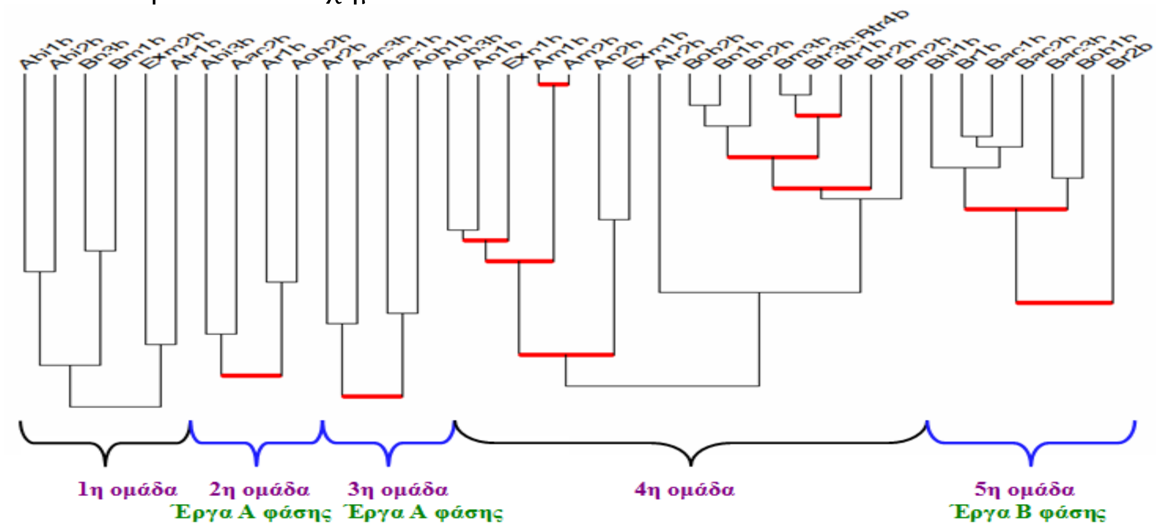
Διαγράμματα ομοιότητας

Στα διαγράμματα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο. Στην Α΄ τάξη (Διάγραμμα 1), σχηματίζονται 5 ομάδες έργων στις οποίες υπάρχει μια σχεδόν απόλυτη διάκριση μεταξύ των έργων της Α΄ και Β΄ φάσης. Αυτό σημαίνει ότι το σχήμα παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στις απαντήσεις των μαθητών γι' αυτό και συνδέονται έργα Α΄ φάσης αποκλειστικά μεταξύ τους και έργα Β΄ φάσης αντίστοιχα μεταξύ τους.



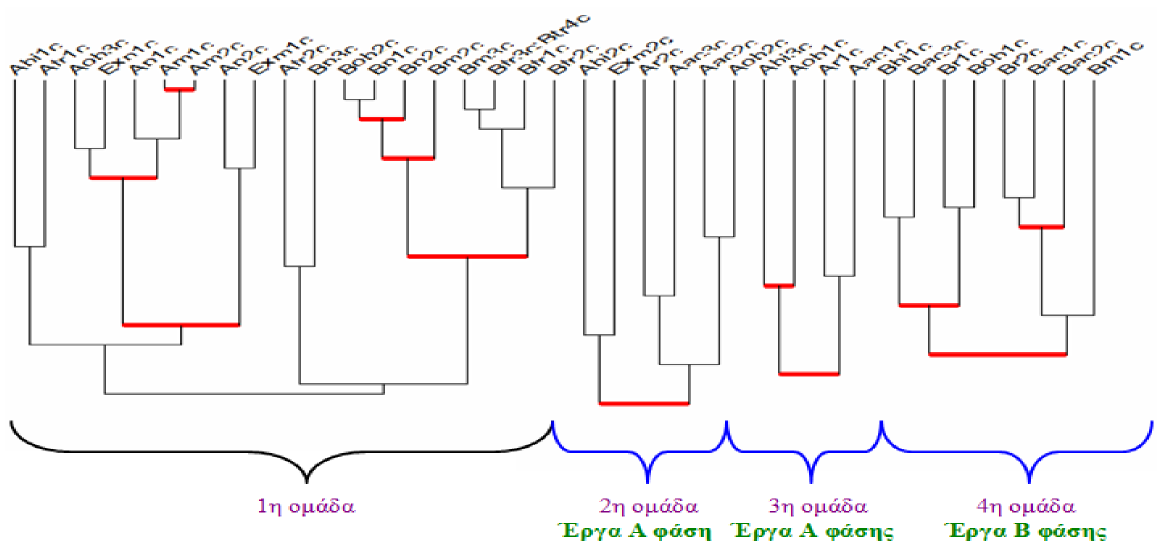
Διάγραμμα 1: Διάγραμμα ομοιότητας για την Α΄ τάξη.

Στη Β΄ τάξη σχηματίζονται πάλι 5 ομάδες έργων στις οποίες υπάρχει στεγανοποίηση στις 3 από αυτές (Διάγραμμα 2). Στις άλλες δύο γίνεται μια αδύναμη συσχέτιση έργων Α΄ και Β΄ φάσης. Αυτό θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μια πρώτη «δειλή» σύνδεση των γνώσεων των μαθητών πάνω στις εμπλεκόμενες έννοιες και στις 2 φάσεις, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι οι μαθηματικές σχέσεις που εκφράζονται λεκτικά ή συμβολικά στη Β΄ φάση δεν αντιστοιχούν στις σχέσεις που αναπαριστούν τα σχήματα.



Διάγραμμα2: Διάγραμμα ομοιότητας για την Β΄ τάξη.

Στη Γ΄ τάξη σχηματίζονται 4 ομάδες έργων με στεγανοποίηση έργων στις 3 από αυτές. Η μείωση των ομάδων σε 4 δείχνει μια αύξηση σχέσεων μεταξύ έργων Α΄ και Β΄ φάσης (Διάγραμμα 3).

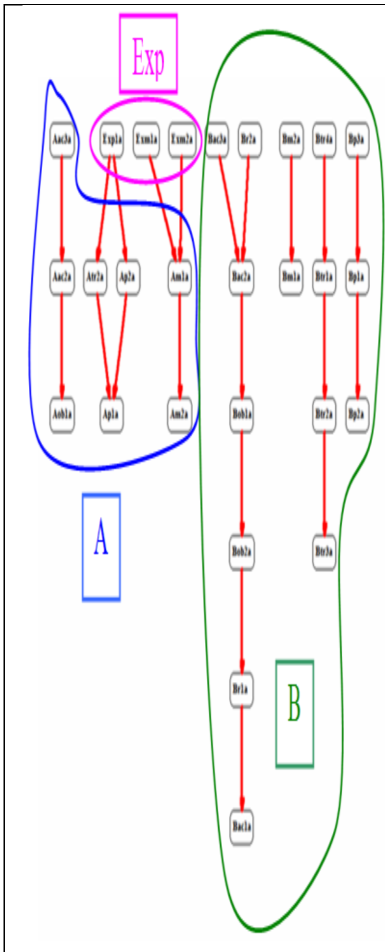
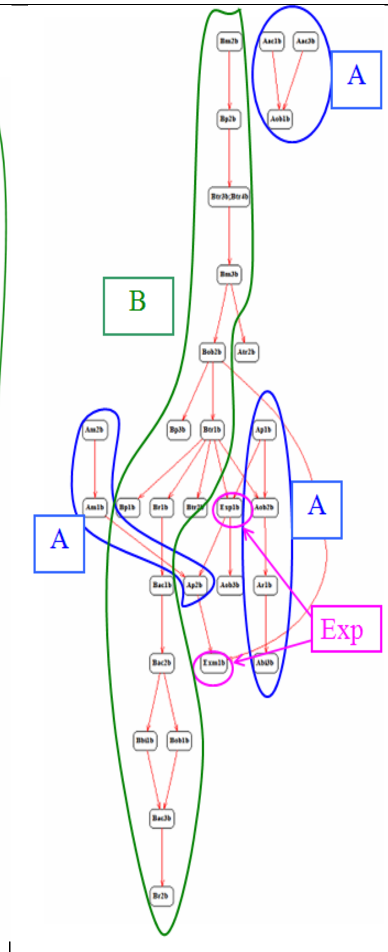
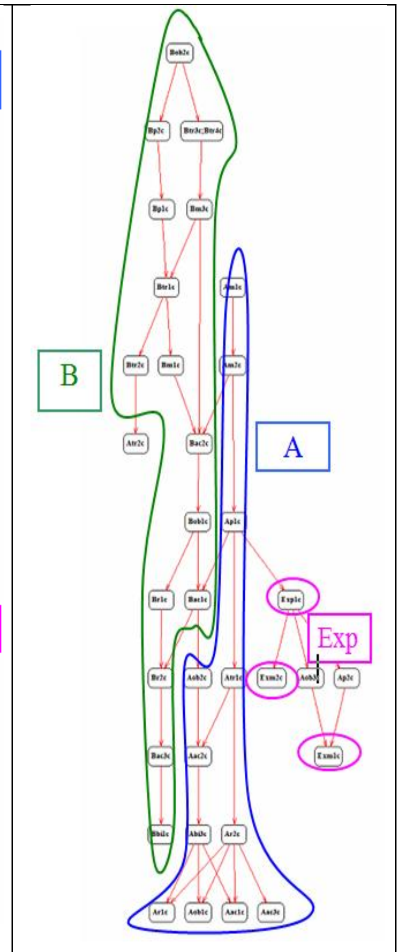


Διάγραμμα3: Διάγραμμα ομοιότητας για την Γ΄ τάξη.

Οι διακριτές ομαδοποιήσεις που παρατηρούνται και στις τρεις τάξεις δείχνει με σαφήνεια την επίδραση του σχήματος στο συλλογισμό και κατά συνέπεια στις απαντήσεις των μαθητών.

Συνεπαγωγικά διαγράμματα

Στον Πίνακα 4 εμφανίζονται τα συνεπαγωγικά διαγράμματα σημαντικότητας 99% και για τις τρεις τάξεις. Για την Α΄ τάξη παρατηρούμε δύο έντονα χαρακτηριστικά. Πρώτον, υπάρχουν περιορισμένες γραμμικές αλυσίδες μεταξύ έργων Β΄ φάσης και λιγότερες μεταξύ έργων Α΄ και ορισμού παραλλήλων και δικαιολόγησης μεσοκαθέτου (Exp), καμία όμως μεταξύ Α΄ και Β΄. Δεύτερον, οι μεταβλητές Exp (εξηγήσεις) φαίνονται να παίζουν κάποιο ρόλο στη Α΄ τάξη (Πίνακας 4α). Στο διάγραμμα της Β΄ τάξης (Πίνακας 4β) οι μεταβλητές Exp δε φαίνονται να παίζουν σημαντικό ρόλο, ενώ υπάρχει πάλι μια σχετική απομόνωση των συνεπαγωγών μεταξύ έργων Α΄ φάσης από αυτές των έργων της Β΄ φάσης. Στη Γ΄ τάξη και εδώ, όπως και στη Β΄, οι μεταβλητές Exp δεν παίζουν σημαντικό ρόλο. Παρατηρούμε μια μεγάλη γραμμική συνεπαγωγική αλυσίδα μεταξύ των έργων Β΄ φάσης και μια μικρότερη, σχεδόν γραμμική συνεπαγωγική αλυσίδα μεταξύ έργων Α΄ φάσης.

		
Πίνακας 4α: Τάξη Α΄.	**Πίνακας 4β: Τάξη Β΄.**	**Πίνακας 4γ: Τάξη Γ΄.**

Πίνακας 4: Συνεπαγωγικά διαγράμματα σημαντικότητας 99%.

Τα έργα δεν είχαν ιδιαίτερες γλωσσικές απαιτήσεις μιας και ήταν δοσμένα πολύ απλά και λιτά. Οπότε, σύμφωνα με την ανάλυση των αποτελεσμάτων, η δυσκολία των μαθητών δεν φαίνεται να προέρχεται από τις γλωσσικές τους αδυναμίες αλλά από την ελλιπή εννοιολογική κατανόηση ή από δυσκολία "ανάγνωσης" των πληροφοριών που δίνονται στο σχήμα. Επίσης ένας παράγοντας που μπορεί να τους οδήγησε σε λάθη είναι και η παράλειψη στη διδασκαλία να αναφέρουμε παρόμοια έργα στη τάξη. Η επισήμανση δηλαδή της προτεραιότητας που θα πρέπει να δίνεται στα δεδομένα και όχι στην ίδια την εικόνα, που κάποιες φορές μπορεί να έρχονται σε μια φαινομενική αντίθεση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση του βαθμού στον οποίο οι μαθητές του γυμνασίου χρησιμοποιούν το γεωμετρικό σχήμα ως εικόνα όταν υπάρχει ασυμφωνία μεταξύ αυτού που βλέπουν και αυτού που το γεωμετρικό σχήμα σκοπεύει να αναπαραστήσει, καθώς και το πόσο και αν επηρεάζει η ηλικία των μαθητών τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν το γεωμετρικό σχήμα. Η έρευνα επιβεβαίωσε το γεγονός ότι η διπλή φύση της αναπαράστασης δυσκολεύει τους μαθητές και μάλιστα αποτελεί εμπόδιο στην αναγνώριση ακόμη και απλών γεωμετρικών εννοιών. Οι μαθητές παρόλο που κατά την επίδοση του δοκιμίου αναγνώρισαν την ασυνέπεια σχήματος - δεδομένων, στηρίχθηκαν στο "φαίνεσθαι" όπως μαρτυρά η αποτυχία σε έργα της Β΄ φάσης. Φάνηκε να έχουν συνδέσει τις έννοιες με μία συγκεκριμένη εικόνα που τους οδήγησε σε άκαμπτη σκέψη και εμπόδισε την αναγνώριση της έννοιας σε ένα διαφορετικό πλαίσιο.

Παρατηρήθηκε μια αντίθεση μεταξύ επιτυχίας - αποτυχίας για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο σε παρόμοιες καταστάσεις. Αυτό καταδεικνύει έλλειψη συνδυασμού μεταξύ διαφορετικών συστημάτων απεικόνισης. Αυτοί οι συνδυασμοί χτίζουν το γνωστικό οικοδόμημα με το οποίο οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν το ίδιο αντικείμενο μέσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις και να κάνουν αντικειμενικές διασυνδέσεις (Duval, 1999). Η βάση για να χτιστεί το οικοδόμημα είναι η βαθιά εννοιολογική γνώση.

Η ηλικία, παρόλο που στην ανάλυση με περιγραφική στατιστική δε φάνηκε να διαφοροποιεί αξιοσημείωτα τις απαντήσεις των μαθητών, η ανάλυση ομοιότητας και κυρίως η συνεπαγωγική ανάλυση έδειξε ότι παίζει ρόλο στη φύση των αναπαραστάσεων που έχουν οι μαθητές. Παρατηρήσαμε ότι οι ομάδες έργων αλλά και ο τρόπος που αυτά συνδέονται μεταξύ τους είναι πολύ διαφορετικός. Επομένως ο τρόπος που επιδρά το σχήμα στο συλλογισμό τους και κατά συνέπεια και στις απαντήσεις τους, διαφοροποιείται σημαντικά από τάξη σε τάξη.

Οι οπτικές αναπαραστάσεις παρέχουν επικοινωνία, σκέψη και μάθηση, αλλά όχι αυτόματα. Συχνά οι μαθητές υποτιμούν ή παραβλέπουν πληροφορίες που περιέχονται στο σχήμα και θεωρούν ότι μια γρήγορη ματιά είναι αρκετή για να κατανοήσουν και να εξάγουν πληροφορίες (Schnotz, 2002). Η διάκριση του τι είναι αποδεκτό και τι όχι, απαιτεί κατανόηση της διπλής φύσης της αναπαράστασης. Οι δυσκολίες και τα προβλήματα από την "ευρετική ανεπάρκεια" στο σχήμα, όπως όρισε ο Duval την ανικανότητα των μαθητών να προχωρήσουν πέρα από τη πρώτη ματιά, μπορεί να ξεπεραστεί μέσα από συστηματική διδασκαλία. Κατά τη διδασκαλία απαιτείται συνεχώς μια μετατροπή μέσα σε ένα διπλό σημειωτικό σύστημα: τη κοινή γλώσσα για να δώσουμε εξηγήσεις και τα σύμβολα - σχήματα για τις μαθηματικές σχέσεις (Duval, 2006). Για να υπάρχει συντονισμός τους θα πρέπει να δοθεί έμφαση τόσο στη διαφοροποίηση των διαδικασιών οπτικοποίησης - συλλογισμού όσο και στην επίγνωση των διάφορων τύπων σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2015). Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό, είναι να ζητάμε από τους μαθητές να περιγράφουν ή να εξηγούν και λεκτικά μια οπτική αναπαράσταση. Μπορεί "μια εικόνα να είναι χίλιες λέξεις" αλλά αυτό δε σημαίνει ότι η παράλειψη των λέξεων οδηγεί και σε καλύτερη κατανόηση.

Σε μελλοντική έρευνα, για να διαπιστώσουμε αν η αδυναμία των μαθητών να απαντήσουν σωστά οφείλεται σε έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης ή σε λάθη παρατήρησης, θα μπορούσαμε να τους χορηγήσουμε το ίδιο τεστ ζητώντας να εξηγούν στηριζόμενοι σε μαθηματικούς κανόνες και σχέσεις τις απαντήσεις τους, και όχι απλώς να επιλέγουν μια απάντηση. Ακόμη θα είχε ενδιαφέρον, σε ένα επόμενο ερευνητικό βήμα, η χορήγηση του τεστ αφού είχε προηγηθεί διδασκαλία στην οποία θα δινόντουσαν εσκεμμένα λάθος κατασκευασμένα σχήματα για να τονιστεί η διάκριση μεταξύ απλής εικόνας που λειτουργεί σα φωτογραφία της πραγματικότητας και μιας γεωμετρικής απεικόνισης που διέπεται από εντελώς διαφορετικούς νόμους. Θα μας δινόταν έτσι η δυνατότητα να έχουμε και μια σύγκριση των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi, A., (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics *Educational Studies in Mathematics,* 52**,** pp**.**215–241.

DeLoache, J. S., (2000). Dual representation and young children’s use of scale models. *Child Development*, 71, pp.329–338.

Duval, R., (2014). The first crucial point in geometry learning: Visualization. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1-2), pp.1-28.

Duval, R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, pp*.*103–131, Springer.

Duval, R., (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning, 25p. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education , 21st*, Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Γαγάτσης, Α., (2011). Μια εικόνα αξίζει πράγματι χίλιες λέξεις; Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών, σσ.115-128. *Ερευνητικά θέματα Μαθηματικής Παιδείας,* Α. Γαγάτσης & Χ. Γ. Χαραλάμπους (Eds) Αντιπρυτανεία Ακαδημαϊκών υποθέσεων Πανεπιστημίου Κύπρου.

Gras R., Suzuki E., Guillet F., & Spagnolo F. (2008). *Statistical implicative analysis.* Germany: Springer.

Mesquita, A. L., (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry *Journal of Mathematical Behavior,* 17 (2), pp.183-195.

Michael – Chrysanthou, P., Gagatsis, A. (2015). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime, 17* (4-I), 165-180.

Schnotz, W., (2002). Towards an Integrated View of Learning From Text and Visual Displays. *Educational Psychology Review*, 14(1), pp.101-120. Published by: Springer.

ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΗ ΜΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΤΙΛΗΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ;

Γρίδος Παναγιώτης[1], Αυγερινός Ευγένιος[1], Βλάχου Ρόζα[1], Μαμωνά-Downs Γιάννα[2]

[1]Εργαστήριο Μαθηματικών, Διδακτικής τους και Πολυμέσων, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, [2]Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

p.gridos@aegean.gr, eavger@rhodes.aegean.gr, premnt04001@rhodes.aegean.gr, mamona@upatras.gr

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας μέσα από μια γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση στη γεωμετρία. Η διερεύνηση γίνεται σε δύο άξονες: (α) εξετάζεται η επίδραση του τύπου σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιούν οι μαθητές στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων και τη μαθηματική δημιουργικότητα, και (β) πως η αναγκαιότητα κατασκευής επιπλέον βοηθητικών κατασκευών στο δοθέν σχήμα επηρεάζει την παραγωγή πολλαπλών λύσεων και τις μεταβλητές της δημιουργικότητας. Δείγμα της έρευνας αποτελούν 243 μαθητές Α΄Λυκείου και η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω γραπτού δοκιμίου. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων δείχνει σημαντικές σχέσεις για τις συνιστώσες του θέματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργικότητα αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών (Brunkalla, 2009) και έχει προταθεί ως ένα από τα βασικά συστατικά που θα συμπεριληφθούν στην εκπαίδευση των Μαθηματικών, αφού "η ουσία των Μαθηματικών είναι να σκέφτεται κάποιος δημιουργικά" (Mann, 2006, σελ. 239). Στη μαθηματική εκπαίδευση, η δημιουργικότητα συνδέεται συνήθως με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων (π.χ. Leikin, 2009; Silver, 1997). Στο επίπεδο της σχολικής τάξης, η γεωμετρία περισσότερο από άλλες περιοχές των μαθηματικών, ενδείκνυται για ανάπτυξη μαθηματικής δημιουργικότητας καθώς παρέχει ευκαιρίες για διερεύνηση και απόδειξη δραστηριοτήτων που μοιάζουν με το έργο των μαθηματικών (Herbst, 2002), επιτρέποντας την ομαλή ένταξη πολλαπλών προσεγγίσεων σε ένα πρόβλημα.

Το ερώτημα είναι ποιες «γνωστικές» παράμετροι μπορούν να συμβάλουν σε υψηλά επίπεδα μαθηματικής δημιουργικότητας στη γεωμετρία; Η παρούσα έρευνα επιχειρεί μια γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της μαθηματικής δημιουργικότητας εξετάζοντας τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Πώς επιδρά ο τύπος σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιούν οι μαθητές στην παραγωγή πολλαπλών λύσεων;
2. Πώς επηρεάζει η αναγκαιότητα κατασκευής βοηθητικών γραμμών σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα την παραγωγή πολλαπλών λύσεων;
3. Πώς συνδέονται οι μεταβλητές της δημιουργικότητας ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία σε μια τέτοια προσέγγιση;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μαθηματική δημιουργικότητα και προβλήματα πολλαπλών λύσεων

Η δημιουργικότητα στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών συχνά χαρακτηρίζεται από τρεις διαστάσεις: *ευχέρεια*, *ευελιξία* και *πρωτοτυπία*. Η *ευχέρεια*, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να παράγει πολλές λύσεις για ένα πρόβλημα, η *ευελιξία* αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί διαφορετικές προσεγγίσεις για τη λύση ενός προβλήματος, να αξιοποιεί ιδέες από διαφορετικά πεδία ή και να αντιμετωπίζει μία κατάσταση από διαφορετικές προοπτικές, και η *πρωτοτυπία*, η οποία αφορά στην ικανότητα του ατόμου να δίνει μοναδικές, ασυνήθιστες και καινοτόμες λύσεις (π.χ. Leikin, 2009; Silver, 1997). Ειδικότερα, στην τάξη των μαθηματικών προκειμένου να αναπτύξουμε αυτές τις διαστάσεις της δημιουργικότητας πολλοί ερευνητές (π.χ. Leikin, 2009) συνιστούν την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων. Σύμφωνα με την Leikin (2009), η διαφορά των λύσεων μπορεί να αφορά: (α) διαφορετικές απεικονίσεις μια μαθηματικής έννοιας, (β) διαφορετικές ιδιότητες (ορισμούς ή θεωρήματα) των μαθηματικών εννοιών από ένα πεδίο, και (γ) διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικά πεδία των μαθηματικών.

Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος και βοηθητικές κατασκευές

Η παρούσα έρευνα χρησιμοποιεί τη θεωρία του Duval (1995, 2017), ως προς τον τρόπο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιούν οι μαθητές. Μέσα από τη γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της γεωμετρίας ο Duval (1995, 2017), παρουσιάζει ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών σχημάτων, με βάση του οποίου εντοπίζονται τέσσερις τύποι γνωστικής κατανόηση: αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension), ακολουθιακή κατανόηση (sequential apprehension), λεκτική κατανόηση (discursive apprehension) και λειτουργική κατανόηση (operative). Ένα σχήμα για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα πρέπει να υπάρχει σίγουρα η αντιληπτική σύλληψη και τουλάχιστον ένα από τα άλλα είδη σύλληψης. Τα είδη κατανόησης όπως προτείνονται από τον Duval (1995) είναι:

1. *Αντιληπτική κατανόηση,* η οποία σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του.
2. *Ακολουθιακή ή σειριακή κατανόηση,* η οποία απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος.
3. *Λεκτική κατανόηση,* η οποία συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική κατανόηση, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του.
4. *Λειτουργική κατανόηση,* η οποία εξασφαλίζει πρόσβαση στη λύση του προβλήματος. Σχετίζεται με την νοερή ή φυσική επεξεργασία του σχήματος και δίνει στο σχήμα μια ευρετική λειτουργία. Η μερολογική τροποποίηση είναι ο πιο δύσκολος τύπος τροποποίησης και αφορά στη διαίρεση του σχήματος σε υποσχήματα, το συνδυασμό των υποσχημάτων και τη δημιουργία νέων υποσχημάτων.

Κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, η κατασκευή βοηθητικών γραμμών (auxiliary lines), λειτουργία που συνδέεται με την λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος σύμφωνα με τη θεωρία του Duval, φαίνεται να ανοίγει τον δρόμο για πολλαπλές προσεγγίσεις σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα (Gridos, Gagatsis, Elia & Deliyianni, 2019). Μέσα από αυτή την ανάλυση παρατηρήσαμε δύο είδη κατασκευών κατά την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων: (α) βοηθητικές γραμμές που δημιουργούν υποσχήματα εντός του δοσμένου σχήματος (β) βοηθητικές γραμμές που δημιουργούν σχήματα όπου το δοσμένο αποτελεί μέρος. Οι Hsu και Silver (2014), στη μελέτη τους για τη γνωστική πολυπλοκότητα των γεωμετρικών έργων, θεώρησαν την εισαγωγή βοηθητικών γραμμών ως μία από τις τέσσερις κατηγορίες πολυπλοκότητας επίλυσης προβλημάτων. Λόγο αυτής της πολυπλοκότητας, κρίνεται αναγκαίο στη μελέτη μας να διαχωρίσουμε την ικανότητα αναδιαμόρφωσης ενός υπάρχοντος σχήματος με την ικανότητα δημιουργίας νέων υποσχημάτων με τη χρήση βοηθητικών κατασκευών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Δείγμα έρευνας και Συλλογή δεδομένων

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 243 μαθητές Α΄ Λυκείου. Η συλλογή των δεδομένων έγινε σε δύο φάσεις μέσω γραπτής δοκιμασίας. Η *πρώτη* φάση αφορά τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος, είχε διάρκεια 30 λεπτά και περιλαμβάνει τρεις ομάδες έργων με δύο έργα η κάθε ομάδα. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει δύο αντιληπτικά έργα, η δεύτερη ομάδα δύο έργα λειτουργικής κατανόησης που επιλύονται είτε αλγοριθμικά είτε με αναδιαμόρφωση του σχήματος, ενώ η τρίτη ομάδα δύο έργα λειτουργικής κατανόησης που η επίλυση τους απαιτεί την κατασκευή επιπλέον βοηθητικών κατασκευών.

Η *δεύτερη* φάση αφορά στη μαθηματική δημιουργικότητα και την παραγωγή πολλαπλών λύσεων σε γεωμετρικά προβλήματα, είχε διάρκεια 60 λεπτά και περιλαμβάνει δύο γεωμετρικά προβλήματα τα οποία καλούνται οι μαθητές να επιλύσουν με όσο περισσότερους τρόπους μπορούν. Τα δύο προβλήματα είναι παρόμοια με τη διαφορά ότι το ένα πρόβλημα (πρόβλημα 2) επιλύεται μόνο με τη χρήση επιπλέον βοηθητικών γραμμών ενώ το άλλο πρόβλημα επιλύεται είτε με το δοθέν σχήμα είτε με χρήση βοηθητικών κατασκευών (σχήμα 1).

Πρόβλημα 1: Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ διάμετρος. Έστω Δ και Ε σημεία του κύκλου και ΔΟ//ΕΒ, και Γ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΕ. Να δείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΓΒ=ΑΒ.

Πρόβλημα 2: Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ διάμετρος. Έστω Γ και Δ σημεία του κύκλου τέτοια ώστε ΑΓ//ΟΔ, και Ε το σημείο τομής των ΑΓ και ΔΒ. Να αποδείξετε με όσο περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι ΔΒ=ΔΓ.

Σχήμα 1. Τα δύο γεωμετρικά προβλήματα της δεύτερης φάσης

Κατηγοριοποίηση και Ανάλυση δεδομένων

Για την *πρώτη* φάση, οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν ως προς την ορθότητά τους και έπειτα ως προς την στρατηγική που χρησιμοποιούν. Για την πρώτη ομάδα έργων τα δύο αντιληπτικά έργα (Per1, Per2) αξιολογήθηκαν μόνο ως προς την ορθότητά τους, για τη δεύτερη ομάδα έργων διακρίνουμε δύο κατηγορίες λύσεων, αλγοριθμικά (Op1al, Op2al) ή με αναδιαμόρφωση του σχήματος (Op1, Op2), ενώ για την τρίτη ομάδα έργων, αλγοριθμικά (Aux1al) ή με την χρήση επιπλέον βοηθητικών γραμμών (Aux1, Aux2). Για τη *δεύτερη* φάση, οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν αρχικά ως προς την ορθότητα τους και στη συνέχεια ταξινομήθηκαν σε χώρους λύσεων (βλ. Leikin, 2009) με βάση την βοηθητική κατασκευή που χρησιμοποιούν. Η ευχέρεια αξιολογήθηκε με βάση τον αριθμό των ορθών λύσεων σε κάθε πρόβλημα, η ευελιξία με βάση την εναλλαγή στους χώρους λύσεων, ενώ η πρωτοτυπία αξιολογήθηκε σχετικά με βάση την συχνότητα της λύσης στο πλαίσιο του συνόλου των μαθητών (Leikin, 2009).

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε περιγραφική στατιστική, έλεγχος t σε επίπεδο σημαντικότητας 99% με το λογισμικό Spss, καθώς και ανάλυση ομοιότητας με το λογισμικό C.H.I.C. Η στατιστική ανάλυση ομοιότητας είναι μια μέθοδος ανάλυσης που προσδιορίζει τις συνδέσεις ομοιότητας των μεταβλητών (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008). Στα διαγράμματα ομοιότητας συμβολίζουμε με Pi, i = 1, 2 το πρόβλημα στο οποίο αναφερόμαστε και με Sj, j = 0, 1, 2, 3, 4 τον αριθμό λύσεων για κάθε αντίστοιχο πρόβλημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Περιγραφική Στατιστική

Στον πίνακα 1, παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας για τα έργα σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος με βάση τον τρόπο επίλυσής τους. Παρατηρούνται υψηλά ποσοστά επιτυχίας στα αντιληπτικά έργα (Per1, Per2), καθώς και υψηλότερα ποσοστά στους αλγοριθμικούς τρόπους επίλυσης (Op1al, Op2al, Aux1al) των έργων λειτουργικής κατανόησης σε σχέση με τις αναδιαμορφώσεις σχήματος (Op1, Op2) και την κατασκευή επιπλέον βοηθητικών γραμμών (Aux1, Aux2).

Per1	**Per2**	**Op1al**	**Op1**	**Op2al**	**Op2**	**Aux1al**	**Aux1**	**Aux2**
67%	82%	42%	29%	63%	18%	32%	22%	29%

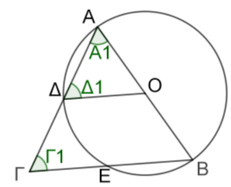
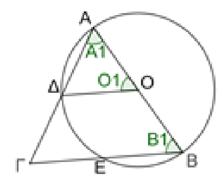
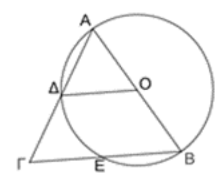
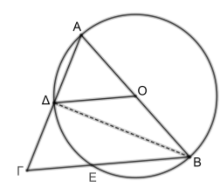
Πίνακας 1. Σύλληψη γεωμετρικού σχήματος

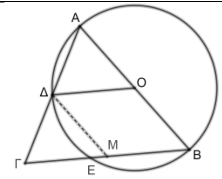
Στον πίνακα 2, παρουσιάζονται τα ποσοστά του πλήθους λύσεων των μαθητών (ευχέρεια) για τα δύο γεωμετρικά προβλήματα. Το εύρος λύσεων στο σύνολο των μαθητών για το πρόβλημα 1 από 0 έως 4 λύσεις ενώ για το πρόβλημα 2 από 0 έως 3. Ο μέσος όρος λύσεων για το πρόβλημα 1 είναι 1,3 λύσεις ενώ για το πρόβλημα 2 είναι 0,8 λύσεις, διαφορά που είναι στατιστικά σημαντική ($t=10.834$, $df=242$, $p<0.05$). Παρατηρούμε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν υψηλότερη ευχέρεια στο πρόβλημα 1 που περιλαμβάνει λύσεις και χωρίς τη χρήση επιπλέον κατασκευών. Στατιστικά σημαντικές διαφορές παρατηρούνται και για την ευελιξία ($t=6.77$, $df=242$, $p<0.05$), με τους μαθητές να εμφανίζουν υψηλότερη ευελιξία στο πρόβλημα 1 ($M=10.95$, $Sd=11.15$) έναντι ($M=7.49$, $Sd=8.1$) στο πρόβλημα 2. Τέλος, στατιστικά σημαντικές διαφορές παρατηρούνται και για την πρωτοτυπία ($t=4.697$, $df=242$, $p<0.05$), με τους μαθητές να εμφανίζουν υψηλότερη πρωτοτυπία στο πρόβλημα 1 ($M=3.3$, $Sd=7.14$) έναντι ($M=1.79$, $Sd=3.43$) στο πρόβλημα 2.

P1s0	**P1s1**	**P1s2**	**P1s3**	**P1s4**	**P2s0**	**P2s1**	**P2s2**	**P2s3**
29%	40%	16%	11%	4%	46%	35%	10%	9%

Πίνακας 2. Ευχέρεια λύσεων για τα δύο γεωμετρικά προβλήματα

Στον πίνακα 3 παρουσιάζονται οι χώροι λύσεων για το πρόβλημα 1, χωρισμένοι με βάση την βοηθητική κατασκευή που χρησιμοποιούν, καθώς και το ποσοστό εμφάνισης της κάθε λύσης στο σύνολο των μαθητών. Οι πιο καινοτόμες λύσεις είναι αυτές που απαιτούν βοηθητική κατασκευή.

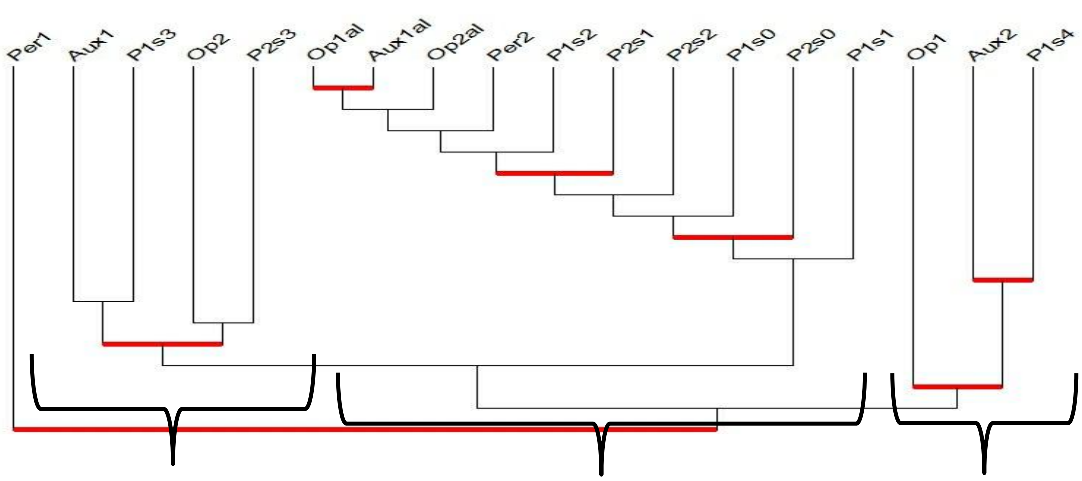
Χώρος Λύσεων 1 (Χωρίς Βοηθητική Κατασκευή)	**<u>Λύση 1.1</u> (P1is1) 24%** ΔΟ = ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το ΔΟΑ είναι ισοσκελές τρίγωνο. Άρα οι γωνίες Δ1 = Α1. (1). Επιπλέον ΔΟ // ΕΒ → ΔΟ // ΓΒ, άρα οι γωνίες Δ1 = Γ1 εντός εκτός και επί τα αυτά. (2). Από (1) , (2): Α1 = Δ1 = Γ1. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές και ΑΒ = ΓΒ.	
	<u>Λύση 1.2</u> (P1is2) 37% ΔΟ = ΟΑ ως ακτίνες του κύκλου. Τότε το ΔΟΑ είναι ισοσκελές τρίγωνο. Επιπλέον ΔΟ // ΕΒ → ΔΟ // ΓΒ, άρα οι γωνίες $O_1 = B_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Επιπλέον, στα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΒΓ η Α γωνία είναι κοινή, επομένως έχουν δύο οξείες γωνίες ίσες μία προς μία άρα είναι όμοια. Άρα, ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, αφού είναι όμοιο με το ισοσκελές ΑΟΔ. Άρα, ΑΒ = ΓΒ.	
	<u>Λύση 1.3</u> (P1mid1) 45% Το ΔΟ=1/2ΑΒ ως ακτίνα, αφού ΑΒ διάμετρος. Το ΔΟ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών Δ και Ο των ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα (παράλληλη με την ΓΒ και διχοτομεί την ΑΒ). Τότε ΔΟ=1/2ΑΒ=1/2ΒΓ. Άρα, ΑΒ=ΒΓ.	
Χώρος Λύσεων 2 (Βοηθ. Κατ. ΔΒ)	**<u>Λύση 2.1</u> (P1mid2) 14%** Το Δ είναι μέσο του ΑΓ, αφού ΔΟ ενώνει το μέσο Ο με το Δ και ΟΔ//ΒΓ. **Φέρουμε** ΔΒ διάμεσος του τριγώνου. Η γωνία Δ1 βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $Δ1=90^o$, άρα ΔΒ διάμεσος και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα, το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα ΑΒ=ΓΒ.	
Χώρος Λύσεων 3 (Βοηθ. Κατ. ΔΜ)	**<u>Λύση 3.1</u> (P1aux)**	

	5% Φέρουμε παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ. Τότε αφού διέρχεται από το μέσο Δ της ΑΓ, θα διέρχεται και από το μέσο Μ της ΒΓ και ΜΔ= ΑΒ/2. ΕΒ//ΔΟ → ΜΒ//ΔΟ. Άρα, ΜΒ=ΔΟ= ΒΓ/2 και ΟΔ=ΟΒ ως ακτίνες του κύκλου. Άρα, το ΔΟΜΒ ρόμβος → ΟΒ=ΜΒ → 1/2ΑΒ=1/2ΒΓ → ΑΒ=ΒΓ.	

Πίνακας 3. Χώροι λύσεων για το πρόβλημα 1

Ανάλυση ομοιότητας

Στο πρώτο διάγραμμα ομοιότητας (Διάγραμμα 1), το οποίο αφορά στην ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων των μαθητών (ευχέρεια) και τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος, παρατηρούνται τρεις σημαντικές ομάδες ομοιότητας. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (Aux1, P1s3, Op2, P2s3), δηλαδή περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) επιλύουν τα προβλήματα 1 και 2 με 3 τρόπους (P1s3, P2s3), και (β) επιλύουν από τη δεύτερη ομάδα έργων σύλληψης γεωμετρικού σχήματος το δεύτερο έργο με αναδιαμόρφωση σχήματος (Op2) και από την τρίτη ομάδα έργων καταφέρνουν να επιλύσουν το πρώτο έργο (Aux1) με την προσθήκη επιπλέον βοηθητικών γραμμών. Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (Op1, Aux2, P1s4), δηλαδή περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) επιλύουν το πρόβλημα 1 με 4 τρόπους (P1s4), και (β) επιλύουν από τη δεύτερη ομάδα έργων σύλληψης γεωμετρικού σχήματος το πρώτο έργο με αναδιαμόρφωση σχήματος (Op1) και από την τρίτη ομάδα έργων καταφέρνουν να επιλύσουν το δεύτερο έργο (Aux2) με την προσθήκη βοηθητικής γραμμής. Οι δύο αυτές ομάδες έχουν σαφή χαρακτήρα, και υποδεικνύουν ότι οι μαθητές που χαρακτηρίζονται από υψηλή ικανότητα μερολογικής τροποποίησης ενός σχήματος και είναι ικανοί να φέρουν επιπλέον κατασκευές στο σχήμα, εμφανίζουν υψηλή ευχέρεια λύσεων.

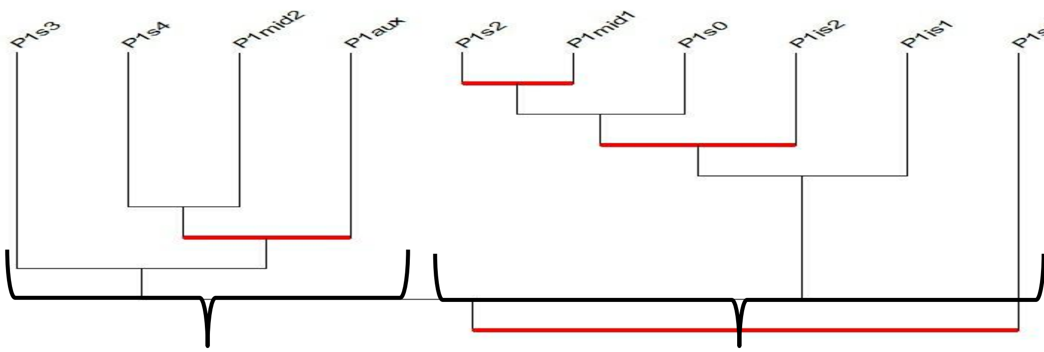


Ομάδα 1 **Ομάδα 2** **Ομάδα 3**

Διάγραμμα ομοιότητας 1: Σύλληψη γεωμετρικού σχήματος–Ευχέρεια λύσεων.

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s0, P1s1, P1s2, P2s0, P2s1, P2s2, Per2, Op1al, Op2al, Aux1al), δηλαδή περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) δεν επιλύουν τα προβλήματα 1 και 2 (P1s0, P2s0) ή τα επιλύουν με 1 ή 2 τρόπους (P1s1, P1s2, P2s1, P2s2), και (β) επιλύουν το δεύτερο αντιληπτικό έργο (Per2), καθώς και 3 λειτουργικά έργα της δεύτερης και τρίτης ομάδας με αλγοριθμικό τρόπο (Op1al, Op2al, Aux1al). Η δεύτερη αυτή ομάδα έχει επίσης σαφή χαρακτήρα και περιλαμβάνει τους μαθητές οι οποίοι βλέπουν τα σχήματα στατικά, παγιδεύονται στην αντιληπτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος αδρανοποιώντας τη λειτουργική σύλληψη επιλύοντας τα έργα αλγοριθμικά και εμφανίζουν μηδενική (καμία λύση) ή μέτρια ευχέρεια λύσεων (μία ή δύο λύσεις).

Στο δεύτερο διάγραμμα ομοιότητας (Διάγραμμα 2), το οποίο αφορά στην ικανότητα παραγωγής πολλαπλών λύσεων (ευχέρεια) και την ευελιξία των μαθητών για το πρόβλημα 1, παρατηρούμε δύο ομάδες ομοιότητας.



Ομάδα 1 **Ομάδα 2**

Διάγραμμα ομοιότητας 2: Ευχέρεια-Ευελιξία λύσεων για το πρόβλημα 1

Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s3, P1s4, P1mid2, P1aux), δηλαδή, περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) επιλύουν το πρόβλημα 1 με 3 ή 4 τρόπους (P1s3, P1s4), και (β) επιλύουν το πρόβλημα 1 φέρνοντας επιπλέον βοηθητική κατασκευή στο δοθέν σχήμα (P1mid2, P1aux - βλέπε χώρους λύσεων του προβλήματος 1). Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που είναι ικανοί να φέρουν επιπλέον βοηθητικές κατασκευές για να επιλύσουν το πρόβλημα, κατάσταση η οποία ενισχύει και την ευελιξία στις λύσεις τους καθώς μετακινούνται ευέλικτα σε όλους τους χώρους λύσεων, χαρακτηρίζονται από υψηλή ευχέρεια λύσεων. Επιπλέον, οι μαθητές αυτοί εμφανίζουν και υψηλή πρωτοτυπία στις λύσεις τους καθώς οι λύσεις αυτές εμφανίζονται σε ποσοστό 14% και 5% αντίστοιχα στο σύνολο των μαθητών.

Η δεύτερη ομάδα λύσεων περιλαμβάνει τις μεταβλητές (P1s0, P1s1, P1s2, P1is1, P1is2, P1mid1), δηλαδή, περιλαμβάνει τους μαθητές που: (α) δεν επιλύουν το πρόβλημα 1 (P1s0) ή το επιλύουν με 1 ή 2 τρόπους (P1s1, P1s2), και (β) επιλύουν το πρόβλημα βασιζόμενοι μόνο στην λεκτική περιγραφή του προβλήματος. Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που δεν καταφέρνουν να φέρουν επιπλέον βοηθητικές γραμμές στο σχήμα, φτάνουν σε χαμηλά ή μέτρια επίπεδα ευχέρειας και ευελιξίας καθώς δεν μπορούν να εμφανίσουν λύσεις σε όλους τους χώρους λύσεων. Οι μαθητές αυτοί επίσης παγιδεύονται σε χαμηλά ποσοστά πρωτοτυπίας στις λύσεις τους, καθώς αυτές οι λύσεις εμφανίζονται σε ποσοστά 24%, 37% και 45% αντίστοιχα στο σύνολο των μαθητών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η προσέγγιση της μαθηματικής δημιουργικότητας μέσα από μια γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της γεωμετρίας. Καθώς η εργασία μας ασχολείται με τη σχετική δημιουργικότητα (Leikin, 2009), υποστηρίζουμε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα πρέπει να αναπτυχθεί σε όλους τους μαθητές (Sheffield, 2009). Πορίσματα άλλων ερευνών έδειξαν ότι οι μεταβλητές της δημιουργικότητας, κυρίως η ευχέρεια και η ευελιξία, είναι δυναμικές και μεταβάλλονται από τη διδασκαλία, την καθοδήγηση και τις εμπειρίες του ατόμου (Gridos, Gagatsis, Elia & Deliyianni, 2019; Leikin, 2009; Silver, 1997). Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας εικάζουμε ότι μπορούμε να ενισχύσουμε την ευχέρεια και την ευελιξία των μαθητών με ασκήσεις οι οποίες στοχεύουν οι μαθητές να ξεπεράσουν την αντιληπτική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος και να οδηγηθούν στη λειτουργική σύλληψη, αλλά επιπλέον και την πρωτοτυπία λύσεων με ασκήσεις οι οποίες απαιτούν από τους μαθητές την αναγκαιότητα επιπλέον κατασκευών.

Πράγματι, τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές που μετακινούνται σε λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, ξεπερνώντας την αντιληπτική και αλγοριθμική σκέψη, είναι σε θέση να πραγματοποιήσουν μερολογικές τροποποιήσεις (Duval, 1995, 2017) που τους επιτρέπουν να παρέχουν διαφορετικές γεωμετρικές αποδείξεις, ενισχύοντας την ευχέρεια και την ευελιξία στις λύσεις τους. Παρόλα αυτά, ο Duval (1995) έδειξε ότι ο μαθηματικός τρόπος ανάγνωσης των σχημάτων προκύπτει μόνο από το συντονισμό μεταξύ των ξεχωριστών διαδικασιών σύλληψης για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Μεγαλύτερη έμφαση πρέπει να δοθεί στην ενίσχυση της ικανότητας κατασκευής βοηθητικών γραμμών, καθώς η ικανότητα αυτή φάνηκε να ενισχύει ισχυρά και τις τρεις μεταβλητές της μαθηματικής δημιουργικότητας, αλλά και λόγο της πολυπλοκότητας και δυσκολίας του θέματος (Hsu & Silver, 2014), καθώς οι μισοί σχεδόν μαθητές (46%) δεν μπόρεσαν να λύσουν το πρόβλημα 2. Σε αυτή την κατεύθυνση οι Palatnik και Dreyfus (2018) στην ανάλυσή τους για τους λόγους που αναφέρουν οι μαθητές όταν φέρνουν βοηθητικές κατασκευές σε γεωμετρικές αποδείξεις ανέφεραν δύο ομάδες λόγων. Πρώτον, μαθητές οι οποίοι έφερναν βοηθητικές ευθείες βασιζόμενοι σε ορισμούς ή θεωρήματα, τροποποιώντας το αντίστοιχο σχήμα αναλόγως ως μέρος μιας γνωστής διαδικασίας, και δεύτερον μαθητές οι οποίοι έφερναν βοηθητικές ευθείες προσδοκώντας να λάβουν περισσότερες πληροφορίες από αυτή την τροποποιημένη κατάσταση. Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνοντας τους μαθητές και των δύο ομάδων να σχεδιάζουν διάφορες βοηθητικές γραμμές δημιουργώντας εναλλακτικές προσεγγίσεις θα ενισχύσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα και την ποιότητα του μαθήματος.

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΕΙΣ

Η παρούσα έρευνα χρηματοδοτείται από το ΕΣΠΑ μέσο του προγράμματος «Υποστήριξη ερευνητών με έμφαση στους νέους ερευνητές – κύκλος Β΄».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brunkalla, K. (2009). How to increase mathematical creativity – an experiment. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(1), 257-266.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education,* (p.142-157). Germany: Springer.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* London: Springer.

Gras R., Suzuki E., Guillet F., & Spagnolo F. (2008). *Statistical implicative analysis.* Germany: Springer.

Gridos, P., Gagatsis, A., Elia, I. & Deliyianni, E., (2019). Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions. *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 4*. Utrecht, Netherlands.

Herbst, P. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 283-312.

Hsu, H. Y., & Silver, E. A. (2014). Cognitive complexity of mathematics instructional tasks in a Taiwanese classroom: An examination of task sources. *Journal for research in Mathematics Education, 45,* 460-496.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Netherlands: Sense Publisher.

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics*. Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Palatnik, A., & Dreyfus, T. (2018). Students' reasons for introducing auxiliary lines in proving situations. *The Journal of Mathematical Behavior*, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.10.004.

Sheffield, L. (2009). Developing mathematical creativity—Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87-100). Rotterdam: Sense Publishers.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3*, 75–80.

ΕΠΙΔΟΣΗ ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΕΡΓΩΝ

Νικολάου Στυλιάνα[1], Γαγάτσης Αθανάσιος[2], Ηλία Ίλιάδα[3], Παναούρα Αρετή[4], Δεληγιάννη Ελένη[5]

Πανεπιστήμιο Κύπρου[1-3], Πανεπιστήμιο Frederick[4],

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου[5]

nicolaou.styliana@ucy.ac.cy, gagatsis@ucy.ac.cy, elia.iliada@ucy.ac.cy, pre.pm@frederick.ac.cy, deliyianni6@hotmail.com

Περίληψη: *Η παρούσα εργασία, η οποία διεξήχθη ανάμεσα σε ένα μεγάλο δείγμα φοιτητών πρώτου και τέταρτου έτους, στον τομέα των οικονομικών και της διοίκησης, στοχεύει στη διερεύνηση της επίδοσης και της δομής των απαντήσεων των φοιτητών σχετικά με τα έργα αναπαράστασης που αφορούν την έννοια της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης. Επιπλέον, επιδιώκει να αξιολογήσει την ικανότητα των φοιτητών να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις με ευελιξία. Τα αποτελέσματα, που προέρχονται από διαγράμματα συνεπαγωγικής στατιστικής ανάλυσης επιτρέπουν την ανάδειξη ενός συνεκτικού συστήματος μεταξύ των διαφορετικών έργων.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται σε διάφορους τομείς και κλάδους και έχουν ισχυρές σχέσεις με τις επιστήμες της Σχολής Οικονομικών και Διοίκησης. Οι νέες προκλήσεις στον σύγχρονο κόσμο απαιτούν από τους ερευνητές Οικονομικών και Διοίκησης να στραφούν στη χρήση ποσοτικών προσεγγίσεων για τη διαχείριση πολύπλοκων φαινομένων των οικονομικών επιστημών αφού αυτά βασίζονται κυρίως σε μαθηματικές και στατιστικές θεωρίες, μεθόδους και εργαλεία (Melnik, Makarov, & Belair, 2017).

Τα μαθηματικά και οι αναπαραστάσεις τους είναι σημαντικά για τις επιστήμες των Οικονομικών/Χρηματοοικονομικών, της Λογιστικής, και της Διοίκησης Επιχειρήσεων, δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται ως εργαλείο για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων, ουσιαστικής σημασίας για την πρόβλεψη βασικών οικονομικών δεικτών. Στην πραγματικότητα, οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν οικονομικές και μαθηματικές μεθόδους για την ανάλυση των οικονομικών διεργασιών και την πρόβλεψη πιθανών αποτελεσμάτων της οικονομικής δραστηριότητας (Mardanov & Khasanova, 2014). Γι' αυτό το λόγο τα μαθηματικά αποτελούν σημαντικό μέρος του προγράμματος σπουδών της Σχολής Οικονομικών και Διοίκησης. Ωστόσο, πολλές φορές, η επίδοση των φοιτητών δεν είναι τόσο ικανοποιητική όσο θα αναμενόταν.

Με την παρούσα μελέτη, χρησιμοποιώντας ένα δείγμα 373 φοιτητών πρώτου και τετάρτου έτους της Σχολής Οικονομιών και Διοίκησης του Πανεπιστημίου Κύπρου, εξετάζουμε τη δομή των απαντήσεων των φοιτητών, σε ένα σύνολο έργων αναπαράστασης σε σχέση με την κατανόησή τους στις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις, καθώς και την ικανότητά τους στη χρήση των αναπαραστάσεων αυτών με ευελιξία.

Ένας αριθμός ερευνητικών μελετών εξέτασε το ρόλο των διαφόρων αναπαραστάσεων σχετικά με την κατανόηση και την ερμηνεία των συναρτήσεων (Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A., 2007). Η έννοια της συνάρτησης επιδέχεται τη χρήση διάφορων αναπαραστάσεων και κάθε αναπαράσταση, προσφέρει πληροφορίες σχετικά με συγκεκριμένες πτυχές της έννοιας χωρίς να μας επιτρέπει να την περιγράψουμε πλήρως (Duval , 2002). Συχνά, οι φοιτητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες κατά την επεξεργασία των συναρτήσεων λόγω της ανάγκης συντονισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων, π.χ. εξισώσεις, γραφήματα, πίνακες (Schoenfeld, Smith, & Arcavi, 1993).

Η έρευνα επικεντρώνεται στις απαντήσεις των φοιτητών κατά τη διάρκεια των σπουδών τους στη Σχολή Οικονομικών και Διοίκησης (Επίπεδο Σπουδών: Πρώτο και Τέταρτο έτος) σε έργα αναπαράστασης που σχετίζονται με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και ειδικά των Εκθετικών και Λογαριθμικών συναρτήσεων. Η παρούσα έρευνα εξετάζει τρία ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια είναι η επίδοση των φοιτητών του πρώτου και του τέταρτου έτους που σπουδάζουν στη Σχολή Οικονομικών και Διοίκησης σε αναπαραστατικά έργα που σχετίζονται με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης;

2. Ποιο είναι το επίπεδο της κατανόησης, με βάση τις επεξηγήσεις που δίνουν οι φοιτητές για τις απαντήσεις που επιλέγουν στα διάφορα έργα;

3. Ποιες είναι οι σημαντικότερες συνεπαγωγικές σχέσεις μεταξύ της κατανόησης των φοιτητών και της επιτυχίας τους στα διάφορα έργα αναπαράστασης;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μελέτη διεξήχθη μεταξύ των προπτυχιακών φοιτητών που σπουδάζουν στη Σχολή Οικονομικών και Διοίκησης στο Πανεπιστήμιο Κύπρου, κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 2015-2016. Το δείγμα αποτελούσαν όλοι οι φοιτητές πρώτου και τέταρτου έτους (243 φοιτητές πρώτου έτους και 130 φοιτητές τέταρτου έτους) της εν λόγω Σχολής, οι οποίοι παρευρίσκονταν στις αίθουσες διδασκαλίας κατά τη διάρκεια των διαλέξεων όπου είχε παραχωρηθεί χρόνος από τους διδάσκοντες για τη χορήγηση του δοκιμίου και τη συμπλήρωσή του. Χορηγήθηκε στους φοιτητές ένα δοκίμιο το οποίο αποτελείτο από δέκα έργα και οι φοιτητές είχαν στη διάθεσή τους 25 λεπτά για την επίλυσή τους.

Τα έργα του δοκιμίου εντάσσονται σε τέσσερεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία διερευνά τον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, η δεύτερη εξετάζει τη μετάφραση από ένα είδος αναπαράστασης στην άλλο, η τρίτη ερευνά τις ικανότητες αναγνώρισης και η τέταρτη κατηγορία αφορά την επίλυση προβλήματος. Τα έργα αναγνώρισης και μετάφρασης, σε ορισμένες περιπτώσεις, θεωρούνται έργα της ίδιας κατηγορίας. Για όλα τα έργα αναγνώρισης και μετάφρασης, υπάρχουν αντίστοιχες μεταβλητές επεξήγησης του τρόπου με τον οποίο εργάστηκαν οι φοιτητές για την επίλυση των έργων, με σκοπό την αποσαφήνιση του τρόπου σκέψης των φοιτητών. Στο παράρτημα εμφανίζονται μερικά από τα αυτά τα έργα (Παράρτημα Α).

Για τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα στατιστικά πακέτα SPSS και CHIC.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σύγκριση επίδοσης των φοιτητών 1ου και 4ου έτους

Τα ποσοστά επιτυχίας των φοιτητών των δύο ετών δεν διαφέρουν σημαντικά.

1. Ορισμός:
   Έργο (Q1DEF): 1ο έτος 24.8% - 4ο έτος 13.6% και Παράδειγμα ορισμού (Q1DEFex):1ο έτος 96.9% - 4ο έτος 99.2%.
   Έργο (Q3a): 1ο έτος 26.3% - 4ο έτος 29.2%. και Παράδειγμα σχέσης που δεν παριστάνει συνάρτηση (Q3b): 1ο έτος 83.5% - 4ο έτος 81.0%.
   Έργο Q8 (αλγεβρικό παράδειγμα): 1ο έτος 39.0% - 4ο έτος 46.8%.

Παρατηρούμε ότι οι φοιτητές, ειδικά του 4ου έτους, δυσκολεύονται να διατυπώσουν τον ορισμό ενώ στη συντριπτική πλειοψηφία τους δίνουν ένα παράδειγμα συνάρτησης και έχουν καλύτερο σκορ στην εφαρμογή Q8.

2. Αναγνώριση και Επεξήγηση λύσης:
   Έργο Q4: 1ο έτος 42.4% - 4ο έτος 42.3% και Επεξήγηση έργου Q4exp: 1ο έτος 26.9% - 4ο έτος 27.3%.
   Έργο Q9: 1ο έτος 49.4% - 4ο έτος 49.2% και Επεξήγηση έργου Q9exp: 1ο έτος 31.3% - 4ο έτος 26.1%.

Στα έργα αναγνώρισης και επεξήγησής τους υπάρχει μια σχεδόν απόλυτη ισοδυναμία.

3. Μετάφραση και Επεξήγηση λύσης:

Έργο Q2: 1ο έτος 58.8% - 4ο έτος 58.4% και Επεξήγηση έργου Q2exp: 1ο έτος 60.8% - 4ο έτος 56.1%.
Έργο Q5: 1ο έτος 56.8% - 4ο έτος 48.1% και Επεξήγηση έργου Q5exp: 1ο έτος 19.8% - 4ο έτος 24.2%.
Έργο Q6: 1ο έτος 40.8% - 4ο έτος 50.8% και Επεξήγηση έργου Q6exp: 1ο έτος 54.1% - 4ο έτος 52.0%.
Έργο Q7: 1ο έτος 35.8% - 4ο έτος 39.5% και Επεξήγηση έργου Q7: 1ο έτος 37.1% - 4ο έτος 37.3%.

Στα έργα μετάφρασης υπάρχουν κάποιες μικρές διαφορές σε κάποιες περιπτώσεις υπέρ των φοιτητών του 1ου έτους, σε κάποιες άλλες υπέρ των φοιτητών του 4ου έτους.

4. Επίλυση Προβλήματος:
   Έργο Q10: 1ο έτος 34.5% - 4ο έτος 30.8.%

Τέλος και στην επίλυση προβλήματος η διαφορά επίδοσης των φοιτητών των δυο ετών είναι αμελητέα. .

Κυρίαρχη ομάδα στο ερωτηματολόγιο είναι η ομάδα των επεξηγήσεων, η οποία αντιστοιχεί σ ’αυτό που ονομάζουμε «λογική ή λεκτική» κατανόηση. Πράγματι τα επιχειρήματα των φοιτητών εκφράζονται με τη χρήση φυσικής γλώσσας σε συνδυασμό με στοιχεία συμβολικής γλώσσας και αποδεικνύουν την ύπαρξη κατανόησης απ’ τη μεριά των φοιτητών.

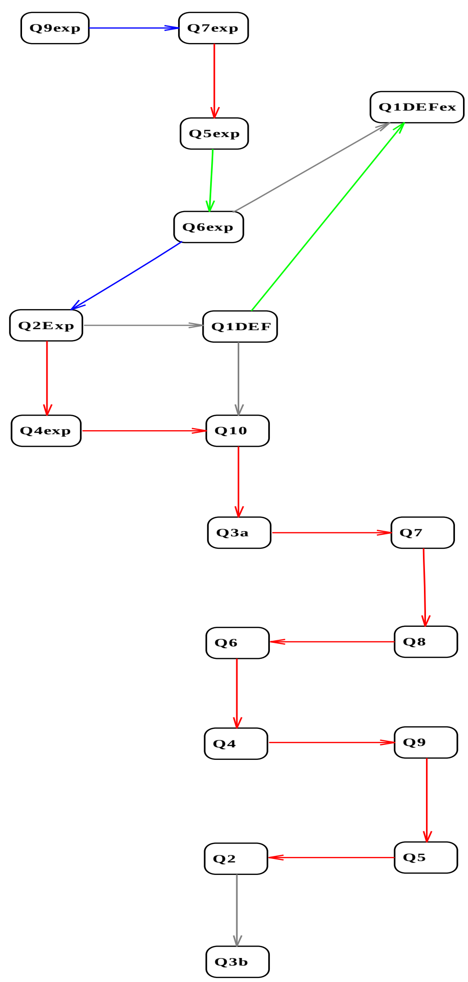
Βασική παρατήρηση λοιπόν, από την παραπάνω σύγκριση, είναι ότι η το επίπεδο της λογικής κατανόησης των φοιτητών του 4ο έτους δεν βελτιώθηκε σε σχέση με τους φοιτητές του 1ο έτους, παρόλα τα επιπλέον χρόνια των πανεπιστημιακών σπουδών τους.

Συνεπαγωγική ανάλυση της επίδοσης των φοιτητών

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα δείχνει τις συνεπαγωγικές σχέσεις μεταξύ των έργων με βάση την επιτυχία τους σε αυτά (Gras & Kuntz, 2008). Έτσι Α→Β σημαίνει ότι η επιτυχία σε ένα έργο Α συνεπάγεται την επιτυχία σε ένα άλλο έργο Β (Nicolaou, et al., in press).

Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών που αντιστοιχούν στις απαντήσεις των φοιτητών του πρώτου έτους στα έργα του δοκιμίου. Οι μεταβλητές που εμφανίζονται δημιουργούν ουσιαστικά μόνο μια αλυσίδα, σχεδόν γραμμική. Σ’ αυτήν τη συνεπαγωγική σχέση, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εμφανίζονται όλες οι ομάδες μεταβλητών που εμπλέκονται στην έρευνα.

Διάγραμμα 1. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των φοιτητών πρώτου έτους



Πιο συγκεκριμένα:

(α) Η ομάδα *«επεξήγησης»* σε σχέση με διάφορα έργα ((Q2exp, Q4exp, Q5exp, Q6exp, Q7exp, Q9exp)

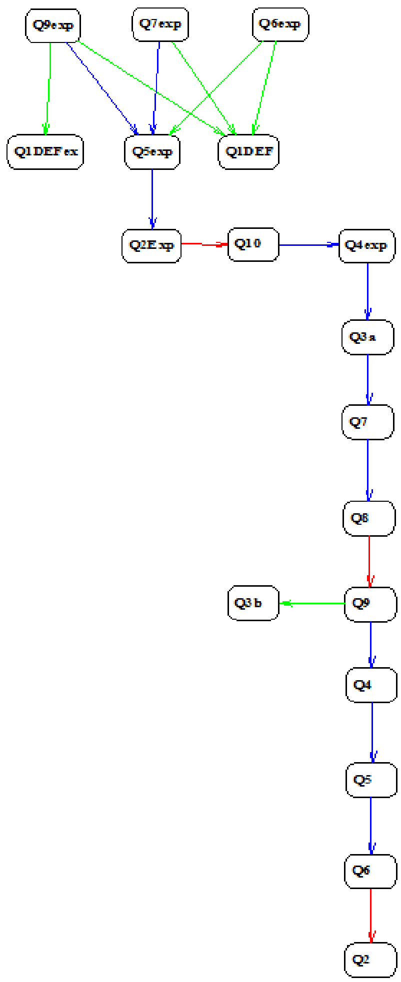
(β) Η ομάδα *«ορισμού»* σε διάφορες μορφές (Q1DEF, Q3a, Q8), και το παράδειγμα ορισμού,

(γ) Τα έργα *«αναγνώρισης»* αλγεβρικών εξισώσεων σε αντιστοιχία με μια γραφική αναπαράσταση (Q4, Q9) και τα έργα *«μετασχηματισμού»* εξισώσεων-γραφικών παραστάσεων (Q2, Q5, Q6).

(δ) Η *«επίλυση προβλήματος»* (Q10).

Παρατηρούμε ότι άτομα που πετυχαίνουν στα έργα των επεξηγήσεων, συνήθως, πετυχαίνουν και σε όλα τα άλλα είδη έργων, δηλαδή στα έργα ορισμού, αναγνώρισης ή μετασχηματισμού και στο έργο επίλυσης προβλήματος. Με άλλα λόγια η ανάπτυξη της «λογικής» κατανόησης είναι το κρίσιμο σημείο για μια διαδικασία μάθησης σε σχέση με τα μαθηματικά.

Διάγραμμα 2. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των φοιτητών τέταρτου έτους



Στο διάγραμμα 2 επαληθεύεται η ύπαρξη των ίδιων ομάδων μεταβλητών και των σχέσεων μεταξύ τους, όπως και στο συνεπαγωγικό διάγραμμα του πρώτου έτους. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Η ομάδα των πέντε έργων αναγνώρισης ή μετασχηματισμού μεταξύ αναπαραστάσεων (Αναγνώριση: Q4, Q9, Μετάφραση: Q2, Q5, Q6), εμφανίζεται στο τέλος της συνεπαγωγικής αλυσίδας, περίπου με τον ίδιο τρόπο που συμβαίνει και στο συνεπαγωγικό διάγραμμα των αποτελεσμάτων των φοιτητών πρώτου έτους. Η ομάδα αυτή αποτελείται σχετικά από τα ευκολότερα έργα.

(β) Η ομάδα επεξήγησης των έργων αναγνώρισης ή μετασχηματισμού αναπαραστάσεων εμφανίζεται στην κορυφή της ιεραρχικής αλυσίδας, όμως η σχέση μεταξύ των διαφόρων έργων δεν είναι γραμμική, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των φοιτητών του πρώτου έτους. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή δεν εμφανίζονται σχέσεις μεταξύ των τριών μεταβλητών επεξήγησης (Q9exp, Q7exp, Q6exp). Αυτό ίσως αποτελεί μια ένδειξη μεγαλύτερης ευελιξίας των φοιτητών του τέταρτου έτους στην επεξήγηση των συλλογισμών τους.

(γ) Η μεταβλητή επίλυσης προβλήματος (Q10) εμφανίζεται στο συνεπαγωγικό διάγραμμα των φοιτητών του τέταρτου έτους με τον ίδιο τρόπο όπως και στο αντίστοιχο διάγραμμα των φοιτητών του πρώτου έτους, δηλαδή αμέσως μετά τις μεταβλητές επεξήγησης.

(δ) Η ομάδα μεταβλητών ορισμού (Q1DEF, Q3a, Q8) εμφανίζονται σε άμεσες συνεπαγωγές από μεταβλητές επεξήγησης όπως συμβαίνει και στο διάγραμμα των φοιτητών του πρώτου έτους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σύμφωνα με τον Moosevian, οι επιστήμες των οικονομικών και της διοίκησης επιχειρήσεων περιλαμβάνουν ένα μεγάλο αριθμό και ποικιλία εννοιών, μεταβλητών και χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για την επεξήγηση διαφόρων οικονομικών φαινομένων (Moosevian, 2016).

Από τα αποτελέσματα της έρευνάς μας, φαίνεται ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση και τη χρήση αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Οι φοιτητές δεν κατανοούν τόσο την αξία όσο και τη χρήση της έννοιας. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, οι επιδόσεις τους γενικά παραμένουν στάσιμες, δεν φαίνεται να υπάρχει βελτίωση ενώ σε κάποια έργα, όπως ο ορισμός της συνάρτησης και το πρόβλημα, υπάρχει μείωση στην επίδοση. Η παρατήρηση αυτή βρίσκεται σε συμφωνία με τα συμπεράσματα των Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis (2007), οι οποίοι ισχυρίζονται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να δώσουν τον κατάλληλο ορισμό για την έννοια της συνάρτησης και να λύσουν έργα συναρτήσεων που συνεπάγονται μετατροπές μεταξύ διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης (Elia, Panaoura, Eracleous, & Gagatsis, 2007).

Σύμφωνα με τα συνεπαγωγικά διαγράμματα, για τους μαθητές του πρώτου έτους, η σχέση επιτυχίας μεταξύ των διαφόρων έργων επεξήγησης και των έργων που σχετίζονται με τις αναπαραστάσεις είναι σχεδόν γραμμική. Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι η επιτυχία στα έργα επεξήγησης θα μπορούσε να αποτελεί δείκτη πρόβλεψης της επιτυχίας στα υπόλοιπα έργα. Αυτό σημαίνει ότι η λογική κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων είναι μεγάλης σημασίας για την επιτυχία τους σε όλα τα έργα που σχετίζονται με τις αναπαραστάσεις. Από την άλλη, το συνεπαγωγικό διάγραμμα που βασίζεται στις απαντήσεις των φοιτητών του τέταρτου έτους δεν είναι γραμμικό, αλλά τα συμπεράσματα παραμένουν εξίσου σημαντικά. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν σχέσεις μεταξύ όλων των μεταβλητών επεξήγησης. Από την άλλη πλευρά όμως, οι φοιτητές, παρόλες τις επιπλέον γνώσεις και εμπειρίες στα μαθηματικά αλλά και στις οικονομικές επιστήμες γενικότερα, δεν παρουσιάζουν καλύτερη επίδοση στα έργα «επεξήγησης» όπως φαίνεται από τη σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας. Στα έργα αυτά όμως οι φοιτητές χρησιμοποιούν μαθηματικούς ορισμούς και ιδιότητες, συνήθως σε φυσική γλώσσα, για να στηρίξουν την απάντησή τους. Με άλλα λόγια η «λογική» κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων που παρεμβαίνουν και στην παρούσα έρευνα αλλά και στις σπουδές τους γενικότερα δεν έχει αναπτυχθεί σε ικανοποιητικό βαθμό. Η γένεση της λογικής κατανόησης, που αποτελεί έναν από τους τρεις άξονες του μαθηματικού χώρου εργασίας, δεν φαίνεται να έχει ολοκληρωθεί για όλους τους φοιτητές (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016) και αυτό αποτελεί κατά την άποψή μας ένα σημαντικό πρόβλημα για τις σπουδές των φοιτητών στη Σχολή Οικονομικών και Διοίκησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Duval , R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal fo Research in Mathematics, 1*(2), 1-16.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations Between Secondary Pupils' Conceptions About Functions and Problem Solving in Different Representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(3), 533-556.

Gras, R., & Kuntz, P. (2008). An overview of the Statistical Implicative Analysis (SIA) development. Στο *Statistical Implicative Analysis* (σσ. 11-40).

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling. *An introduction. ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721-737.

Mardanov, R., & Khasanova, A. (2014). Current issues of teaching mathematics in economic faculties of universities. *Phocedia-Social Behavior Sciences, 152*, 1062-1065.

Melnik, R., Makarov, R., & Belair, J. (2017). Modern Challenges in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science . (R. Melnik, R. Makarov , & J. Belair, Επιμ.) *Recent progress and modern challenges in applied mathematics, modeling and computation*, 3-16.

Moosavian, S. (2016). Teaching economics and providing visual "Big pictures". *Economics and Political Economy., 3*(1), 119-133.

Nicolaou, S. G., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Panaoura, A., Elia, I., & Anastasiadou, S. (2017). Tracing the beliefs and self-efficacy beliefs of undergraduate economic sciences students: The case of the representations of functios. *9th International Conference A.S.I. Statistical Implicative Analysis*, (σσ. 457-474). Belfort, France.

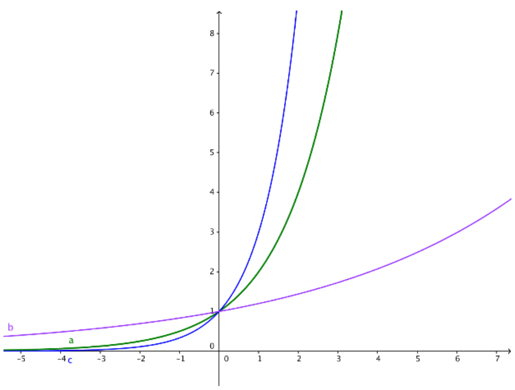
Nicolaou, S. G., Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Televantou, I. (in press). Economic Sciences Students' Understanding on Representation Tasks Concerning the Concept of Function. *10th International Conference A.S.I Statistical Implicative Analysis.* Belfort, France(in press).

Schoenfeld, A., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. (R. Glaser, Επιμ.) *Advances in instructional psychology*, 55-175.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

<u>Έργο Ορισμού:</u> (α) Τι ονομάζουμε συνάρτηση;(Q1DEF), (β) Να δώσεις ένα παράδειγμα συνάρτησης (Q1DEFex)

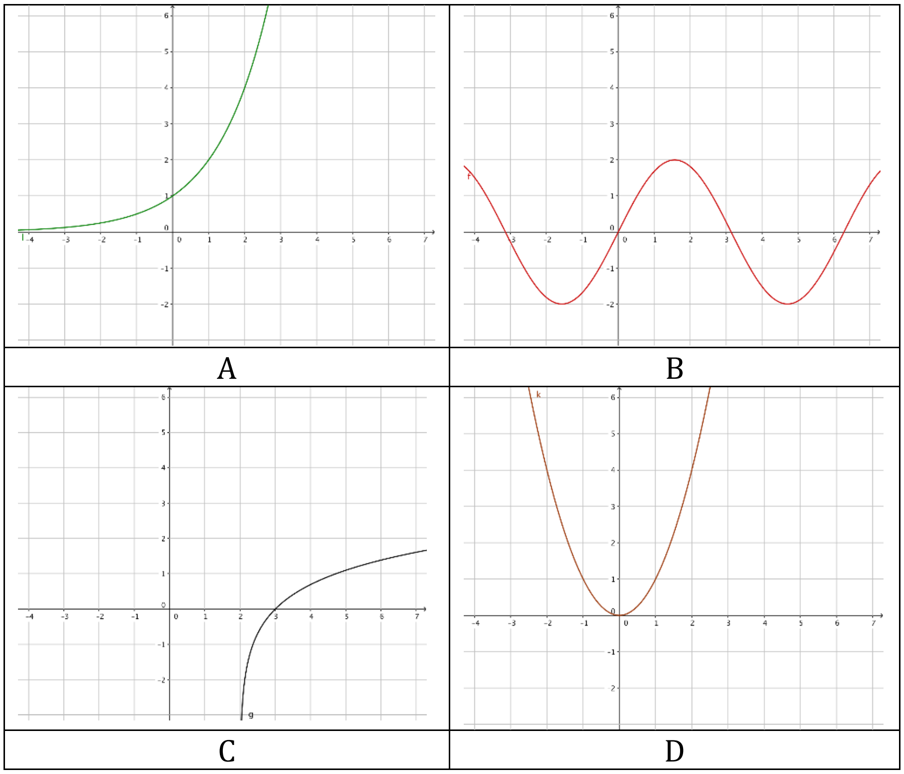
<u>Έργο Μετάφρασης:</u> Στην εικόνα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $g(x) = (1,2)^x$, $\square(x) = 3^x$. Να αντιστοιχίσεις σε κάθε γραφική παράσταση (a, b, c) τον κατάλληλο τύπο της συνάρτησης (Q2).



Να εξηγήσεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκες (Q2exp)

<u>Έργο Αναγνώρισης:</u> Ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί σε λογαριθμική συνάρτηση; Να βάλεις σε κύκλο την ορθή (Q4).

Να εξηγήσεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκες (Q4exp).



<u>Έργο Επίλυσης Προβλήματος</u>: Να υπολογίσεις το ποσό που συσσωρεύεται από κατάθεση €1,000 στο τέλος κάθε έτους σε ένα τραπεζικό λογαριασμό που αποδίδει σταθερό επιτόκιο 3% σε ετήσια βάση, στο τέλος του 5ου έτους στο λογαριασμό σου (Q10)

ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ - ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ιωάννης Παπαδόπουλος[1], Στεφανία Βλάχου[2], Ευστρατία Κιορίδου[3]

[1,2,3]Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

ypapadop@eled.auth.gr[1], stefaniavlaxou2@gmail.com[2], stratkio@gmail.com[3]

Στην παρούσα εργασία, μαθητές Δ' , Ε' και ΣΤ' Δημοτικού, που δεν έχουν διδαχθεί τους αρνητικούς αριθμούς, καλούνται να διαχειριστούν, με τη βοήθεια του περιβάλλοντος "Βήματα", αρνητικούς αριθμούς χωρίς να έχει προηγηθεί σχετική διδασκαλία. Τα ευρήματα αναδεικνύουν πώς το περιβάλλον, αφενός, οδηγεί τους μαθητές να επινοούν τον δικό τους συμβολισμό για τους αρνητικούς αριθμούς και να χρησιμοποιούν με συνέπεια τον συμβολισμό αυτό ως νόμιμο μαθηματικό εργαλείο. Αφετέρου, οι μαθητές φτάνουν σταδιακά στη γραπτή διατύπωση και στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων, που περιλαμβάνουν αρνητικούς αριθμούς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αρνητικοί αριθμοί στην ελληνική σχολική εκπαίδευση εισάγονται ουσιαστικά στην Α' Γυμνασίου (μια πρώτη πολύ επιδερμική παρουσίασή τους γίνεται τώρα στα νέα εγχειρίδια Μαθηματικών της Ε' Δημοτικού). Η κατάσταση είναι ανάλογη σε πολλές χώρες του εξωτερικού. Αυτό ίσως δικαιολογεί και το μειωμένο ερευνητικό ενδιαφέρον για τους αριθμούς αυτούς σε έρευνες στον ελληνικό χώρο που μελετούν μαθητές του Δημοτικού. Έχει όμως νόημα να σκεφτούμε το ενδεχόμενο μιας πιο πρώιμης εισαγωγής των αρνητικών αριθμών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση; Η Bofferding (2014), υποστηρίζει ότι μια καθυστερημένη εισαγωγή στους αρνητικούς αριθμούς είναι πιθανόν προβληματική μιας που δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές, που είναι υποχρεωμένοι να μάθουν από την αρχή τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σε ένα νέο σύνολο αριθμών. Αυτή η καθυστερημένη εισαγωγή σε συνδυασμό με τον ελάχιστο χρόνο που αφιερώνεται στη διδασκαλία των αρνητικών ακεραίων, οδηγεί τους μαθητές σε μια επιφανειακή απομνημόνευση κανόνων (Bofferding & Richardson, 2013) οι οποίοι οδηγούν μεν στη σωστή απάντηση, χωρίς όμως την κατανόηση των μαθητών ως προς το γιατί οι κανόνες αυτοί είναι λειτουργικοί.

Σε αυτό το πλαίσιο λοιπόν η παρούσα εργασία προσπαθεί να δώσει απάντηση στα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Κατά πόσο με τη χρήση ενός κατάλληλου περιβάλλοντος μπορούν οι μαθητές Δημοτικού να νοηματοδοτήσουν έναν συμβολισμό των αρνητικών αριθμών;

- Σε τι βαθμό μπορεί το ίδιο περιβάλλον να συμβάλλει στην ικανότητα υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων που περιέχουν και αρνητικούς αριθμούς;

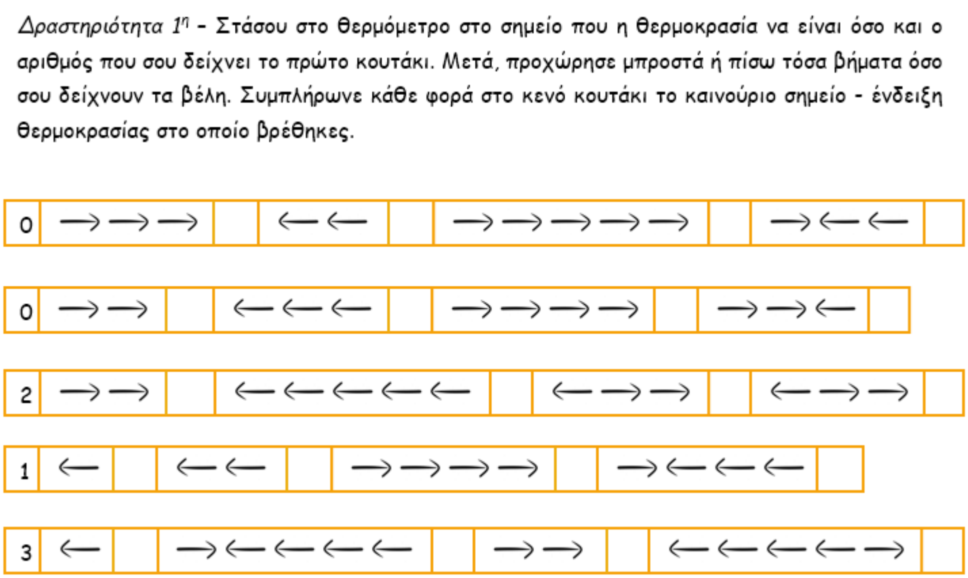
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Η σημασία της τυπικής σημειογραφίας των αρνητικών δύσκολα αποκτά νόημα για τους μαθητές. Η Bofferding (2014) αναφέρεις τρεις διαφορετικές σημασίες που αποδίδονται στο σύμβολο ‘-‘ των αρνητικών αριθμών. Η πρώτη (binary function) παραπέμπει στη λειτουργία του ως συμβόλου αφαίρεσης (π.χ. 9 – 3). Η δεύτερη (unary function) παραπέμπει στην έννοια του προσημασμένου αριθμού (π.χ. ο -7 είναι αρνητικός). Η τρίτη (symmetric function) ερμηνεύεται ως “παίρνοντας το αντίθετο ενός αριθμού” (π.χ. $-(4+2)=-(6)=-6$). Έτσι, υποστηρίζει ότι αν οι μαθητές εξακολουθήσουν να ερμηνεύουν το σύμβολο ‘-‘ ως εντολή αφαίρεσης (binary function), τότε είναι πιθανό να ερμηνεύουν τους αρνητικούς αριθμούς ως ατελή προβλήματα αφαίρεσης. Η αδυναμία των μαθητών να κάνουν τη σχετική διάκριση στους διαφορετικούς ρόλους που μπορεί να παίξει το ‘-‘ αποτελεί πηγή σημαντικών δυσκολιών. Παρατηρείται, για παράδειγμα, πολλές φορές, προκειμένου οι μαθητές να αποφύγουν τη διαχείριση μιας αρνητικής λύσης σε μια εξίσωση ή ένα πρόβλημα, να αλλάζουν την δομή της εξίσωσης ή την περιγραφή του προβλήματος προκειμένου να πάρουν θετική λύση (Vlassis, 2008). Τα ερευνητικά ευρήματα σχετικά με το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές του Δημοτικού τους αρνητικούς ακεραίους δεν συμφωνούν πάντοτε μεταξύ τους. Από τη μια έχουμε έρευνες όπως των Scwartz, Kohn και Resnick (1993) που δείχνουν ότι οι μικροί μαθητές διατάσσουν του αρνητικούς και τους θετικούς μαζί δεξιά του μηδενός (πχ 0, -1, -2, -3, 1, 2, 3). Από την άλλη, έρευνες όπως της Wilcox (2008) δείχνουν ότι κάποιοι μαθητές (στην περίπτωση αυτή η κόρη της που ήταν Α’ Δημοτικού) είναι σε θέση να αναγνωρίζουν αριθμούς ως μικρότερους του μηδενός και κάποιες φορές να επινοούν και κάποιο συμβολισμό. Η ποικιλία αυτή σύμφωνα με την Bofferding (2014) είναι ενδεικτική του ότι είναι η εμπειρία αυτή που παίζει σημαντικότερο ρόλο στην κατανόηση των αρνητικών παρά η ηλικία. Στο σχεδιασμό λοιπόν δραστηριοτήτων που θα προσδώσουν εμπειρία, οι Behrend και Mohs (2005/2006) υποστηρίζουν πως η χρήση της αριθμογραμμής στην τάξη για την συμπερίληψη των αρνητικών μπορεί να ενισχύσει το ενδιαφέρον των μαθητών γι αυτούς.

Γενικά φαίνεται ότι τα αναπαραστατικά μοντέλα έχουν καίρια σημασία για τη διδασκαλία και την εκμάθηση των αρνητικών αριθμών με κυρίαρχο το μοντέλο της αριθμογραμμής. Το National Council of Teachers of Mathematics (2000) συνιστά τη χρήση της αριθμογραμμής από τους μαθητές προκειμένου να μελετήσουν αριθμούς μικρότερους του μηδενός. Οι Stephan και Akyuz (2012) μελετώντας μαθητές της Α’ Γυμνασίου βρήκαν ότι η χρήση της κατακόρυφης κενής αριθμογραμμής διευκόλυνε πάρα πολύ τους μαθητές στο να διαχειρίζονται αριθμούς που «πάνε κάτω από το μηδέν». Τέλος, οι Schindler και Hußmann (2013), στην έρευνά τους με μαθητές της Στ' Δημοτικού, βρήκαν ότι κάποιοι μαθητές μπορούσαν να χειριστούν τις καταστάσεις που εμπλέκουν αρνητικούς αριθμούς πιο ικανοποιητικά, όταν αυτοί δίνονταν σε πλαίσια γνωστά από την καθημερινή τους ζωή (πχ θερμοκρασία).

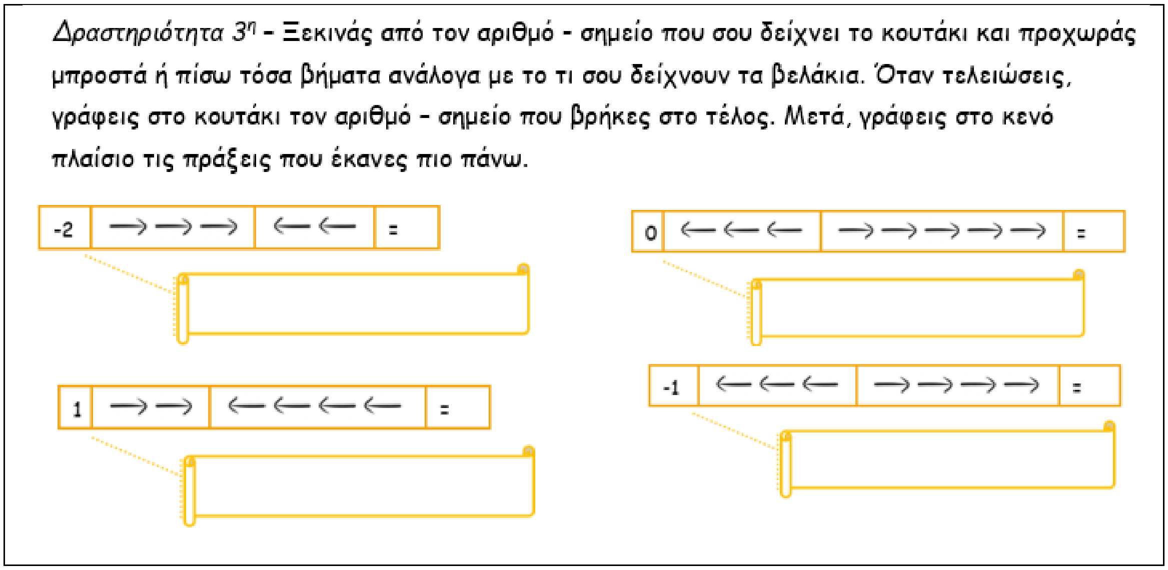
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην έρευνα συμμετείχαν 95 μαθητές της Δ', Ε' και Στ' Δημοτικού από δύο σχολεία της Θεσσαλονίκης σε ατομικές συνεδρίες διάρκειας 30 λεπτών (χωρίς να χρειαστεί να εξαντληθούν) από το Δεκέμβριο του 2018 μεχρι το Φεβρουάριο του 2019. Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά στο βιβλίο των Μαθηματικών της Ε' Δημοτικού κατά το τρέχον σχολικό έτος 2018-2019, με αποτέλεσμα την περίοδο της έρευνας οι αρνητικοί αριθμοί να μην αποτελούν μέρος της γνωστικής βάσης των μαθητών που συμμετείχαν.



Εικόνα 1: Πρώτη ομάδα δραστηριοτήτων

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται δυο από τις ομάδες δραστηριοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα. Η πρώτη ομάδα έδινε συγκεκριμένη αριθμητική αφετηρία στους μαθητές και ζητούσε να υπολογίσουν την αριθμητική ένδειξη της νέας θέσης μετά από συγκεκριμένο αριθμό βημάτων (Εικ. 1). Ως βοήθεια εδώ υπήρχε στο πάτωμα ένα θερμόμετρο/αριθμογραμμή με αριθμητικές ενδείξεις μόνο στο θετικό του μέρος. Όταν τα βήματα οδηγούσαν στο αρνητικό μέρος της αριθμογραμμής οι μαθητές καλούνταν να επινοήσουν μια ένδειξη για τη νέα θέση. Η επόμενη ομάδα δραστηριοτήτων δίνει την αριθμητική αφετηρία και ακολουθεί μια σειρά από ομάδες βελών. Οι μαθητές επιτελούν νοερά τους ενδιάμεσους υπολογισμούς προκειμένου να βρουν το τελικό αποτέλεσμα. Στο τέλος καλούνται να μεταβούν από την εικονική αναπαράσταση της παράστασης στην αριθμητική του γράφοντας στον κενό χώρο την πλήρη αριθμητική παράσταση με το αποτέλεσμά της (Εικ. 2).



Εικόνα 2: Δεύτερη ομάδα δραστηριοτήτων

Η ανάλυση των ευρημάτων έγινε σε δύο επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο, έγινε ποιοτική ανάλυση περιεχομένου (Mayring, 2014) με έμφαση στην κατηγοριοποίηση της σημειογραφίας για τους αρνητικούς που χρησιμοποίησαν οι μαθητές. Στο δεύτερο επίπεδο έγινε μια ποσοτική ανάλυση η οποία όμως περιορίζεται σε συχνότητες και ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων και στις δυο ομάδες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η πρώτη δραστηριότητα ζητούσε από τους μαθητές έναν βηματικό υπολογισμό πράξεων με ακεραίους, θετικούς και αρνητικούς. Οι μαθητές έπρεπε να κάνουν τον υπολογισμό είτε νοερά είτε κινούμενοι οι ίδιοι κατά μήκος της δοσμένης αριθμογραμμής και να γράψουν τα ενδιάμεσα και το τελικό αποτέλεσμα. Τα αριθμητικά δεδομένα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 και φαίνεται ότι περίπου το 79% των απαντήσεων που συγκεντρώθηκαν έφτασαν στο σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα.

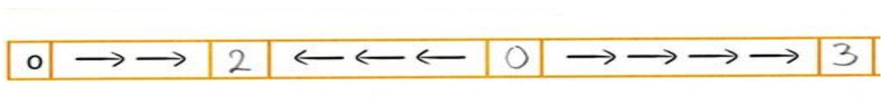
Σωστές απαντήσεις			Λανθασμένες απαντήσεις		
Δ τάξη	Ε τάξη	Στ τάξη	Δ τάξη	Ε τάξη	Στ τάξη
82	114	139	23	26	41
Σύνολο: 335			Σύνολο: 90		

Πίνακας 1: Αριθμητικά δεδομένα πρώτης ομάδας δραστηριοτήτων

Αυτό όμως που κυρίως έχει ενδιαφέρον σε αυτήν την ομάδα δραστηριοτήτων είναι πώς διαχειρίστηκαν οι μαθητές τις περιπτώσεις που ένας ενδιάμεσος υπολογισμός που προέκυπτε από μια ακολουθία βημάτων τους οδηγούσε στην περιοχή της αριθμογραμμής (κάτω από το μηδέν) στην οποία δεν υπήρχαν αριθμητικές ενδείξεις. Εδώ οι μαθητές προκειμένου να συνεχίσουν του υπόλοιπους υπολογισμούς επινοούσαν τη δική τους σημειογραφία προκειμένου να συμβολίσουν τη θέση στην οποία βρίσκονταν τη στιγμή εκείνη. Οι διαφορετικοί τρόποι συμβολισμού των αρνητικών αριθμών από τους μαθητές οργανώθηκαν σε δυο μεγάλες ομάδες. Η πρώτη (Α) έχει ως κεντρικό σημείο αναφορά το μηδέν. Η δεύτερη (Β) κάνει χρήση της παύλας.

Α1. Οι αρνητικοί ως μηδέν

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές κάθε φορά που ο ενδιάμεσος υπολογισμός τούς οδηγεί στην περιοχή των αρνητικών αντιμετωπίζουν την αδυναμία τους να συμβολίσουν την άγνωστη αριθμητική ένδειξη γράφοντας το μηδέν ως τον μικρότερο αριθμό που γνωρίζουν.

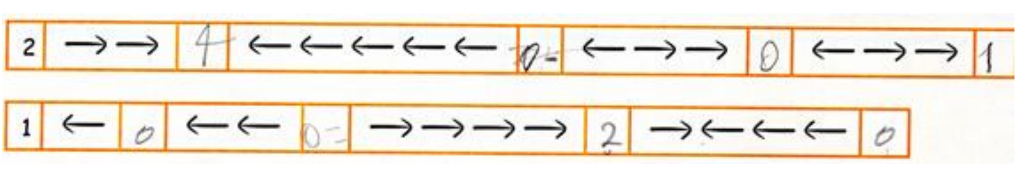


Εικόνα 3: Χρήση του μηδενός στη θέση των αρνητικών

Το παράδειγμα της Εικόνας 3 αναφέρεται στο βηματικό υπολογισμό της παράστασης $0 + 2 - 3 + 4$. Το πρώτο βήμα είναι εύκολο για το μαθητή. Στη συνέχεια όμως πρέπει να υπολογίσει το αποτέλεσμα της πράξης $2 - 3$ και να γράψει στο αντίστοιχο κουτάκι το αποτέλεσμα που στην περίπτωσή μας θα έπρεπε να είναι το -1. Αντ' αυτού ο μαθητής γράφει 0. Αν αυτό ήταν αποτέλεσμα λανθασμένου υπολογισμού τότε το επόμενο βήμα θα έπρεπε να είναι το $0 + 4 = 4$. Όμως, παραδόξως, ο μαθητής δίνει ως τελικό αποτέλεσμα το 3 το οποίο είναι και το σωστό αποτέλεσμα της πράξης -1 + 4.

Α2. Οι αρνητικοί ως μηδέν με πρόσημο

Άλλοι μαθητές αποφασίζουν να συμβολίσουν τους αριθμούς της περιοχής κάτω από το μηδέν γράφοντας και πάλι το μικρότερο αριθμό που γνωρίζουν, δηλαδή το μηδέν, συνοδευόμενο όμως από τόσες παύλες όσες είναι και οι θέσεις κάτω από το μηδέν που βρίσκονται κάθε φορά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η απάντηση του μαθητή στην Εικόνα 4.

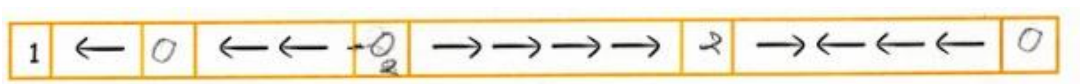


Εικόνα 4: Χρήση του μηδενός μαζί με παύλες στη θέση των αρνητικών

Στο πρώτο παράδειγμα ο μαθητής καλείται να υπολογίσει την παράσταση $2+2-5-1+2-1+2$. Στο πρώτο βήμα υπολογίζει σωστά το 2+2=4. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσει το 4-5. Αυτό τον οδηγεί μια θέση κάτω από το μηδέν. Αποφασίζει να το γράψει ως ‘0-‘. Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσει το ‘0-‘-1+2. Σωστά ο μαθητής φτάνει στο μηδέν. Και επίσης σωστά υπολογίζει το τελευταίο μέρος της παράστασης, $0-1+2=1$. Στο επόμενο παράδειγμα η παράσταση που πρέπει να υπολογιστεί είναι $1-1-2+4+1-3$. Εδώ φαίνεται ο μαθητής να εμπλουτίζει τον τρόπο σημειογραφίας που ήδη επινόησε. Ο μαθητής υπολογίζει αρχικά το $1-1=0$. Η επόμενη πράξη που καλείται να κάνει είναι η $0-2=-2$. Για να δηλώσει λοιπόν το νέο αποτέλεσμα γράφει το μηδέν με δυο παύλες στα δεξιά, ‘0=’, για να δηλώσει ακριβώς το γεγονός ότι βρίσκεται δυο θέσεις κάτω από το μηδέν. Αυτό το λαμβάνει υπόψιν στον επόμενο υπολογισμό όπου το ‘0=’+4 αναφέρεται στο -2+4 και σωστά το υπολογίζει ως 2. Για να φτάσει έτσι στο σωστό τελικό αποτέλεσμα $2+1-3=0$.

Α3. Οι αρνητικοί ως μηδέν με παύλα και δείκτη

Στην περίπτωση αυτή η σημειογραφία έχει μια πιο αυξημένη ίσως πολυπλοκότητα μιας που συνδυάζει τρία στοιχεία. Γίνεται χρήση του μηδενός μιας που είναι και πάλι ο μικρότερος γνωστός αριθμός, στη συνέχεια γίνεται χρήση της παύλας για να δηλώσει ότι είμαστε στην περιοχή κάτω από το μηδέν και στη συνέχεια γίνεται χρήση ενός αριθμητικού δείκτη για να δηλώσει πόσες θέσεις κάτω από το μηδέν βρισκόμαστε. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της Εικόνας 5.

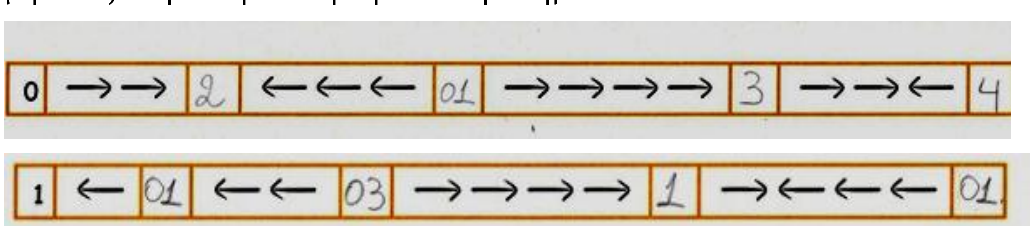


Εικόνα 5: Χρήση του μηδενός μαζί με παύλα και αριθμητικό δείκτη

Στο δεύτερο βήμα απαιτείται ο υπολογισμός 0-2. Μιας και το -2 δεν ανήκει στη γνωστική βάση της συγκεκριμένης μαθήτριας επινοεί τον πιο πάνω τρόπο συμβολισμού τον οποίο χρησιμοποιεί σωστά στη συνέχεια προκειμένου να υπολογίσει το επόμενο βήμα, $-2+4=2$.

Α4. Το μηδέν στη θέση του αρνητικού προσήμου

Η τελευταία περίπτωση στην ομάδα αυτή έχει ως κεντρικό στοιχείο τη χρήση του μηδενός στη θέση του αρνητικού προσήμου.

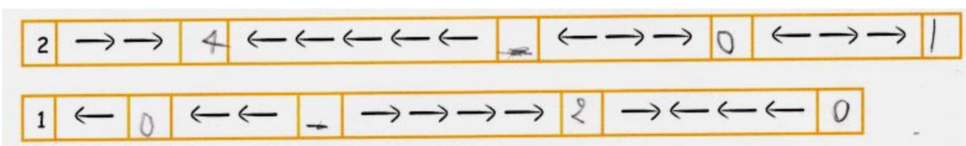


Εικόνα 6: Χρήση του μηδενός στη θέση του αρνητικού προσήμου

Στο πρώτο παράδειγμα της Εικόνας 6 ο δεύτερος βηματικός υπολογισμός είναι το $2-3$ που οδηγεί στο -1. Ο μαθητής τον συμβολίζει με 01 για να δηλώσει ότι βρισκόμαστε μια θέση κάτω από το μηδέν. Στη συνέχεια σωστά υπολογίζει το $-1+4=3$ και το $3+2-1=4$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το δεύτερο παράδειγμα που αν και ξεκινά με λάθος παραδοχή (ο μαθητής αντί για το δοσμένο 1 ξεκινά τους υπολογισμούς με δεδομένη αρχική τιμή το 0) εν τούτοις δείχνει πως εμπλουτίζει την σημειογραφία του. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι ξεκινά με το μηδέν τότε η πρώτη πράξη θα ήταν το $0-1=-1$ που το συμβολίζει ως 01, δηλαδή μια θέση κάτω από το μηδέν. Η επόμενη πράξη είναι η $-1-2=-3$ που με βάση τη δική του σημειογραφία ο μαθητής συμβολίζει σωστά ως 03. Ακολουθεί σωστά η $-3+4=1$ και τέλος η $1+1-3=-1$ που δηλώνεται πάλι ως 01.

Β. Οι αρνητικοί ως παύλα

Αυτός ο τρόπος συμβολισμού είναι ενδεικτικός της πλήρους αδυναμίας των μαθητών να επινοήσουν έναν λειτουργικό τρόπο συμβολισμού των αρνητικών, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι είχαν δυσκολία στην επιτέλεση των ενδιάμεσων υπολογισμών. Έτσι κάθε φορά που το μερικό αποτέλεσμα προκύπτει αρνητικός αριθμός οι μαθητές τον συμβολίζουν με μια παύλα (όποιος κι αν είναι αυτός).



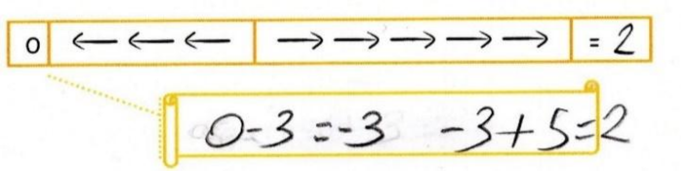
Εικόνα 7. Χρήση της παύλας στη θέση των αρνητικών αριθμών

Η μαθήτρια αυτή συμβολίζει στο πρώτο παράδειγμα το αποτέλεσμα $4-5=-1$ ως '-'. Η επόμενη πράξη που πρέπει να γίνει είναι η $-1-1+2$ την οποία πολύ σωστά η μαθήτρια υπολογίζει ως 0. Τέλος σωστά υπολογίζει και το τελικό αποτέλεσμα $0-1+2=1$. Στο δεύτερο παράδειγμα η παύλα παίρνει τη θέση του -2 στην πράξη $0-2$. Αυτό όμως δεν εμποδίζει τη μαθήτρια να συνεχίσει σωστά με την επόμενη πράξη $-2+4=2$ και να φτάσει έτσι στο τελικό σωστό αποτέλεσμα $2+1-3=0$.

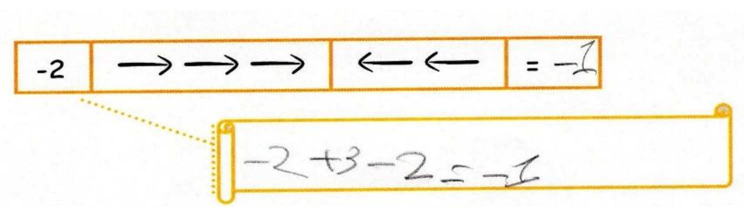
Από τη στιγμή που οι μαθητές φάνηκε ότι είναι σε θέση να επινοούν μια σημειογραφία για τους αρνητικούς που είχε απόλυτο νόημα για τους ίδιους και έτσι μπορούσαν να την χρησιμοποιούν με συνέπεια στους υπολογισμούς τους, τούς γνωστοποιήθηκε ο τυπικός συμβολισμός των αρνητικών. Πιο συγκεκριμένα, αυτό έγινε στο διάστημα που μεσολάβησε ανάμεσα στις δυο ομάδες που παρουσιάζονται εδώ και κατά τη διάρκεια μιας ομάδας δραστηριοτήτων που ζητούσε και πάλι υπολογισμό παραστάσεων χωρίς να ζητείται γραπτά η αριθμητική παράσταση. Η παρουσίαση του συμβόλου '-' προτάθηκε ως ένας τρόπος για να αποφύγουμε τη μεγάλη ποικιλία διαφορετικών συμβολισμών για το ίδιο φαινόμενο. Έτσι δικαιολογείται το γεγονός ότι στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων της ομάδας που ακολουθεί αυτό ήδη χρησιμοποιείται από τους μαθητές. Η ομάδα έχει δυο χαρακτηριστικά. Πρώτον, δεν υπάρχουν ενδιάμεσοι υπολογισμοί. Το περιβάλλον «Βήματα» χρησιμοποιείται για να παρουσιάσει ενιαία μια αριθμητική παράσταση και οι μαθητές ζητείται να βρουν το εξαγόμενο αποτέλεσμα. Δεύτερο, οι μαθητές καλούνται να μεταβούν από την εικονική αναπαράσταση των βημάτων στην αριθμητική. Ο Πίνακας 2 δείχνει τα αριθμητικά δεδομένα σχετικά με το πλήθος σωστών και λανθασμένων απαντήσεων που συγκεντρώθηκαν. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι περίπου το 65% των απαντήσεων ήταν σωστές που σημαίνει ότι οι μαθητές όχι μόνο έκαναν υπολογισμούς με αρνητικούς αλλά ήταν και σε θέση να γράφουν τις αντίστοιχες αριθμητικές παραστάσεις. Ο τρόπος που επέλεξαν να τις γράψουν απέδιδε και τον τρόπο των υπολογισμών τους. Κάποιοι δούλεψαν τμηματικά (Εικόνα 8) τις παραστάσεις τους και κάποιοι ενιαία (Εικόνα 9).

Σωστές απαντήσεις			Λανθασμένες απαντήσεις		
Δ τάξη	Ε τάξη	Στ τάξη	Δ τάξη	Ε τάξη	Στ τάξη
78	88	112	27	52	68
Σύνολο: 278			Σύνολο: 147		

Πίνακας 2: Σωστές και λανθασμένες απαντήσεις δεύτερης ομάδας



Εικόνα 8. Τμηματικός υπολογισμός παραστάσεων



Εικόνα 9. Ενιαίος υπολογισμός παραστάσεων

Από όσα έχουν προηγηθεί φαίνεται ότι αρχικά οι μαθητές είναι σε θέση να επινοούν τον δικό τους συμβολισμό και να τον νομιμοποιούν, καθώς τον χρησιμοποιούν κατά τους υπολογισμούς τους. Επιπλέον, ακόμη και οι μικρότεροι μαθητές (Δ’ Δημοτικού) είναι σε θέση να μεταβούν από τη μια μορφή αναπαράστασης (Βήματα) στην άλλη (αριθμητική παράσταση) και να υπολογίζουν σωστά το αποτέλεσμά της. Έχει σημασία ότι σε αντίθεση με ότι συμβαίνει συχνά με μεγαλύτερους μαθητές δεν χρειάστηκε εδώ να χαθεί χρόνος στην επιφανειακή απομνημόνευση οποιωνδήποτε κανόνων, αλλά οι μαθητές έγραφαν αυτό που κατανοούσαν πραγματικά ως πράξη, εφόσον το είχαν υπολογίσει προηγουμένως με έναν πιο διαδραστικό τρόπο (κίνηση με βήματα). Δεδομένου ότι οι μαθητές δεν είχαν δεχτεί κάποια σχετική διδασκαλία της έννοιας φαίνεται ότι το ίδιο το περιβάλλον "Βήματα" υποστηρίζει εννοιολογικά τους αρνητικούς αριθμούς, όταν αυτοί εμπλέκονται στον υπολογισμό του αποτελέσματος μιας αριθμητικής παράστασης. Οι αριθμοί αναπαριστώνται εδώ ως βήματα (δεξιά για τους θετικούς και αριστερά για τους αρνητικούς αριθμούς). Κάθε βέλος σηματοδοτεί την αντίστοιχη μετακίνηση αριστερά ή δεξιά. Με τον τρόπο αυτό ο υπολογισμός στις αριθμητικές παραστάσεις νοηματοδοτείται πλήρως από τους μαθητές αφού το περιβάλλον υποστηρίζει τη λειτουργία του αρνητικού αριθμού ως μετακίνηση κατά μήκος της αριθμογραμμής προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση του περιβάλλοντος «Βήματα» φαίνεται ότι διευκόλυνε μαθητές των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου στο να νοηματοδοτήσουν τόσο τη χρήση όσο και τη σημειογραφία των αρνητικών αριθμών κάτι που παραδοσιακά θεωρείται απαιτητικό ακόμη και για τους μεγαλύτερους μαθητές του Γυμνασίου. Ταυτόχρονα οι μαθητές έδειξαν μια άνεση στη μετακίνησή τους από την εικονική αναπαράσταση προς την αριθμητική για παραστάσεις που εμπλέκανε υπολογισμούς με θετικούς και αρνητικούς ακεραίους. Τα ευρήματα αυτά θεωρούμε ότι συμβάλλουν στη συζήτηση του κατά πόσο έχει νόημα μια μετακίνηση της διδασκαλίας των αρνητικών σε μικρότερες ηλικίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Behrend, J. L., & Mohs, L. C. (2005/2006). From simple questions to powerful connections: A two-year conversation about negative numbers. *Teaching Children Mathematics, 12*(5), 260–264

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(2), 194-245.

Bofferding, L., & Richardson, S. E. (2013). Investigating integer addition and subtraction: A task analysis. In M. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 111-118). Chicago, IL.

Mayring, P. (2014). *Qualitative Content Analysis: Theoretical Foundation, Basic Procedures and Software Solution*. Klagenfurt: Beltz

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Schindler, M., & Hußmann, S. (2013). About Student's individual concepts of negative integer: in terms of the order relation. In Ubuz, B., Hacer, C., & Mariotti,

M. A. (Eds.), *Proceedings of the CERME-8,* (pp. 373–382). Ankara, Turkey: ERME and METU

Schwarz, B. B., Kohn, A. S., & Resnick, L. B. (1993). Positives about negatives: A case study of an intermediate model for signed numbers. *Journal of the Learning Sciences, 3*(1), 37–92.

Stephan, M., & Akyuz, D. (2012). A proposed instructional theory for integer addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 428–464.

Vlassis, J. (2008): The Role of Mathematical Symbols in the Development of Number Conceptualization: The Case of the Minus Sign. *Philosophical Psychology, 21*(4), 555-570.

Wilcox, V. (2008). Questioning zero and negative numbers. *Teaching Children Mathematics, 15*(4), 202–206.

ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ SCRATCH JR ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Δρ Ειρήνη Κλεάνθους

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

kleanthous.i@cyearn.pi.ac.cy

Η παρούσα μελέτη περίπτωσης αφορά μια διδακτική παρέμβαση που έγινε με παιδιά (N=14) Β' τάξης δημοτικού (7-8 χρονών) σε ένα σχολείο της υπαίθρου με την ενσωμάτωση της εφαρμογής Scratch Jr στη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών. Η συλλογή δεδομένων έγινε με παρατήρηση, μαγνητοσκόπηση του μαθήματος και σύντομες ατομικές συνεντεύξεις με τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε μαγνητοσκόπηση της οθόνης (screen recording) όσο οι μαθητές/μαθήτριες εργάζονταν ομαδικά στις οθόνες αφής. Στη συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης, οι μαθητές/μαθήτριες φάνηκε να έχουν αυξημένα κίνητρα για μάθηση με τη χρήση του Scratch Jr και εμβάθυναν στις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου τετραγώνου και ορθογωνίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρήση των οθονών αφής στη διδακτική πράξη έχει αρχίσει να αυξάνεται ραγδαία τα τελευταία χρόνια σε παγκόσμιο επίπεδο. Στην εποχή της πληροφορίας η γνώση είναι εύκολα προσβάσιμη και διαφαίνεται η ανάγκη για δεξιότητες που θα δίνουν δυνατότητες για ουσιαστική χρήση των τεχνολογιών καθιστώντας τους/τις μαθητές/μαθήτριες ως χρήστες και όχι ως απλούς καταναλωτές. Φυσικά οι σημερινοί/ες μαθητές/μαθήτριες για να μπορέσουν να αποκτήσουν αυτή την ικανότητα θα πρέπει πρωτίστως να αποκτήσουν ευχέρεια στον προγραμματισμό (Resnick et al., 2009).

Ο προγραμματισμός τα τελευταία χρόνια απλοποιείται και διαδίδεται στην εκπαιδευτική διαδικασία, απομυθοποιώντας την άποψη πως είναι για λίγους και αποκλειστικός αυτοσκοπός του είναι η εκπαίδευση επαγγελματιών προγραμματιστών. Μέσω του προγραμματισμού προωθείται η ανάπτυξη και καλλιέργεια μιας κουλτούρας τεχνολογικού αλφαβητισμού που θα ωθήσει τους/τις μαθητές/μαθήτριες να αποκτήσουν και να αναπτύξουν δεξιότητες υψηλού επιπέδου για τη διδασκαλία βασικών εννοιών που βρίσκουν εφαρμογή στα μαθηματικά, τη φυσική και τη λογική, καθώς και τη μεταφορά δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων σε άλλα γνωστικά αντικείμενα (Κορδάκη & Ψώμος, 2012). Ο προγραμματισμός, λοιπόν, εκτός από καθαρά γνωστικό αντικείμενο, αποτελεί και εκπαιδευτικό εργαλείο με σημαντικά οφέλη για τους/τις μαθητές/μαθήτριες (Papert, 1980).

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμα περιβάλλοντα οπτικού προγραμματισμού εστιάζοντας σε μαθητές/μαθήτριες, κυρίως 8 χρόνων και άνω, όπως είναι το Scratch (Resnick et al., 2009). Αυτό προκάλεσε τόσο το ενδιαφέρον όσο και την ανάγκη για τη δημιουργία μιας εφαρμογής που θα απευθύνεται σε μικρότερες ηλικίες (Resnick, 2011). Έτσι έγινε ένας επαναπροσδιορισμός του πρωταρχικού προγράμματος Scratch με ακόμα πιο φιλικό περιβάλλον και δημιουργήθηκε το Scratch Jr, σχεδιασμένο και προσαρμοσμένο για τις ανάγκες παιδιών ηλικίας 4-8 χρονών.

Το Scratch, όπως και το Scratch Jr, αποτελούν εργαλεία οπτικού προγραμματισμού (Portelance, 2015· Resnick et al., 2009· Resnick, 2011), όπου εξ' ορισμού καταρρίπτεται το κείμενο με όλα τα τεχνικά ζητήματα σύνταξης που εξυπακούονται (Χαρίσης & Μικρόπουλος, 2008) και αντικαθίστανται με γραφικά, κίνηση και εικόνες. Οι κατασκευαστές της Scratch (MIT Media Lab, 2002) έχουν υποστηρίξει ότι τα παιδιά με τη βοήθεια του Scratch αναπτύσσουν μαθησιακές δεξιότητες του 21ου αιώνα. Το θεωρητικό παιδαγωγικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζονται είναι η πρακτική της μάθησης μέσω σχεδιασμού (learning by design) η οποία έχει τις ρίζες της στην κονστρουκτιβιστική θεωρία μάθησης του Piaget, καθώς και στην εκπαιδευτική προσέγγιση του κονστρουκτιβισμού που αναπτύχθηκε από τον Seymour Papert (Papert & Harel, 1991). Το Scratch ξεκίνησε να χρησιμοποιείται ευρέως τα τελευταία χρόνια στην εκπαιδευτική κοινότητα (Κορδάκη & Ψώμος, 2012), αλλά το Scratch Jr μετρά πολύ μικρότερο αριθμό χρήσεων.

Το Scratch Jr όντας δυναμικό περιβάλλον, επιτρέπει αλλαγές του κώδικα ακόμη και κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης των προγραμμάτων (Νικολός & Κόμης, 2010). Τα έργα (projects) που αναπτύσσονται μέσω του Scratch Jr, χαρακτηρίζονται από πλούσια πολυμεσική φύση και ποικίλουν ως προς τον χαρακτήρα τους, από απλές παρουσιάσεις και ιστορίες κινουμένων σχεδίων, μέχρι πλήρως αλληλεπιδραστικά περιβάλλοντα (Maloney et al., 2008). Αν και το περιβάλλον απευθύνεται κυρίως σε παιδιά 4 με 8 ετών, για τη διδασκαλία προγραμματισμού και συναφών εννοιών, μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί και από παιδιά πιο μεγάλης ηλικίας, μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων διδακτικών δραστηριοτήτων (Μπράτιτσης κ.ά., 2012).

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να συγκρίνει τις αντιλήψεις των μαθητών/μαθητριών για τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών σε δύο διαφορετικά πλαίσια, με τη χρήση προγραμματισμού και μέσω του σχολικού εγχειριδίου. Για τον σκοπό αυτό σχεδιάστηκε μία διδακτική παρέμβαση για τη διδασκαλία του εμβαδού και της περιμέτρου τετραγώνου και ορθογωνίου με τη χρήση της προγραμματιστικής εφαρμογής Scratch Jr με οθόνες αφής. Η παρέμβαση έγινε στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών. Στη συνέχεια περιγράφεται η ερευνητική μεθοδολογία και αναλύονται τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση έγινε με παιδιά (Ν=14) Β' τάξης δημοτικού (7-8 χρονών) σε ένα δημοτικό σχολείο της υπαίθρου. Στους/στις μαθητές/μαθήτριες δόθηκε αρχικά ένα ερωτηματολόγιο για συλλογή δημογραφικών πληροφοριών και για να διερευνηθεί αν ήταν κάτοχοι οθονών αφής και τους λόγους που τις χρησιμοποιούσαν στον ελεύθερό τους χρόνο. Η συλλογή δεδομένων έγινε με παρατήρηση, μαγνητοσκόπηση του μαθήματος και σύντομες ατομικές συνεντεύξεις με τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε μαγνητοσκόπηση της οθόνης (screen recording) καθώς οι μαθητές/μαθήτριες δούλευαν με τις οθόνες αφής. Το μάθημα διεξήχθη με τη χρήση 7 φορητών οθονών αφής ενώ οι μαθητές/μαθήτριες εργάστηκαν συνεργατικά σε ζευγάρια.

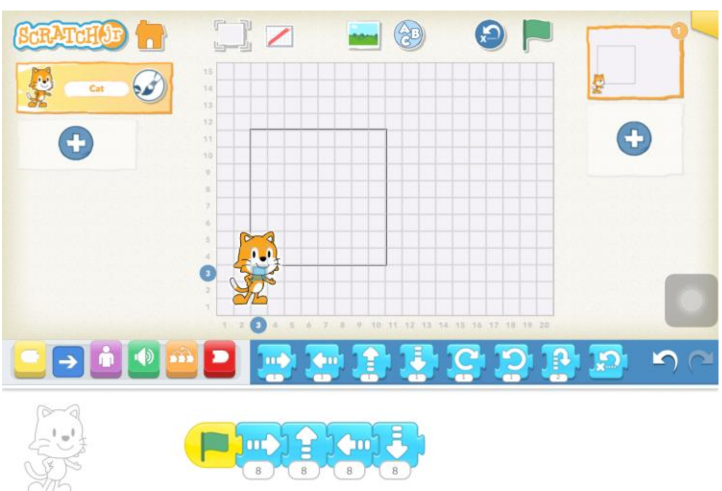
Η διδακτική παρέμβαση διήρκησε τρία ογδοντάλεπτα μαθήματα. Στο πρώτο ογδοντάλεπτο μάθημα παρουσιάστηκαν οι βασικές λειτουργίες του Scratch Jr στους/στις μαθητές/μαθήτριες και τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο. Οι μαθητές/μαθήτριες κατάφεραν με επιτυχία να κατασκευάσουν τα σχήματα, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων. Στα επόμενα δύο ογδοντάλεπτα μαθήματα έγινε χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού μέσω του Scratch Jr στην οθόνη αφής και αντίστοιχα στο σχολικό εγχειρίδιο για σκοπούς σύγκρισης.

Τα παιδιά έπρεπε να δώσουν οδηγίες μέσω του Scratch Jr ώστε να φτιάξουν ορθογώνια και τετράγωνα με δοσμένο εμβαδόν. Ακολούθως, τους ζητήθηκε να φτιάξουν τα ίδια ορθογώνια που έφτιαξαν στο Scratch Jr με το μολύβι τους σε τετραγωνισμένο χαρτί στο σχολικό εγχειρίδιο. Στο τέλος του μαθήματος λήφθηκαν σύντομες ατομικές συνεντεύξεις από τα παιδιά, οι οποίες απομαγνητοφωνήθηκαν. Τα παιδιά εξέφρασαν τις απόψεις τους για το μάθημα γεωμετρίας με τη χρήση του Scratch Jr και σύγκριναν τις δύο μεθόδους διδασκαλίας ως προς την ευχρηστία τους για την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

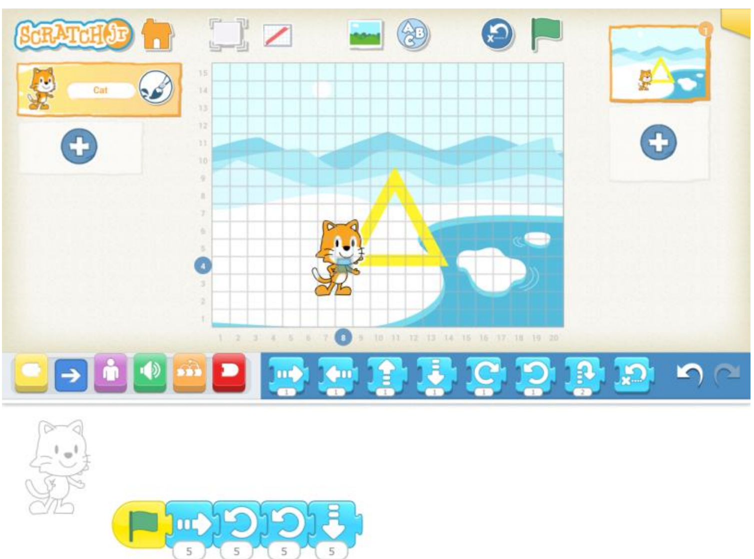
Στο αρχικό ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν οι μαθητές/μαθήτριες, 12 από τους/τις 14 (85.71%) ανέφεραν ότι είναι κάτοχοι οθονών αφής και ότι τις χρησιμοποιούν κυρίως για παιχνίδια στον ελεύθερό τους χρόνο. Οι μαθητές/μαθήτριες ανέφεραν ότι χρησιμοποιούν τις οθόνες αφής καθημερινά (46.15%), κάποιες φορές τη βδομάδα (30.77%), κάποιες φορές τον μήνα (15.38%) ή καθόλου (7.69%). Επίσης ο χρόνος που ξοδεύουν στη χρήση των οθονών αφής ήταν καθόλου (7.69%), 1-2 ώρες (69.23%) ή περισσότερες από δύο ώρες (23.07%). Είναι αξιοσημείωτο ότι 61.53% των μαθητών/τριών ανέφεραν ότι αφιερώνουν περισσότερη ώρα στην οθόνη αφής παρά στην κατ' οίκον εργασία τους. Παρόλο που οι περισσότεροι/ες μαθητές/μαθήτριες ανάφεραν ότι χρησιμοποιούσαν τις οθόνες αφής για παιχνίδια, μόνο 35.71% ανέφερε ότι παίζει εκπαιδευτικά παιχνίδια και μόνο 28.57% εκπαιδευτικά παιχνίδια μαθηματικού περιεχομένου. Αυτό καταδεικνύει ότι τα μαθηματικά παιχνίδια δεν είναι πολύ διαδεδομένα ανάμεσα στα παιδιά που πιθανόν αγνοούν την ύπαρξή τους.

Πιο κάτω παρατίθενται μερικά δείγματα της δουλειάς των μαθητών/μαθητριών στο Scratch Jr. Αρχικά οι μαθητές/μαθήτριες έφτιαξαν ένα τετράγωνο (εικόνα 1) κι ένα ορθογώνιο (εικόνα 2). Κάποιοι/ες μαθητές/μαθήτριες δοκίμασαν να φτιάξουν και τρίγωνο (εικόνα 3) χωρίς να τους έχει ζητηθεί, γεγονός που καταδεικνύει τα αυξημένα κίνητρα των μαθητών/τριών για μάθηση με τη χρήση των οθονών αφής.



Εικόνα 1. Κατασκευή τετραγώνου στο Scratch Jr

Εικόνα 2. Κατασκευή ορθογωνίου στο Scratch Jr



Εικόνα 3. Κατασκευή τριγώνου στο Scratch Jr

Περίμετρος και εμβαδόν ορθογωνίου

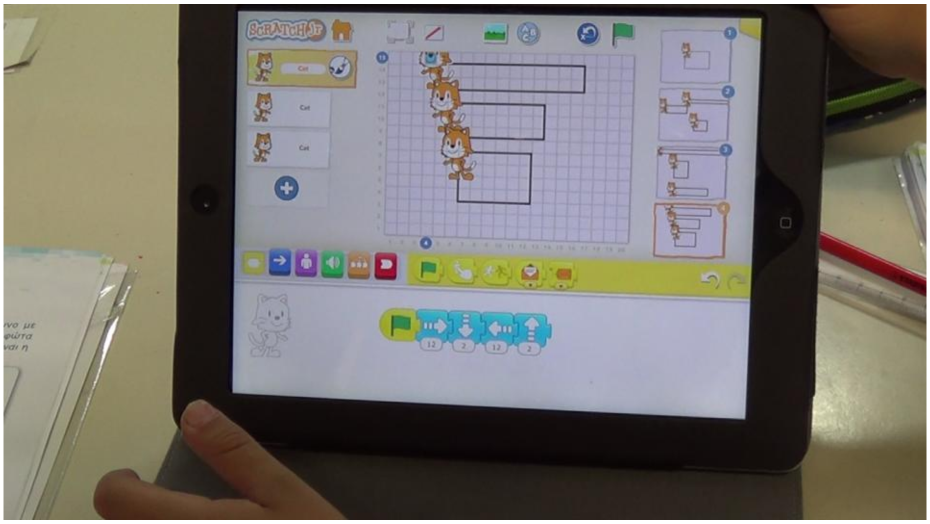
Μετά την απλή κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων ακολούθησαν δύο ογδοντάλεπτα μαθήματα για τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου ορθογωνίου. Αφού έγινε υπενθύμιση των δύο εννοιών, ζητήθηκε από τα παιδιά να κατασκευάσουν διάφορα ορθογώνια με εμβαδόν 20 cm^2. Ενδεικτικά παρατίθεται η κατασκευή ορθογωνίων από μία ομάδα παιδιών στο Scratch Jr (εικόνα 4). Τα παιδιά έφτιαξαν διάφορα ορθογώνια με πλευρές 10cm X 2cm, 20cm X 1cm και 4cm X 5cm στις λύσεις τους.

Εικόνα 4. Κατασκευή ορθογωνίων με εμβαδόν 20 cm²

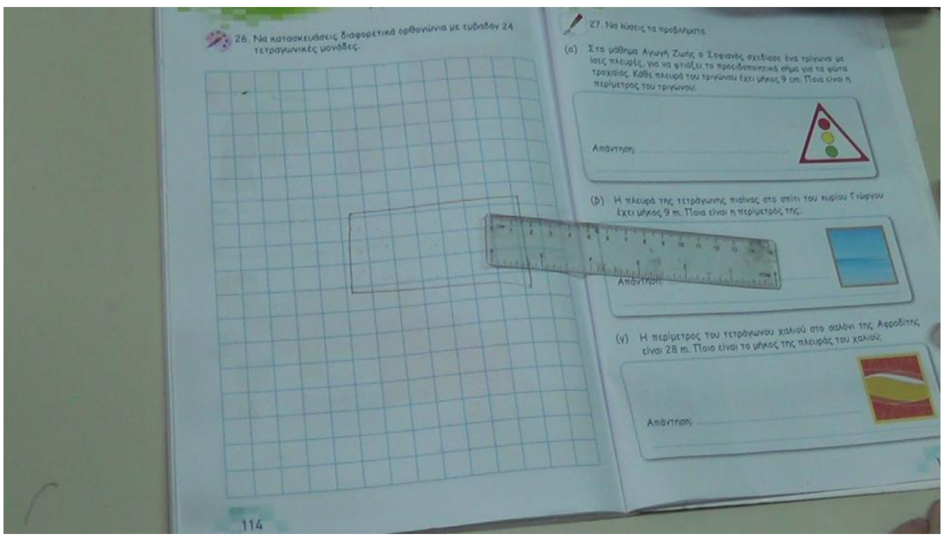
Όπως φαίνεται στην εικόνα 4 αυτή η ομάδα παιδιών επέλεξε να έχει τρεις διαφορετικές γάτες στην οθόνη αφής για να δίνουν τις εντολές για την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παιδιά κατασκεύασαν τα γεωμετρικά σχήματα με ελάχιστη καθοδήγηση και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι πολλά διαφορετικά ορθογώνια μπορούν να έχουν το ίδιο εμβαδόν. Τα παιδιά κατέληξαν σε αυτό το συμπέρασμα επαγωγικά μέσα από πολλά παραδείγματα. Σύμφωνα με τον Van Hiele (1986), αυτό είναι μια άτυπη απόδειξη στη γεωμετρία και λαμβάνοντας υπόψιν την ηλικία των παιδιών, η παρατήρηση που έκαναν είναι εξέχουσας σημασίας. Σε αυτό έπαιξε καταλυτικό ρόλο η χρήση των οθονών αφής και της εφαρμογής Scratch Jr, που διευκόλυνε την παρατήρηση και τη συζήτηση μαθηματικού περιεχομένου στην ολομέλεια της τάξης.

Χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού στο σχολικό εγχειρίδιο και στο Scratch Jr

Στη συνέχεια τα παιδιά κατασκεύασαν ορθογώνια με εμβαδόν 24 cm² τόσο στο Scratch Jr όσο και στο σχολικό εγχειρίδιο με τη χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού. Τα περισσότερα παιδιά κατάφεραν να κατασκευάσουν διάφορα ορθογώνια με πλευρές 12 cm X 2 cm, 6 cm X 4 cm και 8 cm X 3 cm όπως φαίνεται στην εικόνα 5 με τη βοήθεια του Scratch Jr. Αντιθέτως, όταν τα παιδιά κλήθηκαν να κατασκευάσουν τα ίδια ορθογώνια σε τετραγωνισμένο χαρτί στο σχολικό εγχειρίδιο με τον χάρακα και το μολύβι τους αντιμετώπισαν δυσκολίες στη χρήση του χάρακα, και μερικά παιδιά χρειάστηκαν βοήθεια από την εκπαιδευτικό της τάξης (εικόνα 6).



Εικόνα 5. Κατασκευή ορθογωνίων με εμβαδόν 24 cm² στο Scratch Jr



Εικόνα 6. Κατασκευή ορθογωνίων με εμβαδόν 24 cm² στο σχολικό εγχειρίδιο με τετραγωνισμένο χαρτί

Παρόλα αυτά, στις ατομικές συνεντεύξεις που ακολούθησαν μετά τη λήξη του μαθήματος, αρκετά παιδιά ανέφεραν ότι ένιωθαν πιο άνετα να φτιάξουν τα σχήματα με το μολύβι και τον χάρακα τους παρά με το Scratch Jr. Ενδεικτικά κάποια παιδιά ανέφεραν ότι:

> “Μας βοήθησε το Scratch Jr επειδή μας έβαζε τα κουτάκια (τετραγωνισμένο χαρτί) αλλά το τρίγωνο δεν μπορούσαμε να το κάνουμε με τα ίδια κουμπάκια”.

> "Προτιμώ με τα χέρια για να μην κάνω λάθος κι αυτός ο τρόπος είναι πιο γρήγορος γιατί μου αρέσει να ζωγραφίζω και είναι πιο ωραίος".

> "Θέλω με τα χέρια για να μην κάνω λάθος και γιατί με διευκολύνει και δεν θα κάνω λάθος. Αυτός ο τρόπος είναι πιο σύντομος και γιατί μου αρέσει να χρωματίζω".

Απ' ότι φαίνεται στα πιο πάνω αποσπάσματα, κάποια παιδιά πιστεύουν ότι αν κατασκευάσουν τα γεωμετρικά σχήματα με το χέρι δεν θα κάνουν λάθος. Ο πρώτος μαθητής υπογραμμίζει μία αδυναμία του Scratch Jr στη κατασκευή τριγώνου, λόγω του ότι η εφαρμογή επιτρέπει μόνο περιστροφές 30^o μοιρών. Αυτό όμως δεν εμπόδισε κάποια παιδιά από το να δοκιμάσουν να κατασκευάσουν διάφορα τρίγωνα στο Scratch Jr.

Άλλοι/ες μαθητές/μαθήτριες τάχθηκαν υπέρ της χρήσης της οθόνης αφής, λόγω της ταχύτητας με την οποία κατασκεύαζαν τα ζητούμενα σχήματα:

> "Ο πιο γρήγορος τρόπος είναι με το tablet γιατί με διευκολύνει πιο πολύ και το κάνω πιο γρήγορα από το βιβλίο".

> "Προτιμώ το tablet γιατί το κάνει γρήγορα και δεν κουράζονται τα χέρια μου".

> "Προτιμώ το tablet γιατί είναι πιο γρήγορο από το χέρι. Με το tablet δεν κάνω τόση πολλή ώρα όση με το χέρι."

Φαίνεται ότι η ταχύτητα και η ακρίβεια που παρέχει το Scratch Jr βοήθησε αυτούς τους μαθητές να κατασκευάσουν τα γεωμετρικά σχήματα επιτυχώς. Αξίζει να σημειωθεί στους περιορισμούς της παρούσας έρευνας, ότι δεν έγινε χορήγηση προ-πειραματικού και μετα-πειραματικού δοκιμίου για να διερευνηθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών/τριών για τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου ορθογωνίου και τετραγώνου.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Αναμφισβήτητα υπάρχουν πολλές δυνατότητες για ενσωμάτωση του Scratch Jr στη διδασκαλία διάφορων μαθηματικών εννοιών. Στη συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης, οι μαθητές/μαθήτριες φάνηκε να έχουν αυξημένα κίνητρα για μάθηση με τη χρήση του Scratch Jr και εμβάθυναν στις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου τετραγώνου και ορθογωνίου. Οι μαθητές/μαθήτριες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι πολλά ορθογώνια έχουν το ίδιο εμβαδόν αλλά διαφορετική περίμετρο μέσα από τη χρήση του Scratch Jr. Η δυνατότητα σχεδιασμού πολλών ορθογωνίων με ακρίβεια και ταχύτητα στο Scratch Jr, σε αντίθεση με το σχολικό εγχειρίδιο και τη χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού, βοήθησε στη διαφοροποίηση του μαθήματος και έδωσε την ευκαιρία στους/στις μαθητές/μαθήτριες να καταλήξουν επαγωγικά στον κανόνα μέσα από πολλαπλά παραδείγματα.

Οι οθόνες αφής και η εφαρμογή Scratch Jr μπορούν να μειώσουν το άγχος και τη μαθηματικοφοβία στους μαθητές και να συμβάλουν στην αύξηση των κινήτρων των μαθητών για μάθηση μέσω της αλληλεπίδρασης με την τεχνολογία. Υπάρχουν μελέτες που υποστηρίζουν ότι το να μαθαίνεις δημιουργώντας είναι δυσκολότερο αλλά δίνει ουσιαστικότερα αποτελέσματα (Garneli et al, 2013). Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση, διαφάνηκε ότι οι μαθητές/μαθήτριες είχαν αυξημένη επιμονή για να δημιουργήσουν τα σχήματα που τους ζητήθηκαν και εμβάθυναν στις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου ορθογωνίου. Ακόμη, υπήρχε επικοινωνία και συνεργασία μεταξύ των μαθητών/μαθητριών που δούλευαν ομαδικά στις οθόνες αφής και δυνατότητα καλλιέργειας θετικών στάσεων έναντι στα μαθηματικά μέσα από μια παιγνιώδη μορφή μάθησης.

Για την επιτυχή ενσωμάτωση των οθονών αφής στη διδασκαλία των μαθηματικών χρειάζεται συνεχής επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και εκσυγχρονισμός του εκπαιδευτικού εξοπλισμού ώστε οι οθόνες αφής να ενσωματώνονται στη διδακτική πράξη. Επίσης, κρίνεται απαραίτητη η προσεκτική επιλογή των εφαρμογών με παιδαγωγικό περιεχόμενο που να συνάδουν με το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών. Το Scratch Jr είναι μία πολλά υποσχόμενη εφαρμογή, γιατί έχει ένα σαφώς παιδαγωγικό πλαίσιο και μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορες θεματικές ενότητες των μαθηματικών, αλλά και άλλων γνωστικών αντικειμένων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Κορδάκη, Μ., & Ψώμος Π. (2012). Scratch: Έντεκα Διαφορετικές Κατηγορίες Μαθησιακών Δραστηριοτήτων. *6ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτική της Πληροφορικής - Διοργάνωση: ΕΠΥ και Παιδαγωγικό τμήμα Παν/μίου Δυτικής Μακεδονίας*, 20-22 Απριλίου 2012, Φλώρινα, Ελλάδα, σ.σ. 591-594.

Μπράτιτσης, Θ., Χασανίδης, Δ., Παπαχαραλάμπους, Π., & Αρβανιτάκης, Γ. (2012). Εισαγωγή στο περιβάλλον Scratch: Παραδείγματα διδακτικών δραστηριοτήτων για τη Α/βάθμια και τη Β/βάθμια εκπαίδευση. Στο Θ. Μπράτιτσης (επιμ.). *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Διδακτική της Πληροφορικής»*, σελ. 587-590, Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Νικολός, Δ., & Κόμης, Β. (2010). Μια διδακτική πρόταση για τη γλώσσα προγραμματισμού Scratch. Στο Μ. Γρηγοριάδου (επιμ.) *5ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής της Πληροφορικής,* σελ. 15-24. Αθήνα.

Χαρίσης, Χ., & Μικρόπουλος, Τ. Α. (2008). Ρομποτική, Οπτικός Προγραμματισμός και Βασικές Προγραμματιστικές Δομές. Στο Β. Κόμης (επιμ.). *Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Διδακτική της Πληροφορικής»,* Πάτρα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Αγγλική

Garneli, B., Giannakos, M. N., Chorianopoulos, K., & Jaccheri, L. (2013). Learning by Playing and Learning by Making. *In Serious games Development and Applications* (pp. 76-85). Springer Berlin Heidelberg.

Maloney, J., Peppler, K., Kafai, Y., Resnick, M., & Rusk, N. (2008). Programming by choice: Urban Youth Learning Programming with Scratch. Proceedings of the 39th SIGCSE Technical Symposium - SIGCSE '08 (pp. 368- 371), Portland, Oragon, New York: ACM.

MIT (2002). Media Lab Lifelong Kindergarten Group, Scratch visual programming language, First appeared 2002 (latest version Scratch 2, 2013).

Papert, S. (1980). *Mindstorms – Children, Computers and Powerful ideas.* New York: Basic Books, Inc.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism, In *Constructionism: Research reports and essays.*

Portelance, D. J. (2015). Code and Tell: An Exploration of Peer Interviews and Computational Thinking with Scratch Jr in the Early Childhood Classroom (Doctoral dissertation, TUFTS UNIVERSITY). Retrieved from: http://search.proquest.com/docview/1686860637

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., & Kafai, Y. (2009). Scratch: programming for all. *Communications of the ACM*, 52(11), 60-67.

Resnick, M. (2011). Scratch Jr: Computer programming in early childhood as a pathway to academic readiness and success. National Science Foundation (NSF), Division of Research on Learning in Formal and Informal Settings (DRL).

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΕΓΚΥΡΟΠΟΙΗΣΗΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Σέργιος Σεργίου, Χαράλαμπος Γ. Χαραλάμπους

Πανεπιστήμιο Κύπρου

sergiou.sergios@ucy.ac.cy, cycharal@ucy.ac.cy

Ερευνητικές προσπάθειες στον χώρο της εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας ανέδειξαν τη συνεισφορά των γενικευμένων και των εξειδικευμένων πρακτικών διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα. Ωστόσο, στις προσπάθειες αυτές δεν διερευνήθηκε συστηματικά ο ρόλος των εργαλείων μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων. Η παρούσα εργασία σκιαγραφεί δύο παράγοντες που χρειάζεται να λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία ανάπτυξης τέτοιων εργαλείων και παρουσιάζει τη διαδικασία ανάπτυξης και εγκυροποίησης ενός δοκιμίου μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης, το οποίο θα αξιοποιηθεί για εξέταση του βαθμού στον οποίο η σημαντικότητα συγκεκριμένων πρακτικών διδασκαλίας σχετίζεται με τα εργαλεία μέτρησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αναγνώριση της σημαντικότητας του ρόλου της διδασκαλίας στην προσπάθεια βελτίωσης των μαθησιακών αποτελεσμάτων οδήγησε σε σημαντικό αριθμό ερευνητικών προσπαθειών εντοπισμού και σκιαγράφησης αποτελεσματικών πρακτικών διδασκαλίας και στην ανάπτυξη θεωρητικών πλαισίων περιγραφής της ποιότητας της διδασκαλίας. Οι προσπάθειες αυτές εστιάστηκαν είτε σε πρακτικές διδασκαλίας ανεξαρτήτως του γνωστικού αντικειμένου (γενικευμένες πρακτικές, βλ. Kyriakides & Creemers, 2009) είτε σε πρακτικές διδασκαλίας που πηγάζουν από τα χαρακτηριστικά και το περιεχόμενο του γνωστικού αντικειμένου (εξειδικευμένες πρακτικές, βλ. Hill κ.ά., 2008). Έρευνες έχουν εμπειρικά επιβεβαιώσει τη συνεισφορά τόσο των γενικευμένων όσο και των εξειδικευμένων πρακτικών στα μαθησιακά αποτελέσματα (Kyriakides Christoforou & Charalambous, 2013˙Seidel & Shavelson, 2007). Ωστόσο, ο Papay (2011) αναφέρει ότι δόθηκε ελάχιστη σημασία στο τι μαθησιακά αποτελέσματα μετράμε και πώς τα μετράμε, τονίζοντας πως οι ερευνητές του χώρου υποθέτουν ότι η επίδοση των μαθητών δεν διαφοροποιείται όταν καλούνται να συμπληρώσουν παρόμοια ή διαφορετικά τεστ. Παράλληλα, οι D'Agostino, Welsh και Corson (2007) τονίζουν την ανάγκη ευθυγράμμισης του εργαλείου μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων με το περιεχόμενο και τις επιδιώξεις του αναλυτικού προγράμματος καθώς επίσης και τις πρακτικές διδασκαλίας, ειδικότερα όταν επιχειρείται η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Ο προβληματισμός, λοιπόν, για τα εργαλεία μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων δεν πρέπει να αγνοείται από τους ερευνητές του χώρου της ποιότητας της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, καθίσταται αναγκαίο να διερευνηθεί αν η συνεισφορά των πρακτικών διδασκαλίας (γενικευμένων και εξειδικευμένων) επηρεάζεται από τον τύπο των μαθησιακών αποτελεσμάτων που ελέγχονται από το εργαλείο μέτρησης και από τον προσανατολισμό του εργαλείου μέτρησης.

Η ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

Η διερεύνηση των εργαλείων μέτρησης της επίδοσης των μαθητών θεωρείται σημαντική παράμετρος στην προσπάθεια ελέγχου και ερμηνείας της επίδρασης της διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα (Naumann κ.ά., 2019˙ Polikoff, 2016). Οι Grossman κ.ά. (2014), διερευνώντας τον ρόλο που ενδεχομένως να διαδραματίζει το εργαλείο μέτρησης της επίδοσης του μαθητή στην προσπάθεια σύνδεσης των μαθησιακών αποτελεσμάτων με τις πρακτικές διδασκαλίας εντόπισαν την ύπαρξη διαφορετικού βαθμού συσχέτισης ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών σε δύο διαφορετικά εργαλεία μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων και στις υπό εξέταση πρακτικές διδασκαλίας. Η *ευαισθησία του εργαλείου* στη διδασκαλία και οι *γνωστικές απαιτήσεις* των έργων που συμπεριλαμβάνονται σε αυτά αποτελούν δύο σημαντικούς παράγοντες οι οποίοι πιθανόν να συνδέονται με τη διαφοροποιημένη επίδραση των πρακτικών διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα.

Η *ευαισθησία των έργων ή του εργαλείου* στη διδασκαλία ορίζεται ως το ψυχομετρικό χαρακτηριστικό των έργων ή του εργαλείου το οποίο αναφέρεται στην ικανότητά του να αντανακλά την επίδραση της ποιότητας και του περιεχομένου της διδασκαλίας (Polikoff, 2016). Ο Polikoff (2016), διαπίστωσε ότι υπάρχει διαφοροποίηση του *βαθμού ευαισθησίας* των τεστ στη διδασκαλία, η οποία σχετίζεται τόσο με την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της ποιότητας της διδασκαλίας όσο και με την πολιτεία χορήγησης των τεστ (περιοχές με διαφορετικά αναλυτικά προγράμματα). Οι Ruiz-Primo κ.ά. (2012) μέσα από τα αποτελέσματα των ερευνών τους έδειξαν ότι έργα τα οποία παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες με έργα τα οποία αξιοποιούνται στη διδασκαλία έχουν υψηλό βαθμό ευαισθησίας στη διδασκαλία. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι ο βαθμός εγγύτητας των έργων και των εργαλείων ως προς τη διδασκαλία επηρεάζεται από α) τον βαθμό εξοικείωσης των μαθητών με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των έργων και την ομοιότητά τους με έργα και ερωτήσεις που αξιοποιούνται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, β) τις ευκαιρίες μάθησης του υπό διερεύνηση περιεχομένου και γ) τον βαθμό ευθυγράμμισης των γνωστικών απαιτήσεων των έργων με τις γνωστικές στρατηγικές που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Συνεπώς *η προσπάθεια ανάπτυξης και κατασκευής έργων και εργαλείων ευαίσθητων στη διδασκαλία προϋποθέτει τη διερεύνηση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος και του προσδοκώμενου τρόπου εφαρμογής του*.

Παράλληλα, το επίπεδο των *γνωστικών απαιτήσεων* των έργων που περιλαμβάνονται στα εργαλεία μέτρησης ενδεχομένως να επιδρά στην προσπάθεια διερεύνησης της επίδρασης των πρακτικών διδασκαλίας. Αριθμός ερευνών αξιοποίησαν εργαλεία μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων που επικεντρώνονται κυρίως σε κατώτερες γνωστικές λειτουργίες (π.χ. Ottmar κ.ά., 2015) και άλλα σε ανώτερες (π.χ. Hill κ.ά., 2011), χωρίς ωστόσο να υπάρχει ξεκάθαρη εικόνα τόσο σχετικά με το περιεχόμενο των εργαλείων ως προς το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων των έργων όσο και με τη διερεύνηση της επίδρασης της συγκεκριμένης παραμέτρου. Οι Kane και Staiger (2012) διαπίστωσαν ότι η συνεισφορά των πρακτικών διδασκαλίας στην επίδοση των μαθητών σε δύο διαφορετικά τεστ με έργα διαφορετικού επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων διαφοροποιείται, γεγονός το οποίο υποδηλοί πως το επίπεδο των γνωστικών απαιτήσεων των έργων ενδεχομένως να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην προσπάθεια διερεύνησης της συνεισφοράς των πρακτικών διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να ισχυριστούμε τη σημαντικότητα του ρόλου του εργαλείου μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων στην όποια προσπάθεια σύνδεσης των μαθησιακών αποτελεσμάτων με τις πρακτικές διδασκαλίας. Η διερεύνηση του ρόλου του εργαλείου μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων και συγκεκριμένα των παραγόντων της ευαισθησίας του εργαλείου στη διδασκαλία και του επιπέδου των γνωστικών απαιτήσεων των έργων αναμένεται να συνεισφέρει στην προσπάθεια καλύτερης κατανόησης της επίδρασης των πρακτικών διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα.

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα έρευνα εντάσσεται σε μια ευρύτερη προσπάθεια διερεύνησης του βαθμού στον οποίο η χρήση διαφορετικών εργαλείων μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων δύναται να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα ως προς τη σημαντικότητα της συνεισφοράς συγκεκριμένων πρακτικών διδασκαλίας (γενικευμένων και εξειδικευμένων). Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, σκοπός της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας είναι η ανάπτυξη και εγκυροποίηση ενός εργαλείου μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης προκειμένου να αξιοποιηθεί, σε συνδυασμό με άλλο εργαλείο, για διερεύνηση της συνεισφοράς γενικευμένων και εξειδικευμένων πρακτικών διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, επιχειρείται η ανάπτυξη ενός εργαλείου μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης, ευθυγραμμισμένο με το περιεχόμενο και τις επιδιώξεις του Κυπριακού αναλυτικού προγράμματος, όπου διεξάγεται η έρευνα και το οποίο να περιλαμβάνει σημαντικό αριθμό γνωστικά απαιτητικών έργων

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ανάπτυξη Εργαλείου Μέτρησης της Αλγεβρικής Σκέψης

Η διαδικασία κατασκευής του εργαλείου μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης ενημερώθηκε τόσο από την υπάρχουσα σχετική βιβλιογραφία όσο και από το Κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, αφενός αξιοποιήθηκε το θεωρητικό πλαίσιο της αλγεβρικής σκέψης του Kaput (2008) προκειμένου να προσδιοριστούν οι υπό μελέτη περιοχές και έννοιες της πρώιμης άλγεβρας όπως και το θεωρητικό πλαίσιο των Blanton κ.ά. (2011) προκειμένου να προσδιοριστούν οι πρακτικές/διαδικασίες της αλγεβρικής σκέψης. Αφετέρου, χαρτογραφήθηκε το περιεχόμενο της πρώιμης Άλγεβρας στο Αναλυτικό Πρόγραμμα και τα διδακτικά εγχειρίδια των Ε΄ και Στ΄ τάξεων του Δημοτικού. Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και η χαρτογράφηση του αναλυτικού προγράμματος ενημέρωσαν την κατασκευή του πίνακα προδιαγραφών (βλ. Πίνακα 1) του εν λόγω εργαλείου μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων στην περιοχή της άλγεβρας. Παράλληλα, έγινε προσπάθεια όπως συμπεριληφθούν έργα χαμηλών και υψηλών γνωστικών απαιτήσεων για την κάθε υπό εξέταση έννοια. Στη συνέχεια με βάση τον πίνακα προδιαγραφών επιλέχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν αυτούσια είτε τροποποιήθηκαν έργα τα οποία έχουν αξιοποιηθεί για τη μέτρηση των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης σε έρευνες στην περιοχή της πρώιμης άλγεβρας (π.χ. Blanton κ.ά., 2011˙ Kieran, 2011) ή σε εθνικά και διεθνή δοκίμια αξιολόγησης στα μαθηματικά (π.χ. TIMSS). Παράλληλα, λήφθηκε υπόψη ο βαθμός εγγύτητας των έργων στη διδασκαλία, στοχεύοντας στην ανάπτυξη ενός εργαλείου μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης ευαίσθητου στη διδασκαλία. Συγκεκριμένα αναπτύχθηκαν δύο φόρμες μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης, οι οποίες περιλαμβάνουν συνολικά σαράντα εννιά έργα, εκ των οποίων τα τριάντα δύο είναι κοινά. Η συμπερίληψη κοινών έργων επιτρέπει τη δυνατότητα εξίσωσης των δύο φορμών ως προς τον βαθμό δυσκολίας τους.

Περιεχόμενο Έργων Τα παιδιά:	**Έργα Χαμηλών Απαιτήσεων**	**Έργα Υψηλών Απαιτήσεων**
Περιγράφουν λεκτικά ή συμβολικά τον κανόνα του μοτίβου και αξιοποιούν τον κανόνα για να εντοπίζουν τον μακρινό όρο του μοτίβου	37, 43	30,31, 32,21,28,22
Εντοπίζουν συναρτησιακές σχέσεις σε πίνακα ή γραφική παράσταση, αξιοποιούν τον γενικό τύπο συναρτήσεων για να συμπληρώσουν πίνακα εισόδου - εξόδου, αντιστοιχίζουν γραφικές παραστάσεις με πίνακες και αναπαριστούν γραφικά συναρτησιακές σχέσεις	23, 36, 42	24, 19 29, 41, 46, 20
Μεταφράζουν αλγεβρικά σύμβολα σε λεκτική μορφή ή σε παραστάσεις και αντίστροφα	7, 8,9,10,33	34, 35, 44, 45 26,
Απλοποιούν αλγεβρικές εκφράσεις	4,5,6	
Υπολογίζουν την τιμή μαθηματικών προτάσεων για συγκεκριμένες τιμές μεταβλητών	1,2,3	
Αξιοποιούν τις ιδιότητες της ισότητας για να τεκμηριώσουν την απόφασή τους για την ορθότητα ή τη μη ορθότητα δηλώσεων		25, 38, 47 39, 48
Βρίσκουν την τιμή του «αγνώστου» αξιοποιώντας τις ιδιότητες της ισότητας	18, 27, 11	12,13,14,15, 16,17,40, 49

Πίνακας 1: Πίνακας προδιαγραφών δοκιμίου

Συμμετέχοντες και Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 235 μαθητές δημοτικού σχολείου (102 μαθητές της Ε΄ τάξης και 133 μαθητές της Στ΄ τάξης) από 11 τάξεις (5 Ε΄ τάξεις και 6 Στ΄ τάξεις) τεσσάρων αστικών και ενός προαστιακού σχολείου. Η δειγματοληψία ήταν βολική. Ο κάθε μαθητής συμπλήρωσε μια από τις δύο ισοδύναμες φόρμες του δοκιμίου με έργα αλγεβρικής σκέψης, έχοντας στη διάθεσή του 80 λεπτά.

Ανάλυση των δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το Extended Logistic Model of Rasch (Andrich, 1988), το οποίο βοήθησε στο να τοποθετηθούν τα έργα του εργαλείου μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης και η επίδοση των μαθητών σε μια κοινή κλίμακα προκειμένου να ελεγχθούν οι ψυχομετρικές της ιδιότητες. Παράλληλα, η χρήση του Rasch επέτρεψε τη διερεύνηση του βαθμού στον οποίο τα έργα του εργαλείου μπορούν να διαταχθούν σύμφωνα με τον βαθμό δυσκολίας τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της ανάλυσης Rasch για όλα τα δεδομένα του δείγματος (συνολικά) καθώς επίσης και ξεχωριστά κατά φύλο και για τις δύο υπό εξέταση τάξεις. Για την αξιολόγηση των ψυχομετρικών ιδιοτήτων του δοκιμίου αξιοποιήθηκαν διάφορα κριτήρια. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 2, η εσωτερική αξιοπιστία τόσο των έργων όσο και των μαθητών ήταν σε όλες τις περιπτώσεις μεγαλύτερη από 0.90. Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι υπάρχει υψηλή διαχωριστικότητα, ότι δηλαδή τόσο ο βαθμός δυσκολίας των έργων όσο και η ικανότητα των μαθητών είναι καλά διαχωρισμένα στη σειρά κατάταξης (Adams & Khoo, 1993). Επίσης, οι τιμές για τα infit και outfit mean squares [1] για τα έργα και τους μαθητές, οι οποίες αναφέρονται στη διαφορά μεταξύ των αναμενόμενων και παρατηρούμενων επιδόσεων των μαθητών και των έργων (συνέπεια ανταπόκρισης) ήταν πολύ κοντά στην επιθυμητή τιμή 1.00. Παράλληλα, στις πλείστες περιπτώσεις, οι τιμές για infit και outfit t scores για τα έργα και τους μαθητές ήταν πολύ κοντά στην επιθυμητή τιμή του μηδενός, γεγονός το οποίο φανερώνει ότι τόσο τα έργα όσο και οι μαθητές, προσαρμόζονται στο μοντέλο Rasch (Adams & Khoo, 1993). Μικρές αποκλίσεις παρατηρούνται σε κάποιες τιμές των outfit t scores για τα έργα και για τους μαθητές. Τέλος, ο έλεγχος των τιμών item infit έδειξε πως όλα τα έργα με εξαίρεση τα έργα 47, 48 έχουν τιμές από 0.77 μέχρι 1.30, γεγονός το οποίο επιτρέπει στην εξαγωγή του συμπεράσματος ότι τα έργα προσαρμόζονται στο μοντέλο (Adams & Khoo, 1993).Οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα 47, 48 θα εξεταστούν, προκειμένου να εντοπιστούν τυχόν προβληματικά ζητήματα των συγκεκριμένων έργων και να γίνουν οι απαραίτητες αλλαγές κατά τη χορήγηση του δοκιμίου στην κυρίως έρευνα.

Στο Διάγραμμα 1 παρουσιάζεται η κλίμακα που προέκυψε από την ταυτόχρονη κατάταξη των έργων με βάση τον βαθμό δυσκολίας τους και την κατάταξη των μαθητών (για το σύνολο του δείγματος) με βάση την ικανότητα ανταπόκρισής τους στα έργα. Από την κλίμακα αυτή φαίνεται ότι τα έργα προσαρμόζονται ικανοποιητικά στο μοντέλο, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης. Συγκεκριμένα, ο βαθμός δυσκολίας των έργων κυμαίνεται από -3.44 μέχρι 3.06 logits, ενώ η επίδοση των μαθητών από -4.16 μέχρι 4.61 logits. Τούτο υποδηλοί ότι σε γενικές γραμμές παρατηρείται αντιστοίχιση βαθμού δυσκολίας έργων και επίδοσης μαθητών.

Στατιστικές Ενδείξεις		**Σύνολο (n=235)**	**Αγόρια (n=125)**	**Κορίτσια (n=110)**	**Ε΄Τάξη (n=102)**	**Στ΄Τάξη (n=133)**
Μέσοι όροι	(έργα)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	(μαθητές)	0.25	0.38	0.16	-0.60	0.89
Τυπικές αποκλίσεις	(έργα)	1.42	1.51	1.38	1.66	1.50
	(μαθητές)	1.85	2.08	1.61	1.67	1.80
Αξιοπιστία	(έργα)	0.96	0.93	0.91	0.92	0.93
	(μαθητές)	0.92	0.93	0.91	0.90	0.92
Infit mean square	(έργα)	1.00	0.99	1.00	0.99	0.98
	(μαθητές)	0.97	0.94	1.00	0.96	0.99
Outfit mean square	(έργα)	1.12	1.04	1.15	1.04	1.12
	(μαθητές)	1.06	1.02	1.10	0.99	1.06
Infit t	(έργα)	-0.11	-0.13	-0.02	0.00	-0.13
	(μαθητές)	-0.06	-0.10	-0.05	-0.12	-0.04
Outfit t	(έργα)	0.01	0.03	0.09	0.17	0.06
	(μαθητές)	0.16	0.25	0.12	0.13	0.19

Πίνακας 2: Στατιστικοί δείκτες για τα έργα του δοκιμίου και την ικανότητα των μαθητών

Σε γενικές γραμμές, τόσο ο Πίνακας 2 όσο και το Διάγραμμα 1 εισηγούνται ότι το δοκίμιο που έχει αναπτυχθεί έχει καλές ψυχομετρικές ιδιότητες. Τα αποτελέσματα αυτά εισηγούνται, παράλληλα, κάποιες τροποποιήσεις στο δοκίμιο που λαμβάνονται υπόψη πριν τη διενέργεια της κύριας φάσης της έρευνας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη αποσκοπούσε στην ανάπτυξη και εγκυροποίηση ενός εργαλείου μέτρησης της αλγεβρικής σκέψης, προκειμένου να αξιοποιηθεί στη διερεύνηση της επίδρασης των γενικευμένων και εξειδικευμένων πρακτικών διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα στην περιοχή της πρώιμης άλγεβρας. Η έλλειψη ξεκάθαρης εικόνας σχετικά με τα εργαλεία μέτρησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων τα οποία αξιοποιήθηκαν στις ερευνητικές προσπάθειες ελέγχου της επίδρασης των εξειδικευμένων και γενικευμένων πρακτικών διδασκαλίας στα μαθησιακά αποτελέσματα οδήγησε στον εντοπισμό και καθορισμό δύο παραμέτρων (ευαισθησία του εργαλείου στη διδασκαλία και γνωστικές απαιτήσεις), οι οποίες χρειάζεται να ενημερώνουν τον πίνακα προδιαγραφών του δοκιμίου και την επιλογή έργων, σε μια προσπάθεια κάλυψης του συγκεκριμένου κενού.

```
--------------------------------------------------------------------------------
    Μαθητές με υψηλό βαθμό       Έργα με υψηλό βαθμό δυσκολίας
     Αλγεβρικής ικανότητας
 5.0                   |
                       |
                    XX |
                    XX |
                       |
 4.0                   |
                     X |
                  XXXX |
                       |
                    XX |
                    XX |
 3.0             XXXXX |  27.2
                   XXX |  25.2
                XXXXXX |
                  XXXX |
                    XX |
 2.0             XXXXX |
                  XXXX |  17
                 XXXXX |  39.2  48.2
                XXXXXX |  22.2  26  31.2  32.2  35
           XXXXXXXXXXX |  6  34  41
                XXXXXX |  8  14  39.1  48.1
 1.0      XXXXXXXXXXXX |
                 XXXXX |  9  33  47
         XXXXXXXXXXXXX |  20  25.1  31.1  38  46
            XXXXXXXXXX |  5  19
     XXXXXXXXXXXXXXXXX |  1  15
  .0           XXXXXXX |  13  37
             XXXXXXXXX |  4  12  32.1  49
           XXXXXXXXXXX |  30  44
              XXXXXXXX |  24  27.1  29
         XXXXXXXXXXXXX |  40
                   XXX |  3  23  42.2
-1.0                XX |  16
                  XXXX |  10
                   XXX |  42.1
                 XXXXX |  2  36
            XXXXXXXXXX |  18  22.1
-2.0                XX |
                  XXXX |
                 XXXXX |  7
                    XX |  43
                   XXX |
                     X |
-3.0                   |
                  XXXX |
                     X |  11  21  28
                     X |
                     X |
-4.0                XX |
                   XXX |
                       |
                       |
                       |
                       |
-5.0                   |
    Μαθητές με χαμηλό βαθμό      Έργα με χαμηλό βαθμό δυσκολίας
     Αλγεβρικής ικανότητας
--------------------------------------------------------------------------------
 Κάθε X αντιστοιχεί σε 1 μαθητή
================================================================================
```

Διάγραμμα 1: Κλίμακα εκτίμησης της ικανότητας των μαθητών και της δυσκολίας των έργων (για το σύνολο του δείγματος)

Η ανάλυση των δεδομένων της πιλοτικής χορήγησης του δοκιμίου έδειξε ότι μπορεί να αναπτυχθεί μια κλίμακα με κατάλληλες ψυχομετρικές ιδιότητες για μέτρηση της επίδοσης των μαθητών σε γνωστικά απαιτητικά έργα μέτρησης της αλγεβρικής τους σκέψης. Σε συνδυασμό με ένα εργαλείο μέτρησης χαμηλότερων γνωστικών λειτουργιών το οποίο είναι ήδη εγκυροποιημένο και μετά τη διενέργεια παρατηρήσεων διδασκαλίας θα επιχειρηθεί η εξέταση της συνεισφοράς συγκεκριμένων γενικευμένων και εξειδικευμένων πρακτικών διδασκαλίας στα αποτελέσματα των μαθητών στα μαθηματικά.

1. Σημείωση 1, Η στατιστική ένδειξη outfit βασίζεται στη διαφορά μεταξύ των παρατηρούμενων και των αναμενόμενων επιδόσεων (ευαισθησία στις αποκρίσεις των ατόμων σε έργα με βαθμό δυσκολίας σημαντικά διαφορετικό από τον βαθμό ικανότητας του ατόμου και το αντίστροφο) ενώ για τον υπολογισμό της στατιστικής ένδειξης infit εξαιρούνται τα άτομα ή τα έργα με ακραίες χαμηλές ή ψηλές επιδόσεις (ευαισθησία στο μοτίβο των αποκρίσεων των ατόμων σε έργα με βαθμό δυσκολίας κοντά στον βαθμό ικανότητας του ατόμου και το αντίστροφο)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adams, R. J., & Khoo, S. (1993). *Quest: The interactive test analysis system*. Version 2.1.Melbourne: ACER.

Andrich, D. (1988). A general form of Rasch's extended logistic model for partial credit scoring. *Applied Measurement in Education*, 1(4), 363-378

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* Essential understandings series. Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.

D'Agostino, J. V., Welsh, M. E., & Corson, N. M. (2007). Instructional sensitivity of a state standards-based assessment. *Educational Assessment*, *12*, 1–22.

Grossman, P., Cohen, J., Ronfeldt, M., & Brown, L. (2014). The test matters: The relationship between classroom observation scores and teacher value added on multiple types of assessment. *Educational Researcher*, 43(6), 293–303.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430–511.

Hill, H. C., Kapitula, L. R., & Umland, K. L. (2011). A validity argument approach to evaluating value-added scores. *American Educational Research Journal*, *48*(3), 794–831.

Kane, T. J., & Staiger, D. O. (2012). *Gathering feedback for teaching: Combining high-quality observations with student surveys and achievement gains*. Seattle: Bill & Melinda Gates Foundation.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Routledge.

Kieran C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 557-577). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Kyriakides, L., Christoforou, C., & Charalambous, C. Y. (2013).What matters for student learning outcomes: A meta-analysis of studies exploring factors of effective teaching. *Teaching and Teacher Education*, 36, 143–152.

Kyriakides, L., & Creemers, B. P. M. (2009). The effects of teacher factors on different outcomes: Two studies testing the validity of the dynamic model. *Effective Education,* 1(1), 61–86.

Naumann, A., Rieser, S., Musow, S., Hochweber, J., & Hartig, J. (2019). Sensitivity of Test Items to Teaching Quality. *Learning and Instruction*, 60. 41-53.

Ottmar, E. R., Rimm-Kaufman, S. E., Larsen, R. A., & Berry, R. Q. (2015). Mathematical knowledge for teaching, standards-based mathematics teaching practices, and student achievement in the context of the Responsive Classroom approach. *American Educational Research Journal*, *52*(4), 787–821.

Papay, J. P. (2011). Different tests, different answers: the stability of teacher value-added estimates across outcome measures. *American Educational Research Journal*, *48*(1), 163–193

Polikoff, M. S. (2016). Evaluating the instructional sensitivity of four states' student achievement tests. *Educational Assessment*, *21*(2), 102-119.

Ruiz-Primo, M.A., Li, M., Wills, K., Giamellaro, M., Lan, M-C., Mason, H., Sands, D. (2012). Developing and evaluating instructionally sensitive assessments in science. *Journal of Research on Science Teaching*, 49(6), 691-712.

Seidel, T., & Shavelson, R. J. (2007). Teaching effectiveness research in the past decade: the role of theory and research design in disentangling meta-analysis results. *Review of Educational Research*, *77*(4), 454-499.

ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ ΣΤΗΝ ΚΥΠΡΟ

Μαρία Σιακαλλή, Κωνσταντίνος Ζαχάρος

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Πανεπιστήμιο Πατρών (Τ.Ε.Α.Π.Η)

shiakalli.m@cyearn.pi.ac.cy, zacharos@upatras.gr

Σκοπός της εργασίας είναι να διερευνήσει κατά πόσο η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο καλοκαιρινό σχολείο συνέτεινε στη δημιουργία κουλτούρας μάθησης μέσα από συνέργεια αλλά και στη βελτίωση των πεποιθήσεών τους σχετικά με τη διδακτική τους αυτεπάρκεια. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο πρόγραμμα συνέτεινε θετικά στη βελτίωση και των δύο πιο πάνω στοιχείων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Πεποιθήσεις διδακτικής αυτεπάρκειας

Η τροποποίηση των στάσεων των εκπαιδευτικών μέσω της διδασκαλίας δεν είναι εύκολη αφού, βασίζονται σε αντιλήψεις που είναι βαθιά ριζωμένες και έχουν την τάση να αντιστέκονται σε απόπειρες αλλαγών (Watson κ.α., 2004). Από την άλλη όμως, έρευνες δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί μέσω της μάθησης και της εμπειρίας, καθώς και μέσω της συμμετοχής τους σε προγράμματα επιμόρφωσης, ενισχύουν τη γνώση και τη αυτοπεποίθησή τους και μετασχηματίζουν τις αρνητικές στάσεις τους για το αντικείμενο των μαθηματικών (Williams και Nisbet, 2014). Επίσης, η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων με μαθηματικό περιεχόμενο προσφέρει τα αναγκαία εσωτερικά κίνητρα, όπως είναι η ενίσχυση της αυτονομίας τους, ευκαιρίες για επιτυχή ανταπόκριση στο έργο που αναλαμβάνουν, καθώς και ανάπτυξη των ευκαιριών συνεργασίας (Jones κ.α., 2011).

Αρκετοί ερευνητές αναγνωρίζουν μια συνάφεια στις αντιλήψεις επάρκειας των εκπαιδευτικών για την ικανότητά τους να διδάσκουν και την επίδοση των μαθητών τους (Chester και Beaudin 1996; Soodak και Podell 1996). Η εισαγωγή κατάλληλων προγραμμάτων επιμόρφωσης εκπαιδευτικών και μελλοντικών εκπαιδευτικών έδειξε τη βελτίωση των στάσεων προς τα μαθηματικά, καθώς και τη βελτίωση των πεποιθήσεων διδακτικής αυτο-αποτελεσματικότητας (Philippou και Christou 1998).

Συμμετοχικές κοινότητες μάθησης

Ο σύγχρονος εκπαιδευτικός επαγγελματισμός καθώς επίσης και η δια βίου μάθηση απαιτούν από τους εκπαιδευτικούς την ανάληψη προσωπικής ευθύνης σχετικά με τη συνεχή ενημέρωση των γνώσεων και δεξιοτήτων τους. Ο πιο πάνω στόχος μπορεί να επιτευχθεί μέσα από συστηματική προσωπική μελέτη, εφαρμογή έρευνας δράσης, αλληλεπίδραση με εμπειρογνώμονες, αλληλεπίδραση με συναδέλφους από διαφορετικά πλαίσια, μάθηση μέσα από συνέργεια σε κοινότητα μάθησης (Peel, 2010; IPA, 2017). Η μάθηση κοινοτήτων μέσα από συνέργεια (collaboration) μπορεί να απελευθερώσει και να ενδυναμώσει την επαγγελματική δυναμική των εκπαιδευτικών, νοουμένου ότι στην ομάδα κτίζονται σχέσεις αμοιβαίας εμπιστοσύνης (Peel και Shortland, 2004). Η μάθηση μέσα από συνέργεια (collaborative learning) δεν περιορίζεται στην απόδοση συγκεκριμένης τεχνικής στη διαδικασία μάθησης. Αντίθετα αποτελεί προσωπική φιλοσοφία, η οποία σέβεται και υπογραμμίζει τις ατομικές ικανότητες και συνεισφορές των μελών της ομάδας, στηρίζεται στη συναίνεση και οικοδομείται μέσα από τη συνεργασία των μελών της ομάδας (Panitz, 1999). Στηρίζεται στις αρχές του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού σύμφωνα με τις οποίες η γνώση γίνεται αντιληπτή ως κοινωνικό οικοδόμημα και η μάθηση ως κοινωνική διαδικασία (Brufee, 1999).

Η παρούσα εργασία συνεισφέρει στα πιο πάνω αφού μέσα από αυτήν φαίνεται ότι οι συμμετοχικές κοινότητες μάθησης μπορούν να συνεισφέρουν στη βελτίωση της διδακτική αυτεπάρκειας των εκπαιδευτικών σχετικά με τα Μαθηματικά στο νηπιαγωγείο.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εισαγάγει και να αξιολογήσει την εφαρμογή ενός, καινούριου για τα δεδομένα της Κύπρου, προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών προσχολικής εκπαίδευσης, στο αντικείμενο της διδακτικής των Μαθηματικών στο νηπιαγωγείο με έμφαση στις λεκτικές αλληλεπιδράσεις. Ειδικότερα τα ερευνητικά ερωτήματα που επιχειρείται να διερευνηθούν είναι τα εξής:

1. Πώς επηρεάστηκαν οι πεποιθήσεις διδακτικής αυτεπάρκειας των συμμετεχουσών σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο γενικότερα αλλά και τις λεκτικές αλληλεπιδράσεις στα μαθηματικά στο νηπιαγωγείο ειδικότερα και ποιοι παράγοντες έπαιξαν ρόλο;
2. Πώς λειτούργησε η δημιουργία συμμετοχικής κοινότητας μάθησης κατά τη διάρκεια του προγράμματος;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το Δείγμα

Το πρώτο καλοκαιρινό σχολείο διδακτικής των Μαθηματικών στο νηπιαγωγείο για εκπαιδευτικούς προσχολικής εκπαίδευσης οργανώθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου μεταξύ 1ης και 5ης Ιουλίου 2019 στις εγκαταστάσεις της Εμπορικής Σχολής Μιτσή στη Λεμύθου (χωριό στην ορεινή επαρχία Λεμεσού στην οροσειρά του Τροόδους). Οι εγκαταστάσεις εκτός από τις αίθουσες διδασκαλίας συμπεριλάμβαναν και κοιτώνες για διαμονή των συμμετεχουσών. Στο καλοκαιρινό σχολείο έλαβαν μέρος 19 εκπαιδευτικοί προσχολικής εκπαίδευσης από την Κύπρο οι οποίες υπηρετούν σε δημόσια νηπιαγωγεία. Η διαδικασία επιλογής έγινε με βάση σειρά προτεραιότητας δήλωσης ενδιαφέροντος από εκπαιδευτικούς προσχολικής εκπαίδευσης σε ηλεκτρονική πλατφόρμα εγγραφών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου Κύπρου. Η συμμετοχή στο καλοκαιρινό σχολείο (διαμονή, διατροφή και παρακολούθηση των εργαστηρίων) ήταν δωρεάν για τις συμμετέχουσες. Στο καλοκαιρινό σχολείο συμμετείχαν 19 εκπαιδευτικοί, όλες γυναίκες, από όλες τις επαρχίες της Κύπρου με διδακτική εμπειρία από 6 μέχρι 20 έτη.

Δομή επιμόρφωσης

Το πρώτο καλοκαιρινό σχολείο διδακτικής των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο είναι επιμορφωτικό πρόγραμμα διάρκειας πέντε συνεχόμενων εργάσιμων ημερών κατά το οποίο οι συμμετέχουσες είχαν την ευκαιρία να παρακολουθήσουν εντατικό πρόγραμμα επιμόρφωσης σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο στον τομέα των λεκτικών αλληλεπιδράσεων και της σημασίας τους για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης στην προσχολική εκπαίδευση. Οι συναντήσεις είχαν εργαστηριακή μορφή, είχαν συνολική διάρκεια τριάντα ώρες (έξι ώρες κάθε μέρα) και πραγματοποιούνταν σε πρωινό και απογευματινό χρόνο καθημερινά. Κατά τη διάρκεια του καλοκαιρινού σχολείου πραγματοποιήθηκαν και δραστηριότητες οι οποίες στόχο είχαν την αλληλεπίδραση, εκπαιδευτική και κοινωνική, των συμμετεχουσών εκτός εργαστηρίων.

Το περιεχόμενο του προγράμματος επικεντρώθηκε στις λεκτικές αλληλεπιδράσεις και το ρόλο τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης στο νηπιαγωγείο (Πίνακας 1).

Ημερομηνία	Θέμα
1/7/2019	Οι ερωτήσεις στη διδακτική των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο
2/7/2019	Λεκτικές αλληλεπιδράσεις στα μαθηματικά
3/7/2019	Ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας και του λογικού συλλογισμού παιδιών προσχολικής ηλικίας
4/7/2019	Διαφοροποίηση στα μαθηματικά στο νηπιαγωγείο
5/7/2019	Ανάπτυξη μαθηματικής νοοτροπίας (mathematical mindsets) στην τάξη του νηπιαγωγείου

Πίνακας 1: Το περιεχόμενο του προγράμματος.

ΣΥΛΛΟΓΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσα από μαγνητοφωνήσεις των εργαστηρίων, τα ημερήσια ατομικά αναστοχαστικά ημερολόγια των συμμετεχουσών και το έντυπο αξιολόγησης του προγράμματος.

Αποτίμηση του προγράμματος

Στο έντυπο αξιολόγησης του προγράμματος όλες οι συμμετέχουσες δήλωσαν ότι σε γενικές γραμμές το πρόγραμμα ανταποκρίθηκε στις προσδοκίες τους και η διοργάνωσή του τις ικανοποίησε στο μέγιστο βαθμό. Όλες οι συμμετέχουσες δήλωσαν στο μέγιστο βαθμό ότι ο εργαστηριακός χαρακτήρας του προγράμματος ήταν χρήσιμος και ότι ο χρόνος για συζήτηση και ανάπτυξη των θεμάτων ήταν ικανοποιητικός. Όλες οι συμμετέχουσες δήλωσαν ότι οι πρακτικές που παρουσιάστηκαν στο πρόγραμμα μπορούν να εφαρμοστούν στην τάξη σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Αλληλεπιδράσεις συμμετεχουσών σε κλίμα συνέργειας

Η κύρια θεματική του προγράμματος ήταν η μελέτη του τρόπου με τον οποίο ο λόγος μπορεί να μετατραπεί σε εργαλείο σκέψης κατά τη διαδικασία ανακάλυψης και μάθησης στα μαθηματικά στο νηπιαγωγείο κυρίως μέσα από αλληλεπίδραση των παιδιών μεταξύ τους αλλά και με την εκπαιδευτικό. Το πρόγραμμα σχεδιάστηκε με τρόπο ώστε να προάγει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ συμμετεχουσών αλλά και μεταξύ συμμετεχουσών και επιμορφωτών ώστε βιωματικά να στηριχθεί και να ενισχυθεί ο πιο πάνω σκοπός. Κατά τις ομαδικές αναστοχαστικές συζητήσεις στην ολομέλεια επανειλημμένα οι συμμετέχουσες ανέφεραν ότι η διάρκεια του προγράμματος (πέντε συνεχόμενες μέρες), η συνεχής συνύπαρξη των συμμετεχουσών εντός και εκτός εργαστηρίων, η συνεχής παρουσία των επιμορφωτών (εντός και εκτός εργαστηρίων) και το φυσικό περιβάλλον ήταν τα στοιχεία που έπαιξαν καταλυτικό ρόλο στη διαμόρφωση κοινότητας μάθησης.

Αξία συνεργατικότητας (Αποσπάσματα 1-4)

Απόσπασμα 1

«Το καλύτερο στοιχείο του προγράμματος ήταν ότι ήμασταν συνέχεια όλες μαζί και συζητούσαμε κυρίως για τη διδακτική των μαθηματικών. Ήμασταν μακριά από όλα. Αυτό βοήθησε πολύ στο να είμαστε εστιασμένες σε αυτό που ήρθαμε να κάνουμε».

Απόσπασμα 2

«Η φύση αλλά και το κλίμα «κατασκήνωσης» μας χαλάρωσε όλες πολύ. Επικεντρωθήκαμε στο θέμα του προγράμματος και συζητούσαμε συνέχεια για αυτό, ακόμη και τις ώρες που δεν ήμασταν στα εργαστήρια. Αυτές οι συζητήσεις βοήθησαν πολύ ώστε να αναθεωρήσω την καθημερινή μου πρακτική αλλά και να νιώσω ότι δεν είμαι η μόνη με αμφιβολίες και ερωτηματικά».

Απόσπασμα 3

«Το γεγονός ότι ήμασταν όλοι μαζί συνέχεια δημιούργησε δεσμούς αν και αρχικά ήμασταν οι περισσότερες άγνωστες μεταξύ μας. Ο δεσμός αυτός δυνάμωσε με τις ομαδικές εργασίες αλλά και με τις δραστηριότητες. Τώρα νιώθω ότι είμαστε μια ομάδα. Μαζί προβληματιζόμαστε, συζητάμε, σκεφτόμαστε, μαθαίνουμε. Αυτό θέλω να γίνεται και στην τάξη μου στα μαθηματικά, θέλω όλα τα παιδιά μου να το ζήσουν».

Απόσπασμα 4

«Χαίρομαι γιατί είμαστε ομάδα. Όλες θέλουμε να μοιραστούμε, να δοκιμάσουμε, να στηρίξουμε η μια την άλλη και μετά το τέλος του προγράμματος. Ήδη δημιουργήσαμε διαδικτυακή ομάδα για αυτό το σκοπό. Το καλύτερο είναι ότι σε αυτήν συμμετέχουν και οι επιμορφωτές μας. Η μάθηση, η αλληλεπίδραση και η στήριξη θα συνεχιστούν και μετά το πρόγραμμα και αυτό είναι πολύ σημαντικό».

Απόσπασμα 5

«Ζούσαμε όλοι μαζί. Όχι μόνο εμείς οι συμμετέχουσες αλλά και οι επιμορφωτές. Γίνονταν συνέχεια και παντού πολύ όμορφες συζητήσεις για τη διδακτική των μαθηματικών. Ένιωσα άνετα, ένιωσα ασφάλεια, ένιωσα ότι έμαθα. Ο ρόλος των επιμορφωτών ήταν σημαντικός ώστε να γίνουμε από πολύ νωρίς ομάδα. Αυτός θέλω να είναι και ο ρόλος ο δικός μου στην τάξη ώστε τα παιδιά μου να μαθαίνουν ως ομάδα και ως κοινότητα».

Πεποιθήσεις διδακτικής αυτεπάρκειας.

Όλες οι συμμετέχουσες δήλωσαν ότι έχουν αυξηθεί οι ικανότητές τους για αξιοποίηση των προσεγγίσεων που προτάθηκαν και ότι διευρύνθηκε το θεωρητικό και πρακτικό τους υπόβαθρο για θέματα επαγγελματικής μάθησης/ ανάπτυξης στο μέγιστο βαθμό. Παρατίθενται ενδεικτικές δηλώσεις:

Βελτίωση αισθημάτων αυτεπάρκειας (Αποσπάσματα 1-4)

Απόσπασμα 1

«Προβληματίστηκα αρκετά πριν δηλώσω συμμετοχή στο πρόγραμμα. Αποφάσισα να δηλώσω γιατί νιώθω ότι υστερώ στη διδακτική των μαθηματικών και σκέφτηκα ότι αυτή θα ήταν μια καλή ευκαιρία. Χαίρομαι που τόλμησα. Έμαθα πάρα πολλά, άλλαξε ο τρόπος που αντιμετωπίζω τη διδακτική των μαθηματικών και φέτος θα δοκιμάσω πολλά από αυτά που έμαθα».

Απόσπασμα 2

«Τα μαθηματικά δεν είναι το αγαπημένο μου αντικείμενο. Ξέρω ότι τα διδάσκω μονολιθικά και ήθελα να αλλάξει αυτό. Το καλοκαιρινό σχολείο μου έδωσε αυτή την ευκαιρία. Έμαθα πάρα πολλά και ανυπομονώ να τα εφαρμόσω. Δεν έχω άγχος αν τα κάνω σωστά. Η έγνοια μου θα είναι πλέον όταν τα κάνουμε να περνάμε καλά»

Απόσπασμα 3

«Νιώθω έτοιμη να τολμήσω και να προσπαθήσω. Πάντα θα νιώθω ανασφάλεια αλλά πια δεν τη φοβάμαι. Αυτή η ανασφάλεια δεν είναι παράγοντας για να αποφεύγω αλλά για να δοκιμάζω, να προσπαθώ, να προβληματίζομαι και να βελτιώνομαι»

Απόσπασμα 4

«Για εμένα η διδασκαλία των μαθηματικών ήταν κάτι που έκανα μηχανικά. Δεν ένιωθα ιδιαίτερη ικανοποίηση και προτιμούσα να κάνω πράγματα απλά, που ήξερα καλά. Τώρα ανυπομονώ να δοκιμάσω όλα αυτά τα καινούρια. Δεν με αγχώνει που δεν έχω τις απαντήσεις σε όλα, δεν με φοβίζει αν κάνω λάθος. Μαζί με τα παιδιά θα βρούμε το δρόμο και είμαι σίγουρη ότι θα βρούμε και απαντήσεις».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρουσίασή μας εδώ επιχειρήθηκε να αποτυπωθούν, συνοπτικά, στοιχεία ενός επιμορφωτικού προγράμματος με εν ενεργεία νηπιαγωγούς της Κύπρου. Το αντικείμενο της επιμόρφωσης ήταν η συνεισφορά της λεκτικής αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη για τη συγκρότηση της λογικομαθηματικής σκέψης των νηπίων. Δύο στοιχεία της επιμόρφωσης θίχτηκαν. Αρχικά η διαδικασία τροποποίησης των πεποιθήσεων διδακτικής αυτεπάρκειας των συμμετεχουσών. Πράγματι, οι καταγραφές των νηπιαγωγών που συμμετείχαν στο πρόγραμμα είναι δηλωτικές της αλλαγής της στάσης τους απέναντι στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Επιπλέον, καταγράφονται ενδείξεις για αποδέσμευση από ένα αίσθημα ανεπάρκειας που λειτουργεί αποτρεπτικά σε κάθε απόπειρα καινοτομίας και πειραματισμού στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην ενίσχυση του αισθήματος διδακτικής επάρκειας σημαντικός ήταν ο ρόλος του παιδαγωγικού πλαισίου σχεδιασμού και υλοποίησης του προγράμματος. Η συνέργεια στο πλαίσιο της κοινότητας των νηπιαγωγών που συμμετείχαν στο πρόγραμμα, η αλληλεπίδραση, αλλά και η ενίσχυση της αυτονομίας, ο αναστοχασμός και η αυτοαξιολόγηση της καθημερινής προσπάθειας, η ενασχόληση με νέες, για τις συμμετέχουσες, διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης μέσω διαδικασιών διερεύνησης, ήταν στοιχεία που συνέτειναν στην αποφόρτιση από τους δισταγμούς και τις φοβίες που συνοδεύουν τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η υλοποίηση του συγκεκριμένου προγράμματος δίνει σοβαρές ενδείξεις για την αποτελεσματικότητα παρόμοιων επιμορφωτικών εγχειρημάτων, όταν αυτά διαπνέονται από μια διαφορετική παιδαγωγική προσέγγιση, όπου ηγεμονεύουν η συνεργασία και η διερεύνηση. Βέβαια, πρέπει να επισημάνουμε ότι, η υιοθέτηση του προηγούμενου πλαισίου από τους εκπαιδευτικούς δεν είναι πάντα εύκολη, γιατί συχνά οι εκπαιδευτικοί «φιλτράρουν» τις παιδαγωγικές αρχές του προγράμματος μέσω των υφισταμένων πιστεύω τους (beliefs) και του προσδίδουν πιο παραδοσιακά χαρακτηριστικά (Stipek, κ.α., 2001).

Συμπερασματικά, η συμπεριφορά των νηπιαγωγών του συγκεκριμένου προγράμματος, που υιοθέτησαν νέους ρόλους και πρακτικές, καθώς και το έντονο ενδιαφέρον για εξέλιξη της επιστημονικής και επαγγελματικής τους θέσης, ιχνηλατούν ελπιδοφόρες διεξόδους για τους τρόπους επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών που στελεχώνουν τα σχολεία μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brufee, A. K. (1999). *Collaborative learning: higher education interdependence, and the authority of knowledge.* Johns Hopkins University Press.

Chester, M. D., & Beaudin, B. Q. (1996). Efficacy beliefs of newly hired teachers in urban schools. *American Educational Research Journal, 33,* (1), 233-257.

IPA. (2017). *A Study of the Teachers' Professional Learning Initiative (TPL); Cyprus Pedagogical Institute (CPI), a Directorate of the Ministry of Education and Culture.*

Jones, B., Uribe-Flórez, L., & Wilkins, J. (2011). Motivating students with manipulatives: using self-determination theory to intrinsically motivate students. In D. Brahier and W. Speer (Eds.), *Motivation and disposition: pathways to learning mathematics, 73rd yearbook*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Panitz, T. (1999). *A definition of collaborative vs cooperative learning.* ERIC ED448443.

Peel, D. (2010). Collaborative Professionalism. *Journal of education in the built environment.* 5(2): 1-3.

Peel, D. & Shortland, S. (2004). Student-teacher collaborative reflection: perspectives on learning together. *Innovations in education and teaching international.* 41(1):49-58.

Philippou, G. N., & Christou, C. (1998). The Effects of a Preparatory Mathematics Program in Changing Prospective Teachers` Attitudes toward Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, 189-206.

Soodak, L. C., & Podell, D. M. (1996). Teacher Efficacy: Toward the understanding of a multi-faceted construct. Teaching and Teacher Education, 12(4), 401-411. Shaughnessy, J., M. (1992). 'Research in probability and statistics: Reflections and directions', in D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 465–494.

Stipek, D. J., Karen B. Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. Teaching and Teacher Education, 17, 213-226.

Watson, J.M., Caney, A., & Kelly, B.A. (2004). Beliefs about chance in the middle years: Longitudinal change. In I. Putt, R. Faragher, and M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010: Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville* (Vol. 2, pp. 581-588). Sydney, NSW: MERGA.

Williams, A., & Nisbet, S. (2014). Primary School Students' Attitudes To and Beliefs About Probability. In Egan J. Chernoff _ Bharath Sriraman (Eds.). *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives* (683-708), Springer, Germany and USA.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μάρκος Δάλλας

Department of Mathematical Sciences, University of Agder, Norway

markos.dallas@uia.no

Η ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας έδειξε ότι οι ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση εξετάζουν την επιχειρηματολογία στην τάξη των μαθηματικών με έμφαση είτε στις κοινωνικές και κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες είτε στη δομή των μαθηματικών επιχειρημάτων. Στην προσπάθεια «θεωρητικοποίησης» αυτών των δύο προσεγγίσεων προέκυψε το «Μοντέλο αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών» (MCIM). Σε αυτήν την εργασία γίνεται μια προσπάθεια να «λειτουργοποιηθεί» το μοντέλο MCIM με τη διαμόρφωση μιας κατάλληλης μεθοδολογικής προσέγγισης. Σε αυτήν την κατεύθυνση, συζητείται η σχέση μεταξύ των ερευνητικών ερωτήσεων, των μεθοδολογικών πλαισίων και του μοντέλου MCIM.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη βιβλιογραφία που εστιάζει στην επιχειρηματολογία στην τάξη των μαθηματικών διακρίνονται δύο κυρίαρχες προσεγγίσεις: η πρώτη υπό το πρίσμα των κοινωνικών και κοινωνικο-μαθηματικών νορμών (π.χ. Yackel & Cobb, 1996) και η δεύτερη υπό το πρίσμα της δομής των μαθηματικών επιχειρημάτων (π.χ. Stylianides, 2007). Ωστόσο, μέχρι στιγμής, δεν εντοπίζεται σαφής προσπάθεια να αναπτυχθεί ένα συνεκτικό θεωρητικό πλαίσιο και μεθοδολογικά εργαλεία που να πλαισιώνουν τις δύο προσεγγίσεις της βιβλιογραφίας (Dallas, in press). Η εργασία που παρουσιάζεται εδώ αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης προσπάθειας προς αυτήν την κατεύθυνση, η οποία επικεντρώνεται στη διαδικασία επιχειρηματολογίας στην τάξη μαθηματικών του Δημοτικού, εξετάζοντας τις νόρμες, τις αλληλεπιδράσεις και τους ρόλους των συμμετεχόντων στην πρακτική της μάθησης και της διδασκαλίας.

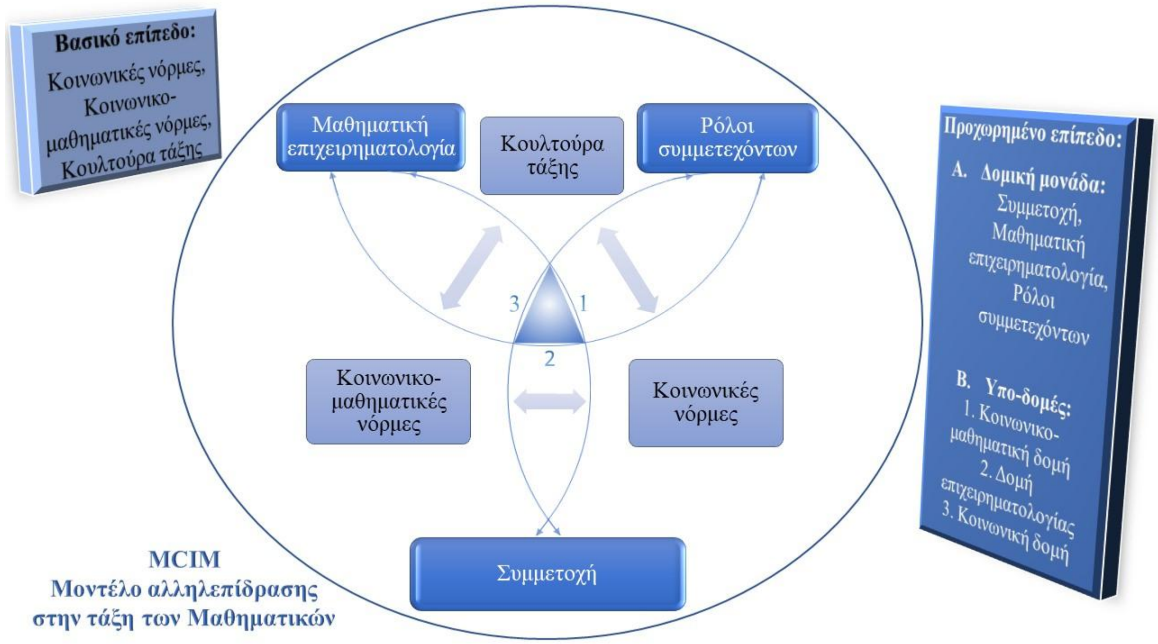
ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

Κατά τη «θεωρητικοποίηση» (theorizing) των δύο προσεγγίσεων της βιβλιογραφίας συζητούνται και διευκρινίζονται έννοιες που αφορούν το μαθηματικό επιχείρημα, τη διαδικασία επιχειρηματολογίας και τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων στην τάξη. Αυτό με οδήγησε στο να διατυπώσω τα προκαταρκτικά ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης καθώς και να εξετάσω τη συνοχή -τόσο τη συμβατότητα όσο και τη συμπληρωματικότητα- των δύο προσεγγίσεων. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η ανάπτυξη του «Μοντέλου αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών» («Mathematics Classroom Interactional Model» MCIM) στο οποίο αποτυπώνονται οι έννοιες και οι πιθανές τους σχέσεις που καθοδηγούν τη μελέτη (Dallas, in press). Σε αυτήν τη βάση, στην παρούσα εργασία, αναπτύσσεται μια κατάλληλη μεθοδολογική προσσέγγιση για τη διατύπωση και την αντιμετώπιση των ερευνητικών ερωτήσεων της μελέτης. Μία από τις σημαντικές συνεισφορές της μεθοδολογικής προσσέγγισης αποτελεί η διάκριση του πλαισίου επιχειρηματολογίας σε δύο συνιστώσες: τα επιχειρήματα και τον «λόγο επιχειρηματολογίας» (argumentation discourse) στην τάξη των μαθηματικών. Και οι δύο έννοιες έχουν συμβάλλει στη διαμόρφωση των ερευνητικών ερωτήσεων σε σχέση τόσο με το πλαίσιο των νορμών όσο και με το κοινωνικό πλαίσιο που αναλύονται στη συνέχεια.

ΜΟΝΤΕΛΟ MCIM

Οι κοινωνικές και κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες συνιστούν σημαντικό παράγοντα που ρυθμίζει την αλληλεπίδραση στην τάξη των μαθηματικών κατά την ανάπτυξη των επιχειρημάτων. Ειδικότερα, οι ρόλοι των μαθητών/μαθητριών και των εκπαιδευτικών κατά την ανάπτυξη των επιχειρημάτων, στο πλαίσιο των νορμών και των αλληλεπιδράσεων, θα μπορούσαν να προωθήσουν (ή όχι) τη μαθηματική συζήτηση και τη συμμετοχή στην τάξη. Η προσπάθεια «θεωρητικοποίησης» των ανωτέρω εννοιών οδήγησε στη δημιουργία του μοντέλου MCIM, με τις βασικές έννοιες και τις πιθανές αλληλεπιδράσεις τους (Dallas, in press). Στην παρούσα εργασία επιχειρείται μια συνολική παρουσίαση του ανωτέρω μοντέλου με έμφαση σε μεθοδολογικά ζητήματα αξιοποίησής του στην πράξη.

Το μοντέλο MCIM, Εικόνα 1, περιλαμβάνει δύο επίπεδα αλληλεπίδρασης στην τάξη. Το πρώτο (βασικό) επίπεδο αλληλεπίδρασης στην τάξη ορίζεται από τις σχέσεις μεταξύ των κοινωνικών νορμών, των κοινωνικο-μαθηματικών νορμών και την κουλτούρα στην τάξη. Αυτοί είναι οι βασικοί παράγοντες που χαρακτηρίζουν την αλληλεπίδραση στην τάξη. Το δεύτερο (προχωρημένο) επίπεδο αλληλεπίδρασης στην τάξη ορίζεται από τις σχέσεις μεταξύ της συμμετοχής, της μαθηματικής επιχειρηματολογίας και του ρόλου των συμμετεχόντων. Αυτό το επίπεδο περιλαμβάνει: Α: τους τρεις παράγοντες ως μια δομική μονάδα: συμμετοχή, μαθηματική επιχειρηματολογία, ρόλοι συμμετεχόντων και Β: τρεις υπο-δομές: 1) κοινωνικο-μαθηματική δομή: συμμετοχή-μαθηματική επιχειρηματολογία 2) δομή επιχειρηματολογίας: μαθηματική επιχειρηματολογία-ρόλοι συμμετεχόντων, 3) κοινωνική δομή: ρόλοι συμμετεχόντων-συμμετοχή. Κάθε μία από αυτές τις (υπο)δομές προϋποθέτει τη σύνδεση των παραγόντων του βασικού επιπέδου (Dallas, in press).



Εικόνα 1: Μοντέλο αλληλεπίδρασης στην τάξη των Μαθηματικών (MCIM)

Το μοντέλο MCIM καθοδηγεί το πεδίο της μελέτης με την αποσαφήνιση θεωρητικών πτυχών. Ωστόσο, για να αξιοποιηθεί αυτό το μοντέλο ερευνητικά απαιτείται η ανάπτυξη μιας κατάλληλης μεθοδολογικής προσέγγισης προκειμένου να καταστεί λειτουργικό (να «λειτουργοποιηθεί») (operationalize).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Η «λειτουργοποίηση» (operationalization) του μοντέλου MCIM επιτυγχάνεται ταυτοχρόνως μέσω της δυναμικής εξάρτησης δύο μεθοδολογικών σταδίων: Της διαμόρφωσης των ερευνητικών ερωτήσεων και της εννοιολόγησης τριών μεθοδολογικών πλαισίων.

Ερευνητικές ερωτήσεις

Η γενική ερευνητική ερώτηση είναι η εξής: Πώς οι αλληλεπιδράσεις του εκπαιδευτικού και των μαθητών/μαθητριών στην τάξη μαθηματικών του Δημοτικού επηρεάζουν τη διαδικασία της επιχειρηματολογίας (επιχειρήματα και λόγος επιχειρηματολογίας);

Οι δύο ερευνητικές ερωτήσεις είναι οι εξής: 1) Πώς οι κοινωνικές και κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που σχετίζονται με τον λόγο επιχειρηματολογίας επηρεάζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών επιχειρημάτων; και 2) Πώς οι ρόλοι του εκπαιδευτικού και των μαθητών/μαθητριών που σχετίζονται με τον λόγο επιχειρηματολογίας επηρεάζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών επιχειρημάτων;

Πλαίσιο νορμών

Το πλαίσιο των νορμών αποτελείται από τις κοινωνικές νόρμες και τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες.

Η διαμόρφωση της κουλτούρας στην τάξη σχετίζεται τόσο με τις νόρμες όσο και με τη δομή της συμμετοχής και του λόγου (discourse) κατά τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων στην τάξη (Wood, Williams & McNeal, 2006). Ενώ οι κοινωνικές νόρμες περιγράφουν τις πρακτικές των εκπαιδευτικών και των μαθητών/μαθητριών σε δραστηριότητες στην τάξη, οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες περιγράφουν τις πρακτικές τους σε μαθηματικές δραστηριότητες στην τάξη (Yackel & Cobb, 1996). Οι Yackel και Cobb (1996), που διερευνούν το ρόλο της επικοινωνίας ως πολιτισμικού εργαλείου, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι κοινωνικές νόρμες (π.χ. εξήγηση και αιτιολόγηση μιας λύσης) επηρεάζουν άμεσα το μοτίβο συμμετοχής, ενώ οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες δημιουργούν μια συγκεκριμένη δομή (π.χ. ποια απάντηση θεωρείται μαθηματικά διαφορετική) παρέχοντας ίσες ευκαιρίες συμμετοχής στην τάξη για όλους τους μαθητές και τις μαθήτριες. Από την άλλη πλευρά, η Stephan (2014) φαίνεται να προσδίδει σε αυτού του είδους τις πρακτικές έμφαση στον λόγο στην τάξη. Ορίζει, λοιπόν, τις κοινωνικές νόρμες ως τις προσδοκίες των εκπαιδευτικών και των μαθητών/μαθητριών κατά τη συμμετοχή τους σε οποιοδήποτε λόγο στην τάξη. Ενώ οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες καθορίζονται από τη διαπραγμάτευση των εκπαιδευτικών και των μαθητών/μαθητριών για το τι συνιστά αποδεκτή μαθηματική εξήγηση, διαφορετική λύση, αποτελεσματική λύση και εξελιγμένη λύση σε οποιαδήποτε τάξη μαθηματικών (Stephan, 2014). Τέλος, οι Kazemi και Stipek (2001) ορίζουν και περιγράφουν τέσσερις κατηγορίες κοινωνικών νορμών και κοινωνικο-μαθηματικών νορμών αντίστοιχα αποκαλύπτοντας τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές/μαθήτριες α) περιγράφουν στρατηγικές, β) συγκρίνουν στρατηγικές, γ) κάνουν λάθη και δ) συνεργάζονται.

Συνεπώς, οι Yackel και Cobb (1996) ορίζουν τις νόρμες μέσω των πρακτικών που αναπτύσσονται στην τάξη, η Stephan (2014) δίνει έμφαση στον λόγο αυτών των πρακτικών κατά τη συμμετοχή στην τάξη, ενώ τέλος από την έρευνα των Kazemi και Stipek (2001) φαίνεται σημαντική η δυναμική που αναπτύσσεται μεταξύ των κοινωνικών και κοικωνικο-μαθηματικών νορμών. Υπό αυτό το πρίσμα διερευνώνται και καταγράφονται οι κοινωνικές και κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες κατά τη διαδικασία της ανάλυσης των δεδομένων της παρούσας έρευνας.

Πλαίσιο επιχειρηματολογίας

Το πλαίσιο της επιχειρηματολογίας αποτελείται από τα επιχειρήματα και τον λόγο επιχειρηματολογίας.

Η προσέγγιση του Stylianides (2007) σχετικά με την απόδειξη και την αποδεικτική διαδικασία στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών παρέχει τις αρχικές ιδέες: τον ορισμό της απόδειξης, τα τρία συστατικά του μαθηματικού επιχειρήματος και τη διάκριση μεταξύ βασικών επιχειρημάτων και επακόλουθων επιχειρημάτων. Η διάκριση αυτή θα μπορούσε να παρέχει το πλαίσιο μέσα στο οποίο διαμορφώνεται η μαθηματική επιχειρηματολογία στην τάξη κατά τη συμμετοχή του εκπαιδευτικού και των μαθητών/μαθητριών επηρεάζοντας τις αλληλεπιδράσεις στην τάξη και αντίστροφα. Υπό αυτή την οπτική αξίζει να αναφερθεί ότι στις καθημερινές συνθήκες στην τάξη των μαθηματικών, όπου η μαθησιακή διαδικασία χαρακτηρίζεται ως «μεταφορά συμμετοχής» (participation metaphor) (Sfard, 1998), οι συμμετέχοντες μπορούν να παράγουν μια σειρά από επιχειρήματα, για παράδειγμα, εξελιγμένα επιχειρήματα ή επεξηγήσεις ενός επιχειρήματος (Krummheuer, 2015). Γι' αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναπτύχθουν λειτουργικοί ορισμοί των διαφορετικών τύπων επιχειρημάτων κατά τη διαδικασία της ανάλυσης των δεδομένων της παρούσας έρευνας, ώστε να μειωθεί τόσο η πολυπλοκότητα των διαφορετικών εννοιών που υπεισέρχονται στην έννοια του επιχειρήματος όσο και να καταγραφούν τα διαφορετικού είδους επιχειρήματα.

Επιπλέον, η αλληλεπιδραστική οπτική στην οποία στηρίζεται η μελέτη με οδήγησε να εξετάσω τον λόγο επιχειρηματολογίας εξαιτίας του οποίου αναπτύσσονται τα επιχειρήματα στην τάξη των μαθηματικών. Οι Kim και Hand (2015) διαμορφώνουν ένα πλαίσιο για την αξιολόγηση των χαρακτηριστικών του λόγου επιχειρηματολογίας που διευκολύνουν τις διαδικασίες συλλογισμού των μαθητών/μαθητριών στην τάξη φυσικών επιστημών του Δημοτικού. Το πλαίσιο αυτό βασίζεται σε δύο παράγοντες: την οικοδόμηση της γνώσης (πώς οι μαθητές/μαθήτριες οικοδομούν τις δικές τους γνώσεις και τις διατυπώνουν ως στάδιο προετοιμασίας του επιχειρήματος) και την κριτική της γνώσης (πώς οι μαθητές/μαθήτριες και οι εκπαιδευτικοί συζητούν τις ιδέες μεταξύ τους). Καθεμία από αυτές τις κατηγορίες αποτελείται από κωδικούς (συνιστώσες) που χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό και την ανάλυση των μοτίβων λόγου επιχειρηματολογίας στην τάξη. Παρόλο που αυτό το πλαίσιο έχει αναπτυχθεί για τάξεις φυσικών επιστημών, φαίνεται εξίσου κατάλληλο για τη διερεύνηση του λόγου επιχειρηματολογίας στις τάξεις μαθηματικών. Ωστόσο, φαίνεται να ανακύπτει μια θεμελιώδης διαφορά στον τρόπο εφαρμογής/μεταφοράς αυτού του πλαισίου καθώς σύμφωνα με τη θεωρητική οπτική της παρούσας μελέτης η οικοδόμηση της γνώσης επιτυγχάνεται μέσα από την κριτική της γνώσης κατά τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων στην τάξη των μαθηματικών. Συνεπώς, η διάκριση που κάνουν οι Kim και Hand (2015) δε φαίνεται να βρίσκει εφαρμογή γι' αυτό και οι αντίστοιχοι κωδικοί (συνιστώσες) απαιτούν τις ανάλογες τροποποιήσεις που θα προκύψουν κατά την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας.

Κοινωνικό πλαίσιο

Το κοινωνικό πλαίσιο αποτελείται από τους ρόλους των συμμετεχόντων και τη συμμετοχή.

Ο ρόλος της γλώσσας κατά τη μαθηματική επικοινωνία και την επιχειρηματολογία στην τάξη (Steinbring, 2005) είναι πολύ ενδιαφέρουσα οπτική. Προς αυτήν την κατεύθυνση αξίζει να σημειωθεί ότι ο Goffman (1981) κάνει τη διάκριση μεταξύ της συντακτικής μορφής των λέξεων και της ειδικής σύνθεσής τους (λειτουργία του σχηματισμού) και της σημασιολογικής συνεισφοράς (συναρτήσει του περιεχομένου). Στη συνέχεια, ο Levinson (1988) επέκτεινε τις ιδέες του Goffman (1981) και ο Krummheuer (2007, 2015) προσάρμοσε τις έννοιες των ρόλων των συμμετεχόντων (ομιλητών) στη μαθηματική εκπαίδευση: συγγραφέας, αναμεταδότης, ενεδρευτής, εκπρόσωπος. Αν και η προσέγγιση που ανέπτυξε ο Krummheuer (2007, 2015) παρέχει ένα πλαίσιο περιγραφής των ρόλων των συμμετεχόντων κατά τη μαθηματική επιχειρηματολογία στην τάξη, ωστόσο ο μηχανισμός απόκτησης ενός ρόλου και εναλλαγής των ρόλων δεν είναι προφανής και δεν μπορεί να εξηγήσει τα εμπόδια στη συμμετοχή των μαθητών/μαθητριών κατά την ανάπτυξη των μαθηματικών επιχειρήματων, κάτι που υποστηρίζουν και οι Cramer και Knipping (2018). Ως εκ τούτου, λαμβάνοντας υπόψη και τις ιδέες του Levinson (1988) σχετικά με την πολλαπλότητα και την αλλαγή των ρόλων των συμμετεχόντων καθώς και νέους ρόλους που θα μπορούσαν να αναγνωριστούν, να καθοριστούν και να επαναπροσδιοριστούν, είναι σημαντικό, υπό αυτό το πλαίσιο, να εξεταστούν κατά την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας τα μοτίβα των ρόλων των συμμετεχόντων.

Οι Cramer και Knipping (2018) υπογραμμίζουν τη σημασία της συμμετοχής κατά την επιχειρηματολογία στην τάξη των μαθηματικών, λαμβάνοντας υπόψη τις διαλογικές και κοινωνικές διαδικασίες που επηρεάζουν την επιχειρηματολογία. Έτσι, η συμμετοχή δεν είναι μόνο λόγος αλλά και η πρακτική δημιουργίας επιχειρημάτων μέσω των κοινωνικών μοτίβων αλληλεπίδρασης των συμμετεχόντων στην τάξη τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν, να διατηρηθούν και να μετασχηματιστούν. Κατά την ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας επεξεργάστηκα κυρίως το πλαίσιο των Lave και Wenger (1991) και του Wenger (1998) για τις μορφές συμμετοχής: «περιφερική», «πλήρης» και «περιθωριακή» (Wenger, 1998, σελ. 165–172). Ενώ, λοιπόν, σύμφωνα με την «Πλαισιοθετημένη Μάθηση» (Situated Learning) (Lave & Wenger, 1991) κάθε άτομο θα μπορούσε δυνητικά να χαρακτηριστεί ως συμμετέχων στην κοινότητα, τελικά φαίνεται ότι συμμετέχοντα μέλη της κοινότητας είναι εκείνα τα άτομα που μπορούν με επιτυχία να μεταβούν από τη περιφερική στην πλήρη συμμετοχή (Handley, Sturdy, Fincham & Clark, 2006). Επίσης, η περιθωριακή συμμετοχή θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μορφή «μη συμμετοχής» (Wenger, 1998, σελ. 116). Οπότε, τα άτομα που βρίσκονται στην περιφερική συμμετοχή και δεν καταφέρνουν να μεταβούν στην πλήρη, τελικά θα βρίσκονται στα περιθώρια (Handley et al, 2006), άρα (δυνητικά) μη συμμετέχοντες. Συνεπώς, φαίνεται ότι η αδυναμία σαφούς εννοιολόγησης αυτού του πλαισίου λόγω των περιορισμών του δεν το καθιστά πλήρως λειτουργικό. Γι’ αυτό κρίνεται αναγκαία η διαμόρφωση ενός λειτουργικού πλαισίου που θα μπορούσε να εξεταστεί και να αναθεωρηθεί κατά την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας μελέτης αναπτύσσοντας ποιοτικά κριτήρια για την κατηγοριοποίηση και την περιγραφή των μοτίβων συμμετοχής των συμμετεχόντων.

ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται να αποτυπωθεί ο τρόπος με τον οποίο τα τρία μεθοδολογικά πλαίσια σχετίζονται με τις ερευνητικές ερωτήσεις και αντίστροφα. Καθώς επίσης συζητείται και η θεωρητική υπόσταση της μεθοδολογικής προσέγγισης σύμφωνα με το μοντέλο MCIM. Προς την επίτευξη του σκοπού αυτής της ενότητας ο Πίνακας 1 παρέχει τη συνολική εικόνα μεταξύ της μεθοδολογικής προσέγγισης: ερευνητικές ερωτήσεις και μεθοδολογικά πλαίσια και της θεωρητικής προσέγγισης: μοντέλο MCIM.

Στην πρώτη ερευνητική ερώτηση γίνεται μια προσπάθεια να διερευνηθεί η επιρροή μεταξύ των νορμών και της διαδικασίας επιχειρηματολογίας στην τάξη των μαθηματικών συνδυάζοντας το μεθοδολογικό πλαίσιο των νορμών (κοινωνικές και κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες) και το πλαίσιο της επιχειρηματολογίας (επιχειρήματα και λόγος επιχειρηματολογίας). Η λογική αυτής της σχέσης βασίζεται στην κοινωνικο-μαθηματική δομή και στην κοινωνική δομή του μοντέλου MCIM, καθώς η συμμετοχή είναι η κοινή έννοια και των δύο δομών.

Μεθοδολογική προσσέγγιση		**Θεωρητική προσσέγιση**
Ερευνητικές ερωτήσεις	**Μεθοδολογικά πλαίσια**	**Μοντέλο MCIM**
Γενική ερευνητική ερώτηση: Πώς οι αλληλεπιδράσεις του εκπαιδευτικού και των μαθητών/μαθητριών στην τάξη μαθηματικών του Δημοτικού επηρεάζουν τη διαδικασία της επιχειρηματολογίας (επιχειρήματα και λόγος επιχειρηματολογίας);	Πλαίσιο νορμών, πλαίσιο επιχειρηματολογίας και κοινωνικό πλαίσιο	Δομική μονάδα
Πρώτη ερευνητική ερώτηση: Πώς οι κοινωνικές και κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που σχετίζονται με τον λόγο επιχειρηματολογίας επηρεάζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών επιχειρημάτων;	Πλαίσιο νορμών και πλαίσιο επιχειρηματολογίας	Κοινωνικο-μαθηματική δομή και κοινωνική δομή
Δεύτερη ερευνητική ερώτηση: Πώς οι ρόλοι του εκπαιδευτικού και των μαθητών/μαθητριών που σχετίζονται με τον λόγο επιχειρηματολογίας επηρεάζουν την ανάπτυξη των μαθηματικών επιχειρημάτων;	Κοινωνικό πλαίσιο και πλαίσιο επιχειρηματολογίας	Δομή επιχειρημα-τολογίας και κοινωνική δομή

Πίνακας 1: Ερευνητικές ερωτήσεις, μεθοδολογικά πλαίσια και μοντέλο MCIM

Στη δεύτερη ερευνητική ερώτηση επιχειρείται η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ του ρόλου των συμμετεχόντων και της διαδικασίας επιχειρηματολογίας στην τάξη των μαθηματικών συνδυάζοντας το μεθοδολογικό πλαίσιο της επιχειρηματολογίας (επιχειρήματα και λόγος επιχειρηματολογίας) και το κοινωνικό πλαίσιο (ρόλοι συμμετεχόντων και συμμετοχή). Η λογική αυτής της σχέσης βασίζεται στη δομή επιχειρηματολογίας και στην κοινωνική δομή του μοντέλου MCIM, καθώς οι ρόλοι συμμετεχόντων είναι η κοινή έννοια και των δύο δομών.

Και οι δύο ερευνητικές ερωτήσεις περιλαμβάνουν την κοινωνική δομή του μοντέλου MCIM (θεωρία) και το μεθοδολογικό πλαίσιο επιχειρηματολογίας (μεθοδολογία) σε σχέση με μία από τις άλλες δύο συνιστώσες αντίστοιχα, για την αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας των αλληλεπιδράσεων στην τάξη των μαθηματικών.

Τέλος, η γενική ερευνητική ερώτηση αντιμετωπίζεται έμμεσα μέσω των δύο ερευνητικών ερωτήσεων. Το σκεπτικό της γενικής ερώτησης απαντάται από το σύνολο και των τριών μεθοδολογικών πλαισίων και βασίζεται στη δομική μονάδα του μοντέλου MCIM.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια να «λειτουργοποιηθεί» το μοντέλο MCIM μέσω της διαμορφωσης των ερευνητικών ερωτήσεων και της εννοιολόγησης τρίων μεθοδολογικών πλαισίων. Επίσης, επιχειρήθηκε να αποτυπωθεί και η σχέση μεταξύ της θεωρητικής και της μεθοδολογικής προσσέγγισης συνολικά. Ωστόσο, η λειτουργικότητα της μεθοδολογικής προσσέγισης μένει να επιτευχθεί πλήρως με την ανάλυση ενός συνόλου δεδομένων μιας μελέτης περίπτωσης (κύρια έρευνα) που διεξάγεται σε μια τάξη μαθηματικών Δ΄ Δημοτικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Cramer, J. C., & Knipping, C. (2018). Participation in argumentation. In U. Gellert, C. Knipping and H. Straehler-Pohl (Eds.), *Inside the mathematics class: Sociological perspectives on participation, inclusion, and enhancement* (pp. 229–244). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Dallas, M. (in press). Towards an interactional perspective on argumentation in school mathematics. In: U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. xxxx-yyyy). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Goffman, E. (1981). Footing. In *Forms of talk* (pp. 124–159). Philadelphia, PA: Penn Press.

Handley, K., Sturdy, A., Fincham R., & Clark T. (2006). Within and beyond communities of practice: Making sense of learning through participation, identity and practice. *Journal of Management Studies*, *43*(3), pp. 641–653.

Kim, S., & Hand, B. (2015). An analysis of argumentation discourse patterns in elementary teachers' science classroom discussions. *Journal of Science Teacher Education*, *26*(3), 221–236.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60–82.

Krummheuer, G. (2015). Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 51–74). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Levinson, S. C. (1988). Putting linguistic on a proper footing: Explorations in Goffman's concepts of participation. In P. Drew, A. Wootton, & G. Ervin (Eds.), *Exploring the interaction* (pp. 161–227). Cambridge, United Kingdom: Polity Press.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27*(2), 4–13.

Stephan, M. (2014) Sociomathematical norms in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 563–566). Dordrecht: Springer.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. New York, NY: Springer Science & Business Media.

Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. New York, NY: Cambridge University Press.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(3), 222–255.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458–477.

ΑΠΟ ΤΟΝ ΕΝΣΑΡΚΩΜΕΝΟ ΣΤΟΝ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Σαμαρτζής Πέτρος[1], Γρίδος Παναγιώτης[2]

[1]M.Sc Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ [2]Εργαστήριο Μαθηματικών, Διδακτικής τους και Πολυμέσων, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

pisah_one@hotmail.com, p.gridos@aegean.gr

Η παρούσα έρευνα έχει στόχο να διερευνήσει αν και κατά πόσο οι φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών έχουν αναπτύξει την αξιωματική/τυπική κατανόηση της έννοιας του ορίου, αφού πρώτα εξετάσει τις επικρατούσες αντιλήψεις. Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 37 φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ και τα δεδομένα της έρευνας συλλέχθηκαν μέσω ερωτηματολογίου, το οποίο κατασκευάστηκε με βάση την θεωρία του D. Tall για τους τρεις κόσμους των μαθηματικών. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων κατέδειξε ότι η εικόνα που έχουν οι φοιτητές για την έννοια του ορίου, φαίνεται να είναι απομακρυσμένη από την τυπικότητα που παρέχει ο αξιωματικός κόσμος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών χαρακτηρίζεται από μια συνέπεια ως προς τις αναφορές της σχετικά με τον θεμελιακό χαρακτήρα της έννοιας του ορίου (Cornu, 1991; Bezuidenhout, 2001) αλλά και τις ακραίες δυσκολίες που συναντούν μαθητές και φοιτητές να αποκτήσουν μια αξιόπιστη και εύρωστη εικόνα για αυτήν (Mamona-Downs, 2001). Παρ' όλο το πλήθος των ερευνητικών προσπαθειών διερεύνησης και προσδιορισμού των τρόπων αντιμετώπισης των δυσκολιών που συναντά ένας σπουδαστής σχετικά με την έννοια του ορίου, δεν υπάρχουν σαφείς αναφορές προσδιορισμού επιτυχημένων τρόπων υπερκερασμού τους (Cottrill, Dubinsky, Devilyna, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic, 1996). Χαρακτηριστικές είναι οι έρευνες των Bezuidenhout (2001) και Przenioslo (2004) στις οποίες επιβεβαιώνεται ότι μια ουσιαστική κατανόηση των ορίων μεταξύ των φοιτητών είναι σχετικά σπάνια. Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, η δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του ορίου, εν μέρει, έγκειται στην δυσκολία της μετάβασης από την άτυπη/δυναμική αντίληψη (η έννοια του ορίου περικλείει την έννοια της κίνησης ως μία διαδικασία προσέγγισης) στην τυπική κατανόησή της.

Όσον αφορά τον ελληνικό χώρο, οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν στις αντιλήψεις και παρανοήσεις των μαθητών και τους τρόπους με τους οποίους αυτές μπορούν να ξεπεραστούν (Elia, Gagatsis, Panaoura, Zachariades & Zoulinaki, 2009). Η παρούσα έρευνα επιδιώκει να διερευνήσει την εικόνα που έχουν οι φοιτητές για την έννοια της σύγκλισης, καθώς και το βαθμό στον οποίο έχουν αναπτύξει την αξιωματική/τυπική κατανόηση της έννοιας του ορίου, αξιοποιώντας τη θεωρία μαθηματικής ανάπτυξης του Tall (2004). Η συγκεκριμένη θεωρία, επιχειρεί να καλύψει όλα τα είδη των αναπαραστάσεων αλλά και των λειτουργιών στα μαθηματικά, υποστηρίζοντας ότι η γνωστική ανάπτυξη των μαθηματικών γίνεται μέσα από τους τρεις παρακάτω κόσμους: α. *Τον ενσαρκωμένο κόσμο (embodied)*, ο οποίος συνθέτει έναν κόσμο που είναι μια, εμπλουτισμένη με εννοιολογικές κατηγοριοποιήσεις, εκδοχή του αντιληπτού/πραγματικού κόσμου, β. *Το συμβολικό-διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο (proceptual)*. Τα αντικείμενα αυτού του κόσμου είναι όσα αναπαρίστανται από ένα σύμβολο που αποδίδει τόσο μια διαδικασία όσο και ένα αντικείμενο. Διατηρώντας κοινό το σύμβολο για τη διαδικασία και το αποτέλεσμά της (π.χ. το όριο) συντίθεται ένας κόσμος ενεργών αντικειμένων, ο οποίος δεν δεσμεύεται από τον αντιληπτό (παρ' ότι σε ένα βαθμό εκκινεί από αυτόν), γ. *Τον αξιωματικό κόσμο (axiomatic),* στον οποίο τα Μαθηματικά αποτελούν ένα πλήρες θεωρητικό οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα.

Οι δύο πρώτοι κόσμοι, ο ενσαρκωμένος και ο διαδικασιοεννοιολογικός, είναι οι κόσμοι που κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα, ενώ ο αξιωματικός τρόπος σκέψης αρχίζει να διαμορφώνεται στο Λύκειο και ολοκληρώνεται στο Πανεπιστήμιο (Tall, 2004). Οι τρεις κόσμοι του Tall αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους και δεν αναπτύσσονται γραμμικά αλλά κυκλικά. Πιο συγκεκριμένα, δεν αρκεί να λειτουργεί κανείς αποτελεσματικά στον κάθε έναν από αυτούς ξεχωριστά, αλλά να δείχνει και την ευελιξία να μετακινείται με άνεση από τον έναν στον άλλον, να εκτελεί τον πλήρη κύκλο, να εξελίσσει και να ανατροφοδοτεί τα σχήματα που ανακύπτουν και να πηγαίνει από το γενικό στο αφηρημένο, από την ενσάρκωση και το συμβολισμό στο φορμαλισμό και το ανάποδο (Tall, 2008). Έτσι, δεν αναμένεται από έναν φοιτητή του τμήματος Μαθηματικών να «βρίσκεται» απλώς στον αξιωματικό κόσμο των μαθηματικών, αλλά να μπορεί να «μετακινείται» ανάμεσα στους τρεις κόσμους με ευλυγισία και αν είναι δυνατόν να τους συνδυάζει, ανάλογα με τις διεργασίες που πρέπει να εφαρμόσει. Κλειδί σε αυτή την μετάβαση αποτελούν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις/σημειωτική (σύμβολα, γραφικές παραστάσεις, λεκτικές διατυπώσεις) (Tall, 1995).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα διαμορφώθηκαν ως εξής: (α) Ποια είναι η κυρίαρχη αντίληψη που έχουν οι φοιτητές για την έννοια της σύγκλισης; (β) Σε ποιο βαθμό αξιοποιούν οι φοιτητές ικανότητες/εμπειρίες και από τους τρεις κόσμους των Μαθηματικών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου; (γ) Σε ποιο βαθμό συνδυάζουν οι φοιτητές αυτές τις ικανότητες/εμπειρίες ώστε να μπορούν να μετακινούνται ευέλικτα ανάμεσα στους τρεις κόσμους;

Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από τριάντα επτά φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, οι οποίοι έχουν παρακολουθήσει και στην πλειοψηφία τους έχουν εξεταστεί επιτυχώς στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι. Η επιλογή του δείγματος έγινε με βάση το αν οι φοιτητές είχαν παρακολουθήσει το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι καθώς και με βάση το κριτήριο της προσβασιμότητας.

Εργαλείο μέτρησης

Για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας κρίθηκε απαραίτητο να κατασκευαστεί δοκίμιο το οποίο αποτελείται από τρεις κατηγορίες έργων ανοιχτού και κλειστού τύπου. Η *πρώτη κατηγορία* περιλαμβάνει τέσσερα έργα από τα οποία στα δύο πρώτα οι φοιτητές έπρεπε να περιγράψουν με δικά τους λόγια πώς αντιλαμβάνονται τις έννοιες του ορίου συνάρτησης και του ορίου ακολουθίας πραγματικών αριθμών, ενώ στα επόμενα δύο τους ζητήθηκε να περιγράψουν πώς αντιλαμβάνονται ότι το όριο μιας συνάρτησης είναι ο αριθμός L καθώς το χ τείνει στο α (Conv) και τι σημαίνει ότι το όριο μιας συνάρτησης δεν υπάρχει (Noconv), σχεδιάζοντας κάθε φορά και ένα αντίστοιχο γράφημα συνάρτησης. Η *δεύτερη κατηγορία* περιλαμβάνει τρία έργα τα οποία διερευνούν τις ικανότητες των φοιτητών στον κάθε ένα κόσμο των Μαθηματικών ξεχωριστά (Embodied, Proceptual, Axiomatic). Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τον ενσαρκωμένο κόσμο, δόθηκε το γράφημα μίας συνάρτησης το οποίο διακοπτόταν σε αρκετά σημεία και τους ζητήσαμε να υπολογίσουν εννιά όρια, τα οποία είτε υπάρχουν, είτε δεν υπάρχουν. Στη δεύτερη περίπτωση οι φοιτητές θα έπρεπε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Όσον αφορά τον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο, τους ζητήθηκε να υπολογίσουν τέσσερα όρια (αν νομίζουν ότι αυτά υπάρχουν), εφαρμόζοντας κάποια διαδικασία/αλγόριθμο υπολογισμού, ενώ στο έργο που αφορά τον αξιωματικό κόσμο έπρεπε να υπολογίσουν ένα όριο χρησιμοποιώντας τον ε-δ ορισμό. Τέλος, η *τρίτη κατηγορία* περιλαμβάνει τρία έργα που εξετάζουν την ευελιξία της εναλλαγής ανάμεσα στους τρεις κόσμους των Μαθηματικών και την ικανότητα μετάβασης από το ένα σημειωτικό σύστημα στο άλλο (Pr2Emb, Pr2Ax, Ax2Emb).

Προκειμένου να διερευνήσουμε κατά πόσο οι φοιτητές είναι σε θέση να μεταφράσουν μία συμβολική αναπαράσταση (διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος) σε μία οπτική (ενσαρκωμένος κόσμος), τους ζητήθηκε αφενός να συμπληρώσουν (αν θεωρούν ότι γίνεται) το γράφημα μίας συνάρτησης σε κάθε μία από τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις, ώστε να ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)$=1 και αφετέρου να τεκμηριώσουν εάν τρεις διαφορετικές γραφικές παραστάσεις μπορούν να αναπαραστήσουν το γράφημα μίας συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x\to1} f(x)$=2. Επιπλέον, για να διερευνήσουμε την ικανότητα μετάβασης από τον διαδικασιοεννοιολογικό στον αξιωματικό κόσμο, τους ζητήθηκε να αναφέρουν αναλυτικά τις ιδιότητες του απειροστικού λογισμού που χρησιμοποίησαν κατά τον υπολογισμό των τεσσάρων ορίων στο δεύτερο έργο της δεύτερης κατηγορίας, ενώ όσον αφορά τη μετάβαση από τον αξιωματικό στον ενσαρκωμένο τους δόθηκε η απόδειξη της μοναδικότητας ορίου ακολουθίας ακριβώς όπως διατυπώνεται στο βιβλίο του Απειροστικού Λογισμού και τους ζητήθηκε να αναπτύξουν το πως θα την εξηγούσαν σε κάποιον συμφοιτητή τους, με την βοήθεια σχημάτων-οπτικών αναπαραστάσεων, ώστε να γίνει κατανοητή. Στόχος της ερώτησης αυτής είναι να εξετάσει το κατά πόσο οι φοιτητές είναι σε θέση να αποδώσουν σχηματικά και εμπειρικά μια πρόταση του αξιωματικού κόσμου η οποία είναι αφηρημένη και βρίσκεται μακριά από τη διαίσθησή τους. Οι φοιτητές συμπλήρωσαν γραπτά το ερωτηματολόγιο και είχαν στη διάθεσή τους μία ώρα.

Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων, χρησιμοποιήθηκε: α. ανάλυση περιεχομένου με σκοπό τον προσδιορισμό των αντιλήψεων των φοιτητών για τη σύγκλιση, β. περιγραφική στατιστική με το λογισμικό SPSS, με σκοπό την γενική περιγραφή της επίδοσης του συνόλου του δείγματος μέσω περιγραφικών μέτρων και γ. ιεραρχική ανάλυση ομοιότητας με το λογισμικό C.H.I.C, η οποία προσδιορίζει τις συνεπαγωγικές σχέσεις μεταξύ μεταβλητών (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008).

Όσον αφορά την ανάλυση περιεχομένου, οι σχετικές κατηγορίες προέκυψαν από τους Williams (1991) και Cottrill et al. (1996) οι οποίοι κάνουν λόγο για τρεις βασικές αντιλήψεις της έννοιας της σύγκλισης: τη δυναμική, τη στατική και τη μεικτή. Κριτήριο ένταξης στην κάθε κατηγορία αποτέλεσε η εκτίμηση σχετικά με αν η απάντηση του κάθε φοιτητή αντιστοιχίζεται ή ταιριάζει φανερά σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες, αν δηλώνει άμεσα το νόημά της ή εξηγεί το περιεχόμενό της. Πιο συγκεκριμένα, η δυναμική αντίληψη εκφράζεται με αποκλειστική αναφορά στην κίνηση της μεταβλητής χ προς τον αριθμό α και των αντίστοιχων τιμών της συνάρτησης προς τον αριθμό L, η στατική αντίληψη είναι αποκομμένη από την κίνηση και δεν γίνεται καμία αναφορά σε αυτήν, ενώ η μεικτή αντίληψη εμπεριέχει αναφορές και στη στατική και στη δυναμική διάσταση της έννοιας του ορίου. Οι παρακάτω περιγραφές αντλήθηκαν από τις απαντήσεις των φοιτητών και μπορούν να δοθούν ως παραδείγματα για την κάθε κατηγορία:

Παράδειγμα για τη δυναμική αντίληψη: «Οι τιμές της συνάρτησης προσεγγίζουν ή τείνουν προς την τιμή L, όταν το χ προσεγγίζει ή τείνει προς τον αριθμό α».

Παράδειγμα για τη στατική αντίληψη: «Οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται ή ζουν κοντά στον αριθμό L, όταν το χ βρίσκεται ή ζει κοντά στο α» ή «Οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται σ' ένα διάστημα γύρω από το L, όταν το χ βρίσκεται σ' ένα διάστημα γύρω από το α».

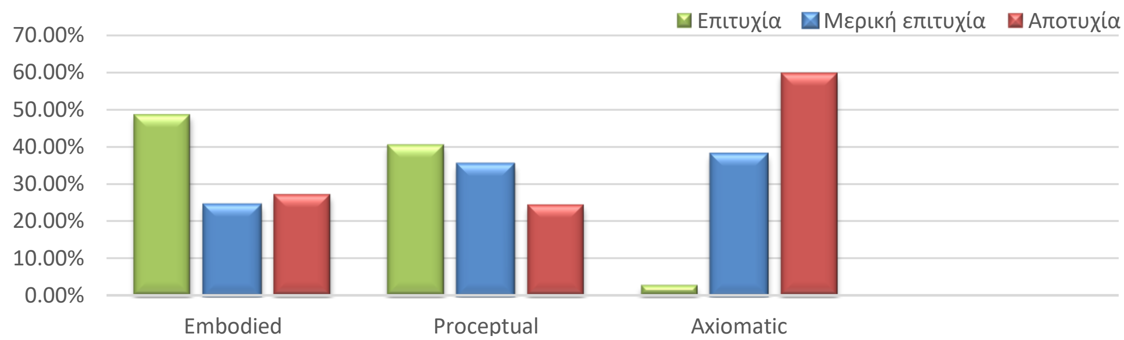
Παράδειγμα για τη μεικτή αντίληψη: «Οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται όλο και πιο κοντά στον αριθμό L», «Οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται σε όλο και μικρότερη περιοχή-ακτίνα γύρω από το L»

Οι φράσεις «Οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται κοντά στον αριθμό L» και «Οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται όλο και πιο κοντά στον αριθμό L» θεωρείται ότι ανήκουν σε δύο διαφορετικές κατηγορίες καθώς η τελευταία αποτελεί μια πιο σύνθετη έκφραση, η οποία εμπεριέχει και στοιχεία κίνησης (Cottrill et al., 1996).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Με βάση την ανάλυση περιεχομένου το μεγαλύτερο μέρος των φοιτητών του δείγματος αντιλαμβάνεται την έννοια της σύγκλισης δυναμικά (37,8%), ενώ επίσης μεγάλο μέρος των φοιτητών έχει σχηματίσει μια μικτή αντίληψη για αυτήν (35,1%). Η στατική αντίληψη απαντάται σε μικρότερο ποσοστό (16,2%), ενώ τέσσερις φοιτητές (10,8%) δεν διατύπωσαν κάποια σαφή περιγραφή. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι ενώ το 86,5% των φοιτητών καταφέρνει με επιτυχία να παραστήσει γραφικά μια συγκλίνουσα συνάρτηση (Conv), μόλις το 56,8% καταφέρνει να εξηγήσει και να σχεδιάσει τι σημαίνει ότι ένα όριο δεν υπάρχει (Noconv). Μεγάλο μέρος του ποσοστού αποτυχίας οφείλεται κυρίως σε απαντήσεις όπως:

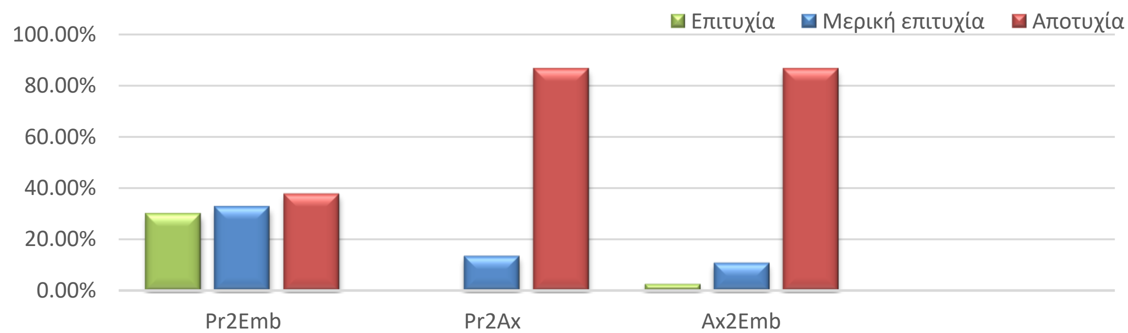
> «ένα όριο δεν υπάρχει καθώς το χ τείνει στο α, όταν η συνάρτηση δεν ορίζεται στο α» ή «ένα όριο δεν υπάρχει σημαίνει ότι το όριο απειρίζεται» ή «ένα όριο δεν υπάρχει διότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής».



Διάγραμμα 1: Η επίδοση των φοιτητών στα έργα ανά κόσμο

Στο διάγραμμα 1 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα που αφορούν τον κάθε κόσμο των Μαθηματικών ξεχωριστά. Το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας εμφανίζεται στον ενσαρκωμένο κόσμο (48,6%), δείχνοντας ότι οι φοιτητές αυτοί είναι σε θέση να βασιστούν στις εποπτικές τους ικανότητες και να υπολογίσουν όρια μέσω της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Ανάλογο ποσοστό επιτυχίας εμφανίζεται στον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο (40,5%), στον οποίο οι φοιτητές υπολογίζουν όρια αλγοριθμικά, ενώ το μικρότερο ποσοστό επιτυχίας εμφανίζεται στον αξιωματικό κόσμο (2,7%).

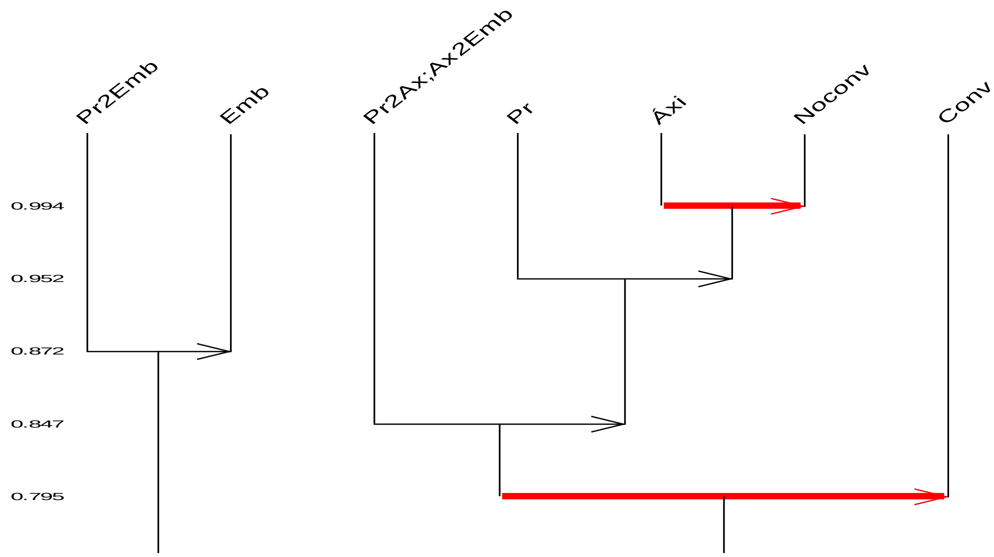
Το μεγαλύτερο ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων στα παραπάνω έργα οφείλεται κυρίως στην παρανόηση ότι η τιμή του ορίου όταν το χ τείνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό χ_0 θα πρέπει να είναι ίση με την τιμή $f(\chi_0)$, καθώς επίσης και στη σύνδεση της έννοιας του ορίου με την έννοιας της συνέχειας.



Διάγραμμα 2: Η επίδοση των φοιτητών στα έργα μεταβάσεων

Στο Διάγραμμα 2, παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας των φοιτητών στα έργα μετάβασης. Τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας εμφανίζονται στα έργα μετάβασης από τον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο στον ενσαρκωμένο (Pr2Emb) (29,7%). Οι φοιτητές αυτοί είναι σε θέση να αναπαραστήσουν ένα όριο μετατρέποντας μια συμβολική αναπαράσταση σε γεωμετρική, ενώ στο μεγαλύτερο ποσοστό παρατηρήθηκε ότι υπάρχει δυσκολία στην κατανόηση ανάμεσα στη σχέση ενός σημείου χ_0, με το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, όταν το χ τείνει στο χ_0 και στο κατά πόσο αυτό πρέπει ή όχι να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Τα μικρότερα ποσοστά επιτυχίας εμφανίστηκαν στα έργα σχετικά με τις μεταβάσεις από τον αξιωματικό στον ενσαρκωμένο κόσμο (Ax2Emb) αλλά και από τον συμβολικό-διαδικασιοεννοιολογικό στον αξιωματικό (Pr2Ax). Αναλυτικότερα, κανένας φοιτητής δεν διατύπωσε το σύνολο των ιδιοτήτων που ζητήθηκε κατά τον υπολογισμό των ορίων της μεταβλητής Proceptual, καθώς οι περισσότεροι αρκέστηκαν στο να αναφέρουν ότι: «εφαρμόζω άλγεβρα ορίων» ή «εφαρμόζω κανόνα de L' Hospital» ή στο να δώσουν μια περιγραφική εξήγηση κάποιας ιδιότητας η οποία μάλιστα εμπεριείχε και σχολικές αναφορές. Στο τελευταίο έργο του ερωτηματολογίου (Ax2Emb) μόνο ένας κατάφερε να περιγράψει λεκτικά την απόδειξη της μοναδικότητας του ορίου και να την αναπαραστήσει εποπτικά. Οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις οφείλονταν στην αδυναμία σχηματικής αναπαράστασης του δείκτη n_0 αλλά και του προσδιορισμού των όρων της ακολουθίας που βρίσκονται κοντά στο όριό της.



Διάγραμμα 3: Ιεραρχικό διάγρμμα ομοιότητας

Αναλύοντας το δενδροδιάγραμμα ιεράρχησης (διάγραμμα 3) προκύπτει συνεπαγωγική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές Pr2Emb και Emb. Η μεταβλητή Pr2Emb αφορά την ικανότητα μετάβασης από τον διαδικασιοεννοιολογικό-συμβολικό κόσμο στον ενσαρκωμένο κόσμο των Μαθηματικών, η οποία οδηγεί στην επιτυχία των έργων που αφορούν τον ενσαρκωμένο κόσμο. Από την δεύτερη ομάδα συνεπαγωγικών σχέσεων (Pr2Ax, Ax2Emb, Pr, Axi, Noconv, Conv) εξάγεται η διαπίστωση ότι η ικανότητα μετάβασης από τον διαδικασιοεννοιολογικό-συμβολικό κόσμο στον αξιωματικό κόσμο των Μαθηματικών αλλά και από τον αξιωματικό στον ενσαρκωμένο συνεπάγεται την επιτυχή αναπαράσταση και προσδιορισμό μιας συνάρτησης η οποία συγκλίνει (Conv).

Παρατηρούμε ότι η συνεπαγωγική σχέση ανάμεσα στα έργα του αξιωματικού κόσμου με τον καθορισμό και την σωστή αναπαράσταση μιας συνάρτησης, της οποίας το όριο δεν υπάρχει, είναι στατιστικά σημαντική. Η πρακτική σημασία αυτού του ευρήματος είναι σημαντική, καθώς η κατανόηση της έννοιας του ορίου με βάση τον αξιωματικό ορισμό της σύγκλισης και ο υπολογισμός ενός ορίου μέσα από λογικές-τυπικές αποδείξεις συνεπάγονται όχι μόνο την κατανόηση της έννοιας της σύγκλισης (Conv) αλλά και της μη σύγκλισης (Noconv).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, η ανάλυση των αποτελεσμάτων καταδεικνύει πως οι περισσότεροι φοιτητές αντιλαμβάνονται την έννοια του ορίου είτε αμιγώς είτε μερικώς δυναμικά, δείχνοντας πώς η κατανόησή τους απομακρύνεται σημαντικά από την τυπική σύλληψή του. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί και με τα ευρήματα άλλων ερευνών που δείχνουν ότι μαθητές και φοιτητές έχουν την τάση να προτιμούν τις δυναμικές ερμηνείες για τη σύγκλιση ακόμα και στο πιο προχωρημένο στάδιο της διδασκαλίας του αξιωματικού κόσμου (Przenioslo, 2004; Robert αναφ. στο Cornu, 1991). Μία πιθανή ερμηνεία για τα αίτια της πλειοψηφίας αυτής της αντίληψης, σημειώνει ο Cornu (1991), είναι ότι ο άτυπος ορισμός που συνήθως εκφράζεται κατά την αρχική διδασκαλία του ορίου, δίνει περισσότερο έμφαση στη διαδικασία της προσέγγισης (που είναι δυναμική) μέσω των γεωμετρικών αναπαραστάσεων παρά στην ίδια την έννοια του ορίου ως ένα γνωστικό αντικείμενο. Το ζήτημα αυτό είναι σημαντικό διότι όπως σημειώνουν οι παραπάνω ερευνητές η δυναμική αντίληψη για τα όρια αποτελεί δυνητικό συγκρουσιακό παράγοντα και μπορεί να επιφέρει παρανοήσεις και γνωστικά εμπόδια-αδιέξοδα (π.χ. επιτυγχάνεται ένα όριο ή όχι) (Mamona-Downs, 2001).

Όσον αφορά το δεύτερο και τρίτο ερευνητικό ερώτημα, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι φοιτητές εμφανίζουν τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα έργα που απαιτούν την αξιοποίηση των εμπειριών τους κυρίως από τον ενσαρκωμένο και τον διαδικασιοεννοιολογικό/συμβολικό κόσμο ξεχωριστά αλλά και στο έργο μετάβασης από τον έναν στον άλλον. Συνολικά παρατηρήσαμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των φοιτητών αντιμετωπίζει το όριο καθαρά εμπειρικά ή διαδικαστικά, προβάλλοντας πάνω από όλα την πρακτική γνώση που έχει αποκτήσει για αυτό, χωρίς ωστόσο να φτάνει και σε μια ανώτερη τυπική σύλληψή του και χωρίς να γνωρίζει τους ρητούς κανόνες που επιβάλλει η αξιωματική θεωρία. Χαρακτηριστικά είναι τα αποτελέσματα στα έργα όπου εμπλέκεται ο αξιωματικός κόσμος. Στις απαντήσεις των φοιτητών, σε αυτά τα έργα, διαφαίνεται η προσπάθειά τους να εφαρμόσουν από μνήμης και αλγοριθμικά τη διαδικασία του ε-δ ορισμού καταλήγοντας είτε σε λάθος αποτέλεσμα είτε σε αδιέξοδο. Σε αυτό ίσως συντελεί ο ιδιαίτερος και πολύπλοκος χαρακτήρας του ορίου, ο υπολογισμός του οποίου είναι μη αναμενόμενος, δεν στηρίζεται εξ ολοκλήρου σε προηγούμενες μαθησιακές εμπειρίες και απαιτεί κάθε φορά νέες γνωστικές δεξιότητες που δεν ακολουθούν ένα συγκεκριμένο αλγόριθμο σε όλες τις περιπτώσεις (Gray & Tall, 1994). Η πρακτική αυτή αντίληψη που εντοπίστηκε στους φοιτητές κατά τη γνώμη μας παίζει σημαντικό ρόλο στον τρόπο που γίνεται αντιληπτή η έννοια του ορίου καθώς μπορεί να λειτουργήσει ως εμπόδιο στη μετάβαση προς την αξιωματική θεώρησή του, δεδομένου ότι συχνά η ανακούφιση που παρέχουν οι σωστοί υπολογισμοί περιορίζουν την ανάγκη για χρήση του ε-δ ορισμού.

Η μετάβαση στην αξιωματική θεώρηση ενός ορίου απαιτεί μια τεράστια γνωστική ανασυγκρότηση στην οποία αποκαλύπτεται, όπως αναφέρει ο Tall (2008), η ανάγκη για μια πιο εξελιγμένη κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων και μεγαλύτερη συνάφεια με τον αντίστοιχο συμβολισμό, η οποία όμως θα πρέπει να ενσωματώνεται στο πλαίσιο του αξιωματικού κόσμου. Η εκμάθηση απλώς του ορισμού δεν αρκεί. Χρειάζεται να παρουσιάζονται ευκαιρίες για τη συνολική και ολοκληρωμένη κατανόησή του μέσα από τρόπους που θα αξιοποιούν όλες τις δυνατότητες των μαθηματικών (εμπειρίες, σύμβολα, παραστάσεις, αξιωματικοί ορισμοί) και που θα δίνουν έμφαση στο πώς αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Χαρακτηριστικά φάνηκε από την έρευνά μας ότι όταν παρουσιάζεται η ευχέρεια στην μετάβαση από τον έναν τρόπο στον άλλο, τότε αυξάνεται και η πιθανότητα για μεγαλύτερη κατάκτηση ικανοτήτων στον κάθε κόσμο ξεχωριστά. Γενικά, η διδασκαλία που αφορά τα όρια θα πρέπει να γίνεται όχι μόνο με έμφαση στο πώς μπορεί το άτομο να χειρίζεται καλά τα μαθηματικά εργαλεία ή στο πώς μπορεί να ξεπεράσει τις εμπειρικές του αντιλήψεις, αλλά κυρίως στο πώς μπορεί κάθε φορά να τις εμπλουτίζει κινούμενο με άνεση ανάμεσα σε μια πληθώρα συγκεκριμένων και αφηρημένων μέσων και επιλογών. Βοηθητική προς αυτήν την κατεύθυνση θα μπορούσε να είναι η εφαρμογή διδακτικών προσεγγίσεων οι οποίες θα δίνουν έμφαση στη μετάβαση από τη διαισθητική κατανόηση του ορίου στην τυπική αλλά και το ανάποδο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International journal of mathematical education in science and technology*, Vol. 32, No. 4, pp. 487-500.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 15, No. 2, pp. 167-192.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of limit and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, Vol. 7, No. 4, pp. 765-790.

Gras R., Suzuki E., Guillet F., & Spagnolo F. (2008). *Statistical implicative analysis.* Germany: Springer.

Mamona-Downs, J. (2002). Letting the intuitive bear on the informal: a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 48, pp. 259–288.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 55, No. 1, pp. 103-132.

Tall, D. (1995). Cognitive Development, Representations & Proof. In *Justifying and Proving in School*. London: Mathematics Institute of Education. pp. 27-38.

Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 23, No. 3, pp. 29–33.

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal,* Vol. 20, No. 2, pp. 5-24.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 219-236.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δημήτρης Μαρής, Κωνσταντίνος Π. Χρήστου

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών· Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

dmar.1986@gmail.com, kchristou@uowm.gr

Περίληψη

Η έρευνα στην διδακτική των μαθηματικών έχει εντοπίσει πολλές παρανοήσεις στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Στην παρούσα μελέτη γίνεται προσπάθεια να εξεταστεί κατά πόσο η μαθηματική λογοτεχνία μπορεί να βοηθήσει στην διόρθωση αυτών των παρανοήσεων και στην ανάπτυξη θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά. Γράφτηκε μια μαθηματική ιστορία με αντικείμενο τους ρητούς αριθμούς και δόθηκε σε έξι μαθητές Στ' τάξης ενός δημοτικού σχολείου. Η συνεισφορά της ιστορίας εξετάστηκε με την χρήση ερωτηματολογίων και ατομικών ημιδομημένων συνεντεύξεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μια μαθηματική ιστορία μπορεί να αντιμετωπίσει παρανοήσεις στους ρητούς αριθμούς και να βελτιώσει τη στάση των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρανοήσεις στους ρητούς αριθμούς

Η έρευνα έχει επανειλημμένως δείξει ότι δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών αριθμών εμφανίζονται σε μαθητές από όλες τις τάξεις του σχολείου ακόμη και σε ενήλικες (Vamvakoussi et al., 2012). Με την μελέτη αυτών των δυσκολιών στους ρητούς έχουν αναγνωριστεί αρκετές παρανοήσεις που ευθύνονται για τα λάθη που εμφανίζουν οι μαθητές στις πράξεις και στην διάταξη των ρητών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Οι διαφορές ανάμεσα στις ιδιότητες των ρητών και των φυσικών αριθμών σε συνδυασμό με την πρότερη γνώση των φυσικών έχει υποστηριχθεί ότι δημιουργούν κάποιες από τις παρανοήσεις και τα λάθη που κάνουν οι μαθητές με τους ρητούς. Η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την προυπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς σε μη-φυσικούς, όπως οι ρητοί ονομάζεται συχνά και *προκατάληψη του φυσικού αριθμού (natural number bias)* (Ni & Zhou, 2005 · Vamvakoussi, Christou & Vosniadou, 2018).

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού οδηγεί σε λάθη που εμφανίζονται σε διάφορα μαθηματικά πλαίσια. Οι πιο συνήθεις αφορούν, μεταξύ άλλων, την διάταξη, τον συμβολισμό και την πυκνότητα των ρητών. Για παράδειγμα, στην διάταξη δεκαδικών οι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν ότι ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος (π.χ., 0,323>0,5), το μηδέν στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού μεγαλώνει τον αριθμό (π.χ., 2,450>2,45), το μηδέν μπροστά από τα δεκαδικά ψηφία ενός δεκαδικού δεν αλλάζει τις αξίες των ψηφίων που ακολουθούν (π.χ., 6,25=6,025) και ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς δεν υπάρχει άλλος αριθμός (π.χ., ανάμεσα στους 3,1 και 3,2) (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Μερικές σημαντικές παρανοήσεις που αφορούν την διάταξη κλασμάτων είναι ότι το κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο (π.χ., 1/2<5/10), για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο αριθμό (π.χ., 2/3 = (2+1)/(3+1)), όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας (π.χ., 5/4<1) και ανάμεσα σε δύο κλάσματα δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί (π.χ., ανάμεσα στο 1/3 και 2/3) (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Τέλος, μια παρανόηση που αφορά τον συμβολισμό των ρητών είναι ότι οι δεκαδικοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί και όχι διαφορετικοί συμβολισμοί του ίδιου ρητού αριθμού και μια παρανόηση που αφορά την πυκνότητα είναι ότι ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς και σε δύο κλάσματα υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί (Ni & Zhou, 2005 · Vamvakoussi, Christou & Vosniadou, 2018).

Υπάρχει μεγάλο πλήθος διδακτικών παρεμβάσεων για την διδασκαλία των ρητών αριθμών όπως, για παράδειγμα το Rational Number Project (RNP) και το Connected Mathematics Project (CMP), τα αναλυτικά προγράμματα των Moss & Case (1999) και των Siegler et al. (2011), όπως και οι παρεμβάσεις που στηρίζονται στην θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής (Vamvakoussi, Christou & Vosniadou, 2018). Στην παρούσα εργασία θα εφαρμοστεί μια παρέμβαση με χρήση μαθηματικής (λογοτεχνικής) ιστορίας με στόχο την αντιμετώπιση των βασικών παρανοήσεων στους ρητούς αριθμούς και την αλλαγή των στάσεων των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και ειδικά απέναντι στους ρητούς αριθμούς. Με τον όρο στάσεις νοούνται οι τάσεις και η προδιάθεση των μαθητών να ανταποκρίνονται με κάποιο ομοιόμορφο τρόπο, ευμενώς (θετικές στάσεις) ή δυσμενώς (αρνητικές στάσεις), έναντι συγκεκριμένων εννοιών ή και μαθημάτων, όπως ορίστηκε από τους Φιλίππου & Χρίστου (2001).

Υπάρχουν λόγοι να θεωρούμε ότι μια μαθηματική ιστορία θα μπορούσε να λειτουργήσει ως διδακτικό εργαλείο δεδομένου ότι έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς από την ερευνητική και εκπαιδευτική κοινότητα με καταγεγραμμένα θετικά αποτελέσματα.

Διδακτική χρήση της μαθηματική λογοτεχνίας

Οι Copple και Bredekamp (2009) συγκέντρωσαν μερικά σημαντικά παραδείγματα διδακτικών παρεμβάσεων με την χρήση της μαθηματικής λογοτεχνίας και παρουσίασαν τα αποτελέσματα τους. Σε αυτές τις διδακτικές παρεμβάσεις η μαθηματική λογοτεχνία είτε παρείχε συμπληρωματικό ρόλο στην διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, είτε αποτελούσε αφορμή για δραστηριότητες επέκτασης. Για παράδειγμα, η σειρά βιβλίων *"Round the Rug Math"* που εστίαζε στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης, των μοτίβων και των γεωμετρικών δεξιοτήτων, δοκιμάστηκε σε μαθητές από διαφορετικά πολιτισμικά περιβάλλοντα και φάνηκε ότι ευνοεί ιδιαίτερα τους μαθητές αλλά και τις μαθήτριες από φτωχότερες οικονομικά περιοχές (Casey et al., 2008). Ένα άλλο παράδειγμα είναι η Επιπεδοχώρα *(Flatland: A Romance of Many Dimensions)* (Abbott, 2006) που αποτελεί ίσως το πιο γνωστό κείμενο του είδους της μαθηματικής λογοτεχνίας και έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές διδακτικές παρεμβάσεις και ερευνητικές εργασίες.

Οι πιο πολλές ερευνητικές εργασίες που μελετούν την επίδραση της μαθηματικής λογοτεχνίας συνήθως χρησιμοποιούν ήδη-υπάρχουσες λογοτεχνικές ιστορίες και έτσι ο ερευνητικός σχεδιασμός προσαρμόζεται αναγκαστικά στις μαθηματικές έννοιες των ιστοριών αυτών. Από την άλλη μεριά, η συγγραφή δίνει την δυνατότητα στον συγγραφέα να περιλάβει έννοιες της αρεσκείας του, μαζί με ιδιότητες και σημεία ενδιαφέροντος που θέλει να δώσει έμφαση, λαμβάνοντας υπόψιν το κοινωνικό υπόβαθρο και τα ενδιαφέροντα των μαθητών στους οποίους απευθύνεται. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα εργασία έγινε συγγραφή μιας μαθηματικής ιστορίας για μαθητές που παρακολουθούν το ελληνικό σχολείο που εστιάζει στην διάταξη, στον συμβολισμό και την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Ερευνητικά ερωτήματα

Στην παρούσα μελέτη συγγράφηκε και εφαρμόστηκε σε μια διδακτική παρέμβαση μία μαθηματική ιστορία με βασικό διδακτικό στόχο:

α) να βοηθηθούν οι μαθητές στις έννοιες της διάταξης και της πυκνότητας των ρητών αριθμών ώστε να αντιμετωπίσουν κάποιες από τις βασικές παρανοήσεις που εμφανίζονταν.

β) Να βοηθηθούν οι μαθητές στην ανάπτυξη θετικότερων στάσεων για τους ρητούς αριθμούς και κατ’ επέκταση για τα μαθηματικά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 3 μαθητές και 3 μαθήτριες ηλικίας 11-12 ετών, που φοιτούσαν στην ΣΤ’ τάξη του δημοτικού σε ιδιωτικό σχολείο των Αθηνών με μητρική γλώσσα την ελληνική. Οι μαθητές επιλέχθηκαν σε συνεργασία με τους διδάσκοντες έτσι ώστε το δείγμα να είναι ετερογενές ως προς το φύλο αλλά και την σχολική τους επίδοση. Δύο μαθητές είχαν υψηλή, δύο μαθητές μέτρια και δύο χαμηλή επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών.

Ερευνητικά εργαλεία – Υλικά

Χρησιμοποιήθηκαν δυο διαφορετικά ερωτηματολόγια, ένα που εξέταζε τη γνώση (Α) και ένα που εξέταζε τις στάσεις (Β) των μαθητών. Τα ερωτηματολόγια σχεδιάστηκαν για να εφαρμοστούν πριν (Π) και μετά (Μ) την ανάγνωση της ιστορίας, έτσι, προέκυψαν τέσσερα σε σύνολο ερωτηματολόγια (ΑΠ, ΑΜ, ΒΠ και ΒΜ). Οι ερωτήσεις που περιέχονται στα ερωτηματολόγια ΑΠ και ΑΜ, προέρχονται από ερωτηματολόγιο που σχεδιάστηκε από τους VanHoof et al. (2014) και περιλαμβάνει ερωτήσεις με έργα Συμβατά και μη-Συμβατά που μελετούν την κατανόηση α) του μεγέθους των αριθμών, β) της πυκνότητας των ρητών αριθμών και γ) των πράξεων με ρητούς αριθμούς. *Συμβατά (Congruent),* είναι τα έργα στα οποία αν εφαρμοστούν διαισθητικές ιδιότητες για τους αριθμούς που οφείλονται στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού δεν οδηγούν σε εσφαλμένο συμπέρασμα (π.χ.: 0,25>0,24 διότι για τους φυσικούς αριθμούς 25 και 24 ισχύει ότι 25>24). *Μη-Συμβατά (Incongruent),* είναι τα έργα στα οποία αν εφαρμοστούν διαισθητικές ιδιότητες για τους αριθμούς που οφείλονται στην γνώση των φυσικών αριθμών οδηγούν σε εσφαλμένη απάντηση (π.χ., 0,25>0,3 διότι για τους φυσικούς αριθμούς 25 και 3 ισχύει ότι 25>3). Οι ερωτήσεις των ερωτηματολογίων ΒΠ και ΒΜ χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες για τις ημι-δομημένες ατομικές συνεντεύξεις με τους μαθητές. Οι ερωτήσεις αυτές σχεδιάστηκαν με βάση ερωτήσεις από τα ερωτηματολόγια των Schoenfeld (1989) και Lim et al. (2013) με σκοπό να μελετηθούν οι στάσεις των μαθητών απέναντι στους ρητούς πριν και μετά την ανάγνωση της ιστορίας.

Η λογοτεχνική μαθηματική ιστορία: Ταξίδι προς το Μηδέν

Η ιστορία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη ονομάζεται «Ταξίδι προς το Μηδέν» και συγγραφέας είναι ο πρώτος συγγραφέας της παρούσας ανακοίνωσης. Στην ιστορία περιγράφεται ένας κόσμος όπου ζουν όλοι οι ρητοί αριθμοί. Στον κόσμο αυτό οι φυσικοί αριθμοί βρίσκονται στην ανώτερη κλίμακα της ιεραρχίας και διοικούν τους υπόλοιπους ρητούς αριθμούς. Με αυτό το τρόπο η προκατάληψη του φυσικού αριθμού αποκτά μεταφορικά το νόημα της εξουσίας των φυσικών έναντι των υπολοίπων αριθμών. Έτσι, γίνεται προσπάθεια οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι με την ίδια τους την προκατάληψη για τους φυσικούς αριθμούς.

Το δεύτερο πολύ βασικό χαρακτηριστικό του κόσμου της ιστορίας είναι η γεωμετρία του, ο άξονας των αριθμών, πάνω στον οποίο βρίσκονται οι αριθμοί. Συγκεκριμένα, γίνεται χρήση της αριθμογραμμής για να δοθεί η θέση του κάθε ρητού αριθμού σε σχέση με τους αριθμούς γύρω του. Η κατανόηση της θέσης του κάθε ρητού αριθμού συνεισφέρει στην διάταξή του σε σχέση με τους υπόλοιπους ρητούς όπως και στην κατανόηση του διαφορετικού συμβολισμού των ρητών. Τέλος, γίνεται αναφορά στην ύπαρξη άπειρων αριθμών κοντά σε κάθε ρητό αριθμό με σκοπό την ανάδειξη της πυκνότητας των ρητών αριθμών.

Στην συνέχεια παρατίθεται ένα επιλεγμένο απόσπασμα της ιστορίας, που εστιάζει στις παρανοήσεις στην διάταξη δεκαδικών:

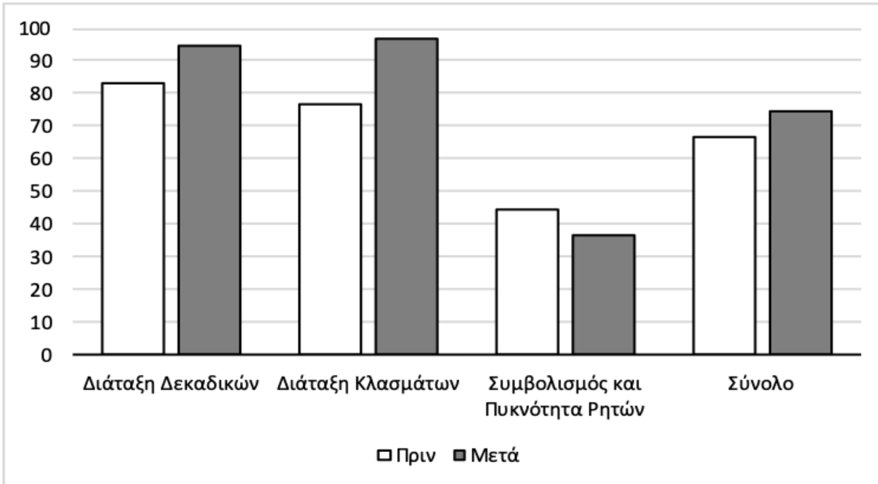
> «…Νομίζω πως κάτι κατάλαβα. Για να βρεθώ ανάμεσα σε δύο Δεκαδικούς, σα να χρειάζομαι το νούμερο 5, ε;» «Ακριβώς! Και τώρα, ποιος Δεκαδικός είναι σε μεγαλύτερη θέση, ο 3,5 ή ο 3,55;» ρώτησε ο 3,622. «Η 3,55 είναι, αφού, όπως είπαμε, είναι στη μέση του Διαστήματος (3,5 , 3,6), οπότε είναι μετά από τον 3,5 και πριν από τον 3,6». Ο 3,618 σταμάτησε να μιλά, και το ξανασκέφτηκε. «Μα, έτσι όπως το λέω τώρα, η 3,55 είναι σε μεγαλύτερη θέση από τον 3,5 και σε μικρότερη θέση από τον 3,6, αλλά, αυτό που με ζορίζει είναι ότι το 55 είναι μεγαλύτερο από το 6. Πώς γίνεται λοιπόν;» «Σκέψου το ως εξής: Το πρώτο ψηφίο πριν την υποδιαστολή σου λέει σε ποιο Διάστημα μένεις. Εμείς οι δύο λόγου χάριν, μένουμε μετά το Κάστρο 3 και πριν το Κάστρο 4, οπότε αναγκαστικά, έχουμε και οι δυο μας, το 3 πριν την υποδιαστολή. Μετά την υποδιαστολή, μπορούμε να έχουμε οποιοδήποτε νούμερο, αλλά πάντως για να ανήκουμε στο Διάστημα (3, 4], πριν την υποδιαστολή μας, πρέπει να έχουμε οπωσδήποτε 3…» Απόσπασμα από την ιστορία «Ταξίδι προς το μηδέν»

Διαδικασία

Έγιναν τρεις επισκέψεις στο σχολικό περιβάλλον, στην πρώτη επίσκεψη πραγματοποιήθηκε εισαγωγή στην έννοια της μαθηματικής λογοτεχνίας και επιλέχθηκαν οι συμμετέχοντες σε συνεννόηση με τους διδάσκοντες. Στην δεύτερη επίσκεψη δόθηκε το ερωτηματολόγιο ΑΠ ώστε να κριθούν οι γνώσεις των μαθητών πριν από την ανάγνωση της ιστορίας και έγιναν ατομικές ημιδομημένες συνεντεύξεις με άξονες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου στάσεων ΒΠ. Στην συνέχεια δόθηκε στους μαθητές το χρονικό διάστημα του ενός μήνα για να την ανάγνωση της ιστορίας «Ταξίδι προς το Μηδέν». Τέλος, στην τρίτη επίσκεψη οι μαθητές εξετάστηκαν ξανά ως προς τις γνώσεις τους με το ερωτηματολόγιο ΑΜ και έγιναν ξανά ατομικές συνεντεύξεις με άξονες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου ΒΜ.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Καθώς κάποιοι συμμετέχοντες, κατά δήλωση τους, δεν διάβασαν ολόκληρη την ιστορία, αποφασίστηκε να αναλυθούν ξεχωριστά οι απαντήσεις αυτών που διάβασαν όλη και αυτών που διάβασαν μέρος της ιστορίας. Στην παρούσα εισήγηση θα παρουσιαστούν με λεπτομέρεια τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών που τη διάβασαν ολόκληρη. Στην Εικόνα 1, παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών/τριών Μ1, Μ2 και Μ3, που διάβασαν ολόκληρη την ιστορία, στα ερωτηματολόγια ΑΠ (Πριν) και ΑΜ (Μετά) σε κάθε ένα από τα είδη παρανοήσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω.



Εικόνα 1: Επιδόσεις των μαθητών που διάβασαν όλη την ιστορία, ανά κατηγορία ερώτησης.

Στην Εικόνα 1 παρατηρείται ότι το ποσοστό των σωστών απαντήσεων μετά την ανάγνωση της ιστορίας βελτιώθηκε και αρκετά λάθη που εμφανίστηκαν πριν την ανάγνωση της ιστορίας διορθώθηκαν. Συγκεκριμένα, το συνολικό ποσοστό των σωστών απαντήσεων των μαθητών (Μ1, Μ2 και Μ3) είναι 67% πριν την ιστορία και 75% μετά. Στις ερωτήσεις διάταξης δεκαδικών εμφανίζεται ποσοστό επιτυχίας 83% πριν και 94% μετά την ανάγνωση της ιστορίας και στην διάταξη κλασμάτων εμφανίζεται ποσοστό 77% πριν την ανάγνωση και 97% μετά. Τέλος στον συμβολισμό των ρητών αριθμών και στην πυκνότητα εμφανίζεται ποσοστό 44% πριν και 37% μετά. Ατομικά για τους μαθητές Μ1, Μ2 και Μ3, μπορούν να βγουν τα ακόλουθα συμπεράσματα όσον αφορά την κατανόηση.

Ο Μ1 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε μέτρια επίδοση 33% και μετά την ανάγνωση της ιστορίας υψηλότερη επίδοση 63%. Ο συγκεκριμένος μαθητής από τη συνέντευξη φάνηκε να ξεπερνά τις περισσότερες παρανοήσεις των δεκαδικών, όπως ότι ο δεκαδικός με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτερος και ότι το μηδέν στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού μεγαλώνει τον αριθμό. Επίσης φάνηκε να ξεπερνά τις παρανοήσεις κλασμάτων όπως ότι το κλάσμα με τα μικρότερα/μεγαλύτερα ψηφία είναι το μικρότερο/μεγαλύτερο και ότι η μονάδα είναι μεγαλύτερη από όλα τα κλάσματα.

Η Μ2 πριν και μετά την ανάγνωση της ιστορίας είχε μέτρια επίδοση (62%) αλλά από τη συνέντευξη φάνηκε ότι ξεπέρασε την παρανόηση, του συμβολισμού των ρητών, ότι οι δεκαδικοί αριθμοί και τα κλάσματα είναι διαφορετικοί αριθμοί και ότι για να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα προσθέτω/αφαιρώ στον αριθμητή και παρονομαστή τον ίδιο αριθμό. Η διατήρηση του ποσοστού της Μ2 στο 62% οφείλεται σε λάθη απροσεξίας (π.χ., στο ΑΜ απάντησε ότι 6,3>6,4 ενώ στο ΑΠ απάντησε 4,5>4,4).

Τέλος, ο Μ3 πριν την ανάγνωση της ιστορίας είχε πολύ καλή επίδοση 81% και μετά την ανάγνωση της ιστορίας φάνηκε μια πτώση στην επίδοση του (67%). Από τη συνέντευξη φάνηκε ότι κατάλαβε πώς να μετατρέπει κλάσματα σε δεκαδικούς και αντίστροφα, γνώση που δεν έχει διδαχθεί ακόμη στο σχολείο. Η μεγάλη πτώση του ποσοστού του Μ3 ευθύνεται σε λάθη απροσεξίας στο δεύτερο ερωτηματολόγιο (π.χ., στο ΑΜ απάντησε ότι 3/10<1/6 ενώ αντιλαμβάνεται σωστά ότι 6/11<6/5 και 1/13<2/15 στο ίδιο ερωτηματολόγιο).

Στις απαντήσεις των μαθητών αυτών στις ατομικές συνεντεύξεις με άξονες τις ερωτήσεις των ερωτηματολογίων ΒΠ και ΒΜ, εμφανίστηκε επίσης βελτίωση της στάσης τους απέναντι στους ρητούς αριθμούς και στα μαθηματικά γενικότερα. Συγκεκριμένα, ο Μ1 πριν την ανάγνωση της ιστορίας αντιμετώπιζε με αρνητική στάση τους αριθμούς και τα μαθηματικά ενώ μετά την ανάγνωση της ιστορίας η στάση του έγινε πιο θετική, και δήλωσε ότι: *«οι αριθμοί έγιναν πιο ζωντανοί, οι δεκαδικοί, οι φυσικοί και είχε πλάκα»*. Η Μ2 και πριν και μετά την ιστορία είχε θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά και μετά την ιστορία δήλωσε πως της *«…φάνηκε πάρα πολύ ωραία, ο τρόπος που έδειχνε όλη την θεωρία, των μαθηματικών που έχουμε κάνει από την αρχή της 6ης μέχρι τώρα, με ένα πάρα πολύ ωραίο και διασκεδαστικό τρόπο».* Τέλος, η στάση του Μ3 ήταν θετική και πριν και μετά την ιστορία για τα μαθηματικά. Μετά την ιστορία δήλωσε ότι του άρεσε που ο πρωταγωνιστής «*ήταν σχεδόν έτοιμος για τα πάντα*» αλλά «*ζορίζεται στα μαθηματικά*». Πριν την ανάγνωση της ιστορίας ο Μ3 δήλωσε πως δεν είχε καμία απορία, ενώ μετά από την ιστορία ανέφερε κάποιες απορίες του με ενδιαφέρον για να τις λύσει. Εδώ φαίνεται πως η ιστορία του ελάττωσε το φόβο να ρωτήσει κάτι που δεν καταλάβαινε.

Ανάλογα ήταν τα αποτελέσματα των μαθητών Μ4, Μ5 και Μ6 που διάβασαν μέρος της ιστορίας, με βασική διαφορά τα μικρότερα ποσοστά επιτυχίας στις επιδόσεις τους πριν και μετά την ιστορία, αλλά και με μικρότερη βελτίωση των επιδόσεών τους μετά την ανάγνωση της ιστορίας σε σχέση με πριν. Όσον αφορά τις στάσεις τους, σε δύο από τους τρεις μαθητές παρατηρήθηκε αισθητή βελτίωση στις στάσεις τους παρά τα μικρά ποσοστά επιτυχίας. Τα αποτελέσματα αυτά θα παρουσιαστούν με λεπτομέρεια στην ανακοίνωση (Μαρής & Χρήστου, υπό κρίση).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ/ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκε το αν η εφαρμογή μιας διδακτικής παρέμβασης με τη χρήση μιας μαθηματικής ιστορίας μπορεί να βοηθήσει στην αντιμετώπιση γνωστών παρανοήσεων των μαθητών αλλά και να βελτιώσει την στάση των μαθητών αυτών απέναντι στους ρητούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα της εργασίας ήταν θετικά ως προς τη χρήση της μαθηματικής ιστορίας ως εκπαιδευτικό εργαλείο καθώς οι μαθητές εμφάνισαν λιγότερα λάθη και πιο θετικές στάσεις για τους ρητούς αριθμούς μετά την ανάγνωση της ιστορίας.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές που διάβασαν ολόκληρη την ιστορία φάνηκε να αντιμετωπίζουν τις συγκεκριμένες παρανοήσεις τους για τις ιδιότητες των ρητών αριθμών που οφείλονται στην προκατάληψη των φυσικών αριθμών. Η παρανόηση που δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές ήταν η παρανόηση της διακριτότητας των ρητών αριθμών, ένα αποτέλεσμα που συμφωνεί με προηγούμενες έρευνες (VanHoof et al., 2014). Όσον αφορά τις στάσεις, τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών έδειξαν ότι μια μαθηματική ιστορία μπορεί να βελτιώσει την στάση των μαθητών απέναντι στους ρητούς αριθμούς και στα μαθηματικά γενικότερα, όπως αναφέρει και ο Sriraman (2003).

Λόγω του ότι οι δυσκολίες στην διδασκαλία των ρητών αριθμών, όπως αναφέρθηκε και στην βιβλιογραφική ανασκόπηση, είναι μεγάλες και κάποιες οφείλονται σε βαθιά ριζωμένες πεποιθήσεις των μαθητών για τις ιδιότητες των αριθμών που οφείλονται στην πρότερη γνώση των φυσικών αριθμών (Vamvakoussi, Christou & Vosniadou, 2018), δεν αναμένονταν να εξαλειφθούν όλες με την χρήση μιας μαθηματικής ιστορίας. Όμως, όπως έγινε φανερό, μια μαθηματική ιστορία ως εργαλείο μπορεί να συνεισφέρει στην κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού. Φυσικά, τα αποτελέσματα αυτά δεν είναι γενικεύσιμα λόγω της δυσκολίας να βρεθεί δείγμα που να θέλει να διαβάσει μια μεγάλη ιστορία, το δείγμα ήταν αρκετά μικρό και εθελοντικό και από τους έξι μαθητές που συμμετείχαν μόνο οι τρεις την διάβασαν ολόκληρη. Μελλοντική έρευνα με ποσοτική και ποιοτική μελέτη των απαντήσεων σε μεγαλύτερο και πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα θα μπορούσε να δείξει καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη τυπική εκπαίδευση ως κομμάτι του σχολικού προγράμματος.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι πέρα από τα διδακτικά οφέλη στους μαθητές ωφελείται και ο ίδιος ο συγγραφέας, καθώς μπαίνει στην διαδικασία της εμβάθυνσης στις μαθηματικές έννοιες και στην προσπάθεια σύνδεσής τους με το λογοτεχνικό περιεχόμενο. Για το λόγο αυτό οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται να εμπλακούν στην διαδικασία της συγγραφής μιας μαθηματικής ιστορίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abbott, E.A. (2006). Flatland: A romance of many dimensions. OUP Oxford.

Casey, B., Erkut, S., Ceder, I., & Young, J. M. (2008). Use of storytelling context to improve girls' and boys' geometry skills in Kindergarden. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 29(1), 29-48.

Copple, C., & Bredekamp, S. (2009). Developmentally appropriate practice in early childhood programs serving children from birth through age 8. *National Association for the Education of Young Children*.

VanHoof, J. V., Janssen, R., Verschaffel, L., & Dooren, W. V. (2014). Inhibiting natural knowledge in fourth graders: towards a comprehensive test instrument. *ZDM Mathematics Education*, 9.

Lim, S. Y., & Chapman, E. (2013). Development of a short form of the attitudes toward mathematics inventory. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 145-164.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122-147.

Ni, Y. & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behaviour. *Journal for research in mathematics education*, 338-355.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296.

Sriraman, B. (2003). Mathematics and Literature: Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam? *Australian Mathematics Teacher, The,*, 59(4), 26.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions, Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and instruction*, 28(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging Psychological and Educational Research on Rational Number Knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 84-106.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 31, 344-355.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.). *Handbook of reasearch on conceptual change*, 3-34.

Μαρής, Δ., & Χρήστου, Κ. Π. (υπο κριση). Η μαθηματική ιστορία ως εργαλείο για την κατανόηση των ρητών αριθμών. *Ειδικό τεύχος «Νέοι Ερευνητές» της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ).*

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών. *Κείμενα παιδείας: συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών χ.τ.: Ατραπός.*

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ: ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΚΑΘΟΔΗΓΗΣΗΣ

Γεωργία Βαϊτσίδη, Χρυσάνθη Σκουμπουρδή

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

kara@rhodes.aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάλυση των επιχειρημάτων των μαθητών διαφόρων ηλικιακών βαθμίδων αποτελεί πλέον κεντρικό θέμα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η παρούσα ανάλυση εστιάζει στα γραπτά επιχειρήματα μαθητών Ε' Δημοτικού και συγκεκριμένα στην αξιολόγηση της δομής και του περιεχομένου των συστατικών τους στοιχείων. Η ανάλυση αυτή έχει ως γνώμονα την επίδραση του βαθμού καθοδήγησης των διαφορετικών διδακτικών παρεμβάσεων, στις οποίες συμμετείχαν οι δύο ομάδες μαθητών. Από τα αποτελέσματά της φάνηκε πως ο μικρότερος βαθμός καθοδήγησης βελτίωσε τα επιχειρήματα των μαθητών ως προς το περιεχόμενο των συστατικών τους στοιχείων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σημασία της επιχειρηματολογίας αναδεικνύεται όλο και περισσότερο τα τελευταία χρόνια. Στην καθημερινή ζωή, η εγκυρότητα του συλλογισμού ενός ατόμου εξασφαλίζεται μέσω της επιχειρηματολογίας. Στην εκπαίδευση υποστηρίζεται ότι η διαδικασία συγκρότησης τεκμηριωμένων εξηγήσεων μπορεί να συνεισφέρει στην καλύτερη κατανόηση της φύσης της επιστημονικής γνώσης από τους μαθητές (Sandoval & Reiser, 2004). Η επιχειρηματολογία προτείνεται να διδάσκεται από τις πρώτες βαθμίδες εκπαίδευσης ως μέρος της επιστημονικής έρευνας και του επιστημονικού εγγραματισμού (Erduran & Jimenez-Aleixandre, 2012).

Με σκοπό τη μελέτη της ικανότητας μαθητών Ε΄ Δημοτικού να επιχειρηματολογούν, αλλά και της επίδρασης του βαθμού καθοδήγησης στη δομή και το περιεχόμενο των γραπτών επιχειρημάτων τους, πραγματοποιήθηκαν διδακτικές παρεμβάσεις βασισμένες στη διερευνητική προσέγγιση. Οι διδακτικές παρεμβάσεις, δομημένη για τους μισούς μαθητές και καθοδηγούμενη για τους άλλους μισούς, πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο του μαθήματος της Γεωμετρίας και συγκεκριμένα αφορούσαν στην αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στις ιδιότητές τους. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής:

1) Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των επιχειρημάτων των μαθητών πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις;

β) Σε τι διαφέρουν τα επιχειρήματα των μαθητών πριν και μετά τις παρεμβάσεις;

γ) Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των επιχειρημάτων των μαθητών μετά τη δομημένη διερευνητική παρέμβαση και ποια μετά την καθοδηγούμενη διερευνητική παρέμβαση; Σε τι διαφέρουν;

ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΔΟΜΗΜΕΝΗ ΚΑΙ ΚΑΘΟΔΗΓΟΥΜΕΝΗ

Στη διερευνητική διδασκαλία αποδίδονται σημαντικά οφέλη τόσο για την οικοδόμηση της γνώσης, όσο και για την καλλιέργεια της συνεργασίας, της επικοινωνίας και της επιχειρηματολογίας (Maaß & Artigue, 2013; Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2015). Η πολυπλοκότητα της προσέγγισης οφείλεται στον διαφορετικό βαθμό δόμησης και καθοδήγησης της διερεύνησης (Bunterm, Lee, Lan, Srikoon, Vangpoomyai, Rattavongsa & Rachahoon, 2014), ο οποίος έχει ως αποτέλεσμα την κατηγοριοποίησή της σε (Banchi & Bell, 2008): (α) έρευνα επιβεβαίωσης (confirmation inquiry), όπου ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές το ερώτημα προς έρευνα, του οποίου η απάντηση έχει ήδη γνωστοποιηθεί και με κάποιο τρόπο υποδηλώνεται και η πορεία που πρέπει να ακολουθηθεί για την επιβεβαίωση της, (β) δομημένη έρευνα (structured inquiry), ο όπου τίθεται το ερώτημα προς έρευνα μαζί με τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν οι μαθητές για να φτάσουν σε ένα συμπέρασμα βασισμένοι στις αποδείξεις που έχουν στη διάθεσή τους από τα δεδομένα που συνέλεξαν, (γ) καθοδηγούμενη έρευνα (guided inquiry), όπου τίθεται το ερώτημα και οι μαθητές πρέπει να σχεδιάσουν από μόνοι τους τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν για να συλλέξουν τα δεδομένα και να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα και (δ) ανοιχτή έρευνα (open inquiry), οι μαθητές διαμορφώνουν το ερώτημα της έρευνας καθώς και τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για να συλλέξουν τα απαραίτητα δεδομένα και να καταλήξουν στα συμπεράσματά τους.

Έρευνες έχουν δείξει ότι η διερευνητική μέθοδος είναι αποτελεσματικότερη όταν είναι πιο καθοδηγούμενη, ακόμη και όταν οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με αυτή (Kirschner, Sweller & Clark, 2006). Από την άλλη, η Kuhn και οι συνεργάτες της (2000), υποστηρίζουν ότι η ανοιχτή διερευνητική μέθοδος είναι αποτελεσματική μόνο στην περίπτωση που οι μαθητές έχουν αναπτύξει τις κατάλληλες δεξιότητες μέσω της καθοδηγούμενης και της δομημένης προσέγγισης. Ωστόσο, άλλη έρευνα (Sadeh, Zion, 2009) υποστηρίζει ότι μαθητές που συμμετείχαν σε μία ανοιχτή διερευνητική διδασκαλία εμφάνισαν μεγαλύτερη κατανόηση της διαδικασίας ενώ μετέτρεψαν τις λανθασμένες μη σχολικές γνώσεις σε επιστημονικά ορθές. Σε γνωστικό επίπεδο, στην παραπάνω έρευνα, οι μαθητές σημείωσαν παρόμοια επίδοση.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ικανότητα των ατόμων να επιχειρηματολογούν αποτελεί τη βάση μιας δημοκρατικής κοινωνίας (Schwarz & Asterhan, 2010). Η καλλιέργεια της επιχειρηματολογίας των μαθητών έχει αναγνωριστεί ως μια σημαντική ικανότητα που επιβάλλεται να αναπτύσσεται στις σχολικές αίθουσες (Asterhan, 2012). Έτσι, υπάρχει έντονη τάση της μαθηματικής εκπαίδευσης, τα τελευταία χρόνια, για υιοθέτηση της διερευνητικής προσέγγισης, η οποία θέτει ως προτεραιότητα την προετοιμασία του μελλοντικού πολίτη, μέσω της καλλιέργειας επιστημονικών δεξιοτήτων, όπως η ικανότητα λύσης προβλήματος, η συνεργασία, η επικοινωνία και η επιχειρηματολογία, μεταξύ άλλων.

Η συστηματική προσέγγιση της επιχειρηματολογίας τις τελευταίες δεκαετίες, αναδύει την αναγκαιότητα σχεδιασμού ενός εργαλείου αξιολόγησης της δομής και της ποιότητας των επιχειρημάτων των μαθητών κατά τη λύση προβλήματος. Ωστόσο, η έρευνα που αναφέρεται σε αυτά τα εργαλεία είναι περιορισμένη (McNeil & Krajcik, 2008).

Το κυρίαρχο θεωρητικό μοντέλο για την ανάλυση της επιχειρηματολογίας το οποίο έχει εφαρμοστεί από τους ερευνητές, σε εκπαιδευτικό πλαίσιο, τόσο στο γλωσσικό μάθημα, όσο και στο μάθημα των Φυσικών Επιστημών είναι το μοντέλο του Toulmin (Brem, Russells & Weems, 2001; Erduran, Simon & Osborne, 2004; Weinberger, Stegman & Fischer, 2005). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, το επιχείρημα είναι μια διαδικασία υποβολής ισχυρισμών και υπόδειξης αιτιολόγησης για τη χρήση των αποδεικτικών στοιχείων. Το μοντέλο αυτό αναλύει τα συστατικά των επιχειρημάτων, δηλαδή τους ισχυρισμούς ή συμπεράσματα (claims), τα δεδομένα (data) που υποστηρίζουν τους ισχυρισμούς, τις εγγυήσεις (warrants) που αποδεικνύουν γιατί τα δεδομένα υποστηρίζουν τους ισχυρισμούς, τις υποστηρίξεις (backings) που είναι πληροφορίες που στηρίζουν τις εγγυήσεις, τις πιστοποιήσεις (qualifiers) που καταδεικνύουν την ισχύ των στοιχείων των εγγυήσεων, καθώς και τις αντικρούσεις (rebutals) που υποδεικνύουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες τα δεδομένα μαζί με τις εγγυήσεις δεν οδηγούν στους ισχυρισμούς. Η ποιότητα ενός επιχειρήματος καθορίζεται από την ποιότητα των επιμέρους συστατικών του στοιχείων.

Λόγω δυσκολιών χρήσης του παραπάνω μοντέλου για την ανάλυση του γραπτού και του προφορικού λόγου των μαθητών υιοθετείται μία απλουστευμένη εκδοχή του (McNeil, Lizotte, Krajcik & Marx, 2006) στην οποία μια τεκμηριωμένη εξήγηση περιλαμβάνει τρία συστατικά στοιχεία: ισχυρισμό, αποδεικτικά στοιχεία και συλλογισμό. Ο ισχυρισμός είναι ένα συμπέρασμα που απαντά σε μία ερώτηση ή ένα πρόβλημα. Τα αποδεικτικά στοιχεία είναι τα δεδομένα που αποδεικνύουν τον ισχυρισμό. Ο συλλογισμός συνδέει τον ισχυρισμό με τα αποδεικτικά στοιχεία και φανερώνει τον λόγο για τον οποίο τα δεδομένα θεωρούνται ως αποδεικτικά στοιχεία που υποστηρίζουν τον ισχυρισμό χρησιμοποιώντας επιστημονικές αρχές. Στην εκδοχή αυτή, διαχωρίζεται η δομή και το περιεχόμενο του επιχειρήματος τα οποία χαρακτηρίζουν και την ποιότητά του (McNeil, Lizotte, Krajcik & Marx, 2006; Sandoval & Millwood, 2005). Η ποιότητα της δομής του επιχειρήματος αποτυπώνεται από την επάρκεια των συστατικών στοιχείων του (ισχυρισμός, αποδεικτικά στοιχεία και συλλογισμός), ενώ του περιεχομένου του από την καταλληλότητα των συστατικών στοιχείων τα οποία αξιολογούνται με βάση την επιστημονική γνώση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Για να μελετηθεί η ικανότητα 18 μαθητών ενός τμήματος Ε΄ Δημοτικού να επιχειρηματολογούν, δόθηκε, στην πρώτη φάση, δοκίμιο το οποίο περιείχε εννέα (9) ερωτήσεις/έργα, για τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, το οποίο συμπλήρωσε κάθε παιδί μόνο του. Σε όλα τα ερωτήματα/έργα του δοκιμίου ζητούταν από τα παιδιά να αιτιολογήσουν τις σκέψεις τους και να εξηγήσουν τον τρόπο επίλυσης.

Σε δεύτερη φάση, για να μελετηθεί η επίδραση του βαθμού καθοδήγησης στη δομή και στο περιεχόμενο των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών δόθηκε το ίδιο δοκίμιο, το οποίο συμπλήρωσε κάθε παιδί μόνο του, αλλά αφού είχε πραγματοποιηθεί διδασκαλία για την επιχειρηματολογία (ως ανάγκη που προέκυψε από τα αποτελέσματα του δοκιμίου της πρώτης φάσης), κοινή για όλα τα παιδιά, καθώς και διδακτικές παρεμβάσεις βασισμένες στη διερευνητική προσέγγιση (δομημένη για τους μισούς μαθητές και καθοδηγούμενη για τους άλλους μισούς) διάρκειας επτά (7) διδακτικών ωρών. Οι μαθητές και στις δύο διδακτικές παρεμβάσεις εργάστηκαν σε ομάδες.

Οι διδακτικές παρεμβάσεις, η δομημένη και η καθοδηγούμενη διέφεραν ως προς τον βαθμό καθοδήγησης. Συγκεκριμένα, στη δομημένη μέθοδο η ερευνήτρια/εκπαιδευτικός έθετε το ερώτημα και έδινε βήμα προς βήμα τη διαδικασία που έπρεπε να ακολουθήσουν τα παιδιά για να φτάσουν στο συμπέρασμα, αναλύοντας τα στοιχεία και το υλικό που είχε δοθεί. Στην καθοδηγούμενη, έδινε τις βασικές οδηγίες και στη συνέχεια άφηνε τα παιδιά μόνα τους να συλλογιστούν για να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα. Στις περιπτώσεις που τα παιδιά χρειάζονταν ανατροφοδότηση καθοδηγούσε, μέσω βοηθητικών ερωτήσεων. Σε όλη τη διάρκεια και των δύο παρεμβάσεων ζητούνταν από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντησή τους βασισμένοι στα δεδομένα που είχαν. Η διαφορά ήταν πως στη δομημένη υπήρχε άμεση ανατροφοδότηση και προσανατολισμός ως προς τα στοιχεία που πρέπει να λάβουν υπόψη τους για την επιχειρηματολογία ενώ στην καθοδηγούμενη ακόμη και η λάθος απάντηση συζητούνταν και αναλύονταν στην ολομέλεια της τάξης.

Στη συγκεκριμένη εργασία, λόγω περιορισμένης έκτασης θα αναλυθούν τα επιχειρήματα των παιδιών μόνο για ένα ερώτημα: *«Η Ελένη ισχυρίζεται ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, ενώ ο Μιχάλης ισχυρίζεται ότι κάθε ορθογώνιο είναι και τετράγωνο. Είναι κάποιος από τους δύο ισχυρισμούς σωστός; Αιτιολόγησε τη σκέψη σου.»*

Η ανάλυση και αξιολόγηση των επιχειρημάτων των μαθητών πραγματοποιήθηκε με το απλουστευμένο μοντέλο του Toulmin (McNeil, Lizotte, Krajcik & Marx, 2006). Ως προς τη δομή των εξηγήσεων εξετάστηκε η ύπαρξη και η επάρκεια των συστατικών στοιχείων των επιχειρημάτων, δηλαδή ο ισχυρισμός, τα αποδεικτικά στοιχεία και ο συλλογισμός, ανεξάρτητα από το εννοιολογικό τους περιεχόμενο. Ως προς το περιεχόμενο των εξηγήσεων, εξετάστηκε η καταλληλότητα των συστατικών στοιχείων τους με βάση την επιστημονική γνώση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα αναλύονται σε αντιστοιχία με τα ερευνητικά ερωτήματα.

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των επιχειρημάτων των μαθητών πριν τις διδακτικές παρεμβάσεις;

Για τη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να επιχειρηματολογούν αναλύθηκαν οι ατομικές τους απαντήσεις στο δοκίμιο της πρώτης φάσης. Από τις απαντήσεις των παιδιών φάνηκε ότι η δομή και το περιεχόμενο των επιχειρημάτων τους ήταν παρόμοια.

Ως προς τη δομή των επιχειρημάτων τους, εκτός από δύο μαθητές, όλοι κατέγραψαν κάποιον ισχυρισμό στο ερώτημα. Οι ισχυρισμοί περιελάμβαναν στην ουσία μία απάντηση στο ερώτημα χρησιμοποιώντας λέξεις από αυτό. Συγκεκριμένα, ανέφεραν ότι *ο ισχυρισμός του Μιχάλη ή της Ελένης είναι σωστός.* Τα αποδεικτικά στοιχεία απουσίαζαν από την πλειονότητα των απαντήσεων τους (80%), ενώ όπου εμφανίζονταν κρίθηκαν ανεπαρκή εκτός από μία περίπτωση μαθήτριας που ανήκε στην ομάδα της καθοδηγούμενης διερευνητικής. Η συγκεκριμένη μαθήτρια, χρησιμοποίησε μαθηματικούς κανόνες για να στηρίξει την απάντησή της, οι οποίοι ήταν ορθοί (*Κάθε ορθογώνιο έχει ορθές γωνίες, οι οποίες είναι και τέσσερις*). Ωστόσο, δεν την οδήγησαν σε σωστό συλλογισμό και κατ’ επέκταση σωστό ισχυρισμό. Ο συλλογισμός, ως συστατικό στοιχείο της δομής του επιχειρήματος, επίσης απουσίαζε, ενώ κρίθηκε ανεπαρκής στις περιπτώσεις που εντοπίστηκε (σε 5 μαθητές από τους 18).

Ως προς το περιεχόμενο των επιχειρημάτων των μαθητών, μόνο 3 από τους 18 μαθητές (17%) κατέγραψαν κατάλληλο επιστημονικά ισχυρισμό (2 στη δομημένη, 1 στη καθοδηγούμενη): Τα αποδεικτικά στοιχεία κρίθηκαν επιστημονικά έγκυρα μόνο σε 2 περιπτώσεις μαθητών (11%), ένας από τους οποίους ανήκε στη δομημένη και ένας στη καθοδηγούμενη διερευνητική. Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές εστίασαν την προσοχή τους στις γωνίες των δύο σχημάτων και όχι στις πλευρές τους. Ωστόσο, ο πρώτος (της δομημένης) έλαβε υπόψη του τον παράγοντα αυτό, ενώ ο δεύτερος όχι και γι αυτό δεν οδηγήθηκε και σε σωστό ισχυρισμό (παράδειγμα: *Ο Μιχάλης είναι σωστός, γιατί κάθε ορθογώνιο έχει και ορθές γωνίες, οι οποίες είναι και τέσσερις*). Οι υπόλοιποι μαθητές παρουσίασαν στις απαντήσεις τους ανεπαρκή αποδεικτικά στοιχεία που κρίθηκαν και ακατάλληλα επιστημονικά. Ένα από αυτά είναι το παρακάτω: *Το εμβαδόν είναι τετράγωνο αν μικρύνεις το εμβαδόν του ορθογωνίου (μαθητής 1 που ανήκε στη δομημένη παρέμβαση)*. Σε παρόμοιο επίπεδο επιστημονικής εγκυρότητας ανήκε και ο συλλογισμός που εντοπίστηκε στις απαντήσεις των μαθητών, ο οποίος όπως και ο ισχυρισμός ήταν επιστημονικά έγκυρος μόνο στο 17% (3 στους 18) των μαθητών. Κάποιοι από τους υπόλοιπους δεν χρησιμοποίησαν αποδεικτικά στοιχεία και μαθηματικά δεδομένα για να στηρίξουν τους συλλογισμούς τους. Ένα από αυτά τα παραδείγματα είναι το παρακάτω: *Και τα δύο είναι ίδια γιατί όπως και να το γράψεις ίδιο είναι (μαθητής 12 που ανήκε στη καθοδηγούμενη παρέμβαση)*.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δηλώνουν πως οι μαθητές και των δύο ομάδων ανήκαν στο ίδιο επίπεδο ικανοτήτων επιχειρηματολογίας. Συγκεκριμένα, επιδίωκαν να καταγράψουν μία απάντηση, δανειζόμενοι λέξεις από την εκφώνηση, ενώ δεν λάμβαναν υπόψη τους μαθηματικά δεδομένα για να στηρίξουν την άποψή τους. Αξίζει να σημειωθεί πως οι μαθητές δεν είχαν ασχοληθεί ποτέ προηγουμένως με επιχειρηματολογία, οπότε αρκετές φορές παρατηρήθηκε η αναδιατύπωση των δεδομένων του ερωτήματος, ως μορφή αιτιολόγησης και υποστήριξης της απάντησης.

Σε τι διαφέρουν τα επιχειρήματα των μαθητών πριν και μετά τις παρεμβάσεις;

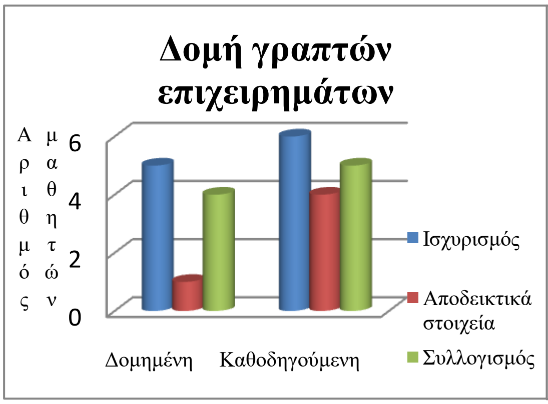
Ως προς τη δομή των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών της δομημένης διδασκαλίας οι μαθητές παρουσίασαν βελτίωση στη διατύπωση των επιχειρημάτων σε όλα τα συστατικά τους στοιχεία. Συγκεκριμένα οι ισχυρισμοί ήταν το ίδιο επαρκείς πριν και μετά την παρέμβαση, ενώ τα αποδεικτικά στοιχεία και οι συλλογισμοί παρουσίασαν βελτίωση ως προς την επάρκειά τους. Οι μαθητές της καθοδηγούμενης, δεν παρουσίασαν μεγάλη διαφορά στη δομή των επιχειρημάτων τους σε σχέση με τις αρχικές τους απαντήσεις.

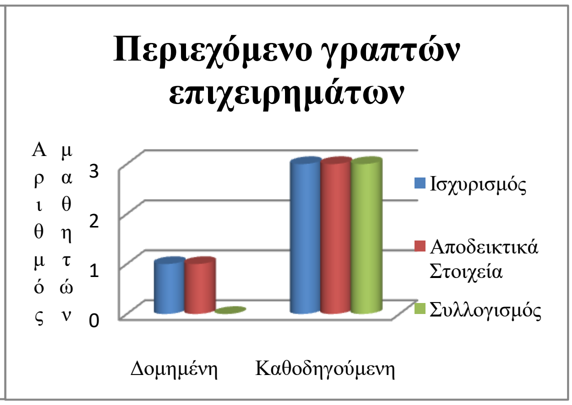
Ως προς το περιεχόμενο των συστατικών των επιχειρημάτων των μαθητών της δομημένης δεν εμφανίστηκε μεγάλη βελτίωση στις επιδόσεις τους. Φάνηκε να κατανοούν την δόμηση επιχειρημάτων, χωρίς να ασχολούνται τόσο με την επιστημονική τους εγκυρότητα. Αυτό, πιθανόν να συνδέεται και με το γεγονός πως σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας ο εκπαιδευτικός όριζε την εξέλιξή της με βάση την ορθότητα ή όχι των απαντήσεων των μαθητών, οπότε δεν αντιλήφθηκαν την ανάγκη να υποστηρίξουν την απάντησή με τη βοήθεια μαθηματικών αποδεικτικών στοιχείων. Όσον αφορά στους μαθητές της καθοδηγούμενης διερευνητικής, ένα από τα συστατικά στοιχεία των επιχειρημάτων που εμφανίστηκε σε μεγαλύτερο βαθμό στο τελικό δοκίμιο είναι αυτό του συλλογισμού. Οι μαθητές έκαναν απόπειρα να συνδυάσουν τα δεδομένα του προβλήματος με τον ισχυρισμό που ήθελαν να υπερασπιστούν. Ωστόσο, παρατηρήθηκε και το φαινόμενο να παραθέτουν έναν ορθό και επαρκή συλλογισμό, αλλά επειδή στο protest είχαν απαντήσει κάτι διαφορετικό, θέλοντας να μην αλλάξουν τον ισχυρισμό τους, κατέγραφαν τον λανθασμένο. Για παράδειγμα η μαθήτρια (Κ) αναφέρει: *Ο Μιχάλης έχει δίκιο γιατί το ορθογώνιο έχει 4 ορθές γωνίες, όπως και το τετράγωνο, αλλά το τετράγωνο έχει κ ίσες πλευρές. (σωστά αποδεικτικά στοιχεία, λάθος ισχυρισμός)*

Τέλος, παρατηρήθηκε βελτίωση ως προς τον γνωστικό κομμάτι με αύξηση του μέσου όρου των μαθητών, που έδωσαν σωστές απαντήσεις, χωρίς όμως διαφοροποίηση ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών.

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των επιχειρημάτων των μαθητών μετά τη δομημένη διερευνητική παρέμβαση και ποια μετά την καθοδηγούμενη διερευνητική παρέμβαση; Σε τι διαφέρουν;

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα από την ανάλυση της δομής και του περιεχομένου των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις προέκυψαν τα παρακάτω γραφήματα. Ο αριθμός φανερώνει το πλήθος των απαντήσεων που κρίθηκαν επαρκής κάθε περίπτωση.





Γραφημα 1: Αξιολόγηση δομής Γράφημα 2: Αξιολόγηση περιεχομένου

Από τα παραπάνω γραφήματα φαίνεται πως τόσο στη δομή όσο και στο περιεχόμενο των γραπτών επιχειρημάτων, η επίδοση των μαθητών της καθοδηγούμενης διερευνητικής ήταν υψηλότερη μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Ως προς τη δομή των γραπτών επιχειρημάτων παρατηρούμε πως μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας υπήρξε σε όλα τα συστατικά τους στην καθοδηγούμενη διερευνητική προσέγγιση. Οι επαρκείς ισχυρισμοί των μαθητών δεν διέφεραν σε αριθμό στις δύο ομάδες. Τα αποδεικτικά στοιχεία, ωστόσο, περιλαμβάνονταν σε μεγαλύτερο ποσοστό στις απαντήσεις των μαθητών της καθοδηγούμενης. Οι επαρκείς συλλογισμοί, επίσης δεν είχαν μεγάλη διαφορά στο ποσοστό τους.

Ως προς το περιεχόμενο των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών τα αποτελέσματα αλλάζουν. Σε όλα τα συστατικά που τα αποτελούν παρατηρήθηκε μεγαλύτερη επιστημονική ορθότητα στην ομάδα της καθοδηγούμενης. Συγκεκριμένα, τα αποδεικτικά στοιχεία μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να ήταν ελλιπή, αλλά κρίθηκαν κατάλληλα επιστημονικά. Αυτό ίσως οφείλεται και στην μεγαλύτερη ελευθερία που τους είχε δοθεί στην αναζήτηση της λύσης κατά την παρέμβαση και στην ταυτόχρονη ανάγκη στήριξης της απάντησής τους. Χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω παραδείγματα. 1) Επαρκή και κατάλληλα: *Και τα δύο έχουν ορθές γωνίες, αλλά* *το τετράγωνο έχει και ίσες πλευρές,* 2*)*Ανεπαρκή αλλά κατάλληλα: *Το τετράγωνο έχει ορθές γωνίες.*

Άξιο σχολιασμού είναι και το συστατικό στοιχείο του συλλογισμού, το οποίο στη περίπτωση της δομημένης δεν είναι επιστημονικά έγκυρο σε καμία από τις απαντήσεις τους, ενώ στην καθοδηγούμενη εμφανίζεται ως έγκυρη και επαρκής επιστημονική απάντηση στο 30% των απαντήσεων.

Διαφοροποίηση στις ομάδες παρατηρήθηκε ακόμα και στον τρόπο συμπλήρωσης του δοκιμίου. Οι μαθητές της δομημένης διερευνητικής περίμεναν την ανατροφοδότηση και την επιβεβαίωση από την εκπαιδευτικό, ενώ οι μαθητές της καθοδηγούμενης απαντούσαν ατομικά χωρίς να περιμένουν την παρέμβασή της πιθανόν επηρεασμένα από τον τρόπο διδασκαλίας που συμμετείχαν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, διαπιστώσαμε πως η δομή και το περιεχόμενο των επιχειρημάτων των μαθητών αυτής της ηλικίας παρουσίασε μια βελτίωση και στις δύο ομάδες, αλλά όχι στον βαθμό που περιμέναμε. Αυτό, βέβαια, μπορεί να οφείλεται και στο γεγονός ότι σπάνια δίνονται στους μαθητές ευκαιρίες να συγκροτήσουν τόσο προφορικά όσο και γραπτά επιχειρήματα (Σκουμιός, 2017; Driver et al, 2000).

Τα ευρήματα της παρούσας εργασίας αποδεικνύουν πως είναι εφικτή η βελτίωση της δομής των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών, τόσο μέσω της δομημένης όσο και μέσω της καθοδηγούμενης διερευνητικής διδασκαλίας. Συγκρίνοντας τη δομή των γραπτών επιχειρημάτων πριν και μετά την εφαρμογή των παρεμβάσεων προέκυψε ότι η επάρκεια των συστατικών στοιχείων των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών (ισχυρισμός, αποδεικτικά στοιχεία, συλλογισμός, αντίκρουση) βελτιώθηκε σημαντικά και στις δύο ομάδες μαθητών. Ακόμη, διαπιστώθηκαν περιπτώσεις, όπου πριν τις παρεμβάσεις οι μαθητές δεν ασχολήθηκαν καθόλου με το ερώτημα, ενώ μετά ένιωσαν πως μπορούν να ασχοληθούν και να κάνουν μια απόπειρα δόμησης μιας γραπτής εξήγησης. Η παρούσα βελτίωση θα μπορούσε να αποδοθεί στη διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά τις διερευνητικές μεθόδους, στο υλικό που δόθηκε το οποίο ήταν διαφορετικό από τη συνηθισμένη μαθηματική διαδικασία και στη διδασκαλία της επιχειρηματολογίας που προηγήθηκε της έρευνας καθώς οι μαθητές δεν είχαν ασχοληθεί ποτέ ξανά με τα συστατικά και την αξιολόγηση γραπτών επιχειρημάτων. Η διαφορά που εντοπίστηκε στα δύο διαφορετικά είδη διερευνητικών παρεμβάσεων, θα μπορούσε να αποδοθεί στη μεγαλύτερη ελευθερία που δόθηκε στους μαθητές της καθοδηγούμενης, καθώς έπρεπε μόνοι τους να δώσουν εξηγήσεις για να προχωρήσουν στο επόμενο βήμα, κάτι το οποίο δινόταν από τον εκπαιδευτικό στην άλλη περίπτωση. Έρευνες, εξάλλου, έχουν αποδείξει πως τέτοιου είδους παρεμβάσεις συμβάλλουν στη βελτίωση της ποιότητας των γραπτών επιχειρημάτων των μαθητών (McNeill & Krajcik, 2012; McNeill et al., 2005).

Ωστόσο, η παρούσα έρευνα αποτελεί ένα πιλοτικό κομμάτι μιας ευρύτερης έρευνας. Απαιτείται μεγαλύτερη σε διάρκεια διδασκαλία της επιχειρηματολογίας στους μαθητές καθώς και περισσότερα ερωτήματα που απαιτούν γραπτές εξηγήσεις. Ακόμη, μπορεί να γίνει μια μελέτη σύγκρισης των γραπτών και των προφορικών επιχειρημάτων των μαθητών. Το δείγμα των μαθητών στην επόμενη έρευνα, καθώς και η διάρκεια θα είναι μεγαλύτερα με στόχο τα εγκυρότερα αποτελέσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Asterhan, (2012). Facilitating classroom argumentation with computer technology, New Developments in the Learning Sciences

Banchi, H. & Bell, R. (2008). The Many Levels of Inquiry. *Science and Children*, 46(2), 26-29

Brem, Russells & Weems, (2001). Science on the Web: Student Evaluations of Scientific Arguments, *Discourse Processes*, 32(2)

Erduran & Jimenez-Aleixandre, (2012), Argumentation in Science Education Research, *Science education research and practice in Europe: Retrospective and prospective*, Sense Publishers, pp.253-289

Erduran, Simon & Osborne, (2004). Enhancing the quality of argumentation in school of science, *Journal of Research in Science Teaching,* 41 (10): 994-1020

Kirschner, Sweller & Clark, (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching, *Educational Psychologist*, 41(2)

Kuhn, Black, Keselman, & Kaplan, (2000). The development of cognitive skills to support inquiry learning, *Cognition and Instruction*, 18(4):495-523

Maaß & Artigue, (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis, *ZDM: the international journal on mathematics education*, 45(6):779-795

Makar, Bakker, & Ben-Zvi, (2015). Scaffolding norms of argumentation based inquiry in a primary mathematics classroom, *ZDM: the international journal on mathematics education.*

McNeil & Krajcik, (2007). Scientific explanations: Characterizing and evaluating the effects of teachers' instructional practices on student learning, *Journal of Research in Science Teaching,* 45(1)

McNeil, Lizotte, Krajcik & Marx, (2006). Supporting students' construction of scientific explanation by fading scaffolds in instructional materials, *Journal of the learning sciences,* 15(2): 153-191

Sadeh, Zion (2009). The development of dynamic inquiry performances within an open inquiry setting: A comparison to guided inquiry setting. *Research in Science Education* 37(4):423-447

Sandoval & Millwood, (2005). The quality of students' use of evidence in written scientific explanations, *Cognition and instruction*, 23 (1): 23-55

Sandoval & Reiser, (2004). Explanation-driven inquiry: Integrating conceptual and epistemic scaffolds for scientific inquiry, *Science Education,* 88: 345-372

Schwarz & Asterhan, (2010). Argumentation and reasoning. *International Handbook of Psychology in Education,* pp.137-176

ΟΙ ΕΡΕΥΝΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ: ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Πετροπούλου Γεωργία[1], Μάλη Αγγελική[2], Μπιζά Ειρήνη[3]

[1]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, [2]University of Groningen, [3]University of East Anglia

gpetrop@math.uoa.gr, a.mali@rug.nl, i.Biza@uea.ac.uk

Σε αυτό το άρθρο εξετάζουμε διδακτικές πρακτικές ερευνητών μαθηματικών σε Ελλάδα και Αγγλία σε σχέση με πρακτικές που οι ίδιοι χρησιμοποιούν στην έρευνά τους στα μαθηματικά. Τα δεδομένα προέρχονται από την παρατήρηση διδασκαλιών σε φοιτητές και συζητήσεις με τους διδάσκοντες. Εντοπίζουμε διδακτικές πρακτικές όπως είναι η αξιοποίηση παραδειγμάτων, η σύνδεση μαθηματικών περιοχών, η οπτικοποίηση και η απλοποίηση που συνδέονται με πρακτικές της μαθηματικής έρευνας. Συζητούμε πώς η σαφής χρήση αυτών των πρακτικών στη διδασκαλία δίνει στους φοιτητές τη δυνατότητα να επεκτείνουν τον Μαθηματικό τους Ορίζοντα και δυνητικά να προετοιμαστούν για την σχολική εκπαίδευση.

Η εκπαίδευση των μελλοντικών εκπαιδευτικών που θα διδάξουν μαθηματικά στο σχολείο, διεθνώς, παρά τις διαφορές από χώρα σε χώρα, περιλαμβάνει συχνά πανεπιστημιακά μαθηματικά τα οποία διδάσκονται από ερευνητές μαθηματικούς (Leikin, Zazkis & Meller, 2017). Η έρευνα στη Διδακτική των μαθηματικών έχει δείξει ενδιαφέρον για τις διδακτικές πρακτικές που αυτοί οι ερευνητές υιοθετούν, καθώς και για την επίδραση των ερευνητικών τους πρακτικών στη διδασκαλία τους (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz & Rasmussen, 2016). Για αρκετούς από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς η συνάφεια πανεπιστημιακής εκπαίδευσης και σχολικής διδασκαλίας είναι ασαφής (Zazkis & Leikin, 2010), καθώς το μαθηματικό περιεχόμενο των μαθημάτων που διδάσκονται στο πανεπιστήμιο απέχει από αυτό του σχολείου. Φαίνεται να λείπει η σύνδεση ανάμεσα στην προχωρημένη μαθηματική γνώση δηλαδή «τη γνώση του αντικειμένου που αποκτάται κατά τη διάρκεια των πανεπιστημιακών σπουδών» (Zazkis & Leikin, 2010, σ. 264) και στα μαθηματικά του σχολείου. Αναφερόμαστε στο συνδετικό κρίκο που συνδέει τα πανεπιστημιακά μαθηματικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο χρησιμοποιώντας τη μεταφορά του *Μαθηματικού Ορίζοντα* (*Mathematical Horizon)* που προτάθηκε από τους Ball, Thames & Phelps (2008), και εξετάζουμε τη σχέση του Μαθηματικού Ορίζοντα με τις ερευνητικές πρακτικές στα μαθηματικά των διδασκόντων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η θεωρητική οπτική που υιοθετούμε δε διαχωρίζει τη γνώση των εκπαιδευτικών από τη διδακτική πράξη και το κοινωνικό και θεσμικό περιβάλλον στο οποίο οι διδάσκοντες δρουν. Η γνώση διαμορφώνεται στην πράξη, καθώς οι διδάσκοντες διδάσκουν μαθηματικά και εργάζονται πάνω στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, ο Μαθηματικός Ορίζοντας (Ορίζοντας σε συντομία, Ball κ.α., 2008) των εκπαιδευτικών ενώνει τα πανεπιστημιακά με τα σχολικά μαθηματικά και περιλαμβάνει στοιχεία μαθηματικής επίγνωσης πέρα από το περιεχόμενο που πρέπει να διδαχθεί, στοιχεία πρακτικής (μαθηματικής και διδακτικής) και στοιχεία αναστοχασμού (Mali, Petropoulou, Biza & Hewitt, υπό έκδοση). Σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, ο Ορίζοντας των μελλοντικών εκπαιδευτικών μπορεί να περιλαμβάνει στοιχεία μαθηματικών πρακτικών – δηλαδή πρακτικών που αφορούν στο έργο των ερευνητών σε σχέση με το αντικείμενο των μαθηματικών και όχι σε σχέση με τη διδασκαλία του - όπως η επίλυση προβλήματος, καθώς και συνδέσεις εντός του μαθηματικού περιεχομένου (Figueiras κ.α., 2011). Αυτοί που είναι ειδικοί και στα δύο (μαθηματικές πρακτικές και συνδέσεις) είναι οι ερευνητές μαθηματικοί. Ωστόσο, το ότι οι ίδιοι είναι ειδικοί δε σημαίνει απαραίτητα ότι επικοινωνούν με *σαφήνεια* την εμπειρία τους με τους φοιτητές, για παράδειγμα προσφέροντας *μετασχόλια* (*meta-comments*, Jaworski, Treffert-Thomas & Bartsch, 2009) για τον ρόλο, τη σημασία και τις συνδέσεις ενός ορισμού ή θεωρήματος με την ευρύτερη μαθηματική θεωρία. Η σαφής επικοινωνία της εμπειρίας των ερευνητών στους φοιτητές είναι σημαντική, καθώς ακριβώς αυτή η επικοινωνία μπορεί να βοηθήσει τους φοιτητές να διευρύνουν τον Ορίζοντά τους (Figueiras κ.α., 2011). Η καλλιέργεια του Ορίζοντα των φοιτητών - οι οποίοι έχουν την επιλογή να γίνουν καθηγητές μαθηματικών στο σχολείο και διδάσκονται από ερευνητές μαθηματικούς - είναι ζητούμενη, καθώς αυξάνει τις πιθανότητες των ευκαιριών μάθησης για τους μαθητές τους στο μέλλον.

Σε προηγούμενη έρευνα (Mali & Petropoulou, 2017) αναπτύχθηκε ένα αναλυτικό πλαίσιο το οποίο περιγράφει τη διδασκαλία των ερευνητών μαθηματικών μέσα από τέσσερεις βασικές πρακτικές – την επιλογή έργων, την παροχή εξηγήσεων, την αξιολόγηση, και την επέκταση της μαθηματικής σκέψης των φοιτητών - με λεπτομερείς αναφορές σε επιμέρους θεματικά συνδεδεμένες πρακτικές και εργαλεία εντός κάθε μίας από τις τέσσερεις βασικές πρακτικές. Σχετικές με τον Ορίζοντα των φοιτητών είναι οι πρακτικές επέκτασης – αυτές είναι διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται για να μυήσουν τους φοιτητές σε προχωρημένες μαθηματικές πρακτικές. Για παράδειγμα, η διατύπωση μιας μαθηματικής εικασίας μέσα από εργαλεία όπως είναι τα αντιπαραδείγματα για την απόρριψη ενός μη έγκυρου ισχυρισμού και οι γραφικές αναπαραστάσεις προέρχονται από την έρευνα των ερευνητών μαθηματικών (Πετροπούλου, Ζαχαριάδης, & Πόταρη, 2014).

Οι διδακτικές πρακτικές των ερευνητών μαθηματικών που έχουν την δυνατότητα να αναπτύξουν τον Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών αναδεικνύονται στη βιβλιογραφία από έρευνες σχετικά με τις προοπτικές της συνδιδασκαλίας από ερευνητές μαθηματικούς και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών ιδίως στη γεφύρωση της πανεπιστημιακής και της σχολικής διδασκαλίας (π.χ. Leikin κ.α., 2017). Άλλες έρευνες στηρίζουν την άποψη ότι οι ερευνητικές πρακτικές έχουν τη δυνατότητα να επηρεάσουν τον τρόπο διδασκαλίας (Petropoulou, Potari & Zachariades, 2011) και μάλιστα εμπλουτίζουν την διδασκαλία (Misfeldt & Johansen, 2015). Στην παρούσα εργασία προχωράμε περαιτέρω αυτή την άποψη με το επιχείρημα ότι πρέπει να γίνει ρητή η επίδραση των ερευνητικών πρακτικών στον τρόπο διδασκαλίας όπως επίσης και η σαφής επικοινωνία στους φοιτητές αυτών των πρακτικών ακριβώς την ώρα που χρησιμοποιούνται. Όπως και στο Mali κ.α. (υπό έκδοση), σε αυτό το άρθρο εξετάζουμε τις διδακτικές πρακτικές πέντε ερευνητών μαθηματικών που διδάσκουν απειροστικό λογισμό σε Ελλάδα και Αγγλία μέσω παρατηρήσεων της διδασκαλίας τους και συζητήσεων μαζί τους. Συγκεκριμένα, ανιχνεύουμε πώς οι διδακτικές τους πρακτικές σχετίζονται με τις ερευνητικές τους πρακτικές. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε τα ερευνητικά ερωτήματα: (α) ποιες πρακτικές επέκτασης υιοθετούν οι ερευνητές μαθηματικοί στη διδασκαλία τους προς φοιτητές των μαθηματικών; και (β) πώς αυτές οι πρακτικές έχουν τη δυνατότητα να διευρύνουν τον Μαθηματικό Ορίζοντα των φοιτητών, αν θεωρήσουμε ότι αυτοί θα γίνουν εκπαιδευτικοί;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνούμε τη φύση των πρακτικών που θα μπορούσαν να διευρύνουν τον Ορίζοντα των φοιτητών αξιοποιώντας εμπειρικά δεδομένα που προέρχονται από δύο μελέτες που διεξήχθησαν σε Αγγλία (Mali, 2016) και Ελλάδα (Πετροπούλου, 2018). Επιλέξαμε τα πανεπιστήμια στα οποία συλλέχθηκαν τα δεδομένα αυτών των μελετών γιατί έχουν Μαθηματικά Τμήματα όπου τα εργαστήρια (tutorials) σε λίγους φοιτητές (2-8) και οι παραδόσεις σε μεγάλα ακροατήρια (άνω των 100 ατόμων) είναι θεσμοθετημένη παράδοση. Είναι σημαντικό για εμάς το ότι αξιοποιούμε δεδομένα και από παραδόσεις και από εργαστήρια σε διαφορετικές χώρες γιατί μας επιτρέπει να εντοπίσουμε κοινές πρακτικές. Οι διδάσκοντες που συμμετέχουν στις δύο έρευνες είναι ερευνητές και πεπειραμένοι στη διδασκαλία με διδακτική πείρα άνω των 20 ετών. Το μάθημα που παρατηρήθηκε είναι ο απειροστικός λογισμός του πρώτου έτους, μάθημα υποχρεωτικό για όλους τους φοιτητές.

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια δύο ακαδημαϊκών ετών και αποτελούνται από σημειώσεις πεδίου, παρατηρήσεις της διδασκαλίας και ηχογραφημένες συζητήσεις με τους διδάσκοντες, δύο ερευνητές μαθηματικούς στην Αγγλία και τρεις στην Ελλάδα. Οι συζητήσεις με τους διδάσκοντες βασίζονται στις παρατηρήσεις της διδασκαλίας τους και αφορούν σε πιο λεπτομερείς θεωρήσεις που αυτοί έχουν σχετικά με τις διδακτικές τους πρακτικές. Οι παρατηρήσεις αναδεικνύουν το πώς οι διδάσκοντες επικοινωνούν τη χρήση μαθηματικών πρακτικών στους φοιτητές τους, για παράδειγμα υπό τη μορφή *μετασχολίων* (Jaworsi, κ.α., 2009). Τα αποσπάσματα που παρουσιάζουμε, για λόγους χώρου, προέρχονται από δύο διδάσκοντες στην Αγγλία (T1, T2) και έναν στην Ελλάδα (Κ1). Οι ερευνητές αυτοί συμμετείχαν εθελοντικά στις έρευνες και η αλληλεπίδραση με τους φοιτητές είναι τυπική στη διδασκαλία τους.

Σε πρώτο επίπεδο εξετάσαμε, μέσω διττής προσέγγισης των δεδομένων «από την κορυφή προς τα κάτω» και «από τη βάση προς τα πάνω», τυπικές διδακτικές πρακτικές των συμμετεχόντων που ήταν κοινές και είχαν τη δυνατότητα να διευρύνουν τον Ορίζοντα των φοιτητών. Αναγνωρίσαμε τις πρακτικές, αξιοποίηση παραδειγμάτων, σύνδεση μαθηματικών περιοχών, οπτικοποίηση και απλοποίηση. Ερμηνεύσαμε από τις συζητήσεις με τους συμμετέχοντες ότι τέτοιες πρακτικές έχουν πρόθεση να επεκτείνουν τη μαθηματική σκέψη των φοιτητών ώστε, για παράδειγμα, να «βλέπουν» συνδέσεις ανάμεσα σε μαθηματικές περιοχές. Σε δεύτερο επίπεδο εστιάσαμε στη φύση αυτών των πρακτικών, αρχικά κατανοώντας τις (μέσα από τους στόχους που διατύπωσαν οι ίδιοι οι διδάσκοντες) και, στη συνέχεια, συνδέοντας τον τρόπο υλοποίησής τους με τις ερευνητικές πρακτικές των διδασκόντων (μέσα από τις παρατηρήσεις της διδασκαλίας και τις συζητήσεις μαζί τους). Τα αποσπάσματα από τα δεδομένα που παρουσιάζουμε επιλέχθηκαν από ένα ευρύτερο σύνολο διδακτικών πρακτικών επέκτασης που προσδιορίσαμε (περιλαμβάνονται σε Mali κ.α., υπό έκδοση) και διευκρινίζουν περαιτέρω την πορεία ανάλυσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Ορίζοντας των φοιτητών και η διεύρυνσή του στο πανεπιστήμιο είναι ένα ζήτημα που απασχολεί τους διδάσκοντες. Οι ίδιοι εκτιμούν ότι η ερευνητική τους δραστηριότητα στα μαθηματικά είναι αυτή που τους παρέχει μία συνολική εικόνα των μαθηματικών και, για κάποιους, που τους παρέχει τη δυνατότητα να «περάσουν» και στους φοιτητές τους αυτή την ευρύτερη εικόνα. Στο παρακάτω απόσπασμα ο Κ1 περιγράφει αυτό που εμείς ονομάζουμε Ορίζοντα έστω και χωρίς να τον κατονομάζει ως τέτοιο:

> Για έναν που διδάσκει Απειροστικό στο πρώτο έτος και είναι ερευνητής μαθηματικών η έρευνα που έχει κάνει στα μαθηματικά του δίνει την κατεύθυνση. Τη συνολική τοποθέτηση αυτού του αντικειμένου, τι είναι σημαντικό και τι είναι δευτερεύον, τριτεύον, και πώς αυτό θα το περάσεις στους φοιτητές. Που αυτό μπορεί να διαφέρει από έναν ερευνητή σε άλλον. Αλλά που όμως καθένας [ερευνητής] έχει ένα συγκεκριμένο τρόπο να βλέπει τα μαθηματικά. (Κ1, Χειμερινό εξάμηνο, 2ο έτος)

Η ανάλυση ανέδειξε την πρόθεση των συμμετεχόντων να κάνουν σαφή στους φοιτητές τη συνολική εικόνα του μαθηματικού αντικειμένου που έχουν οι ίδιοι μέσα από την έρευνά τους. Στις παρακάτω υποενότητες δίνουμε παραδείγματα για τον τρόπο με τον οποίο αυτή η πρόθεση υλοποιείται στη διδασκαλία μέσα από τον *μετασχολιασμό* των διδασκόντων και προσδιορίζουμε τέσσερεις κατηγορίες *διδακτικών πρακτικών επέκτασης*.

1. Η αξιοποίηση παραδειγμάτων

Η προσφυγή σε παραδείγματα είναι συνήθης πρακτική για την παραγωγή νέας μαθηματικής γνώσης. Αυτή η ευρετική που οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούν στην έρευνά τους έρχεται και στη διδασκαλία τους μέσα από τον σαφή *μετασχολιασμό* προς τους φοιτητές τους. Για παράδειγμα, σε ένα εργαστήριο οι φοιτητές δυσκολεύονται να καθορίσουν αν μία συγκεκριμένη σύνθετη συνάρτηση είναι 1-1. Η Τ1 ζητά από τους φοιτητές να δώσουν παραδείγματα 1-1 συναρτήσεων για να εκμαιεύσει τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης. Αυτοί προτείνουν πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές και λογαριθμικές συναρτήσεις. Έπειτα, ξεκινά μία συζήτηση (σχετικά με τα χαρακτηριστικά που έχουν όλες αυτές οι συναρτήσεις τα οποία τις καθιστούν 1-1 σε διαστήματα) και η Τ1 προσφέρει το εξής μετασχόλιο:

> Στα μαθηματικά [...] από το σύνολο των παραδειγμάτων που έχουμε, καταλήγουμε σε μία ιδέα [έναν ορισμό] και στη συνέχεια μπορούμε να τσεκάρουμε αυστηρά αν κάτι περιέχεται σε αυτή την ιδέα ή όχι. Και αυτό που συμβαίνει στα μαθηματικά είναι ότι αν δούμε μία πιο γενική εκδοχή των πραγμάτων που δεν ταιριάζει μεν με την ιδέα που αναπτύξαμε, αλλά που συνεχίζει να έχει κάποια κοινά χαρακτηριστικά, τότε δημιουργούμε έναν νέο ορισμό που είναι ακόμα πιο γενικός. Έτσι καταλήγουμε σε νέους ορισμούς κάθε

> φορά που αναγνωρίζουμε ότι υπάρχουν κάποια σύνολα δομών που έχουν σχέση μεταξύ τους. […] Αν κοιτάξετε και την ιστορία των μαθηματικών θα δείτε ότι οι άνθρωποι δεν είχαν την ιδέα της συνάρτησης. Αυτό που είχαν ήταν πολλά παραδείγματα συναρτήσεων από τα οποία προσπαθούσαν να βγάλουν τα κρίσιμα χαρακτηριστικά. Καταλαβαίνετε; (Τ1, Εαρινό εξάμηνο, 1ο έτος)

Το παραπάνω απόσπασμα αποτελεί *μετασχολιασμό* πάνω στην πρακτική μίας ερευνήτριας η οποία αξιοποιεί παραδείγματα από την έρευνά της για την παραγωγή ενός νέου ορισμού. Ο *μετασχολιασμός* της Τ1 περικλείει την οπτική της για τη φύση των μαθηματικών και επικοινωνεί σαφώς στους φοιτητές την εμπειρία της σε σχέση με την παραγωγή νέων μαθηματικών μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων. Ο *μετασχολιασμός* είναι σημαντικός προσφέροντας μία πιθανή ευκαιρία διεύρυνσης του Ορίζοντα των φοιτητών σχετικά με τη δημιουργία ενός νέου μαθηματικού ορισμού.

2. Η σύνδεση μαθηματικών περιοχών

Οι συνδέσεις (π.χ. μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών) αποτελούν την καρδιά της μαθηματικής ανακάλυψης. Κάποιοι ερευνητές μαθηματικοί ορίζουν τα ίδια τα μαθηματικά ως συνδέσεις. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι η σαφήνεια μιας τέτοιας σημαντικής πρακτικής στα μαθηματικά θα μπορούσε να προσφέρει στους φοιτητές την ευκαιρία να διευρύνουν τον μαθηματικό τους Ορίζοντα.

Σε μία παράδοση σχετικά με τη σύγκλιση άπειρων σειρών, ο Κ1 προκαλεί τους φοιτητές του να σκεφτούν για ποιόν λόγο ο αριθμός 0,3… είναι ρητός, παρόλο που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ο Κ1 εξηγεί με σαφήνεια στους φοιτητές τον λόγο για τον οποίο ο αριθμός 0,3… είναι ακριβώς ίσος με 1/3: με ένα μετασχόλιο συνδέει τον αριθμό 0,3… με την άπειρη γεωμετρική σειρά 3/10 + 3/100+3/1000+… που συγκλίνει στο 1/3. Αποσαφηνίζοντας ότι η σύνδεση του αριθμού 0,3… με τη γεωμετρική σειρά 3/10 + 3/100+3/1000+… είναι αυτή που εξασφαλίζει την ισότητα 0,3… = 1/3, ο Κ1 επιχειρεί να στρέψει τη σκέψη των φοιτητών του από το *πώς* ο αριθμός 0,3… γράφεται ως κλάσμα 1/3 στο *γιατί* αυτός ο αριθμός, παρόλο που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, είναι ίσος με 1/3. Στη συζήτηση μετά την παράδοση, ο Κ1 σχολιάζει σχετικά με αυτή την πρακτική της σύνδεσης διαφορετικών μαθηματικών περιοχών (σειρών και ρητών) ότι «οι φοιτητές πρέπει να μάθουν πώς να σκέφτονται μαθηματικά» και ότι «τα μαθηματικά δεν είναι τίποτα άλλο από συνδέσεις». Η σύνδεση αυτή προσφέρει στους φοιτητές τη μαθηματική αιτιολογία της ισότητας 0,3.. = 1/3 πιθανά επεκτείνοντας τον Ορίζοντα τους σχετικά με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός αριθμού (π.χ. 0,999… = 1).

3. Η οπτικοποίηση

Η οπτικοποίηση ως μέσο για να αποκτήσει κανείς διαισθητική εμπειρία των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών είναι κοινή πρακτική, τόσο στην έρευνα στα μαθηματικά, όσο και στη διδασκαλία τους. Για τους ερευνητές μαθηματικούς, η σχεδίαση διαγραμμάτων και γραφημάτων είναι μία σημαντική ευρετική μέθοδος. Για τη διδασκαλία, είναι μία συνήθης πρακτική που βοηθά την κατανόηση εννοιών.

Για παράδειγμα, σε ένα εργαστήριο, οι φοιτητές έχουν να γράψουν την παράσταση

$\left||x|-1\right|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Επειδή συναντούν δυσκολίες, ο Τ2 τους προτρέπει να σκεφτούν την παράσταση αυτή γεωμετρικά προτείνοντάς τους ότι: «μπορούμε απλά να σχεδιάσουμε ένα γράφημα της συνάρτησης» και συνεχίζοντας: «Λοιπόν, πώς λύνω αυτό το πρόβλημα; Θα σας δείξω. Θα το κάνω βήμα-βήμα». Στη συνέχεια, ο Τ2 κατασκευάζει διαδοχικά γραφήματα για τις συναρτήσεις y = x, y = |x|, y = |x| - 1 και y = $\left||x|-1\right|$. «Τώρα μπορείτε να δείτε ότι [η παράσταση $\left||x|-1\right|$] αποτελείται από διαφορετικούς κλάδους σε διαφορετικά διαστήματα». Η σύσταση του Τ2 προς τους φοιτητές να σκεφτούν την παράσταση $\left||x|-1\right|$ πρώτα γεωμετρικά προέρχεται από τη γεωμετρική οπτική που ο ίδιος έχει στην έρευνά του (είναι Γεωμέτρης), όπως λέει: «Αν είσαι Γεωμέτρης, αναζητάς γεωμετρικές λύσεις, νομίζω εξαρτάται από το ερευνητικό σου υπόβαθρο. [...] Για εμένα είναι πιο εύκολο να δω το γράφημα» (Τ2, Χειμερινό εξάμηνο, 2ο έτος). Θα λέγαμε ότι για εκείνον ο Ορίζοντας περιλαμβάνει μαθηματικά οπτικοποιημένα σε γραφήματα και διαγράμματα.

4. Η απλοποίηση

Η απλοποίηση ενός μαθηματικού προβλήματος συνίσταται στη μείωση της πολυπλοκότητάς του μέσα από τη χρήση ενός ανάλογου, αλλά πιο εύκολου, προβλήματος. Πρόκειται για ευρετική που χρησιμοποιείται από ερευνητές μαθηματικούς τόσο στη μαθηματική τους έρευνα όσο και στη διδασκαλία τους. Απαιτεί να διακρίνει κανείς τα ουσιαστικά μαθηματικά χαρακτηριστικά του αρχικού προβλήματος και να δημιουργήσει με αυτά ένα απλούστερο πρόβλημα αγνοώντας τις περιττές λεπτομέρειες. Ο Κ1 περιγράφει πώς χρησιμοποιεί την απλοποίηση στη διδασκαλία του:

> Στην τάξη κάνω κάτι που στην πραγματικότητα είναι φιλοσοφία ερευνητική. Αυτό που έχω μάθει πολύ καλά ακόμα και όταν ασχολούμαι με την έρευνα είναι: έχω ένα πρόβλημα, συνέχεια απλοποιώ. Στοχεύω την έννοια στο πιο απλό πρόβλημα. Για να τη ξεχωρίσω εντελώς. Και από εκεί και πέρα θα χτίσω σιγά-σιγά και θα δώσω το πραγματικό πρόβλημα που με απασχολεί. Έτσι; Άλλο είναι το πραγματικό πρόβλημα αλλά, θα το απλοποιήσω, θα το φτάσω εκεί έτσι ώστε να είναι ξεκάθαρο σε όλους τους φοιτητές γιατί κάνω αυτό που κάνω στο πιο απλό πρόβλημα. Και μετά θα χτίσω σιγά-σιγά και θα πάω στο πραγματικό πρόβλημα που με απασχολεί.
>
> (Κ1, Εαρινό εξάμηνο, 2ο έτος)

Σε μία παράδοση σχετικά με τη σύγκλιση σειρών, για παράδειγμα, ο Κ1 καλεί τους φοιτητές να «μαντέψουν» πότε μία σειρά μπορεί να συγκλίνει (όταν η ακολουθία είναι μηδενική) συγκρίνοντας δύο παραδείγματα που είχαν ήδη συζητηθεί: τη συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά $\sum_{\kappa=0}^{+\infty} x^{\kappa}$ με |x| < 1 και την αποκλίνουσα σειρά

$\sum_{\kappa=1}^{+\infty}(-1)^{\kappa}$. Όταν οι φοιτητές εστιάζουν σε άσχετες λεπτομέρειες, όπως το ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει γιατί έχει μεταβλητή ενώ η άλλη όχι, ο Κ1 απλοποιεί το παράδειγμα της γεωμετρικής σειράς στη σειρά $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{10}\right)^{\kappa}$ ώστε οι δύο σειρές «να μοιάζουν». Το νέο παράδειγμα, ανάλογο με το αρχικό (|-1/10| < 1), παρέχει στους φοιτητές τη δυνατότητα να σκεφτούν την ουσία του μαθηματικού προβλήματος ακριβώς λόγω της απλότητάς του. Φαίνεται ότι ο Κ1 με ερωτήσεις και κατάλληλα απλοποιημένα παραδείγματα προσπαθεί να διευκολύνει τους φοιτητές να φθάσουν σε μαθηματικές εικασίες διευρύνοντας τον Ορίζοντά τους σχετικά με τη λύση μαθηματικών προβλημάτων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι ερευνητές μαθηματικοί που συμμετείχαν σε αυτή την έρευνα έδειξαν ότι είχαν επίγνωση ότι η διδασκαλία τους επηρεάζεται από την έρευνά τους στα μαθηματικά. «Στην τάξη κάνω κάτι που στην πραγματικότητα είναι φιλοσοφία ερευνητική» ανέφερε χαρακτηριστικά ο Κ1 λίγο πιο πάνω. Οι πρακτικές που υιοθετούσαν στη διδασκαλία με επιρροές από τις ερευνητικές τους πρακτικές περιλάμβαναν τη χρήση παραδειγμάτων (π.χ. με στόχο την ανακάλυψη κοινών χαρακτηριστικών), τη σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών περιοχών (π.χ. αριθμούς με σειρές), την οπτικοποίηση (π.χ. τη σχεδίαση γραφημάτων), και την απλοποίηση (π.χ. τη χρήση ενός λιγότερου πολύπλοκου παραδείγματος). Το σύνολο τέτοιων πρακτικών επέκτασης της μαθηματικής σκέψης των φοιτητών που υιοθετεί κάθε ένας από τους συμμετέχοντες συνιστά ένα μοναδικό διδακτικό πορτραίτο με διαφορετική οπτική των μαθηματικών – γεωμετρική, φορμαλιστική κ.λ.π. Όμως, το σημαντικό είναι ότι η φύση τέτοιων πρακτικών μπορεί να εμπεριέχει την επίγνωση η χρήση τους έρχεται από την έρευνα στα μαθηματικά και, επιπλέον, ότι οφείλει να γίνει σαφής στους φοιτητές μέσα από σχετικό μετασχολιασμό. Ένας τέτοιος σχεδιασμός έχει την προοπτική να προσφέρει ευκαιρίες στους φοιτητές, που φιλοδοξούν να γίνουν μελλοντικοί εκπαιδευτικοί, να αναπτύξουν αυθεντικά βιώματα μύησης στην παραγωγή νέας μαθηματικής γνώσης κατά την πανεπιστημιακή τους εκπαίδευση. Αυτές οι ευκαιρίες και τα βιώματα μπορούν να διαμορφώσουν τη βάση της μελλοντικής τους διδασκαλίας – πώς βλέπουν οι ίδιοι τα μαθηματικά, τη φιλοσοφία που αναπτύσσουν για τη διδασκαλία και, ως επακόλουθο, την επέκταση του Ορίζοντα των μελλοντικών μαθητών τους.

Θεωρούμε ότι τα ευρήματα της παρούσας μελέτη έχουν δυνατότητες και προοπτικές. Οι δυνατότητες αφορούν στην επέκταση του Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών μέσα από το συνδυασμό επίγνωσης και σαφήνειας στη διδασκαλία – *επίγνωσης* των ερευνητών διδασκόντων ότι οι πρακτικές της έρευνάς τους στα μαθηματικά μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία τους και *σαφήνειας* των ίδιων προς τους φοιτητές τους σχετικά με τη χρήση τέτοιων μαθηματικών πρακτικών. Οι προοπτικές έγκεινται στον ρόλο της Διδακτικής των μαθηματικών σε αυτή την επέκταση του Ορίζοντα. Καθώς η έρευνα για τη διδασκαλία εγείρει την ενημερότητα (ερευνητών της Διδακτικής και διδασκόντων) για τον τρόπο που αυτή πραγματοποιείται (Jaworski, 2006), η ενημέρωση αμφότερων για τη σχέση έρευνας και διδασκαλίας μπορεί να προσφέρει στη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο. Τα παραπάνω αναμφισβήτητα προϋποθέτουν συνεργασία ερευνητών Διδακτικής και διδασκόντων, συνεργασία που τείνει να γίνει *κουλτούρα* σε ορισμένα μαθηματικά τμήματα διεθνώς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-Art and Looking Ahead. In I. Biza, V. Giraldo, R. Hochmuth, A. Khakbaz & C. Rasmussen (Eds.), *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level* (pp. 1-32). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Figueiras, L., Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. O. R. D. I. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics. 31*(3), 26-28.

Jaworski, B., Treffert-Thomas, S., & Bartsch, T. (2009). Characterising the teaching of university mathematics: a case of linear algebra. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 249-256). Thessaloniki, Greece: PME.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education, 9*(2), 187-211.

Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2017). Research mathematicians as teacher educators: Focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 451-473.

Mali, A. (2016). *Lecturers' tools and strategies in university mathematics teaching: an ethnographic study* (Doctoral dissertation). Loughborough University, Loughborough, UK.

Mali, A., Petropoulou, G., Biza, I. & Hewitt, D. (υπό έκδοση). The research mathematicians in the classroom: How their practice has potential to foster student horizon. In M. Goos & K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges.* Springer International Publishing.

Mali, A., & Petropoulou, G. (2017). Characterising undergraduate mathematics teaching across settings and countries: An analytical framework. *Nordic Studies in Mathematics Education, 22*(4), 23-42.

Misfeldt, M. & Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Educational Studies of Mathematics, 89*(3), 357–

373.

Petropoulou, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2011). Inquiring mathematics teaching at the university level. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. *3*, pp. 386-392). Ankara, Turkey: PME.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 263-281.

Πετροπούλου, Γ. (2018). *Η διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο* (Διδακτορική διατριβή). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Πετροπούλου, Γ., Ζαχαριάδης, Θ., & Πόταρη, Δ. (2014). Διερευνώντας τη Διδασκαλία των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο: η Αλληλεπίδραση Διδάσκοντος και Φοιτητών. Στα, Τζεκάκη Μ. (επιμέλεια), *Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*. Φλώρινα.

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ΤΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Γιάννης Χαραλάμπους, Ρίτα Παναούρα

Πανεπιστήμιο Frederick

yianch@cytanet.com.cy, pre.pm@frederick.ac.cy

Η παρούσα πειραματική έρευνα, στην οποία συμμετείχαν 851 μαθητές ηλικίας Ε και Στ δημοτικού, είχε σκοπό να εξετάσει την επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο αποτελείται από μια σειρά έργων μαθηματικής μοντελοποίησης, στις στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα έδειξαν επιδράσεις στους μαθητές της πειραματικής ομάδας αναφορικά με τους παράγοντες Ανησυχία, Αυτεπάρκεια και Απόλαυση. Συζητείται η σημασία διερεύνησης του θέματος της αξιοποίησης της μοντελοποίησης στη διδασκαλία των μαθηματικών σε σχέση με τις στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας ευρέως αποδεκτός ορισμός στην ερευνητική κοινότητα, ορίζει την επίλυση προβλήματος ως τη γνωστική διαδικασία που επικεντρώνεται στη μετατροπή μιας δεδομένης κατάστασης σε μια στοχευμένη κατάσταση όπου δεν υπάρχει προφανής διαθέσιμη μέθοδος λύσης (Mayer & Wittrock 2006). Οι Lesh και Zawojewski (2007) αναφέρουν πως ίσως είναι καιρός να εξεταστούν άλλες επιλογές και να επαναπροσδιοριστεί το θεμελιώδες επίπεδο των υποθέσεων που αφορούν τη σημασία της κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών λύσης προβλήματος. Μια πλούσια εναλλακτική προοπτική είναι η μαθηματική μοντελοποίηση, που μεταχειρίζεται τη λύση προβλήματος ως αναπόσπαστο κομμάτι στην ανάπτυξη της κατανόησης οποιασδήποτε μαθηματικής έννοιας και διαδικασίας (Lesh & Zawojewski 2007).

Στην παρούσα εργασία, αντλώντας από τους Lesh και Zawojewski (2007), όταν χρησιμοποιείται ο όρος 'λύση προβλήματος μοντελοποίησης' αναφέρεται σε ένα έργο ή μια στοχευμένη δραστηριότητα, το οποίο αποτελεί πρόβλημα (ή προβληματική κατάσταση), όταν ο «λύτης του προβλήματος» (που μπορεί να είναι και μια συνεργατική ομάδα) χρειάζεται να αναπτύξει ένα πιο «παραγωγικό τρόπο σκέψης» για τη δεδομένη κατάσταση. «Ένα πιο παραγωγικό τρόπο σκέψης» σημαίνει ότι είναι αναγκαίο ο λύτης να εμπλακεί σε μια διαδικασία ερμηνείας της κατάστασης, η οποία στα μαθηματικά αποτελεί «μοντελοποίηση» (Zawojewski, 2013).

Η ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας για τη μοντελοποίηση καταδεικνύει ένα αριθμό ερευνητικών κενών: (α) η πλειονότητα των προβλημάτων μοντελοποίησης, καθώς επίσης και παρεμβατικών προγραμμάτων, αφορούν μαθητές ψηλής και μέσης ικανότητας (Misho & Maab, 2012), (β) οι πλείστες ερευνητικές εργασίες αφορούν την Μέση και Ανώτερη Εκπαίδευση (Sokolowski, 2015), ενώ δεν υπάρχει επαρκής διασύνδεση με τις στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών, ιδιαίτερα για την Δημοτική και (γ) γενικότερα οι περισσότερες έρευνες είναι ποιοτικές ειδικά όσες αναπτύχθηκαν στη δημοτική εκπαίδευση (Stohlmann & Albarracin, 2016). Η εργασία στοχεύει να συνεισφέρει στη διερεύνηση κάποιων κενών εξετάζοντας την επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος (γνωστικά επιτυχημένου, βλ. Charalambous & Panaoura, 2017) στις στάσεις και πεποιθήσεις μαθητών που φοιτούν σε τάξεις μικτής ικανότητας στη Ε και Στ δημοτικού.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο Barbosa (2006) ορίζει την μαθηματική μοντελοποίηση ως το μαθησιακό περιβάλλον, όπου οι μαθητές καλούνται να λύσουν προβλήματα μέσα από την καθημερινή ζωή, επαγγελματικές περιοχές ή καταστάσεις από επιστημονικούς τομείς, μέσω των μαθηματικών. Η μαθηματική μοντελοποίηση παρέχει μεθόδους για ανάλυση δεδομένων, σχηματισμό θεωριών (οι οποίες συχνά εκφράζονται με συμβολικές μαθηματικές φόρμες) και αξιολόγηση αυτών των θεωριών, καθώς επίσης συμβάλλει στην οριοθέτηση διαδικασιών επίλυσης προβλήματος (Sokolowski, 2015). Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια γνωστικά απαιτητική δραστηριότητα, δεδομένου ότι εμπλέκονται διάφορες ικανότητες, τόσο μαθηματικές όσο και μη μαθηματικές. απαιτεί επίσης μαθηματική γνώση, εξω-μαθηματική γνώση καθώς και κατάλληλες πεποιθήσεις και στάσεις (Blum, 2015).

Μαθηματικές πεποιθήσεις θεωρούνται οι προσωπικές φιλοσοφίες ή αντιλήψεις για τη φύση των μαθηματικών και τη διδασκαλία και μάθησή τους (Thompon, 1992). Στην παρούσα εργασία υιοθετείται ο ορισμός του Schoenfeld (1998) όπου οι πεποιθήσεις ερμηνεύονται ως, νοητικές κατασκευές, που αναπαριστούν κωδικοποιημένα τις ανθρώπινες εμπειρίες και κατανοήσεις. Οι στάσεις απέναντι στα μαθηματικά, σύμφωνα με ένα πολυδιάστατο ορισμό που δίδεται από τον Hart (1989), ορίζονται από τα συναισθήματα τα οποία ένα άτομο συνδέει με τα μαθηματικά, τις ατομικές πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρεται. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται ένας απλός ορισμός, που διαχωρίζει τις πεποιθήσεις, τις στάσεις και τα συναισθήματα ως τρία ξεχωριστά συστατικά της επίδρασης, περιγράφοντας τις στάσεις ως τη θετικού ή αρνητικού βαθμού διάθεση για τα μαθηματικά (McLeod,1992).

Η παρούσα εργασία στοχεύει στη διερεύνηση του ερωτήματος: Ποιες είναι οι επιδράσεις ενός παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο αποτελείται από μια σειρά δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης, στις στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών σε σχέση μα τα μαθηματικά;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σχεδιασμός και δείγμα

Η έρευνα είναι ένας οιονεί πειραματικός σχεδιασμός. Έγινε τυχαία κατανομή των τμημάτων που θα συμμετείχαν στις ομάδες της έρευνας και ακολουθήθηκε η διαδικασία που φαίνεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Δομή πειραματικού σχεδιασμού

Τυχαία ανάθε-ση	**Ομάδα Ελέγχου**	**Προέλεγχος**	**Καμιά Μεταχεί-ριση**	**Μεταέλεγχος**	**Αργοπορη-μένος Έλεγχος**
Τυχαία ανάθε-ση	**Πειραμα-τική Ομάδα**	**Προέλεγχος**	**Πειραμα-τική Μεταχεί-ριση**	**Μεταέλεγχος**	**Αργοπορη-μένος Έλεγχος**

Συνολικά συμμετείχαν στην έρευνα 851μαθητές Ε (Μ.Ο. ηλικίας: 10,4 έτη) και Στ τάξης (Μ.Ο. ηλικίας: 11,4 ετών). Οι μαθητές φοιτούσαν σε δημοτικά σχολεία στην Κύπρο (Ν = 22 σχολεία) και αντλήθηκαν από 50 τμήματα μικτής ικανότητας. που είναι ο κανόνας στα κυπριακά δημόσια σχολεία. Στο δείγμα περιλήφθηκαν όλα τα παιδιά για τα οποία δόθηκε η γραπτή συγκατάθεση των γονιών τους (91%). Το δείγμα περιλαμβάνει σχολεία από όλα τα κοινωνικοοικονομικά επίπεδα.

Παρέμβαση

Το παρεμβατικό πρόγραμμα περιλάμβανε πέντε προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης. Η διδασκαλία και επίλυση των πέντε δραστηριοτήτων γινόταν περίπου κάθε δύο βδομάδες. Η σειρά εκτέλεσης καθορίστηκε με βάση το βαθμό δυσκολίας της κάθε δραστηριότητας. Στις δραστηριότητες οι μαθητές καλούνταν να προτείνουν στον «πελάτη» :1) την καλύτερη, ανάμεσα σε δύο, προσφορά εργασίας, 2) την κατάταξη σε σειρά των πέντε πρώτων καλύτερων αντισφαιριστριών, 3) την καλύτερη πόλη για μόνιμη εγκατάσταση, δ) τον πολυτιμότερο καλαθοσφαιριστή της περιόδου (Διάγραμμα1) και 5) την αποτελεσματικότητα ενός προπονητικού προγράμματος για χάσιμο περιττών κιλών ενός φοιτητή-αθλητή.

Διάγραμμα 1: Ο πολυτιμότερος καλαθοσφαιριστής

Ο πολυτιμότερος καλαθοσφαιριστής της περιόδου 2015-16

Η Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Καλαθοσφαίρισης θέλει να αναδείξει τον πολυτιμότερο καλαθοσφαιριστή που αγωνίζεται στην Ευρώπη για την αγωνιστική περίοδο 2015-16. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τα στατικά στοιχεία του κάθε υποψήφιου.

Βοήθα την Ομοσπονδία να αναδείξει τον πολυτιμότερο καλαθοσφαιριστή.

Πίνακας 1: Μέσοι όροι των καλαθοσφαιριστών ανά κατηγορία

Καλαθοσφαιριστής	Λεπτά συμμετοχής	Πόντοι	Ρημπάουντ	Ασίστ	Κλεψίματα	Λάθη
Τεοντοσίτς Μίλος	28:11	14.8	2.8	7	0.8	3.7
Φερνάντεθ Ρούντι	27:24	12.7	3.4	3.3	1.5	1.3
Σπανούλης Βασίλης	28:07	14.4	1.8	5.5	0.8	3.1
Πρίντεζης Γιώργος	25:16	12.2	4.8	1	0.2	1.1
Ροντρίγκεθ Σέρχιο	21:34	11.1	1.4	5.1	1	1.3
Γουίμς Σόνι	26;56	13.1	4	3.4	1	2.2
Μπιέλιτσα Νεμάνια	27:45	12.1	8.5	1.9	1.3	1.5

Τα μαθήματα διενεργήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς μαθηματικών των τμημάτων. Η διδασκαλία και των πέντε δραστηριοτήτων έγινε με την ίδια μεθοδολογία, εφόσον οι εκπαιδευτικοί είχαν τύχει σχετικής επιμόρφωσης και γινόταν κατά τη διάρκεια έλεγχος. Κατά τη ίδια χρονική περίοδο η ομάδα ελέγχου ασχολήθηκε με την επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνονταν στα σχολικά βιβλία, κυρίως ρουτίνας, και διαδικασίας.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται επιγραμματικά (για αναλυτικότερα, βλ. Charalambous & Panaoura, 2017) το διδακτικό πλάνο που εφάρμοσαν οι εκπαιδευτικοί, το οποίο αποτελείται από τέσσερις φάσεις:

Α. Εισαγωγή (κατανόηση του προβλήματος)

Β. Εργασία στις ομάδες (εύρεση λύσης, κατασκευή μοντέλου)

Γ. Εργασία στην ολότητα της τάξης (παρουσίαση και συζήτηση των μοντέλων)

Δ. Καταγραφή και επεξήγηση του αποτελέσματος

Οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας κατά την διεξαγωγή των μαθημάτων του παρεμβατικού προγράμματος υιοθέτησαν βασικές αρχές διδασκαλίας στην επίλυση προβλημάτων μοντελοποίησης. Οι τρεις κυριότερες αρχές ήταν οι ακόλουθες: α) Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να δίνεται χρόνος στους μαθητές για να σκεφτούν β) Συνεργατική, αυτοκαθοδηγούμενη μάθηση με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού. Υπάρχει μια σταθερή ισορροπία ανάμεσα στην ανεξαρτησία των μαθητών και την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, σύμφωνα με τη γνωστή «Αρχή της ελάχιστης υποστήριξης» του Aebli (Blum, 2015) και γ) Οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού πρέπει να γίνονται μόνο όταν είναι πραγματικά απαραίτητες. Ιδιαίτερα αποτελεσματικές για την μοντελοποίηση είναι οι παρεμβάσεις στρατηγικής.

Εκπαίδευση - επιμόρφωση εκπαιδευτικών πειραματικής ομάδας

Όλοι οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας έτυχαν επιμόρφωσης στο θέμα της διδασκαλίας δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης. Όλοι οι εκπαιδευτικοί έλαβαν το πακέτο επιμόρφωσης, το οποίο περιλάμβανε: α) Σύντομο θεωρητικό πλαίσιο για τη διδασκαλία της μαθηματική μοντελοποίηση και το ρόλο του εκπαιδευτικού σε αυτήν β) Τη γενική δομή του μαθήματος επίλυσης δραστηριότητας μοντελοποίησης, γ) Τις πέντε δραστηριότητες και τα αντίστοιχα βοηθήματα για τους εκπαιδευτικούς, δ) Αρχές διδασκαλίας δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, ε) Σύντομο οδηγό – Λίστα ελέγχου, στ) Χρονοδιάγραμμα και ζ) Ένα βιντεογραφημένο δειγματικό μάθημα. Ακολούθησαν δίωρες επιμορφωτικές συναντήσεις των εκπαιδευτικών με τον ερευνητή. Οι επιμορφωτικές συναντήσεις ήταν είτε ατομικές (ένας εκπαιδευτικός και ο ερευνητής) είτε ομαδικές (δυο ή τρεις εκπαιδευτικοί το μέγιστο).

Εργαλεία μέτρησης

Ως εργαλείο μέτρησης της παρούσας εργασίας, χρησιμοποιήθηκε το Ερωτηματολόγιο Μέτρησης Στάσεων και Πεποιθήσεων απέναντι στα Μαθηματικά. Είναι το ερωτηματολόγιο Attitudes Toward Mathematics Inventory (ATMI) των Tapia και Marsh (1996), όπως αυτό τροποποιήθηκε από τους Majeed, Darmawan και Lynch (2013). Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από τριάντα δύο δηλώσεις που εξετάζουν τις πεποιθήσεις και στάσεις των μαθητών σε σχέση με τα μαθηματικά. Χρησιμοποιήθηκε πενταβάθμια κλίμακα Likert (1=Διαφωνώ απόλυτα, 2=Μάλλον διαφωνώ 3=Ούτε συμφωνώ ούτε διαφωνώ, 4=Μάλλον συμφωνώ, 5=Συμφωνώ απόλυτα). Το ερωτηματολόγιο μεταφράστηκε και εγκυροποιήθηκε στην ελληνική γλώσσα με επιτυχία (βλ. Χαραλάμπους, 2018)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Διενεργήθηκαν παραγοντικές αναλύσεις στις 32 δηλώσεις, για την 1η, 2η και 3η μέτρηση, οι οποίες εισηγήθηκαν τέσσερις παράγοντες με ιδιοτιμές >1, τους ίδιους ακριβώς και στις τρεις περιπτώσεις, με ίδιο αριθμό δηλώσεων, αλλά και τις ίδιες αυτές καθ' αυτές δηλώσεις. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τους 4 παράγοντες και τους δείκτες αξιοπιστίας τους.

Πίνακας 2: *Δείκτης αξιοπιστίας παραγόντων*

Παράγοντας	Δείκτης αξιοπιστίας	Αριθμός δηλώσεων
Αυτεπάρκεια	.877, .890, .902	10
Απόλαυση	.857, .886, .904	9
Αξία	.844, .838, .845	7
Ανησυχία	.786, .816, .857	6

Εφαρμόστηκαν τέσσερις (μια για κάθε παράγοντα) τριπλές αναλύσεις διακύμανσης με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις (Three-way repeated measures ANOVA), καθώς υπήρχαν τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, ομάδα, φύλο και τάξη, και μία εξαρτημένη μεταβλητή (χρόνος) σε ισοδιαστημική κλίμακα, η τιμή του κάθε παράγοντα, σε τρεις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που σχετίζονταν άμεσα ή έμμεσα με την μεταβλητή ομάδα.

Ανησυχία: καταδείχτηκε στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση: α) μεταξύ χρόνου και ομάδας στην τιμή του παράγοντα Ανησυχία, $F(2,1640) = 4.18$, $p < .017$, Effect size = .005. και β) μεταξύ χρόνου, τάξης και ομάδας στην τιμή του παράγοντα Ανησυχία, $F(2,1640) = 4.93$, $p < .009$, Effect size = .006.

Πίνακας 3: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις στον παράγοντα Ανησυχία

	Ελέγχου			**Πειραματική**		
	Ε΄τάξη	**Στ΄τάξη**	**Σύνολο**	**Ε΄τάξη**	**Στ΄τάξη**	**Σύνολο**
1η μέτρηση	1.67 (.78)	1.77 (.72)	1.72 (.75)	**1.90 (.90)**	1.70 (.76)	**1.79 (.81)**
2η μέτρηση	1.74 (.82)	1.74 (.80)	1.74 (.81)	**1.71 (.76)**	1.63 (.75)	**1.67 (.75)**
3η μέτρηση	1.74 (.86)	1.69 (.78)	1.71 (.82)	1.74 (.82)	1.69 (.84)	1.71 (.83)

Η διαφορά των δυο υποομάδων πειραματικής και ελέγχου της Ε΄ τάξης είναι στατιστικά σημαντική στην 1η μέτρηση, ενώ στην 2η όχι ($t(400) = 2.87$, $p < .004$, και $t(447) = -.92$, $p = .357$ αντίστοιχα).

Αυτεπάρκεια: Παρουσιάστηκε στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση: α) μεταξύ χρόνου, τάξης και ομάδας στην τιμή του παράγοντα Αυτεπάρκεια, $F(2,1640) = 4.09$, $p < .021$, Effect size = .005, και β) μεταξύ χρόνου, φύλου και ομάδας στην τιμή του παράγοντα Αυτεπάρκεια, $F(2,1640) = 4.71$, $p < .012$, Effect size = .006. Τα τεστ πολλαπλών συγκρίσεων (post-hoc) που έγιναν, κατέδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ αγοριών πειραματικής ομάδας και κοριτσιών ομάδας ελέγχου ($p < .027$), στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ κοριτσιών πειραματικής ομάδας και αγοριών ομάδας ελέγχου ($p < .005$) και στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ αγοριών ομάδας ελέγχου και κοριτσιών ομάδας ελέγχου ($p < .027$). Σημαντικό είναι ότι τα αγόρια της Πειραματικής ενώ δεν έχουν στατιστικά σημαντική διαφορά με τα κορίτσια της Ομάδας Ελέγχου στην αρχική μέτρηση, στις επόμενες δύο, δηλαδή μετά το παρεμβατικό, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($t(418) = 1.07$, $p = .288$, $t(418) = 4.62$, $p < .001$και $t(411) = 2.44$, $p < .015$ για 1η ,2η και 3η μέτρηση αντίστοιχα) με τα αγόρια της Πειραματικής να έχουν ψηλότερους Μ.Ο (4.0±.7 και 3.9±.8 για 2η και 3η μέτρηση αντίστοιχα). Όσο αφορά την αλληλεπίδραση χρόνου, τάξης και ομάδας σύγκριση t-test ομάδας ελέγχου Ε΄ τάξης και Πειραματικής ομάδας Ε΄ τάξης καταδείχτηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στη μέση τιμή της Αυτεπάρκειας στην 1η μέτρηση, $t(400) = 2.21$, $p < .027$, με την Ε΄ τάξη της Ομάδας Ελέγχου να έχει ψηλότερη μέση τιμή από την Ε΄ τάξη της πειραματικής (4.0±.79 και 3.8±.86 αντίστοιχα). Αντίθετα στη 2η και 3η μέτρηση δεν καταγράφηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές, $t(400) = .862$, $p = .389$

(4.0±.84 και 3.9±.82 αντίστοιχα) και t(392) = .328, p = .743 (3.9±.85 και 3.9±.85 αντίστοιχα) αντίστοιχα.

Απόλαυση: Τα αποτελέσματα της ανάλυσης κατάδειξαν: α) ο χρόνος είναι στατιστικά σημαντικός, F(2,1640) = 7.48, p < .001, Effect size = .009 και β) στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ χρόνου, φύλου και ομάδας στην τιμή του παράγοντα Απόλαυση, F(2,1640) = 4.60, p < .013, Effect size = .006. Τα αγόρια της Πειραματικής Ομάδας παρουσίασαν στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους στη 2η μέτρηση σε σχέση με τα κορίτσια της Ομάδας Ελέγχου (3.9±.85 και 3.7±.83 αντίστοιχα), ενώ δεν είχαν στατιστικά σημαντική διαφορά στην 1η (3.9±.86 και 3.9 ±.83 αντίστοιχα), αλλά ούτε και στην 3η μέτρηση (3.8±.88 και 3.7 ±.85 αντίστοιχα).

Αξία: το παρεμβατικό πρόγραμμα δεν είχε στατιστικά σημαντική επίδραση στην πεποίθηση Αξία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Μέσα από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων συμπεραίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα επέδρασε αποτελεσματικά στη μείωση του συναισθήματος της ανησυχίας, του φόβου για τα μαθηματικά στους μαθητές της Πειραματικής Ομάδας, με την επίδραση να είναι αποτελεσματικότερη και στατιστικά σημαντική για τους μαθητές της Ε΄ τάξης. Τα αποτελέσματα της 3ης μέτρησης δείχνουν πως η αλλαγή στην Πειραματική Ομάδα δεν έχει χαρακτήρα μονιμότητας, καθώς η τιμή ανεβαίνει λίγο, όχι βέβαια στο αρχικό επίπεδο. Εξετάζοντας τα αποτελέσματα αναλυτικότερα, διακρίνουμε πως αυτό οφείλεται κυρίως στην τιμή των μαθητών ΣΤ΄ τάξης που επανέρχεται στα επίπεδα της αρχικής, ενώ η τιμή των μαθητών Ε΄ τάξης παραμένει περίπου στο ίδιο επίπεδο, καθώς η αύξηση είναι πολύ μικρή. Είναι επίσης σημαντικό ότι και στις δυο αλληλεπιδράσεις το μέγεθος αποτελέσματος είναι μικρό (.008 και .006).

Αναφορικά με τον παράγοντα Απόλαυση φάνηκε ότι η Ομάδα Ελέγχου της Ε΄ τάξης είχε μείωση στους Μ.Ο (οφειλόταν στα κορίτσια), ενώ η Πειραματική Ομάδα είχε μικρή άνοδο με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους στην 2η και 3η μέτρηση. Παράλληλα η υποομάδα αγοριών ομάδας ελέγχου ήταν ψηλότερα από όλες τις υποομάδες σε όλες τις μετρήσεις. Ωστόσο είχε τους χαμηλότερους Μ.Ο στην επίδοση για την ικανότητα μαθηματικής μοντελοποίησης (Charalambous, 2018). Είχε στατιστικά σημαντικούς ψηλότερους Μ.Ο από τα κορίτσια της Πειραματικής σε όλες τις μετρήσεις και στην 2η και 3η μέτρηση σε σχέση με τα κορίτσια της Ομάδας Ελέγχου. Παράλληλα ενώ είχαν σχεδόν το ίδιο Μ.Ο με τα αγόρια της Πειραματικής, μετά η διαφορά τους αυξάνεται τόσο στη 2η και περισσότερο στη 3η μέτρηση, παρόλο που τα αγόρια της Πειραματικής είχαν και μια μικρή αύξηση στην 2η μέτρηση. Τα κορίτσια της Πειραματικής παραμένουν σταθερά, έχοντας περίπου τη ίδια επίδοση και στις τρεις μετρήσεις, ενώ τα κορίτσια της Ομάδας Ελέγχου σημείωσαν μεγάλη πτώση στη 2η μέτρηση και μικρή άνοδο στη 3η.

Ίσως η ενασχόληση των μαθητών της Πειραματικής Ομάδας με τόσο σύνθετες και δύσκολες δραστηριότητες να τους βοήθησε να σχηματίσουν πιο ρεαλιστική και λογική εικόνα για τον εαυτό τους. Από τη μια, δουλεύοντας με επιτυχία με τόσο δύσκολα προβλήματα, βελτίωσαν τις ικανότητες τους μεν, γι' αυτό ίσως μειώθηκε και το συναίσθημα της ανησυχίας για τα μαθηματικά, αλλά από την άλλη η βελτίωση των ικανοτήτων και η αύξηση των γνώσεων τους βοήθησε να αντιληφθούν τις αδυναμίες τους. Οπότε στην ουσία παρέμειναν περίπου σταθεροί (ελαφρώς μειωμένοι οι Μ.Ο τους στην 3η μέτρηση σε σχέση με την αρχική) σε σχέση με την πεποίθηση της αυτεπάρκειας. Έτσι τα αγόρια της Πειραματικής δεν ακολούθησαν την πορεία που είχαν τα αγόρια της Ομάδας Ελέγχου και κατέγραψαν χαμηλότερους Μ.Ο και παράλληλα τα κορίτσια δεν ακολούθησαν την πτωτική πορεία των κοριτσιών της ομάδας ελέγχου. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι Μ.Ο και των δυο ομάδων στην Αυτεπάρκεια ήταν ήδη αρκετά ψηλά από την πρώτη μέτρηση. Σχετικά, οι Panaoura, Gagatsis και Demetriou (2009) έδειξαν πως παρακινώντας την αυτορρύθμιση στη συμπεριφορά των 255 εντεκάχρονων μαθητών που χρησιμοποίησαν προβλήματα μοντελοποίησης, βελτιώθηκε η αντίληψη για τις ικανότητές τους στην επίλυση προβλημάτων.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα της τριπλής αλληλεπίδρασης στον παράγοντα Απόλαυση, εκείνο που είναι αξιοπρόσεκτο είναι η σημαντική πτώση της υποομάδας των κοριτσιών ομάδας Ελέγχου στη 2η μέτρηση, στην οποία ουσιαστικά οφείλεται η στατιστικά σημαντική διαφορά που έχει με τα αγόρια της Πειραματικής στη 2η μέτρηση και τα αγόρια της Ομάδας Ελέγχου στη 2η και 3η. Ταυτόχρονα, στη 2η μέτρηση στα κορίτσια της Πειραματικής παρουσιάζει μικρή αύξηση, ενώ τα αγόρια της Πειραματικής παραμένουν περίπου στο ίδιο επίπεδο. Για κάποιο λόγο που δεν μπορεί να ερμηνευθεί από την παρούσα έρευνα, στα κορίτσια της Ομάδας Ελέγχου μειώνεται αισθητά στο μεσοδιάστημα 1ης και 2ης μέτρησης. Όμως δεν συμβαίνει το ίδιο στα κορίτσια της Πειραματικής. Ως ένα σημείο αυτό ίσως να ερμηνεύεται και σε συνάρτηση με τις ερμηνείες στον παράγοντα Αυτεπάρκεια. Εδώ παρεμβαίνει ο παράγοντας δυσκολία, που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε τέτοιου είδους έρευνες (Renninger, 1998). Πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι τα προβλήματα ήταν σύνθετα και δύσκολα, έτσι ώστε οι μαθητές κατέβαλαν αρκετή προσπάθεια και κόπο για να φτάσουν στη λύση, πράγμα που πιθανόν να περιόριζε το συναίσθημα της απόλαυσης στην τελική τους ανάλυση.

Πολύ σημαντικό στοιχείο αναφορικά με την ερμηνεία των αποτελεσμάτων σε σχέση και με τους τρεις παράγοντες είναι ότι οι στάσεις και οι πεποιθήσεις παρουσιάζουν μια αξιοσημείωτη σταθερότητα (Blum, 2015), με τις πεποιθήσεις να αλλάζουν δυσκολότερα από τις στάσεις (Philipp, 2007), έτσι ώστε κάθε πιθανή μεταβολή τους χρειάζεται εφαρμογή διαδικασιών μακράς διάρκειας (Philipp, 2007; Maab, 2013; Blum, 2015).

Συνοψίζοντας, το παρεμβατικό πρόγραμμα είχε ενδιαφέρουσες επιδράσεις στους παράγοντες ανησυχία, αυτεπάρκεια και απόλαυση. Σημειώνεται ως σημαντικότερη η επίδραση στο συναίσθημα της ανησυχίας, όπου η παρέμβαση επέδρασε θετικά μειώνοντας την ανησυχία των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά. Πολύ ενδιαφέρον θα ήταν αν μελλοντικές έρευνες ερευνήσουν το θέμα με μεγαλύτερες χρονικά παρεμβάσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38* (3), 293–301.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modeling: What do we know, what we can do. Στο S.J. Cho (Επιμ.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, DOI 10.1007/978-3-319-12688-3_9.

Charalambous, Y. (2018). *Mathematical modeling problem solving in 5thand 6th grades of the primary school*. Doctoral dissertation, Nicosia, Frederick University.

Charalambous, Y., & Panaoura, R. (2017). *Mathematical modelingcompetencies assessment test for primary school students: Constructing and validation*. Paper of the 2nd pan-Hellenic Conference, Rhodes.

Hart, L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. Στο Mc Leod & Adams (Επιμ), *Affect and Mathematical Problem Solving,* pp.37-45. New York: Springer Verlag.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. Στο F. Lester (Επιμ..), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763– 804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Maab, K. (2013). Modeling in class and the development of beliefs about the usefulness of mathematics. Στο R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines, & A. Hurford (Επιμ.), *Modeling students' mathematical modeling competencies*, 409-420. New York, NY: Springer

Majeed, A. A., Darmawan G. N., & Lynch P. (2013). A confirmatory factor analysis of attitudes toward mathematics inventory (ATMI). *The Mathematics Educator*. 15(1), 121-135.

Mayer, R. E., & Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. Στο P. A. Alexander & P. H. Winne (Επιμ.), *Handbook of Educational Psychology (*pp. 287–303). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. Στο D.Grows (Επιμ.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.575-596). New York: McMillan Publishing Company.

Mischo, C., & Maab, K. (2012). Which personal factors affect mathematical modeling? The effects of abilities, domain specific and cross domain-competences and beliefs on performance in mathematical modeling. *Journal of Mathematical Modeling and Applications*, 1, 7, 3-19

Panaoura, A., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2009). Mathematical modeling, self-representation and self-regulation. *CERME 6*, Lyon.

Philipp R.A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. Στο F.K. Lester, Jr. (Επιμ.), The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 257-315). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Renninger, K. A. (1998). What are the roles of individual interest, task difficulty, and gender in student comprehension? Στο L. Hoffmann, J. Baumert, A. Krapp, & K. A. Renninger (Επιμ.), *Interest and learning: Proceedings of the Seeon Conference on interest and gender* (pp. 228–238). Kiel, Germany: IPN.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4(1), 1–94

Sokolowski, A. (2015). The effects of mathematical modeling on students' achievement- meta-analysis of research. *The JAFOR journal of education,* 3 (1), 93-114.

Stohlmann, S. M., & Albarracin, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modeling. *Education Research International*, pp. 1-9. Hindawi Publishing Corporation.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Στο D. A. Grouws (Επιμ.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Zawojewski, J. (2013). Problem solving versus modeling. Στο R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines, & A. Hurford (Επιμ.), *Modeling students' mathematical modeling competencies*, 531-538. New York, NY: Springer.

ΟΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ματθαίου Αργυρού Αφροδίτη[1], Παναούρα Ρίτα [2]

Πανεπιστήμιο Frederick

afroalek@gmail.com , pre.pm@frederick.ac.cy

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκαν οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη φύση και τη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης και η διαφοροποίησή τους βάση του επιπέδου διδασκαλίας (γυμνασιακό ή λυκειακό κύκλο). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων ερωτηματολογίου που χορηγήθηκε σε εκπαιδευτικούς έδειξαν ότι αναγνωρίζεται η αξία της γεωμετρικής απόδειξης για την κατανόηση και την εμπέδωση των μαθηματικών εννοιών. Εντοπίστηκαν διαφορές ως προς τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούνται στο γυμνάσιο, παρά τη μη διαφοροποίηση ως προς τις επιστημολογικές πεποιθήσεις για τη γεωμετρική απόδειξη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γεωμετρία θεωρείται σημαντικός τομέας των μαθηματικών, συνδεμένος με άλλους τομείς, με μεγάλη σημασία στη ζωή των ανθρώπων για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας στο χώρο (Sunzuma, Masocha & Zezekwa, 2013). Οι μαθηματικές ικανότητες των μαθητών ιδιαίτερα στη Γεωμετρία έχουν στενή σχέση με τα επίπεδα ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης (Atebe & Scafer, 2008), το οποία ξεκινούν από μία διαισθητική αντίληψη των εννοιών, το συλλογισμό και αιτιολόγηση και προχωρούν στην αποδεικτική μέθοδο τεκμηρίωσης (Elchuck, 1992). Ιδιαίτερο ρόλο στη διδασκαλία της Γεωμετρίας καταλαμβάνει η κατανόηση και δόμηση της μαθηματικής απόδειξης. Οι Hanna (2000), Recio και Gobino (2001) υπογραμμίζουν ότι η απόδειξη είναι το σημαντικότερο εργαλείο που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία και έχει διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, αναλογιζόμενοι την κυριαρχία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την πορεία ανάπτυξης της επιστημονικής γνώσης με την «απελευθέρωσή της Γεωμετρίας». Στα Αναλυτικά Προγράμματα ένα σημαντικό μέρος της ενότητας περιεχομένου που αφορά στη γεωμετρία, στο πλαίσιο διασύνδεσής της με τη μαθηματική πρακτική του συλλογισμού και της αιτιολόγησης, καταλαμβάνει η απόδειξη (CCSSI, 2010, Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών, 2015).

Η έννοια της απόδειξης αναφέρεται στις αιτιολογήσεις οι οποίες στηρίζονται στις προηγούμενες δηλώσεις που έγιναν αποδεκτές, για τη χρησιμοποίηση αποδεκτών μορφών επιχειρηματολογίας και αποδεκτών τρόπων επικοινωνίας (Stylianides, 2007). Τα γενικά (Rowland, 2002) ή επαγωγικά επιχειρήματα είναι αποδεκτά ως απόδειξη, ενώ τα εμπειρικά δεν είναι (Morris, 2007). Τα παραδείγματα μετά τη δόμηση της απόδειξης θεωρούνται χρήσιμα για τη βελτίωση των προτάσεων και των αποδείξεων (Komatsu, 2017). Παρόλη τη σημαντικότητα της απόδειξης (Stylianides, Stylianides & Weber, 2017), η κατανόηση και κατασκευή μίας απόδειξης δυσκολεύει τους μαθητές. Ακόμη και προπτυχιακοί φοιτητές μαθηματικών τμημάτων αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση και δόμηση των μαθηματικών αποδείξεων (Zazkis & Zazkis, 2013; Ericson & Herbst, 2016).

Υπογραμμίζεται η αναγκαιότητα της διδασκαλίας και ένταξης της μαθηματικής απόδειξης στα σχολικά προγράμματα από τις πιο μικρές ηλικίες (NCTM, 2000), συνδέοντας την με την αιτιολόγηση και την παράθεση λογικών συλλογισμών. Έρευνα του Komatsu (2016) που είχε σκοπό την ενίσχυση της εμπειρικής διερεύνησης μετά την κατασκευή στη γεωμετρία έδειξε ότι τα προβλήματα με αποδείξεις που επιλύθηκαν με τη βοήθεια σχημάτων είναι πολύ χρήσιμα για την εμπειρική εξέταση.

Η γνωστική συμπεριφορά των μαθητών σε οποιαδήποτε έννοια συνδέεται σε σημαντικό βαθμό με την αντίστοιχη διδακτική συμπεριφορά των εκπαιδευτικών. Παράγοντας διαμόρφωσης της διδακτικής πρακτικής που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί είναι οι πεποιθήσεις τους για τη φύση των μαθηματικών, τον τρόπο μάθησης, τις αποδοτικές μεθόδους διδασκαλίας κλπ. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1985), οι μαθηματικές πεποιθήσεις ορίζονται ως οι προσωπικές αντιλήψεις του ατόμου, η οπτική διάσταση μέσω της οποίας το άτομο βλέπει τον κόσμο των μαθηματικών, οι οποίες διαμορφώνουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται και εμπλέκεται στη μαθηματική διαδικασία και οι επιστημολογικές πεποιθήσεις είναι οι πεποιθήσεις ως προς τη φύση των μαθηματικών. Μελέτη του Knuth (2002) έδειξε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θεωρούν την απόδειξη ως επαλήθευση της γνώσης και προσδίδουν σημαντικό ρόλο σε αυτή κατά τη διδασκαλία τους. Έρευνα των Stylianides και Stylianides (2009) έδειξε ότι ένας σημαντικός αριθμός καθηγητών θεωρεί τους εμπειρικούς ισχυρισμούς ως αποδείξεις, εφόσον αποτελεί το πρώτο σημαντικό βήμα στη δόμηση μίας πιο τυποποιημένης μορφής. Οι Ericson και Herbst (2016) διερεύνησαν τη διαφοροποίηση στη διδακτική συμπεριφορά εκπαιδευτικών ως προς τα χρόνια υπηρεσίας τους. Έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί με μεγαλύτερη εμπειρία προτιμούν τη διεξαγωγή συζητήσεων με τους μαθητές τους, οι οποίες περιλαμβάνουν παραδείγματα, αντιπαραδείγματα και λογικά επιχειρήματα, και έχουν μεγάλη χρονική διάρκεια.

Η παρούσα έρευνα έχει διερευνήσει τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική απόδειξη και τη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης και πώς αυτές διαφοροποιούνται ως προς τη διδακτική πρακτική ανάλογα με τη διδασκαλία μαθηματικών σε ηλικία γυμνασίου ή λυκείου. Σημειώνεται ότι η παρούσα έρευνα είναι μέρος ενός μεγαλύτερου ερευνητικού προγράμματος το οποίο μελετά ταυτόχρονα τις πεποιθήσεις των μαθητών για τη γεωμετρική απόδειξη και την επίδοσή τους στην κατανόηση και κατασκευή γεωμετρικών αποδείξεων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα: Στην έρευνα έλαβαν μέρος 123 εκπαιδευτικοί Μαθηματικών (48 άντρες, 75 γυναίκες) από διαφορετικά δημόσια σχολεία, Γυμνάσια και Λύκεια των ελεύθερων επαρχιών της Κύπρου. Η επιλογή του δείγματος είναι σκόπιμη, εφόσον η ερευνήτρια έχει αξιοποιήσει τις προσωπικές της σχέσεις με εκπαιδευτικούς, διασφαλίζοντας έτσι τη θετικότερη αποδοχή συμμετοχής στην έρευνα. Οι 54 εκπαιδευτικοί (43.9%) που έλαβαν μέρος στην έρευνα εργάζονταν κατά την σχολική χρονιά 2018-19 σε γυμνάσιο, ενώ οι 69 (56.1%) εκπαιδευτικοί σε λύκειο.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων: Κατασκευάστηκε ερωτηματολόγιο για τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την μαθηματική απόδειξη, το ρόλο της στη γεωμετρία και τις πρακτικές που χρησιμοποιούν για τη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης. Οι 35 δηλώσεις του ερωτηματολογίου διακρίνονται σε δύο κύρια μέρα, ενώ το Α μέρος περιλάμβανε τα δημογραφικά στοιχεία του εκπαιδευτικού. Το Β΄ μέρος περιλαμβάνει 15 δηλώσεις (1=διαφωνώ απόλυτα, 5=συμφωνώ απόλυτα) για τις επιστημολογικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική απόδειξη και το Γ΄ μέρος 20 δηλώσεις (1=ποτέ και 5=πάντοτε) που περιγράφουν τη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης.

Ανάλυση Δεδομένων: Πραγματοποιήθηκε X^2– τεστ για τον έλεγχο ανεξαρτησίας των ποιοτικών μεταβλητών και έλεγχος αν οι ποσοτικές μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή ή όχι. Ακολούθησε παραγοντική ανάλυση για τις δηλώσεις του ερωτηματολογίου, από την οποία εξάχθηκαν οι κύριοι παράγοντες οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για τις περαιτέρω αναλύσεις. Ελέγχθηκε η διαφορά στους μέσους όρους των παραγόντων που προέκυψαν ως προς τον τύπο σχολείου που υπηρετεί (γυμνάσιο ή λύκειο) χρησιμοποιώντας τη μη παραμετρική μέθοδος ανάλυσης Mann-Whitney για τις μεταβλητές που δεν κατανέμονται κανονικά. Τέλος, έγιναν αναλύσεις με τη στατιστική Mann–Whitney λόγω μη κανονικότητας για τη διαφορά του μέσου όρου κάποιων μεταβλητών για όσους υπηρετούν σε Γυμνάσιο ή σε Λύκειο.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η καταρχήν ανάλυση έδειξε την ανάγκη σύμπτυξης των 5 διακρίσεων της κλίμακας σε 3. Παρουσιάζονται αρχικά κάποια περιγραφικά στοιχεία που προέκυψαν από την ανάλυση και καταδεικνύουν τις βασικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη σημασία και το ρόλο της γεωμετρικής απόδειξης στη μέση εκπαίδευση (Πίνακας 1).

Πίνακας 1: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις δηλώσεων Μέρους Β

Δηλώσεις	ΜΟ	ΤΑ
Η μαθηματική απόδειξη είναι μια σειρά εμπειρικών παραδειγμάτων.	2.69	1.17
Μια πτυχή της μαθηματικής απόδειξης είναι η επεξήγηση.	3.67	0.84
Η μαθηματική απόδειξη είναι μια ακολουθία συμπερασμάτων.	3.97	0.73
Η μαθηματική απόδειξη ενισχύει την μαθηματική επικοινωνία.	4.02	0.65
Η απόδειξη είναι το πιο σημαντικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία.	4.08	0.72

Η μαθηματική απόδειξη έχει σημαντικό ρόλο στην εμπέδωση της γνώσης.	4.13	0.68
Η μαθηματική απόδειξη έχει σημαντικό ρόλο στη δημιουργία γνώσης.	4.15	0.79
Ο πρωταρχικός ρόλος της μαθηματικής απόδειξης είναι να εξετάσει την αλήθεια μιας δήλωσης.	4.20	0.77
Η μαθηματική απόδειξη είναι ένα εργαλείο για τον έλεγχο της εγκυρότητας μιας πρότασης.	4.37	0.68
Η μαθηματική απόδειξη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών.	4.37	0.62

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 1, φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί δεν θεωρούν την απόδειξη ως μία ακολουθία εμπειρικών παραδειγμάτων, αλλά ως μία ακολουθία συμπερασμάτων, η οποία πρέπει να έχει δομημένη μορφή. Θεωρούν ότι η μαθηματική απόδειξη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών, στην εμπέδωση και δημιουργία της γνώσης, αποδεικνύοντας έτσι τη στενή σχέση που θεωρούν ότι έχει η μαθηματική απόδειξη με την οικοδόμηση γνώσης.

Από τους μέσους όρους και την τυπική απόκλιση των δηλώσεων του μέρους Γ του ερωτηματολογίου (Πίνακας 2) φαίνεται ότι με τη χρήση εποπτικών μέσων, με διαφορετικές εκφωνήσεις στις αποδείξεις που δίνονται προς επίλυση και τα διαφορετικά είδη μαθηματικής απόδειξης επιδιώκουν την ενεργοποίηση των μαθητών.

Πίνακας 2: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις δηλώσεων Μέρους Γ

Δηλώσεις	ΜΟ	ΤΑ
Αφιερώνω λιγότερο χρόνο από όσον λέει το Αναλυτικό Πρόγραμμα στη συζήτηση με τους μαθητές για τη λύση μιας μαθηματικής απόδειξης.	2.44	1.04
Αφιερώνω λιγότερο χρόνο από όσον λέει το Αναλυτικό Πρόγραμμα στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης.	2.54	1.12
Ζητώ από τους μαθητές την κατασκευή διαφόρων ειδών μαθηματικής απόδειξης.	3.15	0.86
Ζητώ από τους μαθητές να συνεργάζονται με τον διπλανό/ή τους για την επίλυση της μαθηματικής απόδειξης.	3.44	0.97
Στην παρουσίαση μιας μαθηματικής απόδειξης, δίνω παράδειγμα το οποίο δεν επιβεβαιώνει την πρόταση για να αποδείξω ότι η πρόταση δεν είναι ορθή.	3.50	0.94
Ζητώ από τους μαθητές να βρούνε παράδειγμα το οποίο δεν επιβεβαιώνει την πρόταση για να αποδείξουν ότι η πρόταση δεν είναι ορθή.	3.50	0.90
Ζητώ από τους μαθητές να αριθμούν τα βήματα τους κατά τη διάρκεια της απόδειξης έτσι ώστε να οργανώνουν την διαδικασία της απόδειξης.	3.54	0.99
Χρησιμοποιώ διαφορετικές εκφωνήσεις στις αποδείξεις που δίνονται προς επίλυση.	3.59	0.85

Χρησιμοποιώ διάφορα είδη μαθηματικής απόδειξης (εμπειρικές αποδείξεις, αποδείξεις με κατασκευή, αποδείξεις εμπλέκοντας άλλους τομείς των μαθηματικών ή συνδυασμών τομέων των μαθηματικών).	3.71	0.84
Ζητώ από τους μαθητές να μελετούν και να αφιερώνουν αρκετό χρόνο στην ανάγνωση και κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης έτσι ώστε να επιλύσουν ορθά την μαθηματική απόδειξη.	3.71	0.88
Ζητώ από τους μαθητές να εντοπίζουν τη σχέση μεταξύ των βημάτων μιας μαθηματικής απόδειξης.	3.75	0.87
Χρησιμοποιώ εποπτικά μέσα (γεωμετρικά όργανα, Η/Υ, φύλλα εργασίας) για την κατασκευή απόδειξης.	3.82	0.78
Καθοδηγώ τους μαθητές για τις σχέσεις μεταξύ των βημάτων - σταδίων μιας μαθηματικής απόδειξης.	3.87	0.75
Καθοδηγώ τους μαθητές για την σχέση του σχήματος και της εκφώνησης της μαθηματικής απόδειξης.	3.89	0.79
Καθοδηγώ τους μαθητές για την κατασκευή του σχήματος για βοήθεια προς τη λύση μιας μαθηματικής απόδειξης.	3.90	0.75
Καθοδηγώ τους μαθητές για την πορεία μιας μαθηματικής απόδειξης, πως ξεκίνησε και σε ποια συμπεράσματα κατέληξε.	3.90	0.78
Δίνω σχήμα στις ασκήσεις αποδείξεων που δίνονται προς επίλυση.	3.93	0.85
Καθοδηγώ τους μαθητές για να γίνει κατανοητό το ζητούμενο - ο σκοπός μιας μαθηματικής απόδειξης.	3.98	0.74
Ζητώ από τους μαθητές να κατασκευάζουν σχήμα στην επίλυση της μαθηματικής απόδειξης.	4.04	0.86
Ζητώ από τους μαθητές να αναγνωρίζουν τις λέξεις – κλειδιά από το κείμενο της απόδειξης.	4.10	0.87

Ένα βασικό ζήτημα που απασχολεί την παρούσα έρευνα είναι πως οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών διαφοροποιούνται ανάλογα με τη διδασκαλία σε ηλικία γυμνασίου ή λυκείου. Από τον X^2 που πραγματοποιήθηκε προέκυψε μόνο μία δήλωση στο μέρος Β με στατιστικά σημαντική διαφορά. Συγκεκριμένα στη δήλωση «Η μαθηματική απόδειξη είναι μία ακολουθία συμπερασμάτων» υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά, με πιο θετική διάθεση από όσους υπηρετούν στο λύκειο (X^2 (1) = 5.088, p = .024). Είναι σημαντικό ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν σταθερές πεποιθήσεις ως προς τη φύση και τη σημασία της γεωμετρικής απόδειξης και η διδακτική πρακτική δεν επηρεάζει όπως αυτές διαμορφώθηκαν από την επιστημονική τους ενασχόληση με το αντικείμενο της γεωμετρικής απόδειξης.

Αντιθέτως στο μέρος Γ του ερωτηματολογίου υπάρχουν διαφορές οι οποίες είναι στατιστικά σημαντικές ως προς το είδος του σχολείου που διδάσκει ο εκπαιδευτικός. Στις δηλώσεις «Χρησιμοποιώ διάφορα είδη μαθηματικής απόδειξης» και «Χρησιμοποιώ διαφορετικές εκφωνήσεις στις αποδείξεις που δίνονται προς επίλυση» υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά με ψηλότερους μέσους όρους στα άτομα που διδάσκουν στο λύκειο (X^2 (2) = 13.939, p = .001). Επίσης, υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις δηλώσεις «Αφιερώνω λιγότερο χρόνο από όσον λέει το ΑΠ στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης» και «Αφιερώνω λιγότερο χρόνο από όσον λέει το ΑΠ στη συζήτηση με τους μαθητές για τη λύση μιας μαθηματικής απόδειξης» με το ποσοστό όσων υπηρετούν στο Λύκειο να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο όσων υπηρετούν στο Γυμνάσιο (X^2 (2) = 7.568, p = .023 και X^2 (2) = 6.925, p = .031).

Στην παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στο μέρος Β του ερωτηματολογίου (ΚΜΟ = 0,747, p<0.05) προέκυψαν τρείς παράγοντες οι οποίοι εξηγούν το 62.78% της συνολικής διασποράς: (α) οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την επίδραση της μαθηματικής απόδειξης στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, ερμηνεύει το 36.88% της διασποράς και περιέχει μεταβλητές του τύπου: «Διδάσκοντας μαθηματική απόδειξη στην γεωμετρία αναπτύσσεται η κριτική σκέψη των μαθητών», (β) οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την ερμηνεία της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης (14.39% της διασποράς) με μεταβλητές όπως: «Ο πρωταρχικός ρόλος της μαθηματικής απόδειξης είναι να εξετάσει την αλήθεια μιας δήλωσης», «Η μαθηματική απόδειξη είναι ένα εργαλείο για τον έλεγχο της εγκυρότητας μιας πρότασης» και (γ) οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τον ρόλο της μαθηματικής απόδειξης (11.52% της διασποράς) που περιέχει μεταβλητές όπως: «Μια πτυχή της μαθηματικής απόδειξης είναι η επεξήγηση», «Η μαθηματική απόδειξη ενισχύει την μαθηματική επικοινωνία». Αντίστοιχα στην παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στο μέρος Γ (ΚΜΟ = 0,806, p<0.05) προέκυψαν έξι παράγοντες οι οποίοι εξηγούν το 69.08% της διασποράς. Οι παράγοντες αυτοί είναι: (α) η καθοδήγηση που προσφέρει ο εκπαιδευτικός στην πορεία και ερμηνεία της μαθηματικής απόδειξης (30.78% διασποράς) που περιέχει μεταβλητές όπως «Καθοδηγώ τους μαθητές για την κατασκευή του σχήματος για βοήθεια προς τη λύση μιας μαθηματικής απόδειξης», (β) ο χρόνος που αφιερώνει ο εκπαιδευτικός για τη μαθηματική απόδειξη (11.43% διασποράς) με τις μεταβλητές «Αφιερώνω λιγότερο χρόνο από όσον λέει το Αναλυτικό Πρόγραμμα στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης» και «Αφιερώνω λιγότερο χρόνο από όσον λέει το Αναλυτικό Πρόγραμμα στη συζήτηση με τους μαθητές για τη λύση μιας μαθηματικής απόδειξης», (γ) η χρησιμοποίηση σχήματος κατά τη διάρκεια επίλυσης μίας μαθηματικής απόδειξης (10.23% διασποράς) με μεταβλητές όπως «Δίνω σχήμα στις ασκήσεις αποδείξεων που δίνονται προς επίλυση», (δ) η χρησιμοποίηση εποπτικών μέσων από τον εκπαιδευτικό και η χρήση παραδείγματος στην μαθηματική απόδειξη (6.38% διασποράς) με μεταβλητές του τύπου: «Χρησιμοποιώ εποπτικά μέσα (γεωμετρικά όργανα, Η/Υ, φύλλα εργασίας) για την κατασκευή απόδειξης», «Στην παρουσίαση μιας μαθηματικής απόδειξης, δίνω παράδειγμα το οποίο δεν επιβεβαιώνει την πρόταση για να αποδείξω ότι η πρόταση δεν είναι ορθή», (ε) τα είδη μαθηματικής απόδειξης που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές του (5.22% διασποράς) με μεταβλητές «Χρησιμοποιώ διάφορα είδη μαθηματικής απόδειξης (εμπειρικές αποδείξεις, αποδείξεις με κατασκευή, αποδείξεις εμπλέκοντας άλλους τομείς των μαθηματικών ή συνδυασμών τομέων των μαθηματικών)», «Χρησιμοποιώ διαφορετικές εκφωνήσεις στις αποδείξεις που δίνονται προς επίλυση» και (στ) τα βήματα που ζητά ο εκπαιδευτικός από τους μαθητές τους ως προς την επίλυση μίας μαθηματικής απόδειξης (5.03% διασποράς) με μεταβλητές όπως «Ζητώ από τους μαθητές να αριθμούν τα βήματα τους κατά τη διάρκεια της απόδειξης έτσι ώστε να οργανώνουν την διαδικασία της απόδειξης».

Από τον έλεγχο που διεξάχθηκε προέκυψε ότι για τους παράγοντες που αφορούν στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την ερμηνεία της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης, τις πεποιθήσεις για το ρόλο της μαθηματικής απόδειξης, τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την επίδραση της μαθηματικής απόδειξης στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, την καθοδήγηση που προσφέρει ο εκπαιδευτικός στην πορεία και ερμηνεία της μαθηματικής απόδειξης, τον χρόνο που αφιερώνει ο εκπαιδευτικός στη μαθηματική απόδειξη, την χρησιμοποίηση σχήματος κατά τη διάρκεια επίλυσης μιας μαθηματικής απόδειξης και τη χρησιμοποίηση εποπτικών μέσων από τον εκπαιδευτικό και τη χρήση παραδειγμάτων στην μαθηματική απόδειξη δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις τιμές της ως προς το τύπο του σχολείου ($U = 1572.5$, $p = .131 > .05$), ($U = 1754.0$, $p = .574 > .05$), ($U = 1720.0$, $p = .459 > .05$), ($U = 1807.0$, $p = .774 > .05$), ($U = 1486.5$, $p = .052 > .05$), ($U = 1672.0$, $p = .325 > .05$) και ($U = 1644.0$, $p = .26 > .05$), αντίστοιχα. Για τους παράγοντες που αφορούν τα είδη μαθηματικής απόδειξης που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός και τα βήματα που ζητά ο εκπαιδευτικός από τους μαθητές του ως προς την επίλυση μιας μαθηματικής απόδειξης προέκυψε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις τιμές τους, ως προς τον τύπο σχολείου με ($U = 1246.5$, $p = .001 < .05$) και ($U = 1328.5$, $p = .006 < .05$). Ο μέσος όρος όσων υπηρετούν σε Λύκειο είναι μεγαλύτερος από τον μέσο όρο όσων υπηρετούν σε Γυμνάσιο και για τις δύο μεταβλητές, δείχνοντας ότι οι εκπαιδευτικοί στο Λύκειο επιμένουν περισσότερο στην καταγραφή βημάτων για τεκμηρίωση απόδειξης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία διερεύνησε τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών μαθηματικών για την μαθηματική απόδειξη και τη διδασκαλία της απόδειξης στη γεωμετρία και πώς αυτές διαφοροποιούνται ανάλογα με τη διδασκαλία μαθηματικών σε ηλικία γυμνασίου ή λυκείου. Από τα αποτελέσματα διαφάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η μαθηματική απόδειξη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών, στην εμπέδωση και δημιουργία της γνώσης, δείχνοντας τη στενή σχέση που θεωρούν ότι έχει η μαθηματική απόδειξη με την κατανόηση, την εμπέδωση και τη δημιουργία γνώσης (Knuth, 2002).

Οι εκπαιδευτικοί θεωρούν την απόδειξη ως μία ακολουθία συμπερασμάτων, η οποία πρέπει να παρουσιάζεται με τυπικό τρόπο και δεν αποδέχονται την παράθεση εμπειρικών παραδειγμάτων ως επαρκή (Morris, 2007). Φαίνεται η διαφοροποίηση από αντίστοιχες έρευνες στη δημοτική εκπαίδευση (Goetting, 2005) οι οποίες έδειξαν το σημαντικό ρόλο που έχει η εμπειρική απόδειξη στις συγκεκριμένες ηλικίες. Η διαπίστωση αυτή συνάδει με τους στόχους για μετακίνηση από την άτυπη και διαισθητική γνώση στη δόμηση τυπικής μαθηματικής απόδειξης (Daher & Jaber, 2010).

Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν στο Λύκειο χρησιμοποιούν σε μεγαλύτερο βαθμό διάφορα είδη μαθηματικής απόδειξης και διαφορετικές εκφωνήσεις απόδειξης που δίνονται προς επίλυση σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν στο γυμνάσιο. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών που διδάσκουν σε Λύκειο και Γυμνάσιο δεν διαφέρουν όσο αφορά το ρόλο της μαθηματικής απόδειξης, την επίδραση της στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών και στην ερμηνεία της. Χρειάζεται ουσιαστικότερη διερεύνηση της σύνδεσης της πρακτικής των εκπαιδευτικών με την προτεινόμενη προσέγγιση και ακολουθία του Αναλυτικού Προγράμματος. Η έρευνα θα μπορούσε στη συνέχεια να εστιάσει στις αντίστοιχες πεποιθήσεις των μαθητών μέσης εκπαίδευσης και τη γνωστική τους συμπεριφορά κατανόησης και δόμησης της γεωμετρικής απόδειξης. Είναι τέλος σημαντική η διασύνδεση της διδακτικής πρακτικής των εκπαιδευτικών με το διδακτικό τους στυλ και τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών όσον αφορά στη γεωμετρική απόδειξη τόσο στο γυμνασιακό όσο και στο λυκειακό κύκλο, αλλά και η διερεύνηση των διδακτικών πρακτικών τους στο πλαίσιο της τάξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Atebe, H. U., & Schäfer, M. (2008). Van Hiele levels of geometric thinking of Nigerian and South African mathematics learners. In M. V. Polaki, T. Mokuku, & T. Nyabanyaba (Eds.), *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education* (pp. 104–116). Maseru, Lesotho: SAARMSTE.

Common Core Standards for Mathematics (2010). Washington, D.C. National Governors Association for best practices and the Council of Chief State School Officers.

Daher, W. & Jaber, O. (2010). Elementary school geometry and their practices. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 5 (1)*, 139-156.

Goetting, M. (2005). *The college students' understanding of mathematical proof,* Unpublished doctoral dissertation, University of Maryland, College Park.

Elchuck, L. M. (1992). The effects of software type, mathematics Achievement, spatial visualization, locus of control, independent time of investigation, and van Hiele level on geometric conjecturing ability. A thesis at The Graduate School, College of Education, The Pennsylvania State University.

Ericson, A., & Herbst, P. (2016). Will teachers create opportunities for discussion when teaching proof in a geometry classroom? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16 (1),* 167-181.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics*, 92(2), 147–162.

Komatsu, K. (2017). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational studies in Mathematics*, 96(2) (pp. 129-144). Springer Science and Business Media Dordrecht. Doi: 10.1007/s10649-016-9731-6.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379–405.

Morris, A. K. (2007). Factors affecting pre-service teachers' evaluations of the validity of students' mathematical arguments in classroom contexts. *Cognition and Instruction,* 25(4), 479–522.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Recio, M. & Godino D. (2001). Institutional and personal meanings of proof. In: *Educational studies in mathematics*, Vol. 48 No. 1, Pp. 83–99.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Teaching and learning number theory* (pp. 157–184). Westport, CT: Ablex.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289 - 321.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3).

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237– 266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sunzuma, G., Masocha, M. & Zezekwa, N. (2013). Secondary School Students' Attitudes towards their Learning of Geometry: A Survey of Bindura Urban Secondary Schools. *Greener Journal of Educational Research.* Vol. 3 (8), pp. 402 – 410.

Zazkis, D., & Zazkis, R. (2013). Prospective Teachers Conceptions of Proof Comprehension: Revisiting a Proof of the Pythagorean Theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14,* 777-803.

Η ΟΙΚΟΔΟΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΟΠΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Κωνσταντίνος Κακαβάς[1], Κωνσταντίνος Ζαχάρος[2], Ειρήνη Σκοπελίτη[3], Βασίλης Κόμης[4]

Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία, Πανεπιστήμιο Πατρών [1,2,3,4]

kkakavas@upatras.gr[1], zacharos@upatras.gr[2], eskopel@upatras.gr[3], komis@upatras.gr[4]

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία πιλοτική έρευνα που στοχεύει στον εντοπισμό παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με διαστάσεις της έννοιας της γωνίας και την απόπειρα τροποποίησης των αρχικών τους αντιλήψεων μέσω διδακτικής παρέμβασης που βασίζεται στον οπτικό προγραμματισμό. Στην έρευνα συμμετείχαν 11 μαθητές της Στ΄ τάξης, οι οποίοι ως πειραματική ομάδα χρησιμοποίησαν το λογισμικό Scratch για την κατασκευή ψηφιακών προσομοιώσεων καταστάσεων γωνίας, και 11 μαθητές της ίδιας τάξης, οι οποίοι ως ομάδα ελέγχου διδάχθηκαν τη γωνία από το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα. Η έρευνα έδειξε ότι η χρήση του οπτικού προγραμματισμού για τον σχεδιασμό ψηφιακών προσομοιώσεων μπορεί να βελτιώσει παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές σχετικά με τις πτυχές της έννοιας της γωνίας που η έρευνα προσεγγίζει και μπορεί να βελτιώσει την κατανόησή της.

Λέξεις-Κλειδιά: γωνία, οπτικός προγραμματισμός, Scratch

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γωνία ως μαθηματική έννοια, απαντάται συστηματικά στο μάθημα της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας. Παρόλα αυτά, έχει εντοπιστεί δυσκολία ορισμού της έννοιας της γωνίας. Το γεγονός αυτό οδήγησε τους Mitchelmore & White (1998), να προτείνουν μια κατηγοριοποίηση της έννοιας με 7 υποκατηγορίες-πτυχές (περιστροφή, συνάντηση, κλίση, γωνία αντικειμένου, στροφή, διεύθυνση, άνοιγμα-χώρος), κάνοντας σύνδεση ανάμεσα στη γωνία και στην καθημερινή ζωή. Την κατηγοριοποίηση αυτή αξιοποιεί και η παρούσα έρευνα.

Καθώς η γωνία συναντάται σε διαφορετικά πεδία εφαρμογής, η εννοιολογική ανάπτυξη της έννοιας αυτής συνίσταται στην ενδυνάμωση των σχέσεων ανάμεσα στα διαφορετικά πλαίσια, στα οποία η γωνία συναντάται (Mitchelmore & White, 1998). Υπό αυτό το πρίσμα, σχεδιάστηκε μια έρευνα που στόχο έχει να διερευνήσει την κατανόηση της έννοιας της γωνίας μέσα από τη χρήση ενός περιβάλλοντος οπτικού προγραμματισμού υπό το πρίσμα της Θεωρίας Πλαισίου (ΘΠ) για την Εννοιολογική Αλλαγή.

Σύμφωνα με τη ΘΠ οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες να κατανοήσουν τις επιστημονικές έννοιες σε φυσικές επιστήμες και μαθηματικά. Αρχικά φαίνεται να διαμορφώνουν «αφελείς» θεωρίες εξειδικευμένες ανά επιστημονικό πεδίο, θεωρίες πλαισίου. Ονομάζονται θεωρίες γιατί χρησιμοποιούνται από τους μαθητές με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούνται οι επιστημονικές θεωρίες από τους επιστήμονες, για να εξηγήσουν και να κάνουν προβλέψεις. Οι θεωρίες πλαισίου είναι σε διαφωνία με τις επιστημονικές θεωρίες, ως προς το περιεχόμενό τους, και οδηγούν στη δημιουργία παρανοήσεων. Η εκμάθηση των επιστημονικών εννοιών απαιτεί να αλλάξουν οι αφελείς θεωρίες πλαισίου. Πρόκειται για μια διαδικασία δύσκολη και χρονοβόρα, δεδομένου ότι απαιτείται να συντελεστούν πολλές εννοιολογικές αλλαγές, οντολογικές, αναπαραστασιακές και επιστημολογικές (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008).

Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να μελετήσει την επίδραση της κατασκευής ψηφιακών προσομοιώσεων πραγματικών καταστάσεων γωνίας στις αρχικές παρανοήσεις των μαθητών, οι οποίοι εργάστηκαν σε περιβάλλον οπτικού προγραμματισμού (Scratch 3.0). Η έρευνα αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας πτυχών της έννοιας της γωνίας όπως η περιστροφή, η διεύθυνση και ο τομέας μέσα σε ψηφιακό περιβάλλον.

ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ

Παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της γωνίας ως περιστροφή.

Έρευνα των Mitchelmore και White (1998) έδειξε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις διάφορες πτυχές της γωνίας σε καθημερινές καταστάσεις (π.χ. κλίση, γωνία, διασταύρωση, στροφή, ανηφόρα, κατηφόρα). Για παράδειγμα, δεν ανέφεραν την περιστροφή όταν τους ζητήθηκε να δώσουν παραδείγματα γωνιών. Επίσης, θεωρούν την περιστροφή ως μια ανεξάρτητη και ξεχωριστή κίνηση, χωρίς να την ερμηνεύουν με τη χρήση της γωνίας.

Παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της γωνίας ως διεύθυνση.

Οι Mitchelmore & White (2000) βρήκαν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν καταστάσεις γωνιών που εμφανίζονται με μία μόνο ορατή πλευρά και όχι με δύο πλευρές, όπως, δηλαδή, παρουσιάζεται συνήθως μια γωνία. Τέτοια παραδείγματα είναι η κλίση ενός βουνού και το άνοιγμα ή το κλείσιμο μιας πόρτας (απόκλιση από την αρχική της θέση).

Παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της γωνίας ως χώρος.

Μελετώντας τη γωνία ως χώρο, με παρατηρητή που στέκεται σε συγκεκριμένη θέση και εμπόδιο που βρίσκεται μπροστά του, οι Devichi & Munier (2013) έδειξαν ότι οι μαθητές σχεδιάζουν στο χαρτί λανθασμένα σχέδια της γωνίας που δείχνει τον χώρο που κρύβεται/σκιάζεται πίσω από ένα εμπόδιο και δεν μπορεί να δει ο παρατηρητής.

Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας διερευνήθηκε αρχικά αν οι συμμετέχοντες είχαν ανάλογες παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της γωνίας καθώς και αν μία εμπλουτισμένη διδακτική παρέμβαση μπορεί να οδηγήσει στην αντιμετώπιση αυτών των παρανοήσεων. Η ΘΠ για την εννοιολογική αλλαγή μπορεί να προσφέρει ένα ερμηνευτικό πλαίσιο αναφορικά με τη δημιουργία των παρανοήσεων για την έννοια της γωνίας και επιπλέον μπορεί να περιγράψει τις αλλαγές που συντελούνται στις αφελείς αντιλήψεις των μαθητών αναφορικά με την έννοια της γωνίας, μέσα από τη χρήση ενός εμπλουτισμένου διδακτικού περιβάλλοντος. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, η αντικατάσταση των αφελών αντιλήψεων των μαθητών με τις επιστημονικές δεν μπορεί να γίνει εύκολα μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας. Έτσι, διερευνάται αν το ψηφιακό τεχνολογικό περιβάλλον που χρησιμοποιείται μπορεί να βοηθήσει στην άρση των παρανοήσεων των μαθητών και στη βελτίωση της κατανόησης της έννοιας της γωνίας. Κρίνουμε ότι η ΘΠ για την εννοιολογική αλλαγή μπορεί να αποτελέσει κατάλληλο ερμηνευτικό πλαίσιο για αλλαγές που συντελούνται στα γνωστικά σχήματα στο πεδίο των Μαθηματικών εννοιών, όπως επίσης και στον σχεδιασμό παρεμβάσεων για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Παράλληλα, η εν λόγω θεωρία κρίνεται κατάλληλη, οικεία και λειτουργική για την περίπτωση της έρευνάς μας.

ΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

Στην παρούσα έρευνα προτείνεται η χρήση της τεχνολογίας κυρίως ως μέσο για την ενασχόληση των μαθητών με καταστάσεις που περιλαμβάνουν τη δυναμική θεώρηση της γωνίας. Τα δυναμικά χαρακτηριστικά της γωνίας δεν είναι εύκολο να διδαχθούν από στατικές παραδοσιακές δραστηριότητες. Έτσι, διάφοροι ερευνητές (Kynigos, Psycharis, & Latsi, 2009) προτείνουν την οπτικοποίηση μέσω ψηφιακών δυναμικών περιβαλλόντων μάθησης που χρησιμοποιούν την υπολογιστική τεχνολογία.

Αρκετά μεγάλη εφαρμογή στη διδασκαλία της γωνίας έχουν βρει τα λογισμικά τύπου LOGO. Σε αυτά τα περιβάλλοντα συνδυάζεται κυρίως η γωνία ως στροφή και μέτρηση με διάφορες διαδικασίες προγραμματισμού, μέσω δραστηριοτήτων για το επίπεδο, για τον 3D χώρο και μέσω της χρήσης ρομποτικών συσκευών όπως το bee-bot (Bartolini Bussi & Baccaglini, 2015). Μεγάλη εφαρμογή, επίσης, έχει η χρήση των διαθέσιμων περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας, καθώς η χρήση τους βοηθάει τους μαθητές στον δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων και γεωμετρικών εννοιών, καθώς και στη συσχέτιση μεταξύ τους (Balomenou, Komis & Zacharos, 2019).

Σήμερα, υποστηρίζεται ότι οι γλώσσες οπτικού προγραμματισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία της Γεωμετρίας με νέες δραστηριότητες (Ke, 2014). Η παρούσα έρευνα έχει ως στόχο τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Scratch και παρουσιάζει έναν εναλλακτικό τρόπο για τη διδασκαλία της γωνίας μέσα από την ψηφιακή προσομοίωση πραγματικών καταστάσεων, καθώς έως σήμερα η ανάπτυξη προσομοιώσεων με τη χρήση του οπτικού προγραμματισμού δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε ένα οργανωμένο μαθηματικό πλαίσιο διδασκαλίας των πτυχών της γωνίας που μελετώνται εδώ. Το χαρακτηριστικό αυτό αποτελεί και τη συνεισφορά της παρούσας έρευνας. Ειδικότερα, στο μέρος της έρευνας που θα παρουσιαστεί εδώ θα περιοριστούμε στις εξής διαστάσεις της έννοιας της γωνίας: α) περιστροφή, β) διεύθυνση και γ) χώρος.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1. Ποιες είναι οι παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τις διαστάσεις της έννοιας της γωνίας που μελετώνται στην παρούσα έρευνα (περιστροφή, διεύθυνση και χώρος);
2. Οι ψηφιακές προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων γωνίας διευρύνουν την αντίληψη που έχουν οι μαθητές σχετικά με τις διαστάσεις της γωνίας που μελετώνται στην παρούσα έρευνα;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης που σχεδιάστηκε αξιοποιώντας διάφορους τύπους εργαλείων και διαδικασιών για τη συλλογή δεδομένων. Η έρευνα βασίστηκε στη συμμετοχική παρατήρηση όπου ο πρώτος εκ των συγγραφέων της εργασίας συμμετείχε ως διδάσκων σε συνθήκες πραγματικής τάξης. Ακολουθήθηκε το μοντέλο του ερευνητικού σχεδιασμού (design-based research) για τη μελέτη των διδακτικών παρεμβάσεων μέσα σε αυθεντικό περιβάλλον μάθησης (Wang & Hannafin, 2005) υπό το ερμηνευτικό πρίσμα της ΘΠ για την εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008).

Δείγμα:

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 22 μαθητές από δύο τμήματα δημοσίων σχολείων πόλης της Ελλάδας που φοιτούσαν στη Στ΄ τάξη. Οι 11 μαθητές αποτέλεσαν την πειραματική ομάδα και οι υπόλοιποι 11 μαθητές την ομάδα ελέγχου. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας διδάχθηκαν τη γωνία με τη χρήση οπτικού προγραμματισμού, ενώ οι μαθητές της ομάδας ελέγχου έλαβαν την παραδοσιακή διδασκαλία σύμφωνα με το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας δεν είχαν γνώση χειρισμού του λογισμικού Scratch και ήταν η πρώτη φορά που χρησιμοποιούσαν ένα ψηφιακό εργαλείο στη διδασκαλία των μαθηματικών. Έτσι, πριν η διεξαγωγή της έρευνας οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τη χρήση αυτού του λογισμικού και συμμετείχαν σε δραστηριότητες επεξεργασίας, κίνησης και όψεων αντικειμένων, σχεδιασμού με πένα, συμβάντων και ελέγχου.

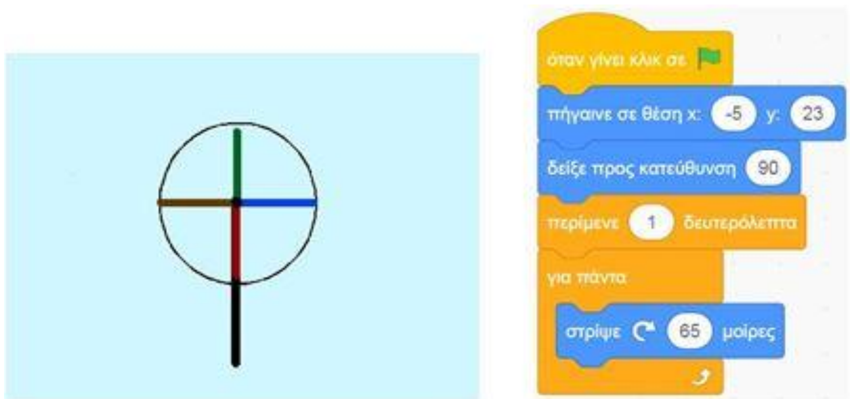
Υλικό:

Για τη διδακτική παρέμβαση, σχεδιάστηκαν 13 ημιδομημένοι ψηφιακοί μικρόκοσμοι με το περιβάλλον της γλώσσας Scratch, οι οποίοι αναπαριστούν καθημερινές καταστάσεις της γωνίας ως περιστροφή, διεύθυνση και χώρος. Σε αυτούς, οι μαθητές μπορούσαν ελεύθερα να επιλέξουν τις εντολές που χρειάζονταν σε κάθε κατάσταση για τον σχηματισμό γωνίας, έτσι ώστε να κινήσουν ή να θέσουν σε λειτουργία το κάθε αντικείμενο με τρόπο που να προσομοιάζει στην πραγματική εμπειρία. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ψηφιακής προσομοίωσης από κάθε πτυχή της γωνίας που προσεγγίστηκε.

Για τη γωνία ως περιστροφή:

Οι μαθητές έπρεπε να δώσουν τις κατάλληλες εντολές για να δείξουν την αέναη περιστροφή ενός ανεμιστήρα. Για να το δείξουν αυτό χρησιμοποίησαν την εντολή «στρίψε για πάντα» κατά μία τιμή της γωνίας που εκείνοι επέλεξαν, διαπιστώνοντας ότι αυξάνοντάς τη ο ανεμιστήρας περιστρεφόταν περισσότερο.

Παράδειγμα περιστροφής: *Να χρησιμοποιήσετε τις κατάλληλες εντολές ώστε να θέσετε σε λειτουργία τον ανεμιστήρα.*

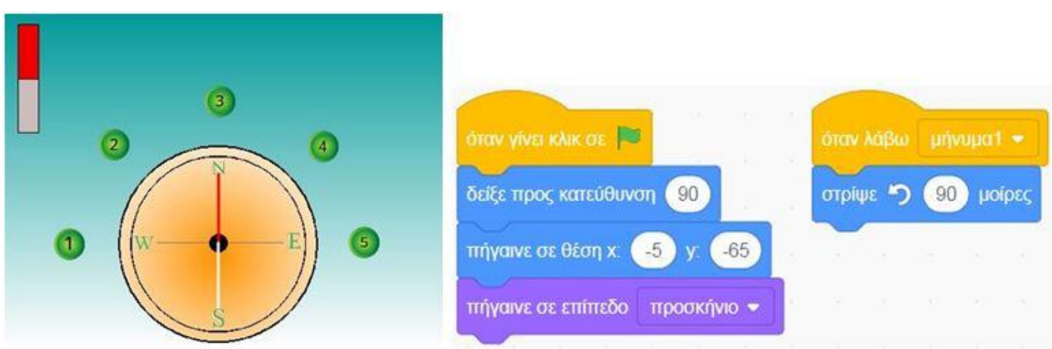


Εικόνα 1: Προσομοίωση ανεμιστήρα και ενδεικτικού κώδικα

Για τη γωνία ως διεύθυνση:

Οι μαθητές έπρεπε να δείξουν την απόκλιση της βελόνας μιας πυξίδας όταν σε διάφορα σημεία της πλησιάζει ένας μαγνήτης. Για παράδειγμα, όταν τοποθετούσαν τον μαγνήτη στο σημείο Ε (East) επέλεγαν την εντολή «στρίψε 90ο».

Παράδειγμα διεύθυνσης: *Να χρησιμοποιήσετε τις κατάλληλες εντολές ώστε να δείξετε την απόκλιση της βελόνας της πυξίδας όταν πλησιάζει ο μαγνήτης στο σημείο 1.*



Εικόνα 2: Προσομοίωση βελόνας πυξίδας και ενδεικτικός κώδικας

Για τη γωνία ως χώρος:

Οι μαθητές έπρεπε να θέσουν σε λειτουργία ένα ποτιστικό μηχάνημα που ποτίζει έναν συγκεκριμένο χώρο (κυκλικό τομέα). Αρχικά, τοποθετούσαν στη σωστή θέση τους δύο πίδακες νερού που όριζαν τα άκρα του χώρου και για τον έναν επέλεγαν την εντολή «στρίψε 120ο» ώστε να φανεί ο χώρος που ποτίζεται και στη συνέχεια τοποθετούσαν κατάλληλα το αντικείμενο που προσομοίαζε τον χώρο που ποτίζεται κάθε φορά.

Παράδειγμα χώρου*: Να χρησιμοποιήσετε τις κατάλληλες εντολές ώστε να δείξετε τον χώρο που ποτίζεται από το ποτιστικό μηχάνημα.*

Εικόνα 3: Προσομοίωση ποτιστικού και ενδεικτικός κώδικας

Αξιολόγηση της παρέμβασης:

Για την αξιολόγηση της παρέμβασης σχεδιάστηκε ένα τεστ που δόθηκε στους μαθητές και των δύο ομάδων πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Το τεστ περιλάμβανε ερωτήσεις αναπαράστασης και αναγνώρισης δύο πραγματικών καταστάσεων γωνίας από την κάθε πτυχή που προσεγγίστηκε (ως περιστροφή, ως διεύθυνση και ως τομέας), έτσι ώστε να διαπιστωθούν οι αντιλήψεις και οι παρανοήσεις των μαθητών και η πιθανή βελτίωσή τους. Οι ερωτήσεις αυτές παρουσιάζονται στο Παράρτημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στόχος της έρευνας ήταν η διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών για την αναγνώριση της γωνίας μέσα σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει το πλήθος των μαθητών που αναγνώρισαν ορθά τις καταστάσεις αυτές.

Γωνία	**Κατάσταση**	**Πειραματική Ομάδα (ν=11)**		**Ομάδα Ελέγχου (ν=11)**	
		Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
Περιστροφή	ρόδα	0	5	1	2
	μπάρα τρένου	5	7	4	3
Διεύθυνση	ποδόσφαιρο	4	6	3	2

	μπιλιάρδο	5	7	5	2
Χώρος	φωτογραφική	8	10	6	6
	κάμερα	4	11	6	5

Πίνακας 1: Σύνολο μαθητών που αναγνώρισαν σωστά τη γωνία στις καταστάσεις πραγματικής ζωής που τους δόθηκαν

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έχουν καλύτερη επίδοση από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου σε όλες τις κατηγορίες καταστάσεων γωνίας της καθημερινής ζωής (περιστροφή, διεύθυνση και χώρος). Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται ότι αναγνωρίζουν πιο εύκολα τις καταστάσεις της γωνίας ως χώρος, λιγότερο τις καταστάσεις της γωνίας ως διεύθυνση και δυσκολεύτηκαν περισσότερο στις καταστάσεις της γωνίας ως περιστροφή.

Για τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων με τη χρήση του πακέτου SPSS 25 χρησιμοποιήθηκε το μη παραμετρικό κριτήριο των Mann-Whitney, καθώς δεν παρατηρήθηκε κανονικότητα για την πειραματική ομάδα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι διαφορές πριν τη διδακτική παρέμβαση μεταξύ των ομάδων δεν είναι στατιστικά σημαντικές για καμία από τις 3 συνολικά κατηγορίες γωνίας που δόθηκαν (για την περιστροφή [$U= 57.5$, $p= 0.82$], για την διεύθυνση [$U= 51.5$, $p= 0.52$], για τον χώρο [$U= 60.0$, $p= 0.97$]). Αντίθετα, οι διαφορές που παρατηρούνται μετά τη διδακτική παρέμβαση ανάμεσα στους μαθητές των δύο ομάδων είναι στατιστικά σημαντικές και για τις τρεις κατηγορίες (για την περιστροφή [$U= 31.5$, $p= 0.04$], για τη διεύθυνση [$U= 33.0$, $p= 0.04$], για τον χώρο [$U= 30.5$, $p= 0.01$]). Αναλύοντας συνολικά τα αποτελέσματα για την επίδοση των μαθητών των δύο ομάδων στην αναγνώριση της γωνίας βρέθηκε ότι δεν παρατηρείται στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοσή τους πριν τη διδακτική παρέμβαση [$U= 51.0$, $p=0.50$], ενώ αντίθετα οι μαθητές της πειραματικής ομάδας μετά τη διδακτική παρέμβαση έχουν καλύτερη επίδοση συγκριτικά με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου, η οποία είναι στατιστικά σημαντική [$U= 16.5$, $p= 0.01$].

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν αυτά προηγούμενων ερευνών (Devichi & Munier, 2013; Mitchelmore & White, 1998) σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές δημιουργούν παρανοήσεις που τους δυσκολεύουν να αναγνωρίσουν τις διάφορες πτυχές της γωνίας σε καθημερινές καταστάσεις. Ενδεχομένως έχουν διαμορφώσει μία αφελή θεωρία (Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008) σύμφωνα με την οποία η έννοια της γωνίας περιορίζεται στην γεωμετρική της αναπαράσταση.

Επιπλέον, η έρευνα έδειξε ότι ο σχεδιασμός ψηφιακών καταστάσεων γωνίας βοήθησε τους μαθητές της πειραματικής ομάδας να διευρύνουν την αντίληψη που είχαν για την ύπαρξη γωνίας. Μετά τη διδασκαλία αντιλήφθηκαν την ύπαρξη της γωνίας μέσα σε ένα σύνολο καταστάσεων περιστροφής, διεύθυνσης και χώρου της καθημερινής τους εμπειρίας. Έτσι, φάνηκε ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας μπόρεσαν να βελτιώσουν την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν τις γωνίες αυτές σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με τους μαθητές που έλαβαν την παραδοσιακή διδασκαλία.

Επίσης, η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τον οπτικό προγραμματισμό για να σχεδιάσουν ψηφιακές προσομοιώσεις με καταστάσεις γωνίας. Ο δυναμικός χειρισμός του ψηφιακού περιβάλλοντος, η διάδραση και η ανατροφοδότηση από αυτό, καθώς και η διαδικασία προγραμματισμού μέσω δοκιμής και ελέγχου βοήθησαν τους μαθητές να βελτιώσουν την αντίληψή τους για την έννοια της γωνίας.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας αφορούν στα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των μαθητών του μικρού δείγματός μας. Επίσης, περιορίζονται στα συγκεκριμένα παραδείγματα της καθημερινής ζωής που επιλέχθηκαν. Πρόθεσή μας είναι να συμπεριλάβουμε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών αλλά και περισσότερες εφαρμογές που προσομοιάζουν σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής.

Εντούτοις, μέσα από τα ευρήματά μας φαίνεται να αναδεικνύεται η ανάγκη για βαθύτερη μελέτη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της κάθε πτυχής της γωνίας αλλά και των καθημερινών παραδειγμάτων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγισή της. Η έρευνα υποστηρίζει ότι η ψηφιακή προσομοίωση καθημερινών καταστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στη σύνδεση μεταξύ του γεωμετρικού και του πραγματικού κόσμου και να συμβάλει στην αντιμετώπιση παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με την έννοια της γωνίας οδηγώντας σε ποικίλες εννοιολογικές αλλαγές (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Balomenou, A., Komis, V., & Zacharos, K. (2019). Instrumental genesis of students' comparison strategies in a digital environment of dynamic Geometry. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair*, *6*(1), 335-343

Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing the seeds towards a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 391–405.

Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 1–19.

Ke, F. (2014). An implementation of design-based learning through creating educational computer games: A case study on mathematics learning during design and computing. *Computers & Education, 73*, pp. 26-39.

Kynigos, C., Psycharis, G., & Latsi, M. (2009). Meanings for angle through geometrical constructions in 3D space. In *Proceedings of the 33rd Conference of international* *group for the psychology of mathematics education.* Thessaloniki, Greece, pp. 457–464.

Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of angle concepts: A framework for research. *Mathematics Education Research Journal, 10*(3), 4-27.

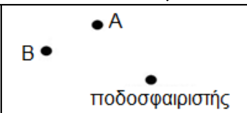
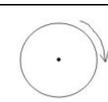
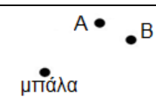
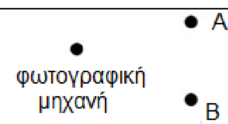
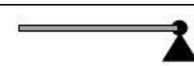
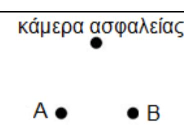
Mitchelmore, M., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics, 41*(3), 209–238.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change*. New York, NY: Routledge, pp. 3-34.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development, 53*(4), 5–23.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΕ ΠΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΥΠΑΡΧΕΙ ΓΩΝΙΑ Η ΓΩΝΙΕΣ;

Ένας ποδοσφαιριστής θέλει να δώσει πάσα σε έναν συμπαίχτη του (Α) αλλά τελικά η μπάλα καταλήγει σε έναν αντίπαλο παίχτη (Β):	
Η ρόδα ενός ποδηλάτου που κινείται:	
Ένας παίχτης μπιλιάρδου σημαδεύει έτσι ώστε να βάλει μια μπάλα στην τρύπα (Α) αλλά τελικά η μπάλα πήγε σε άλλο σημείο (Β):	
Ο χώρος που τραβάει φωτογραφία μια φωτογραφική μηχανή και περιλαμβάνει τον χώρο από το σημείο Α έως το σημείο Β:	
Προστατευτικές μπάρες που κατεβαίνουν όταν περνάει το τρένο και ανεβαίνουν ξανά όταν το τρένο έχει φύγει :	
Ο χώρος τον οποίο μπορεί να καταγράψει μια κάμερα ασφαλείας και περιλαμβάνει τον χώρο από το σημείο Α έως το σημείο Β:	

Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ HOPSCOTCH ΩΣ ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΣΤΗΝ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Ανδρέας Ο. Κυριακίδης, Μαρία Μελετίου-Μαυροθέρη

Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου

ak5288@gmail.com, M.Mavrotheris@euc.ac.cy

Το παρόν άρθρο υπογραμμίζει τη σημασία της ενσωμάτωσης εφαρμογών προγραμματισμού στο αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Οι ερευνητές συνοψίζουν την πορεία και τα αποτελέσματα μιας διδακτικής παρέμβασης κύριο χαρακτηριστικό της οποίας είναι η αξιοποίηση της εφαρμογής Hopscotch στο μάθημα της γεωμετρίας. Η ανάλυση των δεδομένων καταδεικνύει πως τα παιδιά της Στ΄ τάξης που συμμετείχαν στην έρευνα αξιοποίησαν με θετική διάθεση τις δυνατότητες που τους παρείχε το δοσμένο ψηφιακό εργαλείο, ενεργοποιώντας την υπολογιστική τους σκέψη και αναπτύσσοντας παράλληλα τη γεωμετρική τους αντίληψη σχετική με την έννοια και ιδιότητες του κανονικού πολυγώνου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια, η υπολογιστική σκέψη έχει προσελκύσει την αυξανόμενη προσοχή εκπαιδευτικών οργανισμών και φορέων διεθνώς (Μαυρουδή, Πέτρου & Φεσάκης, 2014). Εμπερικλείει όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά στοιχεία του τρόπου σκέψης και των τεχνικών που εφαρμόζουν οι επιστήμονες Πληροφορικής και άλλων ειδικοτήτων, όταν προσπαθούν να αντιμετωπίσουν και να επιλύσουν ένα πρόβλημα αξιοποιώντας την τεχνολογία. Είναι μία νοοτροπία ή μία διαδικασία σκέψης που χρησιμοποιεί αναλυτική και αλγοριθμική προσέγγιση για να διατυπώσει, να αναλύσει και να επιλύσει προβλήματα. Δεδομένης της επίδρασης της πληροφορικής στην επιστημολογία και τη μεθοδολογία των γνωστικών αντικειμένων, η υπολογιστική σκέψη θεωρείται μία βασική ικανότητα που πρέπει οι μαθητές/τριες να αναπτύξουν σταδιακά, συμπληρωματικά με τις άλλες τρεις βασικές δεξιότητες (ανάγνωση, γραφή, αριθμητική) για να μπορούν να ανταποκριθούν στις σύγχρονες προκλήσεις (Wing, 2006). Η ανάπτυξή της αποτελεί πλέον στρατηγικό στόχο στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα.

Στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών για τη σχολική εκπαίδευση πολλών χωρών, τα τελευταία χρόνια έχουν ενσωματωθεί βασικές έννοιες και διαδικασίες της υπολογιστικής σκέψης. Επιδιώκεται η ανάπτυξη δεξιοτήτων αξιοποίησης επιστημολογικών εργαλείων και πρακτικών της Πληροφορικής όπως η διάσπαση σύνθετων προβλημάτων σε απλούστερα, η κατηγοριοποίηση, η αναπαράσταση των δεδομένων, η μοντελοποίηση - προσομοίωση, ο σχεδιασμός αλγορίθμων, η αναγνώριση και γενίκευση προτύπων και η αφαίρεση (Ψυχάρης, Κοτζαμπασάκη, &

Καλοβρέκτης, 2018; Sung, Ahn, &. Black, 2017). Στο πλαίσιο αυτό, αξιοποιούνται καινοτόμα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα μάθησης (π.χ. Scratch/Scratch Junior, Daisy the Dinosaur, A.L.E.X., Move the Turtle, Light-Bot, Bee-Bot) που υποστηρίζουν την ανάπτυξη δεξιοτήτων προγραμματισμού από νεαρή ηλικία μέσω της εξερεύνησης ή/και της δημιουργίας διαδραστικών παιχνιδιών, διαδραστικών ιστοριών, κινούμενης εικόνας (animation) και πολλών άλλων δραστηριοτήτων.

Έχοντας εμπνευστεί από τη γλώσσα προγραμματισμού Logo (Papert, 1980), τα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα προγραμματισμού προωθούν μια κατασκευαστική προσέγγιση στη χρήση της τεχνολογίας. Παράλληλα με τη συμβολή τους στην ανάπτυξη της υπολογιστικής σκέψης των παιδιών, μπορούν να αξιοποιηθούν αποτελεσματικά στη διδασκαλία θεμάτων του αναλυτικού των μαθηματικών, με έναν τρόπο εποικοδομητικό, κατά τον οποίο οι μαθητές/τριες, με τρόπο αυτενεργό, συν-οικοδομούν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Προσφέρουν επίσης πλούσιες ευκαιρίες για την ενίσχυση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων, κριτικής και λογικής σκέψης (π.χ. ανάλυση αλληλουχίας, πρόβλεψη, μεταγνώση) που μπορούν να εφαρμοστούν σε όλους τους γνωστικούς τομείς. Τα παιδιά σκέφτονται πιο δημιουργικά, τεκμηριώνουν/ επιχειρηματολογούν συστηματικά και συνεργάζονται εποικοδομητικά, αποκτώντας έτσι τις απαραίτητες δεξιότητες για τον 21ο αιώνα (Resnick, 2007).

Πληθώρα επιστημονικών μελετών υπογραμμίζουν μια ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα στις νοερές διαδικασίες που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά τη συγγραφή προγραμμάτων υπολογιστή και σε διάφορες πτυχές της μαθηματικής σκέψης (Aydin 2005; Benton, Hoyles, Kalas, & Noss, 2017; Tsouccas & Meletiou-Mavrotheris, 2019). Ο προγραμματισμός προσφέρει ένα ιδανικό περιβάλλον για πειραματισμό και πιο συγκεκριμένη διατύπωση αφηρημένων μαθηματικών ιδεών. Ο σχεδιασμός, η κωδικοποίηση, η επανάληψη καθώς επίσης ο εντοπισμός και η απομάκρυνση τυχόν λαθών στις εντολές προγραμματισμού συμβάλλουν στην ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης και ανώτερων δεξιοτήτων λύσης μαθηματικού προβλήματος (π.χ. παραγωγική λογική, μοντελοποίηση κ.λπ.) (Subhi 1999; Villarreal, Esteley & Smith, 2018). Ερευνητές υποδεικνύουν πως ο προγραμματισμός σε περιβάλλοντα οικοδομισμού (π.χ. Logo) ενισχύει ανάμεσα σε άλλα διαδικασίες αρίθμησης και μέτρησης, την αλγεβρική λογική, γεωμετρικές αντιλήψεις και τον στοχασμό των μαθητών (Clements, Battista & Sarama, 2001; Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris & Prodromou, 2016; Παπαριστοδήμου Μελετίου-Μαυροθέρη & Βάσου, 2017). Επομένως, η ενσωμάτωση του προγραμματισμού υπολογιστή στην υπάρχουσα διδακτέα ύλη προβάλλει μια υποσχόμενη καινοτομία στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι εφαρμογές προγραμματισμού συνιστούν μια εξαιρετική ευκαιρία για επίτευξη του προαναφερθέντος στόχου σε ένα φιλικό, ενδιαφέρον και διόλου επιλήψιμο προς το παιδί πλαίσιο.

Στο παρόν άρθρο περιγράφεται η υλοποίηση και τα αποτελέσματα μιας διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε σε μια τάξη Στ' Δημοτικού, στην οποία αξιοποιήθηκε η εφαρμογή προγραμματισμού Hopscotch (Hopscotch Technologies, 2014) ως υποστηρικτικό εργαλείο στην εκμάθηση της έννοιας του πολυγώνου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα – Ερωτήματα προς διερεύνηση

Η υπό αναφορά έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δημόσιο δημοτικό σχολείο της κυπριακής επαρχίας. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μια ομάδα δεκαέξι μαθητών/μαθητριών (6 αγόρια και 10 κορίτσια) έκτης τάξης. Το ηλικιακό εύρος των παιδιών ήταν μεταξύ 11 και 12 χρονών. Υπεύθυνος δάσκαλος του συγκεκριμένου τμήματος ήταν ένας εκ των δύο ερευνητών, γεγονός το οποίο καθόρισε και την επιλογή του δείγματος. Τα ερωτήματα που τέθηκαν προς διερεύνηση είναι δύο και αξιολογούν τη δυνατότητα του ψηφιακού εργαλείου Hopscotch:

1. Να επηρεάσει τις στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών/μαθητριών όσο αφορά στη μάθηση της γεωμετρικής έννοιας του κανονικού πολυγώνου μέσω της τεχνολογίας οθονών αφής (Apple iPads και Android tablets).
2. Να συμβάλει στην οικοδόμηση γνώσης και σκέψης σχετικών με τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Οι ερευνητές οργάνωσαν διδακτική παρέμβαση διάρκειας 4 διαδοχικών περιόδων, δηλαδή, 160 λεπτών. Οι μαθητές/μαθήτριες εργάστηκαν σε ομάδες των δύο. Κάθε ζευγάρι είχε το δικό του iPad στο οποίο ήταν εγκατεστημένη η εφαρμογή Hopscotch. Ο ημερήσιος στόχος που τέθηκε στην ολομέλεια της τάξης από τον διδάσκοντα-ερευνητή ήταν να καταστούν ικανά τα παιδιά να κατασκευάζουν κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας το Hopscotch. Το προαναφερθέν ψηφιακό εργαλείο είναι μια οπτικοποιημένη γλώσσα προγραμματισμού σχεδιασμένη από την εταιρεία Hopscotch Technologies με σκοπό να στηρίξει νεαρούς προγραμματιστές 9 ετών και άνω να δημιουργούν τους δικούς τους κώδικες οι οποίοι όταν ενεργοποιηθούν αναπτύσσονται σε εικόνα (π.χ. ένα γεωμετρικό σχήμα). Ο όρος *Hopscotch* προέρχεται από την αγγλική λέξη *hop* που σημαίνει *πηδώ* και τη γαλλική λέξη *escocher* που σημαίνει *κόβω*. Η εφαρμογή αυτή περιλαμβάνει διάφορα επίπεδα ενασχόλησης και παρέχει στον χρήστη άριστης ποιότητας γραφικά σε ένα πολύχρωμο, διαδραστικό περιβάλλον, ιδιαίτερα φιλικό για μαθητές δημοτικού σχολείου.

Τις μέρες που προηγήθηκαν της διδακτικής παρέμβασης, οι συμμετέχοντες μαθητές και μαθήτριες έμαθαν να υπολογίζουν το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου καθώς επίσης και το μέγεθος έκαστης εσωτερικής γωνίας. Τα παιδιά αρχικά μετρούσαν τον αριθμό των τριγώνων που μπορούσαν να σχηματιστούν ενώνοντας με ευθύγραμμο τμήμα μία κορυφή ενός πολυγώνου με τις υπόλοιπες. Μετά πολλαπλασίαζαν τον πληθικό αριθμό που βρήκαν επί 180 μοίρες. Αφού μελέτησαν διάφορες περιπτώσεις κανονικών πολυγώνων, οδηγήθηκαν επαγωγικά στον μαθηματικό τύπο (ν-2)x180, όπου ν αντιστοιχεί στον αριθμό των πλευρών ή γωνιών ενός πολυγώνου. Για να υπολογίσουν τις μοίρες κάθε γωνίας τα παιδιά διαιρούσαν το άθροισμα που είχαν ήδη βρει διά ν.

Στην αρχή της διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός-ερευνητής κάλεσε τους μαθητές/μαθήτριες να ανακαλέσουν στη μνήμη τους τι είχαν μάθει τις προηγούμενες μέρες αναφορικά με τα πολύγωνα. Ακολούθως παρουσίασε στην ολομέλεια της τάξης τα διαθέσιμα εργαλεία/δυνατότητες της εφαρμογής Hopscotch και εξήγησε τον ρόλο τους σχετικά με την κατασκευή σχημάτων. Αφού αποσαφήνισε πώς η εν λόγω ψηφιακή εφαρμογή μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή δισδιάστατων σχημάτων, ο δάσκαλος ενέπλεξε τα παιδιά σε μια συζήτηση ως προς το πώς μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν το Hopscotch για να κατασκευάσουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο (Βλ. Εικόνα 1 – Δραστηριότητες Α και Β). Ο συντονισμός της συζήτησης εκ μέρους του δασκάλου-ερευνητή ήταν τέτοιος ώστε οι βασικές ιδιότητες ενός κανονικού πολυγώνου (δηλ. ίσες πλευρές και σταθερό μέγεθος εσωτερικών γωνιών) να καταστούν ξεκάθαρες. Η τελευταία δραστηριότητα κατέλαβε τα πρώτα 40 λεπτά της διδακτικής παρέμβασης. Στα επόμενα 80 λεπτά (δεύτερη και τρίτη διδακτική περίοδος), ζητήθηκε από τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν την εφαρμογή για να κατασκευάσουν, σε ζευγάρια, ένα οκτάγωνο, ένα πεντάγωνο, ένα εννιάγωνο και ένα εξάγωνο (Βλ. Εικόνα 1 - Δραστηριότητα Γ). Καθώς οι μαθητές/μαθήτριες εργάζονταν στις ομάδες τους, ο υπεύθυνος εκπαιδευτικός ανέλαβε να διευκολύνει τη διαδικασία ξεκαθαρίζοντας ζητήματα που άπτονταν του γνωστικού περιεχομένου και επιλύοντας τεχνικά θέματα όσο αφορά στη λειτουργία του Hopscotch. Κατά τη διάρκεια της τελευταίας περιόδου της διδακτικής παρέμβασης, ο δάσκαλος-ερευνητής προσέγγιζε κάθε ομάδα και διεξήγαγε ημιδομημένες συνεντεύξεις.

Οι ερευνητές ανάγνωσαν τις συνεντεύξεις των συμμετέχοντων παιδιών και, σε συνάρτηση με τις παρατηρήσεις που καταγράφηκαν κατά τη διδακτική παρέμβαση, οργάνωσαν τα δεδομένα τους στη βάση των δύο αρχικών ερωτημάτων προς διερεύνηση. Η απάντηση σε κάθε ερώτημα συνοδεύεται από αποσπάσματα σχετικής απομαγνητοφωνημένης συζήτησης. Το κάθε απόσπασμα είναι αντιπροσωπευτικό κοινά εκφρασθείσων απόψεων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ερώτημα 1: *Μπορεί το ψηφιακό εργαλείο Hopscotch να επηρεάσει τις στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών/μαθητριών όσο αφορά στη μάθηση της γεωμετρικής έννοιας του κανονικού πολυγώνου μέσω της τεχνολογίας οθονών αφής (Apple iPads και Android tablets);*

Η δυνατότητα που προσφέρει στον χρήστη η εφαρμογή Hopscotch να αναγνωρίζει και να διορθώνει εύκολα (ενεργοποιώντας την εντολή *edit* ή απλά ξεκινώντας καινούργια διαδικασία) τυχόν λάθη στη διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου, κέρδισε την προτίμηση των παιδιών. Ενδεικτική είναι η αυθόρμητη αντιπαραβολή στο μυαλό τους του παραδοσιακού βιβλίου με την οθόνη αφής.

Σπύρος: Αν το κάνεις πολλές φορές λάθος μπορεί να σχιστεί το βιβλίο σβήνοντας, ενώ εδώ [Hopscotch] δεν παθαίνει τίποτα.

Κυριάκος: Εδώ μπορείς να προγραμματίσεις, αν το κάνεις λάθος να δώσεις νέες εντολές.

Το γεγονός ότι η εφαρμογή Hopscotch στηρίζεται από εντυπωσιακά γραφικά υψηλής αισθητικής και ποιότητας, λειτούργησε καταλυτικά στο να μαγνητίσει το ενδιαφέρον και προσοχή των παιδιών καθόλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων (Βλ. Εικόνα 1)

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Δραστηριότητα Α

Για να φτιάξει ο παπαγάλος ένα ισόπλευρο τρίγωνο ακολούθησε τις εξής οδηγίες:

Move forward 100

Turn degrees 120

Move forward 100

Turn degrees 120

Move forward 100

Τι νομίζετε θα μπορούσε να αλλάξει στις οδηγίες και ο παπαγάλος να κατασκευάσει πάλι ισόπλευρο τρίγωνο;

Γιατί ο παπαγάλος επέλεξε στροφή 120° ; Θα μπορούσε άραγε να αλλάξει το μέτρο της γωνίας και να κατασκευάσει πάλι ισόπλευρο τρίγωνο;

Δραστηριότητα Β

Για να φτιάξει ο κροκόδειλος ένα τετράγωνο ακολούθησε τις εξής οδηγίες:

Move forward 100

Turn degrees 90

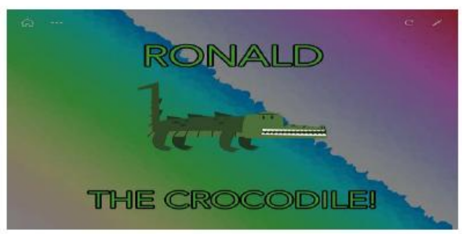
Move forward 100

Turn degrees 90

Move forward 100

Turn degrees 90

Move forward 100



Τι νομίζετε θα μπορούσε να αλλάξει στις οδηγίες και ο κροκόδειλος να κατασκευάσει πάλι τετράγωνο;

Γιατί ο κροκόδειλος επέλεξε στροφή 90° ; Θα μπορούσε άραγε να αλλάξει το μέτρο της γωνίας και να κατασκευάσει πάλι τετράγωνο;

Δραστηριότητα Γ

Επιλέξτε έναν δικό σας ήρωα και κατασκευάστε τα εξής σχήματα γράφοντας κάθε φορά τις εντολές που ακολουθήσατε.

(α) Οκτάγωνο

(β) Πεντάγωνο

(γ) Εννιάγωνο

(δ) Εξάγωνο

Εικόνα 1: Δραστηριότητες στα κανονικά πολύγωνα

Γεωργία: Με εντυπωσίασαν οι ωραίοι ήρωες που έχει το Hopscotch για να κατασκευάσουν το σχήμα, τα ωραία χρώματα. Είχε ζώα, αυτοκίνητα, δέντρα, σχήματα. Και μου άρεσε γιατί έφερνε πιο πολλή ζωντάνια στο σχήμα.

Παναγιώτα: Και τα χρώματα που ήταν γύρω, γύρω από το σχήμα ήταν και αυτά ωραία.

Ερώτημα 2: *Μπορεί η εφαρμογή Hopscotch να συμβάλει στην οικοδόμηση γνώσης και σκέψης σχετικών με τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων;*

Η δυνατότητα της εφαρμογής να μην οπτικοποιεί τις οδηγίες που δίνει ο χρήστης βήμα προς βήμα άμεσα, αλλά μόνο όταν αυτές ολοκληρωθούν, κεντρίζει τη γεωμετρική φαντασία των παιδιών και τα ωθεί να επικεντρωθούν στα βασικά δομικά χαρακτηριστικά ενός κανονικού πολυγώνου (μήκος πλευράς και μέγεθος της παραπληρωματικής της εσωτερικής γωνίας) προς αποφυγή ενός ημιτελούς σχήματος.

Λουκία: Δεν ήξερες πώς θα τελείωνε το σχήμα, πώς θα ήταν η τελική του μορφή.

Εκπαιδευτικός: Και τι έπρεπε να κάνεις εσύ για να σιγουρευτείς;

Λουκία: Σκεφτόμουν πώς είναι το σχήμα ολοκληρωμένο και έγραφα τις γωνιές και τις πλευρές για να μου βγάλει το σχήμα.

Αναστασία: Δίναμε οδηγίες σε έναν ήρωα του Hopscotch και του λέγαμε και τα έκανε.

Εκπαιδευτικός: Τι έπρεπε να σκεφτείτε την ώρα που δίνατε οδηγίες;

Μάριος: Το σχήμα πώς θα είναι όταν το σχεδιάσουμε, πόσα πράγματα έπρεπε να βάλουμε για να βγει ακριβώς.

Εκπαιδευτικός: Τι εννοείς πόσα πράγματα έπρεπε να βάλουμε;

Μάριος: Για να το τελειώσουμε, να το κλείσουμε. Να μην το αφήσουμε έτσι ανοιχτό.

Μάριος: Πόσα θα είναι το μήκος.

Αναστασία: Τις μοίρες, δηλαδή, πόσες μοίρες έπρεπε να βάλουμε στο ανθρωπάκι μας, στον ήρωά μας για να κάνει.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το ηλικιακό επίπεδο των συμμετέχοντων παιδιών ήταν η διττή διαπίστωση πως αφενός το μέγεθος της παραπληρωματικής της εσωτερικής γωνίας ενός κανονικού πολυγώνου μειώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών του σχήματος και, αφετέρου, ότι τόσο πιο πολύ το κανονικό πολύγωνο προσομοιάζει με κύκλο.

Αγγελική: Ας πούμε πως είχαμε ένα πολύγωνο με 70 γωνιές, η γωνιά που θα έπρεπε να στρίψει το ζωάκι μας θα ήταν πιο μικρή.

Εκπαιδευτικός: Μπράβο! Γιατί;

Αγγελική: Γιατί έχει πιο πολλές πλευρές ώστε να είναι πιο ανοικτό.

Εκπαιδευτικός: Αν βάζαμε για παράδειγμα 1000 γωνιές, πώς θα έμοιαζε νομίζετε το σχήμα σας;

Ηλέκτρα: Πιο στρογγυλό.

Δάσκαλος: Άρα σε ποιο σχήμα θα έμοιαζε όσο οι πλευρές γίνονταν πιο πολλές;

Αγγελική: Σε κύκλο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Το παρόν ερευνητικό εγχείρημα εστιάζει σε ένα τμήμα Στ΄ τάξης ενός επαρχιακού δημοτικού σχολείου στην Κύπρο. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν πως τα παιδιά χρησιμοποιώντας την εφαρμογή Hopscotch πέτυχαν να προγραμματίσουν την κατασκευή κανονικών πολυγώνων. Ενεργοποιώντας την υπολογιστική τους σκέψη αξιοποίησαν τις δυνατότητες που τους παρείχε το δοσμένο ψηφιακό εργαλείο. Έγραψαν τα ίδια εντολές για σχηματισμό πολυγώνων με διαφορετικό αριθμό πλευρών, όρισαν τα μέτρα των γωνιών και των πλευρών των υπό κατασκευή σχημάτων τους και διατύπωσαν εύστοχες παρατηρήσεις και συμπεράσματα σχετικά με τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων. Το παράδειγμα της Αγγελικής είναι ενδεικτικό της συμβολής του προγραμματισμού στην ανάπτυξη της γεωμετρικής αντίληψης σε ένα περιβάλλον οικοδομισμού όπως είναι το Hopscotch.

Τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν με τα αποτελέσματα από παρόμοιες έρευνες (π.χ. Sung et al., 2017; Τσούκκας και Μελετίου-Μαυροθέρη (2017), οι οποίοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η μελετημένη αξιοποίηση εφαρμογών προγραμματισμού μπορεί, παράλληλα με τη συμβολή στην ανάπτυξη της υπολογιστικής σκέψης των μαθητών, να οδηγήσει στη βελτίωση της διδασκαλίας και των μαθησιακών αποτελεσμάτων των μαθηματικών.

Η παρούσα έρευνα διεξήχθη σε ένα συγκεκριμένο τμήμα το οποίο δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό όλων των τμημάτων Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου, είχε μικρή έκταση και περιορισμένο γεωγραφικό χαρακτήρα. Επίσης ακολουθήθηκε ποιοτική προσέγγιση στη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων. Για τους λόγους αυτούς τα αποτελέσματά της δεν μπορεί να γενικευτούν σε περιπτώσεις ανόμοιες με αυτή που περιγράφονται στο άρθρο. Χρειάζεται, λοιπόν, να διεξαχθεί περισσότερη έρευνα αναφορικά με βέλτιστους τρόπους ενσωμάτωσης των ψηφιακών εφαρμογών προγραμματισμού όπως το Hopscotch στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της δημοτικής εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aydin, E. (2005). The use of computers in mathematics education: a paradigm shift from computer assisted instruction towards student programmeming. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *4*(2), 27–34.

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I., & Noss, R. (2017). Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*(2), 115–138. http://doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x

Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (2001). Logo and Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph 10.* Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.

Kyriakides, A. O., Meletiou-Mavrotheris, M., & Prodromou, T. (2016). Mobile devices in the service of students' learning of mathematics: The example of game application A.L.E.X. in the context of a primary school in Cyprus. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(1), 53-78.

Μαυρουδή, Ε., Πέτρου, Αρ., Φεσάκης, Τ., (2014). Υπολογιστική Σκέψη: Εννοιολογική εξέλιξη, διεθνείς πρωτοβουλίες και προγράμματα σπουδών, Στο Π. Αναστασιάσης, Ν. Ζαράνης, Β. Οικονομίδης & Μ. Καλογιαννάκης (Επιμ.), *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Διδακτική της Πληροφορικής* (σελ. 110-120). Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ρέθυμνο.

Παπαριστοδήμου, Ε., Μελετίου-Μαυροθέρη, Μ. και Βάσου, Χ. (2017). Η αποκωδικοποίηση του τυχαίου όταν τα παιδιά προγραμματίζουν και παίζουν τα δικά τους παιχνίδια. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (Επιμ.), *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 910-919). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Resnick. M. (2007). Sowing the seeds for a more creative society. *Learning and Leading with Technology*, *35*(4), 18-22.

Subhi, T. (1999). The impact of LOGO on gifted children's achievement and creativity. Journal of *Computer Assisted Learning*, *15*(2), 98–108.

Sung, W. Ahn, J. & Black, B. (2017). Introducing computational thinking to young learners: practicing computational perspectives through embodiment in mathematics education. *Technology, Knowledge and Learning*, *22*(3), 443-463. 7

Τσούκκας Λ., & Μελετίου-Μαυροθέρη, Μ. (2017). Χρήση Οθονών Αφής και Εφαρμογών Προγραμματισμού στη Διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο: Μια Διδακτική Παρέμβαση σε Μαθητές Δ΄ Τάξης Δημοτικού. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (Επιμ.), *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 745-755). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Tsouccas, L., & Meletiou-Mavrotheris, M.(2019). Enhancing In-Service Primary Teachers' Technological, Pedagogical and Content Knowledge on Mobile Mathematics Learning. *International Journal of Mobile and Blended Learning*, *11*(3), 1-8.

Villarreal, M., Esteley, C.B., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education, 50,* 327-341.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*, 33-35

Ψυχάρης, Σ., Κοτζαμπασάκη, Ε., & Καλοβρέκτης, Κ. (2018). Υπολογιστική Σκέψη, Επιστημολογία των Μηχανικών και Υπολογιστική Παιδαγωγική: Μια πρόταση Εισαγωγής του STEM στην Εκπαίδευση. *Εκπαίδευση & Επιστήμες, 1*(3), 1-11.

Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΝΑ ΟΡΙΖΕΙΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Περικλέους Μαρία

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού

mariapericleous19@gmail.com

Το παρόν κείμενο παρουσιάζει και συζητά αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης, σκοπός της οποίας ήταν η διερεύνηση της δραστηριότητας της μαθηματικής απόδειξης στο φυσικό περιβάλλον της τάξης. Αξιοποιώντας τη Θεωρία της Δραστηριότητας και το συνεργατικό σχεδιασμό προβλήματος, η μελέτη διερευνά τον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός εργάζεται με τους μαθητές για την προαγωγή της μαθηματικής επιχειρηματολογίας. Ανάλυση βιντεοσκοπημένων μαθημάτων δείχνει πως οι διαδικασίες της επεξήγησης και διερεύνησης αποτελούν βασικά υποσυστήματα μέσα στην κεντρική δραστηριότητα της απόδειξης, καθώς παρέχουν ένα βασικό μονοπάτι, το οποίο συχνά περιλαμβάνει τη δραστηριότητα του να ορίζεις. Σε αυτό το κείμενο παρουσιάζεται πώς η δραστηριότητα του να ορίζεις, ενσωματωμένη στη δραστηριότητα της επεξήγησης, διαδραματίζει καίριο ρόλο στη δραστηριότητα της απόδειξης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Είναι πλέον αποδεκτό πως η μαθηματική απόδειξη οφείλει να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης (Hanna και De Villiers, 2012). Έρευνες δείχνουν μαθητές τόσο δευτεροβάθμιας όσο και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης να αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν καλούνται να συστηματοποιήσουν προτάσεις σε ένα αξιωματικό σύστημα. Ταυτόχρονα, η σύγχρονη βιβλιογραφία που δείχνει πώς μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης προσεγγίζουν και κατασκευάζουν μαθηματικές αποδείξεις είναι ακόμη περιορισμένη. Υποστηρίζεται, επίσης, ότι η επιχειρηματολογία, η επεξήγηση και η αιτιολόγηση παρέχουν τη βάση για περαιτέρω εργασία στην ανάπτυξη του επαγωγικού συλλογισμού και τη μετάβαση σε μια πιο επίσημη μαθηματική μελέτη (Yackel και Hanna, 2003). Τι είναι όμως η μαθηματική απόδειξη; Η μαθηματική επιχειρηματολογία είναι μια δραστηριότητα που βασίζεται σε συλλογιστική που υποστηρίζει ή ανασκευάζει ένα ισχυρισμό και περιλαμβάνει τη διαδικασία της εξερεύνησης, τη διατύπωση υποθέσεων και εικασιών, την επεξήγηση και αιτιολόγηση των βημάτων που ακολουθήθηκαν προς το αποτέλεσμα, και την απόδειξη της δήλωσης. Έτσι, η μαθηματική απόδειξη είναι στον πυρήνα της μαθηματικής επιχειρηματολογίας, σαν επεξήγηση, αιτιολόγηση και έγκυρο επιχείρημα. Η μαθηματική κοινότητα έχει ανταποκριθεί στην ανάγκη να καθοριστεί η μαθηματική απόδειξη με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σε μαθητές όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης (Stylianides, 2007). Παραμένει, ωστόσο, η πρόκληση να κατανοήσουμε πως η μαθηματική απόδειξη διαμορφώνεται από τις πρακτικές της σχολικής τάξης. Άρα, στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η μαθηματική απόδειξη καθιερώνεται στη σχολική τάξη, απαιτείται ένα ευρύτερο δίκτυο ιδεών, καθώς οι ιδέες αυτές έχουν αναμφίβολα αντίκτυπο στον τρόπο με τον οποίο θεμελιώνεται η απόδειξη σαν τελικό αποτέλεσμα.

Ανταποκρίνομαι στο πιο πάνω ζήτημα, κάνοντας αναφορά στην προ-μαθηματική απόδειξη, αυτή την πτυχή του μαθηματικού συλλογισμού που μπορεί να καλλιεργήσει τη μαθηματική απόδειξη. Ποιές είναι οι ρίζες της μαθηματικής απόδειξης; Η προ-μαθηματική απόδειξη αναφέρεται σε εκείνα τα στοιχεία που κατευθύνουν το μαθηματικό συλλογισμό προς τον τελικό στόχο της επίσημης τεκμηρίωσης. Λαμβάνοντας υπόψη πως η απόδειξη είναι στον πυρήνα της μαθηματικής επιχειρηματολογίας, σαν επεξήγηση και αιτιολόγηση, μπορεί να υποστηριχθεί ότι πρέπει να δοθεί έμφαση σε αυτές τις δυο πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού. Παράλληλα, μέσα από την εξερεύνηση και διερεύνηση αυτές οι πτυχές αναδύονται και αναπτύσσονται στη διαδικασία της απόδειξης. Έτσι, στη συζήτηση για τις ρίζες της μαθηματικής απόδειξης, η εξερεύνηση, η οποία ενεργοποιεί τη διαίσθηση και ενθαρρύνει τη σκέψη, αποτελεί άλλο ένα στοιχείο που πρέπει να ληφθεί υπόψη. Στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης, όπου ενθαρρύνονται επεξηγήσεις και αιτιολογήσεις εικασιών, τα εργαλεία και οι δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται, οι νόρμες της τάξης, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές εργάζονται, ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός διαπραγματεύεται έννοιες και άλλοι εξωτερικοί παράγοντες αλληλεπιδρούν, αλληλοσυνδέονται και επηρεάζουν ο ένας τον άλλο, διαμορφώνοντας τη δραστηριότητα της τάξης. Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση της μαθηματικής απόδειξης στο φυσικό περιβάλλον της τάξης και ο τρόπος με τον οποίο οι δομικοί πόροι της τάξης διαμορφώνουν αυτή τη διαδικασία. Λόγω του μη επαρκούς περιθωρίου σε αυτό το κείμενο για να εξεταστούν λεπτομερώς τα πιο πάνω στοιχεία, η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στο ρόλο που διαδραματίζει η δραστηριότητα του να ορίζεις στην προ-απόδειξη.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Οι ορισμοί θεωρούνται θεμελιώδεις στα μαθηματικά και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Ανάμεσα στους κύριους ρόλους που αποδίδονται στους ορισμούς είναι ότι αποτελούν θεμελιώδεις συνιστώσες για τον σχηματισμό εννοιών καθώς εισάγουν τα αντικείμενα μιας θεωρίας και συλλαμβάνουν την ουσία μιας έννοιας εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές της ιδιότητες. Επιπρόσθετα, οι ορισμοί αποτελούν τη βάση για λογική αφαίρεση όχι μόνο των γνωστών ιδιοτήτων της έννοιας, αλλά και νέων ιδιοτήτων. Οι ορισμοί μπορούν επίσης να διευκολύνουν την παραγωγή και κατασκευή διαφόρων τύπων θεωρημάτων, αποδείξεων και μεθόδων επίλυσης (Morgan, 2005). Στην περιγραφή του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν τους ορισμούς στα μαθηματικά, οι Tall και Vinner (1981) εισήγαγαν τους όρους εννοιακή εικόνα (concept image) και εννοιακός ορισμός (concept definition). Η εννοιακή εικόνα είναι μια μη λεκτική αναπαράσταση της κατανόησης ενός ατόμου για μια έννοια. Περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, ιδιότητες και διαδικασίες που αποτυπώνονται στο μυαλό κάθε ατόμου. Ο εννοιακός ορισμός αναφέρεται σε μια σειρά από λέξεις που χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν την έννοια και μπορεί να είναι προσωπικός ή ο τυπικός μαθηματικός ορισμός της έννοιας.

Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των ορισμών, ένας μαθηματικός ορισμός, πρέπει να είναι ξεκάθαρος, μη αντιφατικός, ιεραρχικός, καθώς και αμετάβλητος υπό τις αλλαγές της αναπαράστασης. Επιπλέον, οι μαθηματικοί ορισμοί πρέπει να έχουν ακρίβεια στην ορολογία και να κατανοούνται εύκολα από τους μαθητές (Morgan, 2005). Επιπρόσθετα, η Borasi (1992), προσδιορίζει δυο λειτουργίες που πρέπει να πληρούν οι μαθηματικοί ορισμοί: (α) να μας επιτρέπουν να κάνουμε διακρίσεις μεταξύ περιπτώσεων και μη περιπτώσεων της έννοιας με βεβαιότητα, συνέπεια και αποτελεσματικότητα και (β) να «συλλαμβάνουν» και να συνθέτουν τη μαθηματική ουσία της έννοιας. Λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά και τις λειτουργίες των μαθηματικών ορισμών, συμπεραίνεται ότι οι μαθηματικοί ορισμοί μπορεί να λειτουργούν με διάφορους τρόπους για τους μαθητές. Η Morgan (2006) υπογραμμίζει την ιδέα της επιλογής και σκόπιμης διατύπωσης των ορισμών. Επιπρόσθετα, οι De Villiers, Govender και Patterson (2009) υποστηρίζουν πως η κατασκευή ορισμών σαν μαθηματική δραστηριότητα οφείλει να θεωρείται σημαντική διαδικασία και να αποτελεί μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών. Τα πιο πάνω υποδεικνύουν τη χρήση της φράσης «να ορίζεις» σαν μαθηματική δραστηριότητα ώστε να τονιστεί ο ρόλος αυτής της δραστηριότητας στην πρόοδο των μαθητών από ανεπίσημους σε πιο επίσημους τρόπους συλλογισμού (Zandieh και Rasmussen, 2010).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Καθώς η μελέτη διερευνά τις διάφορες δυνάμεις που επηρεάζουν τη δραστηριότητα της απόδειξης, η Θεωρία της Δραστηριότητας χρησιμοποιείται ως περιγραφικό και αναλυτικό μοντέλο μαζί με το συνεργατικό σχεδιασμό προβλήματος (μέσο για πρόσβαση στους στόχους του εκπαιδευτικού) για να συλλάβει την αλληλεπίδραση διαφορετικών επιπέδων. Η μελέτη διεξήχθη σε μια Στ’ τάξη σε αστικό δημοτικό σχολείο στην Κύπρο. Εκτός από την ερευνήτρια, οι συμμετέχοντες ήταν η εκπαιδευτικός, Βοηθός Διευθύντρια στο σχολείο, η οποία υποστηρίζει την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών και 22 μαθητές (11-12 ετών) μικτών ικανοτήτων.

Η διαδικασία συλλογής δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε τρεις φάσεις. Σκοπός της πρώτης φάσης ήταν ο προσδιορσμός του μακρο-επιπέδου πραγματοποιώντας ανάλυση περιεχομένου του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών και των σχολικών εγχειριδίων σχετικά με τη μαθηματική απόδειξη. Κύριος ερευνητικός στόχος της δεύτερης φάσης ήταν η χαρτογράφηση της τρέχουσας κατάστασης της τάξης. Η διαδικασία συλλογής δεδομένων περιλάμβανε ημιδομημένη συνέντευξη με τη εκπαιδευτικό, ώστε να μελετηθούν οι απόψεις και αντιλήψεις της σχετικά με τη μαθηματική απόδειξη, παρατήρηση διδασκαλίας και τις άτυπες συζητήσεις με την εκπαιδευτικό μετά από κάθε διδασκαλία. Στην τρίτη φάση, η ερευνήτρια μαζί με την εκπαιδευτικό συνεργάστηκαν με στόχο το σχεδιασμό δραστηριοτήτων σε Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας (μέσο για πρόσβαση στους στόχους της εκπαιδευτικού), οι οποίες, στη συνέχεια αξιοποιήθηκαν από την εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία της. Η διαδικασία συλλογής δεδομένων περιλάμβανε παρατήρηση διδασκαλίας, τις άτυπες συζητήσεις με την εκπαιδευτικό και τις δραστηριότητες. Το περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος που καλύφθηκε, σχετικό με την παρούσα εργασία ήταν η περιφέρεια και το εμβαδόν του κύκλου. Η συνολική διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων ήταν προοδευτική εστίαση (progressive focusing) (Stake, 1981). Σύμφωνα με τον Stake (1981) η προοδευτική εστίαση ολοκληρώνεται σε πολλαπλά στάδια αρχίζοντας με την παρατήρηση, συνεχίζοντας με περαιτέρω έρευνα, την εστίαση σε σχετικά ζητήματα και στη συνέχεια την αναζήτηση επεξηγήσεων (σ.1).

Η συστηματοποίηση των δεδομένων οδήγησε στη δόμηση δυο ευρύτερων δραστηριοτήτων: (i) της διερεύνησης, συμπεριλαμβανομένης της διερεύνησης μαθηματικών καταστάσεων, της διερεύνησης των μαθηματικών συνδέσεων και της εξερεύνησης Περιβάλλοντων Δυναμικής Γεωμετρίας, και ii) της δραστηριότητας της επεξήγησης που επικεντρώνεται στη διευκρίνιση πτυχών της μαθηματικής σκέψης κάποιου σε άλλους και μερικές φορές τη δικαιολόγηση για αυτούς της εγκυρότητας μιας δήλωσης. Αυτές οι δραστηριότητες ερμηνεύτηκαν στη συνέχεια μέσω του φακού της Θεωρίας της Δραστηριότητας, δημιουργώντας τα συστήματα δραστηριότητας τόσο της εξερεύνησης όσο και της επεξήγησης. Η ανάλυση των δεδομένων της τάξης αποκάλυψε ότι η δραστηριότητα της επεξήγησης ξετυλίγεται και επεκτείνεται γύρω από τους μαθηματικούς ορισμούς και το να ορίζεις ως δραστηριότητα. Ποια είναι η σχέση μεταξύ ορισμών και επεξήγησης; Οι ορισμοί είναι συμβάσεις που δεν απαιτούν καμία εξήγηση. Ωστόσο, η εκπαιδευτικός θέλει αναφορά στα χαρακτηριστικά που αφορούν ιδιότητες, δηλαδή, τη μετάβαση από έναν ορισμό που περιλαμβάνει μόνο την αντίληψη σε έναν ορισμό που περιλαμβάνει εξειδικευμένες ανάγκες που εξηγούν.

Στη συγκεκριμένη τάξη, εντοπίστηκαν περιπτώσεις μαθητών που αποδεικνύουν δηλώσεις όπως επίσης και περιπτώσεις όπου το επιχείρημα δεν ήταν στην εννοιολογική εμβέλεια της τάξης. Επισημαίνονται, επίσης και εκείνες οι πτυχές του μαθηματικού συλλογισμού που φαίνονται να έχουν τις ιδιότητες της απόδειξης παρόλο που μπορεί να μην αποτελούν απόδειξη από μόνες τους. Ανάλυση των συζητήσεων στην ολομέλεια της τάξης δείχνουν πως οι διαδικασίες της εξερεύνησης και επεξήγησης αποτελούν βασικά υποσυστήματα στην κεντρική δραστηριότητα της απόδειξης, καθώς, παρέχουν μια βασική οδό, η οποία συχνά περιλαμβάνει τη δραστηριότητα του να ορίζεις. Έτσι, η προ-απόδειξη αναφέρεται σε εκείνα τα στοιχεία που κατευθύνουν το μαθηματικό συλλογισμό προς τον τελικό στόχο της επίσημης τεκμηρίωσης: την εξερεύνηση, την επεξήγηση, την αιτιολόγηση και τη δραστηριότητα του να ορίζεις.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Επεισόδιο Α

Το Επεισόδιο Α, αποτελεί το πρώτο μέρος του εισαγωγικού μαθήματος της ενότητας σχετικής με τον κύκλο. Η συζήτηση στην τάξη ξεκίνησε με μια ερώτηση: «Τι είναι ο κύκλος;» Η εκπαιδευτικός δεν παρείχε τον ορισμό του κύκλου. Απεναντίας, αναμενόταν από τους μαθητές να εξηγήσουν τι είναι ο κύκλος. Ο κύκλος είναι ένα γεωμετρικό σχήμα για το οποίο οι μαθητές έχουν πλούσιες εικόνες και ως εκ τούτου ήταν σε θέση να συμμετέχουν στην κατασκευή ενός ορισμού.

Μαθητής: Είναι ένα σχήμα που δεν έχει πλευρές ή γωνίες.

Εκπαιδευτικός: Ο Μ1 λέει ότι ένας κύκλος είναι ένα σχήμα χωρίς πλευρές ή γωνίες. Σχεδιάζω ένα σχήμα σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό. *Η εκπαιδευτικός σχεδιάζει ένα μη κανονικό σχήμα με καμπύλες γραμμές*. Θέλω έναν ακριβή ορισμό.

Η ανταπόκριση σε έναν ακριβή ορισμό δεν ήταν εύκολη για τους μαθητές, οι οποίοι φαινόταν αντί αυτού, να ψάχνουν για αναλογίες.

Μαθητής1: Ονομάζουμε κύκλο το σχήμα που … έχει σχήμα σφαίρας.

Εκπαιδευτικός: Ποια είναι η διαφορά μεταξύ ενός κύκλου και μιας σφαίρας;

Μαθητής2: Η σφαίρα έχει όγκο.

Εκπαιδευτικός: Η σφαίρα έχει όγκο, είναι τρισδιάστατη, ενώ ο κύκλος είναι …

Μαθητές: Επίπεδος.

Εκπαιδευτικός: Ποιό σχήμα αποκαλούμε κύκλο;

Μαθητής3: Το σχήμα που δεν έχει γωνίες.

Μαθητής4: Και έχει μια καμπύλη ως πλευρά.

Σε αυτό το σημείο, η εκπαιδευτικός κάνει σαφές ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό των μαθηματικών ορισμών:

Εκπαιδευτικός: Είπαμε ότι στα μαθηματικά, οι ορισμοί μας πρέπει να είναι ακριβείς.

Έχοντας φανεί ότι δεν είναι τόσο εύκολο για τους μαθητές να είναι ακριβείς, η εκπαιδευτικός έστρεψε την προσοχή της τάξης προς τις ιδιότητες του κυκλου.

Εκπαιδευτικός: Ο κύκλος έχει κάποια χαρακτηριστικά.

Μαθητής5: Ξέρω. Το κέντρο του κύκλου …

Μαθητής6: Είναι πιο κυκλικό.

Μαθητής5:Η απόσταση από το κέντρο προς την περιφέρεια ... είναι το ίδιο.

Εκπαιδευτικός: Ο Μ5 λέει ότι ένας κύκλος είναι το σχήμα που, σύμφωνα με το Μ7 έχει ένα κέντρο, έχει μια κλειστή καμπύλη γραμμή και όλα τα σημεία της περιφέρειας έχουν την ίδια απόσταση από το κέντρο.

Η συζήτηση στην τάξη καθοδηγείται από τις απαντήσεις των μαθητών στη συγκεκριμένη ερώτηση. Η εκπαιδευτικός, στηριζόμενη στις απαντήσεις των μαθητών, συνέχισε να σχεδιάζει στον πίνακα. Οι μαθητές, εστιάζοντας στις αντιληπτικές πτυχές του σχεδίου της εκπαιδευτικού, τροποποιούσαν τον ορισμό που έδιναν ώστε το σχήμα να είναι κύκλος. Η δραστηριότητα αυτή συνεχίστηκε με αυτό τον τρόπο μέχρι να δοθεί ένας αποδεκτός ορισμός. Ο σχηματοποιημένος ορισμός συνέλαβε και συνέθεσε τη μαθηματική ουσία της έννοιας. Αυτό είναι σύμφωνο με αυτό που η Borassi (1992) αναγνωρίζει ως μια από τις λειτουργίες των μαθηματικών ορισμών.

Επεισόδιο Β

Αφού η τάξη κατέληξε στον ορισμό του κύκλου, η εκπαιδευτικός ζήτησε από τους μαθητές να εξετάσουν διάφορα σχήματα που παρουσιάζονταν στον πίνακα και να καθορίσουν αν αυτά τα σχήματα ήταν κύκλοι, δικαιολογώντας την απάντησή τους. Το Επεισόδιο Β, διαφέρει από το Επεισόδιο Α. Σε αυτό το επεισόδιο, οι μαθητές έπρεπε να δηλώσουν ποια από τα σχήματα που παρουσιάζονται στον πίνακα ήταν κύκλοι και να εξηγήσουν γιατί. Οι μαθητές, δεν μπορούσαν να βασιστούν μόνο στην αντίληψη, αλλά έπρεπε να αποστασιοποιηθούν από το γεωμετρικό σχέδιο και να χρησιμοποιήσουν τις ιδιότητες του κύκλου για να εξηγήσουν γιατί τα σχήματα ήταν ή δεν ήταν κύκλοι. Αρχικά, η ερώτηση «Ποιά από τα σχήματα είναι κύκλοι;», φάνηκε αρκετά απλή για τους μαθητές, Ωστόσο, οι μαθητές έπρεπε να καταβάλουν προσπάθεια στο να εξηγήσουν γιατί. Η αντίληψη δεν ήταν αρκετή, καθώς η εκπαιδευτικός δε δεχόταν τις απαντήσεις τους.

Εκπαιδευτικός: Είναι αυτός ένας κύκλος;

Μαθητής1: Όχι.

Σε αυτό το σημείο η εκπαιδευτικός έκανε το ακόλουθο σχόλιο:

Εκπαιδευτικός: Δε δέχομαι την απάντησή σου.

Μαθητής1: Όχι δεν είναι.

Σε αυτό το σημείο η εκπαιδευτικός καθοδήγησε τους μαθητές ώστε να καταστήσουν τον ορισμό λειτουργικό:

Εκπαιδευτικός: Γιατί;

Μαθητής2: Δεν είναι κύκλοι επειδή ...

Μαθητής3: Εκεί ... δεξιά ... τα άλλα σχήματα δεν είναι κύκλοι επειδή το κέντρο τους δεν έχει την ίδια απόσταση από την περιφέρειά τους

Η εκπαιδευτικός επιβεβαιώνει τη σημασία μιας αιτιολόγησης, αποδεχόμενη την απάντηση με επεξήγηση και μη δεχόμενη τις προηγούμενες απαντήσεις

Εκπαιδευτικός: Ναι.

Μαθητής3: Οι άλλοι δεν είναι κύκλοι, επειδή το κέντρο τους δεν είναι στη μέση ... το κέντρο δεν έχει ίση απόσταση από την περιφέρεια.

Στο Επεοσόδιο Β, οι μαθητές έπρεπε να βασιστούν στον ορισμό του κύκλου και τις ιδιότητές του, ώστε να δικαιολογήσουν γιατί τα παρουσιαζόμενα σχήματα δεν ήταν κύκλοι. Αυτό είναι σύμφωνο με τη λειτουργία που πρέπει να πληρούν οι μαθηματικοί ορισμοί (Borassi, 1992). Ο ορισμός που διατυπώθηκε από τους μαθητές στο Επεισόδιο Α, τους επέτρεψε να κάνουν διακρίσεις μεταξύ περιπτώσεων και μη περιπτώσεων της συγκεκριμένης γεωμετρικής έννοιας. Αυτό μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως η πρώτη περίπτωση όπου επιχειρείται να γίνει ο ορισμός του κύκλου λειτουργικός για τους μαθητές.

Επεισόδιο Γ

Αφού η τάξη κατέληξε σε ένα συμπέρασμα σχετικά με το μαθηματικό τύπο για την περιφέρεια του κύκλου, και έκανε υποθέσεις για το μαθηματικό τύπο για το εμβαδόν του κύκλου, η εκπαιδευτικός έδωσε σε κάθε ζευγάρι κύκλους χωρισμένους σε 8, 10 ή 12 ισοδύναμα κομμάτια. Η εκπαιδευτικός κάλεσε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τους κύκλους για να εξερευνήσουν το εμβαδόν του κύκλου. Μέσα από αυτή την εξερεύνηση οι μαθητές κατασκεύασαν αρχικά ένα ορθογώνιο. Στη συνέχεια, οι μαθητές χρησιμοποίησαν το μαθηματικό τύπο για το εμβαδόν του ορθογωνίου, αντικατέστησαν τα στοιχεία του με αυτά που αντιστοιχούν στον κύκλο και βρήκαν το μαθηματικό τύπο για το εμβαδόν του κύκλου. Με αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να συσχετίσουν την πρακτική εργασία και τις παρατηρήσεις τους με τύπους και αριθμούς, να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Επιπλέον, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν από μόνοι τους το μαθηματικό τύπο για το εμβαδόν του κύκλου.

Μαθητής1: Κυρία τελειώσαμε. Μπορούμε να σας πούμε; Ακτίνα φορές μισή περιφέρεια. Είναι ένα ορθογώνιο έτσι το μήκος είναι η ακτίνα και το πλάτος είναι το μισό της περιφέρειας γιατί είναι το μισό του

Μαθητής2: Το γράψαμε. Ακτίνα φορές περιφέρεια δια 2.

Εκπαιδευτικός: Ωραία. Τώρα αντικαταστήστε την περιφέρεια με τον τύπο.

Μαθητής3: Ακτίνα φορές ακτίνα φορές π.

Αυτή η δραστηριότητα εξερεύνησης, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα εξερεύνησης που αποκαλύπτει πληροφορίες απαραίτητες για την απόδειξη, διευκολύνει την κατανόηση της απόδειξης, ενθαρρύνει τη δημιουργία εικασιών και υποστηρίζει την αιτιολόγηση και τη διαδικασία της απόδειξης. Αυτό μπορεί, επίσης, να χαρακτηριστεί ως εποικοδομητικός ορισμός. Το γεγονός ότι δόθηκαν στα ζευγάρια κύκλοι χωρισμένοι σε διαφορετικό αριθμό ισοδύναμων κομματιών, ενισχύει τη γενίκευση του μαθηματικού τύπου για το εμβαδόν του κύκλου.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εξερεύνηση μπορεί να οδηγήσει σε επεξήγηση και αιτιολόγηση, απαραίτητα για τη δραστηριότητα του να ορίζεις (Επεισόδιο Γ). Η δραστηριότητα του να ορίζεις μπορεί επίσης να έχει αφετηρία μια ερώτηση της μορφής «Τι είναι;» (Επεισόδιο Α). Κατά τη διατύπωση ενός ορισμού και τη διαπραγμάτευση του τι θέλει κάποιος ο ορισμός να είναι, το να ορίζεις αποτελεί επεξήγηση (Επεισόδιο Α). Η κατασκευή ενός ορισμού περιέχει αιτιολόγηση όταν κάποιος εξηγεί γιατί. Η διάκριση μεταξύ περιπτώσεων και μη περιπτώσεων μιας έννοιας και ο έλεγχος κατά πόσο ένας δυνητικός υποψήφιος ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που αναφέρονται στον ορισμό, η δραστηριότητα του να ορίζεις μπορεί να εμπεριέχει επεξήγηση και αιτιολόγηση (Επεισόδιο Β). Στοιχεία από τα δεδομένα δείχνουν, επίσης περιπτώσεις όπου το να ορίζεις μπορεί να μη είναι επεξήγηση αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως προ-αποδειξη. Δηλαδή, όταν διατυπωθεί ένας ορισμός, εμφανίζεται η ανάγκη αυτός ο ορισμός να εμπλουτιστεί και να αναπτυχθεί ώστε να γίνει μέρος της επεξήγησης των μαθητών. Όταν οι μαθητές καλούνται να επαναλάβουν ένα διατυπωμένο ορισμό, μπορεί να υποστηριχθεί ότι ο ορισμός παραμένει ενεργός. Με την αναθεώρηση ή την επανεξέταση ενός διατυπωμένου ορισμού, παρέχεται στους μαθητές η ευκαιρία να αναθεωρήσουν την εννοιακή τους εικόνα και έτσι, να διευρύνουν τον εννοιακό τους ορισμό. Κατά συνέπεια, οι μαθητές μπορούν να πάρουν το έλεγχο του ορισμού στις επεξηγήσεις τους.

Πώς ξεδιπλώνεται ο ρόλος του μαθηματικού ορισμού και του να ορίζεις σαν δραστηριότητα στην μαθηματική απόδειξη; Τα στοιχεία που οδηγούν την προ-απόδειξη και επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο η απόδειξη εγκαθιδρύεται στην τάξη έχουν εντοπιστεί. Στη μαθηματική επιχειρηματολογία, η προ-απόδειξη εξέρχεται από το μαθηματικό συλλογισμό μέσω της εξερεύνησης, της επεξήγησης, της αιτιολόγησης και της δραστηριότητας του να ορίζεις και μπορεί να οδηγήσει στην απόδειξη.

Το να ορίζεις σαν μαθηματική δραστηριότητα εμπεριέχει τη διατύπωση ενός ορισμού, τη διαπραγμάτευση του τι θέλει κάποιος ο ορισμός να είναι (και γιατί) και την αναδιατύπωση ή αναθεώρηση του ορισμού. Αυτή η δραστηριότητα μπορεί να εμφανιστεί καθώς ο μαθητής αποδεικνύει μια δήλωση, διατυπώνει εικασίες, δίνει παραδείγματα και δοκιμάζοντας ή «αποδεικνύοντας» ένα ορισμό. Ωστόσο, τα προαναφερθέντα, αποτελούν ένα μέρος της ιστορίας. Η δραστηριότητα του να ορίζεις, μπορεί να αξιοποιηθεί ώστε να διαπραγματευθούν και να θεσπιστούν οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες της τάξης. Καθώς οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που θεσπίζονται στην τάξη σχετίζονται με την ίδια τη φύση, τις λειτουργίες και τα χαρακτηριστικά της απόδειξης και των μαθηματικών ορισμών, η εγκαθίδρυσή τους, ενισχύει τη δραστηριότητα της επεξήγησης. Άρα, οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που σχετίζονται με την επεξήγηση και την αιτιολογηση μπορεί να οδηγήσουν στην επεξήγηση, αιτιολόγηση και τη δραστηριότητα του να ορίζεις και, άρα, στη μαθηματική απόδειξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

De Villiers, M., Govender, R. & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T.V. Craine & R. Rubinstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp.189-203). Reston, VA: NCTM.

Hanna, G. & De Villiers, M. (2012). *Proof and proving in mathematics education*. The 19th ICMI Study. Netherlands: Springer.

Morgan, C. (2005). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and Education*, 19(2), 103-117.

Morgan, C. (2006). What is a definition for in school mathematics? In M. Bosch (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.861-871). FUNDEMI IQS-Universitat Ramon Llull: Barcelona.

Stake, R.E. (1981). The art of progressive focusing. In 65th *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (pp.1-8). Los Angeles: CA.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research Companion to NCTM's Principles and Standards for School Mathematics*, (pp. 227–236). VA: NCTM.

Zandieh, M. & Ramsussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterising progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29, 57-75.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ "ΔΩΜΑΤΙΟΥ ΑΠΟΔΡΑΣΗΣ" ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ

Αρβανιτάκη Αρχοντούλα[1], Σκουμπουρδή Χρυσάνθη[2]

[1]Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ.,Πανεπιστήμιο Αιγαίου,psed19012@aegean.gr

[2]Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ.,Πανεπιστήμιο Αιγαίου,kara@aegean.gr

Περίληψη

Στη συγκεκριμένη εργασία διερευνάται η δυνατότητα προσέγγισης της έννοιας του εμβαδού και της περιμέτρου μέσα από το ενεργητικό περιβάλλον των Δωματίων Απόδρασης. Μία ομάδα παικτών Δ΄ τάξης Δημοτικού καλείται να λύσει τους γρίφους ενός σεναρίου ώστε να αποδράσει από το δωμάτιο στο οποίο είναι κλειδωμένη. Η ανάλυση των δεδομένων από την εφαρμογή του παιχνιδιού έδειξε ότι μπορεί να γίνει προσέγγιση των εννοιών του εμβαδού και της περιμέτρου μέσω Δωματίου Απόδρασης εφόσον αναπτύχθηκαν στους συμμετέχοντες γνωστικές ικανότητες και κοινωνικοσυναισθηματικές δεξιότητες οι οποίες σχετίζονταν μεταξύ τους.

Λέξεις κλειδιά: *Δωμάτιο Απόδρασης, Εμβαδόν, Περίμετρος*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα παιχνίδια μπορούν να ενταχθούν στον εκπαιδευτικό σχεδιασμό ως πλαίσιο κατάλληλο για την υποστήριξη των μαθηματικών δραστηριοτήτων, αλλά και ως αυτόνομη δραστηριότητα, κάτι το οποίο είναι δύσκολο να επιτευχθεί με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας (Σκουμπουρδή, 2015). Το δομημένο παιχνίδι δίνει στα παιδιά τη δυνατότητα να αποκτήσουν σημαντικές μαθηματικές εμπειρίες μέσω της καλλιέργειας της ικανότητας των παιδιών να εξερευνούν πιθανότητες, να κατασκευάζουν νοήματα και να τα ελέγχουν, να αναπαριστούν, να δημιουργούν και να κοινωνικοποιούνται (Perry & Dockett, 2007).

Ένα είδος παιχνιδιού, το οποίο έχει γίνει ιδιαίτερα δημοφιλές τα τελευταία χρόνια είναι τα Δωμάτια Απόδρασης. Θεωρείται ότι μέσω της εμπλοκής τους στην εκπαιδευτική διαδικασία, προσθέτουν μία νέα παράμετρο στην έννοια του εκπαιδευτικού υλικού (Τέντα& Παπαδόπουλος, 2018).

Τα δωμάτια απόδρασης αποτελούν ομαδικά παιχνίδια ζωντανής δράσης, όπου μία ομάδα παικτών ανακαλύπτει στοιχεία, λύνει γρίφους και ολοκληρώνει προκλήσεις σε ένα ή περισσότερα δωμάτια με στόχο τη διαφυγή από τα δωμάτια αυτά (Nicholson, 2015). Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του αποτελούν ο χρονικός περιορισμός (έως 60'), η διαμόρφωση του χώρου (σκοτεινός, σκηνικό που να ταιριάζει με το σενάριο), οι βοήθειες-hints που παρέχονται στους παίκτες (συνήθως όταν έχουν φτάσει σε αδιέξοδο), ο gamemaster (το πρόσωπο που παρεμβαίνει, εξηγεί και επιβλέπει το δωμάτιο) και οι τεχνολογικές εφαρμογές που διευκολύνουν το παιχνίδι. Θέτοντας τους παίκτες στο επίκεντρο, συντελούν στην ανάπτυξη ποικίλων δεξιοτήτων, στη συλλογική επίλυση προβλημάτων σε κατάσταση υψηλής πίεσης (Goerner, 2016;Wu, Wagenschutz, &Hein, 2018), στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης (Wiemker, Elumir, & Clare, 2015), ενισχύουν τη συνεργασία και την επικοινωνία, αναθέτουν ρόλους στους παίκτες και υπάρχει άμεση ανάδραση (Nicholson, 2016;Monaghan & Nicholson, 2017; Zhang et al., 2018).

Στη συγκεκριμένη εργασία, η οποία είναι μέρος ευρύτερης έρευνας που μελετά την εκπαιδευτική συνεισφορά των Δωματίων Απόδρασης, διερευνάται το κατά πόσο μπορεί να γίνει προσέγγιση των εννοιών του εμβαδού και της περιμέτρου μέσω ενός τέτοιου Δωματίου. Το ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε, ήταν το εξής: Στον περιορισμό ποιων δυσκολιών- παρανοήσεων για την έννοια του εμβαδού και της περιμέτρου συνέβαλε το Δωμάτιο Απόδρασης και ποιες κοινωνικοσυναισθηματικές δεξιότητες αναπτύχθηκαν μέσα από αυτό; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι σημαντική για την ενίσχυση της πρότασης ενσωμάτωσης αυτού του είδους παιχνιδιού στην εκπαιδευτική πράξη.

Οι έννοιες του Εμβαδού και της Περιμέτρου

Η κατανόηση των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων, θεωρείται ουσιαστικής σημασίας, γιατί είναι έννοιες που τα παιδιά συναντούν πολύ συχνά στην καθημερινή τους ζωή και καλούνται να λύσουν προβλήματα ή να αντιμετωπίσουν καταστάσεις που συνδέονται με αυτές. Όμως, η κατανόηση των εννοιών αυτών αποτελεί πηγή σύγχυσης για τους μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας και είναι συνυφασμένες με παρανοήσεις. Οι δυσκολίες των μαθητών πηγάζουν από τη δομή των Προγραμμάτων Σπουδών, τις οδηγίες των σχολικών εγχειριδίων, το υλικό που χρησιμοποιείται, αλλά και τον τρόπο διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού (Struchens, Harris,&Martin, 2001).

Κοινότυπο λάθος κατά τον υπολογισμό της περιμέτρου αποτελεί η πρόσθεση του μήκους των δύο από τις τέσσερις πλευρές (Λέμα, 2010). Οι συνήθεις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά τον υπολογισμό του εμβαδού, στα αρχικά στάδια, είναι η δυσκολία κάλυψης της δοσμένης επιφάνειας, ανεξαρτήτως του υλικού με το οποίο εργάζονται (Zacharos & Ravanis, 2000), η δυσκολία καταμέτρησης των μονάδων που καλύπτουν μία επιφάνεια, αλλά και η δυσκολία, μετά τη σωστή καταμέτρηση των μονάδων, σύνδεσης του αποτελέσματος με το εμβαδόν (Bell, Costello, & Ktichemann, 1983). Σε επόμενα στάδια τα λάθη οφείλονται στη μη κατανόηση της διαδικασίας της μέτρησης λόγω της υπερβολικής έμφασης στους τύπους εύρεσης του εμβαδού και στην απομνημόνευσή τους (Huang &Witz, 2011).

Η μη σταθερή σχέση περιμέτρου και εμβαδού μπερδεύει τους μαθητές, καθώς θεωρούν ότι οι έννοιες εμβαδόν-περίμετρος παρουσιάζουν την ίδια διαφοροποίηση, δηλαδή σταθερή περίμετρος-σταθερό εμβαδόν, αύξηση περιμέτρου-αύξηση εμβαδού (Γαγάτσης, Γεωργίου, Τούρβας, & Χαραλάμπους, 2006). Πολύ συχνά οι μαθητές αδυνατούν να διακρίνουν τους τύπους της περιμέτρου και του εμβαδού λόγω του ότι δεν είναι σε θέση να ξεχωρίσουν τα χαρακτηριστικά του κάθε τύπου. Αυτό αποδίδεται σε πολλούς λόγους μεταξύ των οποίων στη διδασκαλία των τύπων των δύο εννοιών κατά την ίδια περίπου χρονική περίοδο (Van deWalle, Karp,&Bay-Williams, 2014). Βέβαια η σύγχυση των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού εμφανίζεται από τις πολύ μικρές ηλικίες του νηπιαγωγείου (Tan-Sisman & Aksu, 2012), πριν τη διδασκαλία των τύπων.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε καθ' όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους 2018-2019 σε μαθητές Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου στο νησί της Καλύμνου, στην οποία συμμετείχαν 15 μαθητές (9 αγόρια και 6 κορίτσια). Στην παρούσα εργασία θα αναλυθούν τα αποτελέσματα μόνο μίας ομάδας.

Ως πρώτη φάση της έρευνας ορίστηκε η διδασκαλία της σχετικής ενότητας που υπάρχει στο σχολικό εγχειρίδιο (Ενότητα 33: Υπολογίζω περιμέτρους και εμβαδά). Στη συνέχεια δόθηκε στους μαθητές ένα pre-test, ώστε να καταγραφούν οι γνώσεις και οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου αλλά και στου υπολογισμό του εμβαδού και της περιμέτρου τριών γεωμετρικών σχημάτων. Τέλος, σχεδιάστηκε το παιχνίδι και πραγματοποιήθηκε σε ένα από τα δωμάτια της παιγνιοθήκης, που χρησιμοποιείται από εκπαιδευτικούς του νησιού. Στον χώρο υπήρχε χαμηλός φωτισμός, διάφορα έπιπλα, αφίσες με στοιχεία του σεναρίου (μάγισσες, δάσος κ.α.) με σκοπό οι παίκτες να νιώσουν ότι είναι μέρος αυτού και να βιώσουν την κατάσταση προβληματισμού.

Το σενάριο παρουσιάστηκε στους παίκτες με τη μορφή video, ώστε να νιώσουν όσο το δυνατόν περισσότερο το αίσθημα της πίεσης και του προβλήματος, βασικά χαρακτηριστικά των Δωματίων Απόδρασης. Το ζητούμενο ήταν οι παίκτες να βρουν τον τετραψήφιο αριθμό που αποτελούσε τον κωδικό για να ξεκλειδώσουν την κλειδαριά που βρισκόταν στην πόρτα του δωματίου και να αποδράσουν μέσα σε 45΄.

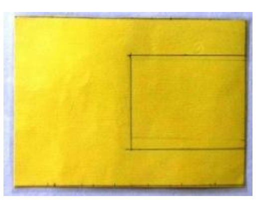
Για την καταγραφή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της δομημένης παρατήρησης. Η εφαρμογή του σεναρίου βιντεοσκοπήθηκε, ώστε να μην παραληφθεί κάποιο στοιχείο. Για την ανάλυση των δεδομένων της βιντεοσκόπησης, αρχικά έγινε παρατήρηση και καταγραφή όλης της εφαρμογής του παιχνιδιού, όπου η διαδικασία διακοπτόταν κάθε 5'' ώστε να μην παραληφθεί κάποιο σημαντικό στοιχείο (π. χ διάλογος). Έπειτα, χρησιμοποιήθηκαν τα σημαντικότερα δεδομένα που σχετίζονταν με το θέμα και έγινε σύνδεσή τους με το αντίστοιχο θεωρητικό πλαίσιο.

Το σενάριο

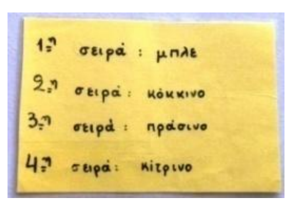
Είναι Κυριακή πρωί και η τάξη σας αποφασίζει να πάει περίπατο στο δάσος. Ξαφνικά όμως μία τεράστια σκιά σας καλύπτει. Σηκώνετε όλοι έντρομοι το κεφάλι σας και βλέπετε μία μάγισσα, τη μάγισσα Περιμετρόλ- Εμβαδόλ, η οποία σας κλειδώνει στον χώρο της παιγνιοθήκης. Εσείς για να αποδράσετε πρέπει να λύσετε τους γρίφους και να πάρετε το κλειδί που θα σας οδηγήσει στην έξοδο.

Οι γρίφοι

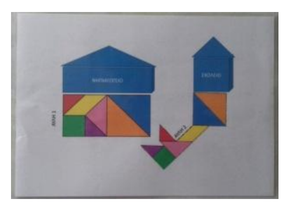
Για τον σχεδιασμό των γρίφων λήφθηκαν υπ' όψιν οι εκπαιδευτικοί στόχοι της συγκεκριμένης ενότητας από το Διδακτικό Πακέτο της Δ΄ Δημοτικού. Για τον πρώτο γρίφο οι παίκτες, είχαν στην κατοχή τους έναν χάρακα, κύβους σε 4 διαφορετικά χρώματα (κίτρινο,μπλε, πράσινο, κόκκινο) στους οποίους υπήρχαν γράμματα και μία καρτέλα, η οποία από τη μία πλευρά απεικόνιζε ένα γεωμετρικό σχήμα (Εικόνα 1α) και από την άλλη είχε τυπωμένο ένα μήνυμα (Εικόνα 1β) για τον τρόπο που οι παίκτες θα τοποθετούσαν τους κύβους. Οι σωστά τοποθετημένοι κύβοι δημιουργούσαν το εξής μήνυμα: "2φορές την περίμετρο". Οι παίκτες έπρεπε να σκεφτούν να υπολογίσουν την περίμετρο του σχήματος που απεικονίζεται στην κίτρινη καρτέλα και στη συνέχεια να τη διπλασιάσουν ώστε να βρουν τον αριθμό, που θα ήταν ο κωδικός για να ανοίξουν το κουτί που βρισκόταν στον δεύτερο σταθμό και θα τους έδινε τα νέα στοιχεία για να προχωρήσουν.



Εικόνα 1α: γεωμετρικό σχήμα



Εικόνα 1β: το μήνυμα



Εικόνα 2: Οι δύο αυλές

Για τον δεύτερο γρίφο, οι παίκτες είχαν στην κατοχή τους μεζούρες, ξύλινο τάνγκραμ και εκτυπωμένο σχέδιο το οποίο από τη μία πλευρά απεικόνιζε δύο αυλές (Εικόνα 2) και από την άλλη το μήνυμα: "*Τα πάτε πολύ καλά έως τώρα. Για να αποδράσετε από την παιγνιοθήκη πρέπει να βρείτε το εμβαδόν της αυλής 1 και την περίμετρο της αυλής 2*". Η αυλή 1 και η αυλή 2 βρίσκονταν σχεδιασμένες στο δάπεδο της παιγνιοθήκης. Οι παίκτες θα χρησιμοποιούσαν τους αριθμούς, από το εμβαδόν της πρώτης αυλής και την περίμετρο της δεύτερης, ως κωδικό στην κλειδαριά ώστε να αποδράσουν από την παιγνιοθήκη.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Διεξαγωγή του παιχνιδιού

Οι μαθητές κατάφεραν να λύσουν τους γρίφους. Στον πρώτο γρίφο παρουσίασαν κάποιες δυσκολίες στον υπολογισμό της περιμέτρου, καθώς έκαναν λάθος χρήση του χάρακα ξεκινώντας να μετρούν από το 1 και όχι από το 0. Ένας από τους παίκτες αντιλήφθηκε το λάθος, οπότε ξεκίνησαν να μετρούν από την αρχή για να υπολογίσουν σωστά την περίμετρο. Κατά τη διάρκεια της προσπάθειας τους να επιλύσουν τον πρώτο γρίφο, ένας από τους παίκτες αμφισβήτησε τη λύση της ομάδας και πρότεινε να βρουν την περίμετρο πολλαπλασιάζοντας το μήκος με το πλάτος. Η υπόλοιπη ομάδα εξήγησε στον παίκτη πως τους ζητείται η εύρεση της περιμέτρου και όχι του εμβαδού. Χαρακτηριστικός ήταν ο διάλογος (όπου '…' απάντηση από πολλούς μαθητές):

Νικόλας: Θα μετρήσουμε την περίμετρο.

Ευαγγελία: Να πολλαπλασιάσουμε το 12 με το 17,5 (μήκος X πλάτος).

…: Μας ζητάει την περίμετρο, όχι το εμβαδόν.

Μετά από αυτόν τον διάλογο, οι παίκτες ξεκίνησαν να μετρούν εκ νέου τις πλευρές του σχήματος, τις υπολόγισαν σωστά και βρήκαν τον κωδικό.

Στον δεύτερο γρίφο, οι παίκτες έπρεπε να βρουν το εμβαδόν και την περίμετρο, διαφορετικών σχημάτων (αυλές). Κατά τον υπολογισμό του εμβαδού, οι παίκτες διαφώνησαν ως προς το μήκος της πλευράς, γι' αυτό το μέτρησαν αρκετές φορές. Ο λάθος υπολογισμός οφειλόταν στη λάθος τοποθέτηση της μεζούρας, διότι την τοποθέτησαν από τον αριθμό 1 και όχι από το 0. Χαρακτηριστικός ήταν ο διάλογος:

Νικόλας: *Η πλευρά είναι 60 εκ.*

Αγγελική: *Όχι, είναι 61 εκ. Δεν έβαλες σωστά τη μεζούρα.*

Μαρία: *Είναι 60 εκ.*

Νικόλας: *Η μεζούρα πρέπει να ξεκινάει από το 0. Δες πού είναι το 0.*

Αφού αντιλήφθηκαν το λάθος τους, μέτρησαν το μήκος και το πλάτος, τοποθετώντας σωστά τη μεζούρα και στη συνέχεια τα πολλαπλασίασαν, βρίσκοντας το γινόμενό τους και άρα το εμβαδόν.

Για την εύρεση της περιμέτρου, ο "συντονιστής" της ομάδας (ο μαθητής που ανέλαβε άτυπα τον ρόλο του "συντονιστή" και καθοδηγούσε τους παίκτες της ομάδας ήταν εκείνος που απάντησε σωστά σε όλα τα θέματα του pre-test), ανέφερε: "*Μας ζητάει την περίμετρο. Μετρήστε όλες τις πλευρές*". Στην ομάδα που ανέλαβε τον υπολογισμό της περιμέτρου ο ένας παίκτης μετρούσε τις πλευρές και ο άλλος σημείωνε τα αποτελέσματα για να τα προσθέσουν στο τέλος, κάτι το οποίο έγινε με επιτυχία.

Ως προς τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του Δωματίου Απόδρασης φάνηκε ότι οι παίκτες τα προσέλαβαν θετικά και ήταν ιδιαίτερα χαρούμενοι. Φάνηκε να είναι εξοικειωμένοι με τον χαμηλό φωτισμό και αναζητούσαν στοιχεία για τους γρίφους ανασηκώνοντας αντικείμενα του χώρου όπως χαλιά και μαξιλάρια. Εμφάνισαν άγχος για τον περιορισμένο διαθέσιμο χρόνο ρωτώντας συχνά πόσος χρόνος τους είχε απομείνει και παράλληλα μία φοβία μήπως μείνουν για πάντα κλειδωμένοι στο δωμάτιο. Αφού άκουσαν το σενάριο, αναρωτήθηκαν: "*Αν δεν προλάβουμε να λύσουμε τους γρίφους, θα μείνουμε για πάντα κλειδωμένοι;*" Βέβαια το άγχος λειτούργησε και εποικοδομητικά εφόσον όσο περνούσε ο χρόνος συνεργάζονταν πιο μεθοδικά, για να φτάσουν, ως ομάδα, στο επιθυμητό αποτέλεσμα, που ήταν η εύρεση του σωστού κωδικού. Αυτό φάνηκε ιδιαίτερα κατά την επίλυση του δεύτερου γρίφου, όπου ενώ δούλευαν σε ομάδα, ενθαρρύνοντας ο ένας τον άλλο, όταν άρχισαν να δυσκολεύονται στην επίλυσή του, αποφάσισαν να χωριστούν σε δύο μικρότερες ομάδες για να δουλέψουν από την αρχή και πιο γρήγορα.

Όταν οι παίκτες ζητούσαν βοήθεια τους δίνονταν η συμβουλή να δουλέψουν πιο προσεκτικά. Όμως, τις στιγμές που "μπλόκαραν", δηλαδή κατά την τοποθέτηση των κύβων του πρώτου γρίφου για να βγάλουν το σωστό μήνυμα, κατά τον υπολογισμό των διαστάσεων του σύνθετου σχήματος και κατά την προσπάθειά τους να κάνουν τη σύνδεση των αυλών 1 & 2 με τις αυλές που υπήρχαν στον χώρο της παιγνιοθήκης, και δεν μπορούσαν να συνεχίσουν το παιχνίδι, τους δόθηκε βοήθεια. Έντονη ήταν η ικανοποίηση και η ανακούφισή τους όταν βρήκαν τον σωστό κωδικό και κατάφεραν να αποδράσουν και το έδειξαν φωνάζοντας και χοροπηδώντας στον χώρο.

Τέλος, ως προς τον ρόλο των ερευνητών, ένας από τους ερευνητές βιντεοσκοπούσε τη διαδικασία, ενώ ο δεύτερος λειτουργούσε ως καθοδηγητής παρέχοντας στους παίκτες βοήθεια, όπου κρινόταν απαραίτητο.

Αποτελέσματα pre-test

Ως προς τον ορισμό του εμβαδού, στο pre-test, οι μαθητές ανέφεραν "το βρίσκω όταν πολλαπλασιάσω τις πλευρές", "όταν πολλαπλασιάζουμε τις δύο διαφορετικές πλευρές", "τα συνολικά τετραγωνικά εκατοστά του σχήματος", ενώ μία μαθήτρια δεν έδωσε κάποια απάντηση. Για τον ορισμό της περιμέτρου, οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις φράσεις "προσθέτω όλες τις πλευρές", "βάζω όλες τις πλευρές μαζί", ενώ μία μαθήτρια δεν έδωσε καμία απάντηση.

Στο θέμα που ζητούσε τον υπολογισμό της περιμέτρου και του εμβαδού ενός τετραγώνου και ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, 3 από τους 4 μαθητές υπολόγισαν σωστά την περίμετρο του τετραγώνου. Η μαθήτρια που έκανε λάθος, για να βρει την περίμετρο, χρησιμοποίησε τον τύπο για το εμβαδόν. Όσον αφορά στην περίμετρο του ορθογωνίου 2 από τους 4 μαθητές για να βρουν την περίμετρο πρόσθεσαν το μήκος μόνο των δύο πλευρών και όχι όλες τις πλευρές. Ο υπολογισμός του εμβαδού του ορθογωνίου έγινε σωστά από 3 μαθητές. Η μαθήτρια που έκανε λάθος, για να βρει το εμβαδόν, πρόσθεσε το μήκος των δύο πλευρών. Ως προς το εμβαδόν του τετραγώνου, η μαθήτρια που έκανε λάθος, δεν έκανε κανέναν υπολογισμό, αλλά ως αποτέλεσμα έγραψε το μήκος της μιας πλευράς.

Στον υπολογισμό της περιμέτρου και του εμβαδού ενός πιο σύνθετου σχήματος, το οποίο είχαν διδαχθεί κατά την παράδοση της αντίστοιχης ενότητας, μόνο ένας μαθητής υπολόγισε σωστά τόσο την περίμετρο όσο και το εμβαδόν. Οι υπόλοιποι, στον υπολογισμό της περιμέτρου, παρέλειψαν να προσθέσουν κάποιες πλευρές ή έκαναν λάθος υπολογισμό. Στον υπολογισμό του εμβαδού, χρησιμοποίησαν τον τύπο του εμβαδού, αλλά βρήκαν λάθος αποτέλεσμα. Από την επίδοση των μαθητών φάνηκε ότι συγχέουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα αποτελέσματα του pre-test, παρατηρήθηκαν κάποια κοινότυπα λάθη από τους παίκτες, όπως κατά τον υπολογισμό της περιμέτρου, όπου μία παίκτρια πρόσθεσε το μήκος των δύο από τις τέσσερις πλευρές. Από τα αποτελέσματα όμως της διεξαγωγής του παιχνιδιού, φάνηκε ότι μπορεί να γίνει προσέγγιση των εννοιών του εμβαδού και της περιμέτρου μέσω Δωματίου Απόδρασης, καθώς έφτασαν στο μαθηματικό αποτέλεσμα.

Θετικό στοιχείο στην εφαρμογή του παιχνιδιού αποτέλεσε το γεγονός πως οι παίκτες ήταν συμμαθητές, καταγράφοντας ποιότητες όπως η συνεργασία, η αλληλεπίδραση, η αλληλεξάρτηση και ένα γενικό πλαίσιο συνεννόησης μεταξύ τους ώστε να διατηρείται η ακολουθία του παιχνιδιού. Καθ' όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού λειτούργησαν ομαδικά για την επίλυση των γρίφων, ανέλαβαν ρόλους και αντάλλαξαν απόψεις για να συνθέσουν τα δεδομένα των γρίφων. Επίσης σε κάποια σημεία διόρθωναν ο ένας τον άλλο και είχαν διαφωνίες στον τρόπο επίλυσης των γρίφων (Goerner, 2016; Wu, et. al., 2018). Τέλος, έδειξαν ενθουσιασμό και διάθεση να συμμετέχουν στο παιχνίδι.

Η χρήση του συγκεκριμένου τύπου παιχνιδιού έφερε τους μαθητές στο επίκεντρο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Εξέθεσαν τις ιδέες τους, εξήγησαν τις σκέψεις τους, επιχειρηματολόγησαν και όλοι μαζί σαν ομάδα, αξιολόγησαν και αποφάσισαν από κοινού τις ενέργειες τους. Παρόλο που το θέμα είναι προς διερεύνηση, τα μέχρι τώρα αποτελέσματα συμφωνούν με ερευνητές (Nicholson, 2015) που αναφέρουν ότι η χρήση των δωματίων απόδρασης στη σχολική τάξη είναι σημαντική και προσφέρει πολλές δυνατότητες προάγοντας τη μάθηση.

Τέλος, μία ενδιαφέρουσα πρόταση για μελλοντική διερεύνηση αναφορικά με τα Δωμάτια Απόδρασης αφορά στον τρόπο διαμόρφωσης των χαρακτηριστικών τους ώστε να χρησιμοποιηθούν στη μαθηματική εκπαίδευση και άλλων ομάδων της μαθητικής κοινότητας όπως οι μαθητές με αναπηρία όρασης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bell, A., Costello, J., & Ktichemann, D. (1983). *Research on learning and teaching.* Part A. London: NFER-Nelson.

Γαγάτσης, Α., Γεωργίου, Γ., Τούρβας, Γ.,& Χαραλάμπους Ε. (2006). Οπτική αντίληψη, ψευδαίσθηση της αναλογίας και οι έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού. Στο Ε. Φτιάκα, Α.Γαγάτσης, Ι. Ηλία, & Μ. Μοδέστου (Επιμ). *Πρακτικά 9ουΣυνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρίας Κύπρου: Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο: Προτεραιότητες και Προοπτικές* (σσ. 85- 98). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Goerner, P. (2016).Breakout Edu brings "Escape Room" Strategy in the Classroom.SLJ Review, *School Library Journal*, Available online: https://www.slj.com/?detailStory=breakout-edu-brings-escape-room-strategy-to-the-classroom-slj-review

Huang, H.-M.E. &Witz, K.G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction, 21*, 1-13.

Λέμα, Ι. (2010).*Προσέγγιση των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού ορθογωνίων και της μέτρησής τους στη Δ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου με χρήση χειραπτικών εργαλείων*. Βιβλιοθήκη και κέντρο πληροφόρησης, ειδική συλλογή «Γκρίζα Βιβλιογραφία», Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Monaghan, S. & Nicholson, S. (2017). Bringing escape room concepts to pathophysiology case studies. *Journal of the Human Anatomy and Psysiology Society, 21*(2), 49-65

Nicholson, S. (2015), *Peeking behind the locked door: A survey of Escape Room Facilities*. Available online: http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf

Nicholson, S. (2016). *Ask why: Creating a better player experience through environmental storytelling and consistency in Escape Room Design*.In: *Meaningful Play*, Lansing, Michigan

Perry, B. & Dockett, S. (2007). *Play and mathematics*. Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.

Σκουμπουρδή, Χ.(2015). *Το παιχνίδι στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Ελληνικά ακαδημαϊκά ηλεκτρονικά συγγράμματα και βοηθήματα. Kallipos.

Struchens, M.E., Martin, W.G., & Kenney, P.A. (2003).What students know about measurement: Perspectives from the NAEP.In D.H. Clements &G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement*, Reston: NCTM, 197-208.

Tan-Sisman, G. & Aksu, M.(2012). Sixth grade students' performance on length, area, and volume measurement. *EducationandScience, 37*(166), 141-154.

Τέντα, Ε. & Παπαδόπουλος, Ι. (2018). Τα δωμάτια απόδρασης ως περιβάλλον έκφρασης της μαθηματικής επιχειρηματολογίας. *3ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*: «Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης, Ρόδος, 345-355.

Van de Walle, J.A., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (Eds.). (2014). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston, MA: Pearson Education.

Wiemker, M., Elumir, E., & Clare, A. (2015). Escape room games: "Can you transform an unpleasant situation into a pleasant one?" In: Game Based Learning-Dialogorientierung & spielerisches Lernen analog und digital, Ikon Verlags Gmbh, 55-68.

Wu, C., Wagenschutz, H., & Hein, J. (2018). Promoting leadership and teamwork development through Escape Rooms. *Medical Education*, *52*(5), 561–562.

Zacharos, K., &Ravanis, K. (2000). The transformation of natural to geometrical concepts, concerning children 5-7 years old. The case of measuring surfaces. *European Early Childhood Education Research Journal, 8*(2), 63-72.

Zhang, X.C., Lee, H., Rodriguez, C., Rudner, J., Chan, T.M., &Papanagnou D. (2018).Trapped as a Group, escape as a Team: Applying Gamification to Incorporate Team-building Skills Through an 'Escape Room' Experience. *Cureus, 10*(3), 1-9.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Ιωάννα Λεμονή, Κωνσταντίνος Π. Χρήστου

ΜΠΣ Διδακτική των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ms0730@eled.uowm.gr, kchristou@uowm.gr

Περίληψη

Στην παρούσα μελέτη διερευνώνται οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη νοερή πρόσθεση ακεραίων, με έμφαση σε αυτές που αφορούν τις αποφάσεις τους για το πρόσημο του αποτελέσματος και την πράξη μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων. Είκοσι επτά μαθητές της Β' & Γ' Γυμνασίου κλήθηκαν να υπολογίσουν νοερά και να περιγράψουν τη σκέψη τους σε δώδεκα υπολογισμούς (π.χ., -86+42). Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η πλειοψηφία των μαθητών μετέτρεψε τον υπολογισμό σε έναν ισοδύναμο με φυσικούς αριθμούς και εφάρμοσε ανάλογες στρατηγικές νοερού υπολογισμού. Από τις απαντήσεις τεσσάρων μαθητών που δεν μετέτρεψαν το πρόβλημα προέκυψαν πέντε νέες στρατηγικές για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θεωρητικό πλαίσιο

Σε διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όπως είναι η ένδειξη της θερμοκρασίας σε ένα θερμόμετρο, οι άνθρωποι συναντούν και επεξεργάζονται πληροφορίες που τους δίνονται με τη μορφή ακεραίων. Ως μαθηματικά εγγράμματοι ενήλικες ίσως να θεωρούμε δεδομένους τους αρνητικούς αριθμούς και τις πράξεις μεταξύ τους, ωστόσο κατά τη διδασκαλία τους είναι πολλά τα ερωτήματα και οι δυσκολίες που μπορεί να προκύπτουν από τους μαθητές μέσα στις σημερινές σχολικές τάξεις.

Οι νέες γνώσεις που αφορούν την έννοια των αρνητικών αριθμών και τις πράξεις μεταξύ τους έρχονται σε σύγκρουση με αρκετές από τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών για τους αριθμούς. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι το -27 είναι μικρότερο από το -12 ανατρέπει αυτά που γνωρίζουν από τους φυσικούς αριθμούς (Badarudin & Khalid, 2008). Παράλληλα, το γεγονός ότι η πρόσθεση μπορεί να προκαλεί μείωση και η αφαίρεση μπορεί να προκαλεί αύξηση αποσταθεροποιούν ακόμη περισσότερο τις καθιερωμένες αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για τις αριθμητικές πράξεις.

Τα κυρίαρχα μοντέλα, στα οποία φαίνεται να στηρίζεται η προσπάθεια των μαθητών να κατανοήσουν τους αρνητικούς αριθμούς και να αποκτήσουν ευχέρεια με τις πράξεις τους είναι το μοντέλο της εξουδετέρωσης, το μοντέλο της αριθμογραμμής και διάφορα μοντέλα της πραγματικής ζωής όπως η θερμοκρασία, το υψόμετρο ή το μοντέλο χρέος- κέρδος (Ural, 2016). Με βάση το μοντέλο εξουδετέρωσης, για παράδειγμα, οι μαθητές χρησιμοποιούν φυσικά αντικείμενα που αναπαριστούν τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς (π.χ. χρωματιστά πλακάκια), τα οποία αλληλοεξουδετερώνονται στην πρόσθεση (Whitacre et al., 2012).

Παρά το γεγονός ότι τα παραπάνω μοντέλα είναι ρεαλιστικά και κοντά στην εμπειρία των μαθητών, οι ίδιοι συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην προσπάθειά τους να δώσουν νόημα στους αρνητικούς αριθμούς (Ural, 2016). Αυτή η δυσκολία νοηματοδότησης οδηγεί συχνά στην αποστήθιση των κανόνων από μεριάς τους (Badarudin & Khalid, 2008). Χωρίς να μπορούν να αντιστοιχίσουν τους αρνητικούς αριθμούς με φυσικά αντικείμενα, όπως έχουν μάθει να κάνουν με τους φυσικούς, οι μαθητές προσπαθούν να θυμούνται τους κανόνες που διέπουν τους αρνητικούς αριθμούς και τις πράξεις τους, προκειμένου να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του σχολείου (Ekol, 2010).

Από την άλλη, έχει φανεί ότι η νοερή εργασία προωθεί την καλύτερη κατανόηση της δομής των αριθμών και των ιδιοτήτων τους και τη βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού (Reys, 1984). Για τον λόγο αυτό οι νοεροί υπολογισμοί έχουν προταθεί και τελικά ενταχθεί στα Αναλυτικά Προγράμματα (Reys, 1984).

Άλλωστε, είναι πλέον κοινή παραδοχή ότι ο ρόλος που διαδραματίζουν οι νοεροί υπολογισμοί στη διδασκαλία αλλά και στη μάθηση των μαθηματικών είναι πολύ σημαντικός, λόγω της χρησιμότητάς τους στην καθημερινότητα και της συμβολής τους τόσο στη μάθηση άλλων μαθηματικών εννοιών, όσο και στην ανάπτυξη αρκετών γνωστικών ικανοτήτων, όπως η ικανότητα της ευελιξίας και η μεταγνωστική ικανότητα (Λεμονίδης, 2013).

Με αφορμή την ένταξη των ακεραίων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, που πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά στην Ελλάδα το ακαδημαϊκό έτος 2018-2019 στο καινούριο βιβλίο μαθηματικών της Ε' Δημοτικού (Βρυώνης, Δουκάκης, Καρακώστα, Μπαραλής, & Στραύρου, 2016), και συνυπολογίζοντας τους παραπάνω προβληματισμούς, η εργασία αυτή επιχειρεί μια διερεύνηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά τη νοερή πρόσθεση και αφαίρεση με ακεραίους.

Προηγούμενες μελέτες

Η μοναδική έρευνα που εντοπίστηκε να εξετάζει τις στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης των μαθητών σε νοερούς υπολογισμούς με ακεραίους ήταν αυτή του Rezat (2011), ο οποίος μελέτησε τις *στρατηγικές προσέγγισης* και έπειτα τις *στρατηγικές μετασχηματισμού* που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Ως στρατηγική προσέγγισης ορίζεται «η γενική μορφή της μαθηματικής γνώσης που χρησιμοποιείται για το πρόβλημα» (Threlfall, 2009, σελ. 541), ενώ ως στρατηγική μετασχηματισμού ορίζεται «ο λεπτομερής τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί μετασχηματίζονται για να φτάσουμε σε μια λύση» (Threlfall, 2009, σελ. 542).

Στην περίπτωση των ακεραίων οι στρατηγικές προσέγγισης σχετίζονται με τον τρόπο που οι μαθητές θα πάρουν αποφάσεις για το πρόσημο του αποτελέσματος και την πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων, ενώ οι στρατηγικές μετασχηματισμού σχετίζονται με τον τρόπο που οι μαθητές θα μετασχηματίσουν τους αριθμούς ώστε να βρουν το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα (Rezat, 2011).

Πιο συγκεκριμένα, στρατηγικές προσέγγισης θεωρούνται τα διάφορα μοντέλα που, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, χρησιμοποιούν οι μαθητές στις πράξεις, όπως αυτό της αριθμογραμμής, το μοντέλο χρέος-κέρδος, το μοντέλο κλίμακας θερμοκρασίας ή το υψόμετρο (Rezat, 2011). Στην έρευνά του ο Rezat (2011) αναφέρει, επίσης, τη στρατηγική της *μετατροπής*, όπου το αρχικό πρόβλημα μετατρέπεται σε ισοδύναμο πρόβλημα στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, σε μία πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων, όπως η -28 +11, οι μαθητές θα αποφασίσουν εξαρχής για το αρνητικό πρόσημο του αποτελέσματος και την πράξη της αφαίρεσης μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων. Έτσι, η αρχική πρόσθεση ακεραίων θα μετατραπεί νοερά στην αφαίρεση -(28 -11), δηλαδή μία αφαίρεση φυσικών.

Για την αφαίρεση φυσικών 28-11 που προκύπτει, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν μία νοερή στρατηγική μετασχηματισμού που γνωρίζουν ήδη από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί αρκετές στρατηγικές μετασχηματισμού για τη νοερή πρόσθεση και αφαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών, ενώ φαίνεται πως οι δύο κύριες στρατηγικές είναι η *Στρατηγική Διαχωρισμού* και η *Στρατηγική Συσσώρευσης* (Λεμονίδης, 2013), παραδείγματα των οποίων φαίνονται και στον Πίνακα 1 σε προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Στρατηγικές	Προσθέσεις διψήφιων φυσικών 38+16	Αφαιρέσεις διψήφιων φυσικών 42-15
1.1. Στρατηγική Διαχωρισμού,	8 + 6 = 14	12 - 5 = 7
Μονάδες-Δεκάδες	30 + 10 = 40	30 - 10 = 20
	14 + 40 = 54	7 + 20 = 27
1.2. Στρατηγική Διαχωρισμού,	30 + 10 = 40	30 - 10 = 20
Δεκάδες-Μονάδες	8 + 6 = 14	12 - 5 = 7
	40 + 14 = 54	20 + 7 = 27
2.1. Στρατηγική Συσσώρευσης, Μονάδες-Δεκάδες	38 + 6 = 44	42 - 5 = 37
	44 + 10 = 54	37 - 10 = 27
2.2. Στρατηγική Συσσώρευσης, Δεκάδες- Μονάδες	38 + 10 = 48	42 - 10 = 32
	48 + 6 = 54	32 - 5 = 27

Πίνακας 1: Βασικές νοερές στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης μεταξύ διψήφιων φυσικών

Τα αποτελέσματα της έρευνάς του Rezat (2011) έδειξαν πως η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε τη στρατηγική της μετατροπής για να εκτελέσει τους υπολογισμούς μεταξύ ακεραίων. Φαίνεται, λοιπόν, πως οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν ως στρατηγική προσέγγισης τη μετατροπή και στη συνέχεια να εφαρμόζουν μία νοερή στρατηγική μετασχηματισμού από το ρεπερτόριο νοερών στρατηγικών πρόσθεσης ή αφαίρεσης φυσικών αριθμών.

Η ΜΕΛΕΤΗ

Στην έρευνα των Λεμονή & Χρήστου (υπό κρίση), μέρος της οποίας παρουσιάζεται εδώ, διερευνήθηκαν οι στρατηγικές προσέγγισης και οι στρατηγικές μετασχηματισμού νοερού υπολογισμού που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην πρόσθεση μεταξύ ομόσημων και ετερόσημων διψήφιων ακεραίων και η ευελιξία τους με τις στρατηγικές, δηλαδή το πλήθος των διαφορετικών στρατηγικών που χρησιμοποιούν. Στην παρούσα εισήγηση παρουσιάζονται μόνο οι στρατηγικές προσέγγισης που χρησιμοποιούν, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο αποφασίζουν το πρόσημο του αποτελέσματος και την πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων.

Με βάση την έρευνα του Rezat (2011), στην παρούσα μελέτη αναμενόταν ότι οι μαθητές θα έχουν την τάση να χρησιμοποιούν τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης, δηλαδή ότι θα μετατρέψουν το πρόβλημα που περιέχει ακεραίους σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα με φυσικούς αριθμούς και στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουν μια οποιαδήποτε νοερή στρατηγική μετασχηματισμού από το σύνολο των φυσικών αριθμών για την πρόσθεση ή την αφαίρεση που θα προκύψει, ώστε να υπολογίσουν το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα.

Έτσι, το βασικό ερευνητικό ερώτημα της μελέτης που εξετάζεται στην παρούσα εισήγηση είναι εάν η μετατροπή είναι η κύρια στρατηγική προσέγγισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη νοερή πρόσθεση και αφαίρεση μεταξύ διψήφιων ακεραίων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην μελέτη συμμετείχαν 27 μαθητές που φοιτούν στο Γυμνάσιο· 12 από την Β’ και 15 από την Γ’ τάξη· 17 δήλωσαν κορίτσια. Οι μαθητές ήταν πρόθυμοι να συμμετάσχουν στην έρευνα και η συμμετοχή τους ήταν εθελοντική.

Στους συμμετέχοντες δόθηκε ένα έντυπο ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε 12 ερωτήσεις με πράξεις πρόσθεσης ομόσημων και ετερόσημων διψήφιων ακεραίων. Οι τέσσερις πρώτες ερωτήσεις περιείχαν προσθέσεις μεταξύ δύο ομόσημων (αρνητικών) ακεραίων (π.χ., -36 -43), οι επόμενες τέσσερις ερωτήσεις περιείχαν προσθέσεις μεταξύ ενός θετικού και ενός αρνητικού ακέραιου (π.χ., 43 -85) και οι τέσσερις τελευταίες ερωτήσεις περιείχαν προσθέσεις ενός αρνητικού με έναν θετικό ακέραιο (π.χ., -86 +42). Και στις τρεις περιπτώσεις δόθηκαν στους μαθητές προσθέσεις με κρατούμενο και χωρίς κρατούμενο.

Η ερευνήτρια πραγματοποίησε προσωπικές συνεντεύξεις με τους 27 μαθητές. Ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν νοερά κάθε μία από τις πράξεις του ερωτηματολογίου και να σημειώσουν το ακριβές αποτέλεσμα γραπτώς. Για κάθε υπολογισμό, οι μαθητές κλήθηκαν να περιγράψουν προφορικά αναλυτικά τον τρόπο σκέψης τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να ελεγχθεί το ερευνητικό ερώτημα της μελέτης, δηλαδή εάν οι περισσότεροι μαθητές θα μετατρέψουν την πρόσθεση ακεραίων σε πρόσθεση ή αφαίρεση φυσικών αριθμών, οι απαντήσεις των μαθητών χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες με βάση τη χρήση ή μη της στρατηγικής της μετατροπής ως στρατηγική προσέγγισης. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται το σύνολο των μαθητών που χρησιμοποίησε ή όχι τη μετατροπή για κάθε έναν από τους υπολογισμούς του ερωτηματολογίου.

		Χρήση της στρατηγικής της μετατροπής	Μη χρήση της στρατηγικής της μετατροπής
Ερ. 1.	-36 - 43 = -79	27	0
Ερ. 2.	-41 -58 = -99	27	0
Ερ. 3.	-48 -37 = -85	27	0
Ερ. 4.	-87 -14 = -101	27	0
Ερ. 5.	43 -85 = -42	27	0
Ερ. 6.	62 -78 = -16	27	0
Ερ. 7.	37 -94 = -57	25	2
Ερ. 8.	26 -45 = -19	24	3
Ερ. 9.	-86 +42 = -44	26	1
Ερ. 10.	-44 +13 = -31	25	2
Ερ. 11.	-72 +46 = -26	23	4
Ερ. 12.	-56 +37 = -19	23	4

Πίνακας 2: Συχνότητες χρήσης της μετατροπής ως στρατηγική προσέγγισης

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, η μεγάλη πλειονότητα των συμμετεχόντων (23) χρησιμοποίησαν τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης σε όλους τους υπολογισμούς του ερωτηματολογίου. Επιπλέον, μέχρι και την Ερ. 6 του ερωτηματολογίου η μετατροπή χρησιμοποιήθηκε από όλους τους μαθητές.

Πιο συγκεκριμένα, οι παραπάνω μαθητές αποφάσισαν εξαρχής το πρόσημο του αποτελέσματος και την πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) μεταξύ των απόλυτων τιμών των ακεραίων, μετατρέποντας τις προσθέσεις ακεραίων σε προσθέσεις ή αφαιρέσεις μεταξύ φυσικών αριθμών. Στη συνέχεια, χρησιμοποίησαν μία στρατηγική μετασχηματισμού (βλ. Πίνακας 1) για την πρόσθεση και την αφαίρεση διψήφιων φυσικών αριθμών που προέκυψε.

Για παράδειγμα, στην πρόσθεση δύο ομόσημων αρνητικών ακεραίων, όπως η -36-43=-79 (Ερ. 1), ένας μαθητής που χρησιμοποίησε τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης και στη συνέχεια τη *Στρατηγική Διαχωρισμού σε Δεκάδες-Μονάδες* ως στρατηγική μετασχηματισμού, αναφέρει:

Μαθητής: … αφού και οι δύο αριθμοί έχουν αρνητικό πρόσημο, το αποτέλεσμα θα είναι επίσης αρνητικό. Μετά πρόσθεσα τους αριθμούς, πρόσθεσα 30 με 40 που κάνει 70… και 6 με 3 κάνει 9.

Οι μαθητές έπραξαν αντίστοιχα και στις προσθέσεις ετερόσημων ακεραίων. Για παράδειγμα, στην πρόσθεση 43-85=-42 (Ερ. 5), ένας από τους μαθητές που χρησιμοποίησε τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης και τη *Στρατηγική της Συσσώρευσης σε Δεκάδες-Μονάδες* ως στρατηγική μετασχηματισμού αναφέρει :

Μαθητής: … εδώ είναι αφαίρεση, επειδή υπάρχουν δύο αντίθετα πρόσημα. Και θα κρατήσουμε το μείον, επειδή ο πιο μεγάλος αριθμός έχει μείον… Απ ΄ το 85 να βγάλεις το 40 κάνει 45. Και απ΄ το 45 το 3 κάνει 42.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, από την πρώτη αφαίρεση του ερωτηματολογίου που περιέχει κρατούμενο (Ερ. 7) και έπειτα, όπου και παρατηρήθηκε μία πτώση στις επιδόσεις των μαθητών, τέσσερις μαθητές αντιμετώπισαν ορισμένους υπολογισμούς με διαφορετικό τρόπο. Οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν ακολούθησαν την κυρίαρχη τάση, αλλά πρότειναν πέντε διαφορετικές από τις παραπάνω στρατηγικές για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι στρατηγικές των μαθητών αυτών για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων προσαρμοσμένες στην Ερ.7 του ερωτηματολογίου.

Μετατροπή και ελιγμός Διαχωρισμός σε Δεκάδες-Μονάδες	Μετατροπή στις δεκάδες Διαχωρισμός σε Δεκάδες-Μονάδες	Χωρίς μετατροπή Διαχωρισμός σε Δεκάδες-Μονάδες	Νοερή αριθμογραμμή Συσσώρευση σε Μονάδες-Δεκάδες	Νοερή αριθμογραμμή Συσσώρευση σε Δεκάδες-Μονάδες
-(94-37)				
90-30=60	-(90-30)=-60	30-90=-60	-94+7=-87	-94+30=-64
4-7=-3	7-4=3	7-4=3	-87+30=-57	-64+7=-57
60-3=57	-60+3=-57	-60+3=-57		
-57				

Πίνακας 3: Οι πέντε νέες στρατηγικές για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων προσαρμοσμένες στην ερ. 7 του ερωτηματολογίου: 37-94=-57.

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3, οι τέσσερις μαθητές είτε εφάρμοσαν τη μετατροπή και στη συνέχεια έναν ελιγμό ώστε να αποφύγουν την αφαίρεση με κρατούμενο, είτε χρησιμοποίησαν τη μετατροπή με διαφορετικό τρόπο (π.χ. μετατροπή μόνο στις δεκάδες), είτε δεν τη χρησιμοποίησαν καθόλου. Επιπλέον, οι δύο από αυτούς, όχι μόνο δεν χρησιμοποίησαν τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης, αλλά χρησιμοποίησαν το μοντέλο της νοερής αριθμογραμμής για να προσεγγίσουν το πρόβλημα, όπως φαίνεται σε παράδειγμα παρακάτω.

Από τους παραπάνω τέσσερις μαθητές προέκυψαν πέντε νέες στρατηγικές για την πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων (βλ. Λεμονή & Χρήστου, υπό κρίση). Για παράδειγμα, στην ερ.7 του ερωτηματολογίου (37-94=-57), σύμφωνα με τη *Στρατηγική Διαχωρισμού με Δεκάδες-Μονάδες χωρίς Μετατροπή*, οι μαθητές προσθέτουν το -60 από την πρόσθεση των δεκάδων (30-90) με το +3 από την πρόσθεση των μονάδων (7-4), δίνοντας ως τελική απάντηση τον αριθμό -57. Στην ίδια ερώτηση, με βάση τη *Στρατηγική Συσσώρευσης με Μονάδες-Δεκάδες με Αριθμογραμμή*, οι μαθητές κρατούν σταθερό τον αρνητικό όρο της πρόσθεσης, δηλαδή το -94, και με τη βοήθεια του μοντέλου της νοερής αριθμογραμμής προσθέτουν τις μονάδες (+7) και τις δεκάδες (+30) του θετικού όρου, απαντώντας τελικά -57.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στόχος της παρούσας μελέτης ήταν η διερεύνηση των στρατηγικών προσέγγισης των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη νοερή πρόσθεση ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων. Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω δείχνουν πως η πλειοψηφία των μαθητών, όπως ήταν αναμενόμενο, μετέτρεψε το πρόβλημα που περιείχε θετικούς και αρνητικούς ακεραίους σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα που περιείχε φυσικούς αριθμούς, δηλαδή χρησιμοποίησε τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης και στη συνέχεια μία από τις στρατηγικές μετασχηματισμού πρόσθεσης και αφαίρεσης διψήφιων φυσικών. Τα αποτελέσματα έρχονται σε συμφωνία με τη μοναδική έρευνα που βρέθηκε στη βιβλιογραφία (βλ. Rezat 2011), στην οποία υποστηρίχθηκε πως η πιο κοινή στρατηγική προσέγγισης στην πρόσθεση μεταξύ ακεραίων είναι αυτή της μετατροπής.

Το καινοτόμο εύρημα αυτής της μελέτης είναι ότι εμφανίστηκαν και πέντε νέες στρατηγικές για την πρόσθεση μεταξύ ετερόσημων ακεραίων, οι οποίες προέκυψαν από τις απαντήσεις κάποιων μαθητών που δεν ακολούθησαν την κυρίαρχη τάση, δηλαδή δε χρησιμοποίησαν τη μετατροπή ως στρατηγική προσέγγισης. Τέσσερις συνολικά μαθητές, από τους είκοσι επτά, είτε χρησιμοποίησαν τη μετατροπή με διαφορετικό τρόπο, είτε δεν τη χρησιμοποίησαν καθόλου σε ορισμένες πράξεις, πραγματοποιώντας δημιουργικούς ελιγμούς και χρησιμοποιώντας νέες στρατηγικές οι οποίες δεν τους έχουν διδαχθεί επίσημα.

Οι στρατηγικές αυτές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι δεν έχουν εντοπιστεί ή καταγραφεί στην αντίστοιχη βιβλιογραφία (Rezat, 2011). Επομένως θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν νέες στρατηγικές για τη νοερή πρόσθεση μεταξύ ετερόσημων ακεραίων. Επιπλέον, οι νέες αυτές στρατηγικές αναδεικνύουν ένα υψηλό επίπεδο κατανόησης και δημιουργικότητας για τους τέσσερις μαθητές.

Οι παραπάνω στρατηγικές θυμίζουν δημιουργικές στρατηγικές που έχουν αναφερθεί στο παρελθόν σε αντίστοιχες έρευνες στο σύνολο των φυσικών

(Thompson, 2000). Η πρώτη έρευνα στην οποία αναφέρθηκε μία τέτοια στρατηγική, είναι αυτή των Cochran, Barson, & Davis (1970), όπου ένας μαθητής της αντίστοιχης Γ' Δημοτικού, ο Kye, πρόσθεσε 40 και «αρνητικό 4» κατά τη λύση της αφαίρεσης 64-28, με τους ερευνητές να περιγράφουν τη μέθοδό του ως «έναν από τους ωραιότερους αλγορίθμους για την αφαίρεση που έχουν δει ποτέ» (σελ. 212).

Δεδομένου ότι στην Ελλάδα και διεθνώς δεν εντοπίστηκαν έρευνες για τις νοερές προσθέσεις ακεραίων, αντίστοιχες μελλοντικές έρευνες σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών θα μπορούσαν να δώσουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για τις στρατηγικές των μαθητών και να συντελέσουν στη δημιουργία νέων εκπαιδευτικών προγραμμάτων.

Είναι σημαντικό, τέλος, οι εκπαιδευτικοί να ενημερωθούν για το ρεπερτόριο στρατηγικών των μαθητών και να είναι σε θέση να τις αναγνωρίσουν και να τις αξιοποιήσουν, αυτές αλλά και νέες στρατηγικές που μπορεί να προκύψουν στην τάξη. Άλλωστε, όπως φάνηκε και στην παρούσα μελέτη, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν και μόνοι τους αποτελεσματικές και επιδέξιες στρατηγικές σχετικά αυθόρμητα (Heirdsfield, 2000).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. *Issues in teaching numeracy in primary schools*, 184-194.

Badarudin, B. R. H., & Khalid, M. (2008). Using the jar model to improve students' understanding of operations on integers. *Proceedings of icme-11–topic study group 10 research and development in the teaching and learning of number systems and arithmetic*, p. 85.

Βρυώνης, Κ., Δουκάκης, Σ., Καρακώστα, Β., Μπαραλής, Γ., & Στραύρου, Ι. (2016): Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών Και Εκδόσεων «Διόφαντος»

Cochran, B. S., Barson, A., & Davis, R. B. (1970). Child-created mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *17*(3), 211-215.

Ekol, G. (2010). Operations with negative integers in a dynamic geometry environment. *Proceedings of PME 34, 2,* 337–344.

Heirdsfield, Ann M. (2000). *Mental computation: Is it more than mental architecture?* In: Australian Association for Research in Education, December, 2000, Sydney.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'***.** Εκδόσεις Ζυγός. Θεσσαλονίκη.

Λεμονή, Ι., & Χρήστου, ΚΠ. (υπό κρίση). Στρατηγικές νοερού υπολογισμού σε πρόσθεση και αφαίρεση με ακεραίους. Ειδικό τεύχος «Νέοι Ερευνητές» της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών, (ΕΝΕΔΙΜ).

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 547-557.

Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. *Proceedings of CERME-7* (pp. 396-405). Rseszow, Poland: CERME.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in school*, *29*(1), 24-26.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM, 41*(5), 541-555.

Ural, A. (2016). 7th Grade Students' Understandings of Negative Integer. *Journal of Studies in Education*, *6*(2), 170-179.

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2012). Happy and sad thoughts: An exploration of children's integer reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 356-365.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (DGE) ΩΣ ΧΩΡΟΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΛΟΓΩΝ

Παπαγιαννακοπούλου Βασιλική, Χατζηκυριάκου Κώστας

Γενικό Λύκειο Αγριάς, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

vikipapagiannakopoulou@gmail.com, kxatzkyr@pre.uth.gr

Στην εργασία αυτή περιγράφουμε δύο επεισόδια ενός διδακτικού πειράματος. Με εργαλείο την κίνηση των σημείων, δυνατότητα που μας προσφέρουν τα dge, δημιουργήσαμε ένα φαινομενολογικό σύμπτωμα με τη βοήθεια του οποίου: α. μπορεί κανείς να διακρίνει τα σύμμετρα από τα ασύμμετρα τμήματα και να συνδέσει τα πρώτα με τους ρητούς και τα δεύτερα με τους άρρητους αριθμούς και β. μπορεί να μελετήσει το λεγόμενο στην Ελλάδα θεώρημα του Θαλή μέσω του ορισμού του Ευδόξου για τα ανάλογα τμήματα. Σκοπός του διδακτικού πειράματος ήταν να διερευνηθεί κατά πόσον η διδακτική πρότασή μας μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση του βασικού αυτού ορισμού που συνδέεται με τον ορισμό των αρρήτων ως τομών Dedekind.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τα τελευταία χρόνια, η ευκλείδεια γεωμετρία, προσπαθεί να βρει τη θέση της στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα (Herbst & González, 2006; Protasov & Sharygin, 2004; Herrera & Douglas, 2001; Thom, 1971). Με την έκλειψη του κινήματος των Νέων Μαθηματικών που την είχε υποβαθμίσει και την εμφάνιση των dge πριν 30 χρόνια αναζωπυρώθηκε το ενδιαφέρον γι' αυτήν και γεννήθηκαν μεγάλες προσδοκίες ότι αυτά τα περιβάλλοντα θα βοηθήσουν τους μαθητές και τις μαθήτριες να τη μάθουν και να την καταλάβουν (Nardi & Miller, 1991; Perkins, 1993; Healy & Hoyles, 2001). Οι προσδοκίες μετριάστηκαν καθώς πλήθος ερευνητών διαπίστωσαν ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες σε αυτά τα περιβάλλοντα, πέφτουν σε ένα είδος «αφελούς εμπειρισμού» και βασίζονται τυφλά στις μετρήσεις (Chazan, 1993; Balacheff, 1988; Laborde, 2000; Robutti & Olivero, 2007). Ανάμεσα στον εποπτικό, πειραματικό χαρακτήρα των dge και τον αφαιρετικό μαθηματικό στοχασμό υπάρχει ένα χάσμα που απαιτεί γεφύρωση (Leung, Chan, & Lopez, 2006). Το ερώτημα τι είδους δραστηριότητες στο ψηφιακό περιβάλλον θα οδηγήσουν ευκολότερα στην καλύτερη δυνατή γεφύρωση είναι κρίσιμο, αν δεν επιλέξουμε να αγνοήσουμε το περιβάλλον αυτό. Στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι έρευνες που έγιναν τα τελευταία τριάντα χρόνια σχετικά με dge και τη γεωμετρία, αφορούν τη μελέτη των τριγώνων και τετραπλεύρων. Για το μέρος όμως της ευκλείδειας γεωμετρίας που αφορά τους λόγους και τη μέτρηση υπάρχει μεγάλο έλλειμμα βιβλιογραφίας (Dooley, 2006). Ο ρητός λόγος και οι αναλογίες έχουν μελετηθεί διεξοδικά από αριθμητικής πλευράς (Tourniaire & Pulos, 1985), όχι όμως και από γεωμετρικής. Η κατανόηση του μη σύμμετρου λόγου οδηγεί στη γεωμετρική κατανόηση του άρρητου αριθμού και επομένως στην κατανόηση των πραγματικών, στην οποία στηρίζεται η μαθηματική ανάλυση και οι εφαρμογές της (Lesh, Post, & Nothern, 1988; Stakhov, 2009). Η απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή παρέχει έναν ιδεώδη χώρο διδακτικών δραστηριοτήτων για τη μελέτη των σύμμετρων και μη σύμμετρων λόγων.

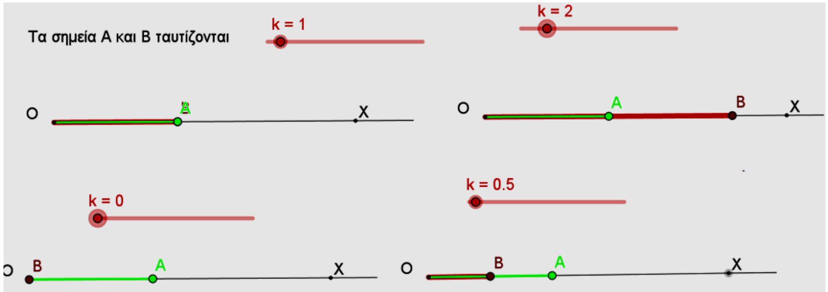
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός μας ήταν η παραγωγή και στη συνέχεια η συλλογή πρόσθετων δεδομένων στο πλαίσιο ευρύτερης έρευνας που διεξάγουμε σχετικά με την κατανόηση των εννοιών του ρητού και του άρρητου λόγου ευθυγράμμων τμημάτων από μαθητές και φοιτητές. Μας ενδιέφερε ιδιαίτερα να διερευνήσουμε εάν με εργαλεία την κίνηση των σημείων στο περιβάλλον του Geogebra και το θεώρημα του Θαλή, μπορεί να γίνει διαισθητικά αντιληπτός και εντέλει να κατανοηθεί ο ορισμός του Ευδόξου για την ισότητα των ασύμμετρων λόγων. Ως αναφορά μας είχαμε το ερμηνευτικό/εποικοδομητικό παράδειγμα (Mackenzie & Knipe, 2006), τοποθετώντας την έρευνά μας στο πλαίσιο του διδακτικού πειράματος (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Steffe & Thompson, 2000; Χρονάκη, 2010). Το πείραμα αποτελείται από δύο διδακτικά επεισόδια με δύο φοιτήτριες (Γ1, Γ2) και έναν φοιτητή (Α) του παιδαγωγικού τμήματος Θεσσαλίας. Η μέθοδος δειγματοληψίας ήταν αυτή της «τυπικής περίπτωσης» (Ίσαρη & Πουρκός, 2015) καθώς το γνωστικό τους υπόβαθρο στα μαθηματικά δεν απείχε από αυτό ενός μέσου μαθητή λυκείου. Οι ενέργειες στον υπολογιστή καταγράφονταν και οι συνομιλίες ηχογραφούνταν. Οι φοιτητές έγραφαν τις απαντήσεις στα ερωτήματα που θέταμε σε λευκό χαρτί. Η ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων συνομιλιών και των γραπτών κειμένων έγινε διατμηματικά και συγκριτικά (cross case analysis) (Patton, 2015).

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΕΠΕΙΣΟΔΙΑ

Πρώτο Διδακτικό επεισόδιο

Το πρώτο διδακτικό επεισόδιο περιελάμβανε δραστηριότητες σε τρία προκατασκευασμένα αρχεία ggb (αρχεία 2.1, 2.2., 2.3), στα οποία η σχεδιασμένη κίνηση ενός σημείου πάνω σε μία ευθεία οδήγησε τη συζήτηση γύρω από την πρακτική της μέτρησης, τα προβλήματα που εμφανίστηκαν κατά την εκτέλεσή της καθώς και την υπέρβασή τους με τη δημιουργία νέων εννοιών και εργαλείων.



Στους φοιτητές δόθηκε το πρώτο αρχείο, στην επιφάνεια εργασίας του οποίου υπήρχαν μία ημιευθεία Οχ, ένα σταθερό σημείο Α, ένα κινητό σημείο Β πάνω σε αυτήν, κι ένας δρομέας k. Οι δραστηριότητες αποσκοπούσαν στην εξοικείωση των φοιτητών με τα παραπάνω αντικείμενα και τη λειτουργία τους. Το Β δεν κινούνταν πάνω στην ημιευθεία με τον συνήθη τρόπο, το σύρσιμο (dragging), αλλά με τη βοήθεια του δρομέα k. Η θέση του σημείου Β καθορίζονταν από τον δρομέα έτσι ώστε για κάθε τιμή του k το μήκος του ΟΒ να είναι ΟΒ = k·ΟΑ, κάτι που οι φοιτητές δεν γνώριζαν, αλλά έπρεπε να το ανακαλύψουν. Ο δρομέας είχε οριστεί να παίρνει τιμές από 0 έως 12, με βήμα 0,1. Στην εικόνα φαίνονται οι θέσεις των Α, Β για τις τιμές του k = 2, k = 1, k = 0 και k = 0,5 (εικ.1).

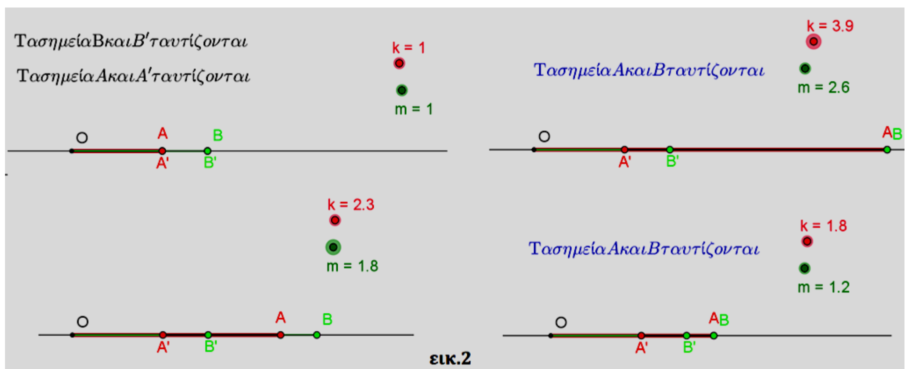
Ρωτήσαμε τους φοιτητές αρχικά ποια αντικείμενα βλέπουν πάνω στην οθόνη, καθώς όπως είχαμε διαπιστώσει σε προηγούμενα διδακτικά πειράματα «δεν βλέπουμε» όλοι τα ίδια πράγματα. Η Γ1 μας είπε ότι βλέπει *ένα ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ, ένα άλλο ΑΒ κι ένα Βχ* και η Γ2 *μία ημιευθεία Οχ, ένα ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ, ένα ΑΒ κι ένα ΟΒ.* Ο Α είδε τον δρομέα ως ένα επιπλέον ευθύγραμμο τμήμα που εμφανίζεται στην οθόνη, κάτι που είχαμε ξανασυναντήσει ως απάντηση σε προηγούμενες εφαρμογές. Εξηγήσαμε ότι ο δρομέας είναι μία μεταβλητή που παίρνει ρητές αριθμητικές τιμές και το λογισμικό μας δίνει τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε τις τιμές του με ένα συγκεκριμένο «βήμα» που εμείς ορίζουμε, ακέραιο ή δεκαδικό (μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία). Αφού ζητήσαμε από τους φοιτητές να εστιάσουν μόνο στα τμήματα με αρχή το Ο, δηλαδή το σταθερό ΟΑ και το μεταβλητό ΟΒ, τους κάναμε την ερώτηση: *«Ποιο νομίζετε ότι είναι το μήκος του ΟΒ;»* Λόγω προηγούμενων πειραμάτων, περιμέναμε την απάντηση που πράγματι έδωσε και η Γ1, ότι κάθε φορά το μήκος του ΟΒ είναι η τιμή του k, και είχαμε ετοιμάσει την επόμενη ερώτησή μας. Η Ε1 σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο χαρτί και ζήτησε από τη Γ1 να βρει το μήκος του. Η Γ1, αφού σκέφτηκε λίγο, είπε ότι δεν μπορεί να το βρει. Η ερώτησή μας «γιατί δεν μπορείς;» προκάλεσε τον παρακάτω διάλογο:

-Γ1: Γιατί δεν έχω χάρακα και δεν μπορώ να το χωρίσω σε ίσα μέρη..

-Ε1: Άρα τι δεν έχεις ακριβώς; Ο χάρακας γιατί σου χρειάζεται;

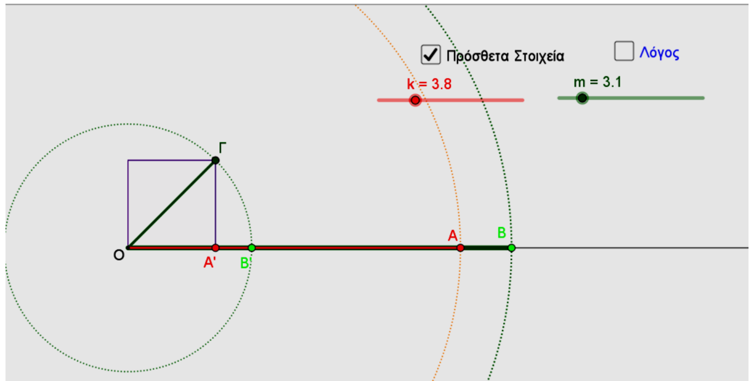
-Γ1: Μονάδα μέτρησης.

Βρισκόμασταν ακριβώς εκεί που θέλαμε για να ξεκινήσει η κουβέντα για τον ορισμό του μήκους/μέτρου. Σκοπός μας ήταν να αποσυνδεθεί από τις συνήθεις μονάδες εκατοστά, χιλιοστά κ.λπ. και να συνδεθεί με τον λόγο ως προς κάποιο άλλο τμήμα που ορίζεται ως μονάδα μέτρησης. Τους δώσαμε τότε τους τέσσερις πρώτους ορισμούς του βιβλίου V των *Στοιχείων* οι οποίοι απ' ότι φάνηκε στους διαλόγους που ακολούθησαν βοήθησε τις Γ1, Γ2 να καταλήξουν στο γενικό συμπέρασμα ότι το σταθερό τμήμα ΟΑ ήταν η μονάδα μέτρησης του ΟΒ και ο δρομέας k έδινε το λόγο ΟΒ:ΟΑ. Ο Α δεν μπόρεσε να κάνει τη γενίκευση, παρά έγραψε μόνο την τιμή που έβλεπε εκείνη τη στιγμή. Στην τιμή k = 1 οι φοιτητές παρατήρησαν το μήνυμα που εμφανιζόταν στην οθόνη «Τα σημεία Α και Β ταυτίζονται» και τους είπαμε ότι αυτό το μήνυμα είναι προγραμματισμένο να εμφανίζεται εάν και μόνον εάν (ανν) τα σημεία ταυτίζονται.



εικ.2

Οι επόμενες δραστηριότητες με τα αρχεία 2.2 και 2.3 είχαν ως στόχο, με τη βοήθεια πάντα της κίνησης, να κάνουν ορατή την έννοια των σύμμετρων και ασύμμετρων ευθύγραμμων τμημάτων. Στο αρχείο 2.2 πάνω στην ημιευθεία υπήρχαν τώρα δύο σταθερά τμήματα ΟΑ' και ΟΒ' και δύο μεταβλητά, τα ΟΑ και ΟΒ, που μεταβάλλονταν σύμφωνα με τους δρομείς του αντίστοιχου χρώματος k και m (εικ.2). Τα μήκη των ΟΑ, ΟΒ ήταν ΟΑ = k·ΟΑ' και ΟΒ = m·ΟΒ', κάτι που οι δύο φοιτήτριες βρήκαν με ευκολία. Η ιδέα πίσω από το αρχείο 2.2 ήταν ότι όταν δύο τμήματα έχουν ρητό λόγο π.χ. α:β = κ:μ, με κ, μ φυσικούς, τότε τα κ πολλαπλάσια του α θα είναι ίσα με τα μ πολλαπλάσια του β. Αυτό σημαίνει ότι αν τα τμήματα έχουν κοινό το ένα άκρο, τότε για όλα τα ζεύγη (κ,μ) της κλάσης ισοδυναμίας του ρητού, το δεύτερο άκρο τους θα συμπίπτει, αφού τα τμήματα θα έχουν το ίδιο μήκος. Ο Α δυσκολεύτηκε και πάλι να γράψει τη γενική αλγεβρική σχέση και απαντούσε κατά περίπτωση. Στη συνέχεια τους ζητήσαμε να καταγράψουν θέσεις των δρομέων για τις οποίες τα σημεία Α και Β ταυτίζονταν και να βγάλουν συμπεράσματα για τον λόγο των τμημάτων και τις μονάδες μέτρησης. Η Γ1 και η Γ2 δεν είχαν κανένα πρόβλημα σε αυτήν τη δραστηριότητα. Εντόπισαν τρία με πέντε ζεύγη τιμών των δρομέων (k,m) για τις οποίες τα σημεία Α και Β ταυτίζονταν και κατάλαβαν ότι k/m = 3/2. Εκφράζοντας αλγεβρικά αυτό που έβλεπαν, μπόρεσαν με ευκολία να βρουν τον λόγο των σταθερών τμημάτων ΟΑ', ΟΒ' και άρα να κάνουν τη μετάβαση από τη μία μονάδα μέτρησης (ΟΑ') στην άλλη (ΟΒ'). Μπόρεσαν επομένως να «μετρήσουν» το ΟΒ με μονάδα μέτρησης το ΟΑ' σε κάθε περίπτωση. Ο Α παρατήρησε τον σταθερό λόγο των k, m, όταν ΟΑ = ΟΒ αλλά δεν μπόρεσε να εκφράσει αλγεβρικά αυτό που έβλεπε.



εικ.3

Σκοπός της επόμενης δραστηριότητας του αρχείου 2.2 ήταν η ανάδειξη της έννοιας των ασύμμετρων ευθύγραμμων τμημάτων. Το αρχείο ήταν πανομοιότυπο με το προηγούμενο μόνον που ο λόγος των ΟΒ, ΟΑ ήταν άρρητος κάτι που οι φοιτητές δεν γνώριζαν. Η πανομοιότυπη εικόνα εξυπηρετούσε ακριβώς αυτόν τον σκοπό. Να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση καθώς οι φοιτητές θα ανέμεναν να μπορούν να βρουν θέσεις των δρομέων που τα σημεία Α και Β ταυτίζονται. Όμως αυτό δεν θα μπορούσε να συμβεί και η νέα κατάσταση θα τους προβλημάτιζε και θα τους προετοίμαζε για την αποκάλυψη της αιτίας αυτής της «απροσδόκητης συμπεριφοράς». Πράγματι έτσι έγιναν τα πράγματα και όταν οι φοιτητές πείστηκαν ότι με κανέναν τρόπο δεν μπορούν να κάνουν τα δύο σημεία να ταυτιστούν, τους είπαμε να επιλέξουν το κουτί ελέγχου «πρόσθετα στοιχεία» για να αποκαλυφθεί όλη η εικόνα (εικ.3). Τους ζητήσαμε να βρουν όπως και πριν τον λόγο ΟΒ':ΟΑ' καθώς και τον ΟΒ:ΟΑ. Οι φοιτήτριες εφάρμοσαν το πυθαγόρειο θεώρημα και χειριζόμενες καλά την άλγεβρα, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο λόγος ΟΒ:ΟΑ ήταν σε κάθε περίπτωση άρρητος. Πώς ακριβώς όμως εννοούσαν την έννοια του αρρήτου; Αντιλαμβάνονταν και πώς τη σχέση ανάμεσα στην έννοια του άρρητου αριθμού και εκείνης των μη σύμμετρων τμημάτων;

- -Ε1: *Αχα! - Και; Τι σημαίνει αυτό; Το ότι είναι άρρητος;*
- -Γ2: *Εεεεεμ... τι σημαίνει το ότι είναι άρρητος... Το καταλαβαίνω αλλά δεν μπορώ να το εξηγήσω. Πρέπει λίγο να το σκεφτώ πώς να το διατυπώσω.*
- -Γ2: *Για να ταυτίζονται τα σημεία...*
- -Α: (παρεμβαίνει) ... *πρέπει να υπάρχει ένα τέλος. Ταυτίζονται μόνο αν οι αριθμοί έχουν ένα τέλος... πώς να το εξηγήσω; Εεεε... λες ας πούμε δύο. Το δύο να ταυτιστεί στο δύο...ενώ αυτό εάν συνεχίζεται επ' άπειρον δεν ταυτίζονται ποτέ... οι αριθμοί. Πώς να το εξηγήσω; Δεν ξέρω...*
- -Γ2: *Μπορώ να το καταλάβω, αλλά δεν μπορώ να το εξηγήσω έτσι όπως το σκέφτομαι ακριβώς. Αλλά εμένα με καλύπτει αυτό που σκέφτομαι νομίζω.*
- -Ε1: *Σε καλύπτει ότι δεν ταυτίζονται...*
- *-Γ2: Ναι.*

-Ε1: *Ωραία. Εεεεμμμ... είπες πριν ότι ο λόγος αυτός συνεχίζεται. Αν ο λόγος ήταν το* 2,33333....

-Γ2: *Είναι κλάσμα.*

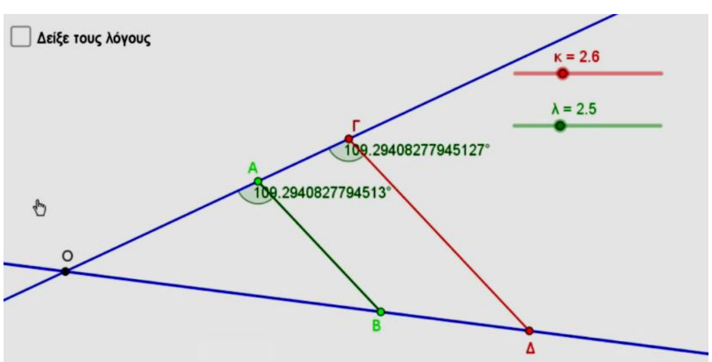
-Ε1: *Εσύ τι λες;* (στρέφομαι στον Φ3) *Κι αυτό δεν τελειώνει. Άρα είναι σαν αυτό; (εννοώντας τον άρρητο λόγο)*

-Α: *Ναι. (!!!)*

Η Γ2 προσέχει κάποια στιγμή το κουτάκι «λόγος». Της λέμε να το επιλέξει και στην οθόνη εμφανίζεται ένας αριθμός που η Γ2 αναγνωρίζει ως τον $\sqrt{2}$. Αμέσως μετά, η Γ2 συμφωνεί με την επισήμανση του Ε2 ότι ο αριθμός που εμφανίστηκε δεν είναι πραγματικά η $\sqrt{2}$, αλλά μία ρητή του προσέγγιση, και αναρωτιέται: «*Και καλά γιατί δεν βγάζει τη* $\sqrt{2}$ *να τελειώνουμε;*» Η απάντηση αυτή αποκαλύπτει ότι δεν συνειδητοποιεί ότι πίσω από τις όποιες μετρήσεις και αποτελέσματα του υπολογιστή, υπάρχουν αριθμητικές μέθοδοι και αλγόριθμοι με πεπερασμένο όριο ακριβείας. Η ρητή προσέγγιση της $\sqrt{2}$ έχει ένα όριο ακρίβειας έστω π.χ. 15 δεκαδικά ψηφία, άρα λογίζεται ως ο ρητός 1,414213562373095. Το μήκος του ΟΒ είναι πάντα ένα ρητό πολλαπλάσιό του με την ίδια ακρίβεια. Το ΟΑ από την άλλη είναι πάντα ένα ρητό πολλαπλάσιο της μονάδας (πλευρά τετραγώνου) με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου. Είναι φανερό ότι τα μήκη των ΟΑ, ΟΒ για καμία τιμή των ρητών δρομέων k και m δεν μπορούν να γίνουν ίσα, άρα τα σημεία Α και Β δεν θα ταυτιστούν ποτέ. Το φαινομενολογικό σύμπτωμα λοιπόν που προκύπτει, προσομοιάζει τη συμπεριφορά που θα είχαν τα σημεία αν βρίσκονταν στην ευθεία της μαθηματικής πραγματικότητας. Εκεί, το μήκος του ΟΒ θα ήταν ένας δεκαδικός με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία (δηλ. άρρητος αριθμός), ενώ το ΟΑ θα ήταν ένας ρητός, οπότε πάλι τα Α, Β δεν θα μπορούσαν ποτέ να ταυτιστούν και η συμπεριφορά τους θα ήταν ίδια με την παρατηρούμενη στην προσομοίωσή μας.

Δεύτερο Διδακτικό επεισόδιο

Στο δεύτερο διδακτικό επεισόδιο χρησιμοποιήσαμε δύο προκατασκευασμένα αρχεία ggb, στα οποία, πάλι με τη βοήθεια της κίνησης, θέλαμε να αναδειχθεί η αναλογία των ευθυγράμμων τμημάτων στο θεώρημα του Θαλή, όχι μόνον όταν τα τμήματα είναι σύμμετρα αλλά και όταν είναι ασύμμετρα. Δύο ζεύγη γνώριμων πια μεταβλητών τμημάτων τα ΟΑ, ΟΓ και ΟΒ, ΟΔ βρίσκονταν σε δύο ημιευθείες με κοινή αρχή. Στο ένα είχαμε



εικ.4

φροντίσει τα τμήματα να έχουν ρητό λόγο -τα σημεία μπορούσαν να ταυτιστούν- και στο άλλο να έχουν άρρητο -τα σημεία δεν μπορούσαν να ταυτιστούν- συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν εύκολα και οι φοιτητές. Τους ρωτήσαμε και στις δύο περιπτώσεις αν μπορούν να βγάλουν συμπέρασμα για το αν οι λόγοι είναι ίσοι. Στην πρώτη περίπτωση, απάντησαν πως οι λόγοι είναι ίσοι καθώς τα σημεία Α, Γ και Β, Δ ταυτίζονταν ταυτόχρονα για την τιμή του δρομέα k = 1. Στην άλλη περίπτωση τα σημεία Α, Γ και Β, Δ δεν ταυτίζονταν ποτέ. Η Γ1 έδειξε να προβληματίζεται ιδιαίτερα και μονολογούσε: «*μπορεί να είναι ίσοι… αλλά αφού δεν ταυτίζονται τα σημεία δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι*». Μετά από λίγα λεπτά αποφάσισε ότι οι λόγοι δεν είναι ίσοι γιατί τότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΟΓΔ θα ήταν όμοια και εάν ήταν όμοια θα ήταν ΑΒ//ΓΔ, όμως τα τμήματα αυτά δεν ήταν παράλληλα! Όταν η Ε1 τη ρώτησε πώς ήταν σίγουρη γι' αυτό, η Γ1 απάντησε: «γιατί δεν ταυτίζονται!». Η Ε1 της θύμισε ότι αυτό σήμαινε απλώς ότι οι λόγοι ήταν άρρητοι.

Ε1: Και το ότι είναι άρρητοι… σημαίνει ότι δύο λόγοι που είναι άρρητοι δεν μπορεί ποτέ να είναι ίσοι;

Γ1: Όχι. Μπορεί να είναι ίσοι.

Ε1: Α!... Ξέρεις… αυτό ήταν και το… μεγάλο πρόβλημα που αντιμετώπισαν και τότε. Αυτό ήταν το ερώτημα. Άμα δύο λόγοι είναι άρρητοι, πώς θα ξέρω αν είναι ίσοι; Αφού δεν θα ξέρω ποτέ ποιος ακριβώς είναι ο καθένας!

Η Γ1 μονολογεί και πάλι: *«Όμως υπάρχει κάποιος λόγος αφού τα ΟΓ, ΟΑ έχουν κάποια σχέση. Άρα έχουν και κάποιο λόγο. Υπάρχει. Και άμα υπάρχει μπορούμε να τον βρούμε».* Η Γ1 εκείνη τη στιγμή επαναδιατύπωνε χωρίς να το συνειδητοποιεί ή να το θυμάται, τον ορισμό ΙΙΙ. Συνεχίζοντας η Γ1 προσπάθησε να ελέγξει εάν τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλα και με το εργαλείο μέτρησης γωνιών, «μέτρησε» τις εντός και επί τα αυτά γωνίες. Και τότε συνέβη το αναπάντεχο: οι γωνίες παρουσίαζαν απόκλιση στα δύο τελευταία δεκαδικά ψηφία, κάτι που την έκανε να αμφιβάλλει και πάλι για την παραλληλία (εικ.4). Τους θυμίσαμε τα ευρήματα της προηγούμενης μέρας, υπενθυμίζοντας τα προβλήματα αναπαράστασης του άρρητου στο ψηφιακό περιβάλλον μας. Αφού λοιπόν δεν μπορούσαν να βασιστούν στις μετρήσεις, τους παροτρύναμε να παρατηρήσουν την κίνηση των σημείων. Να δουν μήπως υπάρχει κάτι άλλο που τους πείθει ή τους δίνει την ασφαλή εντύπωση ότι αυτοί οι λόγοι είναι ίσοι. Στο πρώτο αρχείο είχαμε και ένα ακόμη ζευγάρι λόγων οι οποίοι ολοφάνερα δεν ήταν ίσοι και τους είπαμε να εξετάσουν την κίνηση εκείνων των σημείων σε αντιπαραβολή με αυτών που υποψιάζονταν ότι είναι ίσοι. Η Γ2 φάνηκε να αρχίζει σκέφτεται προς τη σωστή κατεύθυνση.

Ε1: *Λες λοιπόν ότι τα μήκη μεταβάλλονται με το ίδιο βήμα. Τι εννοείς με αυτό;*

Γ2: *Εννοώ αυτό που βλέπω εδώ βασικά. Βλέπω ότι μεταβάλλονται με το ίδιο βήμα, αλλά τα μήκη δεν είναι ίσα. Απλά μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό. Δεν ξέρω αν είναι σωστές λέξεις αυτές που χρησιμοποιώ.*

Το ερευνητικό ερώτημα μας ήταν εάν το λογισμικό θα βοηθούσε να εξηγήσουμε τη λύση που έδωσε ο Εύδοξος (πέμπτος ορισμός στο βιβλίο V των *Στοιχείων*) για την αναλογία στην περίπτωση των ασύμμετρων τμημάτων. Η κίνηση των σημείων δείχνει αυτό που συνέλαβε νοερά, ότι δηλαδή εάν το Α προσπεράσει το Γ τότε και το Β θα προσπεράσει ταυτόχρονα το Δ. Σε αυτό το σημείο τους δώσαμε να διαβάσουν τον ορισμό V: *Αν α, β, γ, δ τέσσερα μεγέθη τότε α:β = γ :δ ανν για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς μ,ν, ισχύει μία από τις τρεις σχέσεις:* μ·α > ν·β ⇔ μ·γ > ν·δ ή μ·α = ν·β ⇔ μ·γ = ν·δ ή μ·α < ν·β ⇔ μ·γ < ν·δ

Γ2: *Αυτό μου φαίνεται κατανοητό. Βασικά μου φαίνεται σαν το προηγούμενο. Καταλαβαίνω δηλαδή γιατί είναι να βγει αυτό εδώ. Να προκύψει αυτό εδώ από το προηγούμενο που διάβασα. (εννοεί τον ορισμό V)*

Ε1: Δηλαδή τι καταλαβαίνεις από αυτό; Πώς βγάζει αυτός ότι είναι ίσοι; Δηλαδή στην περίπτωσή μας, που οι λόγοι είναι άρρητοι μπορείς να μου αιτιολογήσεις γιατί θα είναι ίσοι με βάση αυτό που διαβάζεις;

Γ2: Εμμ…..

Γ1: Λέει εδώ ότι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι αν και μόνο αν για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς μ, ν… εμείς όμως δεν έχουμε φυσικούς, έχουμε άρρητους…ε;

Ε2: Όχι, Βιάζεσαι, βιάζεσαι… Τι κάνουν αυτά τα μ και τα ν;[…]

*Γ2: Θέλω κι εγώ να πω κάτι. Το μ και το ν παίζουν το ρόλο του k και του λ;(*εννοεί τους δρομείς*)[…]*

Γ2: Αυτό δεν δείχνει ότι με τον ίδιο τρόπο που μεταβάλλεται το ΟΓ με το ΟΑ, μεταβάλλεται και το ΟΔ με το Ο;

Ε2: Με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή όταν λες με τον ίδιο τρ…

Ε1: Άκου, άκου (διακόπτει)… το βρήκε!

Γ1: Όποτε το k πάρει τέτοια τιμή που το ΟΓ είναι μεγαλύτερο του ΟΑ, τότε και το ΟΔ θα είναι μεγαλύτερο του ΟΒ. Ισχύει η ισοδυναμία, άρα ισχύει η ισότητα.

Η Γ1 είχε κατορθώσει να «δει»» τον ορισμό του Ευδόξου.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η κίνηση μας βοήθησε να δημιουργήσουμε ένα φαινομενολογικό σύμπτωμα, μέσω του οποίου από τη συμπεριφορά δύο σημείων που κινούνται πάνω σε μία ευθεία μπορεί να διακριθεί η έννοια των σύμμετρων από την έννοια των μη σύμμετρων τμημάτων. Η έκπληξη που προκάλεσε η αδυναμία ταύτισης δύο σημείων προκάλεσε τον προβληματισμό και τη συζήτηση γύρω από τις έννοιες ασύμμετρος λόγος και άρρητος αριθμός και βοήθησε στη βαθύτερη κατανόηση τους.

Η προσέγγιση που επιχειρήσαμε στο θεώρημα του Θαλή, έδωσε ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Διαπιστώθηκε ξανά η εδώ και χρόνια καταγεγραμμένη, στη διεθνή βιβλιογραφία, προβληματική περιοχή των μετρήσεων σε αυτά τα περιβάλλοντα (Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000), και επιπλέον αναδείχθηκε μια βασική αιτία αυτής της αβεβαιότητας που είναι η ψηφιακή αναπαράσταση των αρρήτων. Φάνηκε ότι το ψηφιακό περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, αν και διακριτό, μπορεί να επιτρέψει την ταυτόχρονη διαχείριση τόσο του σύμμετρου όσο και του μη σύμμετρου λόγου στο θεώρημα του Θαλή, αλλά και να οδηγήσει μέσω του πειραματισμού και της εμπειρίας στην έννοια του άρρητου αριθμού.

Βιβλιογραφία

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). Londres: Hodder& Stoughton.

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' justification for their views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics, Vol 24, N.4, Aspects of Proof*, σσ. 359-387.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003, January/February). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, σσ. 9-13.

Dooley, K. (2006). *An investigation of Proportional Thinking among High School Students (Phd Dissertation).* Ανάκτηση από Clemson University: http://tigerprints.clemson.edu/all_dissertations

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry envirnments. *Educational Studies in Mathematics 44*, pp. 127-150.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for Geometrical Problem Solving:Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,Vol. 6*, pp. 235-265.

Herbst, P. G., & González, G. (2006). Competing Arguments for the Geometry Course:Why Were American High School Students Supposed to Study Geometry in the Twentieth Century? *The International Journal for the History of Mathematics Education*, pp. 7-33.

Herrera, T., & Douglas, O. (2001, Volume 40, No 2). "The New Math"?: Two Reform Movements in Mathematics Education. *Theory Into Practice*, σσ. 84-92.

Laborde. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics 44*, pp. 151-161.

Lesh, R., Post, T., & Nothern, M. B. (1988). Proportional Reasoning. Στο M. B. James Hiebert, *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (σσ. 93-108).

Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Leung, A., Chan, Y., & Lopez, F. (2006). Instrumental Genesis in Dynamic Geometry Environments. *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference "Technology Revisited"* (σσ. 346-353). Hanoi (University of Technology) : Celia Hoyles, Jean-Baptiste Lagrange, Le Hung Son and Nathalie Sinclair .

Mackenzie, V., & Knipe, S. (2006). Research delemmas: Paradigms, methods and methodology. *Issues in Educational Research*.

Nardi, B., & Miller, J. (1991). 'Twinkling lights and nested loops: Distributed problem solving and spreadsheet development'. *International Journal of man-mahcine studiew,34*, pp. 161-184.

Patton, M. Q. (2015). Qualitative Analysis and Interpretation. Στο *Qualitative Research and Evaluation Methods (fourth edition)* (σσ. 759-941). Los Angeles: Sage Publications.

Perkins, D. N. (1993). 'Person plus: A distributed view of thinking and learning'. In G. Salomon, *Distributed cognitions: Pshycological and educational considerations* (pp. 88-110). Cambridge: Cambridge University Press.

Protasov, V., & Sharygin, I. (2004). Does the school of 21st century need geometry? *The 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 167-176). Copenhagen, Denmark: Institute of New Technology, Moscow, Russia.

Robutti, O., & Olivero, F. (2007, June 7). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Education*, σσ. 135-156.

Stakhov, A. (2009, September). *The Mathematics of Harmony - From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science.* World Scientific.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. Στο L. &. Kelly, *Research design in mathematics and science education* (σσ. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thom, R. (1971, November-December). "Modern Mathematics": An Educational and Philosophic error. *American Scientist, Vol 59, No.6*, σσ. 695-699.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics 16* , σσ. 181-204.

Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). Η δειγματοληψία στην ποιοτική έρευνα. Στο Φ. Ίσαρη, & Μ. Πουρκός, *Ποιοτική Μεθοδλογία Έρευνας* (σσ. 80-85). Αθήνα: Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Χρονάκη, Ά. (2010). Το διδακτικό πείραμα: η ποιοτική μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας στο πλαίσιο της διδακτκής πράξης. Στο Μ. Πουρκός, & Μ. Δαφέρμος, *Ποιοτική Έρευνα στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση* (σσ. 605-635). ΤΟΠΟΣ.

ΝΟΡΜΕΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΥΞΗΜΕΝΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ

Ευσταθία Αποστολοπούλου[1], Ανδρέας Κουλούρης[2], Αλεξάνδρα Πετεινάρα[3], Απόστολος Σίδερης[4], Καλλιόπη Σιώπη[5], Κωνσταντίνος Στουραΐτης[6]

[1]4ο ΓΕΛ Γαλατσίου, [2]3ο ΓΕΛ Γαλατσίου, [3]8ο ΓΕΛ Αθηνών, [4]3ο ΓΕΛ Αλίμου, [5]Πρότυπο ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης, [6]Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

efsapostol@yahoo.gr, akoulouris13@gmail.com, alexpet@ath.forthnet.gr, aposider@gmail.com, kalsiopi@gmail.com, stouraitisk@gmail.com

Στην παρούσα εργασία μελετάται μια διδασκαλία, που είχε στόχο τη διαφοροποίηση με την ταυτόχρονη διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης σε υψηλό επίπεδο, εστιάζοντας στις νόρμες που ανιχνεύονται σε αυτήν. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν δύο κοινωνικομαθηματικές και τέσσερις κοινωνικές νόρμες. Από αυτές, η αποδοχή των άτυπων και η μετάβαση σε τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις, η εγκυροποίηση των αποτελεσμάτων ως αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης από όλους και η δυνατότητα αναζήτησης βοήθειας, αναδεικνύονται ως σημαντικές νόρμες σε μια διδασκαλία με διαφοροποίηση και αυξημένη μαθηματική πρόκληση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κουλτούρα της τάξης και οι κανόνες που ρυθμίζουν την αλληλεπίδραση του εκπαιδευτικού και των μαθητών επηρεάζουν σε σημαντικό βαθμό τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι νόρμες, δηλαδή οι υπόρρητοι κανόνες που διέπουν τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις στην τάξη (Yackel & Cobb, 1996), μπορεί να ωθούν ή να εμποδίζουν τους μαθητές σε μεγαλύτερη εμπλοκή στο να κάνουν μαθηματικά, στη δημόσια υποστήριξη της άποψής τους, στη διαφοροποίηση του ρυθμού και του τρόπου μάθησης. Οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες θεωρούνται χρήσιμες για την κατανόηση και για την ανάπτυξη διδασκαλιών που εστιάζουν σε συγκεκριμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά, όπως "η ενεργός και υψηλής ποιότητας συμμετοχή των μαθητών σε μαθηματικές συζητήσεις" (Partanen & Kaasila, 2015, σ. 927).

Η παρούσα εργασία μελετά μια διδασκαλία εστιάζοντας στις νόρμες που ανιχνεύονται σε αυτήν. Το σχολικό έτος 2018-19, στο πλαίσιο του EDUCATE[1] (ενός προγράμματος ERASMUS+), μια ομάδα εκπαιδευτικών ενεπλάκη σε σχεδιασμό και αποτίμηση διδασκαλιών που στόχο είχαν τη διαφοροποιημένη διδασκαλία με ταυτόχρονη διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης σε υψηλό επίπεδο. Η πρόκληση αναφερόταν σε έργα που απαιτούν από τους μαθητές μαθηματικό συλλογισμό, σχεδίαση στρατηγικής επίλυσης και διερεύνηση, ενώ η διαφοροποίηση γινόταν αντιληπτή ως προσαρμογή της διδασκαλίας στις διαφορετικές ανάγκες, ρυθμούς, ενδιαφέροντα και ικανότητες των μαθητών. Οι νόρμες της τάξης γενικά και οι νόρμες που οι ίδιοι ως εκπαιδευτικοί προωθούσαν αποτέλεσαν ένα σημείο εστίασης των διερευνήσεών τους. Η εργασία αυτή προέκυψε από αυτή την προσπάθεια.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας μελέτης είναι: Ποιες νόρμες ανιχνεύονται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας των Μαθηματικών με χαρακτηριστικά διαφοροποίησης και αυξημένης μαθηματικής πρόκλησης. Ποιες από αυτές και με ποιο τρόπο υποστηρίζουν τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας με διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι Yackel & Cobb (1996), στο πλαίσιο της τάξης των μαθηματικών, διακρίνουν ανάμεσα στις κοινωνικές και τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες. Οι κοινωνικές σχετίζονται με τη γενική δομή της δραστηριότητας στην τάξη και δυο παραδείγματα είναι: "εξηγούμε και δικαιολογούμε τις λύσεις μας", "δηλώνουμε τη συμφωνία ή τη διαφωνία μας". Οι κοινωνικομαθηματικές αναφέρονται ιδιαίτερα στη μαθηματική δραστηριότητα, για παράδειγμα, μπορεί να προσδιορίζουν τι θεωρείται αποτελεσματική μαθηματική λύση και ποια μαθηματική εξήγηση είναι αποδεκτή (Tatsis & Koleza, 2008).

Οι Yackel & Rasmussen (2002) και οι Partanen & Kaasila (2015) θεωρούν ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση ανάμεσα στις νόρμες και τις πεποιθήσεις. Χωρίς να υποτιμάται η αξία της έρευνας γύρω από τις πεποιθήσεις, φαίνεται ότι η μελέτη των νορμών είναι χρήσιμη ιδιαίτερα όταν επιδιώκεται η ανάπτυξη συγκεκριμένων χαρακτηριστικών της διδασκαλίας. Μια τέτοια περίπτωση είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων μαθησιακών περιβαλλόντων που, μέσω της συνεργατικής επίλυσης προβλήματος, έχει στόχο μεταξύ άλλων την καθοδήγηση των μαθητών στην ανάληψη ευθύνης για τη διαδικασία της μάθησης (Κολέζα, 2006).

Οι ερευνητές που μελετούν τις νόρμες στην τάξη των μαθηματικών προσπαθούν να αναγνωρίσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μέσα στην τάξη. Οι Yackel & Rasmussen (2002) δηλώνουν ότι οι νόρμες "αναγνωρίζονται από την οπτική του παρατηρητή και υποδεικνύουν μια πτυχή της κοινωνικής πραγματικότητας της τάξης" (σ. 316). Οι ίδιοι, αναγνωρίζουν τις νόρμες παρατηρώντας την αλληλεπίδραση των μαθητών/φοιτητών μέσα στην τάξη και μέσα στις ομάδες εργασίας.

Οι Yackel & Rasmussen (2002) σε ένα πανεπιστημιακό μάθημα μελετούν την προσπάθεια να καλλιεργηθούν νόρμες που προέρχονται από την έρευνα στη στοιχειώδη εκπαίδευση, όπως για παράδειγμα ότι οι φοιτητές πρέπει να ακούν και να προσπαθούν να αποδώσουν νόημα στη σκέψη των άλλων. Στα συμπεράσματά τους αναφέρουν την συνεξέλιξη των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών με τις ατομικές πεποιθήσεις ως ένα δυναμικό σύστημα, και το όφελος που προκύπτει από την σκόπιμη πρόκληση διαπραγμάτευσης επί των νορμών της τάξης. Από την άλλη, οι Toscano, Sánchez & García (2019) αναλύοντας τις βιντεοσκοπημένες αλληλεπιδράσεις μεταξύ φοιτητών στην ομάδα εργασίας, αναγνωρίζουν νόρμες όπως "ο διδάσκων επικυρώνει τη γνώση και λύνει τις αμφιβολίες". Συμπεραίνουν ότι οι νόρμες που δημιουργούνται σε προηγούμενα σχολικά πλαίσια μπορούν να επηρεάσουν τη μελλοντική δουλειά των εκπαιδευτικών καθώς και ότι συγκεκριμένες νόρμες μπορεί να εμφανίζονται σε πολύ διαφορετικά σχολικά περιβάλλοντα. Οι Tatsis & Koleza (2008) μελετούν ομάδες των δύο φοιτητών κατά την επίλυση συγκεκριμένων έργων και ταυτοποιούν 3 κοινωνικές νόρμες (πχ. η συνεργασία στην ομάδα απαιτεί συμφωνία για τη διαδικασία λύσης του προβλήματος) και 6 κοινωνικομαθηματικές (πχ. η χρήση μιας μαθηματικής μεθόδου χρειάζεται δικαιολόγηση). Οι ερευνητές χρησιμοποιούν τα ευρήματά τους για να προτείνουν την αξιοποίηση της ομαδικής εργασίας των φοιτητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Οι Partanen & Kaasila (2015) μελετούν τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες που δημιουργούνται στις αλληλεπιδράσεις σε δύο μικρές ομάδες μαθητών (3 και 4 μαθητών αντίστοιχα), οι οποίοι είχαν εμπειρία χρόνων σε παραδοσιακή διδασκαλία μαθηματικών. Οι ερευνητές αναφέρουν ότι σε ένα παρεμβατικό πλαίσιο, οι μαθητές μαζί με τον δάσκαλο ανέπτυξαν τις εξής νόρμες: α) κατά τη μαθηματική διερεύνηση πρέπει να προσεγγίζουμε το θέμα με δημιουργικό τρόπο, β) κατά τη μαθηματική διερεύνηση γίνονται δεκτές διαφορετικές προσεγγίσεις και όχι μόνο συμβολικές μέθοδοι, και γ) οι ρητές δικαιολογήσεις στα μαθηματικά πρέπει να βασίζονται στις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων. Ωστόσο, στα συμπεράσματά τους τονίζουν "την ισχύ και την επιμονή υπαρχουσών νορμών που έρχονται από εμπειρία χρόνων των εκπαιδευτικών και των μαθητών" (σ. 942).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το EDUCATE είναι ένα διακρατικό πρόγραμμα που στοχεύει στη σύζευξη της γνωστικής ενεργοποίησης (δηλαδή την ενασχόληση των μαθητών με έργα με μαθηματική πρόκληση) και της διαφοροποίησης, φιλοδοξώντας να προωθήσει και τις δύο πτυχές στο μάθημα των Μαθηματικών, παρέχοντας υποστήριξη στους εκπαιδευτικούς και τους εκπαιδευτές εκπαιδευτικών.

Στο πλαίσιο αυτού του προγράμματος μια ομάδα επτά εκπαιδευτικών, με την υποστήριξη ερευνήτριας, σε τακτικές συναντήσεις συζητούσαν θέματα σχετικά με τη διαφοροποίηση και την πρόκληση. Μεγάλο μέρος των συζητήσεων αφορούσε τον σχεδιασμό και την αποτίμηση διδασκαλιών που έκαναν σύμφωνα με τους στόχους του προγράμματος με τη βοήθεια αποσπασμάτων των βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών τους. Ένα από τα μαθήματα που έγιναν στο πλαίσιο του προγράμματος αναλύεται στην παρούσα εργασία.

Το μάθημα έγινε σε τμήμα της Β΄ τάξης Δημόσιου Γενικού Λυκείου περιοχής της Αθήνας από τον εκπαιδευτικό (Ε) του τμήματος που συμμετείχε στην ομάδα. Παρατηρητές ήταν οι εκπαιδευτικοί της ομάδας και η ερευνήτρια. Η διάρκεια του μαθήματος ήταν 78 λεπτά (δύο διδακτικές ώρες), ο χρόνος που οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες ήταν συνολικά 30 λεπτά και ο υπόλοιπος χρόνος αφορούσε συζήτηση στην ολομέλεια. Οι μαθητές συγκρότησαν τρεις ομάδες των τεσσάρων, μία των πέντε και μία των τριών και εργάστηκαν για την επίλυση προβλήματος (Εικόνα 1).

1. Αν ένα πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς 2, 3 και 4:
   α) να βρείτε τον, πιθανό, τύπο του
   β) ποιος μπορεί να είναι ο βαθμός του;
   γ) υπάρχουν άλλα πολυώνυμα με τις ίδιες ρίζες 2, 3 και 4; Τι βαθμό θα έχουν;
2. Αν για ένα πολυώνυμο ισχύει P(2)=P(3)=P(4)=1
   α) να βρείτε τον, πιθανό, τύπο του
   β) ποιος μπορεί να είναι ο βαθμός του;
   Αν επιπλέον P(0)=-47
   γ) να βρείτε τον, πιθανό, τύπο του
   δ) ποιος μπορεί να είναι ο βαθμός του;
   ε) υπάρχουν άλλα πολυώνυμα που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες; Τι βαθμό θα έχουν;

Εικόνα 1: Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές

Μετά τη διδασκαλία ακολούθησε συζήτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών σχετικά με το μάθημα. Ακολούθησαν δύο συναντήσεις ακόμη όπου η συζήτηση επικεντρώθηκε στις νόρμες. Στην ανάλυση αυτή συμμετείχαν οι έξι από τους επτά εκπαιδευτικούς. Στην αρχή ο καθένας έκανε ανεξάρτητη ανάλυση σχετικά με τις νόρμες που αναγνώρισε κατά την παρακολούθηση του βιντεοσκοπημένου μαθήματος. Σε επόμενη συνάντηση και μετά από συζήτηση και διαπραγμάτευση μεταξύ των συμμετεχόντων, οι εκπαιδευτικοί κατέληξαν στην αναγνώριση έξι νορμών, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται προέρχονται από τη βιντεοσκόπηση του μαθήματος και της συζήτησης που ακολούθησε. Η παρούσα έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης και η ερευνητική μεθοδολογία που ακολουθήθηκε έχει στοιχεία ανάλυσης περιεχομένου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο συγκεκριμένο μάθημα εντοπίστηκαν δύο κοινωνικομαθηματικές και τέσσερις κοινωνικές νόρμες οι οποίες περιγράφονται παρακάτω. Οι νόρμες 2, 4 και 6 αναλύονται εκτενέστερα θεωρώντας ότι σχετίζονται περισσότερο με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

1. Η νόρμα της μαθηματικής διερεύνησης: Η μαθηματική διερεύνηση είναι βασικό στοιχείο στα μαθηματικά. Βασική διάσταση του "κάνω μαθηματικά" είναι η διερεύνηση.

Στους μαθητές δόθηκε ένα πρόβλημα αυξημένης μαθηματικής πρόκλησης, πρωτότυπο για αυτούς, που απαιτεί διερεύνηση. Ως αποτέλεσμα της διερεύνησης προέκυψαν διαφορετικές προσεγγίσεις: για μια ομάδα το πολυώνυμο έχει την αναλυτική μορφή ενώ για άλλη ομάδα είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Ο εκπαιδευτικός αφήνει όλα τα ενδεχόμενα ανοιχτά: "Δεν είμαστε σίγουροι... Το ψάχνουμε! Μπορεί να μην έχουμε και απάντηση...". Σε κάθε ομάδα οι ιδέες γίνονται αντικείμενο συζήτησης και επεξεργασίας μέχρι να συμφωνηθεί η τελική της πρόταση. Η διαδικασία διερεύνησης και συζήτησης επαναλαμβάνεται μεταξύ των ομάδων και των μαθητών στην ολομέλεια της τάξης μέχρι την εύρεση της γενικότερης λύσης του προβλήματος.

2. Η νόρμα της μαθηματικής επικοινωνίας: Τόσο οι άτυπες όσο και οι τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις είναι αποδεκτές. Η μετάβαση από τις άτυπες στις τυπικές δεν εμποδίζει τη διερεύνηση και ευνοεί την κατανόηση.

Η μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην τάξη, τόσο όταν απευθύνονται στον διδάσκοντα όσο και στους συμμαθητές τους, ξεφεύγει συχνά από τις τυπικές διατυπώσεις που χρησιμοποιούνται στο σχολικό εγχειρίδιο ή χρησιμοποιεί ο διδάσκων.

Για παράδειγμα, μία μαθήτρια για το ερώτημα 1α γράφει στον πίνακα (x-ρ)Π. Ο Ε ρωτά: "Σας αρέσει; Είναι λίγο σκόρπιο λίγο ορφανό, πώς θα το συμπληρώνατε;". Ενθαρρύνει έτσι τους μαθητές να σηκωθούν στον πίνακα. Ένας μαθητής σηκώνεται στον πίνακα και συμπληρώνει, λέγοντας συγχρόνως: "τη μία ρίζα (x-2) επί την άλλη ρίζα (x-3) επί την 3η ρίζα (x-4) επί Π(x)". Μία άλλη μαθήτρια διαφωνεί και προτείνει να γραφεί (x-2)Π(x), (x-3)Π(x), (x-4)Π(x). Ο Ε παρεμβαίνει ζητώντας να φτιαχτεί η σχέση λέγοντας "είναι κάτι σκόρπιο, με τι ισούται αυτή η παράσταση;" Οι μαθητές απαντούν με το P(x) και ζητάει από τη μαθήτρια να το συμπληρώσει ώστε να είναι μαθηματικά σωστή η σχέση.

Τελικά, μαθητής που συμπληρώνει σωστά τη σχέση λέει ότι το Π(x) στην 1η σχέση "έχει μέσα του" την άλλη ρίζα άρα το σβήνει και στη θέση του γράφει (x-2)δ(x) και δείχνοντας το δ(x) λέει "αυτό θα έχει μέσα του οπωσδήποτε την άλλη ρίζα (x-4)" και σβήνοντάς το γράφει (x-4)Κ(x). Για να μείνει στον πίνακα η σχέση P(x)=(x-2)(x-3)(x-4)Κ(x).

Στη συζήτηση, μετά το πέρας της διδασκαλίας, ο Ε για να εξηγήσει τη μετάβαση από την άτυπη στην τυπική διατύπωση λέει:

> Δεν κάνω εγώ ασκήσεις στον πίνακα. Πρέπει να τις προσπαθήσουν και όταν φτάσουν σε κάποιο σημείο τότε κάνω. Κι όταν κάνω εγώ είναι για να πάμε όλοι μαζί. Το όλοι μαζί σημαίνει "εδώ τι σκεφτόμαστε;" και γράφω εγώ στον πίνακα ώστε να ξεφεύγουμε από τον κακό συμβολισμό…

Υποστηρίζοντας τον τρόπο που διαχειρίστηκε την όποια παρέμβασή του ο Ε λέει ότι όταν συνομιλούν οι μαθητές, το γεγονός αυτό γίνεται πιο αποδεκτό από τους συμμαθητές τους γιατί είναι μια συζήτηση μεταξύ φίλων, δεν είναι ο καθηγητής που μιλάει. Με αυτόν τον τρόπο μπαίνουν στο παιγνίδι, επιπλέον έχουν άλλο επίπεδο επικοινωνίας που ο Ε δεν το έχει. Πολλές φορές μια απάντηση είναι "σφιχτή" και το νόημά της είναι "ψηλά".

3. Η νόρμα της συνεργασίας: Η συνεργασία μεταξύ των μαθητών, σε μικρές ομάδες και στην τάξη, είναι σημαντική, επιδιώκεται και υποστηρίζεται.

Ο Ε υποστηρίζει τη νόρμα ζητώντας από τους μαθητές να δουλέψουν σε ομάδες και δίνοντάς τους χρόνο. Οι μαθητές ανταποκρίνονται συμμετέχοντας στην ομαδική δουλειά και στη συζήτηση στην ολομέλεια και φέρνοντας αποτελέσματα που ατομικά ίσως δεν θα κατάφερναν. Ο Ε δηλώνει ότι είναι μόνιμη επιλογή του να βάζει τους μαθητές να συζητούν μεταξύ τους σε ομάδες γιατί έτσι "μπαίνουν στο παιχνίδι".

4. Η νόρμα της εγκυροποίησης: Η εγκυροποίηση ενός ισχυρισμού είναι αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης σε επίπεδο ομάδας και ολομέλειας.

Ο Ε παροτρύνει τους μαθητές να εκφράσουν τη γνώμη τους για την εγκυρότητα των ισχυρισμών των συμμαθητών τους αποφεύγοντας να πάρει θέση. Ο τρόπος με τον οποίο καταλήγει η ολομέλεια στα συμπεράσματα είναι μέσα από εξαντλητικούς διαλόγους, ακόμα και για απαντήσεις-σκέψεις-ιδέες μαθητών που αρχικά φαίνεται να μην είναι ούτε επιστημονικά άρτιες αλλά ούτε και αυστηρά διατυπωμένες. Μέσω κατάλληλων ερωτήσεων και παραινέσεων του Ε γίνονται τελικά δεκτοί μόνο οι ισχυρισμοί που έχουν διατυπωθεί ορθά και είναι τεκμηριωμένοι σύμφωνα με τη γνωστή μαθηματική θεωρία και σε καμία περίπτωση με μη αιτιολογημένη απόφαση του διδάσκοντα.

Όταν οι ομάδες δουλεύουν αυτόνομα, η εγκυροποίηση των συμπερασμάτων γίνεται κυρίως με διάλογο μεταξύ των μελών με τη συνεχή παρότρυνση του Ε, "Εσείς θα μας πείτε! Τι προτείνετε; Το ψάχνουμε! Δεν είμαστε σίγουροι... Το ψάχνουμε! Μπορεί να μην έχουμε και απάντηση..."

Στην παρουσίαση των απαντήσεων στην ολομέλεια, ο Ε δίνει ιδιαίτερη προσοχή στην κατανόηση από όλους τους μαθητές κάθε ισχυρισμού που ακούγεται, ως απαραίτητη προϋπόθεση για την αποδοχή ή την απόρριψή του α) παροτρύνοντας τους μαθητές να κάνουν διευκρινιστικές ερωτήσεις, β) φροντίζοντας να περάσει στους μαθητές το μήνυμα ότι είναι αποδεκτό να μην καταλαβαίνουν τι είπε κάποιος άλλος, γ) χρησιμοποιώντας την τεχνική της παράφρασης των ισχυρισμών των μαθητών. Για παράδειγμα λέει "Να ξαναπεί την πρότασή του; Την καταλάβατε; Συμφωνείτε;" και παρακάτω "Εγώ δεν το καταλαβαίνω!". Σε επόμενο σημείο αναδιατυπώνει την απάντηση μαθητή προκειμένου να τη θέσει αμέσως μετά στην κρίση της ολομέλειας.

Ενθαρρύνει την αξιολόγηση από τους μαθητές των ισχυρισμών που ακούγονται α) κάνοντας κατάλληλες ερωτήσεις προς την ολομέλεια β) τονίζοντας στους μαθητές ότι η αποδοχή ή απόρριψη των απαντήσεων που διατυπώνουν δεν είναι δική του ευθύνη αλλά δική τους**.** Ο Ε σχολιάζοντας πρόταση μαθητή, ρωτάει "ταιριάζει;" δεν παίρνει απάντηση και λέει "αν δεν ξέρετε εσείς, εγώ ξέρω;".

Πριν καλέσει την ολομέλεια να αποφασίσει φροντίζει να ακουστούν όλες οι εναλλακτικές απαντήσεις που σκέφτηκαν οι μαθητές. Σε κρίσιμα σημεία της διερεύνησης, ζητά από τους μαθητές να συνοψίσουν τα τελευταία συμπεράσματα, ώστε αυτά να ακουστούν ξεκάθαρα στην τάξη και οι ομάδες να συνεχίσουν να εργάζονται πάνω σε μια κοινά αποδεκτή βάση.

5. Η νόρμα της διατύπωσης γνώμης: Όλοι οι μαθητές έχουν δικαίωμα να διατυπώσουν τη γνώμη τους. Οι απόψεις είναι ισότιμες και συμβάλλουν στον προβληματισμό (τίθενται υπό διαπραγμάτευση στην ολομέλεια).

Η πρώτη φορά που οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες διαρκεί 12 λεπτά. Ο Ε διακόπτει την ομαδική εργασία ζητώντας από "όποια ομάδα θεωρεί ότι δεν έχει προχωρήσει ικανοποιητικά να πει τη βασική της σκέψη, ποια είναι η προσπάθεια της;". Η επιλογή του Ε να μην καθορίσει ο ίδιος ποια ομάδα θα μιλήσει πρώτη, δηλώνει την αξία που δίνει στις σκέψεις και τις απόψεις όλων και στην συμβολή τους στο συλλογικό προβληματισμό.

Αργότερα και παρά την διατύπωση ορθής λύσης και απόδειξης από μαθητές, ο Ε ρωτά ξανά τις ομάδες αν κάποια έχει σκεφτεί κάτι διαφορετικό. Μια ομάδα διατυπώνει μία σκέψη η οποία για τους παρατηρητές εκπαιδευτικούς είναι προφανές ότι δεν οδηγεί πουθενά. Προς έκπληξη όλων, ο Ε καλεί στον πίνακα τον μαθητή να γράψει τη λύση που προτείνει. Η πρόταση συζητείται εκτενώς και αναδεικνύεται το αδιέξοδο. Στη συζήτηση μετά το μάθημα λέει ότι ο μαθητής "πρέπει να αισθάνεται ότι δεν απειλείται" και για αυτό πρέπει να έχει χρόνο να κάνει και να συζητήσει μαθηματικά.

6. Η νόρμα της αναζήτησης βοήθειας: Ενθαρρύνεται η αναζήτηση βοήθειας, αφού είναι αποδεκτό ότι όλοι οι μαθητές δεν έχουν το ίδιο μαθηματικό υπόβαθρο.

Ο Ε επέλεξε με την έναρξη της διδασκαλίας να θέσει αυτή τη νόρμα στην τάξη και να υποδείξει με σαφήνεια τους πόρους που την υποστηρίζουν: οι έτοιμες υποδείξεις, το σχολικό βιβλίο, οι συμμαθητές τους και οι παρευρισκόμενοι εκπαιδευτικοί. Για την αναζήτηση βοήθειας αφήνει την πρωτοβουλία στους μαθητές:

«αν μια ομάδα δυσκολευτεί ιδιαίτερα, έχω κάποια φύλλα πάνω στην έδρα με κάποιες υποδείξεις … άρα, αν θέλετε [μπορείτε] να ανοίξετε κάποιο βιβλίο να θυμηθείτε κάτι από τα παλιά ή [μπορείτε] να ρωτήσετε … να ρωτήσετε πρώτα τους συμμαθητές σας και μετά εμάς για βοήθεια».

Ο ίδιος αναγνωρίζει ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτή την πρακτική: "αν και δε θυμούνται έχω την αίσθηση δεν ανατρέχουν ούτε στο βιβλίο". Λόγω της φύσης του προβλήματος υπήρξε η ανάγκη σχεδόν από το σύνολο των μαθητών να θυμηθούν στοιχεία του περιεχομένου της ενότητας, γεγονός που οδήγησε κάποιους να την αναζητήσουν στο σχολικό βιβλίο.

Η παρατήρηση της δυσκολίας των μαθητών να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα και η μη ανάληψη πρωτοβουλίας αναζήτησης βοήθειας προβλημάτισε τον διδάσκοντα και τους παρατηρητές. Τέθηκε το δίλλημα κατά πόσο είναι αναγκαία η παρέμβαση για βοήθεια από τον διδάσκοντα όπως φαίνεται από το διάλογο μεταξύ Ε και παρατηρητή (Π):

Ε: να παρέμβουμε;

Π: Ίσως χρειάζεται.

Ε: Άστο, θα δείξει".

Είναι αξιοσημείωτο ότι η επισήμανση-υπόδειξη του διδάσκοντα για τη διάθεση γραπτών υποδείξεων βοήθειας πέρασε απαρατήρητη και η βοήθεια των υποδείξεων έμεινε ανεκμετάλλευτη. Φαίνεται ότι οι μαθητές θεωρούν ότι η παροχή βοήθειας είναι αποκλειστικότητα του διδάσκοντα έχοντας δυσκολία να αναλάβουν οι ίδιοι την ευθύνη που τους αναλογεί για τη μάθησή τους.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση προέκυψαν έξι νόρμες. Δύο κοινωνικομαθηματικές: 1) της μαθηματικής διερεύνησης και 2) της μαθηματικής επικοινωνίας και τέσσερις κοινωνικές: 3) της συνεργασίας, 4) της εγκυροποίησης, 5) της διατύπωσης γνώμης και 6) της αναζήτησης βοήθειας.

Η νόρμα 6 δεν ανιχνεύεται σε άλλες έρευνες, κάτι που ερμηνεύουμε με τον ειδικό στόχο της διαφοροποίησης που είχε η συγκεκριμένη διδασκαλία. Οι υπόλοιπες νόρμες είναι συμβατές ή έχουν πολλά κοινά με τις νόρμες που ανιχνεύουν οι Yackel & Rasmussen (2002), οι Tatsis & Koleza (2008) και οι Partanen & Kaasila (2015) στις έρευνές τους. Για παράδειγμα, η απαίτηση οι φοιτητές να εξηγούν και να δικαιολογούν τη σκέψη τους βρίσκεται στις δύο πρώτες έρευνες, ενώ στην τρίτη βρίσκουμε την απαίτηση οι ρητές δικαιολογήσεις των μαθητών στα μαθηματικά να βασίζονται στις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων. Οι διαφορετικές αποχρώσεις στη διατύπωση των νορμών θα μπορούσαν να ερμηνευτούν από τις διαφορές στους στόχους των παρεμβάσεων, στα υποκείμενα των ερευνών και στις προηγούμενες εμπειρίες και τις προτιμήσεις των ερευνητών.

Κάποιες νόρμες βρίσκονται σε αντίθεση με τα ευρήματα άλλων ερευνών, για παράδειγμα η 4 είναι αντίθετη με τη νόρμα "ο διδάσκων επικυρώνει τη γνώση" που ανίχνευσαν οι Toscano, Sánchez & García (2019). Οι ίδιοι ερευνητές ανίχνευσαν νόρμες όπως "οι εξηγήσεις στις απαντήσεις των έργων δεν είναι αναγκαίες γιατί χάνεται χρόνος" και "ένα μαθηματικό αποτέλεσμα είναι ή δεν είναι σωστό ανάλογα με την περίσταση", οι οποίες είναι αντίθετες με τις 2, 4 και 5. Οι διαφορές των ευρημάτων τους με τα ευρήματα της παρούσας και των υπολοίπων ερευνών που προαναφέρθηκαν θα μπορούσε να ερμηνευτεί από την εστίαση των Toscano κ.α. στις νόρμες που εμφανίζονται στις ομάδες των φοιτητών χωρίς την παρέμβαση του εκπαιδευτικού και χωρίς προσπάθεια καθιέρωσης συγκεκριμένων νορμών.

Σε σχέση με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, θεωρούμε ότι μέσα από τον υψηλό βαθμό εμπλοκής των μαθητών και τα τελικά αποτελέσματα της διερεύνησης, αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλο των νορμών 1, 2, 4 και 5. Ειδικότερα η 2 (η αποδοχή των άτυπων και η μετάβαση σε τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις) και η 4 (η εγκυροποίηση ως αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης από όλους) υποστηρίζουν την εμπλοκή των μαθητών με διαφοροποιημένο ρυθμό και τρόπο σε ένα έργο αυξημένης μαθηματικής πρόκλησης. Η νόρμα 6 θα υποστήριζε ιδιαιτέρως τη διαφοροποίηση, αλλά οι μαθητές δεν φάνηκε να είναι έτοιμοι να την υιοθετήσουν. Τέλος, η νόρμα 3 αναδεικνύει τη συνεργασία ως ευνοϊκό περιβάλλον για την εμπλοκή όλων των μαθητών.

Η διδασκαλία είχε στόχο τη σύζευξη της διαφοροποίησης με τη μαθηματική πρόκληση και μόνο έμμεσα αναφέρονταν στις νόρμες. Αυτό δημιουργεί περιορισμούς στην παρούσα έρευνα που θα μπορούσαν να αναιρεθούν με τη μελέτη κάποιων συστηματικών παρεμβάσεων στην τάξη με στόχο την καθιέρωση εκείνων των νορμών που θεωρείται ότι προωθούν τους συγκεκριμένους στόχους. Επιπλέον, η μελέτη των νορμών σε διαφορετικές τάξεις, με διαφορετικούς εκπαιδευτικούς αλλά με τους ίδιους στόχους θα εμπλούτιζε την κατανόησή μας γύρω από τα ερευνητικά ερωτήματα.

Σημείωση: Αυτή η μελέτη διεξήχθη στο πλαίσιο του προγράμματος «Enhancing Differentiated Instruction and Cognitive Activation in Mathematics Lessons by Supporting Teacher Learning (EDUCATE)» που χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παρούσα δημοσίευση δεσμεύει μόνο τους συντάκτες της και η Επιτροπή δεν ευθύνεται για τυχόν χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Partanen, A. M., & Kaasila, R. (2015). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4), 927-946.

Toscano, R, Sánchez, V., García, M. (2019). Combining Theoretical Approaches: Socio-Didactic-Mathematical Norms and Perspectives in Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Discourse. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(3), 455–466

Tatsis, K. & Koleza, E. (2008) Social and socio-mathematical norms in collaborative problem-solving. *European Journal of Teacher Education, 31*(1), 89-100, DOI: 10.1080/02619760701845057

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 313-330). Springer, Dordrecht.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477

Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και σχολικά μαθηματικά: επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

ΣΤΟ(Ι)ΧΙΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΗΣΕΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ «Α-ΝΟΗΣΙΩΝ» ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΑΠΟΔΕΚΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Ρωξάνθη Νίκου, Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης

Εκπαιδευτικός ΠΕ70, Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

nroxie4@gmail.com, ttriant@uth.gr

Κάθε έννοια ορίζεται ταυτόχρονα τόσο από αυτό που είναι όσο και από εκείνο που δεν είναι. Απέναντι από κάθε νόημα βρίσκεται κάποια α-νοησία. Το ποιητικό είδος limerick ανήκει στη λογοτεχνία α-νοησιών και έχει ήδη αποτελέσει εκπαιδευτικό εργαλείο, χωρίς απαραίτητα ιδιαίτερη στόχευση στην προσέγγιση του ορίου μεταξύ νοήματος και α-νοησίας. Στην παρούσα έρευνα μαθητές Ε΄ τάξης ελληνικού δημοτικού σχολείου πειραματίστηκαν με limericks και α-νοησίες και προκλήθηκαν να προσεγγίσουν το εν λόγω όριο μεταξύ άλλων και για μαθηματικές έννοιες. Μέσα από τον τρόπο με τον οποίο διαπραγματεύτηκαν τις ιδέες τους διερευνήσαμε κατά πόσον μια ανάλογη ενασχόληση μπορεί να βοηθήσει στην έκφραση, προσωπική νοηματοδότηση και ισχυροποίηση των επιστημονικών ιδεών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

> *There was an old person of Gretna*
> *Who rushed down the crater of Etna;*
> *When they said, "It is hot?"*
> *he replied, "No, it's not!"*
> *Than mendacious Old Person of Gretna.*

Εικ. 1: Limerick του Lear

Το ποιητικό είδος limerick είναι συνυφασμένο με το όνομα του Edward Lear και ανήκει στη λογοτεχνία α-νοησιών. Πρόκειται για πέντε στίχους που, με ελάχιστες παραλλαγές, υπακούνε σε σταθερή ομοιοκαταληξία (1ος–2ος–5ος και 3ος–4ος) και αφηγηματική δομή. Στον πρώτο στίχο παρουσιάζεται ο πρωταγωνιστής (π.χ. φύλο, ηλικία, καταγωγή) και στο δεύτερο η δράση του μαζί με κάποια ιδιαιτερότητά του. Στον τρίτο στίχο εξελίσσεται η δράση, η οποία συνεχίζεται και στον τέταρτο όπου εμφανίζονται και οι συνέπειές της. Ο τελευταίος στίχος ολοκληρώνει τις συνέπειες ή αναφέρει κάποια αντίδραση ή τιμωρία του πρωταγωνιστή, χαρακτηρίζοντάς τον ενδεχομένως με ένα επίθετο, συχνά επαναλαμβάνοντας κατά κάποιον τρόπο τον πρώτο στίχο (βλ. Εικ. 1). Χαρακτηριστικά στοιχεία που καθιστούν την κατανάλωση και τη δημιουργία limerick ευχάριστη είναι ο απολαυστικός ρυθμός καθώς και βασικές αρχές υπερρεαλισμού, όπως η σάτιρα, το χιούμορ, η φαντασία και η απομάκρυνση από το νόημα με συνειρμικές μεταφορές και οπτικές αναπαραστάσεις, όπως και το αδύνατο, η υπερβολή και οι α-νοησίες (Κόκκινος, 2008; Τσιλιμένη, 2005). Συνδυάζοντας την πειθαρχία της φόρμας με την ελευθερία και πρωτοτυπία της προσωπικής έκφρασης το limerick μάς δίνει αφορμές για να προκαλέσουμε τα όρια εννοιών, αφού στην προσπάθεια σηματοδότησης του ορίου απέναντι από ένα νόημα υπάρχει πάντοτε αντι-νόημα (Καλογήρου, 2009; Stewart, 1989). Πέραν από τη διασκέδαση και την ηχητική απόλαυση που προσφέρει, οι α-νοησίες δεν παραμένουν ανεξήγητες, αφού προκαλούν επιστράτευση εμπειριών για κατασκευή προσωπικού νοήματος (Colley, 1998). Συνδυάζοντας λογικό και παράλογο, εικόνες και αντι-εικόνες, δημιουργούν αναπαραστάσεις και ωθούν σε διαπραγμάτευση του ορίου φαντασίας και πραγματικότητας, επαναπροσδιορισμό των ορίων του μηνύματος, προκαλώντας ενεργή απόλαυση κατά την αναζήτησή του (Bouissac, 1977).

Επιπλέον της διαφοροποιητικής σχέσης ανάμεσα σε νόημα και α-νοησία ωστόσο, σημασία έχει και ο τρόπος με τον οποίο αυτή λαμβάνει χώρα. Σύμφωνα με τον Derrida ετούτη φαίνεται πλήρως μόνο στη γραφή και όχι στην ομιλία (Elaiwi, 2007). Επιπροσθέτως, μια α-νοησία γίνεται αντιληπτή μόνο σε σημασιολογικό επίπεδο, γιατί εκεί εμφανίζονται νοηματικά κενά (Lecercle, 2012). Τα κενά αυτά χαρακτηρίζονται από σύγκρουση ανάμεσα σε νόημα και α-νοησία. Έρχονται στην επιφάνεια μέσα από απροσδιοριστίες του κειμένου, που προκαλούν τον αναγνώστη να τις λύσει για να τα καλύψει. Για να το πετύχει αυτό πρέπει να αποδομήσει και να επαναδομήσει την υπάρχουσα πραγματικότητά του, κατασκευάζοντας έτσι ενεργά το κειμενικό νόημα μέσω των συνδέσεων που δημιουργεί (Iser, 1980).

Στη μαθηματική εκπαίδευση έχει τονιστεί η σημασία του παραδείγματος όσον αφορά στην κατανόηση, ενώ ένα μαθηματικό παράδειγμα αντιτάσσεται σε ένα μη-παράδειγμα, με τη διάκριση των δύο να καθίσταται δυνητικά ικανή να αναδείξει διαφορές εννοιών και να διορθώσει παρανοήσεις εμβαθύνοντας έτσι την εννοιολόγηση. Όσο πιο κοντά στο όριο πλησιάσει ένα μη-παράδειγμα, ‘οριακό παράδειγμα’, τόσο περισσότερο σηματοδοτεί τις διαφορές του με το παράδειγμα και αναδύει κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας. Η χρήση παραδειγμάτων γενικώς αποτελεί πρό(σ)κληση που μπορεί να οδηγήσει σε επαγωγική γενίκευση εννοιών. Ιδιαιτέρως μάλιστα των παραδειγμάτων (και μη-παραδειγμάτων) που παράγουν οι ίδιοι οι μαθητές βάσει εμπειριών τους και όχι εκείνων που αναπαράγουν ως ‘καλά’ παραδείγματα του εκπαιδευτικού ή βασιζόμενοι σε κάποιο επιστημονικό ορισμό. Τέτοια ‘παραδείγματα’ ενισχύουν την κατασκευή νοήματος και την εννοιολόγηση στα Μαθηματικά, ή έστω βοηθούν στην οικειοποίηση και αίσθηση επάρκειας στο γνωστικό αυτό αντικείμενο (Watson & Mason, 2005; Yanuarto, 2016).

Οι ως τώρα εκπαιδευτικές προτάσεις και έρευνες σχετικές με τα limericks έχουν συνδέσει το ποιητικό είδος με στόχους ψυχαγωγικούς αλλά και σχετικούς με τη Γλώσσα και τη Λογοτεχνία, με την καλλιέργεια της φαντασίας και της δημιουργικότητας, καθώς και γενικότερα με την έκφραση των μαθητών (Τσιλιμένη, 2005). Παρά την παιδαγωγική του αξία, στην Ελλάδα έχει φανερά μικρή απήχηση, διδακτικά και ερευνητικά, ενώ η χρήση του έχει επεκταθεί ελάχιστα σε γνωστικά αντικείμενα πέραν της Γλώσσας. Ωστόσο ακόμη και στο εξωτερικό όπου το limerick έχει ήδη συνδεθεί με τα Μαθηματικά, αυτό έχει συμβεί στο πλαίσιο διδακτικών προτάσεων (π.χ. Gregory, 1988) και όχι ερευνητικών εγχειρημάτων που θα διερευνούσαν την πρόκληση του ορίου νοήματος/α-νοησίας με μαθηματικές έννοιες.

Σκοπός της έρευνάς μας ήταν να εξετάσουμε κατά πόσον η ακρόαση, ανάγνωση και παραγωγή limerick, με έμφαση στην προσέγγιση του ορίου νοήματος/α-νοησίας και στον τρόπο πρόκλησης αυτού μέσω της διαπραγμάτευσης ιδεών, μπορεί να βοηθήσει μαθητές Ε΄ τάξης να εκφραστούν και να εννοιολογήσουν επιστημονικά στα Μαθηματικά. Με άλλα λόγια θελήσαμε να εξετάσουμε κατά πόσο η συγκεκριμένη ενασχόληση μπορεί να τροφοδοτήσει με παραδείγματα και οριακά παραδείγματα τον προσωπικό χώρο παραδειγμάτων των μαθητών για τις έννοιες με τις οποίες ασχολήθηκαν, τροφοδοτώντας έτσι με ουσιαστικό τρόπο τη μάθηση (Watson & Mason, 2005). Το λογοπαίγνιο 'στ(ο)ίχιση' στον τίτλο του κειμένου μας συνυποδηλώνει τους ποιητικούς στίχους και την τακτοποίηση (στοιχίζω, βάζω 'σε σειρά') ιδεών και εννοιών από τους μαθητές. Επίσης μας ενδιέφερε να εξετάσουμε ποιους πόρους θα χρησιμοποιούσαν αυτοί για να διαπραγματευτούν τα νοηματικά κενά ώστε να προσεγγίσουν το όριο ανάμεσα σε όριο και α-νοησία καθώς παράγουν limerick για μαθηματικές έννοιες. Ακόμη, μας ενδιέφερε να διακρίνουμε τις προκλήσεις που θα αντιμετώπιζαν στην προσπάθειά τους αυτή, καθώς και με ποιους τρόπους θα τις ξεπερνούσαν. Τέλος, θέλαμε να κατανοήσουμε ποια είναι τα μαθησιακά οφέλη από τον πειραματισμό τους με αυτή τη στ(ο)ίχιση μαθηματικών εννοιολογήσεων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πραγματοποιήσαμε την έρευνά μας σε ένα δημόσιο 12θέσιο δημοτικό σχολείο του Βόλου την Άνοιξη του 2016. Ξεκινήσαμε σκιαγραφώντας συνοπτικά το προφίλ των μαθητών και την κουλτούρα της τάξης μέσω καθημερινής παρατήρησης του ωρολογίου προγράμματος για δύο εβδομάδες. Ακολούθησε η έρευνα, που διήρκησε 8 εβδομάδες στην οποία συμμετείχαν 8 μαθητές χωρισμένοι σε δύο τετραμελείς ομάδες που λειτούργησαν ξεχωριστά. Με τις δύο ομάδες εργαστήκαμε σε αίθουσα διαφορετική από την αίθουσα διδασκαλίας, επί 8 και 9 συναντήσεις αντίστοιχα, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών έκαστη. Τα ερευνητικά δεδομένα που παρήγαμε αφορούσαν τις σημειώσεις πεδίου και αναστοχασμού της ερευνήτριας, τις σημειώσεις πεδίου μη-συμμετοχικής παρατηρήτριας προς ενίσχυση της αξιοπιστίας και εγκυρότητας της έρευνας, όπως και τα ποιήματα και τις σημειώσεις των μαθητών. Μαγνητοφωνήσαμε όλες τις συζητήσεις με τους μαθητές, καθώς και την τελική ομαδική συνέντευξη με τους συμμετέχοντες, αλλά και την αναστοχαστική συζήτηση με τη μη-συμμετοχική παρατηρήτρια μετά την ολοκλήρωση των συναντήσεων.

Στην έρευνά μας ακολουθήσαμε μεθοδολογία διδακτικού πειράματος με τέσσερις δυναμικές επάλληλες φάσεις (Molina, Castro, & Castro, 2007). Στην *πρώτη φάση* (μια συνάντηση ανά ομάδα) εισήγαμε τους μαθητές στο ποιητικό είδος με ανάγνωση και ακρόαση limericks ώστε να εξοικειωθούν με τις δομικές τους συμβάσεις και συνάμα να ανιχνεύσουν και να συζητήσουν τις σημασιολογικές α-νοησίες του περιεχομένου τους. Στη *δεύτερη φάση* (δύο συναντήσεις ανά ομάδα) αναλύσαμε το είδος limerick με σκοπό την περαιτέρω εξοικείωση των μαθητών με αυτό και την παραγωγή ποιημάτων τηρώντας τις συμβάσεις μορφής και περιεχομένου. Οι μαθητές συμπλήρωσαν ορισμένα ημιτελή πεντάστιχα, αρχικά επιλέγοντας από δοσμένες λέξεις και μετά με αποκλειστικά δικές τους ιδέες. Ακολουθούσε κάθε φορά ανάγνωση των ποιημάτων τους και ομαδική συζήτηση με διαπραγμάτευση ιδεών. Περνώντας στην *τρίτη φάση* καλέσαμε τους μαθητές να παραγάγουν ατομικά δικά τους limericks και κατόπιν να τα παρουσιάσουν και να τα συζητήσουν στην ομάδα τους. Με σκοπό τη σταδιακή αυτονομία στην παραγωγή limerick, έγραψαν αρχικά πεντάστιχα για ελεύθερο θέμα που επέλεξαν οι ίδιοι ως ομάδα (μια συνάντηση ανά ομάδα). Έπειτα περάσαμε σε έργα για τη θερμότητα (δύο συναντήσεις στη μία και τρεις στη δεύτερη ομάδα) και έπειτα για τα τρίγωνα (τρεις συναντήσεις ανά ομάδα). Οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τις έννοιες αυτές, αφού εντάσσονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για την Ε΄ τάξη δημοτικού σχολείου. Κατά την παραγωγή των limericks συζητούσαμε ατομικά με κάθε μαθητή τις ιδέες και τον τρόπο σκέψης του, με στόχο να διερευνήσουμε τον προσωπικό χώρο παραδειγμάτων του και τη σύνδεσή του με το όριο νοήματος/α-νοησίας για αυτές τις έννοιες. Ζητούσαμε από τους μαθητές να εξηγούν και να αιτιολογούν τους ισχυρισμούς τους, δηλώνοντας και τους οικείους τους πόρους. Στην *τέταρτη* φάση μεταφέραμε σύντομα το εκπαιδευτικό εργαλείο μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας, όπου δημοσιοποίησαν οι συμμετέχοντες τα limericks τους στην ολομέλεια της τάξης, καθώς επίσης δημιούργησαν πλέον όλοι οι μαθητές σε ομάδες α-νόητα πεντάστιχα. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μέρος των αποτελεσμάτων της έρευνας, εστιάζοντας στις συναντήσεις της τρίτης φάσης που αφορούσαν την παραγωγή ποιημάτων για τα τρίγωνα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Θα παρουσιάσουμε μέρος της δουλειάς δύο μαθητών που συμμετείχαν παραγωγικά στο διδακτικό πείραμα. Αυτοί είναι αντιπροσωπευτικοί στο βαθμό που οι στιγμές προσωπικών τους δυσκολιών αλλά και κατακτήσεων αναδεικνύουν τις βασικές πτυχές μιας μαθησιακής πορείας όσον αφορά το σκοπό της έρευνας. Η Μαριέττα, με ισχυρές εννοιολογήσεις και εμπιστοσύνη στις γνώσεις της, προχώρησε σταθερά και σχετικά εύκολα στη δημιουργία επιστημονικών α-νοησιών. Ο Βαγγέλης, αποτραβηγμένος από το επίκεντρο της επικοινωνίας στην ολομέλεια της τάξης του, προκλήθηκε μέσα από α-νοησίες να συμμετάσχει πιο ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία εκφράζοντας και διευρύνοντας τις προσωπικές του εμπειρίες.

Κατά την *πρώτη φάση* του πειράματος οι μαθητές στάθηκαν αποκλειστικά σε μορφολογικά χαρακτηριστικά των limericks. Αρχικά δεν αντιλαμβάνονταν τις α-νοησίες των ποιημάτων, απορρίπτοντας την όποια αξία αναζήτησής τους. Σχετικά γρήγορα όμως ορισμένοι ξεκίνησαν να τις ανιχνεύουν, συζητώντας για όσα δεν μπορούσαν να κατανοήσουν στο περιεχόμενο των ποιημάτων βάσει των γνώσεων και εμπειριών τους. Επίσης, ο μεταφορικός λόγος και το χιούμορ τούς οδήγησαν ακόμη πιο κοντά στις α-νοησίες, συνειδητοποιώντας τη διαφορά τους από τα νοήματα. Σε limerick του Σεφέρη για παράδειγμα δεν τους φάνηκε λογικό, όπως είπαν, να σκάει μια γυναίκα σαν πασαβιόλα. «*Αν γινόταν στην πραγματικότητα, δε θα ήταν αστείο*», είπε ο Βαγγέλης. Ενώ η Μαριέττα δήλωσε: *«Τώρα που άκουσα τις απόψεις των άλλων, μού φαίνονται πιο λογικές... είναι μεταφορικό, είναι σαν έκφραση, όπως λέμε τρέχει σα λαγός, έτσι!»*.

Στις συναντήσεις της *δεύτερης φάσης*, οι μαθητές συνέχισαν να δίνουν ιδιαίτερη σημασία στα μορφολογικά στοιχεία των limericks, ενώ οι περισσότεροι δυσκολεύονταν να τα προσεγγίσουν α-νόητα. Παρόλα αυτά άρχισαν να κατανοούν τη λειτουργία τους, αντιπαραβάλλοντας όσα αδυνατούσαν να προσδώσουν νόημα στο περιεχόμενο των ποιημάτων με όσα γνώριζαν από προσωπικές εμπειρίες. Η Μαριέττα για παράδειγμα δεν απόλαυσε limerick του Σεφέρη στο οποίο μια μικρή αντί να πιει το σινάπι κάνει ποδόλουτρο με αυτό, αφού όπως είπε «*ταιριάζει πιο πολύ να το πιει, και όποιος ξέρει τι είναι το σινάπι, δε θα του φανεί λογικό*». Όταν οι μαθητές χρειάστηκε να δημιουργήσουν α-νοησίες συμπληρώνοντας ημιτελή limericks, ακολουθούσαν τα μορφολογικά χαρακτηριστικά του είδους φτιάχνοντας την ομοιοκαταληξία, ενώ συνήθως εκλογίκευαν το περιεχόμενο. Σταδιακά όμως τέσσερις από αυτούς προχώρησαν συνειδητά από την ηχητική απόλαυση των ποιημάτων στη διάσχιση του ορίου νοήματος/α-νοησίας στο περιεχόμενό τους. Σε αυτήν την προσπάθεια έθεταν το όριο τόσο επιστημονικά όσο και ανιμιστικά. Για παράδειγμα, σε limerick της Αρανίτου, ήταν περίεργο για τον Βαγγέλη να στέλνει ο υπουργός στον ήλιο παγωτό γιατί θα έλιωνε από τη ζέστη, όπως είπε, ενώ εξίσου περίεργο θεώρησε και το να παντρευτεί κάποιος τον ήλιο μιας και αυτός δεν είναι ζωντανός.

Στην πρώτη συνάντηση της *τρίτης φάσης* υπήρξαν ικανοποιητικές μαθητικές προσπάθειες στην παραγωγή ατομικών ποιημάτων με ελεύθερη επιλογή θέματος. Οι μαθητές εστίαζαν και πάλι υπερβολικά στα δομικά στοιχεία και τα στοιχεία απόλαυσης του πεντάστιχού τους. «*Ήθελα να είναι αστείο, να έχει καλή ομοιοκαταληξία και να ταξιδεύει σε πολλούς τόπους ο ήρωας και μετά να τα κάνει θάλασσα*», μας είπε η Μαριέττα (βλ. Εικ. 2).

Ένα ποντίκι από την Σερβία
έκανε ένα μακρινό ταξίδι στην Ιαπωνία
με το μαγικό χαλί πήγαινε από δω κι από κει
μα [μ]πέρδεψε το δρόμο για την Ιαπωνία και τελικά πήγε βουλγαρία [sic]
Ο χαζούλης ποντικός από την Σερβία

Εικ. 2: Limerick Μαριέττας (ελεύθερο θέμα)

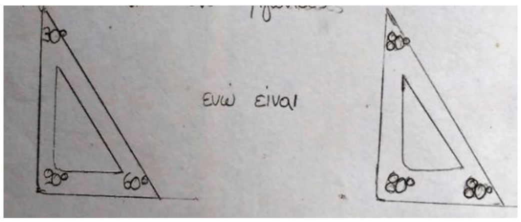
Θέλοντας να αιτιολογήσει όμως και τις α-νόητες επιλογές της στο περιεχόμενο, εξήγησε: «*Δε γίνεται να ταξιδεύει με μαγικό χαλί. Αφού είπαμε ότι δεν υπάρχει. Και το ποντίκι δε γίνεται να πάει απ' τη Σερβία στην Ιαπωνία και μετά να κατέληξε Βουλγαρία*» [δείχνοντας με τα χέρια τη μακρινή απόσταση]. Όταν πλέον ήρθε η ώρα για παραγωγή limerick για τα τρίγωνα, ασχολήθηκε και πάλι αρκετά με τη φόρμα του ποιήματος. Στη συνέχεια κατάφερε όμως να τη συνδυάσει και με επιστημονικές α-νοησίες, φανερώνοντας γνώσεις και εμπειρίες της για τα τρίγωνα. Όταν τη ρωτήσαμε γιατί επέλεξε ένα σκαληνό τρίγωνο, απάντησε: «*Δε γίνεται να είναι ένα σκαληνό τρίγωνο, δηλαδή ένα τρίγωνο με 3 άνισες πλευρές και 3 άνισες γωνίες… αφού οι πλευρές του δεν είναι ίσες το ίδιο δε θα ήταν και οι γωνίες του. Αλλά οι γωνίες του είναι ίσες, για αυτό είναι παράξενο*» (βλ. Εικ. 3).

Ήταν ένα τριγωνάκι σκαληνό από τις Τριγωνίσες
που οι μοίρες του ήταν ίσες.
Και μια μέρα αποφάσισε να τις αλλάξει,
μα ο αστυνόμος τον σταμάτησε για να το προφυλάξει,
το άτυχο τριγωνάκι από τις Τριγωνίσες.

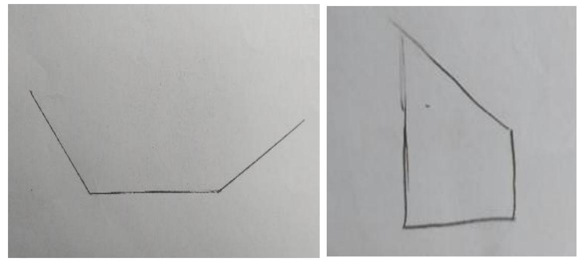
Εικ. 3: Limerick Μαριέττας (τρίγωνα)

Αν και στην αρχή του πειράματος η Μαριέττα είχε απορρίψει την αξία αναζήτησης α-νοησιών, εδώ φάνηκε να απολαμβάνει τη διάσχιση του επιστημονικού ορίου της έννοιας, σχεδιάζοντας μάλιστα μόνη της και ένα μη-παράδειγμα, με αυτεπίγνωση για την εννοιολόγησή της: «*Α! Μπορώ να βάλω, επειδή ξέρω ότι το άθροισμα των γωνιών είναι 180 μοίρες στα τρίγωνα πάντα, μπορώ να βάλω εδώ πέρα να είναι 80, 80 και 80. Να είναι ακόμα πιο παράξενο*» (βλ. Εικ. 4). Στη σηματοδότηση του επιστημονικού ορίου, χρησιμοποιούσε συχνά ως πόρους γνώσης τα σχολικά βιβλία, έχοντας την ικανότητα να κατανοεί το γλωσσικό ύφος των μαθηματικών ορισμών. Έτσι, νωρίτερα είχε διαβάσει φωναχτά σχετικό απόσπασμα από το σχολικό βιβλίο μαθητή για να αιτιολογήσει σε έναν συμμαθητή της το κατά πόσο το άθροισμα γωνιών σε *όλα* τα τρίγωνα είναι 180^o: «*Αν δεν ήταν έτσι* [εννοεί για όλα τα τρίγωνα] *θα έλεγε τους τύπους των τριγώνων* [στα οποία είναι έτσι]». Κατά βάση η ασφάλεια που ένιωθε η Μαριέττα για το νόημα της έννοιας τρίγωνο τη βοήθησε να προκαλέσει και να ξεπεράσει συνειδητά με άνεση τα επιστημονικά της όρια. Δηλωτικό αυτής της άνεσης ήταν και η ονοματοποίηση του τόπου καταγωγής του τριγώνου (Τριγωνίσες).

Ο Βαγγέλης, όπως και άλλοι μαθητές στο διδακτικό πείραμα, κατά την παραγωγή limerick για τα τρίγωνα δυσκολεύτηκε να ενσωματώσει σε αυτό επιστημονικές α-νοησίες και ταυτόχρονα να ακολουθήσει την πειθαρχική φόρμα του ποιήματος.



Εικ. 4: Ένα 'σκαληνό' τρίγωνο (σχήματα Μαριέττας)



Εικ. 5: α) α-νόητο τρίγωνο, β) τραπέζιο (σχήματα Βαγγέλη)

Στράφηκε έτσι στον ανιμισμό («*Ένα τρίγωνο πώς θα φτάνει τα πεντάλ και το τιμόνι;»)* και χρειάστηκε αρκετή συζήτηση με παραγωγή παραδειγμάτων της έννοιας για να προχωρήσει και να γράψει για ένα τρίγωνο που ήθελε να γίνει αμβλυγώνιο μα κατέληξε ως κάτι διαφορετικό. Στα παραδείγματα ανέφερε τη μορφή του αμβλυγωνίου τριγώνου, με μία αμβλεία και δύο οξείες γωνίες, σχεδιάζοντας επεξηγηματικά και την αναπαράστασή του. «*Δεν υπάρχει ένα τρίγωνο με 2 αμβλείες γωνίες!*» απάντησε με σιγουριά όταν τον προκαλέσαμε. «*Γιατί μετά θα γίνει έτσι*» [σχεδιάζει το α, Εικ. 5], συνέχισε και έδειξε τις 2 αμβλείες γωνίες. Προχώρησε μάλιστα και με άλλα μη-παραδείγματα για είδη τριγώνων. Έτσι, ένα οξυγώνιο δεν μπορεί, όπως είπε, να έχει δύο οξείες και 1 ορθή, γιατί θα ήταν ορθογώνιο. Αλλά και ένα ορθογώνιο τρίγωνο δεν μπορεί να έχει 2 ορθές και 1 αμβλεία γιατί θα ήταν τραπέζιο [σχεδιάζει το β, Εικ. 5].

Ήταν ένα τρίγωνο ορθογώνιο από το Τριγωνέξη [sic]
κι έκανε ένα ταξίδι με ένα RS6
Είχε 2 ορθές και 1 αμβλεία
και πήγαινε στην Μαθηματική Εταιρία
Αυτό το ονειροπόλο τρίγωνο απ΄ το Τριγωνέξη [sic]

Εικ. 6: Limerick Βαγγέλη

Ο Βαγγέλης, παρόλο που στην ολομέλεια της τάξης δεν συμμετείχε στο μάθημα και σπανίως αιτιολογούσε τις απόψεις του, εδώ δεν παραιτήθηκε από το διάλογο. Θέλησε να βελτιώσει το limerick του (Εικ. 6), εξηγώντας και αιτιολογώντας τις επιστημονικές α-νοησίες του. Με τα μη-παραδείγματα τριγώνων που έφτιαξε δεν φάνηκε να αναπαράγει άλλα 'διδαγμένα' παραδείγματα, μα χρησιμοποίησε ως πόρους προσωπικές του εμπειρίες, ισχυροποιώντας έτσι την εννοιολόγησή του για το τρίγωνο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ενασχόληση των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα με limerick και α-νοησίες βοήθησε στην έκφραση και την εννοιολόγησή τους για τα τρίγωνα. Μπήκαν σε διαδικασία να ψάξουν για αντι-νοήματα, δίνοντάς τους τόσο ανιμιστικό όσο και επιστημονικό χαρακτήρα. Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του limerick, όπως το χιούμορ και κυρίως η αντίθεση ρεαλισμού/φαντασίας (Κόκκινος, 2008; Τσιλιμένη, 2005) δημιούργησαν νοηματικά κενά (Iser, 1980) και ώθησαν τους μαθητές να επιστρατεύσουν εμπειρίες και γνώσεις τους, να αποδομήσουν και να επαναδομήσουν έννοιες.

Παρόλα αυτά, τόσο η πειθαρχική ποιητική φόρμα όσο και ασθενείς τους επιστημονικές εννοιολογήσεις τούς δυσκόλεψαν ενίοτε, οδηγώντας τους συχνά στον εύκολο ανιμισμό. Ο διάλογος όμως σε συνδυασμό με το γράψιμο βοήθησαν στην επεξήγηση του τρόπου σκέψης. Αρκετοί μαθητές προχώρησαν πέρα από την ηχητική απόλαυση των limericks στο συνειδητό πέρασμα του ορίου νοήματος/α-νοησίας, που ενίοτε φάνηκαν να απολαμβάνουν κιόλας. Αν και οι περισσότεροι, λόγω χρονικού περιορισμού, δεν πρόλαβαν να προκαλέσουν έντονα τα επιστημονικά όρια νοημάτων/α-νοησιών, κατά τη στο(ί)χιση των ιδεών τους προκλήθηκαν και αποκάλυψαν μαθηματικούς πόρους τους, εξέφρασαν εμπειρίες και γνώσεις τους (επιστημονικά αποδεκτές και μη), επανεξέτασαν ή και ισχυροποίησαν ως ένα βαθμό επιστημονικές εννοιολογήσεις τους στα Μαθηματικά. Η ήδη ισχυρή εννοιολόγηση για παράδειγμα της Μαριέττας για την έννοια τρίγωνο τής έδωσε τη δυνατότητα να γενικεύσει επαγωγικά τα χαρακτηριστικά αυτής, με αποτέλεσμα να περάσει με άνεση συνειδητά το όριο νοήματος/α-νοησίας και να αποδομήσει εύκολα την εικόνα του, φτιάχνοντας μη-παραδείγματα. Όμως και μαθητές όπως ο Βαγγέλης, στην προσπάθειά τους να αποδομήσουν την έννοια για να φτιάξουν limerick για αυτήν, 'χάλασαν' παραδείγματά της και έφτιαξαν μη-παραδείγματα διευρύνοντας τον προσωπικό τους χώρο παραδειγμάτων, τροφοδοτώντας έτσι ουσιαστικά τη μάθησή τους (Yanuarto, 2016; Watson & Mason, 2005). Σχεδίασαν επίσης και αναπαραστάσεις παραδειγμάτων και μη-παραδειγμάτων τριγώνων, σημειώνοντας έτσι τη σημασία της σχέσης αυτών με λέξεις και έννοιες γενικά, και ειδικά στη διδασκαλία τριγώνων, όπως τόνισε και η Vighi (2003). Η πρόκληση πάντως που δέχτηκαν οι μαθητές δεν ήταν αποκλειστικά γνωστικής φύσης, μα αφορούσε και τον τρόπο εργασίας τους. Οι α-νοησίες και τα μη-παραδείγματα λειτούργησαν ως βάση για καλλιέργεια της δεξιότητας επεξήγησης-αιτιολόγησης, που έχει τονιστεί στο Νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για το δημοτικό σχολείο και σε έρευνες για τη διδασκαλία και μάθηση στα Μαθηματικά. Ταυτόχρονα ώθησαν κάποιους μαθητές να έρθουν πιο κοντά στην επιστήμη και να συμμετάσχουν πιο ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία σε σχέση με το αρχικό προφίλ τους αλλά και κατά τις πρώτες μας συναντήσεις στο διδακτικό πείραμα, όπου απέφευγαν ή εγκατέλειπαν συζητήσεις, και ιδίως όσες είχαν επιστημονικό περιεχόμενο.

Φυσικά, η έρευνα επιδέχεται προεκτάσεις, διδακτικές και ερευνητικές. Ο χρόνος για παράδειγμα αποτέλεσε σημαντικό περιορισμό της. Τόσο σε ατομικό επίπεδο, αφού όπως προαναφέραμε δεν πρόλαβαν οι μαθητές να προκαλέσουν έντονα τα επιστημονικά όρια νοημάτων/α-νοησιών, όσο και σε διαπροσωπικό, αφού δεν προκάλεσαν ιδιαίτερα ο ένας τον άλλο ως προς επιστημονικές α-νοησίες. Η ανοικείωση που είχαν με αυτές καθώς και το μη-διαλογικό κλίμα τάξης που βίωναν μέχρι πρότινος στην αίθουσα διδασκαλίας τους απαιτούσαν επιπλέον χρόνο για τέτοιου είδους πρόκληση. Δεν γέμισαν λοιπόν νοηματικά κενά ως ακροατές limericks συμμαθητών τους στο βαθμό που θα θέλαμε. Περισσότερο μείναμε σε αυτοαναφορικό επίπεδο, με τους συγγραφείς-αναγνώστες των προσωπικών τους limericks να δημιουργούν τέτοια κενά και να συζητούν για να τα εξηγήσουν. Βοηθητική θα ήταν η γραφή limerick ως συνήθης πρακτική μιας τάξης καθόλη τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, ενώ κάποιος εκπαιδευτικός θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει τις φάσεις του διδακτικού πειράματος που εφαρμόσαμε ως σενάριο εξοικείωσης των μαθητών με το ποιητικό είδος και τις α-νοησίες. Επιπλέον, μεγαλύτερος αριθμός μαθητών και περισσότερες μαθηματικές έννοιες σε μελλοντικές ερευνητικές προσπάθειες θα φέρουν επιπλέον δεδομένα. Άλλωστε με τη δημοσιοποίηση των limericks στην ολομέλεια της τάξης, είχαμε θετικές ενδείξεις για όσα μας απασχόλησαν ερευνητικά. Οι ποιητές ήθελαν να παρουσιάσουν τα έργα τους και κάμποσοι συμμαθητές απόλαυσαν τη δημιουργία limericks και μη-παραδειγμάτων. Αν και η στ(ο)ίχιση ιδεών λοιπόν ήταν απαιτητική διαδικασία, τα μαθησιακά οφέλη ανοίγουν ένα νέο παράθυρο στην εκπαιδευτική χρήση των αντι-νοημάτων και μη-παραδειγμάτων στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Καλογήρου, Τ. (2009). Τύχη-τέχνη-τόλμη: τα παιδιά ως δημιουργοί ποιημάτων, στο Τ. Καλογήρου, Τέρψεις και ημέρες ανάγνωσης (Α΄ τόμος, σσ. 27-57). Αθήνα: Σχολή Ι. Μ. Παναγιωτοπούλου.

Κόκκινος, Δ. (2008). Η σχέση του Γιώργου Σεφέρη με το έργο του Edward Lear και τα παιδικά λίμερικς, Παιδαγωγικά Ρεύματα στο Αιγαίο,3,σ.54-67.

Τσιλιμένη, Τ. Δ. (2005). Limericks: το «ά-λογο» της Φαντασίας στην εκπαίδευση, παιχνίδια λόγου και δημιουργικότητας, Τζ. Καλογήρου & Κ. Λαλαγιάννη (Επιμ.), Η Λογοτεχνία στο Σχολείο: Θεωρητικές Προσεγγίσεις και διδακτικές Εφαρμογές στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, σσ. 243-256, Αθήνα: Τυπωθήτω–Δαρδάνος.

Bouissac, P. (1977). Decoding limericks: A structuralist approach. Semiotica.19 (1-2), pp. 1-12.

Colley, A. (1988). Edward Lear's Limericks and the Reversals of Nonsense. Victorian Poetry, 26 (3), pp. 285-299.

Elaiwi, M. H. (2007). Language and Difference: Heidegger, Saussure, and Derrida. Journal of the College of Languages, (17), pp. 103-119.

Gregory, R. L. (1988). Humours of science, Perception, 17, pp. 561-563.

Iser, W. (1980). The Act of Reading, A Theory of Aesthetic Response. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Lecercle, J. J. (2012). Philosophy of nonsense: The intuitions of Victorian nonsense literature. London: Routledge.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2(4), pp. 435-440.

Stewart, S. (1989). Nonsense: aspects of intertextuality in folklore and literature, Baltimore, MD, John Hopkins University Press.

Vighi P. (2003). The Triangle as a Mathematical Object. Mathematics Department, University of Parma, European Research in Mathematics Education III, Proceedings CERME, Italy, pp. 1-10.

Watson, A., & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Yanuarto, W. N. (2016). Students' Awareness on Example and Non-Example Learning in Geometry Class. International Electronic Journal Of Mathematics Education, 11(10), 3511-3519.

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ (PATTERNING) ΣΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ

–

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ

Μαριάννα Τζεκάκη,[1]Ξένια Βαμβακούση[2], Μαρία Καλδρυμίδου[3]

[1]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, tzekaki@auth.gr

[2]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, xvamvak@uoi.gr

[3]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, mkaldrim@uoi.gr

Στην εισήγηση επιδιώκεται μια πρώτη συνθετική παρουσίαση των ερευνητικών αξόνων στους οποίους κινήθηκε η έρευνα σχετικά με τις κανονικότητες (patterning) στις ηλικίες 4-8, με συστηματοποίηση των βασικών ερευνητικών εννοιολογήσεων, τεκμηριώσεων, μεθοδολογιών και αποτελεσμάτων για αποτίμηση και κατευθύνσεις σε νέες σχετικές έρευνες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο προβληματισμός για μια υψηλού επιπέδου μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες (4 – 8 χρόνια) άρχισε ήδη από τη δεκαετία του ’90. Την ίδια εποχή αρχίζει κι η συστηματική έρευνα για μελέτη δυνατοτήτων ανάπτυξης επίγνωσης για κανονικότητες και δομές, ως σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας. Ο αγγλικός όρος ‘pattern’ αποδίδεται στα ελληνικά με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, εκ των οποίων οι όροι μοτίβο, πρότυπο και κανονικότητα έχουν χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (βλ. τελευταία ελληνικά προγράμματα σπουδών, αντίστοιχα διεθνή). Υποστηρίζεται γενικά ότι η εξοικείωση με τις κανονικότητες και τις δομές είναι σημαντικές για τη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών με αναφορά στις ηλικίες 4 με 8 (Clements & Sarama, 2009) και αποτελούν βάση για την οργάνωση και την κατανόηση σύνθετων μαθηματικών καταστάσεων, αλλά και για τη γενίκευση σε μεγαλύτερες ηλικίες (Rivera, 2013).

Μέχρι σήμερα έχει πραγματοποιηθεί ένας μεγάλος αριθμός ερευνών σχετικών με την αξιοποίηση των κανονικοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση και για το λόγο αυτό στην εισήγηση επιδιώκουμε μια πρώτη συνθετική παρουσίαση των ερευνητικών αξόνων στους οποίους κινήθηκε η σχετική έρευνα. Από τους άξονες αυτούς στο κείμενο που ακολουθεί θα παρουσιαστούν (α) οι εννοιολογικοί προσδιορισμοί της έννοιας και των ειδών των κανονικοτήτων, (β) τεκμηριώσεις σύνδεσης με τη μαθηματική ανάπτυξη στους διαφορετικούς άξονες περιεχομένου (γ) έρευνες αναφορικά με τις ικανότητες και τις στρατηγικές ανάπτυξης κανονικοτήτων και δ) αποτίμηση και κατευθύνσεις για νέες έρευνες.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΙ

Κανονικότητες και πρότυπα

Ο ορισμός της κανονικότητες ή του προτύπου (pattern)δεν είναι απλός καθώς δεν αποτελεί μια διακριτή μαθηματική έννοια.

Ένας αρχικός προσδιορισμός περιγράφει το patternως μια διαδοχή στοιχείων ποικίλης φύσης (αριθμοί, σχήματα, ήχοι, σύμβολα ….) που οργανώνονται με βάση ένα κανόνα. Ο προσδιορισμός αυτός συνεπάγεται την κανονικότητα (regularity) και, άρα, την προβλεψιμότητα (predictability) (Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011; Radford, 2008). Η φύση των στοιχείων του pattern είναι καθοριστική, κατά τον Liljedahl (2004),ο οποίος υποστηρίζει ότι η έννοια της κανονικότητας είναι ένας πρωταρχικός όρος που ορίζεται μέσα στο σύνολο των ειδικών μορφών κανονικοτήτων στο οποίο ανήκει (πχ. ηχητικές, χωρικές, αριθμητικές, κλπ.) και έχει χαρακτηριστικά που προσδιορίζονται εντός αυτού του συνόλου (για παράδειγμα ένα ηχητικό και ένα χωρικό μοτίβο, ακόμα κι αν έχουν την ίδια δομή ΑΒΒ, είναι διαφορετικής φύσης).

Επεκτείνοντας την παραπάνω θεώρηση, οι Papic και άλλοι (2011) προσδιορίζουν τα patterns που αφορούν τα Μαθηματικά ως α) μια κανονικότητα σε ένα αντικείμενο, κάποια από τα στοιχεία του οποίου σχετίζονται με ένα συστηματικό τρόπο, β) ένα διατεταγμένο σύνολο αντικειμένων, κάθε στοιχείο του οποίου συνδέεται με το επόμενο με μια συγκεκριμένη σχέση, και γ) δύο διατεταγμένα σύνολα αντικειμένων, τα στοιχεία των οποίων βρίσκονται σε αντιστοιχία. Οι παραπάνω ερευνητές επεκτείνουν έτσι τη σχετική έννοια συμπεριλαμβάνοντας και στοιχεία που είναι οργανωμένα με βάση μια δομή (όπως πχ. ένα ρολόι), ενδογενή ή κατασκευασμένη ή εισαχθείσα από ένα μαθηματικό σύστημα (Mulligan, Mitchelmore, English, & Crevensten, 2013).

Συνθέτοντας τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι καταγράφονται διαφορετικές προσεγγίσεις στην έρευνα, αλλά τα θεμελιώδη συστατικά των κανονικοτήτων - προτύπων σε όλες τις θεωρήσεις, είναι οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που τα αποτελούν και που είτε επιβάλλουν την οργάνωσή τους σε μια δομή, είτε επιτρέπουν την πρόβλεψη επόμενων όρων της διαδοχής τους (Radford, 2008; Rivera & Becker, 2009; Warren & Cooper, 2008).

Μορφές κανονικοτήτων

Υπάρχει μια ποικιλία κατηγοριών και όρων αναφορικά με τις δραστηριότητες στις κανονικότητες και πρότυπα που εμφανίζονται στη σχετική έρευνα.

Αναγνωρίζονται και αναφέρονται ευρέως από τους ερευνητές τρεις ειδικές μορφές patterns,τα επαναλαμβανόμενα, τα αναπτυσσόμενα ή τα patterns με μορφή σχέσης (Lünken, 2018; Mulligan, Mitchelmore, & Prescott, 2006; Threlfall, 1999). Όσον αφορά τα επαναλαμβανόμενα, περαιτέρω διάκριση γίνεται με βάση τον τύπο της μονάδας επανάληψης (π.χ. ΑΒΑΒ, ΑΒΑΑΒΑ, Liljedahl, 2004; Papic et al., 2011; Threlfall, 1999), αλλά και τις παραμέτρους που μεταβάλλονται (π.χ. μόνο το σχήμα, ή σχήμα και μέγεθος, κ.λπ., Fyfe, Evans, Eisenband Matz, Hunt, & Alibali, 2017; Skoumpourdi, 2013). Όσον αφορά τα αναπτυσσόμενα, οι Rivera και Becker (2009) τα ομαδοποιούν σε *προσθετικά* ή *πολλαπλασιαστικά*. Ο Rivera (2013) διακρίνει επίσης τα patterns ως προς τα στοιχεία τους σε *αριθμητικές* και *γεωμετρικές μορφές*, ενώ η Warren (2005) συμπεριλαμβάνει κανονικότητες με στοιχεία σε μορφή σχημάτων, χρωμάτων, κινήσεων, αίσθησης και ήχου (ιδιαίτερα για τις μικρές ηλικίες). Τα σχετικά αποτελέσματα σχετίζονται με αυτές τις δράσεις.

Στις μορφές αυτές οι Mulligan και άλλοι (2006) προσθέτουν *αλγεβρικές μορφές* (τριγωνικοί σχηματισμοί με αριθμούς), *μετρικούς σχηματισμούς* (με επανάληψη μοναδιαίων στοιχείων) και *διαγράμματα*, αλλά και *δισδιάστατους* ή *τρισδιάστατους σχηματισμούς* (Mulligan et al., 2013). Παρόμοια η Ma (2009) αναφέρεται σε εικονομορφικά πρότυπα (κυρίως γεωμετρικά) που οδηγούν στη διατύπωση λεκτικών κανόνων.

Στην κατηγορία αυτή οι Chua και Hoyles (2013) που μελετούν αντίστοιχα σχηματικές/εικονιστικές μορφές που οδηγούν σε αριθμητικές σχέσεις και παραπέμπουν σε κανόνες (τύπου συνάρτησης), διακρίνουν τις κατηγορίες τους με βάση τη μορφή των σχηματισμών αλλά και τον τύπο της συνάρτησης στον οποίο παραπέμπει η κάθε μορφή (πχ. κάποιοι οδηγούν σε τύπους γραμμικών συναρτήσεων, π.χ. 5+3ν, ενώ άλλοι σε τύπους δευτεροβάθμιων συναρτήσεων, πχ. $ν^2$ +2ν).

Από τα παραπάνω προκύπτει μια μεγάλη ποικίλα κατηγοριών στις σχετικές έρευνες, οι οποίες μπορούν να οργανωθούν στους ακόλουθους άξονες, με μαθηματικό κυρίως περιεχόμενο (δηλαδή χωρίς ηχητικά ή κινητικά πρότυπα) και σχετικούς συνδυασμούς: *Περιεχόμενο ή φύση των στοιχείων του pattern* (εικονομορφικές, σχηματικές, γεωμετρικές, μετρικές, αριθμητικές, αλγεβρικές, κ.ά.), *Εξέλιξη* (επαναλαμβανόμενες, αναπτυσσόμενες, αναπτυσσόμενες αναδρομικά, κ.ά.), *Χωρικές διαστάσεις της εξέλιξης* (π.χ. μονοδιάστατο, δισδιάστατο, τρισδιάστατο), *Δομή κανονικότητας* (στα επαναλαμβανόμενα: ΑΒ, ΑΒΒ, ΑΒΒΑ, κλπ. – στα αναπτυσσόμενα: αθροιστική, πολλαπλασιαστική, κ.ά.), *Υλικά* (χειραπτικά, εικονικά ή/και συμβολικά). Οι έρευνες πραγματοποιούνται σε κάποιες κατηγορίες.

Δραστηριότητες πάνω στις κανονικότητες

Στην ενότητα αυτή είναι σημαντικό να προστεθούν και οι προτεινόμενες από τους ερευνητές δραστηριότητες κανονικοτήτων που ξεκινούν από τις μικρότερες αλλά επεκτείνονται και στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Για τις μικρές ηλικίες αναφέρονται έργα κανονικοτήτων που αφορούν αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ όψεως ή χωρίς, συνέχιση ή επέκταση κανονικοτήτων και αναγνώριση δομικά όμοιων κανονικοτήτων. Στις δράσεις, προστέθηκαν η δημιουργία κανονικότητας (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011), η εύρεση στοιχείου που λείπει (Warren, 2005), η αλλαγή υλικού (Clements & Sarama, 2009). Η εύρεση της μονάδας επανάληψης ή της μικρότερης μονάδας όπως και η περιγραφή της θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική δράση από πολλούς ερευνητές (Mulligan, Mitchelmore, English, & Crevensten, 2013; Clements & Sarama, 2009), όπως και η πρόβλεψη μεταγενέστερων όρων, δηλαδή η (κοντινή ή μακρινή) γενίκευση (Ma, 2009). Οι δύο αυτές δράσεις, διάκριση μονάδας και πρόβλεψη όρων, καθώς και η σύνδεση αυτών με τη θέση τους θεωρούνται πολύ σημαντικές καθώς οδηγούν σε γενικεύσεις και συμβολισμό (Michael, Elia, Gagatsis, Theoklitou, & Savva, 2006; Lannin, 2005). Η γενίκευση είναι σημαντική διάσταση τόσο για τα μεταγενέστερα αριθμητικά ή αναπτυσσόμενα patternsπου οδηγούν σε τύπους, όσο και στις μικρότερες ηλικίες σε λεκτικές εξηγήσεις (Lüken, Peter-Koop, & Kollhoff, 2014), ζωγραφιές ή άλλη μορφή συμβολισμού (Mulligan, et al., 2013).

Συνθέτοντας, στις έρευνες, οι δραστηριότητες των μαθητών με κάθε μορφής pattern περιλαμβάνουν τα ακόλουθα: *αντιγραφή, αναπαραγωγή, επέκταση, μεταφορά σε άλλο υλικό, αναγνώριση της μονάδας επανάληψης, αναγνώριση ίδιων μονάδων επανάληψης, εύρεση του στοιχείου που λείπει* (παρεμβολή), *εύρεση λάθους* (Wijns, Torbeyns, De Smedt, & Verschaffel, 2019), *γενίκευση* (εύρεση τύπου, *εύρεση όρου σε συγκεκριμένη θέση*, Lannin, 2005**).**

ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όσοι ερευνητές ασχολούνται με τις κανονικότητες υποστηρίζουν ότι είναι σημαντικές καθώς «*... τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη και η γλώσσα των κανονικοτήτων*» (Steen, 1990, σελ. 5, στο Fox, 2006) και η εξοικείωση με αυτές ενισχύσει τη μαθηματική σκέψη καθώς ασκεί στην ικανότητα εύρεσης κανόνων και δομών, τόσο σε καταστάσεις της καθημερινότητάς όσο και σε συμβολικά αντικείμενα ή σύμβολα, όπως είναι και τα στοιχεία της άλγεβρας (Vogel, 2005).

Γενικά, οι συνδέσεις που γίνονται με τα Μαθηματικά αφορούν τους αριθμούς (π.χ. επαναλαμβανόμενη δομή δεκαδικού συστήματος, αθροιστικές και πολλαπλασιαστικές δομές), τη γεωμετρία (π.χ. κανονικά σχήματα), τις μετρήσεις (πχ. δημιουργία και επανάληψη μονάδας μέτρησης) και την επεξεργασία δεδομένων (πχ. εύρεση κανόνων και σχέσεων) (Lüken, 2018; Mulligan, Mitchelmore & Prescott, 2006). Η σύνδεση με την αλγεβρική σκέψη (Fox, 2006) όπως και με τις συναρτήσεις (Warren, 2005) αποτελεί έναν άλλο άξονα, στον οποίο έχουν δουλέψει πολλοί ερευνητές (βλ. Μα, 2009; Papic et al., 2011). Γενικότερα, είναι κοινή θέση ότι ο σχηματισμός γενικεύσεων, αφαιρέσεων και συμβολισμού που εμπλέκουν οι δραστηριότητες στις κανονικότητες και τα πρότυπα αποτελούν απαραίτητο στοιχείο της μαθηματικοποίησης (Lükenet al., 2014).

Αρκετές έρευνες έχουν επικεντρωθεί στη διερεύνηση της σύνδεσης των επιδόσεων στις κανονικότητες με τις επιδόσεις σε άλλους μαθηματικούς τομείς (πχ. αριθμητική) ή άλλες γνωστικές ικανότητες (πχ. ανάγνωση, μνήμη κλπ., Fyfe κ.ά., 2017). Κάποιες επίσης διερευνούν κατά πόσο οι υψηλές επιδόσεις στο patterning αποτελεί προβλεπτικό παράγοντα μεταγενέστερων μαθηματικών επιδόσεων (Rittle-Johnson, Zippert, & Boice, 2016).

Συνθέτοντας τα παραπάνω, διαφαίνεται ότι διαφορετικές μορφές και δράσεις με κανονικότητες υποστηρίζουν διαφορετικές πτυχές των μαθηματικών εννοιών. Έτσι, τα *επαναλαμβανόμενα μοτίβα* (με βασικό χαρακτηριστικό τον κυκλικό χαρακτήρα και τη μονάδα επανάληψης) και οι *δράσεις* που ζητούν συνέχεια, συμπλήρωση, εύρεση στοιχείου που λείπει, εύρεση λάθους, εύρεση μονάδας επανάληψης κλπ. μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να προσεγγίσουν μαθηματικά αντικείμενα ή διεργασίες που παρουσιάζουν συστηματικά επαναλαμβανόμενα φαινόμενα, όπως τα συστήματα αρίθμησης, οι κανονικότητες στα σχήματα, η επανάληψη μονάδων στη μέτρηση κ.ά. (Liljedahl, 2004), η *γενίκευση και ο συμβολισμός* σε σημαντικές μαθηματικές ενότητες όπως πχ. η επίλυση ενός προβλήματος (Rivera & Becker, 2009; Radford, 2008) ή οι εξισώσεις (McNeil & Alibali, 2005). Αντίστοιχα, οι αριθμητικές κανονικότητες και οι δράσεις που δεν ζητούν μόνο να βρεθούν κάποια επόμενα στοιχεία ή ο τύπος/συνάρτηση που τα παράγει (πχ. μια αριθμητική διαδοχή 1, 5, 8, ..), αλλά κάποιο/α στοιχείο/α της κανονικότητας που βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θέση, υποστηρίζει, ακόμα και από τις μικρότερες ηλικίες, την συναρτησιακή σκέψη.

ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΩΝ

Η αναγνώριση ότι οι μικροί μαθητές (4-8 έτη, νηπιαγωγείο και Α' και Β' Δημοτικού) διαθέτουν την ικανότητα ανάπτυξης κανονικοτήτων είναι κοινός τόπος στο σύνολο της βιβλιογραφίας. Τα ευρήματα των ερευνών για τις επιδόσεις των παιδιών σε έργα που εμπλέκουν κανονικότητες αναδεικνύουν τα βασικά είδη κανονικοτήτων και τα είδη των δράσεων που τα μικρά παιδιά αντιμετωπίζουν με επιτυχία, χωρίς ειδική διδακτική προσέγγιση. Γενικά, ακόμα και παιδιά προσχολικής ηλικίας είναι σε θέση να εξερευνήσουν επαναλαμβανόμενα πρότυπα, γλωσσικά πρότυπα και κάποια γραμμικά κατά τη διάρκεια των ελεύθερων δραστηριοτήτων τους (Fox, 2006; Waters, 2004) και να αντιλαμβάνονται την κανονικότητα σε ένα μοτίβο (Lüken, 2018).

Το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών στις μικρές ηλικίες επικεντρώνεται στη διερεύνηση των επιδόσεών σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα, όπου διαπιστώνεται η ικανότητα της πλειοψηφίας των παιδιών να αναπαράγουν, να συνεχίζουν και να δημιουργούν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο τύπου ΑΒ ή ΑΒΓ (βλ. π.χ. Skoumpourdi, 2013; Παπαδοπούλου, 2010; Warren & Cooper, 2008). Πιο σύνθετες μορφές, ακόμα και αυτή του τύπου ΑΒΒ, φαίνεται να προκαλούν μεγαλύτερες δυσκολίες, ενώ το υλικό από το οποίο αποτελείται το pattern δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά. Ωστόσο, η ανάλυση του pattern στα δομικά στοιχεία του και ο εντοπισμός της μονάδας επανάληψης αναδεικνύεται πιο απαιτητικό ζήτημα, γεγονός που οδήγησε τους ερευνητές να θεωρήσουν ότι ο εντοπισμός της μονάδας επανάληψης αποτελεί μαζί με τη συμπλήρωση (εύρεση του στοιχείου που λείπει), και την αναγνώριση (ποια patterns είναι ίδια; είναι αυτό ένα pattern;) σε ανώτερο επίπεδο της ανάπτυξης της αντίστοιχης ικανότητας (Wijns et al., 2019).

Τα αναπτυσσόμενα patterns, που αποτελούν μια πρώιμη εισαγωγή στη συναρτησιακή σκέψη, φαίνεται να αποτελούν πιο απαιτητικό πεδίο, με αποτέλεσμα στις μικρότερες ηλικίες να δίνεται λιγότερη έμφαση. Αν και οι επιδόσεις των μικρών παιδιών δεν έχουν μελετηθεί συστηματικά (οι έρευνες αφορούν κυρίως παιδιά των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σχολείου και των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου), φαίνεται ότι σε αυτό το πεδίο καθοριστικό ρόλο παίζει το υλικό και η δομή (μονοδιάστατη ή δισδιάστατη αύξηση). Αρκετοί ερευνητές επισημαίνουν ότι παιδιά μέχρι Β' Δημοτικού, επιτυγχάνουν σε υψηλά ποσοστά σε επαναλαμβανόμενα patterns, αλλά λιγότερο σε αυξανόμενα γεωμετρικά ή αριθμητικά (Παπαδοπούλου, 2010; Warren, 2005; κ.ά.).

Σχετικά με τις κανονικότητες δόμησης αντικειμένων διαφόρων τύπων (Mulligan et al., 2013) έχει αναλυτικά μελετηθεί η αναπτυξιακή πορεία των μικρών παιδιών, μέσα από ένα συστηματικό πρόγραμμα δραστηριοτήτων, από το προ-δομικό, στο δομικό επίπεδο (ενδιάμεσα επίπεδα: αναδυόμενο και μερικώς δομικό). Η θεώρηση αυτή, φέρνει σε πρώτο επίπεδο τη σημασία των αναλυτικών προγραμμάτων και της διδασκαλίας, μια που πλήθος ερευνών -(που δεν εξετάζονται αναλυτικά στην παρούσα εργασία)- αναδεικνύει τη θετική επίδραση κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων και προγραμμάτων.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΩΝ

Μελετώντας τις δράσεις των μαθητών με τις κανονικότητες κάποιοι ερευνητές μελέτησαν επίσης και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά στις μικρές ηλικίες. Μια θέση κοινής παραδοχής είναι ότι τα παιδιά σε δράσεις κυρίως αντιγραφής, αναπαραγωγής, επέκτασης ή μεταφοράς σε άλλο υλικό, κάνουν αντιστοιχίσεις ένα προς ένα στο προτεινόμενο πρότυπο ή μοντέλο ή ότι ακολουθούν μια ρυθμική προσέγγιση που στηρίζεται στη διαδοχή (η οποία όμως δεν μπορεί να οδηγήσει στη γενίκευση κατά τον Threlfall, 1999), όπως οι αντίστοιχες δράσεις με εύρεση της μονάδας επανάληψης ή το 'σπάσιμο σε κομμάτια' (Mulliganet al, 2013).

Οι Papic και άλλοι (2011) κατηγοριοποιούν τις στρατηγικές των παιδιών σε άμεση αντιστοίχιση, εναλλαγή, βασική μονάδα επανάληψης, ολοκληρωμένη μονάδα επανάληψης. Αντίστοιχα, η Lüken (2018), συνοψίζοντας σχετικά ευρήματα, καταγράφει πέντε στρατηγικές των μαθητών κατά την επίλυση δράσεων με κανονικότητες: στην 1η δεν υπάρχει καμία αναφορά στο σχέδιο, εκτός από την ολιστική αναπαραγωγή του μοτίβου, στη 2η υπάρχει επικέντρωση σε κάποια χαρακτηριστικά, στην 3η γίνεται κάποια σύγκριση και ταξινόμηση, στην 4η εστίαση στην διαδοχή, ενώ τελικά στην 5η γίνεται επικέντρωση στη μονάδα επανάληψης. Κατά την ερευνήτρια μόνο η 5η προσέγγιση μπορεί να αναγνωριστεί ως μαθηματική δραστηριότητα, με τις άλλες να αποτελούν αντιγραφές, μιμήσεις ή αναπαραγωγές χωρίς χαρακτηριστικά γενίκευσης και συμβολισμού.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συνοψίζοντας την παραπάνω ανασκόπηση μπορούμε να επισημάνουμε τα παρακάτω ζητήματα. Αρχικά, το πλήθος των ερευνών που έχουν γίνει σχετικά με τα patterns είναι μεγάλο, με ποικίλο περιεχόμενο, στόχους, ερωτήματα και προσεγγίσεις, κι επίσης οι έννοιες και η ορολογία που χρησιμοποιούνται σε αυτές δεν είναι πάντα σαφώς ορισμένες. Για το λόγο αυτός σε επόμενες έρευνες θα απαιτηθεί προσοχή στη χρήση τους.

Οι συνθέσεις που παρουσιάστηκαν δείχνουν ότι οι κανονικότητες ή τα πρότυπα όπως και οι σχετικές δραστηριότητες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως προς πολλές διαστάσεις, άρα θα ήταν σημαντικό να πραγματοποιηθούν συνθετικές συγκρίσεις αλλά και συγκριτικές έρευνες επιδόσεων, όπως και συστηματική διερεύνηση της σύνδεσης συγκεκριμένων μορφών και δράσεων με το μαθηματικό περιεχόμενο και τις μαθηματικές ικανότητες που αυτές υποστηρίζουν, καθώς είναι φανερό ότι όλες οι κανονικότητες δεν οδηγούν σε μαθηματικές δράσεις και άρα στα Μαθηματικά. Διαφαίνεται επίσης ότι τα παιδιά από τις μικρότερες ηλικίες είναι γενικά ικανά να αναπτύξουν σημαντικές ικανότητες patterning, αλλά στην έρευνα δεν είναι διακριτή η σημασία της κάθε μίας, άρα στην ερευνητική ή διδακτική πράξη είναι απαραίτητο να είναι στην επίγνωση του ερευνητή/εκπαιδευτικού ποια τροχιά ανάπτυξης εξυπηρετεί κάθε περιεχόμενο, υλικό, δομή και/ή δράση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2013). Rethinking and researching task design in pattern generalization. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of PME, Vol. 2* (pp. 193- 200). Kiel, Germany: PME.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* New York, NY: Routledge.

Cooper, J.T, &Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM, 40*, 23–37.

Fox, J. (2006). Connecting algebraic development to mathematical patterning in early childhood. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of PME, Vol. 3* (pp. 89 - 96). Prague: PME.

Fyfe, E., Evans, J., Eisenband Matz, L., Hunt, K., & Alibali, M. (2017). Relations between patterning skill and differing aspects of early mathematics knowledge. *Cognitive Development*, *44*, 1-11.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231-258.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: the distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26(3)*, 24-42.

Lüken, M.M. (2018, in press). Is patterning a mathematical activity? – An analysis of young children's strategies in working with repeating. *In POEM 2018*, Kristiansand, Norway.

Lüken, M.M., Peter-Koop, A., & Kollhoff, S. (2014). Influence of early repeating patterning ability on school mathematics learning. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of PME and 36th of PME- NA, Vol. 4 (pp. 137 - 144).* Vancouver, Canada: PME.

Ma, H- L. (2009). Characterizing students' algebraic thinking in linear pattern with pictorial contents. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of PME, Vol. 4* (pp. 49 - 56). Thessaloniki, Greece: PME.

McNeil, N. M., & Alibali, W. M. (2005). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development, Volume 76,* Number 4, 883 – 899.

Michael, S., Elia, I., Gagatsis, A., Theoklitou, A., & Savva, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representation. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference PME, Vol. 4* (pp. 161 - 168). Prague: PME.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The Australian Pattern and Structure Mathematics Awareness Project (PASMAP). In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of PME, Vol. 4* (pp. 209 - 216). Prague: PME.

Mulligan J.T., Mitchelmore M.C., English L.D., Crevensten N. (2013) Reconceptualising Early Mathematics Learning: The Fundamental Role of Pattern and Structure. In English L., Mulligan J. (Eds.) *Reconceptualising Early Mathematics Learning. Advances in Mathematics Education* (pp. 47-66). Springer, Dordrecht.

Παπαδοπούλου, Ε. (2012). Μια διδακτική παρέμβαση για την ανάπτυξη ικανοτήτων αναγνώρισης κανονικοτήτων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 53*, 123 - 137.

Papic, M., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the Development of Pre-schoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*, 83–96.

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*,*46*, 166-178.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Visual templates in pattern generalization. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.),*Proceedings of the 33rd Conference of PME, Vol. 4* (pp. 473 - 480). Thessaloniki, Greece: PME.

Rivera, F. D. (2013). Pattern generalization processing of younger and older Students: similarities and differences. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of PME, Vol. 4* (pp. 97 - 104*).* Kiel, Germany: PME

Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners' performance levels on patterning. *International Journal for Mathematics in Education, HMS I JME, 5*, (pp. 108-131).

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18–30). London: Cassel.

Vogel, R. (2005). Patterns – a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM Vol. 37* (5), 445- 449.

Waters, J.L. (2004) A Study of mathematical patterning in early childhood settings. In Putt, I., Faragher, R., & MacLean, M. (Eds.) *Mathematics education for the 3rd millennium: Towards 2010. The 27th Annual Conference of MERGA* (pp. 27 - 30). Townsville, Queensland, Australia.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference PME*, *Vol.* 4 (pp. 305- 312). Melbourne: PME.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 171 - 185

Wijns N., Torbeyns J., De Smedt B., &Verschaffel L. (2019) Young Children's Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. In: Robinson K., Osana H., Kotsopoulos D. (Eds.) *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood*. Springer, Cham.

ΕΠΙΔΟΣΗ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΕΝΗΛΙΚΩΝ ΣΕ ΝΟΕΡΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ: Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Δέσποινα Δεσλή, Γεώργιος Παπαχρήστος

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

ddesli@eled.auth.gr, giorgos101010@gmail.com

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές μαθητών Στ΄ τάξης και ενηλίκων σε νοερούς υπολογισμούς ρητών αριθμών με τη χρήση πλαισίου. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκαν δύο έργα τα οποία ζητούσαν από τους συμμετέχοντες να πραγματοποιήσουν νοερούς υπολογισμούς πρόσθεσης και αφαίρεσης με κλάσματα (Έργο 1) και δεκαδικούς αριθμούς (Έργο 2) με πλαίσιο και χωρίς πλαίσιο. Αν και οι ενήλικες παρουσίασαν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τα παιδιά της Στ΄ τάξης, και οι δύο ηλικιακές ομάδες εμφάνισαν καλύτερη επίδοση στις δοκιμασίες με δεκαδικούς αριθμούς συγκριτικά με τις δοκιμασίες με κλάσματα, ενώ η παρουσία πλαισίου και το είδος της πράξης δεν έδειξε να επηρεάζει την επίδοσή τους. Τέλος, οι συμμετέχοντες κυρίως κατέφευγαν σε μετατροπές και νοερή εκτέλεση του αλγόριθμου, με τους ενήλικες να παρουσιάζουν περισσότερες εννοιολογικές στρατηγικές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ερευνητικό ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια έχει ιδιαίτερα εστιάσει στη μελέτη των νοερών υπολογισμών, κυρίως αναφορικά με τις επιδόσεις και τις στρατηγικές μαθητών και ενηλίκων στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις με αυτούς, την ευελιξία που αναπτύσσεται, τον τρόπο διδασκαλίας τους αλλά και τη θέση τους στα αναλυτικά προγράμματα, αποσκοπώντας στην ενίσχυση των λειτουργιών της αίσθησης του αριθμού. Άλλωστε η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού φαίνεται να συνδέεται με την ανάπτυξη δημιουργικών και ανεξάρτητων –από κανόνες- στρατηγικών σκέψης (McIntosh, 2004), μιας και επιτρέπει την ανάδυση περισσότερο ευέλικτων τρόπων για τη διαχείριση των αριθμών σε ακριβείς υπολογισμούς. Η εστίαση αυτή, ωστόσο, αφορά σχεδόν αποκλειστικά στους φυσικούς αριθμούς. Αν και στο εξωτερικό (π.χ., Ολλανδία, Η.Π.Α., Αυστραλία) δίνεται αρκετά μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς (Λεμονίδης, 2013) οι οποίοι είναι περισσότερο απαιτητικοί από τους νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010), στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και τα σχολικά εγχειρίδια η παρουσία των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς είναι μηδαμινή, με αποσπασματική μόνο εμφάνιση δραστηριοτήτων για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς (Λεμονίδης, 2016).

Οι επιδόσεις στους νοερούς υπολογισμούς φαίνεται να διαφοροποιούνται από το είδος των αριθμών. Για παράδειγμα, οι Reys, Reys, Nohda και Emori (1995) βρήκαν ότι παιδιά ηλικίας από 13 έως 15 ετών στην Ιαπωνία εμφάνισαν πολύ καλύτερες επιδόσεις σε νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς παρά σε νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. Παρόμοια αποτελέσματα έχουν από τότε σημειωθεί ξανά σε διαφορετικές χώρες (π.χ., Pagni, 2004. Carvalho & da Ponte, 2015. Πηλιανίδης, 2018), επιβεβαιώνοντας αφενός τη δυσκολία των εφήβων στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς και αφετέρου την έλλειψη κατανόησης των πολλαπλασιαστικών δομών που εμπεριέχονται στη φύση των ρητών αριθμών η οποία τους οδηγεί κυρίως σε εννοιολογικά λάθη και πολύ λιγότερο σε εργαλειακά λάθη που προκύπτουν από λανθασμένη εφαρμογή κανόνων, κυρίως με εφαρμογή του αλγόριθμου νοερά.

Από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς, η μετατροπή ενός αριθμού από μία αναπαράσταση σε άλλη κατά τη νοερή εκτέλεση μιας πράξης φαίνεται να είναι η κυρίαρχη στρατηγική. Για παράδειγμα, μία πρόσθεση κλασμάτων (π.χ., ½ + ¾) συχνά μετατρέπεται σε πρόσθεση δεκαδικών αριθμών (0,5+0,75). Οι περισσότεροι ερευνητές (π.χ., Caney & Watson, 1993. Lin, Yang & Li, 2016. Λεμονίδης, 2013) θεωρούν ότι μία τέτοια στρατηγική συνδέεται με υψηλό επίπεδο αίσθησης του αριθμού (number-sense strategy) και δεν αποτελεί στρατηγική βασισμένη σε κανόνες (rule-based strategy). Ωστόσο, ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών γυμνασίου μετατρέπουν αρχικά τους δεκαδικούς αριθμούς σε φυσικούς αριθμούς (π.χ., 0,21+0,68, 21+68) και στη συνέχεια εκτελούν νοερά τον αλγόριθμο (Caney & Watson, 2003), παραλλάσσοντας ανάμεσα σε εννοιολογικές και εργαλειακές στρατηγικές. Επιπρόσθετα, συχνά οι μαθητές επηρεάζονται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Χρήστου, 2015) και μεταφέρουν στρατηγικές από τους νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς σε αυτούς με ρητούς αριθμούς: οι Callingham και Watson (2008), για παράδειγμα, βρήκαν μαθητές Στ' τάξης που χρησιμοποίησαν απαρίθμηση σε νοερές προσθέσεις με δεκαδικούς αριθμούς (2,1+0,6: 2,2, 2,3, …, 2,7).

Οι νοεροί υπολογισμοί και οι στρατηγικές που τους συνοδεύουν συχνά εξετάζονται μέσα από έργα που παρουσιάζονται με τη μορφή τυποποιημένων ασκήσεων και απαιτούν εκτελέσεις υπολογισμών. Ωστόσο, υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν ότι η παρουσία δραστηριοτήτων με σενάριο μπορεί να λειτουργήσει διευκολυντικά για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams, 2017) αλλά και να ευνοήσει την εξοικείωση με μαθηματικές έννοιες μέσα από ένα ρεαλιστικό πλαίσιο (Verchaffel, Greer & DeCorte, 2000), επιτρέποντας την ενασχόληση με μαθηματικά που έχουν νόημα. Αναφορικά με τους νοερούς υπολογισμούς, αν και τα ευρήματα είναι περιορισμένα, φαίνεται να επιδρά σε κάποιες περιπτώσεις η παρουσία του πλαισίου. Για παράδειγμα, οι Δεσλή και

Λιόλιου (2017) βρήκαν πως 9-χρονα και 10-χρονα παιδιά εμφάνισαν μεγαλύτερη επιτυχία σε νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις με διψήφιους και τριψήφιους αριθμούς, όταν αυτές παρουσιάζονταν πλαισιωμένες με ένα οικείο σενάριο παρά χωρίς σενάριο. Ωστόσο, η παρουσία πλαισίου δεν επηρέασε την προτίμησή τους σε νοερούς ή γραπτούς υπολογισμούς.

Με δεδομένο ότι οι έρευνες σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς αφορούν σε μεγάλους μαθητές, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει αφενός τις επιδόσεις και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν μικρότερα παιδιά και ενήλικες κατά την εκτέλεση νοερών προσθέσεων και αφαιρέσεων με κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς και αφετέρου τον ρόλο του πλαισίου στην ανάπτυξη αυτών των νοερών υπολογισμών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 41 παιδιά Στ’ τάξης (μ.ο. ηλικίας: 11 χρόνια και 9 μήνες) και 41 ενήλικες (ηλικίας από 21 έως 54 ετών με μ.ο. ηλικίας: 31 χρόνια και 7 μήνες), όλοι προερχόμενοι από διάφορα κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Τα παιδιά φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της πόλης της Θεσσαλονίκης και παρουσίαζαν ποικιλία σχολικών επιδόσεων, ενώ το 27% και το 49% των ενηλίκων ήταν απόφοιτοι δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, αντίστοιχα.

Σχεδιασμός – Εργαλείο έρευνας. Για τον σκοπό της έρευνας, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες δύο έργα (συνολικά 16 δοκιμασίες). Το Έργο 1 αφορούσε προσθέσεις και αφαιρέσεις με κλάσματα, ενώ το Έργο 2 προσθέσεις και αφαιρέσεις με δεκαδικούς αριθμούς. Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να εκτελέσουν αποκλειστικά νοερά τις πράξεις στις δοκιμασίες που τους δίνονταν και, κατόπιν, καλούνταν να εξηγήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν. Ο δείκτης αξιοπιστίας cronbach’s alpha εκτιμήθηκε στο 0,873.

Οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν και στα δύο έργα αφορούσαν στο ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο (π.χ., 1-1/4 και 1-0,25 ή 20½ + 10¼ και 20,5+10,25, αντίστοιχα σε Έργο 1 και Έργο 2), επιχειρώντας έτσι αφενός να διατηρηθεί σταθερό το επίπεδο γνωστικής απαίτησης ανάμεσα στα έργα αναφορικά με το μαθηματικό περιεχόμενο των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν και αφετέρου να είναι δυνατή η σύγκριση της επίδοσης των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με δεκαδικούς και κλασματικούς αριθμούς.

Προκειμένου να εξεταστεί αν η ύπαρξη πλαισίου επηρεάζει τους νοερούς υπολογισμούς, οι συμμετέχοντες τυχαία, από τις δύο ηλικιακές ομάδες, κατανεμήθηκαν ισάριθμα σε δύο ομάδες. Το Έργο 1 παρουσιάστηκε στην ομάδα Α με πλαίσιο (π.χ., ‘Η απόσταση από το σπίτι του Αποστόλη μέχρι τον φούρνο είναι ½ του χιλιομέτρου και από τον φούρνο μέχρι το σχολείο ¾ του χιλιομέτρου. Πόση είναι η συνολική απόσταση;') και στην ομάδα Β χωρίς πλαίσιο (π.χ., '1/2+3/4=?'). Ακριβώς αντίθετη παρουσίαση των έργων ακολουθήθηκε για το Έργο 2. Οι δοκιμασίες με πλαίσιο αφορούσαν οικείες καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

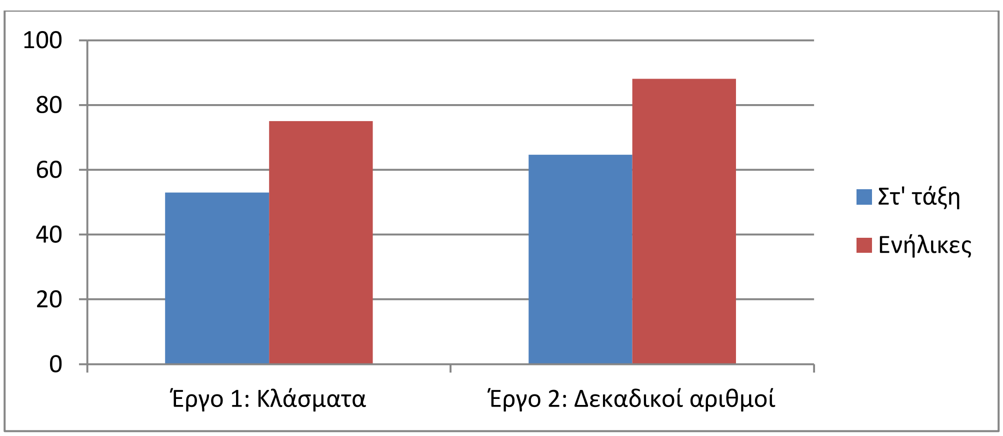
Οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις ήταν ισάριθμα κατανεμημένες στα δύο έργα (4 προσθέσεις και 4 αφαιρέσεις σε κάθε έργο). Στις δοκιμασίες με πλαίσιο, οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις ισάριθμα ήταν τύπου αλλαγής ή τύπου συνδυασμού. Τέλος, η σειρά παρουσίασης των έργων διαφοροποιούνταν στους συμμετέχοντες προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα κόπωσης στις τελευταίες δοκιμασίες.

Διαδικασία. Οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν σε χώρο όπου επικρατούσαν συνθήκες ησυχίας. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη και εθελοντική. Η διαδικασία διήρκεσε περίπου 20 λεπτά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Γενική επίδοση. Οι συμμετέχοντες παρουσίασαν καλή επίδοση στο σύνολο των δοκιμασιών, με ποσοστό επιτυχίας που οριακά ξεπέρασε το 70%, με τους ενήλικες να υπερτερούν στατιστικά σημαντικά (81,56%) από τους μαθητές ($t=-4{,}140$, $df=80$, $p<.01$). Ωστόσο, η επίδοση όλων δεν βρέθηκε να επηρεάζεται ούτε από το φύλο ($t=,123$, $df=80$, $p=.902$) ούτε από την ομάδα παρουσίασης των έργων ($t=,316$, $df=80$, $p=.753$).

Οι επιδόσεις των συμμετεχόντων επηρεάστηκαν από το είδος των αριθμών στα δύο έργα ($t= -4{,}157$, $df=81$, $p<.001$): όλοι οι συμμετέχοντες παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερη επιτυχία στις δοκιμασίες που αφορούσαν δεκαδικούς αριθμούς παρά κλάσματα (76,38% και 64%, αντίστοιχα). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν (βλ. Σχήμα 1) και όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Στ' τάξης ($t=-2{,}399$, $df=40$, $p<.05$) και για τους ενήλικες ($t=-3{,}726$, $df=40$, $p<.01$).

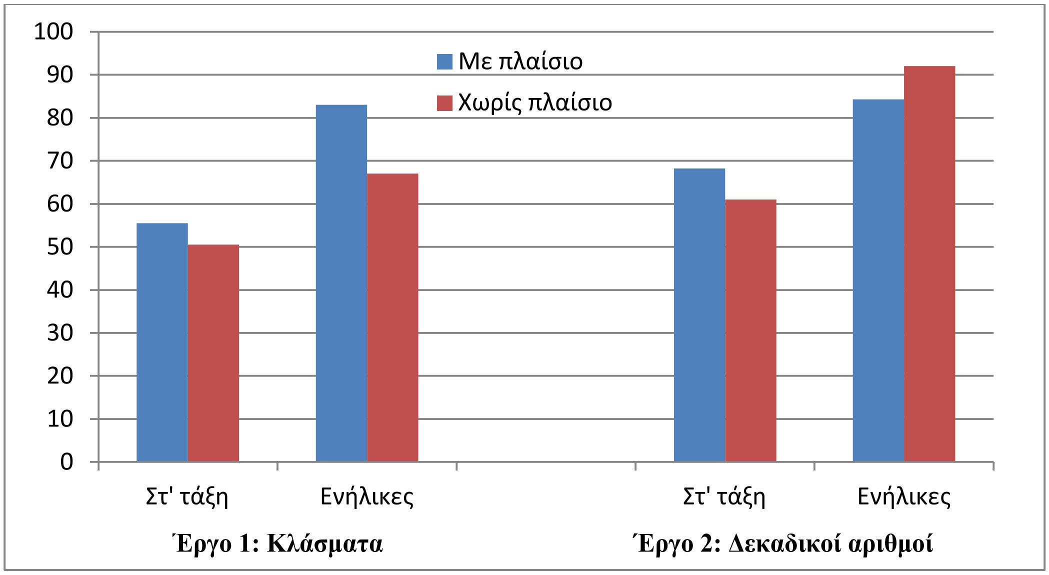


Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ως προς την ηλικιακή ομάδα και το είδος των αριθμών

Η παρουσία του πλαισίου δεν διαφοροποίησε τα ποσοστά επιτυχίας των συμμετεχόντων ούτε στο σύνολό τους (t=1,561, df=81, p=.123) ούτε ανά ηλικιακή ομάδα (t=1,202, df=40, p=.237 και t=,982, df=40, p=.332, για τα παιδιά Στ’ τάξης και ενήλικες, αντίστοιχα). Συγκεκριμένα, η επίδοση των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες με πλαίσιο ήταν παρόμοια με αυτή στις δοκιμασίες χωρίς πλαίσιο. Όταν η επίδραση του πλαισίου εξετάστηκε ξεχωριστά για κάθε έργο (βλ. Σχήμα 2), δεν βρέθηκαν διαφορές ούτε στο Έργο 1 με τους κλασματικούς αριθμούς (t=,651, df=81, p=.517) ούτε στο Έργο 2 με τους δεκαδικούς αριθμούς (t=-,017, df=81, p=.987).

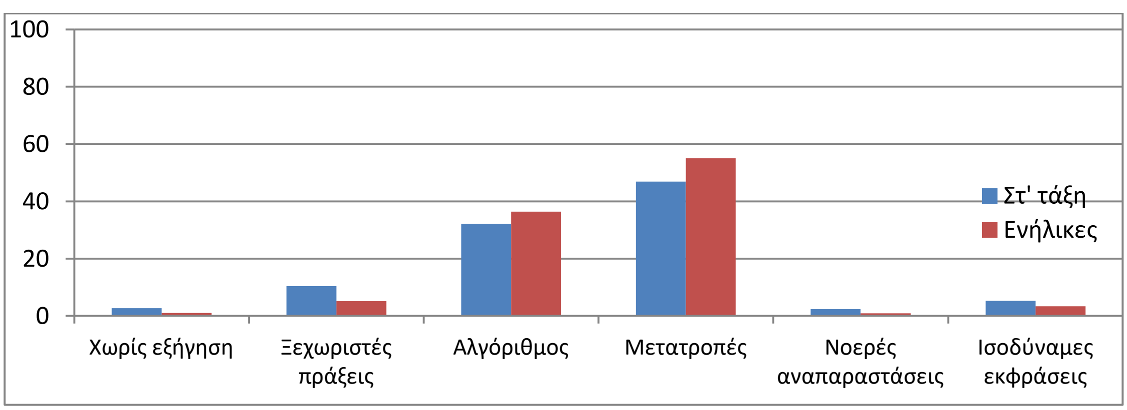
Τέλος, δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις ως προς την αριθμητική πράξη (t=,533, df=81, p=.596), με τα ποσοστά επιτυχίας σε δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης να είναι παρόμοια, τόσο ξεχωριστά για κάθε ηλικιακή ομάδα (t=,221, df=40, p=.372 και t=,980, df=40, p=.333, για τα παιδιά Στ’ τάξης και ενήλικες, αντίστοιχα) όσο και ξεχωριστά σε κάθε έργο (t=1,043, df=81, p=.300 και t=-,435, df=81, p=.664, για Έργα 1 και 2, αντίστοιχα).

β. Στρατηγικές των παιδιών. Οι επεξηγήσεις των συμμετεχόντων που απάντησαν στις δοκιμασίες, ανεξάρτητα από το αν ήταν σωστές ή λανθασμένες, αναδείκνυαν τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Ταξινομήθηκαν στις εξής έξι κατηγορίες: *1) «Χωρίς Εξήγηση»* (απαντήσεις στις οποίες δεν δόθηκαν επεξηγήσεις ή ήταν του τύπου ‘έτσι είναι’), *2) «Ξεχωριστές πράξεις σε αριθμητές και παρονομαστές»* (μόνο στις δοκιμασίες με κλάσματα, π.χ., ½ + ¾ = 4/6), *3) «Αλγόριθμος»* (χρήση του τυποποιημένου αλγόριθμου νοερά), 4) *«Μετατροπές»* (μετατροπές των κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και μετά σε φυσικούς αριθμούς ή μετατροπές των δεκαδικών αριθμών σε φυσικούς αριθμούς και πράξεις με αυτούς, με τη χρήση διαχωρισμού (π.χ., 20½ + 10¼ = 20,5+10,25: 20+10=30, 50+25=75, άρα 30,75 ή 30 ¾) ή συσσώρευσης (π.χ., 4 - 1½ = 4 -1,5: 40-5=35, 35-10=25, άρα 2,5) ή πατήματος στη δεκάδα (π.χ., ½ + ¾ = 0,5+0,75: 50+50=100, 100+25=125, άρα 1,25), 5) *«Νοερές αναπαραστάσεις»* (χρήση αυτοσχέδιων αναπαραστάσεων νοερά που νοηματοδοτούσαν τους αριθμούς στους υπολογισμούς) και 6) *«Ισοδύναμες Εκφράσεις»* (αντικατάσταση αριθμών με ισοδύναμούς τους και εκτέλεση του υπολογισμού, π.χ., το ¾ - ½, γίνεται ¾ - 2/4).



Σχήμα 2: Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα έργα ως προς την ηλικιακή ομάδα και την παρουσία πλαισίου

Οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν πιο συχνά ήταν αυτή που αφορούσε τις μετατροπές των αριθμών και πράξεις με αυτές (47% και 55%, για παιδιά και ενήλικες) καθώς και η στρατηγική του αλγόριθμου (32% και 34%, για παιδιά και ενήλικες). Από όσους συμμετέχοντες επέλεγαν να μετατρέψουν τους αριθμούς σε περισσότερο διαχειρίσιμους για τους ίδιους αριθμούς, περίπου το 45% των παιδιών της Στ’ τάξης και το 38% των ενηλίκων εφάρμοζαν στη συνέχεια νοερά τον αλγόριθμο, ενώ πολύ λιγότεροι ήταν οι συμμετέχοντες που προχωρούσαν σε διαχωρισμό ή συσσώρευση (περίπου 30% και 25%, αντίστοιχα). Η συχνότητα χρήσης όλων των στρατηγικών ήταν παρόμοια από τις δύο ηλικιακές ομάδες (βλ. Σχήμα 3), με εξαίρεση τη στρατηγική των μετατροπών την οποία οι ενήλικες βρέθηκε να χρησιμοποιούν στατιστικά σημαντικά περισσότερο σε σχέση με τα παιδιά της Στ’ τάξης ($t=-2{,}502$, $df=80$, $p<.05$).



Σχήμα 3: Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών ως προς την ηλικιακή ομάδα

Εξετάζοντας τις συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και το ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων (βλ. Πίνακα 1), βρέθηκε ότι η χρήση του αλγόριθμου δεν οδηγούσε απαραίτητα σε σωστούς νοερούς υπολογισμούς ούτε τους ενήλικες ούτε τα παιδιά της Στ’ τάξης. Ωστόσο, υψηλή θετική συσχέτιση βρέθηκε για τη στρατηγική των μετατροπών και την επίδοση των ενηλίκων στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson’s $r=,428$, $p<.01$) αλλά και στις δοκιμασίες με κλάσματα (Pearson’s $r=,489$, $p<.01$). Αντίστοιχα για τα παιδιά της Στ’ τάξης, υψηλά θετικά συσχετίζεται η χρήση των ισοδύναμων εκφράσεων με τις επιδόσεις σους στο σύνολο των δοκιμασιών (Pearson’s $r=,417$, $p<.01$) και στις δοκιμασίες με κλάσματα (Pearson’s $r=,454$, $p<.01$). Όσο περισσότερο χρησιμοποιούσαν αυτές τις στρατηγικές τόσο έτειναν να έχουν επιτυχία στις δοκιμασίες.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τρία κύρια ευρήματα αναδεικνύονται από την παρούσα έρευνα. Πρώτον, τα παιδιά της Στ’ τάξης και οι ενήλικες φάνηκε να διαθέτουν νοερές στρατηγικές ρητών αριθμών σε ικανοποιητικό βαθμό. Ωστόσο, οι επιδόσεις διαφοροποιήθηκαν αφενός από την ηλικία των συμμετεχόντων, με τους ενήλικες να έχουν στατιστικά σημαντικά υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας από τα παιδιά, και αφετέρου από το είδος των ρητών αριθμών.

Στρατηγικές	**Συνολική Επίδοση**		**Έργο 1: Κλάσματα**		**Έργο 2: Δεκαδικοί αριθμοί**	
	Στ’	**Ενήλ.**	**Στ’**	**Ενήλ.**	**Στ’**	**Ενήλ.**
1. Χωρίς εξήγηση	-,601**	-,428**	-,446**	-,457**	-,624**	-,278
2. Ξεχωριστές πράξεις	-,648**	-,669**	-,729**	-,740**	-,385**	-,397*
3. Αλγόριθμος	,035	,051	,024	,008	,038	,100
4. Μετατροπές	,302	,428**	,325*	,489**	,197	,233
5. Νοερές αναπαραστάσεις	,210	,065	,171	,107	,200	-,011
6. Ισοδύναμες εκφράσεις	,417**	-,120	,454**	-,052	,265	-,187

** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.05   ** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

Πίνακας 1: Συσχετίσεις της χρήσης στρατηγικών με την επίδοση ως προς την ηλικιακή ομάδα

Συγκεκριμένα, όλοι οι συμμετέχοντες εμφάνισαν καλύτερη επίδοση στους νοερούς υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς σε σχέση με αυτούς με κλάσματα. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τη διαπίστωση των Callingham και Watson (2004) ότι συχνά παρατηρείται μεγαλύτερη ευχέρεια στη νοερή διαχείριση των δεκαδικών αριθμών σε σχέση με τα κλάσματα, εύρημα που ενδεχομένως εξηγείται από τη μεγαλύτερη εξοικείωση όλων με καταστάσεις από την καθημερινή ζωή που απαιτούν συχνότερα νοερούς υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς (όπως ευρώ, βάρος κλπ.).

Δεύτερον, η παρουσία του πλαισίου δεν βρέθηκε να επηρεάζει την επιτυχία των συμμετεχόντων: νοεροί υπολογισμοί που παρουσιάζονταν είτε με πλαίσιο είτε χωρίς πλαίσιο βρέθηκε να οδηγούν σε παρόμοια ποσοστά επιτυχίας. Σε συνδυασμό με το πρώτο εύρημα της παρούσας εργασίας, είναι πολύ πιθανόν η μεγαλύτερη εξοικείωση των συμμετεχόντων με τους δεκαδικούς αριθμούς να επιτρέπει άνεση στους συμμετέχοντες, ανεξάρτητα από το αν υπάρχει πλαίσιο ή όχι. Άλλωστε ήταν συχνές οι περιπτώσεις συμμετεχόντων που πραγματοποίησαν αναφορές σε οικείες τους καταστάσεις (π.χ., τέταρτα στο ρολόι), όταν τους ζητούνταν νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις με δεκαδικούς αριθμούς, δίνοντας έτσι νόημα σε αυτές με δικό τους τρόπο. Το θέμα του πλαισίου χρήζει μεγαλύτερης διερεύνησης καθώς είναι πιθανόν να επηρεάζει περισσότερο τους μικρότερους μαθητές, ίσως όμως και μόνο σε νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς όπως έχει ήδη παρατηρηθεί.

Τέλος, η επιτυχία στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς δεν συνδέεται με τη χρήση του αλγόριθμου νοερά, εύρημα που έχει επιβεβαιωθεί και με νοερούς υπολογισμούς με φυσικούς αριθμούς (Δεσλή, & Λιόλιου, 2017. Λεμονίδης, 2013) και ενισχύει την άποψη ότι ένας υπολογισμός με νοερή εφαρμογή του τυπικού αλγόριθμου δεν συνεπάγεται εννοιολογική κατανόηση ούτε και ορθότητα. Αντίθετα, η χρήση εννοιολογικών στρατηγικών, όπως της στρατηγικής των 'μετατροπών' αλλά και της στρατηγικής των 'ισοδύναμων εκφράσεων', στις δοκιμασίες με κλάσματα οδηγούσε σε επιτυχείς νοερούς υπολογισμούς, αφού επέτρεπε στους χρήστες τους να χειρίζονται ολιστικά τους αριθμούς και να μεταφέρονται εύκολα από μία αναπαράσταση των ρητών αριθμών σε άλλη ισοδύναμη. Η χρήση τέτοιων στρατηγικών μάλιστα ήταν περισσότερο διευρυμένη και συχνή στους ενήλικες συμμετέχοντες παρά στα παιδιά.

Τα παραπάνω ευρήματα, αν και προέρχονται από μικρό αριθμό μαθητών, υποστηρίζουν την ένταξη των νοερών υπολογισμών με φυσικούς και ρητούς αριθμούς στο δημοτικό σχολείο καθώς και την οργάνωση και ενίσχυση του τρόπου διδασκαλίας τους. Δεδομένου ότι η ανάπτυξη αποτελεσματικών εννοιολογικών στρατηγικών σε εκπαιδευτικούς (Λεμονίδης, & Κερμελή, 2014) συμβάλλει στη μεταφορά και χρήση τους με τους μαθητές τους, επιτείνει ακόμα περισσότερο την ενίσχυσή τους από νωρίς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3–5*. Reston, VA: NCTM.

Callingham, R., & Watson, J. M. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 69–86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. Proceedings of the *Australian Association for Research in Education Conference* (pp. 270-292). Auckland, New Zealand.

Carvalho, R. & da Ponte, J.P. (2015). Student strategies and errors in mental computation withrational numbers in open number sentences. In *Proceedings of CERME 9* (pp.245-251). Prague, Czech Republic.

Δεσλή, Δ. & Λιόλιου, Α. (2017). Νοεροί και γραπτοί υπολογισμοί κατά την επίλυση πλαισιωμένων και μη πλαισιωμένων προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. *Πρακτικά εργασιών 3ου Διεθνούς Συνεδρίου για την προώθηση της εκπαιδευτικής καινοτομίας* (σελ.274-284). Λάρισα:ΕΕΠΕΚ.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών αριθμών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ., & Κερμελή, Α. (2014). Συμπεριφορές εκπαιδευτικών πριν και μετά την πειραματική διδασκαλία σε νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς. *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών*. Φλώρινα.

Lin, Y-C.,Yang, D-C., & Li, M-N. (2016). Diagnosing students' misconceptions in number sense via a web-based two-tier test. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,12*(1), 41-55.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh, & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp. 3-14). Perth: MASTEC.

Pagni, D. (2004). Fractions and decimals. *Australian Mathematics Teacher, 60*(4), 28-30.

Πηλιανίδης, Ν. (2018). *Στρατηγικές νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς από μαθητές Β' Γυμνασίου*. Αδημοσίευτη μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Reys, R., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(4), 304–326.

van de Walle, J.A., Lovin, L.H., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. Αθήνα: Gutenberg.

Verschaffel, V., Greer, B. & de Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, the Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Χρήστου, Κ. Π. (2015). Τρόποι επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού σε πράξεις, μέγεθος και διάταξη των ρητών αριθμών. *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 688-697). Θεσσαλονίκη.

ΒΑΣΙΚΑ ΝΟΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΝΟΣ ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ

Χρήστος Ίτσιος

Πανεπιστήμιο Duisburg-Essen (Έσσεν, Γερμανία)

christos.itsios@uni-due.de

Η έννοια των δυνάμεων θεωρείται ότι συνιστά σημαντικό εμπόδιο για τους διδασκόμενους ως προς την κατανόησή της, τόσο στη δευτεροβάθμια όσο και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η περιγραφή των Βασικών Νοητικών Μοντέλων όσον αφορά τις δυνάμεις, η συσχέτισή της με έννοιες όπως αυτές της εικόνας έννοιας, του ορισμού έννοιας, και των εννοιολογικών μεταφορών, καθώς και η παρουσίαση επιλεγμένων έργων ενός διαγνωστικού εργαλείου μαζί με πρώτα αποτελέσματα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρόλο που η έννοια των δυνάμεων όπως και του σύγχρονου εκθετικού της συμβολισμού έχει εξεταστεί ήδη εδώ και αρκετές δεκαετίες, παρατηρείται ότι οι μαθητές όλων των ηλικιών εξακολουθούν να αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν έρχονται αντιμέτωποι με αυτές, κάτι το οποίο έχει τεκμηριωθεί σε βάθος χρόνων, κυρίως σε σχολικά περιβάλλοντα (Confrey & Smith, 1994, Pitta-Pantazi, Christou, & Zachariades, 2007, Avcu, 2010). Κύριο ζήτημα φαίνεται να είναι η έλλειψη κατανόησης των βασικών κανόνων που χρησιμοποιούνται για τον χειρισμό τους. Για την αποφυγή τέτοιων δυσκολιών, υπάρχει επιτακτική ανάγκη για μια *εννοιολογική αλλαγή* στο μυαλό των μαθητών (vom Hofe & Blum, 2016, σελ. 237), προκειμένου να επιτευχθεί βαθύτερη κατανόηση σε εννοιολογικό επίπεδο. Οι Hahn και Prediger (2008) πρότειναν ότι οι ευκαιρίες για εννοιολογική αλλαγή θα πρέπει να προηγούνται της θέσπισης κανόνων σε διαδικαστικό επίπεδο ή, όπως αναφέρει η Sfard (1995): «Η λειτουργική σκέψη πρέπει να αντικατασταθεί από διαρθρωτική». Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, τίθεται η ακόλουθη διττή ερώτηση: (i) Ποια Βασικά Νοητικά Μοντέλα (ΒΝΜ, γερμ. *Grundvorstellungen*, vom Hofe & Blum, 2016) θα πρέπει να διαμορφώσουν οι μαθητές για έναν σίγουρο και ευέλικτο χειρισμό εκφράσεων με δυνάμεις, και (ii) Ποια ατομικά μοντέλα έχουν οι ίδιοι; Προκειμένου να απαντηθούν τα δύο ερωτήματα, αρχικά προσδιορίστηκαν κατάλληλα Νοητικά Μοντέλα μέσω ανάλυσης περιεχομένου του αντικειμένου των δυνάμεων και μέσω εκτενών διαλόγων με συναδέλφους, ειδικούς στη Διδακτική των Μαθηματικών. Ακολούθως, διεξήχθη μια μελέτη σχεδιασμού, όπου στην πρώτη πιλοτική δοκιμή αναπτύχθηκαν έργα, τα οποία στη συνέχεια θα αναδιαμόρφωναν το διαγνωστικό εργαλείο, ώστε να δομηθεί η τελική έκδοσή του. Σκοπός της διαμόρφωσης του διαγνωστικού εργαλείου ήταν να αποκαλυφθούν τα ατομικά Νοητικά Μοντέλα των μαθητών ως προς τις δυνάμεις και να διαπιστωθεί αν και κατά πόσο είναι συμβατά με τα επιθυμητά ΒΝΜ που έχουν αναπτυχθεί βιβλιογραφικά. Στο παρόν άρθρο, αφού τεθεί το θεωρητικό υπόβαθρο, θα παρασχεθούν ορισμένες πληροφορίες για τη μεθοδολογία και θα παρουσιαστεί η ενδεχόμενη επεξηγηματική ισχύς του εργαλείου, χρησιμοποιώντας ένα μικρό δείγμα έργων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν οι θεωρητικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιήθηκαν για να εκφραστεί με λειτουργικούς όρους η διαδικασία της κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας. Πρώτα θα δοθεί ένα περίγραμμα των Βασικών Νοητικών Μοντέλων, μαζί με τη σχετική ορολογία που χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία. Στη συνέχεια θα αναφερθούν οι διάφοροι μετασχηματισμοί μεταξύ αναπαραστάσεων, καθώς βιβλιογραφικά φαίνεται ότι διαδραματίζουν ενεργό ρόλο στην επιτυχή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, και κατά συνέπεια αποτέλεσαν τη βάση για την παραγωγή των έργων που χρησιμοποιούνται στο διαγνωστικό εργαλείο.

Η Έννοια των Βασικών Νοητικών Μοντέλων (ΒΝΜ)

Τα *Βασικά Νοητικά Μοντέλα* (ΒΝΜ, γερμ. *Grundvorstellungen*) αποτελούν μία κύρια και ευρέως χρησιμοποιούμενη θεωρητική έννοια στη γερμανική Διδακτική των Μαθηματικών (vom Hofe & Blum, 2016). Αναπτύχθηκαν με σκοπό να βρεθούν προσεγγίσεις και έννοιες με τις οποίες μπορεί να αναπαρασταθεί η μαθηματική γνώση με κατάλληλο τρόπο ως προς τις νοητικές ικανότητες των μαθητών, χωρίς να αλλοιώνεται η μαθηματική ουσία του εκάστοτε περιεχομένου. Ιδιαίτερα εφαρμόζεται και ερευνάται η σημασία τους κατά τη μαθηματική μοντελοποίηση, όπου πρέπει να ενεργοποιηθούν τα κατάλληλα ΒΝΜ για τη μετάφραση μεταξύ του «πραγματικού κόσμου» και του «κόσμου των μαθηματικών», που με τη σειρά της, εφόσον είναι επιτυχής, θα σημαίνει ότι η έννοια έχει κατανοηθεί (Bossé, Adu-Gyamfi & Cheetham, 2011, σελ. 117).

Στα ΒΝΜ διακρίνονται οι εξής τρεις πτυχές. Η πρώτη, η κανονιστική (*normative*) πτυχή, αποτελεί τη βασική ιδέα της έννοιας, δηλαδή την επιθυμητή κατάσταση που πρέπει να επιτευχθεί κατά την κατανόηση μιας έννοιας. Η δεύτερη, η περιγραφική (*descriptive*) πτυχή, χαρακτηρίζει τις ατομικές αντιλήψεις και ιδέες των εκπαιδευομένων· είναι, δηλαδή, μια αναπαράσταση της αντίληψης των μαθητών. Στην τρίτη, την εποικοδομητική (*constructive*) πτυχή, συγκρίνεται η κανονιστική με την περιγραφική πτυχή, ώστε να γνωστοποιηθούν τυχόν δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση, καθώς και να παρασχεθούν λύσεις για την αντιμετώπιση παρανοήσεων. Συγκεκριμένα η έννοια των ΒΝΜ αναφέρεται σε τρία χαρακτηριστικά: (i) στη νοηματοδότηση μιας μαθηματικής έννοιας, συνδέοντάς την με προϋπάρχουσα γνώση ή εμπειρίες, (ii) στη δημιουργία μιας αντίστοιχης νοητικής αναπαράστασης, ώστε να διευκολυνθεί η δράση ή ο υπολογισμός σε νοητικό επίπεδο, και (iii) στην ικανότητα εφαρμογής μιας έννοιας σε πραγματικές καταστάσεις, αναγνωρίζοντας μια αντίστοιχη δομή σε περιβάλλοντα που σχετίζονται με το αντικείμενο ή μέσω της μοντελοποίησης ενός προβλήματος που σχετίζεται με το θέμα, με τη βοήθεια μαθηματικών δομών (Hefendehl-Hebeker *et al.*, 2019).

Συναφείς όροι προς τα ΒΝΜ στη διεθνή βιβλιογραφία

Διεθνώς στη βιβλιογραφία συναντώνται διάφοροι όροι, συνήθως όμοιας σημασίας, για να περιγράψουν τις έννοιες νοητικών αναπαραστάσεων. Ως προς τα ΒΝΜ χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο ο όρος basic models, παρόλο που υπάρχουν αρκετές αγγλόφωνες δημοσιεύσεις, όπου γίνεται στην αγγλική γλώσσα χρήση του γερμανικού όρου *Grundvorstellungen* (λ.χ. vom Hofe & Blum, 2016).

Για να διαφοροποιηθεί και να ξεκαθαριστεί η έννοια από τους διεθνώς χρησιμοποιούμενους όρους θα πρέπει να αναφερθεί η θεωρητική εγγύτητα των ΒΝΜ στην *εικόνα έννοιας* και τον *ορισμό έννοιας* (*concept image* και *concept definition,* αντίστοιχα, Tall & Vinner, 1981). Αν και αμφότερες αναφέρονται στην κατανόηση των μαθηματικών με τη χρήση της γνωστικής ψυχολογίας του Piaget (vom Hofe 1998) και του κονστρουκτιβισμού (Hahn & Prediger 2008), η διαφορά εντοπίζεται κυρίως στον περιγραφικό χαρακτήρα της *εικόνας έννοιας*. Αυτό είναι το σύνολο των εικόνων (συμπεριλαμβανομένων συμβόλων, αλλά και παρανοήσεων) που έχει στο μυαλό του ένας μαθητής για μία μαθηματική έννοια. Στα ΒΝΜ περιγράφεται η σύνδεση ανάμεσα στα μαθηματικά και τον «πραγματικό» κόσμο, ο όρος είναι δηλαδή άρρηκτα συνδεδεμένος με προηγούμενες εμπειρίες. Τα ΒΝΜ κατανοούνται ως επί το πλείστον στο κανονιστικό τους επίπεδο, δηλαδή ως διδακτική εφαρμογή για τους εκπαιδευτικούς σχετικά με τα Νοητικά Μοντέλα που είναι κατάλληλα για την κατανόηση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας.

Για μια πιο σαφή οριοθέτηση μεταξύ των κανονιστικών Νοητικών Μοντέλων και των περιγραφικών Νοητικών Μοντέλων στο μυαλό των μαθητών, μερικοί συγγραφείς αντικαθιστούν την περιγραφική πτυχή με τον όρο «ατομικά Νοητικά Μοντέλα» (Prediger 2008). Ο Vom Hofe (1998) χρησιμοποιεί τους όρους *Βασικό Μοντέλο* (*basic model*) από την κανονιστική σκοπιά, και *Ατομική Εικόνα* (*individual image*) ως περιγραφική έννοια, χαρακτηρίζοντας την προσέγγισή του ως «ολιστική άποψη της μαθηματικής σκέψης και πράξης», που προσφέρει «μεθοδικές και θεωρητικές δυνατότητες συνδυασμού των κανονιστικών διδακτικών αντιλήψεων με περιγραφικές και ερμηνευτικές μεθόδους» (σελ. 326).

Παράλληλα, οι Soto-Andrade και Reyes-Santander (2011) συγκρίνουν τα ΒΝΜ με τις *εννοιολογικές μεταφορές* (*conceptual metaphors*) των Lakoff και Núñez (2000). Η ομοιότητα των δύο όρων έγκειται στον μηχανισμό μετάδοσης: η εμπειρία είναι η πηγή που επιτρέπει το σχηματισμό ιδεών, ο στόχος είναι να παρέχεται νόημα σε αφηρημένες έννοιες. Ωστόσο, διαφέρουν μεταξύ τους τόσο ως προς την εφαρμογή τους στην πράξη, όσο και στο γεγονός ότι μέσω των ΒΝΜ εκφράζονται μαθηματικές έννοιες ήδη υπάρχουσες και όχι υπό κατασκευή. Κοινό στοιχείο στις δύο αυτές προσεγγίσεις θα μπορούσε να είναι η έννοια της *θεμελιωτικής* (*grounding metaphor*) και της *συνδετικής* (*linking metaphor*) *μεταφοράς* των Lakoff και Núñez (2000), με τα *πρωτεύοντα* (*primary*) και *δευτερεύοντα* (*secondary*) ΒΝΜ αντίστοιχα (Hefendehl-Hebeker *et al.*, 2019).

Βασικά νοητικά μοντέλα για τις δυνάμεις

Από την κανονιστική σκοπιά των BNM, υπάρχουν τρία μοντέλα που μπορούν να εξαχθούν και να θεωρηθούν ως BNM για δυνάμεις με φυσικούς αριθμούς, τόσο ως βάση όσο και ως εκθέτης. Έχοντας κάνει ανασκόπηση σχετικής βιβλιογραφίας, ανάλυση του μαθηματικού αντικειμένου και διάλογο με ειδικούς στη Διδακτική των Μαθηματικών, παρουσιάστηκε μια πρώτη μορφή προκαταρκτικών αποτελεσμάτων (Itsios & Barzel, 2018). Έπειτα από συζητήσεις, τα μοντέλα αναδιαμορφώθηκαν και αναδιατυπώθηκαν, και παρουσιάζονται ακολούθως:

BNM1 *Επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός* (ΕΠ): Αυτό μπορεί να εμφανιστεί με δύο τρόπους - ως δυναμικός (ΕΠ-δ), που περιγράφει μια διαδικασία όπου εμφανίζονται νέα αντικείμενα, π.χ. ο συνεχής διπλασιασμός ενός αριθμού βακτηρίων ανά ώρα, ή ως στατικός (ΕΠ-σ), εστιάζοντας στο αποτέλεσμα μιας διαδικασίας ή σε ένα αντικείμενο, που περιγράφει αυτή τη δράση, π.χ. ένα δυαδικό δέντρο.

BNM2 *Συνδυαστικό μοντέλο* (ΣΜ): Αναφέρεται στον αριθμό πιθανών συνδυασμών με επανάληψη, π.χ. υπάρχουν 10^5 δυνατοί συνδυασμοί για μια κλειδαριά με πέντε κυλίνδρους, όπου στον καθένα χρησιμοποιείται ένα ψηφίο από το 0 μέχρι το 9.

BNM3 *Επέκταση με σταθερό συντελεστή* (ΕΣ): Αυτό αντιπροσωπεύει μια μεγέθυνση χωρίς την εμφάνιση νέων αντικειμένων, π.χ. Το 5^2 μπορεί να σημαίνει την πενταπλάσια μεγέθυνση μιας εικόνας δύο συνεχόμενες φορές.

Είδη αναπαραστάσεων

Κατά την εκμάθηση μιας μαθηματικής έννοιας, οι μαθητές θα πρέπει να περάσουν από τρία στάδια, όπως προτείνεται από τους Lesh, Post και Behr (1987): (i) την αναγνώριση της έννοιας σε πολλαπλές αναπαραστάσεις, (ii) την ευέλικτη χειραγώγηση μέσα σε ένα σύστημα και (iii) τον μετασχηματισμό μεταξύ διαφορετικών συστημάτων. Η συνεπής χρήση πολλαπλών συστημάτων αναπαράστασης μπορεί να αποτελέσει εγγύηση για την ευκολότερη ανάπτυξη εννοιών στα μαθηματικά και η ικανότητα χειρισμού τους συνεπάγεται την κατανόησή τους. Αυτά τα συστήματα μπορούν να είναι εξισώσεις, σύμβολα, πίνακες τιμών, διαγράμματα, γραφήματα ή ακόμη και προφορικές και γραπτές μορφές (Pape & Tchoshanov, 2001, σελ. 120).

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σε ένα πρώτο σχέδιο του εργαλείου χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 20 ερωτήσεις, αποτελούμενες από 3 ερωτήσεις ανοιχτού τύπου και 17 εργασίες υπολογισμού. Αυτό στη συνέχεια δοκιμάστηκε σε ένα δείγμα 117 φοιτητών (87 μηχανολόγους μηχανικούς και 30 φοιτητές μαθηματικών) και μετά την πρώτη αξιολόγηση οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν βάσει της συχνότητας εμφάνισής τους [1]. Έπειτα, οι τρεις συχνότερες λανθασμένες απαντήσεις χρησιμοποιήθηκαν ως πιθανές επιλογές για κάθε στοιχείο, μαζί με τη σωστή απάντηση. Η τελική έκδοση περιλαμβάνει 23 έργα πολλαπλής επιλογής. Δύο από τα 23 έργα λειτουργούν ελεγκτικά, παρουσιάζουν δηλαδή καταστάσεις πολλαπλασιασμού. Σε αυτά μπορούν ενδεχομένως να εντοπιστούν προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με πράξεις «χαμηλότερης βαθμίδας» και άρα δίνεται η ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να βοηθήσει το μαθητή να αντιμετωπίσει πρώτα αυτές τις δυσκολίες, προτού προχωρήσει σε πράξεις «ανώτερης βαθμίδας». Στο σύνολο τους 106 μαθητές Α’ Λυκείου, από τρία διαφορετικά σχολεία, εξετάστηκαν με σκοπό τον προσδιορισμό ατομικών αντιλήψεων καθώς και τον εντοπισμό των ΒΝΜ που μπορούν να ενεργοποιηθούν. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι το διαγνωστικό εργαλείο είναι κατάλληλο για την εφαρμογή τόσο σε μαθητές όσο και σε φοιτητές, οι οποίοι έχουν ήδη διδαχθεί την περιοχή των δυνάμεων.

Δείγμα έργων του διαγνωστικού εργαλείου

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιαστεί ένα μικρό δείγμα τεσσάρων έργων του διαγνωστικού εργαλείου. Αυτά επιλέχθηκαν έτσι, ώστε να αντιστοιχούν στα προαναφερθέντα ΒΝΜ, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1, μαζί με τον εκάστοτε μετασχηματισμό μεταξύ αναπαραστάσεων.

Έργο	ΒΝΜ	Μετασχηματισμός
Ε1	ΕΠ-δ	συμβολική → συμβολική
Ε7	ΕΠ-δ	συμβολική → συμβολική
Ε10	ΣΜ	λεκτική → συμβολική
Ε22	ΕΣ	λεκτική → συμβολική

Πίνακας 1: Αντιστοίχιση έργων με ΒΝΜ και μετασχηματισμούς

Στην Εικόνα 1 παρουσιάζονται τα τέσσερα αυτά έργα, που αφορούν αποκλειστικά στις δυνάμεις.

Ε1. Ποιο είναι το μισό του $2^{30.000}$;

α. $1^{30.000}$

β. $2^{29.999}$

γ. $2^{15.000}$

δ. $1^{15.000}$

Ε7. Ποιο είναι το εξαπλάσιο του $6^{70.000}$;

α. $6^{420.000}$

β. $36^{70.000}$

γ. $6^{70.001}$

δ. $36^{420.000}$

Ε10. Ένας κωδικός αποτελείται από 8 κεφαλαία γράμματα από τα 24 της αλφαβήτου. Με ποιον όρο μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών κωδικών;

α. $8 \cdot 24$

β. 8^{24}

γ. 24^{8}

δ. 8^{8}

Ε22. Το πλάτος ενός αστέρα στον ουρανό φαίνεται με γυμνό μάτι να είναι 1 χιλιοστό. Με ένα τηλεσκόπιο ζουμάρουμε τρεις συνεχόμενες φορές με πενταπλή μεγέθυνση. Πόσο πλάτος φαίνεται να έχει τώρα ο αστέρας;

α. $3 \cdot 5$ χλστ.

β. 3^5 χλστ.

γ. 5^3 χλστ.

δ. $(3+3+3) \cdot 5$ χλστ.

Εικόνα 1: Τέσσερα από τα 23 έργα του διαγνωστικού εργαλείου

Όπως φαίνεται από τη διατύπωση των ερωτημάτων, δεν πρόκειται απλά για ασκήσεις υπολογισμού, όπου θα μπορούσε να βοηθήσει η αποστήθιση ορισμένων κανόνων, αλλά για έργα που προϋποθέτουν την κατανόηση του αντικειμένου των δυνάμεων. Στην ακόλουθη ενότητα θα παρουσιαστούν κάποια πρώτα χαρακτηριστικά αποτελέσματα. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι η έρευνα βρίσκεται σε εξέλιξη, οπότε τα παρακάτω αποτελέσματα δεν αντικατοπτρίζουν τη συνολική εικόνα από την ανάλυση.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 106 μαθητές, με ηλικιακό μ.ο. τα 15,8 χρόνια. Από αυτούς 50% ήταν αγόρια και 50% κορίτσια. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται η κατανομή των απαντήσεων που δόθηκαν στα τέσσερα αυτά έργα, με την εκάστοτε σωστή απάντηση σε έντονη γραμματοσειρά.

		ΕΡΓΟ			
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ		Ε1	Ε7	Ε10	Ε22
	α	9,43%	12,26%	16,98%	33,96%
	β	**9,43%**	22,64%	50,94%	23,58%
	γ	16,98%	**7,55%**	**22,64%**	**28,30%**
	δ	63,21%	55,66%	7,55%	11,32%

Πίνακας 2: Κατανομή απαντήσεων (με έντονα η εκάστοτε σωστή απάντηση)

Λόγω της ομοιότητας της δομής των Ε1 και Ε7 επιβεβαιώθηκε και στατιστικά ότι τα δύο έργα συσχετίζονται με συντελεστή 0.686, με υψηλότατο επίπεδο σημαντικότητας ($p \ll 0.01$).

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα στα Ε1 και Ε7 από τον Πίνακα 2 είναι φανερό πως η απάντηση (δ) επιλέγεται από πάνω από τους μισούς μαθητές. Οι μαθητές προσδίδουν μία τρόπον τινά «επιμεριστική ιδιότητα» στις πράξεις με δυνάμεις, δηλαδή ο τελεστής έχει την ιδιότητα να δρα πάνω στη βάση αλλά και στον εκθέτη, σύμφωνα με τη δομή $a^n : a = (a : a)^{n:a} = 1^{n:a}$ για το Ε1 και αντίστοιχα $a \cdot a^n = (a \cdot a)^{a \cdot n} = (a^2)^{a \cdot n}$ για το Ε7. Η επιλογή αυτής της απάντησης στα Ε1 και Ε7 δεν μπορεί να εξηγηθεί περαιτέρω μέσω της προσκόλλησης στον πολλαπλασιασμό, αυτό όμως θα μπορούσε να γίνει για τις απαντήσεις (α) ή (γ) και (α) ή (β) στα έργα 1 και 7 αντίστοιχα. Εκεί μπορεί να παρατηρηθεί λ.χ. στο Ε1 η δομή $2^{30.000} : 2 = (2 : 2)^{30.000}$ ή $2^{30.000} : 2 = 2^{(30.000:2)}$, δηλαδή η διαίρεση με 2 είναι ενέργεια πάνω σε ένα μόνο μέρος της δύναμης, σύμφωνα με το σκεπτικό που ισχύει στον πολλαπλασιασμό: $\frac{a \cdot \beta}{\gamma} = \left(\frac{a}{\gamma}\right) \cdot \beta = a \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$. Αντίστοιχα ισχύει για το Ε7: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Ίσως μια πιο απλή εξήγηση να προκύπτει αν ληφθεί υπόψη το σκεπτικό του «ένας από τους δύο αριθμούς πρέπει να διαιρεθεί με το 2» ή αντίστοιχα « ένας από τους δύο αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 6», χωρίς αυτό να αντικατοπτρίζει το επίπεδο κατανόησης των δυνάμεων, παραμένοντας μόνο στο επίπεδο της γλώσσας.

Από το Ε10 μπορεί να συμπεράνει κανείς ότι ένα περαιτέρω πρόβλημα κατανόησης είναι η σειρά με την οποία γράφεται η βάση και ο εκθέτης. Υπάρχει περίπτωση να έχουν καταλάβει οι μαθητές ότι πρέπει κατά κάποιον τρόπο να συνδυαστούν οι αριθμοί 8 και 24, και να πρόκειται για έκφραση με δύναμη (απαντήσεις (β) και (γ), 73,58% των μαθητών). Εδώ μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μεν κατανόηση της κατάστασης που παρουσιάζεται στην άσκηση (έκφραση με δύναμη), διακρίνεται δε μια αδυναμία σχετικά με την κατανόηση της δομής των εκφράσεων καθαυτές.

Τέλος, λαμβάνοντας υπ’όψιν το Ε22 διακρίνεται μία προτίμηση στην απάντηση με πολλαπλασιαστική δομή (απάντηση (α), 33,96%), ίσως επειδή στην ερώτηση περιέχονται με τη σειρά οι λέξεις «τρεις», «φορές» και «πενταπλή», κάτι που παραπέμπει στο «τρεις φορές το πέντε».

Για τα Ε10 και Ε22 υπάρχει και άλλη μία εικασία, ότι οι μαθητές επιλέγουν την απάντηση, στην οποία οι αριθμοί εμφανίζονται με την ίδια σειρά με την οποία αναφέρονται στην ερώτηση. Υπολογίζοντάς το συνολικά, αυτό φαίνεται να ισχύει σε ποσοστό 67,92% για το Ε10 και 57,54% για το Ε22, άρα και στα δύο πάνω από τις μισές απαντήσεις ακολουθούν αυτό το πρότυπο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κύριο πρόβλημα συνολικά είναι μια εσφαλμένη αντίληψη του μαθηματικού αντικειμένου των δυνάμεων. Η σύγχυση πολλών ιδιοτήτων αλλά και της δομής του πολλαπλασιασμού με αυτή των δυνάμεων, καθώς και η αγνόηση της μη ισχύος της επιμεριστικής ιδιότητας φαίνεται να είναι βασικοί λόγοι για τα ευρήματα. Μια πιθανή εξήγηση είναι η έλλειψη μίας πληθώρας πλαισίων και καταστάσεων κατά την εισαγωγή της έννοιας, οδηγώντας σε παρανοήσεις για το τι είναι η ύψωση σε δύναμη και πότε μπορεί να εφαρμοστεί, ακόμα και αν απλά υπολογιστικά έργα μπορούν να εκτελεστούν χωρίς λάθη.

Με αυτήν την εργασία επιτεύχθηκαν δύο στόχοι. Πρώτον, επεκτάθηκε το εύρος και ο αριθμός των ΒΝΜ στο πεδίο των δυνάμεων, ώστε να συμπεριληφθούν κανονιστικά στο σύνολο των ήδη υπαρχουσών για άλλα μαθηματικά αντικείμενα (πχ. Συνάρτηση, κλάσματα κ.ά.) Δεύτερον, παρουσιάστηκε ένας τρόπος με τον οποίο η έννοια των ΒΝΜ μπορεί να βοηθήσει ως πρώτο βήμα μέσω της διάγνωσης στο να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ των Ατομικών Μοντέλων στο μυαλό των μαθητών και των σχετικών Νοητικών Μοντέλων που είναι απαραίτητα για την συγκεκριμένη έννοια. Η μέθοδος της σύνδεσης και σύγκρισης των προϋπαρχουσών ιδεών και παρανοήσεων με το κανονιστικό επίπεδο των ΒΝΜ δείχνει ελπιδοφόρες προοπτικές ώστε να αξιολογηθούν επαρκώς τα αποτελέσματά μας, ενδεχομένως οδηγώντας σε έγκαιρη και έγκυρη διάγνωση αυτών των παρανοήσεων.

Το διαγνωστικό εργαλείο που παρουσιάστηκε μπορεί να εφαρμοστεί ως εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης, λόγω της δομής με τα ερωτήματα πολλαπλής επιλογής, με τη δυνατότητα να αξιοποιηθούν και σε υπολογιστικά συστήματα, με στόχο την εξοικονόμηση χρόνου, τόσο στη διεξαγωγή όσο και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται μεγαλύτερη ελευθερία στους διδάσκοντες, ώστε να προετοιμάσουν στοχευμένα κατάλληλες εργασίες για εξατομικευμένη υποστήριξη των μαθητών τους.

Τέλος, πρέπει να ληφθούν υπόψη και κάποιες αδυναμίες του διαγνωστικού εργαλείου, όπως για παράδειγμα το ότι δεν υπάρχει ούτε ο ισχυρισμός αλλά ούτε και η πρόθεση να αντικατασταθεί η διάγνωση με τη βοήθεια συνεντεύξεων, μέσω των οποίων μπορεί να ερευνηθούν σε βάθος τόσο τα λάθη, όσο και οι λόγοι που μπορεί να οδήγησαν σε συγκεκριμένες αντιλήψεις. Επίσης, είναι δύσκολο κάποιες απαντήσεις που ενδεχομένως να δίνονταν σε ερωτήσεις ανοικτού τύπου να κατηγοριοποιηθούν απόλυτα, καθώς ο αριθμός των επιλογών είναι περιορισμένος σε ερωτήσεις κλειστού τύπου.

1. Η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιήθηκε με Γερμανούς μαθητές και φοιτητές, στη γερμανική γλώσσα. Για τις ανάγκες του κειμένου έχει γίνει μετάφραση των έργων του διαγνωστικού εργαλείου στην ελληνική γλώσσα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Avcu, R. (2010). Eight graders' capabilities in exponents: making mental comparisons. *Practice and Theory in System of Education, 5*(1), 39-48.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6*(3), 113-133.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. In *Learning Mathematics* (pp. 31-60). Springer, Dordrecht.

Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3-4), 163-198.

Hefendehl-Hebeker, L., vom Hofe, R., Büchter, A., Humenberger, H., Schulz, A., & Wartha, S. (2019). Subject-Matter Didactics. In *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research* (pp. 25-59). Springer, Cham.

Itsios, C. & Barzel, B. (2018). Potenzen und Potenzrechnung – eine Herausforderung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. 41–58.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice, 40*(2), 118-127.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., & Zachariades, T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 301-311.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and instruction, 18*(1), 3-17.

psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Soto-Andrade, J., & Reyes-Santander, P. (2011). Conceptual metaphors and "Grundvorstellungen": a case of convergence. In *Proceedings of CERME* (Vol. 7).

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: Normative, descriptive and constructive aspects. In *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 317-331). Springer, Dordrecht.

Vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 225-254.

ΚΑΛΛΙΕΡΓΕΙΑ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΤΗΣ Α΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μαριάνθη Ζιώγα, Δέσποινα Δεσλή

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

mizioga@eled.auth.gr, ddesli@eled.auth.gr

Η παρούσα εργασία ερευνά τον τρόπο με τον οποίο μια εν ενεργεία εκπαιδευτικός της Α΄ Δημοτικού, η οποία συμμετείχε εθελοντικά σε επιμορφωτική παρέμβαση που αφορούσε στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά στο σχολείο, αντιλαμβάνεται και αναπτύσσει τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Πριν από και μετά την παρέμβαση η εκπαιδευτικός συμπλήρωσε αρχικά ερωτηματολόγιο, στο οποίο κλήθηκε να επιλέξει ένα πρόβλημα που θεωρεί δημιουργικό και να επεξηγήσει τους λόγους για τους οποίους το επέλεξε, και στη συνέχεια, προκειμένου να διαφανούν καλύτερα οι θέσεις της, συμμετείχε σε συνέντευξη και πραγματοποιήθηκε παρατήρηση της διδασκαλίας της. Αν και η παρέμβαση βοήθησε την εκπαιδευτικό να αναγνωρίζει στοιχεία της δημιουργικότητας στα μαθηματικά προβλήματα, η ίδια παρέμεινε διστακτική στη δημιουργία καταστάσεων που αναπτύσσουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά αναδείχθηκε σχετικά πρόσφατα τόσο στον διεθνή όσο και τον ελληνικό χώρο και φαίνεται να συνδέεται συχνά με την καινοτομία (Bolden, Harries & Newton, 2010), τη φαντασία (Christou, 2017), τον μη αλγοριθμικό τρόπο σκέψης (Ervynck, 1991), την αποκλίνουσα σκέψη, καθώς και με την ικανότητα να βρίσκει κανείς πολλές λύσεις σε ανοιχτά προβλήματα (Kwon, Park & Park, 2006). Προκειμένου να καλλιεργηθεί η δημιουργικότητα των μαθητών, είναι σημαντικό να προσφέρονται ευκαιρίες τόσο για διατύπωση ερωτημάτων και υποθέσεων σχετικά με θέματα που τους ενδιαφέρουν όσο και για επίλυσή τους. Η ενθάρρυνση των μαθητών να εργάζονται με αυτόν τον τρόπο, «όπως οι μαθηματικοί», αποτελεί σημαντικό εργαλείο προς την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, καθώς σε αυτήν ακριβώς τη διαδικασία στοχασμού, διατύπωσης ερωτημάτων, προσπάθειας για επίλυση, αναδιατύπωσης και οριστικής επίλυσης του προβλήματος γίνεται φανερή η δημιουργική δραστηριότητα (Silver, 1997). Ο Sriraman (2019) τονίζει τον ρόλο που παίζει η αβεβαιότητα ως καταλύτης στη δημιουργικότητα στα μαθηματικά και τη σημασία των προβλημάτων που εμπεριέχουν στοιχεία αβεβαιότητας (π.χ., ανοιχτού τύπου προβλήματα, ή προβλήματα με ελλιπή δεδομένα/χαλαρή σύνταξη), καθώς δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να αναζητήσουν κατάλληλα εργαλεία και στρατηγικές προκειμένου να τα λύσουν, καλλιεργώντας έτσι τη δημιουργικότητά τους.

Τα προβλήματα που επιλέγουν να διδάξουν οι εκπαιδευτικοί διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά στα πλαίσια της σχολικής τάξης (Levenson, 2015), αντικατοπτρίζοντας το επίπεδο της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου (ΠΓΠ) των εκπαιδευτικών. Καθώς οι γενικές παιδαγωγικές γνώσεις τους συνδυάζονται με τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου αντικειμένου, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου από τους μαθητές (Shulman, 1987), οι επιλογές των διδακτικών μεθόδων και υλικών είναι πρωτίστης σημασίας. Έρευνες που εξετάζουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά από την πλευρά των εκπαιδευτικών δείχνουν ότι οι ίδιοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην προσπάθειά τους να καλλιεργήσουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά στην τάξη τους, κυρίως λόγω περιορισμών που επιβάλλει το αναλυτικό πρόγραμμα (Kattou, Kontoyianni, & Christou, 2009). Γενικά, οι εκπαιδευτικοί εμφανίζουν αρκετά περιορισμένες και συγκεχυμένες απόψεις σχετικά με την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά (Δεσλή, & Ζιώγα, 2015), δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν οι ίδιοι τη δημιουργικότητα (Aljughaiman, & Mowrer-Reynolds, 2005) και τη συνδέουν με τη δημιουργία ενός ευχάριστου περιβάλλοντος και τη χρήση της τεχνολογίας (Bolden, Harries, & Newton, 2010).

Επιμορφωτικά προγράμματα που έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν έδειξαν μεγάλη θετική επίδραση, επιφέροντας βελτιώσεις τουλάχιστον αναφορικά με την επιλογή των προβλημάτων που ευνοούν την καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών τους (Levenson, 2015; Shriki, 2010). Ωστόσο, παραμένει άγνωστο το κατά πόσο οι αλλαγές στις απόψεις των εκπαιδευτικών συνεπάγονται αλλαγή και στις διδακτικές τους πρακτικές (Levenson, 2015).

Η παρούσα εργασία αποτελεί τμήμα μιας έρευνας που επιχειρεί να μελετήσει αυτό το ερώτημα σε βάθος. Για τον σκοπό αυτόν, συλλέχθηκαν δεδομένα από επτά εν ενεργεία εκπαιδευτικούς μέσω ερωτηματολογίων, συνεντεύξεων και παρατήρησης της διδασκαλίας τους, πριν από και μετά τη συμμετοχή τους σε επιμορφωτική παρέμβαση που στόχευε στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην περίπτωση μιας εν ενεργεία εκπαιδευτικού, πριν από και μετά τη συμμετοχή της στην επιμορφωτική παρέμβαση, εστιάζοντας στον τρόπο με τον οποίο η εκπαιδευτικός ενσωματώνει τις γενικές παιδαγωγικές της γνώσεις και τις γνώσεις της σχετικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά στις διδακτικές της πρακτικές κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, επιχειρείται η διερεύνηση των ερωτημάτων: α) Πώς αντιλαμβάνεται τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά πριν από την παρέμβαση και μετά; β) Ποια προβλήματα θεωρεί ότι καλλιεργούν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά; γ) Ποιες αλλαγές παρατηρούνται μετά την παρέμβαση;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μελέτη περίπτωσης. Αν και είναι γνωστό ότι τα αποτελέσματα μιας μελέτης περίπτωσης δεν μπορούν να γενικευτούν, ωστόσο μας επιτρέπουν αφενός να εντρυφήσουμε στις απόψεις των συμμετεχόντων και να παρατηρήσουμε τις αλλαγές που συμβαίνουν σε αυτές και αφετέρου να κατανοήσουμε καλύτερα άλλες παρόμοιες καταστάσεις (Cohen, Manion, & Morrison, 2008).

Η συμμετέχουσα. Η Χαρά είναι εκπαιδευτικός με 23 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, που δίδασκε σε Α' τάξη την περίοδο της έρευνας. Συμμετείχε εθελοντικά στην έρευνα γιατί, όπως δήλωσε, ως μαθήτρια δεν της άρεσαν τα μαθηματικά και ήθελε να πάρει ιδέες προκειμένου να γίνει η διδασκαλία της στα μαθηματικά πιο ενδιαφέρουσα και ελκυστική για τους μαθητές της. Δεν είχε καμία εξειδίκευση ή συμμετοχή σε προγράμματα για τα μαθηματικά.

Η παρέμβαση. Η επιμορφωτική παρέμβαση είχε συνολική διάρκεια 12 ώρες, κατανεμημένες σε 4 τρίωρες συναντήσεις. Κατά τη διάρκειά της, οι εκπαιδευτικοί ενημερώθηκαν σε θεωρητικό επίπεδο για τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα που αφορούν στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά. Επιπρόσθετα, κλήθηκαν –ατομικά και σε ομάδες- να σχολιάσουν, να επιλύσουν και να τροποποιήσουν δημιουργικά προβλήματα που είχαν επιλεχθεί για τους σκοπούς της επιμόρφωσης.

Εργαλεία. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια ερωτηματολογίου, ημιδομημένης συνέντευξης και παρατήρησης. Στο ερωτηματολόγιο η Χαρά κλήθηκε να επιλέξει ένα πρόβλημα που θεωρεί κατάλληλο για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας, να δηλώσει την πηγή προέλευσής του και να εξηγήσει για ποιους λόγους το επέλεξε. Στις συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν ώστε να αναδυθούν οι θέσεις της Χαράς για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, οι ερωτήσεις αφορούσαν κυρίως στα χαρακτηριστικά των προβλημάτων που ενδείκνυνται για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά καθώς και στη συνολική ατμόσφαιρα της τάξης που συντελεί σε αυτή την κατεύθυνση. Τέλος, σχεδιάστηκε και χρησιμοποιήθηκε φύλλο δομημένης παρατήρησης, το οποίο εστίαζε στο είδος των προβλημάτων που επέλεγε η εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία της αλλά και στη διδακτική της προσέγγιση.

Διαδικασία. Προκειμένου να αξιολογηθούν οι αλλαγές που επήλθαν στις απόψεις της σχετικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά μετά την παρέμβαση, η Χαρά κλήθηκε να συμπληρώσει το ίδιο ερωτηματολόγιο δύο φορές: έναν μήνα πριν από την έναρξη της παρέμβασης και δύο μήνες μετά τη λήξη της. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε τόσο για τις συνεντεύξεις, οι οποίες είχαν διάρκεια περίπου 20 λεπτών και ηχογραφήθηκαν, όσο και για την παρατήρηση της διδασκαλίας της εκπαιδευτικού στην ώρα των μαθηματικών (4 ώρες πριν και 4 ώρες μετά την παρέμβαση).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Δημιουργικότητα στα μαθηματικά πριν από την παρέμβαση

Όπως φαίνεται στην πρώτη της συνέντευξη, η Χαρά συνδέει τη δημιουργικότητα με την άνεση στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων και τη δημιουργία ευχάριστων καταστάσεων: «*Δημιουργικότητα εννοούμε την ευκολία και την ικανότητα που έχουν οι άνθρωποι να δίνουν λύση στα προβλήματα, να δημιουργούν καταστάσεις που τους κάνουν να περνάνε καλά. Να λύνουν προβλήματα με ευκολία και με τρόπους που να μην τους δυσκολεύουν*». Αναφέρεται, επίσης, στην ευελιξία αναζήτησης λύσεων: *'…ο άνθρωπος που δεν εγκλωβίζεται σε έναν δρόμο, …, που ψάχνει πολλές λύσεις, που πάει μπροστά και πίσω,… είναι ο άνθρωπος ο δημιουργικός'*. Θεωρεί ότι οι μαθητές που είναι δημιουργικοί στα μαθηματικά δεν είναι απαραίτητα οι πιο ευφυείς, αλλά κυρίως οι πιο εργατικοί, αυτοί που έχουν κίνητρο να δουλέψουν και να προσπαθήσουν καθώς και όσοι έχουν αναπτυγμένη την ικανότητα ανάκλησης γνώσεων και σύνδεσής τους με τα προβλήματα *('… να έχεις την ικανότητα να βάλεις τα πράγματα στο μυαλό σου … και να τα ξαναφέρνεις για να σε διευκολύνει να λύνεις τα προβλήματα'*). Για την ίδια, δημιουργικός είναι ο εκπαιδευτικός που αφήνει χώρο στα παιδιά να δουλέψουν, διατυπώνοντας ωστόσο την επιφύλαξή της για τους παράγοντες που συντελούν στη δημιουργικότητα πέρα από τον ρόλο του δασκάλου.

Η Χαρά θεωρεί ότι τα προβλήματα που καλλιεργούν τη δημιουργικότητα στους μαθητές είναι αυτά που τους αφορούν άμεσα, που σχετίζονται με την καθημερινότητα και τα ενδιαφέροντά τους. Προσπαθεί να χρησιμοποιεί προβλήματα στη διδασκαλία της, τα οποία συνήθως φτιάχνει η ίδια με βάση τα ενδιαφέροντα των μαθητών της. Ενδεικτικά, λέει: *'… κάνω μόνη μου δικά μου προβλήματα. Αναφέρω πολλές φορές μέσα στα προβλήματα τα ονόματά τους. Δηλαδή "ο Δημήτρης-που είναι μαθητής μου και ξέρω ότι του αρέσουν πολύ τα αυτοκόλλητα- θέλει να κλείσει το μπλοκ του, για να κερδίσει μία μπάλα. Το μπλοκ έχει 20 αυτοκόλλητα μέσα, έχει βρει μέχρι στιγμής 14, Δημήτρη πόσα ακόμα θέλεις;" Οπότε μπαίνουν στη διαδικασία ότι αυτό είναι κάτι οικείο, μας αφορά, άρα πρέπει να βρούμε τη λύση, πρέπει να κερδίσει τη μπάλα.*

Επέλεξε ως πρόβλημα που καλλιεργεί τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά ένα πρόβλημα που σκέφτηκε η ίδια (βλ. Εικόνα 1) και το οποίο απευθύνεται σε μαθητές της Α' Δημοτικού. Αναφέρει πολύ συνοπτικά τους λόγους για τους οποίους το επέλεξε: «*Έννοια της πρόσθεσης, Καταστάσεις πρόσθεσης πέρα από την στερεοτυπική μορφή της*», δείχνοντας ότι δίνει σημασία στο μαθηματικό περιεχόμενο του προβλήματος. Αν και το πρόβλημα πράγματι ξεφεύγει από την παρουσίαση μιας αριθμητικής πρότασης εστιασμένης στον αλγόριθμο της πρόσθεσης (π.χ., «*5+4=…*»), αποτελεί αρκετά συνηθισμένο είδος προβλήματος για την Α' τάξη. Η επιλογή του συγκεκριμένου προβλήματος συμβαδίζει απόλυτα με όσα δήλωσε στη συνέντευξη για την επιδίωξη ευχάριστου και παιγνιώδους περιβάλλοντος: έχει χρησιμοποιήσει το όνομα ενός από τους μαθητές της καθώς και κάποιο από τα ενδιαφέροντά του, προκειμένου να γίνει το πρόβλημα πιο ελκυστικό και ενδιαφέρον.

Η εικόνα της διδασκαλίας της Χαράς, όπως προέκυψε από την παρατήρηση, συμβαδίζει με τα λεγόμενά της στη συνέντευξη: η ατμόσφαιρα στην τάξη της είναι ευχάριστη, οι μαθητές συμμετέχουν με ενθουσιασμό, η ίδια είναι πάντα ενθαρρυντική και αξιοποιεί αντικείμενα από το περιβάλλον της τάξης για να διευκολύνει τους μαθηματικούς υπολογισμούς των παιδιών (π.χ., κύβους, μαρκαδόρους).

Ο Κωνσταντής έπαιξε μπίλιες και έχασε 4. Τώρα έχει 5 μπίλιες. Πόσες μπίλιες είχε ο Κωνσταντής προτού παίξει;

Εικόνα 1: Το πρόβλημα που επέλεξε η Χαρά πριν από την παρέμβαση

Β. Δημιουργικότητα στα μαθηματικά μετά την παρέμβαση

Η Χαρά παραμένει σταθερή στη σύνδεση της δημιουργικότητας με το αίσθημα ευχαρίστησης και ικανοποίησης, όμως πλέον συνδέει τη δημιουργικότητα και με την πρωτοτυπία και την ανακάλυψη της νέας γνώσης (‘… *ικανότητα του ανθρώπου, εσωτερική ανάγκη, να πρωτοτυπεί, να ανακαλύπτει πράγματα, με βασικό κίνητρο την εσωτερική ανάγκη να έχει βίωμα επιτυχίας, χαράς, ικανοποίησης…*). Χαρακτηριστικά επικαλέστηκε ένα παράδειγμα από τη δουλειά της στην Α’ δημοτικού, όταν συνέδεσε με τα μαθηματικά ένα πρόβλημα που προέκυψε στην καθημερινότητά τους *(‘Ρίξαμε τους κροκόδειλους (παιχνίδια) μέσα στη λίμνη -μια "λίμνη" που σχηματίστηκε από τα νερά της βροχής και καταλάμβανε μεγάλο τμήμα της αυλής του σχολείου).* Στο παράδειγμά της φάνηκε ότι τα παιδιά προσπάθησαν να βρουν λύση σε ένα πρόβλημα που τους απασχολεί, που το επέλεξαν οι ίδιοι και όχι κάποιος άλλος γι’ αυτούς, διατυπώνοντας ερωτήματα («*Πώς θα τους βγάλουμε; Τι θα χρησιμοποιήσουμε;*»), υποθέσεις και τρόπους επαλήθευσης των υποθέσεων («*Πιο μεγάλο είναι το κοντάρι της σκούπας, ας το μετρήσουμε*») αναδεικνύοντας αυτό που περιγράφεται ως εργασία των μαθητών «όπως οι μαθηματικοί» (Silver, 1997).

Η πρωτοτυπία ως στοιχείο της δημιουργικότητας αναγνωρίζεται από την ίδια ακόμα και όταν επιχειρεί να περιγράψει τους δημιουργικούς μαθητές: «… *ξεφεύγουν από τους τυποποιημένους τρόπους επίλυσης, ψάχνουν διαφορετικούς και πρωτότυπους τρόπους, πηγαίνουν πέρα από τη λύση και προεκτείνουν με ερωτήσεις του τύπου ‘τι θα γινόταν αν…’*». Αναγνωρίζει ότι τόσο η αποκλίνουσα όσο και η αφαιρετική σκέψη είναι στοιχεία της δημιουργικότητας η οποία «*έχει πολλές διαστάσεις*», όμως πιστεύει ότι η καλλιέργειά της στα πλαίσια των σχολικών μαθηματικών θα πρέπει να στηρίζεται σε προβλήματα της καθημερινότητάς τους. Πιστεύει ότι ένα περιβάλλον φτωχό σε ερεθίσματα επηρεάζει αρνητικά την καλλιέργεια της δημιουργικότητας και υποστηρίζει την ενίσχυση του μαθησιακού περιβάλλοντος «*όχι μόνο από υλικά αγαθά, …, αλλά και από επικοινωνία, από αλληλεπίδραση*», τονίζοντας ιδιαίτερα τις ευκαιρίες για ελευθερία έκφραση των μαθητών και την απενοχοποίησή τους από τα λάθη στα μαθηματικά. Θεωρεί ότι η δημιουργικότητα δεν περιορίζεται σε ένα γνωστικό αντικείμενο: «*ο δημιουργικός μαθητής είναι παντού δημιουργικός, και στα μαθηματικά και στη γλώσσα …*». Ενώ πριν από την παρέμβαση ήταν πιο απαισιόδοξη και πίστευε ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται περισσότερη ενημέρωση, χρόνο και υλικά προκειμένου να καλλιεργήσουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, πλέον φαίνεται να έχει περισσότερη αυτοπεποίθηση και δηλώνει με μεγαλύτερη βεβαιότητα ότι η δημιουργικότητα στα μαθηματικά μπορεί να καλλιεργηθεί στο σχολείο.

Η Χαρά μετά την παρέμβαση επέλεξε δύο προβλήματα ως δημιουργικά (βλ. Εικόνα 2) τα οποία απευθύνονται σε παιδιά Α' τάξης. Επεξηγώντας τους λόγους για την επιλογή της, δηλώνει: «*Είναι προβλήματα ανοιχτής απάντησης. Μπορεί να έχουν πολύ συγκεκριμένα δεδομένα, αλλά είναι ανοιχτά σε πολλές διαφορετικές πιθανές λύσεις και στη χρήση αποκλίνουσας σκέψης… Είναι μη τυποποιημένα προβλήματα, δεν μπορούν να επιλυθούν με απλή απομνημόνευση ή εφαρμογή ενός γνωστού τύπου ή αλγόριθμου*».

Πράγματι τα προβλήματα αυτά ευνοούν την καλλιέργεια της δημιουργικότητας καθώς επιτρέπουν ευχέρεια (παραπάνω από μία λύσεις), ευελιξία (διαφορετικές λύσεις) και πρωτοτυπία (νέες λύσεις), πέρα από την εφαρμογή ενός αλγοριθμικού κανόνα. Ωστόσο, είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό επηρεασμένα από τις συζητήσεις κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, καθώς και τα δύο παρουσιάστηκαν -σχεδόν αυτούσια- στις συναντήσεις και προσφέρθηκαν στους συμμετέχοντες για τροποποιήσεις και βελτιώσεις. Συγκεκριμένα, η Χαρά κράτησε τη βασική ιδέα ενός παραδείγματος που είχε χρησιμοποιηθεί στις συναντήσεις («*Σε έναν αγώνα μπάσκετ του σχολείου μας με το δημοτικό σχολείο Πεύκων, μπήκαν 28 καλάθια. Το σχολείο μας έβαλε περισσότερα καλάθια από το σχολείο των Πεύκων. Πόσα καλάθια μπορεί να έβαλε κάθε ομάδα;*»), αλλάζοντας τους αριθμούς και το σενάριο. Παρόμοια, το δεύτερο πρόβλημα που επιλέγει έχει συζητηθεί στα πλαίσια της παρέμβασης («*Ο Πάνος λέει ότι τα ζωάκια του είναι περισσότερα από 15 και λιγότερα από 18. Μπορεί να τα μετρήσει ανά δύο. Πόσα είναι τα ζωάκια του Πάνου;*») και οι τροποποιήσεις της αφορούν επουσιώδη χαρακτηριστικά των προβλημάτων, όπως η αλλαγή του ονόματος του ήρωα στο πρόβλημα.

<u>1ο πρόβλημα:</u> Τα παιδιά της χορωδίας του σχολείου μας είναι 19. Τα αγόρια είναι περισσότερα από τα κορίτσια. Πόσα μπορεί να είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια; Σχημάτισε ανάλογο πίνακα.

<u>2ο πρόβλημα:</u> Έχω μία συλλογή δεινόσαυρων. Είναι περισσότεροι από 15 και λιγότεροι από 18. Μπορώ να τους μετρήσω ανά δύο. Πόσους δεινόσαυρους έχω;

Εικόνα 2. Τα προβλήματα που επέλεξε η Χαρά μετά την παρέμβαση

Μετά την παρέμβαση, οι διδακτικές προσεγγίσεις της Χαράς φάνηκαν ιδιαίτερα εμπλουτισμένες, καθώς κατά τη διάρκεια της παρατήρησης χρησιμοποίησε πολλές από τις ιδέες που συζητήθηκαν. Συγκεκριμένα, έθεσε στους μαθητές της προβλήματα ανοιχτής απάντησης ενθαρρύνοντάς τους να βρουν πολλές λύσεις, καθώς και πρόβλημα που οδηγεί σε γενίκευση, ζητώντας από τους μαθητές να διατυπώσουν υποθέσεις και να τις επαληθεύσουν. Ωστόσο, όπως συνέβη και στο ερωτηματολόγιο, τα προβλήματα που χρησιμοποίησε στην τάξη της είχαν παρουσιαστεί και συζητηθεί αυτούσια κατά την παρέμβαση. Η Χαρά παρενέβη μόνο ως προς τον τρόπο παρουσίασης καθώς τα παρουσίασε στην τάξη κάνοντας χρήση τεχνικών δραματοποίησης.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η Χαρά, τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση, συνδέει τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά κυρίως με τα ενδιαφέροντα των μαθητών και με πρόκληση ευχάριστων συναισθημάτων (λ.χ., αίσθημα ευχαρίστησης, επιτυχίας, ικανοποίησης), άποψη που συναντάται συχνά στους εκπαιδευτικούς (Levenson, 2013). Επίσης, από την παρατήρηση της διδασκαλίας της και τις διδακτικές της πρακτικές (δραματοποίηση, παιχνίδι) φαίνεται ότι, ειδικά πριν από την παρέμβαση, έχει την τάση να διδάσκει "δημιουργικά" και όχι τόσο να διδάσκει "με στόχο τη δημιουργικότητα" (Bolden et al., 2010). Μετά την παρέμβαση, οι απόψεις της έχουν εμπλουτιστεί, καθώς πλέον αναγνωρίζει περισσότερα χαρακτηριστικά δημιουργικότητας στα μαθηματικά προβλήματα (ανοιχτά προβλήματα, ύπαρξη πολλών λύσεων και διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης, αποκλίνουσα σκέψη, μη τυποποιημένα προβλήματα, μη αλγοριθμική σκέψη). Επιπλέον, ενθαρρύνει τους μαθητές της να διατυπώνουν υποθέσεις και να προσπαθούν να επιλύουν προβλήματα της καθημερινότητάς τους, αν και η ίδια θεωρεί αυτή τη διαδικασία περισσότερο "παιχνίδι" παρά εργασία των μαθητών "όπως οι μαθηματικοί".

Ωστόσο, οι απόψεις της φαίνεται να εμπλουτίστηκαν περισσότερο σε θεωρητικό επίπεδο -και πολύ λιγότερο σε πρακτικό- καθώς παρέμεινε προσκολλημένη σε όσα συζητήθηκαν στην παρέμβαση: δίστασε να συνθέσει ή να αναζητήσει καινούρια δημιουργικά προβλήματα και προτίμησε να κάνει μικρές τροποποιήσεις σε προβλήματα που συζητήθηκαν κατά την παρέμβαση. Πιθανόν αυτός ο δισταγμός να οφείλεται στο μαθηματικό της υπόβαθρο, το οποίο η ίδια αισθάνεται ότι δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρό. Σε παρόμοια έρευνα, οι Lev-Zamir και Leikin (2013) παρατήρησαν ότι, μεταξύ δύο εκπαιδευτικών, εκείνη που είχε το ισχυρότερο μαθηματικό υπόβαθρο είχε μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση στην αναζήτηση πολλών λύσεων και έδινε περισσότερες ευκαιρίες για έκφραση δημιουργικότητας στους μαθητές της. Η σύνδεση του μαθηματικού υποβάθρου των εκπαιδευτικών με την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στην τάξη τους θα μπορούσε να είναι στόχος μιας μελλοντικής έρευνας.

Αν και τα δεδομένα της παρούσας εργασίας προέρχονται από μία μόνο εκπαιδευτικό που συμμετείχε σε μία σχετικά μικρής κλίμακας παρέμβαση, αναδεικνύεται η ανάγκη οργάνωσης και υλοποίησης επιμορφωτικών προγραμμάτων για εκπαιδευτικούς σχετικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά (Levenson, 2015; Shriki, 2010; Zioga & Desli, 2019), προγραμμάτων προσανατολισμένων σε διδακτικές πρακτικές και εφαρμογές στην τάξη. Οι εκπαιδευτικοί ενδεχομένως θα έχουν τη δυνατότητα να διαχειριστούν και να καλλιεργήσουν στους μαθητές τους τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, όταν πρώτα οι ίδιοι κατανοήσουν τη δημιουργικότητα και τους παράγοντες που την επηρεάζουν.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ερευνητική εργασία υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛΙΔΕΚ) και από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας

(ΓΓΕΤ), στο πλαίσιο της Δράσης «Υποτροφίες ΕΛΙΔΕΚ Υποψηφίων Διδακτόρων» (κωδικός 1901).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δεσλή, Δ., & Ζιώγα, Μ. (2015). Κριτήρια επιλογής των προβλημάτων που ενισχύουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά: οι ιδέες των εκπαιδευτικών. *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Εν.Ε.Δι.Μ.* (σελ. 116-125). Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Aljughaiman, A., & Mowrer-Reynolds, E. (2005). Teachers' conceptions of creativity and creative students. *The Journal of Creative Behavior, 39*(1), 17-34.

Bolden, D.S., Harries, A.V., & Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teachers conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 143-157.

Cohen, J., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Christou, C. (2017). Creativity and imagination in mathematics. *Proceedings of the 10th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 17-24). Nicosia: Cyprus.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–52). New York: Kluwer Academic Publishers.

Kattou, M., Kontoyianni, K., & Christou, K. (2009). Mathematical creativity through teachers' perceptions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 297-304). Thessaloniki, Greece: PME.

Kwon, O.N., Park, J.S., & Park, J.H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review,* 7(1), 51–61.

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: teachers' choices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(4), 269-291.

Levenson, E. (2015). Exploring Ava's developing sense for tasks that may occasion mathematical creativity. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 1–25.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2013). Saying vs doing: Teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 295-308.

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 159-179.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Sriraman, B. (2019). Uncertainty as a catalyst for mathematical creativity. *Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness (*pp. 32-51*).* Hamburg: Germany.

Zioga, M., & Desli, D. (2019). Improving mathematical creativity in the classroom: a case study of a fourth-grade teacher. *Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness (*pp. 242-248*).* Hamburg: Germany.

ΥΠΟΣΤΗΡΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΝΗΠΙΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Γεωργία Πήττα, Μαρία Καλδρυμίδου, Ξένια Βαμβακούση

Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ge_pi@yahoo.gr mkaldrim@uoi.gr xvamvak@uoi.gr

Στην εργασία αυτή διερευνούμε τη δυνατότητα υποστήριξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας. Σχεδιάσαμε μια παρέμβαση βασισμένη στην παροχή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων και την επίλυση προβλημάτων με ισομερισμό, μέτρηση με διαφορετικές μονάδες και επανάληψη ποσότητας, ενέργειες που θεωρούνται θεμελιώδεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Η παρέμβαση δοκιμάστηκε με μια μελέτη περίπτωσης με ημι-πειραματικό σχεδιασμό σε μία ομάδα τεσσάρων νηπίων. Η παρέμβαση ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών και προκάλεσε βελτιώσεις στην επίδοσή τους και στην ποιότητα των εξηγήσεών τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ένα πλήθος ερευνητικών δεδομένων τεκμηριώνουν την ύπαρξη πρώιμων ικανοτήτων πολλαπλασιαστικής σκέψης από πολύ μικρές ηλικίες (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002). Πράγματι, υπό κατάλληλες συνθήκες, μικρά παιδιά, ακόμα και βρέφη, διακρίνουν μεταβολές στο λόγο μεταξύ δύο ποσοτήτων και επεξεργάζονται αναλογικές σχέσεις σε αντιληπτικό επίπεδο. Παιδιά 6 ετών, αν τους δοθούν αρκετά παραδείγματα μιας συγκεκριμένης σχέσης μέρους-όλου σε σχήματα με ένα σκιασμένο μέρος, τότε μπορούν να επιλέξουν, ανάμεσα σε άλλα, ένα μοντέλο που αναπαριστά την ίδια σχέση. Επίσης, παιδιά ηλικίας 6-7 ετών, όταν τους παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα ενός πολλαπλασιαστικού μετασχηματισμού επί ποσοτήτων (συνεχών ή διακριτών), είναι σε θέση να προβλέψουν τι θα συμβεί σε μια νέα ποσότητα (McCrink & Spelke, 2016). Τα μικρά παιδιά αναπτύσσουν ή υιοθετούν αποτελεσματικές στρατηγικές αντιμετώπισης πολλαπλασιαστικών καταστάσεων (π.χ. δίκαιης μοιρασιάς) και κάποια εξάγουν τις αρχές που τις διέπουν (π.χ., «όσο περισσότεροι οι παραλήπτες, τόσο μικρότερα τα μερίδια», Kornilaki & Nunes, 2005). Οι πρώιμες αυτές ικανότητες έχουν, φυσικά, περιορισμούς ως προς τις συνθήκες και τα πλαίσια στα οποία εκδηλώνονται. Για παράδειγμα, η σχέση 1:2 είναι πιο αναγνωρίσιμη από τα παιδιά από άλλες σχέσεις (Hunting & Davis, 1991, Spinillo & Bryant, 1991). Ένα σημαντικό εύρημα είναι ότι στο πλαίσιο της αντιληπτικής αναγνώρισης τα παιδιά τα πηγαίνουν καλύτερα, όταν οι ποσότητες είναι συνεχείς. Αντίθετα, στο πλαίσιο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων τα πηγαίνουν καλύτερα στις διακριτές, κάτι που αποδίδεται μάλλον σε διαδικαστικές δυσκολίες, παρά στην κατανόηση της κατάστασης (Kornillaki & Nunes, 2005). Πρέπει να τονιστεί ότι οι σχετικές εμπειρίες των παιδιών, στο πλαίσιο της άτυπης ή της τυπικής εκπαίδευσης, ευνοούν την εκδήλωση και ενίσχυση αυτών των ικανοτήτων (Hunting & Davis, 1991), γεγονός που θέτει ένα ζητούμενο για την εκπαίδευση.

Τα δεδομένα αυτά δεν έχουν αξιοποιηθεί επαρκώς στην πρωτοσχολική εκπαίδευση. Πράγματι, εδώ και δεκαετίες έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές (π.χ. Hunting & Davis, 1991) ότι στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης δίνεται δυσανάλογα μεγάλη βαρύτητα στην πρόσθεση και τις προσθετικές σχέσεις στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών. Αυτό συμβαίνει ακόμα και σε αναλυτικά προγράμματα που ενσωματώνουν ρητούς στόχους για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ήδη από το νηπιαγωγείο, όπως είναι το πιο πρόσφατο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Ειδικά για το νηπιαγωγείο, οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου επισήμαναν δύο κεντρικά ζητήματα: α) όλοι οι στόχοι που αφορούν την πολλαπλασιαστική σκέψη περιορίζονται στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και άρα η αντιληπτική ευχέρεια των παιδιών στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων δεν αξιοποιείται και β) λείπουν τα κατάλληλα γλωσσικά εργαλεία που θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, όπως για παράδειγμα, οι όροι «μισό» και «διπλάσιο». Το δεύτερο ζήτημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς οι άτυπες εμπειρίες των παιδιών με καταστάσεις στις οποίες ενυπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση δε συνεπάγονται απαραίτητα την αναγνώριση της κοινής σχεσιακής βάσης αυτών των καταστάσεων (Hunting & Davis, 1991). Τα γλωσσικά εργαλεία στο πλαίσιο δομημένων εμπειριών είναι ένα μέσο που θα μπορούσε να υποστηρίξει τα παιδιά προς αυτή την κατεύθυνση.

Σκοπός αυτής μελέτης είναι να διερευνήσει τις δυνατότητες υποστήριξης παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας να αναγνωρίσουν, να διαχειριστούν και να εκφράσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ τόσο διακριτών, όσο και συνεχών ποσοτήτων, στο πλαίσιο πολλαπλασιαστικών καταστάσεων οι οποίες απαιτούν τις ενέργειες του ισομερισμού, της μέτρησης με διαφορετικές μονάδες και της επανάληψης μιας ποσότητας που αναγνωρίζονται ως βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Σχεδιάσαμε μια παρέμβαση που βασίστηκε στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής που απαιτούν τις παραπάνω ενέργειες και στην παροχή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Υποθέσαμε ότι η παρέμβαση αυτή θα ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας και ότι θα βελτίωνε την ικανότητά τους να πραγματεύονται (δηλ. να επιλύουν αιτιολογώντας την απάντησή τους) προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης με ημι-πειραματικό σχεδιασμό (προέλεγχος-παρέμβαση-μεταέλεγχος, χωρίς ομάδα ελέγχου).

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν τέσσερα παιδιά από 5 ετών και 7 μηνών έως 6 ετών που παρακολουθούσαν τις δραστηριότητες ενός Κέντρου Δημιουργικής Απασχόλησης (ΚΔΑΠ) του Νομού Άρτας. Από αυτά το ένα ήταν κορίτσι (5 ετών 9 μηνών) που θα αναφέρεται στη συνέχεια με το ψευδώνυμο Μαρία. Τα υπόλοιπα ήταν αγόρια με τα ψευδώνυμα Κώστας (ηλικίας 6 ετών), Νίκος (ηλικίας 5 ετών και 5 μηνών) και Χάρης (ηλικίας 5 ετών και 7 μηνών). Τα παιδιά είχαν μόλις αποφοιτήσει από το ίδιο δημόσιο νηπιαγωγείο, στο οποίο είχαν εκτεθεί σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς στα δύο, στο πλαίσιο διακριτών ποσοτήτων, χωρίς υπόλοιπο.

Ερευνητικά εργαλεία

Για τις ανάγκες του προελέγχου σχεδιάστηκε ένα εργαλείο με 3 έργα (Α, Β, Γ), με 4 δοκιμές το καθένα, τα οποία εξέταζαν τη σχέση 1:2 και 2:1 για διακριτές και συνεχείς ποσότητες. Οι διακριτές ποσότητες αναπαραστάθηκαν με κουκκίδες από χαρτόνι και οι συνεχείς με ορθογώνια από χαρτόνι.

Η κατηγορία Α αφορούσε την αντιληπτική αναγνώριση των σχέσεων. Σε κάθε δοκιμή δόθηκαν δύο παραδείγματα της σχέσης (Χ1:Υ1, Χ2:Υ2) με την πληροφορία ότι «το Χ1 ταιριάζει με το Υ1» και «το Χ2 ταιριάζει με το Υ2». Στη συνέχεια δόθηκε μια ποσότητα Ζ, και ζητήθηκε το Ω, ώστε να διατηρείται η σχέση («Ποιο πιστεύεις ότι ταιριάζει με το Ζ;»).

Στο έργο Β αξιοποιήθηκε το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς. Δόθηκε η πληροφορία ότι δυο αδέρφια μοιράζονται δίκαια καραμέλες (διακριτή ποσότητα) και πλάκες σοκολάτας (συνεχής ποσότητα). Για τη σχέση 1:2 δόθηκε η αρχική ποσότητα και ζητήθηκε το μερίδιο, ενώ για τη 2:1 δόθηκε το μερίδιο και ζητήθηκε η αρχική ποσότητα.

Στα έργο Γ ζητήθηκε ρητά από τα παιδιά να βρουν το μισό και το διπλάσιο διακριτών και συνεχών ποσοτήτων και ρωτήθηκαν αν γνωρίζουν τους όρους αυτούς.

Για να αποφευχθούν διαδικαστικές δυσκολίες, σε όλες τις δοκιμές δόθηκαν 5 εναλλακτικές ποσότητες στα παιδιά για να επιλέξουν μία. Σε κάθε δοκιμή ζητήθηκε από τα παιδιά να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους («Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;», «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό;»).

Στο μεταέλεγχο προστέθηκε ένα επιπλέον έργο (Δ) που αφορούσε τις σχέσεις 1:3 και 3:1 και ήταν ίδιας μορφής με το έργο Γ, που είναι και η πιο απαιτητική. Η επιλογή να μην εξεταστούν οι σχέσεις αυτές με έργα τύπου Α και Β έγινε γιατί το εργαλείο περιλάμβανε ήδη πολλές δοκιμασίες για παιδιά αυτής της ηλικίας.

Διαδικασία

Η παρέμβαση έγινε ομαδικά, σε χώρο του ΚΔΑΠ, σε 4 συνεχόμενες ημέρες (μία συνάντηση ανά ημέρα, διάρκειας περίπου 45΄ λεπτών). Ο προέλεγχος και ο μεταέλεγχος έγιναν μια ημέρα πριν και δυο ημέρες μετά την παρέμβαση, αντίστοιχα. Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά στον ίδιο χώρο. Τα παιδιά και οι γονείς τους έδωσαν τη συγκατάθεσή τους για τη συμμετοχή τους στην έρευνα. Η χρονική διάρκεια παρουσίας της ερευνήτριας (πρώτη συγγραφέας) στο χώρο του ΚΔΑΠ καθορίστηκε από τους υπευθύνους του.

Σχεδιασμός της παρέμβασης

Στην παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν δύο ειδών δραστηριότητες. Η πρώτη βασίστηκε στη δίκαιη και στην αναλογική μοιρασιά και περιλάμβανε τις διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που μπορούν να προκύψουν σε αυτό το πλαίσιο και που αντιστοιχούν σε διαίρεση μερισμού, πολλαπλασιασμό και διαίρεση μέτρησης. Συνολικά, τα παιδιά αντιμετώπισαν 24 τέτοιες πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στη διάρκεια των δύο πρώτων ημερών. Το σενάριο της δραστηριότητας βασίστηκε στην ιδέα φανταστικών «πλασμάτων» (ράβδοι από χαρτόνι, ίδιου πλάτους και μεταβλητού μήκους) που παίρνουν το μερίδιο που τους αναλογεί από διακριτές ποσότητες (π.χ., «καραμέλες») και συνεχείς ποσότητες (π.χ. «σοκολάτες»). Το μερίδιο ήταν συνάρτηση του ύψους των ράβδων, που βρίσκονταν σε σχέση 1:1 (ίσα μερίδια), 1:2 και 1:3 (ανάλογα μερίδια).

Η δεύτερη δραστηριότητα βασίστηκε στην ιδέα της «κλασματομηχανής» (βλ. Hunting & Davis, 1991), δηλ. μιας μηχανής που βρίσκει ένα δεδομένο κλάσμα των εισερχόμενων ποσοτήτων. Χρησιμοποιήσαμε μηχανές που πολλαπλασιάζουν (από τη μια μεριά) και υπο-πολλαπλασιάζουν (από την άλλη μεριά) κατά ένα δεδομένο τελεστή (σε αυτή την περίπτωση κατά 2, 3, ή 4) μια ποσότητα. Τα παιδιά κλήθηκαν να βρουν το πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο δεδομένων διακριτών και συνεχών ποσοτήτων σε συνολικά 23 δοκιμές στις 2 τελευταίες μέρες.

Οι όροι «διπλάσιο» και «τριπλάσιο» εισήχθησαν με βάση την επανάληψη μιας δεδομένης ποσότητας και τη σχέση της ποσότητας αυτής με το πολλαπλάσιό της («πόσες φορές χωράει»). Ο όρος «μισό» ήταν ήδη οικείος στα παιδιά στο πλαίσιο του μερισμού σε δύο ίσα μέρη. Ο όρος «ένα τρίτο» εισήχθη με βάση τον ισομερισμό. Δεδομένης της δυσκολίας ισομερισμού στα τρία στις συνεχείς ποσότητες, δίνονταν εναλλακτικές «κλασματικές» ποσότητες (αντίστοιχες με το 1/2, 1/3, 1/4 ή 1/5 της αρχικής ποσότητας). Τα παιδιά αρχικά εκτιμούσαν, επέλεγαν και στη συνέχεια έλεγχαν την επιλογή τους εξετάζοντας πόσες φορές χωράει στην αρχική ποσότητα.

Απ’ όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία παρέμβαση με αυτά τα χαρακτηριστικά (ενιαία αντιμετώπιση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, έμφαση σε όρους που εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, τόσο για πολλαπλάσια, όσο και για υποπολλαπλάσια, καθώς και αξιοποίηση όλων των θεμελιωδών ενεργειών) για παιδιά αυτής της ηλικίας, αλλά και γενικότερα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ανταπόκριση των παιδιών στην παρέμβαση

Οι δραστηριότητες της παρέμβασης ενείχαν προκλήσεις που δεν είχαν αντιμετωπίσει ξανά τα παιδιά, τουλάχιστον στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, την ατελή διαίρεση διακριτής ποσότητας στα δύο, την τέλεια διαίρεση στα τρία, καθώς και τον ισομερισμό συνεχών ποσοτήτων. Τα παιδιά επινόησαν αποτελεσματικές στρατηγικές όπως η μοιρασιά «ένα-ένα στον καθένα» μέχρι να τελειώσουν τα αντικείμενα και η δίπλωση στα δύο, αλλά και αναποτελεσματικές στρατηγικές (π.χ, για τον ισομερισμό στα τρία. Δεδομένου του περιορισμένου χώρου, θα παρουσιάσουμε παραδείγματα που δείχνουν πώς τα παιδιά πράγματι χρησιμοποιούν τους καινούργιους όρους και τις ενέργειες του ισομερισμού, της επανάληψης ποσότητας και της μέτρησης για να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα και να ελέγξουν τις απαντήσεις τους στο πλαίσιο της παρέμβασης. Τα παραδείγματα είναι από την 4η ημέρα της παρέμβασης.

Στο πρώτο παράδειγμα, η ερευνήτρια παρουσιάζει για πρώτη φορά τη μηχανή με τελεστή 3 για διακριτές ποσότητες και ετοιμάζεται να δείξει παραδείγματα για τον τριπλασιασμό. Ο Κώστας αντιλαμβάνεται τη σχέση με το πρώτο παράδειγμα και δίνει ένα δεύτερο, ενώ ο Χάρης περιγράφει ποια είναι η ποσότητα που επαναλαμβάνεται και ποιος ο τελεστής:

Ε: Αυτή η μηχανή δουλεύει με καραμέλες. Αν βάλω μέσα αυτή την καραμέλα θα μου βγάλει από την μεγάλη πλευρά τρεις καραμέλες.

Κ.: Τριπλάσιο. Και άμα βάλεις δύο θα τις κάνει έξι.

Ε: Πώς το ξέρεις αυτό;

Κ: Γιατί θα επαναλάβει δύο φορές το τρία.

Χ: Όχι, τρεις φορές το δύο. Αφού δύο είναι οι καραμέλες.

Στη συνέχεια, η ερευνήτρια εισάγει την αντίστοιχη μηχανή για τις συνεχείς ποσότητες (μακρόστενα «ζαχαρωτά», μεταβάλλεται το μήκος τους).

Ε: Για πάμε τώρα να σας δείξω τι γίνεται αν βάλουμε ένα ζαχαρωτό από τη μεγάλη πλευρά. Τι λέτε να μου βγάλει από την άλλη πλευρά;

Ν.: Θα το μοιράσει.

Κ.: Ναι, τρεις φορές.

Μ. Έχεις μικρά κομματάκια; [Δοκιμάζει διάφορα κομμάτια μέχρι που βρίσκει αυτό που χωράει τρεις φορές στο ζαχαρωτό.]

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά έκαναν απόπειρες να γενικεύσουν, είτε τις διαδικασίες, είτε τους καινούργιους όρους, ιδιαίτερα για τα πολλαπλάσια. Για παράδειγμα, ο Χάρης περιγράφει τη λειτουργία της μηχανής με τελεστή 4 ως εξής:

Χ: Ε, αυτό κάνουν αυτές οι μηχανές. Από τη μία το βγάζει τέσσερις φορές το ίδιο και από την άλλη το μοιράζει τέσσερις φορές

Ο Νίκος, στο τέλος των δραστηριοτήτων με τις «κλασματομηχανές» ρωτάει:

Ν: Κυρία, πότε θα έρθει ο εκτραπλάσιος; [...] Αυτός που τα κάνει έξι φορές.

Επιδόσεις

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι σωστές (1) και λάθος (0) επιλογές ανά παιδί και ανά έργο στα κοινά έργα του Προελέγχου και του Μεταελέγχου (Α, Β, Γ) και στο επιπλέον έργο του Μεταελέγχου (Δ, στις σκιασμένες γραμμές).

Από τα στοιχεία του Πίνακα 1 φαίνεται ότι, μετά την παρέμβαση, στα κοινά έργα του προελέγχου και του μεταελέγχου αυξάνεται το πλήθος των σωστών απαντήσεων, τόσο συνολικά, όσο και ανά παιδί, για τις διακριτές, καθώς και για τις συνεχείς ποσότητες. Πιο συγκεκριμένα, για τις διακριτές ποσότητες στο σύνολο των απαντήσεων όλων των παιδιών στις 6 δοκιμές (Ν=24), το ποσοστό των σωστών απαντήσεων αυξήθηκε από 29,2% σε 75%. Το αντίστοιχο ποσοστό για τις συνεχείς ποσότητες αυξήθηκε από 33,3% σε 79,2%. Στο επιπλέον έργο του μεταελέγχου, κάθε παιδί απάντησε σωστά σε 1 από τις 4 δοκιμές και, μάλιστα, κάθε παιδί σε διαφορετική δοκιμή.

Ποσότητα/ Σχέση	Δοκιμή	Προέλεγχος					Μεταέλεγχος				
		Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο	Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο
Διακριτή/1:2	Α2	0	1	0	0	1	1	0	1	1	3
	Β2	0	1	1	0	2	1	1	1	1	4
	Γ2	1	1	0	1	3	0	1	0	1	2
Διακριτή/2:1	Α4	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
	Β4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
	Γ4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
	Σύνολο	1	3	2	1	7	4	4	4	6	18
Συνεχής /1:2	Α1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2
	Β1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
	Γ1	0	1	1	1	3	1	1	1	1	4
Συνεχής /2:1	Α3	1	0	1	1	3	1	1	1	1	4
	Β3	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
	Γ3	1	0	0	0	1	1	1	1	1	4
	Σύνολο	2	1	3	2	8	4	5	4	6	19
Διακριτή/1:3	Δ2	-	-	-	-	-	1	0	0	0	1
Διακριτή/3/1	Δ4	-	-	-	-	-	0	0	1	0	1
Συνεχής/1:3	Δ1	-	-	-	-	-	0	0	0	1	1
Συνεχής/3:1	Δ3	-	-	-	-	-	0	1	0	0	1
	Σύνολο	-	-	-	-	-	1	1	1	1	4

Πίνακας 1: Σωστές και λανθασμένες απαντήσει στον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο, ανά κατηγορία έργου και ανά παιδί.

Εξηγήσεις

Οι εξηγήσεις των παιδιών κατά τη διάρκεια του προελέγχου και του μεταελέγχου μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο αδρές κατηγορίες. Η πρώτη (Μη έγκυρες εξηγήσεις) περιλαμβάνει μη εξηγήσεις του τύπου «το είδα», «έτσι είναι», ψευδοεξηγήσεις του τύπου «γιατί θα τη φάει μετά το φαγητό» που σχετίζονται με το πλαίσιο, αλλά όχι με το μαθηματικό περιεχόμενο των έργων και ψευδομαθηματικές εξηγήσεις, στις οποίες τα παιδιά ενέπλεξαν κάποια στοιχεία του μαθηματικού περιεχομένου (συνήθως, αριθμητικά) που όμως δε σχετίζονταν με τα δεδομένα της κατάστασης. Για παράδειγμα, στον Κώστα δίνεται η πληροφορία ότι οι 3 κουκκίδες «ταιριάζουν» με τις 6 κουκκίδες, και η 1 κουκκίδα «ταιριάζει» με τις 2 κουκκίδες – του ζητείται να αποφανθεί με πόσες κουκκίδες «ταιριάζουν» οι 2 κουκκίδες.

Κ: [Δείχνει την κάρτα που επιλέγει. Η κάρτα έχει 3 κουκκίδες.]

Ε: Γιατί;

Κ: Γιατί ένα και ένα μας κάνουν δύο και άλλο ένα μας κάνει τρία.

Η δεύτερη κατηγορία (Έγκυρες εξηγήσεις) περιλαμβάνει τις εξηγήσεις, στις οποίες τα παιδιά, είτε λεκτικά, είτε μη λεκτικά (π.χ., με χειρονομίες) εκφράζουν κατάλληλες στρατηγικές που χρησιμοποιούν για να επιλέξουν ή να ελέγξουν την ορθότητα της επιλογής τους. Με μία μόνο εξαίρεση, οι εξηγήσεις αυτές συνοδεύουν σωστές απαντήσεις και εμφανίζονται τόσο για τις διακριτές, όσο και για τις συνεχείς ποσότητες.

Στα παρακάτω αποσπάσματα παρουσιάζονται τρία παραδείγματα. Στο πρώτο, ο Νίκος εξηγεί τι είναι το μισό μιας δεδομένης συνεχούς ποσότητας.

Ν: Ναι, το κόβουμε στη μέση και μένει το μισό. [Δείχνει με το χέρι του την μέση της σοκολάτας ενώ περιγράφει την διαδικασία] Και μένει ένα άλλο χαρτόνι που είναι μικρότερο και είναι όσο αυτό [Δείχνει το μισό]. Και μένει και το άλλο κομμάτι που είναι το μισό! Είναι ίδιο με το άλλο! Να δες [Ταυτίζει τα δύο κομμάτια].

Στο δεύτερο παράδειγμα, η Μαρία εξηγεί πώς επέλεξε το διπλάσιο μιας συνεχούς ποσότητας, μετρώντας την ποσότητα με το μισό της.

Μ: Με αυτή την μικρούλα ποια θα ταιριάξω; Με αυτή [δείχνει με το χέρι].

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί την γεμίζουμε με ένα άλλο τέτοιο ίδιο κομματάκι. Όπως και τις άλλες. Έχουν δύο ίδια κομματάκια που χωράνε.

Στο τρίτο παράδειγμα, ο Χάρης φαίνεται να αξιοποιεί την κεντρική αρχή ότι σε μια δίκαιη μοιρασιά τα μερίδια πρέπει να είναι ίσα για να υπολογίσει το πλήθος της αρχικής ποσότητας που μοιράστηκε:

Ε: Πόσες ήταν οι καραμέλες δηλαδή; Αν πήρε δύο η Ελενίτσα….

Χ: ….Και δύο η αδερφούλα της.

Ε: Και όλες μαζί πόσες ήταν;

Χ: Τέσσερις. Και μετά έγιναν δύο για την κάθε μία.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά το πλήθος των έγκυρων και μη έγκυρων εξηγήσεων που δόθηκαν στο σύνολο των δοκιμών των κοινών έργων του προελέγχου και μεταελέγχου, και του επιπλέον έργου του μεταελέγχου (στις σκιασμένες γραμμές), ανά παιδί.

Εξηγήσεις	Προέλεγχος					Μεταέλεγχος				
	Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο	Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο
Μη έγκυρες	12	11	12	10	45	4	5	7	2	18
Έγκυρες	0	1	0	2	3	8	7	5	10	30
Σύνολο	12	12	12	12	48	12	12	12	12	48
Μη έγκυρες						3	4	2	4	13
Έγκυρες	-	-	-	-		1	0	2	0	3
Σύνολο	-	-	-	-		4	4	4	4	16

Πίνακας 2: Συχνότητα των έγκυρων και μη έγκυρων εξηγήσεων στο σύνολο των δοκιμών, ανά παιδί.

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 2, διαπιστώνεται μια αξιόλογη αύξηση των έγκυρων εξηγήσεων στα κοινά έργα μετά την παρέμβαση, τόσο συνολικά, όσο και ανά παιδί. Πιο συγκεκριμένα, στο σύνολο των εξηγήσεων όλων των παιδιών στις 12 δοκιμές (Ν=48), το ποσοστό των έγκυρων εξηγήσεων αυξήθηκε από 6,3% σε 62,5%, με τις έγκυρες εξηγήσεις να αποτελούν την επικρατούσα κατηγορία. Στο επιπλέον έργο (Δ), αντίθετα, η επικρατούσα κατηγορία είναι οι μη έγκυρες εξηγήσεις, με τις έγκυρες εξηγήσεις να προέρχονται από δύο παιδιά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σχεδιάσαμε και δοκιμάσαμε μια παρέμβαση για την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας. Κεντρικοί πυλώνες της παρέμβασης ήταν η χρήση γλωσσικών όρων που εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, και η έκθεση των παιδιών σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις οι οποίες απαιτούν θεμελιώδεις ενέργειες για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Η παρέμβαση είχε περιορισμούς, με κύριους τη μικρή διάρκειά της και το, αναλογικά, μεγάλο πλήθος των δραστηριοτήτων που περιελάμβανε που δημιούργησαν μια συνθήκη πυκνής παρουσίασης των έργων. Παρά το γεγονός αυτό, τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά. Η παρέμβαση προκάλεσε αξιόλογη βελτίωση, τόσο στην επίδοση, όσο και στην ποιότητα των εξηγήσεων όλων των παιδιών, όσον αφορά τις σχέσεις 1:2 και 2:1. Όσον αφορά τις σχέσεις 1:3 και 3:1 που εξετάστηκαν μόνο στο μεταέλεγχο, τα παιδιά τα πήγαν σαφώς λιγότερο καλά σε σχέση με τις προηγούμενες (όπως μπορεί να διαπιστωθεί συγκρίνοντας το έργο Δ με το παρόμοιο έργο Γ, στον Πίνακα 1). Φαίνεται ότι τα παιδιά αξιοποίησαν τα νέα εργαλεία στο πλαίσιο που τους ήταν εξαρχής πιο οικείο και εν γένει πιο προσιτό (Hunting & Davis, 1991). Ωστόσο, τα μικρά δείγματα επιτυχίας στο μεταέλεγχο, αλλά και ο τρόπος που αντιμετώπισαν τα παιδιά παρόμοια έργα στη διάρκεια της παρέμβασης (όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τα παραδείγματα που δόθηκαν παραπάνω), αποτελούν ισχυρές ενδείξεις ότι η πραγμάτευση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων με σχέσεις πέραν των 1:2, 2:1 είναι μέσα στις δυνατότητες των παιδιών αυτής της ηλικίας. Ταυτόχρονα, διαφαίνεται ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να επωφεληθούν από μια παρέμβαση με τα χαρακτηριστικά αυτής που παρουσιάστηκε εδώ. Απαιτείται μακροχρόνια και συστηματική παρέμβαση βασισμένη στις ίδιες αρχές, με πειραματικό σχεδιασμό και μεγαλύτερο δείγμα, για να ελεγχθεί κατά πόσο η επίδραση της παρέμβασης είναι σημαντική και με σταθερά και μακροπρόσθεσμα οφέλη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.). *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή*: *«Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»* (σελ. 302-311), Ρόδος: Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. και Εργαστήριο Φυσικών Επιστημών του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Ψηφιακή έκδοση, ISBN: 978-960-86791-9-1

Hunting, R. & Davis, G. (1991). *Early fraction learning*. New York: Springer-Verlag

Kornilaki, K., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, *20*, 388-406.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of experimental child psychology*, *142*, 66-82.

Mix, K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press.

Spinillo, A., & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgments: The importance of ''half''. Child Development, 62, 427–440.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΠΟΙΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ «ΔΟΥΛΕΥΟΥΝ»; ΜΙΑ ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΜΕΤΑ-ΣΥΝΘΕΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ

Θέκλα Ιακώβου, Χαράλαμπος Γ. Χαραλάμπους

Πανεπιστήμιο Κύπρου

iakovou.thekla@ucy.ac.cy, cycharal@ucy.ac.cy

Οι πρακτικές διδασκαλίας στο μάθημα των Μαθηματικών αποτέλεσαν το αντικείμενο πολλών ερευνών, χωρίς ωστόσο η ερευνητική κοινότητα να έχει καταλήξει σε τελικά συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητά τους. Η παρούσα ποιοτική μετα-σύνθεση 78 ποιοτικών ερευνών που έγιναν την περίοδο 1977-2017 επιδιώκει τον εντοπισμό πρακτικών διδασκαλίας - γενικευμένων και εξειδικευμένων - που κρίθηκαν αποτελεσματικές. Η μετα-σύνθεση καταδεικνύει ως αποτελεσματικές τόσο εξειδικευμένες για τα Μαθηματικά πρακτικές, όπως η παροχή επεξηγήσεων από τους μαθητές, οι διασυνδέσεις αναπαραστάσεων και εννοιών, η ενασχόληση των μαθητών με έργα που απαιτούν μαθηματικό συλλογισμό, και οι πολλαπλές μέθοδοι επίλυσης, όσο και γενικευμένες πρακτικές όπως η υποβολή ερωτήσεων και η διαμόρφωση της τάξης ως μαθησιακό περιβάλλον.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα για την Εκπαιδευτική Αποτελεσματικότητα έχει αναδείξει τη σημασία της επίδρασης του επιπέδου της τάξης, και πιο συγκεκριμένα της διδασκαλίας, στα μαθησιακά αποτελέσματα (Muijs κ.ά, 2014˙ Seidel & Shavelson, 2007). Ωστόσο, το ερώτημα «*Ποιες πρακτικές διδασκαλίας έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στα μαθησιακά αποτελέσματα*;» εν πολλοίς εξακολουθεί να παραμένει αναπάντητο (Franke, Kazemi & Battey, 2007). Αν επικεντρωθούμε στα Μαθηματικά, για να απαντηθεί το κρίσιμο αυτό ερώτημα, απαιτείται να αντληθούν στοιχεία από τον μεγάλο όγκο της υπάρχουσας βιβλιογραφίας για το τι καθιστά μια διδασκαλία αποτελεσματική στα Μαθηματικά (Anthony & Walshaw, 2009). Για την οργάνωση του μεγάλου αυτού όγκου πληροφοριών, οι ερευνητές έχουν στα χέρια τους ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο: τη συστηματική ανασκόπηση ερευνών (Davies, 2000). Η *Συστηματική Ανασκόπηση* αναφέρεται στην κριτική αξιολόγηση και ανάλυση της ερευνητικής βιβλιογραφίας με τη χρήση συστηματικών μεθόδων (Gough, Oliver & Thomas, 2012) και έχει τη δυνατότητα να συνοψίζει τα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία για ένα συγκεκριμένο ερώτημα με απώτερο στόχο τη σύνθεση των αποτελεσμάτων για την εξαγωγή συμπερασμάτων (Cooper, Hedges, & Valentine, 2009˙ The Campbell Collaboration, 2015). Η συστηματική ανασκόπηση μπορεί να οδηγήσει σε διάφορες μορφές συνθέσεων, ανάμεσα στις οποίες η μετα-ανάλυση ποσοτικών ερευνών και η μετα-σύνθεση ποιοτικών ερευνών (Gough κ.ά., 2012). Παρόλο που η διενέργεια ποιοτικών μετα-συνθέσεων αποτελεί μια πολλά υποσχόμενη μέθοδο για τη συσσώρευση της γνώσης που παράγεται από τις ποιοτικές έρευνες, η χρήση ποιοτικών μετα-συνθέσεων στην εκπαίδευση, και ειδικότερα στη μαθηματική εκπαίδευση, παραμένει υποτυπώδης (Thunder & Berry, 2016).

Δεδομένου του πιο πάνω ερευνητικού κενού, αξιοποιώντας την ποιοτική μετα-σύνθεση, η παρούσα συστηματική ανασκόπηση εστιάζεται στα Μαθηματικά, συνεξετάζει δύο τύπους πρακτικών διδασκαλίας - τις γενικευμένες πρακτικές διδασκαλίας (που εφαρμόζονται σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα) και τις εξειδικευμένες για τα Μαθηματικά πρακτικές - και διερευνά ποιες από αυτές κρίνονται ως πιο αποτελεσματικές. Μια τέτοια διερεύνηση κρίνεται αναγκαία αφού σε θεωρητικό επίπεδο δύναται να συμβάλει στον εμπλουτισμό της γνώσης γύρω από το πολύπλοκο θέμα της αποτελεσματικής διδασκαλίας των Μαθηματικών. Σε πρακτικό επίπεδο μπορεί να ενημερώσει τους φορείς χάραξης εκπαιδευτικής πολιτικής, εφόσον αφορά αποτελεσματικές πρακτικές διδασκαλίας, όπως σκιαγραφούνται από ένα σύνολο ποιοτικών ερευνών. Στο υπόλοιπο μέρος του άρθρου παρουσιάζεται συνοπτικά το θεωρητικό υπόβαθρο της έρευνας, παρατίθενται ο σκοπός και τα ερωτήματα της έρευνας, επεξηγείται συνοπτικά η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε και παρουσιάζονται και συζητούνται επιλεγμένα αποτελέσματα.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Με τον όρο «πρακτικές διδασκαλίας» αναφερόμαστε στις *συνήθεις δράσεις του εκπαιδευτικού που αφορούν στην αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού, μαθητών και γνωστικού αντικειμένου και έχουν τη δυνατότητα να προάγουν τα μαθησιακά αποτελέσματα* (βλ. Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003 και Lampert, 2010). Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντικότητα του συνδυασμού γενικευμένων και εξειδικευμένων ανά γνωστικό αντικείμενο πρακτικών διδασκαλίας με στόχο την καλύτερη σκιαγράφηση της διδασκαλίας και των αποτελεσμάτων της (Blazar, 2015˙ Charalambous & Kyriakides, 2017˙ Grossman & McDonald, 2008˙ Kansanen, 2009), η παρούσα συστηματική ανασκόπηση επιδιώκει να συνεξετάσει τα δύο είδη πρακτικών, τις γενικευμένες και τις εξειδικευμένες για τα Μαθηματικά πρακτικές διδασκαλίας.

Πιο συγκεκριμένα, οι γενικευμένες πρακτικές διδασκαλίας που εξετάζει η ανασκόπηση, αντλούνται από το Δυναμικό Μοντέλο Εκπαιδευτικής Αποτελεσματικότητας (ΔΜΕΑ, Creemers & Kyriakides, 2008) και είναι οι ακόλουθες: (α) Προσανατολισμός, (β) Δόμηση, (γ) Τεχνικές Ερωτήσεων, (δ) Ανάπτυξη Στρατηγικών Μάθησης/Μοντελοποίηση Διδασκαλίας, (ε) Εμπέδωση/Εφαρμογή, (στ) Διαχείριση Διδακτικού Χρόνου, (ζ) Μαθησιακό Περιβάλλον της Τάξης και (η) Αξιολόγηση. Οι εξειδικευμένες πρακτικές διδασκαλίας αντλούνται από το Μοντέλο Ποιότητας Διδασκαλίας στα Μαθηματικά (MQI) (Learning Mathematics for Teaching Project, 2011) και είναι οι εξής: (α) Διασυνδέσεις αναπαραστάσεων και εννοιών, (β) Παροχή επεξηγήσεων από τον εκπαιδευτικό, (γ) Πολλαπλές διαδικασίες ή μέθοδοι επίλυσης, (δ) Μοτίβα, γενικεύσεις, ορισμοί, (ε) Μαθηματική Γλώσσα, (στ) Παροχή επεξηγήσεων από τους μαθητές, (ζ) Υποβολή ερωτήσεων από τους μαθητές, (η) Ενασχόληση με έργα που απαιτούν μαθηματικό συλλογισμό / Γνωστικές διεργασίες μαθητών, (θ)

Αποκατάσταση μαθηματικών λαθών και δυσκολιών, και (ι) Αξιοποίηση των μαθηματικών παραγωγών των μαθητών.

Η επιλογή του ΔΜΕΑ και του MQI στηρίχτηκε στο γεγονός ότι και τα δύο απολαμβάνουν αποδοχής από τους αντίστοιχους χώρους που εκπροσωπούν και η αξιοπιστία και η εγκυρότητά τους έχουν εξεταστεί σε μια σειρά ερευνών (βλ. περισσότερα στους Charalambous & Litke, 2018˙ Kyriakides, Creemers, & Panayiotou, 2018 τόσο για τα δύο θεωρητικά πλαίσια όσο και για τις επιμέρους πρακτικές που εξετάζουν).

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας μετα-σύνθεσης είναι η σύνοψη και ανάλυση ποιοτικών ερευνών που έγιναν την περίοδο 1977-2017, για τον εντοπισμό των πρακτικών διδασκαλίας, γενικευμένων και εξειδικευμένων που προτάθηκαν να έχουν επίδραση στα μαθησιακά αποτελέσματα στο μάθημα των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα, η μετα-σύνθεση αυτή επιχειρεί να απαντήσει στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1) Σε ποιες πρακτικές διδασκαλίας έχουν επικεντρωθεί οι ποιοτικές έρευνες σε σχέση με την αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών και ποιες μέθοδοι αξιοποιήθηκαν για τη μελέτη της συνεισφοράς των πρακτικών αυτών;
2) Ποιες πρακτικές διδασκαλίας—γενικευμένες ή εξειδικευμένες—παρουσιάζονται να έχουν τη μεγαλύτερη συνεισφορά στα μαθησιακά αποτελέσματα στο μάθημα των Μαθηματικών;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα Στάδια Διεξαγωγής της Ποιοτικής Μετα-Σύνθεσης

Η παρούσα ποιοτική μετα-σύνθεση ακολούθησε τα εξής στάδια:

- *Κριτήρια συμπερίληψης*: Τέθηκαν τα ακόλουθα κριτήρια συμπερίληψης ερευνών: (α) να συμπεριλαμβάνουν μια ή περισσότερες πρακτικές διδασκαλίας, (β) να αφορούν στην προσχολική μέχρι δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Κ-12), (γ) να έχουν διεξαχθεί κατά την περίοδο 1977-2017, (δ) να είναι γραμμένες στην αγγλική γλώσσα, και (ε) να είναι δημοσιευμένες σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά με σύστημα κριτών (peer-reviewed articles).
- *Στρατηγικές αναζήτησης ερευνών:* Οι πηγές στις οποίες αναζητήθηκαν οι μελέτες ήταν οι εξής: ηλεκτρονικές βάσεις δεδομένων (Web of Science, Scopus, ERIC), ηλεκτρονικά περιοδικά σχετικά με το υπό εξέταση θέμα (π.χ., *School Effectiveness and School Improvement*, *Teaching and Teacher Education*, *Journal of Research in Mathematics Education*), ανασκοπήσεις ερευνών και μετα-αναλύσεις, καθώς και λίστες βιβλιογραφικών αναφορών άλλων σχετικών ερευνών. Για την ηλεκτρονική αναζήτηση ερευνών χρησιμοποιήθηκαν κωδικοί που ανήκουν σε τρεις ομάδες: α) συνδυασμοί λέξεων- κλειδιά που αφορούν γενικά στην αποτελεσματικότητα στο μάθημα των Μαθηματικών και σε στοιχεία/παράγοντες διδασκαλίας στα Μαθηματικά (π.χ., mathematics instruction and students learning, effective teaching, quality of instruction) β) οι

συγκεκριμένες γενικευμένες πρακτικές διδασκαλίας του ΔΜΕΑ και γ) οι συγκεκριμένες εξειδικευμένες πρακτικές διδασκαλίας του MQI.

- *Διαλογή:* Πραγματοποιήθηκε έλεγχος για το κατά πόσο οι μελέτες που εντοπίστηκαν πληρούσαν τα κριτήρια συμπερίληψης (όπως καθορίστηκαν πιο πάνω). Προς τον σκοπό αυτό εξεταζόταν αρχικά ο τίτλος και η περίληψη των άρθρων και όπου χρειαζόταν, ολόκληρο το κείμενο. Με βάση τη διαλογή αυτή επιλέχθηκαν για ανάλυση 78 ποιοτικές έρευνες.[1]
- *Κωδικοποίηση:* Καταγράφηκαν τα σημαντικά δεδομένα από τις έρευνες. Συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις έρευνες καταγράφηκαν οι εξής πληροφορίες: χρονολογία δημοσίευσης, χώρα, βαθμίδα, τομέας Μαθηματικών, συμμετέχοντες, εργαλεία συλλογής δεδομένων, πρακτικές εκπαιδευτικού, συμπεριφορά μαθητών.
- *Σύνθεση:* Με βάση το προηγούμενο στάδιο, εξετάστηκαν τα δεδομένα όπως οργανώθηκαν και κωδικοποιήθηκαν σε πίνακες και αναζητήθηκαν μοτίβα σε σχέση με τον *τρόπο* που οι πρακτικές κατηγοριοποιήθηκαν ως αποτελεσματικές, και τη *συχνότητα* με την οποία συγκεκριμένες πρακτικές κρίθηκαν ως αποτελεσματικές.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Δημογραφικά Στοιχεία των Ερευνών

Οι έρευνες που εξετάστηκαν κάλυπταν κυρίως τους τομείς των «Αριθμών και Πράξεων», της «Άλγεβρας» και της «Γεωμετρίας», με τις περισσότερες έρευνες να εστιάζονται στους «Αριθμούς και Πράξεις» (20,5%). Οι περισσότερες μελέτες διενεργήθηκαν στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (48,7%), με την Πρωτοβάθμια να ακολουθεί με μικρή διαφορά (43,6%). Οι περισσότερες μελέτες έγιναν την τελευταία δεκαετία (57,7%). Περισσότερες από τις μισές έρευνες έγιναν στις Η.Π.Α. (52,6%), ενώ στην Ευρώπη διενεργήθηκαν μόνο επτά τέτοιες έρευνες. Στις περισσότερες μελέτες οι ερευνητές επικεντρώθηκαν σε έναν ή δύο εκπαιδευτικούς. Όσον αφορά στα εργαλεία συλλογής δεδομένων, όλες οι μελέτες περιλάμβαναν παρακολουθήσεις διδασκαλιών (βιντεοσκοπημένες ή/και ηχογραφημένες). Ο αριθμός των παρακολουθήσεων κυμαινόταν από 1 μέχρι 600 ώρες. Οι μισές μελέτες περιλάμβαναν, επίσης, συνεντεύξεις εκπαιδευτικών. Άλλες πηγές συλλογής δεδομένων αποτέλεσαν σημειώσεις πεδίου (field notes), τα αντικείμενα της τάξης (classroom artifacts), καθώς τα σχέδια μαθήματος των εκπαιδευτικών.

Κριτήρια Καθορισμού Αποτελεσματικών Πρακτικών/Διδασκαλίας

Δεδομένου ότι οι υπό εξέταση έρευνες ήταν ποιοτικές και δεν χρησιμοποιήθηκαν συγκεκριμένα στοιχεία σε σχέση με τη μάθηση των μαθητών είτε στον γνωστικό είτε στον συναισθηματικό τομέα ώστε να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα συγκεκριμένων πρακτικών διδασκαλίας, κρίθηκε αναγκαίο, σε πρώτο στάδιο, να καθοριστούν τα κριτήρια με τα οποία εκτιμήθηκε η αποτελεσματικότητα αυτή. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εξέτασης.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, στα 2/3 των υπό εξέταση ερευνών αποτελεσματικές πρακτικές κρίθηκαν οι πρακτικές εκείνες που υποστηρίζονται βιβλιογραφικά/θεωρητικά ως τέτοιες (a priori κατηγοριοποίηση) και εφαρμόστηκαν από τους εκπαιδευτικούς μέσα από κάποιο πρόγραμμα επιμόρφωσης ή παρέμβασης, αναμένοντας θετική επίδραση στη διδασκαλία και τα μαθησιακά αποτελέσματα.

	Κατηγορίες ερευνών		**Αριθμός ερευνών**	**Ποσοστό %**
1.	A priori εφαρμογή συγκεκριμένων, θεωρητικά αποτελεσματικών πρακτικών		52	66,7
2.	Στοχευμένες	Κριτήριο ο εκ/κός (αποτελεσματικότητα)	18	23,1
		Κριτήριο οι μαθητές (επιδόσεις)	8	10,3

Πίνακας 1: Κατηγορίες Ερευνών με βάση το κριτήριο αξιολόγησης της αποτελεσματικότητας των πρακτικών διδασκαλίας

Η δεύτερη μεγάλη κατηγορία, αυτή των «Στοχευμένων Ερευνών» περιλαμβάνει δύο ομάδες. Στην πρώτη ομάδα το κριτήριο αποτελεί ο εκπαιδευτικός και η αποτελεσματικότητά του. Σ' αυτήν εμπίπτουν συνολικά 18 μελέτες οι οποίες, είτε περιγράφουν τις πρακτικές διδασκαλίας αποτελεσματικών εκπαιδευτικών οι οποίοι χαρακτηρίζονται ως αποτελεσματικοί, ικανοί, επιδέξιοι, εξαιρετικοί, κ.λπ. ('effective', 'proficient', 'experts', 'exceptional', 'master'), ή ως εκπαιδευτικοί που διδάσκουν εξαιρετικά μαθήματα. Τα κριτήρια με βάση τα οποία κάποιος εκπαιδευτικός θεωρήθηκε εξαιρετικός/αποτελεσματικός ποικίλαν και κάλυπταν: κατοχή βραβείου (Award winning teachers), γνώσεις και δεξιότητες, χρόνια εμπειρίας, ιδιαίτερα θετική αποτίμηση από τη διοίκηση του σχολείου ή/και άλλους εμπλεκόμενους φορείς, διδασκαλία σύμφωνα με πρότυπα διδασκαλίας των μαθηματικών (όπως, π.χ., αυτά καθορίζονται από το National Council of Teachers of Mathematics) και η ποιότητα του μαθήματος. Στη δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνονται μελέτες που έχουν ως κριτήριο αποτελεσματικότητας των πρακτικών διδασκαλίας τις επιδόσεις των μαθητών, χωρίς ωστόσο, να εξετάζονται αυτές οι επιδόσεις. Συγκεκριμένα, στις μελέτες αυτές εξετάστηκαν μαθήματα σε χώρες, σχολεία, ή τάξεις των οποίων οι μαθητές βρέθηκαν να διακρίνονται για τις επιδόσεις τους στα Μαθηματικά. Για παράδειγμα, σε κάποιες μελέτες εξετάστηκε η διδασκαλία σε χώρες όπως η Ιαπωνία και η Κίνα, των οποίων οι μαθητές διακρίθηκαν σε διεθνείς συγκριτικές έρευνες.

Αποτελεσματικές Πρακτικές διδασκαλίας στα Μαθηματικά

Η σύνθεση των ποιοτικών ερευνών αποκάλυψε τις πρακτικές που εμφανίζονται με μεγαλύτερη συχνότητα στις ποιοτικές περιγραφές αποτελεσματικών διδασκαλιών.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι πρακτικές με βάση τη συχνότητα με την οποία εμφανίστηκαν.

	Πρακτικές διδασκαλίας	**Αριθμός ερευνών**	**Ποσοστό %**
1.	Παροχή επεξηγήσεων από τους μαθητές	60	77
2.	*Τεχνικές ερωτήσεων**	52	66,6
3.	Διασυνδέσεις αναπαραστάσεων και εννοιών	49	62,8
4.	Ενασχόληση με έργα που απαιτούν μαθηματικό συλλογισμό/ Γνωστικές διεργασίες μαθητών	47	60,3
5.	Πολλαπλές διαδικασίες ή μέθοδοι επίλυσης	43	55,1
6.	*Διαμόρφωση τάξης ως περιβάλλον μάθησης*	40	51,3
7.	Αξιοποίηση των μαθηματικών παραγωγών των μαθητών	31	39,7
8.	Μοτίβα, γενικεύσεις, ορισμοί	29	37,2
9.	*Μοντελοποίηση Διδασκαλίας / Στρατηγικές μάθησης*	26	33,3
10.	*Αξιολόγηση*	26	33,3
11.	*Δόμηση*	22	28,2
12.	Αποκατάσταση λαθών και δυσκολιών	22	28,2
13.	Μαθηματική γλώσσα	19	24,4
14.	*Προσανατολισμός*	16	20,5
15.	Υποβολή ερωτήσεων από τους μαθητές	16	20,5
16.	*Διαχείριση διδακτικού χρόνου*	8	10,3
17.	Παροχή επεξηγήσεων από τον εκ/κό	8	10,3
18.	*Εφαρμογή / Εμπέδωση*	6	7,7

Πίνακας 2: Αποτελεσματικές πρακτικές με βάση τη συχνότητα με την οποία εμφανίζονται στις ποιοτικές έρευνες

*Σημείωση: Με πλάγια γράμματα σημειώνονται οι γενικευμένες πρακτικές διδασκαλίας.

Από τα πιο πάνω, παρατηρούμε ότι ένα μείγμα εξειδικευμένων και γενικευμένων πρακτικών εμφανίζονται ως οι επικρατέστερες πρακτικές, με τις πιο συχνά εμφανιζόμενες να είναι οι εξής πέντε: «Παροχή επεξηγήσεων από τους μαθητές», «Τεχνικές ερωτήσεων», «Διασυνδέσεις αναπαραστάσεων και εννοιών», «Ενασχόληση με έργα που απαιτούν μαθηματικό συλλογισμό» και «Πολλαπλές διαδικασίες ή μέθοδοι επίλυσης».

Εκτός από τις πρακτικές διδασκαλίας που εφάρμοζαν οι εκπαιδευτικοί, στις υπό εξέταση ποιοτικές μελέτες περιγράφονται και οι αντίστοιχες συμπεριφορές των μαθητών που φανερώνουν ότι οι συγκεκριμένες πρακτικές διδασκαλίας έχουν τη δυνατότητα να προωθούν την ενεργή συμμετοχή στο μάθημα και την ουσιαστική εμπλοκή των μαθητών με τα Μαθηματικά, οι οποίες, με τη σειρά τους, θα μπορούσαν να οδηγήσουν στη μάθηση. Αν και έχει εντοπιστεί μια μεγάλη γκάμα τέτοιων συμπεριφορών, οι ακόλουθες εντοπίστηκαν πιο συχνά: οι μαθητές συμμετέχουν στη συζήτηση/ εμπλέκονται/συνεισφέρουν στο μάθημα (93,6%), παρέχουν επεξηγήσεις (82%), εκφράζουν τις απόψεις τους, περιγράφουν/μοιράζονται τον τρόπο σκέψης τους και τις λύσεις τους (80,8%), αλληλεπιδρούν μεταξύ τους/συνεργάζονται για να βρουν λύσεις (56,4%), εμπλέκονται με γνωστικά απαιτητικά έργα (51,3%), βρίσκουν/χρησιμοποιούν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης (51,3%), υποστηρίζουν με στοιχεία/επιχειρήματα τους ισχυρισμούς τους/ αιτιολογούν (48,7%), κάνουν διασυνδέσεις ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες, αναπαραστάσεις ή λύσεις τους (47,4%), αναλύουν και ασκούν κριτική/ αξιολογούν τις απαντήσεις που παρουσιάζονται (38,5%), και χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις (34,6%).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι έρευνες που εξετάστηκαν στην παρούσα μετα-σύνθεση ανέδειξαν τις πρακτικές που εξετάστηκαν συχνότερα σε έρευνες που επικεντρώθηκαν σε αποτελεσματικές πρακτικές διδασκαλίας των Μαθηματικών. Αναμφίβολα, τα αποτελέσματα της έρευνας χρειάζεται να ερμηνευτούν με προσοχή λόγω της φύσης των ποιοτικών ερευνών αλλά και της απουσίας απτών στοιχείων σε σχέση με τα μαθησιακά αποτελέσματα, τα οποία θα μπορούσαν να κρίνουν την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Ωστόσο, έστω και ενδεικτικά, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας καταδεικνύουν τις πρακτικές εκείνες που κρίνονται πιο συστηματικά ως αποτελεσματικές, οι οποίες είναι τόσο γενικευμένες όσο και εξειδικευμένες για τα Μαθηματικά. Η σημασία της συμπερίληψης αρκετών εξειδικευμένων για τα Μαθηματικά πρακτικών στις επικρατέστερες ενισχύει τη θέση για ανάγκη εξέτασης του κάθε γνωστικού αντικειμένου ξεχωριστά για τον εντοπισμό των αποτελεσματικών πρακτικών διδασκαλίας, θέση που ουσιαστικά τονίζει και την αξία και τη σημασία της συμπερίληψης διδακτικών αντικειμένου στα προγράμματα εκπαίδευσης και επιμόρφωσης των (εν δυνάμει) εκπαιδευτικών. Σημειώνουμε με προβληματισμό τη διενέργεια ενός πολύ μικρού αριθμού ποιοτικών μελετών στην Ευρώπη, γεγονός που μπορεί να οφείλεται στην επίδραση πιο ποσοτικών προσεγγίσεων στον ευρωπαϊκό χώρο, σε σχέση με την εξέταση αποτελεσματικών πρακτικών διδασκαλίας. Ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων της παρούσας ποιοτικής μετα-σύνθεσης με αυτά της μετα-ανάλυσης που αναμένεται να προκύψουν από την ευρύτερη προσπάθεια συστηματικής ανασκόπησης ερευνών που εκπονείται αυτό το διάστημα σε σχέση με γενικευμένες και εξειδικευμένες πρακτικές διδασκαλίας στα Μαθηματικά αναμένεται να δώσει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τις πρακτικές εκείνες που είναι πιο αποτελεσματικές κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

1. Σημείωση 1: Λόγω της περιορισμένης έκτασης του παρόντος άρθρου, η λίστα βιβλιογραφικών αναφορών που ακολουθεί δεν περιλαμβάνει τις 78 μελέτες που ανασκοπήθηκαν. Τα άρθρα αυτά είναι διαθέσιμα από την πρώτη ερευνήτρια κατόπιν αιτήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). Characteristics of effective teaching of mathematics: A view from the West. *Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 147-164.

Blazar, D. (2015). Effective teaching in elementary mathematics: Identifying classroom practices that support student achievement. *Economics of Education Review*, *48*, 16-29. doi:10.1016/j.econedurev.2015.05.005

Charalambous, C. Y., & Litke, E. (2018). Studying instructional quality by using a content-specific lens: The case of the Mathematical Quality of Instruction framework. *ZDM Mathematics Education, 50*(3), 445-460. doi: 10.1007/s11858-018-0913-9

Charalambous, Y. C., & Kyriakides, E. (2017). Working at the nexus of generic and content-specific teaching practices: An exploratory study based on TIMSS secondary analyses. *Elementary School Journal*, *117*(3). doi:10.1086/690221

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*(2), 119-142. doi:10.3102/01623737025002119

Cooper, L., Hedges, L.V., & Valentine, J.C. (2009). *The handbook of research synthesis and meta- analysis* (2nd ed.). New York, NY: Russell Sage.

Creemers, B. P. M., & Kyriakides, L. (2008). *The dynamics of educational effectiveness: A contribution to policy, practice, and theory in contemporary schools*. London: Routledge.

Davies, P. (2000). The relevance of systematic reviews to educational policy and practice. *Oxford Review of Education, 26*(3-4), 365-378. doi:10.1080/713688543

Erwin, E. J., Brotherson, M. J., & Summers, J. A. (2011). Understanding qualitative meta-synthesis: Issues and opportunities in early childhood intervention research. *Journal of Early Intervention*, *33*(3), 186-200. doi:10.1177/1053815111425493

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. Στο Lester, F.K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Gough, D., Oliver, S., & Thomas, J. (Eds.). (2012). *An introduction to systematic reviews*. London: Sage Publications.

Grossman, P., & McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal*, *45*(1), 184-205. doi:10.3102/0002831207312906

Kansanen, P. (2009). Subject-matter didactics as a central knowledge base for teachers, or should it be called pedagogical content knowledge? *Pedagogy, Culture & Society*, *17*(1), 29-39. doi: 10.1080/14681360902742845

Kyriakides, L., Creemers, B. P. M., & Panayiotou, A., (2018). Using educational effectiveness research to promote quality of teaching: the contribution of the dynamic model. *ZDM Mathematics Education, 50*(3), 381-393. doi: 10.1007/s11858-018-0919-3

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education*, *61*(1-2), 21-34. doi:10.1177/0022487109347321

Learning Mathematics for Teaching Project. (2011). Measuring the mathematical quality of instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 25-47. doi:10.1007/s10857-010-9140-1

Muijs, D., Kyriakides, L., van der Werf, G., Creemers, B., Timperley, H., & Earl, L. (2014). State of the art – Teacher effectiveness and professional learning. *School Effectiveness and School Improvement*, *25*(2), 231-256. doi:10.1080/09243453.2014.885451

Seidel, T., & Shavelson, R. J. (2007). Teaching effectiveness research in the past decade: The role of theory and research design in disentangling meta-analysis results. *Review of Educational Research, 77*(4), 454-499. doi:10.3102/0034654307310317

The Campbell Collaboration (2015). *Campbell systematic reviews: Policies and guidelines. Campbell Systematic Reviews 2015*, (Suppl. 1) doi:10.4073/csr.2015.1

Thunder, K., & Berry, R. Q. (2016). The promise of qualitative meta-synthesis for mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(4), 318–337. doi: 10.5951/jresematheduc.47.4.0318

Η ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ, ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΟΝ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Έφη Παπαριστοδήμου[1], Μαρία Μελετίου-Μαυροθέρη[2]

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου[1], Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου[2]

paparistodemou.e@cyearn.pi.ac.cy[1], m.mavrotheris@euc.ac.cy[2]

Η ανάπτυξη του στοχαστικού συλλογισμού των παιδιών εντάσσεται στους πρωταρχικούς στόχους της στατιστικής εκπαίδευσης (Watson, 2001). Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στο πεδίο της επαγγελματικής μάθησης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών αναφορικά στα θέματα σχεδιασμού και διδασκαλίας των πιθανοτήτων και διεξήχθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος επαγγελματικής μάθησης σε σχολική βάση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου Κύπρου. Στην παρούσα μελέτη συμμετείχαν πέντε (5) εκπαιδευτικοί, οι οποίοι διδάσκουν σε παιδιά ηλικίας 4-6 χρόνων και η υλοποίησή της διαρθρώθηκε σε τρία στάδια: σχεδιασμός μαθήματος, διδασκαλία και αναστοχασμός. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με το βαθμό σημασίας που δίνουν οι εκπαιδευτικοί σε στοχαστικές προκλήσεις κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού και της διδασκαλίας τους.

Λέξεις-κλειδιά: στατιστική εκπαίδευση, επαγγελματική μάθηση, προσχολική ηλικία, δραστηριότητες, έννοια του τυχαίου, αναστοχασμός

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η έρευνα στον τομέα της στατιστικής εκπαίδευσης (π.χ., Watson, 2001; Leavy, 2010) υποδεικνύει ότι επιβάλλεται να δοθεί υψηλή προτεραιότητα στην ενίσχυση της γνώσης των εκπαιδευτικών σε ζητήματα σχετικά με την αβεβαιότητα και τον στατιστικό συλλογισμό. Η οικοδόμηση των γνώσεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τις παιδαγωγικές αρχές και τα εργαλεία που μπορούν να αξιοποιηθούν στην στατιστική παιδεία από μόνη της δεν επαρκεί. Η βαθύτερη κατανόηση των πιθανοτήτων είναι επίσης απαραίτητη για τον εντοπισμό μαθηματικών διαισθητικών μοντέλων ή/και δυσκολιών αρχικά και την εφαρμογή αποτελεσματικών πρακτικών διδασκαλίας, μεταγενέστερα (π.χ., Paparistodemou, Potari & Pitta, 2006). Ως εκ τούτου, οι ερευνητές στον χώρο της στατιστικής παιδείας κατά τα τελευταία χρόνια επικεντρώνονται στην επαγγελματική ανάπτυξη και μάθηση των εκπαιδευτικών, αποσκοπώντας στη διευκόλυνση της ανάπτυξης και μάθησης τόσο της γνώσης των θεμάτων περιεχομένου όσο και της παιδαγωγικής και διδακτικής κατάρτισης των εκπαιδευτικών (π.χ., Groth, Kent & Hitch, 2015; Leavy 2010; Serradó, Meletiou -Mavrotheris & Paparistodemou, 2014).

Η σημασία της εισαγωγής της διδακτικής πιθανοτήτων στις μικρές ηλικίες σχετίζεται με την ιδέα της οικοδόμησης στοχαστικής γνώσης με βάση τις διαισθήσεις των παιδιών. Στη σύγχρονη κοινωνία, η πιθανότητα και η στατιστική έχουν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην καθημερινή ζωή του καθενός και ιδιαίτερα στη ζωή των παιδιών, όπου τα περισσότερα παιχνίδια στα οποία εμπλέκονται περιλαμβάνουν την έννοια του τυχαίου. Η έρευνα στο πεδίο των στοχαστικών δραστηριοτήτων των παιδιών καταδεικνύει ότι τα παιδιά νεαρής ηλικίας χρησιμοποιούν χωρικές αναπαραστάσεις, για την έκφραση στοχαστικών εννοιών (Paparistodemou & Noss, 2004). Δεικνύει περαιτέρω ότι ο σχεδιασμός κατάλληλων δραστηριοτήτων που να απευθύνονται σε παιδιά ηλικίας 4-8 ετών είναι καθοριστικής σημασίας για να μπορέσουν αυτά να εκφράσουν τις αναδυόμενες γνώσεις τους σχετικά με τις στοχαστικές έννοιες (Paparistodemou & Noss, 2004; Pratt, 2000).

Για την ανάλυση της πολυπλοκότητας της διδακτικής μαθηματικών, οι Potari και Jaworski (2002) χρησιμοποίησαν την εκπαιδευτική τριάδα: διαχείριση της μάθησης (management of learning), μαθηματική πρόκληση (mathematical challenge), ευαισθησία στους μαθητές (sensitivity to students) ως εργαλείο αναστοχασμού των εκπαιδευτικών για την επαγγελματική τους ανάπτυξη. Η διαχείριση της μάθησης περιγράφει τον ρόλο του εκπαιδευτικού στη διαμόρφωση του περιβάλλοντος διδασκαλίας, για παράδειγμα στον προγραμματισμό της δραστηριότητας. Η μαθηματική πρόκληση περιγράφει το σύνολο των γεγονότων που δίνονται στα παιδιά, για να ενεργοποιήσουν τη μαθηματική τους σκέψη. Τέλος, η πτυχή της ευαισθησίας περιγράφει τη σημασία που πρέπει να αποδίδεται από τους εκπαιδευτικούς στη γνώση των χαρακτηριστικών του κάθε παιδιού και την προσοχή στις ιδιαίτερες ανάγκες του.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στον σχεδιασμό, τη διδασκαλία και τον αναστοχασμό των εκπαιδευτικών σχετικά με τις στοχαστικές δραστηριότητες των παιδιών ηλικίας 4 έως 6 ετών. Η εργασία αυτή αποτελεί δε μέρος ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος (Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2018), το οποίο επικεντρώνεται στη διερεύνηση της προσοχής των εκπαιδευτικών στη δραστηριότητα από την άποψη της μαθηματικής πρόκλησης που αυτή προσφέρει και στο πώς τα παιδιά αναπτύσσουν στοχαστικές έννοιες. Συγκεκριμένα, η εργασία έχει ως ερευνητικό ερώτημα πώς οι εκπαιδευτικοί αναστοχάζονται για τις στοχαστικές δραστηριότητες που σχεδίασαν και δίδαξαν σε παιδιά 4-6 χρόνων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες και περιεχόμενο

Πέντε εκπαιδευτικοί (όλες γυναίκες) συμμετείχαν στην έρευνα, η οποία οργανώθηκε σε τρία στάδια: Στάδιο 1 - Σχεδιασμός μαθήματος, Στάδιο 2 - Διδασκαλία και Στάδιο 3 - Αναστοχασμός. Κατά το Στάδιο 1, οι εκπαιδευτικοί ασχολήθηκαν με τον σχεδιασμό μαθήματος. Επέλεξαν ένα θέμα από το αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών σχετικά με τις πιθανότητες και τη στατιστική και διαμόρφωσαν ένα σχέδιο μαθήματος καθώς και συνοδευτικό διδακτικό υλικό. Τα σχέδια μαθημάτων συζητήθηκαν με τις ερευνήτριες, για σχόλια και προτάσεις, και αναθεωρήθηκαν. Στο Στάδιο 2, οι εκπαιδευτικοί υλοποίησαν τα μαθήματα στην τάξη τους, με την υποστήριξη των ερευνητριών. Μόλις ολοκληρώθηκε η διδασκαλία των μαθημάτων, στο Στάδιο 3, οι ερευνήτριες πήραν συνεντεύξεις από τις εκπαιδευτικούς. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί ετοίμασαν ένα αναστοχαστικό δοκίμιο (reflective essay), στο οποίο κατέγραψαν τις παρατηρήσεις τους σχετικά με τις αντιδράσεις των παιδιών κατά τη διάρκεια του μαθήματος, σημειώνοντας τι θεωρούσαν επαρκές βάση σχεδίου και τι θα τροποποιούσαν με βάση τις εμπειρίες τους από την εφαρμογή του μαθήματος, προχωρώντας και με εισηγήσεις για βελτίωση.

Συλλογή δεδομένων

Έγινε συλλογή δεδομένων πολλαπλών μορφών κατά τα διάφορα στάδια διεξαγωγής της έρευνας:

- Στάδιο 1: Σχέδια μαθήματος εκπαιδευτικών και συζητήσεις κατά την προετοιμασία του σχεδιασμού.
- Στάδιο 2: Η κάθε διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε διήρκεσε 80 λεπτά (δύο διδακτικές περιόδους). Οι ερευνήτριες ήταν παρούσες, παρατηρώντας στενά και μαγνητοσκοπώντας το μάθημα, διατηρώντας σημειώσεις πεδίου και συλλέγοντας δείγματα της εργασίας των παιδιών.
- Στάδιο 3: Μετά την ολοκλήρωση του Σταδίου 2, οι ερευνήτριες διεξήγαγαν ημιδομημένες συνεντεύξεις με τις εκπαιδευτικούς. Ποιοτικά δεδομένα αντλήθηκαν επίσης από τα αναστοχαστικά δοκίμια που εκπόνησαν οι εκπαιδευτικοί.

Για τους σκοπούς της ανάλυσης, δεν χρησιμοποιήθηκε ένα αναλυτικό πλαίσιο με προκαθορισμένες κατηγορίες για το πώς εξελίχθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών. Η κωδικοποίηση ήταν ανοικτή και έγινε προσπάθεια για αναγνώριση των μαθηματικών προκλήσεων (Potari & Jaworsky, 2002) ή όπως ορίζονται στο παρόν άρθρο στοχαστικών προκλήσεων. Μέσω προσεκτικής μελέτης όλων των δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια της έρευνας και υπογράμμισης των επαναλαμβανομένων θεμάτων, δημιουργήθηκαν θεματικές κατηγορίες. Για να αυξηθεί ο βαθμός αξιοπιστίας των ευρημάτων, οι δραστηριότητες αναλύθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν και από τις δύο ερευνήτριες.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ, ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ ΣΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Τα αποτελέσματα της μελέτης σχετικά με την επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών κατά τον σχεδιασμό, τη διδασκαλία και τον αναστοχασμό σχετικά με τις πιθανότητες θα συζητηθούν σε σχέση με ένα από τα τρία στοιχεία της διδακτικής τριάδας (Potari & Jaworski, 2002): τη μαθηματική πρόκληση, που στο παρόν άρθρο ορίζεται ως *στοχαστική πρόκληση*. Οι μαθησιακοί στόχοι που περιλαμβάνονταν σε όλα τα σχέδια μαθήματος αναφέρονταν σε στοχαστικές προκλήσεις όπως στην έννοια πιθανότητας γεγονότων. Επιπλέον, οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονταν στα σχέδια των μαθημάτων ήταν διερευνητικού χαρακτήρα αλλά μερικές φορές υποδήλωναν μη αναγνώριση της έννοιας του τυχαίου από τις εκπαιδευτικούς. Το παρόν άρθρο εστιάζεται στην ύπαρξη του τυχαίου στο πλαίσιο του πώς τα παιδιά κάνουν προβλέψεις και πώς προσπαθούν να ελέγξουν (ή όχι) την πιθανότητα ενός γεγονότος.

Στοχαστική Πρόκληση: Κάνοντας προβλέψεις

Στην περίπτωση της Αλίκης[1], ο στόχος του σχεδίου μαθήματος που σχεδίασε ήταν: 'Τα παιδιά να κάνουν προβλέψεις βασισμένες σε αδύνατα, πιθανά και βέβαια γεγονότα'. Αποφάσισε να χρησιμοποιήσει ως σενάριο την κατασκευή καπέλων για ένα πάρτι:

Αλίκη: Ξέρετε, τα παιδιά χρειάζονται ένα καθημερινό σενάριο … αποφάσισα να τους ζητήσω να κάνουν καπέλα με κουκκίδες. Οι κουκίδες θα είναι μπλε ή / και κόκκινες … [τα παιδιά] θα επιλέξουν έναν τροχό τύχης, θα κάνουν μια πρόβλεψη για το κατά πόσο θα ήταν δυνατό να έχουν μπλε κουκκίδες ή όχι, θα τη σημειώσουν και στη συνέχεια θα φτιάξουν το καπέλο τους …

Ερευνήτρια: Έτσι, θα χρησιμοποιήσουν τους τροχούς της τύχης τους;

Αλίκη: Αν θέλουν … ναι. Ξέρω ότι κάποια παιδιά θα γνωρίζουν την απάντηση *εκ των προτέρων* …

Όπως φαίνεται και από το πιο πάνω απόσπασμα, κάποιες από τις δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στο σχέδιο μαθήματος της Αλίκης καταδεικνύουν έλλειψη εστίασης στην έννοια του τυχαίου. Η Αλίκη έδωσε έμφαση στο να λαμβάνουν τα παιδιά αποφάσεις για το τι θα μπορούσε να συμβεί και τι όχι, αλλά χωρίς αυτά να

[1] Όλα τα ονόματα που χρησιμοποιούνται είναι ψευδώνυμα.

βιώνουν την έννοια του τυχαίου. Κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού η Αλίκη ρωτήθηκε γιατί δεν επέτρεπε στα παιδιά να γυρίσουν τα ίδια τους τροχούς της τύχης από την αρχή. Αναφέρθηκε σε θέματα διαχείρισης, αλλά αφού συζητήθηκε η σημασία του να βιώσουν τα παιδιά την έννοια του τυχαίου, αποφάσισε να τους δώσει την ευκαιρία να γυρίσουν τους τροχούς τύχης και τελικά να οργανώσει την τάξη της όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.

Εικόνα 1: Τα υλικά για τη δραστηριότητα πρόβλεψης της Αλίκης

Στοχαστική πρόκληση: έλεγχος και μη έλεγχος

Στην περίπτωση της Σιμόνης παρατηρείται η συνειδητοποίηση της έννοιας του τυχαίου. Η Σιμόνη ήταν πολύ συγκεκριμένη στους δύο στόχους της για το μάθημα: ‘Τα παιδιά να είναι σε θέση να επιλέξουν τους κατάλληλους δειγματικούς χώρους για βέβαια, αδύνατα και δίκαια [ισοπίθανα] γεγονότα’ και ‘Τα παιδιά θα πρέπει να βιώσουν την έννοια του τυχαίου, χρησιμοποιώντας τροχούς τύχης’. Στην αρχή του μαθήματος, τα παιδιά επέλεξαν την αγαπημένη τους γεύση παγωτού. Η επιλογή αυτή σημειώθηκε στην καρέκλα τους και στη συνέχεια τους δόθηκε ένας *δίκαιος* τροχός τύχης [ίση πιθανότητα] με τρεις γεύσεις παγωτού. Εργάστηκαν σε ζευγάρια, με το ένα παιδί να περιστρέφει τον τροχό τύχης και το άλλο να συγκρίνει τη γεύση που έφερε ο τροχός τύχης με την αγαπημένη του γεύση (βλ. Εικόνα 2).

Εικόνα 2: Τα παιδιά βιώνουν την έννοια του τυχαίου μέσα από τον *δίκαιο* τροχό τύχης

Κατά τη διάρκεια του μαθήματος, ήταν θετικό το γεγονός ότι τα παιδιά βίωσαν την έννοια του τυχαίου. Μια άλλη δραστηριότητα που σχεδίασε και υλοποίησε η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός ήταν να παρουσιάσει στα παιδιά διαφορετικούς τροχούς τύχης, οι οποίοι είχαν διαφορετικούς δείγματικούς χώρους. Για παράδειγμα, οι τροχοί μπορούσαν να ήταν τελείως καφέ (γεύση σοκολάτας), τελείως κόκκινοι (γεύση φράουλας), ολόλευκοι (γεύση βανίλιας), κατά 3/8 κόκκινοι-3/8 λευκοί-2/8 καφέ, κ.λπ.. Στα παιδιά τέθηκαν ερωτήσεις όπως: 'Ποιο τροχό τύχης θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε για να πάρετε την αγαπημένη σας γεύση; Γιατί; Αν γυρίσω αυτό τον τροχό τύχης θα πάρω φράουλα; Γιατί ναι ή γιατί όχι;'

Η περίπτωση της Σιμόνης είναι ενδιαφέρουσα από την άποψη ότι αν και εντοπίστηκε από το σχέδιο μαθήματός της μια επίγνωση στοχαστικής πρόκλησης, μπορούμε να δούμε από τη διδασκαλία της ότι κατέβαλε πολλή προσπάθεια στην κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας και της παρουσίας της τυχαίας συμπεριφοράς στις δραστηριότητές της. Σε σχέση με αυτό το σημείο, στη συνέντευξή της δήλωσε:

Ερευνήτρια: Τι θέλατε να μάθουν τα παιδιά;

Σιμόνη: Το βέβαιο, το πιθανόν γεγονός. Διαφορετικούς δειγματικούς χώρους. ... Λοιπόν, η δραστηριότητα πήγε καλά. Δεν ήταν δύσκολο για αυτούς ... και νομίζω ότι τα παιδιά έχτισαν μια καλή κατανόηση της έννοιας του τυχαίου [...] ξέρετε, πέρασα πολύ χρόνο για να σχεδιάσω το μάθημα ... βρίσκοντας το σενάριο, κάνοντας τα υλικά ... αλλά το "κλειδί" ήταν για μένα να καταλάβω ... ξέρετε ... να νιώθω σίγουρη ότι ξέρω ... αυτό το θέμα [πιθανότητα] φαίνεται εύκολο, αλλά δεν είναι τόσο εύκολο να διδαχθεί ... πρέπει να το ξέρεις.

Ερευνήτρια: Τι έπρεπε να ξέρετε και να είστε σίγουρη;

Σιμόνη: Υπήρξαν πολλές φορές που για να συνεχίσω τη διδασκαλία έπρεπε να κατανοήσω τις προβλέψεις τους, να συνεχίσω με την εμπειρία και έπειτα να βρω έναν τρόπο, ας πούμε... δίνοντάς τους [στα παιδιά] την ευκαιρία να «ελέγξουν» αυτή τη «μη ελεγχόμενη ιδέα» [το τυχαίο] ... Για παράδειγμα, ο Νίκος ήταν σίγουρος ότι θα έφερνε καφέ σε έναν δίκαιο τροχό τύχης ... δεν ήταν έτσι ... Σε εκείνο το σημείο έπρεπε να μπορώ να του δώσω την εμπειρία του τυχαίου και να τον βοηθήσω να οικοδομήσει τη νέα του πρόβλεψη ...

Η Σιμόνη φαινόταν ικανή να αναγνωρίσει κάποια κρίσιμα περιστατικά στα μαθήματά της και να προβληματιστεί σχετικά με αυτά. Έδωσε ιδιαίτερη προσοχή στην παροχή ευκαιριών στα παιδιά να βιώσουν το τυχαίο, κάτι που ήταν κρίσιμο για την οικοδόμηση των διαισθητικών μοντέλων των παιδιών. Με τον ίδιο τρόπο, η Αλίκη αναστοχάζεται για το μάθημά της:

Αλίκη: Πέρασα ώρες προσπαθώντας να βρω το σενάριο, κάνοντας τα υλικά και ένιωθα ότι όλα ήταν έτοιμα … Σε αυτό το μάθημα δεν ήταν έτσι … έπρεπε επίσης να είμαι σε θέση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μου να βρω τρόπους να βοηθήσω τα παιδιά να συνδέσουν τις προβλέψεις τους, να κάνουν ερωτήσεις και να επιλέξουν τον σωστό τροχό τύχης …

Στις παραπάνω παραγράφους παρουσιάστηκαν τρεις από τις περιπτώσεις των εκπαιδευτικών που παρατηρήσαμε, καθώς αυτές είναι ενδεικτικές και των υπόλοιπων δύο που δεν παρουσιάζονται εδώ. Πρέπει όμως να αναφερθεί ότι μεταξύ των πέντε περιπτώσεων των εκπαιδευτικών, υπήρξε μία η οποία φάνηκε να μην αναγνωρίζει καθόλου τη σημασία της κατανόησης της έννοιας του τυχαίου στις δραστηριότητες πιθανοτήτων που σχεδίασε. Η Κάλια εξέφρασε τις σκέψεις της ως εξής: ‘Ξέρετε, πιστεύω ότι το μάθημα δεν πήγε τόσο καλά γιατί έθεσα πάρα πολλά κλειστά ερωτήματα και δεν αισθανόμουν σίγουρη τι να κάνω όταν πήρα την *λάθος απάντηση*… δεν κατάλαβα την ανάγκη να βιώσουν τα παιδιά το τυχαίο μέχρι να μιλήσουμε μαζί …’

Η Κάλια γνώριζε ότι η βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας εκ μέρους της θα την είχε βοηθήσει να βελτιώσει τον σχεδιασμό και την εφαρμογή του μαθήματος. Εκτός αυτού, αναστοχάστηκε επίσης για το πώς θα έπρεπε να είχε δώσει την ευκαιρία στα παιδιά να βιώσουν το τυχαίο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι εκπαιδευτικοί της παρούσας έρευνας αναγνώρισαν ότι έπρεπε να γνωρίζουν όχι μόνο τι είναι τυχαίο, αλλά και το πώς να χειριστούν αυτή την έννοια με τα παιδιά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους. Υπογράμμισαν ότι η επιτυχής εισαγωγή της έννοιας του τυχαίου στις πρώτες μαθηματικές έννοιες απαιτεί γνώση για το πώς να αξιοποιηθούν προηγούμενες διαισθήσεις των παιδιών σχετικά με τα τυχαία φαινόμενα, καθώς και στον χειρισμό των προβλέψεων των παιδιών κατά τη διάρκεια του μαθήματος σχετικά με τα στοχαστικά γεγονότα και στα πραγματικά αποτελέσματα τέτοιων γεγονότων. Οι εκπαιδευτικοί συζήτησαν για κρίσιμα περιστατικά που βίωσαν στο μάθημά τους (Goodwell, 2006; Hanuscin, 2013). Τα κρίσιμα περιστατικά είναι κομβικής αξίας για προβληματισμό και συζήτηση μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών σε πλαισιωμένες καταστάσεις (Scherer & Steinbring, 2006).

Το μεγαλύτερο μέρος της προσοχής των εκπαιδευτικών κατά το στάδιο του σχεδιασμού επικεντρώθηκε σε αυτά που οι Ball και Bass (2000) αναφέρουν για τις γνώσεις του προγράμματος σπουδών, συμπεριλαμβανομένης και της γνώσης των εκπαιδευτικών στόχων, όπου εμφανίζονται συγκεκριμένες έννοιες. Αυτός ο τύπος γνώσης μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να ενσωματώσουν λειτουργικά τις στατιστικές έννοιες σε ένα πρόγραμμα σπουδών (Godino, Ortiz, Roa, & Wilhelmi, 2011).

Τα ευρήματα της μελέτης καταδεικνύουν επίσης ότι μέσω της διδασκαλίας και του αναστοχασμού που ακολούθησε, οι προκλήσεις του μαθήματος έγιναν πιο εμφανείς στις εκπαιδευτικούς. Παρόμοια πορίσματα διαπιστώθηκαν σε μία προηγούμενη μελέτη των Paparistodemou κ.ά. (2006), η οποία διερεύνησε τον αναστοχασμό των μελλοντικών εκπαιδευτικών για τις στοχαστικές δραστηριότητες των μικρών παιδιών. Το γεγονός ότι παρόμοιες τάσεις παρατηρήθηκαν τόσο σε μελλοντικούς όσο και σε εν ενεργεία εκπαιδευτικούς παραπέμπουν αβίαστα στο συμπέρασμα ότι η συνειδητοποίηση των στοχαστικών εννοιών και της σημασίας τους δεν είναι μόνο θέμα διδακτικής εμπειρίας αλλά και βαθμού συμμετοχής των εκπαιδευτικών στη διαδικασία παρατήρησης και αναστοχασμού. Στην περίπτωση της Σιμόνης και της Αλίκης είδαμε κάποιο βαθμό επίγνωσης για σημαντικές έννοιες όπως το τυχαίο.

Εν κατακλείδι, αυτή η μελέτη προσθέτει τον όρο της *στοχαστικής πρόκλησης* στη διδακτική τριάδα των Potari και Jaworski (2002) και επιπλέον των προηγούμενων εργασιών των Paparistodemou και Meletiou-Mavrotheris (2018). Επιπλέον, παραθέτει περιγράφοντας το είδος των εμπειριών που αποκόμισε μια μικρή ομάδα εκπαιδευτικών κατά τον σχεδιασμό, την υλοποίηση και τον αναστοχασμό της διδασκαλίας που σχετίζεται με τη στατιστική και τις πιθανότητες (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2018). Μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι συγκεκριμένες εκπαιδευτικοί οικοδόμησαν ορισμένες σχέσεις μεταξύ θεωρίας και διδακτικής πρακτικής, αλλά και ότι η μετάβασή τους σε πιο συγκεκριμένα στοχαστικά και παιδαγωγικά ζητήματα ενισχύεται με περαιτέρω προσπάθεια. Αυτό αφενός αναντίλεκτα οδηγεί σε προβληματισμό και αφετέρου καθιστά επιτακτικά την ανάγκη σχεδιασμού επιμορφωτικών δράσεων που να αποσκοπούν στην επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών σε θέματα στατιστικής και πιθανοτήτων στο πλαίσιο της συνεχής στήριξής τους κατά την επαγγελματική τους πορεία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R., & Wilhelmi, M. R. (2011). Models for statistical pedagogical knowledge. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education* (pp. 271–282). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Goodwell, J. (2006). Using critical incident reflections: A self-study as a mathematics teacher educator. *Journal of Mathematics Teachers Education*, *9*(3), 221-248.

Groth, R.E., Kent, K., & Hitch, E. (2015). Journey to centers in the core. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *21*(5), 295-302.

Hanuscin, D. L. (2013). Critical incidents in the development of pedagogical content knowledge for teaching the nature of science: A prospective elementary teacher's journey. *Journal of Science Teacher Education*, *24*(6), 933–956.

Leavy, A. M. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *9*(1), 46-67. Retrieved from http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ9(1)_Leavy.pdf

Paparistodemou, E. & Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Teachers' Reflection on Challenges for Teaching Probability in the Early Years. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.) *Statistics in Early Childhood and Primary Education Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking,* Springer, p. 201-215

Paparistodemou, E. & Noss, R. (2004). Designing for Local and Global Meanings of Randomness' continuum, *Proceedings of the Twentieth Eighth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 3,* p. 497-504, Bergen, Norway.

Paparistodemou, E., Potari, D., & Pitta, D. (2006). Prospective teachers' awareness of young children's stochastic activities. In A. Rossman & B. Chance (Eds*.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics,* Salvador, Brazil. International Statistical Institute and International Association for Statistical Education.

Potari, D. & Jaworski, B. (2002). Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 351-380.

Pratt, D. (2000). Making sense of the Total of Two Dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 602-625.

Scherer, P., & Steinbring, H. (2006). Noticing children's learning processes- Teachers jointly reflect on their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teachers Education, 9*(2), 157-185.

Serradó, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparistodemou, E. (2014). Early statistics: A course for developing teachers' statistics technological and pedagogical content. *Statistique et Enseignement*, *5*(1), 5-29.

Watson, J. M. (2001) Profiling teachers' competences and confidence to teach particular mathematics topics: the case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4* (4), 305-337.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Μαρία Χειμωνή, Δήμητρα Πίττα – Πανταζή, Κωνσταντίνος Χρίστου

Πανεπιστήμιο Κύπρου

chimoni.maria@ucy.ac.cy dpitta@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy

Σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει την επίδραση δύο διαφορετικών τύπων εφαρμογιδίων στη μάθηση της άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο. Ενενήντα έξι μαθητές της Ε' τάξης συμμετείχαν σε δύο παρεμβατικά προγράμματα. Το πρώτο περιελάμβανε «ανοικτά» εφαρμογίδια που υποστήριζαν την εξερεύνηση αλγεβρικών εννοιών και διαδικασιών, μέσα από εφαρμογές στην καθημερινή ζωή. Το δεύτερο περιελάμβανε «κλειστά» εφαρμογίδια που υποστηρίζαν την καθοδηγούμενη διερεύνηση, χωρίς να γίνεται διασύνδεση με εφαρμογές στην καθημερινή ζωή. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα «ανοικτά» εφαρμογίδια συνέβαλαν σε μεγαλύτερο βαθμό στην ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών σε σχέση με τα «κλειστά» εφαρμογίδια.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι ευρέως αποδεκτή η ανάγκη για ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης από τα πρώτα χρόνια της σχολικής ζωής των μαθητών μέχρι και το λύκειο (Kieran, 2004). Πολλές ερευνητικές εργασίες έχουν επικεντρωθεί κατά τις τελευταίες δύο δεκαετίες στον σχεδιασμό και την εφαρμογή μαθημάτων άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο, με απώτερο σκοπό την καθοδήγηση της προσοχής των μαθητών στη δομή και τις σχέσεις στα μαθηματικά. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στις ιδιότητες των αριθμών και των πράξεων, στα μοτίβα και στις ποσοτικές σχέσεις (Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016).

Στο πλαίσιο αυτό, πολλοί ερευνητές συζήτησαν τον ρόλο της τεχνολογίας στη διδασκαλία και τη μάθηση της άλγεβρας, τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Hewitt, 2014). Πληθώρα ερευνητικών ευρημάτων έχει αναδείξει τη συμβολή της τεχνολογίας στην κατανόηση αλγεβρικών εννοιών, όπως της ισότητας και της συνάρτησης, καθώς και την ανάπτυξη αλγεβρικών διαδικασιών, όπως η γενίκευση (Kolovou, Heuvel-Panhuizen & Köller, 2013). Ωστόσο, ορισμένες έρευνες έδειξαν ότι η χρήση της τεχνολογίας δεν έχει πάντα προσθετική αξία, συγκρινόμενη με τη χρήση πιο παραδοσιακών μεθόδων (Drijvers et al., 2016).

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια περαιτέρω εξέτασης της επίδρασης της τεχνολογίας στην ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών στο δημοτικό σχολείο. Συγκεκριμένα, η εργασία διερευνά τον ρόλο διαφορετικών τύπων εφαρμογιδίων (κλειστών και ανοικτών) που είναι δυνατόν να ενταχθούν σε μαθήματα άλγεβρας στην Ε' τάξη.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Βασικές πτυχές της αλγεβρικής σκέψης

Η αλγεβρική σκέψη έχει χαρακτηριστεί ως πολυδιάστατη (Kieran, 2004). Σύμφωνα με τον Kaput (2008), υπάρχουν τρεις βασικές θεματικές περιοχές άλγεβρας, οι οποίες αντανακλούν διαφορετικές πτυχές αλγεβρικής σκέψης: (α) η γενικευμένη αριθμητική, (β) ο συναρτησιακός συλλογισμός και (γ) η μοντελοποίηση. Η γενικευμένη αριθμητική αναφέρεται στις ιδιότητες των αριθμών και των πράξεων, στην έννοια και το σύμβολο της ισότητας, την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Ο συναρτησιακός συλλογισμός αναφέρεται στις σχέσεις μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών, στην έννοια της συνάρτησης, του ρυθμού και της μεταβολής. Τέλος, η μοντελοποίηση αναφέρεται στη χρήση της άλγεβρας ως γλώσσας και ως εργαλείου για την έκφραση κανονικοτήτων που περιγράφονται μέσα από καταστάσεις και φαινόμενα εντός και εκτός των μαθηματικών.

Κύριο χαρακτηριστικό της αλγεβρικής σκέψης σε όλες τις περιοχές άλγεβρας αποτελεί η διαδικασία της γενίκευσης. Κατά την επίλυση αλγεβρικών έργων, οι μαθητές αναγνωρίζουν, αναπαριστούν και αιτιολογούν γενικεύσεις με τρόπους που σταδιακά γίνονται πιο τυπικοί και περιλαμβάνουν αλγεβρικά σύμβολα (Radford, 2008). Επιπλέον, η αλγεβρική σκέψη έχει συσχετιστεί με τις διαδικασίες της πρόβλεψης, της υπόθεσης και της απόδειξης (Kieran, 2004˙ Pitta-Pantazi, Chimoni & Christou, 2019). Συνεπώς, η αλγεβρική σκέψη αναμένεται να αναπτυχθεί μέσα από μαθήματα που καλύπτουν όλες τις θεματικές περιοχές της άλγεβρας και καλλιεργούν την εφαρμογή θεμελιωδών αλγεβρικών διαδικασιών.

Η χρήση της τεχνολογίας σε μαθήματα άλγεβρας

Σύμφωνα με τους Drijvers et al., (2016), η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση χρειάζεται να υλοποιηθεί μέσα από προσεκτικά σχεδιασμένους τρόπους και σε κατάλληλες χρονικές στιγμές, ώστε να ενδυναμώνεται η εννοιολογική κατανόηση. Σε ό,τι αφορά την άλγεβρα, πολλοί ερευνητές πρότειναν εργαλεία που φάνηκε να λειτουργούν υποστηρικτικά. Για παράδειγμα, το λογισμικό CAS αξιοποιήθηκε ευρέως για την κατανόηση της έννοιας της ισότητας (Kieran & Drijvers, 2006), ενώ τα υπολογιστικά φύλλα (spreadsheets) για την αναγνώριση και περιγραφή σχέσεων μεταξύ μεταβλητών (Sutherland & Rojano, 2003).

Επιπρόσθετα, η συνεισφορά ενός τεχνολογικού εργαλείου στη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές, στο πλαίσιο συγκεκριμένων δραστηριοτήτων (Drijvers et al., 2013). Η χρήση ενός εργαλείου μπορεί να χαρακτηριστεί ως πιο «ανοικτή» ή πιο «κλειστή» (Sinclair et al., 2009). Για παράδειγμα, τα υπολογιστικά φύλλα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν «ανοικτά» σε μαθήματα συναρτησιακού συλλογισμού, αν οι μαθητές τα αξιοποιήσουν για να συγκρίνουν διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής, εισάγοντας οι ίδιοι διαφορετικές φόρμουλες και κατασκευάζοντας γραφικές παραστάσεις. Ωστόσο, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν πιο «κλειστά», αν οι φόρμουλες και οι γραφικές παραστάσεις είναι ήδη καταχωρημένες.

Παράλληλα, υπάρχουν εργαλεία που από τη φύση τους προωθούν «ανοικτές» δραστηριότητες εξερεύνησης (π.χ. λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας), καθώς και εργαλεία που προωθούν πιο «κλειστές», δομημένες δραστηριότητες διερεύνησης (Sinclair et al., 2009). Η συζήτηση ως προς το ποια από τις δύο χρήσεις ή ποιος τύπος εργαλείου είναι καταλληλότερος για την ενδυνάμωση της κατανόησης στα μαθηματικά και ειδικότερα στην άλγεβρα, δεν έχει δώσει σαφείς απαντήσεις. Η «κλειστή» χρήση έχει χαρακτηριστεί ως πιο ασφαλής σε σχέση με τον έλεγχο του βαθμού κατανόησης, μέσα από την παροχή σκαλωσιών μάθησης (Sinclair et al., 2009). Εντούτοις, η εισαγωγή «ανοικτών» εργαλείων και αντίστοιχων δραστηριοτήτων προκαλούν την περιέργεια των μαθητών, ενθαρρύνουν την εξερεύνηση και ενδυναμώνουν τη διαδικασία της μαθηματικοποίησης, (Drijvers et al., 2016).

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Η παρούσα εργασία μελετά τον ρόλο διαφορετικών εφαρμογιδιών στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης μαθητών του δημοτικού σχολείου. Τα εφαρμογίδια μπορούν να διαχωριστούν σε δύο τύπους, ανάλογα με το πόσο «ανοικτή» ή πόσο «κλειστή» είναι η πρακτική που προάγουν ως προς την προσέγγιση των νέων εννοιών από τους μαθητές. Το ερευνητικό ερώτημα που κατεύθυνε τον σχεδιασμό της έρευνας είναι το ακόλουθο: *Ποιος τύπος εφαρμογιδίου (ανοικτά ή κλειστά) επιδρά σε μεγαλύτερο βαθμό στην ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης μαθητών δημοτικού σχολείου;*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

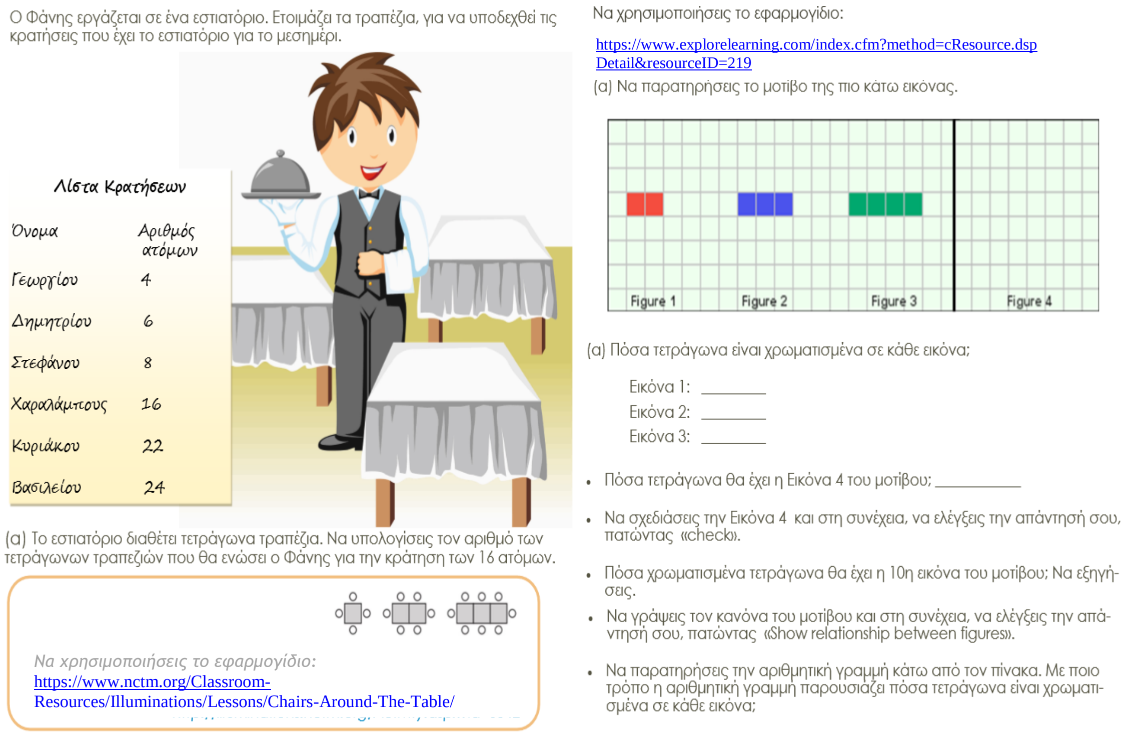
Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 96 μαθητές της Ε’ τάξης του δημοτικού σχολείου, οι οποίοι προέρχονταν από δύο διαφορετικά σχολεία και τέσσερα συνολικά τμήματα. Δύο από τα τμήματα (ν=47) συμμετείχαν σε παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας της άλγεβρας στο οποίο χρησιμοποιούνταν «ανοικτά» εφαρμογίδια˙ τα εφαρμογίδια εντάσσονταν σε δραστηριότητες ανοικτής εξερεύνησης. Τα άλλα δύο τμήματα (ν=49) συμμετείχαν σε παρεμβατικό πρόγραμμα στο οποίο χρησιμοποιούνταν πιο «κλειστά» εφαρμογίδια˙ τα εφαρμογίδια εντάσσονταν σε δραστηριότητες καθοδηγούμενης διερεύνησης.

Παρεμβατικά προγράμματα διδασκαλίας

Κοινό χαρακτηριστικό των δύο προγραμμάτων ήταν οι μαθησιακοί στόχοι, οι οποίοι κάλυπταν τις τρεις βασικές θεματικές περιοχές άλγεβρας μέσα από 10 μαθήματα διάρκειας 80 λεπτών το καθένα: 2 μαθήματα γενικευμένης αριθμητικής, 4 συναρτησιακού συλλογισμού και 4 μοντελοποίησης.

Η Εικόνα 1 παρουσιάζει παραδείγματα δραστηριοτήτων και αντίστοιχων εφαρμογιδίων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές σε κάθε πρόγραμμα διδασκαλίας. Τα συγκεκριμένα μαθήματα αφορούσαν τον συναρτησιακό συλλογισμό και ειδικότερα την αναγνώριση και περιγραφή του κανόνα σε σχηματικά μοτίβα.



Εικόνα 1: Παράδειγμα αξιοποίησης «ανοικτού» (αριστερά) και «κλειστού» (δεξιά) εφαρμογιδίου

Το εφαρμογίδιο της δραστηριότητας στα αριστερά αποτελεί παράδειγμα ανοικτού εφαρμογιδίου που αξιοποιήθηκε από τους μαθητές, για να εξερευνήσουν με ποιο τρόπο μεταβάλλεται ο αριθμός των θέσεων, όταν μεταβάλλεται ο αριθμός των ενωμένων τραπεζιών σε ένα εστιατόριο. Το εφαρμογίδιο της δραστηριότητας στα δεξιά αποτελεί παράδειγμα κλειστού εφαρμογιδίου που αξιοποιήθηκε από τους μαθητές για τη μελέτη σχηματικών μοτίβων, ακολουθώντας μια καθοδηγούμενη διαδρομή διερεύνησης. Επιπρόσθετα παραδείγματα εφαρμογιδίων που αξιοποιήθηκαν στα πλαίσια των δύο προγραμμάτων παρουσιάζονται στο παράρτημα.

Δοκίμιο στην αλγεβρική σκέψη

Οι μαθητές εξετάστηκαν στο ίδιο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης πριν από και μετά από τη διεξαγωγή των μαθημάτων. Το δοκίμιο περιλάμβανε 22 αλγεβρικά έργα που ανήκαν σε τρεις κατηγορίες (Πίνακας 1). Σύμφωνα με τον συντελεστή Cronbach alpha, η εσωτερική αξιοπιστία των έργων του δοκιμίου ήταν ικανοποιητική (a=0.87).

Κατηγορίες	Παράδειγμα
Γενικευμένη αριθμητική	(α) Να επιλύσεις την εξίσωση $N+5=8$. Να δείξεις τον τρόπο εργασίας σου. (β) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το K, ώστε να ισχύει η ανίσωση; $K\ +\ 2\ >12$;
Συναρτησιακός συλλογισμός	Ο Πέτρος κερδίζει €7 για κάθε ώρα εργασίας. Ποια από τις γραφικές παραστάσεις παρουσιάζει το συνολικό ποσό χρημάτων που κερδίζει σε σχέση με τις ώρες εργασίας του; Α. Β. Γ. Δ.    
Μοντελοποίηση	Πιο κάτω παρουσιάζονται δύο προσφορές για την αγορά 20 τραγουδιών από το διαδίκτυο. *<u>ΠΡΟΣΦΟΡΑ Α:</u> €20 τον μήνα, €3 για κάθε επιπλέον τραγούδι.* *<u>ΠΡΟΣΦΟΡΑ Β:</u> €30 τον μήνα, €2 για κάθε επιπλέον τραγούδι.* Ποια προσφορά θα σύστηνες σε ένα φίλο σου να επιλέξει, αν συνήθως αγοράζει 9 επιπλέον τραγούδια κάθε μήνα;

Πίνακας 1: Παραδείγματα έργων από το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης

Ανάλυση δεδομένων

Η επεξεργασία των δεδομένων έγινε με το στατιστικό πακέτο SPSS. Με τη μέθοδο Manova έγινε σύγκριση της αρχικής επίδοσης των δύο ομάδων μαθητών στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Με τη μέθοδο Mancova αξιολογήθηκε η επίδραση κάθε προγράμματος στην τελική επίδοση κάθε ομάδας μαθητών στο ίδιο δοκίμιο: ο τύπος της παρέμβασης ήταν η ανεξάρτητη μεταβλητή, η αρχική επίδοση ήταν η ελεγχόμενη μεταβλητή και η διαφορά αρχικής-τελικής επίδοσης ήταν η εξαρτημένη μεταβλητή. Τέλος, με τη μέθοδο Paired-samples t-test, έγινε σύγκριση της αρχικής και τελικής επίδοσης των μαθητών που ανήκαν στην ίδια ομάδα.

Αποτελέσματα

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανάλυσης Manova, οι δύο ομάδες μαθητών δεν είχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοσή τους στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης, πριν από τη διεξαγωγή των δύο παρεμβατικών προγραμμάτων (F=.576, p>.05).

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης Mancova (Πίνακας 2) έδειξαν ότι ήταν σημαντική η επίδραση των παρεμβατικών προγραμμάτων στη διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής επίδοσης των δύο ομάδων μαθητών (Pillai's F=9.586, p<.05). Ωστόσο, η τελική επίδοση της ομάδας που χρησιμοποίησε τα ανοικτά εφαρμογίδια ήταν ψηλότερη σε σχέση με αυτή της ομάδας που χρησιμοποίησε τα κλειστά εφαρμογίδια (partial n_p^2=.088).

	Κλειστά		Ανοικτά					
	Μέσος όρος	SE	Μέσος όρος	SE	df	F	p	n_p^2
Συνολική επίδοση	.452	.206	.570	.179	1	6.452	.013*	.088
Γενικευμένη αριθμητική	.663	.213	.647	.246	1	.081	.777	.001
Συναρτησιακός συλλογισμός	.369	.225	.547	.270	1	26.845	.000*	.286
Μοντελοποίηση	.291	.291	.509	.319	1	9.804	.003*	.128

Πίνακας 2: Η επίδραση των προγραμμάτων στην επίδοση των μαθητών

Απομονώνοντας την επίδοση των μαθητών στις τρεις κατηγορίες έργων του δοκιμίου (γενικευμένη αριθμητική, συναρτησιακός συλλογισμός και μοντελοποίηση), τα αποτελέσματα έδειξαν ότι:

(1) Η επίδοση των μαθητών που χρησιμοποίησαν τα ανοικτά εφαρμογίδια δεν είχε στατιστικά σημαντική διαφορά από την επίδοση των μαθητών που χρησιμοποιήσαν τα κλειστά εφαρμογίδια στα έργα της γενικευμένης αριθμητικής (Pillai's F=.081, p>.05).

(2) Η επίδοση των μαθητών που χρησιμοποίησαν τα ανοικτά εφαρμογίδια ήταν στατιστικά σημαντικά υψηλότερη από την επίδοση των μαθητών που χρησιμοποιήσαν τα κλειστά εφαρμογίδια στα έργα του συναρτησιακού συλλογισμού (Pillai's F=26.845, p<.05) και της μοντελοποίησης (Pillai's F=9.804, p<.05). Το μέγεθος επίδρασης του παρεμβατικού προγράμματος στα έργα συναρτησιακού συλλογισμού (partial n_p^2=.286) ήταν ψηλότερο σε σχέση με το μέγεθος επίδρασης στα έργα μοντελοποίησης (partial n_p^2=.128).

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης Paired-samples t-test (Πίνακας 3) έδειξαν ότι οι μαθητές και στις δύο ομάδες είχαν στατιστικά σημαντική αύξηση στην τελική επίδοσή τους στο δοκίμιο σε σχέση με την αρχική. Ο μέσος όρος των μαθητών που χρησιμοποίησαν τα ανοικτά εφαρμογίδια αυξήθηκε από .368 σε .570, ενώ των μαθητών που χρησιμοποίησαν τα κλειστά εφαρμογίδια αυξήθηκε από .337 σε .452.

		Αρχική επίδοση		Τελική επίδοση			
		M	SD	M	SD	T(df)	p
Συνολική επίδοση	Κλειστά	.337	.195	.452	.206	-5.519(33)	.000*
	Ανοικτά	.368	.151	.570	.179	-10.147(34)	.000*
Γενικευμένη αριθμητική	Κλειστά	.467	.326	.663	.213	-4.112(33)	.000*
	Ανοικτά	.473	.235	.647	.246	-4.818(34	.000*
Συναρτησιακός συλλογισμός	Κλειστά	.302	.263	.369	.225	-2.774(33)	.090
	Ανοικτά	.404	.228	.547	.270	-5.663(34)	.000*
Μοντελοποίηση	Κλειστά	.223	.241	.291	.291	-1.231(33)	.227
	Ανοικτά	.183	.202	.509	.319	-9.926(34)	.000*

Πίνακας 3: Σύγκριση αρχικής και τελικής επίδοσης σε κάθε ομάδα μαθητών

Περαιτέρω αναλύσεις έδειξαν ότι, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τα ανοικτά εφαρμογίδια είχαν στατιστικά σημαντική αύξηση του μέσου όρου τους και στις τρεις κατηγορίες έργων (από .473 σε .647 για τη γενικευμένη αριθμητική, από .404 σε .547 για τον συναρτησιακό συλλογισμό και από .183 σε .509 για τη μοντελοποίηση). Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τα κλειστά εφαρμογίδια είχαν στατιστικά σημαντική αύξηση στην επίδοσή τους στα έργα της γενικευμένης αριθμητικής (από .467 σε .663), ενώ δεν ήταν στατιστικά σημαντική Η αύξηση στην επίδοσή τους στα έργα συναρτησιακού συλλογισμού (από .302 σε .369) και μοντελοποίησης (από .223 σε .291) δεν ήταν στατιστικά σημαντική.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της παρούσας ερευνητικής εργασίας συνάδουν με προηγούμενες μελέτες (Sinclair et al., 2009), οι οποίες τόνισαν ότι ο τύπος του τεχνολογικού εργαλείου και ο τρόπος με τον οποίο αξιοποιείται σε μαθήματα μαθηματικών είναι δυνατόν να επηρεάσει σε σημαντικό βαθμό τα μαθησιακά αποτελέσματα. Τα εφαρμογίδια που υποστηρίζουν την εννοιολογική κατανόηση είναι δυνατόν να διαφοροποιηθούν ανάλογα με το πόσο «ανοικτή» ή πόσο «κλειστή» είναι η χρήση τους από τους μαθητές. Αντίστοιχα, η συνεισφορά τους στην ενίσχυση της αλγεβρικής σκέψης φάνηκε να διαφοροποιείται. Τα ευρήματα της ποσοτικής ανάλυσης έδειξαν ότι τα ανοικτά εφαρμογίδια και οι δραστηριότητες εξερεύνησης είναι πιο αποτελεσματικά για την ενίσχυση των διαφορετικών πτυχών της αλγεβρικής σκέψης, οι οποίες διαχέονται σε τρεις βασικές θεματικές περιοχές της άλγεβρας: τη γενικευμένη αριθμητική, τον συναρτησιακό συλλογισμό και τη μοντελοποίηση. Παράλληλα, τα κλειστά εφαρμογίδια και η καθοδηγούμενη διερεύνηση φάνηκε να έχουν στατιστικά σημαντική συνεισφορά μόνο στην περίπτωση της γενικευμένης αριθμητικής.

Τα αποτελέσματα υπογραμμίζουν ότι, παρόλο που τα μαθήματα άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο χρειάζεται να είναι πολυδιάστατα και να καλύπτουν όλες τις διαφορετικές πτυχές της αλγεβρικής σκέψης (Kaput, 2008), η συνθήκη αυτή δεν είναι αρκετή, ώστε οι μαθητές να φτάσουν στο μέγιστο των δυνατοτήτων τους. Ως εκ τούτου, η παρούσα εργασία συμπληρώνει και επεκτείνει προηγούμενες έρευνες που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά επιτυχημένων διδακτικών παρεμβάσεων στην άλγεβρα, καθώς και του ρόλου της τεχνολογίας. Η πρόκληση της περιέργειας των μαθητών, η ανάγκη για ανάδυση και δοκιμή εναλλακτικών στρατηγικών, η διαδικασία της μαθηματικοποίησης, φαίνεται να ευνοούν την κατανόηση των αλγεβρικών εννοιών και την εφαρμογή γενικεύσεων, μέσα από μια διαδρομή που ξεκινά από διαισθητικούς τρόπους συλλογισμού και καταλήγει σε πιο αφηρημένους και συμβολικούς. Συνεπώς, η χρήση ανοικτών εφαρμογιδίων και αντίστοιχων δραστηριοτήτων από τους μαθητές συνάδει με τη διαδικασία ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης που ο Radford (2008) περιγράφει ως συστηματική έκφραση γενικεύσεων με τρόπους που εξελικτικά γίνονται πιο τυπικοί.

Η κύρια συνεισφορά της παρούσας εργασίας εδράζεται στην εμπειρική επιβεβαίωση της διαφορετικής επίδρασης διαφορετικών τύπων εφαρμογιδίων στην αλγεβρική σκέψη των μαθητών δημοτικού σχολείου. Όπως τόνισαν πολλοί ερευνητές, είναι σημαντικό η έρευνα στον τομέα της μαθηματικής παιδείας να υποστηρίζει τη μετάβαση από ασαφή θεωρητικά πλαίσια σε πρακτικές εφαρμογές και σε συγκεκριμένα δεδομένα που διαφωτίζουν τον τρόπο με τον οποίο τελικά οι μαθητές καταλήγουν να μάθουν και να αναπτύξουν στο μέγιστο τις ικανότητές τους (Mayer, 2004). Κλείνοντας, σημειώνεται ότι τα ευρήματα που παρουσιάστηκαν χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης μέσω έρευνας που θα επικεντρωθεί στα ποιοτικά χαρακτηριστικά της σκέψης των μαθητών κατά την εργασία τους με τα εφαρμογίδια. Ενδιαφέρον θα ήταν, επίσης, να εξεταστεί ποιος τύπος εφαρμογιδίου ευνοεί περισσότερο τους μαθητές με υψηλότερες ή χαμηλότερες μαθηματικές ικανότητες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Britt M.S., & Irwin K.C. (2011). Algebraic Thinking with and without Algebraic Representation: A Pathway for Learning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education. Springer*, Berlin, Heidelberg.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M.K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). Uses of technology in lower secondary mathematics education. In G. Gaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Surveys*. Springer Open.

Hewitt, D. (2014). A Symbolic Dance: The interplay between movement, notation, and mathematics on a journey toward solving equations. *Mathematical Thinking and Learning 16*(1), 1–31.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Routledge.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 21–34). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of Cas use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(2), 205-263.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S.F. (2016). Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Surveys.* Springer Open.

Kolovou, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M., & Köller, O. (2013). An intervention including an online game to improve grade 6 students' performance in early algebra. *Journal for research in mathematics education, 44*(3), 510-549.

Mayer, R. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist, 59*, 14–19.

Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M. & Christou, C. (2019). Different types of algebraic thinking: an empirical study focusing on middle school students. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 1-20.

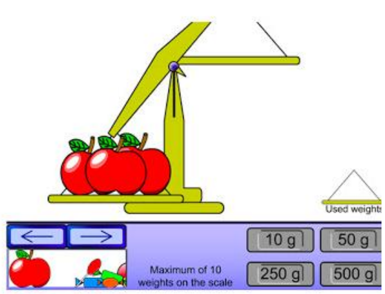
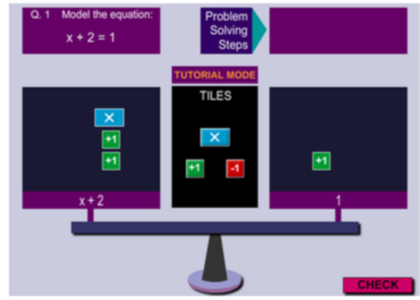
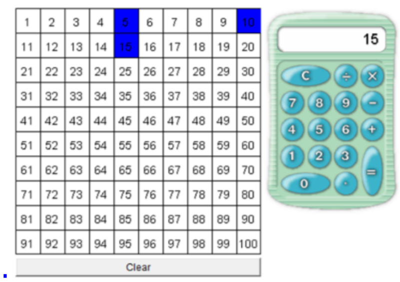
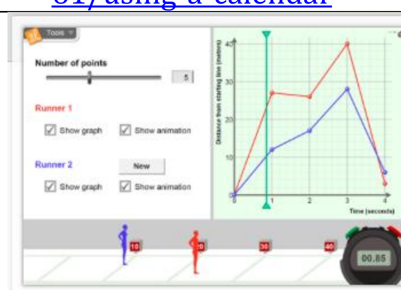
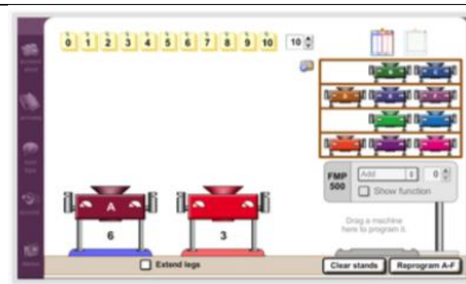
Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83–96.

Sinclair, N. et al. (2009). Implementing digital technologies at a national scale. In C. Hoyles. & J.B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. New ICMI study series*, vol 13. Boston: Springer

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). A spreadsheet algebra approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*(4), 353–383.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παραδείγματα εφαρμογιδίων που αξιοποιήθηκαν στα μαθήματα των δύο παρεμβατικών προγραμμάτων

	Ανοικτά εφαρμογίδια	Κλειστά εφαρμογίδια
Έννοια ισότητας και επίλυση εξίσωσης	 http://www.teacherled.com/resources/oldscales/oldscalesload.html	 http://www.mathplayground.com/AlgebraEquations.html
Ιδιότητες αριθμών	 https://mathsframe.co.uk/en/resources/resource/261/using-a-calendar	 http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=25013
Περιγραφή και αναπαράσταση σχέσης μεταβλητών	 http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspDetail&ResourceID=625	 https://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspDetail&resourceID=1035

ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ-ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Αικατερίνη Βισσαρίου[1], Δέσποινα Δεσλή[2]

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

aikaterinivissariou7@gmail.com, ddesli@eled.auth.gr

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των μεταγνωστικών ικανοτήτων που εκδήλωσαν μαθητές Στ' τάξης (N=30) κατά την επίλυση ενός μη-τυποποιημένου μαθηματικού προβλήματος. Για τον σκοπό αυτό, αξιοποιήθηκε το ερωτηματολόγιο αυτό-αναφοράς του Magno (2009), το οποίο αφορά στην αξιολόγηση ικανοτήτων γνώσης και ρύθμισης της γνωστικής λειτουργίας, ως των δύο βασικών συστατικών της μεταγνώσης. Η ανάλυση των απαντήσεων των παιδιών ανέδειξε σημαντικές ελλείψεις και στις δύο πτυχές της μεταγνώσης, γεγονός που διεγείρει προβληματισμούς ως προς την ανάπτυξη της μεταγνώσης και την επίλυση προβλήματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα για τη μεταγνώση φαίνεται να ξεπερνά τα επιστημονικά όρια αποκλειστικά της ψυχολογίας και να αφορά ζητήματα που άπτονται της συμπεριφοράς μικρών και μεγάλων κατά την ενασχόλησή τους με διάφορα γνωστικά απαιτητικά έργα. Υπό το πρίσμα αυτό, μελετάται η μεταγνώση ως την επίγνωση ενός ατόμου για τις διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στη σκέψη του, καθώς και στην ικανότητα να παρακολουθεί, να ρυθμίζει και να ελέγχει αυτές τις διαδικασίες (Flavell, 1979). Σύμφωνα με τον Flavell (1979, 1987), δύο είναι οι βασικές και αλληλεξαρτώμενες συνιστώσες της μεταγνώσης: η μεταγνωστική γνώση, που περιλαμβάνει τη δηλωτική, τη διαδικαστική και την υποθετική γνώση των γνωστικών ικανοτήτων, και η ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας, που αναφέρεται στη στρατηγική χρήση της μεταγνωστικής γνώσης, προκειμένου να επιτυγχάνονται οι γνωστικοί στόχοι. Η δεύτερη μάλιστα περιλαμβάνει μία σειρά από μεταγνωστικές ικανότητες, από τις οποίες οι κυριότερες τέσσερις αφορούν στην πρόβλεψη, τον σχεδιασμό, την παρακολούθηση και την αξιολόγηση (Desoete, 2008).

Η ανάπτυξη της μεταγνώσης συνδέεται σημαντικά με την επίλυση προβλήματος εγείροντας σημαντικούς προβληματισμούς για τη σχέση της με τη μάθηση των μαθηματικών (Panaoura, Philippou, & Christou, 2004). Καθώς η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος βελτιώνει την ακαδημαϊκή επίδοση (NCTM, 2000), αναδεικνύεται ο σπουδαίος ρόλος που διαδραματίζει η επίλυση προβλήματος στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων σκέψης και κατανόησης (Lesh, & Zawojewsky, 2007). Σύμφωνα με τον Polya (1985), η επίλυση προβλήματος υπηρετεί αφενός τον σκοπό της λύσης ενός συγκεκριμένου μαθηματικού προβλήματος και αφετέρου τον σκοπό της ανάπτυξης των δεξιοτήτων σκέψης των μαθητών, προκειμένου να είναι σε θέση να επιλύουν με επιτυχία τα προβλήματα που συναντούν, όχι μόνο εντός αλλά και εκτός του σχολικού πλαισίου. Ωστόσο, φαίνεται πως συχνά η μαθηματική γνώση που κατακτάται στο πλαίσιο της διδασκαλίας του σχολείου δεν συνδέεται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής και του πραγματικού κόσμου (Friedman, 2005). Μάλιστα, η ενασχόληση των μαθητών με την επίλυση προβλήματος στο σχολείο δημιουργεί την λανθασμένη αντίληψη πως σε προβλήματα με τα οποία δεν είναι εξοικειωμένοι και έχουν έναν ορισμένο βαθμό δυσκολίας, δεν μπορούν να τα λύσουν με επιτυχία, κι έτσι εγκαταλείπουν την προσπάθεια, δεν θεωρούν τους εαυτούς τους ικανούς λύτες και παράλληλα αναπτύσσουν αρνητικές αντιλήψεις για τα μαθηματικά (van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams, 2017).

Η μεταγνώση στα μαθηματικά συχνά αξιολογείται με τη χρήση ποικίλων μεθόδων και εργαλείων, που άλλοτε χρησιμοποιούνται πριν από και άλλοτε μετά την επίλυση ενός προβλήματος ή ακόμα και κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος, με ή χωρίς τη διεξαγωγή μεταγνωστικής διδασκαλίας καθώς και με βάση την πτυχή της μεταγνώσης που επιχειρείται να διερευνηθεί (Akturk, & Sahin, 2011; Desoete, 2008). Για παράδειγμα, οι Vissariou και Desli (in press) διερεύνησαν με τη χρήση του καταλόγου αυτό-αναφοράς HISP (Fortunato, Hecht, Tittle, & Alvarez, 1991) τη χρήση μεταγνωστικών στρατηγικών κατά την επίλυση μη-τυποποιημένου μαθηματικού προβλήματος σε μαθητές δημοτικού σχολείου και διαπίστωσαν, μεταξύ άλλων, τη χαμηλή αλλά και άνιση χρήση των εν λόγω στρατηγικών στα διαφορετικά στάδια της διαδικασίας επίλυσης.

Στη διδασκαλία των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται μη-τυποποιημένα προβλήματα τα οποία ευνοούν τον ευέλικτο και στρατηγικό τρόπο σκέψης που απαιτεί η επίλυση προβλήματος (Kolovou, van den Heuvel-Panhuizen, & Bakker, 2009). Πρόκειται για προβλήματα με τα οποία δεν είναι εξοικειωμένα τα παιδιά και, προκειμένου να φτάσουν στη

λύση τους, χρειάζεται να ενεργοποιηθούν διαδικασίες που απαιτούν αποτελεσματική χρήση της γνώσης που κατέχουν (π.χ., κατανόηση των πραγματικών πληροφοριών και της μαθηματικής γλώσσας, οπτικοποίηση των σχέσεων, ανάκληση εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, επινόηση και παρακολούθηση ενός σχεδίου επίλυσης, κλπ.), δεδομένου ότι η επίλυση μαθηματικού προβλήματος δεν προϋποθέτει μόνο την κατοχή γνώσεων, διαδικασιών και ευρετικών αλλά και αποτελεσματική χρήση αυτών, με άλλα λόγια, εναλλαγή μεταξύ γνωστικών και μεταγνωστικών ενεργειών (Wilson, & Clarke, 2004; Vissariou & Desli, in press).

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η αξιολόγηση της μεταγνώσης σε μαθητές δημοτικού σχολείου αναδύθηκε πρόσφατα στον ερευνητικό χώρο (Kuzle, 2018) και με δεδομένο ότι η εκδήλωση των μεταγνωστικών ικανοτήτων των παιδιών είναι πιθανόν να ευνοείται κατά την ενασχόληση με πλούσια μαθηματικά έργα, η παρούσα εργασία επιχειρεί να μελετήσει τις ικανότητες μεταγνωστικής γνώσης και ρύθμισης της γνωστικής λειτουργίας που εκδηλώνουν μαθητές Στ' τάξης κατά την επίλυση ενός μη-τυποποιημένου προβλήματος. Η ανάδειξη του μεταγνωστικού τους επιπέδου θα αποτελέσει το έδαφος για περαιτέρω έρευνα που θα επιδιώκει τον σχεδιασμό κατάλληλης διδακτικής παρέμβασης με απώτερο στόχο την ανάπτυξη της μεταγνώσης κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Συνολικά 30 παιδιά (16 αγόρια, 14 κορίτσια) Στ' τάξης συμμετείχαν στην έρευνα (μ. ό.: 11 χρόνια και 8 μήνες), όλα προερχόμενα από ένα δημόσιο δημοτικό σχολείο σε νησί του Ιονίου, με μεγάλο εύρος τόσο στο κοινωνικό-οικονομικό τους επίπεδο όσο και στις ακαδημαϊκές τους επιδόσεις. Δεν είχε προηγηθεί εξοικείωση με μεταγνωστική διδασκαλία και η επιλογή τους υλοποιήθηκε με τυχαία βολική δειγματοληψία.

Σχεδιασμός της έρευνας – Εργαλείο. Προκειμένου να εξεταστεί το μεταγνωστικό επίπεδο των συμμετεχόντων, σχεδιάστηκε, έπειτα από μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας, ένα μη-τυποποιημένο πρόβλημα (βλ. Εικόνα 1), το οποίο οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να επιλύσουν, και το οποίο αποτέλεσε ταυτόχρονα τη βάση για την ανάδειξη των μεταγνωστικών τους ικανοτήτων. Αφού μελέτησαν προσεκτικά το πρόβλημα, οι μαθητές κλήθηκαν να το λύσουν. Παράλληλα, καλούνταν να απαντήσουν σε ερωτήσεις ενός ερωτηματολογίου, οι οποίες εξέταζαν προδρομικά και αναδρομικά τις μεταγνωστικές ικανότητες που είχαν εκδηλώσει καθώς εργάζονταν στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Το ερωτηματολόγιο που αξιοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα βασίστηκε στον κατάλογο αυτό-αναφοράς του Carlo Magno (2009), έχοντας ως βάση το μεταγνωστικό μοντέλο του Flavell (1987). Το συγκεκριμένο εργαλείο θεωρείται κατάλληλο για την αξιολόγηση των βασικών πτυχών της μεταγνώσης σε μαθητές δημοτικού σχολείου (Gascoine et al., 2017) και χρησιμοποιήθηκε ύστερα από ορισμένες αναγκαίες λεκτικές τροποποιήσεις, προκειμένου να γίνει πιο κατανοητό στους συμμετέχοντες. Περιελάμβανε οχτώ ερωτήσεις: οι πρώτες τρεις αναφέρονταν στη μεταγνωστική γνώση [ερωτήσεις 1, 2 και 3 για δηλωτική γνώση ('*πόσο δύσκολο είναι για σένα το πρόβλημα;*'), υποθετική γνώση ('*γιατί αξιολόγησες έτσι τον βαθμό δυσκολίας;*') και διαδικαστική γνώση ('*ποια είναι τα βήματα για τη λύση τους προβλήματος;*'), αντίστοιχα]. Οι υπόλοιπες ερωτήσεις αναφέρονταν στη ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας [ερώτηση 4 για μεταγνωστική ικανότητα της πρόβλεψης ('*μπορείς να λύσεις το πρόβλημα σωστά*;), ερώτηση 5 για σχεδιασμό ('*πώς θα προχωρήσεις για να λύσεις το πρόβλημα;*'), ερώτηση 6 για αξιολόγηση ('*είσαι σίγουρος ότι απάντησες σωστά;*'), και ερωτήσεις 7 και 8 για παρακολούθηση ('*ποια θεωρείς ότι είναι τα λάθη;*', '*τι είναι σημαντικό για την επίλυση*')].

Υπήρχαν ερωτήσεις ανοικτού τύπου (ερωτήσεις 2, 3 και 7) και κλειστού τύπου (ερωτήσεις 1, 4, 5, 6 και 8). Στις πρώτες, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν ελεύθερα, εκφράζοντας τις απόψεις τους, ενώ στις ερωτήσεις κλειστού τύπου, κλήθηκαν να επιλέξουν μία από τις προτεινόμενες επιλογές απάντησης (ερωτήσεις 1,4,5 και 6), καθώς και να ιεραρχήσουν τις προτεινόμενες επιλογές απάντησης (ερώτηση 8). Η σειρά παρουσίασης των ερωτήσεων ήταν σταθερή για όλους τους συμμετέχοντες.

> Ο Κριστιάν θέλει να αγοράσει για τα Χριστούγεννα ένα τάμπλετ. Για να συγκεντρώσει τα χρήματα που κοστίζει το τάμπλετ, πρέπει να αποταμιεύει καθημερινά 2,20 ευρώ (€) για δύο μήνες καθώς και τα χρήματα που θα του δώσουν για τα γενέθλιά του τον Νοέμβριο η μητέρα του και η γιαγιά του. Η μητέρα του θα του δώσει τα $\frac{3}{8}$ και η γιαγιά του το $\frac{1}{6}$ της αξίας του τάμπλετ. Πόσο κοστίζει το τάμπλετ;

Εικόνα 1: Το πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα

Διαδικασία. Οι συμμετέχοντες, αφού αρχικά καθοδηγήθηκαν στο να διαβάσουν προσεκτικά το πρόβλημα, κλήθηκαν να απαντήσουν στις τρεις ερωτήσεις μεταγνωστικής γνώσης και σε δύο ερωτήσεις γνωστικής λειτουργίας (πρόβλεψη και σχεδιασμός). Στη συνέχεια, τους ζητήθηκε να λύσουν το πρόβλημα σε χρόνο που δεν ξεπερνούσε τα 35'. Αμέσως μετά τους παρουσιάστηκαν οι υπόλοιπες ερωτήσεις γνωστικής λειτουργίας. Όλη η διαδικασία πραγματοποιήθηκε σε ανώνυμο και ατομικό επίπεδο στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών και διήρκησε συνολικά περίπου 90΄.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Επίλυση προβλήματος και μεταγνωστική γνώση. Από τα 30 παιδιά που εργάστηκαν στο πρόβλημα, το έλυσαν σωστά τα 20 (67%). Από αυτά, τα 14 ήταν όλα τα κορίτσια που συμμετείχαν, αναδεικνύοντας έτσι στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση σε σχέση με τα αγόρια ($t=-4,667$, $df=28$, $p<.001$). Όταν το ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων εξετάστηκε σε σχέση με τις απαντήσεις τους για την αξιολόγηση του βαθμού δυσκολίας του προβλήματος (με τη χρήση κλίμακας από το 1-δύσκολο έως το 10-εύκολο), βρέθηκε στατιστικά σημαντική υψηλή θετική συσχέτιση (Pearson's $r=,553$, $p<.01$): όσα παιδιά αξιολόγησαν θετικά το πρόβλημα, έτειναν να το λύσουν με επιτυχία. Ωστόσο, οριακά δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις απαντήσεις των παιδιών για τον βαθμό δυσκολίας του προβλήματος (ερώτηση 1–δηλωτική γνώση) ως προς το φύλο ($t=-2,034$, $df=28$, $p=.052$), με τα αγόρια και τα κορίτσια να αποδίδουν στο πρόβλημα μέτριο βαθμό δυσκολίας (μ.ο.=4,53, τ.α.=2,031) με παρόμοια συχνότητα. Τέλος, κανένα παιδί στις απαντήσεις του δεν έδωσε πολύ μικρό βαθμό δυσκολίας (8, 9 ή 10). Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα παραπάνω ευρήματα.

Επιτυχής λύση του προβλήματος και δηλωτική γνώση	**Αγόρια**		**Κορίτσια**		**Σύνολο**	
	Μ. Ό.	**Τ. Α.**	**Μ. Ό.**	**Τ. Α.**	**Μ.Ό.**	**Τ. Α.**
Επιτυχία στη λύση του προβλήματος	,38	,50	1,00	,00	,67	,47
Βαθμός δυσκολίας του προβλήματος	3,88	1,82	5,29	1,97	,45	2,03

Πίνακας 1: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της επιτυχίας στη λύση του προβλήματος και της αποτίμησης του βαθμού δυσκολίας του

Μόνο το 26,7% των συμμετεχόντων αιτιολόγησε πλήρως τον βαθμό δυσκολίας που έδωσε στο πρόβλημα (ερώτηση 2 – υποθετική γνώση). Από αυτούς, το 76,7% θεώρησε ως βασική αιτία δυσκολίας του προβλήματος το γεγονός ότι περιείχε αριθμούς με διαφορετική μορφή και κυρίως κλάσματα.

Οι συμμετέχοντες ανέφεραν από 1 έως 4 βήματα κατά την επίλυση του προβλήματος (ερώτηση 3 – διαδικαστική γνώση), με τους περισσότερους να αναφέρουν δύο ή τρία βήματα (40% και 33%, αντίστοιχα), ανάμεσα στα οποία ήταν πάντοτε η εκτέλεση πράξεων. Το 93,4% των συμμετεχόντων ανέφεραν την πραγματοποίηση αριθμητικών πράξεων, ενώ μόνο το 20,13% ανέφεραν την επιλογή στρατηγικής ως βήμα. Ωστόσο, δεν σημειώθηκε συσχέτιση ανάμεσα στον αριθμό των βημάτων και την επιτυχία επίλυσης (Pearson's r=,055, p=.772): ανεξάρτητα από τον αριθμό βημάτων που ανέφεραν τα παιδιά, η επιτυχία τους ήταν παρόμοια.

β. Ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας. Αναφορικά με την ερώτηση πόσο βέβαιοι αισθάνονται οι συμμετέχοντες ότι μπορούν να λύσουν σωστά το πρόβλημα (ερώτηση 4 – μεταγνωστική ικανότητα της πρόβλεψης), τα αποτελέσματα είναι αντικρουόμενα (βλ. Πίνακα 2). Μόνο δύο συμμετέχοντες δήλωσαν απόλυτα σίγουροι ότι μπορούν να λύσουν σωστά το πρόβλημα, πρόβλεψη που διαψεύστηκε από την μη επιτυχή επίλυση του προβλήματος. Από τους 20 μαθητές που δήλωσαν ότι είναι σίγουροι πως μπορούν να λύσουν σωστά το πρόβλημα, οι 15 το έλυσαν πράγματι σωστά. Οκτώ συμμετέχοντες δήλωσαν σίγουροι ή απόλυτα σίγουροι ότι δεν μπορούν να λύσουν σωστά το πρόβλημα, ωστόσο μόνο δύο από αυτούς το έλυσαν με επιτυχία.

	Πρόβλεψη (πριν από τη λύση)			**Αξιολόγηση (μετά τη λύση)**		
	N	***Επιτυχία στη λύση***	***Αποτυχία στη λύση***	**N**	***Επιτυχία στη λύση***	***Αποτυχί-α στη λύση***
Απόλυτα σίγουρος/η για τη σωστή λύση του προβλήμ.	2	0	2	4	2	2
Σίγουρος/η για τη σωστή λύση του προβλήματος	20	15	5	16	14	2
Σίγουρος/η για τη μη σωστή λύση του προβλήμ.	2	2	0	4	4	0
Απόλυτα σίγουρος/η για τη μη σωστή λύση του προβλ.	6	0	6	6	0	6

Πίνακας 2: Συχνότητα απαντήσεων στις ερωτήσεις πρόβλεψης και αξιολόγησης της λύσης του προβλήματος και επιτυχίας στη λύση

Στα ίδια σχεδόν επίπεδα κινήθηκαν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων στην ερώτηση κατά πόσο σίγουροι είναι ότι έλυσαν σωστά το πρόβλημα (ερώτηση 6 – μεταγνωστική ικανότητα της αξιολόγησης). Μόνο τέσσερις συμμετέχοντες απάντησαν ότι είναι απόλυτα σίγουροι ότι έλυσαν σωστά το πρόβλημα, εκ των οποίων οι δύο το έλυσαν λανθασμένα, ενώ από τους 16 που απάντησαν ότι είναι σίγουροι πως το έλυσαν σωστά, οι 14 το έλυσαν σωστά (βλ. Πίνακα 2). Ακόμη, οι έξι συμμετέχοντες που απάντησαν ότι είναι απόλυτα σίγουροι ότι δεν έλυσαν σωστά το πρόβλημα, πράγματι το έλυσαν λανθασμένα, ενώ οι τέσσερις που απάντησαν ότι είναι σίγουροι πως δεν έλυσαν σωστά το πρόβλημα, το έλυσαν σωστά.

Η καλή ανάγνωση του προβλήματος αποτελεί για την πλειοψηφία των μαθητών (86,7%) την πρώτη ενέργεια που θα έκαναν (ερώτηση 5 – μεταγνωστική ικανότητα του σχεδιασμού). Ακολουθεί η επιλογή κατάλληλης στρατηγικής (80%) και στην τελευταία θέση (66,7%) βρίσκεται η απόσπαση των απαραίτητων πληροφοριών για τη λύση. Αν και υπήρχαν συμμετέχοντες που ιεράρχησαν ως πρώτη ενέργεια την αναγνώριση των πληροφοριών στο πρόβλημα (33,3%), κανένας δεν δήλωσε ότι θα ξεκινούσε από την επιλογή της στρατηγικής.

Στις ερωτήσεις που εξέταζαν ποια είναι τα είδη των λαθών όταν λύνουν τέτοιου είδους προβλήματα και ποιοι είναι οι πιο σημαντικοί παράγοντες για την επιτυχή λύση προβλήματος (ερωτήσεις 7 και 8 αντίστοιχα – μεταγνωστική ικανότητα της παρακολούθησης), οι συμμετέχοντες βρέθηκαν να εστιάζουν και πάλι στην εκτέλεση υπολογισμών. Συγκεκριμένα, σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες (28 από τους 30) δήλωσαν ότι τα πιο συχνά λάθη που κάνουν όταν λύνουν τέτοιου είδους προβλήματα είναι στις αριθμητικές πράξεις (αλγόριθμοι). Αρκετοί συμμετέχοντες (18 από τους 30) υποστήριξαν ότι δεν διαβάζουν προσεκτικά το πρόβλημα που καλούνται να λύσουν. Ακόμη, οκτώ παιδιά απέδωσαν τα λάθη τους στη βιασύνη που τα χαρακτηρίζει, ενώ μονάχα δύο παιδιά αιτιολόγησαν την πιθανή αποτυχία τους στην επιλογή μη κατάλληλης στρατηγικής. Τέλος, όταν ζητήθηκε να ιεραρχήσουν τη σπουδαιότητα των παραγόντων που οδηγούν σε επιτυχή λύση προβλήματος, οι περισσότεροι συμμετέχοντες ανέδειξαν τη γνώση του πολλαπλασιασμού (16 από τους 30) ως τον πιο σημαντικό παράγοντα και το να τελειώσουν την επίλυση του προβλήματος όσο το δυνατόν πιο σύντομα (26 από τους 30) ως τον λιγότερο σημαντικό.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα, όσον αφορά στη μεταγνωστική γνώση, ενδιαφέρον παρουσιάζει η ύπαρξη συσχέτισης ανάμεσα στη δηλωτική γνώση και την επιτυχή λύση του προβλήματος: όσο πιο ενήμερα είναι τα παιδιά για τη δηλωτική τους γνώση, τόσο περισσότερο τείνουν να λύνουν με επιτυχία το πρόβλημα. Αντίθετα, τα ευρήματα που αφορούν στην υποθετική και διαδικαστική γνώση των παιδιών, με επικρατέστερα στην πρώτη την απόδοση της δυσκολίας του προβλήματος στη διαφορετική μορφή των αριθμών και στη δεύτερη το βήμα της εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων κατά την επίλυση, αναδεικνύουν ότι τα παιδιά δεν γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τις γνώσεις που κατέχουν, γεγονός που εξηγεί τη συχνή αποτυχία των παιδιών κατά την ενασχόλησή τους με τέτοιου είδους μαθησιακά έργα, όπως έχει φανεί και σε προηγούμενες έρευνες (Kolovou et al., 2009).

Αναφορικά με τη ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας, οι αντίστοιχες μεταγνωστικές ικανότητες των παιδιών φαίνεται να βρίσκονται σε χαμηλό επίπεδο, παρά το γεγονός ότι τα περισσότερα έλυσαν σωστά το μη-τυποποιημένο πρόβλημα. Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ότι η επιλογή στρατηγικής κατά την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης (μεταγνωστική ικανότητα του σχεδιασμού) δεν αναφέρθηκε από κανένα παιδί, ενώ παρουσιάζεται αφενός αναντιστοιχία μεταξύ των μεταγνωστικών ικανοτήτων πρόβλεψης-αξιολόγησης και βαθμού επιτυχίας στη λύση του προβλήματος, και αφετέρου υπερβολική έμφαση στις αριθμητικές πράξεις κατά την αξιολόγηση των μεταγνωστικών ικανοτήτων της παρακολούθησης. Οι διαπιστώσεις αυτές συνάδουν με ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Vissariou, & Desli, in press; Wilson, & Clarke, 2004), σύμφωνα με τις οποίες η επιτυχία σε ένα μαθηματικό πρόβλημα θεωρείται κατά βάση γνωστική διαδικασία και, ως εκ τούτου, η χαμηλή χρήση μεταγνωστικών στρατηγικών κατά την επίλυση προβλήματος δεν οδηγεί απαραίτητα στην αποτυχία.

Τα παραπάνω ευρήματα αναδεικνύουν το χαμηλό μεταγνωστικό επίπεδο των μαθητών στο σύνολο των πτυχών που μελετώνται, με τις ικανότητες της παρακολούθησης να βρίσκονται στην τελευταία θέση. Η εν λόγω ανεπάρκεια στις ικανότητες της μεταγνώσης ενισχύει τη θέση ότι η πραγμάτωση μεταγνωστικών διαδικασιών δεν μπορεί να θεωρείται δεδομένη χωρίς την ανάλογη ανατροφοδότηση ή εκπαίδευση (Nietfield, Cao, & Osborne, 2005). Μάλιστα, η ανάγκη μεταγνωστικών παρεμβάσεων στη διδασκαλία επίλυσης προβλήματος, τόσο στη μεταγνωστική γνώση όσο και στη ρύθμιση της γνωστικής λειτουργίας, καθίσταται πιο επιτακτική, αν λάβει κανείς υπόψη και την αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο αυτών βασικών συστατικών της μεταγνώσης, η οποία διαπιστώνεται στην παρούσα έρευνα, αλλά και σε προηγούμενες (Vissariou, & Desli, in press; Βισσαρίου, & Δεσλή, 2019; Magno, 2009; Mevarech et al., 2010). Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώνουν ότι η σχέση ανάμεσα στο «γνωρίζω» (knowing) και στο «πράττω» (doing) είναι ουσιώδης για την αποτελεσματική επίλυση προβλήματος και καθορίζει εάν ένας γνωστικός στόχος έχει επιτευχθεί.

Καθώς η αξιολόγηση της μεταγνώσης αποτελεί πολυπαραγοντικό φαινόμενο, η χρήση μετρήσεων αυτό-αναφοράς αντιμετωπίζεται με επιφύλαξη (Hargrove, & Nietfeld, 2015). Ως εκ τούτου, τα ευρήματα της παρούσας εργασίας οδηγούν σε περαιτέρω προβληματισμό και αναδεικνύουν την ανάγκη για έρευνα με μεγαλύτερα δείγματα, με αξιοποίηση ενός συνδυασμού μεθόδων και εργαλείων για τη μέτρηση της μεταγνώσης των παιδιών αλλά και τη βελτίωση των μεταγνωστικών ικανοτήτων τους κατά την επίλυση προβλήματος.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η έρευνα αυτή υλοποιήθηκε με την οικονομική υποστήριξη της Γενικής Γραμματείας Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ) και του Ελληνικού Ιδρύματος Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ.) (Κωδικός Υποτροφίας: 384).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akturk, A.O., & Sahin, I. (2011). Literature review on metacognition and its measurement. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15*, 3731–3736.

Βισσαρίου, Α., & Δεσλή, Δ. (2019). Αξιολόγηση της μεταγνώσης μαθητών Στ' τάξης στα Μαθηματικά. Στο Φ. Γούσιας (Επιμ.), *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου του Νέου Παιδαγωγού με τίτλο: «Για τον παιδαγωγό του σήμερα»* (σελ. 795-802). Αθήνα.

Desoete, A. (2008). Multi-method assessment of metacognitive skills in elementary school children: how you test is what you get. *Metacognition and Learning, 3*(3), 189–206.

Flavell, J.H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906–911.

Flavell, J.H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. In F.E. Weinert, & R.H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding* (pp. 21–29). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C.K., & Alvarez, L. (1991). Metacognition and problem solving. *Arithmetic Teacher, 38*(4), 38-40.

Friedman, T.L. (2005). *The world is flat: A brief history of the twenty-first century.* New York: Farrar, Straus and Giroux.

Gascoine, L., Higgins, S., & Wall, K. (2017). The assessment of metacognition in children aged 4–16 years: a systematic review. *Review of Education*, *5*(1), 3-57.

Hargrove, R.A., & Nietfeld, J.L. (2015). The impact of metacognitive instruction on creative problem solving. *The Journal of Experimental Education*, *83*(3), 291-318.

Kolovou, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks - A needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(2), 29–66.

Kuzle, A. (2018). Assessing metacognition of grade 2 and grade 4 students using an adaptation of multi-method interview approach during mathematics problem-solving. *Mathematics Education Research Journal, 30*(2), 185–207.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). Greenwich: IAP.

Magno, C. (2009). Assessing grade school students' metacognition in solving mathematical problem. *The Assessment Handbook, 2*, 1–22, PEMEA.

Mevarech, Z.R., Terkieltaub, S., Vinberger, T., & Nevet, V. (2010). The effects of meta-cognitive instruction on third and sixth graders solving word problems. *ZDM*, *42*(2), 195-203.

Nietfeld, J.L., Cao, L., & Osborne, J.W. (2005). Metacognitive monitoring accuracy and student performance in the postsecondary classroom. *The Journal of Experimental Educational*, *74*(1), 7–28.

Panaoura, A., Philippou, G., & Christou, C. (2004). Young pupils' metacognitive ability in mathematics. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Thematic Group III). Bellaria, Italy: University of Pisa and ERME.

Polya, G. (1985). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

van de Walle, J.A., Lovin, L.H., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. Αθήνα: Gutenberg.

Vissariou, A., & Desli, D. (in press). Metacognition in non-routine problem solving process of Year 6 children. In *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 11*. The Netherlands, Utrecht: Utrecht University.

Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modeling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal, 16*(2), 25–48.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΝΑΤΡΕΠΤΙΚΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΝΟΗΣΗΣ ΟΤΙ Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕΓΑΛΩΝΕΙ

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου, Αργυρώ Προκόπου

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

kchristou@uowm.gr, hai_argyro@yahoo.gr

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη εξετάζει την αποτελεσματικότητα ενός ανατρεπτικού κειμένου στην αντιμετώπιση της παρανόησης ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αρχικούς όρους της πράξης. Ανατρεπτικό λέγεται το κείμενο που αρχικά αναδεικνύει και αμέσως μετά αντικρούει μία συγκεκριμένη παρανόηση. Συμμετείχαν 87 μαθητές Στ΄ ταξης που έλαβαν διαγνωστικά τεστ σε Προ-έλεγχο, Μετά-έλεγχο και Έλεγχο Διατήρησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η παρέμβαση βοήθησε τους μαθητές της πειραματικής ομάδας (51 μαθητές) να απαλλαγούν από τη συγκεκριμένη παρανόηση ακόμα και μακροπρόθεσμα. Επίσης, σημειώθηκε μεταφορά της αποτεθείσας γνώσης στην αντιμετώπιση της παρανόησης ότι η διαίρεση πάντα μικραίνει.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανόηση της έννοιας και των ιδιοτήτων των ρητών αριθμών είναι απαραίτητη τόσο στην καθημερινή ζωή του ατόμου, όσο και στις σχολικές του επιδόσεις. Ωστόσο, η κατανόηση των ρητών δημιουργεί συχνά έντονες δυσκολίες και λάθη που έχουν ως αποτέλεσμα και χαμηλές σχολικές επιδόσεις. Κάποιες από τις δυσκολίες και τα λάθη με τους ρητούς φαίνεται να οφείλονται στην τάση των μαθητών να εφαρμόζουν στους ρητούς την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς. Η συγκεκριμένη τάση των μαθητών συχνά αποκαλείται *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* (Ni και Zhou, 2005).

Τα λάθη που προκύπτουν λόγω της προκατάληψης του φυσικού αριθμού οφείλονται στις διαφορετικές ιδιότητες που έχουν αυτοί οι αριθμοί μεταξύ τους, που εμφανίζονται ειδικά στον τρόπο με τον οποίο διατάσσονται οι ρητοί σε σχέση με τους φυσικούς, στην πυκνή τους δόμηση και στα αποτελέσματα των πράξεων με αυτούς (Vamvakoussi, Van Dooren, και Verschaffel, 2013). Για παράδειγμα, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι ανάμεσα στο 0,5 και το 0,6 δεν υπάρχει άλλος ρητός αριθμός κι ότι το 2,367 είναι μεγαλύτερο από το 2,6 επειδή έχει περισσότερα ψηφία (Ni και Zhou, 2005· Vamvakoussi, Van Dooren, κ.ά., 2013)

Όσον αφορά τα αποτελέσματα των πράξεων με ρητούς, στο οποίο εστιάζει η παρούσα μελέτη, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αρχικούς όρους της πράξης, ενώ η διαίρεση πάντα τους μικραίνει. Για παράδειγμα, από αποτελέσματα παλαιότερων μελετών φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών Γυμνασίου θεωρούσε, λανθασμένα, ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 26,3×0,4 είναι μικρότερο από 26,3 (Greer, 1987) ενώ πολλοί μαθητές και μεγαλύτερων ηλικιών συχνά απαντούν ότι 0,4×0,2=0.8 και όχι 0,08, που είναι συμβατό με την τάση τους να θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός πρέπει να δίνει αποτέλεσμα μεγαλύτερο των αρχικών όρων.

Σύμφωνα με τον Fischbein, που μαζί με τους συνεργάτες του ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν συστηματικά και ανέδειξαν αυτό το φαινόμενο εστιάζοντας στον τρόπο που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τα λεκτικά προβλήματα, οι μαθητές διαθέτουν διαισθητικά μοντέλα για κάθε αριθμητική πράξη και καθένα από αυτά τα μοντέλα συνδέει κάθε πράξη με ορισμένο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίχθηκε ότι η πρόσθεση είναι συνδεδεμένη με το μοντέλο της συνένωσης συνόλων, η αφαίρεση με το μοντέλο του διαχωρισμού, ο πολλαπλασιασμός με το μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και η διαίρεση με το μοντέλο της ίσης μοιρασιάς (Fischbein, Deri, Nello, και Marino, 1985).

Μέσα από μία αναπτυξιακή προσέγγιση στο φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, που ενστερνίζεται και αυτή η μελέτη, έχει υποστηριχθεί ότι τα άδηλα αυτά μοντέλα των μαθητών είναι συμβατά με την αρχική τους γνώση και τις εμπειρίες τους με πράξεις με φυσικούς αριθμούς (Christou, 2015· Vamvakoussi, Van Dooren, κ.ά., 2013). Είναι εύλογο, άλλωστε, να θεωρηθεί ότι η παρανόηση των μαθητών ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αρχικούς όρους της πράξης κι ότι η διαίρεση τους μικραίνει οφείλεται στο φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, καθώς ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς έχει πράγματι ως αποτέλεσμα αριθμό μεγαλύτερο των αρχικών παραγόντων στην πρώτη περίπτωση και μικρότερους του διαιρετέου στη δεύτερη. Αυτό όμως δεν συμβαίνει στις πράξεις με ρητούς, αφού τα αποτελέσματα των πράξεων εξαρτώνται από τους αριθμούς που συμμετέχουν σε αυτή. Πιο συγκεκριμένα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση με αριθμό μικρότερο του 1 δίνει αποτέλεσμα μικρότερο του άλλου παράγοντα της πράξης στον πολλαπλασιασμό και μεγαλύτερο στη διαίρεση (π.χ., 0,8×0,2=0,16· επίσης, 0,8:0,2=4).

Πρόσφατες μελέτες αυτού του φαινομένου έδειξαν ότι η παρανόηση αυτή με τα αποτελέσματα των πράξεων παραμένει ισχυρή σε όλες τις τάξεις του σχολείου και είναι ακόμη εμφανής και σε ενήλικες (Vamvakoussi, Van Dooren, κ.ά., 2013). Παρόλα αυτά, ελάχιστες διδακτικές παρεμβάσεις έχουν υπάρξει στη βιβλιογραφία αυτού του φαινομένου, που να στοχεύουν στην αντιμετώπισή του. Εξαίρεση αποτελούν μια διδακτική παρέμβαση με χρήση παιχνιδιού στο οποίο ζητούνταν από τους μαθητές να εκτελέσουν μια σειρά από αριθμητικές πράξεις για να κατακτήσουν έναν στόχο (Onslow, 1990). Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτέλεσμα των πράξεων διαψεύδονταν από τις πράξεις με συγκεκριμένους ρητούς αριθμούς, με αποτέλεσμα τη μερική αλλαγή των εν λόγω παρανοήσεων. Στην ίδια λογική της ανάδειξης και διάψευσης των παρανοήσεων των μαθητών κινήθηκε και μια πρόσφατη παρέμβαση με χρήση *λανθασμένων παραδειγμάτων,* με παρόμοια αποτελέσματα (Isotani κ.ά., 2011). Στην παρέμβαση αυτή δίνονταν στους μαθητές παραδείγματα συλλογισμού πάνω στις πράξεις, που συχνά ήταν λανθασμένα, με λάθη που αφορούσαν την τάση των να συνδέεται ο πολ/σμός και η διαίρεση με συγκεκριμένα αποτελέσματα, ανεξάρτητα από τους αριθμούς που συμμετέχουν στην πράξη.

Η βασική λογική στο σχεδιασμό αυτών των παρεμβάσεων ήταν η πρόκληση *γνωστικής σύγκρουσης* στους μαθητές που θα συμβεί ως αποτέλεσμα της διάψευσης των προβλέψεών τους για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων· προβλέψεων που γίνονται στη βάση των λανθασμένων πεποιθήσεων για τα αποτελέσματα αυτά. Η πρόκληση γνωστική σύγκρουσης είχε άλλωστε προταθεί τόσο από τον Fischbein για την διόρθωση της εν λόγω παρανόησης (Fischbein, κ.ά., 1985), όσο κι από ερευνητές που μελετούν τη μάθηση που προϋποθέτει αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης (Vamvakoussi, Vosniadou, και Van Dooren, 2013). Στην παρούσα μελέτη εξετάζεται η εφαρμογή μιας διδακτικής παρέμβασης που στοχεύει στην αντιμετώπιση της παραπάνω παρανόησης, όπου επιδιώκεται να προκληθεί γνωστική σύγκρουση μέσα από την ανάγνωση ενός ανατρεπτικού κειμένου που εστιάζει στην παρανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει (Christou και Prokopou, in press).

Τα ανατρεπτικά κείμενα

Ανατρεπτικά (refutational) ονομάζονται τα κείμενα εκείνα που έχουν στόχο να προσφέρουν τα απαραίτητα επιχειρήματα που θα ανατρέψουν μια λανθασμένη αρχική ιδέα και θα την αντικαταστήσουν με μια σωστή. Τόσο η λανθασμένη όσο και η σωστή ιδέα παρουσιάζονται περιγραφικά και συχνά γίνεται χρήση παραδειγμάτων. Σύμφωνα με τη βασική δομή του ανατρεπτικού κειμένου, αρχικά δηλώνεται ρητά η λανθασμένη ιδέα και αμέσως μετά αυτή αντικρούεται με την παρουσίαση σειράς επιχειρημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η επιστημονικά/μαθηματικά ορθή, που συνοδεύεται από μία επιχειρηματολογία για την εγκυρότητά της (Diakidoy, Mouskounti, και Ioannides, 2011· Tippett, 2010). Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι η χρήση των ανατρεπτικών κειμένων βοηθά τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους με έννοιες των φυσικών επιστημών και να περιορίσουν τα λάθη τους που οφείλονται σε αυτές, συχνά με μακροπρόθεσμα αποτελέσματα (Tippett, 2010). Μάλιστα, από τέτοιες παρεμβάσεις φαίνεται ότι ωφελήθηκαν και μαθητές χαμηλών αρχικών επιδόσεων κι όχι μόνο οι μαθητές που είχαν υψηλές επιδόσεις πριν την παρέμβαση (Diakidoy κ.ά., 2011). Πρόσφατα έγιναν οι πρώτες ερευνητικές προσπάθειες με χρήση της μεθοδολογίας της ανατρεπτικής επιχειρηματολογίας σε διδακτικές παρεμβάσεις που εστίαζαν σε παρανοήσεις στα μαθηματικά με ελπιδοφόρα αποτελέσματα (Lem, Onghena, Verschaffel, και Van Dooren, 2017).

Η παρούσα μελέτη

Στην παρούσα μελέτη εξετάστηκε η υπόθεση ότι μια διδακτική παρέμβαση με χρήση ανατρεπτικού κειμένου θα μπορούσε να λειτουργήσει βοηθητικά στο ξεπέρασμα της τάσης των μαθητών να θεωρούν οι ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αρχικούς όρους της πράξης. Από αυτή την υπόθεση προέκυψαν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Σε τι βαθμό επιτυγχάνεται η απαλλαγή από την παρανόηση ότι *ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει* μετά από μια παρέμβαση με χρήση ανατρεπτικού κειμένου;
- Η γνώση που αποκτήθηκε από ένα ανατρεπτικό κείμενο για την παρανόηση που αφορά τον πολλαπλασιασμό θα μπορούσε να μεταφερθεί *(transfer)* και για την απαλλαγή από την παρανόηση ότι η *διαίρεση μικραίνει*, που αποτελεί μία παρανόηση άμεσα συσχετιζόμενη με την προηγούμενη;
- Από τη διδακτική παρέμβαση ωφελούνται και οι μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση πριν την παρέμβαση;

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 87 μαθητές Στ' Δημοτικού (11-12 ετών), από τους οποίους 39 δήλωσαν κορίτσια. Το ανατρεπτικό κείμενο έλαβαν 51 μαθητές της πειραματικής ομάδας ενώ οι υπόλοιποι 36 μαθητές παρακολούθησαν το προγραμματισμένο μάθημα της τάξης τους. Όλοι οι συμμετέχοντες έλαβαν διαγνωστικά τεστ πριν (Προ-έλεγχος), αμέσως μετά (Μετά-έλεγχος), και ένα μήνα μετά την παρέμβαση που έγινε στην πειραματική ομάδα (Έλεγχος Διατήρησης).

Υλικά

Τα διαγνωστικά τεστ που δόθηκαν στους μαθητές βασίστηκαν σε ερωτηματολόγια που είχαν χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες μελέτες για τη μελέτη της παρανόησης ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει (Christou, 2015). Το πρώτο μέρος των ερωτηματολογίων, που παρουσιάζεται στην παρούσα εισήγηση, περιελάβανε έργα με 28 ισότητες που παρουσίαζαν πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ανάμεσα σε δοσμένους και αριθμούς που λείπουν, με το αποτέλεσμα επίσης δοσμένο (π.χ. 6:_=14). Από τους μαθητές ζητούνταν να κρίνουν αν είναι δυνατόν να βρεθεί αριθμός τέτοιος που αν αντικατασταθεί στον αριθμό που λείπει, η πράξη θα δώσει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα, χωρίς απαραίτητα να βρεθεί ο συγκεκριμένος αριθμός που λείπει. Συγκεκριμένα, έπρεπε μόνο να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο δοσμένες εναλλακτικές απαντήσεις (γίνεται/δεν γίνεται) την απάντηση που θεωρούσαν σωστή. Τα έργα διακρίνονταν σε *συνεπή* (congruent) και *μη-συνεπή* (incogruent) με ίδια αναλογία. Τα συνεπή έργα ήταν συμβατά με τις διαισθητικές αντιλήψεις ότι ο πολλαπλασιασμό πάντα μεγαλώνει (π.χ. 3×_=8), ενώ η διαίρεση μικραίνει (π.χ. 8:_ = 5). Αντίθετα, τα μη-συνεπή έργα ήταν έργα στα οποία οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για το αποτέλεσμα των πράξεων θα οδηγούσαν σε λανθασμένες απαντήσεις (π.χ. 8×_=3· 6:_=14).

Θα πρέπει να σημειωθεί πως οι μαθητές του δείγματος δεν είχαν ακόμη μάθει πράξεις με αρνητικούς αριθμούς κι έτσι δεν είχε ακόμη παραβιαστεί η αρχική πεποίθησή τους ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση μεγαλώνει και μικραίνει τους αριθμούς αντίστοιχα. Έτσι, σε τέσσερα έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης που περιλαμβάνονταν στο ερωτηματολόγιο (π.χ., 8+_=3) η σωστή απάντηση για τους μαθητές αυτής της ηλικίας ήταν ότι *δεν γίνεται*, κι έτσι τα έργα αυτά λειτουργούσαν ως *εξουδετερωτές* (buffers) της συνεχόμενης απάντησης *γίνεται* που είναι και η μόνη σωστή στα υπόλοιπα έργα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Το ανατρεπτικό κείμενο

Το ανατρεπτικό κείμενο ήταν σύντομο (167 λέξεις), γραμμένο σε απλή γλώσσα, εστίαζε αποκλειστικά στην παρανόηση που αφορά τον πολλαπλασιασμό και είχε τίτλο «ο πολλαπλασιασμός δεν μεγαλώνει πάντα τους αριθμούς που πολλαπλασιάζονται». Η δομή και το περιεχόμενό του ακολουθούσε τις προτάσεις της βιβλιογραφίας του συγκεκριμένου πεδίου που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή της παρούσας εισήγησης. Συγκεκριμένα, στο κείμενο αρχικά δηλώθηκε ρητά ότι συχνά θεωρείται ότι πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αρχικούς όρους της πράξης. Στη συνέχεια υποστηρίχθηκε ότι αυτό είναι πράγματι αληθές στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς, αλλά όχι απαραίτητα στην περίπτωση πολλαπλασιασμού ανάμεσα σε ρητούς αριθμούς, όπως για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό με αριθμούς μικρότερους του 1. Τέλος, δόθηκαν παραδείγματα με δεκαδικούς και κλάσματα όπου το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ήταν μικρότερο των αρχικών παραγόντων, με σχόλια που τραβούσαν την προσοχή των μαθητών στη σύγκριση του μεγέθους των αποτελεσμάτων με τους αρχικούς όρους της πράξης· π.χ.: 8*1/2=4 όπου το 4 είναι μικρότερο του 8, γιατί πολλαπλασιάστηκε με το ½, που είναι μικρότερο του 1. Το κείμενο ακολουθούσαν τέσσερις ερωτήσεις κατανόησης οι οποίες προέτρεπαν τους μαθητές να το μελετήσουν προσεκτικά. Το κείμενο δόθηκε ατομικά σε κάθε μαθητή της πειραματικής ομάδας τυπωμένο σε κόλλα Α4.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να εξεταστεί το βασικό ερευνητικό ερώτημα που αφορά την επίδραση του ανατρεπτικού κειμένου στην αντιμετώπιση της παρανόησης ότι ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει τους αρχικούς όρους υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι των επιδόσεων κάθε ομάδας ανά κατηγορία έργου. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι επιδόσεις στα μη-συνεπή έργα πολ/σμού. Έλεγχος ισότητας της διακύμανσης

(Levene's test) έδειξε ότι οι δύο ομάδες είναι συγκρίσιμες με βάση τις επιδόσεις τους στα μη-συνεπή έργα πολ/σμού στον Προ-έλεγχο (p>0,05). Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, που έλαβαν το ανατρεπτικό κείμενο, έκαναν στατιστικώς σημαντικά λιγότερα λάθη στα μη-συνεπή έργα πολλαπλασιασμού στον Μετά-έλεγχο, σε σχέση με τον Προ-έλεγχο $t(50)=2{,}006$, p=0,05. Επίσης, οι επιδόσεις τους διατηρήθηκαν ένα μήνα μετά την παρέμβαση, καθώς εμφάνισαν στατιστικώς σημαντικά λιγότερα λάθη στον Έλεγχο Διατήρησης σε σχέση με τον Προ-έλεγχο $t(49)=3{,}758$, p<0,001.

		Μ.Ο.	**Τ.Σ.**	**Min**	**Max**
Πειραματική Ομάδα	Προ-έλεγχος	0,09	0,03	0	1
	Μετά-έλεγχος	0,16	0,04	0	1
	Έλεγχος Διατήρησης	0,27	0,05	0	1
Ομάδα Ελέγχου	Προ-έλεγχος	0,06	0,02	0	0,4
	Μετά-έλεγχος	0,10	0,04	0	1
	Έλεγχος Διατήρησης	0,13	0,04	0	1

Πίνακας 1. Μέσες επιδόσεις στα μη-συνεπή έργα πολλαπλασιασμού

Αντίθετα, η ομάδα ελέγχου δεν παρουσίασε στατιστικά σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις της στα μη-συνεπή έργα πολλαπλασιασμού του Μετά-ελέγχου σε σχέση με τον Προ-έλεγχο $t(35)=0{,}924$, p=0,362, ούτε στον Έλεγχο Διατήρησης σε σχέση με τον Προέλεγχο $t(35)=1{,}528$, p=0,136.

Για την εξέταση του ερευνητικού ερωτήματος που αφορά τη μεταφορά γνώσης στην αντιμετώπιση της παρανόησης ότι η διαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς, υπολογίστηκαν οι μέσες επιδόσεις των μαθητών στα μη-συνεπή έργα διαίρεσης σε κάθε φάση ελέγχου και παρουσιάζονται στον Πίνακα 2. Έλεγχος ισότητας της διακύμανσης (Levene's test) έδειξε και πάλι ότι οι δύο ομάδες είναι συγκρίσιμες με βάση τις επιδόσεις τους στα μη-συνεπή έργα διαίρεσης στον Προ-έλεγχο (p>0,05). Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν καλύτερες επιδόσεις σε αυτά τα έργα στον Μετά-έλεγχο σε σχέση με τον Προ-έλεγχο αν και οι διαφορές αυτές ήταν οριακά μη στατιστικά σημαντικές $t(50)=1{,}863$, p=0,068. Αντίθετα, οι επιδόσεις αυτής της ομάδας ήταν στατιστικώς σημαντικά καλύτερες στον Έλεγχο Διατήρησης σε σχέση με το Προ-έλεγχο $t(49)=3{,}321$, p<0,05.

		Μ.Ο.	**Τ.Σ.**	**Min**	**Max**
Πειραματική Ομάδα	Προ-έλεγχος	0,13	0,04	0	1
	Μετά-έλεγχος	0,20	0,04	0	1
	Έλεγχος Διατήρησης	0,28	0,04	0	1
Ομάδα Ελέγχου	Προ-έλεγχος	0,19	0,05	0	1
	Μετά-έλεγχος	0,20	0,06	0	1
	Έλεγχος Διατήρησης	0,18	0,05	0	1

Πίνακας 2. Μέσες επιδόσεις στα μη-συνεπή έργα διαίρεσης

Από την άλλη μεριά, η ομάδα ελέγχου δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις της στα μη-συνεπή έργα διαίρεσης ούτε ανάμεσα σε Μετά-έλεγχο και Προ-έλεγχο $t(35)=0{,}595$, p=0,556, αλλά ούτε και ανάμεσα σε Έλεγχο Διατήρησης και Προ-έλεγχο $t(35)=0{,}095$, p=0,925.

Για να εξεταστεί εάν από την διδακτική παρέμβαση ωφελήθηκαν και οι μαθητές χαμηλότερων επιδόσεων, η πειραματική ομάδα χωρίστηκε σε δύο υπο-ομάδες με βάση τις συνολικές τους επιδόσεις τους στον Προέλεγχο. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές που είχαν επίδοση χαμηλότερη από το ήμισυ της διάμεσου της συνολικής επίδοσης της πειραματική ομάδας στον Προ-έλεγχο (31 μαθητές) χαρακτηρίστηκαν ως μαθητές *χαμηλής αρχικής επίδοσης*, ενώ οι υπόλοιποι 20 μαθητές χαρακτηρίστηκαν ως μαθητές *υψηλής αρχικής επίδοσης*.

Η ομάδα χαμηλής αρχικής επίδοσης εμφάνισε στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα μη-συμβατά έργα πολλαπλασιασμού στον Μετά-έλεγχο (Μ.Ο.=0,14, Τ.Σ.=0,05) σε σχέση με τον Προ-έλεγχο (Μ.Ο.= 0,01, Τ.Σ.= 0,01), $t(30)=2{,}742$, p=0,010· καθώς επίσης και στον έλεγχο Διατήρησης (Μ.Ο.=0,13, Τ.Σ.=0,05) σε σχέση με τον Προ-έλεγχο, $t(29)=2{,}523$, p=0,017. Όσον αφορά την ικανότητά τους να μεταφέρουν τη γνώση που απέκτησαν από την παρανόηση για τον πολλαπλασιασμό στη διόρθωση της παρανόησης που αφορά στη διαίρεση, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές χαμηλής αρχικής επίδοσης έκαναν στατιστικώς σημαντικά λιγότερα λάθη στα μη-συνεπή έργα διαίρεσης στον Μετά-έλεγχο (Μ.Ο.= 0,14, Τ.Σ.= 0,25) σε σχέση με τον Προ-έλεγχο (Μ.Ο.= 0,02, Τ.Σ.=0,02), $t(30)=2{,}683$, p=0,012, όπως επίσης και στον Έλεγχο Διατήρησης (Μ.Ο.= 0,20, Τ.Σ.=0,05) σε σχέση με τον Μετά-έλεγχο, $t(29)=3{,}372$, p=0,002. Ανάλογα ήταν τα αποτελέσματα που αφορούν τους μαθητές υψηλής αρχικής επίδοσης (βλ. Christou και Prokopou, in press).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη είχε στόχο να εξετάσει κατά πόσο μία σύντομη διδακτική παρέμβαση, που αξιοποιούσε ένα ανατρεπτικό κείμενο που εστίαζε στην παρανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αρχικούς όρους της πράξης, θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να απαλλαγούν από τη συγκεκριμένη παρανόηση. Επιπλέον, διερευνήθηκε κατά πόσο οι μαθητές θα μεταφέρουν τη αποτεθείσα γνώση για τα αποτελέσματα του πολ/σμού και στην αντιμετώπιση της παρανόησης ότι η διαίρεση δίνει πάντα αποτέλεσμα αριθμό μικρότερο του διαιρετέου.

Τα αποτελέσματα έδειξαν πως το ανατρεπτικό κείμενο βοήθησε τους μαθητές της πειραματικής ομάδας να απαλλαγούν ως ένα βαθμό από τις λανθασμένες πεποιθήσεις τους για τα αποτελέσματα του πολλαπλασιασμού, καθώς έδωσαν στατιστικώς σημαντικά λιγότερες λανθασμένες απαντήσεις λόγω της συγκεκριμένης παρανόησης στα έργα που τους δόθηκαν αμέσως μετά τη διδακτική παρέμβαση. Η γνώση που αποκτήθηκε, μάλιστα, δε φαίνεται να ήταν επιφανειακή, καθώς όχι μόνο διατηρήθηκε ένα μήνα μετά την εφαρμογή της παρέμβασης, αλλά μεταφέρθηκε και στη αντιμετώπιση της παρανόησης ότι η διαίρεση έχει ως αποτέλεσμα αριθμό πάντοτε μικρότερο του διαιρετέου της πράξης. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα έδειξαν στατιστικώς σημαντικά λιγότερα λάθη που οφείλονται στην παρανόηση που αφορά τον πολλαπλασιασμό στον έλεγχο διατήρησης, ένα μήνα μετά την παρέμβαση. Επίσης, οι μαθητές της πειραματική ομάδας έδειξαν καλύτερες επιδόσεις στα έργα που μετρούσαν την παρανόηση που αφορά τη διαίρεση, τόσο αμέσως μετά την παρέμβαση σε σχέση με πριν, όσο και ένα μήνα μετά την παρέμβαση, όπου τα αποτελέσματα ήταν στατιστικώς σημαντικά. Αντίθετα, οι μαθητές της ομάδας ελέγχου που δεν έλαβαν το ανατρεπτικό κείμενο, δεν εμφάνισαν σημαντικές αλλαγές στις απαντήσεις τους ανάμεσα στους ελέγχους και συνέχισαν να κάνουν λάθη στα έργα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης λόγω των συγκεκριμένων παρανοήσεων. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν αυτά προηγούμενων ερευνών που αξιοποίησαν την χρήση ανατρεπτικού κειμένου για την αντιμετώπιση παρανοήσεων στις φυσικές επιστήμες και στα μαθηματικά (Diakidoy κ.ά., 2011· Lem κ.ά, 2017· Tippett, 2010).

Παρόλα αυτά, συνολικά τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης θα χαρακτηρίζονταν ως μετριοπαθή, καθώς οι μέσες επιδόσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας στους ελέγχους που ακολούθησαν τη διδακτική παρέμβαση είναι τόσο χαμηλές που δείχνουν ότι ακόμη και η παρανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει, στην οποία είχε επικεντρωθεί το ανατρεπτικό κείμενο, όχι μόνο δεν εξαλείφθηκε, αλλά παρέμεινε πολύ ισχυρή. Αυτό το εύρημα δείχνει ότι η συγκεκριμένη παρανόηση δεν είναι ένα απλό λάθος που κάνουν οι μαθητές, λόγω, ίσως, κάποιας απροσεξίας τους. Αντίθετα, φαίνεται να αποτελεί συνέπεια των πεποιθήσεών τους για τα αποτελέσματα των πράξεων που έχουν τις ρίζες τους στην προϋπάρχουσα γνώση τους για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν την προσέγγιση ότι οι εν λόγω παρανοήσεις αποτελούν συνέπεια του φαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, που οφείλεται στην καλά εδραιωμένη προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τους αριθμούς, που είναι δομημένη γύρω από τους φυσικούς αριθμούς (Christou, 2015· Vamvakoussi, Vosniadou, κ.ά., 2013). Μέσα από μια τέτοια προσέγγιση υποστηρίζεται ότι για να καταφέρουν οι μαθητές να απαλλαγούν από τέτοιες παρανοήσεις, θα πρέπει να κατασκευάσουν μια κατανόηση για τον αριθμό πέραν από την έννοια του φυσικού αριθμού, που να είναι πιο κοντά στη μαθηματική έννοια του ρητού και του πραγματικού αριθμού. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να καταφέρουν να αναδιοργανώσουν θεμελιωδώς την αρχική τους γνώση για τους αριθμούς, που είχε χτιστεί γύρω από τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (Vamvakoussi, Vosniadou, κ.ά., 2013).

Κείμενα σαν το ανατρεπτικό κείμενο που γράφτηκε και εφαρμόστηκε στην παρούσα διδακτική παρέμβαση θα μπορούσαν να αποτελέσουν αρωγό στην προσπάθεια αυτή των μαθητών, που αναμένεται να είναι χρονοβόρα και δύσκολη. Το γεγονός ότι, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης, μία τόσο σύντομη διδακτική παρέμβαση είχε τόσο καλά αποτελέσματα όσον αφορά την αντιμετώπιση των συγκεκριμένων παρανοήσεων, τα οποία μάλιστα διατηρήθηκαν κι ένα μήνα μετά την παρέμβαση και αφορούσαν και τους μαθητές με χαμηλές αρχικές επιδόσεις, μας επιτρέπει να προτείνουμε τα ανατρεπτικά κείμενα ως εργαλεία στα χέρια του εκπαιδευτικού. Τέτοια κείμενα θα μπορούσαν εύκολα να ενταχθούν στα σχολικά βιβλία παράλληλα με τα παραδοσιακά κείμενα που παρουσιάζουν τις μαθηματικές έννοιες στους μαθητές. Επίσης, θα μπορούσαν να εμπλουτίσουν περιβάλλοντα μάθησης που στοχεύουν στην διδασκαλία των ρητών αριθμών με κατανόηση. Για ακόμα καλύτερα αποτελέσματα από αυτά της παρούσας μελέτης, τα περιβάλλοντα αυτά θα πρέπει να κάνουν χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων με νόημα για τους μαθητές. Επίσης θα πρέπει να παρουσιάζουν στους μαθητές και άλλα μοντέλα για τον πολλαπλασιασμό, πέραν από το μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης που είναι το κυρίαρχο μοντέλο για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού στο σχολείο και που, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, ενισχύει την παρανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το μοντέλο του εμβαδού επιφάνειας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 747-758.

Christou, K. P., και Prokopou, A. (in press). Using refutational text to correct the Multiplication Makes Bigger misconception. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair*.

Diakidoy, I. A. N., Mouskounti, T., και Ioannides, C. (2011). Comprehension and learning from refutation and expository texts. *Reading Research Quarterly, 46*(1), 22-38.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., και Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 37-45.

Isotani, S., Adams, D., Mayer, R. E., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., και McLaren, B. M. (2011). Can erroneous examples help middle-school students learn decimals? *European Conference on Technology Enhanced Learning* (σελ. 181-195). Springer, Berlin, Heidelberg.

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., και Van Dooren, W. (2017). Using refutational text in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 49*(4), 509-518.

Ni, Y. J., και Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Onslow, B. (1990). Overcoming conceptual obstacles: The qualified use of a game. *School Science and Mathematics, 90*(7), 581-592.

Tippett, C. D. (2010). Refutation text in science education: A review of two decades of research. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(6), 951-970.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., και Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educational studies in mathematics, 82*(2), 323-330.

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S., και Van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. Στο S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (2nd ed., σελ. 305-321). New York: Routledge.

Η ΦΑΝΤΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Παναγιώτα Ηρακλέους, Κωνσταντίνος Χρίστου, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

Πανεπιστήμιο Κύπρου

irakleous.panayiota@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί να εξετάσει εμπειρικά τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά. Στην έρευνα, έλαβαν μέρος 217 μαθητές Στ' τάξης από δημόσια δημοτικά σχολεία της Κύπρου, στους οποίους χορηγήθηκε ένα δοκίμιο μέτρησης της φαντασίας στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν ότι η φαντασία στα μαθηματικά είναι μια πολυδιάστατη εννοιολογική οντότητα, που ορίζεται από τρεις ικανότητες: την οπτικοποίηση, τις μετασχηματιστικές ικανότητες και την πρωτοτυπία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η φαντασία συνιστά ένα ζωτικό στοιχείο για τη μαθηματική σκέψη (Pound & Lee, 2015) και μια από τις πιο σημαντικές ικανότητες που πρέπει να αναπτύξει η εκπαίδευση (Eckhoff & Urbach, 2008). Παρά την αναγνώριση της σπουδαιότητάς της για τη μάθηση, η ερευνητική κοινότητα δεν έχει ρίξει φως στη συγκεκριμένη έννοια μέσα από εμπειρικές έρευνες (Egan, 2015). Συνεπώς, διαπιστώνεται η ανάγκη ανάπτυξης θεωρητικών μοντέλων που εξηγούν τον ρόλο της στη μάθηση (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο την εξέταση της δομής της φαντασίας στα μαθηματικά με μαθητές Στ' δημοτικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Θεωρητικό υπόβαθρο

Ο ορισμός της φαντασίας είναι ασαφής (Ho, Wang, & Cheng, 2013). Πλειάδα ερευνητών διατύπωσαν ποικίλους ορισμούς για τη φαντασία (Ho et al., 2013). Στα πλαίσια της εργασίας, ο ορισμός της φαντασίας στα μαθηματικά διαμορφώθηκε με βάση το Συνδυαστικό Μοντέλο Δημιουργικής Ικανότητας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015) από την ψυχολογία, που γεφυρώνει την έρευνα της δημιουργικότητας και της φαντασίας. Με βάση το μοντέλο, η φαντασία ορίζεται από την οπτικοποίηση, τις μετασχηματιστικές ικανότητες και την πρωτοτυπία (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Στην παρούσα έρευνα, οι τρεις παράγοντες έχουν οριστεί στο πεδίο των μαθηματικών. Η οπτικοποίηση έχει οριστεί σε σχέση με χωρικές και αλγεβρικές εικόνες. Οι χωρικές εικόνες είναι νοερές κατασκευές που απεικονίζουν χωρικές πληροφορίες (Presmeg, 1986) και η οπτικοποίηση χωρικών εικόνων είναι η ικανότητα χειρισμού νοερών αντικειμένων (Presmeg, 1997). Οι αλγεβρικές εικόνες ορίζονται ως νοερές κατασκευές που αναπαριστούν αλγεβρικές πληροφορίες, έχοντας ως γνώμονα τον ορισμό της Presmeg (1986) για τις χωρικές εικόνες. Η οπτικοποίηση αλγεβρικών εικόνων αφορά στη βίωση της εμπειρίας του «aha moment» (Liljedahl, 2004) κατά τη λύση αλγεβρικών έργων. Οι μετασχηματιστικές ικανότητες εστιάζουν στη μετασχηματιστική διαδικασία από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων (Freudenthal, 1991). Η πρωτοτυπία είναι η ικανότητα παραγωγής μη τυπικών ιδεών (Guilford, 1967). Οι πρωτότυπες ιδέες είναι στατιστικά σπάνιες και καινοτόμες (Vidal, 2005). Η πρωτοτυπία είναι εμφανής στις ερωτήσεις, τις αναπαραστάσεις και την τεκμηρίωση που παράγουν τα άτομα (Sheffield, 2009). Συνεπώς, η εργασία θεωρεί ότι η πρωτοτυπία εκδηλώνεται τόσο σε μαθηματικά αποτελέσματα που σχετίζονται με την οπτικοποίηση (δηλαδή τις αναπαραστάσεις) όσο και σε αποτελέσματα που άπτονται των μετασχηματιστικών ικανοτήτων (δηλαδή τις ερωτήσεις, την τεκμηρίωση).

Σκοπός εργασίας

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά, διερευνώντας κατά πόσον επιβεβαιώνεται εμπειρικά ένα μοντέλο ορισμού της φαντασίας στα μαθηματικά. Το μοντέλο βασίζεται στο Συνδυαστικό Μοντέλο Δημιουργικής Ικανότητας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015), αλλά εξειδικεύεται στα μαθηματικά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

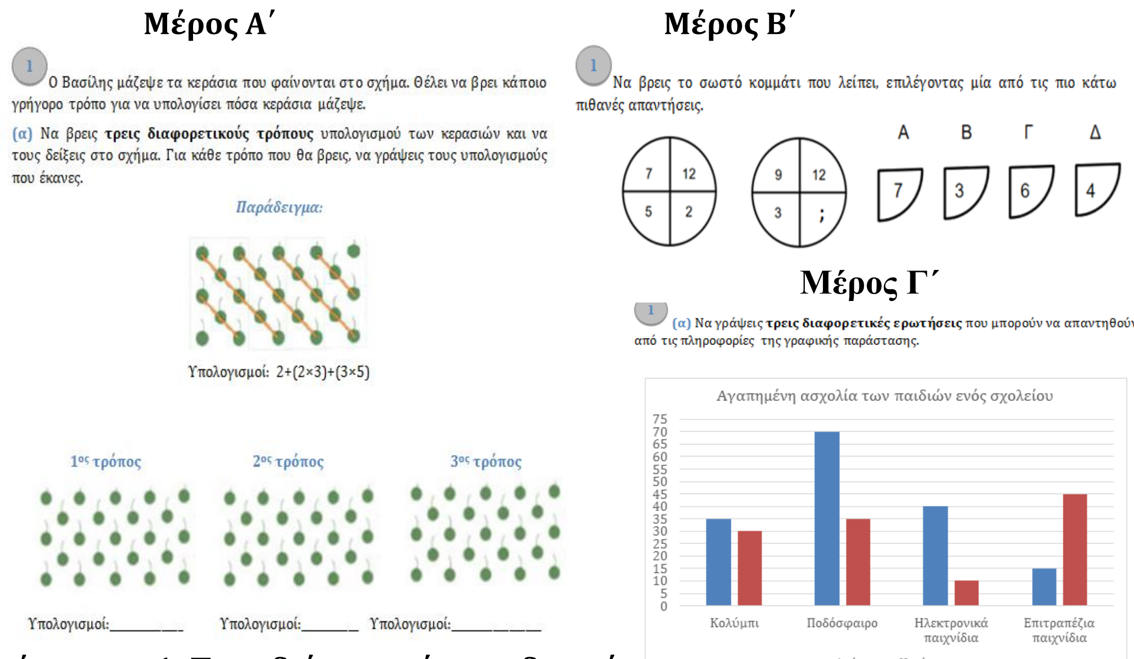
Συμμετέχοντες και δειγματοληψία

Στην έρευνα συμμετείχαν 217 μαθητές Στ’ τάξης από 16 τμήματα και από 11 δημόσια δημοτικά σχολεία της Κύπρου (3 αστικά και 8 αγροτικά). Η επιλογή των τάξεων έγινε με ευκαιριακή δειγματοληψία.

Συλλογή δεδομένων

Χορηγήθηκε το δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά, που δομήθηκε βάσει του Συνδυαστικού Μοντέλου Δημιουργικής Ικανότητας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Περιλαμβάνει 3 μέρη. Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει ένα παράδειγμα έργου για κάθε μέρος. Το Μέρος Α΄ περιέχει 3 έργα πολλαπλών απαντήσεων εστιασμένα στην οπτικοποίηση χωρικών εικόνων (ΟΧΕ). Συγκεκριμένα, το έργο 1 απαιτεί νοερό χειρισμό των κερασιών ως οπτικές αναπαραστάσεις, προτείνοντας εναλλακτικούς τρόπους οπτικοποίησης. Το Μέρος Β΄ έχει 3 έργα οπτικοποίησης αλγεβρικών εικόνων (ΟΑΕ), που είναι προβλήματα ενόρασης (Weisberg, 1995). Απαιτούν από τον μαθητή να διέλθει από τα στάδια δημιουργικής διαδικασίας (Wallas, 1926): προετοιμασία, επώαση, φωτισμός, επαλήθευση. Το έργο 1 του Μέρους Β΄

προϋποθέτει αναγνώριση των σχέσεων πίσω από τους αριθμούς του πρώτου κύκλου, την επαλήθευσή τους στους όρους του δεύτερου κύκλου και την εφαρμογή τους για τον υπολογισμό του τέταρτου όρου. Τα 3 έργα πολλαπλών απαντήσεων του Μέρους Γ΄ εξετάζουν μετασχηματιστικές ικανότητες (ΜΙ), απαιτώντας μετάβαση από τον πραγματικό στον συμβολικό κόσμο (Freudenthal, 1991). Στο έργο 1 ζητείται να μεταφράσουν τις πληροφορίες της γραφικής παράστασης σε λεκτική μορφή, διατυπώνοντας ερωτήσεις. Η αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας του δοκιμίου μετρήθηκε με το Cronbach α, που είχε τιμή 0,845.



Διάγραμμα 1: Παραδείγματα έργων δοκιμίου

Διόρθωση των έργων του δοκιμίου της φαντασίας στα μαθηματικά

Στο Μέρος Α΄ οι απαντήσεις αξιολογήθηκαν με βάση την ευελιξία των μαθητών, δηλαδή την παραγωγή διαφορετικών προσεγγίσεων ή λύσεων σε ένα έργο (Leikin, 2009). Συγκεκριμένα, καταγράφηκαν οι απαντήσεις των μαθητών σε κάθε έργο και ταξινομήθηκαν σε κατηγορίες και υποκατηγορίες, με βάση τη διαφορετικότητα των μαθηματικών ιδεών και τη γνωστική τους πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, οι κατηγορίες απαντήσεων στο έργο 1 του Μέρους Α΄ (Διάγραμμα 1) είναι: καταμέτρηση, σειριακές στρατηγικές, όμοιες ομάδες και υπόλοιπο και τυποποιημένες διατάξεις. Οι υποκατηγορίες απαντήσεων για την κατηγορία «σειριακές στρατηγικές» είναι: κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα, οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα, διαγώνια ευθύγραμμα τμήματα, ζικ-ζακ (σκάλα), συνδυασμός δυο σειριακών στρατηγικών, συνδυασμός σειριακών στρατηγικών με ομάδες, οριζόντιες ομάδες, κατακόρυφες ομάδες (των 5 ή 8) και κατακόρυφες ομάδες (ανά 5 ή 8) και μετά αφαίρεση. Για τη βαθμολόγηση της ευελιξίας των μαθητών σε κάθε έργο, υιοθετήθηκε η κλείδα του Πίνακα 1.

Στο Μέρος Β΄, αξιολογήθηκε η ορθότητα της λύσης, ώστε να εξακριβωθεί κατά πόσον ο μαθητής βίωσε την εμπειρία «aha moment» ή όχι. Για κάθε ορθή απάντηση και κάθε ορθή επεξήγηση του τρόπου σκέψης του μαθητή δινόταν μια μονάδα αντίστοιχα. Ωστόσο, σε περιπτώσεις μερικώς ορθών απαντήσεων και μερικώς ορθών επεξηγήσεων δίνονταν μισές μονάδες.

Πίνακας 1: Κλείδα βαθμολόγησης ευελιξίας

	Βαθμός
Πρώτη ορθή απάντηση	1
Και για κάθε επόμενη ορθή απάντηση:	
Απάντηση που ανήκει σε διαφορετική κατηγορία απαντήσεων	1
Απάντηση που ανήκει σε μια από τις προηγούμενες κατηγορίες απαντήσεων, αλλά αφορά διαφορετική υποκατηγορία	0,1
Απάντηση στην ίδια κατηγορία και υποκατηγορία απαντήσεων	0
Λανθασμένη ή καθόλου απάντηση	0

Στο Μέρος Γ΄, οι απαντήσεις των μαθητών ομαδοποιήθηκαν σε κατηγορίες και υποκατηγορίες. Ενδεικτικά, οι κατηγορίες απαντήσεων στο έργο 1 του Μέρους Γ΄ (Διάγραμμα 1) είναι: εμφανείς απαντήσεις, σύγκριση παιδιών, άθροισμα παιδιών, κλάσματα-ποσοστά-λόγοι και επέκταση/προσθήκη παραμέτρων. Οι υποκατηγορίες της κατηγορίας «άθροισμα παιδιών» είναι: συνολικός αριθμός παιδιών για μια ασχολία, συνολικός αριθμός αγοριών ή κοριτσιών ή παιδιών που προτιμούν 2 ή 3 ασχολίες και συνολικός αριθμός αγοριών ή κοριτσιών ή παιδιών. Με την κλείδα του Πίνακα 1, βαθμολογήθηκε η ευελιξία των απαντήσεων στα έργα.

Η πρωτοτυπία αξιολογήθηκε με βάση τις απαντήσεις στα έργα πολλαπλών απαντήσεων: έργα Μέρους Α΄ και Γ΄, που αφορούν την οπτικοποίηση χωρικών εικόνων και τις μετασχηματιστικές ικανότητες αντίστοιχα. Τα κριτήρια αξιολόγησης ήταν η ποσοστιαία συχνότητα εμφάνισης της απάντησης στο υπό μελέτη δείγμα και η γνωστική πολυπλοκότητα της κατηγορίας απαντήσεων στην οποία ανήκε κάθε απάντηση. Για το πρώτο κριτήριο, υπολογίστηκε ο λόγος της συχνότητας εμφάνισης της απάντησης και του συνόλου των ορθών απαντήσεων του δείγματος σε κάθε έργο. Κάθε ορθή απάντηση του μαθητή λάμβανε κάποιο βαθμό στην κλίμακα 0-1, με βάση μια κλείδα. Όσο πιο χαμηλή ποσοστιαία συχνότητα εμφάνισης είχε κάθε ορθή απάντηση τόσο πιο ψηλή βαθμολογία λάμβανε ο μαθητής για την απάντηση. Στο δεύτερο κριτήριο, λήφθηκε υπόψη το επίπεδο ενόρασης των λύσεων, πόσο βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών εμπλέκουν (Ervynck, 1991). Οι κατηγορίες απαντήσεων κάθε έργου ταξινομήθηκαν ως: χαμηλής (0 βαθμοί), μέτριας (1 βαθμός) και ψηλής γνωστικής πολυπλοκότητας (2 βαθμοί). Ο βαθμός πρωτοτυπίας κάθε απάντησης ήταν το άθροισμα του βαθμού για την ποσοστιαία συχνότητα εμφάνισης της απάντησης και τη γνωστική της πολυπλοκότητα.

Ανάλυση δεδομένων

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με το SPSS και το SmartPLS. Μέσω του SPSS, υπολογίστηκαν περιγραφικά στατιστικά μέτρα και συντελεστές συσχέτισης για τις μεταβλητές. Με το SmartPLS, έγινε ανάλυση Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων. Υιοθετήθηκε η αντανακλαστική προοπτική, όπου τα έργα αξιολογούν την ίδια έννοια και έχουν ψηλές συσχετίσεις μεταξύ τους (Edwards & Bagozzi 2000). Τα αποτελέσματα αξιολογήθηκαν με τα κριτήρια: αξιοπιστία δεικτών, αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας και συγκλίνουσα εγκυρότητα (Sarstedt, Ringle, & Hair, 2017). Η αξιοπιστία των δεικτών αξιολογείται με βάση τις φορτίσεις τους στον παράγοντα. Φορτίσεις πάνω από 0,70 δείχνουν ότι ο παράγοντας εξηγεί τουλάχιστον 50% της διασποράς των μεταβλητών (Sarstedt et al., 2017). Η αξιολόγηση της αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας του παράγοντα γίνεται με το composite reliability ρ_c και το Cronbach α. Τιμές πάνω από 0,60 θεωρούνται αποδεκτές (Hair, Hult, Ringle, & Sarstedt, 2017). Η συγκλίνουσα εγκυρότητα αξιολογείται με τη Μέση Εξαγόμενη Διασπορά (AVE) στις μεταβλητές κάθε παράγοντα. Τιμές πάνω από 0,50 θεωρούνται αποδεκτές (Sarstedt et al., 2017).

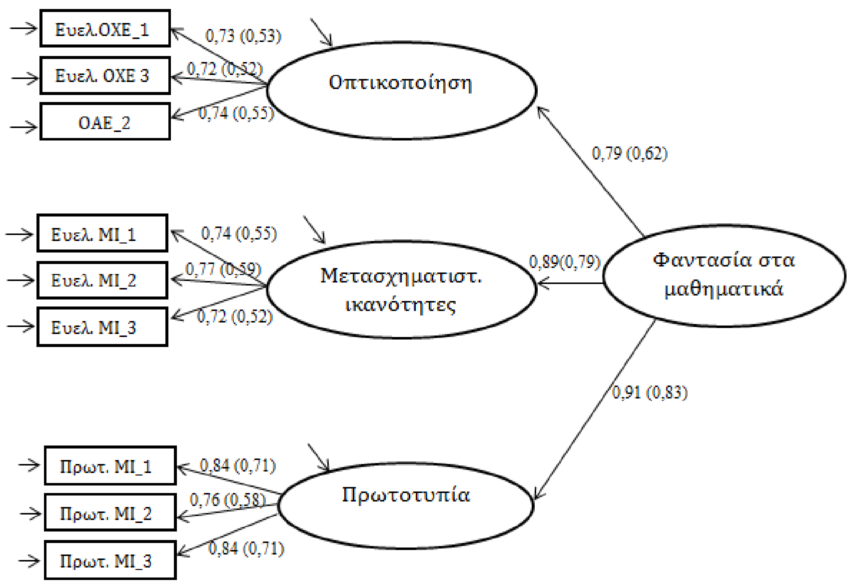
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα περιγραφικά αποτελέσματα των μεταβλητών του δοκιμίου συγκεντρώνονται στον Πίνακα 2. Οι μέσοι όροι κυμαίνονται από 0,17 ως 0,62. Οι απόλυτες τιμές των συντελεστών λοξότητας είναι κάτω του 1, ενώ των συντελεστών κύρτωσης μικρότερες του 2, με εξαίρεση την πρωτοτυπία για το έργο 2 των μετασχηματιστικών ικανοτήτων. Σε γενικές γραμμές, οι μεταβλητές του δοκιμίου ακολουθούν κανονική κατανομή. Τα αποτελέσματα της Ανάλυσης Μερικών Ελάχιστων Τετραγώνων παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 2, το οποίο παραθέτει τις παραμέτρους του τελικού μοντέλου, ενώ ο Πίνακας 3 περιλαμβάνει τους δείκτες για τα κριτήρια αξιολόγησής του. Με βάση τις συγκεκριμένες παραμέτρους και δείκτες, προκύπτει ότι το μοντέλο που έχει εξεταστεί για τη φαντασία στα μαθηματικά προσαρμόζεται με τα δεδομένα σε ικανοποιητικό βαθμό.

Πίνακας 2: Στοιχεία περιγραφικής στατιστικής του δοκιμίου της φαντασίας

Μεταβλητή			**Μέσος Όρος**	**Τυπική Απόκλιση**	**Εύρος**	**Λοξότητα**	**Κύρτωση**
Οπτικοπ. Χωρικών Εικόνων (ΟΧΕ)	Έργο 1	Ευελιξία	0,60	0,26	1	-0,32	-0,33
	Έργο 2	Ευελιξία	0,59	0,19	1	-0,13	-0,09
	Έργο 3	Ευελιξία	0,48	0,24	1	0,06	-0,95
Οπτικοπ. Αλγεβρικών Εικόνων (ΟΑΕ)	Έργο 1	Ορθότητα	0,44	0,40	1	0,18	-1,48
	Έργο 2	Ορθότητα	0,62	0,32	1	-0,15	-1,12
	Έργο 3	Ορθότητα	0,51	0,40	1	0,03	-1,54
Μετασχημ. Ικανότητες (ΜΙ)	Έργο 1	Ευελιξία	0,45	0,21	1	-0,21	-0,25
	Έργο 2	Ευελιξία	0,26	0,25	1	0,48	-0,82
	Έργο 3	Ευελιξία	0,50	0,25	1	-0,22	-0,33
Πρωτοτυπία	ΟΧΕ 1	Πρωτοτ.	0,43	0,23	1	-0,06	-0,61
	ΟΧΕ 2	Πρωτοτ.	0,27	0,18	1	0,98	1,51
	ΟΧΕ 3	Πρωτοτ.	0,35	0,27	1	0,47	-1,07
	ΜΙ 1	Πρωτοτ.	0,34	0,18	1	-0,19	-0,25
	ΜΙ 2	Πρωτοτ.	0,17	0,20	1	1,46	2,21
	ΜΙ 3	Πρωτοτ.	0,34	0,17	1	-0,42	0,39

Ειδικότερα, όσον αφορά στην αξιοπιστία των δεικτών του μοντέλου, όσες μεταβλητές παρουσίαζαν φορτίσεις κάτω του .70 (Ευελ.ΟΧΕ_2, ΟΑΕ_1, ΟΑΕ_3, Πρωτ.ΟΧΕ_1, Πρωτ.ΟΧΕ_2 και Πρωτ.ΟΧΕ_3) αφαιρέθηκαν από το μοντέλο. Έτσι, το τελικό μοντέλο περιλαμβάνει μεταβλητές με θετικές, υψηλές (πάνω από 0,70) και στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στον αντίστοιχο παράγοντα. Οι μεταβλητές αυτές κρίνονται κατάλληλες για τη μέτρηση των παραγόντων της οπτικοποίησης, των μετασχηματιστικών ικανοτήτων και της πρωτοτυπίας. Επιπλέον, οι θετικές, υψηλές και στατιστικά σημαντικές φορτίσεις των τριών παραγόντων στη φαντασία στα μαθηματικά επιβεβαιώνουν πως οι τρεις αυτές ικανότητες συνθέτουν μια ανώτερης τάξης εννοιολογική κατασκευή, τη φαντασία στα μαθηματικά.



Σημείωση: Ο πρώτος αριθμός αποτελεί τη φόρτιση της μεταβλητής στον αντίστοιχο παράγοντα και ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (R^2).

Διάγραμμα 2. Μοντέλο για τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά

Πίνακας 3: Δείκτες κριτηρίων αξιολόγησης του μοντέλου μέτρησης

Κριτήριο	Οπτικοποίηση	Μετασχηματιστικές Ικανότητες	Πρωτοτυπία	Φαντασία
Σύνθετη Αξιοπιστία ρ_c	0,776	0,789	0,854	0,874
Cronbach α	0,570	0,604	0,743	0,836
Μέση Εξαγόμενη Διασπορά	0,536	0,555	0,662	0,439

Τέλος, όπως δείχνει και ο Πίνακας 3, από πλευράς αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας, οι τιμές composite reliability ρ_c και Cronbach α κρίνονται ικανοποιητικές, με εξαίρεση το Cronbach α της οπτικοποίησης (0,570).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η φαντασία αποτελεί μια πολύπλοκη έννοια (Egan, 1992). Παράλληλα, παρατηρείται έλλειψη εμπειρικών ερευνών σχετικών με τη φαντασία (Egan, 1992) και ανάγκη για διαμόρφωση θεωρητικών μοντέλων που περιγράφουν τον ρόλο της στη μάθηση (Abrahamson, 2006; Dziedziewicz & Karwowski, 2015). Σκοπός της εργασίας ήταν να σκιαγραφήσει τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά, εξετάζοντας κατά πόσον επιβεβαιώνεται εμπειρικά το Συνδυαστικό Μοντέλο Δημιουργικής Ικανότητας (Dziedziewicz & Karwowski, 2015) στα μαθηματικά. Συνοπτικά, η εργασία έχει αποσαφηνίσει τη φαντασία στα μαθηματικά, καθιστώντας την μια πιο ευκρινώς ορισμένη και μετρήσιμη έννοια. Ειδικότερα, έχει επιβεβαιώσει ότι αποτελεί μια σύνθετη οντότητα και μπορεί να περιγραφεί από την οπτικοποίηση, τις μετασχηματιστικές ικανότητες και την πρωτοτυπία.

Επιπλέον, η ανάλυση έδειξε ότι η οπτικοποίηση δεν εξηγεί μόνο μεταβλητές που εμπλέκουν χωρικές εικόνες αλλά και μεταβλητές που εμπλέκουν αλγεβρικές εικόνες. Επομένως, η οπτικοποίηση δεν χρησιμεύει μόνο στη γεωμετρία και την τριγωνομετρία (Presmeg, 1997) αλλά και την άλγεβρα (Yerushalmy, Sternberg, & Gilead, 1999). Όσον αφορά στην πρωτοτυπία, οι μεταβλητές πρωτοτυπίας στα έργα οπτικοποίησης είχαν χαμηλές φορτίσεις στον παράγοντα της πρωτοτυπίας, σε αντίθεση με τις μεταβλητές πρωτοτυπίας στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων. Πιθανή ερμηνεία είναι ότι τα έργα οπτικοποίησης χωρικών εικόνων ίσως έδιναν προβάδισμα σε μαθητές με οπτικο-χωρικό γνωστικό στυλ (Blazhenkova, Becker, & Kozhevnikov, 2011), κάτι που δεν ίσχυε τόσο στα έργα μετασχηματιστικών ικανοτήτων. Έτσι, το αποτέλεσμα αυτό αντικρούει θέσεις ερευνητών που υποστηρίζουν ότι η πρωτοτυπία εμφανίζεται και σε μαθηματικά αποτελέσματα σχετικά με την οπτικοποίηση (Sheffield, 2009). Τέλος, η ψηλή φόρτιση ανάμεσα στον παράγοντα της πρωτοτυπίας και της φαντασίας υποστηρίζει εμπειρικά ότι η πρωτοτυπία θεωρείται ο πιο βασικός δείκτης της μαθηματικής δημιουργικότητας (Ervynck, 1991).

Σημαντικές θεωρητικές, μεθοδολογικές και πρακτικές προεκτάσεις εγείρονται από την εργασία. Από θεωρητική σκοπιά, η έρευνα έχει επιβεβαιώσει εμπειρικά ένα μοντέλο για τη δομή της φαντασίας στα μαθηματικά και μπορεί να αξιοποιηθεί για μελλοντικές έρευνες. Από μεθοδολογική πλευρά, προσφέρει ένα θεωρητικά τεκμηριωμένο δοκίμιο της φαντασίας στα μαθηματικά, που μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο ερευνητικό και διδακτικό εργαλείο. Σε πρακτικό επίπεδο, η εργασία δίνει στους εκπαιδευτικούς μια σαφή εικόνα για τις συνιστώσες της φαντασίας στα μαθηματικά και παρέχει κατευθύνσεις για το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων που πρέπει να ενσωματώνουν στη διδασκαλία, για να αξιολογούν και να βελτιώνουν τη φαντασία των μαθητών τους. Οι περιορισμοί που διέπουν την έρευνα υποδεικνύουν κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα. Η έρευνα εστίασε σε μαθητές Στ’ τάξης Δημοτικού, έτσι μελλοντικές έρευνες μπορούν να εστιάσουν σε πιο μικρές τάξεις ώστε να αποτυπώσουν ακόμα πιο σφαιρική κατανόηση για το ερευνητικό πρόβλημα. Επίσης, τα δεδομένα είχαν συλλεχθεί σε μια χρονική φάση.

Θα ήταν ενδιαφέρουσα η διενέργεια διαχρονικών μετρήσεων για εξέταση αναπτυξιακών μοντέλων. Τέλος, το ενδιαφέρον μπορεί να στραφεί σε διδακτικές παρεμβάσεις για την ανάπτυξη της φαντασίας στα μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abrahamson, D. (2006). *The three M's: Imagination, embodiment, and mathematics*. Paper presented at the annual meeting of the Jean Piaget Society, June, 2006, Baltimore, MD.

Blazhenkova, O., Becker, M., & Kozhevnikov, M. (2011). Object–spatial imagery and verbal cognitive styles in children and adolescents: Developmental trajectories in relation to ability. *Learning and Individual Differences*, *21*(3), 281-287. doi:10.1016/j.lindif.2010.11.012

Dziedziewicz, D., & Karwowski, M. (2015). Development of children's creative visual imagination: A theoretical model and enhancement programmes, *Education 3-13*, *43*(4), 382-392. doi:10.1080/03004279.2015.1020646

Eckhoff, A., & Urbach, J. (2008). Understanding imaginative thinking during childhood: Sociocultural conceptions of creativity and imaginative thought. *Early Childhood Education Journal*, *36*(2), 179-185. doi:s10643-008-0261-4

Edwards, J. R., & Bagozzi, R. P. (2000). On the nature and direction of relationships between constructs and measures. *Psychological Methods, 5*(2), 155-174. doi:10.1037/1082-989X.5.2.155

Egan, K. (1992). *Imagination in teaching and learning: Ages 8 to 15*. London, UK: Routledge.

Egan, K. (2015). Preface to the first edition. In K. Egan, G. Juddon, & K. Madej (Eds.). (2015). *Engaging imagination and developing creativity in education* (pp. ix-x). Newcastle, UK: Cambridge Scholars Publishing.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Springer Science & Business Media.

Guilford, J. P. (1967). Creativity: Yesterday, today and tomorrow. *The Journal of Creative Behavior*, *1*(1), 3-14.

Hair, J. F., Hult, G. T. M., Ringle, C. M., & Sarstedt, M. (2017). *A primer on partial least squares structural equation modeling* (PLS-SEM) (2nd ed.). Thousand Oaks: Sage.

Ho, H. C., Wang, C. C., & Cheng, Y. Y. (2013). Analysis of the scientific imagination process. *Thinking Skills and Creativity*, *10*, 68-78. doi:10.1016/j.tsc.2013.04.003

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Liljedahl, P. (2004). *The AHA! experience: mathematical contexts, pedagogical implications*, Unpublished doctoral dissertation, Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia, Canada.

Pound, L., & Lee, T. (2015). *Teaching mathematics creatively*. New York, NY: Routledge.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ:Erlbaum.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, *6*(3), 42-46.

Sarstedt, M., Ringle, C. M., & Hair, J. F. (2017). Partial least squares structural equation modeling. In C. Homburg, M. Klarmann, & Vomber (Eds.), *Handbook of market research* (pp.1-40). Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-05542-8_15-1

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity—Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87–100). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Vidal, R. V. V. (2005). Creativity for operational researchers. *Investigação Operacional*, *25*(1), 1-24.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. London, UK: Jonathan Cape.

Weisberg, R. W. (1995). Prolegomena to theories of insight in problem solving: A taxonomy of problems. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight*. Cambridge, MA: MIT Press.

Yerushalmy, M., Sternberg, B., & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra, *Proceedings of the 23th PME Conference* (pp. 197-211). Haifa, Israel: PME.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Κατσομήτρος Σωτήριος, **Ψυχάρης Γιώργος**

ΕΚΠΑ

sotkatso@gmail.com, gpsych@math.uoa.gr

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού που βασίστηκε στην χρήση ψηφιακών εργαλείων, της πρακτικής και της εξέλιξης της επαγγελματικής γνώσης μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης εντός του ερευνητικού προγράμματος PREMaTT, το οποίο εστιάζει στις πηγές και στον συνεργατικό σχεδιασμό εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την εισαγωγή της άλγεβρας στην διδασκαλία. Η εκπαιδευτικός ενδυνάμωσε την τεχνολογική γνώση που ήδη είχε, καταλήγοντας στο ανώτερο επίπεδο γνώσης TPACK μέσω του προβληματισμού της ότι η τεχνολογία από μόνη της ίσως δεν είναι αρκετή για την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα έρευνα έλαβε χώρα στο πλαίσιο της εφαρμογής του ερευνητικού προγράμματος PREMaTT[1] στην Ελλάδα, του οποίου σκοπός ήταν η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσα από τον συνεργατικό σχεδιασμό πηγών για την εισαγωγή της άλγεβρας στην αντίστοιχη βαθμίδα τους. Ως εκ τούτου, συγκροτήθηκε μια ομάδα συνολικά 9 Ελλήνων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για ένα ακαδημαϊκό έτος στο τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, η οποία θεωρούμε ότι αποτέλεσε μια κοινότητα πρακτικής (community of practice) (Wenger, 1999).

Αναλυτικότερα, η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στην μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού, της πρακτικής και της εξέλιξης της επαγγελματικής γνώσης μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (της Ελένης) που συμμετέχει στο PREMaTT μέσα από την πορεία της στον κύκλο: συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης - σχεδιασμός - εφαρμογή - αναστοχασμός. Ιδιαίτερα, επιχειρούμε να καλύψουμε το κενό αντίστοιχων ερευνών που εστιάζουν στον διδακτικό σχεδιασμό και στις «πηγές» (resource) των εκπαιδευτικών για την εισαγωγή της άλγεβρας στην διδασκαλία (Britt & Irwin, 2011). Σε συμφωνία με άλλους ερευνητές (Gueudet & Trouche, 2009) υιοθετούμε την οπτική ότι η μελέτη τόσο των «πηγών» του διδακτικού σχεδιασμού όσο και των διδακτικών αποφάσεων των εκπαιδευτικών προσφέρονται για την κατανόηση ζητημάτων μάθησης αλλά και του ρόλου της τεχνολογίας στην εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Στον ερευνητικό χώρο της διδακτικής των μαθηματικών δεν υπάρχει ένας κοινός αποδεκτός ορισμός της έννοιας «πηγής». Οι Gueudet και Trouche (2009) κάνουν λόγο για ένα «σύνολο πηγών» (ψηφιακών και μη-ψηφιακών εργαλείων) του εκπαιδευτικού, το οποίο περιλαμβάνει υλικές και μη πηγές (π.χ. αρχεία λογισμικού, συζητήσεις εκπαιδευτικών). Αυτό το «σύνολο πηγών» για συγκεκριμένες καταστάσεις μετασχηματίζεται σε «μονάδα διδασκαλίας» (document), η οποία θεωρείται ως σύνθεση: της «πηγής», του ορατού τρόπου χρήσης (usages) της και της μη ευθέως εκφραζόμενης γνώσης (κρυφή γνώση) του εκπαιδευτικού που ονομάζεται λειτουργική σταθερά (operational invariant). Παράλληλα, οι Gueudet και Trouche (2009) νοηματοδοτούν ευρύτερα την έννοια της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού ως επαγγελματική αλλαγή, η οποία συνδέεται στενά με τις γνώσεις και πεποιθήσεις του, υποστηρίζοντας ότι η επαγγελματική εξέλιξη του επηρεάζεται από τη συνεργασία του με συναδέλφους στο πλαίσιο κοινοτήτων.

Διερευνώντας τον τρόπο εισαγωγής της άλγεβρας στην ελληνική πρωτοβάθμια εκπαίδευση, στο κυρίαρχο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003) ο όρος «άλγεβρα» δεν αναφέρεται πουθενά. Πρώτη επίσημη αναφορά σε αλγεβρικές έννοιες πραγματοποιείται μόνο στην ενότητα των εξισώσεων της Στ΄ Δημοτικού, όπου η μεταβλητή εμφανίζεται ως ένας συγκεκριμένος άγνωστος αριθμός (χ). Ωστόσο, ορισμένες δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων μικρότερων τάξεων εμφανίζουν στοιχεία προ-αλγεβρικού περιεχομένου.

Από τα παραπάνω κατανοούμε τον κρίσιμο ρόλο του εκπαιδευτικού, αφού σημείο κλειδί του τρόπου που οι μαθητές θα εισαχθούν στην θεματική της «άλγεβρας» αποτελεί ο διδακτικός του σχεδιασμός. Ειδικότερα εφόσον αποφασίσει να χρησιμοποιήσει ψηφιακά εργαλεία, καθώς τότε εικάζουμε ότι εγείρονται ταυτόχρονα προκλήσεις τόσο μαθητικής εννοιολογικής κατανόησης της άλγεβρας (Kieran et al., 2016) όσο και ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στην διδακτική του πρακτική (Mishra & Koehler, 2006).

Οι Mishra και Koehler (2006) θεωρούν ότι ο πυρήνας της καλής διδασκαλίας με βάση την τεχνολογία προϋποθέτει τρία βασικά είδη γνώσεων του εκπαιδευτικού: την «Τεχνολογική γνώση» (Technology Knowledge/TK), την «γνώση του Περιεχομένου» (Content Knowledge/CK) και την «Παιδαγωγική γνώση» (Pedagogical Knowledge/PK). Αυτές αποτελούν κεντρικό σημείο αναφοράς στην θεωρία «Τεχνολογική Παιδαγωγική και γνώση του Περιεχομένου» (TPACK) που ανέπτυξαν. Εξίσου σημαντικές είναι και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών με αποτέλεσμα την δημιουργία εξειδικευμένων μορφών γνώσεων: την Παιδαγωγική γνώση Περιεχομένου/PCK (π.χ. γνώση διατύπωσης και αναπαράστασης του μαθηματικού περιεχομένου), την Τεχνολογική γνώση του Περιεχομένου/TCK (π.χ. τρόπος αλληλεπίδρασης τεχνολογίας και περιεχομένου), και την Τεχνολογική

Παιδαγωγική γνώση/TPK (διδακτική αξιοποίηση δυνατοτήτων και περιορισμών των αναπαραστάσεων των ψηφιακών εργαλείων). Ιδιαίτερα ως ανώτερο επίπεδο γνώσης θεωρείται η «Τεχνολογική Παιδαγωγική γνώση του Περιεχομένου» (TPCK) καθώς αποτελεί την ταυτόχρονη αλληλεπίδραση και των τριών βασικών συνιστωσών των γνώσεων (Mishra & Koehler, 2006).

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι τα παρακάτω:

1. Ποιες είναι οι πηγές και οι μονάδες διδασκαλίας που συνιστούν τον διδακτικό σχεδιασμό της εκπαιδευτικού και ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρέασαν την δημιουργία των μονάδων διδασκαλίας μέσα από την συμμετοχή της στον κύκλο: συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης σχεδιασμός-εφαρμογή-αναστοχασμός;

2. Πώς εξελίσσεται η επαγγελματική γνώση της εκπαιδευτικού για την εισαγωγή της άλγεβρας στη διδασκαλία με βάση το μοντέλο «Τεχνολογικής και Παιδαγωγικής γνώσης του Περιεχομένου» (TPACK);

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο έρευνας – Συμμετέχουσα

Το ερευνητικό πρόγραμμα PREMaTT εφαρμόστηκε στην Γαλλία και στην Ελλάδα με την αντίστοιχη σύσταση ομάδας εκπαιδευτικών. Την ελληνική ομάδα συγκροτούσαν 2 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και 7 δευτεροβάθμιας και ένας ακαδημαϊκός ερευνητής στον ρόλο του συντονιστή. Μέσα στις 6 συνολικά συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν οι διδακτικοί σχεδιασμοί, σχολιάστηκαν οι εφαρμογές αυτών, μετέπειτα τροποποιήθηκαν και σε κάποιες περιπτώσεις εφαρμόστηκαν εκ νέου. Σ’ αυτή την πορεία, οι εκπαιδευτικοί ήρθαν σε επαφή με πορίσματα ερευνών είτε έμμεσα μέσα από συζητήσεις με τον συντονιστή της ομάδας είτε άμεσα με την μελέτη ερευνητικών άρθρων.

Σε αυτό το πλαίσιο συμμετείχε και η Ελένη, εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας με πάνω από 20 χρόνια πείρας, διδακτορικό στην παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών στην διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο και επιμορφώτρια εκπαιδευτικών για την ένταξη των Τ.Π.Ε στην διδακτική πράξη.

Η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός δεν επιλέχθηκε τυχαία, καθώς διαθέτει ένα πολύ καλό μαθηματικό υπόβαθρο και ταυτόχρονα έχει ευχέρεια σε ζητήματα που αφορούν την ενσωμάτωση των ψηφιακών τεχνολογιών στην διδακτική πράξη. Συνεπώς, η μελέτη του διδακτικού της σχεδιασμού μας επιτρέπει να εντοπίσουμε την σχεδιαστική της ετοιμότητα, εστιάζοντας στην αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων αλλά και ταυτόχρονα να κατανοήσουμε ζητήματα που φέρνει η χρήση της τεχνολογίας για την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Τέλος, παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον να σκιαγραφήσουμε την πορεία μιας εκπαιδευτικού με αυξημένα προσόντα εντός ενός ερευνητικού προγράμματος, προσπαθώντας να εντοπίσουμε στοιχεία επαγγελματικής εξέλιξης.

Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης

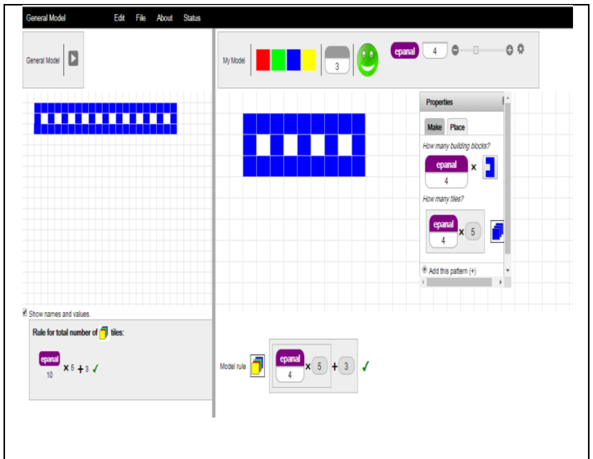
Πρόκειται για μια ποιοτική έρευνα και αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης (case study) (Yin, 1994). Τα δεδομένα που αναλύθηκαν προέκυψαν μέσα από τις 6 συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης (καταγραφή ήχου και εικόνας), τις 5 ημιδομημένες συνεντεύξεις της Ελένης (από 1 στην αρχή και τέλος του προγράμματος, από 1 μετά από τις τρεις δίωρες διδασκαλίες της) και από την συμμετοχική παρατήρηση των εφαρμογών της εντός σχολικής τάξης (καταγραφή εικόνας και ήχου). Με σκοπό την κατανόηση των διδακτικών επιλογών της Ελένης, συγκρίναμε και συνθέσαμε δεδομένα (triangulation) μέσα από τις πηγές, τις συνεντεύξεις και κρίσιμα επεισόδια που προέκυψαν μέσα από την πρακτική και τον αναστοχασμό της.

Σαφέστερα, στο 1ο ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory approaches) (Strauss & Corbin, 1997) σε συνδυασμό με τη «θεωρία μονάδων διδασκαλίας και χρήσης πηγών» (Documentantional Approach to Didactics) των Gueudet και Trouche (2009). Ειδικότερα για τον εντοπισμό των ευρύτερων κατηγοριών των λειτουργικών σταθερών, προχωρήσαμε πρώτα σε ανοιχτή κωδικοποίηση, ύστερα σε αξονική και τέλος σ’ επιλεκτική.

Ταυτόχρονα, η ανάλυση του 2ου ερευνητικού ερωτήματος χωρίστηκε σε δύο φάσεις. Η πρώτη περιλαμβάνει τις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης πριν την εφαρμογή των δραστηριοτήτων της και η δεύτερη τον διδακτικό σχεδιασμό μαζί με την τελική της αποτίμηση. Τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν χρονολογικά (ανά φάση) με βάση τις κατηγορίες του μοντέλου της «Τεχνολογικής και Παιδαγωγικής γνώσης του Περιεχομένου» (TPACK) (Mishra & Koehler, 2006).

Ψηφιακός μικρόκοσμος: eXpresser

Ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser[2] (Noss et al., 2009) υποστηρίζει την μαθηματική γενίκευση μαθητών ηλικίας 11 έως 14. Έχει ενσωματωμένη μια μορφή «άλγεβρας», όπου ο μαθητής μπορεί να δημιουργεί σταθερές, να ενεργεί με μεταβλητές και να συντάσσει εκφράσεις, οι οποίες εμπεριέχουν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Ο μαθητής κατασκευάζει μοτίβα μέσα από την χρήση έγχρωμων τετραγώνων και χρησιμοποιεί «εικονικές μεταβλητές», ώστε να αναπαράγει τις κατασκευές του για ένα διαφορετικό βαθμό επαναλήψεων και να εκφράσει σχέσεις γενίκευσης, λαμβάνοντας πάντα σχετική ανατροφοδότηση για την ορθότητα τους. Στην ουσία η «εικονική μεταβλητή» είναι η εικονογραφημένη αναπαράσταση της μεταβλητής.



Σχ.1: Ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser

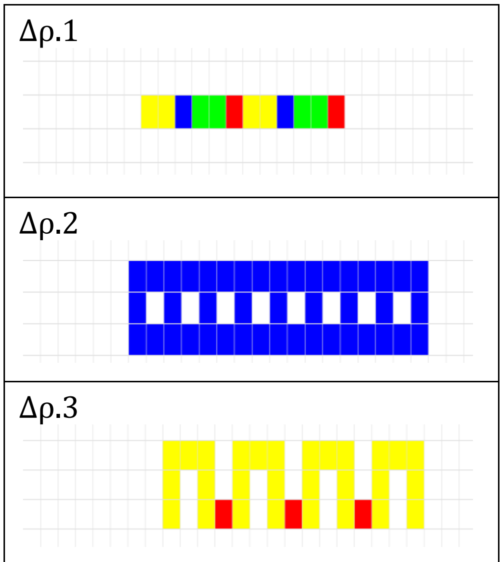
Αναλυτικότερα, στην κεντρική περιοχή εργασίας (Σχ. 1) ο μαθητής αρχικά δημιουργεί επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Στη συνέχεια, ορίζει την «δομική μονάδα» (building block) του μοτίβου (με άλλα λόγια το επαναλαμβανόμενο στοιχείο του μοτίβου) και καθορίζει τις «ιδιότητες» (properties) του. Έτσι αναπαράγεται το δομικό στοιχείο του μοτίβου για έναν συγκεκριμένο αριθμό. Για να αναπαραχθεί για έναν τυχαίο αριθμό πρέπει να «ξεκλειδωθεί» ο αριθμός των επαναλήψεων με την κατάλληλη εντολή και άρα μετατρέπεται πλέον σε «εικονική μεταβλητή». Επιπλέον, ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει στο ειδικό πλαίσιο (Model Rule) μια αλγεβρική έκφραση που αποτυπώνει τον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πηγές και διδακτικές αποφάσεις εντός και εκτός τάξης

Η Ελένη τη δεδομένη χρονική στιγμή δίδασκε σε ένα τμήμα της Στ’ δημοτικού με 15 μαθητές, στο οποίο πριν την παρέμβαση είχε ολοκληρώσει το κεφάλαιο των εξισώσεων και των μοτίβων (αριθμητικά, γεωμετρικά, σύνθετα). Στην διδασκαλία της συνήθως αξιοποιεί δομήματα από το Ψηφιακό Σχολείο (https://dschool.edu.gr/). Στο παρελθόν είχε υπόψιν της το ψηφιακό λογισμικό eXpresser, χωρίς όμως να γνώριζε την λειτουργία του.

Η εκπαιδευτικός σχεδίασε τρία φύλλα εργασίας (Φ.Ε.) καθένα από τα οποία εμπεριείχε από μια δραστηριότητα (Σχ. 2) και πραγματοποίησε 3 δίωρες διδακτικές παρεμβάσεις στο εργαστήριο των η/υ. Η δομή των Φ.Ε. περιλαμβάνουν 5 κατηγορίες ερωτημάτων: την κατασκευή του μοτίβου με «σύρε και άσε», τον εντοπισμό του μοτίβου (ερωτήσεις πρόβλεψης και εφαρμογής), την κατασκευή μοτίβου για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων, την κατασκευή μοτίβου με χρήση μεταβλητής (ορισμός «δομικού λίθου» και «ιδιοτήτων») και την αποτύπωση του γενικού κανόνα (πρώτα προφορικά και έπειτα με τη χρήση αλφαριθμητικών στοιχείων).



Σχ.2: Δραστηριότητες στον eXpresser

Η φύση και η πορεία των ερωτημάτων των Φ.Ε. ακολουθούν την λειτουργικότητα του eXpresser, καθώς οι μαθητές πρώτα ορίζουν την «εικονική μεταβλητή» και έπειτα αποτυπώνουν τον γενικό κανόνα. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια διδακτική παρέμβαση δεδομένου ότι η μεταβλητή παρουσιάζεται ως «γενικευμένος αριθμός», δημιουργώντας την συνθήκη για ομαλό εννοιολογικό πέρασμα από την Στ΄ δημοτικού στην Α΄ γυμνασίου.

Οι διδακτικοί στόχοι των παραπάνω δραστηριοτήτων, σύμφωνα με την Ελένη, είναι οι μαθητές: να αναγνωρίσουν το μοτίβο, να κατανοήσουν και να ορίσουν τον «δομικό λίθο», να εντοπίσουν και να εκφράζουν τον γενικό κανόνα, να αποτυπώσουν αλγεβρικά τον γενικό κανόνα.

Ειδικότερα, μέσα από την ανάλυση του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής της, αναδύθηκαν 4 ευρύτερες κατηγορίες ως παράγοντες επιρροής και αιτιολόγησης των αποφάσεών της. Αυτές είναι: το μαθηματικό περιεχόμενο, ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser, οι διδακτικές πεποιθήσεις/εμπειρία και η αλληλεπίδραση συναδέλφων/PreMaTT.

Παράλληλα, στο επίπεδο του διδακτικού σχεδιασμού παρατηρούμε τρία κρίσιμα και καινοτόμα σημεία για την εισαγωγή της άλγεβρας στην ελληνική πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αυτά είναι: το αρχικό ερώτημα «σύρε και άσε», η εκτεταμένη χρήση της αναδρομικότητας και τα στοιχεία συμμεταβολής της δραστηριότητας 3.

Σαφέστερα, όλα τα Φ.Ε. ξεκινούν με τη μεταφορά του μοτίβου από το Φ.Ε. στην επιφάνεια εργασίας του eXpresser με την διαδικασία «σύρε και άσε», δηλαδή οι μαθητές να επιλέξουν και να σύρουν τα κατάλληλα χρωματιστά τετράγωνα στην τετραγωνισμένη επιφάνεια του eXpresser. Η Ελένη βασίστηκε αποκλειστικά στην λειτουργικότητα του λογισμικού για την δημιουργία του ερωτήματος, το οποίο ουσιαστικά υποκαθιστά την χρήση των χειραπτικών υλικών.

Ελένη: «Είναι σημαντικό για αυτούς να έχουν μια κιναισθητική αίσθηση της δομής. Οι μαθητές μπορούν να ερωτηθούν τί αλλάζει σε κάθε βήμα σε σχέση με το προηγούμενο κατά την κατασκευή της φιγούρας.»

Επιπρόσθετα, διευκρινίζει ότι «*οι μαθητές νοηματοδοτούν την διεξαγωγή του γενικού κανόνα μέσα από την αναδρομική σχέση στις δραστηριότητες των μοτίβων*».

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλος ο διδακτικός της σχεδιασμός έχει βασιστεί στην χρήση ενός μόνου ψηφιακού λογισμικού, του eXpresser.

Ελένη: «Κάθε λογισμικό θέλει την εξοικείωσή του και συνηθίζεις σε μια συγκεκριμένη λογική. Επιθυμώ οι μαθητές μου να σκέφτονται σαν τον eXpresser. Νομίζω ενδιαφέρον δεν έχει μόνο να φτάσουν στον τελικό στόχο, αλλά και η ενεργή εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες. Για αυτό το λόγο αυτές θα πρέπει να είναι από την φύση τους προκλητικές και διερευνητικές. »

Η εκπαιδευτικός θεωρεί την δραστηριότητα 3 ως την πιο απαιτητική σε σχέση με τις υπόλοιπες, γιατί σ' αυτή εμφανίζονται στοιχεία συμμεταβολής (αριθμός αψίδων, μείον μία ένωση). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν την λειτουργική σχέση των δύο μεταβλητών.

Ωστόσο, στην εφαρμογή της δραστηριότητας 3 αναδύθηκαν ορισμένα σημεία αντίθεσης, όπου οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις του eXpresser τελικά λειτούργησαν με ένα τρόπο που άλλοτε επιβοηθούν και άλλοτε όχι στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών για το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές στην δραστηριότητα 3 φάνηκαν να αναγνωρίζουν εύκολα τη δομή του μοτίβου και να υπολογίζουν τον αριθμό των αψίδων και των συνδέσεων για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων. Αντίθετα, παρουσιάστηκαν δυσκολίες στην κατασκευή του «δομικού λίθου» και στον ορισμό των «ιδιοτήτων» του σε επίπεδο λογισμικού. Η δυσκολία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι έπρεπε να γίνει συνδυασμός δύο «δομικών λίθων». Η Ελένη αντιλαμβάνεται την συγκεκριμένη δυσκολία των μαθητών ως «*περιορισμό του ψηφιακού εργαλείου που σχετίζεται με τον σχεδιασμό της δραστηριότητας*».

Συγκεντρωτικά, τα ζητήματα που προέκυψαν μέσα από την εφαρμογή και των τριών δραστηριοτήτων είναι: η χρήση των μεταβλητών, το πέρασμα από την λεκτική περιγραφή στο συμβολισμό, οι λειτουργίες και οι περιορισμοί του eXpresser και η σημειωτική διαμεσολάβηση του ψηφιακού εργαλείου, όπου μια μαθήτρια αποτυπώνει την μεταβλητή στον πίνακα της αίθουσας χρησιμοποιώντας τον εικονικό συμβολισμό του eXpresser. Με άλλα λόγια, ενεργοποιείται μια διαδικασία, όπου ορισμένοι μαθητές νοηματοδοτούν την μεταβλητή ως έναν γενικευμένο αριθμό ενώ άλλοι την προσεγγίζουν εννοιολογικά περισσότερο ως ένα «εικονίδιο».

Εξέλιξη της επαγγελματικής γνώσης της εκπαιδευτικού

Η Ελένη εμφανίζει είδη γνώσεων σχετικά με την τεχνολογία για την εισαγωγή της άλγεβρας, ήδη, από τις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης (Ε.Α.) που προηγήθηκαν των εφαρμογών της. Ειδικότερα, αυτές οι γνώσεις μετουσιώθηκαν ως τον σημαντικότερο παράγοντα του διδακτικού της σχεδιασμού και μάλιστα διερευνήθηκαν μετά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων της. Επομένως, αποτελεί αξιοπρόσεχτο γεγονός ότι καθώς το πρόγραμμα PreMaTT εξελίσσεται χρονικά (Σχ. 3), η Ελένη εμφανίζει σταθερά πιο σύνθετα επίπεδα γνώσεων, φτάνοντας ακόμα και στο ανώτερο επίπεδο γνώσης (TPACK).

Συναντήσεις Ε.Α. πριν τον διδακτικό σχεδιασμό	Διδακτικός Σχεδιασμός και Αποτίμηση εκπαιδευτικού
TK,CK, PCK, TCK	PK, PCK, TCK, TPK, TPACK

Σχ. 3: Επίπεδα γνώσης TPACK ανά φάση ανάλυσης

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο σχεδιασμός του ερωτήματος «σύρε και άσε» (TPACK). Η Ελένη σχεδίασε το ερώτημα συνυπολογίζοντας πλήρως τις δυνατότητες που προσφέρει το ψηφιακό εργαλείο σε συνδυασμό με μία άψογη σύνθεση της μαθηματικής της γνώσης (αναγνώριση της δομής του μοτίβου, εμφάνιση αναδρομικής σχέσης) με την παιδαγωγική της γνώση (κιναισθητική αίσθηση, ρόλος χειραπτικού υλικού).

Συγκεκριμένα, αποτιμώντας την πρακτική της στο πλαίσιο μιας αναστοχαστικής συζήτησης, η Ελένη εστίασε στις λειτουργίες και τους περιορισμούς του ψηφιακού λογισμικού eXpresser (TCK), σημειώνοντας πως «*το κύριο θέμα που αναδείχτηκε από την εφαρμογή των δραστηριοτήτων μου είναι η σημειωτική διαμεσολάβηση του λογισμικού στην λεκτική περιγραφή του γενικού κανόνα και της χρήσης του αλγεβρικού συμβολισμού*» (TPK). Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε ότι η τεχνολογική γνώση της Ελένης εκτός από ότι διευρύνθηκε, έγινε κυρίαρχη καθώς κατάφερε να εντοπίσει και να συνειδητοποιήσει παραδείγματα από την εφαρμογή της που την ώθησαν στην ανάπτυξη της Τεχνολογικής και Παιδαγωγικής γνώσης του Περιεχομένου της. Για παράδειγμα, η εκπαιδευτικός κατέληξε στον προβληματισμό ότι η τεχνολογία (eXpresser) από μόνη της ίσως δεν είναι αρκετή ούτε πανάκεια για την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (TPACK).

Ελένη: «Τελικά οι μαθητές χρειάζονται περισσότερη εξοικείωση με τον eXpresser και απαιτείται μια πιο ομαλή μετάβαση ανάμεσα στις τρεις δραστηριότητες. Στο μέλλον ίσως να απλοποιούσα τα ζητούμενα, ξεκινώντας από την διατύπωση των ερωτημάτων.»

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού της Ελένης έφερε στην επιφάνεια κρίσιμα ζητήματα που αφορούν τον ρόλο των προσφερόμενων εργαλείων/αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση αλγεβρικών εννοιών. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκαν ορισμένα σημεία αντίθεσης, όπου οι αναπαραστάσεις/λειτουργίες του eXpresser τελικά λειτούργησαν μ' έναν τρόπο που άλλοτε επιβοηθούν και άλλοτε όχι στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών για το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Από τον διδακτικό σχεδιασμό και την πρακτική της Ελένης, αναδύθηκαν 4 παράγοντες επηρεασμού των διδακτικών της αποφάσεων: το μαθηματικό περιεχόμενο, ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser, οι διδακτικές πεποιθήσεις/εμπειρία και η αλληλεπίδραση των συναδέλφων/PreMaTT. Η τεχνολογική γνώση της Ελένης κυρίως μετά την εφαρμογή διευρύνθηκε και έγινε κυρίαρχη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η δημιουργία του ερωτήματος «σύρε και άσε» ως ανώτερο επίπεδο γνώσης TPACK. Παράλληλα, ο εντοπισμός εξέλιξης της γνώσης μιας εκπαιδευτικού με αυξημένα τυπικά προσόντα αποτελεί σημαντικό εύρημα της παρούσας έρευνας καθώς τονίζει για ακόμα μια φορά την συμβολή των κοινοτήτων πρακτικής στην επαγγελματική μάθηση και εξέλιξη των εκπαιδευτικών (Gueudet & Trouche, 2009).

Τέλος, ένα ακόμα εύρημα πρόσθετης ερευνητικής αξίας αποτελεί το γεγονός ότι τελικά η ψηφιακή τεχνολογία δεν πρέπει και δεν μπορεί να αποτελεί διδακτική πανάκεια, καθώς τελικά από μόνη της δεν εγγυάται το ομαλό πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Με αυτό τον τρόπο αναδεικνύεται για ακόμα μια φορά η αναγκαιότητα και η πολυπλοκότητα ενός κατάλληλου διδακτικού σχεδιασμού.

Σημειώσεις

1. **Penser les Ressources de l' Enseignement des Mathematiques dans un Temps de Transitions:** (**http://ife.ens-lyon.fr/ife/recherche/groupes-de-travail/prematt**)
2. **Ηλεκτρονική έκδοση του μικρόκοσμου eXpresser: http://web-expresser.appspot.com**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In *Early algebraization* (pp. 137-159). Springer, Berlin, Heidelberg.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199-218.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). Early Algebra. *Research into its nature, its learning, its teaching. Londres: SpringerOpen*.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, *108*(6), 1017.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. *ZDM*, *41*(4), 493-503.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

Strauss, A., & Corbin, J. M. (1997). *Grounded theory in practice*. Sage.

Wenger, E. (1999). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge university press.

Yin, R. K. (1994). Discovering the future of the case study. Method in evaluation research. *Evaluation practice*, *15*(3), 283-290.

ΑΝΤΙΘΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ-ΜΑΘΗΣΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Μαρίνος Αναστασάκης, **Ευαγγελία Δακορώνια, Ελένη Λαγουδάκη, Εμμανουέλλα Μακρυμανωλάκη, Αθηνά Ναλετάκη, Σοφία Παντελάκη**

ΠΚ, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

marinos@math.uoc.gr, evagdacor@gmail.com, elenilagoudaki@yahoo.co.uk, makrimanolakiem@gmail.com, malnal2@yahoo.gr, sonja.pandelaki@yahoo.gr

Η παρούσα μελέτη διερευνά τις αντιθέσεις που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Χρησιμοποιώντας δεδομένα από συνεντεύξεις με 82 φοιτητές και 19 καθηγητές, αναγνωρίσαμε έξι κύριες κατηγορίες αντιθέσεων, οι οποίες με τη σειρά τους αναλύθηκαν σε περαιτέρω υποκατηγορίες με βάση το περιεχόμενο τους. Η ανάλυση μας δεικνύει ότι τα υπό εξέταση συστήματα έχουν εισέλθει στο πρώτο στάδιο του κύκλου της επεκτεταμένης μάθησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί αύξηση των εκκλήσεων τόσο σε εθνικό όσο και σε ευρωπαϊκό επίπεδο για τη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας/μάθησης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Κεδράκα, 2016) ενώ στη διδακτική των μαθηματικών οι ερευνητές έχουν πλέον στρέψει την προσοχή τους και στη διερεύνηση ζητημάτων που αφορούν στη διδασκαλία και μάθηση των πανεπιστημιακών μαθηματικών (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz, & Rasmussen, 2016). Ταυτόχρονα, έχουν αυξηθεί τα ευρήματα διεθνών ερευνών σχετικά με την αποξένωση (alienation) που βιώνουν πολλοί φοιτητές σε σχέση με τις σπουδές τους στα Μαθηματικά (Hernandez-Martinez, 2016) καθώς και ο αριθμός των φοιτητών στα Ελληνικά Πανεπιστήμια που έχουν ξεπεράσει τα προβλεπόμενα έτη σπουδών ή εγκαταλείπουν τις σπουδές τους (ΥΠΕΠΘ, 2016). Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η αναγνώριση και συστηματική ταξινόμηση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές και οι καθηγητές κατά τη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών αντίστοιχα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Για τη μελέτη των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές και οι καθηγητές, υιοθετήσαμε ως θεωρητικό πλαίσιο τη Θεωρία Δραστηριότητας τρίτης γενιάς (ΘΔ). Σύμφωνα με τη ΘΔ (Engeström, 2001) κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από συγκεκριμένα δομικά μέρη. Το άτομο (υποκείμενο) χρησιμοποιεί διάφορα μέσα (εργαλεία) για να πετύχει το σκοπό της δραστηριότητας στην οποία συμμετέχει (αντικείμενο). Κατά τη δράση του το υποκείμενο ανήκει σε μια ομάδα ατόμων που έχει τον ίδιο σκοπό (κοινότητα), με τα μέλη της να έχουν εν γένει διαφορετικούς ρόλους και αρμοδιότητες (καταμερισμός εργασίας). Τέλος, οι σχέσεις υποκειμένου και κοινότητας καθορίζονται από συγκεκριμένα πρότυπα συμπεριφοράς τα οποία είναι αποδεκτά από την κοινότητα (κανόνες). Η ΘΔ τρίτης γενιάς προβλέπει την ύπαρξη διαφορετικών συστημάτων δραστηριότητας για τους φοιτητές και τους καθηγητές τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Στην μελέτη μας θεωρούμε ως δραστηριότητα (σύστημα δραστηριότητας) των φοιτητών την μάθηση των Μαθηματικών ενώ των καθηγητών τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ταυτόχρονα αναγνωρίζουμε την ύπαρξη άλλων συστημάτων που αλληλεπιδρούν με τους φοιτητές και τους καθηγητές καθώς και τη συμμετοχή των υποκειμένων σε διαφορετικά συστήματα δραστηριότητας.

Στη ΘΔ οι «προβληματικές καταστάσεις» που βιώνουν τα υποκείμενα ενός συστήματος έχουν συγκεκριμένο νόημα και ονομάζονται αντιθέσεις (contradictions). Οι αντιθέσεις δεν αναφέρονται σε απλά προβλήματα τα οποία πρέπει ή μπορούν να επιλυθούν εξισορροπώντας τις αντικρουόμενες δυνάμεις που τα δημιουργούν (Engeström & Sannino, 2011). Εν αντιθέσει, αναφέρονται σε «ιστορικά συσσωρευμένες δομικές εντάσεις εντός και μεταξύ συστημάτων» (Engeström, 2001, p.137). Οι αντιθέσεις δε σχετίζονται με προσωπικές και διαπροσωπικές κρίσεις οι οποίες επηρεάζουν τις βραχυπρόθεσμες σε χαρακτήρα δράσεις των ατόμων (Engeström, 2008). Με άλλα λόγια, οι αντιθέσεις αναφέρονται σε συστημικές εντάσεις οι οποίες υπερβαίνουν τα όρια των δράσεων των υποκειμένων σε ατομικό επίπεδο. Αποτελούν δε κινητήριες δυνάμεις για την εξέλιξη των συλλογικών δραστηριοτήτων, επιτρέπουν δηλαδή σε ένα σύστημα να εξελιχθεί και να μεταβεί σε ανώτερα στάδια (Engeström, 2015). Σύμφωνα με τους Engeström και Sannino (2011), οι αντιθέσεις είναι συστημικά φαινόμενα τα οποία οι ερευνητές δεν μπορούν να μελετήσουν άμεσα παρά μόνο μέσω των εκδηλώσεων τους (π.χ. κατά τον προφορικό λόγο) και προτείνουν τέσσερις ομάδες αντιθέσεων: τα διλήμματα (dilemmas), τις συγκρούσεις (conflicts), τις κρίσιμες συγκρούσεις (critical conflicts) και τα αδιέξοδα (double binds). Τα διλλήματα αναφέρονται στη διλημματική σκέψη των υποκειμένων κατά τη λήψη αποφάσεων και οφείλονται στις κοινωνικά αποδεκτές πεποιθήσεις. Οι συγκρούσεις σχετίζονται με προβλήματα που δημιουργούν στο υποκείμενο οι πράξεις άλλων υποκειμένων, οι οποίες καθιστούν τη δράση του λιγότερο αποτελεσματική. Οι κρίσιμες συγκρούσεις αναφέρονται στις αντιθέσεις που δημιουργούνται λόγω των πολλαπλών ρόλων που έχει ένα υποκείμενο, δηλαδή λόγω της συμμετοχής του σε διαφορετικά συστήματα δραστηριότητας. Τέλος, τα αδιέξοδα σχετίζονται με καταστάσεις κατά τις οποίες τα υποκείμενα έρχονται αντιμέτωπα με εξίσου μη αποδεκτές εναλλακτικές κατά τη δράση τους, νιώθουν δηλαδή ότι φτάνουν σε αδιέξοδο. Μία άλλη κατηγορία που έχει αναγνωρισθεί σε σχετικές μελέτες είναι εκείνη των αυτοσυγκρούσεων (self-conflicts) οι οποίες αναφέρονται σε αντιθέσεις παρόμοιες με τις συγκρούσεις, όμως το άτομο που καθιστά τη δράση του λιγότερο αποτελεσματική είναι το ίδιο το υποκείμενο (Anastasakis, 2018). Στη διδακτική των μαθηματικών η ΘΔ και η έννοια των αντιθέσεων έχει χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη διαφόρων φαινομένων όπως, η διδασκαλία των μαθηματικών (Stouraitis, Potari, & Skott, 2017), η μετάβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Jooganah & Williams, 2016), η σχέση των εργαλείων που χρησιμοποιούν οι φοιτητές με τους στόχους τους (Anastasakis, Robinson, & Lerman, 2017) και η μελέτη των τρόπων με τους οποίους εκλαμβάνουν το αντικείμενο της διδασκαλίας/μάθησης καθηγητές και φοιτητές (Jaworski, Robinson, Matthews, & Croft, 2012).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα ποιοτική έρευνα πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια μεταπτυχιακού μαθήματος με αντικείμενο τη μεθοδολογία της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών, με τα μέλη της ερευνητικής ομάδας να αποτελούν ο διδάσκων και οι πέντε μεταπτυχιακές φοιτήτριες που παρακολούθησαν το μάθημα. Κατά τη διάρκεια του εαρινού εξαμήνου 2019 πραγματοποιήθηκαν 25 ομαδικές συνεντεύξεις (2-5 άτομα) με 82 προπτυχιακούς φοιτητές (31 άντρες, 51 γυναίκες) και ατομικές συνεντεύξεις με 19 καθηγητές μέλη ΔΕΠ (17 άνδρες, 2 γυναίκες) του Τμήματος Μαθηματικών στο οποίο πραγματοποιήθηκε η έρευνα. Οι 82 φοιτητές προέρχονταν από διάφορα έτη σπουδών ($1^{ο}$:13, $2^{ο}$:23, $3^{ο}$:9, $4^{ο}$:11, $5^{ο}$:11, $6^{ο}$:12, $7^{ο}$:2, $8^{ο+}$:1). Στην αρχή κάθε συνέντευξης οι συμμετέχοντες πληροφορήθηκαν για τους σκοπούς της έρευνας και υπέγραψαν ειδικό έντυπο συναίνεσης. Η διάρκεια των συνεντεύξεων κυμάνθηκε από 40 έως 60 λεπτά. Οι συνεντεύξεις είχαν ημιδομημένη μορφή και το πρωτόκολλο που χρησιμοποιήθηκε περιείχε ερωτήσεις που κύριο σκοπό είχαν την καταγραφή των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι συμμετέχοντες κατά τη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών. Μετά το πέρας της συλλογής των δεδομένων, τα μέλη της ερευνητικής ομάδας απομαγνητοφώνησαν πλήρως όλες τις συνεντεύξεις. Για την ανάλυση των δεδομένων ακολουθήθηκε η Ποιοτική Ανάλυση Περιεχομένου (Schreier, 2014) σεβόμενοι τις προϋποθέσεις εφαρμογής της (unidimensionality, mutual exclusiveness, exhaustiveness, saturation, reliability, validity). Το κύριο αποτέλεσμα της μεθόδου αυτής έχει τη μορφή του λεγόμενου πλαισίου κωδικοποίησης (coding frame) και στοχεύει στην ταξινόμηση των δεδομένων. Το πλαίσιο κωδικοποίησης έχει ιεραρχική δομή και αποτελείται από τουλάχιστον δυο επίπεδα: τις κύριες κατηγορίες (main categories) που αναφέρονται στα θέματα που ενδιαφέρουν άμεσα τον ερευνητή και τις υποκατηγορίες (subcategories) οι οποίες αποτυπώνουν τι αναφέρεται στα δεδομένα σχετικά με τα θέματα αυτά (Schreier, 2014). Οι κύριες κατηγορίες που χρησιμοποιήσαμε βασίστηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο των Engeström και Sannino (2011) καθώς και στις αυτοσυγκρούσεις (Anastasakis, 2018). Οι υποκατηγορίες δημιουργήθηκαν με βάση το περιεχόμενο των δεδομένων για κάθε κατηγορία. Αρχικά αναγνωρίσθηκαν τα χωρία στα οποία οι συμμετέχοντες αναφέρονται στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν κατά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Έπειτα αποφασίσθηκε αν κάθε ένα από τα χωρία αυτά μπορεί να χαρακτηρισθεί ως αντίθεση ενώ στη συνέχεια, τα αναγνωρισμένα ως αντιθέσεις χωρία κωδικοποιήθηκαν με βάση τις εξής κύριες κατηγορίες: *συγκρούσεις*, *κρίσιμες συγκρούσεις*, *αυτοσυγκρούσεις*, *αδιέξοδα*, *διλήμματα* και *μετάβαση*. Η κύρια κατηγορία μετάβαση περιλαμβάνει αντιθέσεις που τοποθετούνται μεταξύ του τωρινού και του παρελθοντικού συστήματος των υποκειμένων (τριτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση).

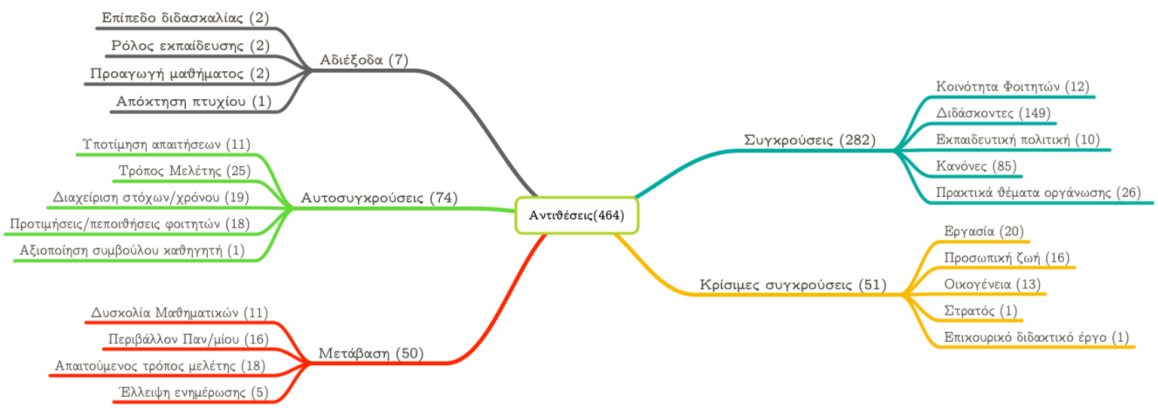
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των δεδομένων αναγνωρίσθηκαν συνολικά 583 αντιθέσεις (464 από φοιτητές, 119 από καθηγητές). Το πλαίσιο κωδικοποίησης για κάθε σύστημα δραστηριότητας παρουσιάζεται στις Εικόνες 1 (φοιτητές) και 2 (καθηγητές).

Ακολουθεί συνοπτική περιγραφή του περιεχόμενου κάθε υποκατηγορίας και παραδείγματα για τις κυριότερες από αυτές.

Α. Φοιτητές

Συγκρούσεις: αφορούν αντιθέσεις που εντοπίζονται μεταξύ της προοπτικής που υιοθετούν οι φοιτητές και εκείνης άλλων στοιχείων από το σύστημα τους (κοινότητα φοιτητών, κανόνες) ή στοιχείων από άλλα συστήματα τα οποία αλληλεπιδρούν με αυτό των φοιτητών (διδάσκοντες, εκπαιδευτική πολιτική, πρακτικά θέματα οργάνωσης). Η ***κοινότητα φοιτητών*** σχετίζεται με συγκρούσεις που δημιουργούνται μεταξύ του υποκειμένου και της ομάδας στην οποία ανήκει. Οι ***διδάσκοντες*** σχετίζονται με τις συγκρούσεις που δημιουργούνται μεταξύ των υποκειμένων και των διδασκόντων καθηγητών. Μπορεί να αφορούν τον τρόπο διδασκαλίας, τη συμπεριφορά του καθηγητή προς τους φοιτητές ή την αξιολόγηση του μαθήματος. Για παράδειγμα ο Φ37 αναφέρει: «Κυρίως αυτό μου ενοχλεί από τον τρόπο διδασκαλίας από τους καθηγητές μας εδώ - όχι όλους φυσικά- είναι ότι δεν σου κεντρίζουν το ενδιαφέρον κατά την ώρα του μαθήματος, ότι δεν παρακολουθούν τι γνωρίζει το κοινό που έχει μπροστά του… θεωρούν πράγματα δεδομένα από το σχολείο που επίσης δεν έχουμε διδαχθεί». Η ***εκπαιδευτική πολιτική*** αφορά συγκρούσεις που εμφανίζονται μεταξύ των φοιτητών και του συστήματος δραστηριότητας που σχετίζεται με τη λήψη πολιτικών αποφάσεων για θέματα παιδείας. Η πλειοψηφία των αντιθέσεων αφορά τις συγκρούσεις που δημιουργούνται λόγω του συστήματος εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Για παράδειγμα ο Φ24 μας είπε: «Από τη στιγμή λοιπόν που έχεις έναν τέτοιο μέσο όρο [10.000 μόρια] που αυτό μπορεί να σημαίνει ότι κάποιος μπορεί να έχει γράψει και 8 στα μαθηματικά κατεύθυνσης… Θεωρώ ότι πολλά προβλήματα ξεκινάνε από ‘κείνο το πράμα, από τη βάση της σχολής μας […] και αυτό δυστυχώς έχει πάρει μπάλα και πολλά παιδιά που δυστυχώς δεν μπορούν να ανταπεξέλθουνε στις ανάγκες της σχολή αυτής». Οι ***κανόνες*** αφορούν συγκρούσεις μεταξύ των φοιτητών και των τυπικών ή άτυπων κανόνων λειτουργίας του τμήματος, των άτυπων προτύπων συμπεριφοράς που υιοθετούν τα υποκείμενα ή γενικότερα την κουλτούρα που χαρακτηρίζει ένα σύστημα. Ο μεγαλύτερος αριθμός αυτών των συγκρούσεων σχετίζεται με τον οδηγό σπουδών. Τα ***πρακτικά θέματα οργάνωσης*** σχετίζονται με συγκρούσεις που δημιουργούνται μεταξύ των φοιτητών και του συστήματος δραστηριότητας το οποίο αφορά στη λήψη διοικητικού χαρακτήρα αποφάσεων σε επίπεδο τμήματος. Ο μεγαλύτερος αριθμός αυτών των συγκρούσεων σχετίζεται με το ωρολόγιο πρόγραμμα, τη λειτουργία των εργαστηρίων ή τις κτιριακές υποδομές.



Εικόνα 1. Το πλαίσιο κωδικοποίησης για τις αντιθέσεις των φοιτητών (σε παρένθεση η συχνότητα εμφάνισης τους).

Αυτοσυγκρούσεις: στην πλειοψηφία τους αφορούν τον ***τρόπο μελέτης*** των μαθηματικών, τη ***διαχείριση στόχων ή χρόνου*** κατά τη μελέτη, τις ***προτιμήσεις ή πεποιθήσεις*** των φοιτητών σχετικά με τη μάθηση των μαθηματικών ή την ***υποτίμηση των απαιτήσεων*** κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Για παράδειγμα, ο Φ10 μας αναφέρει: «Όλα αυτά τα χρόνια δεν έχω ένα συστηματικό τρόπο διαβάσματος οπότε υπάρχει μια πολύ μεγάλη πίεση περισσότερο στην περίοδο της εξεταστικής, πέφτουν όλα μαζεμένα και είναι πολύ δύσκολο να καλύψεις τη χρονιά».

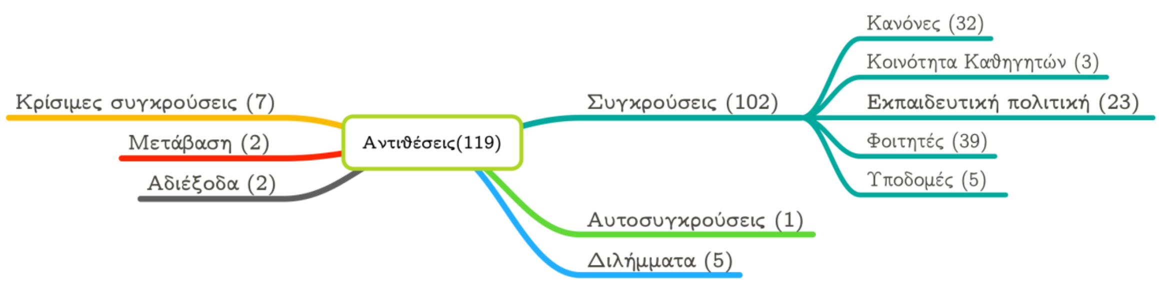
Μετάβαση: περιλαμβάνει αντιθέσεις που σχετίζονται κυρίως με τις διαφορές μεταξύ του συστήματος δραστηριότητας για τη μάθηση των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση και αφορούν κυρίως τον ***απαιτούμενο τρόπο μελέτης***, το ίδιο το ***περιβάλλον του Πανεπιστημίου*** καθώς και τη ***δυσκολία των Μαθηματικών*** στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Για παράδειγμα, ο Φ36 αναφέρει: «Όταν μπήκα στη σχολή μου φάνηκαν όλα πολύ χαοτικά, πολύ...δεν ήξερα τι να κάνω, πως να διαβάσω, πως να παρακολουθώ, μου φαινόταν όλα διαφορετικά και ξένα και τα μαθηματικά που είχα μπροστά μου τελείως διαφορετικά από αυτά του σχολείου».

Κρίσιμες συγκρούσεις: περιλαμβάνουν αντιθέσεις που δημιουργούνται λόγω των διαφορετικών ρόλων που έχουν οι φοιτητές λόγω της συμμετοχής τους σε διαφορετικά συστήματα δραστηριότητας. Στην πλειοψηφία τους σχετίζονται με την ***εργασία***, την ***προσωπική ζωή*** ή την ***οικογένεια*** των υποκειμένων. Για παράδειγμα, ο Φ15 αναφέρει: «Δουλεύω το καλοκαίρι όλο και συνεπώς και στην εξεταστική του Σεπτέμβρη και τον Οκτώβρη όταν ξεκίνησαν τα μαθήματα. Απλά ουσιαστικά αυτό επειδή με επηρεάζει λιγάκι στην εξεταστική, γιατί προφανώς όταν δουλεύεις σεζόν δωδεκάωρα και δεκάωρα, ο χρόνος δεν είναι αρκετός και για να διαβάσεις και για να φας και για να κοιμηθείς».

Αδιέξοδα: περιλαμβάνουν αντιθέσεις που δημιουργούνται επειδή οι φοιτητές έρχονται αντιμέτωποι με εξίσου μη αποδεκτές εναλλακτικές. Σχετίζονται με κυρίως με το επίπεδο διδασκαλίας των μαθηματικών και την αδυναμία προαγωγής σε κάποιο μάθημα. Για παράδειγμα, ο Φ52 αναφέρει: «Το θέμα είναι ότι καμιά φορά παρατηρείται αυτό το φαινόμενο. Ότι φοιτητές ίσως να έχουν την τάση να τραβήξουν λίγο το τμήμα προς τα πίσω. [...] Απλώς αυτό που θέλω να πω... Θα ήταν καλό το τμήμα να αρχίσει να προσαρμόζεται στους φοιτητές που έχει; Ή να κρατήσει το υπόβαθρο του και οι φοιτητές να προσπαθούν να προσαρμόζονται;»

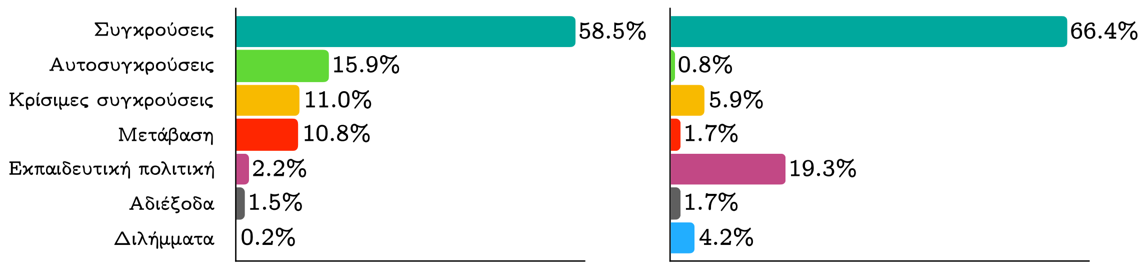
Β. Καθηγητές

Συγκρούσεις: αφορούν αντιθέσεις που εντοπίζονται μεταξύ των καθηγητών και άλλων στοιχείων του ίδιου συστήματος (κοινότητα καθηγητών, κανόνες) ή στοιχείων από άλλα συστήματα τα οποία αλληλεπιδρούν με αυτό των καθηγητών (πρακτικά θέματα οργάνωσης, εκπαιδευτική πολιτική). Η υποκατηγορία ***φοιτητές*** σχετίζεται με τις συγκρούσεις που δημιουργούνται μεταξύ των καθηγητών και των φοιτητών. Μπορεί να αφορούν τον τρόπο μελέτης, τα μαθησιακά κενά ή τη συμπεριφορά των φοιτητών προς τους καθηγητές. Για παράδειγμα ο ΔΕΠ19 αναφέρει: «υπάρχουν μεγάλες δυσκολίες διότι νομίζω οι φοιτητές δεν είναι συνηθισμένοι σε αυτό. Δηλαδή και στο σχολείο ως προς την αυτενέργεια πάσχουν, δηλαδή το συνηθισμένο είναι και στις ασκήσεις που έρχονται να προσπαθούν να γράψουν κάποιες ασκήσεις και μετά να διαβάσουνε λυμένες ασκήσεις παρά να κάτσουν να λύσουν ασκήσεις».



Εικόνα 2. Το πλαίσιο κωδικοποίησης για τις αντιθέσεις των καθηγητών (σε παρένθεση η συχνότητα εμφάνισης τους).

Η ***εκπαιδευτική πολιτική*** αφορά συγκρούσεις που εμφανίζονται μεταξύ των καθηγητών και του συστήματος δραστηριότητας που σχετίζεται με τη λήψη πολιτικών αποφάσεων για θέματα παιδείας. Στην πλειοψηφία τους σχετίζονται με το σύστημα εισαγωγής των φοιτητών. Για παράδειγμα ο ΔΕΠ9 αναφέρει: «Η δυσκολία που έχουμε εδώ πέρα [...] είναι ότι η συντριπτική πλειοψηφία των φοιτητών είναι αδιάφοροι. Δηλαδή οι πιο πολλοί μπαίνουν με ένα εισαγωγικό σύστημα που είναι τέτοιο που, αν δε γράψεις καλά στα Μαθηματικά, συνήθως μπαίνεις στο Μαθηματικό. Δηλαδή είναι παράλογο...». Οι ***κανόνες*** σχετίζονται με θέματα κουλτούρας και τυπικών κανόνων και αφορούν θέματα που σχετίζονται κυρίως με τον τρόπο διδασκαλίας, τον αριθμό των εγγεγραμμένων φοιτητών ή θέματα πολιτικής του τμήματος. Για παράδειγμα ο ΔΕΠ12 αναφέρει: «Το θέμα νοοτροπίας είναι ότι κάποιοι δεν θέλουν να... έχουν μάθει με τον πίνακα. Παλιότεροι συνάδελφοι δεν θέλουνε να το κάνουνε αυτό. Δεν... Θεωρούνε ότι αυτό δεν είναι μαθηματικά. Αλλά σήμερα υπάρχουνε άνθρωποι οι οποίοι κάνουνε αποδείξεις με τον υπολογιστή». Η ***κοινότητα καθηγητών*** αφορά συγκρούσεις που δημιουργούνται μεταξύ του υποκειμένου και της ομάδας στην οποία ανήκει. Τέλος οι ***υποδομές*** αναφέρονται σε αντιθέσεις που σχετίζονται με την έλλειψη υλικοτεχνικών υποδομών όπως ο εξοπλισμός εργαστηρίων με υπολογιστές. Οι υπόλοιπες υποκατηγορίες αναφέρονται σε αντιθέσεις λόγω των διαφορετικών ρόλων που έχουν οι καθηγητές (κρίσιμες συγκρούσεις), της μετάβασης των φοιτητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, τα αδιέξοδα και τα διλήμματα που βιώνουν οι καθηγητές καθώς και στις αντιθέσεις που δημιουργούνται λόγω των ίδιων των πράξεων τους (αυτοσυγκρούσεις). Στην Εικόνα 3 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα ποσοστά εμφάνισης κάθε κύριας κατηγορίας. Λόγω της σπουδαιότητας των αντιθέσεων που σχετίζονται με την μετάβαση και την εκπαιδευτική πολιτική οι υποκατηγορίες αυτές παρουσιάζονται ξεχωριστά.



Εικόνα 3: Τα ποσοστά εμφάνισης αντιθέσεων για τους φοιτητές (αριστερά) και τους καθηγητές (δεξιά)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συνοψίζοντας, οι αντιθέσεις στο σύστημα δραστηριότητας των φοιτητών σχετίζονται στην πλειονότητα τους με συγκρούσεις που εντοπίζονται μεταξύ των υποκειμένων και της προοπτικής που υιοθετούν άλλα άτομα και οντότητες (κοινότητα φοιτητών, διδάσκοντες, εκπαιδευτική πολιτική, κανόνες, πρακτικά θέματα οργάνωσης) ενώ ακολουθούν αντιθέσεις που σχετίζονται με τη δράση των ίδιων των ατόμων (αυτοσυγκρούσεις), τη μετάβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και τους διαφορετικούς ρόλους που έχουν οι φοιτητές. Στο σύστημα δραστηριότητας των καθηγητών, η πλειοψηφία των αντιθέσεων εντοπίζεται επίσης μεταξύ των υποκειμένων και της προοπτικής που υιοθετούν άλλα άτομα και οντότητες (φοιτητές, κανόνες, εκπαιδευτική πολιτική, κοινότητα καθηγητών, υποδομές) ενώ ακολουθούν αντιθέσεις που σχετίζονται με τους διαφορετικούς ρόλους που έχουν οι καθηγητές. Συγκρίνοντας τα ποσοστά των αντιθέσεων (Εικ. 3), παρατηρούμε ότι: (1) οι συγκρούσεις κυμαίνονται στα ίδια ποσοστά και για τα δύο μέρη, (2) η αναφορά σε αυτοσυγκρούσεις από τους καθηγητές είναι ελάχιστες, (3) οι φοιτητές βιώνουν περισσότερες κρίσιμες συγκρούσεις, (4) οι συγκρούσεις που δημιουργούνται λόγω εκπαιδευτικής πολιτικής αποτελούν αντικείμενο ανησυχίας περισσότερο για τους καθηγητές, (5) η μετάβαση αναγνωρίζεται ως αντίθεση περισσότερο από τους φοιτητές, (6) οι καθηγητές βιώνουν σε μεγαλύτερο ποσοστό διλημματικές σκέψεις.

Αν και η κατηγοριοποίηση των αντιθέσεων πραγματοποιήθηκε με βάση το πλαίσιο που πρότειναν οι Engeström και Sannino (2011), είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι μπορούν να ταξινομηθούν και με διαφορετικό κριτήριο. Ο Engeström (2015) προτείνει ότι οι αντιθέσεις ανάλογα με το που εντοπίζονται διακρίνονται σε: (α) πρωτοβάθμιες (εντός κάποιου στοιχείου ενός συστήματος δραστηριότητας), (β) δευτεροβάθμιες (μεταξύ διαφορετικών στοιχείων του ίδιου συστήματος), (γ) τριτοβάθμιες (μεταξύ διαφορετικών μορφών εξέλιξης του συστήματος), και (δ) τεταρτοβάθμιες (μεταξύ του κεντρικού συστήματος δραστηριότητας και γειτονικών συστημάτων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους). Με βάση αυτή την κατηγοριοποίηση, μπορούμε εύκολα να ταξινομήσουμε κάποιες από τις υποκατηγορίες των αντιθέσεων που βρήκαμε στην μελέτης μας ως εξής: (i) πρωτοβάθμιες: *αυτοσυγκρούσεις*, (ii) δευτεροβάθμιες: *κοινότητα φοιτητών*, *κοινότητα καθηγητών*, *κανόνες*, (iii) τεταρτοβάθμιες: *διδάσκοντες, φοιτητές, εκπαιδευτική πολιτική, μετάβαση, κρίσιμες συγκρούσεις, υποδομές, πρακτικά θέματα οργάνωσης*. Οι τριτοβάθμιες αντιθέσεις είναι λιγότερο συχνές και εμφανείς στα δεδομένα μας, όμως κάποιες από αυτές σχετίζονται με τα διλήμματα και τα αδιέξοδα που εξέφρασαν οι συμμετέχοντες. Σε αυτές τις περιπτώσεις κάποιοι φοιτητές ή καθηγητές απορρίπτουν, επικρίνουν ή εκφράζουν αμφιβολίες για την τρέχουσα μορφή του αντικειμένου που έχει η δραστηριότητα τους (Engeström, 2015). Για παράδειγμα, ο Φ28 αναφέρει σχετικά με το ποιο είναι/θα πρέπει να είναι το αντικείμενο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης: «… ο στόχος είναι να ελέγξει, αν κάποιος έχει γνώσεις ή ο στόχος είναι να διδάξει κάποιον; […] Οπότε πολύ συχνά μέσα στο μάθημα θα ακούσουμε καθηγητές να λένε: "ναι, αλλά εγώ δεν είμαι εδώ για να σου μάθω, είμαι εδώ για να σε ελέγξω" ή το αντίθετο. Οπότε πρέπει να ξέρουμε όλοι τι γίνεται, ποιος είναι ο στόχος, να δούμε αν μπορούμε να συμφωνήσουμε». Τέτοιου είδους αντιθέσεις αποτελούν κατά τη γνώμη μας ενδείξεις ότι τα υπό μελέτη συστήματα έχουν υπεισέλθει στο πρώτο στάδιο του κύκλου της επεκτεταμένης μάθησης (Engeström, 2015), το στάδιο της αμφισβήτησης (questioning), με την παρούσα μελέτη να αποτελεί το δεύτερο στάδιο του κύκλου, αυτό της ανάλυσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anastasakis, M. (2018). *An Activity Theory Investigation of Tool-Use in Undergraduate Mathematics (PhD Thesis)*. Loughborough, UK.

Anastasakis, M., Robinson, C. L., & Lerman, S. (2017). Links between students' goals and their choice of educational resources in undergraduate mathematics. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *36*(2), 67–80.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-Art and Looking Ahead. *ICME-13 Topical Surveys* (Vol. 1, pp. 1–32). Cham: Springer International Publishing.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, *14*(1), 133–156.

Engeström, Y. (2008). Weaving the texture of school change. *Journal of Educational Change*, *9*(4), 379–383.

Engeström, Y. (2015). Learning by Expanding (Second edition). New York: Cambridge University Press.

Engeström, Y., & Sannino, A. (2011). Discursive manifestations of contradictions in organizational change efforts. *Journal of Organizational Change Management*, *24*(3), 368–387.

Hernandez-Martinez, P. (2016). “Lost in transition”: Alienation and drop out during the transition to mathematically-demanding subjects at university. *International Journal of Educational Research*, *79*, 231–239.

Jaworski, B., Robinson, C., Matthews, J., & Croft, T. (2012). An activity theory analysis of teaching goals versus student epistemological positions. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *19*(4), 147–152.

Jooganah, K., & Williams, J. S. (2016). Contradictions between and within school and university activity systems helping to explain students’ difficulty with advanced mathematics. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *35*(3), 159–171.

Schreier, M. (2014). Qualitative Content Analysis. In U. Flick (Ed.), *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis* (pp. 170–183). SAGE.

Stouraitis, K., Potari, D., & Skott, J. (2017). Contradictions, dialectical oppositions and shifts in teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 203–217.

Κεδράκα, Κ. (Ed.). (2016). Πρακτικά του Συμποσίου: Πανεπιστημιακή Παιδαγωγική: Η εκπαίδευση και διδασκαλία στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, μια terra incognita? Αλεξανδρούπολη.

ΥΠΕΠΘ. (2016). *Η στρατηγική της Ανώτατης Εκπαίδευσης στην Ελλάδα, 2016-2020*. Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων.

ΜΗ ΘΕΣΜΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΠΟΥ ΑΞΙΟΠΟΙΟΥΝ ΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Αγγελική Δίκαρου, Χρυσαυγή Τριανταφύλλου

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

angeliki_ad@hotmail.com & chrtriantaf@math.uoa.gr

Η αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών αποτελεί μια σύνθετη διαδικασία που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών. Η παρούσα έρευνα μελετά τις μη θεσμικές πηγές που αξιοποιεί ο εκπαιδευτικός κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης. Υιοθετούμε την άποψη ότι οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούν με τις πηγές και τις διαμορφώνουν προκειμένου να επιτύχουν τους αξιολογικούς τους στόχους. Η εργασία είναι μελέτη περίπτωσης που στηρίζεται σε συνεντεύξεις με πέντε εκπαιδευτικούς Μέσης Εκπαίδευσης. Τα είδη των μη θεσμικών πηγών που αναδείχθηκαν ήταν τα εξωσχολικά βοηθήματα, οι διαδικτυακές πηγές, η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών, η αλληλεπίδραση με τους μαθητές, η εκπαιδευτική εμπειρία καθώς και η επιμόρφωση σε μεταπτυχιακό επίπεδο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αξιολόγηση αποτελεί μια αναπόσπαστη λειτουργία της μαθησιακής και διδακτικής διαδικασίας, η οποία καθορίζεται από πλήθος κοινωνικών και πολιτισμικών παραγόντων. Η διαδικασία της αξιολόγησης λειτουργεί ως μοχλός βελτίωσης των εκπαιδευτικών πρακτικών (Κασσωτάκης, 2003) και έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Οι έρευνες έχουν αναδείξει ορισμένες πτυχές που διέπουν την αξιολογική διαδικασία, όπως τα ζητήματα ισότητας και δικαιοσύνης κατά την αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών (Morgan & Watson, 2002), η ανάλυση των σταδίων του κύκλου αξιολόγησης (Christoforidou, Kyriakides, Antoniou & Creemers, 2014) καθώς και η σύνδεση της αξιολόγησης με τις μαθησιακές ανάγκες μέσω της διαμορφωτικής αξιολόγησης (OECD, 2005).

Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, το ενδιαφέρον της έρευνας έχει στραφεί στη διερεύνηση των πηγών (resources) που έχουν στη διάθεσή τους οι εκπαιδευτικοί και καθορίζουν τις διδακτικές και συνεπώς και τις αξιολογικές τους πρακτικές. Διεξοδικά έχουν μελετηθεί πηγές όπως τα σχολικά βιβλία (Rezat, 2012) ή τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Doyle, 1993; Remillard, 2005). Σύμφωνα με τους Gueudet και Trouche (2009) οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τις πηγές με ποικίλους τρόπους και σε διάφορες στιγμές κατά τη διδακτική πράξη. Οι εκπαιδευτικοί συμβουλεύονται πηγές που διατηρούν ένα θεσμικό χαρακτήρα όπως, η νομοθεσία, το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, τα σχολικά εγχειρίδια, η τράπεζα θεμάτων κ.α. Για παράδειγμα, σχετικά με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, οι Clandinin και Connelly (1992) ισχυρίζονται πως στην πραγματικότητα οι εκπαιδευτικοί είναι αυτοί που διαμορφώνουν το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Παρόλα αυτά, συναντάμε στη βιβλιογραφία και πηγές που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί στην αξιολόγηση οι οποίες έχουν μη θεσμικό χαρακτήρα όπως για παράδειγμα οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών (Κλώθου & Σακονίδης, 2011).

Η αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών είναι μια θεσμοθετημένη διαδικασία διεθνώς. Στο ελληνικό νομοθετικό πλαίσιο διακρίνονται τρία είδη αξιολόγησης, η διαγνωστική, η διαμορφωτική αξιολόγηση που αφορά στην επίτευξη των επιδιωκόμενων διδακτικών στόχων και η τελική/αθροιστική αξιολόγηση που επιδιώκει την έγκυρη και αξιόπιστη αποτίμηση των γνώσεων των μαθητών ενώ εργαλεία αξιολόγησης μπορεί να είναι ολιγόλεπτα τεστ, διαγωνίσματα κ.α. (Π.Δ.46/2016).

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τα είδη και το ρόλο των πηγών που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την αξιολογική διαδικασία στο μάθημα των μαθηματικών, εστιάζοντας ιδιαίτερα σε μη θεσμικές πηγές όπως τα εξωσχολικά εγχειρίδια, οι διαδικτυακές πηγές κ.α. Συγκεκριμένα, μελετώνται οι μη θεσμικές πηγές και πώς αυτές αξιοποιούνται κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι:

- Ποιες είναι οι μη θεσμικές πηγές που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών κατά την αξιολογική διαδικασία;
- Με ποιους τρόπους οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τις παραπάνω πηγές;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην εκπαιδευτική διαδικασία συναντάμε πηγές που περιλαμβάνουν υλικής φύσης αντικείμενα (material resources) όπως ηλεκτρονικοί υπολογιστές και σχολικά εγχειρίδια, πολιτισμικές πηγές (cultural resources) όπως η γλώσσα- επικοινωνία και ανθρώπινες πηγές (human resources) που αφορούν άτομα όπως μαθητές αλλά και διαδικασίες όπως η αλληλεπίδραση με συναδέλφους (Adler, 2000). Οι Gueudet, και Trouche (2009) υποστήριξαν ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε μια διαδικασία εργαλειακής γένεσης (documentational genesis) φαίνεται να παρέχει ευκαιρίες στους ίδιους να δημιουργήσουν και να διαμορφώσουν τις παραπάνω πηγές ως διδακτικά τους εργαλεία. Οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούν με τις πηγές, τα χαρακτηριστικά τόσο τα δικά τους όσο και της πηγής, επηρεάζουν την αλληλεπίδραση και το αποτέλεσμα αυτής είναι η διδασκαλία με τη βοήθεια της πηγής. Συνεπώς η ίδια πηγή μπορεί να έχει διαφορετικούς ρόλους ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται αλλά και ανάλογα με τον εκπαιδευτικό. Ένα τέτοιο παράδειγμα αλληλεπίδρασης με ένα είδος θεσμικής πηγής αποτελεί η χρήση του σχολικού βιβλίου (Grave & Pepin, 2015).

Στην παρούσα έρευνα θα μελετήσουμε την αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών με μη θεσμικές πηγές στη διαδικασία της αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών τους. Μια σημαντική κατηγορία μη θεσμικών πηγών που έχει μελετηθεί ιδιαίτερα αποτελούν οι διαδικτυακές πηγές. Υπάρχουν ψηφιακές πηγές με συγκεκριμένες δυνατότητες όπως, ηλεκτρονικά βιβλία με διαδικτυακούς συνδέσμους ή διαδικτυακές ασκήσεις με συγκεκριμένα διαδραστικά χαρακτηριστικά (Bueno-Ravel & Gueudet, 2009). Οι διαδικτυακές πηγές περιλαμβάνουν ασκήσεις που ταξινομούνται σύμφωνα με το μαθηματικό περιεχόμενο και τη δυσκολία τους ενώ το περιβάλλον τους μπορεί να παρέχει διορθώσεις, επεξηγήσεις, εργαλεία επίλυσης και βαθμολογία (Cazes, Gueudet, Hersant & Vandebrouck, 2007).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πορεία της έρευνας

Στο αρχικό στάδιο της έρευνας πραγματοποιήθηκε μελέτη του θεσμικού πλαισίου και των Προεδρικών Διαταγμάτων σε σχέση με την αξιολόγηση των μαθητών, ενώ στη συνέχεια ακολούθησαν αρχικές συνεντεύξεις με δύο σχολικούς συμβούλους. Με βάση τα λεγόμενά τους συλλέχθηκαν σημαντικές πληροφορίες, σχετικά με θεσμικές αλλά και μη θεσμικές πηγές που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την αξιολόγηση των μαθητών. Στο τελικό στάδιο αξιοποιήθηκαν οι πληροφορίες των σχολικών συμβούλων στη διαμόρφωση των ερωτημάτων για τις συνεντεύξεις με πέντε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σε αυτές τις συνεντεύξεις συζητήθηκαν εκτενέστερα οι μη θεσμικές πηγές στις οποίες ανατρέχουν και πως αυτές αξιοποιούνται ως προς τα εργαλεία και τα είδη αξιολόγησης. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε στοιχεία από το τελικό στάδιο της έρευνας η οποία αποτελεί μελέτη περίπτωσης και το μεθοδολογικό πλαίσιο βασίστηκε στην ποιοτική ανάλυση περιεχομένου (qualitative content analysis). Η έρευνα στηρίχθηκε στις αρχές της Θεμελιωμένης Θεωρίας (grounded theory) (Charmaz & Belgrave, 2007).

Ερευνητικά δεδομένα

Τα ερευνητικά δεδομένα αποτέλεσαν οι ημιδομημένες συνεντεύξεις με πέντε εκπαιδευτικούς μαθηματικών σε θέματα που αφορούν στις αξιολογικές τους πρακτικές. Σε αυτές συζητήθηκαν οι προσωπικές απόψεις των εκπαιδευτικών για την αξιολόγηση όπως: «*Όταν αξιολογείτε την επίδοση των μαθητών σας που δίδετε ιδιαίτερη έμφαση;*» και ως προς το κομμάτι των πηγών: «*Ποιες είναι οι πηγές που βασίζεστε/ ανατρέχετε συνήθως για να διαμορφώσετε τα εργαλεία αξιολόγησης; Εξηγήστε με ποιο τρόπο χρησιμοποιείτε την κάθε πηγή. Δώστε ένα παράδειγμα.*»

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν πέντε εκπαιδευτικοί μαθηματικών, τρείς γυναίκες και δύο άντρες, οι οποίοι εργάζονται σε Δημόσια σχολεία Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Δύο εξ αυτών διδάσκουν σε Λύκειο, οι Ε2(Λ) και Ε4(Λ) και τρείς σε Γυμνάσιο Ε1(Γ), Ε3(Γ) και Ε5(Γ). Οι εκπαιδευτικοί είχαν από πέντε έως εικοσιπέντε χρόνια διδακτικής εμπειρίας.

Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Από τις απομαγνητοφωνήσεις δημιουργήθηκε ένας συγκεντρωτικός πίνακας μη θεσμικών πηγών όπως αυτές καθορίστηκαν και διαμορφώθηκαν από τα λεγόμενα των εκπαιδευτικών. Με αυτόν τον τρόπο απαντάμε στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα. Από τις πέντε συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς αναδείχθηκαν τέσσερις κυρίαρχοι άξονες σχετικά με κάθε πηγή. Οι άξονες αυτοί ήταν, η σημασία που της αποδίδουν οι εκπαιδευτικοί, το είδος αξιολόγησης που την κατατάσσουν (π.χ. διαμορφωτική), τα εργαλεία αξιολόγησης που σχεδιάζουν βάσει αυτής (π.χ.

ολιγόλεπτα τεστ) και οι τρόποι που διαμορφώνουν τα εργαλεία ανά πηγή. Στο σύνολό τους οι άξονες αυτοί επιχειρούν να απαντήσουν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα είδη των πηγών

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται οι μη θεσμικές πηγές στις οποίες αναφέρθηκαν οι εκπαιδευτικοί.

ΜΗ ΘΕΣΜΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ
Εξωσχολικά βοηθήματα
Εμπειρία από συμμετοχή σε μεταπτυχιακές σπουδές
Διαδικτυακές πηγές
Συνεργασία με συναδέλφους
Αλληλεπίδραση με μαθητές
Εκπαιδευτική εμπειρία

Πίνακας 1: Τα είδη των μη θεσμικών πηγών

Στην κατηγορία *εξωσχολικά βοηθήματα* εντάσσονται τα βοηθητικά συγγράμματα σε έντυπη μορφή που επηρεάζουν άμεσα τους εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, ανέφεραν ότι συμβουλεύονται συχνά τέτοιου είδους βοηθήματα (*Ε4(Λ): Διαλέγουμε κάποιες ασκήσεις … επηρεασμένοι από τα διάφορα βιβλία που κυκλοφορούν*). Τα χρησιμοποιούν κυρίως για τη λήψη ιδεών κατά τον σχεδιασμό και την τροποποίηση γραπτών εργαλείων που προορίζονται κυρίως για την τελική/αθροιστική αξιολόγηση. Κάποιοι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι τα επιλέγουν με βάση το συγγραφέα (*Ε2(Λ): Έχω εμπιστοσύνη σε κάποιους συγγραφείς που ξέρω ότι είναι και καλοί μαθηματικοί)*.

Η εμπειρία σε επίπεδο *μεταπτυχιακών σπουδών*, συνεισφέρει συνήθως με έμμεσο τρόπο, μέσω της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου αλλά και της αλληλεπίδρασης με ερευνητές της διδακτικής, στις αξιολογικές συνήθειες των εκπαιδευτικών. Ως πηγή αξιοποιείται κυρίως στη διαμορφωτική αξιολόγηση καθώς οι εκπαιδευτικοί την αξιοποιούν καταγράφοντας τις αντιδράσεις των μαθητών και την εξέλιξη της πορείας τους, προκειμένου να αποκτήσουν πληροφορίες για το επίπεδο γνώσης και κατανόησης τους. Ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα είναι το παρακάτω:

Ε5(Γ): Μετά το μεταπτυχιακό αντιλήφθηκα πως η αξιολόγηση είναι να καταλάβω τον τρόπο με τον οποίο έχουν σκεφτεί οι μαθητές ή σε ποιο ακριβώς σημείο βρίσκονται σε σχέση με το μάθημα που γίνεται.

Ως προς την τελική αξιολόγηση φάνηκε πως σχεδιάζουν αξιολογικά εργαλεία συσχετισμένα με τους διδακτικούς στόχους που θέτουν, δίνοντας βαρύτητα σε παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές (*Ε3(Γ): Δε τα έβαζα παλιά, μετά απ' το μεταπτυχιακό τα βάζω, δηλαδή εστιάζω σε κάποια λάθη τους*).

Ως ξεχωριστή πηγή αντιμετωπίζονται στα πλαίσια της παρούσας ανάλυσης οι *διαδικτυακές πηγές*. Σε αυτή συμπεριλαμβάνεται η χρήση του διαδικτύου, μέσω της αλληλεπίδρασης κατά τη διαμόρφωση και χρήση των αξιολογικών εργαλείων για τη διαμορφωτική και τελική αξιολόγηση. Σε αυτό το είδος πηγής έχουν ενταχθεί οι διαδικτυακές κοινότητες (forum, blogs) και οι ομάδες εκπαιδευτικών των μαθηματικών στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης που δημιουργούνται με σκοπό την αλληλεπίδραση μεταξύ των εκπαιδευτικών καθώς επίσης και η ηλεκτρονική πλατφόρμα (η-τάξη) μαθητών, που παρέχει ένα περιβάλλον αλληλεπίδρασης μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών. Έγινε εμφανής η ξεχωριστή σημασία που αποδίδουν οι εκπαιδευτικοί σε αυτά τα είδη πηγών. Για παράδειγμα, η Ε1(Γ) ανέφερε: *Για μένα τα forum είναι πολύ βοηθητικά. Δηλαδή τη θέση του συμβούλου για μένα την έχει το ίντερνετ, οι ομάδες στο facebook*. Μέσω αυτών έχουν το πλεονέκτημα να παρακολουθούν διδακτικές προσεγγίσεις από διακεκριμένους εκπαιδευτικούς και να εκφράζουν προβληματισμούς που αντιμετωπίζουν σε καθημερινή βάση σε θέματα αξιολόγησης. Παράλληλα έχουν την ευχέρεια να αναζητούν εργαλεία αξιολόγησης με συγκεκριμένα κριτήρια που οι ίδιοι θέτουν, όπως εστίαση σε λάθη, παρανοήσεις μαθητών ή πρωτοτυπία ιδεών. Οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τα αξιολογικά εργαλεία που προσφέρει η ηλεκτρονική πλατφόρμα (eclass) για να έχουν μια γρήγορη και εποπτική εικόνα της επίδοσης των μαθητών όπως αναφέρει ο Ε5(Γ).

Ε5(Γ): Μπορεί να τους βάλω μια ερώτηση που να έχουν να επιλέξουν σωστές απαντήσεις από κάτω αλλά εγώ μπορώ να δω με πόσες προσπάθειες το κάνανε και πως το κάνανε [...] το σύστημα τους δίνει από κάτω ότι είναι σωστό και τους δίνει και μια βαθμολογία αυτόματα.

Η *συνεργασία εκπαιδευτικών με συναδέλφους*, εντός και εκτός σχολικής κοινότητας, ανήκει στο ευρύτερο είδος πηγών της κοινωνικής και πολιτισμικής αλληλεπίδρασης με την εκπαιδευτική κοινότητα. Η συνεργασία εντός σχολικού πλαισίου κρίθηκε από τους περισσότερους εκπαιδευτικούς ως απαραίτητη και δομείται μέσα από την εμπιστοσύνη σε πιο έμπειρους συναδέλφους. Κατά τη διεξαγωγή τελικών εξετάσεων οι εκπαιδευτικοί συγκρίνουν τις επιδόσεις των μαθητών και σε άλλα μαθήματα ή ανταλλάσσουν ιδέες για τα αξιολογικά εργαλεία που έχουν σχεδιάσει. Ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα είναι το παρακάτω:

Ε3(Γ): Για το βαθμό ας πούμε στο τετράμηνο σε κάποια παιδιά που ίσως έχω περισσότερη αμφιβολία θα ρωτήσω και άλλους, γιατί φοβάμαι ότι μπορεί να το έχω αδικήσει. Δηλαδή στη Φυσική ας πούμε εσένα πως λειτουργεί; λύνει ασκήσεις;

Οι κοινότητες εκπαιδευτικών εκτός σχολικού πλαισίου επηρεάζουν τους εκπαιδευτικούς με έμμεσο τρόπο ενώ φάνηκε πως τους ενώνει κάποιο κοινό χαρακτηριστικό όπως για παράδειγμα η επιμόρφωση. Κατά την τελική και διαμορφωτική αξιολόγηση οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν και διαχειρίζονται γραπτά αξιολογικά εργαλεία συζητώντας μεταξύ τους ζητήματα όπως η διαβάθμιση δυσκολίας θεμάτων.

Μια απ' τις πιο σημαντικές κατηγορίες η οποία αντιμετωπίζεται και μελετάται ως ξεχωριστή πηγή, αποτελεί *η αλληλεπίδρασή με τους μαθητές*. Η ανάγκη για τον διαχωρισμό αυτό, φάνηκε μέσα από τα λεγόμενα των εκπαιδευτικών όπου σε αρκετές περιπτώσεις έκαναν σαφή την έντονη επίδραση που έχει σε αυτούς η σχέση τους με τους μαθητές. Η πηγή αυτή αξιοποιείται και στα τρία είδη αξιολόγησης διαγνωστική, διαμορφωτική και τελική. Οι εκπαιδευτικοί αντλούν πληροφορίες που αφορούν την καθημερινή επίδοση των μαθητών σε δραστηριότητες της τάξης, το επίπεδο μαθηματικών γνώσεων και την προσωπική τους ενασχόληση με το μάθημα εκτός σχολικής τάξης. Παράλληλα αναστοχάζονται σε ζητήματα που έχουν σχέση με αξιολογικές πρακτικές που έχουν ήδη εφαρμόσει. Μέσω της αλληλεπίδρασης με τους μαθητές οι εκπαιδευτικοί συλλέγουν πλήθος δεδομένων που τις αξιοποιούν σε μια μεγάλη ποικιλία τόσο γραπτών (π.χ. έλεγχος τετραδίων, καταγραφή παρατηρήσεων) όσο και προφορικών εργαλείων αξιολόγησης (π.χ. προφορικός έλεγχος στον πίνακα, διάλογος στη τάξη). Για την καταγραφή παρατηρήσεων η Ε3(Γ) αναφέρει: *Ναι κρατάω σημειώσεις για κάποια που μου κάνει εντύπωση, αν κάτι δω … κάποια επιδείνωση στην επίδοση θα το κρατήσω*. Για την παρακολούθηση της καθημερινής συμμετοχής του κάθε μαθητή η Ε4(Λ) αναφέρει: *Όταν θα βάλω ένα φύλλο εργασίας να το δουλέψουν στην τάξη [υπολογίζω] το πώς ανταποκρίνεται το κάθε παιδί και πώς το αντιλαμβάνεται.* Για τον έλεγχο τετραδίου:

Ε2(Λ): Τους παίρνω τα τετράδια γιατί θέλω να δω αν γράφουν αλλά και τι γράφουν; Είναι κι' αυτό ένα κομμάτι της αξιολόγησης δεν μπορεί να πάρει τον ίδιο βαθμό ένας που δε γράφει με έναν που είναι το τετράδιο του γεμάτο.

Για τις γραπτές δοκιμασίες: Ε5(Γ) *όταν δε μου έγραφαν καλά τους έλεγα να έρθετε το Σάββατο, καθίστε όσην ώρα θέλετε να γράψετε. Κάπως αυτό τα απελευθέρωσε.* Η παρουσία της πηγής αυτής είναι ενεργή σε όλη την πορεία της αξιολόγησης. Οι εκπαιδευτικοί μπαίνουν στη διαδικασία κατανόησης παραγόντων όπως το άγχος των μαθητών, η πίεση του χρόνου αλλά και η δύσκολη φύση των μαθηματικών και διατηρούν επικοινωνία με τους γονείς για την εξέλιξη και επίδοση των μαθητών.

Η *εκπαιδευτική εμπειρία* αποτελείται από πλήθος παραγόντων οι οποίοι μπορεί να σχετίζονται με τα χρόνια διδακτικής εμπειρίας, τη σύνθεση των μαθητών και τις κατηγορίες σχολείων που έχουν διδάξει (π.χ. ΓΕΛ, ΕΠΑ.Λ.), τη σχολική βαθμίδα που έχουν διδάξει, την εξέλιξη στους τρόπους διαχείρισης της τάξης στο σύνολό της, τις προσωπικές απόψεις για τα κριτήρια αξιολόγησης που διαμορφώνονται με τα χρόνια κ.α. Η πηγή αυτή προσπαθεί να προσεγγίσει σε ένα βαθμό όλα αυτά τα στοιχεία που συνθέτουν την 'πείρα του εκπαιδευτικού'. Συμβάλλει κυρίως στη διαμορφωτική αλλά και στην τελική αξιολόγηση ενισχύοντας τους εκπαιδευτικούς να καθορίσουν αξιολογικά κριτήρια αλλά και να αποτιμήσουν και να βελτιώσουν τα αξιολογικά τους εργαλεία. Χαρακτηριστικό απόσπασμα είναι το παρακάτω:

Ε1(Γ): Παλιά αξιολογούσα πολύ πιο αυστηρά έχω γίνει πολύ πιο επιεικής και αρχίζω και μπαίνω στη θέση των μαθητών. Στις πρώτες επαφές με την τάξη είχα υψηλές απαιτήσεις και καθόλου ευλυγισία ούτε εμπειρία να δω τι δυσκολεύει τους μαθητές. Όσο περνάνε τα χρόνια πάντως γίνομαι αρκετά πιο επιεικής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Τα είδη των μη θεσμικών πηγών που αναδείχθηκαν σε αυτήν την έρευνα είναι τα εξωσχολικά βοηθήματα, οι διαδικτυακές πηγές, η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών, η αλληλεπίδραση με τους μαθητές, η εκπαιδευτική εμπειρία καθώς και η εμπειρία από συμμετοχή σε προγράμματα μεταπτυχιακών σπουδών. Αυτά τα είδη είναι υβριδικά διότι φαίνεται να ενσωματώνουν χαρακτηριστικά και από τις τρεις κατηγορίες πηγών της Adler (2000). Οι ανθρώπινοι πόροι, όπως η αλληλεπίδραση με τους μαθητές και η συνεργασία με συναδέλφους εκπαιδευτικούς μπορεί να σχετίζονται με τη χρήση διδακτικού υλικού (π.χ. τετράδια εργασιών) και πολιτισμικών πηγών (π.χ. επικοινωνία μεταξύ εκπαιδευτικών για την επίδοση των μαθητών). Οι εκπαιδευτικοί αναζητούν υλικής φύσης πηγές για την αξιολόγηση των μαθητών τους όπως εξωσχολικά βοηθήματα αλλά ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση κυρίαρχη είναι η παρουσία του ανθρώπινου παράγοντα (π.χ. ο συγγραφέας του βοηθήματος). Το ίδιο και οι διαδικτυακές πηγές οι οποίες διατηρούν μια πολιτισμική διάσταση με κυρίαρχο πάλι τον ανθρώπινο παράγοντα (π.χ. συνάδελφοι εκπαιδευτικοί στο φόρουμ).

Κοινό χαρακτηριστικό όλων των πηγών είναι ότι οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούν μαζί τους και τις διαμορφώνουν ανάλογα με τις ανάγκες τους. Μέσα από αυτή την αλληλεπίδραση προκύπτουν και οι τρόποι αξιοποίησης των πηγών αυτών κατά την αξιολογική διαδικασία. Τα εξωσχολικά συγγράμματα αξιοποιούνται για τη λήψη ιδεών κατά τη διαμόρφωση γραπτών εργαλείων αξιολόγησης σε επίπεδο διαμορφωτικής και τελικής αξιολόγησης. Η εμπειρία από συμμετοχή σε μεταπτυχιακές σπουδές συμβάλλει στην αλλαγή στάσης σε θέματα κατανόησης των μαθητών και στην αναγνώριση της σημασίας σύνδεσης των διδακτικών στόχων με τη διαμόρφωση των αξιολογικών εργαλείων. Η συνεργασία των εκπαιδευτικών εντός σχολικής κοινότητας περιλαμβάνει την ανταλλαγή ιδεών για τα αξιολογικά εργαλεία και τη σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών. Κατά την αλληλεπίδραση με τους μαθητές οι εκπαιδευτικοί αντλούν πληροφορίες που αφορούν κυρίως τη διαμόρφωση εργαλείων για τη διαμορφωτική αξιολόγηση όπως η καταγραφή παρατηρήσεων στην τάξη ή ο έλεγχος του τετραδίου του μαθητή. Επιπλέον, η εκπαιδευτική εμπειρία συμβάλλει σε διαδικασίες αποτίμησης των αξιολογικών τους πρακτικών και σε αλλαγές προσέγγισης στο σχεδιασμό των αξιολογικών τους εργαλείων. Οι διαδικτυακές πηγές προσφέρουν δυνατότητα επικοινωνίας μεταξύ των εκπαιδευτικών σε ζητήματα αξιολόγησης και αναζήτηση υλικού που εστιάζει σε αξιολογικά εργαλεία με συγκεκριμένα κριτήρια που οι ίδιοι θέτουν, όπως εστίαση σε συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών. Από τα λεγόμενα των εκπαιδευτικών φαίνεται ότι οι διαδικτυακές πηγές αποτελούν ένα ανερχόμενο και σταδιακά εξελισσόμενο είδος πηγής.

Τα χαρακτηριστικά των μη θεσμικών πηγών είναι η ευκολία στην πρόσβαση και τη χρονική διαχείριση αλλά κυρίως η συνεισφορά τους με πρακτικό τρόπο στα καθημερινές απαιτήσεις της αξιολογικής διαδικασίας. Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η παρούσα έρευνα θα πρέπει να επεκταθεί σε μεγαλύτερο δείγμα συμμετεχόντων με τη χρήση και άλλων ερευνητικών εργαλείων πέραν των συνεντεύξεων, για παράδειγμα εθνογραφικής παρατήρησης στη σχολική τάξη κατά τη διάρκεια αξιολογικών πρακτικών, για να επιβεβαιωθούν και να επεκταθούν τα ερευνητικά συμπεράσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 205-224.

Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2009). Online resources in mathematics, teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 1–20.

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., Vandebrouck, F. (2007). Using e-Exercise Bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 11*(3), 327-350.

Charmaz, K., & Belgrave, L. L. (2007). *Grounded theory.* The Blackwell encyclopedia of sociology.

Christoforidou, M., Kyriakides, L., Antoniou, P., & Creemers, B. P. M. (2014). Searching for stages of teacher's skills in assessment. *Studies in Educational Evaluation, 40*(1), 1–11.

Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (1992). Teacher as curriculum maker. In P. W. Jackson (Ed.), *Handbook of research on curriculum* (pp. 363-401). New York: Macmillan.

Doyle, W. (1993). Constructing curriculum in the classroom. In F. K. Oser, A. Dick, & J. Patry (Eds.), *Effective and responsible teaching* (pp. 66-79). San Francisco: Jossey-Bass.

Grave, I., & Pepin, B. (2015). Teachers' use of resources in and for mathematics teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3–4), 199–222.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers*? Educational Studies in Mathematics,* 71, 199–218.

Morgan, C., & Watson, A. (2002). The interpretative nature of teacher's assessment of students 'mathematics: Issues for equity. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 78 –111.

Organisation for Economic and Cultural Development (OECD). (2005). *Formative assessment: Improving learning in secondary classrooms.* Paris: OECD.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of educational research*, 75(2), 211-246.

Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *Mathematics curriculum material and teacher development: From text to 'lived' resources* (pp. 231–246). Dordrecht: Springer.

Κασσωτάκης, Μ. (2003). *Αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου και των εκπαιδευτικών*. Αθήνα. Εκδόσεις Πατάκη.

Κλώθου, Α., & Σακονίδης, Χ. (2011). Η νοηματοδότηση της αξιολογικής διαδικασίας στα μαθηματικά από τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης: Αντλώντας από τον παιδαγωγικό τους λόγο. *Πρακτικά 4ου Συνέδριου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής (σελ. 213-222)*. Ιωάννινα 1-4 Δεκ. 2011.

Π.Δ. 46/2016, *ΦΕΚ Α΄ 74/22.04.2016*. Αξιολόγηση των μαθητών του Γενικού Λυκείου. Άρθρο 1, Γενικά περί αξιολόγησης και αξιολογούμενων μαθημάτων. Αθήνα, Υ.Π.Ε.Π.Θ.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΡΟΥΤΙΝΕΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ

Καράβη Θωμαΐς

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

thomaiskaravi@gmail.com

Η παρούσα έρευνα αποτελεί τμήμα μιας πιλοτικής μελέτης που αφορά στη διδασκαλία και μάθηση της απόδειξης στο πανεπιστήμιο. Χρησιμοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο της Sfard (2008) αναλύθηκε ο κυρίαρχος λόγος της διδασκαλίας της μαθηματικής απόδειξης σε ένα εισαγωγικό μάθημα Στατιστικής και εντοπίστηκαν οι ρουτίνες διδασκαλίας που επικρατούν στις διαλέξεις. Παράλληλα – σε συνεντεύξεις με φοιτητές – επιχειρήθηκε η διερεύνηση των επιδράσεων των ρουτίνων διδασκαλίας και τα αποτελέσματα τους στη διαδικασία της μάθησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών δείχνει όλο και μεγαλύτερο ενδιαφέρον στη διδασκαλία της απόδειξης σε μαθήματα ανώτερων μαθηματικών στο πανεπιστήμιο. Υπάρχουν μελέτες σχετικές με τις απόψεις και δράσεις διδασκόντων για την απόδειξη και την αποδεικτική διαδικασία (π.χ. Weber, 2004). Ωστόσο, οι περισσότερες έρευνες βασίζουν τα δεδομένα τους σε συνεντεύξεις με τους διδάσκοντες (π.χ. Kidron & Dreyfus, 2014) και ελάχιστες συνδυάζουν τις απόψεις του διδάσκοντος σχετικά με την απόδειξη με τις δράσεις του κατά τη διάρκεια της διάλεξης και τα αποτελέσματα τους στους φοιτητές που παρακολουθούν (π.χ. Weber, 2004). Όσον αφορά τη στατιστική, τα τελευταία χρόνια η επιχειρηματολογία και η στατιστική σκέψη αποτελούν κεντρικό θέμα συζήτησης μεταξύ ερευνητών και διδασκόντων (Bakogianni & Potari, 2019). Στα τμήματα μαθηματικών η διδασκαλία της στατιστικής διαφοροποιείται σημαντικά από την διδασκαλία σε άλλα τμήματα, καθώς οι φοιτητές πρέπει να γνωρίζουν τόσο πρακτικά όσο και θεωρητικά ζητήματα γύρω από αυτή, μετατρέποντας την σε ένα ιδιαίτερα απαιτητικό μάθημα. Γενικά, σε ένα μάθημα στατιστικής αναμένεται από τον φοιτητή να κατανοεί το στόχο, τη λογική και τη διαδικασία που δίνει μια στατιστική έννοια αλλά και να μπορεί να θέτει ερωτήσεις, να λύνει προβλήματα, να χρησιμοποιεί τα μοντέλα και να χειρίζεται τα στατιστικά εργαλεία και τις μεθόδους (Bakogianni & Potari, 2019).

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια πιλοτική έρευνα στο πλαίσιο μιας ευρύτερης μελέτης για τη διδασκαλία και μάθηση της απόδειξης στο πανεπιστήμιο. Μελετήθηκαν ζητήματα διδασκαλίας και μάθησης της απόδειξης σε ένα εισαγωγικό μάθημα Στατιστικής σε τμήμα Μαθηματικών. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Commognition της Sfard (2008) έγινε προσπάθεια να περιγραφεί ο κυρίαρχος λόγος της διδασκαλίας της απόδειξης στις διαλέξεις. Πιο συγκεκριμένα, η εστίαση βρίσκεται α) στην περιγραφή των ρουτίνων που διαμορφώνονται κατά τη διδασκαλία της απόδειξης στο εισαγωγικό μάθημα της Στατιστικής και β) στη διερεύνηση της επίδρασης των ρουτίνων διδασκαλίας στους φοιτητές και των αποτελεσμάτων τους στη διαδικασία της μάθησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η θεωρία του Commognition

Τα τελευταία χρόνια, το ενδιαφέρον της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών έχει στραφεί στο πλαίσιο μέσα στο οποία συμβαίνει η διδασκαλία και η μάθηση με αποτέλεσμα να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη γλώσσα και στην επικοινωνία (Nardi et al., 2014). Η εστίαση μεταφέρεται στους λόγους που αναπτύσσονται μεταξύ των συμμετεχόντων και της γνώσης (Nardi et al., 2014). Με τον όρο λόγος (discourse) η Sfard (2008, p. 93) αναφέρεται στους «διαφορετικούς τύπους επικοινωνίας όπως αυτοί συγκροτούνται από τα αντικείμενα, τους μεσολαβητές που χρησιμοποιούνται, τους κανόνες που ακολουθούνται από τους συμμετέχοντες και έτσι ορίζουν τις διαφορετικές επικοινωνιακές κοινότητες». Το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε από την Sfard βασίζεται στην παραδοχή ότι τα αντικείμενα στα μαθηματικά συγκροτούνται μέσα στους λόγους ενώ όταν κάποιος ασχολείται με τα μαθηματικά εισάγεται στον λόγο αυτών (Sfard, 2008). Οι λόγοι που αναπτύσσονται δεν είναι σταθεροί, συνεχώς μεταβάλλονται και επικαλύπτονται, όμως όταν εντοπίζονται σε συγκεκριμένο πλαίσιο γίνονται διακριτοί και λειτουργούν ως οριοθετημένα σύνολα (Viirman, 2015).

Κάθε λόγος είναι ξεχωριστός από τον τρόπο που χρησιμοποιεί η κοινότητα τις *λέξεις (word use)* (μαθηματική ορολογία και λέξεις με συγκεκριμένο νόημα στα μαθηματικά), τους *οπτικούς διαμεσολαβητές (visual mediators)* (π.χ. γραφήματα, άβακες), τις *εσωτερικές αφηγήσεις (endorsed narratives)* (κείμενα που περιγράφουν τα αντικείμενα, τις διαδικασίες και τις σχέσεις μεταξύ αυτών και μπορεί να είναι γραπτά ή προφορικά) και τις *ρουτίνες (routines)* (Sfard, 2008, pp. 133-135). *Οι ρουτίνες* συγκεκριμένα είναι επαναλαμβανόμενα μοτίβα – χαρακτηριστικά για το λόγο. Τυπικές μαθηματικές ρουτίνες είναι π.χ. οι αποδεικτικές διαδικασίες και οι μαθηματικοί υπολογισμοί.

Οι ρουτίνες που αναπτύσσονται στην τάξη των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο είναι το βασικό θέμα που αναπτύσσεται στη συγκεκριμένη εργασία. Οι κανόνες που τοποθετούνται στις διαδικασίες έχουν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία συγκεκριμένων μοτίβων στους λόγους (Viirman, 2015). Οι κανόνες μπορούν να αφορούν είτε ιδιότητες των αντικειμένων του λόγου (*object-level rules*) είτε να ορίζουν μοτίβα στις δραστηριότητες με στόχο να παράγουν και να βεβαιώνουν object-level αφηγήσεις (Sfard, 2008) – σε αυτή τη περίπτωση οι κανόνες καλούνται «*μετά-κανόνες*» *(meta-rules)*. Επομένως, οι ρουτίνες είναι μια συλλογή μετά-κανόνων που περιγράφουν μια δράση που επαναλαμβάνεται στο λόγο (Viirman, 2015). Οι «μετά-κανόνες» χωρίζονται στο πώς και το πότε της κάθε ρουτίνας, με το πώς να προσδιορίζει τη σειρά της δράσης και το πότε να ορίζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η δράση είναι κατάλληλη (Sfard, 2008). Ο Viirman (2015) μελετώντας τις διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται από διδάσκοντες στο πανεπιστήμιο κατέληξε στον προσδιορισμό ρουτίνων διδασκαλίας τριών κατηγοριών· ρουτίνες *επεξήγησης, κινήτρου* και *τοποθέτησης ερώτησης*. Οι ρουτίνες επεξήγησης περιλαμβάνουν *κοινές μαθηματικές αλήθειες, περιλήψεις* και *επαναλήψεις, καθημερινή γλώσσα, διαφορετικές αναπαραστάσεις* και *μεταφορές*. Οι ρουτίνες κινήτρου συμπεριλαμβάνουν αναφορές *στην χρησιμότητα, τη φύση της μαθηματικής γνώσης, τη χρήση χιούμορ* και *την έμφαση στον στόχο/ αποτέλεσμα*. Οι ρουτίνες τοποθέτησης ερώτησης σχετίζονται με τοποθέτηση ερωτήσεων *ελέγχου, με ρητορικές ερωτήσεις ή ερωτήσεις για αναζήτηση πληροφοριών*.

Διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης στο πανεπιστήμιο

Η μελέτη της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο ήταν πολύ περιορισμένη μέχρι το σχετικά πρόσφατο παρελθόν (Speer et al, 2010) όπου παρατηρείται αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον. Αρκετές μελέτες εστιάζουν σε θέματα που αφορούν στη διδασκαλία υπό μορφή διαλέξεων, η οποία είναι και η συνήθης πρακτική στο πανεπιστήμιο (π.χ. Jaworski et al, 2017, Weber, 2004). Συγκεκριμένα, οι διαλέξεις ανώτερων μαθηματικών συνήθως ακολουθούν την παραδοσιακή πορεία διδασκαλίας «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη» (Weber, 2004). Σε αυτή τη μορφή διδασκαλίας ο καθηγητής είναι πρωταγωνιστής και παρουσιάζει τις μαθηματικές ιδέες στους μαθητές, οι οποίοι ακούν και αντιγράφουν από τον πίνακα κατασκευάζοντας ο καθένας τα δικά του νοήματα από τη διδασκαλία (π.χ. Jaworski et al, 2017, Weber, 2004). Ο Weber (2004) παρατήρησε ότι οι διαλέξεις της συγκεκριμένης παραδοσιακής μορφής μπορούν να ποικίλουν και να οδηγούν τους μαθητές σε διαφορετικά γνωστικά αποτελέσματα. Παράλληλα, μελέτησε τις διδακτικές πρακτικές σε αυτό το πλαίσιο και κατέληξε σε στυλ διδασκαλίας της απόδειξης τα οποία βασίζονται στις απόψεις του διδάσκοντος για το τι χρειάζεται οι μαθητές να γνωρίζουν και είναι ικανοί να καταλάβουν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου. Με αυτό τον τρόπο προσδιορίστηκαν τρία διαφορετικά στυλ διδασκαλίας της απόδειξης, το *λογικο-δομικό, το διαδικαστικό* και *το σημασιολογικό*. Το πρώτο σχετίζεται με το τυπικό μαθηματικό επιχείρημα, το δεύτερο δίνει έμφαση στις τεχνικές και την γενική δομή της απόδειξης και το τελευταίο αφορά την ιδέα πίσω από την απόδειξη ενώ άτυπες αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται κατά την αποδεικτική διαδικασία. Στα πρώτα δύο στυλ (λογικο - δομικό και διαδικαστικό) σπάνια χρησιμοποιούνται άτυπες αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών και άτυπα εργαλεία. Στα άτυπα εργαλεία συγκαταλέγονται τα *παραδείγματα* (π.χ. Fukawa – Connelly et al., 2017), οι *άτυπες αναπαραστάσεις* (π.χ. Fukawa – Connelly et al., 2017, Weber, 2004) και τα *άτυπα επιχειρήματα* που χρησιμοποιούνται κατά την αποδεικτική διαδικασία (π.χ. Lew et al., 2016). Η σημαντικότητα της χρήσης άτυπων εργαλείων φαίνεται να είναι ένα θέμα που γνωρίζουν οι διδάσκοντες και χρησιμοποιούν οι ίδιοι στην έρευνα τους στα μαθηματικά, ωστόσο δίνουν μικρή έμφαση σε αυτά στις διαλέξεις.

Από την άλλη πλευρά, οι φοιτητές, ιδιαίτερα στα πρώτα έτη σπουδών, έχουν ελάχιστη εμπειρία από δύσκολες και θεωρητικές αποδείξεις. Οι αποδείξεις στο πανεπιστήμιο αποτελούν για αυτούς την εισαγωγή σε ένα κόσμο μαθηματικών ποιοτικά διαφορετικό από αυτόν που είχαν γνωρίσει στο σχολείο. Μέσα από τις αποδείξεις θα έλθουν σε ουσιαστική επαφή με την ανώτερη μαθηματική σκέψη και θα αντλήσουν ιδέες τις οποίες θα μπορούν να τις αξιοποιήσουν στη συνέχεια στην αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων. Συνεπώς, η διδασκαλία των αποδείξεων στο πανεπιστήμιο, ιδιαίτερα σε ένα τμήμα Μαθηματικών, έχει πολύ σημαντικό ρόλο για τη μαθηματική εξέλιξη των φοιτητών. Η μέχρι τώρα έρευνα της διδασκαλίας των αποδείξεων στους φοιτητές εστιάζει στις απόψεις των πανεπιστημιακών καθηγητών για το θέμα (π.χ. Hemmi, 2010). Ελάχιστες αφορούν συγκεκριμένες διδασκαλίες την επίδραση τους στην μαθηματική εξέλιξη των φοιτητών (π.χ. Güçler, 2014).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της έρευνας

Τα δεδομένα της έρευνας συλλέχθηκαν από την μελέτη ενός εξαμηνιαίου μαθήματος Στατιστικής σε τμήμα Μαθηματικών Ελληνικού Πανεπιστημίου. Στο περιεχόμενο του μαθήματος περιλαμβάνονται, μεταξύ άλλων, θέματα όπως περιγραφική στατιστική, επάρκεια και πληρότητα, αμερόληπτες εκτιμήτριες ελάχιστης διασποράς, διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι υποθέσεων. Το μάθημα ήταν υποχρεωτικό και διδασκόταν σε ένα τμήμα που συμμετείχαν περίπου 60 φοιτητές. Η έρευνα είναι μία μελέτη περίπτωσης και βασίστηκε στον διδάσκοντα του μαθήματος και 3 φοιτητών που συμμετείχαν σε αυτό. Ο διδάσκων έχει πολυετή διδακτική και ερευνητική εμπειρία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ενώ τα τελευταία χρόνια διδάσκει και συμμετέχει στην έρευνα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι δύο φοιτητές παρακολουθούσαν το μάθημα για πρώτη φορά και βρίσκονταν στο τρίτο έτος σπουδών ενώ ο τρίτος φοιτητής είχε παρακολουθήσει το μάθημα άλλες δύο φορές και βρίσκονταν στο έβδομο έτος σπουδών.

Συλλογή δεδομένων και ανάλυση

Δεδομένα συλλέχθηκαν από 10 διαλέξεις κατά τη διάρκεια του εξαμήνου. Από το σύνολο των διαλέξεων κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου ενώ ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν αποσπάσματα από δύο διαλέξεις. Παράλληλα έγιναν τρεις συναντήσεις, ημί – δομημένες συνεντεύξεις, με τον διδάσκοντα και δύο με τους φοιτητές, όπου συζητήθηκαν ζητήματα γύρω από την απόδειξη και κρίσιμα περιστατικά από τις διαλέξεις. Αποσπάσματα από τις συναντήσεις ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν ενώ σημειώσεις πεδίου κρατήθηκαν από το σύνολο των συναντήσεων.

Η ανάλυση των δεδομένων από τις διαλέξεις γινόταν παράλληλα με την παρακολούθηση αυτών και τις συναντήσεις με τους συμμετέχοντες. Στόχος της ανάλυσης ήταν ο εντοπισμός των διαλογικών δραστηριοτήτων που χαρακτηρίζουν την διδασκαλία αποδείξεων στην στατιστική από τον συγκεκριμένο διδάσκοντα και η σύνδεση τους με την μάθηση των φοιτητών. Κάθε διάλεξη και συνέντευξη αναλύθηκε με σκοπό τον εντοπισμό κανονικοτήτων στις εσωτερικές αφηγήσεις τόσο των μαθηματικών όσο και της διδασκαλίας και μάθησης των αποδείξεων. Εντοπίστηκαν συγκεκριμένοι «μετά-κανόνες» στις διαλέξεις, οι οποίοι συμπληρώθηκαν με αυτούς που προέκυψαν από τις συναντήσεις με τους συμμετέχοντες με αποτέλεσμα τον προσδιορισμό των ρουτίνων για τη διδασκαλία και μάθηση αποδείξεων στη στατιστική. Οι ρουτίνες κατηγοριοποιήθηκαν στις τρεις κατηγορίες που εντόπισε ο Viirman (2015) και συζητήθηκαν στην τελευταία συνάντηση με τους φοιτητές με στόχο τον εντοπισμό της επίδρασης τους στη μάθηση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κυρίαρχος λόγος κατά την διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης

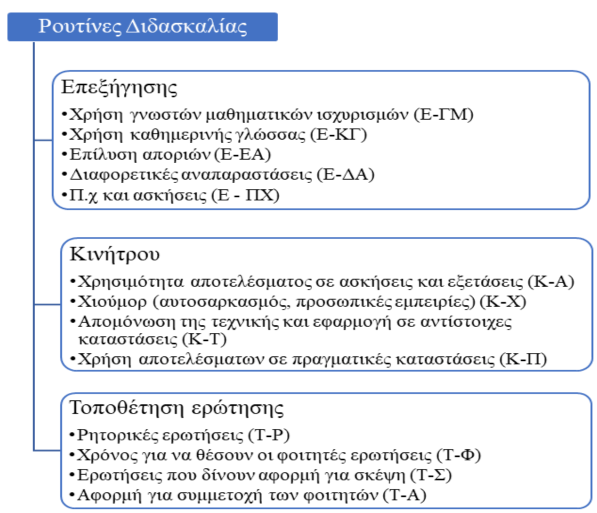
Σύντομα θα αναφερθούν κάποια γενικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας της απόδειξης όπως εντοπίστηκαν στη συγκεκριμένη μελέτη. Οι διαλέξεις κατά κύριο λόγο ακολουθούσαν την παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη». Η θέση του διδάσκοντος ήταν μπροστά από τον πίνακα να γράφει και να μιλάει ενώ οι φοιτητές συμμετείχαν όταν απαντούσαν σε ερωτήσεις του διδάσκοντος ή απηύθυναν ερωτήσεις στον διδάσκοντα. Ωστόσο, ο διδάσκων επένδυε σε διάφορα άτυπα μέσα με στόχο να κερδίσει την προσοχή των φοιτητών. Μερικά από αυτά ήταν οι συχνές ερωτήσεις προς αυτούς, η χρήση άτυπων επεξηγήσεων και παραδειγμάτων πραγματικών καταστάσεων και η χρήση διαφόρων διαγραμμάτων για να συνοδεύουν τις αποδείξεις.

Το στυλ διδασκαλίας των αποδείξεων ανήκει στο διαδικαστικό στυλ. Ο διδάσκων επιδιώκει να δίνει έμφαση στην τεχνική και την γενική δομή των αποδείξεων καθώς και σε ότι θεωρεί ότι θα είναι χρήσιμο για την επίλυση ασκήσεων. Γενικά, προσπαθεί να χτίσει μια διαισθητική εικόνα πριν την απόδειξη, η οποία θεωρεί είναι ανάλογη της εμπειρίας του φοιτητή:

> Είναι σημαντικό να έχω μια εικόνα, τι περιμένω. Έστω ότι δεν ήξερα ποια είναι η κατανομή … σκέφτομαι λίγο που θα βρεθώ… δηλαδή ακόμα και αν δεν ξέρω την θεωρία πώς θα μπορούσα να σκεφτώ… αυτό είναι το διαισθητικό.

Διδακτικό επεισόδιο και ανάλυση

Από το σύνολο των μαθημάτων δημιουργήθηκε μια συλλογή με τις ρουτίνες της διδασκαλίας, οι οποίες προέκυψαν μέσω της κατηγοριοποίησης του Viirman (2015) και λειτουργούσαν συμπληρωματικά στην αποδεικτική ρουτίνα.



Εικόνα 1: Οι ρουτίνες διδασκαλίας κατά τη διδασκαλία της απόδειξης

Το επεισόδιο που ακολουθεί αφορά στη διδασκαλία της απόδειξης για την εύρεση διαστήματος εμπιστοσύνης για την κανονική κατανομή με σ^2 άγνωστο. Από το επεισόδιο απομονώθηκαν κάποια σημεία τα οποία σχολιάστηκαν αργότερα με τους φοιτητές και σε αυτά εντοπίζονται κάποιες από τις παραπάνω ρουτίνες.

Σε προηγούμενο μάθημα είχε βρεθεί διάστημα εμπιστοσύνης για την κανονική κατανομή με σ^2 γνωστό. Στην πρώτη φάση της απόδειξης, ο διδάσκων υπενθύμισε στους φοιτητές τον τρόπο που είχαν εργαστεί την προηγούμενη φορά και ποια είναι τα σημεία που διαφοροποιούνται αυτές οι δύο περιπτώσεις. Παράλληλα, ζητήθηκε η ενεργή συμμετοχή των φοιτητών κατά την αποδεικτική διαδικασία.

Διδάσκων: Θα με βοηθήσετε και εσείς. Πείτε ότι δεν έχω ιδέα. Θέλω να προσπαθήσουμε να *κάνουμε αντίστοιχη διαδικασία* **[Κ-Α]**… *Πρέπει να βρω μία εκτιμήτρια και στη συνέχεια πρέπει να βρω μία συνάρτηση της που θα την κάνω ποσότητα οδηγό. Αυτά που έχουμε πει ως τώρα πρέπει να εφαρμόσουμε και εδώ στην κανονική κατανομή* **[Κ-Τ]**. *Ποια να πάρω εκτιμήτρια λοιπόν* **[Τ-Α]**;

Φοιτητής: Ας πάρουμε το $\bar{X}$.

Έπειτα ο διδάσκων συνέχισε με την εύρεση της κατανομής του εκτιμητή και της ποσότητας οδηγού. Σε αυτό το σημείο προέκυψε η ανάγκη για χρήση της κατανομής Student που είχε αναφερθεί στο 1ο μάθημα:

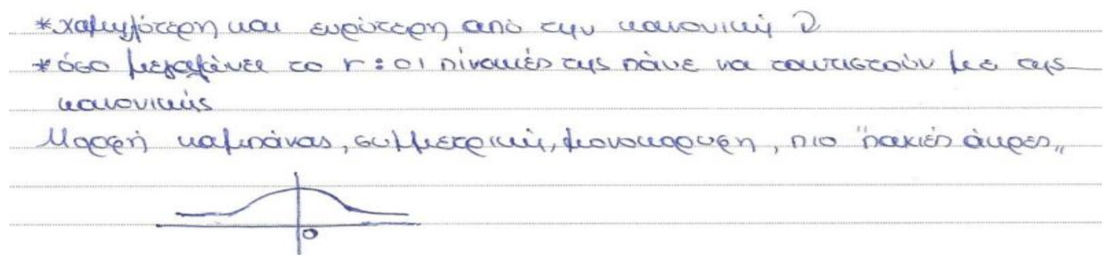
Έχω μία τυποποιημένη κατανομή. Έχω μία X^2. *Μεταξύ τους αυτές είναι ανεξάρτητες. Βάζω στον αριθμητή την τυποποιημένη και στον παρονομαστή έχω την ρίζα της κατανομής* X^2 *διαιρεμένη με τους βαθμούς ελευθερίας* **[Ε-ΓΜ]**. Τότε αυτή ακολουθεί κατανομή Student… Θα το πούμε αυτό και στη συνέχεια, θα το γράψουμε με λεπτομέρειες **[Ε-ΕΑ]**. Το λέω αυτή τη στιγμή για να πάρετε μια πρώτη εικόνα.

Ο διδάσκων έκρινε ότι πρέπει να αναφέρει κάποιες λεπτομέρειες σχετικά με αυτή την κατανομή διακόπτοντας την τυπική ροή της απόδειξης:

Λοιπόν να *ζωγραφίσω* λίγο αυτή τη t να την δείτε **[Ε-ΔΑ]**… Λοιπόν η πυκνότητα της γενικώς της t με r βαθμούς ελευθερίας έχει αυτή τη μορφή

(γράφει: $f_{T_r}(t) = \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})}{\sqrt{\pi r}\Gamma(\frac{r}{2})(1+\frac{t^2}{r})^{\frac{r+1}{2}}}$)

Η *γραφική της παράσταση* είναι κάπως έτσι δηλαδή θυμίζει την κανονική αλλά είναι λίγο πιο *«ζουμπηγμένη»* **[Ε-ΔΑ, Κ-Χ, Ε-ΚΓ]**… Έχει πιο *παχιά άκρα* εδώ πέρα **[Ε-ΚΓ]**. *Η κανονική είναι πιο αδύνατη*, πάει έτσι η καμπάνα της, εδώ τα άκρα της είναι πιο *πλατιά* **[Ε-ΓΜ, Ε-ΚΓ]**… Να γράψω ότι είναι μορφή καμπάνας, να γράψω ότι είναι και αυτή συμμετρική γύρω από το 0. Μονοκόρυφη, έτσι έχει μία κορυφή. Είναι σκεφτείτε χαμηλότερη και ευρύτερη από την κανονική… *Έχει πίνακες και αυτή* **[Ε-ΔΑ]**. (γράφει:



Εικόνα 2: Απόσπασμα από τις σημειώσεις του μαθήματος

Όπως παρατηρούμε στα αποσπάσματα ο διδάσκων χρησιμοποιεί αρκετές από τις ρουτίνες διδασκαλίας για να μεταφέρει τους ισχυρισμούς του στους φοιτητές και αρκετές φορές ταυτόχρονα εμπλέκει περισσότερες από μία. Συζητώντας με τους φοιτητές σημειώθηκαν από κοινού τα ακόλουθα σε σχέση με τις ρουτίνες διδασκαλίας που επιδιώκονται από τον διδάσκοντα:

- Η συμμετοχή των φοιτητών στην τάξη διευκολύνει να λύσουν και οι ίδιοι τις απορίες τους και δεν επηρεάζει την κατανόηση ή την ροή των αποδείξεων.
- Η καθημερινή ορολογία και το χιούμορ του διδάσκοντος διευκόλυναν την κατανόηση της κατανομής Student και την χρήση της στην απόδειξη.
- Πέρα από αυτά που γράφει ο διδάσκων στον πίνακα σημειώνουν και κάποια θέματα/ λέξεις που σχολιάζει προφορικά (π.χ. την λέξη «ζουμπηγμένη») όπως και τα διαγράμματα γιατί τους βοηθούν να τα θυμούνται.
- Δεν χειρίζονται την απόδειξη στην Στατιστική και γενικά στα στοχαστικά μαθηματικά με διαφορετικό τρόπο από ότι στα άλλα μαθήματα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο της Sfard (2008) με στόχο να περιγράψει τα χαρακτηριστικά του κυρίαρχου λόγου κατά τη διδασκαλία της απόδειξης σε ένα μάθημα στατιστικής πανεπιστημιακού επιπέδου. Με την χρήση του συγκεκριμένου πλαισίου στην ανάλυση των διαλέξεων και των συνεντεύξεων των συμμετεχόντων εντοπίστηκαν οι ρουτίνες διδασκαλίας που έρχονται να συμπληρώσουν την ρουτίνα της απόδειξης καθώς και το πώς τις αντιμετωπίζουν/ χειρίζονται οι φοιτητές στο μάθημα.

Αν και το μάθημα ακολουθεί την παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας φαίνεται να ενσωματώνει τόσο τις τυπικές μαθηματικές ρουτίνες, όπως αυτή της απόδειξης, όσο και διδακτικές ρουτίνες. Η συγκεκριμένη παρατήρηση συμφωνεί με αυτή του Weber (2004) που αναφέρει ότι δεν υπάρχει μοναδικό παράδειγμα για τη διδασκαλία σε παραδοσιακή μορφή και παράλληλα προσθέτει μια πρόταση για την εύρεση των αξόνων στους οποίους εντοπίζονται οι διαφοροποιήσεις. Ακόμη, μέσα από το διδακτικό επεισόδιο παρατηρείται ότι οι ρουτίνες μπλέκονται και δεν διαδέχονται απαραίτητα η μία την άλλη.

Από την άλλη πλευρά, οι φοιτητές φαίνεται να αποδέχονται τις διδακτικές ρουτίνες του διδάσκοντος, οι οποίες φαίνεται να ενισχύουν την κατανόηση του περιεχομένου του μαθήματος. Οι ίδιοι διευκολύνονται από τις *ερωτήσεις* προς αυτούς γιατί είναι ένας τρόπος να λύσουν τις απορίες, έχουν *κίνητρο* να μελετήσουν λόγω του οικείου λεξιλογίου και του χιούμορ του διδάσκοντος, ενώ φαίνεται οι επεξηγήσεις που δίνονται να τους βοηθούν να έχουν μια σαφή εικόνα για την δομή της απόδειξης στα στοχαστικά μαθηματικά.

Η εργασία αποτελεί μια πιλοτική έρευνα, ωστόσο γεννιέται το ερώτημα για έρευνα και διερεύνηση του τι θεωρείται μάθηση με κατανόηση και πότε και γιατί αυτή συμβαίνει. Σε μελλοντική εργασία θα ήταν ενδιαφέρον να συζητηθούν περαιτέρω οι ρουτίνες και να εντοπισθεί το «πότε» και «πώς» αυτές έρχονται στο μάθημα και τελικά τι σχέση έχουν με την κατανόηση των φοιτητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bakogianni, D., & Potari, D. (2019). Re-sourcing secondary mathematics teachers' teaching of statistics in the context of a community of practice. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Fukawa-Connelly, T. P., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2017). Informal content and student note taking in advanced mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(5), 567–579.

Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: the case of the limit notation. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 251-268.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterizing mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics, 75*(3), 271–291.

Jaworski, B., Mali, A., & Petropoulou, G., 2017. Critical Theorizing from Studies of Undergraduate Mathematics Teaching for Students' Meaning Making in Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3*(1), pp. 168-197.

Kidron, I., & Dreyfus, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics, 87*(3), 297-321.

Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(2), 162–198.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 182-198.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Speer, N. M., Smith, J. P., III, & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *Journal of Mathematical Behavior, 29*(2–29), 99–114

Viirman, O. (2015). Explanation, motivation and question posing routines in university mathematics teachers' pedagogical discourse: a commognitive analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(8), 1165-1181.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor’s lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 115–133.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΙΚΟΝΩΝ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟ 1975 ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ

Δακορώνια Ευαγγελία, **Αναστασάκης Μαρίνος**

ΠΚ, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

evagdacor@gmail.com, marinos@math.uoc.gr

Η παρούσα μελέτη διερευνά το ρόλο και την παρουσία των εικόνων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας από το 1975 έως σήμερα. Πρωταρχικό μέλημα είναι να ερμηνευτεί αν και πώς έχουν αλλάξει οι προτεραιότητες που θέτουν οι συγγραφείς των βιβλίων. Για την επίτευξή του, εξετάζεται ο τρόπος που παρουσιάζεται η γεωμετρία μέσω τριών κατηγοριών εικόνων στα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας. Το θεωρητικό μέρος της εργασίας πλαισιώνει η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής του Chevallard.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που επιτρέπει στους εκπαιδευόμενους να μελετήσουν τον τρόπο που οργανώνεται η μαθηματική γνώση σε ένα σύστημα, μέσω της κατανόησης της σχετικής θεωρίας (Παπαγεωργίου & Τζεκάκη, 2017). Η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος επιδρά ισχυρά κατά την αποδεικτική διαδικασία (Αγγελή & Γαγάτσης, 2017), ενώ τα ίδια τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών επηρεάζουν με τη σειρά τους τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με το «τι είναι» και τι σημαίνει «ξέρω μαθηματικά» (Κολέζα, 2009). Με δεδομένη τη σημασία των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και την επίδραση που έχουν τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η καταγραφή και ταξινόμηση των εικόνων (γεωμετρικών σχημάτων και μη) στα σχολικά βιβλία της Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που μας απασχολούν είναι:

- Ποιες κατηγορίες εικόνων υπάρχουν στα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας από το 1975-2019 και τι είδους μεταβολές παρουσιάζουν;
- Με βάση τις εικόνες που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία, τι μπορούμε να πούμε σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους παρουσιάζονται στους μαθητές οι διάφορες γεωμετρικές έννοιες;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Για την πραγματοποίηση της παρούσας έρευνας επιλέχτηκε η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (anthropological theory of the didactic) του Chevallard (2006; Chevallard & Sensevy, 2014). Η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (ΑΘΔ) επικεντρώνεται στην κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε ένα εκπαιδευτικό ίδρυμα κατά τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Bosch & Gascón, 2014). Στον πυρήνα της ανθρωπολογικής θεωρίας εντάσσεται η *πραξεολογία.* O Chevallard (2006) ερμήνευσε τον όρο ως «τη βασική μονάδα κατά την οποία κάποιος μπορεί να αναλύσει εκτενώς την ανθρώπινη δραστηριότητα» (p.23). Με πρωταρχικό σκοπό να αποδώσει έναν πιο βελτιωμένο ορισμό, ανέτρεξε στην ετυμολογία της σύνθετης λέξης που αποτελεί ένωση των όρων *«πράξις»* και *«λόγος»*. Η πράξη είναι το πρακτικό μέρος μιας δραστηριότητας, πώς κάποιος πραγματοποιεί μια δραστηριότητα, ενώ ο λόγος αναφέρεται στην ικανότητα του ανθρώπου να σκέφτεται και να κατανοεί κάθε πληροφορία με λογικό τρόπο (*Ibid.*).

Κάθε πραξεολογία απαρτίζεται από τέσσερα δομικά στοιχεία που αποτελούν τη βάση κάθε δραστηριότητας (Chevallard & Sensevy, 2014): τις εργασίες, τις τεχνικές, την τεχνολογία και τη θεωρία. Οι *εργασίες* (tasks) είναι ο τρόπος που δρα ένα άτομο, όταν έρχεται σε επαφή με μια δραστηριότητα. Ο τρόπος παρουσίασης των δραστηριοτήτων έγκειται στις *τεχνικές* (techniques) που χρησιμοποιεί (Bosch & Gascón, 2014). Οι εργασίες και οι τεχνικές αποτελούν το πρακτικό μέρος μιας δραστηριότητας (Chevallard & Sensevy, 2014). Το θεωρητικό μέρος της δραστηριότητας αποτελείται εξίσου από δύο συνιστώσες. Η πρώτη είναι οι *τεχνολογίες* (technology), με τις οποίες ένα άτομο δικαιολογεί και σχεδιάζει την τεχνική που θα χρησιμοποιήσει (Gonzaléz-Martin, Nardi & Biza, 2011). Η δεύτερη είναι η *θεωρία* (theory), η οποία εξηγεί και δικαιολογεί κάθε βήμα της τεχνολογίας που έχει παραληφθεί ή είναι δυσνόητο (Bosch & Gascón, 2014). Η ΑΘΔ υπογραμμίζει τον ιδρυματικό χαρακτήρα της γνώσης και τονίζει ότι η μαθηματική γνώση εισάγεται και αναδομείται σε ένα σχολικό περιβάλλον (*Ibid.*). Ταυτόχρονα, αναγνωρίζει ότι οι μαθηματικές έννοιες δεν είναι απόλυτες καθώς το περιεχόμενο τους προκύπτει κατά τη διδασκαλία: με άλλα λόγια, η ΑΘΔ είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για να εξετάσουμε πώς ένα εκπαιδευτικό ίδρυμα (π.χ. σχολείο ή πανεπιστήμιο) επιλέγει να εισαγάγει μαθηματικές ιδέες σε κείμενα ή κατά τη διδασκαλία (Gonzaléz-Martin *et al.*, 2011).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα μας αποτελείται από οχτώ σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας, που χρησιμοποιούνταν για τη διδασκαλία της από το 1975 έως το 2019, με ένα τριετές κενό μεταξύ του 1976-1979 (Πίνακας 1). Οι λόγοι που δε συμπεριλάβαμε το βιβλίο Γεωμετρίας αυτών των δύο σχολικών ετών ήταν ότι αφενός δεν είχαμε πρόσβαση στο συγκεκριμένο βιβλίο και αφετέρου όλο το βιβλίο αποτελούνταν από κεφάλαια του προηγούμενου σχολικού εγχειριδίου (1975). Επειδή στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει διαθέσιμη κάποια συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση των θεματικών περιοχών της γεωμετρίας, χρησιμοποιήσαμε τα δύο τελευταία σχολικά εγχειρίδια (του 1999 και 2001) ως οδηγό, προκειμένου να χωρίσουμε τα κεφάλαια της Γεωμετρίας σε θεματικές περιοχές. Τα συγκεκριμένα βιβλία ενσωματώνουν την ύλη δύο σχολικών τάξεων, της Α’ και Β’ Λυκείου, ακολουθώντας την ίδια σειρά και στο επίπεδο των κεφαλαίων. Αξίζει να επισημάνουμε ότι για να δημιουργήσουμε τις παρακάτω θεματικές περιοχές προχωρήσαμε σε συγχωνεύσεις κάποιων κεφαλαίων του σχολικού βιβλίου. Οι θεματικές ενότητες παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.

Σχολικό εγχειρίδιο	Κωδικός	Χρονική περίοδος
Ευκλείδειος Γεωμετρία (Γ’, Δ’, Ε’ και ΣΤ’ Γυμνασίου)	Α	1975-1976
Ευκλείδειος Γεωμετρία (Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ)	Β	1979-1986
Θεωρητική Γεωμετρία (Α’ Λυκείου)	Γ	1979-1990
Θεωρητική Γεωμετρία (Β’ Λυκείου)	Δ	1986-1991
Θεωρητική Γεωμετρία (Α’ Λυκείου)	Ε	1990-1999
Θεωρητική Γεωμετρία (Β’ Λυκείου)	ΣΤ	1991-1999
Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α’ και Β’ Λυκείου)	Ζ	1999-2001
Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α’ και Β’ Λυκείου)	Η	2001-2014[1]

Πίνακας 1: Απόδοση κωδικών των σχολικών εγχειριδίων Γεωμετρίας και χρονολογική περίοδος διδασκαλίας.

Επόμενο βήμα ήταν να ελέγξουμε την παρουσία της κάθε θεματικής ενότητας ή όχι στα βιβλία Γεωμετρίας που είχαμε στη διάθεση μας. Με δεδομένο ότι τα προαναφερθέντα δέκα θέματα υπήρχαν μονάχα σε τρία από τα οκτώ βιβλία προχωρήσαμε σε συγχώνευση κάποιων βιβλίων, ώστε οι συγκρίσεις μεταξύ θεματικών ενοτήτων να είναι εφικτές. Τα ομαδοποιημένα εγχειρίδια μετονομάστηκαν σε Βιβλία και ήταν έξι (Πίνακας 3). Το Βιβλίο 1 ήταν αυτόνομο και αποτελούσε ένα από τα βασικά μαθήματα της σχολικής χρονιάς 1975-1976. Το διάστημα 1979 έως 1990 είναι διασπασμένο σε δύο περιόδους. Η πρώτη είναι από το 1979 με 1986 και το αντίστοιχο Βιβλίο είναι το 2, που αποτελεί συνδυασμό δύο σχολικών εγχειριδίων, και το Βιβλίο 3 που χρονολογείται από το 1986-1990. Επιλέχτηκε αυτός ο διαχωρισμός καθώς τη χρονιά 1986 διανεμήθηκε στα σχολεία το νέο βιβλίο της Β’ Λυκείου. Η τελευταία ομαδοποίηση εντυπώνεται στο Βιβλίο 4, με χρονολογική διάρκεια από το 1990 έως 1999. Το βιβλίο του 1999-2001 μετονομάστηκε σε Βιβλίο 5 και το παρόν βιβλίο που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθημάτων Γεωμετρίας αποτέλεσε το Βιβλίο 6 με διάρκεια από το 2001-2019. Η νέα σύνθεση των Βιβλίων περιλάμβανε όλες τις θεματικές περιοχές και μας επέτρεψε να προχωρήσουμε στην καταμέτρηση εικόνων, καθώς θα συγκρίναμε όμοια δεδομένα.

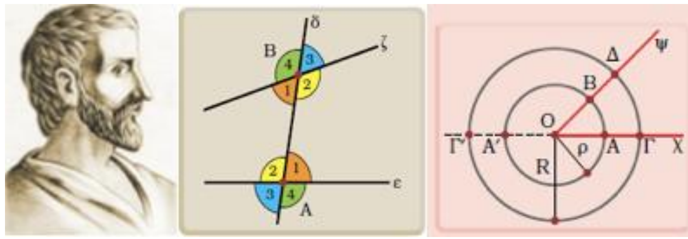
Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στοιχειώδεις γεωμετρικοί όροι.
Τρίγωνα
Παράλληλες ευθείες
Τετράπλευρα
Εγγεγραμμένα σχήματα
Αναλογίες και ομοιότητα
Μετρικές σχέσεις (σε τρίγωνα, πολύγωνα και κύκλο)
Εμβαδά
Μέτρηση κύκλου
Στοιχεία στερεομετρίας

Πίνακας 2: Θεματικές Περιοχές της Γεωμετρίας

Βιβλίο	Σχολικά εγχειρίδια	Χρονική περίοδος[2]
Βιβλίο 1	Α	1975-1976
Βιβλίο 2	Β+Γ	1979-1986
Βιβλίο 3	Γ+Δ	1986-1990
Βιβλίο 4	Ε+ΣΤ	1990-1999
Βιβλίο 5	Ζ	1999-2001
Βιβλίο 6	Η	2001-2019

Πίνακας 3: Κατανομή ομαδοποιημένων σχολικών βιβλίων ανά χρονολογική περίοδο διδασκαλίας.

Για την κατηγοριοποίηση των εικόνων βασιστήκαμε στην μελέτη των Gonzaléz-Martin *et al.* (2011), οι οποίοι τις διακρίνουν σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη συγκαταλέγονται διακοσμητικές εικόνες που δε σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες και ονομάζονται ***non-conceptual*** (NC). Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν εικόνες που σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες (π.χ. ορισμούς, αξιώματα), αλλά δεν είναι μέρος κάποιας αποδεικτικής διαδικασίας και ονομάζονται ***bland-conceptual*** (BC). Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν εικόνες που σχετίζονται με την κατανόηση μιας αποδεικτικής διαδικασίας ή λυμένων ασκήσεων και ονομάζονται ***conceptual*** (C).



Εικόνα 1: Παραδείγματα των τριών κατηγοριών εικόνων. Από αριστερά προς τα δεξιά: ο Πυθαγόρας (NC), γωνίες ευθειών που τέμνονται από τρίτη (BC), επίκεντρη γωνία σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες (C).

Για την απάντηση του πρώτου ερευνητικού μας ερωτήματος χρησιμοποιήσαμε τις κατηγορίες NC, BC και C των Gonzaléz-Martin *et al.* (2011), ενώ για το δεύτερο χρησιμοποιήσαμε την έννοια της πραξεολογίας του Chevallard (2006). Πιο συγκεκριμένα, θεωρήσαμε ως εργασίες (tasks) τις εικόνες που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας, ως τεχνικές (techniques) τις κατηγορίες των εικόνων (NC, BC, C), ως τεχνολογία (technology) τη λογική πίσω από τη χρήση των τριών κατηγοριών των εικόνων, ενώ ως θεωρία (theory) το σύνολο των θεμελιωδών αξιωμάτων της Γεωμετρίας. Επομένως, καταγράφοντας ποιες κατηγορίες εικόνων (techniques) προτιμώνται από την εκάστοτε συγγραφική ομάδα, μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη λογική πίσω από τη χρήση τους (technology), δηλαδή να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τους τρόπους που παρουσιάζονται οι γεωμετρικές έννοιες μέσω των εικόνων των σχολικών βιβλίων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

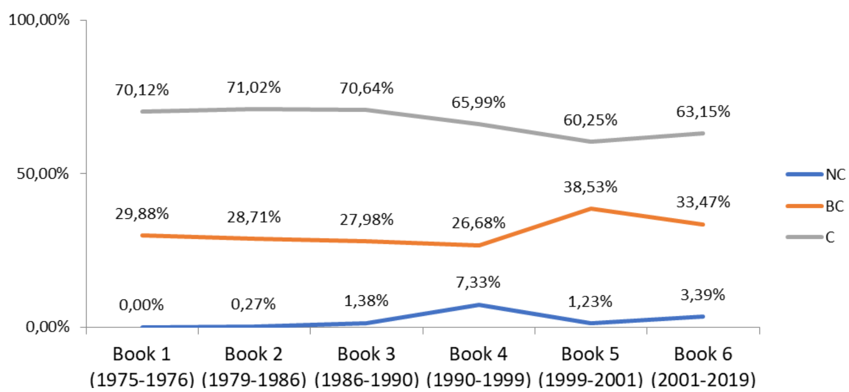
Τάσεις κατά τη χρήση εικόνων στα βιβλία Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα

Στον Πίνακα 4 καταγράφεται ο συνολικός αριθμός των εικόνων που υπάρχουν στα βιβλία που δημιουργήσαμε για το μάθημα της Γεωμετρίας, καθώς και ο αριθμός τους ανά κατηγορία NC, BC και C. Όπως φαίνεται, υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις ως προς το συνολικό αριθμό των εικόνων. Για παράδειγμα, το Βιβλίο 2 παρουσιάζει το μεγαλύτερο αριθμό των εικόνων από όλα τα βιβλία, έχοντας στο σύνολο 742 εικόνες και ακολουθεί το Βιβλίο 1, στο οποίο καταμετρηθήκαν 599. Σε επίπεδο ταξινόμησης των εικόνων υπερισχύουν οι εικόνες τύπου C σε όλα τα βιβλία Γεωμετρίας. Ακολουθούν οι BC που υπάρχουν σε ικανοποιητικό βαθμό και στο τέλος της κατάταξης βρίσκονται οι εικόνες τύπου NC.

ΒΙΒΛΙΟ	Συν. αρ. Εικ.	Αριθμός C	Αριθμός BC	Αριθμός NC
1ο (1975-1976)	599	420	179	0
2ο (1979-1986)	742	527	213	2
3ο (1986-1990)	579	409	162	8
4ο (1990-1999)	491	324	131	36
5ο (1999-2001)	571	344	220	7
6ο (2001-2019)	502	317	168	17

Πίνακας 4: Κατανομή του συνολικού αριθμού των εικόνων και των εικόνων τύπου C, BC και NC ανά Βιβλίο

Παρόμοια εικόνα έχουμε και από την Εικόνα 2, όπου παρουσιάζονται τα παραπάνω αποτελέσματα σε μορφή ποσοστών. Εδώ παρατηρούμε ότι την πιο συχνά χρησιμοποιούμενη κατηγορία εικόνων από το 1975 μέχρι και σήμερα αποτελούν οι εικόνες τύπου C και ακολουθούν οι εικόνες τύπου BC, ενώ οι NC είναι σχεδόν ανύπαρκτες. Όμως, από το 1990 και μετά (Βιβλίο 4), η παρουσία των εικόνων τύπου C μειώνεται. Οι εικόνες τύπου BC, ενώ την περίοδο 1975 με 1999 δε χρησιμοποιούνταν αρκετά (π.χ. απόκλιση περίπου 40% από τις C στο Βιβλίο 1), σταδιακά ο αριθμός τους αυξάνεται (π.χ. διαφορά με C γύρω στο 30% στο Βιβλίο 6). Αντίθετα η χρήση εικόνων NC είναι μικρότερη του 10% από το 1975 μέχρι σήμερα (καταλαμβάνουν το υψηλότερο ποσοστό 7,33% στο Βιβλίο 4).

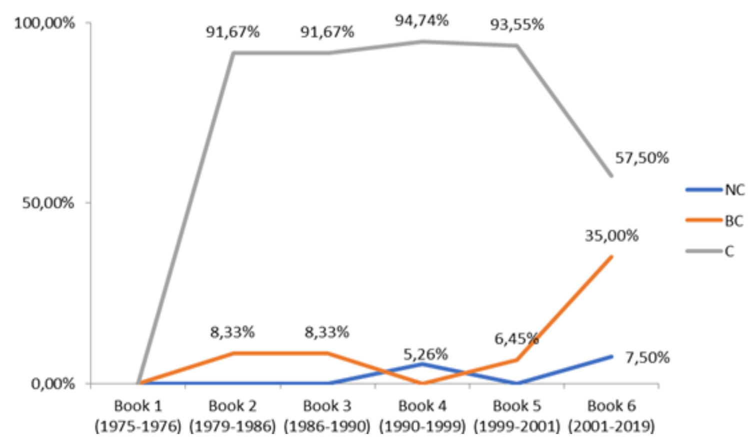


Εικόνα 1: Κατάταξη των εικόνων τύπου NC, BC και C ανά βιβλίο.

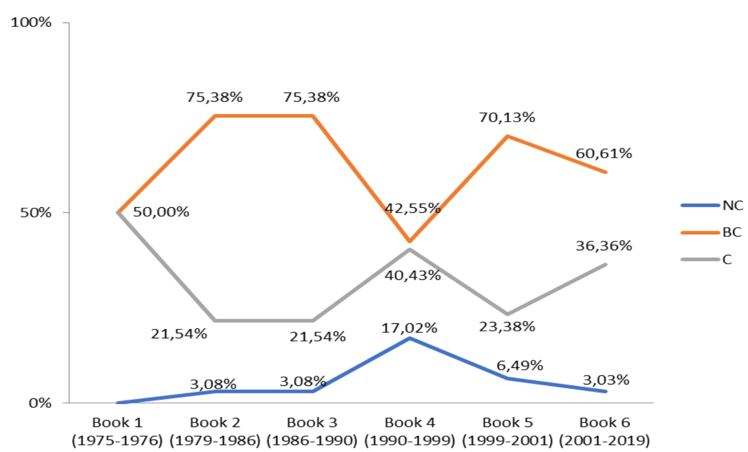
Τάσεις κατά τη χρήση εικόνων ανά θεματική περιοχή

Παρόμοια ευρήματα (περισσότερο χρησιμοποιούμενη κατηγορία εικόνων C, μικρότερη χρήση των BC, πολύ χαμηλή χρήση εικόνων τύπου NC) έχουμε και σε κάποιες από τις προαναφερθείσες θεματικές ενότητες, όπως τα «Τρίγωνα», τα «Τετράπλευρα» και τα «Στοιχεία Στερεομετρίας». Εξαίρεση αποτελεί το Βιβλίο 5, όπου στα «Στοιχεία Στερεομετρίας» οι BC ξεπερνούν τις εικόνες C, καθώς τα σχήματα που σχετίζονται με ορισμούς είναι περισσότερα.

Μια αξιοσημείωτη περίπτωση σκιαγραφείται στην Εικόνα 3. Το Βιβλίο 1 δεν περιέχει κανένα από τα τρία είδη εικόνων, λόγω της ενσωμάτωσης των παράλληλων ευθειών στη θεματική περιοχή «Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στοιχειώδεις γεωμετρικοί όροι». Οι εικόνες τύπου NC εμφανίζονται πρώτη φορά στο Βιβλίο 4 και έπειτα στο Βιβλίο 6, όπου καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο ποσοστό του 7,50%. Ωστόσο, η παρουσία των εικόνων τύπου C ξεπερνά το 90% στα Βιβλίο 2 έως 5, αντίθετα με το Βιβλίο 6 που ο αριθμός τους μειώνεται δραστικά (πτώση περίπου 36%). Οι εικόνες τύπου BC απουσιάζουν στα Βιβλία 1 και 4, ενώ στα Βιβλία 2, 3 και 5 οι αριθμοί τους είναι μικρότεροι της τάξης του 9%. Ωστόσο, από το 2001 και έπειτα (Βιβλίο 6) ο αριθμός των BC αυξάνεται ραγδαία, πλησιάζοντας τις εικόνες τύπου C. Παρόμοια αποτελέσματα (δημοφιλέστερες οι εικόνες τύπου C, οι οποίες αποκλίνουν σε μεγάλο βαθμό από τις BC και NC στην πλειονότητα) αντικατοπτρίζονται στις θεματικές ενότητες «Εγγεγραμμένα Σχήματα», «Αναλογίες και ομοιότητα», «Μετρικές Σχέσεις», «Εμβαδά» και «Μέτρηση Κύκλου». Η μοναδική περίπτωση που υπερισχύει η παρουσία των εικόνων τύπου BC είναι στο γράφημα της Εικόνας 4. Εξαίρεση αποτελούν τα Βιβλία 1 και 4, όπου οι BC και C είναι είτε ίσες, είτε συγκλίνουν στις τιμές αντίστοιχα. Οι εικόνες τύπου NC αυξάνονται στο Βιβλίο 4, αντίθετα με τα υπόλοιπα που το ποσοστό τους κυμαίνεται μεταξύ 3,03% και 6,49%.



Εικόνα 2: Κατάταξη των εικόνων NC, BC και C που εμφανίζονται στη θεματική περιοχή «Παράλληλες ευθείες» ανά βιβλίο



Εικόνα 3: Κατάταξη των εικόνων NC, BC και C της θεματικής ενότητας «Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στοιχειώδεις γεωμετρικοί όροι»

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συνοπτικά, όπως φαίνεται και από την Εικόνα 2, παρατηρούμε ότι οι εικόνες τύπου C είναι η δημοφιλέστερη κατηγορία στα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας διαχρονικά. Ακολουθούν οι εικόνες τύπου BC, ενώ οι εικόνες τύπου NC είναι πρακτικά ανύπαρκτες. Αναφορικά με τις θεματικές περιοχές βλέπουμε ότι: (1) στις ενότητες «Τρίγωνα», «Τετράπλευρα» και «Στοιχεία Στερεομετρίας» χρησιμοποιούνται περισσότερες εικόνες τύπου C σε σχέση με τις BC, με τη διαφορά τους να κυμαίνεται από 30% έως 50%, (2) η ενότητα «Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στοιχειώδεις γεωμετρικοί όροι» (Εικόνα 4) είναι η μόνη ενότητα που παρουσιάζει τις περισσότερες BC εικόνες (με εξαίρεση το Βιβλίο 1), κάτι που είναι αναμενόμενο καθώς περιλαμβάνει ορισμούς και ιδιότητες βασικών σχημάτων χωρίς τη χρήση αποδεικτικών διαδικασιών, (3) στις υπόλοιπες ενότητες οι εικόνες τύπου C εμφανίζονται σε μεγαλύτερο ποσοστό από τις BC, όμως η ποσοστιαίες διαφορές τους κυμαίνονται μεταξύ 50% έως 80% (με εξαίρεση τις ενότητες «Εμβαδά» στα Βιβλία 3, 4 και 5, «Μέτρηση Κύκλου» στο Βιβλίο 4, «Εγγεγραμμένα Σχήματα» στο Βιβλίο 5 και «Παράλληλες Ευθείες» στο Βιβλίο 6).

Ενώ όπως αναφέραμε οι εικόνες τύπου C είναι η δημοφιλέστερη κατηγορία σε όλα τα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας, από το 1990 και έπειτα (Βιβλία 4, 5, 6) παρατηρούμε ότι έχει επέλθει μείωση στη χρήση των εικόνων τύπου C και αύξηση των BC. Πιο συγκεκριμένα, από το 1990 (Βιβλίο 4) και μετά παρατηρούμε ότι η συχνότητα χρήσης των εικόνων C έχει μειωθεί από ένα μέσο όρο 70,59% (Βιβλία 1, 2, 3) στο 63,13% (Βιβλία 4, 5, 6) με την παρατηρούμενη διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική (z=4.78, p<0.05). Ταυτόχρονα, παρατηρούμε αύξηση των ποσοστών των εικόνων τύπου BC από ένα μέσο όρο 29,86% (Βιβλία 1, 2, 3) στο 32,89% (Βιβλία 4, 5, 6) με την παρατηρούμενη διαφορά να είναι επίσης στατιστικά σημαντική (z=-2.75, p<0.05).

Με βάση την ΑΘΔ, ενώ την περίοδο 1975-1990 (Βιβλία 1, 2, 3) γινόταν συχνότερη χρήση εργασιών (εικόνες) με χρήση τεχνικών που σχετίζονται με αποδείξεις (εικόνες τύπου C), την περίοδο 1990-2019 (Βιβλία 4, 5, 6) γίνεται μικρότερη χρήση εργασιών (εικόνες) που σχετίζονται με αποδείξεις. Ταυτόχρονα για τις ίδιες περιόδους, αυξάνεται η χρήση εργασιών που δίνουν έμφαση σε τεχνικές που σχετίζονται με ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα χωρίς απόδειξη (εικόνες τύπου BC). Αυτό σημαίνει ότι στην πρώτη περίοδο (1975-1990) οι υπεύθυνοι για την συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων Γεωμετρίας, έδιναν μεγαλύτερη έμφαση σε αποδεικτικές διαδικασίες (μεγαλύτερη χρήση εικόνων C) από ότι στη δεύτερη περίοδο (1990-2019).

Συμπερασματικά, με δεδομένο ότι τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν για τους μαθητές μια εκδοχή της γνώσης η οποία είναι αποδεκτή από την κοινωνία (Castell, Luke & Luke, 1988), η παρούσα εργασία προσφέρει ένα παράθυρο στους τρόπους που επιλέγει το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα να εισαγάγει τους μαθητές των Λυκείων στη Γεωμετρία. Αναλύοντας τις εικόνες των σχολικών βιβλίων Γεωμετρίας από το 1975 μέχρι σήμερα, βλέπουμε ότι παρατηρείται μείωση των εικόνων που σχετίζονται με αποδείξεις (εικόνες τύπου C) και παράλληλη αύξηση των εικόνων που σχετίζονται με ορισμούς και αξιώματα (εικόνες τύπου BC). Με βάση αυτό, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μάθηση και κατανόηση της Γεωμετρίας, όπως αυτή παρουσιάζεται μέσω των σχολικών βιβλίων, τείνει να γίνει λιγότερο συνυφασμένη με τη γεωμετρική απόδειξη. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να σχετίζεται με την παρατηρούμενη μείωση του ενδιαφέροντος των ερευνητών για την Ευκλείδεια Γεωμετρία από το 1970 και έπειτα (Inglis & Foster, 2018).

1.Το βιβλίο έχει διαχωριστεί σε 2 εγχειρίδια (Α' και Β' Λυκείου), από το 2014 και έπειτα.

2. Οι χρονικές περίοδοι που διδάσκονταν τα Βιβλία είναι κατά προσέγγιση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγγελή, Α. & Γαγάτσης, Α. (2017). Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος και πως αυτό λειτουργεί στην ανάπτυξη γεωμετρικού συλλογισμού και γεωμετρικής απόδειξης. *Πρακτικά 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ: Η Μαθηματική Γνώση για τη διδασκαλία και η ανάπτυξή της (σσ. 713-722).* Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. Αθήνα, Εκδόσεις Τόπος.

Παπαγεωργίου, Μ. & Τζεκάκη, Μ (2017). Κατανόηση μαθητών Α' Λυκείου για το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών. *Πρακτικά 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές (σσ. 193-202).* Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, S. Prediger (Eds.) and the Networking Theories Group, *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (Advances in Mathematics Education Series) (pp. 67-83) New York: Springer.

Castell, S., Luke, A., & Luke, C. (Eds.). (1988). Language, authority, and criticism: Readings on the school textbook. London: Falmer Press.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in Mathematics Education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21–30).

Chevallard, Y. & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. (pp. 38-43).

González-Martin, A.S., Nardi, E. & Biza, I. (2011). Conceptually driven and visually rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42* (5), (pp. 565-589).

Inglis, M. & Foster, C. (2018). Five Decades of Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(4), (pp. 462-500).

Η ΕΤΟΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΑΠΟ ΜΙΑ «ΔΥΣΚΟΛΗ» ΕΡΩΤΗΣΗ

Ιωάννης Κανέλλος[1,2], Έλενα Ναρδή[1], Ειρήνη Μπιζά[1]

[1]University of East Anglia, [2]Περιφερειακό Κέντρο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού Κρήτης

I.Kanellos@uea.ac.uk, E.Nardi@uea.ac.uk, I.Biza@uea.ac.uk

Η παρούσα εργασία εκθέτει μερικά αποτελέσματα από την έρευνά μας με αντικείμενο το πώς προσλαμβάνουν οι μαθητές Γυμνασίου την Μαθηματική Απόδειξη όταν τη συναντούν πρώτη φορά (Kanellos, 2014 και Kanellos, Nardi, & Biza, 2018). Παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα από τις απαντήσεις 85 μαθητών Γυμνασίου, σε μια ερώτηση με δύο σκέλη. Το πρώτο απαιτεί τη γνώση μιας μορφής απόδειξης που οι μαθητές είχαν διδαχθεί αναλυτικά. Το δεύτερο απαιτεί καλή γνώση εννοιών και ικανότητα ανάγνωσης γεωμετρικών σχημάτων. Εργαλείο ανάλυσης είναι η επεκτεταμένη ταξινομία των Harel & Sowder και τα αποτελέσματα ανοίγουν συζήτηση σχετικά με το πότε και το πώς της διδασκαλίας της Μαθηματικής Απόδειξης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΤΟ ΠΟΤΕ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι Μαθηματικά έχουμε, ως υπόσταση και περιεχόμενο, όταν υπερβαίνουμε τα όρια της Αριθμητικής και της τυποποιημένης Γεωμετρίας και θέτουμε ερωτήματα που αφορούν στις ιδιότητες αριθμών και σχημάτων και αναζητούμε συγκροτημένες απαντήσεις· δηλαδή από την ώρα που θεμελιώνουμε την απόδειξη και την αποδεικτική διαδικασία. Ακριβώς αυτό το σημείο καμπής συναντάται στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα όταν, μετά την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και την είσοδο στη Δευτεροβάθμια, αρχίζει να υπονοείται και κατόπιν να διδάσκεται η Μαθηματική Απόδειξη (εφεξής ΜΑ). Πότε όμως θα πρέπει άραγε να εκθέτουμε τα παιδιά στην «κρυφή γοητεία» της ΜΑ; Στην παρούσα εργασία κάνουμε απόπειρα να συνεισφέρουμε στο άνοιγμα μιας συζήτησης πάνω στο θεμελιώδες αυτό ερώτημα, από παιδαγωγική και διδακτική άποψη, αξιοποιώντας υλικό από την ερευνητική μας εργασία. Το υλικό αυτό αναλύθηκε με εργαλείο την ταξινομία αποδεικτικών σχημάτων Harel & Sowder και έδωσε παράλληλα ως ερευνητικό εύρημα την επέκταση της ταξινομίας . Η συλλογή του υλικού έλαβε χώρα στα πλαίσια της ερευνητικής μας δουλειάς που συνεχίζεται με στόχο την εμβάθυνση στα δημοσιευμένα δεδομένα με προοπτική την επεξεργασία και την κοινοποίηση των αδημοσίευτων, ακόμη, πλευρών της έρευνάς μας.

ΤΑΞΙΝΟΜΙΑ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ HAREL & SOWDER

Η ταξινομία των Harel & Sowder που χρησιμοποιήσαμε στην έρευνά μας δημοσιοποιείται από τους δημιουργούς της και λαμβάνει μια τελική μορφή μέσα σε μια δεκαετία περίπου (1998, 2007). Θα περιγράψουμε συνοπτικά την ταξινομία σε ό,τι ακολουθεί. Οι ερευνητές αυτοί, αφού όρισαν το αποδεικτικό σχήμα ως μια διαδοχή συλλογισμών η οποία «αποτελεί στοιχείο εξακρίβωσης και πιστοποίησης» (Harel & Sowder, 2007, σελ. 809), διακρίνουν τις ακόλουθες τρεις κατηγορίες αποδεικτικών σχημάτων όπως αυτά αναδύθηκαν μέσα από τις αποδεικτικές απόπειρες των φοιτητών τους:

- Κατηγορία Αποδεικτικών σχημάτων *Εξωτερικής Πεποίθησης* (*External Conviction=EC*) που περιλαμβάνει: το Αποδεικτικό σχήμα *Αυθεντίας (Authoritarian)=EC.A),* που στηρίζεται στο κύρος μιας αυθεντίας (π.χ. καθηγητής, βιβλίο κλπ)· το Αποδεικτικό σχήμα *Τελετουργίας* (*Ritual=EC.R*) που θεωρεί ότι η μορφή μιας απόδειξης (το τελετουργικό κομμάτι) είναι η βασική ένδειξη της αλήθειάς της· και το Αποδεικτικό σχήμα *Μη Αναφορικό* (*Non Referential Symbolic=EC.NRS*), το οποίο περιλαμβάνει αυθαιρεσίες κατά τη χρήση μαθηματικών συμβόλων, ορισμών, θεωρημάτων κλπ.
- Κατηγορία Αποδεικτικών σχημάτων που καλούνται *Εμπειρικά* (*Empirical=E*) και περιλαμβάνει: το *Επαγωγικό* (*Inductive=EI*) αποδεικτικό σχήμα το οποίο κατά κανόνα σε ειδικές περιπτώσεις των οποίων την ισχύ γενικεύει αβάσιμα και το *Αντιληπτικό* (*Perceptive=EP)* σχήμα που στηρίζεται σε αυθαίρετες αντιλήψεις είτε πρόκειται για ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων είτε αλγεβρικών παραστάσεων.
- Τέλος, η κατηγορία με αποδεικτικά σχήματα που καλούνται *Παραγωγικά* (*Deductive=D*) και περιλαμβάνει: το *Μετασχηματιστικό* αποδεικτικό σχήμα (*Transformational=DT*) καθώς και το *Αξιωματικό* (*Axiomatic=DA*). Η διαφορά των δυο σχημάτων έγκειται μεταξύ άλλων και στο ότι τα σχήματα *DA* έχουν ενσωματώσει την αντίληψη της φορμαλιστικής αξιωματικής θεμελίωσης.

Θεωρήθηκε ότι ο χαρακτηρισμός ενός σχήματος ως *DA*, ο οποίος άλλωστε συμπίπτει με τη συνήθη αντίληψη όσων αναπτύσσουν ή διδάσκουν την επιστήμη των Μαθηματικών για το τι είναι ΜΑ, δεν άρμοζε σε καμιά από τις αποδείξεις που δόθηκαν κατά τη συλλογή στοιχείων της έρευνάς μας. Για αυτό και επικεντρωνόμαστε, από την τρίτη κατηγορία, μόνο στο σχήμα *DT*.

Η ΕΠΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΤΑΞΙΝΟΜΙΑ HAREL & SOWDER

Η έρευνά μας, πέρα από την ποιοτικού χαρακτήρα διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο προσλαμβάνουν τα παιδιά τη ΜΑ κατά την πρώτη επαφή με αυτήν, περιέχει και τη συμβολή στην επέκταση της ταξινομίας (ibid. 2018). Συγκεκριμένα είχε αναφερθεί σε προηγούμενες έρευνες (Housman & Porter, 2003), ότι το ίδιο άτομο μπορεί και να δώσει αποδείξεις διαφορετικής κατηγορίας, σε <u>διαφορετικές</u> ερωτήσεις. Τα δεδομένα της δικής μας έρευνας κατά τη μεθοδική ανάλυσή τους αποκάλυψαν ένα πιο σύνθετο φαινόμενο. <u>Το ίδιο άτομο στην ίδια ερώτηση</u> παρουσίαζε στοιχεία δύο, τουλάχιστον, αποδεικτικών σχημάτων διαφορετικών κατηγοριών ή από την ίδια κατηγορία. Λίγο αργότερα από εμάς, μια άλλη ερευνητική δουλειά καταλήγει σε παρόμοιο συμπέρασμα (Lee, 2016).

Φαίνεται λοιπόν ότι η ταξινομία των Harel & Sowder είναι ένα αναλυτικό εργαλείο για την προσέγγιση και αποτύπωση του τρόπου που προσλαμβάνουν την απόδειξη οι διδασκόμενοι και αυτό ανεξάρτητα τόσο από το πολιτισμικό, κοινωνικοπολιτικό περιβάλλον μέσα στο οποίο αυτοί δρουν όσο και από το επίπεδο της εκπαίδευσης στο οποίο βρίσκονται. Πράγματι η ταξινομία γεννήθηκε από τη μελέτη των αποδεικτικών σχημάτων που εμφανίζονται στις αποδεικτικές προσπάθειες φοιτητών της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στις ΗΠΑ ενώ εμείς μελετήσαμε αποδεικτικές προσπάθειες στην κατώτερη μέση ελληνική εκπαίδευση (Γ΄ Γυμνασίου). Το γεγονός ότι η ταξινομία των Harel & Sowder λειτουργεί και στα δυο πλαίσια τόσο διαφορετικών κόσμων μάλλον φαίνεται να ενισχύει την άποψη ότι διαθέτει μεγάλο αναλυτικό βεληνεκές.

Πέραν τούτου φαίνεται ακόμη, όπως ειπώθηκε προηγουμένως, ότι είναι επεκτάσιμη με την αποδοχή μικτών αποδεικτικών σχημάτων. Για παράδειγμα, εντοπίσαμε αποδεικτικά σχήματα του τύπου DT-EC.NRS, EP- EC.NRS, κ.λ.π.. Τα μικτά αποδεικτικά σχήματα θα γίνουν ακόμη πιο κατανοητά με τα συγκεκριμένα παραδείγματα που θα δοθούν στη συνέχεια. Το σπουδαιότερο όμως είναι πως, με την αποτύπωση των αποδεικτικών σχημάτων, μπορούμε να διερευνήσουμε την ετοιμότητα των διδασκομένων για ΜΑ παρατηρώντας τις προσπάθειές τους από μια οπτική γωνία ποιοτικής ανάλυσης που ενδεχομένως να ανοίξει το δρόμο για βαθύτερη κατανόηση των σχετικών με τη ΜΑ νοητικών διαδικασιών και ίσως και άλλων παραγόντων είτε συγκυριακών είτε συστημικού χαρακτήρα όπως είναι π.χ. ο ρόλος του διδάσκοντος, του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών κ.λπ..

ΠΛΑΙΣΙΟ, ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ & ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό σύστημα η ΜΑ διδάσκεται για πρώτη φορά στην Γ΄ Γυμνασίου τόσο στην Άλγεβρα όσο και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα σχετίζεται π.χ. με ταυτότητες ενώ στη Γεωμετρία π.χ. με την ισότητα τριγώνων κ.α. (Αργυράκης, Βουργανάς, Μεντής, Τσικοπούλου, & Χρυσοβέργης, 2010). Με αυτό το δεδομένο επιλέχθηκε ένα Γυμνάσιο για να διεξαχθεί η έρευνα. Επρόκειτο για ένα Σχολείο όπου οι επιδόσεις των παιδιών κάλυπταν ένα σχετικά ευρύ φάσμα. Υπήρξε συνεργασία με τους Μαθηματικούς του Σχολείου και διαρκής ανταλλαγή απόψεων. Αναπτύχθηκε στενότερη συνεργασία με τη Μαθηματικό (εφεξής Ι.) που δίδασκε στα τμήματα της Τρίτης Τάξης. Έτσι συγκροτήθηκε το δείγμα της έρευνας το οποίο αριθμεί σε 85 άτομα. Όλες οι διδασκαλίες σε όλα τα τμήματα έγιναν αντικείμενο παρακολούθησης. Υπήρξε επίσης στενή συνεργασία τόσο στο διαγνωστικό Τεστ που δόθηκε στην αρχή της χρονιάς, σε Τεστ ενδιάμεσο όσο και στο Τεστ που δόθηκε στο τέλος της χρονιάς. Από αυτό το τελευταίο προέρχεται και η ερώτηση που αναλύουμε στην παρούσα εργασία. Πρόκειται για τις απαντήσεις στην Ερώτηση 6 του τελικού Τεστ η οποία έχει δυο σκέλη (εφεξής Ε6α & Ε6β, βλέπε Εικ.1). Διευκρινίζεται ότι επιλέξαμε μερικές ασκήσεις να είναι αρκετά δύσκολες για παιδιά που συναντούν για πρώτη φορά την ΜΑ. Η Ε6β ανήκει σε αυτήν την κατηγορία. Θελήσαμε με αυτόν τον τρόπο να αποφύγουμε πολλές «καλές» απαντήσεις που δεν θα αποκάλυπταν το εύρος των μαθησιακών αναγκών των παιδιών. Η επιλογή μας αυτή σε συνδυασμό και με το ότι τα παιδιά γνώριζαν ότι δεν επρόκειτο να συνυπολογισθεί στην αξιολόγησή τους η επίδοσή τους στο Τεστ οδήγησε σε ένα σχετικά υψηλό αριθμό περιπτώσεων όπου δεν καταγράφηκε καμιά απάντηση[1]. Το θεωρήσαμε όμως αυτό προτιμότερο.

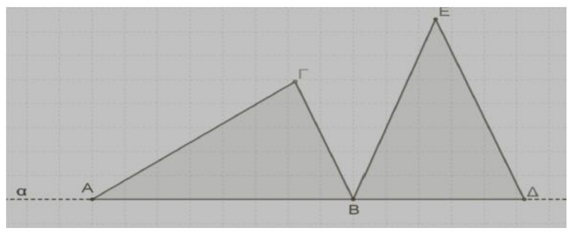
Η ΕΡΩΤΗΣΗ Ε6

Η ερώτηση Ε6 είναι η ακόλουθη:

Στο σχήμα (Εικ. 1), τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΒΔ έχουν ΑΓ=ΕΒ, ΑΒ=ΕΔ και ΓΒ=ΒΔ. Τα σημεία Α, Β και Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία α.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΒΔ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΒ και ΕΔ είναι παράλληλες.



Εικόνα 1. Το σχήμα για την ερώτηση Ε6.

Το σκέλος Ε6α είναι εύκολο υπό την έννοια ότι όταν είναι γνωστά τα κριτήρια ισότητας τριγώνων παρατηρεί κανείς αμέσως ότι τα δεδομένα εκπληρώνουν τις απαιτήσεις του κριτηρίου ισότητας πλευρά-πλευρά-πλευρά. Τα παιδιά είχαν εξασκηθεί επανειλημμένα σε ασκήσεις αυτού του τύπου.

Το σκέλος Ε6β αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο για τα παιδιά. Αρκεί η απλή παρατήρηση του Πίνακα 1, ο οποίος περιέχει το πλήρες σύνολο των αποδεικτικών σχημάτων των απαντήσεων στα Ε6α και Ε6β, για αυτή τη διαπίστωση:

	E6a	**E6b**
DT	41	4
DT-EP	1	1
DT-EC.NRS	9	11
EP-EC.NRS	4	8
EC.NRS	4	18
NS	26	43
Σύνολο	85	85

ΠΊΝΑΚΑΣ 1: Συχνότητα εμφάνισης αποδεικτικών σχημάτων που ανιχνεύθηκαν στις αποδείξεις των Ε6α και Ε6β.

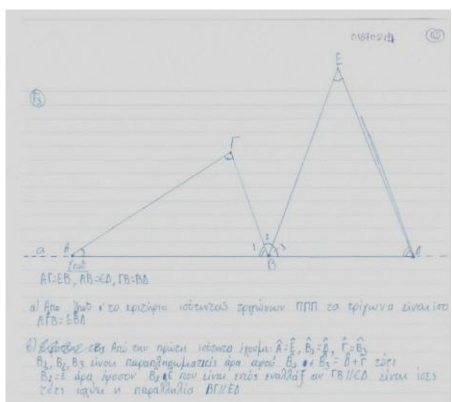
[1] Για τις περιπτώσεις που δεν έχει δοθεί απάντηση σε ένα ερώτημα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό NS=NO SOLUTION.

Ερευνητικά έχει εντοπισθεί προ πολλού χρόνου η διδακτική δυσκολία που σχετίζεται με το διαχωρισμό των εννοιών «παράλληλες ευθείες» αφ’ ενός και «γωνίες εντός εναλλάξ» αφ’ ετέρου. Το πλέον σύνηθες, και κατά τους Van Hiele (Fuys, Geddes & Tischler, 1988, σελ. 92-93) είναι να έχουν αρκετά παιδιά την εντύπωση ότι η έννοια «εντός εναλλάξ» ταυτίζεται με την έννοια «παράλληλες ευθείες». Στην περίπτωση της Ε6β πρόκειται τόσο για την έννοια «εντός εναλλάξ» όσο και την «εντός εκτός και επί τα αυτά» γωνίες. Συνδυάζεται δε και με τη δυσκολία της κατανόησης της απλής συνεπαγωγής (Harel & Sowder, 2007, σελ. 33). Μάλλον οι δυσκολίες αυτές αναδείχθηκαν στις αποδεικτικές προσπάθειες των παιδιών επειδή φαίνεται ότι δεν είχαν κατορθώσει ακόμη να «διαβάζουν» ορθά, σχήματα όπου υπεισέρχονται οι έννοιες της παραλληλίας και η θέση γωνιών που σχηματίζουν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη.

ΠΑΡΑΘΕΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα στα οποία τα παιδιά επιτυγχάνουν μια DT απόδειξη στην Ε6α σε σύγκριση με διάφορα αποδεικτικά σχήματα που ξεδιπλώνουν απαντώντας στην Ε6β. Η πρόθεσή μας είναι να στραφεί η ερευνητική προσοχή στο γεγονός ότι, παρά τις ελλείψεις που έχουν, οι απόπειρες απόδειξης της Ε6β αποτελούν μαρτυρία ενός εν εξελίξει μαθηματικού λόγου που διαθέτει τη δυναμική να μετασχηματισθεί προς την κατεύθυνση της παραγωγικής σκέψης. Ασφαλώς η διδασκαλία της Ι. έπαιξε σημαντικό ρόλο στο αποτέλεσμα αυτό.

Ο Ρ[37][2] δίνει στην Ε6β απάντηση που χαρακτηρίσαμε DT (Εικ. 2).



Εικόνα 2. Το γραπτό του Ρ[37].

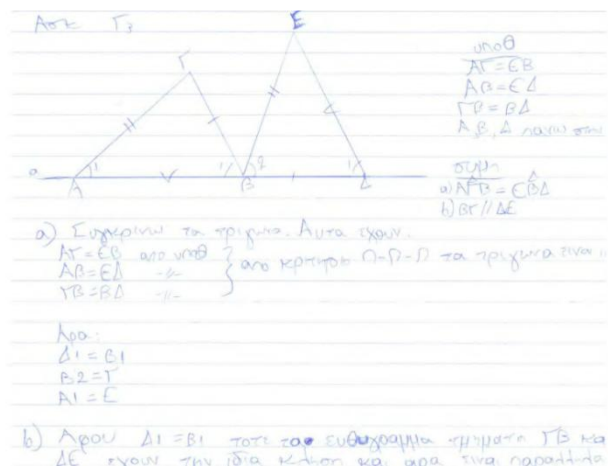
Ο Ρ[37] αξιοποιεί το άθροισμα των γωνιών $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 2\llcorner$[3] αφού τα σημεία Α, Β και Δ βρίσκονται σε μια ευθεία. Από την ισότητα $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{B}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3$ και τις $\hat{\Delta} = \hat{B}_1$ καθώς και την ιδιότητα της διαγραφής καταλήγει πως $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Η τελευταία ισότητα όμως είναι λογικά ισοδύναμη με την

[2] Ρ[] σημαίνει ένα συμμετέχοντα μαθητή ή μαθήτρια στην έρευνα. Ο αριθμός μέσα στις αγκύλες είναι ο κωδικός του. Για λόγους τεχνικούς κατά την έρευνα οι κωδικοί δεν ταυτίζονται με αύξοντες αριθμούς. Έτσι υπερβαίνον τον αριθμό 85 ενώ σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι διαδοχικοί.

[3] Το σύμβολο ∟ σημαίνει ορθή γωνία.

παραλληλία των ΒΓ και ΔΕ. Παρά το γεγονός ότι έχει ήδη αποδείξει την παραλληλία με την $\hat{\Delta} = \hat{B}_1$ η απόδειξή του λαμβάνει τον χαρακτηρισμό DT, αφού περιέχει στοιχεία παραγωγικής σκέψης (αξιοποιεί τα δεδομένα και καταλήγει σε ορθά συμπεράσματα).

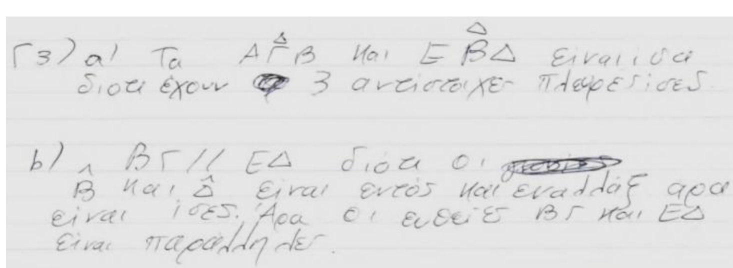
Ο P[64], αντίθετα με τον P[37], παρατηρεί αμέσως ότι η ισότητα των τριγώνων οδηγεί στην ισότητα $\hat{\Delta} = \hat{B}_1$ και επομένως δίνει απάντηση στην Ε6β (Εικ. 3) που χαρακτηρίσαμε DT. Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιεί την έννοια της κλίσης. Δεν χρησιμοποιεί την ορολογία των «εντός εναλλάξ», «εντός εκτός επί τα αυτά» κλπ.



Εικόνα 3. Το γραπτό του P[64].

Ο P[64] έχει ήδη κατακτήσει την έννοια της παραλληλίας με βάση την κλίση μιας ευθείας της μορφής ψ=αχ+β. Η σκέψη αυτή φαίνεται βάσιμη διότι η κλίση των ευθειών αυτής της μορφής δηλώνεται σε σχέση με τον άξονα χ΄χ το ρόλο του οποίο στην περίπτωση μας παίζει η ευθεία (α). Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι να έχει κατακτήσει την έννοια της κλίσης μέσα από προβλήματα Φυσικής. Σε κάθε περίπτωση φαίνεται να έχει άνεση στη χρήση των όρων.

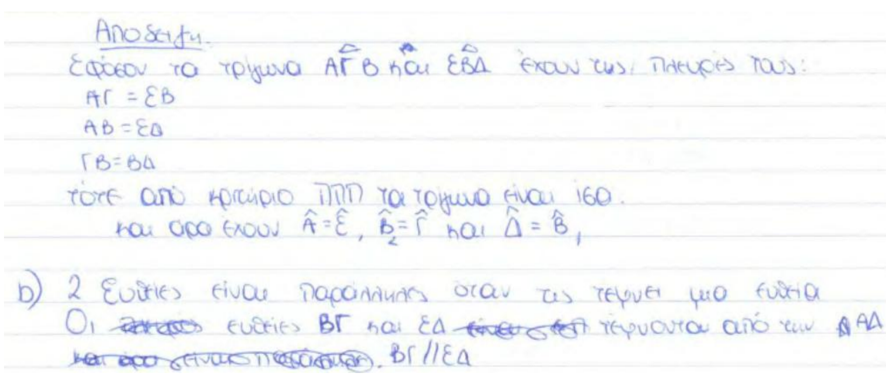
Ο P[36] δίνει απάντηση που χαρακτηρίσαμε DT-EC.NRS στην Ε6β (Εικ. 4).



Εικόνα 4. Το γραπτό του P[36].

Παρατηρούμε ότι η απάντηση στην Ε6β χαρακτηρίζεται από το στυλ μια μαθηματικής πρόζας: ο P[36] έχει συνειδητοποιήσει την ανάγκη επιχειρηματολογίας με δομή «αν, τότε» - εξ' ου αφ' ενός και ο χαρακτηρισμός DT. Αφ' ετέρου δε χαρακτηρίζεται από την εσφαλμένη ταύτιση των εννοιών «εντός εναλλάξ» και «παράλληλες». Επιπλέον, οι γωνίες στις οποίες μάλλον αναφέρεται δεν είναι «εντός εναλλάξ» αλλά «εντός εκτός και επί τα αυτά». Υπάρχει δηλαδή ασάφεια διότι υπάρχουν πάνω από δύο γωνίες με κορυφές Β και Δ. Όταν εμφανίζονται ακατάλληλες ή ασαφείς χρήσεις μαθηματικών όρων και ιδιοτήτων χαρακτηρίζουμε το αποδεικτικό σχήμα ως EC.NRS[4].

Ο P[41] δίνει απάντηση στην Ε6β που χαρακτηρίσαμε EC.NRS. (Εικ. 5).



Εικόνα 5. Το γραπτό του P[41].

Απαντώντας στην Ε6α, ο P[41] ακολουθεί με προσήλωση ό,τι έχει διδαχθεί από την Ι.: δεν περιορίζεται στην αναφορά του κριτηρίου ισότητας τριγώνων αλλά προσθέτει και ποιες γωνίες προκύπτουν ίσες. Παρ' όλα αυτά, όταν προσπαθεί να αποδείξει την Ε6β, δίνει απάντηση που θεωρήσαμε κατεξοχήν EC.NRS: διαχειρίζεται την έννοια «δυο ευθείες τέμνονται από τρίτη» ως ταυτόσημη με την έννοια της παραλληλίας. Ίσως να υποβόσκει η σκέψη για ισότητα γωνιών αλλά έτσι όπως διατυπώνεται η παραλληλία φαίνεται να είναι ένας γενικός νόμος ο οποίος ισχύει για κάθε ζεύγος ευθειών που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία. Αυτή ακριβώς η αυθαιρεσία στη χρήση μαθηματικών αντικειμένων είναι που μας οδήγησε στο χαρακτηρισμό EC.NRS.

ΝΑ ΔΙΔΑΣΚΕΤΑΙ Η ΝΑ ΜΗΝ ΔΙΔΑΣΚΕΤΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΝΩΡΙΣ; ΙΔΟΥ Η ΑΠΟΡΙΑ!

Η βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών βρίθει από συλλογή στοιχείων για σφάλματα, παρανοήσεις, χαμηλές επιδόσεις κ.λπ. των παιδιών απανταχού της Γης (e.g. Hanna & De Villiers, 2012). Θα περίμενε ίσως ο αναγνώστης, ο εξοικειωμένος με αυτό το ρεύμα, μετά τα παραδείγματα που εκθέσαμε, να διατυπώσει τη σκέψη ότι δεν υπάρχει η απαιτούμενη ωριμότητα για να διδαχθεί η απόδειξη νωρίτερα από την Γ΄ Γυμνασίου. Όμως αυτή η σκέψη θα αχρήστευε το

[4] Σημειώνεται ότι στον Διδακτορική Διατριβή ο Κανέλλος είχε αποδώσει μόνο με EC.NRS το αποδεικτικό σχήμα κρίνοντας πιο αυστηρά. Στην αναθεώρηση όπου υπάρχουν αναγνωρίζουμε στοιχεία του αποδεικτικού σχήματος DT ακόμη κι αν δεν ολοκληρώνεται η απόδειξη ως DT.

αναλυτικό μας όπλο, ανάγοντας τα πράγματα στη μανιχαϊστική διχοτομική εκδοχή του « σωστό»-«λάθος» με επόμενο βήμα την εξαφάνιση από το οπτικό πεδίο των ενδιάμεσων και εν πολλοίς μεταβατικών καταστάσεων μεταξύ μη αποδεικτικού και αποδεικτικού λόγου. Το μεγάλο πλεονέκτημα όμως της ταξινομίας, τόσο στην αρχική της εκδοχή των Harel & Sowder (2007), όσο και στην επεκτεταμένη που έχουμε προτείνει εμείς (ibid., 2018), πολύ περισσότερο συλλαμβάνει τη δυναμική εξέλιξη προς τη ΜΑ. Για το λόγο αυτό, εμείς υποστηρίζουμε το εξής: όσο νωρίτερα εκτίθενται τα παιδιά σε εργαλεία όπως η ΜΑ, τόσο πιο καλά θα τα αφομοιώσουν εφόσον αυτά προσφέρονται σε κατάλληλη μορφή. Ισχύει δηλαδή αυτό που υποστηρίζει η Sfard (2000, σελ. 36): Αν δε μιλάς στα παιδιά όσο το δυνατό συχνότερα με σωστά Μαθηματικά μην περιμένεις και πολλά αποτελέσματα. Η ΜΑ είναι ένα από τα σπουδαιότερα αντικείμενα διδασκαλίας που θα έπρεπε τα παιδιά κατά τη λογική Sfard να έρχονται σε επαφή. Φυσικά η άποψη αυτή για να εφαρμοσθεί θα πρέπει να συνοδεύεται από τροποποιήσεις στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών αλλά και, κυρίως, στον τρόπο διδασκαλίας (Dehaene, 2010, σελ. 156). Ακόμη θα ήταν ευχής έργο να κατανοήσουμε την πρόκληση των Μαθηματικών που οφείλεται στην ίδια τη φύση της γένεσής τους, όπως παρατηρεί ο Dehaene (2010, σελ. 98) αλλά και στη φύση του ανθρωπίνου εγκεφάλου (Dehaene, 2010, σελ. 157). Μέσα από την ερευνητική μας προσπάθεια κατανοούμε την ιδιάζουσα πρόκληση της ΜΑ για τους μαθητές αλλά ταυτόχρονα μαθαίνουμε να μην εκμηδενίζουμε και υποτιμούμε την ενδιάμεση εξέλιξη από τη μη γνώση στη γνώση. Ας λάβουμε υπόψη μας ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος δέχεται ένα καταιγιστικό brain storming στο γλωσσικό επίπεδο επί ενάμιση με δυο χρόνια ώσπου να αρθρώσει το νήπιο που τον διαθέτει κάποιες κουβέντες κακήν-κακώς. Στην περίπτωση των νηπίων πανηγυρίζουμε. Γιατί λοιπόν να μην ενθουσιαζόμαστε για την ανάλογη περίσταση όταν ο εφηβικός εγκέφαλος ψελλίζει τις πρώτες του «αποδεικτικές» φράσεις;!

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε θερμά την Εκπαιδευτικό, τα παιδιά της Γ΄ Τάξης, τον Διευθυντή του Σχολείου και όλους τους Συναδέλφους του Συλλόγου Διδασκόντων που αγκάλιασαν την παρουσία μας από την πρώτη στιγμή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυράκης, Δ., Βουργανάς, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2010). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*: ΟΕΔΒ.

Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths*: Odil Jacob.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 3(Monograph).

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte, NC: IAP.

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof Schemes and Learning Strategies of Above-Average Mathematics Students *Educational Studies in Mathematics, 53* (2), 139-158

Kanellos, I. (2014). *Secondary students' proof schemes during the first encounters with formal mathematical reasoning: Appreciation, fluency and readiness* (Doctoral thesis), UEA, Retrieved from https://ueaeprints.uea.ac.uk/49759/1/2014KanellosIEdD.pdf

Kanellos, I., Nardi, E., & Biza, I. (2018). Proof schemes combined: mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Teaching and Learning 20*(4), 277-294.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *Journal of Mathematical Behavior 41*, 26–44.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning 2(3),* 157-189.

ΕΙΝΑΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ; Η ΕΜΜΟΝΗ ΣΤΗΝ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΩΣ ΣΥΜΠΤΩΜΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Νίκος Μακράκης

nemakrakis@math.uoa.gr

Πολλές γραπτές εξετάσεις Μαθηματικών είναι σχεδιασμένες ώστε να υπάρχει μεγάλη πίεση χρόνου, που σημαίνει ότι στην αξιολόγηση εκτιμούμε ιδιαίτερα την ταχύτητα των μαθητών. Είναι η ταχύτητα στα Μαθηματικά σημαντική; Με ποια κριτήρια εκτιμά ένας εκπαιδευτικός πόσο χρόνο χρειάζεται μια γραπτή εξέταση Μαθηματικών; Πώς σχετίζονται τα Μαθηματικά με τον χρόνο; Εξετάζουμε με ποιον τρόπο η εμμονή στην ταχύτητα φανερώνει ιδεολογικά χαρακτηριστικά της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Στις γραπτές εξετάσεις Μαθηματικών παίζει σημαντικό ρόλο η ταχύτητα

Είναι γενικά παραδεκτό ότι στις πανελλήνιες εξετάσεις η πίεση χρόνου παίζει σημαντικό ρόλο και το βλέπουμε με ιδιαίτερη έμφαση και στις πανελλήνιες εξετάσεις (με ακραία ένταση στις πανελλαδικές Ιουνίου 2017 και 2018). Είναι πολύ δύσκολο να γράψει κανείς όλα τα θέματα στον ζητούμενο χρόνο. Αυτό αφορά όχι μόνο τις πανελλήνιες εξετάσεις, αλλά και τις περισσότερες γραπτές εξετάσεις Μαθηματικών όλων των σχολικών τάξεων.

Τι στοιχεία έχουμε γι' αυτό; Είναι δύσκολο να συλλέξουμε τέτοια στοιχεία από τις ίδιες τις εξετάσεις. Αλλά το ότι ο χρόνος δεν επαρκεί είναι τόσο προφανές που είναι κοινά παραδεκτό, ακόμα και από υποστηρικτές των θεμάτων. Για παράδειγμα, ο Νίκος Μαυρογιάννης για τα θέματα των πανελληνίων Ιουνίου 2017 (τα οποία υποστήριζε ως προς το μαθηματικό περιεχόμενό τους) αναφέρει:

> "Υπάρχει μια παράδοση στις πανελλήνιες εξετάσεις ο χρόνος να επαρκεί για την ικανοποιητική πραγμάτευση των θεμάτων μόνο αν ο εξεταζόμενος σκέφτεται και γράφει γρήγορα. Χαρακτηριστικές χρονιές που «τιμήθηκε» η παράδοση το 2015, το 2011, το 2007 αλλά και άλλες. Δυστυχώς και φέτος η κακή αυτή παράδοση διατηρήθηκε. Κατά πολλές εκτιμήσεις και μαρτυρίες έμπειροι εκπαιδευτικοί χρειάστηκαν από 90 έως 120 λεπτά για να λύσουν και να καθαρογράψουν τα θέματα. Αυτός ο χρόνος χρειάζεται να πολλαπλασιαστεί κατ' ελάχιστον με 2 για να δώσει ένα μέτρο του χρόνου που πρέπει να διατίθεται στους μαθητές. Με την στενότητα του χρόνου αρκετοί μαθητές που σκέφτονται σε βάθος αλλά όχι κατ' ανάγκην γρήγορα παρουσίασαν μια υποεπίδοση αναντίστοιχη των γνώσεων και των ικανοτήτων τους." (Μαυρογιάννης, 2017, σ. 11)

Με βάση αυτήν την εκτίμηση ένας μαθητής θα χρειαζόταν τουλάχιστον τρεις με τέσσερις ώρες για να λύσει όλα τα θέματα. Όμως, γνωρίζουμε ότι η εξέταση έχει προβλεπόμενη διάρκεια τριών ωρών!

Με ποιόν τρόπο υπολογίζουν οι εκπαιδευτικοί πόσο χρόνο χρειάζεται μια γραπτή εξέταση Μαθηματικών; Σίγουρα εμπειρικά. Υπάρχει βιβλιογραφία της έρευνας πάνω στη Διδακτική των Μαθηματικών σε αυτό το θέμα; Δυστυχώς, η έρευνα πάνω σε αυτό το ζήτημα είναι τελείως ανεπαρκής.

Όμως, το ενδιαφέρον είναι όταν δίνονται διαγωνίσματα με οριακά ανεπαρκή χρόνο, όχι από λάθος, αλλά επίτηδες. Δηλαδή, όταν σχεδιάζουμε διαγωνίσματα στα οποία ο χρόνος επαρκεί μόνο όταν ο μαθητής γράφει πάρα πολύ γρήγορα. Άρα πολλές φορές δίνουμε στους μαθητές διαγωνίσματα με σκοπό να ελέγξουμε και την ταχύτητά τους. Γιατί όμως; Γιατί πιστεύουμε ότι η ταχύτητα είναι σημαντική (Llewllyn 2013) ως παράγοντας και δείκτης μαθηματικής ικανότητας, μιας ικανότητας που φαντασιωνόμαστε ότι προϋπάρχει και είναι μια υπεράνω συνθηκών ιδιότητα του μαθητή (Hodgen & Marks 2009). Είναι, όμως, έτσι;

Ας υποθέσουμε ότι κάνουμε ένα πείραμα με δύο μαθητές με ακριβώς το ίδιο επίπεδο μαθηματικών γνώσεων, που ο ένας να έχει λύσει πολλά διαγωνίσματα και ο άλλος κανένα διαγώνισμα. Και τους δώσουμε να γράψουν μια γραπτή εξέταση. Τότε ποιος θα γράψει καλύτερα; Φυσικά ο πρώτος μαθητής. Τέτοιου είδους έρευνες υπάρχουν στη βιβλιογραφία (π.χ. Lanese 1991, Garrison & Ranklin 2009). Το συμπέρασμα είναι ότι η επιτυχία σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών δεν εξαρτάται μόνο από τη μαθηματική τους επίδοση, αλλά και από άλλους παράγοντες, όπως την οικειότητα με τις εξετάσεις (test familiarity όπως ονομάζεται στη βιβλιογραφία). Με τι έχει να κάνει το test familiarity; Σίγουρα έχει να κάνει και με την ταχύτητα του μαθητή, δηλαδή την εξάσκηση που έχει κάνει στο να αντιμετωπίζει τα θέματα στον δεδομένο χρόνο, την οικειότητα του μαθητή με τη γλώσσα του διαγωνίσματος, την οικειότητα με το μαθηματικό περιεχόμενο των διαγωνισμάτων κ.α.. Μπορούμε να πούμε ότι η ικανότητα επιτυχίας στα διαγωνίσματα είναι μια σχετικά ιδιαίτερη ικανότητα.

Τι σημαίνει, όμως, για τους μαθητές η έμφαση στην ταχύτητα; Η έμφαση στην ταχύτητα ενισχύει τα φαινόμενα εμφάνισης μαθηματικού άγχους (Math anxiety) στους μαθητές (Boaler 2014, Boaler 2015, Engle 2002). Επίσης, η έμφαση στην ταχύτητα μπλοκάρει την μνήμη εργασίας (working memory) των μαθητών και τους δημιουργεί εμπειρίες που χαρακτηρίζονται ως τραυματικές (Boaler 2014). Ακόμα, συνδέεται και με την έμφαση στην απομνημόνευση (το λεγόμενο και τυφλοσούρτι, ο.π.).

Μια τέτοια ιεράρχηση της ταχύτητας οδηγεί τους μαθητές στην αντίληψη ότι ο σκοπός τους δεν είναι να γνωρίζουν Μαθηματικά, αλλά να αποδίδουν στα Μαθηματικά (όχι "know Mathematics", αλλά "perform Mathematics" – Boaler 2014). Δεν έχει, μόνο, σημασία το τι ξέρω, αλλά το πόσο καλά θα καταφέρω να αποδώσω το ότι ξέρω Μαθηματικά.

Όμως, είναι η ταχύτητα στα Μαθηματικά σημαντική;

Η εκτεταμένη χρήση διαγωνισμάτων Μαθηματικών με έμφαση στην ταχύτητα είναι δυνατόν να αποκλείσει μαθητές που μπορεί να έχουν καλή γνώση Μαθηματικών, αλλά υστερούν σε αυτήν. Έχει ενδιαφέρον η περίπτωση του Laurent Schwartz, ο οποίος πήρε το Fields Medal το 1950, που έγραψε στην αυτοβιογραφία του ότι στα μαθητικά του χρόνια τον έκαναν να νοιώθει "χαζός", επειδή ήταν αργός στα Μαθηματικά (Boaler 2015).

Μάλιστα, έγραψε ότι "η ταχύτητα δεν έχει ακριβή αντιστοιχία με την ευφυΐα" (ο. π.). Τούτο υποστηρίζει και η σύγχρονη έρευνα της γνωστικής Ψυχολογίας, η οποία παρατηρεί πως "δεν είναι (…) η νοητική ταχύτητα εγγενές χαρακτηριστικό του κάθε ανθρώπου", αλλά "αντίθετα έχει παρατηρηθεί ότι η μετρήσιμη ικανότητα (…), όταν αξιολογείται βάση της ποιότητας στην απάντηση που δίνει το υποκείμενο (…), παρουσιάζεται αυξημένη σε συνθήκες όπου δεν υπάρχουν χρονικοί περιορισμοί" (Ντάβου 2000, σ 298-9).

Πώς μετράμε το χρόνο που χρειάζεται ένα διαγώνισμα Μαθηματικών;

Ας δούμε, όμως, το ερώτημα θέμα Δ και το ερώτημα Δ4 των πανελλαδικών Ιουνίου 2018:

"Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2, x \in R\ \mu\varepsilon\ \alpha > 1$.

Δ4.Αν α=2 να αποδείξετε ότι:

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$" (Υπουργείο Παιδείας 2018)

Οι μαθητές γνωρίζουν με βάση την ύλη τους ότι έχουν έξι τρόπους να αποδείξουν μια ανισότητα, όπως φαίνονται στη δεύτερη στήλη του Πίνακα 1.

Τρόπος απόδειξης	Ανισότητα για την f στο [2, 3]	$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \cdots$
Μονοτονία	$x \le 2 \Leftrightarrow f(x) \le f(2) \Rightarrow \boxed{f(x) \le -2}$	$\int_2^3 (-2)\sqrt{x-2}dx = -\frac{4}{3} = -1,\overline{3}$
Ακρότατα	$\boxed{f(x) \ge f(x_0)}$	-
Κυρτότητα και εφαπτομένη στο $x_0 = 2$	Εύρεση εφαπτομένης στο 2: $y = -2x + 2 \rightarrow$ Χρήση πρότασης: $f\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\ \sigma\tau o\ [2,3] \Rightarrow$ $\boxed{f(x) \ge -2x + 2}$	$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = -\frac{32}{15} = -2,1\overline{3}$
Κυρτότητα και εφαπτομένη στο $x_0 = 3$	Εύρεση εφαπτομένης στο 3: $y = (2e-6)x - 4e + 9 \rightarrow$ Χρήση πρότασης: $f\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\ \sigma\tau o\ [2,3] \Rightarrow$ $\boxed{f(x) \ge (2e-6)x - 4e + 9}$	$\int_2^3 [(2e-6)x - 4e + 9]\sqrt{x-2}dx = \frac{4e-22}{15} \simeq -2,2253 \ldots$

Θ.Μ.Τ. και μονοτονία f′	Θ.Μ.Τ. στο $[2,3]$: $\exists\xi \in (2,x): f'(\xi) = \frac{f(x)+2}{x-2}$ και f′ γν. αύξουσα$\Rightarrow 2 < \xi < 3 \Rightarrow f'(2) < f'(\xi) < f'(3) \Rightarrow -4 < \frac{f(x)+2}{x-2} < 2e-6, \Rightarrow \boxed{f(x) > -4x+6}$	$\int_2^3 (-4x+6)\sqrt{x-2}dx = -\frac{44}{15} = -2{,}9\overline{3}$
Γνωστή ανισότητα $e^x \leq x+1$	$lnx \leq x-1, x>0 \Rightarrow e^x \geq x+1$ $\Rightarrow e^{x-2} \geq x-1 \Rightarrow 2e^{x-2} \geq 2x-2$ $\Rightarrow \boxed{f(x) \geq -x^2+2x-2}$	$\int_2^3 (-x^2+2x-2)\sqrt{x-2}dx = -\frac{254}{105} \simeq -2{,}419 \ldots$

Πίνακας 1: Δυνατοί τρόποι κατασκευής ανισότητας

Μετά από την κατασκευή της ανισότητας οι μαθητές θα πρέπει να πολλαπλασιάσουν με $\sqrt{x-2}$, και έπειτα να εφαρμόσουν γνωστή πρόταση με την οποία εμφανίζουν το ολοκλήρωμα και την ανισότητα. Αν εξαιρέσουμε τον τρόπο απόδειξης ανισότητας με ακρότατα, καθώς εμφανώς δε μας δίνει ουσιώδες αποτέλεσμα, τότε ο μαθητής δεν έχει κάποιον λόγο (μαθηματικό επιχείρημα, υπόδειξη από την εκφώνηση ή τα προηγούμενα ερωτήματα) να διαλέξει ανάμεσα στους εναπομείναντες πέντε τρόπους. Βλέπουμε το αποτέλεσμα που παίρνει για τον κάθε τρόπο στην τρίτη στήλη του Πίνακα 1.

Παρατηρούμε ότι η άσκηση λύνεται μόνο αν ο μαθητής διαλέξει τον τρόπο με τη μονοτονία ή με την κυρτότητα και εφαπτομένη στο $x_0 = 2$, ενώ με τους άλλους τρεις τρόπους το αποτέλεσμα δεν είναι αρκετό για τη ζητούμενη απόδειξη ανισότητας.

Εφόσον δεν υπάρχει κανένα κριτήριο να ξέρει ο μαθητής από πριν ποιος τρόπος φτάνει σε λύση, τότε πώς διαλέγει ο μαθητής; Ο μαθητής διαλέγει στην τύχη, ας το παραδεχτούμε. Αναγκαστικά. Με τι πιθανότητα θα πετύχει ικανοποιητική λύση με την πρώτη; Εφόσον επαρκούν δύο τρόποι, τότε η πιθανότητα είναι $\frac{2}{5}$, δηλαδή 40%. Αν κάποιος μαθητής διαλέξει τρόπο που εν τέλει δεν δώσει αποτέλεσμα, τότε προλαβαίνει να δοκιμάσει άλλον; Η απάντηση είναι απερίφραστα όχι, καθώς ο καθένας τρόπος χρειάζεται πάρα πολύ χρόνο και το διαγώνισμα είναι πολύ ασφυκτικό χρονικά. Αλλά ακόμα κι αν το έκανε, η πιθανότητα να διαλέξει τρόπο που να δίνει αποτέλεσμα είναι $\frac{2}{4}$, δηλαδή 50%. Τούτο το παράδειγμα είναι ενδεικτικό για πολλά χαρακτηριστικά που έχουν πολλές γραπτές εξετάσεις Μαθηματικών.

Οδηγούμαστε στο εξής συμπέρασμα, το οποίο πρέπει να αντιμετωπίσουμε με ειλικρίνεια. Η επιτυχία σε μια τέτοια γραπτή εξέταση Μαθηματικών είχε σε τεράστιο ποσοστό να κάνει με την τύχη, όχι τόσο με την "Μαθηματική ικανότητα" και όχι τόσο με τη γνώση. Μπορούμε να πούμε ότι σε μια γραπτή εξέταση

Μαθηματικών στην οποία η έμφαση έχει δοθεί στην ταχύτητα, τότε αυξάνεται πάρα πολύ ο παράγοντας της τύχης στην επίλυσή της.

Πώς μετράμε τον χρόνο που χρειάζεται μια γραπτή εξέταση Μαθηματικών; Ο χρόνος που χρειάζεται δεν είναι ο χρόνος γραψίματος μιας προδιαγεγραμμένης πρότυπης απάντησης που φαντασιώνεται ο καθηγητής. Αλλά, ίσως πρέπει να ακολουθεί την πορεία της σκέψης του μαθητή. Δηλαδή, να χωράει τη διερεύνηση που πρέπει να κάνει ο μαθητής για να το λύσει. Πρέπει, δηλαδή να ξεκινάμε ανάποδα. Αν θέλουμε έναν μαθητή που να αναπτύσσει δημιουργική διερευνητική μαθηματική σκέψη σχεδιασμού στρατηγικών σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος, τότε αν βάζουμε γραπτές εξετάσεις στις οποίες αυτή δεν επιτρέπεται λόγω χρόνου, τότε σίγουρα τον αποθαρρύνουμε και αυτού του είδους τη σκέψη την τιμωρούμε. Ίσως, πρόκειται για την διαρκή προκατάληψη υπέρ της προτοτυποκεντρικής σκέψης και σε βάρος της πολυμήχανης σκέψης στον δυτικό κόσμο (Jullien 2013).

Άλλες παρατηρήσεις από τα Μαθηματικά και την Εκπαίδευση

Η διάσταση του χρόνου ενυπάρχει στην Μαθηματική εκπαίδευση από τις πρώτες τάξεις. Ένα παράδειγμα είναι οι ταυτότητες, όπως: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$, που μαθαίνουν πρώτη φορά οι μαθητές στην 3η Γυμνασίου. Οι μαθητές διδάσκονται την απόδειξή της: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$. Το σχολικό βιβλίο γράφει ότι "Η προηγούμενη ταυτότητα χρησιμοποιείται για να βρίσκουμε γρήγορα το γινόμενο αθροίσματος δύο παραστάσεων επί τη διαφορά τους" (Αργυράκης κ.α. 2007). Το ίδιο γράφει και για άλλες ταυτότητες. Δηλαδή, τονίζεται ότι η χρησιμότητα της ταυτότητας είναι πως μας γλιτώνει χρόνο, ενώ είναι προφανές ότι μια τέτοια έμφαση υποβαθμίζει την σημασία της ως αλγεβρικό αντικείμενο. Αντίστοιχες προσεγγίσεις υπάρχουν από διάφορους εκπαιδευτικούς για κάθε θεώρημα ή πρόταση, ότι μια χρησιμότητά του είναι πως μας γλιτώνει χρόνο, δηλαδή όταν το χρησιμοποιούμε παραλείπουμε την απόδειξή του.

Επίσης, υπάρχει μια σύγχρονη τάση στην έρευνα πάνω στα Μαθηματικά όπου τεχνικές αποδείξεις θεωρημάτων που είναι πάρα πολύ μακριές και δεν μπορούν, πρακτικά, να γίνουν με ανθρώπινο χέρι σε λογικό χρόνο και γίνονται με τη βοήθεια ειδικού λογισμικού από υπολογιστή (μια διάσημη περίπτωση είναι το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων στη Θεωρία Γραφημάτων). Κάτι τέτοιο θα μας φαινόταν αδιανόητο σε παλιότερες εποχές των Μαθηματικών, όμως τελικά είναι δύσκολο να αμφισβητηθεί η ορθότητα των αποδείξεων αυτών. Σε κάθε περίπτωση, αυτές οι αποδείξεις δοκιμάζουν την αντίληψή μας ότι μια μαθηματική απόδειξη αφορά ένα στατικό πεπερασμένο κείμενο το οποίο ελέγχεται από τη μαθηματική κοινότητα σε πεπερασμένο χρόνο.

Μέχρι πριν τρεις ή τέσσερις δεκαετίες σημαντικός στόχος της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ήταν να βγάζει μαθητές που να κάνουν γρήγορα πράξεις. Αργότερα ήρθαν τα κομπιουτεράκια τσέπης και έτσι μειώθηκε η σημασία αυτού του εκπαιδευτικού στόχου. Σήμερα υπάρχουν δημοφιλή υπολογιστικά λογισμικά ή εφαρμογές για smartphone (όπως π.χ. το Photomath) που μέσα σε ένα δευτερόλεπτο κάνουν πιο περίπλοκους υπολογισμούς, μελετούν συναρτήσεις, υπολογίζουν όρια και ολοκληρώματα κ.α. και τώρα βλέπουμε ότι υπάρχουν κάποια λογισμικά που μπορούν να μας βοηθήσουν και σε μαθηματικές αποδείξεις. Πόσο σημαντική είναι πλέον η ταχύτητα στα Μαθηματικά, όταν σε κάποιο επίπεδο παραγωγής μαθηματικής γνώσης το πιο χρονοβόρο κομμάτι το αναλαμβάνει τελικά ο υπολογιστής; Μπορούμε να πούμε ότι η έμφαση στην ταχύτητα στα Μαθηματικά ως εκπαιδευτικός στόχος αποκτά όλο και λιγότερο νόημα;

Ποια είναι η σχέση των Μαθηματικών με το χρόνο;

Πώς αντιλαμβανόμαστε τον χρόνο; Οι ανθρωπολόγοι λένε ότι ο προϊστορικός και ο αρχαίος άνθρωπος είχε μια κυκλική αντίληψη του χρόνου (Fagan & Durrani 2016), καθώς η άμεση εμπειρία του ήταν αγκιστρωμένη στην περιοδικότητα των φαινομένων από τα οποία εξαρτιόταν η ζωή του (μέρα/νύχτα, εναλλαγή εποχών κ.α.). Ο χρόνος ως γραμμική μετρήσιμη μεταβλητή εισάγεται στην ανθρωπότητα τον 17ο αιώνα με τον Νεύτωνα, το πρώτο μηχανικό ρολόι κατασκευάστηκε το 14ο αιώνα, ενώ το πρώτο χρονόμετρο μόλις το 1926.

Ο σύγχρονος δυτικός άνθρωπος έχει μια γραμμική μονοδιάστατη εμπειρική αντίληψη για τον χρόνο, παρόμοια με αυτή που αντιλαμβάνονται οι φυσικές επιστήμες, μια αντίληψη του χρόνου ως "συνεχή", "ομογενή", και "ομοιόμορφα ρέοντα" (παρ' όλου που γνωρίζει πως δεν είναι οικουμενική, καθώς ο χρόνος, για παράδειγμα, μέσα σε μια μαύρη τρύπα έχει τελείως άλλα χαρακτηριστικά). Ισχυρίζεται, όμως, ότι ο ιστορικός και κοινωνικός χρόνος είναι "ασυνεχής", "ανομοιογενής ως προς τις χρονικές στιγμές", "τις διάρκειες" και τον ρυθμό (Μπαλτάς 2018). Ο χρόνος, δηλαδή, ως κοινωνικό βίωμα ενέχει το χαρακτηριστικό του αστάθμητου, αυτού που δεν μπορεί να προβλεφθεί από τα πριν και έχει υποκειμενική και ιδεολογική διάσταση όπως έχει πει ο Zizek (1989), αλλά και άλλοι φιλόσοφοι, όπως ο Kant και ο Bergson.

Ο συγχρονισμός όλων των ρολογιών αποτελεί συμβολικό γεγονός, όπως και η μέτρηση του χρόνου. Η διάσταση του χρόνου εισάγεται στην ανθρώπινη εμπειρία με την γλώσσα (Lacan 1988). Ο Lacan (2005) περιγράφει ότι το υποκείμενο λειτουργεί στη γλώσσα με μια αναδρομικότητα. Για παράδειγμα, διαβάζοντας μια φράση και όταν φτάσουμε στην τελευταία λέξη, τότε αρθρώνεται ολόκληρο το νόημα που της αποδίδουμε και, μάλιστα, έτσι επανανοηματοδοτούμε όλες προηγούμενες λέξεις της με τρόπο, όμως, που νομίζουμε ότι το ύστερο νόημα τους το είχαν από πριν (ο. π.). Επίσης, όταν στην ομιλία συναντιέται ο λόγος με το σύστημα σημαινόντων μας, τότε εμείς έχουμε την εμπειρία ότι έχουν από πριν συναντηθεί στον τόπο του Άλλου και με αυτόν τον φαντασιακό τρόπο συγκροτούμε τα νοήματά μας (Lacan 2017). Έτσι, κάθε τι νέο το διυλίζουμε από το σημείο το οποίο αποδίδει με αναδρομικό τρόπο νόημα στα μέχρι πριν "αιωρούμενα" στοιχεία του λόγου (Lacan 2005, Zizek 1989). Μια πτυχή του παραπάνω σχήματος είναι ότι με κάθε τι νέο αγωνιούμε να πείσουμε τον εαυτό μας ότι εκείνο επιβεβαιώνει αυτό που ήδη πιστεύουμε.

Ας υποθέσουμε ότι στο θέμα πανελληνίων που αναλύσαμε πριν ένας μαθητής που γνωρίζουμε επιλέξει σωστά με πιθανότητα 40% (στην τύχη) και γράψει 20, ενώ ένας άλλος επιλέξει λάθος με πιθανότητα 60% και γράψει 18. Τότε με έναν φαντασιακό τρόπο ο πρώτος μαθητής στο μυαλό μας θα αποκτήσει την εικόνα ότι από την αρχή ήταν τόσο καλός που θα το έγραφε ενώ ο άλλος όχι. Και μετά εφόσον ο πρώτος το έγραψε και ο άλλος όχι, τότε όντως φαντασιακά επιβεβαιώνεται αυτό που νομίζαμε ότι πιστεύαμε από πριν. Αλλά, τελικά, ο σκληρός πυρήνας του ζητήματος είναι η τύχη (που όταν ανακύπτει προσπαθούμε να το καλύψουμε με μεταφυσικά ιδεολογήματα όπως: «η τύχη ευνοεί τον καλά διαβασμένο μαθητή»).

Συμπεράσματα και ερωτήματα

Η θέση μου είναι ότι η έρευνα πάνω στην Μαθηματική Εκπαίδευση αγνοεί μια ολόκληρη διάστασή της, τη διάσταση του χρόνου. Ο χρόνος είναι ο παρονομαστής όλων των φαινομένων τα οποία μελετάμε, αλλά παρ’ όλ’ αυτά δεν τον λαμβάνουμε υπ’ όψιν. Επίσης, η ταχύτητα δεν είναι μαθηματική ικανότητα, ούτε υπάρχει υπεράνω συνθηκών και συγκειμένου (context) μαθηματική ικανότητα, η οποία να μπορεί να μετρηθεί. Η ταχύτητα έχει επιβληθεί σαν εκπαιδευτικό κριτήριο στη Μαθηματική Εκπαίδευση με εξωτερικό τρόπο από κοινωνικούς καθορισμούς.

Η εμμονή μας να την εντάσσουμε σε ένα κοινωνικά διαχειρίσιμο σύστημα μας οδηγεί να την εντάσσουμε στο μοντέλο του βαθμού. Ένας αριθμός μας δίνει τη δυνατότητα να συγκρίνουμε βαθμούς (άρα και μαθητές), να βγάζουμε μέσους όρους και να κατασκευάζουμε ποσοτικά κριτήρια (π.χ. βάσεις εισαγωγής) με τη φαντασίωση ότι αυτά ακουμπούν στην πραγματικότητα.

Η σύγχρονη κοινωνία έχει μια εμμονή με την ποσοτικοποίηση και δίνει έμφαση σε στόχους ποσοτικούς και μετρήσιμους που συνδέονται με μια γραμμική αντίληψη με απώτερο στόχο την πρόοδο/ανάπτυξη (Μιχελάκου 2013, Llewellyn 2013). Ο μύθος της προόδου λειτουργεί ως έναν φαντασιακό απροσδιόριστο ιδανικό ορίζοντα προς τον οποίο κυλάει με ντετερμινιστικό τρόπο η Ιστορία και το μόνο ζήτημα είναι το πόσο γρήγορα θα φτάσει. Η εμμονή στην ταχύτητα και στην ποσοτικοποίηση σχετίζεται και με την κοινωνικά και πολιτικά κυρίαρχη αξία της ποσοτικά προσδιορίσιμης αποδοτικότητας του εργαζόμενου στον σύγχρονο νεοφιλελεύθερο καπιταλισμό. Αν αυτή ποσοτικοποιείται, τότε όλα ποσοτικοποιούνται. Οι αριθμοί είναι ένα σύμπαν και δεν γίνεται να μείνει κάτι απ’ έξω. Άλλωστε, η Μαθηματική Εκπαίδευση παίζει με έναν ιδιαίτερο τρόπο τον ρόλο της διαμόρφωσης του υποκειμένου στη σύγχρονη κοινωνία στην εποχή του νεοφιλελευθερισμού (Valero 2018).

Τα χαρακτηριστικά των διαγωνισμάτων που μελετάμε δεν είναι ατύχημα, ούτε λάθος, αλλά ίσως ένα σύμπτωμα (Zizek 1989) της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που μπορεί κάποιες φορές να λειτουργήσει ως ενδεικτικό για βαθύτερα χαρακτηριστικά που ενυπάρχουν σε αυτή, τα οποία έχουν να κάνουν και με ιδεολογικές παραδοχές της (Pais & Valero 2011, Μακράκης 2015). Τέτοιου είδους εξετάσεις δεν είναι αποτυχημένες, αλλά ακριβώς το αντίθετο, δηλαδή απολύτως πετυχημένες. Ποιος είναι ο σκοπός τους; Το να κατατάξουν τους 90.000 υποψήφιους μαθητές σε βαθμολογική σειρά ώστε να μπουν σε σχολές. Ως προς αυτόν τον σκοπό είναι απολύτως επιτυχημένες, και η ισοπέδωση που επιβάλουν ώστε να τον πετύχουν είναι ο σκληρός πυρήνας του Πραγματικού των πανελλαδικών, δηλαδή αφορούν πράγματα για τα οποία αδυνατούμε να μιλήσουμε. Μας είναι απαραίτητο να μη μιλάμε γι' αυτά, ώστε να στηρίζεται ο φαντασιακός τρόπος με τον οποίο ντύνουμε τις πανελλήνιες με τον μανδύα της "αντικειμενικότητας" και της "αξιοκρατίας" (Άραγε, ικανοποιεί το test των πανελληνίων το κριτήριο της επαναληψιμότητας; Φυσικά και όχι.), ώστε τελικά να στηρίζουμε τις συμβολικές σχέσεις που απορρέουν από αυτές.

Το ότι η εκπαίδευση να ακροβατεί σε τέτοιες αντιφάσεις συνδέεται με το ότι μια από τις λειτουργίες της είναι η συμβολή στην κυβερνησιμότητα των πληθυσμών στις οποίες αναφέρεται, ο διανεμητικός της ρόλος (δηλαδή η διανομή των ανθρώπων στις βαθμίδες της οικονομικής παραγωγής) και ο ιδεολογικός της ρόλος (Althusser 1999). Όπως σχολιάζουν οι Bourdieu και Passeron (1990), η εκπαίδευση μετατρέπει τις κοινωνικές ανισότητες σε εκπαιδευτικές ανισότητες και μετά ξανά σε κοινωνικές ανισότητες.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον Παναγιώτη Σπύρου για τις χρήσιμες παρατηρήσεις του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Althusser L. (1999). Θέσεις, Αθήνα: Θεμέλιο.

Boaler, J. (2014). Research Suggests Timed Tests Cause Math Anxiety. Στο Teaching Children Mathematics, 20 (8).

Boaler, J. (2015). Fluency without fear: Reasearch evidence on the best ways to learn Math facts, ανακτήθηκε από το youcubed.org στις 13/9/2019.

Bourdieu P. και Passeron J. - C. (1990). Reproduction in education, society and culture, London: Sage.

Engle R. W. 2002. Working Memory Capacity as Executive Attention. Στο Current Directions in Psychological Science 11:19–23.

Fagan B. M., Durrani N. (2016). World Prehistory, New York: Routledge.

Garrison S. C. & Rankin G. L. (2009). Effect of familiarity with standardized achievement tests on subsequent scores. Στο Peabody Journal of Education Volume 7, 1930 - Issue 6.

Hodgen, J., & Marks, R. (2009). Mathematical 'ability' and identity. In L. Black, H. Mendick, & Y. Solomon (Εκδ.), Mathematical relationships in education: identities and participation (σελ. 31-42). London: Routledge.

Jullien F. (2013). Εγκώμιο της απραξίας, Ηράκλειο: Π. Ε. Κ..

Lacan J. (1988). The seminar Book I (1953-4), New York: Norton.

Lacan J. (2005). Σεμινάριο τρίτο (1955-6), Αθήνα: Ψυχογιός.

Lacan J. (2017). The seminar Book V (1957-8), Cambridge: Polity.

Lanese, J. (1991). Test Familiarity: Evidence of "Practice Effects"? Στα πρακτικά του Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Llewllyn A. (2013). Progress – is it worth it? Στο Proceedings of the 2nd Mathematics Education and Contemporary Theory Conference, Manchester.

Pais, A., & Valero, P. (2011). Beyond Disavowing the Politics of Equity and Quality in Mathematics Education. Στο B. Atweh, M. Graven, W. Secada, & P. Valero (Eds.), Mapping Equity and Quality in Mathematics Education.

Valero, P. (2018). Human Capitals : School Mathematics and the Making of the Homus O Economicus. Στο Journal of Urban Mathematics Education, 11(1&2), 103–117.

Žižek, S. (1989). The sublime object of ideology. London: Verso.

Αργυράκης Δ. κ.α. (2007). Γ' Γυμνασίου Μαθηματικά σελ. 44, Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Μακράκης Ν. (2015). Η κοινωνικοπολιτική διάσταση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης με αφορμή τον Althusser. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (επ.) Πρακτικά του 6ου συνεδρίου ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ..

Μαυρογιάννης Ν. (2017): Τα Θέματα Πανελληνίων εξετάσεων Μαθηματικών Προσανατολισμού 2017 & η πρόσληψη τους από την μαθηματική κοινότητα. Αναρτημένο στο www.mathematica.gr, ανακτήθηκε στις 2/4/2019.

Μιχελάκου Β. (2013). Η κοινωνικοπολιτική στροφή στη διδακτική των μαθηματικών. Μεταπτυχιακή διατριβή.

Μπαλτάς Α. (2018). Ονόματα του Κομμουνισμού, Αθήνα: Πατάκη.

Ντάβου Μ. (2000). Οι διεργασίες της σκέψης στην εποχή της πληροφορίας, Αθήνα: Παπαζήση.

Υπουργείο Παιδείας (2018). Αναρτημένο στο www.minedu.gov.gr, ανακτήθηκε στις 13/9/2019.

ΜΙΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΧΟΥΣΕΡΛ, ΣΤΗΝ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αντώνης Ζαγοριανάκος

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

matheart7@math.uoa.gr

Η εργασία εισάγει μια φαινομενολογική μεθοδολογία ως ένα πολύτιμο πλαίσιο έρευνας της διδακτικής των Μαθηματικών, η οποία βασίζεται στο έργο του Χούσερλ και στην ριζική κατανόησή του από τον Μερλώ-Ποντύ, φιλοδοξώντας να εισάγει καίρια μεθοδολογικά εργαλεία στη διερεύνηση της ανάδυσης μαθηματικών κατανοήσεων, στη διάρκεια μαθησιακών δραστηριοτήτων. Η αποβλεπτικότητα εισάγεται ως η καθοριστική ιδιότητα της διεργασίας μέσω της οποίας συγκροτείται η γνώση, και παρουσιάζονται η φαινομενολογική αναγωγή και η εποχή (ουδετεροποίηση), ως τα βασικά εργαλεία της μεθοδολογίας. Γίνεται χρήση ερευνητικών παραδειγμάτων για την ανάδειξη της ικανότητας της μεθοδολογίας να σκιαγραφήσει τα συγκροτητικά επιτεύγματα του μαθητή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

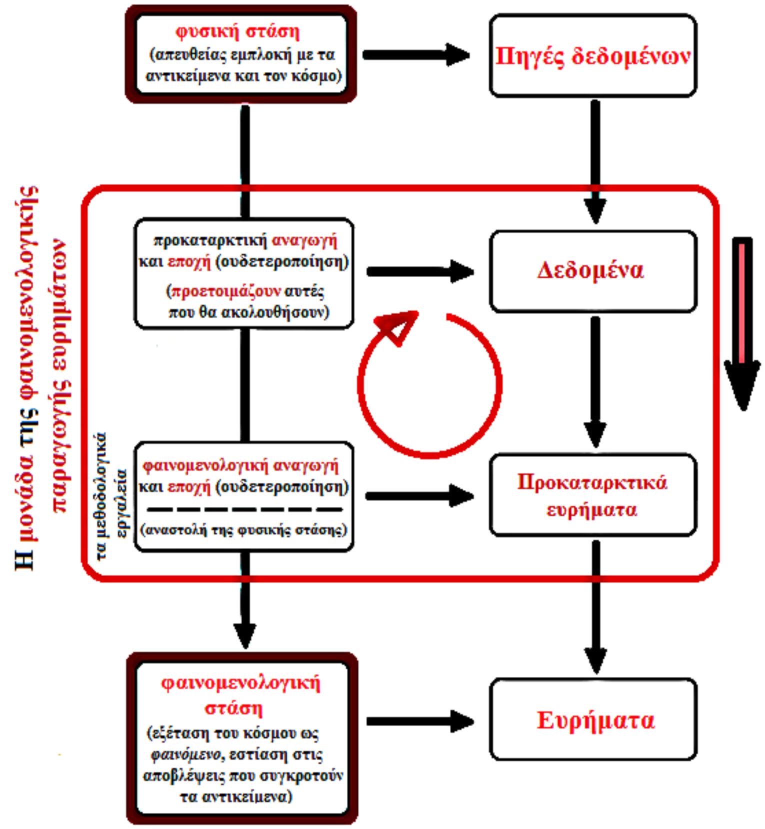
Στόχος της εργασίας αυτής είναι να εισαγάγει στην ελληνική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών μια φαινομενολογική μεθοδολογία, συνοδευμένη από ερευνητικά παραδείγματα τα οποία έχουν εκδοθεί και παρουσιαστεί σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια. Παρά την αναπόφευκτη αναφορά σε προ-δημοσιευμένο υλικό παράλληλα με την ανάγκη εισαγωγής μεθοδολογικών και θεωρητικών όρων κατά βάση άγνωστων στην κοινότητά μας, η εργασία αυτή αποσκοπεί σε μια αυτόνομη παρουσίαση της προτεινόμενης φαινομενολογικής μεθοδολογίας.

ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα στην οποία βασίζεται αυτή η εργασία εφαρμόζει μια νεοεισαχθείσα προσέγγιση του έργου του Χούσερλ (1859-1938) η οποία έχει δεχθεί καθοριστικές επιδράσεις από τις αναλύσεις αυτού του έργου από τον Μερλώ-Ποντύ (1908-1961). Αντικείμενο της εργασίας, με εφαλτήριο τις προαναφερθείσες επιρροές αποτελούν *μαθηματικές* κατανοήσεις και *μαθηματικά* αντικείμενα, ως εμφανιζόμενες/-α σε ενσυνείδητες δραστηριότητες, συγκροτημένες/-α από μαθησιακές δράσεις, *εμπειρικές* και *αφαιρετικές* (abstractive). Με άλλα λόγια, η μελέτη της *εμφάνισης* των μαθηματικών κατανοήσεων και αντικειμένων αποτελεί αντικείμενο της *φαινομενολογικής* μεθοδολογίας που εισάγεται εδώ, και συνάδει με την φαινομενολογική αντίληψη της πρόσληψης του κόσμου ως φαινόμενο, του οποίου τείνουμε να ξεχνάμε τις πηγές, ενός φαινομένου που εκτυλίσσεται μέσα στη *ζώσα εμπειρία*. Γίνεται σαφές ότι η μεθοδολογία που εισάγεται εδώ είναι βασισμένη στην αντίστοιχη φαινομενολογική θεωρία, αν και μπορεί να λειτουργήσει συμπληρωματικά προς άλλες ερευνητικές θεωρήσεις, όπως η πολιτισμικο-κοινωνική θεωρία Δραστηριότητας, βασισμένη στον Βιγκότσκι (1896-1934) (βλ. Shvarts & Zagorianakos, 2015). Τα τρία ιστορικά πρόσωπα που αναφέρθηκαν εδώ (Χούσερλ, Μερλώ-Ποντύ και Βιγκότσκι), εκτός από την επαλληλία των χρονικών διαστημάτων που έζησαν και έδρασαν, έχουν μια κοινή διερευνητική σκοπιά, η οποία αφορά στην περιγραφή και ακριβέστερη κατανόηση της αντίληψής μας του κόσμου εντός του οποίου ζούμε, και του μετασχηματισμού του σε αφηρημένα αντικείμενα, όπως είναι τα *μαθηματικά* αντικείμενα. Αρκεί να αντιληφθούμε τη Ζ.Ε.Α. του ύστερου Βιγκότσκι ως ζώσα μαθησιακή εμπειρία, ως φαινόμενο κατά τη φαινομενολογική οπτική, όπου το γνωσιακό υποκείμενο συναντιέται με τον κόσμο μέσω αντικειμένων διυποκειμενικά συγκροτημένων ώστε να είναι προσβάσιμα από τους άλλους. Επομένως, αν και η έρευνα που παρουσιάζεται εδώ δεν στηρίζεται στο έργο του Βιγκότσκι θεωρεί δεδομένο τον διυποκειμενικό χαρακτήρα των υποκειμενικών ενεργημάτων, λαμβάνοντας υπ' όψη την «αινιγματική πρόταση του Χούσερλ: 'Η υπερβατολογική υποκειμενικότητα είναι διυποκειμενικότητα'" (Μερλώ-Ποντύ, 2009, σ. 154).

Η ΑΠΟΒΛΕΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΩΣ ΤΟ ΚΡΙΣΙΜΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΤΩΝ ΓΝΩΣΙΑΚΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΩΣ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

Το αποβλεπτικό στοιχείο των συνειδητών γνωσιακών δράσεων αφορά στην κρίσιμη παρατήρηση του Χούσερλ—ο οποίος έδωσε εντελώς νέες δυνατότητες στην ιδέα που εισήγαγε ο Φ. Μπρεντάνο—ότι οι ενσυνείδητες δράσεις είναι πάντα *για* κάτι, για ένα *αντικείμενο* ή *κατάσταση πραγμάτων*: φοβάμαι *για* κάτι, ελπίζω *σε* κάτι, εκφράζω κρίση *για* κάτι (αληθές ή ψευδές) κλπ. Η συνειδητή μου δράση απευθύνεται σε αντικείμενα που έχουν την μορφή των αποβλέψεών μου, έχουν *αποβλεπτικό σχηματισμό* που δέχεται καθοριστική διαστρωμάτωση από τους ορίζοντες μέσα στους οποίους κάνει την εμφάνισή του ο κόσμος-για-μένα και από-μένα. Ο κόσμος μου είναι ένας συγκροτημένος κόσμος που θα ήταν αδιανόητος δίχως το ενσώματο εποπτικό του υπόστρωμα. Έτσι, όπως λέει ο Χούσερλ, μέσω της αποβλεπτικής διαστρωμάτωσης των φωτοσκιάσεων του κόσμου με τον οποίο έρχεται σε επαφή η συνείδηση, σε παροντική, γεγονική ανάδραση και επαλληλία βρίσκει περισσότερα από αυτά που έχει προηγουμένως εναποθέσει στα πράγματα. Στην ιδεατότητα της γλώσσας και της ανακάλυψης, που είναι εξαρχής διυποκειμενικά συγκροτημένες, εμφανίζονται τα μαθηματικά αντικείμενα, που με τη συμβολική τους διάσταση έχουν την αφαίρεση των εμπειρικών συμβεβηκότων ως προϋπόθεση της ύπαρξής τους. Η υφαίρεση των εμπειρικών στρωματώσεων, από το κερί του Καρτέσιου, καταλήγει με την φαινομενολογική αντιστροφή στο διπλό άγγιγμα (double sense) του Χούσερλ (1989), όπου εμφανίζεται η ενσώματη αντίληψη της διπλής ύπαρξης ως σώμα *υποκείμενο* (Leib – living body) και ως σώμα *αντικείμενο* (Körper), και η ετερότητα εμφανίζεται ενσώματα, σε «ένα πλέγμα συναγωγών όπου παύει να γίνεται αντιληπτός ο παλμός της συγκροτητικής συνείδησης» (Μερλώ-Ποντύ, 2009, σ. 270). Ενώ για τον Καντ είναι αποκλειστικά δύο τα στοιχεία που συγκροτούν την επαλληλία του αφηρημένου με το συγκεκριμένο, και οι μοναδικές *αφηρημένες* εποπτείες που αποδέχεται είναι αυτές του χρόνου και του χώρου, για τον Χούσερλ η απόβλεψη της συνείδησης για κάτι εκφράζεται και συνδέεται τόσο με *αφηρημένες εποπτείες* (categorial intuitions) όσο και με εμπειρικές˙ η γνωσιακή λειτουργία υλοποιείται με *ενσώματες* αποβλέψεις, κινούμενες από την *λειτουργική* αποβλεπτικότητα (fungiendere intentionalität) και από *αναστοχαστικές* δράσεις, κινούμενες από την αποβλεπτικότητα *δράσης* (intentionality of act)· με τα δύο αυτά είδη εποπτείας να συμπλέκονται στη συγκρότηση των μαθηματικών αντικειμένων—παραδείγματα θα δοθούν στην ανάλυση του μαθησιακού επεισοδίου, που θα ακολουθήσει. Η κρίσιμη διαφορά σε θεωρητικό επίπεδο μεταξύ Χούσερλ και Καντ, η οποία αφορά ευθέως στην κατασκευή (Καντ) ή στην συγκρότηση (Χούσερλ) των μαθηματικών αντικειμένων—μέσω γνωσιακών δομών (εποπτειών) σύμφωνα με τον Χούσσερλ, οι οποίες εκ-πληρώνονται ώστε να υποστηρίξουν τα αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα—αφορά στον *ενσώματο* γνωσιακό πλούτο της ενσώματης συνείδησης (embodied consciousness), του εμπειρικού εγώ ή living body (Leib), τον οποίο αναγνωρίζει και διερευνά η Χούσερλ / Μερλώ-Ποντυανή θεωρητική βάση της μεθοδολογίας που παρουσιάζεται εδώ, ως μια προϋπόθεση κατανόησης της γνωσιακής πρόσληψης. Στο μαθησιακό επεισόδιο που θα ακολουθήσει ο ρόλος της ενσώματης συνείδησης στοχεύεται και αποκαλύπτεται με την φαινομενολογική μεθοδολογία, μέσα από την φαινομενολογική περιγραφή της κρίσιμης εποπτείας της *οπτικής-του-πουλιού* και των συνέπειών που είχε για την εξέλιξη της διερεύνησης της φοιτήτριας, σε επακόλουθες εποπτείες. Η χαρτογράφηση της *αποβλεπτικής* δράσης και των ενσώματων καταγωγικών της πηγών μπορεί να διευρύνει το πεδίο όρασης της έρευνας σχετικά με την σχέση του ατόμου με το μαθηματικό αντικείμενο και ικανή να δώσει καινούριες αναγνώσεις στη μαθησιακή διαδικασία των Μαθηματικών. Με τη μελέτη του *αποβλεπτικού* στοιχείου της γνωσιακής εμπειρίας μπορούμε να ξετυλίξουμε τα μαθησιακά επιτεύγματα των μαθητών μας, τα αδιέξοδά τους και τις δυσκολίες που στέκονται εμπόδιο στους δρόμους που επιλέγουν, μέσα στους ορίζοντες των ίδιων των μαθητών. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, το ερώτημα '*πως* η μεθοδολογική προσέγγιση που προτείνεται επιτυγχάνει τη χαρτογράφηση του αποβλεπτικού χαρακτήρα των γνωσιακών δράσεων' είναι δυνατό να απαντηθεί με την αναδρομική ανάλυση της τρέχουσας αποβλεπτικής ενότητας των γνωσιακών συγκροτήσεων των μαθητών. Η διερεύνηση αυτή γίνεται δυνατή με την προτεινόμενη φαινομενολογική μεθοδολογία.



***Εικόνα 1.* Διάγραμμα της φαινομενολογικής μεθοδολογίας**

ΤΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΤΗΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ: ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΕΠΟΧΗ

Το φαινομενολογικό θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται η μεθοδολογία που εισάγεται εδώ μας εισάγει σε μια νέα, αποβλεπτική ματιά στον γνωσιακό κόσμο-της-ζωής, ως αποβλεπτικά συγκροτημένης ζώσας εμπειρίας. Χωρίς προ-υποθέσεις για το πως θα έπρεπε να είναι, αλλά με την εστίαση στις εμφανίσεις των γνωσιακών φαινομένων ως τέτοιων, και ιδιαίτερα στον αποβλεπτικό τους τρόπο εμφάνισης. Η απαλλαγή από προ-υποθέσεις ή προκαταλήψεις εννοείται ως η *ουδετεροποίηση* των δικών μας αποβλέψεων, και της επίδρασης που μπορεί να έχουν στην αντίληψή μας και στις περιγραφές μας του υπό εξέταση φαινομένου. Με αυτόν τον τρόπο, η *φαινομενολογική αναγωγή*, δηλαδή η εστίαση στις αποβλεπτικές δράσεις του γνωσιακού υποκειμένου—με εκκίνηση τη μελέτη των *εμφανίσεων* των μαθηματικών αντικειμένων που συγκροτούνται από το γνωσιακό υποκείμενο—συμπληρώνεται από την «αναστολή», την «ουδετεροποίηση των δοξικών μας τροπικοτήτων», που ο Χούσερλ αποκάλεσε *εποχή*. Η εποχή είναι ένας όρος που ο Χούσερλ «δανείστηκε από τους Έλληνες Σκεπτικούς φιλοσόφους, για τους οποίους σημαίνει τον αυτοπεριορισμό που οι Σκεπτικοί έλεγαν ότι πρέπει να έχουμε για τις κρίσεις μας επί των ζητημάτων» (Sokolowski, 2000, σ. 48). Ο Χούσερλ δεν διατηρεί την σκεπτικιστική απόχρωση του όρου αλλά τον εφαρμόζει σε συνδυασμό με την *φαινομενολογική αναγωγή*, η οποία αποτελεί την στροφή από την *φυσική στάση* (όπου εστιάζουμε στα *αντικείμενα* της σκέψης) στις αποβλέψεις που συγκροτούν τα αντικείμενα αυτά (στο ίδιο/ibid.). Με την *εποχή* ουδετεροποιούμε τα στοιχεία του φαινομένου που δεν μετέχουν της αποβλεπτικής υλοποίησης που εξετάζουμε καθώς και τη δική μας αποβλεπτική ανάμειξη, ενώ με τη *φαινομενολογική αναγωγή* στρεφόμαστε από τα αντικείμενα στις αποβλεπτικές δράσεις που τα έφεραν στο προσκήνιο (εικόνα 1). Ο συνδυασμός των δύο μεθοδολογικών εργαλείων αποκαλύπτει την υφή των αποβλεπτικών συγκροτήσεων, των επινοήσεων των μαθητών. Στην επόμενη ενότητα θα εισαχθεί ένα παράδειγμα εφαρμογής της φαινομενολογικής μεθοδολογίας σε μία μελέτη περίπτωσης, με σκοπό την εξοικείωση με τον καθοριστικό ρόλο των μεθοδολογικών εργαλείων της *φαινομενολογικής αναγωγής* και της *εποχής* στην κατανόηση των αποβλεπτικών συγκροτήσεων μιας φοιτήτριας και μέλλουσας καθηγήτριας Μαθηματικών στην Αγγλική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τα δεδομένα προέρχονται από τη διδακτορική μου διατριβή (Φεβρουάριος 2015) και έχει προηγηθεί εκτενής ανάλυση της περίπτωσης που θα αναφερθεί εδώ στη διεθνή βιβλιογραφία (Zagorianakos & Shvarts, 2015).

ΕΝΑ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ.

Η εμπειρική εποπτεία της *οπτικής-του-πουλιού*, που έβαλε σε κίνηση μια σειρά από αφηρημένες, κατηγορικές εποπτείες.

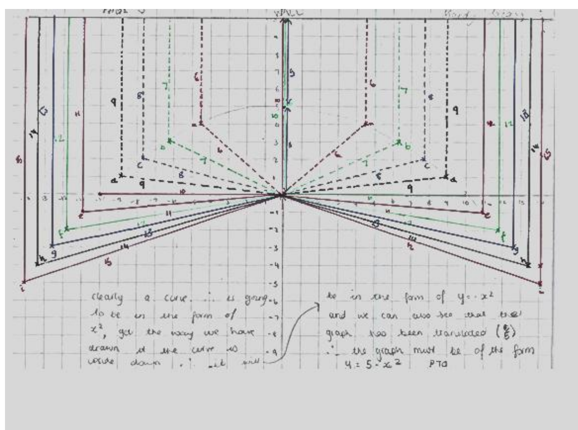
Η μελέτη περίπτωσης που θα αναφερθεί εδώ αφορούσε μια δραστηριότητα με ενσώματο χαρακτήρα κατά την εισαγωγή της. Συγκεκριμένα, αφορούσε στη μαθηματική διερεύνηση της γραμμής που θα ικανοποιούσε την ιδιότητα όλα τα σημεία της να ισαπέχουν από έναν τοίχο και από ένα σταθερό σημείο, με απόσταση δέκα βημάτων από τον τοίχο. Η αναφορά στη δραστηριότητα μιας φοιτήτριας, από μία από τις ομάδες 3-4 ατόμων που σχηματίστηκαν, θα επικεντρωθεί στην κρίσιμη επίδραση που είχε το ενσώματο *εποπτικό* απόθεμα της φοιτήτριας στην εξέλιξη της δραστηριότητάς της. Θα δούμε *πως* η επίδραση αυτή αποκαλύφθηκε με τη μεθοδολογική χρήση της *φαινομενολογικής αναγωγής,* στις γνωσιακές αποβλέψεις της φοιτήτριας, και με την ουδετεροποίηση (*εποχή*) παραγόντων που δεν έπαιξαν ρόλο στη μαθησιακή της εμπειρία. Δυστυχώς ο χώρος δεν επαρκεί για την ανάδειξη και της ουδετεροποίησης των αποβλέψεων του υποφαινόμενου ερευνητή, οι οποίες ανοίγουν το πεδίο εφαρμογής της *φαινομενολογικής μεθοδολογίας* στην κριτική θεώρηση της συνεισφοράς του ίδιου του ερευνητή.

Επιστρέφοντας στην περιγραφή της δραστηριότητας της Μαίρης (ψευδώνυμο), της φοιτήτριας δηλαδή που επιλέχθηκε για να επεξηγήσει τη χρήση της μεθοδολογίας, κατά την ενσώματη εισαγωγή της δραστηριότητας στην τάξη ένα (εναλλασσόμενο) μέλος κάθε ομάδας στεκόταν στη θέση του σταθερού σημείου τη στιγμή που τα υπόλοιπα μέλη προσπαθούσαν να παραστήσουν το σχήμα της ζητούμενης γραμμής. Η φοιτήτρια, στο τέλος της ενσώματης ενασχόλησής της στην τάξη ήταν σε σύγχυση για τη μορφή αυτής της γραμμής, θεωρώντας ότι είναι ευθεία παράλληλη με τον τοίχο, στο μέσο της απόστασης ανάμεσα στον τοίχο και στο σταθερό σημείο. Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι οι διερευνήσεις των φοιτητών/-τριών γινόταν ερήμην των γνώσεων και της καθοδήγησης του καθηγητή, ο οποίος εσκεμμένα απείχε από κάθε παρεμβολή, καθώς ο δικός του στόχος ήταν η επίτευξη αναστοχασμών εκ μέρους των φοιτητών/-τριών σχετικά με τη φύση της μαθηματικής τους εξέλιξης, κάτι που δηλωνόταν και στον τίτλο του μαθήματος (*Nature of mathematical development*). Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η αποχή του καθηγητή από τις διερευνήσεις των φοιτητών διευκόλυνε την ουδετεροποίηση (*εποχή*) του ρόλου του, ώστε να επιτευχθεί η αναγωγή στις επιλογές και αποβλέψεις της ίδιας της φοιτήτριας.

Όταν η Μαίρη επέστρεψε σπίτι της αποφάσισε να συνεχίσει τη διερεύνηση του προβλήματος, και σχεδίασε σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί τον τοίχο, σαν μια ευθεία γραμμή, και το σταθερό σημείο σε απόσταση δέκα τετραγωνιδίων από τον τοίχο (εικόνα 2). Σχεδίασε επίσης ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, με την αρχή των αξόνων να βρίσκεται στο σταθερό σημείο και τον άξονα των τεταγμένων να είναι κάθετος στην ευθεία που αναπαριστούσε τον τοίχο.

Τότε παρουσιάστηκε στη φοιτήτρια η εμπειρική εποπτεία της *οπτικής-του-πουλιού* (bird’s eye view). Είδε δηλαδή το σχέδιό της στο τετραγωνισμένο χαρτί σαν μια κάτοψη πτήσης της πάνω από την τάξη, όταν είχε διαμειφθεί η ενσώματη διερεύνησή της. Και αυτή η εποπτεία συνοδευόταν από την απόφασή της να βρει σημεία που να ανήκουν στη γραμμή που αναζητούσε. Με τη βοήθεια της εποπτείας της οπτικής-του-πουλιού διέλυσε την προηγούμενη σύγχυσή της για τη μορφή της γραμμής που αναζητούσε, καθώς είδε την αστοχία διατήρησης ίσης απόστασης από τον τοίχο και το σταθερό σημείο στο σχήμα της ευθείας γραμμής, στο μέσο της απόστασης ανάμεσα στον τοίχο και στο σταθερό σημείο. Βρήκε κατ’ αρχήν τρία σημεία, τα $(0,5)$, $(10,0)$ και $(-10,0)$. Μετά χρησιμοποίησε έναν χάρακα, τοποθετώντας τον παράλληλα με τον ‘τοίχο’ και τον άξονα των τετμημένων, στο διάστημα μεταξύ αυτών των δύο ευθειών. Το σκεπτικό της για αυτή την ενέργεια βασιζόταν στην εποπτεία ότι η γραμμή που αναζητούσε θα είχε κοινά σημεία με τον χάρακα, σε κάθε κίνηση του χάρακα εντός του χώρου αυτού. Μέσω αυτής της εποπτείας η Μαίρη θεώρησε τη ζητούμενη γραμμή ως συνεχή, και μάλιστα συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων, ορμώμενη από τα τρία σημεία που είχε ήδη ανιχνεύσει. Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος βρήκε άλλα δύο σημεία, τα $(\sqrt{20},4)$ και $(-\sqrt{20},4)$). Έτσι, το Πυθαγόρειο Θεώρημα έγινε για την φοιτήτρια εργαλείο εξεύρεσης σημείων.

Και τότε, εξετάζοντας το σχήμα των πέντε σημείων εμφανίστηκε η εποπτεία τους ως ‘σχήμα καμπάνας’ (εικόνα 2). Η εποπτεία αυτή συνοδεύτηκε από την εποπτεία πως η γραμμή που ζητούσε θα πρέπει να έχει τη μορφή μιας τετραγωνικής συνάρτησης. Αυτή η εποπτεία δύο βημάτων περιγράφεται από τον Χούσερλ ως αφηρημένη, *κατηγορική* εποπτεία, που βασίζεται σε μια *εμπειρική* εποπτεία (της καμπάνας), ως το πρώτο από τα δύο βήματα της *κατηγορικής* εποπτείας (των τετραγωνικών συναρτήσεων). Στη συνέχεια η Μαίρη είχε την εποπτεία ότι η καμπύλη δεν θα έτεμνε τον άξονα των τετμημένων, προς τους αρνητικούς αριθμούς. Διέθετε όμως ήδη ένα αλγεβρικό εργαλείο αναζήτησης σημείων, μέσω του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, το οποίο αποφάσισε να δοκιμάσει σε σημεία του αρνητικού ημιεπιπέδου, δηλαδή των αρνητικών τιμών των τεταγμένων. Αυτή η δοκιμή απέφερε την κατάργηση των ενστάσεών της σχετικά με την συνέχεια της καμπύλης και στις δύο πλευρές του άξονα των τετμημένων. Αφού βρήκε τον τύπο για την καμπύλη που ζητούσε αποφάσισε να δοκιμάσει τον τύπο που είχε βρει ως *μοντέλο* για τη συνάρτηση που αφορούσε απόσταση έξι βημάτων/μονάδων από τον τοίχο. Ο τύπος που βρήκε για τη δεύτερη συνάρτηση την οδήγησε σε έναν γενικό τύπο, όλων των παραβολών με απόσταση *α* από την ευθεία του τοίχου. Όμως ακόμη και τότε, στο απόγειο της αφηρημένης εποπτείας που της είχε προσκομίσει μαθηματικούς τύπους από μια ενσώματη εκκίνηση ήταν εμφανής ο ενσώματος χαρακτήρας των κατανοήσεών της. Στην περιγραφή της στην συνέντευξη που της πήρα—λίγους μήνες μετά την δραστηριότητα και λίγες ημέρες μετά την παράδοση των εργασιών της για αξιολόγηση από τον καθηγητή, όπου είχε συμπεριλάβει αυτή την δραστηριότητα—είπε πως στον γενικό τύπο που είχε βρει, αν *στεκόταν* κάποιος *πάνω σε ένα από τα σημεία* του τύπου θα ισαπείχε από τον τοίχο και το σταθερό σημείο. Οι γενικεύσεις της φοιτήτριας ήταν ενσώματα ριζωμένες, πριν αναβαθμιστούν σε μαθηματικά έγκυρες και λειτουργικές για την εξέλιξη της δραστηριότητάς της. Επιπλέον, η εποπτεία σε δεύτερο βαθμό, στα δύο βήματα εποπτείας μετάβασης από το *εμπειρικό* στο *αφηρημένο* (εμπειρική εποπτεία καμπάνας / κατηγορική εποπτεία τετραγωνικών συναρτήσεων) δείχνει την επικοινωνία των δύο αυτών στρωμάτων, σε ένα επίπεδο όπου η φαινομενολογική μέθοδος μπορεί να παράσχει νέες περιγραφές.



Εικόνα 2. **Το διάγραμμα της Μαίρης, που λειτούργησε ως πρόσληψη της ενσώματης έναρξης της δραστηριότητας στην τάξη, μέσω της εποπτείας *οπτική-του-πουλιού* που είχε η φοιτήτρια.**

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΗΓΩΝ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ήταν αποφασιστικής σημασίας για την έρευνα η ουδετεροποίηση (*εποχή*) του ρόλου του διδάσκοντα και η συγκέντρωση της προσοχής στα *αποβλεπτικά* δρώμενα, μέσα από τις *πηγές* των δεδομένων, δηλαδή η εστίαση στις κινήσεις/νοήσεις/αποβλέψεις που έφεραν τα αντικείμενα στο προσκήνιο˙ μέσα από αυτή την εστίαση έγινε ορατή η σύνδεση των ενσώματων και των νοητικά κατοχυρωμένων εκφράσεων και δράσεων.

Όπως προαναφέρθηκε, η κορύφωση της επέκτασης της δραστηριότητας από τη Μαίρη ήλθε με την εύρεση του γενικού τύπων των παραβολών, μέσω της *εποπτείας ουσίας* (Wesensshau) που είχε η φοιτήτρια, σε τρία βήματα:

- Του **αρχικού παραδείγματος**
- Της **μοντελοποίησης του αρχικού παραδείγματος**
- Της **σύνθεσης ταυτότητας** μεταξύ των προηγούμενων δύο βημάτων

Τα βήματα αυτής της γενίκευσης προβλέπονται από την Χουσερλιανή θεωρία (Husserl, 1983) και ήταν το επιστέγασμα των *κατηγορικών εποπτειών δύο σταδίων* της φοιτήτριας, που είχαν προηγηθεί (Zagorianakos & Shvarts, 2015). Μέσω της εποπτείας ουσίας (Wesensshau) επιτεύχθηκε από την φοιτήτρια ένας αλγεβρικός τύπος για όλες τις παραβολές, παρ' όλο που η φοιτήτρια δεν έχει πριν ακούσει τον όρο παραβολή. Είχε όμως διαθέσιμο στην εποπτεία της, όπως φάνηκε, το γενικό σχήμα των τετραγωνικών συναρτήσεων, οι οποίες ήταν αποφασιστικές για τη μαθηματική ενσάρκωση των ενσώματων εποπτειών της.

Τα ενσώματα αποβλεπτικά δρώμενα, κινούμενα από εποπτείες όπως αυτή της *οπτικής-του-πουλιού* την οδήγησαν στην *εποπτεία ουσίας* που απέφερε τον γενικό τύπο, και αναδείχθηκαν σε *αποφασιστικούς παράγοντες* της διερεύνησης της φοιτήτριας αλλά και για την εξαγωγή συμπερασμάτων, για την επίτευξη διδακτικών παρεμβάσεων που καλλιεργούν την αυτενέργεια και την ενσώματη συμμετοχή, σε καθοριστικό βαθμό για τα μαθηματικά αποτελέσματα των δράσεων που υποκινούνται από τέτοιες παρεμβάσεις. Η αποφασιστική μαθηματική κατοχύρωση της φορμαλιστικής εγκυρότητας που επιτεύχθηκε, αποτέλεσε για την έρευνα την *τελική σφραγίδα* για την ανάδειξη μια διαδικασίας που εν πολλοίς παραμένει στην αφάνεια χωρίς τον φαινομενολογικό αναστοχασμό και τη φαινομενολογική μεθοδολογία.

Με την εστίαση στις αποβλεπτικές διεργασίες των γνωσιακών υποκειμένων, με την ουδετεροποίηση της κυριαρχίας του τελικού αντικειμένου, με την αναδρομική εξέταση των πηγών—με κατεύθυνση τις καταγωγικές, αρχικές εμφανίσεις—με τη φροντίδα να επανακατανοηθεί η ανακάλυψη ή η επανενεργοποίηση του μαθηματικού νοήματος, και με την κλήση για διδακτικές δράσεις που θα διευκολύνουν και θα νοηματοδοτήσουν τις ενσώματα τροφοδοτημένες αυτενέργειες των μαθητών, η φαινομενολογική μεθοδολογία που προτείνεται εδώ αποκαλύπτει και δίνει δυνατότητες περιγραφής σε ένα αντιληπτικό υπόλοιπο, το πιο ζωτικό όσο και παραγνωρισμένο της ζώσας, γνωσιακής εμπειρίας.

Με τη χρήση της *φαινομενολογικής αναγωγής* και της *εποχής* ο *αποβλεπτικός χαρακτήρας* της αντίληψης γίνεται αντικείμενο μελέτης της διδακτικής των Μαθηματικών˙ και μαζί του έρχεται η περιγραφή της συγκρότησης της μαθησιακής εμπειρίας από την αποβλεπτική σκοπιά. Ο συνδυασμός της *φαινομενολογικής αναγωγής* και της *εποχής* συγκροτεί τη *φαινομενολογική στάση*, που σε αντίθεση με τη *φυσική στάση* (Audi, 1999, σ. 408) εστιάζει στις *αποβλεπτικές* δράσεις που συγκροτούν τα αντικείμενα, αποκλείοντας ό,τι δεν συμμετέχει στη συγκρότηση των αντικειμένων μέσω των αποβλεπτικών δράσεων. Η χαρτογράφηση αυτών των πόλων της γνωσιακής εμπειρίας είναι μια εκκίνηση για την κατανόηση του θαύματος της μαθηματικής αντίληψης, για την κατάλυση του παράδοξου της εμφάνισης αυτής της αντίληψης εκεί όπου δεν ήταν πριν παρούσα. Περιγραφές αντίστοιχων επεισοδίων, με τη χρήση αυτής της μεθοδολογίας (χωρίς την έμφαση στα μεθοδολογικά εργαλεία των ευρημάτων) έχουν παρουσιαστεί στην ελληνική βιβλιογραφία (Ζαγοριανάκος, 2016 και 2017). Πεποίθηση του γράφοντος είναι πως η μελέτη της διεύρυνσης του αντιληπτικού πεδίου με εμπειρικές και αφηρημένες εποπτείες—που συγκροτούν νέα αντικείμενα για το υποκείμενο της μάθησης, ως ενεργό συντελεστή και συγκροτητικό πόλο της γνωσιακής εμπειρίας—μπορεί να προσφέρει πρόσθετα εργαλεία στην έρευνα της διδακτικής των Μαθηματικών. Και πως η φαινομενολογική μεθοδολογία που προτείνεται εδώ είναι αποτελεσματική σε αυτή την κατεύθυνση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Audi, R. (1999). *The Cambridge dictionary of philosophy.* Cambridge: Cambridge University Press.

Husserl, E. (1970). *The crisis of European sciences and transcendental phenomenology: An introduction to phenomenological philosophy*. Evanston: Northwestern University Press.

Husserl, E. (1983). *Ideas pertaining to a pure phenomenology and to a phenomenological philosophy: First Book,* "General introduction to a pure phenomenology". The Hague: Martinus Nijhoff Publishers.

Husserl, E. (1989). *Ideas pertaining to a pure phenomenology and to a phenomenological philosophy: Second Book, Studies in the phenomenology of constitution.* Dordrecht: Kluwer, A. P.

Shvarts, A. & Zagorianakos, A. (2015). Crossroads of phenomenology and activity theory in the study of the number line perception. *Ninth Congress of European Research in Mathematics Education:* Prague.

Sokolowski, R. (2000). *Introduction to phenomenology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Zagorianakos, A. & Shvarts, A. (2015). The role of intuition in the process of objectification of mathematical phenomena from a Husserlian perspective: a case study. *Educational Studies in Mathematics (2015) 88(1)*, 137–157.

Ζαγοριανάκος, Α. (2016). Η φαινομενολογική θεωρία και μεθοδολογία στην υπηρεσία μιας νέας οπτικής για την μαθησιακή εμπειρία. *33ο Συνέδριο Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας:* Χανιά.

Ζαγοριανάκος, Α. (2017). Φαινομενολογική ανάλυση των συνεπειών του ξεπεράσματος του μαθησιακού αδιέξοδου μιας μέλλουσας καθηγήτριας μαθηματικών. *7ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών:* Αθήνα.

Μερλώ-Ποντύ, Μ. (2009). *Σημεία.* Αθήνα: Βιβλιοπωλείο της Εστίας.

ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΜΙΑΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΝ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Δημήτρης Διαμαντίδης, Χρόνης Κυνηγός

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΦΣ, ΕΚΠΑ

dimitrd@ppp.uoa.gr , kynigos@ppp.uoa.gr

Η παρούσα εργασία στοχεύει να περιγράψει τη συνεργασία μίας ομάδας εκπαιδευτικών μαθηματικών Β΄/θμιας που διασκευάζουν μικροπειράματα των σχολικών διαδραστικών βιβλίων. Οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται σε διαδοχικούς κύκλους διασκευής και εφαρμογής στην τάξη, λαμβάνοντας μέρος στην υλοποίηση μίας ερευνητικής παρέμβασης έρευνας σχεδιασμού. Από την ανάλυση, που έγινε με την προσέγγιση της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας, προέκυψαν χαρακτηριστικά της συνεργασίας, που κάνουν ενδιαφέρουσα την περαιτέρω μελέτη τής ως μία δράση επαγγελματικής ανάπτυξης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ερευνητές/τριες του πεδίου της επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών Μαθηματικών, μελετούν τα ερευνητικά ερωτήματά τους είτε σε πραγματικές συνθήκες της σχολικής ζωής και της εκπαίδευσης, π.χ. αντλώντας δεδομένα από μία εξελισσόμενη, συστημική δράση επαγγελματικής ανάπτυξης, είτε σχεδιάζοντας οι ίδιοι/ες μία τέτοια δράση, κατάλληλη για να παραχθούν δεδομένα, που θα τα αναλύσουν ώστε να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους (Bakker, 2018). Αρκετά συχνά οι έρευνες αυτές περιλαμβάνουν οργάνωση και μελέτη της λειτουργίας κοινοτήτων εκπαιδευτικών που συνεργάζονται, συνομιλούν και γενικότερα αλληλεπιδρούν, με τον/την ερευνητή/τρια να μην έχει πάντα τον ίδιο ρόλο (συμμετέχων παρατηρητής, παρατηρητής ως συμμετέχων, περιθωριακά συμμετέχων, κτλ) (Τσιώλης, 2014). Τα ονόματα που χρησιμοποιούνται για τέτοιου είδους κοινότητες είναι ποικίλα (κοινότητες πρακτικής, κοινότητες μάθησης, κοινότητες έρευνας, κτλ), κάτι που από τη μία -πιθανόν- δείχνει την ποικιλία των ερευνητικών σχεδιασμών που έχουν υλοποιηθεί και υλοποιούνται, ενώ από την άλλη έχει προκαλέσει προσπάθειες «ταξινόμησης» αυτών των κοινοτήτων που συχνά οδηγούνται σε ακόμα πιο λεπτή κατηγοριοποίησή τους (Crecci & Fiorentini, 2018). Οπωσδήποτε η περιγραφή των χαρακτηριστικών μίας κοινότητας, η δραστηριότητα της οποίας μελετάται, είναι χρήσιμη, καθώς ενισχύει τη «θεωρητική ευαισθησία» του/της ερευνητή/ερευνήτριας, εφόσον τον/την στρέφει προς συγκεκριμένη θεωρητική κατεύθυνση, χωρίς να τον περιορίζει (Τσιώλης, 2014). Κατά πόσο, όμως είναι πάντα αναγκαία και εφικτή μία τέτοια ταξινόμηση; Πιο συγκεκριμένα, είναι διακριτά τα χαρακτηριστικά αυτών των κοινοτήτων, σε βαθμό που να αποτελούν, ως σύνολο, ειδοποιά γνωρίσματά τους και κάθε φορά μία κοινότητα να ανήκει σε μία μόνο κατηγορία;

Η απάντηση ενδεχομένως να διαφοροποιείται ανά περίπτωση έρευνας. Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει στην ανάλυση της δραστηριότητας μίας ομάδας εκπαιδευτικών που συνεργάζονται σχεδιάζοντας μικροπειράματα και αποτελεί μέρος μίας ευρύτερης μελέτης του ρόλου της διασκευής των μικροπειραμάτων των διαδραστικών σχολικών βιβλίων Μαθηματικών του ΥΠΕΠΘ (ΔΣΒ, http://ebooks.edu.gr/new) από εκπαιδευτικούς Μαθηματικών σε ομάδες που ερευνά πώς η συνεργασία με στόχο αυτή τη δραστηριότητα μπορεί να υποστηρίξει την επαγγελματική τους ανάπτυξη (Διαμαντίδης & Κυνηγός, 2018). Στόχος της έρευνας που παρουσιάζεται σε αυτό το άρθρο είναι, αφού τεκμηριωθεί ότι η ομάδα των εκπαιδευτικών λειτουργεί ως κοινότητα να περιγραφούν και να αναλυθούν τα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας των μελών της. Παράλληλα θα διερευνηθεί η δυνατότητα ένταξής της σε συγκεκριμένη κατηγορία ή είδος κοινοτήτων, υποθέτοντας ότι κάτι τέτοιο θα πρόσθετε στην τεκμηρίωση της σχετικότητας και την περαιτέρω μελέτη του ευρύτερου ερευνητικού ερωτήματος, δηλαδή στη θέαση αυτής της κοινότητας υπό το πρίσμα της επαγγελματικής ανάπτυξης των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Για την έννοια της κοινότητας δεν υπάρχει μονοσήμαντη προσέγγιση στη βιβλιογραφία, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι διαφορετικές προσεγγίσεις αποκλείουν η μία την άλλη και ότι περιγράφουν κάτι τελείως διαφορετικό. Μένοντας σε εκείνες τις οπτικές που είναι πιο συχνά εμφανιζόμενες στην εκπαιδευτική έρευνα, σύμφωνα με τους Cochran-Smith και Lytle (2002), η έννοια της κοινότητας, εντός ενός πλαισίου (λ.χ. της εκπαίδευσης) και με ένα συγκεκριμένο αντικείμενο ενασχόλησης (λ.χ. το σχεδιασμό εκπαιδευτικού υλικού), αναφέρεται σε έναν δίκτυο ατόμων που μοιράζονται κοινά νοήματα για τα πράγματα με τα οποία ασχολούνται από κοινού, έχοντας έναν κοινό σκοπό, για τον οποίο έχουν κοινές ιδέες και χρησιμοποιούν ίδιους συμβολισμούς. Πρόκειται για μία προσέγγιση που είναι κοντά σε εκείνη του Wenger (2008) για τις «κοινότητες πρακτικής» (ΚΠ), των οποίων τα μέλη έχουν τρία βασικά χαρακτηριστικά: κοινό ενδιαφέρον για το αντικείμενο ενασχόλησης της κοινότητας, αλληλεπίδραση μεταξύ τους, αμοιβαία δέσμευση για να πετύχουν έναν σκοπό και κοινές πρακτικές. Στην έρευνα τους, για την επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών Μαθηματικών που σχηματίζουν κοινότητες οι Chauraya και Brodie (2017) χρησιμοποιούν την έννοια των «κοινοτήτων επαγγελματικής μάθησης», που όμως -όπως οι συγγραφείς αναφέρουν- είναι ειδική περίπτωση των ΚΠ, καθώς ο εξειδικευμένος όρος «επαγγελματική μάθηση» εμπεριέχει παρόμοια οπτική με εκείνη των Lave & Wenger (1991) για τη μάθηση σαν αλληλεπίδραση μεταξύ του ατόμου, της δραστηριότητάς του και του περιβάλλοντός του.

Ωστόσο, στον ίδιο επαγγελματικό χώρο και συγκεκριμένα στην εκπαίδευση είναι δυνατόν να υπάρχουν κοινότητες εκπαιδευτικών που δεν είναι «ομότεχνοι» (π.χ. μία κοινότητα Μαθηματικών και Φιλολόγων που ενδιαφέρονται για το σχεδιασμό ενός διεπιστημονικού προγράμματος δραστηριοτήτων για μαθητές/τριες) και εντούτοις συνεργάζονται, δημιουργώντας κοινότητες με ορισμένα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά, όπου όμως τα νοήματα που αποδίδουν στα πράγματα, εντός του πλαισίου της κοινής ενασχόλησής τους, δεν είναι πάντα κοινά και ο «κοινός σκοπός» δεν είναι απολύτως καθορισμένος από την αρχή. Ο όρος «κοινότητες ενδιαφέροντος» (ΚΕ) χρησιμοποιείται σε τέτοιες περιπτώσεις (Fischer, 2004). Σύμφωνα με τον Fischer, εκτός από τον «βαθμό ομοιογένειας» των μελών τους, οι ΚΕ διαφέρουν με τις ΚΠ στο εξής: στις ΚΠ η μάθηση συμβαίνει επειδή είναι αρκετά γνωστό και συγκεκριμένο το πού θέλει να φτάσει η κοινότητα (ο κοινός σκοπός), ενώ στις ΚΕ ο παράγοντας που ενεργοποιεί τους μηχανισμούς μάθησης είναι αυτή ακριβώς η ακαθόριστη δομή του τι θα προκύψει τελικά, μέσα από το κοινό ενδιαφέρον και την ενασχόληση των μελών. Επίσης και στα δύο είδη κοινοτήτων, τα μέλη χρειάζεται να ανοίξουν διαύλους επικοινωνίας και πρέπει να υπερβούν εμπόδια για να το πετύχουν, αλλά τα εμπόδια είναι διαφορετικής υφής στις ΚΠ και στις ΚΕ.

Το συγκεκριμένο άρθρο στοχεύει να απαντήσει αν η δραστηριότητα της συγκεκριμένης ομάδας εκπαιδευτικών Μαθηματικών έχει στοιχεία που την τοποθετούν κοντά σε κάποιο είδος κοινότητας, ή αν χρειάζεται μία άλλη προσέγγιση στην έννοια της κοινότητας, ώστε να μελετηθεί μία τέτοια ομάδα με τα κατάλληλα θεωρητικά εργαλεία.

ΜΕΘΟΔΟΣ

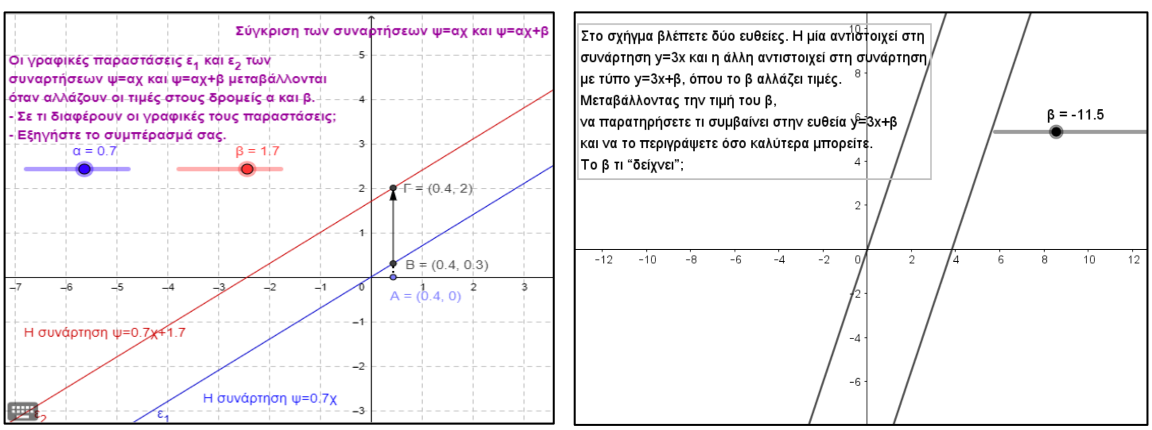
Η έρευνα που παρουσιάζεται αποτελεί μελέτη της συνεργατικής δραστηριότητας μίας ομάδας εκπαιδευτικών Μαθηματικών που διασκευάζουν μικροπειράματα των ΔΣΒ. Είναι μέρος μίας ευρύτερης ερευνητικής παρέμβασης που υλοποιήθηκε με την προσέγγιση της έρευνας σχεδιασμού (Bakker, 2018), η οποία μελέτησε διαδοχικούς κύκλους διασκευής και χρήσης στην τάξη μικροπειραμάτων από ομάδα εκπαιδευτικών, ως μία δράση επαγγελματικής ανάπτυξής τους η οποία έπρεπε να σχεδιαστεί ειδικά για τους σκοπούς της έρευνας. Ωστόσο, σε αυτή την εργασία η εστίαση αφορά στα χαρακτηριστικά της ομάδας, που προκύπτουν από την συνεργατική δραστηριότητα. Ο ρόλος του ερευνητή είναι εκείνος του συμμετέχοντος παρατηρητή (συμμετέχει ισότιμα στην ομάδα), και οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί είναι ενήμεροι για την ερευνητική του ατζέντα. Η ομάδα των εκπαιδευτικών ενός Γυμνασίου της Αθήνας συνεργάστηκε για τη διασκευή μικροπειραμάτων των ΔΣΒ των Μαθηματικών του Γυμνασίου, σε 14 προγραμματισμένες συναντήσεις εντός σχολικού ωραρίου, διάρκειας 1 ώρας η κάθε μία, στο χώρο του σχολείου κατά τη διάρκεια του Β΄ τετραμήνου του σχολικού έτους 2018-2019. Μόλις μία διασκευή ολοκληρωνόταν, εφαρμοζόταν στην τάξη και στη συνέχεια, έχοντας ανατροφοδότηση από την εφαρμογή η ομάδα συζητούσε αν χρειαζόταν κάποια επιπλέον αλλαγή και την υλοποιούσε. Τέλος, κάθε διασκευασμένο μικροπείραμα, μετά την εφαρμογή συνοδευόταν από ένα σύντομο κείμενο, προϊόν της ομάδας, με παρατηρήσεις και «συμβουλές» προς έναν -υποθετικό- εκπαιδευτικό που θα ήθελε να το εφαρμόσει. Τα δεδομένα που παράχθηκαν ήταν οι απομαγνητοφωνήσεις βιντεοσκοπήσεων και ηχογραφήσεων των συναντήσεων, ηχογραφήσεων επτά και βιντεοσκοπήσεων τριών μαθημάτων, τα επτά παραγόμενα μικροπειράματα σε ενδιάμεσες αλλά και την τελική μορφή τους με τα κείμενα, η σχετική ηλεκτρονική αλληλογραφία της περιόδου μεταξύ των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών. Για τις ανάγκες της ανάλυσης της ευρύτερης έρευνας ακολουθήθηκε η μέθοδος της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας -ΕΘΘ- (Teppo, 2015; Τσιώλης, 2014), με τη βοήθεια του λογισμικού NVivo (*NVivo qualitative data analysis software*, 2018) και μέρος των αποτελεσμάτων της παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία με στόχο να περιγράψουμε τα χαρακτηριστικά της συνεργασίας μεταξύ των μελών της ομάδας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε σε τρεις φάσεις κωδικοποίησης. Εδώ θα παρουσιάσουμε κυρίως μία από τις *κατηγορίες* «εννοιών» που προέκυψε από την πρώτη φάση, δηλαδή την πρώτη προσπάθεια πρόσδοσης νοήματος στα δεδομένα και συστηματικής εννοιολόγησής τους, αλλά και από το ξεκίνημα της δεύτερης φάσης, όπου επιχειρήσαμε να κάνουμε πιο συγκεκριμένη την περιγραφή των κατηγορίων. Θα περιοριστούμε στην παρουσίαση ενδεικτικών, περιεκτικών αποσπασμάτων που αφορούν τη συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Ε1, Ε2 και Ε3 της ομάδας, ώστε να γίνει σαφής η κατηγορία, χωρίς να αναφέρουμε λεπτομέρειες της κωδικοποίησης. Ο Ε1 είναι εκπαιδευτικός και επιμορφωτής «Β΄ επιπέδου» στη χρήση των ΤΠΕ για διδακτικούς σκοπούς, με μεγάλη εμπειρία στην επιμόρφωση και στη δημιουργία ψηφιακού υλικού. Οι Ε2 και Ε3 είναι κάτοχοι επιμόρφωσης Β΄ επιπέδου, με την Ε2 να χρησιμοποιεί συχνά μικροπειράματα στη διδασκαλία, ενώ η Ε3 τα χρησιμοποιεί λιγότερο συχνά. Οι συμμετέχοντες έκαναν τις συναντήσεις τους σε μία μικρή αίθουσα του σχολείου, με βίντεο-προβολέα, ώστε να χειρίζονται τα μικροπειράματα, καθώς συζητούν.

Η στοχοθεσία του μικροπειράματος

Η κατηγορία που θα αναλύσουμε προέκυψε από κωδικοποίηση δεδομένων που σχετίζονται με τους *στόχους του μικροπειράματος*, είτε αρχικού, είτε διασκευασμένου. Οι *ιδιότητες*, δηλαδή οι πτυχές των στόχων που φαίνεται να έχουν βαρύτητα για τους συμμετέχοντες είναι: η χρονική στιγμή προσδιορισμού των στόχων, ο βαθμός σαφήνειας των στόχων και το «πεδίο» αναφοράς των στόχων. Στο παρακάτω απόσπασμα οι συμμετέχοντες συζητούν, στην 1η συνάντησή τους, πριν τη διασκευή ενός μικροπειράματος του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου, (http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2128) από την ενότητα των συναρτήσεων, που είχε δημιουργηθεί με το εκπαιδευτικό λογισμικό GeoGebra (http://www.geogebra.gr/joomla/) (εικόνα 1). Ο χρήστης μπορεί να χειριστεί δυναμικά τα α και β της ευθείας y=αx+β με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο γράφημα, ενώ ταυτόχρονα απεικονίζεται και η y=αx.



Εικόνα 1:Αριστερά, στιγμιότυπο του αρχικού μικροπειράματος των ΔΣΒ, δεξιά, η πρώτη διασκευή του που έγινε μετά την 3η συνάντηση.

153 Ε3: Δεν μπορώ να καταλάβω ποιος είναι ο στόχος του αρχικού μικροπειράματος, δε μου είναι σαφές.

154 Ε1: Λέει στην εκφώνηση, τι ζητάει να κάνουν.

155 Ε3: Αλλά διδακτικά τι έχει ως στόχο, τι θα καταλάβει ο μαθητής όταν κάνει αυτό που ζητάει, για τα Μαθηματικά; Να το πούμε.

156 Ε1: Μπορεί να μην είναι μόνο ένας, εξαρτάται από τη δραστηριότητα του μαθητή. Βασικός στόχος είναι να διερευνήσει…

157 Ε3: Άρα εμείς θα το ξανασχεδιάσουμε, χωρίς να έχουμε κάποιο αρχικό στόχο; Δεν πρέπει πρώτα να συμφωνήσουμε σε κάτι; Θα διδάξουμε την παράλληλη μετατόπιση ή την κλίση;

158 Ε2: Ναι, πρέπει. Να πούμε και τις ιδέες μας και βλέπουμε…

159 Ε1: Ας φτιάξουμε κάτι αρχικά και βλέπουμε. Να στείλουμε ο καθένας τι έφτιαξε, να το πειράξουμε, και το ξανασυζητάμε.

160 Ε2: Οκ, ναι. Έτσι κι αλλιώς δεν είναι για την επόμενη φορά.

161 Ε3: Άρα κάνει ο καθένας τις προτάσεις του για τους στόχους και για το μικροπείραμα και το ξανασυζητάμε, αφου δεν επείγει.

Όπως φαίνεται ο Ε1 (159) τοποθέτησε τη στοχοθεσία χρονικά, όχι αναγκαστικά πρώτη, αλλά μετά από ένα πρώτο «πείραγμα» του μικροπειράματος. Αντιθέτως, η Ε3 φαίνεται να έθεσε δύο φορές την ανάγκη στοχοθεσίας ως πρώτο στάδιο (155, 157), αλλά τελικά φαίνεται να δέχτηκε ότι μπορεί να γίνει κι αργότερα, μάλλον υποχωρώντας -αλλά πιθανόν χωρίς να πείθεται- στην άποψη του Ε3, επειδή το μικροπείραμα δεν ήταν επείγον να ετοιμαστεί (161). Παράλληλα, η Ε2 φαίνεται να οδηγεί τη συζήτηση προς μία προσωρινή συμφωνία. Επιπλέον, παρατηρήσαμε διαφοροποίηση ως προς το πεδίο αναφοράς των στόχων καθώς η Ε1 αναφέρεται σε διδακτικούς στόχους ως προς το αντικείμενο (155, 157), ενώ ο Ε3 ως προς τη δραστηριότητα των μαθητών/τριών (156).

Στη 2η συνάντησή τους οι εκπαιδευτικοί συζήτησαν για κάποιο άλλο μικροπείραμα, όπου πάλι εμφανίστηκε παρόμοια διαφωνία και τελικά επιτεύχθηκε προσωρινή (και ίσως φαινομενική συμφωνία). Το παρακάτω απόσπασμα είναι από την 3η συνάντηση των εκπαιδευτικών, όπου η συζήτηση επανέρχεται στο παραπάνω αρχικό μικροπείραμα. Ο Ε1 έχει φέρει ένα ψηφιακό δόμημα (artifact) που έφτιαξε με αφορμή το αρχικό, όπου έχει προσθέσει τη δυνατότητα οριζόντιας μετατόπισης της y=αx+β.

387 Ε3: Θα μελετήσουμε την οριζόντια μετατόπιση; Ποιος είναι ο στόχος μας; Δεν είναι πρόωρο στη Β΄ Γυμνασίου; Μήπως να ξεκινήσουμε με κάτι πιο εύκολο και πιο απλό;

388 Ε2: Μπορούμε να κάνουμε πιο απλό το μικροπείραμα κρατώντας έναν δρομέα και τα άλλα σταθερά.

389 Ε3: Ναι, αλλά και πάλι θα μετατοπίζεται οριζόντια η ευθεία y=αx+β;

390 Ε2: Στην γραφική παράσταση δε φαίνεται η διαφορά.

391 Ε1: Δεν το έφτιαξα για να το δώσουμε στα παιδιά. Αλλά για να το έχουμε μπροστά μας, να το δούμε και να αποφασίσουμε.

392 Ε2: Μπορούμε να «παίξουμε» με αυτό, αλλά όταν το δώσουμε στα παιδιά θα είναι σαφής σε εμάς και σε αυτά, ο στόχος.

393 Ε3: Τότε ας φτιάξουμε διαφορετικά μικροπειράματα, ένα για την κλίση, ένα για κατακόρυφη και ένα για οριζόντια μετατόπιση και μετά αποφασίζουμε ποιο θα κρατήσουμε.

394 Ε1: Μπορούμε να δοκιμάσουμε λίγο αυτό πρώτα.

395 Ε3: Οκ, στείλτο μας, αλλά να δούμε και τα τρία ξεχωριστά.

Η επιμονή της Ε3 στη διατύπωση του στόχου εξαρχής, φαίνεται ότι ξαναεκφράστηκε (387) και μάλιστα πιο έντονα. Στη συνέχεια, ενώ η Ε3, μάλλον εννοούσε «πιο απλό» από πλευράς μαθηματικού περιεχομένου, η Ε2 απάντησε για το πώς μπορεί να γίνει πιο απλό το μικροπείραμα ως δόμημα (388) και ο Ε1, προσπάθησε να «καθησυχάσει» την Ε3, λέγοντας ότι το μικροπείραμά του προορίζεται μόνο για να κάνουν δοκιμές (391). Εδώ φαίνεται ότι πάλι η απλότητα/πολυπλοκότητα, έχει δύο πεδία αναφοράς. Το μαθηματικό περιεχόμενο (387, 389) και το μικροπείραμα ως δόμημα (388). Ωστόσο η Ε2 στην 390 φαίνεται να συνθέτει τις δύο αυτές διαστάσεις, μιλώντας για το δόμημα με όρους περιεχομένου. Επιπλέον, ο Ε1, ξεκαθαρίζοντας ότι πρότεινε ένα πολύπλοκο δόμημα για λόγους πειραματισμού των ίδιων των συμμετεχόντων (391), έδωσε αφορμή, για να φανεί άλλη μία ιδιότητα της στοχοθεσίας, ο βαθμός σαφήνειας (392). Η Ε3 φαίνεται να μη συμφωνούσε με την απουσία σαφήνειας στο σκοπό τους καθώς επέμεινε να φτιάξουν τρία μικροπειράματα με σαφή διδακτικό στόχο (393, 395), παρά να έχουν ένα που ακόμα είναι προσχέδιο για δοκιμές χωρίς να είναι σαφές που θα έφτανε, όπως φαίνεται να πρότεινε ο Ε1 (394).

Μέχρι αυτό το σημείο η κατηγορία *στοχοθεσία του μικροπειράματος* και η περιγραφή των ιδιοτήτων της δείχνουν τα εξής. Οι εκπαιδευτικοί συζητούσαν για τους στόχους του μικροπειράματος, χωρίς να μιλούν απαραίτητα για το ίδιο «πεδίο» στόχων (διδακτικοί στόχοι περιεχομένου, στόχοι ως προς τη δραστηριότητα των μαθητών/τριών, στόχοι ως προς την λειτουργικότητα του δομήματος). Αν θεωρήσουμε ότι ο σκοπός της ομάδας ήταν να διασκευάσει μικροπειράματα, τότε πιθανώς να έβλεπαν αυτό το έργο, από διαφορετική οπτική γωνία ο καθένας/μία, κάτι που είναι χαρακτηριστικό των ΚΕ (Fischer, 2004). Επίσης, αν και ο σκοπός ήταν γενικά καθορισμένος, φάνηκε ότι δεν ήταν εύκολο να εξειδικευτεί, καθώς ο Ε1 έδειχνε να προτιμά αυτό να γίνει «ψάχνοντας» και με ταυτόχρονο πειραματισμό με το εργαλείο, ενώ η Ε3 προσπαθούσε να τον εξειδικεύσει από την αρχή. Θα μπορούσαμε να πούμε, ότι η Ε3 «έβλεπε» την ομάδα ως ΚΠ, καθώς θεωρούσε απαραίτητο να είναι εξαρχής καθορισμένο που θα έφτανε η ομάδα, ενώ ο Ε1 λειτουργούσε ως μέλος ΚΕ, αφήνοντας ασαφές το τι τελικά θα παραγόταν. Ένα άλλο χαρακτηριστικό της συνεργασίας που φάνηκε αρχικά ήταν το “Groupthink”, δηλαδή το φαινόμενο κατά το οποίο τα μέλη μίας ομάδα παρακάμπτουν μία διαφωνία που μπορεί να έχει δημιουργικό αποτέλεσμα, στο βωμό της ομοφωνίας (Janis, 1991), κάτι που σύμφωνα με τον Fischer είναι χαρακτηριστικό των ΚΠ. Αυτό φαίνεται κυρίως στο πρώτο απόσπασμα. Στη συνέχεια όμως η Ε3, επανέφερε τη διαφωνία της και τότε φαίνεται ότι οι Ε1 και Ε3 συμβιβάστηκαν με την ιδέα ότι δεν έχουν κοινή αντίληψη για ένα κεντρικό θέμα (394, 395), αν και το έχουν συζητήσει αρκετά, μία παραδοχή που είναι χαρακτηριστικό των ΚΕ (Fischer, 2004). Αυτή η παρατήρησή μας, σχετίζεται με το επόμενο απόσπασμα της 7ης συνάντηση. Οι Ε1, Ε2 και Ε3 στοχεύουν να διασκευάσουν ένα μικροπείραμα από την ενότητα των κανονικών πολυγώνων (http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2027).

771 Ε2: Θα τους ζητάμε να μεταβάλλουν την κεντρική γωνία; Ή να μεταβάλλουν το πλήθος των πλευρών;

772 Ε1: Και τα δύο;

773 Ε3: Δε μου λες Ε1, εσύ που τα καταφέρνεις καλά, δε φτιάχνεις ένα μικροπείραμα που να γίνονται και τα δύο, για να το δούμε; Και στείλτο μας κιόλας, για να «παίξουμε» λίγο μέχρι την επόμενη συνάντηση. Και θα σου πω μετά τι θα κάνουμε.

Ισχυριζόμαστε ότι η Ε3 χρησιμοποίησε την, πλέον γνωστή σε εκείνη διαφορετικότητα της προσέγγισης του Ε1 στο έργο της διασκευής, ώστε να υποστηρίξει τη συνεργασία τους, εφόσον του ζήτησε να ετοιμάσει μόνο το μικροπείραμα και να τους το κοινοποιήσει για να πειραματιστούν όλοι. Η Ε3 άρχισε να υιοθετεί μία σχεδιαστική στρατηγική του Ε1, που στα προηγούμενα αποσπάσματα φαινόταν να την αποφεύγει.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία είχαμε στόχο να αναζητήσουμε και να περιγράψουμε τα γνωρίσματα μίας ομάδας εκπαιδευτικών Μαθηματικών που διασκεύαζαν μικροπειράματα των ΔΣΒ για να τα χρησιμοποιήσουν στη διδασκαλία τους. Από την ανάλυση, που έγινε στο πλαίσιο μίας ευρύτερης έρευνας, προέκυψαν κατηγορίες εννοιών σχετικών με τη συνεργασία των εκπαιδευτικών. Αναλύοντας μία εξ αυτών, τη *στοχοθεσία του μικροπειράματος*, τα χαρακτηριστικά της συνεργασίας στην ομάδα, συνδυάζαν στοιχεία ΚΠ και ΚΕ. Αν και πρόκειται για μία ομάδα ομότεχνων (μαθηματικών) φαίνεται ότι το περικείμενο της συνεργασίας, υπογράμμισε τις διαφορετικές προσεγγίσεις των συμμετεχόντων/ουσών όχι μόνο για την επίτευξη του στόχου, αλλά ακόμα και για την εξειδίκευση του στόχου. Συνεπώς ισχυριζόμαστε ότι, αν και η ομάδα, λόγω σύνθεσης, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ΚΠ, εντούτοις γνωρίσματα ΚΕ εμπεριέχονται στη δράση των μελών της. Επομένως, θα υιοθετούσαμε για αυτή την κοινότητα εκπαιδευτικών το χαρακτηρισμό του Fischer (2004) ως «κοινότητα σχεδιασμού» που εμπεριέχει στοιχεία ΚΠ και ΚΕ.

Στο τελευταίο απόσπασμα, φαίνεται σαν ένα μέλος της ομάδας, να υιοθετούσε την πρακτική ενός άλλου μέλους. Στα επόμενα στάδια της ανάλυσης μένει να φανεί αν κάτι τέτοιο συνέβη, ή πολύ περισσότερο αν τα μέλη της ομάδας οδηγήθηκαν στη δημιουργία μίας νέας, συνδυαστικής κοινής πρακτικής με στόχο να σχεδιάσουν ψηφιακά δομήματα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Kynigos & Kolovou, 2017). Αυτή θα ήταν σημαντική αλλαγή στον τρόπο εργασίας της ομάδας, που από τη μία ενδεχομένως να αντιστοιχεί σε καταγραφή επαγγελματικής ανάπτυξης των συμμετεχόντων/ουσών, ενώ ταυτόχρονα θα κατοπτριζόταν σε μεταβολή στον *καταμερισμό της εργασίας* μέσα στην ομάδα και στο *αντικείμενο της δραστηριότητας* κάθε μέλους τής, που θα είχε μεταβάλει την προσέγγισή του για τον κοινό στόχο. Δηλαδή, Με άλλα λόγια η μορφή επαγγελματικής ανάπτυξης των συγκεκριμένων εκπαιδευτικών, ίσως να αντιστοιχούσε σε μεταβολή στο *σύστημα δραστηριότητας* της ομάδας και του κάθε μέλους της. Συνεπώς, σαν επόμενο βήμα, ισχυριζόμαστε ότι η μελέτη της συνεργασίας της ομάδας υπό το πρίσμα της *θεωρίας δραστηριότητας* (Engeström, 2001), θα είχε ενδιαφέροντα αποτελέσματα, ώστε να απαντήσει τα ερωτήματα της ευρύτερης έρευνας, μέρος της οποίας είναι η παρούσα εργασία.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευρωπαϊκό πρόγραμμα: DoCENT – Digital Creativity ENhanced in Teacher Education. Erasmus+, Strategic Partnerships for higher education, 2017-2019. Project number: 2017-1-IT02-KA203-036807.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. New York, NY: Routledge.

Chauraya, M., & Brodie, K. (2017). Learning in Professional Learning Communities: Shifts in Mathematics Teachers' Practices. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *21*(3), 223–233.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (2002). Teacher Learning Communities. Στο J. W. Guthrie (Επιμ.), *Encyclopedia of education*. New York: Macmillan.

Crecci, V. M., & Fiorentini, D. (2018). Professional develoment within teacher learning communities. *Educação Em Revista*, *34*.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, *14*(1), 133–156.

Fischer, G. (2004). Social creativity: Turning barriers into opportunities for collaborative design. Στο *Proceedings of the Eighth Conference on Participatory Design Artful Integration: Interweaving Media, Materials and Practices - PDC 4*(1), 152.

Janis, I. (1991). Groupthink. In E. A. Griffin (Επιμ.), *A first look at communication theory* (8η εκδ). New York: McGraw-Hill.

Kynigos, C., & Kolovou, A. (2017). Teachers as Designers of Digital Educational Resources for Creative Mathematical Thinking. Στο Kaiser, G. (Επιμ.) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. New York: Cambridge University Press.

NVivo qualitative data analysis software (Version 12). (2018). QSR International Pty Ltd.

Teppo, A. R. (2015). Grounded Theory Methods. Στο A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. C. Presmeg (Επιμ.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods*. New York: Springer.

Wenger, E. (2008). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Διαμαντίδης, Δ., & Κυνηγός, Χ. (2018). Μελέτη της επαγγελματικής γνώσης και των πρακτικών εκπαιδευτικών που διασκευάζουν εκπαιδευτικό ψηφιακό υλικό για τα Μαθηματικά. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: "Εκπαιδευτικό Υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές Χρήσεις, Διασταυρούμενες Πορείες Μάθησης"* (σσ. 356–365). Ανακτημένο 14/01/2019 από http://ltee.aegean.gr/sekpy

Τσιώλης, Γ. (2014). *Μέθοδοι και τεχνικές ανάλυσης στην ποιοτική κοινωνική έρευνα* (1η). Εκδόσεις Κριτική ΑΕ.

ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΟΛΙΤΙΚΑ;

Διονυσία Πιτσιλή Χατζή

University of Ottawa, Canada

dpits102@uottawa.ca

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών έχει αναδείξει πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης και έχει συχνά προσεγγίσει κριτικά τα ίδια τα μαθηματικά. Ωστόσο, τα μαθηματικά σπάνια θεωρούνται πολιτικά. Αντλώντας θεωρητικά εργαλεία από τους Foucault, Laclau και Mouffe, η παρούσα εργασία επιχειρεί να περιγράψει τα μαθηματικά ως πολιτικά, αναδεικνύοντας ότι είναι ένας χώρος στον οποίο διεξάγονται ανταγωνισμοί. Συγκεκριμένα, ισχυρίζομαι ότι η μορφοποιητική λειτουργία των μαθηματικών, οι ορθολογικότητες των μαθηματικών και η αναγνώριση των μαθηματικών ως σημαντική δραστηριότητα είναι αναπόσπαστα πολιτικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μαθηματική εκπαίδευση διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην δημιουργία και τη διακυβέρνηση των πολιτών (Valero, 2018), στη λειτουργία των οικονομικών συστημάτων (Kollosche, 2018˙ Pais, 2012), και στη διαμόρφωση συγκεκριμένων τρόπων σκέψης και δράσης (Skovsmose, 2000˙ Walkerdine, 1990). Η μαθηματική εκπαίδευση είναι λοιπόν πολιτική: αν και η δήλωση αυτή μπορεί να νοηματοδοτείται με πολύ διαφορετικούς τρόπους, αποτελεί πλέον σε μεγάλο βαθμό κοινή παραδοχή στην ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΔτΜ). Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο και για τα ίδια τα μαθηματικά. Συχνά, τα μαθηματικά θεωρούνται μια «αγνή», «αμόλυντη» επιστήμη, αποκομμένη από την κοινωνικοπολιτική σφαίρα (Pais, 2013˙ Skovsmose, 2011). Ωστόσο, τα μαθηματικά είναι ενσωματωμένα στην κοινωνία, επηρεάζουν και επηρεάζονται από τις ευρύτερες κοινωνικοπολιτικές περιστάσεις, και επομένως θα ήταν λάθος να τους αποδώσουμε ουδετερότητα (François & De Sutter, 2004).

Σε αυτή την εργασία, αντλώντας θεωρητικά εργαλεία από το Foucault (1980, 2011) και τους Laclau και Mouffe (2001˙ Mouffe, 2005), υποστηρίζω ότι τα μαθηματικά είναι πολιτικά με την έννοια ότι αποτελούν ένα πεδίο στο οποίο συμβαίνουν διαπραγματεύσεις νοήματος, διεξάγονται ανταγωνισμοί, και αποκλείονται εναλλακτικοί τρόποι παραγωγής νοήματος. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζω ότι τα μαθηματικά είναι πολιτικά, καθώς τα ακόλουθα χαρακτηριστικά των μαθηματικών είναι πολιτικά: τα μαθηματικά έχουν μορφοποιητική λειτουργία, συνδέονται με ορθολογικότητες και αποτελούν σημαντική δραστηριότητα.

ΚΡΙΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η έρευνα στη ΔτΜ έχει με ποικίλους τρόπους προσεγγίσει κριτικά τα μαθηματικά. Με τον όρο αυτό δεν υπονοώ άσκηση κριτικής στα μαθηματικά, παρά αναφέρομαι σε μια διαδικασία ανάλυσης τους «για να αποκαλύψουμε και να αξιολογήσουμε κρυφές διαστάσεις νοήματος καθώς επίσης την κοινωνική και πολιτισμική [τους] σημασία» (Ernest, 2016, σελ. 100-101). Τα μαθηματικά έχουν αξιολογηθεί κριτικά, κυρίως εντός των ακόλουθων πλαισίων: κριτική μαθηματική εκπαίδευση, εθνομαθηματική έρευνα και έρευνα σε ζητήματα φυλής και φύλου.

Η κριτική μαθηματική εκπαίδευση έχει προβληματοποιήσει τις μοντέρνες αντιλήψεις για τα μαθηματικά. Η μοντέρνα αντίληψη των μαθηματικών εμπεριέχει τρεις -όχι απαραίτητα συμβατές- ιδέες: τα μαθηματικά είναι απαραίτητα για την κατανόηση της φύσης, χρήσιμα για την τεχνολογική ανάπτυξη, και αποτελούν μια αγνή, καθαρή (pure) λογική (Skovsmose, 2011). Η κριτική μαθηματική εκπαίδευση αμφισβητεί αυτή την προσέγγιση, εστιάζοντας στη σχέση των μαθηματικών με την κοινωνία, τις λειτουργίες των μαθηματικών ως μέρος των προγραμμάτων σπουδών και τις δυνατότητες της μαθηματικής εκπαίδευσης να παράγει ή να προβληματοποιεί κοινωνικές ανισότητες (Valero, 2018). Έτσι, έχει διερευνήσει πώς η μαθηματική εκπαίδευση συμβάλλει στη διαιώνιση των κοινωνικών ανισοτήτων (π.χ., Pais, 2012), καθώς και πώς τα μαθηματικά μπορούν να λειτουργήσουν ως εργαλείο για την κοινωνική χειραφέτηση (π.χ., Gutstein, 2012). Υπό αυτή την οπτική, η μαθηματική εκπαίδευση καθώς και τα ίδια τα μαθηματικά δεν έχουν κοινωνικό πρόσημο με τρόπο ουσιοκρατικό: μπορούν τόσο να εξουσιάζουν όσο και να ενδυναμώνουν τις μαθήτριες [1] (Skovsmose, 2011).

Τα εθνομαθηματικά έχουν επίσης θέσει υπό αμφισβήτηση κυρίαρχες αντιλήψεις για τα μαθηματικά. Η εγγενής «αγνότητα» της μαθηματικής γνώσης έχει πληγεί από την ανάδειξη των μαθηματικών ως έχοντα κεντρικό ρόλο στο έργο του πολιτιστικού ιμπεριαλισμού και της πολιτισμικής ηγεμονίας της Δύσης (π.χ., Fasheh, 2012). Ταυτόχρονα, τα εθνομαθηματικά, ως τα μαθηματικά αναγνωρίσιμων πολιτισμικών ομάδων, έχουν αμφισβητήσει την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα καθολικό και ουδέτερο σώμα γνώσης και την υποτιθέμενη υπεροχή των ευρωκεντρικών προσεγγίσεων (Pais, 2013).

Η έρευνα που έχει επικεντρωθεί σε ζητήματα φυλής και φύλου εντός του μεταμοντέρνου παραδείγματος έχει αναδείξει ότι οι τάξεις των μαθηματικών αποτελούν χώρους στους οποίους οι μαθήτριες υποκειμενικοποιούνται έμφυλα και φυλετικά. Τα ίδια τα μαθηματικά γίνονται αντιληπτά ως μια πρακτική που λαμβάνει χώρα εντός έμφυλων και φυλετικών διαθεματικοτήτων. Για παράδειγμα, η Mendick (2006) υποστηρίζει ότι το να κάνει κάποια μαθηματικά αποτελεί επιτέλεση ανδρισμού (doing masculinity), ανεξάρτητα από το φύλο του ατόμου που κάνει μαθηματικά. Η δουλειά της αναδεικνύει ότι τα μαθηματικά κατασκευάζονται ως έννοια στο πλαίσιο ιεραρχημένων διπόλων όπως σώμα/μυαλό, ικανή/σκληρά εργαζόμενη, γρήγορη/αργή κλπ. Υπό αυτό το πλαίσιο, η Mendick μας καλεί να κατασκευάσουμε περισσότερες και διαφορετικές αφηγήσεις για τα μαθηματικά.

Αυτές οι κριτικές προσεγγίσεις απέναντι στα μαθηματικά έχουν αναδείξει τους ρόλους που επιτελούν τα μαθηματικά στην κοινωνία και επισημαίνουν επιμέρους ζητήματα σχετικά με το πώς τα μαθηματικά είναι πολιτικά και διαπλέκονται με ζητήματα εξουσίας. Ωστόσο, η διασταύρωση με το πολιτικό καθαυτό συχνά παραβλέπεται. Αν για παράδειγμα επικεντρωθούμε στα εθνομαθηματικά, ενώ η μελέτη του ρόλου των μαθηματικών στον πολιτισμικό ιμπεριαλισμό αναδεικνύει πολιτικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών, η αναζήτηση μαθηματικών στις δραστηριότητες συγκεκριμένων πολιτισμικών ομάδων αφήνει άθικτα τα ζητήματα εξουσίας (Pais, 2013). Με αυτή την έννοια, κριτικές προσεγγίσεις συχνά ακολουθούν έναν α-πολίτικο προσανατολισμό.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ: ΜΙΑ ΘΕΩΡΗΣΗ ΓΙΑ «ΤΟ ΠΟΛΙΤΙΚΟ».

Για να προσεγγίσω τα μαθηματικά ως πολιτικά, ακολουθώ την προσέγγιση της Mouffe (2005) για «το πολιτικό». Η Mouffe διαφοροποιεί το πολιτικό από την πολιτική, ορίζοντας το πολιτικό ως ένα χώρο στον οποίο λαμβάνουν χώρα ανταγωνισμοί και που αποτελεί ευρύτερο πεδίο από την πολιτική. Ανταγωνισμοί συμβαίνουν όταν οι *λόγοι* [2] συγκρούονται, καθώς ανταγωνίζονται να καθορίσουν την έννοια μετέωρων σημαινόντων δηλαδή προνομιούχων σημείων εντός του πεδίου ρηματικότητας (Jørgensen & Phillips, 2011). Για παράδειγμα, τα μαθηματικά είναι ένα μετέωρο σημαίνον, με την έννοια ότι διαφορετικοί *λόγοι* ανταγωνίζονται να προσδιορίσουν το νόημα και τα όρια των μαθηματικών. Αν και οι λόγοι αποτελούν προσπάθειες κυριαρχίας στο πεδίο ρηματικότητας (Laclau & Mouffe, 2001), το νόημα δεν μπορεί ποτέ να καθοριστεί πλήρως. Οι ανταγωνισμοί επιλύονται (προσωρινά) μέσω ηγεμονικών παρεμβάσεων, όταν δηλαδή μια ιδιαιτερότητα αναλαμβάνει την αναπαράσταση μιας (αδύνατης) καθολικότητας (Jørgensen & Phillips, 2011).

Επιπλέον, η Mouffe (2005) ισχυρίζεται ότι το πολιτικό είναι συγκροτητικό μιας κοινωνίας· κάθε κοινωνία δηλαδή υπάρχει στη βάση των πολιτικών σχέσεων που αναπτύσσονται εντός της. Αυτή η άποψη σχετίζεται με τη φουκωική εννοιολόγηση της εξουσίας ως παραγωγική. Σύμφωνα με τον Foucault (1980), η εξουσία δεν είναι πρωτίστως μια κατασταλτική δύναμη, αλλά ένα «παραγωγικό δίκτυο που διατρέχει όλο το κοινωνικό σώμα» (σ. 119). Υπό αυτό το πρίσμα, η σχέση μεταξύ εξουσίας και γνώσης είναι θετική, καθώς «η εξουσία και η γνώση ενέχουν άμεσα η μία την άλλη» (Foucault, 2011, σελ. 37). Αυτό σημαίνει ότι η γνώση μπορεί να συσταθεί μόνο εντός σχέσεων εξουσίας και ότι η εξουσία παράγει πάντα γνώση. Έτσι, η παραγωγή μαθηματικής γνώσης είναι αποτέλεσμα των ιδιαίτερων σχέσεων εξουσίας που αποκρυσταλλώνονται σε θεσμούς όπως τα πανεπιστημιακά τμήματα των μαθηματικών και δομές ή δίκτυα όπως η ακαδημαϊκή κοινότητα. Ταυτόχρονα, εντός ενός μαθηματικού γνωστικού πεδίου, συγκεκριμένα προβλήματα αναδεικνύονται ως σημαντικά και συγκεκριμένοι υποκλάδοι ως υποσχόμενοι, μεταβάλλοντας έτσι τις σχέσεις εξουσίας που αφορούν την παραγωγή και διανομή της γνώσης.

Με αυτόν τον τρόπο τίθεται υπό αμφισβήτηση η σχέση μεταξύ επιστήμης και πολιτικής ως σχέση ανταγωνιστική μεταξύ δύο προϋπάρχοντων παικτών. Η κυκλική σχέση μεταξύ εξουσίας και γνώσης μπορεί να αποτελέσει ένα πλαίσιο για να διερευνήσουμε πώς τα μαθηματικά, ως μορφή γνώσης, σχετίζονται με θέματα εξουσίας και ως εκ τούτου είναι πολιτικά. Με αυτή την έννοια, το παρόν θεωρητικό πλαίσιο μπορεί να σκιαγραφήσει πώς τα μαθηματικά σχετίζονται με την εξουσία, χωρίς να θεωρεί την εξουσία και τους ανταγωνισμούς εξωτερικά των μαθηματικών.

ΠΩΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΑ

Τα μαθηματικά είναι ένας κλάδος που και σχετίζεται με την πολιτική και είναι πολιτικός. Η σχέση μεταξύ μαθηματικών και πολιτικής μπορεί να εντοπιστεί σε πρακτικές και θεσμούς, όπως ο υποχρεωτικός χαρακτήρας της μαθηματικής εκπαίδευσης ή οι τρόποι οργάνωσης της ακαδημαϊκής έρευνας. Ταυτόχρονα, τα μαθηματικά είναι πολιτικά, με την έννοια ότι αποτελούν πεδίο, στο οποίο υπάρχουν σχέσεις εξουσίας, συγκρούονται *λόγοι*, νοήματα γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης, ενώ κάποιοι τρόποι παραγωγής νοήματος αποκλείονται. Επιπλέον, οι μαθηματικοί *λόγοι* και ανταγωνισμοί αποτελούν προϊόντα και ταυτόχρονα εγγράφονται στις υπάρχουσες ταξινομήσεις και τρόπους οργάνωσης της κοινωνικής ζωής (Valero, 2018). Σε αυτή την ενότητα, προσεγγίζω τον πολιτικό χαρακτήρα των μαθηματικών διερευνώντας πώς τρία χαρακτηριστικά των μαθηματικών συνδέονται άρρηκτα με ζητήματα εξουσίας: η μορφοποιητική τους λειτουργία, η χρήση και παραγωγή συγκεκριμένων ορθολογικοτήτων, και η ανάδειξη τους σε σημαντικό γνωστικό πεδίο.

Η μορφοποιητική λειτουργία των μαθηματικών

Στο πλαίσιο των θεωριών του *λόγου*, η γλώσσα δεν περιγράφει απλά τον κόσμο γύρω μας, αλλά οι τρόποι με τους οποίους μιλάμε συγκροτούν τον κοινωνικό κόσμο (Jørgensen & Phillips, 2011). Ομοίως, οι μαθηματικές περιγραφές και αναπαραστάσεις διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της κοινωνίας. Ο Skovsmose (π.χ., 2000) επεκτείνει αυτή την ιδέα με την έννοια της μορφοποιητικής εξουσίας (formatting power) των μαθηματικών, υποδεικνύοντας ότι τα μαθηματικά συντελούν στην εκτέλεση κοινωνικών ενεργειών και αποφάσεων. Για παράδειγμα, οι αεροπορικές εταιρείες χρησιμοποιούν μαθηματικά ώστε να διαμορφώσουν τα συστήματα κρατήσεων τους, διασφαλίζοντας έναν βέλτιστο αριθμό επιβατών ανά πτήση για τη μεγιστοποίηση των κερδών τους, επηρεάζοντας βαθιά τους τρόπους με τους οποίους οργανώνεται η κοινωνία όσον αφορά τα αεροπορικά ταξίδια (Skovsmose, 2011). Τα μαθηματικά των συστημάτων κράτησης, αν και αόρατα στις περισσότερες από εμάς, μορφοποιούν στοιχεία της αεροπορικής δραστηριότητας.

Επομένως, προσπαθώντας να εξηγήσουν ή να μοντελοποιήσουν τον κόσμο γύρω μας, τα μαθηματικά τον αλλάζουν (Skovsmose, 2000). Μια μαθηματική περιγραφή ενός φαινομένου διαμορφώνει το πλαίσιο που οριοθετεί τι είναι δυνατόν να πούμε, σκεφτούμε και κάνουμε. Ακόμη και στην περίπτωση σχέσεων μεταξύ φυσικών αντικειμένων, οι μαθηματικές αναπαραστάσεις συνίστανται στην επιλογή ορισμένων στοιχείων μιας σχέσης και στην αναπαράσταση τους σε γενικευμένη μορφή μέσω ενός συγκεκριμένου *λόγου* (Walkerdine, 1990). Για παράδειγμα, ο Barwell (2013) υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά κατέχουν κεντρικό ρόλο στην περιγραφή, πρόβλεψη και επικοινωνία της κλιματικής αλλαγής: η περιγραφή πραγματοποιείται μέσω στατιστικών περιγραφών για την θερμοκρασία, την στάθμη της θάλασσας κλπ.· η πρόβλεψη με την ανάπτυξη μοντέλων· και η επικοινωνία απαιτεί μαθηματικό και στατιστικό γραμματισμό για την παραγωγή και την ερμηνεία σχετικών κειμένων.

Η ιδέα ότι τα μαθηματικά έχουν μορφοποιητική λειτουργία δε σημαίνει ότι οι υπάρχουσες μαθηματικές περιγραφές είναι οι μόνες δυνατές. Εάν πάρουμε το παράδειγμα της κλιματικής αλλαγής, υπάρχουν ανταγωνισμοί μεταξύ των κλιματολόγων σχετικά με τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούν και το πώς τα χρησιμοποιούν. Αντίστοιχα, στη δημόσια σφαίρα, υπάρχουν ανταγωνισμοί μεταξύ μαθηματικών και μη μαθηματικών περιγραφών καθώς και μεταξύ των διαφόρων διαθέσιμων μαθηματικών περιγραφών. Αυτοί οι ανταγωνισμοί έχουν τις ρίζες τους σε διαφορετικά συστήματα γνώσης, ενώ εγγράφονται επίσης διαφορετικά στη δημόσια σφαίρα προτείνοντας διαφορετικές εναλλακτικές δράσης.

Μαθηματικά και Ορθολογικότητες

Στη φουκωική σκέψη, σε ένα δεδομένο χρόνο και χώρο, κάποιοι *λόγοι* είναι δυνατοί και κάποιοι άλλοι δεν είναι. Ομοίως, η αλήθεια δεν είναι υπερβατική ή ανεξάρτητη από την κοινωνία μέσα στην οποία παράγεται· συνδέεται αντ' αυτού με την εξουσία. Κάθε κοινωνία έχει το δικό της καθεστώς αλήθειας, τη γενική της πολιτική αλήθειας που περιλαμβάνει *λόγους*, μηχανισμούς, τεχνικές και διαδικασίες οι οποίοι διακρίνουν το αληθές από το ψευδές (Foucault, 1980).

Υπό αυτό το πλαίσιο μπορούμε να εξετάσουμε και τις μαθηματικές αλήθειες. Μέσα σε μια κοινωνία, πολιτισμό, κουλτούρα, ή επιστημονικό πεδίο, υπάρχουν μηχανισμοί, κανόνες, εργαλεία, τεχνικές και διαδικασίες με τα οποία παράγουμε, κρίνουμε και αποδεχόμαστε τις μαθηματικές αλήθειες. Με αυτόν τον τρόπο παράγονται διάφορες ορθολογικότητες, εντός των οποίων οι άνθρωποι κάνουν μαθηματικά. Για παράδειγμα, ο Wagner εξηγεί ότι μία Mi'kmaw [3] γυναίκα ζητάει από την κόρη της να φέρει "αρκετές" (enough) πατάτες από τον κήπο, δείχνοντας ταυτόχρονα με τα χέρια της την ποσότητα: καθώς δεν έχουν όλες οι πατάτες το ίδιο μέγεθος, θα ήταν «παράλογο» να ζητήσει συγκεκριμένο αριθμό πατατών (Abtahi & Wagner, 2016). Αυτή η περιγραφή υπονοεί μια διαφορετική μαθηματική ορθολογικότητα από αυτή των σχολικών μαθηματικών, όπου η επιθυμητή απάντηση θα περιείχε έναν αριθμό. Με αυτή την έννοια, μπορούν να εντοπιστούν διαφορετικές ορθολογικότητες σε διαφορετικούς πολιτιστικούς τρόπους μαθηματικών. Επιπλέον, ακόμη και εντός των «Δυτικών μαθηματικών», διαφορετικές επιστημολογίες έχουν παράξει διαφορετικές ορθολογικότητες. Για παράδειγμα, στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά δεν ισχύουν μέθοδοι όπως ο νόμος του αποκλεισμού του τρίτου ή η εις άτοπον απαγωγή. Επομένως, δεν υπάρχει *ένα* είδος λογικής που μπορεί να χαρακτηριστεί ως το μόνο μαθηματικό: διαφορετικές μαθηματικές ορθολογικότητες υπάρχουν σε διαφορετικές (εθνοτικές, φυλετικές, επιστημονικές, κτλ) κουλτούρες.

Ωστόσο, τα μαθηματικά συχνά ταυτίζονται με μια συγκεκριμένη λογική ή ένα σύστημα αποδεκτών κανόνων για τη δημιουργία και την κρίση της αλήθειας ισχυρισμών και επιχειρημάτων (στο εξής, καταχρηστικά, δυτική μαθηματική ορθολογικότητα). Στην πραγματικότητα, τα μαθηματικά θεωρούνται ευρέως ως ένα πρωτότυπο ορθολογικότητας, καθώς εντός κυρίαρχων *λόγων* το «αντίθετο» των μαθηματικών είναι η αβεβαιότητα και ο παραλογισμός (Walkerdine, 1990). Αυτό σχετίζεται με τα (επιθυμητά) χαρακτηριστικά της δυτικής μαθηματικής λογικής. Ένα κεντρικό στοιχείο της δυτικής μαθηματικής ορθολογικότητας είναι η μείωση μιας χαοτικής κατάστασης σε μια ενιαία, σταθερή μαθηματική περίπτωση (Kollosche, 2018), μέσω της οποίας εξασφαλίζεται η (επιθυμητή) οικουμενικότητα των μαθηματικών. Έτσι, κατασκευάζεται ένα καθεστώς αλήθειας μέσα στο οποίο ό,τι αποδεικνύεται με τα μαθηματικά είναι αδιαμφισβήτητο, διότι δεν εξαρτάται από το συγκείμενο (context) εντός του οποίου αναπτύσσεται: η αποσυγκειμενοποίηση καθιστά τις μαθηματικές δηλώσεις ως πραγματικές δηλώσεις ακριβώς επειδή μπορούν να εφαρμοστούν καθολικά και ανεξάρτητα από το πλαίσιο, περιγράφοντας και εξηγώντας με αυτόν τον τρόπο τα πάντα (Walkerdine, 1990).

Πού διασταυρώνονται λοιπόν οι μαθηματικοί ορθολογισμοί με το πολιτικό; Καταρχάς, η εξύψωση των μαθηματικών ως πρότυπο ορθολογικότητας είναι βαθιά πολιτική: τα μαθηματικά εξυψώνονται πάνω και πέρα από άλλα συστήματα σκέψης, διεκδικώντας αντικειμενικότητα και ουδετερότητα, ενώ δεν αποτελούν παρά μία επιλογή για την περιγραφή του κόσμου (François & De Sutter, 2004). Αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις αναφορικά με το τι αποτελεί αποδεκτό τρόπο σκέψης και συλλογιστικής. Επιπλέον, ο ορθολογισμός είναι πολιτικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών διότι αποτελεί χώρο ανταγωνισμών τόσο μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών πολιτισμών όσο και εντός της δυτικής μαθηματικής λογικής. Για παράδειγμα, η παραγωγική σκέψη μπορεί να αποτελεί υπόβαθρο για μια «δογματική» πίστη στις απόλυτες αλήθειες, μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί για να καλλιεργήσει επίγνωση των μαθηματικών ως ανθρώπινης κατασκευής ή ως εργαλείο για την αναγνώριση ομοιοτήτων μεταξύ αντικειμένων που φαίνονται, εκ πρώτης όψεως, διαφορετικά (Fasheh, 1982).

Η σημαντικότητα των μαθηματικών

Ένας τρίτος τρόπος με τον οποίο τα μαθηματικά είναι πολιτικά αφορά τους τρόπους με τους οποίους κατασκευάζονται ως σημαντική δραστηριότητα. Η σημαντικότητα των μαθηματικών είναι ένας χώρος ανταγωνισμών. Διαφορετικοί *λόγοι* προσπαθούν να καταστήσουν τα μαθηματικά σημαντικά με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, η βιβλιογραφία για την εκπαίδευση STEM στις ΗΠΑ συχνά προβάλει τα μαθηματικά ως σημαντικά διότι συμβάλουν στην εθνική ασφάλεια και οικονομική ανταγωνιστικότητα των ΗΠΑ (π.χ., Espinosa, 2011). Στο πλαίσιο μιας άφρο- ή λατινοαμερικανικής κοινότητας στο Σικάγο, τα μαθηματικά μπορεί να καθίστανται σημαντικά ως εργαλείο για την ανάγνωση κοινωνικών διακρίσεων (Gutstein, 2012). Αυτοί οι δύο *λόγοι* (μεταξύ πολλών πιθανών άλλων) κατασκευάζουν τη σημασία των μαθηματικών με διαφορετικούς τρόπους, έχουν προκύψει μέσα σε διαφορετικά συστήματα γνώσης και εδραιώνουν διαφορετικές σχέσεις εξουσίας.

Ταυτόχρονα, τα δυτικά μαθηματικά καθιερώνονται ως μια σημαντική δραστηριότητα. Αυτό σχετίζεται με τις συγκεκριμένες κοινωνικές, πολιτικές και οικονομικές σχέσεις στις οποίες αναπτύχθηκαν και αναπτύσσονται. Για παράδειγμα, ιστορικά οι υπολογισμοί και η γραφειοκρατία αναπτύσσονται ταυτόχρονα και μοιράζονται έναν κοινό τρόπο σκέψης (Kollosche, 2014). Σήμερα, στο πλαίσιο των δυτικών καπιταλιστικών κοινωνιών, τα μαθηματικά έχουν καθιερωθεί ως ένα ισχυρό εργαλείο για την κατανόηση του κόσμου και για τη διανομή ανθρώπων σε διαφορετικές κοινωνικές θέσεις και με αυτόν τον τρόπο συνεχίζουν να αναγνωρίζονται ως σημαντική δραστηριότητα. Άλλωστε, η υποχρεωτική μαθηματική εκπαίδευση στο "Δυτικό κόσμο" επιβλήθηκε όταν πολλαπλασιάστηκαν οι ανάγκες για εργαζόμενες γραφείου (Kollosche, 2018), ενώ σήμερα η μαθηματική παιδεία παίζει κεντρικό ρόλο στην υποστήριξη του ρόλου της σχολικής εκπαίδευσης ως κεντρικού ιδεολογικού μηχανισμού του καπιταλιστικού κράτους (Pais, 2012).

Με την ορολογία των Laclau και Mouffe (2001), έχει υπάρξει μια σταθεροποίηση νοήματος η οποία, αν και μερική και όχι μόνιμη, οδηγεί σε μια φυσικοποίηση της συνάρθρωσης σχετικά με τη σημασία των μαθηματικών. Αυτή η σταθεροποίηση είναι βαθιά ριζωμένη τόσο στον τρόπο που έχουν (ιστορικά) αναπτυχθεί τα (δυτικά) μαθηματικά όσο και στους τρόπους με τους οποίους είναι εγγενή στις σύγχρονες κοινωνικές, οικονομικές και πολιτικές συνθήκες. Ωστόσο, τα μαθηματικά δεν παύουν να αποτελούν ένα χώρο ανταγωνισμού όσον αφορά τους τρόπους με τους οποίους η σημασία τους γίνεται αντικείμενο διαπραγμάτευσης.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρότι η έρευνα της ΔτΜ έχει αναδείξει τις πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, τα ίδια τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται κυρίαρχα ως μη πολιτικά. Στο πλαίσιο μοντέρνων *λόγων*, τα μαθηματικά θεωρούνται συχνά ουδέτερη και καθολική γνώση, με τις αλήθειες τους να είναι ανεξάρτητες από τις ανθρώπινες εμπειρίες (Pais, 2013). Επιπλέον, η έρευνα που παίρνει κριτική στάση απέναντι στα μαθηματικά συχνά είναι αποπολιτικοποιημένη, παραβλέποντας ζητήματα εξουσίας. Η προσέγγιση των μαθηματικών με αυτούς τους τρόπους, αποκρύπτει το πώς αυτά διαπλέκονται με την εξουσία και το πώς αποτελούν πεδίο ανταγωνισμών.

Σε αυτή την εργασία, προσέγγισα τα μαθηματικά ως πολιτική δραστηριότητα. Αντλώντας από το Foucault (1980, 2011) και τους Laclau και Mouffe (2001˙ Mouffe, 2005), υποστήριξα ότι τα μαθηματικά είναι πολιτικά επειδή είναι ένας χώρος στον οποίο διεξάγονται ανταγωνισμοί και συγκρούονται *λόγοι* σε μια προσπάθεια να κυριαρχήσουν το πεδίο ρηματικότητας. Επιπλέον, αυτοί οι *λόγοι* και ανταγωνισμοί παράγονται εντός και με τη σειρά τους εγγράφονται στις ταξινομήσεις της ευρύτερης κοινωνικοπολιτικής σφαίρας (Valero, 2018). Πιο συγκεκριμένα, υποστήριξα ότι η μορφοποιητική λειτουργία των μαθηματικών, οι μαθηματικές ορθολογικότητες και η σημασία των μαθηματικών αποτελούν πολιτικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών.

Η προσέγγιση των μαθηματικών ως πολιτικά μπορεί να αποτελέσει ένα θεωρητικό φακό, με τον οποίο να σκεφτούμε τη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτή η οπτική ανοίγει διαφορετικές εναλλακτικές από εκείνες που προσφέρονται από α-πολίτικες αντιλήψεις, καθώς εντάσσει ζητήματα εξουσίας και ανταγωνισμών εντός των ίδιων των μαθηματικών. Υπό αυτό το πλαίσιο, η εκπαίδευση δεν αφορά την απόκτηση ή κατασκευή μιας προ-υπάρχουσας γνώσης, αλλά αποτελεί μια (πολιτική) διαδικασία διαπραγμάτευσης νοήματος. Επιπλέον, η οπτική αυτή μπορεί να είναι χρήσιμη για να προσεγγίσουμε τη μαθηματική εκπαίδευση, όπως αυτή συμβαίνει σε χώρους ευρύτερους της μαθηματικής τάξης. Για παράδειγμα, η κλιματική αλλαγή εισάγει τα μαθηματικά στο δημόσιο χώρο (Barwell, 2013), καθιστώντας τον πεδίο μαθηματικής εκπαίδευσης. Η μελέτη της μαθηματικής εκπαίδευσης που αυξανόμενα συμβαίνει στο δημόσιο χώρο μπορεί καλύτερα να αναλυθεί υπό ένα πρίσμα που αντιμετωπίζει τους ανταγωνισμούς νοήματος ως κεντρική πτυχή της εκπαίδευσης.

Σε μια εποχή κατά την οποία τα μαθηματικά αποτελούν κεντρικό εργαλείο στην (οικονομική, πολιτική και περιβαλλοντική) οργάνωση των κοινωνιών, οι *λόγοι* για τα μαθηματικά και οι τρόποι με τους οποίους οργανώνουμε τη ζωή μας σε σχέση με τα μαθηματικά έχουν σημασία. Δεδομένου ότι η αντίληψη των μαθηματικών ως καθαρή επιστήμη εξυπηρετεί συστήματα καταπίεσης, όπως ο καπιταλισμός ή η πατριαρχία, η Mendick (2006) μας προτρέπει να ξανασκεφτούμε τις ιστορίες που λέμε για τα μαθηματικά. Η εστίαση στους ανταγωνισμούς που συμβαίνουν στους μαθηματικούς χώρους προσφέρει μια εναλλακτική αφήγηση, η οποία μπορεί να συμβάλει σε μια λογοθετική οντολογία και επιστημολογία για τα μαθηματικά και κατ’επέκταση τη μαθηματική εκπαίδευση.

1. Το θηλυκό γένος χρησιμοποιείται γενικευτικά, για ανθρώπους οποιασδήποτε ταυτότητας φύλου.

2. Ο όρος «λόγος» σε πλάγια γραμματοσειρά αποτελεί μετάφραση του αγγλικού όρου discourse.

3. Οι Mi’kmaw είναι Ιθαγενής φυλή στον Ανατολικό Καναδά.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ το Ίδρυμα Ωνάση για την οικονομική υποστήριξη των διδακτορικών μου σπουδών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abtahi, Y., & Wagner, D. (2016). Violence in un-rooted mathematics. *For the Learning of Mathematics, 36*(3), 39–40.

Barwell, R. (2013). The mathematical formatting of climate change: Critical mathematics education and post-normal science. *Research in Mathematics Education, 15*(1), 1–16.

Ernest, P. (2016). The scope and limits of critical mathematics education. In P. Ernest, B. Sriraman, & N. Ernest (Eds.), *Critical mathematics education: Theory, praxis and reality* (pp. 99–126). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Espinosa, L. (2011). Pipelines and pathways: Women of color in undergraduate STEM majors and the college experiences that contribute to persistence. *Harvard Educational Review, 81*(2), 209–241.

Fasheh, M. (1982). Mathematics, culture, and authority. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 2–8.

Fasheh, M. (2012). The role of mathematics in the destruction of communities, and what we can do to reverse this process, including using mathematics. In O. Skovsmose & B. Greer (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 92–105). Rotterdam: Sense Publishers.

Foucault, M. (1980). *Power/knowledge: Selected interviews and other writings 1972–1977.* New York: Pantheon.

Foucault, M. (2011). *Επιτήρηση και τιμωρία: Η γέννηση της φυλακής.* Αθήνα: Πλέθρον.

François, K. & De Sutter, L. (2004). When mathematics becomes political. Representing (non-)humans. *Philosophica,* 123–138.

Gutstein, E. (2012). Mathematics as a weapon in the struggle. In O. Skovsmose & B. Greer (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 23–48). Rotterdam: Sense Publishers.

Jørgensen, M., & Phillips, L. (2011). *Discourse analysis as theory and method.* London, UK: SAGE Publications.

Kollosche, D. (2014). Mathematics and power: An alliance in the foundations of mathematics and its teaching. *ZDM, 46*, 1061–1072.

Kollosche, D. (2018). The true purpose of mathematics education: A provocation. *The Mathematics Enthusiast, 15*(1), 303–319.

Laclau, E., & Mouffe, C. (2001). *Hegemony and socialist strategy: Towards a radical democratic politics.* London, UK: Verso.

Mendick, H. (2006). *Masculinities in mathematics.* New York: Open University Press.

Mouffe, C. (2005). *On the political.* London, UK: Routledge.

Pais, A. (2012). A critical approach to equity. In O. Skovsmose & B. Greer (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 49–91). Rotterdam: Sense Publishers.

Pais, A. (2013). Ethnomathematics and the limits of culture. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 2–6.

Skovsmose, O. (2000). Aporism and critical mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 2–8.

Skovsmose, O. (2011). *An invitation to critical mathematics education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Valero, P. (2018). Human capitals: School mathematics and the making of homus oeconomicus. *Journal of Urban Mathematics Education, 11*(1&2), 103–117.

Walkerdine, V. (1990). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality.* London, UK: Routledge.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ: Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Μηλίτσα Ζήση, Χρυσαυγή Τριανταφύλλου

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

militsa_zi@hotmail.com, chrtriantaf@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών κατά την διδασκαλία ανοιχτών προβλημάτων κατά τη διάρκεια της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης. Τα ερευνητικά δεδομένα προέκυψαν από 2 διδασκαλίες ενός εκπαιδευτικού σε τάξη Β΄ Γυμνασίου. Τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν με βάση τις 4 κατηγορίες της διδασκαλίας που ανέπτυξαν οι da Ponte και Quaresma (2016) (πρόσκλησης, καθοδήγησης, αποσαφήνισης/ ενημέρωσης, και μαθηματικής πρόκλησης). Σε όλες τις φάσεις και τις κατηγορίες της διδακτικής διαχείρισης του εκπαιδευτικού εντοπίζονται δράσεις οι οποίες ενισχύουν τη φύση και τα πλεονεκτήματα της διδασκαλίας ενός ανοιχτού προβλήματος, ενώ υπάρχουν περιπτώσεις δράσεων που τα περιορίζουν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών των μαθηματικών έχουν απασχολήσει αρκετά τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια. Στην παρούσα μελέτη θα εστιάσουμε στις πρακτικές που επιλέγει ο εκπαιδευτικός και στις δράσεις που αναλαμβάνει για να διαχειριστεί την επικοινωνία στην ολομέλεια της τάξης στην περίπτωση της διδασκαλίας ανοικτών προβλημάτων. Οι εκπαιδευτικοί αναμένεται στη συζήτηση στην ολομέλεια να ενθαρρύνουν τους μαθητές να μοιράζονται τις ιδέες τους καθώς και να διασφαλίζουν ότι αυτές οι συζητήσεις θα είναι πλούσιες σε μαθηματικά νοήματα (Sherin, 2002). Η επίτευξη και των δύο αυτών στόχων αποτελεί μια πρόκληση για κάθε εκπαιδευτικό. Η πρόκληση αυτή αυξάνει όταν θα πρέπει να διαχειριστεί τις λύσεις που δίνουν οι μαθητές σε ένα ανοικτό πρόβλημα. Ενώ στη βιβλιογραφία έχει αναγνωριστεί η ανάγκη διδασκαλίας ανοικτών προβλημάτων (Sullivan, 2003) δεν έχει μελετηθεί ιδιαίτερα πώς οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται τα ανοικτά προβλήματα στη διδασκαλία τους και ιδιαίτερα κατά τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Ταυτόχρονα, η περιορισμένη παρουσία ανοικτών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια και στη σχολική τάξη αναμένεται να δυσκολεύει τη διαχείριση τους αλλά και υποστηρίζει την ανάγκη να μελετηθεί παραπάνω.

Ειδικότερα, η παρούσα εργασία μελετά τις δράσεις μιας εκπαιδευτικού κατά τη διδασκαλία δύο ανοικτών προβλημάτων στη σχολική τάξη. Για να μελετηθεί αυτό το θέμα υιοθετείται το θεωρητικό πλαίσιο των da Ponte και Quaresma (2016) που αναγνωρίζει 4 κατηγορίες δράσεων των εκπαιδευτικών κατά τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Οι κατηγορίες αυτές είναι α) η πρόσκληση που απευθύνει στους μαθητές, β) η στήριξη/ καθοδήγηση, γ) η ενημέρωση/αποσαφήνιση και δ) η μαθηματική πρόκληση.

Τα ερευνητικά ερώτημα είναι:

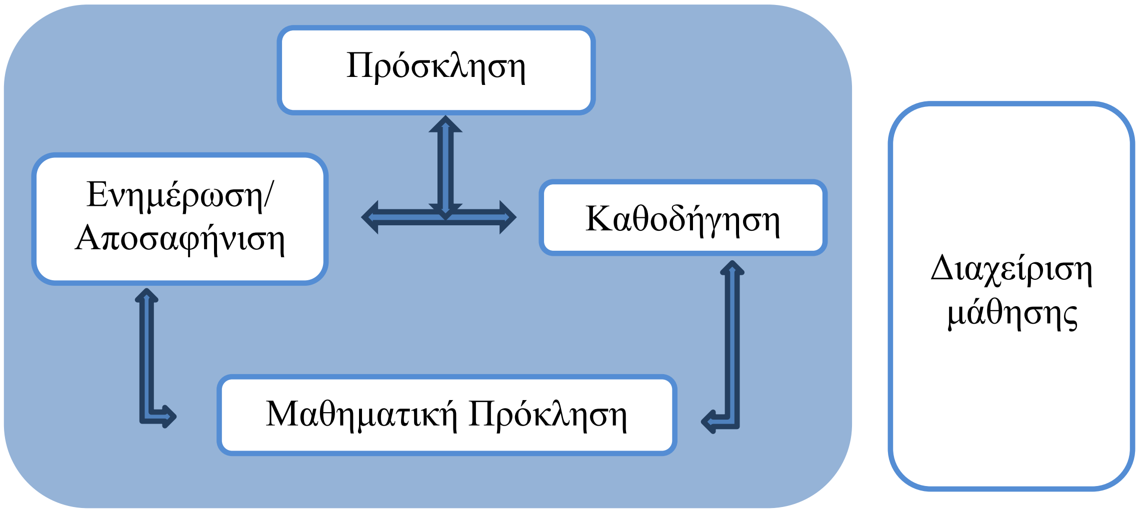
ΕΡ1. Ποιες δράσεις της εκπαιδευτικού αναγνωρίζονται σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο των da Ponte και Quaresma (2016);

ΕΡ2. Με ποιο τρόπο αυτές οι δράσεις υποστηρίζουν ή αναιρούν τα ανοικτά χαρακτηριστικά των μαθηματικών έργων;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Καθώς η συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης αποτελεί μια διαδεδομένη διδακτική πρακτική για τη διδασκαλία ανοικτών προβλημάτων παρατηρείται μια συγκεκριμένη πορεία η οποία ακολουθείται. Η πορεία αυτή είναι γνωστή ως η πορεία των τριών φάσεων Jackson, Shahan, Gibbons και Cobb (2012). Η πρώτη φάση αφορά την εισαγωγή του προβλήματος από τον εκπαιδευτικό στην ολομέλεια της τάξης εστιάζοντας στο να κάνει κατανοητές πτυχές του μαθηματικού έργου όπως το πλαίσιο του προβλήματος ή κεντρικές μαθηματικές έννοιες. Ακολουθεί η φάση της αυτόνομης εργασίας των μαθητών όπου οι μαθητές προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα και παράλληλα ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί την πορεία επίλυσης και τους ενθαρρύνει να ακολουθήσουν οποιαδήποτε στρατηγική επιθυμούν την οποία θα επεξηγήσουν αργότερα στην ολομέλεια της τάξης. Τέλος, στη φάση της σύνθεσης ο εκπαιδευτικός ενορχηστρώνει μια συνοπτική συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Εδώ ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να διαχειριστεί τη σειρά παρουσίασης των απαντήσεων των μαθητών, καθώς και την ερμηνεία τους στην ολομέλεια με σκοπό να εμπλακούν όλοι οι μαθητές στην συζήτηση. Η φάση της σύνθεσης ολοκληρώνεται με την διαχείριση της συζήτησης από τον εκπαιδευτικό με σκοπό την σύνδεση των διαφορετικών μεθόδων επίλυσης, καθώς και αξιολόγηση και πιθανή επέκταση των λύσεων αυτών. Μια πλούσια συζήτηση σε αυτή την φάση μπορεί να υποστηρίξει την παροχή επεξηγήσεων και την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τους μαθητές. Οι μαθητές είναι ενεργοί ακροατές, οι οποίοι κατανοούν, αναρωτιούνται, εκτιμούν και συμπληρώνουν τους συλλογισμούς τους (Larsson, 2015).

Οι da Ponte και Quaresma (2016) ανέπτυξαν ένα πλαίσιο για την ανάλυση των δράσεων των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης (δηλαδή τη φάση της εισαγωγής του προβλήματος και της σύνθεσης των λύσεων των μαθητών). Οι ερευνητές διακρίνουν τέσσερες κατηγορίες δράσεων: α) δράσεις που αφορούν την πρόσκληση που απευθύνει προς τους μαθητές, η οποία στοχεύει στην έναρξη μιας συζήτησης, β) δράσεις που αφορούν την υποστήριξη που παρέχει ή την καθοδήγηση προς τους μαθητές στην επίλυση του προβλήματος, γ) δράσεις ενημέρωσης και πληροφόρησης και δ) δράσεις με τις οποίες προκαλεί τους μαθητές να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη (Σχήμα 1).



Σχήμα 1 – Θεωρητικό πλαίσιο των da Ponte και Quaresma (2016)

Τα μαθηματικά έργα που προτείνονται στην σχολική τάξη έχουν ιδιαίτερη σημασία γιατί αποτελούν το συγκεκριμένο πλαίσιο πάνω στο οποίο καλείται να αναπτυχθεί η μαθηματική δραστηριότητα, να προσεγγίσουν οι μαθητές το μαθηματικό νόημα και να ασκηθούν στη μαθηματική λειτουργία (Τζεκάκη, 2011). Καθώς η επίλυση προβλήματος κατέχει κεντρική θέση στην μαθηματική εκπαίδευση, δημιουργικές προσεγγίσεις όπως η χρήση ανοιχτών προβλημάτων αποτελεί χρήσιμη κατηγορία προβλημάτων στην πρακτική των εκπαιδευτικών. Ένα ανοιχτό πρόβλημα ορίζεται ως ένα πρόβλημα που είτε υποστηρίζει την επίλυσή του με πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις είτε είναι ανοιχτό σε πολλές διαφορετικές λύσεις (Sullivan, 2003). Αρκετά είναι τα πλεονεκτήματα κατά τη διδασκαλία ανοικτών προβλημάτων δεδομένου ότι οι μαθητές α) εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες και εκφράζουν τις ιδέες τους ελεύθερα, β) μπορούν να απαντήσουν στο πρόβλημα με τους δικούς τους τρόπους (Kwon, Park & Park, 2006), γ) προσφέρουν ευκαιρίες για επέκταση της μαθηματικής γνώσης, και δ) παρέχουν ευκαιρίες για συνεργασία με αλληλεπίδραση, διατύπωση εικασιών και επιχειρηματολογία (Chan, 2007). Επίσης ένα άλλο ανοιχτό χαρακτηριστικό των ανοικτών προβλημάτων είναι ότι συνδέονται με την ανάπτυξη της δημιουργικότητας ενός μαθητή, καθώς συμβάλλουν στην ανάπτυξη της πρωτοτυπίας και της ευελιξίας του (Κόσυβας, 2008). Παρόλα αυτά, οι εκπαιδευτικοί έχουν να αντιμετωπίσουν διάφορες προκλήσεις κατά τη διδασκαλία ανοικτών προβλημάτων. Λόγω της φύσης των ανοιχτών προβλημάτων οι μαθητές μπορεί να ακολουθήσουν στρατηγικές μη αναμενόμενες και έτσι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να είναι προετοιμασμένοι να κατανοήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών και να ευθυγραμμίσουν παράλληλα τις ιδέες και προσεγγίσεις των μαθητών (Sherin, 2002). Μια άλλη πρόκληση για τον εκπαιδευτικό εντοπίζεται στην ενορχήστρωση των απαντήσεων των μαθητών που προάγουν και επεκτείνουν τη μάθηση. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να διαχειριστεί αυτές τις προκλήσεις χωρίς να αναιρέσει κάποιο από τα ανοιχτά χαρακτηριστικά του μαθηματικού έργου που προτείνει στη σχολική τάξη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης (Yin, 1994), καθώς εξετάστηκε μεμονωμένα μια εκπαιδευτικός (η Παρασκευή) με σκοπό να γίνει μελέτη σε βάθος των δράσεων της. Η Παρασκευή (ψευδώνυμο) είχε πολυετή εμπειρία στην διδασκαλία των μαθηματικών σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και συμμετείχε στο πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης του ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil. Στο πλαίσιο αυτό σχεδίασε και υλοποίησε δύο διδασκαλίες σε μαθητές της Β΄ Γυμνασίου.

Τα μαθηματικά έργα που δόθηκαν στους μαθητές

i) Το πρόβλημα της σχεδίασης μονοκατοικίας

Στο πρόβλημα της σχεδίασης μονοκατοικίας οι μαθητές έπρεπε να φτιάξουν την κάτοψη μιας μονοκατοικίας 100 τ.μ. και να σχεδιάσουν τις θέσεις του σαλονιού, της κουζίνας, των υπνοδωματίων και του WC όπως εκείνοι επιθυμούσαν καλύτερα. Στο τέλος η κάθε ομάδα παρουσίασε και υποστήριξε τη λύση που πρότεινε κατά τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Στη φάση της εισαγωγής η εκπαιδευτικός παρουσίασε σε προβολέα διάφορα αρχιτεκτονικά σχέδια και παρουσίασε τα βήματα σχεδίασης ενός σπιτιού από το βιβλίο Αρχιτεκτονικού σχεδίου της Γ΄ Λυκείου. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν τα διάφορα σχέδια των μαθητών στην ολομέλεια της τάξης, πραγματοποιήθηκε συζήτηση και αξιολόγηση των σχεδίων από τους μαθητές.

Αυτό το πρόβλημα θεωρείται ανοιχτό μιας και υπάρχουν διαφορετικοί σωστοί τρόποι σχεδίασης της μονοκατοικίας. Συνεπώς, οι μαθητές μπορεί να επιλέξουν διαφορετικούς τρόπους να τοποθετήσουν τα χωρίσματα για τα δωμάτια, να μοιράσουν το εμβαδόν σε κάθε χώρο της μονοκατοικίας και να διαχειριστούν μαθηματικές έννοιες όπως είναι η κλίμακα και το εμβαδόν.

ii) Το πρόβλημα της στατιστικής μελέτης

Στα πλαίσια της διδασκαλίας του κεφαλαίου της στατιστικής στη Β΄ Γυμνασίου, η Παρασκευή ζήτησε από τους μαθητές να επιλέξουν ένα θέμα ώστε να πραγματοποιήσουν μια στατιστική μελέτη. Το θέμα που επέλεξαν οι μαθητές ήταν ο σχολικός εκφοβισμός (bullying). Οι μαθητές διαμόρφωσαν μόνοι τους το ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις της επιλογής τους, μοίρασαν σε συμμαθητές τους άλλων τάξεων τα ερωτηματολόγια, τα συνέλεξαν και τα ανέλυσαν, κατέγραψαν τα αποτελέσματα, σχεδίασαν ραβδογράμματα και τα παρουσίασαν στην ολομέλεια της τάξης. Η επεξεργασία των ερευνητικών τους δεδομένων έγινε σε 2 διδακτικές ώρες όπου δημιουργήθηκαν ομάδες των 3 ή 4 ατόμων. Οι μαθητές αφέθηκαν ελεύθεροι να επεξεργαστούν τα δεδομένα όπως αυτοί θέλουν καλύτερα και παρουσίασαν στην ολομέλεια της τάξης τα αποτελέσματα της έρευνάς τους.

Το πρόβλημα θεωρείται ανοιχτό διότι η Παρασκευή άφησε ελεύθερους τους μαθητές να εμπλακούν σε δράσεις Στατιστικού Κύκλου Έρευνας (Ευσταθίου κ.ά., 2014) ενώ η ίδια ενορχήστρωσε τη συζήτηση των ερευνητικών τους αποτελεσμάτων κατά τη φάση της σύνθεσης.

Είδη και συλλογή δεδομένων

Για την παρούσα μελέτη συλλέχθηκαν δεδομένα από τις δύο διδακτικές παρεμβάσεις της Παρασκευής και η καθεμία είχε διάρκεια δύο διδακτικές ώρες. Οι διδασκαλίες ήταν βιντεοσκοπημένες, οι οποίες στην συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν και αναλύθηκαν.

Μεθοδολογία ανάλυσης των δεδομένων

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τεχνικές grounded (Charmaz, 2006). Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα εντοπίστηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν τα αποσπάσματα που αφορούσαν αποκλειστικά τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης, δηλαδή τη φάση της εισαγωγής του προβλήματος στην τάξη και τη φάση της σύνθεσης των λύσεων των μαθητών. Στη συνέχεια, κατηγοριοποιήθηκαν οι δράσεις των εκπαιδευτικών σύμφωνα με το θεωρητικό μοντέλο των da Ponte και Quaresma (2016). Συχνά έγινε σύγκριση των κωδικών που προέκυψαν με σκοπό την αναδιάρθρωσή τους μέχρι να καταλήξουμε στην τελική κωδικοποίηση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι δράσεις της εκπαιδευτικού για την κάθε κατηγορία του μοντέλου των da Ponte και Quaresma (2016) που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων, καθώς επίσης και ενδεικτικά αποσπάσματα από τη διδασκαλία της Παρασκευής.

Η κατηγορία της πρόσκλησης

*α) Προτρέπει τους μαθητές να υιοθετήσουν το ρόλο ενός επαγγελματία***.** Η Παρασκευή ζητά από τους μαθητές να υιοθετήσουν το ρόλο ενός επαγγελματία (αρχιτέκτονα ή στατιστικού). Χαρακτηριστικό απόσπασμα:

Παρασκευή: Φανταστείτε ότι θέλετε να βοηθήσετε ένα αρχιτεκτονικό γραφείο να κάνει ένα σχέδιο μιας μονοκατοικίας, περίπου στα 100τ.μ. Είναι ένα οικόπεδο και εσείς καλείστε να φτιάξετε ένα σπίτι για μια τετραμελή οικογένεια.

β) Απευθύνει ανοιχτή πρόσκληση για επεξήγηση ή/ και αιτιολόγηση. Στη διδασκαλία της Παρασκευής με την σχεδίαση μιας μονοκατοικίας η ανοιχτή πρόσκληση περιορίζεται σε δύο αναφορές προς το τέλος της δεύτερης διδακτικής ώρας, όπου ζητάει από τις ομάδες να παρουσιάσουν τις λύσεις που προτείνουν για την κατασκευή της μονοκατοικίας στον πίνακα, επεξηγώντας τον τρόπο σκέψης τους:

Παρασκευή: Λοιπόν η ομάδα 1 τι έχετε κάνει; Βλέπετε;[…] Ομάδα 2, Ακούστε όλοι την ομάδα 2.

Στη διδασκαλία για το σχολικό εκφοβισμό και στη φάση της σύνθεσης, η Παρασκευή απευθύνει ανοιχτή πρόσκληση στους μαθητές για να σχολιάσουν και να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου που παρουσιάζονται στον πίνακα. Με αυτό τον τρόπο προσπαθεί να εμπλέξει όλους τους μαθητές στην συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης:

Παρασκευή: Στα αγόρια σωματική βία και στα κορίτσια είναι οι βρισιές. Κάτι να πούμε σε αυτό; […]Τι έχετε να παρατηρήσετε; […] Ποιος θέλει να σχολιάσει;

γ) Απευθύνει ανοιχτή πρόσκληση για καταγραφή αποτελεσμάτων στον πίνακα. Μία άλλη δράση που εμφανίζεται είναι η ανοιχτή πρόσκληση για καταγραφή των αποτελεσμάτων στον πίνακα. Κατά την διδασκαλία της Παρασκευής, ένα μεγάλο μέρος της αφιερώνεται στην καταγραφή των αποτελεσμάτων της έρευνας για το bullying. Ο πίνακας χωρίζεται σε στήλες και κάθε στήλη περιέχει τα αποτελέσματα σε ποσοστά για κάθε ερώτηση του ερωτηματολογίου. Απευθύνεται στους μαθητές οι οποίοι της παραθέτουν τα ποσοστά που προέκυψαν από την μελέτη τους και αυτή τα διαβάζει. Ενδεικτικά αποσπάσματα:

Παρασκευή: Πάμε στην ομάδα 4. Τα παιδιά φέρονται ρατσιστικά - βίαια για να φανούν ανώτεροι, τα αγόρια με ποσοστό 42% και τα κορίτσια 58% […] Πάμε στην 5 ομάδα […] Σωματική βία τα αγόρια 24% και τα κορίτσια 77%.

Η κατηγορία της καθοδήγησης

α) Υποδεικνύει στρατηγικές/ τεχνικές επίλυσης. Στις πρακτικές της εκπαιδευτικού παρατηρείται μια προσπάθεια κλειστής καθοδήγησης με στόχο την εξοικονόμηση χρόνου ώστε να περάσουν στη φάση της σύνθεσης και της συζήτησης των στρατηγικών επίλυσης στην ολομέλεια της τάξης. Η Παρασκευή προτείνει ορισμένο τρόπο επίλυσης του προβλήματος. Αφού έχει αφιερώσει αρκετό χρόνο στη φάση της εισαγωγής για τη περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών του πλαισίου του προβλήματος της κατασκευής μονοκατοικίας, υποδεικνύει στους μαθητές πως να ξεκινήσουν για να προσεγγίσουν το πρόβλημα:

Παρασκευή: Ξεκινήστε να πάρετε τις διαστάσεις. Πόσο θα πάρετε το μήκος; […] Αυτές οι τιμές αναφέρονται στις πραγματικές τιμές του σπιτιού, όχι αυτές που θα σχεδιάσετε εσείς […] Πρώτα θα φτιάξετε το περίγραμμα και μετά θα φτιάξετε τους τοίχους.

β) Υποδεικνύει συνδέσεις με βασικές μαθηματικές έννοιες. Στην διδασκαλία της Παρασκευής εμφανίζονται δράσεις όπου προσπαθεί να κάνει συνδέσεις με βασικές μαθηματικές έννοιες και συνήθως αφορούν προηγούμενη μαθηματική γνώση. Συγκεκριμένα συνδέει το πρόβλημα της κατασκευής μονοκατοικίας με την μαθηματική έννοια της κλίμακας. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

Παρασκευή: Είπαμε ένα σπίτι 100 τ.μ.. Θυμηθείτε λίγο πως θα κάνετε τις διαστάσεις, θυμάστε την κλίμακα;

Η κατηγορία της ενημέρωσης- αποσαφήνισης

*α) Επαναλαμβάνει (επαναφωνεί) απάντηση μαθητή***.** Στις διδακτικές πρακτικές της Παρασκευής υπάρχουν αρκετά σημεία στην φάση της σύνθεσης όπου για διάφορους λόγους επαναφωνεί τις δηλώσεις των μαθητών. Χρησιμοποιεί πλάγιο λόγο ή ευθύ για να επαναλάβει τις δηλώσεις των μαθητών, όπως:

Παρασκευή: Ααα ο Μάρκος λέει ότι νοιάζονται για την εμφάνιση τα κορίτσια.

β) Προτρέπει τη χρήση διαφορετικών πηγών (π.χ. σχολικά βιβλία). Η Παρασκευή στο πρόβλημα για την σχεδίαση μιας μονοκατοικίας δεν κάνει χρήση ψηφιακών εργαλείων, αλλά υποστηρίζει τη διδασκαλία της χρησιμοποιώντας σαν πηγή ένα σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου για να επεξηγήσει στους μαθητές τον ρόλο ενός αρχιτέκτονα και τα βήματα που θα χρειαστεί να ακολουθήσουν κατά την σχεδίαση. Χαρακτηριστικά αποσπάσματα:

Παρασκευή: Λοιπόν θα σας μοιράσω κάποια φύλλα που λένε πως φτιάχνουμε μια οικία, ένα σπίτι, εντάξει; Αυτό είναι απόσπασμα από ένα βιβλίο αρχιτεκτονικής, που κάνουν στην Γ΄ λυκείου νομίζω … κοιτάξτε τι λέει.

Το βιβλίο αυτό περιγράφει αναλυτικά την διαδικασία και τα βήματα που ακολουθεί ένας αρχιτέκτονας, όπως είναι η θέση που θα έχει στο χαρτί σχεδίασης, η κατανομή των δωματίων, η κατανομή των ανοιγμάτων κ.α.

Η κατηγορία της μαθηματικής πρόκλησης

*α) Αναζητά την ερμηνεία των απαντήσεων/αποτελεσμάτων που προέκυψαν***.** Στη διδασκαλία της Παρασκευής με τη σχεδίαση μονοκατοικίας απουσιάζει η αίτηση για ερμηνεία του κάθε σχεδίου των μαθητών λόγω έλλειψης χρόνου. Αντιθέτως, στη διδασκαλία της με την έρευνα για το bullying αυτή η δράση της είναι ιδιαίτερα αισθητή. Αφού έχει προηγηθεί η καταγραφή των αποτελεσμάτων στο πίνακα, η εκπαιδευτικός επιμένει συχνά στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων της μελέτης με διάφορες παρεμβάσεις και ερωτήσεις που θέτει. Έτσι οι μαθητές προκαλούνται να εμβαθύνουν στη κατανόησή τους και κάποιες φορές ίσως και να εξηγήσουν με συγκεκριμένα παραδείγματα. Ενδεικτικά αποσπάσματα:

Παρασκευή: Ακούω τι σημαίνει αυτό;[…] Με διαφορετική εθνικότητα, τι εννοούμε; […] Άρα γιατί φέρονται ρατσιστικά τα παιδιά; Τι λέτε; Το μεγάλο ποσοστό τι λέει; […] Ωραία πάμε στην 7 [ερώτηση], ακούω σχόλια […] πως το ερμηνεύετε;

β) Προτρέπει την ερμηνεία αναπαραστάσεων. Η ερμηνεία ή η δημιουργία αναπαραστάσεων φαίνεται να καταλαμβάνει σημαντική θέση στη διδασκαλία της Παρασκευής. Συγκεκριμένα, ζητείται επανειλημμένα από τους μαθητές να ερμηνεύσουν αναπαραστάσεις της κάτοψης ενός διαμερίσματος που τους έχει δοθεί ή των ραβδογραμμάτων που έχουν προκύψει.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Μελετώντας τις δράσεις της εκπαιδευτικού παρατηρούμε ότι σε όλες τις φάσεις και τις κατηγορίες της διδακτικής διαχείρισης της Παρασκευής εντοπίζονται δράσεις οι οποίες ενισχύουν τη φύση και τα πλεονεκτήματα της διδασκαλίας ενός ανοιχτού προβλήματος αλλά και δράσεις που τα περιορίζουν. Δράσεις ενίσχυσης είναι για παράδειγμα η προτροπή της να υιοθετήσουν οι μαθητές τον ρόλο ενός επαγγελματία, η προτροπή της στη χρήση διαφόρων πηγών (π.χ. σχολικά εγχειρίδια, φυλλάδια με κατόψεις) και η αναζήτηση ερμηνείας μαθηματικών αναπαραστάσεων (π.χ. ραβδογράμματα). Αυτές οι δράσεις προσφέρουν ευκαιρίες στους μαθητές για επέκταση της μαθηματικής τους γνώσης, ανάπτυξη συνεργασιών και διατύπωση εικασιών και επιχειρηματολογίας. Ωστόσο υπάρχουν δράσεις καθοδήγησης οι οποίες είναι δυνατόν να περιορίσουν ή ακόμα και να αναιρέσουν τα πλεονεκτήματα της χρήσης ανοικτών προβλημάτων στη σχολική τάξη. Τέτοιο παράδειγμα δράσης είναι όταν η Παρασκευή υποδεικνύει στους μαθητές μια συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης προβλήματος αποτρέποντάς τους από το να φέρουν στην επιφάνεια την δημιουργική τους πλευρά (Κόσυβας, 2008).

Η ταξινόμηση των δράσεων των εκπαιδευτικών, σύμφωνα με το θεωρητικό μοντέλο των da Ponte και Quaresma (2016), θα μπορούσε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να συνειδητοποιήσουν τις δράσεις τους αλλά και τον τρόπο που αυτές επηρεάζουν, υποστηρίζουν ή περιορίζουν, τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών. Για παράδειγμα, παρότι είναι δύσκολο για τον εκπαιδευτικό να αποφύγει δράσεις καθοδήγησης λόγω πρακτικών προβλημάτων (π.χ. έλλειψης χρόνου) θα πρέπει να αναγνωρίζει αυτές τις δράσεις και να τις περιορίζει όσο είναι δυνατόν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chan, C. M. E. (2007). Using open-ended mathematics problems: A classroom experience (Primary). In C. Shegar & R. B. A. Rahiin (Eds.), *Redesigning pedagogy: Voices of Practitioners* (pp. 129-146). Singapore: Pearson Education South Asia.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. Sage.

da Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers’ professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in mathematics*, *93*(1), 51-66.

Jackson, K. J., Shahan, E. C., Gibbons, L. K., & Cobb, P. A. (2012). Launching complex tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(1), 24-29.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review,* 7(1), 51-61.

Larsson, M. (2015). Incorporating the practice of arguing in Stein et al.’s model for helping teachers plan and conduct productive whole-class discussions. *Development of Mathematics Teaching: Design, Scale, Effects*, 97.

Nohda, N. (2000). Teaching by open approach methods in Japanese mathematics classroom in. T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Hiroshima, pp. 39–53.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of mathematics teacher education*, 5(3), 205-233.

Sullivan, P. A. (2003). The potential of open-ended mathematics tasks for overcoming barriers to learning. In *Annual conference of the Mathematics*

Education Research Group of Australasia 2003 (pp. 813-816). Deakin University.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research: Design and Methods* (2nd edition). Thousand Oaks, CA: Sage.

Ευσταθίου, Α. Ιγγλέζου, Α. Καραγιάννης, Β., Μπακογιάννη, Παπαδάκη, Μ. & Χλέτσου, Ε. (2014). Υλοποιώντας τον στατιστικό κύκλο έρευνας. *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ). Φλώρινα, 14,15 και 16 Μαρτίου 2014. http://enedim2014.web.uowm.gr/

Κόσυβας, Γ. (2008). Εικασίες και μαθηματική συζήτηση στην τάξη, Πρακτικά 25ου συνεδρίου της ΕΜΕ, 434-448, ΕΜΕ.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). *Πρακτικά από το 4ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 51-66. Ιωάννινα, ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

ΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΩΣ ΣΥΓΓΡΑΦΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

Κυνηγός Χρόνης[1, 2], Γριζιώτη Μαριάνθη[1, 2], Διαμαντίδης Δημήτρης[1], Λάτση Μαρία[1, 2], Φακούδης Βαγγέλης[1, 2]

[1]Εργαστηριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΦΣ, ΕΚΠΑ

[2]ΙΤΥΕ Διόφαντος

kynigos@ppp.uoa.gr, mgriziot@ppp.uoa.gr, dimitrd@ppp.uoa.gr, mlatsi@ppp.uoa.gr, fakoudis@sch.gr

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε ένα πλαίσιο για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μικροπειραμάτων μαθηματικών, δηλαδή ψηφιακών δομημάτων για τη διερεύνηση μιας έννοιας μαθηματικών μέσα από την κατασκευή και τον πειραματισμό με πολλαπλές αναπαραστάσεις και μοντέλα. Ο σχεδιασμός μικροπειραμάτων ακολουθεί μια πορεία τριών σταδίων (layers) κατά την οποία αναπτύσσονται και αξιολογούνται ψηφιακά δομήματα διαβαθμισμένης εστίασης σε επιλεγμένες γνωστικές περιοχές μαθηματικών. Ακολουθώντας αυτό το πλαίσιο αναπτύχθηκαν 9 εστιασμένα συγγραφικά εργαλεία και 1600 μικροπειράματα μαθηματικών στα πλαίσια της δράσης εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων των έργων Ψηφιακό Σχολείο 1 και Ψηφιακό Σχολείο 2.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο σχεδιασμός ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων αποτελεί μια συνεχή πρόκληση του τομέα της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Η κατασκευή, το ‘μαστόρεμα’, η διασκευή/τροποποίηση και ο διαμοιρασμός ψηφιακών δομημάτων προσδίδουν στη μάθηση των σχετικών εννοιών προσωπικό νόημα, μέσω της έκφρασης, για τα παιδιά. Όσο αφορά τους εκπαιδευτικούς, η «ανοικτή» σε παρεμβάσεις από αυτόν, μορφή ενός ψηφιακού δομήματος ανάλογα με τις πρακτικές του, ενισχύει το ρόλο του ως σχεδιαστή. Για την περιγραφή της δράσης που προκύπτει κατά την ελεύθερη κατασκευή τέτοιων μαθησιακών αντικειμένων και της διελκυστίνδας, ως προς την εστίαση του σχεδιαστή-εκπαιδευτικού, μεταξύ τεχνικών και εννοιολογικών ζητημάτων, και μέσα από την ευρείας κλίμακα παρέμβαση της κατασκευής και ενσωμάτωσης μαθησιακών αντικειμένων στο Φωτόδεντρο (http://photodentro.edu.gr/aggregator/), αναπτύξαμε το «πλαίσιο για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μικροπειραμάτων» (Κυνηγός, et al., 2016). Με τον όρο «μικροπείραμα» (micro-experiment) αναφερόμαστε σε ένα ψηφιακό δόμημα που προσομοιώνει μια εστιασμένη σε συγκεκριμένες έννοιες (π.χ. Μαθηματικών) πειραματική διάταξη προσκαλώντας τον χρήστη να διεξαγάγει το πείραμα και να εμπλακεί στην πειραματική διεργασία (Kynigos & Grizioti, 2018). Ένα μικροπείραμα συνήθως ξεκινά από μια εστιασμένη ερώτηση ή ένα πρόβλημα με επιμέρους κλειστές ερωτήσεις και καταλήγει σε μια ερώτηση ανοιχτού τύπου που προωθεί την περαιτέρω διερεύνηση με τα διαθέσιμα εργαλεία. Στο παρόν άρθρο με αφετηρία το πλαίσιο αυτό εστιάζουμε στην περίπτωση των μικροπειραμάτων για τα Μαθηματικά.

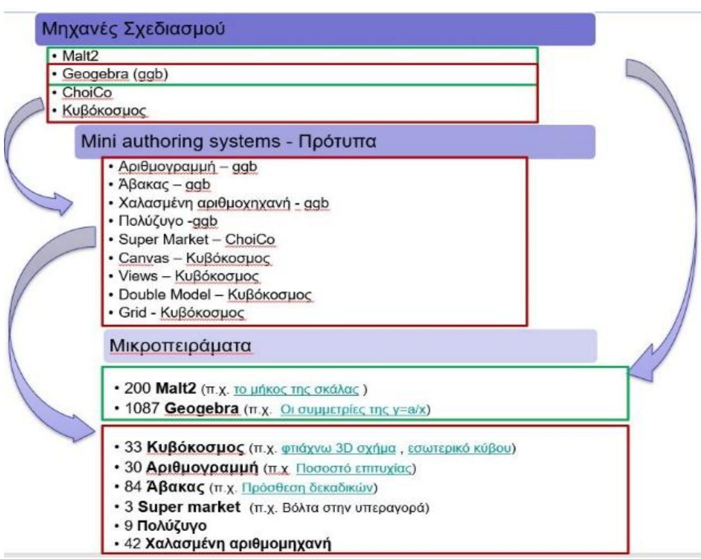
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΦΕΤΗΡΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Η ανάπτυξη του πλαισίου ανάπτυξης και σχεδιασμού των μικροπειραμάτων έχει δύο υποθέσεις: α) διακρίναμε τρία επίπεδα σχεδιασμού διαβαθμισμένης εστίασης. Στο πρώτο επίπεδο αναπτύσσεται μία μηχανή σχεδιασμού που προσφέρει κατάλληλα εργαλεία κατασκευής μαθησιακών αντικειμένων για πολλές γνωστικές περιοχές. Στο δεύτερο επίπεδο περιλαμβάνεται την ανάπτυξη ψηφιακών συγγραφικών εργαλείων από τις μηχανές σχεδιασμού με εστίαση σε συγκεκριμένη γνωστική περιοχή (π.χ. Γεωμετρία) και λειτουργούν ως «πρότυπα» για την ανάπτυξη μικροπειραμάτων για έννοιες της περιοχής αυτής, το οποίο είναι και το τρίο επίπεδο. β) θεωρήσαμε πρόσθετη αξία την ενίσχυση της μάθησης μέσα από την ενεργή εμπλοκή των μαθητών, την έκφραση ιδεών και την κατασκευή (Kynigos, 2005; Kynigos, in press). Αυτό επιτυγχάνεται με την ενσωμάτωση λειτουργικοτήτων και εργαλείων που επιτρέπουν την ανακάλυψη, την έκφραση και την κατασκευή νοημάτων από τους μαθητές και παράλληλα δίνουν σε όλους τους χρήστες δυνατότητες διασκευής και επανασχεδιασμού της δραστηριότητας. Μαθητές και εκπαιδευτικοί μπορούν να μπουν στο ρόλο του σχεδιαστή ή του διασκευαστή και να δημιουργήσουν τα δικά τους ψηφιακά δομήματα, είτε αλλάζοντας τα υπάρχοντα μικροπειράματα είτε σχεδιάζοντας νέα χρησιμοποιώντας τα πρότυπα και τις μηχανές σχεδιασμού (Hoyles, 2005). Σε αυτό το πλαίσιο, το μαθησιακό αντικείμενο δεν έχει τη μορφή ενός αδιαμφισβήτητου και αμετάβλητου κλειστού δομήματος, αλλά γίνεται ένα δυναμικό, ένα «ζωντανό» αντικείμενο το οποίο εξελίσσεται, φορέας αντιλήψεων των δημιουργών του, το οποίο διαμοιράζεται ελεύθερα. Ωστόσο, ειδικά στην περίπτωση παρεμβάσεων μεγάλης κλίμακας (όπως το Φωτόδεντρο) υπάρχει δίλημμα σχετικά με το βαθμό και το βάθος της πρόσβασης στις λειτουργικότητες του ανοικτού μαθησιακού αντικειμένου. Για την αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος, ακολουθήσαμε την προσέγγιση του «μαύρου και άσπρου κουτιού» (Kynigos, 2004), δηλαδή του σχεδιασμού ημιδιαφανών δομημάτων, σύμφωνα με την οποία ο σχεδιαστής επιλέγει και δίνει στον χρήστη βαθιά πρόσβαση σε ορισμένα στοιχεία της δομής του αντικειμένου μέσα από υπολογιστικά εργαλεία υψηλού επιπέδου τα οποία δεν απαιτούν εξειδικευμένες τεχνολογικές γνώσεις. Με αυτή την προσέγγιση, που ακολουθήθηκε στην κατασκευή μικροπειραμάτων για το Φωτόδεντρο, δίνεται στο χρήστη η ευκαιρία να επέμβει στη δομή του ψηφιακού μαθησιακού αντικειμένου στο βαθμό που ο ίδιος επιθυμεί. Το πλαίσιο που δημιουργήθηκε κάτω από τις υποθέσεις αυτές, με αφετηρία το αντικείμενο των Μαθηματικών, έχει διατυπωθεί με γενικευμένο τρόπο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα.

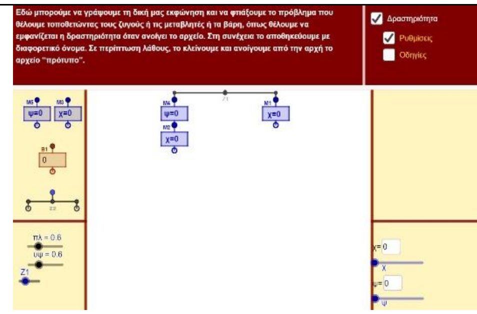
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το παραπάνω πλαίσιο στοχεύει να διασφαλίσει την ποιότητα της τελικής σειράς μικροπειραμάτων καθώς ο σχεδιασμός και η ανάπτυξή τους ολοκληρώνονται σε τρία επιμέρους επίπεδα (Εικόνα 1) κάτι που εφαρμόστηκε κατά την κατασκευή μικροπειραμάτων για το Φωτόδεντρο. Στο πρώτο επίπεδο επιλέγεται ή αναπτύσσεται μια μηχανή σχεδιασμού η οποία παρέχει τα κατάλληλα εργαλεία για την ανάπτυξη ψηφιακών προτύπων (templates) που θα επιτρέπουν με τη σειρά τους την ανάπτυξη σειράς μικροπειραμάτων για τα Μαθηματικά. Παραδείγματα διαδικτυακών μηχανών σχεδιασμού οι οποίες ακολουθούν τους τρεις άξονες του πλαισίου είναι το περιβάλλον προγραμματισμού τρισδιάστατων δυναμικών μοντέλων Malt2, το εργαλείο σχεδιασμού ψηφιακών παιχνιδιών προσομοίωσης ChoiCo και το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ‘Geogebra’. Συνήθως μια μηχανή σχεδιασμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί από έμπειρους εκπαιδευτικούς ή ειδικούς του μαθησιακού αντικειμένου αλλά ενδέχεται να δυσκολέψει έναν μαθητή ή εκπαιδευτικό χωρίς τις απαραίτητες τεχνικές γνώσεις (π.χ. γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου, σχεδιασμός γραφικών).

Στο δεύτερο επίπεδο, αναπτύσσεται ένα πρότυπο από τη μηχανή σχεδιασμού για την εξασφάλιση πρόσβασης στον σχεδιασμό από όλους τους χρήστες αλλά και για τη διασφάλιση της ποιότητας των τελικών μικροπειραμάτων . Το πρότυπο είναι ένα ψηφιακό συγγραφικό δόμημα εστιασμένο σε μια γνωστική περιοχή, το οποίο ενσωματώνει λειτουργικότητες που επιτρέπουν την κατασκευή μικροπειραμάτων για έννοιες αυτής της περιοχή. Δεν αποτελεί ανεξάρτητο μαθησιακό αντικείμενο αλλά ένα ενδιάμεσο βήμα για τον τελικό σχεδιασμό ενός μικροπειράματος, σαν ένα καλούπι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό μικροπειραμάτων συγκεκριμένου τύπου. Για παράδειγμα τα πρότυπα «Άβακας» και «Πολύζυγο» αναπτύχθηκαν με τη μηχανή σχεδιασμού «Geogebra» και εστιάζουν στις γνωστικές περιοχές της αριθμητικής και των εξισώσεων αντίστοιχα (Εικόνα 2). Το κάθε πρότυπο χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή ενός αριθμού μικροπειραμάτων για έννοιες της εκάστοτε γνωστικής περιοχής (π.χ. μεταβλητή, πολλαπλασιασμός, δεκαδικό σύστημα) (Εικόνα 1). Η χρήση του προτύπου δίνει τη δυνατότητα στους μελλοντικούς χρήστες να επέμβουν στο κάθε μικροπείραμα και να το τροποποιήσουν. Ακόμη, ο τρόπος με τον οποίο έχει σχεδιαστεί το πρότυπο επιτρέπει την άμεση παραγωγή μεγάλου αριθμού μικροπραμάτων με εξασφαλισμένη ποιότητα καθώς η ποιότητα του προτύπου έχει ήδη ελεγχθεί και διασφαλιστεί.



Εικόνα 1: Ανάπτυξη μικροπειραμάτων σε τρία επίπεδα (layers)

Άβακας	Πολύζυγο
	

Εικόνα 2: Τα ‘κενά’ πρότυπα "Άβακας" και "Πολύζυγο" που αναπτύχθηκαν με τη μηχανή σχεδιασμού Geogebra

Στο τρίτο επίπεδο του πλαισίου σχεδιασμού, το πρότυπο χρησιμοποιείται για τον σχεδιασμό ενός μικρού αριθμού αρχικών μικροπραμάτων τα οποία θα δοκιμαστούν και θα αξιολογηθούν οδηγώντας σε πιθανό επανασχεδιασμό του προτύπου. Μετά από διαδοχικούς κύκλους εσωτερικής και εξωτερικής αξιολόγησης και επανασχεδιασμού, ολοκληρώνεται η τελική έκδοση του προτύπου. Στο τελευταίο βήμα αναπτύσσεται η πλήρης σειρά μικροπειραμάτων, η ποιότητα των οποίων έχει διασφαλιστεί στα προηγούμενα στάδια του σχεδιασμού.

Σε ορισμένες περιπτώσεις ενδέχεται να παραληφθεί ο σχεδιασμός προτύπου και να σχεδιαστεί απευθείας από τη μηχανή σχεδιασμού ένας αριθμός μικροπειραμάτων που εστιάζουν σε συγκεκριμένες έννοιες. Πρόκειται για περιπτώσεις όπου α) το μικροπείραμα αποτελείται από εστιασμένα ερωτήματα, μοντέλα και αναπαραστάσεις που δεν μπορούν να αποτυπωθούν σε ένα γενικευμένο πρότυπο και β) η μηχανή σχεδιασμού προσφέρει τα κατάλληλα εργαλεία για κατασκευή και αξιολόγηση του συγκεκριμένου μικροπειράματος.

Αξιοποιώντας το παραπάνω πλαίσιο σχεδιασμού, η ομάδα μαθηματικών των έργων Ψηφιακό Σχολείο 1 και Ψηφιακό Σχολείο 2 (Μεγάλου & Κακλαμάνης, 2018) ανέπτυξε 1600 μικροπειράματα για γνωστικές περιοχές των μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα μικροπειράματα δημοσιεύθηκαν στο εθνικό συσσωρευτή εκπαιδευτικού περιεχομένου «Φωτόδεντρο»1 και συνδέθηκαν με τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία ως δραστηριότητες των αντίστοιχων κεφαλαίων.

Αρχικά, η ομάδα σχεδιασμού μαθησιακών αντικειμένων μαθηματικών, επέλεξε 7 γνωστικές περιοχές από το ΑΠΣ των μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και από αυτές και από αυτές 150 περίπου έννοιες τις οποίες η Διδακτική των Μαθηματικών προσδιορίζει ως δυσνόητες και των οποίων η νοηματοδότηση μπορεί να διευκολυνθεί με την εμπειρική εμπλοκή σε εποικοδομιστηκές δραστηριότητες. Στη συνέχεια επιλέχθηκαν 4 διαδικτυακές μηχανές σχεδιασμού εκ των οποίων οι 3 (malt2, Κυβόκοσμος, ChoiCo) έχουν αναπτυχθεί από την ομάδα του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας με βάση

[1] http://photodentro.edu.gr/aggregator/

τους τρεις άξονες σχεδιασμού εκπαιδευτικών λογισμικών που παρουσιάστηκαν. Η ομάδα σχεδιασμού αναδιαμόρφωσε τις λειτουργικότητες των τριών μηχανών ώστε να επιτρέπουν την ανάπτυξη προτύπων για μικροπειράματα μαθηματικών (π.χ. προσθήκη τυχαίας επίπτωσης στα παιχνίδια της μηχανής ChoiCo).

Κατόπιν ανέπτυξε 9 πρότυπα με τα οποία σχεδιάστηκαν 265 μικροπειράματα, ενώ σχεδίασε ακόμα 1300 μικροπειράματα απευθείας από τις μηχανές σχεδιασμού Malt2 και Geogebra. Παράλληλα με την ανάπτυξή τους, πραγματοποιήθηκαν 3 έρευνες σχεδιασμού με μαθητές, στις οποίες μελετήθηκαν οι διαδικασίες νοηματοδότησης εννοιών μαθηματικών και υπολογιστικής σκέψης μέσα από την εμπλοκή των μαθητών με συγκεκριμένα μικροπειράματα (Grizioti & Kynigos, 2018; Διαμαντίδης κ.α. 2015). Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και οι δυνατότητες διερεύνησης μέσω κατασκευής και προγραμματισμού ενίσχυσαν τη μαθησιακή διαδικασία και την έκφραση νοημάτων από τους μαθητές. Τα αποτελέσματα των ερευνών χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια για τον επανασχεδιασμό των αρχικών μικροπειραμάτων και την ανάπτυξη ολόκληρης της σειράς.

Ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση των μηχανών σχεδιασμού δίνοντας έμφαση στις λειτουργικότητες που ενσωματώνουν για κατασκευή και διερεύνηση και στην αξιοποίηση τους για την ανάπτυξη των προτύπων και των μικροπειραμάτων μαθηματικών.

Malt2

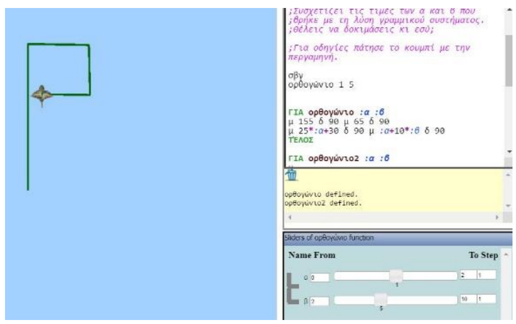
Το malt2 (Εικόνα 3) είναι μια διαδικτυακή πλατφόρμα προγραμματισμού τρισδιάστατων δυναμικών αναπαραστάσεων. Το περιβάλλον του υποστηρίζει τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Logo για την κατασκευή μοντέλων σε μια σκηνή τριών διαστάσεων. Επιπλέον η λειτουργικότητα των μεταβολέων δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να χειριστεί δυναμικά τα μοντέλα που έχουν σχεδιαστεί στη σκηνή αλλάζοντας τις τιμές των παραμέτρων τους. Τα 221 μικροπειράματα που αναπτύξαμε με το malt2 καλούν τους μαθητές να αξιοποιήσουν και τις τρεις αυτές λειτουργικότητες ώστε να διερευνήσουν μαθηματικές και υπολογιστικές έννοιες.

Geogebra

Το Geogebra αποτελεί ένα λογισμικό μαθηματικών που επιτρέπει τον σχεδιασμό διαδραστικών αναπαραστάσεων και μοντέλων για ένα μεγάλο εύρος γνωστικών περιοχών. Στο πλαίσιο ανάπτυξης μαθησιακών αντικειμένων μαθηματικών χρησιμοποιήσαμε τη μηχανή σχεδιασμού Geogebra για την ανάπτυξη τεσσάρων εστιασμένων συγγραφικών εργαλείων (προτύπων) με τα οποία σχεδιάσαμε 165 μικροπειράματα. Αξιοποιώντας τις δυνατότητες σχεδιασμού του Geogebra αναπτύξαμε ακόμα 1085 μεμονωμένα μικροπειράματα που εστιάζουν σε συγκριμένες έννοιες οι οποίες δεν μπορούσαν να καλυφθούν από τα τέσσερα πρότυπα. Στη συνέχεια περιγράφουμε συνοπτικά τις λειτουργικότητες που ενσωματώνει κάθε ένα από τα τέσσερα πρότυπα που αναπτυχθήκαν με τη μηχανή Geogebra.

Ο «άβακας» (Εικόνα 2) είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο), το οποίο συνδυάζει δυναμικά το δεκαδικό – θεσιακό σύστημα αρίθμησης και την ανάλυση και σύνθεση αριθμών από πλήθος ψηφίων με τη συμβολική και τη λεκτική αναπαράσταση αυτών των αριθμών. Με το πρότυπο του Άβακα έχουν αναπτυχθεί 84 μικροπειράματα τα οποία είναι αναρτημένα στο αποθετήριο φωτόδεντρο.

Η «αριθμογραμμή» είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο), που συνδυάζει στη διεπαφή του: α) τη δυνατότητα πολλαπλών διαμερίσεων της αριθμογραμμής και καθορισμού των άκρων της, β) τη δυνατότητα παράλληλης χρήση φυσικών, δεκαδικών και κλασματικών αριθμών, γ) τη δυνατότητα ταυτόχρονης εμφάνισης περισσότερων της μίας αριθμογραμμής και δ) τη χρήση διαφορετικών εργαλείων σύγκρισης. Με το πρότυπο της αριθμογραμμής ο σχεδιαστής μπορεί να αναπτύξει διαδραστικές δραστηριότητες με στόχο την καλλιέργεια και ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, της αξίας θέσης και των αριθμητικών υπολογισμών. Με την αριθμογραμμή έχουν αναπτυχθεί 40 μικροπειράματα τα οποία είναι αναρτημένα στο αποθετήριο φωτόδεντρο.



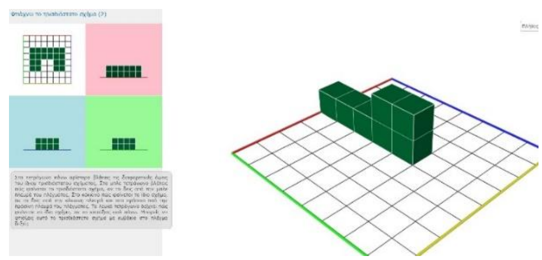
Εικόνα 3: Στιγμιότυπο από το μικροπείραμα "χαλασμένο ορθογώνιο" που σχεδιάστηκε με τη μηχανή σχεδιασμού "malt2", http://etl.ppp.uoa.gr/malt2

Η «χαλασμένη αριθμομηχανή» είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο), που επιτρέπει τον σχεδιασμό μικροπειραμάτων στα οποία ο χρήστης πρέπει να αναζητήσει εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού των αριθμών λόγω της απουσίας/μη λειτουργίας συγκεκριμένων πλήκτρων της αριθμομηχανής . Τα μικροπειράματα που αναπτύσσονται με αυτό το πρότυπο στοχεύουν στη νοηματοδότηση της αξίας θέσης του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και την ανάλυση και σύνθεση αριθμών, καθώς και με στόχο την εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος. Το πρότυπο ‘χαλασμένη αριθμομηχανή’ χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη και ανάρτηση 60 μικροπειραμάτων.

Το «πολύζυγο» (Εικόνα 2) είναι ένα εστιασμένο συγγραφικό εργαλείο (πρότυπο) στο οποίο μπορούν να αναπαρασταθούν δυναμικά εκφάνσεις της ζυγαριάς με διαφορετικά βάρη και σε διαφορετικά επίπεδα κάνοντας χρήση είτε ακέραιών είτε δεκαδικών είτε κλασματικών αριθμών. Με αυτό το πρότυπο αναπτύχθηκαν 15 μικροπειράματα που εστιάζουν στη διερεύνηση σχέσεων ισοδυναμίας σε ακέραιους και ρητούς καθώς και στην επίλυση προβλήματος με τη χρήση μεταβλητών.

Κυβόκοσμος

Ο κυβόκοσμος είναι μια διαδικτυακή μηχανή σχεδιασμού που επιτρέπει την κατασκευή τρισδιάστατων μοντέλων τοποθετώντας σε μια τρισδιάστατη σκηνή κύβους συγκεκριμένου μεγέθους. Τα αρχεία κώδικα του λογισμικού έχουν δομηθεί με τρόπο που να επιτρέπει σε κάποιον με μικρή γνώση προγραμματισμού να σχεδιάσει συγκεκριμένες δραστηριότητες ή πρότυπα δραστηριοτήτων, κυρίως για τρισδιάστατη γεωμετρία. Με τον κυβόκοσμο αναπτύξαμε τέσσερα πρότυπα (canvas, grid, double model και views) τα οποία διαφοροποιούνται ως προς τις αναπαραστάσεις που προσφέρουν στον μαθητή για τη διερεύνηση της δραστηριότητας. Στην εικόνα 4 φαίνεται στιγμιότυπο μικροπειράματος που αναπτύχθηκε με το πρότυπο ‘views’. Τα τέσσερα πρότυπα χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη 33 μικροπειράματων που πραγματεύονται έννοιες τρισδιάστατης γεωμετρίας.



Εικόνα 4: Στιγμιότυπο από το μικροπείραμα "Φτιάξε το τρισδιάστατο σχήμα" που σχεδιάστηκε με το πρότυπο 'views' της μηχανής Κυβόκοσμος

ChoiCo

To ChoiCo (Choices with Consequences) είναι μια διαδικτυακή μηχανή σχεδιασμού παιχνιδιών προσομοίωσης και στρατηγικής (Kynigos & Grizioti, in press). Στα παιχνίδια αυτά κάνει διαδοχικές επιλογές οι οποίες επιφέρουν επιπτώσεις στις παραμέτρους του παιχνιδιού. Στόχος είναι να διατηρήσει τις παραμέτρους του παιχνιδιού εντός συγκεκριμένων ορίων χωρίς να χάσει. Για τον σχεδιασμό ενός παιχνιδιού το περιβάλλον του ChoiCo ενσωματώνει τρεις υπολογιστικές λειτουργικότητες: α) έναν επεξεργαστή χαρτών για τον σχεδιασμό της διεπαφής του παιχνιδιού, β) μια βάση δεδομένων για τον σχεδιασμό των επιλογών και των επιπτώσεων του παιχνιδιού και γ) μια οπτική γλώσσα προγραμματισμού με blocks για τον προγραμματισμό των κανόνων του παιχνιδιού (Kynigos,& Yiannoutsou, 2018). Με το ChoiCo σχεδιάσαμε ένα πρότυπο παιχνιδιού με το όνομα «Super market» το οποίο εστιάζει σε έννοιες αριθμητικής (Εικόνα 5).

ΣΥΝΟΨΗ

Η ανάπτυξη ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων που απευθύνονται σε ευρεία κλίμακα και συνδυάζουν από τη μία δυνατότητες κατασκευής και πρόσβασης στις λειτουργικότητες και από την άλλη την εστίαση σε συγκεκριμένες έννοιες, αποτελεί πρόκληση για τους σχεδιαστές και τους εκπαιδευτικούς. Στο παρόν άρθρο συζητήσαμε ένα πλαίσιο για τον σχεδιασμό και ανάπτυξη μικροπειραμάτων μαθηματικών που βασίζεται σε αρχές της εποικοδομητσικής μάθησης και της καλλιέργειας της υπολογιστικής σκέψης μέσα από τα μαθηματικά. Το πλαίσιο αυτό αξιοποιήθηκε για την ανάπτυξη 1600 μικροπειράματων τα οποία ενσωματώθηκαν στα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σε επόμενα βήματα θα υλοποιήσουμε έρευνες με μαθητές που θα εστιάζουν στις διαδικασίες διασκευής των μικροπειραμάτων καθώς και στη συνύφανση υπολογιστικής σκέψης και μαθηματικών.

Εικόνα 5: Στιγμιότυπο από το μικροπείραμα "Βόλτα στην Υπεραγορά" που σχεδιάστηκε με το πρότυπο 'Supermakret' της μηχανής σχεδιασμού 'ChoiCo', http://etl.ppp.uoa.gr/choico

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

- Ψηφιακό Σχολείο Ι: 'Ψηφιακή Εκπαιδευτική Πλατφόρμα, Διαδραστικά Βιβλία και Αποθετήριο Μαθησιακών Αντικειμένων' , 'Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση' , ΕΣΠΑ 2007-2013, ΙΤΥΕ, Διόφαντος. Για τα μαθηματικά συμμετείχε μια ομάδα επιλεγμένων εκπαιδευτικών τα ονόματα των οποίων βρίσκονται στην αντίστοιχη ιστοσελίδα.
- Ψηφιακό Σχολείο ΙΙ: 'Επέκταση και Αξιοποίηση της Ψηφιακής Εκπαιδευτικής Πλατφόρμας, των Διαδραστικών Βιβλίων και του Αποθετηρίου Μαθησιακών Αντικειμένων, 'Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση', του ΕΣΠΑ 2014-2020, ΙΤΥΕ, Διόφαντος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Grizioti, M., & Kynigos, C. (2018). Game modding for computational thinking: an integrated design approach. In *Proceedings of the 17th ACM Conference on Interaction Design and Children* (pp. 687-692). ACM.

Hoyles, C. (2005). *Making Mathematics and Sharing Mathematics: Two Paths to Co-costructingg Meaning? In Meaning in Mathematics Education*. New York, USA: Spinger

Kynigos, C. (in press) Half - baked Constructionism: The Challenge of Infusing Constructionism in Education in Greece, *Constructionism in Context: The Art, Theory, and Practice of Learning Designs* Nathan Holbert, Matthew Berland, and Yasmin Kafai, MIT Press.

Kynigos, C. (2004) “A "black-and-white box" approach to user empowerment with component computing”, *Interactive Learning Environments*, Vol 12, No. 1-2, pp 27-71.

Kynigos, C., Grizioti, M (in press) Modifying games with ChoiCo: integrated affordances and engineered bugs for Computational Thinking, *British Journal of Educational Technology*.

Kynigos, C. & Grizioti, M. (2018). Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. *Informatics in Education*, *17*(2).

Kynigos, C. & Yiannoutsou, N. (2018). Children challenging the design of half-baked games: Expressing values through the process of game modding. *International Journal of Child-Computer Interaction*.

Διαμαντίδης Δ., Κυνηγός Χ., Γριζιωτη Μ. (2015), Ερμηνεύοντας τη χρήση ψηφιακών εργαλείων από μαθητές στη ‘Χελωνόσφαιρα’ , Στα *Πρακτικά Εργασιών 40υ Πανελλήνιου Συνεδρίου “Ένταξη των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία» της ΕΤΠΕ*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 30 Οκτωβρίου – 1 Νοεμβρίου 2015.

Κυνηγός Χ., Γριζιώτη, Μ., Λάτση, Μ., Φακούδης, Β. (2016), Πλαίσιο για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μικροπειραμάτων Μαθηματικών, *6ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο: «Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία,* Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Μεγάλου Ε., Κακλαμάνης Χ. (2018), Ψηφιακό Σχολείο ΙΙ: επέκταση και αξιοποίηση της ψηφιακής εκπαιδευτικής πλατφόρμας «e-me», των διαδραστικών σχολικών βιβλίων, των ψηφιακών αποθετηρίων και του εθνικού συσσωρευτή εκπαιδευτικού περιεχομένου «Φωτόδεντρο», *Πρακτικά 11ου Πανελλήνιου και Διεθνές Συνεδρίου «Οι ΤΠΕ στην εκπαίδευση»*, Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2018.

ΕΝΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΑΙ ΕΜΠΛΟΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Κούρτη Στυλιανή-Κυριακή, Πόταρη Δέσποινα

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

stellakour@gmail.com , dpotari@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα μελετά τα συναισθήματα και τις εντάσεις δύο εκπαιδευτικών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, κατά την προσπάθεια τους να καταφέρουν όλοι οι μαθητές της τάξης τους να εμπλακούν σε μαθηματική πρόκληση. Τα δεδομένα προήλθαν από βιντεοσκόπηση τριών διδασκαλιών από την κάθε εκπαιδευτικό και μια ατομική συνέντευξη. Τέσσερεις κατηγορίες εντάσεων αναδείχθηκαν και συγκεκριμένες μορφές αυτών προσδιορίστηκαν όπως για παράδειγμα ο σχεδιασμός και η ενάδραση του μαθήματος. Οι εντάσεις ακολουθήθηκαν κυρίως με αρνητικά συναισθήματα ενώ διερευνητικές πρακτικές διαχείρισης, φάνηκε να υποστηρίζουν την εμπλοκή των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη των εντάσεων μας επιτρέπει να καταγράψουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί, και να καταλάβουμε τις διδακτικές τους αποφάσεις. Οι εντάσεις αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας στην περιοχή της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών (βλ. Berry, 2007), ενώ σχετικά λίγες έρευνες αναφέρονται σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Liljedahl, Andrà, Di Martino, & Rouleau, 2015). Η μελέτη των συναισθημάτων έχει απασχολήσει αρκετά την διεθνή βιβλιογραφία, όμως πολύ μικρός όγκος έρευνας εστιάζει στα συναισθήματα εκπαιδευτικών (Hagenauer, Hascher & Volet, 2015). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στις μεθοδολογικές δυσκολίες που έγκεινται στην ποιοτική μελέτη του συναισθήματος, εξαιτίας της αμφίσημης φύσης του, γι' αυτό και οι περισσότερες από τις λίγες μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί, αφορούν σε ποσοτικές προσεγγίσεις. Τα συναισθήματα των εκπαιδευτικών συσχετίζονται με την ποιότητα της διδασκαλίας τους και αποτελούν κύριο παράγοντα στην λήψη διδακτικών αποφάσεων (Di Martino, Coppolla, Mollo, Pacelli & Sabena, 2013). Η λήψη αποφάσεων καθορίζει τους τρόπους διαχείρισης των διάφορων μορφών που παίρνουν οι εντάσεις των εκπαιδευτικών στην διδασκαλία. Έτσι, τα συναισθήματα παίζουν καθοριστικό ρόλο στην διαχείριση των εντάσεων κατά την διδασκαλία. Οι εντάσεις θεωρούνται στρεσογόνες για τους εκπαιδευτικούς και συνήθως αρνητικά συναισθήματα συνοδεύουν την διαχείριση των εντάσεων (Pillen, Beijaard & den Brok, 2013).

Στην παρούσα εργασία οι εντάσεις και τα συναισθήματα των εκπαιδευτικών μαθηματικών μελετούνται κατά την διδακσκαλία, σε αντίθεση με αντίστοιχες έρευνες του τομέα. Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος EDUCATE[1] που μελετά τη διδασκαλία και την ανάπτυξη της ώστε να ισορροπεί ο εκπαιδευτικός τη μαθηματική πρόκληση και τη διαφοροποίηση της διαδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα μελετάται το πώς η

[1] Το πρόγραμμα με τίτλο «Enhancing Differentiated Instruction and Cognitive Activation in Mathematics Lessons by Supporting Teacher Learning (EDUCATE)» χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παρούσα δημοσίευση δεσμεύει μόνο τους συντάκτες της και η Επιτροπή δεν ευθύνεται για τυχόν χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

αλληλεπίδραση συναισθημάτων και εντάσεων του εκπαιδευτικού επηρεάζει τη διδασκαλία και την εμπλοκή των μαθητών. Το πλαίσιο της διαφοροποιημένης διδασκαλίας και της μαθηματικής πρόκλησης, στο οποίο καλούνται να ανταποκριθούν οι εκπαιδευτικοί, αποτελεί πρόσφορο έδαφος για την δημιουργία εντάσεων και την ανάδυση συναισθημάτων καθώς είναι νέο και πολύ απαιτητικό για εκείνους. Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, να απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Ποιες εντάσεις αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών όταν επιχειρούν να ισορροπήσουν την διαφοροποιημένη μάθηση και την μαθηματική πρόκληση;
2. Πώς διαχειρίζονται οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών τις εντάσεις στη διδασκαλία και τι συναισθήματα βιώνουν; Τι επίδραση έχουν τα παραπάνω στην εμπλοκή των μαθητών;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα ενότητα προσπαθούμε να ορίσουμε την οπτική μας για τις εντάσεις και τα συναισθήματα τοποθετώντας τα στο γενικότερο πλαίσιο της θεωρίας της δραστηριότητας (ΘΔ). Στην ΘΔ, η δραστηριότητα κατευθύνεται προς ένα αντικείμενο ο μετασχηματισμός του οποίου είναι το κίνητρο της δραστηριότητας. Το αντικείμενο είναι το υλικό ή νοητικό δόμημα που ο άνθρωπος μέσω της δραστηριότητας επιχειρεί να πράξει ή να μετασχηματίσει (Leont'ev, 1978). Οι εκπαιδευτικοί (υποκείμενα), ως κύριο στόχο της διδασκαλίας (δραστηριότητα) έχουν τη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές (αντικείμενο). Η δραστηριότητα εκφράζεται μέσα από δράσεις (actions) με συνειδητούς στόχους (goals) (Leont'ev, 1978). Έτσι, στη μελέτη της διδασκαλίας των μαθηματικών η ΘΔ μπορεί να παρέχει φακούς για τη σύλληψη της πολυπλοκότητας των φαινομένων που συνδέονται με τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών συμπεριλαμβάνοντας ατομικές και συλλογικές διαστάσεις (Stouraitis, Potari & Skott, 2017).

Οι εντάσεις είναι πολύπλοκες συλλογές αντιφατικών δυνάμεων των 'θέλω' και των αναγκών που περιπλέκουν τις διεργασίες λήψης αποφάσεων των εκπαιδευτικών (Liljedahl, Andrà, Di Martino, & Rouleau, 2015). Η έννοια των εντάσεων προτίθεται να συλλάβει τις εσωτερικές αναταραχές που πολλοί εκπαιδευτικοί βιώνουν καθώς προσπαθούν να μάθουν να αναγνωρίζουν και να διαχειρίζονται αυτές τις αντιφατικές δυνάμεις (Berry, 2007). Οι εκπαιδευτικοί ως «διαχειριστές διλλημάτων», βρίσκουν τρόπους αντιμετώπισης της σύγκρουσης μεταξύ εξίσου ανεπιθύμητων (ή ασύμβατων) επιλογών χωρίς κατ 'ανάγκην την επίλυσή τους (Lampert, 1985, αναφορά στο Berry, 2007).

Σύμφωνα με τους DeBellis και Goldin (2006) τα συναισθήματα αποτελούν ραγδαία μεταβαλλόμενες συναισθηματικές καταστάσεις που βιώνονται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας. Κυμαίνονται από ήπια έως πολύ έντονα, γίνονται αντιληπτά ως τοπικά και ενσωματωμένα στο εκάστοτε πλαίσιο, ενώ έχουν βασικό ρόλο στη λήψη αποφάσεων. Ο Hannula (2002) υποστηρίζει πως υπάρχουν μόνο μερικά βασικά συναισθήματα -η χαρά, η λύπη, ο φόβος, ο θυμός, η αηδία και το ενδιαφέρον- ενώ τα πιο πολύπλοκα συναισθήματα βασίζονται σε αυτά. Η έννοια του συναισθήματος που υιοθετούμε έχει δυναμικό χαρακτήρα καθώς το βλέπουμε ενσωματωμένο στην δραστηριότητα στην οποία εμπλέκεται το άτομο. Σύμφωνα με τη ΘΔ το συναίσθημα αποτελεί μια ολιστική έκφραση της τρέχουσας κατάστασης του υποκειμένου σε σχέση με το αντικείμενο, και την αίσθηση του υποκειμένου για την πιθανότητα επιτυχίας στην πραγματοποίηση του αντικειμένου/κινήτρου που έχει αποδεχτεί (Leont'ev, 1978). Έτσι το συναίσθημα κινείται μαζί με τη δραστηριότητα ως σύνολο, και αποτελεί μία από τις εκδηλώσεις της στις δράσεις του υποκειμένου στην προσπάθεια επίτευξης των στόχων του. Επιθυμητό αποτέλεσμα της δραστηριότητας όπου υποκείμενο είναι ο εκπαιδευτικός είναι η ουσιαστική μαθηματική εμπλοκή των μαθητών.

Ο όρος εμπλοκή χρησιμοποιήθηκε από τους ερευνητές για να συμπεριλάβει τόσο τις κινητήριες όσο και τις γνωστικές διαστάσεις και συμπεριλαμβάνουν την εκκίνηση των μαθητών για δράση, την προσπάθεια και την επιμονή στα ακαδημαϊκά καθήκοντα καθώς και τις συναισθηματικές τους καταστάσεις κατά τη διάρκεια μαθησιακών δραστηριοτήτων (Helme & Clarke, 2001, αναφορά στο Kourti, 2019). Η εμπλοκή έχει οριστεί ως μια πολύπλευρη κατασκευή που λειτουργεί σε τρία επίπεδα: γνωστική, συμπεριφορική και εμπλοκή του θυμικού (Kong, Wong & Lam, 2003, αναφορά στο Kourti, 2019).

Συνοψίζοντας, οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν εντάσεις, οι οποίες εμφανίζονται με διάφορες μορφές στη διδασκαλία. Η προσπάθεια διαχείρισης των εντάσεων, οδηγεί τον εκπαιδευτικό συνεχώς να θέτει στόχους και να υιοθετεί δράσεις που πιθανόν να μην είχε σκεφτεί πιο πριν, προσπαθώντας να φτάσει στην επίτευξη του αντικειμένου. Τα συναισθήματα που βιώνει κατά την διαχείριση αυτών των στιγμών, επηρεάζουν την λήψη αποφάσεων, και κατά συνέπεια την εξέλιξη της δραστηριότητας. Η δραστηριότητα όμως αφορά στην αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού και μαθητών για την επίτευξη στόχων. Επομένως, όλη η πορεία διαχείρισης του εκπαιδευτικού, πιθανόν να επηρεάζει την εμπλοκή των μαθητών, και κατ' επέκταση την μάθησή τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μελέτη περίπτωσης των διδασκαλιών δύο εκπαιδευτικών μαθηματικών που διδάσκουν στο Λύκειο. Η συγκεκριμένη μέθοδος επιλέχθηκε αφού επιτρέπει την σε βάθος μελέτη φαινομένων στο πλαίσιο που αυτά εμφανίζονται, αναδεικνύει τις πιθανές αιτίες και αποτελέσματά τους και συμβάλλει στην ανάδειξη νέων υποθέσεων και ερωτημάτων (Flyvbjerg, 2011). Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η παρατήρηση τριών βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών από κάθε εκπαιδευτικό, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο του προγράμματος EDUCATE, καθώς και δύο ατομικές συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς. Το πρόγραμμα EDUCATE έχει ως στόχο την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε ζητήματα διαφοροποίησης και μαθηματικής πρόκλησης (Tomlinson, 2017), δύο στοιχεία που προκαλούν προσκλήσεις για τους εκπαιδευτικούς και έδωσε κίνητρο για τη συμμετοχή τους. Εκείνοι, λοιπόν, διαμόρφωσαν διδασκαλίες βασισμένοι σε μαθηματικά προκλητικές δραστηριότητες, οι οποίες ως στόχο είχαν την εμπλοκή όλων των μαθητών της τάξης, ενώ προσπάθησαν να εξισορροπήσουν την διαφοροποιημένη μάθηση και τη μαθηματική πρόκληση. Η επιλογή του κάθε σχολικού τμήματος πραγματοποιήθηκε από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Διατηρήθηκε η ανωνυμία των εκπαιδευτικών για λόγους ηθικής δεοντολογίας.

Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά κυρίως τις αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικού-μαθητών κατά τη μελέτη της διδασκαλίας σε συμπεριφορικό και γνωστικό επίπεδο. Τα δεδομένα από τις βιντεοσκοπήσεις, οι σημειώσεις πεδίου, καθώς και οι απομαγνητοφωνήσεις των συνεντεύξεων με τους διδάσκοντες επεξεργάστηκαν με τη μέθοδο της μικροανάλυσης (γραμμή – γραμμή), εξαιτίας των υψηλών επιπέδων αναλυτικότητας της μεθόδου.

Για την διάκριση και τον εντοπισμό των εντάσεων των εκπαιδευτικών στηριχθήκαμε στο πλαίσιο των εντάσεων των Liljedahl, κ.α. (2015), το οποίο αναμορφώθηκε και εμπλουτίστηκε για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Ο εντοπισμός των εντάσεων στα δεδομένα έγινε: 1) με βάση τις ρητές εκφράσεις αυτών από τους εκπαιδευτικούς (συνεντεύξεις ή διδασκαλία), και 2) μέσα από κρίσιμα περιστατικά αλληλεπίδρασης καθηγητή-μαθητών κατά την διδασκαλία που φανέρωναν αλλαγή στην ροή της επικοινωνίας ή εναλλαγή της συμπεριφοράς του εκπαιδευτικού από πιο ήπια σε πιο έντονη (κυρίως σε συναισθηματικό επίπεδο).

Η διαχείριση των εντάσεων των εκπαιδευτικών στην διδασκαλία μελετήθηκε μέσω της αναγνώρισης των δράσεών τους σε κρίσιμα περιστατικά, όπου εμφανίσθηκαν οι διάφορες μορφές εντάσεων. Για την ανάλυση των συναισθημάτων των εκπαιδευτικών κατά την διαχείριση των εντάσεων που αντιμετωπίζουν στηριχθήκαμε στο πλαίσιο του Hannula (2002) για τα βασικά συναισθήματα, το οποίο εμπλουτίσαμε για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Η αναγνώριση των συναισθημάτων έγινε μέσω της στάσης του σώματος του εκπαιδευτικού, των εκφράσεων στο πρόσωπό του, την κινησεολογία του και τον τόνο της φωνής του. Για την ανάλυση της εμπλοκής των μαθητών στηριχθήκαμε στο πλαίσιο της Kourti (2019) για την γνωστική και συμπεριφορική εμπλοκή.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, δεν εμφανίστηκαν στα δεδομένα μας όλες οι κατηγορίες εντάσεων του πλαισίου εντάσεων των Liljedahl, Andrà, Di Martino, και Rouleau (2015), ενώ αναδύθηκαν ορισμένες μορφές των εντάσεων αυτών, εμπλουτίζοντας το παραπάνω πλαίσιο (βλ. Πίνακα 1).

Ένταση	**Περιγραφή**	**Μορφές Έντασης**
Πρόθεση και Δράση	Τι ένας εκπαιδευτικός έχει την πρόθεση να κάνει σε μια διδασκαλία του και τι τελικά κάνει.	Σχεδιασμός και Ενάδραση μαθήματος
Παράδοση ή Καινοτομία	Η πρόθεση του εκπαιδευτικού να χρησιμοποιήσει καινοτόμες διδακτικές πρακτικές που συγκρούονται με πιο παραδοσιακές πρακτικές.	Επίτευξη των στόχων του αναλυτικού προγράμματος ή διαμόρφωση στόχων με βάση τις διαφορετικές ανάγκες των μαθητών
		Ατομική εργασία ή Ομαδική εργασία
«Να το πω» ή «Να το καλλιεργήσω»	Ο εκπαιδευτικός να καλλιεργεί μαθηματικές εμπειρίες κατασκευής γνώσης ή απλώς να	Διόρθωση της λανθασμένης απάντησης ενός μαθητή ή προσπάθεια οδήγησης του μαθητή στην αυτοδιόρθωση

	παραδίδει το μάθημα.	Διαχείρηση των αποριών των μαθητών μέσω κλειστής καθοδήγησης ή μέσω ανοικτού τύπου ερωτήσεων διερεύνησης
Χρόνος ή Αποτελέσματα	Τα αποτελέσματα μπορεί να είναι λιγότερο σημαντικά αλλά πιο άμεσα, ή επιμονή στην αρχική διδακτική πρακτική δίνοντας περισσότερο χρόνο στον εαυτό του/της και στους μαθητές;	

Πίνακας 1: Οι εντάσεις των εκπαιδευτικών και οι μορφές τους.

Η μορφή «Σχεδιασμός και Ενάδραση μαθήματος», της έντασης «Πρόθεση και Δράση», αφορά στην διαχείριση των αναμενόμενων και μη απαντήσεων των μαθητών (σωστών ή λανθασμένων). Σύμφωνα με τις συνεντέυξεις τους και οι δύο εκπαιδευτικοί κατά τον σχεδιασμό των διδασκαλιών τους λαμβάνουν υπόψιν κάποιες πιθανές απαντήσεις των μαθητών, ώστε να έχουν ένα πλάνο πορείας της διδασκαλίας τους.

Η ένταση «Παράδοση ή Καινοτομία» αποτέλεσε και για τους δύο εκπαιδευτικούς την αφορμή για την ένταξή τους στο πρόγραμμα EDUCATE. Όπως αναφέρθηκε από τον Ε1 όταν ερωτήθηκε «τι ήταν αυτό που σας έκανε να συμμετέχετε στο πρόγραμμα»: «Είδα ότι επαναλαμβανόμουν, και αυτό με έκανε να θέλω να δοκιμάσω κάτι καινούριο…γιατί το καινούριο μπορεί να σε εξελίξει…εσένα και τους μαθητές σου». Οι μορφές της έντασης που εμφανίστηκαν στα δεδομένα μας ήταν η«Ατομική ή Ομαδική εργασία», καθώς και η «Επίτευξη των στόχων του αναλυτικού προγράμματος ή διαμόρφωση στόχων με βάση τις διαφορετικές ανάγκες των μαθητών». Κατά την Ε2:

> Συνήθως για να φτιάξεις στόχους μαθημάτων χρησιμοποιείς τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος, καθώς δεν μπορούμε να το παραβλέπουμε. Όμως… δεν μπορείς να έχεις μόνο αυτούς τους στόχους για την διδασκαλία σου γιατί είσαι διαφορετικός σαν εκπαιδευτικός, και έχεις και διαφορετικούς μαθητές… Άρα χρειάζεται να προσαρμοστούν. Αυτό είναι πολύ δύσκολο.

Σχετικά με την ένταση «Χρόνος ή Αποτελέσματα» και οι δύο εκπαιδευτικοί προσπαθούν να δίνουν τον απαραίτητο χρόνο στους μαθητές τους ώστε να καταλήξουν σε ένα άρτιο αποτέλεσμα. Σύμφωνα με τον Ε1: «…μπορεί να πιέσω λίγο για να τελειώσει κάτι… στο μάθημα ρουτίνα… Αλλά συνήθως τους αφήνω να σκεφτούν…δεν αφήνω, και αν αφήσω κάτι ατελείωτο το κάνω την επόμενη φορά».

Η διαχείριση των εντάσεων, τα συναισθήματα των εκπαιδευτικών και η εμπλοκή των μαθητών

Από την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας προκύπτει ότι τα συναισθήματα που συνοδεύουν την διαχείριση των εντάσεών των εκαπιδευτικών είναι: άγχος, αβεβαιότητα, αναστάτωση, χαρά, ενδιαφέρον, θυμό, αποφυγή αποτυχίας και απορία. Οι δράσεις διαχείρισης των εκπαιδευτικών που προκύπτουν ομαδοποιούνται σε «διερευνητικές δράσεις» ή «δράσεις κλειστής καθοδήγησης». Οι «διερευνητικές δράσεις» περιλαμβάνουν: ερωτήσεις επεξήγησης προς τους μαθητές/τάξη, δοκιμές χειρισμού, ανάδειξη εναλλακτικών λύσεων στην ολομέλεια, ερωτήσεις εμβάθυνσης. Οι «δράσεις κλειστής καθοδήγησης» περιλαμβάνουν: επιβεβαίωση ορθής/λανθασμένης απάντησης των μαθητών, ρητορικές ερωτήσεις, απευθείας διάθεση στους μαθητές της σωστής απάντησης, ερωτήσεις με μοναδική απάντηση. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα οι «διερευνητικές δράσεις» του καθηγητή συνοδεύονται κυρίως από θετική γνωστική και συμπεριφορική εμπλοκή του μαθητή, ενώ οι «δράσεις κλειστής καθοδήγησης» το αντίθετο.

Μη αναμενόμενη σωστή εναλλακτική λύση μαθητή

Προσπαθώντας να αναδείξουμε το πως αλληλεπιδρούν τα συναισθήματα με τις δράσεις διαχείρισης των εντάσεων και την εμπλοκή των μαθητών, παρουσιάζουμε το παρακάτω περιστατικό που περιγράφει την πορεία διαχείρισης της μορφής της έντασης «Σχεδιασμός και Ενάδραση μαθήματος» από την Ε2 (βλ. Διάγραμμα 1). Αυτή η μορφή έντασης εμφανίστηκε και στις δύο εκπαιδευτικούς, ενώ το συγκεκριμένο επεισόδιο επιλέχθηκε ως αντιπροσωπευτικό. Αφορά σε ένα μάθημα γεωμετρίας της Α’ Λυκείου με θέμα το άθροισμα των γωνιών τριγώνου. Κατά την αυτόνομη δουλειά των μαθητών η Ε2 εντοπίζει μια εναλλακτική λύση ενός μαθητή (Μ1), ενώ κατά την συζήτηση στην τάξη αποφασίζει να το αναδείξει, «...επειδή είναι πολύ ωραία... θέλω να την αναδείξω ή επειδή είναι κάτι που δεν έχω σκεφτεί...». Ο Μ1 ξεκινάει να περιγράφει την σκέψη του και η Ε2 την καταγράφει στον πίνακα. Όμως η Ε2 δεν καταλαβαίνει την πορεία σκέψης του, αγχώνεται, και μετά από προτροπή του την παρουσιάζει ο ίδιος στην ολομέλεια.

Μ1: Αν $\hat{B}+\hat{\Gamma}<90° \rightarrow \widehat{B\varepsilon\xi}+\widehat{\Gamma\varepsilon\xi}=360°-\left(\hat{B}+\hat{\Gamma}\right)>360°-90°$.

Ε2: Πως προέκυψε αυτό; (*συνοφρίωση, βλέμμα απορίας, έντονη κίνηση χεριών*)[απορία, ενδιαφέρον, άγχος]

Μ1: Ε; Ναι. Η $\hat{B}+\hat{\Gamma}<90°$, άρα αφαιρώ από τον ίδιο αριθμό κάτι μικρότερο, άρα στο τέλος θα είναι μεγαλύτερο.

Ε2: Μεγαλύτερο. Δηλαδή; (*τρέμουλο φωνής*)[απορία, άγχος]. Άρα είναι μεγαλύτερο;(*συνοφρίωση, τόνος φωνής*)[αβεβαιότητα]. Να το βάλω ίσο;[απορία, αβεβαιότητα]

Μ1: Κυρία να σηκωθώ να το γράψω εγώ;

Ε2: Ναι ναι σήκω για να δούμε τι εννοείς (*χαμόγελο, συνοφρίωση φρυδιών, ανοιγόκλημα ματιών*)[χαρά, απορία, ένταση]

Σύμφωνα με την Ε2:

> Έχω ένταση την ώρα του μαθήματος, επειδή έχω πιάσει τον εαυτό μου ότι όταν δέχεται μία ερώτηση που πάει και ξεφεύγει λίγο από αυτό που έχω σχεδιάσει...εγώ πως να το διαχειριστώ;...έτσι, υπάρχει ένα γκρι σημείο, μια κρίση ας πούμε... ένας κρίσιμος χρόνος που σαν να μπλοκάρει το μυαλό και να προσπαθώ να καταλάβω τι μου είπε και πως θα το... αξιοποιήσω, και τότε μπορεί να μπερδευτώ και να κάνω κάποιο λάθος.

Διάγραμμα 1: Πορεία διαχείρισης της μορφής της έντασης «Σχεδιασμός και Ενάδραση μαθήματος» από την Ε2.

Στην συνέχεια ο Μ1 παρουσιάζει την λύση του στον πίνακα, αιτιολογώντας με επιχειρήματα το κάθε του βήμα. Η Ε2 προσπαθώντας να το κάνει προσβάσιμο και στην υπόλοιπη τάξη, απεύθυνε ερωτήσεις προς όλους. Οι μαθητές επέδειξαν περιορισμένη γνωστική εμπλοκή, ωστόσο υψηλή συμπεριφορική καθώς εξέφραζαν ρητά το ενδιαφέρον τους για την συγκεκριμένη λύση, και επιδείκνυαν προσοχή στον Μ1. Μάλιστα ορισμένοι από τους μαθητές έθεταν ερωτήσεις επεξήγησης στον Μ1, και εκείνος τις εξηγούσε. Μέχρι να ολοκληρωθεί η λύση του Μ1, η Ε2 του θέτει ερωτήσεις εμβάθυνσης, και παρεμβαίνει τμηματικά στην λύση του για να αναδείξει στοιχεία ή να διορθώσει. Τέλος, με την ολοκλήρωση της λύσης του Μ1 η Ε2 αισθάνεται χαρούμενη και έκπληκτη με τον Μ1, κάτι που αναφέρει ρητά στην τάξη. Στο Διάγραμμα 1 παρουσιάζεται η ροή εξέλιξης του περιστατικού: οι δράσεις διαχείρισης της Ε2 (στρογγυλεμένο ορθογώνιο), τα συναισθήματα της Ε2 (στρογγυλεμένο διαγώνιο γωνιακό ορθογώνιο) και η εμπλοκή του Μ1 (γνωστική και συμπεριφορική) (ορθογώνιο). Τα συναισθήματα των εκπαιδευτικών, δρουν παράλληλα με την διαχείριση των εντάσεων, και παρουσιάζονται σε πλαίσιο με διακεκομμένη γραμμή.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας ανέδειξαν κάποιες από τις εντάσεις του πλαισίου των Liljedahl, κ.ά. (2015), καθώς και κάποιες μορφές αυτών στην διδασκαλία, επεκτείνοντάς το. Οι μορφές των εντάσεων που αναδείθηκαν μπορούν να συμβάλλουν στην σύλληψη των ειδών των εντάσεων των εκπαιδευτικών, και να διευκολύνουν την μελέτη τους.

Σχετικά με τα συναισθήματα του εκπαιδευτικού κατά την διαχείριση των εντάσεών του τα αποτελέσματα της έρευνάς μας δείχνουν πως η διαχείριση των εντάσεων συνοδεύεται κυρίως από αρνητικά συναισθήματα, ενισχύοντας την θέση των Pillen, Beijaard και den Brok, (2013). Σύμφωνα με τον Leont'ev (1978) θετικά συναισθήματα αναδύονται όταν πραγματοποιείται το αντικείμενο/κίνητρο, ενώ αρνητικά συναισθήματα αναδύονται όταν αυτό παραμένει εκτός εμβέλειας.

Σχετικά με τις δράσεις διαχείρισης των εκπαιδευτικών και την επίδρασή τους στην εμπλοκή των μαθητών, τα αποτελέσματά μας δείχνουν πως όταν οι εκπαιδευτικοί υιοθετούν διερευνητικές πρακτικές διαχείρισης, οι μαθητές παρουσιάζουν θετική γνωστική και συμπεριφορική εμπλοκή. Από την άλλη, όταν οι εκπαιδευτικοί εφαρμόζουν πιο κλειστές πρακτικές η γνωστική και η συμπεριφορική εμπλοκή των μαθητών περιορίζονται. Αυτό, πιθανόν, να οφείλεται στο ότι η διερευνητική μάθηση υποστηρίζει την εννοιολογική κατανόηση σε μαθήματα μαθηματικών (Capaldi, 2015), γεγονός που ίσως κινητοποιεί του μαθητές να εμπλακούν πιο ενεργά.

Παρόλο που η μελέτη των εντάσεων και των συναισθημάτων των εκπαιδευτικών δεν είναι απαλλαγμένη από περιοριστικούς παράγοντες, συμβάλλει σε διάφορους τομείς της έρευνας στην διδακτική των μαθηματικών, όπως η συναισθηματική διαχείριση καθηγητών και μαθητών κατά την μαθησιακή διαδικασία (βλ. Fried, 2011). Θεωρείται, λοιπόν, χρήσιμη η περαιτέρω διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο επηρεάζονται τα συναισθήματα των μαθητών, και πως αυτά διαμορφώνουν την εμπλοκή τους στην μαθησιακή διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Berry, A. (2007). *Tensions in teaching about teaching: Understanding practice as a teacher educator* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Capaldi, M. (2015). Inquiry-Based Learning in Mathematics. In *Inquiry-Based Learning for Science, Technology, Engineering, and Math (Stem) Programs: A Conceptual and Practical Resource for Educators* (pp. 283-299). Emerald Group Publishing Limited.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63,* 131–147.

Di Martino, P., Coppola, C., Mollo, M., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013). Pre-service primary teachers' emotions: The math-redemption phenomenon. In *PME37 Conference* (Vol. 2, pp. 225-232). PME.

Flyvbjerg, B. (2011). Case Study, in Norman K. Denzin and Yvonna S. Lincoln, eds., *The Sage Handbook of Qualitative Research*, 4th Edition (Thousand Oaks, CA: Sage, 2011), Chapter 17, pp. 301-316.

Fried, L. (2011). Teaching teachers about emotion regulation in the classroom. *Australian Journal of Teacher Education (Online)*, *36*(3), 1.

Hagenauer, G., Hascher, T., & Volet, S. E. (2015). Teacher emotions in the classroom: associations with students' engagement, classroom discipline and the interpersonal teacher-student relationship. *European Journal of Psychology of Education*, *30*(4), 385-403.

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational studies in Mathematics*, *49*(1), 25-46.

Kourti, S.K.(2019). Students' Engagement in Inquiry-based Learning: Cognition, Behavior and Affect. In *CERME11*. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Leont'ev, A. N. (1978). Activity, Consciousness, and Personality. Eaglewood Cliffs: Prentice Hall.

Liljedahl, P., Andrà, C., Di Martino, P., & Rouleau, A. (2015). Teacher tension: Important considerations for understanding teachers' actions, intentions, and professional growth needs. In: K. Beswick, J. Fielding-Wells, & T. Muir (Eds.), *Proceedings of the 39th meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 193-200). Hobart, AU: PME.

Pillen, M. T., Den Brok, P. J., & Beijaard, D. (2013). Profiles and change in beginning teachers' professional identity tensions. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 86-97.

Stouraitis, K., Potari, D., & Skott, J. (2017). Contradictions, dialectical oppositions and shifts in teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 95(2), σσ. 203-217*. doi:10.1007/s10649-017-9749-4

Tomlinson, C.A.(2017). How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms (3rd ed.). *Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.*

ΤΑΞΙΝΟΜΩΝΤΑΣ ΣΗΜΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΟΡΕΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ 12ΧΡΟΝΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Γεωργία Μπαμπάτσικου, **Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης**

Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

mpampats@uth.gr, ttriant@uth.gr

Σε αυτήν την εργασία θα αναλύσουμε τις εννοιολογήσεις τεσσάρων δωδεκάχρονων μαθητών σχετικά με τους λόγους και τις αναλογίες κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων μεγέθυνσης/σμίκρυνσης. Θα παρουσιάσουμε τις μαθησιακές τους πορείες ως αλυσίδες σημασιοδότησης (chains of signification) χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη θεωρίη των Υποθετικών Τροχιών Μάθησης και τη διαδικασία σημείωσης του Peirce. Θα τονίσουμε τις προκλήσεις που αντιμετώπισαν κατά την ανασυγκρότηση των ιδεών τους και θα ταξινομήσουμε τις σημασιοδοτήσεις τους σύμφωνα με τις τάξεις των Σημείων του Peirce.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι Υποθετικές Τροχιές Μάθησης (Hypothetical Learning Trajectories) ή αλλιώς ΥΤΜ, οι οποίες άρχισαν να εμφανίζονται στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης τη δεκαετία του 1990, σκοπό έχουν να περιγράψουν εικασίες για την πιθανή πορεία μάθησης συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών αλλά και τα μέσα που θα υποστηρίξουν και θα οργανώσουν αυτήν την πορεία (Clements & Sarama, 2004). Σύμφωνα με τον Simon, κύριο εκφραστή της θεωρίας των ΥΤΜ, μια ΥΤΜ «περιλαμβάνει έναν μαθησιακό στόχο, μαθησιακές δραστηριότητες, και τον τρόπο που σκέπτονται και μαθαίνουν οι μαθητές εμπλεκόμενοι με αυτές» (1995, σ. 133). Προκειμένου να διαμορφωθεί μία ΥΤΜ συχνά χρειάζεται συλλογή ποσοτικών δεδομένων ευρείας κλίμακας και ταυτόχρονα και ποιοτικών δεδομένων που αναλύουν μια *πορεία μάθησης* (learning progression) σε βάθος. Βασισμένοι στη θεωρία του (κοινωνικού) κονστρουκτιβισμού οι Clements και Sarama (2004) δίνουν έμφαση τόσο στη μάθηση που υπάρχει σε συλλογικό όσο και σε ατομικό επίπεδο. Η μεγαλύτερη πρόκληση στη διαδικασία αυτή είναι η ταυτοποίηση της νοητικής διεργασίας που μπορεί να οδηγήσει προς την έννοια-στόχο (Simon & Tzur, 2004).

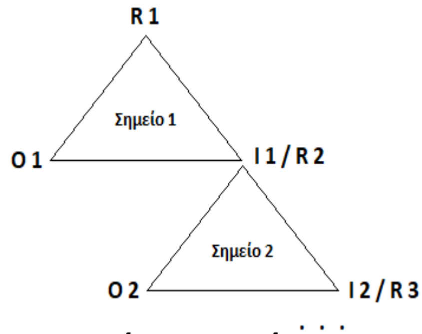
Ένα εργαλείο που μπορεί να βοηθήσει τη θέαση της πορείας μάθησης των μαθητών είναι η σημειωτική ανάλυση, με βάση τη θεωρία του Peirce περί τριαδικότητας του Σημείου. Την ίδια δεκαετία με την εμφάνιση των ΥΤΜ η σημειωτική άρχισε να κερδίζει έδαφος ως αναλυτικό εργαλείο μεταξύ των ερευνητών στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Presmeg *et al.*, 2018, Sáenz-Ludlow & Kadunz, 2016). Η σημειωτική στον πυρήνα της είναι η μελέτη του τρόπου με τον οποίο τα Σημεία έρχονται να σηματο-δοτήσουν, μια θεωρία δηλαδή για τη «σημασιοδότηση» (signification) (Presmeg *et al.,* 2016, σ. 1). Τα Μαθηματικά, ως μια σημαντικά συμβολική πρακτική, απαιτούν μελέτη της φύσης των συστημάτων του Σημείου προκειμένου να κατανοηθούν οι διαδικασίες της διδασκαλίας και της μάθησης (Sáenz-Ludlow, 2006). Την ίδια δεκαετία και πάλι, η έρευνα για την εκπαίδευση των μαθηματικών χαρακτηρίστηκε από την ανάπτυξη θεωρητικών προσεγγίσεων που αναγνώριζαν την κοινωνική προέλευση της γνώσης και της συνειδητότητας. Σε αυτά τα παραδείγματα, η γνώση και η συνειδητότητα θεωρούνται προϊόντα επικοινωνίας ενσωματωμένα σε εμπειρίες που πραγματοποιούνται σε ιστορικά, κοινωνικο-πολιτισμικά και γεωγραφικά προσδιορισμένα πλαίσια (Lerman, 2000). Η γνώση και η εμπειρία, λοιπόν, είναι συγκατασκευασμένες και συνδιαμορφωμένες. Καθώς αυτή η διαδικασία είναι γεμάτη με Σημεία, η σημειωτική μπορεί να διασαφηνίσει την παραγωγή μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές, καθώς και τη διαμόρφωση πλαισίων που υποστηρίζουν την επαφή των μαθητών με το μαθηματικό περιεχόμενο και τις πρακτικές.

Στην εργασία μας θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των Σημείων του Peirce προκειμένου να αναλύσουμε την εξέλιξη ιδεών τεσσάρων μαθητών ηλικίας δώδεκα ετών σχετικά με τους λόγους και τις αναλογίες, συμμετέχοντας οι ίδιοι σε μια σειρά διεπιστημονικών έργων βασισμένων στην αρχή της *pinhole camera*. Σε αντίθεση με τον ισχυρισμό άλλων σημειωτιστών για την ουσιώδη δυαδική δομή μεταξύ «σημαίνοντος» και «σημαινομένου», ο Peirce πρότεινε ότι ένα Σημείο σημασιοδοτεί μόνο όταν ερμηνεύεται στο μυαλό κάποιου. Ισχυρίστηκε την ύπαρξη τριαδικής δομής του Σημείου για τη διαδικασία της σημείωσης, με τη δομή αυτή να αποτελείται από το Σημείο ή Αντιπροσωπεύον (Sign ή Representamen), το Αντικείμενο (Object) και το Ερμήνευμα (Interpretant) [1]. Το Ερμήνευμα, το πιο καινοτόμο χαρακτηριστικό στοιχείο της θεωρίας του Peirce για τη σημείωση, αναφέρεται στην ερμηνεία και τη φύση της σχέσης Αντιπροσωπεύοντος και Αντικειμένου, δηλαδή «σημαίνοντος» και «σημαινομένου». Το Ερμήνευμα, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει ένα νέο Σημείο, μετατοπίζοντας έτσι δυνητικά τη διαδικασία σημασιοδότησης προς ένα υψηλότερο επίπεδο ερμηνείας και γενίκευσης (Sáenz-Ludlow & Kadunz, 2016).

Τα Σημεία, καθώς μετατρέπονται σε πιο ώριμες σκέψεις, παίρνουν τη μορφή νέας γνώσης μέσα από αλυσίδες σημασιοδότησης. Αυτές οι αλυσίδες αντικατοπτρίζουν πορείες μάθησης, δηλαδή βιωμένα κομμάτια μιας Υποθετικής Τροχιάς Μάθησης. Οι δέκα τάξεις Σημείων του Peirce προτείνουμε ότι μπορούν να αποτελέσουν εργαλείο για την αποδόμηση και ταξινόμηση των σημασιοδοτήσεων των μαθητών από ερευνητές και εκπαιδευτικούς. Στην εργασία μας θα παρουσιάσουμε το εργαλείο που προτείνουμε καθώς και την ταξινόμηση σημασιοδοτήσεων μαθητών όπως την εφαρμόσαμε σε μια έρευνα για τους λόγους και τις αναλογίες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Παρόλο που είχε προτείνει διάφορους ορισμούς, ο Peirce οριοθέτησε ένα Σημείο ως «*κάτι που καθορίζεται από κάτι άλλο, το οποίο ονομάζεται Αντικείμενό του, και έτσι καθορίζει ένα αποτέλεσμα για ένα άτομο, το οποίο λέγεται Ερμήνευμά του, το οποίο ως εκ τούτου καθορίζεται μεσολαβητικά από αυτόν που το κατασκευάζει*» (Peirce, 1998, σ. 478). Το Ερμήνευμα, που έρχεται ως το πιο πρωτοποριακό χαρακτηριστικό της θεωρίας του Peirce, αναφέρεται στην κατανόηση που έχουμε για τη σχέση Αντιπροσωπεύοντος και Αντικειμένου. Σύμφωνα με τον Peirce, η σημασιοδότηση δεν καθορίζεται από μια δυαδική σχέση, καθώς το Σημείο φτάνει να σημαίνει μόνο όταν ερμηνεύεται στο μυαλό κάποιου. Το Ερμήνευμα δεν αναφέρεται στον χρήστη, αλλά στην ερμηνεία, την έννοια που παράγεται για έναν χρήστη (Atkin, 2013).



Εικόνα 1: Η αέναη διαδικασία της σημείωσης

Η σημασία του Ερμηνεύματος είναι σαφώς ορατή στη διαδικασία της σημείωσης, στην οποία τα Σημεία μετατρέπονται σε άλλες σκέψεις που είναι πιο ώριμες και γίνονται ένα είδος γνώσης. Όταν δημιουργείται η σχέση ενός O1, ενός R1 και ενός I1, το I1 μετατρέπεται δυνητικά σε ένα R2 για ένα νέο O2 και να προσδιορίσει ένα νέο και πιο εξελιγμένο I2, και ούτω καθεξής (βλ. Εικ. 1). Η εννοιολογική διαδικασία της σημείωσης είναι θεωρητικά αέναη, καθώς η αλυσίδα της δημιουργίας νοημάτων συνεχίζει σε νέα Σημεία ερμηνεύοντας κάποιο προηγούμενο Σημείο ή σύνολο Σημείων. Ωστόσο, στην πράξη αυτή η διαδικασία περιορίζεται από τη δύναμη της συνήθειας (Parker, 1998).

Ο Peirce πρότεινε ότι κάθε ένα από τα τρία αλληλένδετα συστατικά ενός Σημείου μπορεί να τριχοτομηθεί. Στην *πρώτη τριχοτόμηση* τα Σημεία μπορούν να ταξινομηθούν, βάσει της σχέσης με το Αντιπροσωπεύον, ως Ποιόσημο (Qualisign), Μονόσημο (Sinsign), και Νομόσημο (Legisign), καθώς τα Αντιπροσωπεύοντα σημαίνουν τα Αντικείμενά τους όχι ως προς όλα τα χαρακτηριστικά τους, αλλά βάσει ιδιοτήτων, αιτιακών σχέσεων ή συμβάσεων/νόμων, αντίστοιχα. Το Αντιπροσωπεύον είναι η μορφή με την οποία εμφανίζεται το Σημείο, όπως για παράδειγμα η προφορική ή γραπτή μορφή μιας λέξης, ενώ το Σημείο είναι το σύνολο του νοήματος που εκφράζει η τριαδικότητα. Στη *δεύτερη τριχοτόμηση,* εάν το Σημείο καθορίζει το Αντικείμενό του βάσει των ποιοτικών χαρακτηριστικών, των αιτιακών σχέσεων ή των συμβάσεων/νόμων, τότε χαρακτηρίζεται ως Ομοίωμα (Icon), Δείκτης (Index), ή Σύμβολο (Symbol), αντίστοιχα. Το Ομοίωμα είναι ενστικτωδώς οικείο, καθώς σε αυτό εντάσσονται οι ζωγραφιές, τα σχέδια, και τα διαγράμματα. Οι Δείκτες μπορούν να περιλαμβάνουν δάχτυλα που δείχνουν προς κάτι ή κάπου και κατάλληλα ονόματα, ενώ τα Σύμβολα περιλαμβάνουν ευρείες εκφράσεις λόγου, όπως ισχυρισμούς και εκτιμήσεις. Τέλος, ο Peirce πρότεινε ότι τα Σημεία μπορούν να ταξινομηθούν βάσει της σχέσης τους με το Ερμήνευμά τους. Σε αυτήν την *τρίτη τριχοτόμηση*, εάν το Σημείο καθορίζει ένα Ερμήνευμα εστιάζοντας στα ποιοτικά χαρακτηριστικά του Αντικειμένου, στις αιτιακές σχέσεις ή στις συμβάσεις/νόμους, τότε χαρακτηρίζεται ως Ρήμα (Rheme), Λεκτόσημο (Dicent), ή Δήλωμα (Delome), αντίστοιχα (Atkin, 2013; Freadman, 1996).

Οι τρεις προαναφερθείσες τριχοτομήσεις παράγουν συνδυασμούς οι οποίοι ονομάζονται «τάξεις». Για να ταξινομήσουμε ένα Σημείο σε αυτές τις τάξεις, θα πρέπει να αναρωτηθούμε: 1) ποια είναι η σχέση του Σημείου με τον εαυτό του (1η τριχοτόμηση), 2) ποια είναι η σχέση μεταξύ του Σημείου και του Αντικειμένου του (2η τριχοτόμηση) και 3) ποια είναι η σχέση μεταξύ του Σημείου και του Αντικειμένου του για το Ερμήνευμά του (3η τριχοτόμηση). Το είδος της σχέσης που απαντά στην πρώτη ερώτηση επηρεάζει το δεύτερο είδος, το οποίο με τη σειρά του επηρεάζει το τρίτο. Μόλις χαρακτηρίσουμε ένα Αντιπροσωπεύον ως, για παράδειγμα, Ποιόσημο, δηλαδή στο πρώτο επίπεδο της πρώτης τριχοτόμησης, η σχέση του Σημείου με το Αντικείμενο και το Ερμήνευμά του στη δεύτερη και τρίτη τριχοτόμηση πρέπει να βρίσκεται στο πρώτο επίπεδο επίσης, καθώς το Σημείο δεν μπορεί να σχετίζεται με ένα Αντικείμενο και ένα Ερμήνευμα ανώτερου επιπέδου. Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτούς τους περιορισμούς, οι τάξεις των Σημείων είναι δέκα (βλ. Πίνακα 1).

	Σημείο ≡ R, O, I
I	Ποιόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα
II	Μονόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα
III	Μονόσημο, Δείκτης, Ρήμα
IV	Μονόσημο, Δείκτης, Λεκτόσημο
V	Νομόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα
VI	Νομόσημο, Δείκτης, Ρήμα
VII	Νομόσημο, Δείκτης, Λεκτόσημο
VIII	Νομόσημο, Σύμβολο, Ρήμα
IX	Νομόσημο, Σύμβολο, Λεκτόσημο
X	Νομόσημο, Σύμβολο, Δήλωμα

Πίνακας 1: Οι Τάξεις του Peirce

Παρόλο που οι τάξεις συνδέονται ιεραρχικά, κάθε σύνδεσμος στην αλυσίδα της σημασιοδότησης δεν αποτελεί αναγκαστικά ένα πιο ώριμο εννοιολογικό κατασκεύασμα από εκείνο των προηγούμενων δεσμών της αλυσίδας. Συνεπώς, στο ανώτατο επίπεδο του Αντιπροσωπεύοντος, το Ερμήνευμα μπορεί να είναι ένα Ρήμα (τάξεις V, VI και VIII). Σημεία αυτού του είδους εμφανίζονται συχνά στην τάξη όπου διδάσκονται τα μαθηματικά, καθώς οι μαθητές μπορεί να είναι μεν εξοικειωμένοι με αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών, αλλά οι ερμηνείες τους σχετικά με αυτές μπορεί να παραμένουν ασαφείς ή να περιορίζονται σε αυτές καθαυτές τις αναπαραστάσεις. Η αλυσίδα της σημείωσης, όπως την περιγράψαμε στην αρχή αυτής της ενότητας, μαζί με τις τάξεις των Σημείων του Peirce, μπορεί να μας επιτρέψει να αναλύσουμε τη συνοχή των σημασιοδοτήσεων των μαθητών σχετικά με πολύπλοκες έννοιες (Sáenz-Ludlow, 2003), όπως αυτές των λόγων και των αναλογιών που θα δούμε στη συνέχεια.

ΕΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΓΙΑ ΛΟΓΟΥΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Εφαρμόσαμε τη θεωρία που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα σε ένα σύνολο δεδομένων που παράχθηκε από μια ερευνητική μελέτη που στόχευε να αναδείξει τις ιδέες των μαθητών σχετικά με τους λόγους και τις αναλογίες στη γεωμετρία. Οι ιδέες των μαθητών σχετικά με αυτές τις έννοιες αναδείχθηκαν μέσω της συμμετοχής τους σε μια σειρά από έργα που ήταν μέρος ενός διεπιστημονικού διδακτικού πειράματος. Συγκεκριμένα, θέλαμε να διερευνήσουμε: α) ποιες είναι οι σημασιοδοτήσεις μαθητών δώδεκα ετών σχετικά με τους λόγους και τις αναλογίες που σχετίζονται με τα γεωμετρικά σχήματα; και β) πώς θα μπορούσαν να τροποποιηθούν οι σημασιοδοτήσεις μέσω της συμμετοχής τους σε μια σειρά διεπιστημονικών έργων. Σύμφωνα με την Lamon (1993), οι τύποι προβλημάτων λόγων και αναλογιών στη γεωμετρία δυσκολεύουν τους μαθητές ως προς την αναγνώριση της πολλαπλασιαστικής δομής τους. Οι συνηθέστερες στρατηγικές χωρίζονται στις *μη εποικοδομητικές στρατηγικές* της «αποφυγής», της «οπτικής ή προσθετικής στρατηγικής» και της «κατασκευής μοτίβου», και στις *εποικοδομητικές στρατηγικές* της «προ-αναλογικής συλλογιστικής», της «ποιοτικής αναλογικής συλλογιστικής» και της «ποσοτικής αναλογικής συλλογιστικής». Η κυρίαρχη στρατηγική είναι η «οπτική ή προσθετική στρατηγική», που καταδεικνύει και τη δυσκολία τους να αναγνωρίσουν την πολλαπλασιαστική δομή (Lamon, 1993).

Οι μαθητές που συμμετείχαν εργάστηκαν σε ζευγάρια σε πέντε συνεδρίες 90 λεπτών η καθεμία, σε διάστημα 3 εβδομάδων. Στην παρουσίασή μας θα συζητήσουμε τις σημασιοδοτήσεις τεσσάρων μαθητών που συμμετείχαν στο διδακτικό πείραμα. Οι δραστηριότητες που διαμορφώσαμε για το διδακτικό πείραμα βασίστηκαν σε μία πειραματική διάταξη που ακολουθούσε την αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός. Χρησιμοποιήσαμε τη διάταξη αυτή για να πραγματευτούμε με μη τυπικό τρόπο τις έννοιες των πολλαπλασιαστικών σχέσεων, των εσωτερικών και εξωτερικών λόγων, και να συνδέσουμε τα κλάσματα και την κλίμακα με τους λόγους και τις αναλογίες. Τα ερευνητικά δεδομένα αποτελούνταν από τις σημειώσεις πεδίου της ερευνήτριας-δασκάλας (πρώτος συγγραφέας), τις σημειώσεις πεδίου ενός «μη συμμετέχοντος» παρατηρητή, τις απομαγνητοφωνημένες ηχογραφήσεις κάθε ζεύγους και της ολομέλειας, καθώς και τις γραπτές εργασίες των μαθητών. Η τριγωνοποίηση αυτή εξασφαλίζει την εγκυρότητα της έρευνας. Η αξιοπιστία εξασφαλίζεται με την αναλυτική περιγραφή των ερμηνειών των Σημείων, την παράθεση στις παρενθέσεις της αιτιολόγησης των επιλογών μας, όπως επίσης και μέσω της συμφωνίας τριών συνεργατών για τις ταξινομήσεις των Σημείων (Ίσαρη & Πουρκός, 2015).

Στα έργα της διαγνωστικής αξιολόγησης, η οποία ήταν σιωπηλή και ατομική, ζητήσαμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τους γονείς του Τριγωνοψαρούλη, το σώμα και η ουρά του οποίου ήταν ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα διαφορετικού μεγέθους. Η μόνη κατεύθυνση που δώσαμε στους μαθητές ήταν ότι οι γονείς έπρεπε να είναι όμοιοι με το αγόρι, αλλά μεγαλύτεροι. Στη δεύτερη συνεδρία ζητήσαμε από τους μαθητές να βρουν τη σχέση ανάμεσα σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα που ήταν όμοια. Οι μαθητές γνώριζαν μόνο ότι ένα από τα ορθογώνια ήταν μεγαλύτερο σε μέγεθος από το άλλο. Στην τρίτη συνεδρία, σε μία από τις εργασίες, δώσαμε στους μαθητές μια σειρά από ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαφόρων μεγεθών και τους ζητήσαμε να βρουν ποια από αυτά ήταν όμοια. Στην τέταρτη συνάντηση, δώσαμε στους μαθητές ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (7×3 εκ.) και τους ζητήσαμε να σχεδιάσουν ένα όμοιο, γνωρίζοντας μόνο το μήκος μιας από τις πλευρές του (11,2 εκ.). Στην τελική αξιολόγηση, η οποία ήταν ατομική όπως η διαγνωστική, αναζητούσαμε αν οι μαθητές μπορούσαν να γενικεύσουν και να μεταφέρουν τις σημασιοδοτήσεις τους πραγματευόμενοι όμοια κανονικά εξάγωνα.

ΤΑΞΙΝΟΜΩΝΤΑΣ ΣΗΜΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΟΡΕΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα παρουσιάσουμε απόσπασμα από τη δεύτερη συνάντηση, όπου οι τέσσερις μαθητές μέτρησαν αυθόρμητα τα μήκη των πλευρών των όμοιων ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Στις παρενθέσεις ταξινομούμε καθένα στοιχείο του Σημείου, σε καθεμία από τις τριχοτομήσεις, όπως τα παρουσιάσαμε στην ενότητα της θεωρίας. Στο τέλος, συνοψίζουμε στον Πίνακα 2 τα Σημεία των μαθητών, σε ποιους αντιστοιχούν, όπως επίσης και τις αριθμημένες τάξεις των Σημείων προκειμένου να φανεί κατά πόσο η μαθησιακή πορεία οδηγεί σε βελτιωμένες νοηματοδοτήσεις. Η Ελένη και ο Βασίλης πρότειναν να «βρουν τη διαφορά μεταξύ τους» (*Ποιόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα· το Σημείο ερμηνεύεται από τον μαθητή ως να είναι της ίδιας φύσης και ποιότητας με το Αντιπροσωπεύον, με O2: την πολλαπλασιαστική δομή των προβλημάτων μεγέθυνσης/σμίκρυνσης, R2: την προφορική πρόταση, I2a: τη σχέση μεταξύ των δύο όμοιων ορθογωνίων παραλληλογράμμων μπορεί να εκφραστεί με αφαίρεση των μηκών τους*). Ο Γιώργος, ο οποίος κατά τη διαγνωστική αξιολόγηση είχε χρησιμοποιήσει πολλαπλασιαστική στρατηγική για να σχεδιάσει τον έναν γονέα και την οπτική/προσθετική για τον άλλον, διαφώνησε με την Ελένη λέγοντας ότι «θα κάνουμε διαίρεση για να βρούμε πόσο πολλαπλάσιο είναι» (*Μονόσημο, Δείκτης, Ρήμα· το Σημείο ερμηνεύεται από τον μαθητή ως δυνητικά να στέκεται αντ' αυτού για έναν άλλο δείκτη-αίτιο, με O2: την πολλαπλασιαστική δομή των προβλημάτων μεγέθυνσης/σμίκρυνσης, R2: την προφορική πρόταση, I2b: η διαίρεση σχετίζεται με τους λόγους και τις αναλογίες*). Σε αυτή τη φάση, ο Πέτρος, ο οποίος είχε χρησιμοποιήσει πολλαπλασιαστική στρατηγική για τον σχεδιασμό και των δύο γονέων, διαφώνησε λέγοντας ότι «αφού λέμε διπλάσιο τριπλάσιο, έχουμε πολλαπλασιασμό» (*Νομόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα· είναι ένας τύπος/νόμος, μια κανονικότητα που ερμηνεύεται από τον μαθητή ως δυνητικά να στέκεται αντ' αυτού για το Αντικείμενο-έννοια, με O2: την πολλαπλασιαστική δομή των προβλημάτων μεγέθυνσης/σμίκρυνσης, R2: την προφορική πρόταση, I2c: ο πολλαπλασιασμός σχετίζεται με τους λόγους και τις αναλογίες*). Επωφελούμενη από αυτές τις δηλώσεις, η ερευνήτρια πρότεινε να δοκιμάσουν και τις δύο ιδέες, την αφαίρεση και τη διαίρεση. Στην πρώτη προσπάθειά τους, αφού ολοκλήρωσαν τις αφαιρέσεις, δεν κατέληξαν σε ένα συμπέρασμα σχετικά με τη σχέση μεταξύ των δύο όμοιων σχημάτων. Στη δεύτερη προσπάθειά τους, αντί για πολλαπλασιασμό, που σχετίζεται άμεσα με την πολλαπλασιαστική στρατηγική, οι μαθητές αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν τη διαίρεση, διαιρώντας το μεγαλύτερο με τον μικρότερο αριθμό. Έχοντας παρατηρήσει οι τέσσερις μαθητές ότι τα δύο πηλίκα ήταν ίσα όταν τα στρογγυλοποίησαν στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι μέσω της διαίρεσης μπορούμε να διαπιστώσουμε εάν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι όμοια.

Στη διαγνωστική αξιολόγηση μόνο ο Πέτρος χρησιμοποίησε σταθερά πολλαπλασιαστική στρατηγική, ενώ οι υπόλοιποι τρεις χρησιμοποίησαν την προσθετική στρατηγική ως ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική. Στις διδακτικές συναντήσεις που ακολούθησαν, έγινε φανερό ότι οι μαθητές συνδιαλέγονταν για να υποστηρίξουν τις σημασιοδοτήσεις τους, με αποτέλεσμα ορισμένοι να οικοδομήσουν σταδιακά σημασιοδοτήσεις που εμπίπτουν σε ανώτερα επίπεδα των τάξεων του Peirce. Στην τελική συνάντηση κατάφεραν να μεταφέρουν, ως ένα βαθμό, τις γνώσεις τους σε ένα νέο πλαίσιο. Η ανάπτυξη των σημασιοδοτήσεων των μαθητών για τα Αντικείμενα (οι λόγοι και οι αναλογίες καθώς και οι μαθηματικές έννοιες που εντάσσονται στην Τροχιά Μάθησης ως προαπαιτούμενα για την κατανόησή τους) ήταν τα Σημεία που συνκατασκεύαζαν οι μαθητές. Η ταξινόμηση των Σημείων των αλυσίδων σημασιοδότησης από τις πορείες μάθησης των μαθητών, βάσει των τάξεων του Peirce, φαίνεται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 2.

Φάσεις Διδακτικού Πειράματος	**Τα Σημεία των μαθητών βάσει των 10 τάξεων του Peirce**	
1η: διαγνωστική αξιολόγηση εννοιών - ατομικές δραστηριότητες	- Ποιόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα (I) - Μονόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα (II)	- Βασίλης, Γιώργος, Ελένη - Πέτρος
2η: διατήρηση ιδιοτήτων σχήματος - επίλυση προβλημάτων μεγέθυνσης/σμίκρυνσης	- Ποιόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα (I) - Μονόσημο, Δείκτης, Ρήμα (III) - Νομόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα (V)	- Βασίλης, Ελένη - Γιώργος - Πέτρος
3η: ανάδειξη πολλαπλασιαστικής σκέψης	- Νομόσημο, Ομοίωμα, Ρήμα (V) - Νομόσημο, Δείκτης, Ρήμα (VI)	- Βασίλης, Γιώργος, Ελένη - Πέτρος
4η: ενίσχυση πολλαπλασιαστικής σκέψης με όμοια σχήματα, εσωτερικοί & εξωτερικοί λόγοι, σύνδεση διαίρεσης & κλασμάτων, χρήση ορολογίας, ρόλος αριθμητή & παρονομαστή, κλίμακα χαρτών	- Νομόσημο, Σύμβολο, Ρήμα (VIII) - Νομόσημο, Σύμβολο, Δήλωμα (X) - Νομόσημο, Σύμβολο, Ρήμα (VIII)	- Βασίλης, Γιώργος, Ελένη, Πέτρος στην ολομέλεια - Γιώργος, Πέτρος - Βασίλης, Γιώργος, Ελένη, Πέτρος στην ολομέλεια
5η: τελική αξιολόγηση εννοιών - ατομικές δραστηριότητες	- Νομόσημο, Σύμβολο, Λεκτόσημο (IX)	- Βασίλης, Γιώργος, Ελένη, Πέτρος

Πίνακας 2: Ταξινόμηση των Σημείων από τις πορείες μάθησης

ΑΝΤΙ ΕΠΙΛΟΓΟΥ

Καθώς η διαδικασία μάθησης επηρεάζεται από παράγοντες όπως οι σημασιοδοτήσεις των μαθητών, η αλληλεπίδραση μεταξύ τους, το πλαίσιο, τα έργα, οι εμπλεκόμενες αναπαραστάσεις κ.λπ., αυτό την καθιστά «ρευστή» και αέναη, χωρίς να είναι πλήρως ευθύγραμμη ή αποκλειστικά ατομική. Αντίθετα, περιλαμβάνει σημασιοδοτήσεις που συνδέονται μεταξύ τους *γραμμικά* και *κατακόρυφα*, ως προς τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών που αφορούν μια ΥΤΜ, αλλά και *οριζόντια,* διαμορφώνοντας ένα δίκτυο σχέσεων μεταξύ των σημασιοδοτήσεων αυτών. Συνεπώς, προτείνουμε ότι οι σημασιοδοτήσεις που συγκατασκευάζουν οι μαθητές σε μια μαθησιακή πορεία, και κατ' επέκταση σε ένα μέρος μιας ΥΤΜ, μπορούν να εξεικονιστούν μέσω της *αλυσίδας της σημείωσης* και της *τριαδικότητας των Σημείων* του Peirce συνδυαστικά με τα *μαθησιακά σύννεφα* (learning clouds) των Thompson *et al.* (2014). Σύμφωνα με τους Thompson *et al.* (2014), τα *σύννεφα* είναι «ένας τρόπος να σκεφτόμαστε το σχήμα της εξέλιξης των βασικών μαθηματικών ιδεών». Στη διαδικασία αυτή, σημαντική είναι, επίσης, η συνήθεια δράσης ή σκέψης που δημιουργείται στον κάθε ερμηνευτή, προκειμένου να καταστήσει σαφείς τις ιδέες του και η οποία καθοδηγεί τις μελλοντικές ενέργειες (Triandafillidis, 2002).

Η συνεισφορά της παρουσίασης μας έγκειται στην πρόταση χρήσης ενός εργαλείου που θα βοηθά τον ερευνητή και τον εκπαιδευτικό να προσδιορίζουν άμεσα τα Σημεία των μαθητών σε μία μαθησιακή πορεία, τις σημασιοδοτήσεις τους για τις εμπλεκόμενες έννοιες σε μία ΥΤΜ, το βαθμό στον οποίο εξοικειώνονται οι μαθητές με τις έννοιες αυτές, καθώς επίσης και να λαμβάνουν αποφάσεις ώστε να βοηθούν τους μαθητές να μεταβαίνουν σε ανώτερες τάξεις κατά την ταξινομία του Peirce. Με άλλα λόγια, μπορεί να βοηθήσει έναν ερευνητή ή δάσκαλο ώστε να συνειδητοποιήσει τα σημεία καμπής στις μαθησιακές πορείες των μαθητών και την απόσταση ενός Σημείου ενός μαθητή από τους μαθηματικούς στόχους που έχει θέσει, καθώς και να λάβει τα κατάλληλα εκπαιδευτικά μέτρα για να υποστηρίξει την κατασκευή Σημείων που θα είναι πιο ώριμα και πιο συναφή με τις μαθηματικές ιδέες.

1. Για συντομία όπου R, O, I, θα συμβολίζουμε τα Representamen, Object και Interpretant, αντίστοιχα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Atkin, A. (2013). Peirce's Theory of Signs. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2013 Edition). Retrieved from https://plato.stanford.edu/archives/sum2013/entries/peirce-semiotics/

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81–89.

Freadman, A. (1996). Peirce's second classification of signs. In V. M. Colapietro & T. M. Olshewsky (Eds.), *Peirce's Doctrine of Signs: Theory, Applications, and Connections* (pp.143-159). Berlin: Mouton de Gruyter.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in mathematics education, 24*, 41-61.

Lerman, S. (2000). The Social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Westport, CT: Ablex Publishing.

Parker, K. (1998). *The Continuity of Peirce's Thought*. Nashville: Vanderbilt University Press.

Peirce, C. S. (1998). *The Essential Peirce* (Vol. 2). (Eds.) Peirce edition Project. Bloomington I.N.: Indiana University Press.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, WM., & Kadunz, G. (2016). Introduction: What is semiotics and why is it important for mathematics education?. In: Semiotics in Mathematics Education. ICME-13 Topical Surveys. Cham: Springer.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, WM., & Kadunz, G. (2018). *Signs of signification: Semiotics in mathematics education research.* Cham: Springer.

Sáenz-Ludlow, A. (2003). A collective chain of signification in conceptualizing fractions. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 181-211.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Learning Mathematics: Increasing the Value of Initial Mathematical Wealth. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, (Esp), 225-245.

Sáenz-Ludlow, A., & Kadunz, G. (2016). Constructing knowledge seen as a semiotic activity. In A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Eds.), Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts (pp. 1-21). The Netherlands: Sense Publishers.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114–145.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 91–104.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In L. P. Steffe, K. C. Moore, L. L. Hatfield & S. Belbase (Eds.), *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing* (pp. 1-24). Laramie, WY: University of Wyoming.

Triandafillidis, T. A. (2002). "On "How to make our ideas clear": a pragmaticist critique of explication in the mathematics classroom', *For the Learning of Mathematics, 22*(3), 2-9.

Ίσαρη, Φ., Πουρκός, Μ. (2015). *Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας. Εφαρμογές στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση.* Αθήνα: Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΓΝΩΣΤΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μαρία Μπεμπένη*, Σταυρούλα Πουλοπούλου**, Ξένια Βαμβακούση*

*Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, **Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

mbempeni@cc.uoi.gr, spoulopo@gmail.com, xvamvak@uoi.gr

Στην παρούσα μελέτη, ελέγξαμε τις υποθέσεις ότι α) υπάρχουν ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα και οι διαφορές αυτές παραμένουν ακόμη και στις τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου, β) οι διαφορές αυτές εξηγούνται από διαφορές στη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών (επιφανειακή/βαθιά προσέγγιση). Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 463 μαθητές της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές όσον αφορά τα δύο είδη γνώσης και ότι οι μαθητές με προχωρημένη εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα κλάσματα παρουσιάζουν στοιχεία βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η διάκριση ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση, παρά την κριτική που έχει δεχτεί, παραμένει χρήσιμη στην έρευνα για τη μάθηση των μαθηματικών (Star & Stylianides, 2013; Vamvakoussi, Bempeni, Poulopoulou, & Tsiplaki, 2019). Ως διαδικαστική ορίζεται η γνώση διαδικασιών αλγοριθμικού τύπου, ενώ, ως εννοιολογική, η γνώση για τις έννοιες σε ένα γνωστικό πεδίο (Rittle-Johnson & Schneider, 2015), όπου με τον όρο «έννοιες» αναφερόμαστε σε κατηγορίες (μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και διεργασίες, Vamvakoussi et al., 2019).

Το επικρατούν μοντέλο για τη σχέση ανάμεσα στα δύο είδης γνώσης είναι το μοντέλο της Rittle-Johnson και των συνεργατών της (π.χ. Rittle-Johnson & Schneider, 2015) που υποθέτει ότι η σχέση αυτή είναι αμφίδρομη και διαρκής, με το ένα είδος να προκαλεί αύξηση στο άλλο είδος, και το άλλο είδος βελτιωμένο, με τη σειρά του, να αναπτύσσει το πρώτο είδος γνώσης. Βέβαια, το μοντέλο αυτό αδυνατεί να εξηγήσει τα ευρήματα ερευνών που εντοπίζουν μεγάλες, ακόμα και ακραίες, διαφορές ανάμεσα στα δύο είδη γνώσης, ακόμη και σε παιδιά προχωρημένων τάξεων (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Πολλοί ερευνητές αποδίδουν την αδυναμία αυτή του επαναληπτικού μοντέλου στο γεγονός ότι δε λαμβάνει υπόψη τις ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές αναπτύσσουν τα δύο είδη γνώσης (Gilmore & Bryant, 2006; Hallett, Nunes,, & Bryant, 2010; Hallett, Nunes, & Byrnes, 2012). Οι Hallett και συν. (2010; 2012) ερεύνησαν το ζήτημα αυτό στο πεδίο των κλασμάτων και ταυτοποίησαν διαφορετικές ομάδες μαθητών (4η, 5η, 6η και 8η τάξη), μεταξύ αυτών και δύο ομάδες μαθητών με πιο ανεπτυγμένο το ένα είδος γνώσης (είτε εννοιολογικής, είτε διαδικαστικής) απ' ότι θα προβλεπόταν με βάση το άλλο.

Τελευταία έχουν γίνει κάποιες προσπάθειες για να εξηγηθούν σε ποιους παράγοντες μπορούν να αποδοθούν αυτές οι ατομικές διαφορές, όπως για παράδειγμα σε διαφορές όσον αφορά την προϋπάρχουσα γνώση σε ένα πεδίο

(Schneider, Rittle-Johnson, & Star, 2011), τα γνωστικά προφίλ των παιδιών (Gilmore & Bryant, 2008; Hallett et al., 2012), ή τη σχολική τους εμπειρία (Canobi, 2004; Gilmore & Bryant, 2006; Hallett et al. 2012). Ωστόσο, μέχρι στιγμής δεν υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που να τεκμηριώνουν το ρόλο των παραμέτρων αυτών. Πράγματι, οι Schneider και συνεργάτες (2011) δε βρήκαν την προσδοκώμενη διαφοροποίηση στη συσχέτιση των δύο ειδών γνώσης, ανάλογα με τα επίπεδα της προϋπάρχουσας γνώσης στο πεδίο της επίλυσης εξισώσεων. Οι Hallett et al. (2012) επίσης δεν εντόπισαν συσχέτιση της γενικής διαδικαστικής, και εννοιολογικής ικανότητας με τις διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα. Όσον αφορά τη σχολική εμπειρία, διαφορετικοί ερευνητές κατά καιρούς έχουν επιχειρήσει να μετρήσουν διάφορα κατασκευάσματα ως σχολική εμπειρία. Για παράδειγμα, η Canobi (2004) ποσοτικοποίησε τη σχολική εμπειρία, ταυτίζοντάς την με τα χρόνια τυπικής εκπαίδευσης (στην ουσία, σε ποια σχολική τάξη βρίσκεται ο μαθητής). Τα αποτελέσματα της έρευνάς της έδειξαν ότι όσο μεγάλωνε η τάξη η διαδικαστική γνώση στην πρόσθεση και την αφαίρεση αριθμών βελτιωνόταν, ενώ δε συνέβαινε το ίδιο με την εννοιολογική γνώση. Οι Hallett et al. (2012), από την άλλη, μέτρησαν τη σχολική εμπειρία μέσω του σχολείου φοίτησης των συμμετεχόντων. Πιο συγκεκριμένα, εξέτασαν αν η φοίτηση σε διαφορετικά σχολεία μπορούσε να εξηγήσει τις ατομικές διαφορές στα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα, αλλά δεν βρήκαν τέτοια σχέση.

Σε προηγούμενη ποιοτική έρευνα μας, υποθέσαμε ότι ένας παράγοντας που ενδεχομένως εξηγεί τις ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα είναι η προσέγγιση στη μάθηση και μελέτη των μαθηματικών (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Αξιοποιήσαμε την επικρατέστερη διάκριση, αυτή της επιφανειακής έναντι της βαθιάς προσέγγισης, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στην τριτοβάθμια εκπαίδευση για να περιγράψει τις ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν τη μάθηση του αντικειμένου (Entwistle & McCune, 2004). Η επιφανειακή προσέγγιση (surface approach) σχετίζεται με την πρόθεση του υποκειμένου να μπορεί να αναπαραγάγει το περιεχόμενο, όταν του ζητηθεί. Αντίθετα, η βαθιά προσέγγιση (deep approach) στη μάθηση συνδέεται με την πρόθεση του υποκειμένου να κατανοήσει το αντικείμενο της μάθησης. Η προσέγγιση στη μάθηση θεωρείται πολυδιάστατο κατασκεύασμα και υπάρχει μεγάλη συζήτηση σχετικά με τις διαστάσεις της, αλλά και τους τρόπους μέτρησής τους, (Entwistle & McCune, 2004).

Εξετάσαμε ως προς το είδος της προσέγγισης στη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών τρία παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου, με διαφορετικό προφίλ όσον αφορά την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα, (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Το ένα από αυτά τα παιδιά είχε ισχυρή εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, το δεύτερο είχε εξαιρετική εννοιολογική, αλλά πολύ φτωχή διαδικαστική γνώση και το τρίτο είχε εξαιρετική διαδικαστική, αλλά πρακτικά καθόλου εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα. Τα δύο τελευταία παιδιά, δηλαδή, ήταν δύο ακραίες περιπτώσεις όσον αφορά τη διαφορά ανάμεσα στα δύο είδη γνώσης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα δύο πρώτα παιδιά με την ισχυρή εννοιολογική γνώση είχαν κοινά στοιχεία βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση και τη μελέτη των δύο παιδιών όσον αφορά τους στόχους, τις στρατηγικές μελέτης και τα κίνητρα. Αντίθετα, το τρίτο παιδί είχε επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Σε μια δεύτερη ποιοτική μελέτη, διερευνήσαμε περαιτέρω τα χαρακτηριστικά της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών, με δύο παιδιά εξαιρετικά υψηλού επιπέδου στα μαθηματικά (Bempeni, Kaldrimidou, & Vamvakoussi, 2016). Καταλήξαμε ότι χαρακτηριστικά στοιχεία της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών γι' αυτές τις ηλικίες αφορούν τους στόχους (π.χ. προσωπική κατασκευή νοήματος έναντι της ευθυγράμμισης με την αξιολόγηση), τις στρατηγικές μάθησης (π.χ. σύνδεση ιδεών, επίλυση νέων προβλημάτων έναντι της αναπαραγωγής και της εξάσκησης), κίνητρα (π.χ. διανοητική πρόκληση έναντι της ασφαλούς διεκπεραίωσης ενός έργου), αλλά και στοιχεία αυτορρύθμισης σε διάφορα πλαίσια, όπως στο επίπεδο των συναισθημάτων και του ελέγχου της κατανόησης.

Στην παρούσα μελέτη, ελέγχουμε τις υποθέσεις ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα και ότι οι διαφορές αυτές παραμένουν ακόμη και στις τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου. Αναμένουμε ότι η επίδοση της Γ΄ Γυμνασίου θα είναι βελτιωμένη σε σχέση με αυτή της Α΄ Γυμνασίου και στα δύο είδη γνώσης, αλλά ότι θα παρατηρηθούν ακόμα και σε αυτήν την προχωρημένη τάξη ατομικές διαφορές. Επιπλέον, κάνουμε μία απόπειρα να εξετάσουμε με ποσοτική μεθοδολογία αν οι διαφορές αυτές εξηγούνται από διαφορές στη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών (επιφανειακή/βαθιά προσέγγιση).

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην πρώτη φάσης της έρευνας ήταν 510 μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Από αυτούς τους μαθητές, εκείνοι που κατέστη δυνατόν να συμπληρώσουν ολόκληρο το δεύτερο ερωτηματολόγιο ήταν 463, εκ των οποίων 262 μαθητές της Α΄ και 201 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη 2η φάση της έρευνας αφορούν τους 463 που συμπλήρωσαν και τα δύο ερωτηματολόγια. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα προέρχονται από επτά δημόσια Γυμνάσια της Ελλάδας, μεταξύ αυτών και ενός Πειραματικού σχολείου.

Υλικά

Για τη μέτρηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης χρησιμοποιήθηκε ένα ερευνητικό εργαλείο με καλούς δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας (Bempeni, Poulopoulou, Tsiplaki, & Vamvakoussi, 2018). Το εργαλείο αυτό περιλάμβανε 11 έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση (π.χ. πράξεις με κλάσματα, μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό κ.α.) και 14 έργα που εξέταζαν εννοιολογική γνώση (π.χ. διάφορες αναπαραστάσεις κλασμάτων, σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, εκτίμηση, (βλ. Bempeni et al., 2018; Vamvakoussi et al., 2019 για μία λεπτομερή περιγραφή του εργαλείου).

Για τη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση και μελέτη των μαθηματικών κατασκευάσαμε ένα νέο ερευνητικό εργαλείο που περιλάμβανε 28 δηλώσεις και 6 σενάρια στα οποία δύο υποθετικοί μαθητές εκφράζουν δύο διαφορετικές απόψεις, με τα οποία κλήθηκαν οι συμμετέχοντες να δηλώσουν το βαθμό συμφωνίας ή ασυμφωνίας τους σε μία κλίμακα 1-4, (1=Διαφωνώ απόλυτα, 2=Διαφωνώ, 3=Συμφωνώ, 4=Συμφωνώ απόλυτα). Η ουδέτερη επιλογή "ούτε συμφωνώ-ούτε διαφωνώ" δεν ήταν διαθέσιμη, καθώς έχει αποδειχτεί προβληματική σε παρόμοιες έρευνες (π.χ. Entwistle, McCune, & Tait, 2013). Για την κατασκευή του εργαλείου κατασκευάσαμε ή αξιοποιήσαμε ερωτήματα-δηλώσεις από τη σχετική βιβλιογραφία (π.χ. ASSIST·Entwistle et al., 2013; Biggs, 1987) και τις προηγούμενες μελέτες μας που αναφέρθηκαν παραπάνω (Bempeni et al., 2015, 2016). Παραδείγματα τέτοιων δηλώσεων ήταν τα εξής: «*Θεωρώ ότι δεν υπάρχει λόγος να ασχολούμαι με θέματα που ξέρω ότι δε θα πέσουν στις εξετάσεις.*» «*Αν δε θυμάμαι τον τρόπο με τον οποίο λύνεται μια συγκεκριμένη άσκηση, δεν έχει νόημα να προσπαθώ να τη λύσω.», «Μου αρέσει να ασχολούμαι σε ασκήσεις που παρόμοιες δεν έχω ξανασυναντήσει.», «Συχνά αναρωτιέμαι σε τι θα μας φανούν χρήσιμα όλα αυτά τα μαθηματικά που διδασκόμαστε.».*

Διαδικασία

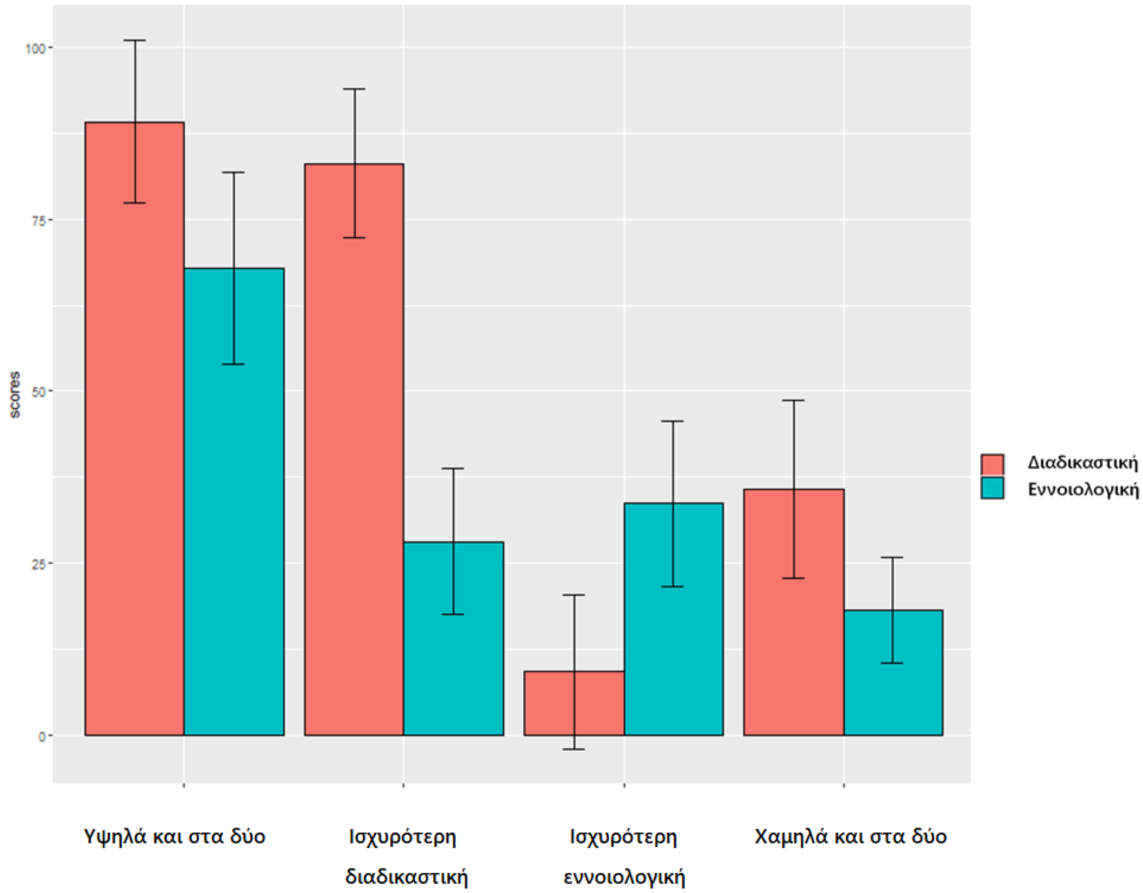
Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους μία διδακτική ώρα για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου για τα κλάσματα. Η συμπλήρωση του δεύτερου ερωτηματολογίου έγινε τρεις εβδομάδες αργότερα. Δεν τέθηκε χρονικό όριο, αλλά ο χρόνος που χρειάστηκαν οι μαθητές ήταν περίπου μισή ώρα.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1η Φάση της έρευνας

Τα δεδομένα της 1ης φάσης της έρευνας ομαδοποιήθηκαν ακολουθώντας τη μέθοδο της ανάλυσης συστάδων με την ιεραρχική μέθοδο, με μεταβλητές τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα στους δύο τύπους έργων (Bempeni et al., 2018; Hallett et al., 2010, 2012). Με τη μέθοδο αυτή εξετάζεται η *σχετική* διαφορά μεταξύ των δύο μεταβλητών. Με μία σειρά από μέτρα αξιολόγησης εγκυρότητας με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού R, προέκυψε ότι ο βέλτιστος αριθμός συστάδων ήταν οι τέσσερις.

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται η μέση επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση ανά συστάδα. Πιο αναλυτικά, η πρώτη συστάδα *(«Υψηλά και στα δύο»*, Ν=163, 32%, 10% Α΄ Γυμνασίου) εμφάνισε καλή επίδοση και στα δύο είδη έργων. Η δεύτερη συστάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (Ν=207, 40.6%, 28.6% Α΄ Γυμνασίου) παρουσίασε υψηλότερη επίδοση στα διαδικαστικά έργα, απ' ό,τι αναμενόταν με βάση την επίδοση στα εννοιολογικά. Η τρίτη *(«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, Ν=75, 14.7%, 6.9% Α΄ Γυμνασίου) εμφάνισε υψηλότερη επίδοση στα εννοιολογικά έργα, απ' ότι αναμενόταν με βάση την επίδοση στα διαδικαστικά. Τέλος, η τέταρτη *«Χαμηλά και στα δύο»* (Ν=65, 12.7%, 8.4% Α΄ Γυμνασίου) εμφάνισε χαμηλή επίδοση και στα δύο είδη γνώσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρά το γεγονός ότι η μέση επίδοση της τρίτης συστάδας κινείται σε παρόμοια χαμηλά επίπεδα με αυτήν της τέταρτης, η μέση επίδοση στα εννοιολογικά έργα είναι υψηλότερη σε σχέση τόσο με την τέταρτη, όσο και με τη δεύτερη συστάδα. Επίσης, οι μέσες επιδόσεις στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση της Γ΄ (69.5% και 49.2% αντίστοιχα) είναι καλύτερες από αυτές της Α΄ Γυμνασιου (66.9%, 32.8% αντίστοιχα).



Σχήμα 1: Μέση επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση ανά συστάδα

2η Φάση της έρευνας

Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο, οι απαντήσεις στην κλίμακα από το 1 έως το 4 αποτύπωναν το κατά πόσο (λιγότερο έως περισσότερο) η μάθηση των μαθητών περιλάμβανε στοιχεία βαθιάς προσέγγισης. Οι δηλώσεις που ήταν συμβατές με την επιφανειακή προσέγγιση αντιστράφησαν προκειμένου να βαθμολογηθούν με τον ίδιο τρόπο. Το συνολικό σκορ στο ερωτηματολόγιο υπολογίστηκε ως το άθροισμα των βαθμολογιών στις επιμέρους ερωτήσεις. Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού R (R Project for Statistical Computing).

Για την αξιολόγηση του δεύτερου ερωτηματολογίου, ελέγχθηκε η εσωτερική συνάφεια μέσω του συντελεστή Cronbach's alpha που έδειξε ότι δύο από τις ερωτήσεις-δηλώσεις παρουσίαζαν αρνητική συσχέτιση με την κλίμακα και έτσι εξαιρέθηκαν από την τελική μορφή του ερωτηματολογίου. Τελικά, η τιμή του συντελεστή Cronbach's alpha για την κλίμακα ήταν α=0.849. Επίσης, πραγματοποιήθηκε έλεγχος εξωτερικής συνάφειας μέσω της διαδικασίας των επαναληπτικών μετρήσεων για να διαπιστωθεί αν η κλίμακα επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες. 41 μαθητές κατέστη δυνατόν να ξανασυμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο μετά την πάροδο 15 ημερών. Υπολογίστηκε ο ενδοταξιακός συντελεστής για κάθε ερώτηση ξεχωριστά για να διερευνηθεί η συνέπεια μεταξύ των μετρήσεων. Πέντε από τις ερωτήσεις παρουσίασαν συντελεστή μικρότερο από 0,40 και έτσι εξαιρέθηκαν από την τελική μορφή του εργαλείου.

Συστάδες		***N***	***Μέση Τιμή***	***Τυπική Απόκλιση***	***Εύρος***
1	*«Υψηλά και στα δύο»*	158	2.987	0.414	(1.852 - 3.704)
2	*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	194	2.830	0.397	(1.630 - 3.593)
3	*«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	52	2.636	0.275	(2.222 - 3.370)
4	*«Χαμηλά και στα δύο»*	59	2.593	0.367	(1.481 - 3.481)

Πίνακας 1: Μέσο σκορ στην προσέγγιση στη μάθηση ανά συστάδα

Από τον έλεγχο ανεξαρτησίας προέκυψε ότι η συστάδα κατάταξης σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με την προσέγγιση στη μάθηση (χ^2=60.396, df=3, p-value<0.0001). Όπως φαίνεται από την Πίνακα 1, η ομάδα «*Υψηλά και στα δύο*» παρουσιάζει υψηλότερο σκορ στην προσέγγιση στη μάθηση, με την ομάδα «*Ισχυρότερη διαδικαστική*» να παρουσιάζει το αμέσως χαμηλότερο. Ακολουθεί η ομάδα «*Ισχυρότερη εννοιολογική*»και, τέλος, η ομάδα «*Χαμηλά και στα δύο*».

Προγνωστικός παράγοντας	*«Χαμηλά και στις δυο»* ***vs***	***B***	***OR= exp(B)***	***p-value***
Σκορ στην προσέγγιση στη μάθηση	*«Υψηλά και στα δύο»*	3.09	21.98	**0.000**
	«Ισχυρότερη διαδικαστική	1.56	4.77	**0.000**
	«Ισχυρότερη εννοιολογική»	0.42	1.53	0.390
Γ΄ Γυμνασίου	*«Υψηλά και στα δύο»*	2.12	8.35	**0.000**
	"«Ισχυρότερη διαδικαστική	0.18	1.19	0.606
	«Ισχυρότερη εννοιολογική»	0.52	1.69	0.206

Πίνακας 2: Έλεγχος προγνωστικών παραγόντων

Για να ελέγξουμε την υπόθεση αν η προσέγγιση στη μάθηση και η τάξη αποτελούν προγνωστικούς παράγοντες του επιπέδου εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης εκτελέστηκε πολυμεταβλητή λογιστική παλινδρόμηση (multinomial logistic regression) (Πίνακας 2). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τόσο η προσέγγιση στη μάθηση όσο και η τάξη των μαθητών προβλέπουν το προφίλ στον οποίο ανήκουν. Χρησιμοποιώντας την ομάδα «*Χαμηλά και στα δύο*» ως επίπεδο βάσης (base level) παρατηρούμε ότι όταν αυξάνεται το σκορ ενός μαθητή στην προσέγγιση στη μάθηση κατά μια μονάδα, είναι 21.98 φορές πιο πιθανό να ανήκει στην ομάδα «*Υψηλά και στα δύο*» και 4.77 φορές πιο πιθανό να ανήκει στην ομαδα «*Ισχυρότερη διαδικαστική*». Αντίστοιχα, ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου έχει 8.35 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να ανήκει στην ομάδα «*Υψηλά και στα δύο*» σε σχέση με το να ανήκει στην ομάδα «*Χαμηλά και στα δύο*».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα έρευνας επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα (Hallett et al., 2010; 2012). Παρατηρούμε ότι οι ατομικές διαφορές παραμένουν μέχρι και την Γ΄ Γυμνασίου, της οποίας μεγάλο ποσοστό μαθητών ανήκει στις συστάδες «*Ισχυρότερη διαδικαστική*» και «*Ισχυρότερη εννοιολογική».* Το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος, βρέθηκε ότι ανήκει στο προφίλ «*Ισχυρότερη διαδικαστική*» επιβεβαιώνοντας αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών ότι η εκπαίδευση ενθαρρύνει κυρίως την ανάπτυξη της διαδικαστικής γνώσης (π.χ. Canobi, 2004).

Αναζητώντας αιτίες στις οποίες θα μπορούσαν να αποδοθούν αυτές οι ατομικές διαφορές, ελέγξαμε την υπόθεση ότι η προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με το προφίλ στο οποίο ανήκουν οι μαθητές σε μεγάλο δείγμα με ποσοτική μεθοδολογία. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η βαθμολογία στο ερωτηματολόγιο για την προσέγγιση στη μάθηση προβλέπει τις πιθανότητες του ανήκειν στις ομάδες «*Υψηλά και στα δύο» και «Ισχυρότερη διαδικαστική*» με τους μαθητές στην πρώτη ομάδα, οι οποίοι έχουν και προχωρημένη εννοιολογική γνώση, να παρουσιάζουν υψηλότερο σκορ στην προσέγγιση στη μάθηση, σε σχέση με τους μαθητές της δεύτερης. Το αποτέλεσμα αυτό στηρίζει μερικώς την υπόθεσή μας, καθώς δεν προβλέπεται η πιθανότητα να ανήκει ένας μαθητής στην ομάδα «*Ισχυρότερη εννοιολογική*» ενώ οι μαθητές στην ομάδα αυτή έχουν και το δεύτερο χαμηλότερο σκορ στην προσέγγιση στη μάθηση. Μια πιθανή εξήγηση για το αποτέλεσμα αυτό είναι ότι οι μαθητές στην ομάδα αυτή έχουν χαμηλή επίδοση γενικά και, ενώ έχουν ισχυρότερη εννοιολογική γνώση σε σχέση με τη διαδικαστική, αυτό δε σημαίνει ότι έχουν όλοι υψηλή εννοιολογική γνώση σε απόλυτους όρους. Το τελευταίο είναι προϊόν της μεθόδου που ακολουθήσαμε για την κατασκευή των ομάδων (Hallett et al., 2010, 2012; Bempeni et al., 2018). Τέλος, ο έλεγχος προγνωστικών παραγόντων έδειξε ότι τα παιδιά της Γ΄ της έχουν αυξημένη πιθανότητα να ανήκουν στο προφίλ «*Υψηλά και στα δύο*».

Παρόλο που γενικά η ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης δεν είναι συμμετρική οποιαδήποτε χρονική στιγμή, τα αποτελέσματά μας αποτελούν μία πρόκληση για το επαναληπτικό μοντέλο (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Rittle-Johnson και συν., και δεδομένης της ηλικίας των συμμετεχόντων, θα αναμέναμε ισορροπημένη ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης, κάτι το οποίο δεν προκύπτει από την έρευνά μας.

Η παρούσα έρευνα φιλοδοξεί να συμβάλλει στη θεωρητική συζήτηση για τη σχέση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης γενικά και των παραγόντων που εξηγούν τις ατομικές διαφορές στα δύο είδη γνώσης ειδικότερα. Τα αποτελέσματά μας αποτελούν μία ένδειξη για τη συσχέτιση των ατομικών διαφορών στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση με τις ατομικές διαφορές στη μάθηση των μαθηματικών ωστόσο απαιτείται περαιτέρω έρευνα για την τεκμηρίωση αυτής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bempeni M., Kaldrimidou M., & Vamvakoussi X. (2016). Features of the deep approach to mathematics learning: evidence from exceptional students. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 75–82. Szeged, Hungary: PME.

Bempeni, M., Poulopoulou S., Tsiplaki I., & Vamvakoussi X. (2018). Individual differences in fractions' conceptual and procedural knowledge: what about older students? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 147-154. Umeå, Sweden: PME.

Bempeni, M. & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research, 3,* 17-34.

Vamvakoussi X., Bempeni M., Poulopoulou S., & Tsiplaki I. (2019). Theoretical and methodological issues in the study of conceptual and procedural knowledge: Reflections on a series of studies on Greek secondary students' knowledge of fractions. *Educational Journal of the University of Patras, 6*(2), p. 82-96. ISSN:2241-9152

Biggs, J. B. (1987). *Study process questionnaire manual.* Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge*. Cognitive Development, 19,* 81-93.

Entwisle, N. & McCune V. (2004). The conceptual bases of study strategy inventories. *Educational Psychology Review, 16,* 325-345.

Entwistle, N., McCune, V., & Tait, H. (2013). *Approaches and Study Skills Inventory for Students* (ASSIST) (3rd edition). Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/50390092

Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British, Journal of Educational Psychology, 76,* 309–331.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of* Educational Psychology, 102, 395–406.

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology, 113,* 469-486.

Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), Oxford Handbook of Numerical Cognition (pp.1118-1134). Oxford: Oxford University Press.

Schneider. M., Rittle-Johnson B, & Star J. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Journal of Developmental Psychology, 47,* 1525-1538.

Star, J. R., & Stylianides, G. J. S. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 13*(2), 169-181.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΝΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ Ε' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΕΝΗΛΙΚΕΣ: ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ

Δημήτριος Δεσλής[1], Δέσποινα Δεσλή[2]

[1] University of Cambridge, Faculty of Education, dd544@cam.ac.uk

[2] Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Π.Τ.Δ.Ε., ddesli@eled.auth.gr

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να διερευνήσει την ικανότητα για την πραγματοποίηση ελέγχου λογικότητας σε ένα υπολογιστικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, μέσα από δύο έργα εξετάστηκε η ικανότητα 80 μαθητών Ε' δημοτικού και 80 ενηλίκων σε δύο πτυχές του ελέγχου λογικότητας του αποτελέσματος: α) στις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και την επίδραση των πράξεων (Έργο 1) και β) στην πρακτικότητα της απάντησης (Έργο 2). Ενώ οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στο Έργο 1 (74,55%), οι ενήλικες είχαν καλύτερη επίδοση στο Έργο 2 (92%). Οι στρατηγικές που αναδείκνυαν στήριξη σε αλγοριθμικά χαρακτηριστικά χρησιμοποιήθηκαν και από τις δύο ηλικιακές ομάδες συχνότερα σε σχέση με τις στρατηγικές που σχετίζονταν με νοερούς και κατ' εκτίμηση υπολογισμούς ή με την πρακτικότητα της απάντησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έλεγχος λογικότητας στα μαθηματικά ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία ο λύτης εξετάζει ένα αποτέλεσμα και αποφαίνεται για το αν αυτό είναι πιθανό να αποτελεί αποδεκτή απάντηση (Alajmi, & Reys, 2010˙ Yang, 2019). Η πραγματοποίησή του βοηθά τον λύτη να εξετάσει το αποτέλεσμα κριτικά και να αποφύγει λάθη, ενώ η χρησιμότητά του έγκειται σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι επιστρατεύεται συχνά στην καθημερινή ζωή (Alajmi & Reys, 2007). Για παράδειγμα, αναρωτιόμαστε συχνά αν πήραμε τα σωστά ρέστα ή αν έχουμε επιλέξει τα κατάλληλα ρούχα δεδομένων των καιρικών συνθηκών. Αυθόρμητα, δηλαδή, εφαρμόζουμε έλεγχο λογικότητας σε πολλά μαθηματικά ή μη προβλήματα της καθημερινότητάς μας. Η επιτυχής εφαρμογή του φαίνεται πως απαιτεί αναπτυγμένη αίσθηση του αριθμού καθώς επίσης και ευελιξία στην εφαρμογή μιας ποικιλίας στρατηγικών που συνδέονται με τους κατ' εκτίμηση και τους νοερούς υπολογισμούς (Alajmi, & Reys, 2010˙ McIntosh et al., 1997˙ Markovits, & Sowder, 1994˙ Yang, 2019). Η σύνδεσή του με την επίλυση προβλήματος (Polya, 1973) προσδίδει και μεταγνωστική διάσταση στον έλεγχο της ακρίβειας της πορείας που ακολουθήθηκε και των αποτελεσμάτων (Kuhn, 2000).

Στη βιβλιογραφία αναδεικνύονται δυο βασικές πτυχές του ελέγχου λογικότητας μιας απάντησης. Η πρώτη πτυχή αφορά στην κατανόηση της έννοιας των πράξεων και της επίδρασής τους πάνω στους αριθμούς (Dougherty, & Crites, 1989˙ Kuldas et al., 2017˙ McIntosh et al., 1997). Για παράδειγμα, στον πολλαπλασιασμό «4,95 x 10,28», είναι πιθανόν ο λύτης να εκτελέσει τις επιμέρους πράξεις που απαιτεί ο αλγόριθμος, όμως να τοποθετήσει λανθασμένα την υποδιαστολή στο τελικό αποτέλεσμα, οδηγούμενος έτσι στο αποτέλεσμα 5,0886. Ωστόσο, αν εξετάσει τη λογικότητα του αποτελέσματος αυτού, θα οδηγηθεί στην απόρριψή του, αφού το γινόμενο του 4,95 (που είναι περίπου 5) με το 10,28 (που είναι περίπου 10) θα πρέπει να είναι περίπου 50. Επομένως, η κατανόηση της σημασίας κάθε πράξης και του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί μπορεί να αποδειχθεί πολύ χρήσιμη στον έλεγχο λογικότητας μιας αριθμητικής απάντησης. Τα υπολογιστικά λάθη, η τοποθέτηση της υποδιαστολής σε λανθασμένο σημείο και η παράλειψη μηδενικών είναι συχνά λάθη που σχετίζονται με την ελλιπή κατανόηση αυτής της πτυχής του ελέγχου λογικότητας (Dougherty, & Crites, 1989).

Η δεύτερη πτυχή του ελέγχου λογικότητας αφορά στην πρακτικότητα της απάντησης (Alajmi, & Reys, 2010), δηλαδή τον βαθμό στον οποίο η απάντηση που δίνεται έχει νόημα στην καθημερινή ζωή. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα όπως «Πόσα λεωφορεία χωρητικότητας 30 ατόμων χρειάζονται για τη μεταφορά 105 μαθητών;», ενώ με την εκτέλεση του αλγόριθμου της διαίρεσης η σωστή απάντηση είναι «3,5 λεωφορεία», αυτή η απάντηση δεν μπορεί να είναι λογική, και συνεπώς απαιτείται στρογγυλοποίηση του αριθμού των λεωφορείων προς τα πάνω. Αντίθετα, σε ένα παρόμοιο πρόβλημα όπως «Θέλουμε να μοιράσουμε δίκαια 105 καραμέλες σε 30 ανθρώπους. Πόσες καραμέλες θα πάρει ο καθένας;», απαιτείται στρογγυλοποίηση προς τα κάτω (η απάντηση είναι «3 καραμέλες ο καθένας», παρότι -όπως και πριν- 105:30=3,5). Ωστόσο, σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις το συγκείμενο του προβλήματος επιβάλλει κάτι διαφορετικό. Η απόδοση λογικού νοήματος στο αποτέλεσμα και στην πράξη της διαίρεσης αντί της τυφλής εφαρμογής του αλγόριθμου πιθανώς να απέτρεπε έναν λύτη από το να δώσει λανθασμένη απάντηση.

Ο έλεγχος λογικότητας των απαντήσεων στα μαθηματικά θεωρείται σημαντικός σε χώρες όπως την Αμερική, όπου συμπεριλαμβάνεται μεταξύ των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αντίθετα, σε αναλυτικά προγράμματα χωρών, όπως του Κουβέιτ, δεν αποτελεί προτεραιότητα (Alajmi, & Reys, 2007, 2010· Yang, 2005, 2019). Στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών απουσιάζει οποιαδήποτε ρητή σχετική αναφορά. Ο τρόπος επαλήθευσης ενός αριθμητικού αποτελέσματος που προτείνεται έχει αλγοριθμικά χαρακτηριστικά με συνηθέστερη την εκτέλεση της αντίστροφης πράξης.

Οι έρευνες, αν και ιδιαίτερα περιορισμένες, καταγράφουν χαμηλές επιδόσεις και σημαντικές δυσκολίες στην εφαρμογή του ελέγχου λογικότητας τόσο από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Masingila, Davidenko & Prus-Wisniowska, 1996· Yang, 2019) όσο και από ενήλικες, συνήθως αποκλειστικά εκπαιδευτικούς (Alajmi, & Reys, 2007). Η επιμονή στη χρήση του αλγόριθμου αποτελεί συχνά την πρώτη αντίδραση των λυτών, όταν ερωτώνται αν ένα αποτέλεσμα είναι λογικό: επαναλαμβάνουν τη διαδικασία υπολογισμού, αδυνατώντας να συνδυάσουν το συγκείμενο και τους εμπλεκόμενους αριθμούς. Ωστόσο, οι παραπάνω έρευνες εστιάζουν είτε στη μια πτυχή του ελέγχου λογικότητας είτε στην άλλη.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι διπλός: αφενός να εξετάσει την ικανότητα μαθητών δημοτικού σχολείου και ενηλίκων για εφαρμογή και των δύο πτυχών του ελέγχου λογικότητας και αφετέρου να μελετήσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται καθώς και τη σύνδεσή τους με επιτυχία στην εφαρμογή του ελέγχου λογικότητας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα πήραν μέρος συνολικά 160 συμμετέχοντες, ισάριθμα προερχόμενοι από τα δύο φύλα και δύο ηλικιακές ομάδες: παιδιά Ε' τάξης (μ.ο. ηλικίας: 10 έτη και 10 μήνες) και ενήλικες (μ.ο. ηλικίας: 31 έτη και 2 μήνες), που επιλέχθηκαν με ευκαιριακή δειγματοληψία. Τα παιδιά φοιτούσαν σε σχολείο της Θεσσαλονίκης και παρουσίαζαν ποικιλία τόσο στο κοινωνικο-οικονομικό τους επίπεδο όσο και στις ακαδημαϊκές τους επιδόσεις. Η πλειοψηφία των ενηλίκων συμμετεχόντων είχε ολοκληρώσει την υποχρεωτική εκπαίδευση και περίπου το 75% αυτών είχαν ολοκληρώσει και την τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Σχεδιασμός - Εργαλείο έρευνας. Για τις ανάγκες της έρευνας σχεδιάστηκαν δύο έργα, καθένα από τα οποία αφορούσε μία εκ των δύο πτυχών του ελέγχου λογικότητας που αναδεικνύονται στη βιβλιογραφία και περιελάμβανε οκτώ δοκιμασίες. Στο Έργο 1 (σχέσεις μεταξύ των αριθμών και επίδραση των πράξεων), οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να επιλέξουν αν το αποτέλεσμα μιας οριζόντιας αριθμητικής πράξης που τους παρουσιαζόταν ήταν σωστό ή λανθασμένο και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους (παράδειγμα α, Πίνακας 1). Στο Έργο 2 (πρακτικότητα της απάντησης), οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να δώσουν αιτιολογημένες απαντήσεις σε μαθηματικά προβλήματα που η απλή εφαρμογή του αλγόριθμου δεν θα οδηγούσε σε λογικό αποτέλεσμα (παράδειγμα β, Πίνακας 1).

Η επιλογή των 16 δοκιμασιών στα δύο έργα έγινε ακολουθώντας τις εξής τρεις συνθήκες: (α) *είδος της πράξης*: οι δοκιμασίες αφορούσαν ισάριθμα πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, (β) *ορθότητα της απάντησης*: στις μισές δοκιμασίες δινόταν το σωστό αποτέλεσμα και στις άλλες μισές το λανθασμένο, και (γ) *είδος των αριθμών*: οι δοκιμασίες αφορούσαν ισάριθμα φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς. Κάθε πιθανός συνδυασμός των παραπάνω συνθηκών (συνολικά οκτώ) εκπροσωπήθηκε από μία δοκιμασία σε κάθε Έργο.

Παράδειγμα (α)	Έργο 1	πολλαπλασιασμός-σωστό-δεκαδικοί
«Μπορεί το αποτέλεσμα αυτό να είναι σωστό;		
9,85 x 11,04 = 108,744	*Επιλέγω Σωστό/Λάθος και εξηγώ τη σκέψη μου:...»*	
Παράδειγμα (β)	Έργο 2	διαίρεση-λανθασμένο-φυσικοί
«Λύνω το πρόβλημα και εξηγώ τη σκέψη μου: 315 άτομα θέλουν να ταξιδέψουν. Η μεταφορά τους θα γίνει με όσο το δυνατόν λιγότερα λεωφορεία. Το κάθε λεωφορείο χωράει ακριβώς 30 άτομα. Πόσα τέτοια λεωφορεία χρειάζονται για τη μεταφορά τους;»		

Πίνακας 1: Παραδείγματα από τις δοκιμασίες των έργων

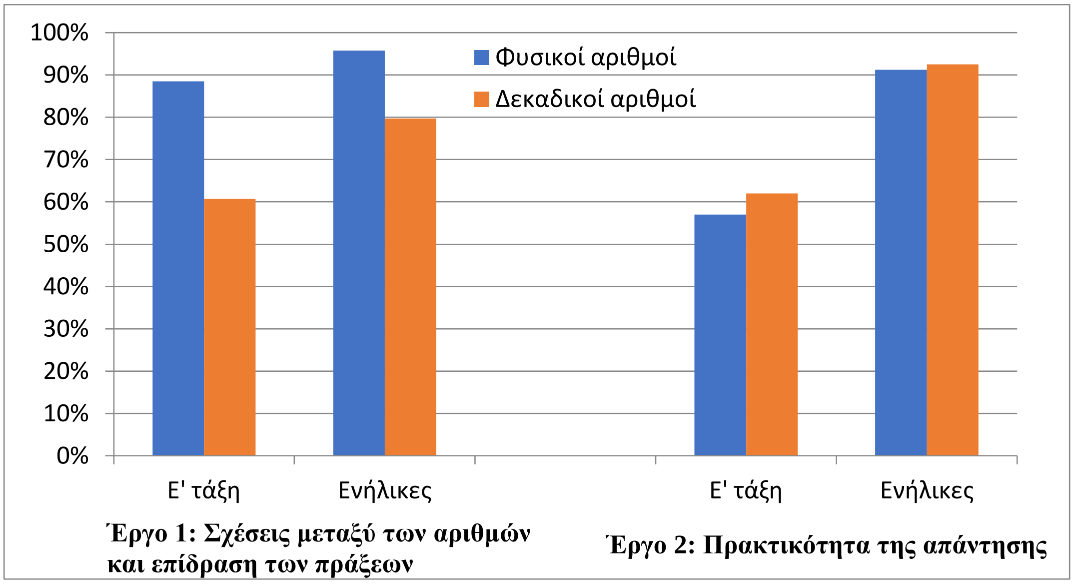
Διαδικασία. Όλη η διαδικασία πραγματοποιήθηκε σε ανώνυμο και ατομικό επίπεδο (στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών στο σχολείο και σε χρόνο και χώρο δικής τους επιλογής, για τα παιδιά και τους ενήλικες, αντίστοιχα) και διήρκησε συνολικά περίπου 30΄.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Γενική επίδοση. Το ποσοστό επιτυχίας του συνόλου των συμμετεχόντων σε όλες τις δοκιμασίες ξεπέρασε το 78% (67% και 90%, για παιδιά και ενήλικες αντίστοιχα), με στατιστικά σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των δύο ηλικιακών ομάδων (t=-11,427, df=158, p<.001), η οποία διατηρήθηκε και στα δύο έργα: οι ενήλικες εμφάνισαν καλύτερη επίδοση από τα παιδιά τόσο στο Έργο 1 (t=-6,190, df=158, p<.001) όσο και στο Έργο 2 (t=-11,256, df=158, p<.001). Αν και το φύλο οριακά δεν επηρέασε τις επιδόσεις τους (t=1,934, df=158, p=.055), το είδος του έργου τις διαφοροποίησε. Συγκεκριμένα, οι μαθητές είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση (t=6,204, df=79, p<.001) στις δοκιμασίες αναφορικά με τις σχέσεις των αριθμών και την επίδραση των πράξεων του Έργου 1 (74,5%) σε σχέση με αυτές της πρακτικότητας της απάντησης του Έργου 2 (59%). Αντίθετα, το Έργο 1 δυσκόλεψε στατιστικά σημαντικά περισσότερο τους ενήλικες από το Έργο 2 (t=-2,177, df=79, p<.05) στο οποίο η επίδοσή τους ξεπέρασε το 90%.

Παρότι η αριθμητική πράξη δεν επηρέασε την επίδοση των συμμετεχόντων στο Έργο 1 (t=1,078, df=159, p=.283), βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στο Έργο 2 (t=-4,399, df=159, p<.001), με τους συμμετέχοντες να αποδίδουν καλύτερα στη διαίρεση (80%) σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό (72%). Αυτές οι διαφορές διατηρήθηκαν και για τις δύο ηλικιακές ομάδες.

Οι επιδόσεις των συμμετεχόντων επηρεάστηκαν από το είδος των αριθμών με διαφορετικό τρόπο και στα δύο έργα: ενώ στο Έργο 1 όλοι οι συμμετέχοντες παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερη επιτυχία (t= 11,121, df=159, p<.001) στις δοκιμασίες που αφορούσαν φυσικούς αριθμούς παρά δεκαδικούς (92% και 70%, αντίστοιχα), το αντίθετο βρέθηκε στο Έργο 2 (t=-2,326, df=159, p<.05). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν (βλ. Σχήμα 1) και όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Ε' τάξης (t=9,221, df=79, p<.001 και t=-2,231, df=79, p<.01 σε Έργα 1 και 2, αντίστοιχα). Η επίδοση των ενηλίκων, ωστόσο, επηρεάστηκε από το είδος των αριθμών μόνο στο Έργο 1 (t=6,743, df=79, p<.001) και καθόλου στο Έργο 2 (t=-,851, df=79, p=.397).



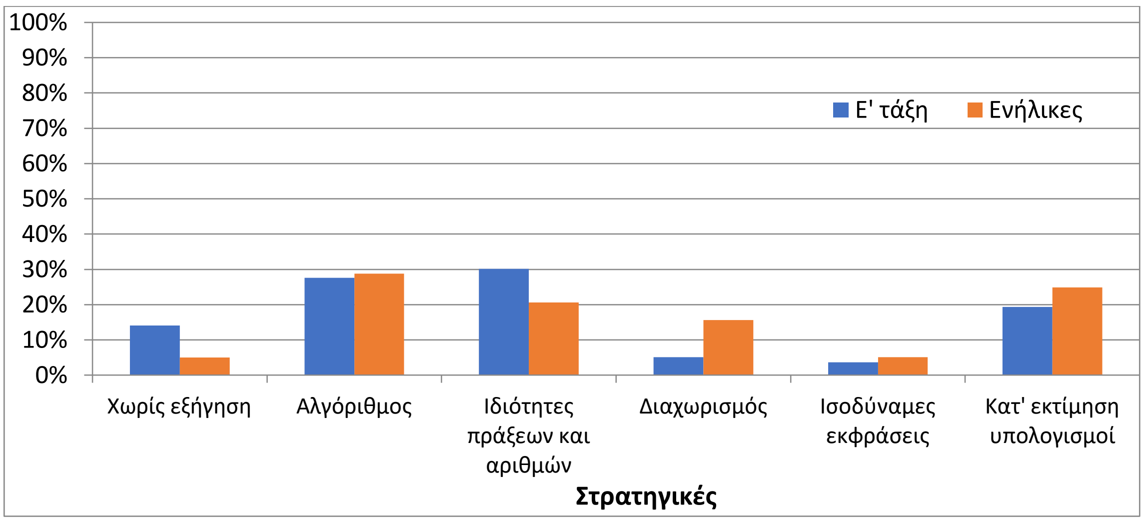
Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα έργα ως προς την ηλικιακή ομάδα και το είδος αριθμού

Τέλος, ήταν στατιστικά σημαντικά ευκολότερο ($t=-10{,}673$, $df=159$, $p<.001$) για τους συμμετέχοντες να απορρίψουν ένα λανθασμένο αποτέλεσμα (93%) στο Έργο 1 σε σχέση με το να επιβεβαιώσουν ένα σωστό αποτέλεσμα (70%). Στο Έργο 2 βρέθηκε το αντίθετο: η επίδοση των συμμετεχόντων ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερη ($t=12{,}446$, $df=159$, $p<.001$) στις δοκιμασίες που ο αλγόριθμος οδηγούσε σε σωστό αποτέλεσμα (92%), σε σύγκριση με τις δοκιμασίες στις οποίες η εκτέλεσή του οδηγούσε σε λανθασμένο αποτέλεσμα (59%). Στο Έργο 2 μάλιστα η διαφορά αυτή για τους μαθητές, εκτός από στατιστικά σημαντική ($t=15{,}125$, $df=79$, $p<.001$), ήταν ακόμη μεγαλύτερη, αφού τα αντίστοιχα ποσοστά ήταν 86% για τα σωστά και 33% για τα λανθασμένα αποτελέσματα. Οι μαθητές συχνά δεν ήλεγχαν τη λογικότητα των απαντήσεων που έδιναν ή έδειχναν υπερβολική εμπιστοσύνη στον αλγόριθμο, οδηγούμενοι σε λάθη.

β. Στρατηγικές. Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων στις δοκιμασίες, ανεξάρτητα από το αν οδηγούσαν σε επιτυχία, αναδείκνυαν τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Για το Έργο 1 (βλ. Σχήμα 2), ταξινομήθηκαν στις εξής έξι κατηγορίες: *1) «Χωρίς Εξήγηση»* (δεν δόθηκε κάποια επεξήγηση), *2) «Αλγόριθμος»* (χρήση του τυποποιημένου αλγόριθμου νοερά ή γραπτά), *3) «Ιδιότητες πράξεων και αριθμών»* (π.χ., το ‘10.800:9 δεν μπορεί να κάνει 12.000, δεν γίνεται το αποτέλεσμα της διαίρεσης να είναι μεγαλύτερο από το πρώτο μέρος της διαίρεσης’ ή ‘το 25,3x5 δεν μπορεί να κάνει 107,3, γιατί ό,τι πολλαπλασιάζεται με το 5 βγάζει 5, 10, 15…’), 4) *«Διαχωρισμός»* (π.χ., 709x50=700x50 + 9x50), 5) *«Ισοδύναμες Εκφράσεις»* (π.χ., το 709x50 είναι 35.450, γιατί άμα κάνουμε 709x100 θα είναι 70.900, άρα τώρα είναι το μισό) και 6) *«Κατ’ εκτίμηση υπολογισμοί»* (π.χ., το 9,85x11,04 μπορεί να είναι 108,744, γιατί 10x11=110).

Η στρατηγική του αλγόριθμου, η οποία χρησιμοποιήθηκε με παρόμοια συχνότητα από τις δύο ηλικιακές ομάδες ($t=-{,}275$, $df=158$, $p=.784$), και η στρατηγική των ιδιοτήτων ήταν οι επικρατέστερες στρατηγικές. Ωστόσο, οι μαθητές κατέφευγαν στατιστικά σημαντικά συχνότερα στην εφαρμογή των ιδιοτήτων των πράξεων ή/και των αριθμών (30%) σε σχέση με τους ενήλικες (21%) ($t=3{,}270$, $df=158$, $p<.01$). Οι ενήλικες, επίσης, χρησιμοποίησαν τη στρατηγική του διαχωρισμού περίπου τρεις φορές συχνότερα από τους μαθητές (16% έναντι 5%), διαφορά που βρέθηκε στατιστικά σημαντική ($t=-5{,}324$, $df=158$, $p<.001$).

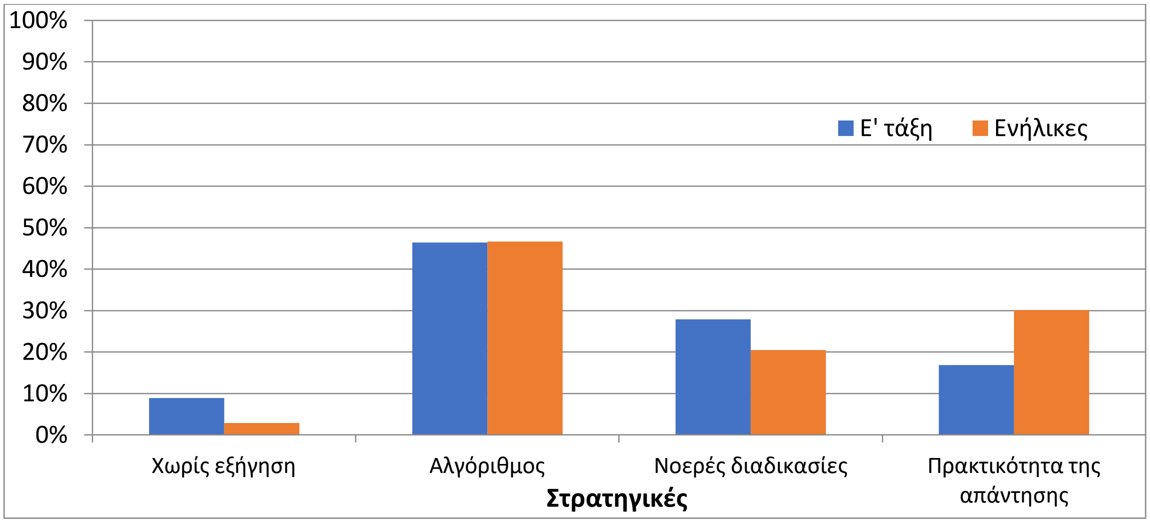
Η χρήση του αλγόριθμου δεν διασφάλιζε την επιτυχία, αφού δεν βρέθηκαν συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση του και το ποσοστό επιτυχίας σε κανένα είδος δοκιμασιών. Αντίθετα, υψηλές θετικές συσχετίσεις με το σύνολο των δοκιμασιών βρέθηκαν για τη χρήση των στρατηγικών του διαχωρισμού (Pearson's $r=,437$, $p<.01$) και των κατ' εκτίμηση υπολογισμών (Pearson's $r=,198$, $p<.05$): όσο περισσότερο οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούσαν στρατηγικές που στηρίζονται σε χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού τόσο περισσότερο εμφάνιζαν επιτυχία.



Σχήμα 2: Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών ως προς την ηλικιακή ομάδα στο Έργο 1

Στο Έργο 2, αναδείχθηκαν τέσσερις κατηγορίες στρατηγικών (βλ. Σχήμα 3), από τις οποίες οι δύο πρώτες ήταν ίδιες με αυτές του Έργου 1. Η τρίτη στρατηγική αφορούσε στην «*εφαρμογή νοερών διαδικασιών*», ενώ η τέταρτη αναδείκνυε την προσπάθεια των συμμετεχόντων να πραγματοποιήσουν «*έλεγχο στη λογικότητα του αποτελέσματός*» τους (π.χ., στο πρόβλημα 'Ο Νίκος είναι 10 ετών και το ύψος του είναι 1,30μ. Ποιο περίπου θα είναι το ύψος του όταν γίνει 20 ετών;', δίνεται αρχικά η απάντηση '2,60μ.', αλλά εκφράζεται η επιφύλαξη ότι δεν μπορεί να φτάσει αυτό το ύψος).

Η αλγοριθμική στρατηγική ήταν η δημοφιλέστερη, παρότι οδηγούσε συχνά σε λανθασμένες απαντήσεις (Pearson's $r=-,246$, $p<.01$), με ποσοστό χρήσης που προσεγγίζει το 50% και στις δύο ηλικιακές ομάδες. Επιμέρους διαφορές εντοπίστηκαν στη γραπτή ή νοερή εφαρμογή του αλγόριθμου ($t=-11{,}310$, $df=158$, $p<.001$): οι ενήλικες εφάρμοζαν περισσότερο τον αλγόριθμο νοερά (31% έναντι 8%), ενώ οι μαθητές περισσότερο γραπτά (39% έναντι 16%). Οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιήθηκαν στατιστικά σημαντικά συχνότερα ($t=2,987$, $df=158$, $p<.01$) από τους μαθητές (28%) παρά από τους ενήλικες (21%). Όσοι συμμετέχοντες χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική της πρακτικότητας της απάντησης, δηλαδή στηρίζονταν στο συγκείμενο ενός προβλήματος αναζητώντας ένα αποτέλεσμα που να έχει νόημα στον πραγματικό κόσμο, έτειναν να οδηγούνται σε σωστές απαντήσεις (Pearson's $r=,612$, $p<.01$). Η συγκεκριμένη στρατηγική χρησιμοποιήθηκε στατιστικά σημαντικά συχνότερα ($t=-6,338$, $df=158$, $p<.001$) από τους ενήλικες (30%) σε σχέση με τους μαθητές (17%).



Σχήμα 3: Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών ως προς την ηλικιακή ομάδα στο Έργο 2

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Δύο είναι τα κύρια ευρήματα της παρούσας εργασίας. Πρώτον, ενώ οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση σε δοκιμασίες που απαιτούν καλή διαχείριση των σχέσεων μεταξύ των αριθμών στις αριθμητικές πράξεις, οι ενήλικες είχαν καλύτερη επίδοση σε δοκιμασίες που απαιτούν την πρακτικότητα της απάντησης. Δεύτερον, έντονη ήταν η επιρροή του τυποποιημένου αλγόριθμου στις στρατηγικές όλων των συμμετεχόντων, γεγονός που τους οδηγούσε συχνά σε λάθη. Αντίθετα, οι εννοιολογικές στρατηγικές, αν και χρησιμοποιούνταν λιγότερο συχνά από όλους αλλά πολύ περισσότερο στους ενήλικες συγκριτικά με τα παιδιά, ήταν πιο αποτελεσματικές και συνδέονταν με τον έλεγχο ενός αποτελέσματος. Ενδεχομένως οι περισσότερες εμπειρίες των ενηλίκων σε περιστάσεις της καθημερινής ζωής (οικονομικές συναλλαγές, οικιακές εργασίες κτλ.) τους δίνουν ένα σχετικό πλεονέκτημα. Από την άλλη, η συγκριτικά χαμηλή χρήση της στρατηγικής της πρακτικότητας από τους μαθητές έρχεται σε συμφωνία με τη θέση του Hiebert (1984) ότι οι μαθητές συχνά δεν θεωρούν αυτονόητο ότι το αποτέλεσμα ενός μαθηματικού προβλήματος θα πρέπει να είναι ρεαλιστικό, δηλαδή συμβατό με την πραγματικότητα εκτός σχολικής τάξης.

Τα ευρήματα της παρούσας εργασίας αφενός αναδεικνύουν τη σπουδαιότητα της ικανότητας ελέγχου σε ένα υπολογιστικό αποτέλεσμα και αφετέρου υπογραμμίζουν ότι η απλή εκμάθηση και χρήση κανόνων και αλγόριθμων δεν επαρκεί για δύο λόγους. Πρώτον, κατά την εκτέλεση ενός αλγόριθμου ενδέχεται να προκύψουν λάθη. Για παράδειγμα, υπήρχαν περιπτώσεις συμμετεχόντων οι οποίοι εκτελώντας τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού στην πράξη «7 x 9.092», παρέλειπαν το τελευταίο ψηφίο και οδηγούνταν στο αποτέλεσμα 6.364. Ωστόσο, πολύ λίγοι ήταν αυτοί που έλεγχαν τη λογικότητα του αποτελέσματος και προβληματίζονταν από το μέγεθος του αριθμού, εξετάζοντας την πιθανότητα λάθους. Δεύτερον, σε ένα μαθηματικό πρόβλημα το ποιες απαντήσεις είναι αποδεκτές και ποιες όχι καθορίζεται και από το συγκείμενο. Ο αλγόριθμος συχνά είναι ακατάλληλος (π.χ., διπλάσια ηλικία δεν σημαίνει διπλάσιο ύψος) ή οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα το οποίο χρειάζεται να προσαρμοστεί κατάλληλα, ώστε να έχει αντίκρισμα στον πραγματικό κόσμο (π.χ., με ένα χαρτονόμισμα των 5€ μπορούμε να αγοράσουμε το πολύ 12 πακέτα χαρτομάντιλα αν το καθένα κοστίζει 0,40 € και όχι 12,5 πακέτα). Η ύπαρξη συγκειμένου μάλιστα ενδέχεται να βοηθά στο να ξεπεραστούν δυσκολίες που προκύπτουν από τις πράξεις ή τους αριθμούς όπως, για παράδειγμα, συνέβη στην περίπτωση των δεκαδικών και φυσικών αριθμών στο Έργο 2. Κατά συνέπεια, η εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών και η σύνδεσή τους με καταστάσεις που αναδεικνύουν το νόημά τους και δημιουργούν ανάγκη για μαθηματικό συλλογισμό χρειάζεται να αποτελεί προτεραιότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών, αφού μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν ικανοί να ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεων που δίνουν (Alajmi & Reys, 2010· Dougherty & Crites, 1989· Kuldas et al., 2017· McIntosh et al., 1997· Yang, 2005).

Με δεδομένο ότι η απόδοση λογικού νοήματος στους μαθηματικούς υπολογισμούς μπορεί να συμβάλει στην αιτιολόγηση μαθηματικών ισχυρισμών καθώς και στη χρήση αποτελεσματικών στρατηγικών (Ball, & Bass, 2003), η ενίσχυση της χρήσης του ελέγχου λογικότητας ενός αποτελέσματος κρίνεται απαραίτητη. Περαιτέρω έρευνα, ακόμα και με μικρότερους σε ηλικία συμμετέχοντες, θα φωτίσει περισσότερο τόσο τα χαρακτηριστικά της ικανότητας ελέγχου λογικότητας αποτελέσματος όσο και τους τρόπους ενίσχυσής της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alajmi, A., & Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 77-94.

Alajmi, A., & Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(1), 117-139.

Ball, D.L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.27-44). Reston: NCTM.

Dougherty, B.J., & Crites, T. (1989). Applying number sense to problem solving. *The Arithmetic Teacher, 36*(6), 22-25.

Hiebert, J. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and understanding. *The Elementary School Journal, 84*(5), 497-513.

Kuhn, D. (2000). Metacognitive development. *Current Directions in Psychological Sciences, 9*(5), 178-181.

Kuldas, S., Sinnakaudan, S., Hashim, S., & Ghazali, M. (2017). Calling for the development of children's number sense in primary schools in Malaysia. *Education 3-13, 45*(5), 586-598.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29. doi:10.2307/749290

Masingila, J.O., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1-2), 175-200.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics: Student performance in four countries*. Perth, Australia: Mathematics, Science and Technology Education Centre, Edith Cowan University.

Pólya, G. (1973). *How to solve it*. New Jersey: Princeton University Press.

Yang, D.C. (2019). Performance of fourth graders when judging the reasonableness of a computational result. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 197-215.

Yang, D.C. (2005). Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies*, *31*(3), 317-333.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΓΧΟΣ: ΜΕΛΕΤΗ ΣΕ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΣΧΟΛΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Χαραλαμπάκης Ζ. Σταύρος, Κωνσταντίνος Π. Χρήστου

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών· Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

charalampakis.stavros@gmail.com, kchristou@uowm.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στη διερεύνηση του μαθηματικού άγχους (ορσ. συναισθήματα έντασης και άγχους που παρεμβαίνουν στο χειρισμό αριθμών και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, σε μια ευρεία ποικιλία καθημερινών και ακαδημαϊκών καταστάσεων) και των παραγόντων που το επηρεάζουν. Η μελέτη έγινε σε 222 φοιτητές και φοιτήτριες Παιδαγωγικών τμημάτων, με ερωτηματολόγιο κλειστού τύπου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προσωπικότητα ενός ατόμου αποτελεί τον σημαντικότερο παράγοντα που επιδρά στο μαθηματικό άγχος. Το μορφωτικό επίπεδο των γονιών και η κατεύθυνση εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση διαφοροποιούν ως προς το μαθηματικό άγχος, ενώ δεν εμφανίστηκαν διαφορές ανά φύλο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θεωρητικό πλαίσιο

Μεταξύ των μαθημάτων που διδάσκονται σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, τα μαθηματικά είναι κατ' εξοχήν το μάθημα που δημιουργεί αισθήματα φόβου, άγχους και ανασφάλειας σε μεγάλο ποσοστό των μαθητών, φοιτητών αλλά και σε αρκετούς εκπαιδευτικούς, κυρίως της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Brown, Brown & Bibby, 2008). Αυτό το είδος άγχους, πέρα από την συναισθηματική επίδραση που μπορεί να έχει σε κάποιο άτομο, μπορεί να αποτελέσει και εμπόδιο για την επιτυχή ενασχόληση με τα μαθηματικά (Yamani, Almala, Elbedour, Woodson & Reed, 2018). Ενώ δεν υπάρχει κάποιος αυστηρός ορισμός για το μαθηματικό άγχος, οι Richardson και Suinn (1972) προσπάθησαν να το ορίσουν ως «συναισθήματα έντασης και άγχους που παρεμβαίνουν στο χειρισμό αριθμών και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, σε μια ευρεία ποικιλία καθημερινών και ακαδημαϊκών καταστάσεων» (σελ 551).

Σύμφωνα με έρευνες, το μαθηματικό άγχος καθώς και η δημιουργία των αρνητικών πεποιθήσεων και στάσεων απέναντι στα μαθηματικά, ξεκινάει ήδη από την πρώτη επαφή των μαθητών με τα μαθηματικά (Yamani κ.α., 2018) και ενισχύεται όταν τα παιδιά εμπλέκονται με τα μαθηματικά ως αντικείμενο συστηματικής διδασκαλίας καθ' όλη τη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους πορείας, από μαθητές δημοτικού μέχρι φοιτητές πανεπιστημίων και μετ' έπειτα (Dowker, Sarkar & Looi, 2016). Μάλιστα φαίνεται πως δεν απαλλάσσεται κανείς εύκολα από το μαθηματικό άγχος καθώς και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί εμφανίζουν υψηλά επίπεδα άγχους το οποίο, με τη σειρά τους, μεταδίδουν ακούσια στους μαθητές τους (Beckdemir, 2010). Με βάση τα παραπάνω, η μελέτη του μαθηματικού άγχους σε φοιτητές σχολών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και των παραγόντων που επιδρούν σε αυτό κρίνεται απαραίτητη ως ένα πρώτο βήμα για τη διαχείριση του.

Το μαθηματικό άγχος χαρακτηρίζεται από πολυπλοκότητα τόσο στα αίτια που το προκαλούν όσο και στις συνέπειες που μπορεί να έχει.

Παράγοντες πρόκλησης μαθηματικού άγχους

Σύμφωνα με τους Trujillo και Hadfield (1999) οι παράγοντες που προκαλούν το μαθηματικό άγχος μπορούν να χωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες:

<u>Παράγοντες περιβάλλοντος</u>: Αποτελούν την μεγαλύτερη κατηγορία καθώς αφορούν παράγοντες που επιδρούν στο περιβάλλον στο οποίο συμβαίνει η μάθηση και η ενασχόληση με τα μαθηματικά. Περιλαμβάνουν τις αρνητικές εμπειρίες στην τάξη, το ρόλο των καθηγητών, τον τρόπο διδασκαλίας και εξέτασης του μαθήματος, τη σχέση των γονιών με τα μαθηματικά, κ.α. Παράδειγμα αποτελεί η πίεση και η επιμονή των γονιών για επιτυχία των παιδιών τους στα μαθηματικά.

<u>Διανοητικοί παράγοντες</u>: Πρόκειται για τους παράγοντες που σχετίζονται με την ίδια την ενασχόληση με τα μαθηματικά. Τέτοιοι, για παράδειγμα, είναι η αδυναμία κατανόησης και επίλυσης λεκτικών προβλημάτων, η δυσκολία κατανόησης της μαθηματικής γλώσσας και χειρισμού των συμβόλων, η αδυναμία κατανόησης της εφαρμογής των μαθηματικών.

<u>Παράγοντες προσωπικότητας</u>: Αυτοί οι παράγοντες πηγάζουν από την προσωπικότητα του κάθε μαθητή. Σε αυτούς περιλαμβάνονται η απροθυμία των μαθητών να θέσουν ερωτήσεις λόγω ντροπής, η αμφιβολία προς τον εαυτό τους, η χαμηλή αυτοεκτίμηση, η έλλειψη εμπιστοσύνης στη μαθηματική τους ικανότητα, καθώς επίσης οι πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά, τη μάθηση των μαθηματικών και οι στάσεις τους απέναντι στα μαθηματικά, που αποτελούν τις υποκειμενικές γνώσεις, θεωρίες και αντιλήψεις που έχουν για τα μαθηματικά (Φιλίππου και Χρίστου, 2001). Παράδειγμα τέτοιων πεποιθήσεων είναι ότι «Για να τα πας καλά στα μαθηματικά πρέπει να έχεις μαθηματικό μυαλό» ή ότι «Τα μαθηματικά είναι για τους άντρες». Οι πεποιθήσεις για τα μαθηματικά συνδέονται άμεσα με το μαθηματικό άγχος κι επίσης ευθύνονται για τη δημιουργία συγκεκριμένων στάσεων απέναντι στα μαθηματικά καθώς οι στάσεις αποτελούν συναισθηματικές καταστάσεις (όπως θετικά ή αρνητικά συναισθήματα) που εγείρονται σε εξειδικευμένο θεματικό πλαίσιο (Di Martino & Zan, 2001).

Άλλος παράγοντας που μπορεί να διαφοροποιεί ως προς το επίπεδο μαθηματικού άγχους αποτελεί το φύλο. Πολλές έρευνες επιβεβαιώνουν την ύπαρξη στερεότυπων ως προς τη σχέση του φύλου με τα μαθηματικά, καθώς η κοινωνία θεωρεί τον κλάδο αυτό κυρίως ως αντρική υπόθεση και φιλοδοξία (Ganley, George, Cimpian, & Makowski, 2018). Η πρόσφατη έρευνα δείχνει ότι οι άντρες και οι γυναίκες παρουσιάζουν ελάχιστη ή καμία διαφορά στην μαθηματική τους επίδοση, αλλά οι γυναίκες συνεχίζουν να εμφανίζουν περισσότερο μαθηματικό άγχος, χωρίς όμως σημαντικές διαφορές από τους άντρες (Dowker κ.α., 2016).

Από σχετικές έρευνες έχει φανεί πως το μορφωτικό επίπεδο των γονέων, μπορεί να αποτελέσει παράμετρο που επηρεάζει το μαθηματικό άγχος των παιδιών τους. Συγκεκριμένα οι γονείς με χαμηλό μορφωτικό επίπεδο φαίνεται να έχουν αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και μαθηματικό άγχος, το οποίο μεταφέρουν στα παιδιά τους (Geist, 2010). Επίσης, οι γονείς με χαμηλό μορφωτικό επίπεδο δεν εμπλέκονται με τη μάθηση των μαθηματικών των παιδιών τους κι αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μη ενίσχυση των παιδιών με κατάλληλες στρατηγικές διαχείρισης του άγχους τους (Μούτσιος-Ρέντζος & Λεοντίου, 2015).

Ένας άλλος παράγοντας που φαίνεται να διαφοροποιεί ως προς το μαθηματικό άγχος είναι η προτίμηση που δείχνουν οι μαθητές στα θεωρητικά ή στα θετικά μαθήματα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που προτιμούν τα θεωρητικά μαθήματα εμφανίζονται να βιώνουν σημαντικά περισσότερο μαθηματικό άγχος σε σχέση με τους μαθητές που έχουν προτίμηση στα θετικά μαθήματα (Αποστολοπούλου, 2011). Φαίνεται λοιπόν πως οι μαθητές με μαθηματικό άγχος επιλέγουν μικρότερη εμπλοκή με τα μαθηματικά. Έτσι, η κατεύθυνση σπουδών που διαλέγει ένας μαθητής για την εισαγωγή του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, πιθανά να διαφοροποιεί ως προς το μαθηματικό άγχος.

Στην παρούσα μελέτη θα εξεταστεί αν οι παραπάνω παράγοντες διαφοροποιούν ως προς την ύπαρξη μαθηματικού άγχους σε φοιτητές Παιδαγωγικών τμημάτων.

Η μελέτη

Η παρούσα μελέτη έχει στόχο να εξετάσει σε δείγμα Ελλήνων φοιτητών Παιδαγωγικών τμημάτων ποια από τις παραπάνω βασικές κατηγορίες παραγόντων (περιβάλλοντος, διανοητικοί και προσωπικότητας) σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των Trujillo και Hadfield (1999) είναι η κυριότερη που επιδρά στην πρόκληση μαθηματικού άγχους. Επίσης, έχει στόχο να διερευνήσει τον βαθμό στον οποίο το φύλο, η κατεύθυνση εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και το μορφωτικό επίπεδο των γονιών διαφοροποιούν ως προς το μαθηματικό άγχος.

Ερευνητικά ερωτήματα

ΕΕ 1: Ποια είναι η κύρια κατηγορία παραγόντων που επιδρούν στην ύπαρξη του μαθηματικού άγχους;

ΕΕ 2: Υπάρχουν διαφορές στα επίπεδα μαθηματικού άγχους μεταξύ των δυο φύλων;

ΕΕ 3: Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ μορφωτικού επιπέδου γονιών και μαθηματικού άγχους φοιτητών;

ΕΕ 4: Η κατεύθυνση εισαγωγής στο πανεπιστήμιο από τη Θεωρητική κατεύθυνση διαφοροποιεί ως προς το μαθηματικό άγχος από τους υπόλοιπους εισαχθέντες (από Τεχνολογική ή Θετική κατεύθυνση);

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 222 φοιτητές τμημάτων Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Παιδαγωγικό τμήμα Νηπιαγωγών και Παιδαγωγικό τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης). Από το σύνολο των 222 συμμετεχόντων, οι 192 ήταν γυναίκες (86,5%). Οι 159 από τους συμμετέχοντες (71,6%) φοιτούν σε Παιδαγωγικά Τμήματα Δημοτικής Εκπαίδευσης και οι υπόλοιποι 63 συμμετέχοντες (28,4%) είναι φοιτητές σε Παιδαγωγικά Τμήματα Νηπιαγωγών. Οι 179 (80,6%) εισήχθησαν στις σχολές από τη Θεωρητική κατεύθυνση, οι 14 (6,3%) από την Τεχνολογική κατεύθυνση και οι 29 (13,1%) από τη Θετική κατεύθυνση.

Υλικά – Διαδικασία

Η συλλογή των ερευνητικών δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τη χρήση δομημένου ερωτηματολογίου, όπου περιλαμβανόταν ερωτήσεις/δηλώσεις με τις οποίες έπρεπε να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν. Η διανομή του στους φοιτητές έγινε διαδικτυακά, μαζί με τις οδηγίες για την συμπλήρωση του κάθε μέρους καθώς και τον σκοπό της έρευνας. Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από τρία διακριτά μεταξύ τους μέρη.

<u>Μέρος Α</u>: Στο πρώτο μέρος συγκεντρώθηκαν τα δημογραφικά και εκπαιδευτικά χαρακτηριστικά των φοιτητών.

<u>Μέρος Β</u>: Στο δεύτερο μέρος δόθηκαν ερωτήσεις για τη μέτρηση του επιπέδου μαθηματικού άγχους των φοιτητών και αποτελείται συνολικά από 31 ερωτήσεις. Είναι βασισμένο στο εργαλείο MARS (Mathematics Anxiety Rating Scale) το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί σε μεγάλο αριθμό ερευνών που αποσκοπούν στην μέτρηση του μαθηματικού άγχους σε μαθητές και φοιτητές. Το μέρος αυτό προσαρμόστηκε στα ελληνικά δεδομένα και εμπλουτίστηκε με ερωτήσεις που εξετάζουν τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης. Σύμφωνα με τον ορισμό του μαθηματικού άγχους, αυτό εκδηλώνεται σε ακαδημαϊκές αλλά και καθημερινές καταστάσεις. Έτσι οι ερωτήσεις του συγκεκριμένου μέρους αναφέρονται και στις δύο αυτές περιπτώσεις. Παράδειγμα ερώτησης πρόκλησης μαθηματικού άγχους σε ακαδημαϊκές καταστάσεις είναι «Πόσο άγχος νιώθεις, όταν σκέφτεσαι για ένα επερχόμενο τεστ στα μαθηματικά, πέντε λεπτά πριν την εξέταση» ενώ παράδειγμα πρόκλησης μαθηματικού άγχους σε καταστάσεις καθημερινότητας είναι «Πόσο άγχος νιώθεις, όταν ελέγχεις το άθροισμα σε λογαριασμό ενός δείπνου στο οποίο νομίζεις ότι σε υπερχρέωσαν». Οι απαντήσεις είναι κλειστού τύπου σε κλίμακα Likert 5 σημείων.

<u>Μέρος Γ</u>: Στο τρίτο μέρος υπήρχαν δηλώσεις που εστίαζαν στην εξέταση των κατηγοριών των παραγόντων που επιδρούν στην ύπαρξη μαθηματικού άγχους σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των Trujillo και Hadfield (1999) που παρουσιάστηκε παραπάνω. Ο σχεδιασμός του βασίζεται στο εργαλείο FIMA (Factors Influencing Mathematics Anxiety). Πολλές από τις δηλώσεις αυτού του μέρους του ερωτηματολογίου έχουν αντληθεί από το συγκεκριμένο εργαλείο, στις οποίες έχουν προστεθεί και επιπλέον δηλώσεις με σκοπό να ανταποκρίνεται περισσότερο στα ελληνικά δεδομένα. Αποτελείται από 28 συνολικά δηλώσεις, τις

οποίες οι ερωτώμενοι καλούνται να αξιολογήσουν επιλέγοντας την απάντηση που τους εκφράζει πιο πολύ. Και πάλι οι απαντήσεις είναι κλειστού τύπου και κλίμακας Likert 5 σημείων. Κάθε δήλωση άνηκε σε μια από τις τρεις κατηγορίες που προαναφέρθηκαν. Για παράδειγμα η δήλωση «Στο σχολείο ντρεπόμουν να ρωτήσω κάποια απορία που είχα στο μάθημα των μαθηματικών» τοποθετήθηκε στην κατηγορία των παραγόντων προσωπικότητας. Η δήλωση «Δυσκολεύομαι να καταλάβω τα μαθηματικά επειδή είναι από τη φύση τους αφηρημένα και αυτό τα κάνει δυσνόητα» τοποθετήθηκε στους διανοητικούς παράγοντες και η δήλωση «Οι καθηγητές μαθηματικών στο σχολείο ήταν πρόθυμοι να με βοηθήσουν όπου είχα δυσκολίες στα μαθηματικά» στους παράγοντες περιβάλλοντος. Πριν από τη διεξαγωγή των αναλύσεων, έγινε αντιστροφή των θετικά διατυπωμένων δηλώσεων αυτού του μέρους, με σκοπό ο αριθμός 5 να προσδίδει τη μέγιστη αρνητική βαθμολογία και ο αριθμός 1 τη μέγιστη θετική.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρχικά, για τον εντοπισμό της κύριας κατηγορίας παραγόντων που επιδρούν στην ύπαρξη μαθηματικού άγχους (ΕΕ1) υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι των δηλώσεων του Μέρους Γ του ερωτηματολογίου. Τα αποτελέσματα της περιγραφικής στατιστικής παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Κατηγορίες παραγόντων	Μ.Ο.	Τ.Α.	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή
Παράγοντες προσωπικότητας	2,88	0,938	1,00	4,83
Παράγοντες περιβάλλοντος	2,74	0,566	1,55	4,20
Διανοητικοί παράγοντες	2,53	0,804	1,14	5,00

Πίνακας 1. Μέσοι όροι απαντήσεων στις δηλώσεις μαθηματικού άγχους ανά κατηγορία παραγόντων

Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, η κύρια κατηγορία παραγόντων πρόκλησης μαθηματικού άγχους φαίνεται να είναι αυτή των παραγόντων προσωπικότητας όπως για παράδειγμα η χαμηλή αυτοπεποίθηση, το αίσθημα ντροπής, η αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά που φαίνεται να προκαλούν στατιστικά σημαντικά υψηλότερο μαθηματικό άγχος σε σχέση με τους παράγοντες περιβάλλοντος όπως για παράδειγμα οι αρνητικές εμπειρίες στη τάξη, η στάση των γονιών απέναντι στα μαθηματικά και ο τρόπος εξέτασης και διδασκαλίας των μαθηματικών $t(221)=3{,}021$, $p<0{,}001$. Λιγότερη επίδραση ασκούν οι διανοητικοί παράγοντες όπως για παράδειγμα η έλλειψη κατανόησης της χρησιμότητας των μαθηματικών και η έλλειψη κατανόησης της μαθηματικής γλώσσας, με τη διαφορά τους από τους παράγοντες περιβάλλοντος να είναι επίσης στατιστικά σημαντική $t(221)=9{,}899$, $p<0{,}001$.

Στη συνέχεια, για την εξέταση του ΕΕ 2, εξετάστηκε η διαφορά του επιπέδου του μαθηματικού άγχους σε σχέση με το φύλο των συμμετεχόντων. Για την ανάλυση των απαντήσεων υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι των ερωτήσεων του Μέρους Β του ερωτηματολογίου που αφορούσε την μέτρηση του μαθηματικού άγχους. Τα αποτελέσματα, έδειξαν ότι οι γυναίκες εμφάνισαν ελαφρώς υψηλότερο άγχος (Μ.Ο = 2,46, Τ.Α = 0,65) σε σχέση με τους άντρες (Μ.Ο = 2,39, Τ.Α = 0,6), αλλά αυτή η διαφορά δεν ήταν στατιστικά σημαντική t(220) = 0,55, p=0,583.

Για την εξέταση του ΕΕ 3, υπολογίστηκε ο μέσος όρος του μαθηματικού άγχους του κάθε συμμετέχοντα και συσχετίστηκε με το μορφωτικό επίπεδο των αντίστοιχων γονιών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το μορφωτικό επίπεδο της μητέρας παρουσιάζει αδύναμη αρνητική συσχέτιση με το άγχος η οποία είναι στατιστικά σημαντική (r = -0,135, p=0,045) καθώς επίσης, υπήρξε στατιστικά σημαντική συσχέτιση αναμεσά στο μορφωτικό επίπεδο του πατέρα με το άγχος των φοιτητών που επίσης συσχετίζεται αδύναμα και αρνητικά (r = -0,156, p = 0,02). Έτσι φάνηκε πως το μορφωτικό επίπεδο των γονέων συσχετίζεται αρνητικά με το μαθηματικό άγχος των συμμετεχόντων. Δηλαδή όσο μικρότερο είναι το μορφωτικό επίπεδο των γονιών, τόσο μεγαλύτερο είναι το μαθηματικό άγχος των φοιτητών.

Τέλος, για την εξέταση του ΕΕ 4 υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι άγχους των συμμετεχόντων απέναντι στα μαθηματικά σε κάθε κατεύθυνση που ακολούθησαν για να εισαχθούν στις σχολές τους. Η σύγκριση μεταξύ των τριών κατευθύνσεων για την εύρεση στατιστικά σημαντικών διαφορών στους μέσους όρους έγινε ανά δύο. Έτσι, το μαθηματικό άγχος που εμφάνισαν οι φοιτητές που εισήχθησαν από τη Θετική κατεύθυνση (Μ.Ο = 2,09, Τ.Α = 0,59) ήταν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερο από το άγχος που εμφάνισαν οι φοιτητές που εισήχθησαν από τη Θεωρητική κατεύθυνση (Μ.Ο = 2,52, Τ.Α = 0,64), t(206)= 3,44, p=0,01. Η διαφορά μαθηματικού άγχους μεταξύ φοιτητών που εισήχθησαν από Θετική κατεύθυνση και αυτών της Τεχνολογικής (Μ.Ο = 2,18, Τ.Α = 0,63) δεν ήταν στατιστικά σημαντική t(41)=0,48, p=0,663 όπως ούτε η διαφορά μεταξύ εισαχθέντων από Θεωρητική και Τεχνολογική κατεύθυνση t(191)=1,92, p=0,06.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη αποσκοπούσε στη διερεύνηση των διαφόρων παραγόντων που διαφοροποιούν ως προς το μαθηματικό άγχος και εστίασε σε δείγμα Ελλήνων φοιτητών Παιδαγωγικών τμημάτων. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι κύρια κατηγορία παραγόντων που επιδρούν στην ύπαρξη μαθηματικού άγχους αποτελεί αυτή των παραγόντων προσωπικότητας. Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται παράγοντες όπως η αδυναμία συμμέτοχης στο μάθημα λόγω ντροπής και οι προσωπικές πεποιθήσεις των φοιτητών που αφορούν την μάθηση των μαθηματικών. Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με αυτό των Παντζιαρά και Φιλίππου (2009) ότι πράγματι η προσωπικότητα του καθενός αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο της στάσης του απέναντι στα μαθηματικά και επομένως στη διαμόρφωση χαμηλού ή υψηλού επιπέδου άγχους όταν πρόκειται να τα αντιμετωπίσει.

Το φύλο δεν φάνηκε να διαφοροποιεί ως προς το μαθηματικό άγχος, αποτέλεσμα που συμφωνεί με τα αντίστοιχα προηγούμενων μελετών (Dowker κ.α., 2016). Το ελάχιστα αυξημένο μαθηματικό άγχος των γυναικών μπορεί να προέλθει από διάφορες πηγές, συμπεριλαμβανομένης της έκθεσης σε στερεότυπα φύλου όπως για παράδειγμα ότι τα μαθηματικά αποτελούν "αντρικό τομέα" (Yamani κ.α., 2018).

Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα θα πρέπει να προσεγγίζονται με προσοχή λόγω της μεγάλης ανισότητας του δείγματος ως προς τα δυο φύλα.

Αναφορικά με τη σχέση μεταξύ μορφωτικού επιπέδου γονιών και μαθηματικού άγχους φοιτητών, τα αποτελέσματα έδειξαν αδύναμη αρνητική συσχέτιση. Αυτό το αποτέλεσμα είναι συμβατό με αποτελέσματα πρόσφατων ερευνών, όπου φάνηκε ότι υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ μορφωτικού επιπέδου γονιών που έχουν μαθηματικό άγχος και της μαθηματικής επίδοσης των παιδιών τους (Maloney, Ramirez, Gunderson, Levine & Beilock, 2015). Ο Geist (2010) εξηγεί ότι οι γονείς χαμηλού μορφωτικού επιπέδου έχουν λιγότερες γνώσεις μαθηματικών εννοιών και μια αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά που οδηγεί στο μαθηματικό άγχος και μια αποστροφή προς αυτά. Αυτό, κατ' επέκταση, μπορεί να εμποδίσει την ικανότητά τους να ενθαρρύνουν και να βοηθήσουν το παιδί τους με τη μάθηση των μαθηματικών. Έτσι, τα παιδιά δύναται να αποκτούν με τη σειρά τους αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά που οδηγεί στην απόκτηση μαθηματικού άγχους.

Η στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους μαθηματικού άγχους των φοιτητών που εισήχθησαν από τη Θετική κατεύθυνση σε σύγκριση με αυτούς που εισήχθησαν από τη Θεωρητική κατεύθυνση, είναι ενδεικτικό του ότι οι μαθητές που ασχολούνται με τα μαθηματικά πιο συχνά κατά τη σχολική τους πορεία, εμφανίζουν μικρότερα επίπεδα μαθηματικού άγχους. Περαιτέρω, αυτή η διαφορά δείχνει ότι οι μαθητές επιλέγουν κατεύθυνση ανάλογα με το επίπεδο τους στα μαθηματικά και με την αυτοπεποίθηση που έχουν με αυτά. Αυτό είχε εμφανιστεί και σε προηγούμενες μελέτες σε δείγμα Ελλήνων μαθητών δημοτικού σχολείου (Αποστολοπούλου, 2011) και επίσης, έρχεται σε συμφωνία με το εύρημα των Κυριακορεΐζη και Δεσλή (2014) που σε δείγμα υποψήφιων μελλοντικών δασκάλων του δημοτικού βρήκαν ότι οι φοιτητές που προέρχονται από κατευθύνσεις λιγότερο σχετικές με τα μαθηματικά, εξέφραζαν συχνότερα αρνητικά συναισθήματα, όπως μαθηματικό άγχος.

Παράγοντες προσωπικότητας όπως οι πεποιθήσεις των φοιτητών για τα μαθητικά και οι στάσεις που διαμορφώνουν απέναντι σε αυτά φάνηκε να αποτελούν τους σημαντικότερους παράγοντες που επηρεάζουν το μαθηματικό άγχος. Καθώς οι φοιτητές των συγκεκριμένων τμημάτων θα αποτελέσουν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και είναι αυτοί που θα δημιουργούν ένα περιβάλλον μάθησης στο οποίο αναπτύσσονται πεποιθήσεις και στάσεις για στα μαθηματικά, οι προσωπικές τους πεποιθήσεις και στάσεις είναι πολύ σημαντικές λόγω της δυνατότητας να μεταφερθούν στους μαθητές τους. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να βρεθούν τρόποι, τουλάχιστον κατά τη φοίτηση τους στα παιδαγωγικά τμήματα και πριν εκτεθούν στην πραγματικότητα της μαθηματικής τάξης και εμπλακούν με μαθητές, να έχουν καταφέρει οι ίδιοι να αναπτύξουν θετικότερες στάσεις απέναντι στα μαθηματικά και να κατευνάσουν το δικό τους μαθηματικό άγχος. Επίσης, είναι σημαντικό σε μελλοντικές έρευνες να εξεταστούν παράγοντες επάρκειας της μαθηματικής γνώσης και της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου των μαθηματικών στην πρόκληση μαθηματικού άγχους στους εκπαιδευτικούς και τρόποι να μειωθεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Beckdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics, 75*(3), 311-328.

Brown, M., Brown, P., & Bibby, T. (2008). "I would rather die": reasons given by 16-year-olds for not continuing their study of mathematics. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 3-18.

Di Martino, P. & Zan, R. (2001). *Attitude toward mathematics: some theoretical issues*. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 351-358). Utrecht, Netherlands.

Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology*, 7, 1-16.

Ganley, C. M., George, C. E., Cimpian, J. R., & Makowski, M. B. (2018). Gender equity in college majors: Looking beyond the STEM/Non-STEM dichotomy for answers regarding female participation. *American Educational Research Journal, 55*, 453-487.

Geist, E., (2010). The anti-anxiety curriculum: Combating math anxiety in the classroom. *Journal of Instructional Psychology*, 37(1), 24-31.

Maloney, E. A., Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2015). Intergenerational Effects of Parents' Math Anxiety on Children's Math Achievement and Anxiety. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(9), 206–223

Richardson, F., & Suinn, R. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), 551-554.

Trujillo, K., & Hadfield, O. (1999). Tracing the Roots of Mathematics Anxiety through In-Depth Interviews with Preservice Elementary Teachers. *College Student Journal, 33*(2), 219-232.

Yamani, M., Almala, A., Elbedour, S., Woodson, K., & Reed, G. (2018). Math Anxiety: Trends, Issues and Challenges. *Journal of Psychology and Clinical Psychiatry, 9*(1), 63-73

Αποστολοπούλου, Β (2011). *Άγχος και μαθηματικά: Άγχος και στάσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών: Η σημασία τους στη μαθηματική εκπαίδευση στο Δημοτικό σχολείο* (Διδακτορική διατριβή), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο, Αθήνα.

Κυριακορεΐζη, Α., & Δεσλή, Δ. (2014). *Άγχος υποψηφίων εκπαιδευτικών και επίλυση προβλήματος*. Πρακτικά του 5ου Συνέδριου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, Φλώρινα.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Λεοντίου, Ε (2015) *Γονική εμπλοκή για τα Μαθηματικά.* Πρακτικά του 6ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (σσ. 539-548), Θεσσαλονίκη.

Παντζιαρά, Μ., & Φιλίππου, Γ. (2009). *Κίνητρα και Επίδοση των Μαθητών στα Μαθηματικά*. Άρθρο που παρουσιάστηκε στο Συνέδριο Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης (ΚΕΕΑ). Εκπαιδευτική Έρευνα και Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών στην Κύπρο (σσ. 147-160). Λευκωσία, Κύπρος.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας: Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών*. Αθήνα: Ατραπός.

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Ματθαίος Αντωνόπουλος[1], Ελεωνόρα Αντωνοπούλου[2],

[1, 2]Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

[1]m.antonopoulos@outlook.com, [2]eleonora_antonopoulou@yahoo.gr,

Η εργασία αφορά στη μελέτη περίπτωσης μιας μεταπτυχιακής φοιτήτριας της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών και ενός μεταπτυχιακού φοιτητή της Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας. Διερευνώνται η διαφοροποίηση της επιχειρηματολογίας των συμμετεχόντων ανάλογα με το γνωστικό τους υπόβαθρο αλλά και τον τρόπο με τον οποίο πείθονται οι ίδιοι ή προσπαθούν να πείσουν κάποιον άλλο. Οι συμμετέχοντες καλούνται να επιχειρηματολογήσουν σε ένα προβλήμα πιθανοτήτων. Τα αποτελέσματα σε πρώτο επίπεδο φανερώνουν τη διαφορετικότητα της επιχειρηματολογίας ανάλογα με το γνωστικό υπόβαθρο του συμμετέχοντα. Σε δεύτερο επίπεδο φαίνεται να υπάρχει διαφορά στον τρόπο που ο συμμετέχοντας πείθεται και στον τρόπο που προσπαθεί να πείσει κάποιον άλλο.

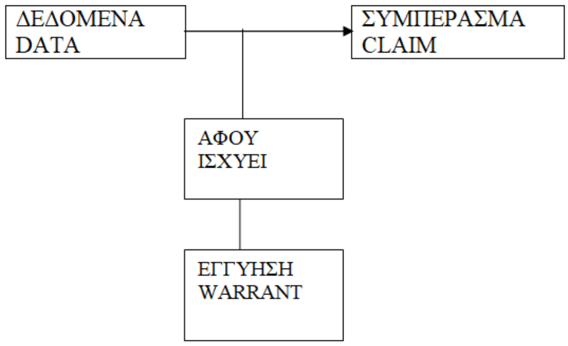
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι πιθανότητες και η στατιστική είναι μέρος των μαθηματικών που διδάσκονται σήμερα στο σχολείο τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι λόγοι είναι αρκετοί και έχουν επισημανθεί πολλές φορές και μερικοί από αυτούς είναι η χρησιμότητά τους στην καθημερινή ζωή, η ανάγκη για βασικές στοχαστικές γνώσεις σε πολλά επαγγέλματα καθώς και ο κεντρικός ρόλος τους στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης. Τα στοχαστικά αντικείμενα είναι δύσκολο να διδαχτούν καθώς ο διδάσκοντας καλείται να παρουσιάσει διαφορετικά μοντέλα, και παράλληλα να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν σωστή διαίσθηση, να ερμηνεύσουν σωστά τα δεδομένα ή να επιλέξουν το καταλληλότερο στοχαστικό μοντέλο Batanero κ.ά. (2004).

Σύμφωνα με τους Batanero κ.ά.(2004) οι στρατηγικές που ακολουθούν οι επαγγελματίες στατιστικολόγοι είναι εντελώς διαφορετικές από αυτές των φοιτητών όταν λύνουν ένα όμοιο πρόβλημα. Οι στατιστικολόγοι χρησιμοποιούν τα στοιχεία του προβλήματος με πιο σαφή και αυστηρό τρόπο.

Το περιορισμένο σχήμα του Toulmin.

Για να έχει υπόσταση ένα επιχείρημα είναι αναγκαία η ύπαρξη δεδομένων καθώς χωρίς αυτά δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπέρασμα ή κάποιο ισχυρισμό του οποίου η αλήθεια τίθεται προς μελέτη. Για τη μετάβαση από τα δεδομένα στο συμπέρασμα είναι απαραίτητη η ύπαρξη εγγυήσεων οι οποίες θα απαντούν σύμφωνα με τον Toulmin, στο ερώτημα «Πως είναι δυνατό από αυτά τα δεδομένα να καταλήξω στο συμπέρασμα αυτό;». Η φύση των εγγυήσεων είναι αιτιολογική, παρ’όλα αυτά η διαφορά τους με τα δεδομένα δεν είναι πάντα εμφανείς ωστόσο οι λειτουργίες τους στο επιχείρημα είναι διακριτές.Τα δεδομένα οφείλουν να είναι ρητά διατυπωμένα ενώ οι εγγυήσεις σε αρκετές περιπτώσεις είναι υπονοούμενες και άρρητες. Οι εγγυήσεις γενικά πιστοποιούν την ορθότητα όλων των επιχειρημάτων διατυπώνονται με διαφορετικό τρόπο από αυτόν των δεδομένων.



Σχήμα 1. Το περιορισμένο σχήμα του Toulmin

Ο πρώτος που χρησιμοποίησε το σχήμα Toulmin σαν εργαλείο ανάλυσης για τη δομή ενός επιχειρήματος ήταν ο Krummheuer (2007). Μελέτησε τη συλλογική επιχειρηματολογία της τάξης αναλύοντας τα στοιχεία που προσθέτει ο κάθε μαθητής την ώρα της αλληλεπίδρασης. Οι Weber, Maher, Powell και Stohl – Lee (2008), χρησιμοποιώντας το εν λόγω σχήμα ανέλυσαν την επιχειρηματολογία κατά την επίλυση προβλήματος στα πεδία της στατιστικής και των πιθανοτήτων μελετώντας το πώς ο διάλογος βοηθά στην απόκτηση της γνώσης.

Οι Giannakoulias, Mastorides, Potari, & Zachariades (2010) επέλεξαν το περιορισμένο σχήμα Toulmin ώστε να κατηγοριοποιήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι καθηγητές επιχειρηματολογούν όταν προσπαθούν να πείσουν τους μαθητές για λανθασμένα επιχειρήματα που εκείνοι έχουν κατασκευάσει. Στην έρευνα φαίνεται η μεθοδολογία που επιλέγεται να είναι ανάλογη των γνώσεων του κάθε καθηγητή. Αντίστοιχη έρευνα των Nardi, Biza & Zachariades (2012) έδειξε ότι ένας εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί πολλών τύπων εγγυήσεις κατά την επιχειρηματολογία του.

Οι Inglis κ.ά. (2007) όρισαν τρείς τύπους εγγυήσεων: Τον επαγωγικό, τον δομικό-διαισθητικό και τον παραγωγικό τύπο εγγύησης. Στον επαγωγικό τύπος εγγύησης χρησιμοποιούνται παραδείγματα όλων των ειδών, αντιπαραδείγματα αλλά και παραδείγματα γεννήτορες με στόχο τη μείωση της αβεβαιότητας. Στον δομικό-διαισθητικό τύπος εγγύησης χρησιμοποιούνται διάφορες παρατηρήσεις ή κάποιου είδους νοητικές δομές οπτικού ή άλλου τύπου, μάλιστα σε αυτόν ο βαθμός βεβαιότητας δεν είναι απόλυτος καθώς χρησιμοποιείται για τη μείωση της αβεβαιότητας και υπάρχουν περιπτώσεις που μπορεί να υποστηρίζει κάποιο ψευδές συμπέρασμα. Η τελευταία κατηγορία είναι ο παραγωγικός τύπος εγγύησης δηλαδή τυπικές μαθηματικές εγγυήσεις οι οποίες προκύπτουν από αξιώματα, αλγεβρικούς χειρισμούς και αντιπαραδείγματα. Η αβεβαιότητα αφαιρείται πλήρως καθώς τα επιχειρήματα αυτής της κατηγορίας δεν επιδέχονται κάποιας αντίκρουσης.

Σύμφωνα με τους Harel και Sowder (1998) τα αποδεικτικά σχήματα δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα καθώς μπορούν να έχουν περισσότερα του ενός σχήματα, υπό αυτό το πρίσμα η επιβεβαίωση και η διαβεβαίωση μπορεί να χρησιμοποιούν εντελώς διαφορετικά σχήματα όπως διαφορετικές εγγυήσεις. Μελετώντας πιο προσεκτικά την κατηγοριοποίηση των εγγυήσεων μπορούμε να κάνουμε δύο σημαντικές παρατηρήσεις. Πρώτον βλέπουμε ότι μόνο ο παραγωγικός τύπος εγγυήσεων παρέχει τυπικές μαθηματικές αιτιολογήσεις καθώς ο δομικός-διαισθητικός τύπος εγγύησης όπως και ο επαγωγικός θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως μη τυπικοί εφόσον ο βαθμός βεβαιότητάς τους και στις δύο περιπτώσεις δεν είναι απόλυτος. Δεύτερον προκύπτει η ανάγκη σε περιπτώσεις που σε κάποια από τις απαντήσεις συνυπάρχουν παραπάνω του ενός τύποι εγγυήσεων να μπορέσει να γίνει χαρακτηρισμός χωρίς αυτή η συνύπαρξη των εγγυήσεων να αποκρύπτεται.

Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για τις εγγυήσεις την κατηγοριοποίηση: τυπικές (formal) για τον παραγωγικό τύπο εγγυήσεων, μη τυπικές (informal) για τον δομικό-διαισθητικό και επαγωγικό τύπο εγγυήσεων και πολλαπλές (multiple) για τις περιπτώσεις συνύπαρξης παραπάνω του ενός τύπων εγγυήσεων.

Πείθω και πείθομαι.

Το αποδεικτικό σχήμα σύμφωνα με τους Harel και Sowder (1998) αποτελείται από αυτό που πείθει το ίδιο το άτομο (επιβεβαίωση) αλλά και αυτό το οποίο το άτομο κρίνει ότι θα πείσει κάποιους άλλους (διαβεβαίωση). Ακόμη προτείνουν μια ταξινόμηση των αποδεικτικών σχημάτων στα είδη των επιχειρημάτων που χρησιμοποιούν οι μαθητές τόσο για να πείσουν τον εαυτό τους (για να αφαιρέσουν τις δικές τους αμφιβολίες) και για να πείσουν τους άλλους (να άρουν τις επιφυλάξεις των άλλων) για την αλήθεια μιας δήλωσης Harel και Sowder (1998) από Inglis, M. & Mejia-Ramos, J. P. (2008).

Παρατηρούμε ότι παρουσιάζεται διαφορά στον τρόπο που επιχειρηματολογεί κάποιος για να πείσει τον εαυτό του ή για να πείσει τους άλλους. Η προσπάθεια του συμμετέχοντα να πείσει τον εαυτό του μπορεί να χαρακτηριστεί εσωτερική συνέπεια, ενώ να πείσει κάποιον άλλο εξωτερική συνέπεια του συμμετέχοντα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πρόβλημα

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει το πώς διαφοροποιείται ένα άτομο στον τρόπο που επιχειρηματολογεί όταν προσπαθεί να πείσει τον εαυτό του σε σχέση με όταν προσπαθεί να πείσει τους άλλους. Επίσης διερευνάται το πώς το γνωστικό του υπόβαθρο, σε θέματα που αφορούν τις πιθανότητες στα Μαθηματικά, επηρεάζει το άτομο που επιχειρηματολογεί.

Ερευνητικά Εργαλεία

Για την πραγματοποίηση της έρευνας χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο και πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις. Η κάθε συνέντευξη ήταν ημι-δομημένη κι οι ερωτήσεις χωρίζονται σε δύο άξονες: ο πρώτος αφορά στο τι πείθει τον συμμετέχοντα για την ορθότητα της απάντησής του και ο δεύτερος στο πώς εκείνος θα έπειθε κάποιον άλλο.

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν ένας μεταπτυχιακός φοιτητής της Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας και μία μεταπτυχιακή φοιτήτρια της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών. Η επιλογή των συμμετεχόντων έγινε από δύο διαφορετικά μεταπτυχιακά λόγω του διαφορετικού γνωστικού υπόβαθρου που προσφέρει κάθε ένα από αυτά. Και οι δύο φοιτητές είχαν διδαχθεί σε προπτυχιακό επίπεδο το μάθημα της Θεωρίας Πιθανοτήτων όμως ο πρώτος συμμετέχοντας είχε υψηλότερο γνωστικό υπόβαθρο καθώς στο μεταπτυχιακό του είχε διδαχθεί ένα σημαντικό πλήθος μαθημάτων που αφορούσαν το πεδίο των πιθανοτήτων σε σχέση με το δεύτερο συμμετέχοντα που είχε αρκετά χρόνια να ασχοληθεί με ανάλογα μαθήματα.

Μέθοδος και τρόπος ανάλυσης των δεδομένων

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι ποιοτική και συγκεκριμένα μελέτη περίπτωσης. Δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο προς συμπλήρωση χωρίς κάποιο χρονικό περιορισμό για τη συμπλήρωσή του. Μαζί με το ερωτηματολόγιο δόθηκαν λευκές κόλλες για πρόχειρο οι οποίες αξιοποιήθηκαν και αυτές στα αποτελέσματα της έρευνας. Επιπλέον λίγα λεπτά μετά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου έλαβαν χώρα οι συνεντεύξεις στις οποίες έγινε μαγνητοφώνηση. Πριν την τελική κατασκευή του ερωτηματολογίου και του πρωτόκολλου συνέντευξης είχε προηγηθεί πιλοτική εφαρμογή.

Θα χρησιμοποιήσουμε το περιορισμένο σχήμα Toulmin για να καταγράψουμε τις απαντήσεις των συμμετεχόντων. Επίσης γίνεται προσπάθεια οι εγγυήσεις να χαρακτηριστούν με βάση την κατηγοριοποίησή τους σε τυπικές, μη τυπικές ή πολλαπλού τύπου όπως ήδη ειπώθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο.

Η επιλογή του προβλήματος

Το πεδίο των πιθανοτήτων έχει συνδεθεί με ένα μεγάλο αριθμό παραδόξων τα οποία φανερώνουν τη διαφορά ανάμεσα στη διαίσθηση και την εννοιολογική ανάπτυξη του πεδίου (Borovcnik , et al . 1991) από Batanero κ.ά. 2004. Με βάση τα παραπάνω επιλέχθηκε σαν πρόβλημα το δίλημμα του Monty Hall.

Ερωτηματολόγιο

1) Σε ένα τηλεπαιχνίδι πίσω από τρεις πόρτες τοποθετούνται ένα σπορ αμάξι και δύο κατσίκες. Ο παρουσιαστής γνωρίζει ποια πόρτα κρύβει το αυτοκίνητο. Καλείστε να επιλέξετε μία πόρτα από τις τρεις.

2) Στη συνέχεια ο παρουσιαστής, ανοίγει κάποια πόρτα από τις άλλες δύο που δεν επιλέξατε, η οποία περιέχει μια κατσίκα. Έχετε τη δυνατότητα είτε να επιμείνετε στην αρχική σας επιλογή είτε να αλλάξετε και να επιλέξετε την άλλη πόρτα που έχει απομείνει. Τι έχετε συμφέρον να κάνετε; Επιχειρηματολογήστε για την επιλογή σας.

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών

Αποτελέσματα ερωτηματολογίου

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης η Στέλλα έδειξε αρκετά μεγάλο βαθμό βεβαιότητας χωρίς όμως να είναι απόλυτα σίγουρη. Δηλώνει ότι η ίδια πείθεται μέσω των πιθανοτήτων, όμως στην ερώτηση αν προσπαθούσε να πείσει κάποιον άλλο αν θα άλλαζε κάτι απάντησε «ίσως όχι πάρα πολλά γιατί δεν το έχω εξηγήσει με μεγάλη αυστηρότητα» πράγμα που δείχνει ότι έχει την εσωτερική ανάγκη να δώσει μια περισσότερο τυπική απάντηση χωρίς να μπορεί. Στην ερώτηση τι την κάνει να πιστεύει ότι η απάντηση δεν είναι τόσο αυστηρή ισχυρίζεται «είναι λεκτική… παρά με τύπους» και πως ίσως η απάντηση να μην αρκούσε για πιθανές εξετάσεις καθώς ο εξεταστής «περιμένει σαφώς μια πιο αυστηρή αλγεβρική διατύπωση».

ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΑΣ	ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΕΓΓΥΗΣΕΙΣ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Μεταπτυχιακή φοιτήτρια Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών			
		Αρχικά:≅ 33% η κάθε μία Δεν αλλάζω: η πιθανότητα να είναι στη 2 είναι ≅ 33% Αλλάζω: η πιθανότητα να μην είναι στη 2 είναι ≅ 66% **(I)**	Άρα με συμφέρει να αλλάξω στην 3.

Πίνακας 1

Μεταπτυχιακός φοιτητής της Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας

Αποτελέσματα ερωτηματολογίου

Ο Πέτρος θεωρεί ότι δίνει τη σωστή απάντηση γιατί όπως λέει «έχω χρησιμοποιήσει βασικά θεωρήματα των πιθανοτήτων». Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ισχυρισμός του ότι η τακτική που θα ακολουθούσε για να πείσει κάποιον άλλο εξαρτάται από τη γνώση που θεωρεί ότι εκείνος έχει. Η εγγύηση που δίνει μπορεί να χαρακτηριστεί ως τυπική καθώς χρησιμοποιεί εξειδικευμένες γνώσεις πιθανοτήτων. Δε χρησιμοποίησε καθόλου το πρόχειρο που του είχε δοθεί.

ΣΥΜΜΕΤΕΧΟ-ΝΤΑΣ	ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΕΓΓΥΗΣΕΙΣ	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ-ΤΑ
Μεταπτυχιακός Φοιτητής της Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας			
	Έστω ότι επιλέγω την πόρτα 1 και ανοίγει η πόρτα 3, άρα θέλω να εξετάσω τι με συμφέρει- να παραμείνω στην πόρτα 1 ή να επιλέξω την πόρτα 2 Ορίζω τις ακόλουθες μεταβλητές Υ =i ανοίγει η πόρτα Ι,	Συνεπώς θέλω να συγκρίνω τις πιθανότητες P(X=1/Y=3), P(X=2/Y=3) P(X=1/Y=3)=$\frac{P(X=1,Y=3)}{P(Y=3)}$ =$\frac{P(Y=3/X=1)P(X=1)}{P(Y=3)}$ (1) Ομοίως P(X=2/Y=3)=$\frac{P(Y=3/X=2)P(X=2)}{P(Y=3)}$ (2) Θεωρώ ότι το αυτοκίνητο τοποθετήθηκε τυχαία, δηλ. P(X=i)=1/3, i=1,2,3.. P(Y=3)= $\sum_{i=1}^{3} P(Y = 3 \backslash X = i)P(X = i)$= P(Y=3\X=1) +	Συμφέρει να αλλάξω, δηλ. να επιλέξω την πόρτα 2 αφού αυξάνω την πιθανότητα κέρδους σε 2/3 αντί 1/3 σε περίπτωση που παραμείνω στην πόρτα 1.

	i=1,2,3 X=i το αυτοκίνητο βρίσκεται πίσω από την πόρτα i, i=1,2,3	P(Y=3\X=2)P(X=2) +P(Y=3\X=3)P(X=3)=1/2*1/3+ 1*1/3+0*1/3=1/2 (1)=>P(X=1\Y=3)=$\frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$ (2)=>P(X=2\Y=3)=$\frac{1*\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=$ $\frac{2}{3}$**(F)**	

Πίνακας 2

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σύμφωνα με τους Batanero κ.ά. (2004) τα στοχαστικά αντικείμενα είναι δύσκολο να διδαχτούν καθώς ο διδάσκοντας καλείται να παρουσιάσει διαφορετικά μοντέλα, και παράλληλα να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν σωστή διαίσθηση, να ερμηνεύσουν σωστά τα δεδομένα ή να επιλέξουν το καταλληλότερο στοχαστικό μοντέλο κάτι που καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη τη πιθανοθεωρητική επιχειρηματολογία. Κάτι τέτοιο φαίνεται να παρουσιάζεται και στους δύο συμμετέχοντες οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετικά μοντέλα απαντήσεων.

Σύμφωνα με την ίδια έρευνα οι στατιστικολόγοι χρησιμοποιούν τα στοιχεία του προβλήματος με πιο σαφή και αυστηρό τρόπο όπως φάνηκε και στη συγκεκριμένη εργασία. Ακόμη σύμφωνα με τα λεγόμενα των Giannakoulias κ.ά. (2010) η επιχειρηματολογία είναι ανάλογη των γνώσεων του καθηγητή κάτι το οποίο φαίνεται και εδώ μέσα από τη συγκριτική μελέτη των συμμετεχόντων. Το γνωστικό υπόβαθρο δείχνει να παίζει καταλυτικό ρόλο στην επιχειρηματολογία και τις εγγυήσεις που δίνονται κυρίως ως προς την αυστηρότητα που χαρακτηρίζει αυτές καθώς ο Πέτρος χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη τυπικότητα στις εγγυήσεις που δίνει.

Οι Harel και Sowder (1998) αναφέρουν πως τα αποδεικτικά σχήματα δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα καθώς μπορούν να έχουν περισσότερα του ενός σχήματα όπως και διαφορετικές εγγυήσεις. Έρευνα των Nardi κ.ά.(2011) έδειξε ότι ένας εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί πολλών τύπων εγγυήσεις κατά την επιχειρηματολογία του κάτι το οποίο παρουσιάστηκε στις πολλαπλές εγγυήσεις που έδωσε ο Πέτρος.

Το αποδεικτικό σχήμα των Harel και Sowder (1998) φαίνεται έντονα στην περίπτωση της Στέλλας καθώς παρουσιάζεται διαφορά ανάμεσα στον τρόπο που προσπαθεί να πείσει τον εαυτό της κατά την χρήση του πρόχειρου και στον τρόπο που προσπαθεί να πείσει τους άλλους κατά την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου που της δόθηκε. Αντίθετα στην περίπτωση του Πέτρου, ίσως λόγω του υψηλού γνωστικού του υπόβαθρου, η διαφοροποίηση αυτή δεν είναι τόσο έντονη καθώς ο ίδιος δείχνει να σκέφτεται με μεγάλη μαθηματική αυστηρότητα. Μάλιστα αξιοσημείωτο είναι πως ο Πέτρος νοιώθει ιδιαίτερη άνεση με αποτέλεσμα να μη χρησιμοποιεί πρόχειρο άρα ο τρόπος που προσπαθεί να πείσει τον εαυτό του είναι δύσκολο να αξιολογηθεί. Το γνωστικό υπόβαθρο παίζει κεντρικό ρόλο στον τρόπο της επιχειρηματολογίας των συμμετεχόντων καθώς ο Πέτρος χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη αυστηρότητα στις απαντήσεις του.

Μέσα από τη συζήτηση προκύπτει πως ο τρόπος επιχειρηματολογίας ενός ατόμου διαφοροποιείται ανάλογα με το αν προσπαθεί να πείσει τον εαυτό του ή τους άλλους. Επιπλέον, το γνωστικό υπόβαθρο καθορίζει τον τύπο εγγυήσεων που κάποιος χρησιμοποιεί κατά την επιχειρηματολογία του. Τέλος ενδιαφέρον θα είχε κάποια μελλοντική μελέτη στο πώς διαφοροποιείται η επιχειρηματολογία στις πιθανότητες ανάλογα με το σε ποιον απευθύνεται ο συμμετέχοντας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probabiblity. *Journal of Statistics Education*, 24(1) . www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers'mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29, 160-168.

Harel,G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds), *Research in collegiate mathematics education*, 3, 234- 283. Providence: AMS.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007) Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, pp. 3-21.

Inglis, M. & Mejia-Ramos, J. P. (2008). How persuaded are you? A typology of Responses. *Research in Mathematics Education*, 10 (2), 119-133.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, pp. 60-82.

Nardi, E., Biza, I. & Zachariades, T. (2012). Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model of argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79, pp. 157-173.

Toulmin, S. (1958). The Uses of Argument. UK. *Cambridge University Press*.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Stohl Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics,* 68, pp. 247-261.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΙΚΑΣΤΙΚΩΝ ΤΕΧΝΩΝ: ΟΠΤΙΚΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Χρυσούλα Χούτου, Δέσποινα Πόταρη

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

chrychou@math.uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τις διδακτικές και μαθησιακές συνδέσεις που βλέπουν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών και εικαστικών μεταξύ των δύο πεδίων. Η έρευνα λαμβάνει χώρα σε δύο καλλιτεχνικά σχολεία. Σε κάθε ένα από αυτά, έχει οργανωθεί μία ομάδα συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών των δύο ειδικοτήτων, όπου η πρώτη ερευνήτρια (ΕΡ1) υποστηρίζει την εμπλοκή τους σε διερεύνηση και αναστοχασμό πάνω σε κατάλληλα υλικά, σχετικά με τις ενδεχόμενες συνδέσεις. Τα δεδομένα προέρχονται από 6 συναντήσεις της μιας ομάδας και αναλύονται με τεχνικές θεμελιωμένης θεωρίας. Τα αποτελέσματα δείχνουν πληθώρα συνδέσεων που αφορούν στο περιεχόμενο, στη διδασκαλία, στη μάθηση, στο πλαίσιο συνεργασίας και στο κοινωνικό-θεσμικό πλαίσιο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και εκ πρώτης όψεως τα μαθηματικά και η τέχνη ίσως φαίνονται δύο πεδία αντίθετα, διάφορες έρευνες μοιράζονται ποικίλες συνδέσεις μεταξύ των δυο (κοινές έννοιες, διεργασίες, διαδικασίες) (π.χ. Cucker, 2013), ακόμα και σε εκπαιδευτικά επίπεδα (π.χ. κοινό περιεχόμενο μεταξύ αναλυτικών προγραμ-μάτων) (π.χ. Bickley-Green, 1995). Πρόσφατη έρευνα αφορά στη μελέτη *της ενσωμάτωσης των τεχνών* σε άλλα μαθήματα και τα οφέλη που αυτή παρέχει στη μάθηση όπως: υποστήριξη διαφορετικών στυλ μάθησης (An, & Tillman, 2014), ενίσχυση κινήτρων-συναισθημάτων και κατασκευή νοηματοδοτη-μένης γνώσης (Baird, 2015). Στα οφέλη της ενσωμάτωσης με τα μαθηματικά αναφέρονται: εμπλοκή σε διαδικασίες όπως η επίλυση προβλήματος και η μοντελοποίηση (Jacobs, 2000), υποστήριξη διερευνητικών προσεγγίσεων μάθησης μέσω της διαδικασίας δημιουργίας τέχνης (von Renesse & Ecke, 2016), ανάπτυξη μαθηματικού τρόπου σκέψης και σύνδεση των μαθηματικών της τάξης με προσωπικές εμπειρίες των μαθητών (Presmeg, 2009).

Οι συνδέσεις μεταξύ της διδασκαλίας των μαθηματικών και της τέχνης μπορούν να φτάσουν σε επίπεδο ενιαίου, καθολικού αναλυτικού προγράμματος, όπου οι εκπαιδευτικοί και των δυο μαθημάτων καλούνται να συνεργαστούν για να τα αναδιαμορφώσουν (Bickley-Green, 1995). Στην πραγματικότητα όμως η σύνδεση των μαθηματικών και της τέχνης στη διδασκαλία δεν είναι εύκολη. Έρευνες υποστηρίζουν την ανάγκη επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών των μη καλλιτεχνικών μαθημάτων μέσα από συνεργασία με «ειδικούς» του καλλιτεχνικού χώρου και επισκέψεις τους σε καλλιτεχνικά και εκπαιδευτικά περιβάλλοντα (Jacobs, 2000). Οι «ειδικοί» μπορεί να είναι είτε εξωτερικοί (που δεν ανήκουν στο σχολικό τους περιβάλλον), είτε οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί των καλλιτεχνικών του σχολείου τους, ώστε μέσα από διαδικασίες παρατήρησης, συζητήσεων και πειραματισμού να διαμορφώσουν τη διδασκαλία τους (Kind et al, 2007).

Ο Cochran (2016) υποστηρίζει ότι πρέπει να εστιάσουμε στο τι πιστεύουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί για την επαγγελματική μάθηση που δέχονται και τονίζει ότι χρειάζονται έρευνες που να βρουν τον σύνδεσμο που συνδέει την ενσωμάτωση της τέχνης, την επαγγελματική μάθηση και την πρακτική των εκπαιδευτικών. Είναι λίγες οι έρευνες που αφορούν στην αξιοποίηση της τέχνης στη διδασκαλία των μαθηματικών, με συνήθη τη μουσική (π.χ. An & Tillman, 2014) ή το δράμα (Σταθοπούλου et al., 2010), ενώ πολλές φορές επικεντρώνονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Επίσης, χρειάζονται περισσότερες έρευνες που να επικεντρώνονται στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών μαθηματικών μέσα από τη συνεργασία μεταξύ τους (π.χ. Σιώπη & Χασάπης, 2013) αλλά και με εκπαιδευτικούς άλλων ειδικοτήτων.

Στην έρευνά μας εστιάζουμε στη δημιουργία μιας συνεργασίας μεταξύ των δύο πεδίων, μέσω της συνεργασίας των εκπαιδευτικών των μαθηματικών και των καλλιτεχνικών. Στο παρόν άρθρο, μας ενδιαφέρει η πλευρά των εκπαιδευτικών, που βρίσκονται μέσα σε μία τέτοια συνεργασία, όσον αφορά στις ενδεχόμενες συνδέσεις. Το ερευνητικό ερώτημα εδώ είναι: Τι συνδέσεις βλέπουν οι εκπαιδευτικοί μεταξύ των μαθηματικών και των εικαστικών τεχνών όσον αφορά στη διδασκαλία και στη μάθηση;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Αναφορικά με την ενσωμάτωση των τεχνών, οι Burnaford et al. (2007) παραθέτουν όρους όπως *αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών με έγχυση των τεχνών*, *μάθηση μέσα και μέσω των τεχνών*, *μάθηση με τις τέχνες* και οι *τέχνες ως όχημα για τη μάθηση*, αλλά και χαρακτηρισμούς όπως *η προσπάθεια κατασκευής ενός συνόλου σχέσεων μεταξύ της μάθησης στις τέχνες και της μάθησης σε άλλα πεδία του αναλυτικού προγράμματος*. Αναφέρουν, επίσης, διάφορα σημεία εστίασης της εν λόγω ενσωμάτωσης, όπως τη βεβαιότητα της σημασίας της εκτίμησης του πως και τι μαθαίνουν οι μαθητές ως στοιχεία της πρακτικής της ενσωμάτωσης, τον ορισμό της ως μια διαφοροποιημένη διδασκαλία, και την επαγγελματική ανάπτυξη ως ένα στοιχείο κλειδί που την ορίζει ως μία ενσωμάτωση ανθρώπων παρά ενός συγκεκριμένου περιεχομένου. Οι ίδιοι αναγνωρίζουν την ενσωμάτωση της τέχνης ως: *μάθηση μέσω-των και με τις τέχνες*, *διαδικασία σύνδεσης αναλυτικών προγραμμάτων* και *συνεργατική σύμπλεξη* (σελ. 11-12). Από την άλλη, οι Silverstein και Layne (2010) την ορίζουν ως έναν τρόπο διδασκαλίας όπου οι μαθητές κατασκευάζουν κατανόηση μέσω μιας μορφής τέχνης. Συμμετέχουν σε μία δημιουργική διαδικασία που συνδέει τα δύο πεδία και εξελίσσονται και στα δύο. Θεωρούν, μάλιστα, ότι οι τέχνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κίνητρα εισόδου στο πεδίο που διδάσκεται, ως εργαλείο για επαλήθευση γνώσεων που ήδη υπάρχουν ή ως ισοδύναμες με το άλλο μάθημα.

Στην παρούσα έρευνα η οπτική μας υιοθετεί μία κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση, δανειζόμενη στοιχεία από τις θεωρήσεις των Κοινοτήτων Πρακτικής (Wenger, 1998) και των Κοινοτήτων Διερεύνησης (Jaworski, 2006). Διαπραγματευόμαστε τη δημιουργία μίας κοινότητας ενσωματωμένης πρακτικής, δηλαδή μαθηματικών και εικαστικών, μεταξύ των εκπαιδευτικών των δύο μαθημάτων, μέσα από τη συνεργασία τους σε μία ενιαία ομάδα και την υποστήριξη αυτής. Στο Choutou (in press), συγκεκριμένα, γίνεται εκτενής αναφορά στο ρόλο της ΕΡ1 ως διευκολύντρια της συνεργασίας των εκπαιδευτικών και της εμπλοκής τους σε διερεύνηση και αναστοχασμό.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα συμμετέχουν δύο καλλιτεχνικά σχολεία. Στο πρώτο μέρος της, η έρευνα υιοθετεί εθνογραφικές προσεγγίσεις. Σε κάθε σχολείο, η ΕΡ1 πραγματοποιούσε 2 επισκέψεις την εβδομάδα με διάρκεια 8 ώρες την ημέρα, για 8 μήνες, κρατώντας σημειώσεις πεδίου (παρατήρηση τάξεων εικαστικών και μαθηματικών, ανεπίσημες συζητήσεις, βιντεοσκόπηση, ηχογράφηση). Τους τελευταίους 3 μήνες της έρευνας, επικεντρωνόμαστε σε μία αναπτυξιακή έρευνα (Jaworski, 2006) όπου πραγματοποιούνται συναντήσεις ομάδων συνεργασίας των εκπαιδευτικών μαθηματικών και εικαστικών (7 εκπαιδευτικοί σε κάθε σχολείο, 2 μαθηματικών και 5 καλλιτεχνικών, και η ΕΡ1). Κάθε ομάδα συναντιέται μία φορά κάθε δυο εβδομάδες. Μέχρι στιγμής έχουν πραγματοποιηθεί έξι συναντήσεις και στα δύο σχολεία. Κρατούνται σημειώσεις, ηχητικά αρχεία, και όταν είναι απαραίτητο οπτικά (φωτογραφίες και βίντεο) (πχ. οπτικές περιγραφές). Σε 1η φάση, οι συναντήσεις αφορούν στην εξοικείωση των εκπαιδευτικών με τις ενδεχόμενες συνδέσεις των δυο πεδίων, μέσω της διερεύνησης και του αναστοχασμού πάνω σε δοσμένες πηγές. Οι πηγές αφορούν τυπικές εικαστικές πηγές (π.χ. πίνακες ζωγραφικής), δράσεις των μαθητών μέσα από την τάξη των εικαστικών (π.χ. κατασκευές), σημεία τομής των δύο αναλυτικών προγραμμάτων και θέματα διδασκαλίας (π.χ. αναστοχασμός σε εφαρμοσμένη δραστηριότητα βασισμένη στη σύνδεση μαθηματικών-εικαστικών). Σε 2η φάση, οι εκπαιδευτικοί θα σχεδιάσουν και εφαρμόσουν δραστηριότητες βασισμένες στην ενσωμάτωση μαθηματικών και τέχνης, και να αναστοχαστούν πάνω σε αυτό.

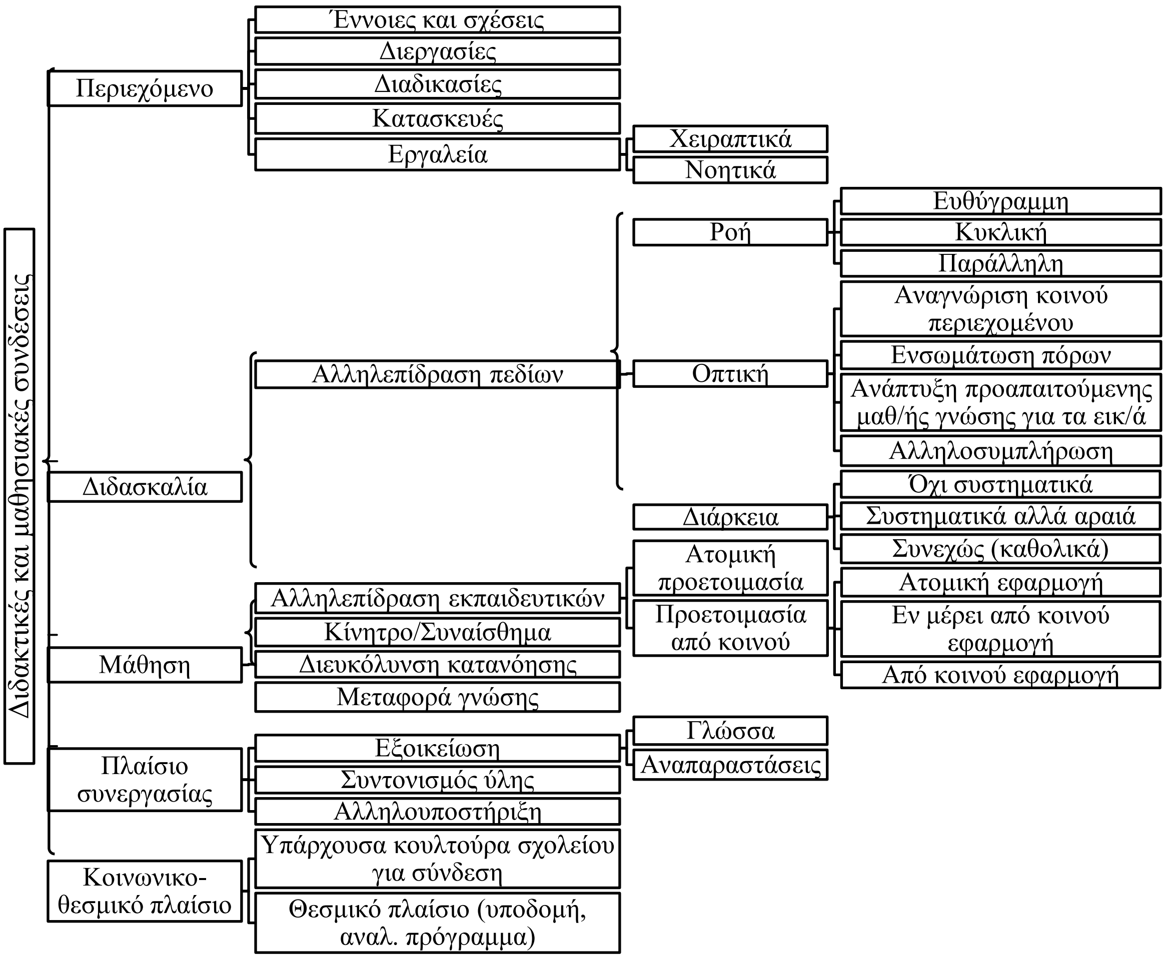
Τα δεδομένα αντλούνται από τις 6 πρώτες συναντήσεις της ομάδας ενός από τα δύο σχολεία. Η 1η ήταν εισαγωγική ως προς τους σκοπούς και τη δομή των συναντήσεων. Στις επόμενες δόθηκαν υλικά πάνω στα οποία θα στηριζόταν η συνεργασία των εκπαιδευτικών. Τα υλικά περιλαμβάνουν: 1) την κατά-σκευή ενός κοστουμιού, εμπνευσμένο από το Bauhaus και το Τριαδικό Μπαλέτο, από τρεις μαθητές της Β’ Γυμνασίου Εικαστικών (2η συνάντηση)˙ 2) έναν πίνακα του Καντίνσκι και εφαρμογή μίας δραστηριότητας βασισμένης στον συγκεκριμένο πίνακα (ο σχεδιασμός και η εφαρμογή είχαν πραγματοποιηθεί από δυο εκπαιδευτικούς (μία μαθηματικό, μία εικαστικό) αγνώστους στους εκπαιδευτικούς της ομάδας) (3η συν.)˙ 3) τη θεματική των πλακοστρώσεων με διάφορες σχετικές εικόνες (4η, 5η συν.)˙ 4) τον κάνναβο (5η, 6η συν.). Η ανάλυση των δεδομένων αξιοποιεί τεχνικές της Θεμελιωμένης Θεωρίας (Strauss & Corbin, 1998) που οδηγεί σε ταξινόμηση των συνδέσεων ανάμεσα στις εικαστικές τέχνες και στα μαθηματικά που συζητιούνται στις συναντήσεις. Μέσα από συνεχή σύγκριση των συνδέσεων που εμφανίστηκαν, εντοπίστηκαν οι κατηγορίες και υποκατηγορίες των συνδέσεων, οι οποίες στη συνέχεια περιγράφονται και δίνονται παραδείγματα από τα δεδομένα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν πληθώρα διδακτικών και μαθησιακών συνδέσεων κατά τη διάρκεια των συναντήσεων. Καθώς οι συζητήσεις μεταξύ της ομάδας εξελίσσονται, φαίνεται ότι αυτές αφορούν στο *περιεχόμενο*, στη *διδασκαλία*, στη *μάθηση*, στο *πλαίσιο συνεργασίας* μεταξύ της ομάδας και στο *κοινωνικο-θεσμικό πλαίσιο* του σχολείου. Στην εικόνα 1 απεικονίζεται το συστημικό δίκτυο. Όπου Ε είναι ο Εικαστικός και Μ ο Μαθηματικός.

Περιεχόμενο

Από την πρώτη συνάντηση, εμφανίζονται συνδέσεις που αφορούν στο περιεχόμενο. Αυτές αφορούν σε κοινές *έννοιες* (στοιχεία/σχήματα της Γεωμετρίας) και *σχέσεις* (χαρακτηρισμός γωνιών, παραλληλία ομοιότητα, συμμετρία), *διεργασίες* (αφαιρετική σκέψη, πρακτική σκέψη, οπτικοποίηση, ακρίβεια, χωρική και φαντασιακή αντίληψη, διερεύνηση), *διαδικασίες* (αλγόριθμοι), *κατασκευές* (φράκταλ, προοπτική, μάνταλα, γραμμικό και ελεύθερο σχέδιο) και *εργαλεία* χειραπτικά (χάρακας, διαβήτης) και νοητικά (μαθηματικό θεώρημα, αφαιρετική σκέψη, οπτικοποίηση). Για παράδειγμα, στη συζήτηση πάνω στο 1ο υλικό, οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν, μεταξύ άλλων, τον κύκλο και την έλλειψη, τη διχοτόμο και το μέσο και τη χρήση του χάρακα και ενός άτυπου διαβήτη στην κατασκευή των μαθητών.



Εικόνα 1: Το συστημικό δίκτυο.

Διδασκαλία

Στη διδασκαλία, οι συζητήσεις με τους εκπαιδευτικούς «δείχνουν» την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο πεδίων και μεταξύ τους. Το πρώτο αφορά στη *ροή*, την *οπτική* και τη *διάρκειά της αλληλεπίδρασης*. Η ροή εμφανίζεται ευθύγραμμη, κυκλική ή παράλληλη. Μπορεί, να ξεκινήσουμε με αφετηρία το ένα πεδίο και να πάμε στο άλλο, *ευθύγραμμα*. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από έναν εικαστικό πόρο, να δούμε τι μαθηματικά υπάρχουν εκεί και να το «εκμεταλλευτούμε» στο μάθημα των μαθηματικών για να τα διδάξουμε. Για παράδειγμα, σχετικά με το 1ο υλικό, η Μ1 αναφέρει: «…να ξεκινήσουμε με τον στόχο να φτιάξουν τη φούστα και να τον εκμεταλλευτούμε για να διδά-ξουμε μαθηματικά, τύπους, στερεομετρία κλπ». Ή, να ξεκινήσουμε από τα μαθηματικά και να τα χρησιμοποιήσουμε, ως εργαλείο, για να φτιάξουμε ένα εικαστικό έργο. Για παράδειγμα, η Ε1 αναφέρεται σε μία μαθήτρια που εφάρ-μοσε ένα μαθηματικό θεώρημα για να δημιουργήσει έναν εικαστικό πίνακα. Επίσης, να ξεκινήσουμε από το ένα, να πάμε στο άλλο και να γυρίσουμε στο πρώτο, *κυκλικά*. Για παράδειγμα, να ξεκινήσουμε από ένα εικαστικό έργο, να δούμε τι μαθηματικά περιέχει, να τα αναλύσουμε, και να τα χρησιμοποιή-σουμε για να φτιάξουμε ένα άλλο έργο. Σχετικά, στο 3ο υλικό, η Ε1 αναφέρει:

> Όταν μέσα από μια δικιά του εφαρμογή (εικαστικά) καταλάβει τι εννοούμε πρόσθεση αφαίρεση, μπορεί να πάει μετά στον μαθηματικό, και να του το πει μαθηματικά. Και να το φέρει έτοιμο στα εικαστικά ως γνώση πλέον.

Η ροή, τέλος, μπορεί να είναι *παράλληλη*, δηλαδή το ίδιο θέμα να δουλεύεται παράλληλα στα δύο μαθήματα. Σχετικά, ο Ε2, στη συζήτηση στο 1ο υλικό, λέει: «Όταν εγώ π.χ. κάνω τη φούστα, εσύ κάνεις τη στερεομετρία. Για να υπάρχει συντονισμός». Οι περισσότερες αναφορές δείχνουν ως αφετηρία τα μαθηματικά, ενώ τα εικαστικά ως αφετηρία και η κυκλική ανατροφοδότηση με αφετηρία τα εικαστικά μοιράζονται το ίδιο πλήθος εμφανίσεων (το μισό).

Η οπτική της αλληλεπίδρασης, περιέχει την *αναγνώριση κοινού περιεχομένου*, την *ενσωμάτωση πόρων*, την *ανάπτυξη προαπαιτούμενης μαθηματικής γνώσης στην τέχνη* και την *αλληλοσυμπλήρωση*. Ενώ η ενσωμάτωση πόρων σε συνδυασμό με την αναγνώριση κοινού περιεχομένου είναι η πιο συχνά εμφανίσιμη, η ενσωμάτωση πόρων μόνη της είναι η λιγότερο εμφανίσιμη και η προετοιμασία μαθηματικής γνώσης για τα εικαστικά η δεύτερη λιγότερο εμφανίσιμη. Όσον αφορά στην αναγνώριση κοινού περιεχόμενου, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να βλέπουν την εμφάνιση μαθηματικών στοιχείων και στα δύο μαθήματα και υποστηρίζουν ότι μέσω της επανάληψης, οι μαθητές ίσως είναι πιο έτοιμοι να «δεχτούν» τις έννοιες όταν τις ξαναδούν, με την εισαγωγή του δεύτερου πλαισίου και την εναλλαγή του με το πρώτο να βοηθάει. Όσον αφορά στην ενσωμάτωση πόρων, αναφέρεται η χρήση μαθηματικών στοιχείων μέσα στο εικαστικό πλαίσιο, όπως το να ξεκινήσουμε από τα μαθηματικά που βρίσκονται στη βάση των πλακοστρώσεων για καλύτερη κατανόηση του πως αυτές κατασκευάζονται. Και αντίστροφα, η χρήση ενός εικαστικού έργου (π.χ. πίνακα) για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών που μπορούν να συνδεθούν με αυτόν. Όσον αφορά στην ανάπτυξη προαπαιτούμενης μαθηματικής γνώσης για τα εικαστικά, η Μ2 προτείνει:

> …να μου πει ο καθένας σας ξεχωριστά τι χρειάζεται από μαθηματικά για την κάθε χρονιά… Για…να αφιερώσω δυο μαθήματα στα μαθηματικά … μετά θα τα παίρνετε αυτά και θα τα κάνετε ότι θέλετε. Γιατί πολλές φορές χρειάζεστε κάτι που θεωρείτε ότι θα πρέπει να το ξέρουν και τα παιδιά δεν ξέρουν γρι.

Όσον αφορά στην αλληλοσυμπλήρωση, οι εκπαιδευτικοί αναφέρονται στο να συμπληρώνουν ο ένας τα κενά του άλλου στη διδασκαλία. Για παράδειγμα, ο Ε2 σε συζήτηση για την γραμμική προοπτική πάνω στο 1ο υλικό, αναφέρει:

> …θα ήταν πολύ ωραία αν, στην Α’ Β’ Γυμνασίου που το βάζουμε, την ίδια άσκηση την έβλεπε και ο μαθηματικός και την έβαζε. Δηλαδή θα μπορούμε να τη θεμελιώσουμε καλύτερα. Εμείς θα σας δώσουμε μετά την αισθητική της λειτουργία αλλά θα της δώσετε την γεωμετρική της λειτουργία.

Όσον αφορά στη διάρκεια της αλληλεπίδρασης, στην 6η συνάντηση η Ε3 θέτει στην ομάδα την ερώτηση: «Θα μπορούσαμε του χρόνου, για παράδειγμα, να κάνουμε όλη τη χρονιά τα μαθηματικά εικαστικά, μαζί;». Στην πολύ έντονη συζήτηση που ακολουθεί, κυριαρχούν τρεις απόψεις. Η αλληλεπίδραση μπορεί να συμβαίνει μεμονωμένα και όχι συστηματικά, συστηματικά αλλά αραιά (π.χ. εισαγωγή/κλείσιμο κάθε ενότητας της ύλης των μαθηματικών) ή συνεχώς («πάντρεμα» των δύο προγραμμάτων).

Σε σχέση με το 2ο (αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών) βλέπουμε την *από κοινού προετοιμασία* και την *ατομική προετοιμασία*. Στην από κοινού, εικαστικοί και μαθηματικοί συνεργάζονται για να σχεδιάσουν μία δραστηριότητα. Εδώ, αναδύονται οι ρόλοι που μπορεί να έχει ο καθένας ως προς το «τι» μπορεί να προσφέρει. Για παράδειγμα, στη συζήτηση στο 1ο υλικό, σχετικά με την στερεομετρία, ο Ε2 λέει: «(Αφού οι εικαστικοί βρουν την εικόνα της φούστας)… έρχεται ο μαθηματικός και δίνει το πατρόν». Η εφαρμογή, έπειτα, μπορεί να είναι ατομική (ένας εκπαιδευτικός στην τάξη), εν μέρει από κοινού (ένας εκπαιδευτικός στην τάξη εκτός από ένα ολιγόλεπτο διάστημα που θα την «επισκεφτεί» ο άλλος) και από κοινού (και τα δύο είδη εκπαιδευτικών βρίσκονται στην τάξη καθ' όλη τη διάρκεια της εφαρμογής).

Μάθηση

Οι συνδέσεις όσον αφορά στη μάθηση περιλαμβάνουν, αρχικά, θέματα *κινήτρου και συναισθημάτων* των μαθητών. Η Ε4 αναφέρει: «Το θέμα είναι να πάψουν τα παιδιά να μισούν τα μαθηματικά». Επίσης, περιλαμβάνει τη *διευκόλυνση της μάθησης*. Σχετικά η Ε4 αναφέρει:

> Το συμφέρον μου είναι: με ποιόν τρόπο μπορώ να ενισχύσω τους μαθητές μου, ώστε με μεγαλύτερη ευκολία και χωρίς μίσος να μαθαίνουν τα μαθηματικά. Επειδή, θεωρητικά, για μένα, τα μαθηματικά είναι η βάση όλων των πραγμάτων.

Ένα τρίτο σημείο περιλαμβάνει τη *μεταφορά γνώσης* από το ένα πεδίο στο άλλο. Για παράδειγμα, η Μ1 αναφέρει σχετικά:

> Πως περνάμε από το εμπειρικό (εικαστικά) στο αλγεβρικό και ότι δεν τα κάνουμε στο περίπου – έχει σημασία η ακρίβεια. … αλλά και πέρασμα από το θεωρητικό (στερεομετρία) στο πρακτικό (εικαστικά).

Πλαίσιο συνεργασίας

Φαίνεται πως οι εκπαιδευτικοί δίνουν αξία στη συζήτηση μεταξύ τους επειδή, όπως αναφέρουν, τους βοηθάει να ανταλλάσσουν απόψεις και να βλέπουν πιο σφαιρικά. Μέσα από τη συζήτηση, αρχικά, φαίνεται να εξοικειώνονται ο ένας με το πεδίο του άλλου. Αυτό υποστηρίζεται μέσα από τη γλώσσα και τις αναπαραστάσεις που περιέχονται είτε εξαρχής, είτε προκύπτουν, στις συζητήσεις της ομάδας. Ένα δεύτερο θέμα φαίνεται να είναι το ενδεχόμενο συντονισμού της ύλης, καθώς αναγνωρίζονται κοινοί τόποι. Τρίτον, εμφανίζεται το θέμα της αλληλοϋποστήριξης μεταξύ τους, καθώς ο ένας μπορεί να είναι σε θέση να προσφέρει κάτι που ο άλλος ίσως χρειάζεται.

Κοινωνικό-θεσμικό πλαίσιο

Από την πρώτη κιόλας συνάντηση, αναδύθηκαν θέματα που αφορούν το κοινωνικό-θεσμικό πλαίσιο. Η κουλτούρα του συγκεκριμένου σχολείου, όντας καλλιτεχνικό, φαίνεται χαρακτηριστική. Υπάρχει το ενδιαφέρον για την υποστήριξη της σημασίας της τέχνης στη γενική εκπαίδευση. Ο Ε2 λέει:

> …η καινοτομία (σχολείο) είναι ότι μπαίνει το στοιχείο της τέχνης σαν κύριο συστατικό. Αν πετύχει η ομάδα…δίνει παράδειγμα στην υπόλοιπη παιδεία ότι η παρουσία της τέχνης…βελτιώνει…την ποιότητα της εκπαίδευσης. Άρα, αν βγει ένας μπούσουλας (παραδείγματα) στην κατανόηση και τη δημιουργικότητα…

Επίσης, εμφανίζονται θεσμικά θέματα, όπως η αλλαγή υποδομής του σχολείου και η διαμόρφωση των αναλυτικών προγραμμάτων (σύμφωνα με την σύνδεση μαθηματικών και τέχνης) και κοινών στόχων. Η Ε4 λέει:

> Θέλουμε τα μαθηματικά να συνδυάζονται με το μάθημα των εικαστικών. Να συμβαδίζουν με την ύλη (τους)… ώστε τα παιδιά οποιασδήποτε τάξης να δέχονται και τα εικαστικά και τα μαθηματικά. …(η έρευνά μας) θα βοηθήσει το σχολείο να ξεπεράσει κάποια όρια. Και εμάς είναι και υποδομής και πολλά.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην ανάδειξη των αποτελεσμάτων, εμφανίζεται πληθώρα συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών και εικαστικών εκ μέρους των εκπαιδευτικών, όσον αφορά στο περιεχόμενο των δύο πεδίων, στη διδασκαλία, στη μάθηση, στο πλαίσιο συνεργασίας της ομάδας και στο κοινωνικό-θεσμικό πλαίσιο του σχολείου. Τα αποτελέσματά στην πλειονότητά τους συμφωνούν με τις σχετικές αναφορές, χαρακτηρισμούς και όρους της βιβλιογραφίας, σε γενικό επίπεδο συνδέσεων (π.χ. Cucker, 2013), σε επίπεδο συνεργασίας (π.χ. Bickley-Green, 1995) και σε επίπεδο ορισμού και φύσης της ενσωμάτωσης (Burnaford et al., 2007· Silverstein & Layne, 2010). Σημαντικά εμφανίζονται τα θέματα κινήτρου και η χρήση του ενός ως διδακτικό εργαλείο στο άλλο. Οι συνδέσεις μάλιστα φαίνεται να εξελίσσονται με το πέρασμα των συναντήσεων, ενώ φαίνεται πως κυρίως οι εικαστικοί είναι που αναγνωρίζουν τις περισσότερες συνδέσεις περιεχομένου, οι οποίες μάλιστα ξεφεύγουν από το διδακτικό και μαθησιακό πλαίσιο σε πιο επιστημολογικές σκοπιές. Στη συνεργασία της ομάδας, ρόλο παίζει η ανάμειξη της ΕΡ1, με την διερεύνηση και τον αναστοχασμό να βοηθούν στην ανάδειξη των συνδέσεων εκ μέρους τους.

Η συνεισφορά των αποτελεσμάτων φαίνεται να έγκειται σε πιο συγκεκριμένες μορφές ενσωμάτωσης των εικαστικών με τα μαθηματικά σε σύγκριση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, τοποθετώντας την μάλιστα στο πλαίσιο της τάξης. Επίσης, αναδεικνύεται η σημασία της συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών, και μάλιστα εκ μέρους των ίδιων των εκπαιδευτικών, «για να βοηθήσει ο ένας τον άλλο». Επιπλέον, αρχίζουμε να καταλαβαίνουμε τι μπορεί πραγματικά να συμβαίνει μέσα σε μία συνεργασία που προσπαθεί πρακτικά να ενσωματώσει τα μαθηματικά και τα εικαστικά μέσα στην τάξη. Εμφανή σε κάποια αποσπάσματα των αποτελεσμάτων είναι η σημασία που έχουν αυτές οι συνδέσεις για τους εκπαιδευτικούς, τόσο όσον αφορά στη βελτίωση της διδασκαλίας και της ενίσχυσης των μαθητών, αλλά και όσον αφορά σε θέματα υποδομής ή οργάνωσης του σχολείου. Έχει αρχίσει, επίσης, να φαίνεται η σημασία των ταυτοτήτων των ίδιων των συμμετεχόντων αλλά και της αλληλεπίδρασης τους μέσα στη συζήτηση επί των υλικών. Επίσης, διάφορα επίπεδα ενσωμάτωσης (επιφανειακή ή σε βάθος, θέματα κινήτρου ή κατανόησης) των συνδέσεων στη διδασκαλία φαίνεται να εμφανίζονται. Σε βάθος χρόνου, στη συνολική έρευνα θα μας απασχολήσουν θέματα όπως η σημασία των συνδέσεων αυτών για τη διδασκαλία και μάθηση, το πως αυτές διαμορφώνονται και το τι επίπεδα ενσωμάτωσης δημιουργούνται.

«Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας» (MIS-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ)»

Ευρωπαϊκή Ένωση
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

An, S., & Tillman, D. (2014). Elementary Teachers' Design of Arts Based Teaching: Investigating the Possibility of Developing Mathematics-Music Integrated Curriculum. *JCT (Online), 30(2), 20.*

Bickley-Green, C. A. (1995). Math and art curriculum integration: A post-modern foundation. *Studies in Art Education*, *37*(1), 6-18.

Baird, D. (2015). *Integrating the Arts in Mathematics Teaching* (Master thesis). Retrieved from https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/68768/1/Baird_Dakota_L_201506_MT_MTRP.pdf

Burnaford, G., Brown, S., & Doherty, J. (2007). Arts Integration Frameworks, Research & Practice». *Washington, DC: Arts Education Partnership.*

Choutou, C. (in press). *Supporting collaboration between visual art and mathematics teachers*. ICMI Study 25, Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups, Lisbon, Portugal, 3-7 February 2020.

Cochran, Samuel G., "Arts Integration: The Missing Link" (2016). Capstones and Theses. Paper 538.

Cucker, F. (2013). *Manifold mirrors: the crossing paths of the arts and mathematics*. Cambridge University Press.

Jacobs, V. (2000). *What happens when the artistic world and a teacher's world meet?* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education*, *9*(2), 187-211.

Kind, S., de Cosson, A., Irwin, R. L., & Grauer, K. (2007). Artist-Teacher Partnerships in Learning: The in/between Spaces of Artist-Teacher Professional Development.*Canadian Journal of Education*, *30*(3),839-864.

Presmeg, N. (2009). Mathematics education research embracing arts and sciences. *ZDM*, *41*(1-2), 131-141.

Silverstein, L. B., & Layne, S. (2010). What is arts integration. *Washington, DC: The Kennedy Center for the Performing Arts*.

Strauss, A., and Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks: Sage.

von Renesse, C., & Ecke, V. (2016). Discovering the art of mathematics: Using string art to investigate calculus. *PRIMUS*, *26*(4), 283-296.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge university press.

Σιώπη, Κ., Χασάπης, Σ. (2013). *Κοινότητες πρακτικής και συνδιαμόρφωσης περιβαλλόντων μάθησης από ομάδες εκπαιδευτικών με βάση τις ανάγκες των μαθητών.* Πρακτ. 30ου Παν. Συν. Μαθηματικής Παιδείας (σ. 382-392).

Σταθοπούλου Χ., Κοταρίνου Π. & Χαβιάρης Π. (2010). Ε*θνομαθηματικές ιδέες, τεχνικές του δράματος και webquest: καινοτόμες προσεγγίσεις στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Λύκειο.* Πρακτ. 27ου Παν. Συν. Μαθηματικής Παιδείας, σ. 971-982.

ΕΝΑ ΚΥΝΗΓΙ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ: ΕΝΙΣΧΥΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΕΠΑΡΚΕΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΩΣ ΔΕΥΤΕΡΗ ΓΛΩΣΣΑ ΣΕ ΕΝΑΝ ΜΑΘΗΤΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΙΝΑ

Νίκη Πέτση, **Στέφανος Ασημόπουλος,**

Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης

Εκπαιδευτικός ΠΕ70, Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

niki.petsi@hotmail.com, asimstef@uth.gr, ttriant@uth.gr

Οι σύγχρονες σχολικές τάξεις διακρίνονται από έναν πολυπολιτισμικό χαρακτήρα αφού κάποιοι μαθητές που φοιτούν σε αυτές προέρχονται από διαφορετικές χώρες και μιλούν την ελληνική ως δεύτερη γλώσσα (Γ2). Η εκπαίδευση των μαθητών αυτών έχει απασχολήσει αρκετά την εκπαιδευτική κοινότητα με αποτέλεσμα να προτείνονται προγράμματα δίγλωσσης εκπαίδευσης. Η μέθοδος CLIL είναι μία από αυτές τις προτάσεις και μέσω της παρούσας έρευνας παρουσιάζουμε την εφαρμογή της σε μία Τάξη Υποδοχής ΖΕΠ έχοντας ως σκοπό την κατάκτηση γλωσσικών στόχων όπως και στόχων που αφορούσαν μία κοινή ενότητα των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κατά τις τελευταίες δύο δεκαετίες η ελληνική κοινωνία, λόγω των μεταναστευτικών και προσφυγικών ροών, έχει καταστεί περισσότερο σύνθετη πολιτισμικά. Όπως ήταν αναμενόμενο, αυτός ο πολυπολιτισμικός χαρακτήρας αποτυπώθηκε και στις σχολικές τάξεις, με την απαίτηση της εκπαίδευσης πληθυσμών με πρώτη γλώσσα διαφορετική από τη γλώσσα διδασκαλίας να φαντάζει επιτακτική. Σύμφωνα με τον Baker (2001), οι δίγλωσσοι ή πολύγλωσσοι μαθητές συχνά εμφανίζουν υποεπίδοση στα σχολικά μαθήματα. Αυτό συχνά θεωρείται επακόλουθο της περιορισμένης επάρκειάς τους στη γλώσσα διδασκαλίας, παρότι οι μαθητές αυτοί μπορούν να επικοινωνήσουν σε περισσότερες από μία γλώσσες.

Μέχρι τις μέρες μας, η επίσημη Πολιτεία στην Ελλάδα βασίζει την εκπαίδευση των παιδιών γλωσσικών μειονοτήτων στην κατάκτηση σε υψηλό επίπεδο της επίσημης —και μοναδικής— γλώσσας διδασκαλίας. Η συγκεκριμένη πολιτική προβάλλει τη χαμηλή επάρκεια στη γλώσσα στην οποία διεξάγεται η διδασκαλία ως την κυριότερη εκπαιδευτική πρόκληση που αντιμετωπίζουν αυτά τα παιδιά. Η χαμηλή επίδοση που εμφανίζουν στην ελληνική γλώσσα δυσχεραίνει την παρακολούθηση των μαθημάτων της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, ενώ οδηγεί συχνά σε σχολική διαρροή.

Παρόμοιες πολιτικές επιλογές συναντούμε και σε άλλες χώρες, αν και συχνά αυτές διευρύνονται με προγράμματα δίγλωσσης εκπαίδευσης, όπως αυτό της εκμάθησης μιας επίσημης ή άλλης γλώσσας ως δεύτερης μέσω της διδασκαλίας περιεχομένου. Η προσέγγιση CLIL (Content and Language Integrated Learning) είναι ένας περιεκτικός όρος και περιλαμβάνει ένα εύρος μεθοδολογιών για την ταυτόχρονη διδασκαλία του γνωστικού περιεχομένου ενός μαθήματος αλλά και της γλώσσας διδασκαλίας. Η διδασκαλία σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση εστιάζει συνήθως στην εκμάθηση γλωσσών με ισχυρό πολιτισμικό κεφάλαιο, ενώ το περιεχόμενο σπάνια αφορά τη διδασκαλία των Μαθηματικών ή των Φυσικών Επιστημών. Οι Surmont, Struys, Noort, και Craen (2016) αναφέρουν πως η μέθοδος CLIL βασίζεται σε δραστηριότητες όπου η γλώσσα μαθαίνεται από τους μαθητές μέσα από τη χρήση της, όταν οι μαθητές συζητούν για το γνωστικό περιεχόμενο της διδασκαλίας. Ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός έχει πάντοτε ένα διττό σημείο εστίασης στην προετοιμασία της διδασκαλίας του, να καθορίσει διδακτικούς στόχους για την εκμάθηση της γλώσσας διδασκαλίας και ταυτόχρονα ισάξιους διδακτικούς στόχους που αφορούν τη διδασκαλία του γνωστικού περιεχομένου (Coyle, 2006). Επιπρόσθετα, όπως προτείνουν οι Montalto, Walter, Chrysanthou, και Theodorou (2016) ένα τρίτο στοιχείο σχεδιασμού μιας διδασκαλίας αφορά στον καθορισμό στόχων δεξιοτήτων μάθησης οι οποίες θα υποστηρίζουν την κατάκτηση των στόχων γλώσσας και γνωστικού περιεχομένου.

Όπως προτείνουν οι Prediger και Wessel (2013), η κατασκευή μαθηματικού νοήματος από μαθητές των οποίων η Γ1 είναι διαφορετική από τη γλώσσα διδασκαλίας (Γ2), εκτυλίσσεται μέσα από πολλαπλές μεταβάσεις μεταξύ των διαφορετικών σημειωτικών αναπαραστατικών επιπέδων ύφους [1] που χαρακτηρίζουν την επικοινωνία σε συνθήκες σχολικής τάξης. Όπως μπορούμε να δούμε στο διπλανό σχεδιάγραμμα (βλ. Σχήμα 1), οι μεταβάσεις αυτές μπορούν να αφορούν σε αλλαγές μεταξύ χειραπτικών, εικονιστικών, γλωσσικών, συμβολικο-αριθμητικών και συμβολικο-αλγεβρικών αναπαραστάσεων.

Σχήμα 1: Πολλαπλές μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, επιπέδων ύφους και Γ1 και Γ2 (Prediger & Wessel, 2013)

Όσο σημαντικές είναι όμως αυτές οι μεταβάσεις μεταξύ των επάλληλων αναπαραστατικών επιπέδων για την κατασκευή νοητικών αντικειμένων και διαδικασιών στα μαθηματικά, εξίσου σημαντική είναι και η σύνδεση αυτής της πορείας μάθησης με τη γλώσσα (Pimm, 1987). Η Otwinowska (2013) σημειώνει πως σε μια διδασκαλία που είναι σχεδιασμένη σύμφωνα με την προσέγγιση CLIL, η επικοινωνία εκπαιδευτικού και μαθητών βασίζεται κυρίως στην ακαδημαϊκή γλωσσική ικανότητα (Cognitive Academic Language Proficiency ή CALP), η οποία παρότι στηρίζεται στην, δεν ταυτίζεται με τη συνομιλιακή ευχέρεια (Basic Interpersonal Communicative Skills ή BICS) που αφορά σε βασικές δεξιότητες της καθημερινής επικοινωνίας (Cummins, 2000).

Αναμφισβήτητα η κατάκτηση της συνομιλιακής ευχέρειας προηγείται της ακαδημαϊκής γλωσσικής ικανότητας, μιας και σχετίζεται με την ανταπόκριση των νεαρών μαθητών σε άμεσες και διαπροσωπικές επικοινωνιακές περιστάσεις. Ενώ οι μαθητές καταβάλλουν ιδιαίτερη γνωστική προσπάθεια για να κατακτήσουν την

CALP, η κατάκτηση της BICS συμβαίνει απρόσκοπτα. Το σχολικό γλωσσικό ύφος είναι αποπλαισιωμένο σε μεγάλο βαθμό και περιλαμβάνει σύνθετα γλωσσικά μέσα, προσομοιάζοντας σε αυτό που ονομάσαμε ως ακαδημαϊκή γλωσσική ικανότητα (CALP). Με τη διάθεση άμεσης, αυτόματης πολλές φορές μετάβασης από το καθημερινό στο τεχνικό γλωσσικό ύφος των μαθηματικών να χαρακτηρίζει τις περισσότερες διδακτικές προσπάθειες, το σχολικό γλωσσικό ύφος καταλήγει να μη διδάσκεται ρητά στη σχολική τάξη των μαθηματικών (Prediger, Clarkson, & Bose, 2012).

Η προηγούμενη διάκριση μεταξύ BICS και CALP αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Οι Prediger και Wessel (2013) προτείνουν τη δημιουργία και την υλοποίηση δραστηριοτήτων που να ωθούν τους μαθητές στη χρήση διαφορετικών υφών και στη συνεχή κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση στα παραπάνω γλωσσικά και αναπαραστατικά επίπεδα ύφους, εστιάζοντας στο γλωσσικό σχολικό ύφος στα Μαθηματικά το οποίο υποεκπροσωπείται όσον αφορά γενικά τη σχετική στοχοθεσία. Μία τέτοια προσπάθεια θα περιγράψουμε παρακάτω που πραγματοποιήσαμε από τον Φεβρουάριο ως και τον Μάιο του 2018.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην εισήγησή μας θα παρουσιάσουμε στοιχεία από έρευνα η οποία είχε ως σκοπό την παραγωγή και εφαρμογή διδακτικού υλικού που αφορά σε μία κοινή ενότητα των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών. Οι έννοιες που πραγματευτήκαμε ήταν το μήκος, το εμβαδόν και ο όγκος. Βασικά συστατικά της ενασχόλησής μας με αυτές τις έννοιες ήταν η διδασκαλία της μέτρησής τους με τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης, καθώς και συγκρίσεις και υπολογισμοί μέσω εκτιμήσεων. Ακολουθήσαμε την ποιοτική προσέγγιση εφαρμόζοντας τις αρχές του διδακτικού πειράματος (Molina, Castro, & Castro, 2007) καθώς αυτό χρησιμοποιείται συχνά στον χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών, ενώ προσφέρει τη δυνατότητα στον ερευνητή-εκπαιδευτικό να εξετάσει την πορεία εξέλιξης των μαθητών μέσα από μια τροχιά διδακτικών επεισοδίων αναλύοντας κάθε διδακτικό επεισόδιο.

Το πρωταρχικό ερευνητικό μας ερώτημα ήταν κατά πόσο είναι δυνατή μέσα από μία διδασκαλία η από κοινού επιδίωξη στόχων διδασκαλίας μαθηματικού περιεχομένου και συγκεκριμένων γλωσσικών στόχων όπως η χρήση στρατηγικών, η παραγωγή προφορικής περίληψης, η απόκτηση λεξιλογίου για επικοινωνιακές ανάγκες, καθώς και η απόκτηση ακαδημαϊκών δεξιοτήτων όπως η κατανόηση της υποτακτικής σύνδεσης των προτάσεων που συναντούμε στην επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά. Βέβαια, παράλληλα με τη διδασκαλία του μαθηματικού περιεχομένου δεν παραμερίζεται η ανάπτυξη ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών όπως του συλλογισμού και επιχειρηματολογίας, της δημιουργίας συνδέσεων, της επικοινωνίας και επιλογής και χρήσης εργαλείων. Το δεύτερο και πιο συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα αναφερόταν στο αν τελικά μπορεί να ενισχυθεί η γλωσσική επάρκεια των μαθητών που μιλούν την Ελληνική ως Γ2 μέσω της διδασκαλίας της μέτρησης μήκους και εμβαδού. Επιπλέον, οι δραστηριότητες μέτρησης που σχεδιάσαμε έδιναν τη δυνατότητα στους μαθητές να υλοποιήσουν, απλές διαδικασίες επιστημονικής και τεχνολογικής έρευνας (παρατήρηση, σύγκριση, ταξινόμηση) παράλληλα με την κατάκτηση των μαθηματικών και γλωσσικών στόχων. Αυτές οι διαδικασίες αφορούν τον γραμματισμό των Φυσικών Επιστημών.

Πραγματοποιήσαμε τα διδακτικά επεισόδια της έρευνάς μας σε μια Τάξη Υποδοχής (ΤΥ) ΙΙ Ζ.Ε.Π. ενός δημόσιου δημοτικού σχολείου του Βόλου. Οι 8 δίωρες διδασκαλίες διήρκησαν συνολικά 4 εβδομάδες. Αυτό συνέβη διότι ο χρόνος που μεσολαβούσε ανάμεσα στις διδασκαλίες (συνήθως 3 μέρες) έπρεπε να είναι επαρκής για να αναλύουμε κάθε επεισόδιο ώστε να επανασχεδιάζουμε το επόμενο. Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 5 μαθητές που μιλούσαν την ελληνική γλώσσα ως δεύτερη. Αυτοί οι μαθητές διέφεραν ως προς την ηλικία (8-12 ετών), το φύλο, την πρώτη γλώσσα (αλβανική, κινεζική), τον χρόνο διαμονής τους στην Ελλάδα, το γνωστικό υπόβαθρο και την επάρκεια στην ελληνική γλώσσα. Πριν από την υλοποίηση της έρευνας πραγματοποιήσαμε επιτόπιες παρατηρήσεις στα τμήματα που παρακολουθούσαν οι μαθητές, με σκοπό να έχουμε μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα για αυτούς. Επιπρόσθετα, συζητώντας με τους εκπαιδευτικούς των παιδιών, αντλήσαμε σημαντικές πληροφορίες για το προφίλ των μαθητών. Στην παρούσα παρουσίαση, λόγω και του περιορισμού έκτασης του άρθρου, θα εστιάσουμε στην εξελικτική πορεία του Νίκου, ενός από τους πέντε μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

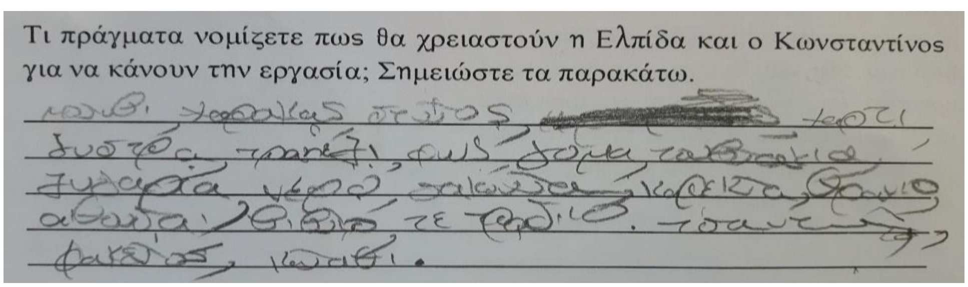
ΜΕΤΡΩΝΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΑΙΝΟΝΤΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΕ ΤΟΝ ΝΙΚΟ

Ο Νίκος είναι ένας μαθητής που κατάγεται από την Κίνα και φοιτούσε στη Στ΄ τάξη. Διέμενε στη χώρα μας για τρία χρόνια και παρακολουθούσε καθημερινά τουλάχιστον για ένα διδακτικό δίωρο το τμήμα Ζ.Ε.Π. ΙΙ. Εκεί διδασκόταν το μάθημα της Γλώσσας και τις υπόλοιπες διδακτικές ώρες της ημέρας, ακολουθούσε το ωρολόγιο πρόγραμμα της τάξης του.

Κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων στο τμήμα Ζ.Ε.Π., συζητήσαμε με τον Νίκο για το πως αισθάνεται για τα σχολικά μαθήματα. Ο ίδιος εξέφρασε πως τα Μαθηματικά του άρεσαν πολύ και για αυτό όπως είπε ήταν και πολύ καλός. Το μάθημα της Φυσικής δεν του άρεσε σχεδόν καθόλου εκφράζοντας ως αιτία τη δυσκολία που συναντούσε στο να διαβάσει και να κατανοήσει το βιβλίο λόγω γλωσσικής έκφρασης. Στην ερώτηση αν του άρεσε το μάθημα της Γλώσσας, ο Νίκος είχε απαντήσει «*Όχι γιατί δεν κατάλαβα. Μπορώ να διαβάζω αλλά δεν κατάλαβα*». Γενικότερα η συμμετοχή του στο μάθημα της Γλώσσας, όπως και σε επικοινωνιακές περιστάσεις που απαιτούσαν τη χρήση της ελληνικής, του δημιουργούσαν ανησυχία αν όχι νευρικότητα.

Στην πρώτη διδασκαλία, ζητήσαμε από τους μαθητές να συλλογιστούν και να ομαδοποιήσουν επιχειρηματολογώντας διάφορα εργαλεία που είχαν μπροστά τους και τα χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε μεγέθη. Ο Νίκος γνώριζε τα περισσότερα εργαλεία και ήταν εξοικειωμένος με τη χρήση τους. Στη δεύτερη και στην τρίτη διδασκαλία μας δουλέψαμε με τους μαθητές σε δύο Φύλλα Εργασίας (Φ.Ε.) που περιείχαν δύο διαφορετικά αφηγηματικά κείμενα τα οποία εισήγαγαν τους μαθητές στην ιστορία που είχαμε δημιουργήσει ως αναφορικό πλαίσιο των δραστηριοτήτων που είχαμε ετοιμάσει. Τα αφηγηματικά κείμενα διηγούνταν την ιστορία ενός κοριτσιού, της Ελπίδας, που είχε να κάνει μία εργασία για το σχολείο, «να μετρήσει» ένα αντικείμενο με άτυπες μονάδες μέτρησης και να το συγκρίνει με κάποιο άλλο. Οι πρώτες δραστηριότητες που κάναμε είχαν γλωσσικό χαρακτήρα και απαρτίζονταν από ανάγνωση των κειμένων και υπογράμμιση άγνωστων λέξεων για να τις εξηγήσουμε και να τις αποκτήσουν στο λεξιλόγιό τους. Επίσης, τα παιδιά απαντούσαν προφορικά σε ερωτήσεις κατανόησης και δημιουργούσαν προφορικές περιλήψεις. Επιπλέον, οι μαθητές εξασκήθηκαν στη χρήση στρατηγικών που βοηθούν στην κατανόηση ενός κειμένου όπως στην ανάγνωση του τίτλου του κειμένου και στην παρατήρηση των εικόνων που το συνοδεύουν με στόχο τη διατύπωση προβλέψεων για το περιεχόμενό του.

Από τη μεγαλόφωνη ανάγνωση που έκανε ο Νίκος, παρατηρήσαμε πως παρά τα τρία χρόνια παραμονής του στη Ελλάδα δεν είχε αποκτήσει ευχέρεια στην αποκωδικοποίηση λέξεων. Επίσης, η ομιλία του διακρινόταν από μια έντονη προφορά. Από τις πρώτες κιόλας δραστηριότητες, ο Νίκος έδειχνε απρόθυμος να συμμετέχει λέγοντας ότι δεν ήθελε να κάνει κάτι ή ότι ήταν κουρασμένος. Ήταν σαφές ότι η απροθυμία του σχετιζόταν με τη χρήση της ελληνικής γλώσσας, τόσο στο επίπεδο της CALP όσο και σε αυτό της BICS. Ακόμη, ο Νίκος δεν ήταν εξοικειωμένος με τον τρόπο εργασίας σε τέτοιου είδους δραστηριότητες, καθώς στην τάξη του δεν συμμετείχε καθόλου στο μάθημα της Γλώσσας γιατί δεν του δινόταν η ευκαιρία αλλά και ο ίδιος δεν την επιζητούσε. Έτσι, εμείς φροντίσαμε να του προσφέρουμε γνωστική και συναισθηματική στήριξη που βοήθησαν στην οικοδόμηση ενός κλίματος ασφάλειας και σταδιακής ανατροπής της εδραιωμένης πεποίθησής του ότι δεν ήταν καθόλου καλός στη Γλώσσα. Αν και το γενικότερο νόημα των δύο κειμένων το είχε κατακτήσει, έκανε λάθη στις ερωτήσεις κατανόησης που οφείλονταν στη γρήγορη ανάγνωση αλλά και στο λάθος νόημα που προσέδιδε σε ορισμένες λέξεις. Ενδεικτικά, η πρώτη γραπτή απάντηση του Νίκου ήταν στο δεύτερο Φ.Ε. και φαίνεται παρακάτω (βλ. Εικ. 1).

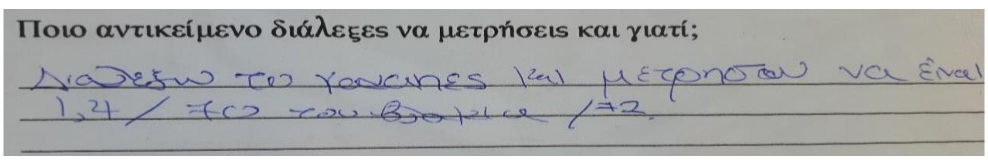

Τι πράγματα νομίζετε πως θα χρειαστούν η Ελπίδα και ο Κωνσταντίνος για να κάνουν την εργασία; Σημειώστε τα παρακάτω.

Εικ. 1: Η πρώτη γραπτή απάντηση του Νίκου στο Φ.Ε. 2

Όπως βλέπουμε, η απάντησή του αποτελείται μόνο από λέξεις που είναι χωρισμένες με κόμμα. Σε αυτή την περίπτωση ο Νίκος δεν έδωσε μία ολοκληρωμένη απάντηση χρησιμοποιώντας την απλή συντακτική δομή της ελληνικής γλώσσας (υποκείμενο, ρήμα και αντικείμενο). Ο γρήγορος τρόπος γραφής του ήταν δηλωτικός της ανάγκης του να απαντήσει γρήγορα για να τελειώσει μια δραστηριότητα που δεν τον έκανε να αισθάνεται άνετα. Επίσης, αρκετές φορές ο Νίκος δεν χρησιμοποιούσε ρήματα και στον προφορικό του λόγο. Ενδεικτική φράση του είναι η εξής: *«μεγαλύτατος και καλά μαθηματικά κάθε μέρα άριστα».* Με αυτή του τη φράση περιέγραφε ένα πρόσωπο της ιστορίας που είχαμε διαβάσει που ήξερε καλά μαθηματικά και έπαιρνε κάθε μέρα άριστα.

Στην τέταρτη διδασκαλία μας δουλέψαμε με τα παιδιά ένα κείμενο οδηγιών που τους ανέθετε να διαλέξουν ένα αντικείμενο και να επιλέξουν και να χρησιμοποιήσουν ως εργαλεία μέτρησης άτυπες μονάδες μέτρησης όπως μπατονέτες, σφηνοτουβλάκια και καλαμάκια. Έπειτα, έπρεπε να σημειώσουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους στο Φ.Ε. και να συγκρίνουν το αντικείμενο με κάποιο άλλο.

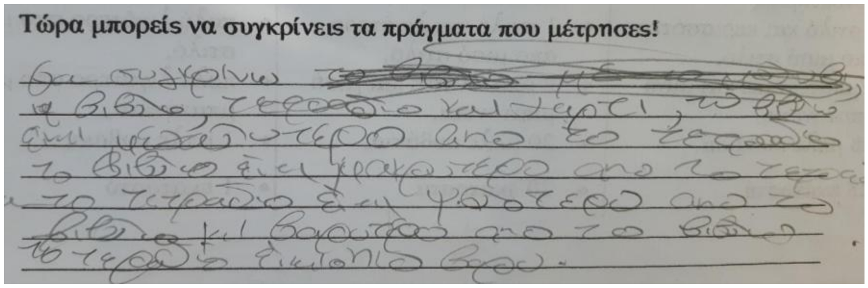
Στην παρακάτω απάντηση του Νίκου (βλ. Εικ. 2), παρατηρούμε πως χρησιμοποίησε ρήματα στις προτάσεις του. Προσπάθησε να χρησιμοποιήσει τον χρόνο Αόριστο στα ρήματά του γράφοντας «διαλέξω» αντί για «διάλεξα» και «μετρήσω» αντί για «μέτρησα». Ακόμη, στο ίδιο Φ.Ε. ο Νίκος σχεδίασε το αντικείμενο που μέτρησε σημειώνοντας τις διαστάσεις και τα αποτελέσματα των μετρήσεών του στο σχέδιο, ύστερα από συγκεκριμένη οδηγία που δίναμε ώστε να πραγματοποιείται η εναλλαγή στα επίπεδα ύφους (από το εικονιστικό αναπαραστατικό στο συμβολικό αριθμητικό) που προτείνουν οι Prediger και Wessel (2013).



Εικ. 2: Μια απάντηση του Νίκου στο Φ.Ε. 3

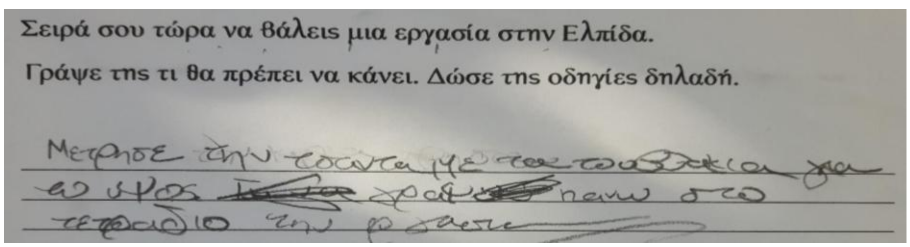
Στην έκτη διδασκαλία μας μετρήσαμε τις διαστάσεις ενός κουτιού και ζητήσαμε από τους μαθητές να εκτιμήσουν πόσα τετράδια θα χωρούσαν μέσα σε αυτό. Οι μαθητές ήταν ελεύθεροι ως προς τον τρόπο εργασίας αρκεί να επιχειρηματολογούσαν πάνω στο σκεπτικό τους. Ο Νίκος σύγκρινε ένα σφηνοτουβλάκι με ένα τετράδιο και εξήγησε πως *«χωράνε 15 τετράδια μέσα γιατί 2 τετράδια ύψος ένα τουβλάκι, έκανα έτσι έτσι. Ένα τουβλάκι είναι δύο τετράδια, 7 τουβλάκια 15 τετράδια»*. Σε αυτή του την εξήγηση βλέπουμε πως ο Νίκος αναφέρει τη λέξη ύψος χρησιμοποιώντας το τεχνικό ύφος των Μαθηματικών που αναφέρουν οι Prediger και Wessel (2013) και αμέσως μετά συνεχίζει τη σκέψη του εναλλάσσοντας την ομιλία του στο καθημερινό ύφος.

Όσον αφορά τη διδασκαλία του μαθηματικού περιεχομένου των μετρήσεων, από την αρχή ο Νίκος εντόπιζε και ονομάτιζε σωστά τις διαστάσεις ενός αντικειμένου και χρησιμοποιούσε τον χάρακα και το μέτρο με τον σωστό τρόπο. Ωστόσο, στις δραστηριότητες σκεφτόταν και χρησιμοποιούσε μόνο τις τυπικές μονάδες μέτρησης εφαρμόζοντας ουσιαστικά μόνο έναν τρόπο μέτρησης (χρήση χάρακα) ως ρουτίνα. Έτσι, μέσα από τις δραστηριότητες εξοικειώθηκε με την επιλογή και χρήση μη τυπικών μονάδων ως εργαλεία μέτρησης κατανοώντας βαθύτερα τη διαδικασία της μέτρησης, ενώ οι εκτιμήσεις που έκανε γίνονταν ολοένα και πιο ακριβείς. Στο τέλος των διδασκαλιών μπορούσε να επιλέξει συνειδητά μία μονάδα μέτρησης επιχειρηματολογώντας για τον λόγο που τον βόλευε η χρήση της. Στις συγκρίσεις αντικειμένων που κάναμε, ο Νίκος χρησιμοποιούσε τον υπερθετικό βαθμό για να συγκρίνει δύο πράγματα λέγοντας ότι ο καναπές είναι *«μεγαλύτατο»*. Έτσι, αυτό ήταν μια ευκαιρία για περαιτέρω ανάλυση και εξάσκηση σε αυτό το γλωσσικό φαινόμενο που σχετίζεται με το σχολικό γλωσσικό ύφος κατά Prediger και Wessel (2013). Στην έκτη διδασκαλία μας, μετά από αρκετά προφορικά παραδείγματα, ο Νίκος σωστά απάντησε όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.

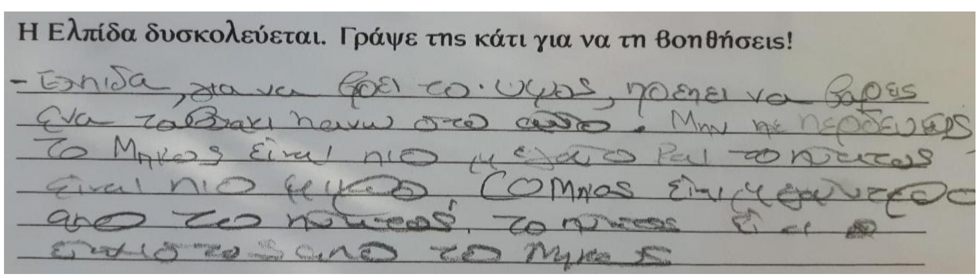


Εικ. 3: Η απάντηση του Νίκου στο Φύλλο Εργασίας 4

Η εξέλιξη του γραπτού του λόγου φαίνεται από τις πιο ολοκληρωμένες και γραμματικά πλήρεις απαντήσεις του, αφού η σωστή χρήση του Στιγμιαίου Μέλλοντα είναι ένα σημείο εξέλιξης καθώς δεν το έκανε αυτό σε προηγούμενες απαντήσεις. Οι εικόνες που ακολουθούν είναι οι απαντήσεις του στο τελευταίο Φ.Ε. Τα παιδιά έπρεπε να γράψουν μία άσκηση για την Ελπίδα παράγοντας ουσιαστικά ένα κείμενο οδηγιών όπως αυτά που είχαμε επεξεργαστεί.



Εικ. 4: Η πρώτη απάντηση του Νίκου στο Φύλλο Εργασίας 6



Εικ. 5: Η δεύτερη απάντηση του Νίκου στο Φύλλο Εργασίας 6

Τα παραπάνω κείμενα δείχνουν την εξέλιξη του γραπτού του λόγου. Στην Εικόνα 4, χρησιμοποίησε σωστά τον χρόνο Αόριστο και την Προστακτική έγκλιση για να δώσει οδηγίες. Το κείμενο της Εικόνας 5 το έκανε ύστερα από συζήτηση και κατάφερε αυτό το ικανοποιητικό αποτέλεσμα παρόλο που στην αρχή δεν ήθελε να κάνει την άσκηση. Ο Νίκος μπήκε στη θέση της Ελπίδας και μέτρησε τις διαστάσεις μίας τσάντας με σφηνοτουβλάκια. Βρήκε επίσης το εμβαδό της τσάντας χρησιμοποιώντας τις σημειώσεις των μετρήσεών του και υπολόγισε μάλιστα και τον όγκο της τσάντας ύστερα από προτροπή μας. Όλα αυτά έγιναν χρησιμοποιώντας κατάλληλα ως μονάδα μέτρησης τα σφηνοτουβλάκια και δείχνουν τον επαναπροσδιορισμό της έννοιας της μέτρησης ενός χαρακτηριστικού που ωθήσαμε τον Νίκο να κάνει με στόχο να φτάσει στη βαθύτερη κατανόηση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Έχοντας μια ολοκληρωμένη εικόνα της έρευνάς μας, μπορούμε να απαντήσουμε θετικά στα ερευνητικά μας ερωτήματα. Πιο συγκεκριμένα, μέσα από τις διδασκαλίες μας καταφέραμε την επίτευξη των συγκεκριμένων μαθηματικών και γλωσσικών στόχων που είχαμε θέσει. Έχοντας ως παράδειγμα τον Νίκο, μπορούμε να ισχυριστούμε πως η γλωσσική επάρκειά του ενισχύθηκε μέσα από τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών. Ειδικότερα, η τελευταία διδασκαλία μας σχεδιάστηκε ως τελική αξιολόγηση και από αυτήν βλέπουμε ότι το σχολικό γλωσσικό ύφος του Νίκου (CALP) έχει αλλάξει. Η πρώτη γραπτή απάντηση του Νίκου περιλάμβανε μόνο λέξεις που θα μπορούσε να είναι η γραπτή αποτύπωση μίας προφορικής απάντησης που θα έδινε χρησιμοποιώντας το καθημερινό γλωσσικό ύφος (BICS) χωρίς να δημιουργεί ολοκληρωμένες προτάσεις. Στις γραπτές απαντήσεις που έδωσε στο τελευταίο Φ.Ε., ο Νίκος μπόρεσε να παράγει γραμματικά ορθά κείμενα οδηγιών. Οι προτάσεις που δημιούργησε ήταν ολοκληρωμένες και δεν περιείχαν γραμματικά λάθη. Ακόμη, σε αυτές του τις απαντήσεις, οι καταλήξεις των ρημάτων ήταν αντιστοιχισμένες σωστά στο πρόσωπο που χρησιμοποιούσε. Επίσης, παρατηρούμε μία εναλλαγή από το καθημερινό γλωσσικό ύφος (BICS) στο σχολικό γλωσσικό ύφος (CALP). Ειδικότερα, ο Νίκος έγραψε ότι «το μήκος είναι πιο μεγάλο και το πλάτος είναι πιο μικρό», όπως θα έλεγε προφορικά στην Ελπίδα για να καταλάβει τη διαφορά των δύο διαστάσεων. Αυτό θα λέγαμε και εμείς στην καθημερινή μας ζωή για να μεταδώσουμε σε κάποιον το ίδιο νόημα. Στην αμέσως επόμενη πρότασή του, ο Νίκος έγραψε ότι «το μήκος είναι μεγαλύτερο από το πλάτος» εφαρμόζοντας τον γραμματικό κανόνα που υπάρχει για τον συγκριτικό βαθμό των επιθέτων (προσθήκη της κατάληξης -ύτερος-η-ο). Σε αυτήν την πρόταση δηλαδή πραγματοποίησε τη μετάβαση που προτείνουν να γίνεται οι Prediger και Wessel (2013), από το καθημερινό ύφος που χρησιμοποιούσε στην προηγούμενη πρόταση στο σχολικό ύφος.

Επιπλέον, ο Νίκος έδωσε την οδηγία στην Ελπίδα να μετρήσει κάτι με μία μη τυπική μονάδα μέτρησης (σφηνοτουβλάκια) και αυτό δείχνει τα βήματα εξέλιξης που έκανε ο ίδιος από τότε που στην αρχή των διδασκαλιών μας είχε συνδέσει τις μετρήσεις με τη χρήση του χάρακα. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι, όσον αφορά το μαθηματικό κομμάτι, ο Νίκος απέκτησε μία βαθύτερη κατανόηση των όσων είχε ήδη διδαχθεί από τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς σε θεωρητικό επίπεδο. Επιπρόσθετα, όπως φαίνεται και στη δραστηριότητα εκτίμησης με το κουτί, πάντα τον ωθούσαμε να μας εξηγεί τη σκέψη του και να επιχειρηματολογεί για τις επιλογές του ώστε να αναπτύξει τις μαθηματικές διεργασίες του συλλογισμού, της επιχειρηματολογίας όπως και της επιλογής και χρήσης εργαλείων. Η συμμετοχή του στην έρευνα ήταν εποικοδομητική για τον ίδιο αφού τον βοήθησε ακόμη να ενισχύσει και να χρησιμοποιήσει σε ένα άλλο πλαίσιο μαθηματικές γνώσεις που κατείχε ως ένα βαθμό.

Εν κατακλείδι, ο συγκεκριμένος κύκλος μαθημάτων βελτίωσε τη μαθηματική και γλωσσική επάρκεια του Νίκου. Πιο συγκεκριμένα, είδαμε ότι ο προφορικός και γραπτός του λόγος βελτιώθηκαν όπως και η μαθηματική του κατανόηση στις δραστηριότητες μέτρησης. Η όλη πορεία που ακολουθήσαμε ήταν δομημένη και σχεδιασμένη να εξυπηρετήσει τους διδακτικούς στόχους που είχαμε θέσει, μαθηματικούς και γλωσσικούς. Η προσεκτική στοχοθεσία και η αντίστοιχη υλοποίηση δραστηριοτήτων χρησιμοποιώντας κατάλληλα σχεδιασμένο έντυπο υλικό (Φ.Ε.) έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο καθ' όλη τη διάρκεια των μαθημάτων. Επίσης, η ανασχεδίαση της πορείας και του υλικού μετά από κάθε διδασκαλία ήταν εξίσου σημαντικά κομμάτια της όλης δράσης. Αντίστοιχη πορεία θα μπορούσε να σχεδιαστεί και για τη διδασκαλία άλλων μαθηματικών εννοιών σε μαθητές που μιλούν την ελληνική ως Γ2 ακολουθώντας τη μέθοδο CLIL. Αυτό είναι κάτι που προτείνουμε να γίνει ως συνέχεια της έρευνάς μας.

1. Οι όροι «επίπεδο ύφους» ή «καταστασιακό ιδίωμα» αναφέρονται σε θεσμοθετημένες διακριτές γλωσσικές ποικιλίες, στις οποίες η γλωσσική χρήση καθορίζεται ανάλογα με το περικείμενο (context).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baker C., (2001). *Foundations of Bilingual Education and Bilingualism*. Great Britain: Biddles Ltd.

Coyle, D. (2006). Content and language integrated learning: Motivating learners and teachers. *Scottish Languages Review*, 13, 1-18.

Cummins, J. (2000). Putting Language Proficiency in its Place. In: Cenoz, J. and Jessner, U. (Eds.) *English in Europe. The Acquisition of a Third Language.* (pp. 39-53). Clevedon: Multilingual Matters.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching Experiments within Design Research. *International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*. 2. 435-440.

Montalto, S.A., Walter, L., Theodorou, M., Chrysanthou, M. (2016). *The CLIL Guidebook.* http://languages.dk/clil4u/#Guidebook (date of access 17.8.2019).

Otwinowska, A. (2013). CLIL lessons in the upper-primary: the interplay of affective factors and CALP. In: Gabryś-Barker, D. and Bielska, J. (Eds.) *The Affective Dimension in Second Language Acquisition* (pp. 211-225). Bristol: Multilingual Matters.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically—communication in mathematics classrooms.* London: Routledge.

Prediger, S., Clarkson, P., & Bose, A. (2012). Away forward for teaching in multilingual contexts: purposefully relating multi lingual registers. In *Preconference Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6213–6222). Seoul.

Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language-and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, 25, 435–456.

Surmont, J., Struys, E., Noort, M., & Craen, P., (2016). The effects of CLIL on mathematical content learning: A longitudinal study. *Studies in Second Language Learning and Teaching*, 6(2)

ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΧΑΡΤΩΝ – ΕΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΜΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Σοφία Μπίλλα, Στέφανος Ασημόπουλος,

Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης

Εκπαιδευτικός ΠΕ70, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

billasofia@gmail.com, asimstef@uth.gr, ttriant@uth.gr

Στο παρόν κείμενο θα παρουσιάσουμε μέρος από τα στοιχεία μιας έρευνας που είχε ως σκοπό, αρχικά, την ανίχνευση και μελέτη των παρανοήσεων αλλά και των δυσκολιών μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης σε συν-διδασκόμενο τμήμα ενός 4/θέσιου δημόσιου δημοτικού σχολείου, κατά τη συμμετοχή τους σε έργα ανάγνωσης και κατασκευής χαρτών. Επιπρόσθετα μέσω της έρευνας μελετήσαμε τις γνωστικές αλλαγές που εμφανίστηκαν σε αυτούς ως προς τις συνιστώσες της χωρικής τους ικανότητας με τη συμβολή ενός διδακτικού πειράματος. Τα βασικά συστατικά του πειράματος ήταν η εποικοδομητική διδασκαλία, η ανάγνωση χαρτών με χρήση σημείων αναφοράς, η έμφαση στη συνεργατική κατασκευή χαρτών, όπως και η διδακτική στήριξη στους λόγους και τις αναλογίες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάγνωση και κατασκευή χαρτών είναι χωρικές δεξιότητες που ανήκουν στην χωρική ικανότητα. Η τελευταία είναι σημαντική στην καθημερινότητα του ανθρώπου και ως θεματική έχει απασχολήσει τόσο ψυχολόγους όσο και ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Δεν υπάρχει ένας ενιαίος, κοινά αποδεκτός, λειτουργικός ορισμός για την χωρική ικανότητα. Η χωρική ικανότητα προσδιορίζει ό,τι έχει χαρακτηριστεί ως χωρική αίσθηση, χωρική αντίληψη, δημιουργία νοερών εικόνων, χωρική οπτικοποίηση, οπτικές δεξιότητες, χωρικός συλλογισμός, νοητικές περιστροφές και οπτικές διαδικασίες (Τζεκάκη, 2007).

Όσον αφορά τη δομή της χωρικής ικανότητας, οι απόψεις των ερευνητών δεν ταυτίζονται. Από τη μια πλευρά υπάρχουν εκείνοι οι οποίοι θεωρούν ότι η χωρική ικανότητα είναι μια μονοδιάστατη «κατασκευή», ενώ από την άλλη υπάρχουν διάφοροι που υποστηρίζουν ότι η χωρική ικανότητα εκδηλώνεται μέσω διακριτών διαφορετικών εκφάνσεων (Clements, 2004). Οι εκφάνσεις αυτές μπορεί να εστιάζουν στην αναζήτηση αντικειμένων σε ένα οπτικό πεδίο με σκοπό τον εντοπισμό μορφών, σχημάτων και των θέσεων αντικειμένων, στη δημιουργία νοητικών παραστάσεων αυτών των μορφών, σχημάτων και θέσεων, στον νοερό χειρισμό αυτών των αναπαραστάσεων, καθώς και στον μετασχηματισμό της εικόνας από τον χώρο σε άλλες αναπαραστάσεις (Ekcstrom et al., 1976).

Στην έρευνά μας ευθυγραμμιστήκαμε με την άποψη ότι η χωρική ικανότητα αποτελεί τη συνισταμένη τριών εκφάνσεων. Η πρώτη της *χωρικής οπτικοποίησης* ορίζεται ως η νοητική ικανότητα να περιστρέφουμε, να στρίβουμε και να αντιστρέφουμε ένα δισδιάστατο ή τρισδιάστατο οπτικό ερέθισμα. Η δεύτερη του *χωρικού προσανατολισμού* ορίζεται ως η ικανότητα κατανόησης ενός χάρτη, μιας αναπαράστασης και του προσανατολισμού στον χώρο. Και η τρίτη των *χωρικών σχέσεων*, ορίζεται ως η ικανότητα να αναγνωρίζουμε αντικείμενα, χωρικές αλληλεπιδράσεις, να φτιάχνουμε χάρτες από περιγραφές, να τους συνδέουμε με αντικείμενα κατανοώντας τις αναπαραστατικές αντιστοιχίσεις μεταξύ των συμβόλων σε έναν χάρτη και των πληροφοριών τις οποίες κομίζουν (Kleeman & Hutchinson, 2005).

ΧΩΡΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΕΣ

Η έννοια του χωρικού προσανατολισμού αποδίδεται με διάφορους όρους. Τον συναντάμε ως χωροταξική ικανότητα, χωρικό συλλογισμό αλλά και χωρική αίσθηση. Ειδικότερα, ο χωρικός προσανατολισμός περιλαμβάνει την κατανόηση και διαχείριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων θέσεων στον χώρο, έχοντας ως σημείο αναφοράς τη συγκεκριμένη θέση ή και την κίνηση κάποιου μέσα σε αυτόν, ενώ μέσα από μια αφαιρετική οπτική εκφράζεται με χάρτες, συντεταγμένες και κλίμακες (Sarama & Clements, 2009). Το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στη χώρα μας προσφέρει στους μαθητές περιορισμένες ευκαιρίες για να μαθηματικοποιήσουν τις καθημερινές τους εμπειρίες ώστε να αναπτύξουν την ικανότητα προσανατολισμού στο χώρο, αφού εστιάζει στις μικρές μόνο τάξεις σε απλοϊκές έννοιες (πάνω-κάτω, κ.λπ.) και στην περιγραφή διαδρομών στο φυσικό περιβάλλον και σε τετραγωνισμένο χαρτί (Τζεκάκη, 2007).

Η χωρική γνώση αφορά την ικανότητα του προσανατολισμού. Προβλήματα όπως ο προσανατολισμός στο περιβάλλον, η αναζήτηση αντικειμένων, η εύρεση πορειών και ο προσανατολισμός, ανήκουν στη χωρική ανάγνωση ενός χάρτη ή μιας αναπαράστασης του χώρου και καθορίζεται από την ικανότητα να κρίνει ο παρατηρητής θέσεις αντικειμένων στον πραγματικό τρισδιάστατο χώρο από κάποια δισδιάστατη ή τρισδιάστατη αναπαράσταση του. Για να μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν χάρτες πρέπει να καταλάβουν δύο είδη αντιστοιχιών μεταξύ του χάρτη και του κόσμου. Η πρώτη αφορά στην αντιστοιχία στοιχείου με στοιχείο και η δεύτερη στην αντιστοιχία χωρικών σχέσεων (Liben & Yekel, 1996). Για την κατανόηση αντιστοιχιών χωρικών σχέσεων είναι απαραίτητη η κατανόηση της κλίμακας, η οποία περιέχει και με τη σειρά της την ικανότητα κωδικοποίησης αποστάσεων και της κατανόησης της αντιστοιχίας προς τις πραγματικές αποστάσεις. Η ικανότητα αυτή αργεί να αναπτυχθεί, αν και μια πρώτη εμφάνισή της μπορεί να γίνει στην ηλικία των τριών ετών (Hutternlocher, Newcombe, & Vasilyena, 1999).

Με την έρευνά μας θελήσαμε να μελετήσουμε τις δυσκολίες μαθητών της Ε΄ και Στ΄ τάξης κατά τη συμμετοχή τους σε έργα ανάγνωσης και κατασκευής χαρτών, καθώς και τις γνωστικές αλλαγές που εμφανίστηκαν σε αυτούς ως προς τις συνιστώσες της χωρικής τους ικανότητας με τη συμβολή ενός διδακτικού πειράματος. Βασικά συστατικά του ήταν η εποικοδομητική διδασκαλία, η ανάγνωση χαρτών με χρήση σημείων αναφοράς, η έμφαση στη συνεργατική κατασκευή χαρτών, όπως και η διδακτική στήριξη σε θέματα λόγων και αναλογιών, ζητήματα που αναδείχθηκαν ως αδυναμίες των συμμετεχόντων κατά το πρώτο μέρος της έρευνας.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνά μας βασίστηκε στις αρχές του διδακτικού πειράματος, καθώς επιτρέπει την δυνατότητα στον ερευνητή-εκπαιδευτικό να εξετάσει την πορεία εξέλιξης των μαθητών μέσα από μία τροχιά διδακτικών επεισοδίων (Molina, Castro, & Castro, 2007). Η έρευνά μας πραγματοποιήθηκε από τον Μάιο ως τον Ιούνιο του 2018. Στην αυτήν συμμετείχαν οι μαθητές ενός συν-διδασκόμενου τμήματος Ε΄ και Στ΄ τάξης, δυναμικότητας 6 και 10 μαθητών αντίστοιχα, ενός 4/θέσιου δημόσιου δημοτικού σχολείου, σε ένα χωριό νομού της περιφέρειας Θεσσαλίας. Η προσέγγιση ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας ήταν η ποιοτική.

Η έρευνα χωρίστηκε σε δύο μέρη. Το πρώτο διάρκειας 14 διδακτικών ωρών αφορούσε σε ατομικά και ομαδικά έργα ανάγνωσης και κατασκευής χαρτών, ενώ το δεύτερο διάρκειας 10 ωρών αφορούσε το διδακτικό πείραμα. Τα παραχθέντα ερευνητικά δεδομένα περιλαμβάνουν τις ηχογραφήσεις στην ολομέλεια των μαθητών και στις επιμέρους ομάδες που σχηματίσαμε, τις σημειώσεις της δασκάλας-ερευνήτριας, καθώς και τις σημειώσεις των αναστοχαστικών συζητήσεων με τον δεύτερο ερευνητή κατά τη διάρκεια του διδακτικού πειράματος. Τα ποιοτικά στοιχεία στα οποία βασίστηκε κυρίως η ανάλυση των δεδομένων που επιχειρήσαμε αφορούσαν: α) σαφήνεια στον γραπτό λόγο β) την ανάλυση του προφορικού λόγου γ) τον τρόπο χρήσης τεχνουργημάτων και εργαλείων μέτρησης από τα παιδιά (χάρακας, μετροταινία, πυξίδα) όπως έχουν καταγραφεί από την μαγνητοφώνηση, την φωτογράφιση και τις επιτόπιες παρατηρήσεις της δασκάλας-ερευνήτριας.

Ως χάρτη στην έρευνά μας εννοούμε οτιδήποτε μπορεί να αποτελέσει αναπαράσταση, η οποία μεταφέρει χωρικά χαρακτηριστικά στον αναγνώστη του χάρτη. Στη διάρκεια του διδακτικού πειράματος πραγματευτήκαμε με τους μαθητές μια αλληλουχία από 18 δραστηριότητες, που μοιράστηκαν στις 3 φάσεις του. Συγκεκριμένα, 9 ατομικές και 5 ομαδικές δραστηριότητες διερεύνησης απάρτιζαν την πρώτη φάση, 3 ομαδικές δραστηριότητες τη δεύτερη φάση οι οποίες στόχευαν τόσο στην προετοιμασία όσο και την υλοποίηση της τελικής δραστηριότητας, αποτίμησης της τρίτης φάσης, η οποία αφορούσε την κατασκευή ενός χάρτη μιας κεντρικής περιοχής του χωριού. Η σχεδίαση των δραστηριοτήτων προκαλούσε τους μαθητές με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν εκτελούσαν μια εργασία να χρησιμοποιούν έναν ή περισσότερους τρόπους χωρικής σκέψης (Gersmehl & Gersmehl, 2007). Για τις ανάγκες των ομαδικών έργων σχηματίσαμε 4 ομάδες των τεσσάρων. Μόνο μία από αυτές ήταν ηλικιακά μεικτή με δύο μαθητές της Ε΄ και δύο της Στ΄ τάξης. Οι ομαδικές δραστηριότητες που πραγματευτήκαμε με αυτούς ανήκουν στη χωρική γνώση, οι οποίες συμβάλλουν στην ανάπτυξη της χωρικής σκέψης και κατά συνέπεια στην ανάπτυξη του χωρικού προσανατολισμού που οδηγεί στην βελτίωση της χωρικής ικανότητας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Στην πρώτη συνάντηση του διδακτικού πειράματος, οι μαθητές εργάστηκαν σε επτά έργα. Στόχος μας μέσω αυτών των ατομικών έργων ήταν η διερεύνηση της χρήσης των κατάλληλων τοπικών επιρρημάτων και άλλων πόρων από τους μαθητές κατά την περιγραφή, είτε ως εξωτερικοί παρατηρητές μιας εικόνας είτε λαμβάνοντας τη θέση ενός από τους ήρωες της, της θέσης ενός αντικειμένου βάσει δύο συνιστωσών ή σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς. Η χρήση τοπικών επιρρημάτων για τους μαθητές της Ε΄ αποδείχθηκε πρόκληση, κάτι που φαίνεται να


Εικ. 1: Πρώτη ομαδική δραστηριότητα

συμφωνεί με αντίστοιχα ερευνητικά ευρήματα (Samara & Clements, 2009). Οι ίδιοι μαθητές δυσκολεύτηκαν και στα υπόλοιπα έργα, ιδιαίτερα όταν το έργο τους καλούσε να απαντήσουν αλλάζοντας θέση με τον ήρωα της εικόνας, άρα και προσανατολισμό ως προς τη θέαση της δράσης. Οι μαθητές, αντίθετα, ήταν περισσότερο εύστοχοι στο έκτο έργο, το οποίο τους καλούσε να περιγράψουν τη σχετική θέση αντικειμένων σε μια εικόνα βάσει των κύριων σημείων του ορίζοντα. Στο εν λόγω έργο είχαμε σχεδιάσει τον Βορρά στο κάτω μέρος της εικόνας. Οι μαθητές που δεν περίστρεψαν κατά 180° το φύλλο της δραστηριότητας πριν συμπληρώσουν τις απαντήσεις τους παρέμειναν εγκλωβισμένοι στις στατικές νοερές εικόνες που είχαν στο μυαλό τους για τα γεωγραφικά σημεία του ορίζοντα (Clements, 2004).

Στη δεύτερη συνάντηση του διδακτικού πειράματος, διάρκειας ενός διδακτικού τρίωρου, ασχοληθήκαμε με την πρώτη ομαδική δραστηριότητα. Καλέσαμε τους μαθητές να δώσουν γραπτές οδηγίες στην Μαρία, ώστε να φτάσει με το αυτοκίνητό της στον αδερφό της ακολουθώντας την συντομότερη διαδρομή (Εικ. 1). Στόχος μας ήταν να διερευνήσουμε τους τρόπους με τους οποίους αντιλαμβάνονται τις θέσεις των πρωταγωνιστών σε σχέση με τη δική τους, όπως και για τους πόρους που θα επέλεγαν για να περιγράψουν τη διαδρομή της Μαρίας. Για αυτό και αποφύγαμε να κατευθύνουμε τους μαθητές στη χρήση συγκεκριμένης ορολογίας όπως τη χρήση σημείων του ορίζοντα, τοπικών επιρρημάτων ή σημείων αναφοράς. Όλες οι ομάδες χάραξαν με επιτυχία πάνω στο χαρτί τη συντομότερη διαδρομή. Ωστόσο, καμία ομάδα δεν έδωσε ακριβείς κατευθυντήριες οδηγίες στην Μαρία, αφού από μόνες τους δεν θα την οδηγούσαν στον προορισμό της.

Απόσπασμα 1: Πρώτη ομάδα

1 Ερευνήτρια: Να δω τι κάνατε;

2 Μαθητής Γ: Ναι. Προχώρα ευθεία μέχρι τη 2η διασταύρωση.

3 Ερευνήτρια: Ποια είναι η 1η και ποια η 2η;

4 Μαθητής Γ: Αυτή είναι η 1η [δείχνει] και αυτή είναι η 2η. [δείχνει]

5 Ερευνήτρια: Αυτή η κουκίδα τι είναι; (δείχνει).

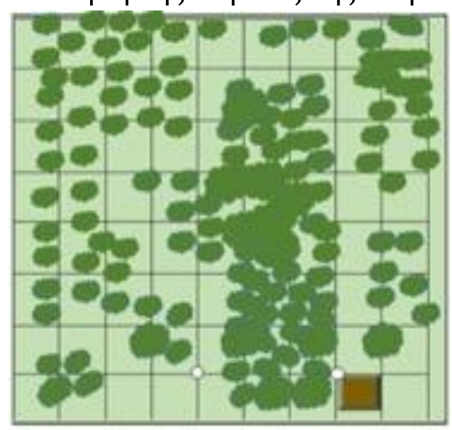
6 Μαθητής Γ: Στροφή.

7 Μαθητής Ν: [παρεμβαίνει ο μαθητής Ν] Δεν είναι διασταύρωση. Πήγαινε όλο ευθεία, στρίψε αριστερά, μετά δεξιά.

8 Μαθητής Γ: [παρεμβαίνει ο μαθητής Γ] Πού; Θα βγει έξω;

9 Ερευνήτρια: Της λέτε να στρίψει αριστερά, να στρίψει δεξιά, μετά αριστερά, σαν να κάνει κύκλους γύρω από τον εαυτό της. [δείχνει με χέρια και σώμα]

Οι μαθητές προσέδωσαν μια γραμμικότητα στις οδηγίες τους, αριθμώντας τα σημεία στα οποία η Μαρία έπρεπε να στρίψει (γραμμές 2, 3, 4). Οι κουκίδες της εικόνας άλλοτε λειτουργούσαν ως διασταύρωση και άλλοτε ως στροφή. Οι μαθητές όρισαν την πρώτη κουκίδα ως «πρώτη διασταύρωση», «πρώτη κουκίδα», «πρώτη τελεία» ή «πρώτο δρόμο». Στον προφορικό τους λόγο οι οδηγίες των μαθητών προς την Μαρία σε κάθε διασταύρωση ήταν της μορφής «στρίψε από εδώ», ως η οδηγός να μπορούσε να τους ακούσει, ενώ κατεύθυναν την Μαρία θεωρώντας ότι η θέαση του φυσικού χώρου ταυτίζεται με τη δική τους μέσω του χάρτη (γραμμές 2, 4, 6). Συχνά λοιπόν στα σημεία που είχαν διαφορετικό προσανατολισμό με τον δικό τους το «στρίψε δεξιά» γινόταν «στρίψε αριστερά» και το αντίστροφο. Επιπλέον οι μαθητές της πρώτης ομάδας, παρέλειπαν την οδηγία «προχώρα ευθεία για τόσο», δίνοντας μόνο οδηγίες για την κατεύθυνση κάθε στροφής (γραμμή 7), ενώ δεν αναφέρθηκαν σε σημεία αναφοράς (π.χ. «προχώρα ευθεία και μόλις φτάσεις στους ουρανοξύστες στρίψε αριστερά»). Παρά τη δραματοποίηση της πορείας της Μαρίας από την ερευνήτρια, οι μαθητές δεν άλλαξαν τις οδηγίες τους. Σε παρόμοιες παρατηρήσεις καταλήξαμε αναλύοντας τη δουλειά και των άλλων ομάδων. Μόνο στην τρίτη ομάδα οι μαθητές παρέθεσαν γραπτώς τις διασταυρώσεις με αναφορά σε κοντινά ορόσημα («δύο δέντρα», «εργοστάσιο», «πολυκατοικίες»). Η κουκίδα πριν την τελευταία στροφή της διαδρομής, αν και εσκεμμένα δεν είχε κάποια λειτουργικότητα, οι μαθητές των τριών ομάδων την όρισαν προφορικά ως «φανάρι», «στάση», «κουκίδα», «πλατεία», «σπίτια», «στροφή». Μόνο η πρώτη ομάδα είπε «συνεχίζουμε ευθεία».


Εικ. 2: Τρίτη ομαδική δραστηριότητα

Στην τρίτη συνάντηση του διδακτικού πειράματος, διάρκειας ενός τρίωρου, οι μαθητές έπρεπε να χαράξουν και πάλι τη συντομότερη διαδρομή δίνοντας επίσης κατευθυντήριες οδηγίες στην Μαρία για να φτάσει στον προορισμό της (σπίτι) κάνοντας χρήση της σχετικής θέσης της (Εικ. 2). Μετά την αφήγηση της ιστορίας, συζητήσαμε για, και σημειώσαμε τις συντεταγμένες των σημείων αφετηρίας και προορισμού της Μαρίας, (4, 1) και (7, 1) αντίστοιχα, λέγοντας τους επίσης ότι ο Βορράς βρισκόταν στο πάνω μέρος της εικόνας. Καλέσαμε τους μαθητές να δώσουν κατευθυντήριες οδηγίες στην Μαρία βάσει αυτών των συντεταγμένων, χωρίς να τους εκδηλώσουμε κάποια προτίμηση για τη χρήση συγκεκριμένης ορολογίας (σημεία ορίζοντα, τοπικά επιρρήματα, κ.λπ.). Όλες οι ομάδες χάραξαν κι εδώ επιτυχώς τη συντομότερη διαδρομή για την Μαρία. Οι ομάδες αναφέρθηκαν στο σημείο αφετηρίας (4, 1) ως «χάρτη», ως «σημείο θέσης του παιδιού», ως «σημείο» και ως «συντεταγμένες». Μόνο η δεύτερη ομάδα εξήγησε με ακρίβεια μετά από συζήτηση με την ερευνήτρια πως προέκυψαν τα ζεύγη τιμών των συντεταγμένων που χρησιμοποίησαν για τη διαδρομή. Στις υπόλοιπες τρεις ομάδες, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να νοηματοδοτήσουν τα σημεία αφετηρίας και τερματισμού της διαδρομής. Ορισμένοι επέλεγαν να μετρήσουν από τα περιθώρια της εικόνας, άλλοι από τα αριστερά προς τα δεξιά ή από κάτω προς τα πάνω τα τετράγωνα, κι άλλοι τα δέντρα, ή τις γραμμές. Ο επόμενος διάλογος είναι χαρακτηριστικός:

Απόσπασμα 2: Πρώτη ομάδα

1 Μαθητής Γ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 τετράγωνα και 1 το σπίτι του.

2 Ερευνήτρια : Γιατί όμως είπαμε (7, 1) και όχι 8;

3 Μαθητής Γ: Γιατί είναι μισό, γιατί είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και μισό.

4 Ερευνήτρια: 7 και μισό; Ποιος αριθμός είναι το μισό;

5 Μαθητής Γ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 και εκεί που τελειώνει το κουτάκι είναι 1.

6 Ερευνήτρια: Δηλαδή;

7 Μαθητής Γ: Η γραμμή που είναι εδώ είναι 1. [δείχνει]

Στην τέταρτη ομάδα η δυσκολία προσδιορισμού των συντεταγμένων του επόμενου σημείου αφορούσε τη δυσκολία συγχρονισμού της κίνησης στο πλέγμα με τον προσανατολισμό της πορείας βάσει των σημείων του ορίζοντα (γραμμές 1, 3).

Απόσπασμα 3: Τέταρτη ομάδα

1 Μαθητής Γ: Είναι το 6, 1.

2 Ερευνήτρια: Πώς το σκέφτηκες;

3 Μαθητής Γ: Αφού προχωράει 2 γραμμές βόρεια.

4 Μαθητής Φ: Αφού είναι 4 πώς βγαίνει το 6, 1;

5 Ερευνήτρια: Πες μας.

6 Μαθητής Φ: 4, 1. Α! 4, 3.

7 Μαθητής Γ: Γιατί είναι από δω και πάνω 3. [δείχνει]

8 Ερευνήτρια: Και από εδώ; [δείχνει η ερευνήτρια]

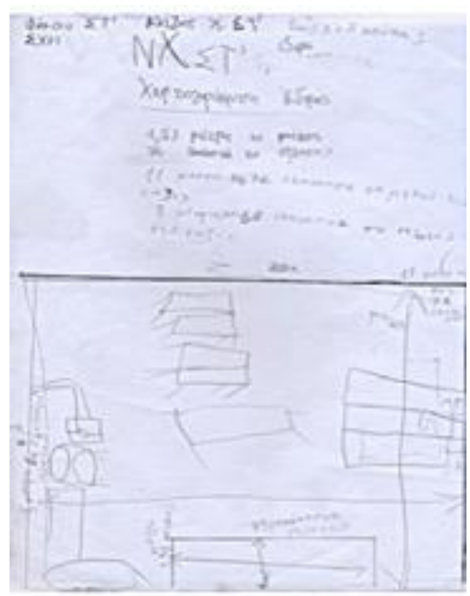
9 Μαθητής Γ: 4.

10 Ερευνήτρια: Ποιο σημείο είναι εδώ; [δείχνει η ερευνήτρια]

11 Μαθητής Γ: 4, 3.

Μετά από την απαίτηση για αιτιολόγηση ο Γ συνειδητοποίησε ότι η κίνηση κατά δύο βήματα προς τα βόρεια ανήκε στη δεύτερη συντεταγμένη (γραμμές 6, 11). Οι μαθητές των ομάδων, αφού νοηματοδότησαν τις πληροφορίες που δίνουν οι αριθμοί των συντεταγμένων, κατάφεραν να κατευθύνουν σωστά την Μαρία κάνοντας χρήση σε κάθε σημείο του κατάλληλου τοπικού επιρρήματος ή το σημείο του ορίζοντα. Τα αποτελέσματα αυτής της δραστηριότητας επιβεβαιώνουν τη σχέση ανάμεσα στη χωρική και τη μαθηματική ικανότητα, αφού οι ενέργειες που διενεργούνται καθώς το άτομο αλληλοεπιδρά με τα νοητικά μοντέλα στα μαθηματικά (π.χ. πίνακας διπλής εισόδου) είναι ίδιες με τις ενέργειες που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των τιμών των συντεταγμένων των σημείων κατά την ανάγνωση ενός χάρτη (Battista, 1994).

Στην τέταρτη συνάντηση διάρκειας ενός διδακτικού τρίωρου, οι μαθητές ασχολήθηκαν με την πέμπτη ομαδική δραστηριότητα. Τους ζητήσαμε να σχεδιάσουν σε μια σελίδα Α4 το περίγραμμα της αίθουσάς τους και ένα αντικείμενο που οι ίδιοι θα επέλεγαν από αυτήν σαν να το έβλεπαν από πολύ ψηλά, για τις ανάγκες μιας τύπου paypal αλληλογραφίας με συνομηλίκους τους από μια άλλη πόλη. Οι μαθητές της Στ΄ τάξης είχαν διδαχθεί την προηγούμενη εβδομάδα τους λόγους και τις αναλογίες. Ωστόσο, αποφύγαμε να δώσουμε συγκεκριμένες οδηγίες για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας ή να αναφερθούμε σε αυτές τις έννοιες ή την κλίμακα. Μοναδική μας απαίτηση ήταν να σημειώσουν αφού θα είχαν ολοκληρώσει το σκαρίφημα τα τέσσερα σημεία του ορίζοντα. Για τον σκοπό αυτό τους είχαμε προμηθεύσει με μαγνητική πυξίδα. Μία από τις ομάδες δεν ολοκλήρωσε τη δραστηριότητα, αφού τη θεώρησε δύσκολη. Η πρώτη ομάδα επέλεξε να σχεδιάσει την έδρα (Εικ. 3). Οι μαθητές χρησιμοποίησαν μια μετροταινία για τις μετρήσεις των πραγματικών διαστάσεων. Τα δεδομένα των μετρήσεων τους ήταν ακριβή, μα δεν τα επεξεργάστηκαν κατά τον σχεδιασμό του σκαριφήματος. Έχοντας χρησιμοποιήσει τη μισή επιφάνεια της σελίδας για να καταγράψουν τις μετρήσεις τους, οι μαθητές θεώρησαν την υπόλοιπη επιφάνεια ως το περίγραμμα της αίθουσάς τους σχεδιάζοντας ένα ορθογώνιο διαστάσεων 20 εκ. και 15 εκ. σημειώνοντας ταυτόχρονα και τις πραγματικές διαστάσεις (11 μ. και 76 εκ., 5 μ. και 60 εκ. αντίστοιχα).


Εικ. 3: Σκαρίφημα 1ης ομάδας

Φάνηκε λοιπόν ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν τον σχεδιασμό του σκαριφήματος περισσότερο ως ζωγραφική, αφού δεν ένιωσαν την ανάγκη να εκμεταλλευτούν τις πρόσφατα διδαχθείσες γνώσεις τους από τους λόγους και τις αναλογίες. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας κατέληξαν να σχεδιάσουν και άλλα αντικείμενα της αίθουσας, χωρίς να τους έχει ζητηθεί ή να τα έχουν επιλέξει εξαρχής, όπως τα παράθυρα, τα οποία είναι στο δεξί μέρος του πλαισίου με γωνία θέασης $180^{ο}$, όπως και τέσσερα θρανία της αίθουσας με γωνία θέασης $45^{ο}$, τα τρία από αυτά όμως με διαφορετική οπτική γωνία από το τέταρτο. Το γραφείο του υπολογιστή στο αριστερό μέρος του πλαισίου, την καρέκλα καθώς και το πληκτρολόγιο με τα καλώδια είχαν σχεδιαστεί στο πλαίσιο με διαφορετικές γωνίες θέασης, ή και με αυθαίρετο τρόπο. Η έδρα στο κάτω μέρος του σκαριφήματος έχει σχεδιαστεί με γωνία θέασης $90^{ο}$ ενώ ο χώρος για τη δασκάλα είναι ανύπαρκτος. Το τελευταίο φάνηκε να τους προβληματίζει όταν το επισήμανε η ερευνήτρια.

Απόσπασμα 4: Πρώτη ομάδα

1 Ερευνήτρια: Εγώ εδώ πέρα κάθομαι πουθενά;

2 Μαθητής Γ: Ναι. Εσείς εδώ, απλά δεν είχαμε χώρο. Πόσο πιο μπροστά να το βάλουμε;

3 Ερευνήτρια: Δεν ξέρω εσείς θα μου πείτε.

4 Μαθητής Γ: Να το πάω λίγο πιο μπροστά; Και να κάνω και την καρέκλα;

5 Ερευνήτρια: Όχι δεν θέλω να μου βάλεις και την καρέκλα. Θέλω να μου πεις ότι σ' αυτό το σημείο βρίσκεται η έδρα; Είναι πιστή αποτύπωση αυτή;

6 Μαθητής Γ: Ναι.

Ενώ φαίνεται λοιπόν να αναγνωρίζουν ως σχεδιαστική αδυναμία την έλλειψη χώρου για την καρέκλα της δασκάλας (γραμμή 2), μα δεν μπορούν να βρουν τρόπο να την ανασκευάσουν, αφού μια πιθανή μετακίνηση της έδρας θα δημιουργούσε μια νέα αδυναμία, την απόσταση μεταξύ έδρας και θρανίων. Τέλος οι μαθητές της πρώτης ομάδας σημείωσαν αυθαίρετα τα σημεία του ορίζοντα. Από τις τέσσερις ομάδες μόνο η δεύτερη τα κατάφερε (μαθητές ΣΤ΄ τάξη), η τρίτη ομάδα (Ε΄ τάξη) παρόμοια ασχολήθηκε όπως η πρώτη ομάδα, ενώ η 4η ομάδα (μικτή Ε΄και Στ΄) αρνήθηκε να ασχοληθεί.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης του διδακτικού πειράματός μας, κι ως προς την πρώτη έκφανση της χωρικής ικανότητας, κυρίως οι δύο μαθητές από την της Ε΄ φάνηκε να μη διαθέτουν αυτή την νοητική ικανότητα σε ικανό βαθμό, παραμένοντας εγκλωβισμένοι στις στατικές νοερές εικόνες τους. Ως προς την έκφανση του χωρικού προσανατολισμού, όλοι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις όπως και να χρησιμοποιήσουν με άνεση χωρικά ορόσημα ως σημεία αναφοράς. Ως προς την τρίτη έκφανση, οι 12 από τους 16 μαθητές δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τις δύο απαραίτητες ικανότητες για την κατανόηση της χρησιμότητας της κλίμακας στην ανάγνωση και κατασκευή χωρικών αναπαραστάσεων. Η ανίχνευση των δυσκολιών τους μας οδήγησαν στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων των επόμενων φάσεων του διδακτικού πειράματος με σκοπό την ανάπτυξη της χωρικής τους ικανότητας, μιας και τελευταία δεν είναι αυτονόητη ούτε εξελίσσεται από μόνη της ή με βάση την ηλικιακή ωρίμανση (Τζεκάκη, 2007). Παρά το ελπιδοφόρο ξεκίνημα όσον αφορά στην κατασκευή νοήματος που σχετίζεται με τη χρήση χαρτών κατά την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, τα μεγαλύτερα παιδιά στο δημοτικό σχολείο ή ακόμη και οι ενήλικοι επιδεικνύουν μια αφελή χαρτογραφική ματιά (Liben & Downs, 1993). Τα αναλυτικά προγράμματα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση κι όχι μόνο, θα πρέπει λοιπόν να προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες για τη σύνδεση δεξιοτήτων που σχετίζονται με την ανάγνωση και την κατασκευή χαρτών με το πρόγραμμα σπουδών των σχολικών αντικειμένων και ιδιαίτερα των μαθηματικών (Muir & Cheek, 1986).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Battista, M. T. (1994). On Greeno's Environmental/Model View of Conceptual Domains: A Spatial/Geometric Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(1),* 86-94.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education.* Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Ekstrom, R. B., French, J. W., Harman, H. H., and Derman, D. (1976). *Manual for kit of factor-referenced cognitive tests.* Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Gersmehl, J. P., & Gersmehl, C. A. (2007). Spatial Thinking by Young Children: Neurologic Evidence for Early Development and "Educability". *Journal of Geography, 106,* 181-191.

Huttenlocher, J., Newcombe, N., & Vasilyeva, M. (1999). Spatial scaling in young children. *Sage Journal: Psychological Science, 10(5),* 393-398. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00175 .

Kleeman, G., & Hutchinson, N. (2005). Maps in Classroom. *The Globe*, *57*, 1-12 ανακτήθηκε από https://search.informit.com.au/documentSummary;dn=199223135905840;res=IELHSS>ISSN:0311-3930.

Liben, L. S. & Downs, R. M. (1993). Understanding Person-Scale-Map relations: Cartographic and Developmental perspectives*. Developmental Psychology, 29(4),* 739-752.

Liben, L. S., & Yekel, C. A. (1996), Preschoolers' Understanding of Plan and Oblique Maps: The Role of Geometric and Representational Correspondence. *Child Development*. *67(6),* 2780-2796.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching Experiments within Design Research. *International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*. 2. 435-440.

Muir, P. S. & Cheek, H. N. (1986). Mathematics and the map skill curriculum: *School Science and Mathematics, 86(4),* 284-291.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children.* New York, NY: Routledge.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα: Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία.* Αθήνα: Gutenberg.

ΛΕΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΛΕΚΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΜΗ ΒΛΕΠΟΝΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος[1], Χρήστος Μαραγκοζίδης[2]

[1]Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστημίου Αιγαίου, [2]Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

amoutsiosrentzos@aegean.gr, marago_4@hotmail.com

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται το απλό σχήμα Toulmin για την παράλληλη και ταυτόχρονη διερεύνηση της λεκτικής και μη λεκτικής (χειρονομίες) επιχειρηματολογίας, μη βλεπόντων μαθητών για την εννοιακή σχέση εμβαδού-περιμέτρου παραλληλογράμμων. Η προτεινόμενη μεθοδολογία ανέδειξε τη διαφοροποίηση των ρόλων λεκτικών και μη λεκτικών όψεων στη δομή του επιχειρήματος, τόσο αυθόρμητα, όσο και στην παρουσία απτικού υλικού. Επίσης, φάνηκαν συγκλίσεις με τη βιβλιογραφία για τις εννοιακές κατανοήσεις των βλεπόντων των δύο μεγεθών ως συνεχώς συμμεταβαλλόμενα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι δίαυλοι επικοινωνίας των μαθητών με προβλήματα όρασης με τον κόσμο που τους περιβάλλει, αλλά και οι τρόποι ενσωμάτωσης και κατανόησής του, διαφέρουν ποσοτικά και ποιοτικά από τους βλέποντες (Healy & Fernandes, 2011). Η Γεωμετρία οργανώνει την αισθητηριακή πρόσληψη του κόσμου σε δομές οι οποίες ξεκινούν από πολύ μικρές ηλικίες (Skoumpourdi, 2015). Βασικό μέρος της διδασκαλίας και της μάθησης της Γεωμετρίας είναι η μέτρηση, η οποία θεωρείται ο συντονισμός του χώρου και του αριθμού (Smith, van den Heuvel-Panhuizen, & Teppo, 2011). Ενώ διαδικαστικά η μέτρηση του εμβαδού και της περιμέτρου επίπεδων σχημάτων δε φαίνεται να δυσκολεύει τους βλέποντες μαθητές, συναντούν δυσκολίες στις εννοιακές σχέσεις εμβαδού και περιμέτρου (Steele, 2013), οι οποίες σχετίζονται και με τους λεγόμενους διαισθητικούς κανόνες (Stavy & Tirosh, 2000). Φαίνεται ότι υπάρχει έλλειψη σχετικής έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών σε μη βλέποντες. Μια τέτοια μελέτη έχει ενδιαφέρον, καθώς τα άτομα με οπτική αναπηρία επικοινωνούν διαφορετικά, αλλά και αλληλεπιδρούν διαφορετικά με τον αισθητηριακά αντιλαμβανόμενο χώρο. Υιοθετώντας την άποψη ότι η κατασκευή μαθηματικής γνώσης είναι μια κοινωνικοπολιτισμική διαδικασία που εμπεριέχει εγγενώς τη μαθηματική επιχειρηματολογία, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη της λεκτικής και της μη λεκτικής επιχειρηματολογίας μη βλέποντων ατόμων. Στην παρούσα έρευνα επικεντρωνόμαστε στις χειρονομίες μη βλέποντων μαθητών και μαθητριών, διερευνώντας τη λεκτική και μη λεκτική επιχειρηματολογία τους σχετικά με τη συμμεταβολή εμβαδού και περιμέτρου παραλληλογράμμων.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ

Η μέτρηση είναι βασικό στοιχείο της Γεωμετρίας (περιλαμβάνοντας το μήκος, την περίμετρο, το εμβαδόν και τον όγκο· Sisman & Aksu, 2015), ενώ η υποτίμησή της μπορεί να επιφέρει σοβαρά μειονεκτήματα στη μάθηση των μαθηματικών, δεδομένου ότι οι έννοιες και οι δεξιότητες που εμπλέκονται στη μέτρηση βοηθούν τόσο στα μαθηματικά, όσο και την καθημερινή ζωή (Ryan & Williams, 2007). Οι μαθητές και οι μαθήτριες φαίνεται ότι έχουν εναλλακτικές εννοιολογικές κατανοήσεις του εμβαδού και της περιμέτρου (Machaba, 2016· Stephanou & Pitta-Pantazi, 2006), οι οποίες σχετίζονται και με υπεργενικεύσεις προηγούμενων γνώσεων για τους τύπους υπολογισμού που ισχύουν για τα ορθογώνια και σε άλλα σχήματα (Machaba, 2016). Επίσης, δυσκολίες καταγράφονται στην αντίληψη του τρόπου που οι μονάδες μήκους παράγουν μονάδες εμβαδού, στην κατανόηση της διατήρησης του εμβαδού, στην κατανόηση της διαφοράς μεταξύ της έννοιας του εμβαδού και της περιμέτρου και των τύπων τους, καθώς και στην απεικόνιση ή επιχειρηματολογίας σχετικών ιδεών (Larsen, 2006˙ Sisman & Aksu, 2015· Stephanou & Pitta-Pantazi, 2006). Οι μαθητές και οι μαθήτριες φαίνεται ότι επηρεάζονται στην οργάνωση διάφορων δραστηριοτήτων από μη σχετικά εξωτερικά χαρακτηριστικά, αναπτύσσοντας διαισθητικούς κανόνες (Stavy & Tirosh, 2000): α) *Περισσότερο Α – Περισσότερο Β*, β) *Ίδιο Α – Ίδιο Β*, γ) *Όλα μπορούν να διαιρεθούν.* Σχετικά με την περίμετρο και το εμβαδό, οι Stavy και Tirosh (2000) διαπιστώνουν για ένα σημαντικό ποσοστό των παιδιών το εμβαδόν ενός σχήματος μειώνεται ή αυξάνεται, η περίμετρος θα μειώνεται ή θα αυξάνεται αντίστοιχα, βάσει του διαισθητικού κανόνα *Περισσότερο Α – Περισσότερο Β*. Εντούτοις, φαίνεται να υπάρχει έλλειψη αντίστοιχης έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών σε μη βλέποντες.

ΜΗ ΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι μη βλέποντες παρουσιάζουν δυσκολία στην αντιληπτική τους ανάπτυξη και καθυστερούν να κατακτήσουν τη μαθηματική γνώση συγκριτικά με τους βλέποντες της ηλικίας τους (Csocsán, 2005), το οποίο σχετίζεται και με τις διαφορές μεταξύ χαρακτηριστικών της όρασης και της αφής (Κόζα & Σκουμπουρδή, 2012). Ενώ η όραση είναι συνθετική και καθολική στην πρόσληψη της πληροφορίας, μέσω της αφής προσλαμβάνονται πληροφορίες με διαδοχικό τρόπο που συντίθενται σε ένα συνεκτικό σύνολο (Healy & Fernandes, 2011).Τα μη βλέποντα άτομα φαίνεται ότι αναπτύσσουν ένα είδος πολυδιάστατης αντίληψης, που η Millar (1994) όρισε ως *απτική αντίληψη* (haptic perception), η οποία συνδέεται με την αίσθηση της αφής και αντλεί από δύο πηγές πληροφορίας: α) τις *κύριες* (αφή, κίνηση, στάση), και β) τις *δευτερεύουσες* (γλωσσικά θέματα, προϋπάρχουσα γνώση, είδος του σχήματος, συνθήκες της δραστηριότητας). Από τις κύριες πηγές πληροφορίας γίνεται κατανοητό ότι το σώμα παίζει σημαντικό ρόλο στην αναπτυξιακή πορεία των ατόμων αυτών. Η ιδιαίτερη σημασία του σώματος για τους μη βλέποντες φαίνεται και από το γεγονός ότι το χρησιμοποιούν ως μονάδα μέτρησης για να διαμορφώσουν ένα νοητικό χάρτη του περιβάλλοντος κόσμου και της θέσης τους μέσα σ’ αυτόν (Κωστής & Ανδρέου όπως αναφέρεται στο Κόζα & Σκουμπουρδή, 2012). Αντίστοιχα μπορούν να δρουν και οι βλέποντες με τη διαφορά ότι υπάρχει η δυνατότητα της συμμετοχής της όρασης, μετασχηματίζοντας ποιοτικά τις ενσώματες όψεις της αλληλεπίδρασης· για παράδειγμα, υπάρχει η δυνατότητα της οπτικής οριοθέτησης πριν τη μέτρηση κάποιου μήκους ή εμβαδού.

Στις κινήσεις του σώματος εντάσσονται και χειρονομίες. Οι Healy και Fernandes (2008), στην έρευνά τους υιοθέτησαν την κατηγοριοποίηση χειρονομιών του McNeill (1992) ο οποίος τις διακρίνει σε: 1) *εικονιστικές χειρονομίες* (iconic gestures) που αφορούν συμπληρωματικά ή επεξηγηματικά στοιχεία κι αναφέρονται σε υλικά αντικείμενα, 2) *μεταφορικές χειρονομίες* (metaphoric gestures) που εκφράζουν την εικονική αναπαράσταση μιας αφηρημένης ιδέας, 3) *δεικτικές χειρονομίες* (deictic gestures) που χρησιμοποιούνται για να υποδείξουν αντικείμενα (υλικά ή εικονικά), ανθρώπους ή θέσεις στο χώρο και 4) *παλμικές χειρονομίες* (beat gestures) που είναι μικρές γρήγορες διφασικές κινήσεις που συνοδεύουν το λόγο. Κατά τις Healy & Fernandes (2011), οι μη βλέποντες, όπως και οι βλέποντες, προβαίνουν σε χειρονομίες από τη μία για να επικοινωνήσουν με κάποιο άτομο που βλέπει και από την άλλη για τον εαυτό τους, υποστηρίζοντας ότι οι χειρονομίες έχουν διττό, αλλά όχι διακριτό, ρόλο: της δόμησης και της επικοινωνίας της γνώσης. Παράλληλα με το ενσώματο βίωμα και τις χειρονομίες, η χρήση υλικού διαμορφώνει και μετασχηματίζει την επικοινωνία και τη δόμηση της γνώσης σε βλέποντες, αλλά και σε μη βλέποντες (Κόζα & Σκουμπουρδή, 2012· Σκουμπουρδή, 2012).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

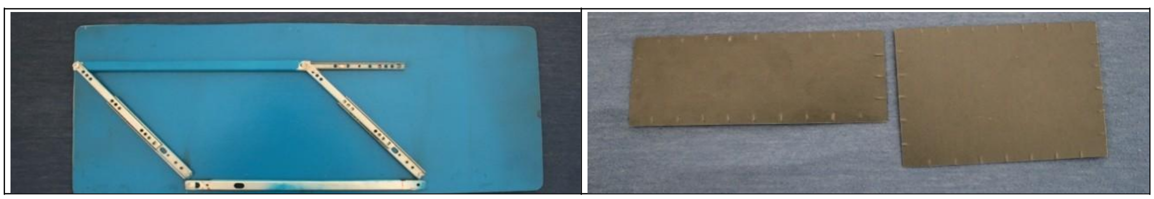
Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών, ως κοινωνικοπολιτισμικές διαδικασίες είναι εγγενώς συνδεδεμένες με την επιχειρηματολογία, η οποία μπορεί να ιδωθεί ως η τεκμηρίωση και η επεξήγηση που χρησιμοποιείται για να πείσουμε ή να πειστούμε για την ορθότητα κάποιου συλλογισμού (Lithner, 2003). Ο Toulmin (1958) ανέπτυξε ένα σχήμα ανάλυσης της μικροδομής του επιχειρήματος (άρα και του μαθηματικού επιχειρήματος). Διακρίνει έξι στοιχεία με διακριτές και συμπληρωματικές λειτουργίες που δομούν ένα επιχείρημα: α) *Ισχυρισμός* (claim· η δήλωση την οποία θέλει να στηρίξει ο ομιλητής), β) *Δεδομένα* (data· τα δεδομένα θεμελίωσης και αιτιολόγησης του ισχυρισμού), γ) *Εγγύηση* (warrant· συνδετικός κανόνας μεταξύ δεδομένων και ισχυρισμού, δ) *Υποστήριξη* (backing· ευρύτερη τεκμηρίωση της εγγύησης), ε) *Βαθμός βεβαιότητας* (modal qualifier· διαβάθμιση της ισχύος του ισχυρισμού), στ) *Ανασκευή* (rebuttal· προϋποθέσεις αναίρεσης του ισχυρισμού). Στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών έχει χρησιμοποιηθεί το σχήμα σε διάφορες μορφές: πλήρες, μερικό ή/και με επεκτάσεις/προσθήκες (Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007· Krummheuer, 1995· Pedemonte, 2007). Στην παρούσα έρευνα επικεντρωνόμαστε σε μια απλή εκδοχή του σχήματος Toulmin (δεδομένα, εγγύηση, ισχυρισμό) και στις μορφές των εγγυήσεων που χρησιμοποιούν οι μη βλέποντες κατά τη δόμηση του μαθηματικού επιχειρήματος. Οι Inglis et al.(2007), εξετάζοντας τις εγγυήσεις τις κατηγοριοποίησαν σε: α) *Παραγωγικές* (deductive· τυπικές μαθηματικές αιτιολογήσεις, όπως αξιώματα, χειρισμός αλγεβρικών συμβόλων, αντιπαραδείγματα κ.α.), β) *Επαγωγικές* (inductive· ατελώς επαγωγικού χαρακτήρα), και γ) *Δομικές- διαισθητικές* (structural-intuitive· αιτιολογήσεις, κάποιες φορές διαισθητικές, βασισμένες σε πειραματισμούς ή/και παρατήρηση νοητικών δομών, οπτικοποιημένων ή μη).

Συνεπώς, θέτουμε τα εξής ερευνητικά ερωτήματα: α) Εμφανίζονται οι διαισθητικοί κανόνες στην επιχειρηματολογία των μη βλεπόντων; β) Ποιος ο ρόλος λεκτικής και μη λεκτικής επικοινωνίας στη δομή των επιχειρημάτων των μη βλεπόντων; γ) Πώς διαφοροποιείται η αυθόρμητη επιχειρηματολογία τους από αυτή που γίνεται με χρήση υλικού;

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι στόχοι και οι σκοποί της εκπαίδευσης βλεπόντων και μη είναι οι ίδιοι (Χιουρέα όπως αναφέρεται στο Κόζα & Σκουμπουρδή, 2012). Οι μαθητές με ολική ή μερική οπτική αναπηρία (χωρίς άλλα κωλύματα) έχουν τη δυνατότητα να φοιτούν σε τάξεις του Γενικού Σχολείου, ακολουθώντας το ίδιο Αναλυτικό Πρόγραμμα με τους βλέποντες συμμαθητές τους. Υποστηρίζονται κατά τη διάρκεια του μαθήματος είτε από τον εκπαιδευτικό της τάξης είτε από ειδικό εκπαιδευτικό ή βοηθητικό προσωπικό, ενώ σε Αθήνα και Θεσσαλονίκημπορούν να παρακολουθήσουν υποστηρικτικά απογευματινά μαθήματα σε ειδικά κέντρα. Τα σχολικά εγχειρίδια είναι προσαρμοσμένα είτε με μεγάλη και έντονη γραμματοσειρά, είτε σε γραφή Braille.

Σχήμα 1: Υλικό πρώτης (αριστερά) και δεύτερης (δεξιά) δραστηριότητας.



Η έρευνα διεξήχθη με τρεις μαθητές με αναπηρία όρασης, ένα αγόρι και δύο κορίτσια: η Αφροδίτη (17 χρονών, μαθήτρια Α' Λυκείου, εκ γενετής μη βλέπουσα, με ποσοστό όρασης 5% από το ένα μάτι), η Ειρήνη (15 χρονών, μαθήτρια Α' Λυκείου, εκ γενετής μη βλέπουσα χωρίς κάποιο ποσοστό όρασης) και ο Λεωνίδας (18 χρονών, μαθητής Β' Λυκείου και έχει επίκτητη οπτική αναπηρία, με ποσοστό όρασης 5%). Πραγματοποιήθηκαν δύο συναντήσεις συνδιδασκαλίας του καθηγητή μαθηματικών του κέντρου και ενός μέλους της ερευνητικής ομάδας, διάρκειας από μία έως μιάμιση ώρα. Εφαρμόστηκαν δύο δραστηριότητες με θέμα τη σχέση συμμεταβολής εμβαδού και περιμέτρου. Στην πρώτη, συζητήθηκε αν είναι δυνατόν ένα σχήμα να δέχεται αλλαγές και ενώ η περίμετρός του αλλάζει, το εμβαδόν να παραμένει σταθερό. Στη συνέχεια δόθηκε μια κατασκευή με μεταλλικούς άξονες που σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο του οποίου η βάση είναι σταθερή, ενώ η απέναντι πλευρά μπορεί να κινηθεί στη νοητή ευθεία στην οποία βρίσκεται. Αρχικά ζητήθηκε να αναγνωρίσουν το σχήμα κι έπειτα, αφού το μεταβάλλαμε ρωτήθηκαν τι παρατηρούν. Στη δεύτερη δραστηριότητα, συζητήθηκε αν γίνεται δύο γεωμετρικά ομοειδή σχήματα να έχουν ίδια περίμετρο αλλά διαφορετικό εμβαδόν. Αφού αιτιολόγησαν την σκέψη τους, δόθηκαν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ανάγλυφες εγκοπές στις πλευρές, εκ των οποίων το ένα έχει μήκος 10 και πλάτος 4, ενώ το άλλο είναι 8x6 (δηλαδή, ίδιας περιμέτρου, αλλά διαφορετικού εμβαδού). Τα απτικά σχήματα ήταν σε τέτοια απόσταση από τους μαθητές, που το ποσοστό όρασης των δύο εξ αυτών δεν ήταν αρκετό για να τα βλέπουν, το πάχος του υλικού τους ήταν τόσο ώστε να μην σχίζεται, αλλά και σχετικά με το μέγεθος της επιφάνειας αρκετά λεπτό ώστε τα σχήματα να μην θεωρηθούν τρισδιάστατα. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν αρχεία ήχου και βίντεο, καθώς και για σημειώσεις πεδίου. Η ανάλυση έγινε παράλληλα σε λεκτική και μη λεκτική επικοινωνία, σύμφωνα με το απλό σχήμα Toulmin, κατηγοριοποιώντας τις εγγυήσεις σύμφωνα με τους Inglis et al. (2007) και τις χειρονομίες σύμφωνα με τον McNeill (1992).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζονται ενδεικτικά αποσπάσματα όπως αναλύθηκαν στην παρούσα έρευνα.

1η δραστηριότητα: Αφροδίτη				
		Δεδομένα	*Εγγύηση*	*Ισχυρισμός*
Αυθ	Λ	«Αν το σχήμα…»	«…είναι μεγαλύτερο, προφανώς και το εμβαδόν θα είναι μεγαλύτερο.» (διαισθητική)	«Όχι δεν μπορούν να έχουν ίδιο εμβαδόν, αλλά διαφορετική περίμετρο.»
	ΜΛ	Σχεδιασμός παραλ/μων με τη χρήση και των δύο χεριών (μεταφορικές χειρονομίες)	-	-
Υλ	Λ	«Εδώ στο σχήμα…»	«…όταν το αλλάζουμε, οι (πλάγιες) πλευρές μεγαλώνουν, όμως η βάση μένει ίδια… εεε και το ύψος.» (παραγωγική)	«Όσο μεγαλώνει η περίμετρος, μεγαλώνει το σχήμα, όμως το εμβαδόν παραμένει το ίδιο.»
	ΜΛ	Απτική μελέτη των σχημάτων (εικονιστικές χειρονομίες) Σχεδιασμός στοιχείων που λείπουν από το σχήμα (μεταφορικές χειρονομίες) Κατάδειξη στοιχείων για συγκεκριμενοποίηση (δεικτικές χειρονομίες)	Απτική μελέτη για επιβεβαίωση (εικονιστικές χειρονομίες)	-
2η δραστηριότητα: Λεωνίδας				
		Δεδομένα	*Εγγύηση*	*Ισχυρισμός*
Αυθ	Λ	«Σε ένα σχήμα…»	«…αν αλλάξει το εμβαδό, θα	«Όχι δε γίνεται να

			αλλάξει και το μήκος των πλευρών βασικά.» (διαισθητική)	έχουν ίδια περίμετρο και διαφορετικό εμβαδό.»
	ΜΛ	-	-	-
Υλ	Λ	«Τα δύο σχήματα…»	«… γιατί 48 το ένα και 40 το άλλο, αλλά και τα δύο έχουν περίμετρο 28.» (παραγωγική)	«… έχουν ίδια περίμετρο και τα εμβαδά είναι διαφορετικά…»
	ΜΛ	Απτική μελέτη των σχημάτων (εικονιστικές χειρονομίες) και σχεδιασμός στοιχείων που λείπουν από το σχήμα (μεταφορικές χειρονομίες) Κατάδειξη στοιχείων για συγκεκριμενοποίηση (δεικτικές χειρονομίες)	Απτική μελέτη για επιβεβαίωση (εικονιστικές χειρονομίες)	Γρήγορη κίνηση του σχήματος, χτύπημα των δαχτύλων στο σχήμα, χτύπημα των δαχτύλων μεταξύ τους (παλμικές χειρονομίες)
2η δραστηριότητα: Ειρήνη				
		Δεδομένα	*Εγγύηση*	*Ισχυρισμός*
Αυθ	Λ	«Στο σχήμα…»	«…αν πάρουμε μεγαλύτερο εμβαδόν θα είναι και το σχήμα πιο μεγάλο» (διαισθητική)	«Όχι δε γίνεται ίδια περίμετρος, αλλά διαφορετικό εμβαδό.»
	ΜΛ	-	-	-
Υλ	Λ	«Τα σχήματα…»	«Το πρώτο είχε (εμβαδόν) 40 και το δεύτερο (εμβαδόν) 48… και τα δύο έχουν περίμετρο 28.» (παραγωγική)	«… είναι και τα δύο ορθογώνια (παραλληλόγραμμα) και έχουν το ίδιο εμβαδόν αλλά όχι την ίδια περίμετρο.»
	ΜΛ	Απτική μελέτη των σχημάτων (εικονιστικές χειρονομίες) Κατάδειξη στοιχείων για	Απτική μελέτη για επιβεβαίωση (εικονιστικές χειρονομίες)	Χτύπημα των δαχτύλων στο θρανίο και μεταξύ τους (παλμικές χειρονομίες)

συγκεκριμενοποίηση (δεικτικές χειρονομίες)

Σημειώσεις: Αυθ: Αυθόρμητη, Υλ: Υλικό, Λ: Λεκτική, ΜΛ: Μη λεκτική

Σχήμα 2: Αποσπάσματα της προσέγγισης ανάλυσης λεκτικής και μη λεκτικής επιχειρηματολογίας που προτείνεται στην παρούσα έρευνα.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης φανέρωσαν τη χρήση του διαισθητικού κανόνα *Περισσότερο Α – Περισσότερο Β* (Stavy & Tirosh, 2000) κατά την επιχειρηματολογία σχετικά με τη σχέση εμβαδού και περιμέτρου. Ωστόσο, μετά από τη χορήγηση των απτικών σχημάτων, της κατασκευής και τη συζήτηση γύρω από βασικές ιδιότητες τους, οι μαθητές ανέπτυξαν επιχειρηματολογία που φάνηκε να ξεπερνά τη διαίσθηση της αναγκαστικής συμμεταβολής τους. Ενώ η μορφή εμφάνισης των χειρονομιών ήταν διαφορετική σε κάθε μαθητή, ο τρόπος ένταξης αυτών στα επιχειρήματά τους ήταν κοινός. Πιο συγκεκριμένα, στην αρχή και των δύο δραστηριοτήτων οι μαθητές δεν είχαν το σχήμα στη διάθεσή τους, με αποτέλεσμα να βασιστούν σε νοητικές εικόνες σχημάτων για να αντλήσουν τα δεδομένα τους. Και οι τρεις ισχυρίστηκαν ότι οι αλλαγές στη μία παράμετρο θα επιφέρουν και αλλαγές στην άλλη, επηρεασμένοι από τον προαναφερθέντα διαισθητικό κανόνα. Φαίνεται δηλαδή ότι η εγγύηση που χρησιμοποίησαν ήταν δομική-διαισθητική. Στη διαδικασία αυτή η Ειρήνη και ο Λεωνίδας δε χρησιμοποίησαν χειρονομίες, ενώ η Αφροδίτη διαφοροποιήθηκε, καθώς όταν εξηγούσε το σκεπτικό της προέβην σε μεταφορικές χειρονομίες σχηματίζοντας με τα χέρια της τα παραλληλόγραμμα που είχε ως νοητικές εικόνες στο μυαλό της.

Ύστερα από τη χορήγηση των εργαλείων των δραστηριοτήτων (κατασκευή και σχήματα) και συζήτηση γύρω από αυτά, οι συμμετέχοντες έλαβαν τα δεδομένα τους από τα απτικά αντικείμενα, κατέληξαν σε μαθηματικά ορθό ισχυρισμό και τον υποστήριξαν μέσω παραγωγικών εγγυήσεων. Η εμφάνιση των χειρονομιών σε αυτή τη φάση έγινε εντονότερη και στα τρία στοιχεία της επιχειρηματολογίας. Οι μαθητές για να μελετήσουν τα σχήματα και συλλέξουν τα δεδομένα τους, προέβην σε εικονιστικές ή μεταφορικές χειρονομίες και για να τα δείξουν σε δεικτικές. Προσπαθώντας να διατυπώσουν σωστά τον ισχυρισμό τους εμφανίστηκαν παλμικές χειρονομίες και καθώς τον στήριζαν εικονιστικές.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Στην παρούσα έρευνα καταγράφηκε ότι εμφανίζεται και στους μη βλέποντες ο διαισθητικός κανόνας *Περισσότερο Α- Περισσότερο Β* (Stavy & Tirosh, 2000). Χωρίς να έχει διατυπωθεί ρητά η επιρροή αυτού του κανόνα, σε μελέτες των Healy και Fernandes (2008, 2011) οι απαντήσεις φαίνεται να είναι επηρεασμένες από διαισθητικούς κανόνες (π.χ. *Ίδιο Α- Ίδιο Β*). Η επιρροή αυτή μπορεί να ερμηνευτεί, καθώς η διαίσθηση ξεπερνά τα δοθέντα δεδομένα και η εξαγωγή συμπερασμάτων, μέσω αυτής, προκύπτει πέρα από τις άμεσες πληροφορίες (Stavy & Tirosh, 2000). Ισχυριζόμαστε ότι η έμμεση πληροφορία που συμπληρωματικά επηρεάζει τις απαντήσεις των μαθητών της παρούσας έρευνας είναι η γενίκευση της λογικής δομής *αν- τότε* (Stephanou & Pitta-Pantazi, 2006): *αν* αλλάξει η μία παράμετρος (εμβαδόν/περίμετρος), *τότε* αναγκαστικά μεταβάλλεται και η άλλη, επειδή παρατηρείται συμμεταβολή σε πολλές περιπτώσεις.

Αναφορικά με την επιχειρηματολογία των μη βλεπόντων για τις εννοιακές σχέσεις μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου παραλληλογράμμων, αυτή φαίνεται να διαφοροποιείται όταν είναι αυθόρμητη από ότι όταν είναι με την ύπαρξη υλικού. Κατά την πρώτη φάση φαίνεται οι μαθητές και οι μαθήτριες να μπορούν να λάβουν δεδομένα μέσω προϋπαρχόντων νοητικών εικόνων σχημάτων (Millar, 1994) και στηρίζουν τους ισχυρισμούς τους σε διαισθητικές-δομικές εγγυήσεις (Inglis et al., 2007). Στη δεύτερη φάση, τα δεδομένα λαμβάνονται από τα απτικά παραλληλόγραμμα, ο ισχυρισμός είναι μαθηματικά ορθός και στηρίζεται σε παραγωγικές εγγυήσεις. Στην αυθόρμητη φάση εμφανίζεται κυρίως λεκτική επιχειρηματολογία, χωρίς αυτό να αποκλείει και την εμφάνιση μη λεκτικών εκφράσεων (μεταφορικές χειρονομίες Αφροδίτης). Κατά την φάση με χρήση υλικού, η επιχειρηματολογία συμβαίνει λεκτικά και μη, με χρήση όλων των ειδών των χειρονομιών (McNeill, 1992). Αυτό μπορεί να συμβαίνει καθώς τα απτικά σχήματα δίνουν την ευκαιρία στα μη βλέποντα άτομα να προβούν σε απτικές μεθόδους και κατά συνέπεια σε χειρονομίες (Argyropoulos, 2002). Δεδομένων αυτών των ευρημάτων και της καταγεγραμμένης στη βιβλιογραφία διαφοροποίησης μεταξύ του πείθομαι και πείθω (Moutsios- Rentzos, 2009), σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσαν να εξεταστούν οι σχέσεις λεκτικής και μη λεκτικής επικοινωνίας μη βλεπόντων σε αυτά τα δύο επίπεδα.

Επιπλέον, αν και η λειτουργία των χειρονομιών στην επιχειρηματολογία φάνηκε να είναι η ίδια, καταγράφηκαν ξεχωριστές εκφράσεις της ίδιας κατηγορίας χειρονομιών, οι οποίες ίσως συνδέονται με το είδος της οπτικής αναπηρίας, καθώς συνδέεται με διαφορετικές απτικές πρακτικές (Argyropoulos, 2000). Περαιτέρω έρευνα θα μπορούσε να διερευνήσει αυτά τα ευρήματα σε μεγαλύτερο δείγμα μη βλεπόντων με διαφορετικά είδη οπτικής αναπηρίας.

Συνεπώς, ισχυριζόμαστε ότι η προτεινόμενη προσέγγιση της παράλληλης ανάλυσης λεκτικής και μη λεκτικής επικοινωνίας, φαίνεται να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόησή μας σχετικά με την μαθηματική επιχειρηματολογία μη βλεπόντων ατόμων αποκαλύπτοντας ταυτόχρονα συγκλίσεις και αποκλίσεις με την υπάρχουσα βιβλιογραφία των βλεπόντων, γεγονός που δείχνει την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Argyropoulos, V. (2002). Tactual shape perception in relation to the understanding of geometrical concepts by blind students. *The British Journal of Visual Impairment, 20*(1), 7-16.

Csocsán, E. (2005). Το πρόγραμμα διδασκαλίας των μαθηματικών και η εφαρμογή του σε μαθητές με σοβαρά προβλήματα όρασης στη γενική εκπαίδευση. Στο Α. Ζώνιου-Σιδέρη & Η. Σπανδάγου (Επιμ.) (Μτφ. Στάμογλου), Α., *Εκπαίδευση και* *τύφλωση. Σύγχρονες τάσεις και προοπτικές* (σελ.: 191-204). Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Healy, L., & Fernandes, S. H. A. A. (2008). The role of gestures in the mathematical practices of blind learners. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 137-144). Morelia: PME.

Healy, L., & Fernandes, S. H. A. A. (2011). The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3), 157-174.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3- 21.

Κόζα, Μ. & Σκουμπουρδή, Χ. (2012). Διδακτικές και μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τα μαθηματικά των τυφλών παιδιών. Πρακτικά *29ου Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας (ΕΜΕ): Μαθηματικά: Θεωρία – Πράξη και Προεκτάσεις* (σελ. 343-352), Καλαμάτα.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauershfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 220-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erblaum.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics*, *52*(1), 29-55.

Machaba, F.M. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. *Pythagoras*, *37*(1), 1-11.

Marcone, R., & Penteado, M. G. (2013). Teaching Mathematics for blind students: a challenge at the university. *International Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(1), 23-35.

McNeill, D. (1992). Hand and mind: What gestures reveal about thought. Chicago: University of Chicago Press.

Millar, S. (1994). *Understanding and Representing Space. Theory and Evidence from Studies with Blind and Sighted Children*. Oxford : Clarendon Press.

Moutsios-Rentzos, A. (2009). Styles and strategies in exam-type questions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H.Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 145-152). Thessaloniki, Greece: PME.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions.* Maidenhead, England: OUP.

Sisman, G.T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1293-1319.

Skoumpourdi, C. (2015). Kindergartners measuring length. In *K. Krainer & N.Vondrová (Eds.) 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 9* (pp. 1989-1995), Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME, Prague, Czech Republic.

Σκουμπουρδή, Χ. (2012). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Αθήνα: Πατάκης.

Smith, J. P., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue. *ZDM Mathematics Education, 43*(5), 617-620.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules*. New York: Teachers College Press.

Steele, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 245-268.

Stephanou, L., & Pitta-Pantazi, D. (2006). The impact of the intuitive rule "if A then B, if not A then not B", in perimeter and area tasks. In I. J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 30, pp. 177-184). Prague: Charles University.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambrigde: CUP.

ΑΞΙΟΛΟΓΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΝΟΣ ΠΑΡΕΜΒΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣ ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ

Μαρία Κάττου*, Κωνσταντίνος Χρίστου,**

Δήμητρα Πίττα-Πανταζή***

*Υπουργείο Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας, Κύπρου

**Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

*kattoum@hotmail.com, **edchrist@ucy.ac.cy, ***dpitta@ucy.ac.cy

Η παρούσα εργασία είχε ως στόχο να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα ενός παρεμβατικού προγράμματος, που στόχευε στην ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας (ΜΔ). Στην έρευνα συμμετείχαν 48 μαθητές Δ'-Στ' τάξης δημοτικού σχολείου, εκ των οποίων οι 24 συμμετείχαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η ΜΔ των συμμετεχόντων βελτιώθηκε μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων, με τους μαθητές που συμμετείχαν στο παρεμβατικό πρόγραμμα να επιδεικνύουν μεγαλύτερη βελτίωση από τους υπόλοιπους μαθητές. Ταυτόχρονα, διαφάνηκε ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα ενίσχυσε κυρίως την πρωτοτυπία των μαθητών, σε σχέση με τις ικανότητες ευχέρειας και ευελιξίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μέχρι και τη δεκαετία του '90 τα εκπαιδευτικά ιδρύματα έδιναν έμφαση στην ανάπτυξη ακαδημαϊκών δεξιοτήτων παρά στην ενίσχυση της δημιουργικότητας, ως δεξιότητας σκέψης (Ford & Harris, 1992). Η αναφορά του National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (1999), ότι όλοι είμαστε ή μπορούμε να γίνουμε δημιουργικοί φτάνει να μας δοθούν κατάλληλες ευκαιρίες, έχει προβληματίσει τα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα και έχει στρέψει το ενδιαφέρον στη συμπερίληψη της δημιουργικότητας ανάμεσα στους βασικούς τους στόχους. Για παράδειγμα, το Committee on Science, Engineering, and Public Policy (2005) εισηγήθηκε την ενίσχυση της δημιουργικότητας των πολιτών, στοχεύοντας στην ενίσχυση της οικονομικής ανάπτυξης.

Πρόσφατα, στόχος των εκπαιδευτικών συστημάτων είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων διδακτικών προγραμμάτων που θα μπορούν να ενισχύουν τη δημιουργική σκέψη σε όλους τους μαθητές (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009; Silver, 1997). Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, είναι απαραίτητη η διεξαγωγή εμπειρικών ερευνών που να διερευνούν κατά πόσο η δημιουργικότητα στα μαθηματικά μπορεί να ενισχυθεί σε όλους τους μαθητές και κάτω υπό ποιες συνθήκες. Η παρούσα εργασία στοχεύει να συνεισφέρει προς αυτή την κατεύθυνση, μελετώντας κατά πόσο η ΜΔ μπορεί να ενισχυθεί, αν δοθούν στους μαθητές οι κατάλληλες μαθησιακές και διδακτικές ευκαιρίες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Τα παιδιά, αν και εκ φύσεως είναι δημιουργικά, με την έναρξη της επίσημης εκπαίδευσης η δημιουργικότητά τους μειώνεται και η αποκλίνουσα τους σκέψη αντικαθίσταται σταδιακά από τη συγκλίνουσα σκέψη (Yushau, Mji & Wessels, 2003). Όπως ο Gnedenko (1991, στο Freiman & Sriraman, 2011) ανέφερε, καθένας έχει έμφυτη δημιουργική ικανότητα που φαίνεται να περιορίζεται από το εκπαιδευτικό σύστημα, υποδηλώνοντας ότι η ύπαρξη ή η απουσία συγκεκριμένων παραγόντων στο σχολείο επηρεάζουν τη δημιουργικότητα των μαθητών. Σύμφωνα με τον Goldin (2002), ο σχεδιασμός κατάλληλων εκπαιδευτικών περιβαλλόντων, η εφαρμογή κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων και η επιλογή κατάλληλων δραστηριοτήτων συμβάλλουν στην ανάπτυξη εκπαιδευτικού περιβάλλοντος που στοχεύει στην ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικής σκέψης.

Σχεδιασμός και εφαρμογή κατάλληλων εκπαιδευτικών περιβαλλόντων

Όσον αφορά στον σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλων εκπαιδευτικών περιβαλλόντων, ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει πρώτιστο ρόλο. Για να είναι σε θέση ο εκπαιδευτικός να ενθαρρύνει την ανάπτυξη της ΜΔ, χρειάζεται πρώτα να είναι ικανός να την αναγνωρίζει και να την αναπτύσσει (Beghetto & Kaufman, 2009). Πιο συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι γνώστης του τρόπου με τον οποίο η δημιουργικότητα σχετίζεται με το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και να νιώθει αυτοπεποίθηση (μαθηματικά και παιδαγωγικά) να εφαρμόσει τέτοιου είδους δραστηριότητες στην τάξη του (Leikin, 2009).

Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να εμπλέκει τους μαθητές σε δημιουργικές διερευνήσεις που να είναι ενδιαφέρουσες και σημαντικές για τους ίδιους, χωρίς να τους περιορίζει στη λύση τυπικών μαθηματικών προβλημάτων (Mann, 2006). Ταυτόχρονα, ρόλος του είναι να ενθαρρύνει τους μαθητές να αναλάβουν ρίσκο, για να εντοπίσουν λύσεις που δεν είναι απευθείας αντιληπτές και να τους παρακινεί να ψάχνουν για πολλές και διαφορετικές λύσεις (Sriraman, 2009).

Δημιουργικές δραστηριότητες στα μαθηματικά

Οι Hershkovitz, Peled και Littler (2009) πρότειναν χαρακτηριστικά των δημιουργικών δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, ανέφεραν ότι οι δραστηριότητες πρέπει να επιδέχονται διαφορετικές ορθές απαντήσεις ή μεθόδους επίλυσης, δίνοντας στον λύτη τη δυνατότητα να εργαστεί ανάλογα με τις ικανότητές του. Η χρήση ανοικτών προβλημάτων έχει προταθεί ως κατάλληλο εργαλείο για την ενίσχυση της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά (Silver, 1997). Στα ανοικτού τύπου προβλήματα οι μαθητές είναι υπεύθυνοι να λάβουν αποφάσεις για τις μεθόδους ή τις διαδικασίες που θα χρησιμοποιήσουν και για το είδος των προϋπάρχουσων γνώσεων που είναι σχετικές με αυτά, στοιχεία που μέχρι πρότινος αποφάσιζαν οι δάσκαλοι και τα βιβλία (Siswono, 2008).

Επιπρόσθετο χαρακτηριστικό των δραστηριοτήτων που ενισχύουν τη δημιουργική ικανότητα στα μαθηματικά είναι ο βαθμός δυσκολίας του έργου (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Σύμφωνα με τη Leikin (2009), για να μπορέσουν όλοι οι μαθητές να αναπτύξουν δημιουργικό μαθηματικό συλλογισμό οι δραστηριότητες δεν θα πρέπει να είναι ούτε πολύ εύκολες, αλλά ούτε πολύ δύσκολες. Ως εκ τούτου, η Sheffield (2003) προτείνει όπως υπάρχει ένας αριθμός προφανών απαντήσεων στις οποίες μπορούν να φτάσουν όλοι οι μαθητές, αλλά ταυτόχρονα να υπάρχει περιθώριο για πρόκληση των ικανοτήτων των πιο ικανών μαθητών. Τέτοιες δραστηριότητες που εμπεριέχουν ρίσκο και πειραματισμό τονώνουν τα δημιουργικά άτομα, γιατί θεωρούν ότι έχουν την ευκαιρία να υπερνικήσουν εμπόδια και να αναπτύξουν τον τρόπο σκέψης τους.

Πέρα από την εύρεση πολλών λύσεων, οι δραστηριότητες θα πρέπει να δίνουν στους μαθητές δυνατότητες να διερευνήσουν μαθηματικές έννοιες και να αποκτήσουν βαθιά κατανόηση μαθηματικών ιδεών (Haylock, 1997; Sheffield, 2003). Θα πρέπει, δηλαδή, να προκαλούν τους μαθητές να ασχοληθούν με μαθηματικές έννοιες, όπως οι έμπειροι μαθηματικοί, αφήνοντάς τους περιθώρια να διερωτηθούν, να διερευνήσουν, να συνδυάσουν και να εξηγήσουν μαθηματικές ιδέες, να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές αρχές, να γενικεύσουν και να επιχειρηματολογήσουν (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009; NCTM, 2000; Sheffield, 2003). Σύμφωνα με το NCTM (2000), οι πιο πάνω δεξιότητες αναπτύσσουν τον μαθηματικό συλλογισμό, διευκολύνουν τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών γνώσεων και οδηγούν στην ενίσχυση των υφιστάμενων εννοιολογικών δικτύων. Σε αυτό το πλαίσιο, της εύρεσης πολλών και διαφορετικών απαντήσεων, σύγχρονες έρευνες αξιοποιούν τον αριθμό των ορθών λύσεων (ευχέρεια), τον αριθμό των διαφορετικών μαθηματικών ιδεών που περιλαμβάνονται στις λύσεις (ευελιξία) και την καινοτομία των προτεινόμενων λύσεων (πρωτοτυπία) κατά την αξιολόγηση της ΜΔ (π.χ. Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2013; Leikin, 2009).

ΣΚΟΠΟΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα ενός παρεμβατικού προγράμματος και κατ' επέκταση να διερευνήσει κατά πόσο η ΜΔ διαφοροποιείται έπειτα από διδακτικές παρεμβάσεις. Ειδικότερα, η εργασία στοχεύει να απαντήσει στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: (α) Ποιες διαφορές παρατηρούνται στη ΜΔ των μαθητών πριν και μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα; (β) Υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στη ΜΔ των μαθητών της Πειραματικής ομάδας (ΠΟ) και της Ομάδας ελέγχου (ΟΕ);

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Υποκείμενα

Στην παρούσα εργασία συμμετείχαν 48 μαθητές Δ', Ε' και Στ' τάξης δημοτικού σχολείου. Από αυτούς τους μαθητές, οι 24 συμμετείχαν σε παρεμβατικό πρόγραμμα ενίσχυσης της ΜΔ, συμπληρωματικά της επίσημης σχολικής διδασκαλίας (ΠΟ). Οι υπόλοιποι 24 μαθητές, που απετέλεσαν την ΟΕ, συμμετείχαν μόνο στην επίσημη σχολική διδασκαλία. Ηλικιακά οι μαθητές της ΠΟ κατανέμονται ως ακολούθως: 15 μαθητές φοιτούσαν στη Δ', 3 φοιτούσαν στην Ε' και 6 φοιτούσαν στη Στ'. Όσον αφορά στην ΟΕ, 12 μαθητές φοιτούσαν στη Δ', 7 φοιτούσαν στην Ε' και 5 φοιτούσαν στη Στ'.

Παρεμβατικό πρόγραμμα

Το παρεμβατικό πρόγραμμα είχε διάρκεια 12 δίωρα μαθήματα, τα οποία ολοκληρώθηκαν σε διάστημα 3 μηνών. Όλοι οι συμμετέχοντες, ανεξαρτήτως ηλικίας, παρακολούθησαν τα μαθήματα, που διεξάγονταν μια φορά την εβδομάδα, από τους ερευνητές.

Ο σχεδιασμός των μαθημάτων στηρίχθηκε στις ακόλουθες αρχές: (α) Παροχή ευκαιριών για διερεύνηση μαθηματικών εννοιών, (β) Λύση προβλήματος που αποζητά την εύρεση πολλών, διαφορετικών και καινοτόμων λύσεων ή/και στρατηγικών, (γ) Ύπαρξη κατάλληλου εποπτικού υλικού και ενσωμάτωση σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων, (δ) Εναλλαγές συνεργατικής και αυτοκατευθυνόμενης μάθησης, (ε) Αποδοχή της πολυφωνίας και (στ) Επικοινωνία και επιχειρηματολογία.

Σε αυτά τα μαθήματα, οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν και να διατυπώσουν μαθηματικά προβλήματα, να μοντελοποιήσουν καταστάσεις της πραγματικής ζωής, να παρατηρήσουν και να επεκτείνουν μοτίβα, να εντοπίσουν σχέσεις ανάμεσα σε σχήματα και αριθμούς, να προτείνουν δισδιάστατες και τρισδιάστατες κατασκευές. Σε κάθε περίπτωση, οι μαθητές ενθαρρύνονταν να προτείνουν όσο πιο πολλές (ευχέρεια) και διαφορετικές (ευελιξία) λύσεις μπορούν, που να είναι μοναδικές στην τάξη (πρωτοτυπία).

Εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας (ΕΜΔ)

Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω της χορήγησης του ΕΜΔ (Gronbach α= .783) πριν από και μετά τη διεξαγωγή του παρεμβατικού προγράμματος. Το ΕΜΔ αποτελείται από τέσσερα ανοικτού τύπου έργα (παράδειγμα έργου δίνεται στο Διάγραμμα 1), στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να προτείνουν πολλές λύσεις, διαφορετικές λύσεις, και λύσεις που κανένας άλλος στην τάξη δεν θα μπορούσε να σκεφτεί.

Η διαδικασία αξιολόγησης ενός έργου ΜΔ έχει ως εξής: (α) Ο βαθμός ευχέρειας υπολογίζεται ως το πηλίκο του αριθμού των ορθών μαθηματικών λύσεων που προτάθηκαν από ένα μαθητή και του μέγιστου αριθμού ορθών μαθηματικών λύσεων που προτάθηκαν από κάποιο μαθητή. (β) Ο βαθμός ευελιξίας υπολογίζεται ως το πηλίκο του αριθμού των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στις λύσεις ενός μαθητή και του μέγιστου αριθμού μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στις λύσεις κάποιου μαθητή. (γ) Ο βαθμός πρωτοτυπίας υπολογίζεται με βάση τη συχνότητα εμφάνισης μιας λύσης σε σχέση με το σύνολο αναφοράς. Με αυτό τον τρόπο προέκυψαν τρεις τιμές κατά την αξιολόγηση κάθε έργου, οι οποίες κυμαίνονται από 0 μέχρι 1.

Να σχηματίσεις ομάδες αριθμών χρησιμοποιώντας τους αριθμούς που δίνονται πιο κάτω και να τις ονομάσεις: 2, 3, 7, 9, 13, 15, 17, 25, 36, 39, 49, 51, 60, 64, 91, 119, 121, 125, 136, 143, 150.

Απαντήσεις ενός μαθητή:
Α) Οι αριθμοί 2, 3, 7, 9 είναι μονοψήφιοι.
Β) Οι αριθμοί 13, 15, 17, 25, 36, 39, 49, 51, 60, 64, 91 είναι διψήφιοι.
Γ) Οι αριθμοί 2, 36, 60, 136, 150 είναι ζυγοί.
Δ) Οι αριθμοί 51, 60, 64, 91, 119, 121, 125, 136, 143 είναι μεγαλύτεροι του 50.

Διάγραμμα 1: Παράδειγμα αξιολόγησης έργου του ΕΜΔ.

Πιο κάτω παρουσιάζεται η διαδικασία αξιολόγησης ενός έργου, με βάση τις ενδεικτικές απαντήσεις ενός μαθητή (δες Διάγραμμα 1). Ο βαθμός ευχέρειας του μαθητή στο συγκεκριμένο έργο είναι 4, λόγω του αριθμού των ορθών απαντήσεων που έδωσε. Ο βαθμός ευελιξίας του μαθητή είναι 3, αφού ανάμεσα στις απαντήσεις του αξιοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές μαθηματικές ιδέες (απαντήσεις Α και Β: αριθμός ψηφίων, απάντηση Γ: κατηγορίες αριθμών, απάντηση Δ: μέγεθος αριθμού). Η πρωτοτυπία των απαντήσεων του μαθητή αξιολογείται με βάση τη συχνότητα εμφάνισής τους (ανάλογα με το ποσοστό εμφάνισης των απαντήσεων δίνεται συγκεκριμένος βαθμός) (Kattou κ.α., 2013).

Ο συνολικός βαθμός ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας στο εργαλείο υπολογίζεται ως ο λόγος του αθροίσματος των επί μέρους επιδόσεων στα έργα, ως προς τον αριθμό των έργων (μέγιστος βαθμός 1).

Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν μη παραμετρικά κριτήρια στο στατιστικό πακέτο SPSS. Συγκεκριμένα, διενεργήθηκαν οι στατιστικές αναλύσεις Mann-Whitney και Wilcoxon Signed Ranks Test.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται σε δύο επίπεδα. Πρώτα, γίνεται σύγκριση μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών, αναφορικά με την αρχική και την τελική τους επίδοση, ώστε να διαφανεί κατά πόσο υπάρχουν ομοιότητες ή/και διαφοροποιήσεις ανάμεσα στην ΠΟ και την ΟΕ. Δεύτερο, γίνεται σύγκριση της αρχικής με την τελική επίδοση εντός κάθε ομάδας, ώστε να εξεταστεί αν το παρεμβατικό πρόγραμμα ή/και η σχολική διδασκαλία επηρέασε τη ΜΔ των μαθητών.

Σύγκριση των επιδόσεων της ΠΟ με την ΟΕ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι τιμές της διαμέσου για τις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας σε δύο μετρήσεις: πριν από την έναρξη και μετά την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος.

	ΠΟ		ΟΕ	
	Μέτρηση 1	Μέτρηση 2	Μέτρηση 1	Μέτρηση 2
Ευχέρεια	.418	.575	.416	.494
Ευελιξία	.288	.380	.292	.337
Πρωτοτυπία	.550	.650	.500	.550

Πίνακας 1: Επίδοση των μαθητών στο ΕΜΔ.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, η αρχική επίδοση της ΠΟ και της ΟΕ ήταν σε παρόμοια επίπεδα. Αυτό άλλωστε επιβεβαιώθηκε και με την απαραμετρική διαδικασία Mann-Whitney. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης, έδειξαν ότι ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στον αρχικό βαθμό ΜΔ. Συγκεκριμένα, η ΠΟ και η ΟΕ είχαν παρόμοιες επιδόσεις στην ικανότητα ευχέρειας ($p=.695$), ευελιξίας ($p=.926$) και πρωτοτυπίας ($p=.588$).

Ταυτόχρονα, από τον Πίνακα 1 διαφαίνεται ότι οι τρεις ικανότητες που ορίζουν τη ΜΔ αυξάνονται από τη Μέτρηση 1 στη Μέτρηση 2, τόσο για την ΠΟ όσο και για την ΟΕ. Βέβαια, η αύξηση που παρατηρείται στην επίδοση της ΠΟ είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αύξηση της ΟΕ. Η ανάλυση Mann-Whitney επιβεβαίωσε την ύπαρξη στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών ως προς την ικανότητα πρωτοτυπίας ($p=.023$), ενώ δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση στην ικανότητα ευχέρειας ($p=.058$) και ευελιξίας ($p=.085$).

Σύγκριση της αρχικής και της τελικής επίδοσης των μαθητών

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της Wilcoxon Signed Ranks ανάλυσης, η οποία διερευνά κατά πόσο οι διαφορές ανάμεσα στις δύο μετρήσεις, ήταν στατιστικά σημαντικές. Για την ΠΟ, υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στον μέσο όρο της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας πριν και μετά το παρεμβατικό πρόγραμμα. Για την ΟΕ, παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς την ικανότητα ευχέρειας και ευελιξίας, όχι όμως ως προς την ικανότητα πρωτοτυπίας.

	ΠΟ	ΟΕ
	Z (p)	Z (p)
Ευχέρεια	-4.144 (.001)*	-2.686 (.007)*
Ευελιξία	-3.558 (.001)*	-2.419 (.016)*
Πρωτοτυπία	-3.237 (.001)*	-1.543 (.123)

* Οι διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο $p<.05$.

Πίνακας 2: Σύγκριση της επίδοσης των μαθητών στο ΕΜΔ ανάμεσα στις δύο μετρήσεις.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία στόχευε να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα ενός παρεμβατικού προγράμματος στην ενίσχυση της ΜΔ. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι οι ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας των μαθητών ενισχύθηκαν μετά την ολοκλήρωση των μαθημάτων του παρεμβατικού προγράμματος. Στην ΠΟ υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση και ως προς τις τρεις ικανότητες, ενώ στην ΟΕ υπήρξε διαφοροποίηση ως προς τις ικανότητες ευχέρειας και ευελιξίας, όχι όμως ως προς την ικανότητα πρωτοτυπίας. Παράλληλα, ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών μετά την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος, παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφοροποιήσεις μόνο ως προς την ικανότητα της πρωτοτυπίας. Δύο είναι τα κύρια συμπεράσματα που προκύπτουν. Πρώτο, η ΜΔ επιδέχεται εμπειρικών και διδακτικών παρεμβάσεων. Δεύτερο, το παρεμβατικό πρόγραμμα ήταν πιο αποτελεσματικό στην ενίσχυση της ΜΔ, σε σύγκριση με την τυπική διδασκαλία, ως προς την ικανότητα της πρωτοτυπίας.

Όσον αφορά στο πρώτο συμπέρασμα, αρκετοί ερευνητές επιβεβαιώνουν ότι η δημιουργικότητα επιδέχεται επιρροή από διδακτικές και εμπειρικές καταστάσεις (π.χ. Kurtzberg & Reale, 1999). Για παράδειγμα, οι Kurtzberg και Reale (1999) παρατήρησαν ότι η επίδοση της ΠΟ ήταν διπλάσια από την επίδοση της ΟΕ σε διάστημα μόνο μιας εβδομάδας, στην οποία οι μαθητές είχαν τύχει κατάλληλης εκπαίδευσης. Το γεγονός ότι ακόμα και η ΟΕ βελτίωσε τη ΜΔ της έρχεται σε αντίφαση με τον μύθο που θέλει το σχολείο να αποθαρρύνει την ανάπτυξη της δημιουργικής συμπεριφοράς. Αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι τα βιβλία των Μαθηματικών της Κύπρου συμπεριλαμβάνουν ανοικτού τύπου ασκήσεις που ενθαρρύνουν την εύρεση πολλών λύσεων.

Σε σχέση με το δεύτερο συμπέρασμα, δεν διαφαίνεται ξεκάθαρα η αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα ενίσχυσε κυρίως την πρωτοτυπία των μαθητών. Οι Kurtzberg και Reale (1999) είχαν εντοπίσει ότι η ικανότητα της πρωτοτυπίας διαφοροποιείται από τις ικανότητες της ευχέρειας και της ευελιξίας. Το γεγονός ότι η πρωτοτυπία διαφοροποιήθηκε στη μια ομάδα μαθητών αλλά όχι στην άλλη μπορεί να σημαίνει ότι η πρωτοτυπία είτε χρειάζεται άμεση διδασκαλία ή λόγω της λιγότερο αποτελεσματικής επίδρασης της σχολικής διδασκαλίας χρειάζεται μεγαλύτερο διάστημα για να ενισχυθεί.

Αν και το παρεμβατικό πρόγραμμα πέτυχε τον στόχο του, την ανάπτυξη της ΜΔ των συμμετεχόντων, εντούτοις θα μπορούσε να ήταν πιο αποτελεσματικό. Οι βασικοί πυλώνες σχεδιασμού του παρεμβατικού προγράμματος θα μπορούσαν να εφαρμοστούν ξεχωριστά για να μελετηθεί η επίδραση τους στην ενίσχυση της ΜΔ των μαθητών. Σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να διερευνηθεί αν η μοντελοποίηση προβληματικών καταστάσεων, ο εντοπισμός και η επέκταση μοτίβων, η εύρεση σχέσεων ανάμεσα σε σχήματα και αριθμούς, μέσω της ενσωμάτωσης σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων, της εφαρμογή συνεργατικής μάθησης και της επιμονής στην εύρεση πολλών, διαφορετικών και καινοτόμων λύσεων ενισχύουν την ΜΔ των μαθητών (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009).

Ολοκληρώνοντας, φάνηκε μέσα από την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος, ότι όλοι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν τη δημιουργικότητά τους στα μαθηματικά, φτάνει να τους δοθούν κατάλληλες ευκαιρίες και χρόνος για διερεύνηση. Αυτό ακριβώς ανέφερε το NACCE (1999): όλοι είμαστε ή μπορούμε να γίνουμε δημιουργικοί, φτάνει να μας δοθούν οι κατάλληλες ευκαιρίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2009). Intellectual estuaries: Connecting learning and creativity in programs of advanced academics. *Journal of Advanced Academics, 20*, 296-324.

Committee on Science, Engineering and Public Policy. (2005). *Rising above the gathering storm: Energizing and employing America for a brighter economic future.* Washington, DC: National Academies Press.

Ford, D. Y. & Harris, J. J. (1992). The elusive definition of creativity. *Journal of Creative Behavior. 26*(3), 186-198.

Freiman, V. & Sriraman, B. (2011). Interdisciplinary Networks for better Education in Mathematics, Science and Arts. In Sriraman, B. & Freiman, V. (Eds.), *Interdisciplinarity for the Twenty-First Century: Proceedings of the Third International Symposium on Mathematics and Its Connections to Arts and Sciences*, (pp. xi-xvi). USA: Information Age Publishing Inc. & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta-affect and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 59-72). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM, 29*(3), 68-74. doi: 10.1007/s11858-997-0002-y

Hershkovitz, S. Peled, I. & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds), *Creativity in mathematics and the education of gifted students.* (pp. 255-270). Rotterdam, Netherlands: Sense Publisher.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 167-181.

Kurtzberg, R. L. & Reale, A. (1999). Using Torrance's problem identification techniques to increase fluency and flexibility in the classroom. *Journal of Creative Behaviour, 33*(3), 202–207.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. (pp. 385-411). Rotterdam, Netherlands: Sense Publisher.

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE). (1999). *All our futures: Creativity, culture & education*. Sudbury: DfEE.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sheffield, L. (2003) *Extending the Challenge in Mathematics: developing mathematical promise in K-8 students*. Thousand Oaks: Corwin Press.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity though instruction rich mathematical problem solving and problem posing. *International Reviews on Mathematical Education, 29*(3), 75-80.

Siswono, T. Y. (2008). *Promoting creativity in learning mathematics using open-ended problems.* Paper presented in the 3rd International conference on mathematics and statistics. Indonesia: Institut Pertanian Bogor.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM, 41,* 13–27.

Yushau, B., Mji, A., & Wessels, D. C. J. (2003). Creativity and Computer in the Teaching and Learning of Mathematics. Retrieved May 4, 2012, from www.kfupm.edu.sa/math/UPLOAD/Tech_Reports/311.pdf

ΠΟΡΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ: ΜΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Αικατερίνη Λιονή

Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

lionikate@gmail.com

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την πορεία μοντελοποίησης μαθητών Γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε μία ρεαλιστική δραστηριότητα μοντελοποίησης με χρήση φωτογραφίας. Το θεωρητικό πλαίσιο αποτελεί η θεωρία ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης (RME) (Freudenthal, 1991). Με βάση αυτή, γίνεται εστίαση στις διαδικασίες μαθηματικοποίησης (οριζόντιας-κατακόρυφης) κατά τον σχεδιασμό των μοντέλων, τα οποία κατατάσσονται σύμφωνα με την αρχή των επιπέδων της RME ως άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά. Παράλληλα, μελετώνται οι κύκλοι μοντελοποίησης που εμφανίζονται κατά την διαδικασία επίλυσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί την τελευταία δεκαετία εστία ενδιαφέροντος και μελέτης στη διδακτική των μαθηματικών. Κατά τους Mousoulides et al. (2007) στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η δημιουργία καταστάσεων, στις οποίες οι μαθητές να είναι σε θέση να προσδιορίσουν και να ερμηνεύσουν τα μαθηματικά, ενσωματωμένα σε κοινωνικά και πολιτικά πλαίσια. Υποστηρίζουν, δηλαδή, ότι τα προβλήματα μοντελοποίησης σε ρεαλιστικό πλαίσιο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προώθηση της μαθηματικής γνώσης.

Κατά τους Lehrer & Schauble (2007), τα μαθηματικά μοντέλα υποστηρίζουν ρεαλιστικές καταστάσεις, υποδηλώνοντας χαρακτηριστικά της πραγματικότητας που δεν είναι εύκολο να ληφθούν υπόψη. Ο μαθητής πρέπει να μάθει να βλέπει και να ερμηνεύει τον κόσμο μέσα από το μοντέλο. Βέβαια, ακόμη και αν οι μαθητές είναι οικείοι στα μοντέλα ως αντικείμενα, αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης. Χωρίς ευκαιρίες ενασχόλησης με δραστηριότητες μοντελοποίησης, οι ερευνητές θεωρούν ότι οι περισσότεροι μαθητές θα μειώσουν την αξία και χρήση των μοντέλων, καθώς δεν κατανοούν τον λόγο και τον τρόπο που κατασκευάστηκαν.

Με βάση τα παραπάνω, είναι εμφανής η αξία της διδασκαλίας προβλημάτων μοντελοποίησης με χρήση ρεαλιστικού πλαισίου. Στην παρούσα έρευνα, μελετάται η πορεία μοντελοποίησης 6 μαθητών Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, παρέχοντας τους μία φωτογραφία της πραγματικότητας, στην οποία υποκρύπτονται μαθηματικές έννοιες, ενεπλάκησαν σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης και μοντελοποίησης, με απώτερο στόχο την κατανόηση της ρεαλιστικής κατάστασης και την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος μέσω της εύρεσης του μέτρου μίας γωνίας. Έτσι, δημιουργούνται τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

Πώς αναπτύσσεται η πορεία μοντελοποίησης των μαθητών Γυμνασίου κατά την ενασχόληση τους με ένα ρεαλιστικό πρόβλημα;

Τι είδους μοντέλα δημιούργησαν οι μαθητές και πώς αυτά εξελίχθηκαν;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ρεαλιστική Εκπαίδευση Μαθηματικών (Realistic Mathematics Education – RME) είναι θεωρία διδασκαλίας των μαθηματικών με εισηγητή τον Hans Freudenthal στις αρχές του 1970, για την οποία η χρήση ρεαλιστικών πλαισίων στην εκπαίδευση είναι καθοριστική (van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Οι Gravemeijer & Doorman (1999) ορίζουν ως *προβλήματα πλαισίου* αυτά, που η κατάσταση του προβλήματος είναι εμπειρικά πραγματική για τον μαθητή. Κατά την RME, οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν μαθηματικά, αναπτύσσοντας και εφαρμόζοντας μαθηματικές έννοιες και εργαλεία σε καθημερινές καταστάσεις προβλημάτων με νόημα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Κατά τους Treffers (1987) και Freudenthal (1991), πυρήνας της μαθηματικής δραστηριότητας είναι η *μαθηματικοποίηση*, δηλαδή δράσεις μέσω των οποίων εφαρμόζεται και αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση. Ο Treffers (1987) διατύπωσε την ιδέα της μαθηματικοποίησης σε ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο, διακρίνοντας την σε *οριζόντια* και σε *κατακόρυφη* (van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Στην *οριζόντια μαθηματικοποίηση*, οι μαθητές χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία για την οργάνωση και επίλυση προβλημάτων σε πραγματικές καταστάσεις. Περιλαμβάνει, δηλαδή, τη μετάβαση από τον φυσικό κόσμο σε εκείνο των μαθηματικών συμβόλων. Η *κατακόρυφη μαθηματικοποίηση* αναφέρεται στη αναδιοργάνωση μέσα στο μαθηματικό σύστημα, στο οποίο γίνονται συνδέσεις μεταξύ εννοιών και στρατηγικών. Αφορά, ουσιαστικά, την κίνηση μέσα στον αφηρημένο κόσμο των συμβόλων, δηλαδή τη μετακίνηση από απλά σε πιο αφηρημένα μαθηματικά ή αντιστρόφως. Οι δύο μορφές μαθηματικοποίησης είναι στενά συνδεδεμένες και ισότιμες.

Η έννοια της μαθηματικοποίησης μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές. Οι Κεΐσογλου και Κυνηγός (2005), σε ανάλογη έρευνα, συμπέραναν ότι η κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές αναδύθηκε μέσω αναδιοργάνωσης των υπαρχόντων μαθηματικών πλαισίων και γνώσεων. Η αναδιοργάνωση αυτή προέκυψε από τη δυνατότητα των μαθητών για πειραματισμό και έλεγχο υποθέσεων σύμφωνα με το ρεαλιστικό πλαίσιο (οριζόντια μαθηματικοποίηση) όσο και από τη σύνδεση μαθηματικών οντοτήτων (κατακόρυφη μαθηματικοποίηση).

Στα πλαίσια της RME διαμορφώνονται κάποιες αρχές (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Η ακόλουθη εργασία εστιάζει στην *αρχή του επιπέδου*. Η αρχή αυτή υπογραμμίζει ότι η εκμάθηση των μαθηματικών σημαίνει ότι οι μαθητές περνούν από διάφορα επίπεδα κατανόησης μέσω μαθηματικοποίησης: από άτυπες λύσεις σχετικές με το περιβάλλον, μέσω δημιουργίας διαφόρων συντομεύσεων και σχημάτων, στην απόκτηση διορατικότητας σχετικά με το πώς σχετίζονται οι έννοιες και οι στρατηγικές. Αυτό υπονοεί ότι οι δράσεις που υλοποιήθηκαν αρχικά με άτυπο τρόπο, αργότερα μέσω μαθηματικοποίησης, γίνονται πιο τυπικές. Για τη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ των άτυπων και των τυπικών μαθηματικών δίνεται έμφαση στα μοντέλα. Μοντέλο μπορεί να είναι μία αναπαράσταση του προβλήματος υπό τη μορφή υλικού, οπτικού σχεδίου, παραδείγματος, σχήματος, διαγράμματος ή ακόμα και συμβόλου (Treffers, 1987). Κατά αυτόν τον τρόπο, η αρχή του επιπέδου βρίσκει εφαρμογή σε διδασκαλίες μοντελοποίησης (βλέπε van den Heuvel-Panhuizen 2000, 2003).

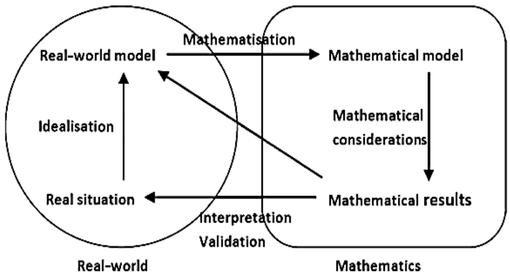
Κατά την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων, η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης περιγράφεται συχνά ως μια κυκλική διαδικασία. Σχηματική αναπαράσταση του *κύκλου μοντελοποίησης* είναι η εικόνα 1 (Kaiser, 2014). Εν συντομία, η ρεαλιστική κατάσταση εξιδανικεύεται σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο. Αυτό μεταφράζεται μέσω οριζόντιας μαθηματικοποίησης σε ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο με κατακόρυφη μαθηματικοποίηση και μαθηματικούς ελέγχους παρέχει τα μαθηματικά αποτελέσματα. Κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων, ελέγχεται η ερμηνεία και η εγκυρότητα της ρεαλιστικής κατάστασης (οριζόντια μαθηματικοποίηση). Ο κύκλος επαναλαμβάνεται μέχρι να βρεθεί η λύση του προβλήματος.

Κατά τον έλεγχο της ρεαλιστικής και μαθηματικής εγκυρότητας, ο μαθητής αναπτύσσει τις μεταγνωστικές ικανότητες του. Κατά την Stillman (2011) οι *μεταγνωστικές ικανότητες* διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διαδικασία μοντελοποίησης (Kaiser, 2014). Ελλιπείς μεταγνωστικές ικανότητες μπορεί να οδηγήσουν σε δυσκολίες, όπως για παράδειγμα, στις μεταβάσεις μεταξύ των βημάτων του κύκλου μοντελοποίησης ή σε καταστάσεις όπου εμφανίζονται γνωστικά εμπόδια.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πλαίσιο

Η πειραματική διδασκαλία πραγματοποιήθηκε, σε 1 ομάδα 2 μαθητών Α' Γυμνασίου, σε 1 ομάδα 2 μαθητών Β' Γυμνασίου και 2 μαθήτριες μεμονωμένα της Β' Γυμνασίου. Οι διδασκαλίες κυμάνθηκαν από μιάμιση έως δύο διδακτικές ώρες.



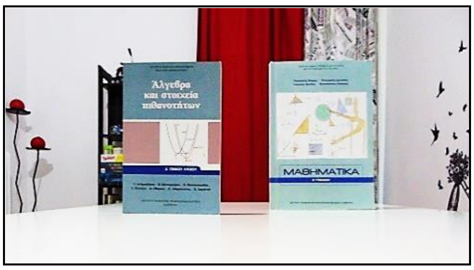
Εικόνα 1: Κύκλος

Ο φωτογράφος τοποθέτησε τα δύο βιβλία σε απόσταση 12cm, ενώ τοποθέτησε τη φωτογραφική του μηχανή σε απόσταση 70cm από το πιο ψηλό βιβλίο. (Κλίμακα = $\frac{1}{5}$) 1. Να βρεθεί η γωνία, υπό την οποία ο φωτογράφος τράβηξε την φωτογραφία. 2. Ποιο είναι το πραγματικό ύψος του βιβλίου της Α' Λυκείου;

Εικόνα 2α: Η δραστηριότητα

Πρόβλημα

Εικόνα 2β: Η φωτογραφία



Το ρεαλιστικό πλαίσιο της δραστηριότητας αφορούσε το τέχνασμα ενός φωτογράφου, που δείχνει ότι δύο αντικείμενα διαφορετικού ύψους, στη φωτογραφία φαίνεται ότι έχουν ίδιο ύψος. Η εκπαιδευτικός, αφού παρουσίασε διάφορες εικόνες όπου παρατηρείται αυτό το φαινόμενο και συζήτησε με τους μαθητές

Εικόνα 3: Το τέχνασμα

για αυτό, τους έδωσε το πρόβλημα (Εικόνα 2α) με τη συνοδευόμενη φωτογραφία (Εικόνα 2β). Συγκεκριμένα, στη φωτογραφία απεικονίζονται τα βιβλία μαθηματικών της Α' Λυκείου και Β' Γυμνασίου. Τα βιβλία ενώ έχουν διαφορετικές διαστάσεις, με τη χρήση του τεχνάσματος (Εικόνα 3), απεικονίζονται με ίδιες διαστάσεις. Οι μαθητές με δεδομένα μόνο τις Εικόνες 2α,β, ασχολήθηκαν με τη διάσταση του ύψους των βιβλίων, με στόχο την μοντελοποίηση της Εικόνας 3, η οποία δεν δόθηκε στους μαθητές. Όταν η εκπαιδευτικός θεωρούσε αναγκαίο παρείχε στους μαθητές τα βιβλία, ώστε να επιτευχθεί πληρέστερη κατανόηση του τεχνάσματος και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων. Ο στόχος της εκπαιδευτικού ήταν η κατανόηση της έννοιας της γωνίας ως επίπεδο ανάμεσα στις πλευρές που την ορίζουν. Η δραστηριότητα εμπλέκει την οπτική γωνία (ως χωρίο με νοητές γραμμές στον χώρο) σε καταστάσεις μοντελοποίησης για να επιτευχθεί η σύνδεση της με την μαθηματική γωνία. Ο ρόλος της εκπαιδευτικού καθόλη τη διδασκαλία ήταν συντονιστικός και διευκολυντικός όπου χρειαζόταν.

Ερευνητικά δεδομένα

Για τις ανάγκες της έρευνας, έγινε απομαγνητοφώνηση και συλλογή των απαντήσεων των μαθητών. Η παρούσα εργασία εστιάζει στην πορεία μοντελοποίησης μίας μαθήτριας Β' Γυμνασίου, ενώ παρουσιάζονται μεμονωμένα μοντέλα ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος από τις υπόλοιπες διδασκαλίες. Τέλος, να σημειωθεί ότι η εκπαιδευτικός και η αναλύτρια των δεδομένων είναι το ίδιο άτομο.

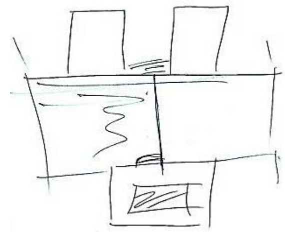
Ανάλυση δεδομένων

Τα μοντέλα κατηγοριοποιήθηκαν σύμφωνα με τα επίπεδα της RME, το *άτυπο*, *προ-τυπικό* και *τυπικό*. *Άτυπο* μοντέλο χαρακτηρίζεται αυτό που έχει στοιχεία καθαρά διαισθητικής προσέγγισης του ρεαλιστικού πλαισίου. *Προ-τυπικό* επίπεδο είναι αυτό που διανύει ένας μαθητής πριν την τυπική μαθηματική γνώση, παρουσιάζοντας μαθηματικοποιημένα στοιχεία χωρίς την πλήρη απαλλαγή των ρεαλιστικών στοιχείων. Η ικανοποιησιμότητα ενός προ-τυπικού μοντέλου, δηλαδή, χαρακτηρίζεται από δύο συνιστώσες, τα ρεαλιστικά και τα μαθηματικά στοιχεία. Τέλος, το *τυπικό* μοντέλο είναι το καθαρά μαθηματικοποιημένο χωρίς τη χρήση στοιχείων της πραγματικότητας. Η μαθηματικοποίηση χαρακτηρίστηκε ως *οριζόντια*, όταν υπάρχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας πραγματικότητας υπό άλλη οπτική γωνία με χρήση ίδιων μαθηματικών εργαλείων και *κατακόρυφη* κατά την μετακίνηση μεταξύ των διαφόρων επιπέδων μοντελοποίησης με στόχο τη βελτίωση των μαθηματικών μοντέλων και εν τέλει τη γενίκευση. Τέλος, ο αναστοχασμός των μοντέλων με στόχο την επιβεβαίωση των μαθηματικών στοιχείων μέσω της ρεαλιστικής κατάστασης, ή αντίστροφα η ερμηνεία της πραγματικότητας μέσω μαθηματικών αντικειμένων αναλύονται σύμφωνα με τον *κύκλο μοντελοποίησης* (Εικόνα 1).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πορεία μοντελοποίησης και η εξέλιξη των μοντέλων μίας μαθήτριας Β' Γυμνασίου

Κατά τη διδασκαλία αυτή, γίνονται εμφανείς όλες οι φάσεις μοντελοποίησης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποκτά το γεγονός ότι η μαθήτρια (στο εξής ως Άννα) ξεκίνησε από μία άτυπη μορφή μοντέλου, μετέβη με συνεχείς κύκλους μοντελοποίησης μέσω μαθηματικοποίησης σε ένα καθαρά τυπικό μοντέλο και εν τέλει στην επίλυση του προβλήματος.



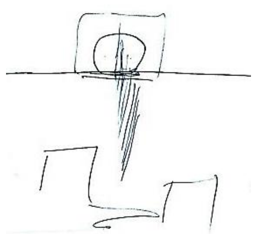
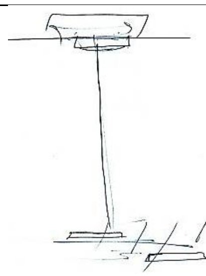
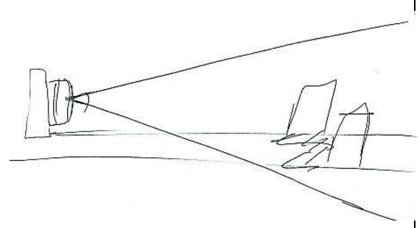
Εικόνα 4: Άτυπο μοντέλο

Αρχικά, το πρώτο μοντέλο που σχημάτισε η Άννα είναι αυτό της εικόνας 4, εξηγώντας το ως εξής:

Άννα: Έχουμε ακουμπήσει το φακό της φωτογραφικής μηχανής πάνω στο θρανίο, οπότε είναι ακριβώς έτσι. Και από την άλλη πλευρά του τραπεζιού έχουμε βάλει τα βιβλία.

Παρατηρείται εδώ, ότι η Άννα οδηγείται από την πραγματική κατάσταση σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο, που το εξισώνει με το μαθηματικό μοντέλο (κύκλος μοντελοποίησης). Ακόμα, το μοντέλο αυτό χαρακτηρίζεται άτυπο, καθώς χαρακτηρίζεται ως σχέδιο, αφού δεν περιέχει κανένα μαθηματικό στοιχείο. Παρόλα αυτά, με ώθηση από την εκπαιδευτικό (*«Ωραία, άρα η γωνία που ψάχνεις, ποια ακριβώς είναι στο σχήμα;»*) έγινε εστίαση στη σχέση της ζητούμενης γωνίας με την πραγματικότητα και κατά πόσο είναι εμφανής στο μοντέλο αυτό. Με τον τρόπο αυτό, εξετάζεται η εγκυρότητα των μαθηματικών στοιχείων σύμφωνα με το αν αντιστοιχεί με το ρεαλιστικό πλαίσιο (κύκλος μοντελοποήσης).

Με στόχο την εύρεση της σωστής οπτικής γωνίας, η μαθήτρια παρουσίασε στοιχεία οριζόντιας μαθηματικοποίησης, καθώς τα μοντέλα που σχεδίασε (Εικόνες 5α,β,γ) παρουσίαζαν ίδια μορφολογία (καθαρή διαίσθηση, χωρίς μαθηματικά στοιχεία) υπό διαφορετική οπτική γωνία, για την ικανοποίηση της ρεαλιστικής συνιστώσας.

<table>
<tr><th colspan="3">Εικόνα 5: Άτυπα μοντέλα υπό διαφορετικές οπτικές γωνίες</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Εικόνα 5α: Οπτική από πίσω</td><td>Εικόνα 5β: Κάτοψη</td><td>Εικόνα 5γ: Οπτική από το πλάι</td></tr>
</table>

Μετά τη σχεδίαση του μοντέλου 5γ γίνεται ο παρακάτω διάλογος:

Εκπ: Τέλεια είδες που ξαφνικά έχεις φτιάξει..

Άννα: (Διακόπτει) Την γωνία!

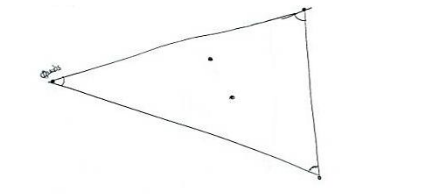
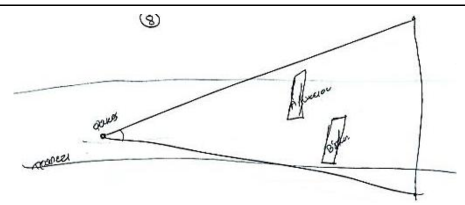
Φαίνεται εδώ ότι η μαθήτρια βλέπει ξεκάθαρα το ζητούμενο όντας πεπεισμένη για αυτό.

Εκπ: Απλά αυτή τη στιγμή, να σου πω την αλήθεια, μου αρέσει το σχήμα... αλλά δεν είναι τόσο μαθηματικοποιημένο. Συμφωνείς νομίζω.

Άννα: Ναι, θα είναι τρίγωνο; [...]

Στον διάλογο επικυρώνεται ότι η γωνία του μοντέλου 5γ ικανοποιεί την οπτική γωνία. Έπειτα, εμφανίζεται η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση, με στόχο πιο τυποποιημένα μαθηματικα, όπως το τριγώνο που αποδίδει η Άννα. Καθώς ο κύκλος μοντελοποίησης από το 5α στο 5γ ικανοποιεί τα κριτήρια που τέθηκαν (εύρεση της σωστής οπτικής γωνίας), γίνεται μία προσπάθεια βελτίωσης του 5γ. Έτσι, η Άννα (Εικόνες 6α,β) μετακινείται με οριζόντια μαθηματικοποίηση (αναζήτηση μαθηματικών στοιχείων για αποτύπωση της οπτικής γωνίας) σε ένα προ-τυπικό επίπεδο, καθώς συνεχίζουν να είναι εμφανή διασθητικά στοιχεία, παρά την εμφάνιση μαθηματικών αντικειμένων, όπως σημείο, τρίγωνο, παραλληλόγραμμα και συμβολισμούς με ονόματα.

Παρά τη μετακίνηση σε προ-τυπικά μοντέλα (Εικόνες 6α,β) γίνεται επανέλεγχος της εγκυρότητας των ρεαλιστικών στοιχείων των μοντέλων, δηλαδή επαναλαμβάνεται ένας κύκλος μοντελοποίησης με κριτήριο ξανά εάν το μοντέλο 6β αναδεικνύει την οπτική γωνία της πραγματικότητας.

Εικόνα 6: Διαφορετικές μαθηματικές αναπαραστάσεις για τα βιβλία	
	
Εικόνα 6α: Χρήση σημείων	**Εικόνα 6β: Χρήση παραλληλογράμμων**

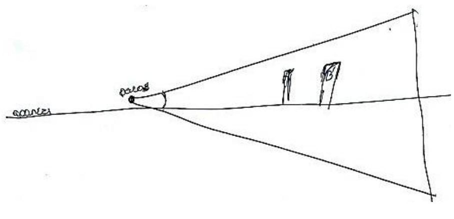
Εκπ: Ωραία οκ. Για συνέχισε. Πού είναι το τραπέζι; (Εικόνα 6β)

Άννα: Εδώ.

Εκπ: Άρα ξαφνικά από πού βλέπεις τη φωτογραφία; Από το πλάι;

Άννα: Όχι, από πάνω

Εκπ: Ωπ.. Ενώ πριν από πού έβλεπες; (δείχνοντας το μοντέλο της εικόνας 5γ)

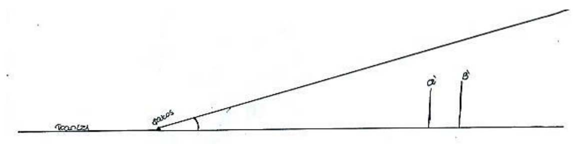
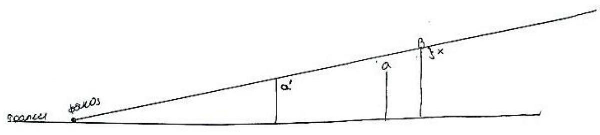
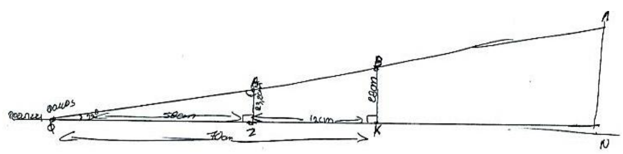


Εικόνα 7: Προ-τυπικό μοντέλο

Άννα: Από το πλάι.

Φαίνεται να ξαφνιάζεται, καθώς δεν ανέμενε κάτι τέτοιο.

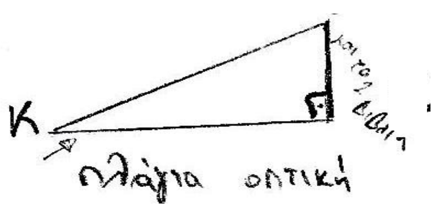
Άννα: Οπότε το σημείο δεν βολεύει τόσο πολύ... (γελώντας)

Εικόνα 8: Πορεία από προ-τυπικό επίπεδο στο τυπικό επίπεδο	
Εικόνα 8α: Προ-τυπικό μοντέλο χωρίς ικανοποίηση της ρεαλιστικής κατάστασης	
Εικόνα 8β: Προ-τυπικό μοντέλο με μερική ικανοποίηση της ρεαλιστικής κατάστασης	
Εικόνα 8γ: Τυπικό μοντέλο με πλήρη ικανοποίηση της ρεαλιστικής κατάστασης	

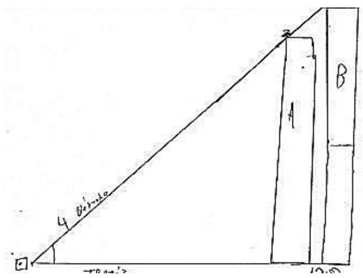
Η μαθήτρια κάνει νέο προ-τυπικό μοντέλο (εικόνα 7), για το κριτήριο των ρεαλιστικών συνθηκών. Κατά την πορεία των μοντέλων 6β, 7 και 8α, παρατηρείται οριζόντια μαθηματικοποίηση για τη βελτίωση των μαθηματικών στοιχείων σύμφωνα με τις ρεαλιστικές συνθήκες. Έπειτα, γίνεται οριζόντια μαθηματικοποίηση για καλύτερη προσέγγιση ρεαλιστικών στοιχείων (πορεία στις εικόνες 8α,β,γ). Κατά την διαδικασία αυτή, γίνονται κύκλοι μοντελοποίησης, με στόχο την ακριβέστερη αντιστοίχιση του μαθηματικού μοντέλου στην πραγματική κατάσταση.

Μεμονωμένα μοντέλα από τις υπόλοιπες διδασκαλίες

Ενδιαφέρον αποκτά το μοντέλο της εικόνας 9 (Β' Γυμνασίου), το οποίο μεμονωμένα κατατάσσεται σε ένα προ-τυπικό επίπεδο, καθώς, ενώ εμπεριέχει γεωμετρικό σχεδιασμό, έγινε λεκτική περιγραφή της κάθετης πλευράς ως «και τα δύο βιβλία». Έτσι, παρόλο που η οπτική είναι σωστή, καθώς όντως η γωνία Κ είναι η ζητούμενη γωνία του προβλήματος, το μοντέλο αυτό δεν ικανοποιεί τις συνθήκες της πραγματικότητας, αφού τοποθετεί και τα 2 βιβλία στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα. Συνεπώς, ενώ το μοντέλο μεμονωμένα αποτελεί αποτέλεσμα ιδιαίτερης αφαίρεσης από τον μαθητή, δεν ικανοποιεί το πρόβλημα λόγω ρεαλιστικών συνθηκών.



Εικόνα 9: Προ-τυπικό μοντέλο – μη ικανοποιησιμότητα της ρεαλιστικής συνιστώσας



Εικόνα 10: Προ-τυπικό μοντέλο – μη ικανοποιησιμότητα της μαθηματικής συνιστώσας

Εικόνα 11: Άτυπο μοντέλο με χρήση της φωτογραφίας

Σε αντίθεση τοποθετείται το μοντέλο της εικόνας 10 (Α΄ Γυμνασίου). Το μοντέλο αυτό χαρακτηρίζεται προ-τυπικό, καθώς εμπεριέχει περιττά ρεαλιστικά στοιχεία, όπως το πάχος των βιβλίων. Ωστόσο, όμως, η επίλυση του προβλήματος καθιστάται ικανότατη, παρά τη μορφολογία του μοντέλου, αφού υπάρχουν τα αναγκαία μαθηματικά στοιχεία, ενώ τα περιττά ρεαλιστικά είναι τοποθετημένα χωρίς να επηρεάζουν την λύση του προβλήματος.

Επιπροσθέτως, παρατίθεται το άτυπο μοντέλο της εικόνας 11 (Α' Γυμνασίου), το οποίο ούτε εμπεριέχει μαθηματικά στοιχεία, ούτε αναπαριστά σωστά το ρεαλιστικό φαινόμενο. Παρόλα αυτά, ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζει το γεγονός ότι ο μαθητής έκανε χρήση της φωτογραφίας. Αναζητώντας την γωνία του προβλήματος, χρησιμοποίησε το μόνο αναπαραστιακό εργαλείο που διέθετε για να οπτικοποιήσει το μαθηματικό αντικείμενο.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι όλοι οι μαθητές για να κατασκευάσουν μοντέλα χρησιμοποίησαν είτε μόνοι τους είτε με προτροπή από την εκπαιδευτικό αναπαραστασιακά εργαλεία, όπως χειραπτικά αντικείμενα ή τα χέρια τους. Παραδείγματα τέτοιων αναπαραστάσεων παραθέτονται στις εικόνες 12α,β,γ. Συγκεκριμένα, τα μοντέλα των φωτογραφιών κατατάσσονται ως άτυπα μοντέλα, καθώς περιγράφονται με στοιχεία καθαρά βασισμένα στο ρεαλιστικό πλαίσιο και δεν περιέχουν μαθηματικά αντικείμενα.

Εικόνα 12α: Χρήση βιβλίων και κινητού για την πλάγια οπτική γωνία

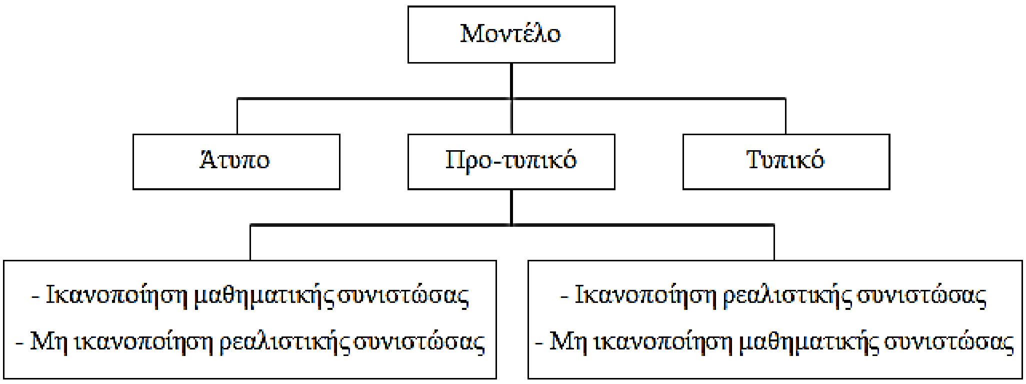
Εικόνα 12β: Χρήση μολυβιού και γόμας για αναζήτηση της απόστασης 12cm

Εικόνα 12γ: Χρήση κινητού για την κάμερα, χεριού για τη γωνία, με τον αντίχειρα ως την μία πλευρά της γωνίας

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρείται ότι η οικειότητα του ρεαλιστικού πλαισίου από τους μαθητές και η χρήση φωτογραφίας στη διδασκαλία δραστηριοποίησε τους μαθητές, γεγονός που οδήγησε σε ποικιλομορφία μοντέλων. Για την επίτευξη του τυπικού μοντέλου και τελικά την επίλυση του προβλήματος, οι μαθητές διανύουν πολλαπλούς κύκλους μοντελοποίησης, ενώ μέσω οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης αναστοχάζονται για την εγκυρότητα των μοντέλων ως προς τα ρεαλιστικά ή μαθηματικά στοιχεία.

Σε αντίστοιχες έρευνες (όπως van den Heuvel-Panhuizen 2000, 2003) τα μοντέλα κατατάσσονται σε άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά. Επαληθεύεται ότι τα άτυπα μοντέλα, που κατά βάση είναι η έναρξη της μοντελοποίησης, δεν θεωρούνται μόνο τα σχέδια, αλλά και η χρήση της φωτογραφίας ή των χειραπτικών μέσων. Σε προβλήματα μοντελοποίησης, οι μαθητές μεταβαίνουν άμεσα από τα άτυπα σε προ-τυπικά μοντέλα. Στην παρούσα έρευνα, όμως, τα προ-τυπικά μοντέλα διαφοροποιούνται ως προς τα ρεαλιστικά ή μαθηματικά τους στοιχεία. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι ένα προ-τυπικό μοντέλο, το οποίο δεν ικανοποιεί τη ρεαλιστική συνιστώσα, λαμβάνει διαφορετική διδακτική αξία από ένα αντίστοιχο που δεν ικανοποιεί την μαθηματική συνιστώσα και αντίστροφα. Επιπλέον, ο κύκλος μοντελοποίησης και το είδος της μαθηματικοποίησης κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης επηρεάζεται άμεσα από το ποια συνιστώσα



Εικόνα 13: Κατηγοριοποίηση των μοντέλων

(ρεαλιστική-μαθηματική) ικανοποιείται ή όχι. Προκύπτει, έτσι, μία υποκατηγοριοποίηση των προ-τυπικών μοντέλων, όπως της εικόνας 13. Σε κάθε περίπτωση, είναι σημαντικό να εφαρμοστεί το πλαίσιο αυτής της εργασίας σε ένα μεγαλύτερο μαθητικό κοινό, ώστε να συγκριθούν τα ανάλογα συμπεράσματα με σκοπό γενίκευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Freudenthal, H. (1991). *Revising Mathematics Education. China Lectures.* The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Dohrecht.

Gravemeijer, K., & Doorman, D. (1999). Context problems in Realistic Mathematics Education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics 39*, 111-129.

Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). A developmental approach for supporting the epistemology of modeling. Στο W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss, *Modeling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (σσ. 185-192). Boston: MA: Springer.

Mousoulides, N., Spiraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling-the emergence of models and modelling perspectives. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 23-47.

Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. Στο G. Kaiser, W. Blum, Borromeo, R. Ferri, & G. Stillman, *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14* (σσ. 165–180). Springer, Dordrecht.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics - The Wiskobas Project. *Reidel Publishing Company, Dordrecht*, The Netherlands.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percantage. *Educational Studies in Mathematics*, 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*.

Κεΐσογλου, Σ., & Κυνηγός, Χ. (2005). Ο ρόλος των φυσικών και υπολογιστικών εργαλείων σε διαδικασίες μοντελοποίησης. *Εν.Ε.Δι.Μ.* Αθήνα.

ΤΑ ΣΤΑΔΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΟΡΕΙΑ ΜΙΑΣ MATH-TALK ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ

Παλαμιώτη Νικολέττα

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

niki.palamioti1@gmail.com

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, με αντικείμενο τη μοντελοποίηση φωτογραφίας από την καθημερινότητα, με χαρακτηριστικό την εισαγωγή διαλόγου στη διδασκαλία και τη δημιουργία μιας math-talk κοινότητας. Στα αποτελέσματα καταγράφονται η πορεία εξέλιξης των μαθητών, όσον αφορά τη μαθηματική και συμμετοχική τους δράση, κατά τη μοντελοποίηση στο πλαίσιο της κοινότητας, ο ρόλος του εκπαιδευτικού κατά τη δημιουργία της κοινότητας, καθώς και η επιρροή της κοινότητας στη διαδικασία μοντελοποίησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μέσα στην ευρύτερη ανάγκη αναθεώρησης και βελτίωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών, έχει μελετηθεί η συμβολή των μαθηματικών προβλημάτων στη διδακτική διαδικασία. Αρχικά οι Wyndhamm & Saljö (1997), αναφέρονται στα λεκτικά προβλήματα (*word problems*), και υποστηρίζουν ότι κύριος σκοπός τους είναι η εξάσκηση σε συγκεκριμένο τύπο μαθηματικής γνώσης. Ο Schoenfeld (1992) τονίζει ότι στην επίλυση τους, είναι αισθητή η απουσία υψηλού επιπέδου γνωστικών και μεταγνωστικών διαδικασιών, με συνέπεια οι μαθητές να κατευθύνονται στην παρατήρηση λέξεων-κλειδιά και μέσω «μετάφρασης» να οδηγούνται στη λύση (Mousoulides et al., 2007). Εν αντιθέσει, με τις δραστηριότητες μοντελοποίησης, που δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να παρατηρήσουν, να επικοινωνήσουν, να εξηγήσουν και να στοχαστούν, με συνέπεια το σχηματισμό των μαθηματικών εννοιών, με βάση τη νοηματοδότηση και τη διερεύνηση (Maaß, 2006). Έτσι, καταλήγουμε ότι η ενσωμάτωση προβλημάτων μοντελοποίησης στη διδασκαλία, αποτελεί ένα αναγκαίο βήμα.

Σε αυτό το πλαίσιο, αναφέρεται η συμβολή της ομαδικής συζήτησης στην εμπλοκή, ενίσχυση κίνητρων και κατανόηση του ρεαλιστικού και του μαθηματικού πλαισίου (Antonius et al., 2007). Αρχικά, έχει διαπιστωθεί ότι ο διάλογος κατέχει κεντρικό ρόλο στην κατασκευή εμπειριών και γνώσεων των μαθητών. Ακόμη, ευρήματα των Ikeda & Stephens (2001), ανέδειξαν ότι η συζήτηση στο πλαίσιο της ομάδας έχει ως συνέπεια ισχυρότερα αποτελέσματα στη μοντελοποίηση. Οπότε, κύριος στόχος του εκπαιδευτικού είναι η υιοθέτηση στρατηγικών διδασκαλίας, ώστε να ενισχύσει τη διαδικασία μοντελοποίησης. Μια τέτοια στρατηγική αποτελεί η δημιουργία *math-talk κοινότητα μάθησης* (Hufferd-Ackles et al., 2004). Ως *math-talk κοινότητα* χαρακτηρίζουμε τη κοινότητα μάθησης, στην οποία ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές κάνουν διάλογο για να στηρίξουν τη μαθηματική μάθηση και γνώση. Ο όρος διάλογος αναφέρεται στην αμφίδρομη επικοινωνία, με απόψεις που συνοδεύονται με επιχειρήματα, με αντιπαράθεση και στοχεύει σε αμοιβαία κατανόηση. Το γεγονός αυτό, αποτελεί πρόκληση για τον εκπαιδευτικό, αφού σύμφωνα με την Kersaint (2015) οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, το συλλογισμό και τις δεξιότητες επικοινωνίας τους, ώστε να κάνουν εικασίες, να διερευνήσουν, και να επιλύσουν τα προβλήματα. Τέλος, ο εκπαιδευτικός καλείται να εξασφαλίσει τη μαθηματική ποιότητα των διαλόγων, οπότε η ισορροπία μεταξύ του μαθηματικού περιεχομένου και της ελευθερίας των ιδεών αποτελεί επιπλέον πρόκληση. (Sherin, 2002).

Τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζονται είναι τα εξής:

Ποια είναι η εξελικτική πορεία μαθητών και εκπαιδευτικού στο πλαίσιο της *math-talk κοινότητας*;

Πώς η δημιουργία της *math-talk κοινότητας* επηρεάζει τη διαδικασία μοντελοποίησης;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Αρχικά, με τον όρο *μοντελοποίηση* αναφέρεται η διαδικασία μετασχηματισμού ενός πραγματικού προβλήματος σε μαθηματική μορφή (Mousoulides et al., 2007). Όπως υποστηρίζουν οι Kelly & Lesh (2000), η διαδικασία της μοντελοποίησης ξεκινά από την απλοποίηση της προβληματικής κατάστασης και καταλήγει στην κατασκευή μοντέλων, δηλαδή των εννοιολογικών «συστημάτων» που περιγράφουν τις σχέσεις των στοιχείων μεταξύ τους (Νικολαΐδου-Μουσουλίδου & Μουσουλίδης, 2015). Ειδικότερα, οι μαθητές (1) κατανοούν και απλοποιούν το πρόβλημα, εξάγοντας συμπεράσματα, (2) διαχειρίζονται το πρόβλημα, αναπτύσσουν μαθηματικό μοντέλο αναγνωρίζοντας σχέσεις, με στόχο την κατασκευή κατάλληλων στρατηγικών, ώστε να επεξεργαστούν το μοντέλο, (3) ερμηνεύουν τη λύση του προβλήματος και εντοπίζουν δυσλειτουργίες της, (4) επαληθεύουν και αναστοχάζονται τη λύση του προβλήματος. Έτσι, ο Schoenfeld (1992) τονίζει ότι η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια απαιτητική διαδικασία, αφού περιλαμβάνει παρατηρήσεις μοντέλων, δοκιμές εικασιών και εν τέλη την εκτίμηση των αποτελεσμάτων. (Mousoulides et al., 2007).

Σημαντική παράμετρος στην εργασία των μαθητών σε δραστηριότητες μοντελοποίησης είναι η χρήση άτυπων γνώσεων. Έχει παρατηρηθεί η ύπαρξη σχέσης μεταξύ της χρήσης των άτυπων/ προσωπικών γνώσεων και των γνώσεων των μαθητών, όσον αφορά τις βασικές πληροφορίες του προβλήματος (Christou et al., 2005). Έτσι, καταλήγουμε ότι η άτυπη γνώση, βοηθά τον εντοπισμό και τη σύνδεση στοιχείων του προβλήματος, με στόχο τη μοντελοποίηση.

Επιπλέον, ως μοντελοποίηση αναφέρεται η ακολουθία λόγου (*discourse*) των μαθητών και του εκπαιδευτικού κατά τη κατασκευή μοντέλων και τονίζεται ότι ο λόγος αυτός είναι περισσότερο δράση από ό,τι έκφραση γνώσεων (Barbosa, 2010). Οπότε, θεωρείται ότι η μοντελοποίηση μπορεί να διδάσκεται μόνο μέσα σε ένα πλαίσιο έρευνας, με τους μαθητές στο επίκεντρο και με τον εκπαιδευτικό σε συμβουλευτικό ρόλο (Antonius et al., 2007). Σε αυτό το πλαίσιο, οι Conner et al., (2014) αναφέρουν ότι η συμμετοχή των μαθητών σε συζητήσεις είναι χρήσιμη για τη μάθηση των μαθηματικών, ενώ τονίζουν ότι έχουν διερευνηθεί τρόποι, ώστε να αυξηθεί η παραγωγικότητα τους. Έτσι, οι Hufferd-Ackles et al., (2004) θεωρούν ότι με τη δημιουργία μιας *math-talk κοινότητας*, κατά τη διδασκαλία, αμβλύνονται οι δυσκολίες στην ανάπτυξη παραγωγικού λόγου.

Κατά τη δημιουργία μιας τέτοιας κοινότητας, οι Hufferd-Ackles et al., (2004) ανέφεραν ότι καλλιεργήθηκαν οι εξής αναπτυξιακές τροχιές (*developmental trajectories*): (α) η αμφισβήτηση (q*uestioning*), (β) η επεξήγηση του μαθηματικού συλλογισμού (*explaining math thinking*), (γ) οι πηγές των μαθηματικών ιδεών (*source of mathematical ideas*) και (δ) η ευθύνη για τη μάθηση (*responsibility for learning*). Ως developmental trajectories, χαρακτηρίζονται οι αλλαγές των ενεργειών του εκπαιδευτικού και των μαθητών κατά τη διδασκαλία, με συνέπεια τη δημιουργία τεσσάρων διαδοχικών επιπέδων, για κάθε τροχιά (*Επίπεδο 0 έως 3*).

Μαζί, αυτές οι τέσσερις τροχιές αντιπροσωπεύουν την ανάπτυξη μιας *math-talk κοινότητας μάθησης*, και το πλαίσιο αυτό, απεικονίζει την πορεία μιας τέτοιας κοινότητας με τους εξής δύο τρόπους: μέσω της παρατήρησης της εξέλιξης του ρόλου του εκπαιδευτικού, καθώς και της πορείας εξέλιξης των μαθητών, σε κάθε ένα από τα τέσσερα επίπεδα. Πιο συγκεκριμένα, για το ρόλο του εκπαιδευτικού, στο επίπεδο 0 έχουμε τη παραδοσιακή διδασκαλία, η οποία κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό. Στο επίπεδο 1, ο εκπαιδευτικός αρχίζει να ακολουθεί τη μαθηματική σκέψη των μαθητών, αλλά συνεχίζει να έχει «ηγετικό ρόλο» στη *math-talk κοινότητα.* Στο επίπεδο 2, ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να ενθαρρύνει τους μαθητές να αναλάβουν ρόλους και να απομακρυνθεί ο ίδιος από τον κεντρικό ρόλο της συζήτησης και της διδακτικής διαδικασίας. Καταλήγοντας, στο επίπεδο 3 ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει τους μαθητές, καθώς εκείνοι ελέγχουν πλέον την κοινότητα. Στο επίπεδο 3, θεωρείται ότι η *math-talk κοινότητα* έχει ολοκληρωθεί και έχει πάρει την τελική της μορφή. Έπειτα, η πορεία εξέλιξης της μαθηματικής και συμμετοχικής δράσης των μαθητών, περιγράφεται μέσα από τον πίνακα 1.

Πίνακας 1*: Επίπεδα της Math-Talk κοινότητας*: Πορεία μαθητή

Τροχιές	*Επίπεδο 0*	*Επίπεδο 1*	*Επίπεδο 2*	*Επίπεδο 3*
Αμφισβήτηση *(Questioning)*	Σύντομες απαντήσεις. Δεν υπάρχει *math-talk*	Οι μαθητές απαντούν με τη σειρά.	Κάνουν ερωτήσεις. Ακούν ο ένας τον άλλον.	Συζήτηση χωρίς εκπαιδευτικό. Ερωτήσεις αιτιολόγησης.
Επεξήγηση μαθηματικού συλλογισμού *(Explaining math thinking)*	Δεν επεξηγούν το συλλογισμό τους.	Έκθεση συλλογισμού λόγω εκπαιδευτικού	Έκθεση σκέψης λόγω εξέτασης. Υποστηρικτικό κλίμα της τάξης.	Περιγραφή στρατηγικών λόγω ερωτήσεων. Ενεργοί ακροατές.

Πηγές των μαθηματικών ιδεών *(Source of mathe-matical ideas)*	Αντιδρούν στον εκπαιδευτικό. Δεν προωθούν δικές τους ιδέες.	Οι ιδέες τους συζητούνται αλλά δεν ερευνώνται.	Έκθεση ιδεών με αυτοπεποίθηση.Μοιράζονται συλλογισμό και στρατηγικές.	Παρεμβαίνουν στις ιδέες τους κατά τη διδασκαλία με αυτοπεποίθηση.
Ευθύνη για τη μάθηση *(Responsibility for learning)*	Παθητικοί ακροατές. Όχι ευθύνη για μάθηση.	Εστίαση σε ιδέες άλλων λόγω εκπαιδευτικού. Εκθέτουν τον τρόπο επίλυσης.	Κατανοούν ο ένας τον άλλον. Εξηγούν τις ιδέες συμμαθητών.	Κατανοούν, διευκρινίζουν και διορθώνουν ιδέες των συμμαθητών τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό Πλαίσιο

Η παρέμβαση έγινε σε μια ομάδα 4 μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου Πειραματικού σχολείου, που επιλέχθηκε τυχαία από τον υπεύθυνο της τάξης, ώστε το επίπεδο τους στα μαθηματικά να διαφέρει. Έγινε εντός του σχολικού ωραρίου, αλλά εκτός του πλαισίου της τάξης. Η διάρκεια της ήταν μια ώρα και είκοσι λεπτά. Οι μαθητές ήρθαν πρώτη φορά σε επαφή με τα σύνολα και τις βασικές τους έννοιες, αφού δεν τα είχαν διδαχθεί ξανά. Η εκπαιδευτικός που πραγματοποίησε την παρέμβαση είναι και η ερευνήτρια της παρούσας εργασίας.

Δραστηριότητα

Πρόκειται για μια εισαγωγική δραστηριότητά στα σύνολα, τις βασικές έννοιες και τις πράξεις τους. Έχει σχεδιαστεί με βάση τη παράγραφο 5.1 του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Γυμνασίου. Η δραστηριότητα αποτελείται από δυο φύλλα εργασίας συνοδευόμενα από 3 φωτογραφίες, τα οποία δόθηκαν διαδοχικά και τα ερωτήματά έγιναν σταδιακά.

Εικόνα 1

1ο Φύλλο Εργασίας: Παρακολουθώντας στη φωτογραφία, μια στιγμή από λαϊκή αγορά (Εικόνα 1):

Μπορείτε να καταγράψετε τις δράσεις των απεικονιζόμενων της φωτογραφίας. Να ομαδοποιήσετε τις καταγραφές σας; Τι παρατηρείτε;

2ο Φύλλο Εργασίας: Παρατηρώντας την παρακάτω φωτογραφία (Εικόνα 2):

(α) Μπορείτε να καταγράψετε τις δράσεις που των απεικονιζόμενων της φωτογραφίας;

(β) Μπορείτε να καταγράψετε τις θέσεις των απεικονιζόμενων της φωτογραφίας; Να ομαδοποιήσετε τις καταγραφές σας. Τι παρατηρείτε;

(γ) (Εικόνα 3)Μπορείτε να βρείτε που ανήκουν οι παρακάτω περιπτώσεις; Τι παρατηρείτε;

(δ) Μπορείτε να βρείτε και εσείς μια κατάσταση καθημερινότητας, και να καταγράψετε τα στοιχεία και τα σύνολα που σχηματίζονται;

Εικόνα 2

Εικόνα 3

Αρχικά, στο 1ο φύλλο εργασίας αναμένεται οι μαθητές να γνωρίσουν τα σύνολα, τα υποσύνολα και τα στοιχεία τους, μέσα από τη μετάφραση της φωτογραφίας και το μεταξύ τους διάλογο. Έπειτα, στο 2ο φύλλο εργασίας με την εισαγωγή του συνόλου των θέσεων, όχι ξένο στο σύνολο των δράσεων, στοχεύεται η κατανόηση της τομής συνόλων, της ένωσης συνόλων και του κενού σύνολού, μέσα από τα δοθέντα στοιχεία της εικόνας 3. Επιπλέον, μετά την προτροπή της εκπαιδευτικού, και ως συνέπεια του διαλόγου, αναμένεται οι μαθητές να κατασκευάσουν κατάλληλο μοντέλο για τα διαγράμματα Venn. Τέλος, στόχο αποτελεί η δημιουργία συνόλων, τομών και ενώσεων συνόλων από τους μαθητές, σε διαφορετικό πλαίσιο, ώστε να επαληθεύσουν τη λύση και το μοντέλο τους.

Ερευνητικά Δεδομένα

Ως ερευνητικά δεδομένα, συλλέχθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν οι διάλογοι των μαθητών με την εκπαιδευτικό και με τους συμμαθητές τους.

Ανάλυση Δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων, αφορά την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα υπόλοιπα μέλη της κοινότητας, σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο των Hufferd-Ackles et al. (2004) σε συνδυασμό με τα στάδια της μοντελοποιήσης. Ειδικότερα, τα επεισόδια αναλύθηκαν, με βάση τη συμμετοχή των μαθητών, τη σχέση με τους συμμαθητές τους, το βαθμό παρεμβολής της εκπαιδευτικού καθώς και την εξέλιξη της μοντελοποιήσης μέσα από το διάλογο. Η ανάλυση, είχε ως αποτέλεσμα την κατηγοριοποίηση των επεισοδίων, με βάση την αναπτυξιακή τροχιά και το επίπεδο που βρίσκεται η κοινότητα, αλλά και με τα στάδια της διαδικασίας μοντελοποιήσης. Έτσι, όταν η εκπαιδευτικός είναι ιδιαίτερα καθοδηγητική και οι μαθητές παθητικοί, τότε η *math-talk κοινότητα* είναι επιπέδου 0. Έπειτα, αν η εκπαιδευτικός προσπαθεί να αναπτύξει το διάλογο, και οι μαθητές μοιράζονται το συλλογισμό τους, τότε η κοινότητα μπορεί να είναι είτε επιπέδου 1 είτε 2, με τις διαφορές τους να εντοπίζονται στην αυτοπεποίθηση που νιώθουν οι μαθητές και στο κατά πόσο καθοδηγούμενος είναι ο διάλογος. Τέλος, η κοινότητα είναι στο επίπεδο 3, όταν οι μαθητές μέσω διαλόγου καθορίζουν την έκβαση της διδασκαλίας. Σχετικά με τη μοντελοποιήση, όταν οι μαθητές «μεταφράζουν» τη φωτογραφία βρίσκονται στο 1^{ο} στάδιο, αφού κατανοούν και απλοποιούν το πρόβλημα. Έπειτα, όταν βλέπουν σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της φωτογραφίας, σχηματίζουν εικόνα για την έννοια του συνόλου και κατασκευάζουν μοντέλο για τα διαγράμματα Venn, είναι στο 2^{ο} στάδιο. Τέλος, όταν οι μαθητές διαπιστώνουν ασάφειες και λάθη της λύσης τους βρίσκονται στο 3^{ο} στάδιο, ενώ όταν επαληθεύουν τη λύση τους βρίσκονται στο 4^{ο} στάδιο της διαδικασίας μοντελοποιήσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρουσιάζονται αποσπάσματα της διδασκαλίας, όπου διακρίνονται τα επίπεδα *της math-talk κοινότητας* και η εξέλιξη της διαδικασίας μοντελοποιήσης της δραστηριότητας. Αρχικά, στο απόσπασμα 1 η εκπαιδευτικός παρεμβαίνει συχνά, καθοδηγώντας τους στην έννοια του συνόλου, «μεταφράζοντας» τη φωτογραφία (Εικόνα 1) και προσπαθώντας να εκμεταλλευτεί τη μαθηματική τους σκέψη, χωρίς κάποιο αποτέλεσμα. Παράλληλα, στη τροχιά της αμφισβήτησης, οι μαθητές απαντούν διαδοχικά, μετά από προτροπή της εκπαιδευτικού, με συνέπεια να μην αναπτύσσεται διάλογος. Έπειτα, στις τροχιές της επεξήγησης και των πηγών, οι μαθητές εκθέτουν στοιχεία του συλλογισμού τους και ιδέες τους, μετά από ερωτήσεις της εκπαιδευτικού *(Εκπ: Πώς; Μ1: Σε αυτούς … που πουλούν.)*, αλλά δεν ερευνώνται περαιτέρω *(Μ2: Με τη πράξη…άλλη κατηγοριοποίηση, ας πούμε.)*. Οπότε, καταλήγουμε ότι στο απόσπασμα 1 η κοινότητα είναι επιπέδου 1.

<u>Απόσπασμα 1</u>:

Εκπαιδευτικός: Η Μ3 είπε ομάδα! Τι θα κάνετε εσείς σε σχέση με την ομάδα;

Και οι 4: Τα ομαδοποιήσαμε.

Εκπαιδευτικός: Πώς;

Μ1: Σε αυτούς που αγοράζουν και σε αυτούς που πουλούν.

Μ2: Με τη πράξη που κάνουν εκείνη τη στιγμή. Αλλά μπορούν να κάνουμε και άλλη κατηγοριοποίηση, ας πούμε.

Μ3: Κοινές πράξεις, κοινά χαρακτηριστικά.

Εκπαιδευτικός: Με κοινά χαρακτηριστικά. Ομαδοποιείτε, τα στοιχεία. Μπορείτε να μου αναφέρετε ένα στοιχείο από τη φωτογραφία.

Μ3: Η κυρία.

Εκπαιδευτικός: Την οποία που την έχετε βάλει;

Μ1: Σε αυτούς που αγοράζουν, γιατί ο κύριος της δίνει τη σακούλα.

Εκπαιδευτικός: Τον κύριο που τον τοποθετείτε;

Μ1: Στους πωλητές.

Ακολούθως, αφού δόθηκε η επόμενη φωτογραφία (Εικόνα 2) η εκπαιδευτικός στόχευε στη κατανόηση της φύσης των συνόλων και των στοιχείων τους, οπότε τους ρώτησε αν με τη 2^{η} διευρυμένη φωτογραφία αλλάζουν τα σύνολα που έχουν ορίσει (*Μ4: Τώρα έχουμε περισσότερες δράσεις. Εκπ: Στο σύνολο των* *δράσεων έχουμε περισσότερα στοιχεία; Μ3: Έχουμε περισσότερους ανθρώπους, αλλά όχι στοιχεία.*). Έπειτα, οι μαθητές ρωτούν, μετά από παρότρυνση της εκπαιδευτικού και παίρνουν μέρος στο διάλογο (*αμφισβήτηση*) (*Εκπ: Μπορείτε να μου εξηγήσετε τι εννοεί η Μ3; Μ4: Όχι, δεν το κατάλαβα. Τι εννοείς με αυτό;)*. Παράλληλα, οι μαθητές απελευθερώνονται και εκθέτουν τη σκέψη τους σχετικά με το σύνολο των δράσεων (*πηγές*) *(Μ1: Αφού, όσο αυξάνεται το ένα αυξάνεται και το άλλο. Όσο αυξάνεται το πλήθος κόσμου τόσο αυξάνονται και αυτοί που αγοράζουν.)* ενώ κατανοούν και τους συνομιλητές τους (*ευθύνη*) *(Μ3: Όχι, Οι δράσεις δεν έχουν αλλάξει, οπότε στο σύνολο των δράσεων δεν αυξάνονται τα στοιχεία. Μ4: Πράγματι οι άνθρωποι έχουν αυξηθεί, αλλά όχι το σύνολο των δράσεων.).* Οπότε, η κοινότητα είναι στο 2^{ο} επίπεδο.

Στη συνέχεια, στο απόσπασμα 2 γίνεται προσπάθεια να οριστεί το σύνολο των θέσεων των απεικονιζόμενων. Αρχικά, σε αυτό το απόσπασμα φαίνεται η εκπαιδευτικός να απομακρύνεται από το προσκήνιο, και τους μαθητές να κάνουν μόνοι τους συζήτηση (*αμφισβήτηση*). Παράλληλα, οι μαθητές ήρθαν σε αντιπαράθεση, προσέχοντας τις λεπτομέρειες των συλλογισμών τους και «μεταφράζοντας» τη φωτογραφία με σχολαστικό τρόπο *(Μ3: Είναι στην ουσία … λιγότερο κοντά στους πάγκους. Μ4: Δεν είναι … 2 και εγώ σε 3.),* αναμένοντας τις παρεμβάσεις των συμμαθητών τους (*επεξήγηση*). Επιπλέον, λόγω του υποστηρικτικού περιβάλλοντος που καλλιεργήθηκε, με την εκπαιδευτικό να έχει συμβουλευτικό ρόλο, οι μαθητές ένιωσαν αυτοπεποίθηση για τις ιδέες τους (*πηγές*), ενώ κατάφεραν να αποσαφηνίσουν ιδέες των συμμαθητών τους (*ευθύνη*) *(Μ3: Από ότι καταλαβαίνω,… βρίσκεται μόνο σε μια. Μ4: Το έχεις κάνει πιο ειδικό.).* Έτσι, καταλήγουμε ότι στο απόσπασμα 2, η κοινότητα είναι επιπέδου 3.

Απόσπασμα 2

Εκπαιδευτικός: Εδώ ποιο είναι το ζητούμενό μας;

Μ4: Οι θέσεις. (…) Αυτοί που βρίσκονται στη μέση, αυτοί που βρίσκονται πιο κοντά στο πάγκο και αυτοί που είναι μέσα στους πάγκους.

Μ1: Αλλά είπαμε να βρούμε κάτι πιο γενικό, εδώ το εξειδικεύσαμε παραπάνω. (…) Εγώ θα έβαζα, σε σχέση με το πεζοδρόμιο.

Μ3: Κάποιοι δεν είναι στο πεζοδρόμιο, είναι ανάμεσα στους πάγκους.

Μ4: Λέω να τους χωρίσουμε σε αυτούς που είναι μέσα στους πάγκους και δίπλα, το ίδιο απέναντι, και σε αυτούς που βρίσκονται ανάμεσα.

Μ3: Είναι στην ουσία αυτό που είπα εγώ. Εστιάζω σε αυτούς που είναι ανάμεσα, και μετά στα δεξιά κ αριστερά. Δεν έχει σημασία αν είναι πολύ ή λιγότερο κοντά στους πάγκους. (...)

Μ4: Δεν είναι ακριβώς τα ίδιο, η Μ3 τις έχει χωρίσει σε 2 και εγώ σε 3. (…)

Μ3: Από ότι καταλαβαίνω, έχεις φτιάξει 4 κατηγορίες, και κάποιος μπορεί να βρίσκεται σε δυο. Γιατί να μην φτιάξεις 3 κατηγορίες και κάποιος να βρίσκεται μόνο σε μια;

Μ4 : Το έχεις κάνει πιο ειδικό.

Μ3: Το δικό μου, νομίζω, είναι γενικό, και της Μ4 πιο ειδικό. Εγώ λέω δεξιά και αριστερά, ενώ η Μ4 πίσω και μπροστά από τους πάγκους.

Στα παραπάνω αποσπάσματα, σχετικά με τη μοντελοποίηση, οι μαθητές εστίασαν στη μετάφραση και κατανόηση των πληροφοριών της φωτογραφίας, περιγράφοντας τις βασικές έννοιες του συνόλου με απλό τρόπο, με συνέπεια να βρίσκονται στο 1ο στάδιο. Έπειτα, στο απόσπασμα 3 (ερώτημα γ), όπου η κοινότητα είναι στο 3ο επίπεδο, η εκπαιδευτικός ζήτησε τρόπους σχηματικής έκφρασης των συνόλων (θέσεων & δράσεων) στην εικόνα 3. Τότε οι μαθητές πρότειναν ορθοκανονικό σύστημα με τα στοιχεία των συνόλων να έχουν συντεταγμένες, παράλληλες ευθείες με γνώμονα τον άξονα xx΄ και ομόκεντρους κύκλους. Έτσι, φαίνεται ότι μέσω του διαλόγου και της μαθηματικής επικοινωνίας που η κοινότητα προάγει, δημιουργούνται άτυπα μοντέλα για τα διαγράμματα Venn με χρήση της εικόνας 3. Επομένως, ο συνδυασμός των διάφορων αναπαραστάσεων, των άτυπων μοντέλων και της εκπαιδευτικού, οδήγησε τους μαθητές στην αναγνώριση σχέσεων και δημιουργία κατάλληλου μοντέλου για τα διαγράμματα Venn, φτάνοντας στο 2ο στάδιο της διαδικασίας.

Απόσπασμα 3

Μ3: Μπορούμε να φτιάξουμε τους άξονες, να το αριθμήσουμε και να βρούμε συντεταγμένες. Ας πούμε ότι το «2» είναι η αρχή των αξόνων.

Μ4: Εγώ έχω μια άλλη ιδέα. Μήπως να τραβάγαμε παράλληλες ευθείες; Και να δούμε σε ποια παράλληλη ανήκουν.

Μ1: Αυτό με τις παράλληλες δεν νομίζω ότι μας ταιριάζει.

Μ2: Εγώ θα έλεγα τους άξονες, αλλά το (0,0) να είναι στο κέντρο.

Μ3: Σκέφτηκα, ότι αν πούμε ότι το «2» είναι στη μέση/ κέντρο, και με αυτό κέντρο να φτιάξουμε πολλούς ομόκεντρους κύκλους. Και μετά να δούμε ότι για π.χ. το «1» βρίσκεται στον κύκλο no1 ή no3.

Εκπαιδευτικός: Τι πιστεύετε για τις ιδέες που ακούστηκαν;

Μ4: Η ιδέα μου είναι πιο ειδική, μπορεί να αφήνει κάποιες περιπτώσεις εκτός, όπως να είναι στο ίδιο σύνολο αλλά όχι στις ίδιες παράλληλες.

Μ2: Νομίζω ότι η πρόταση της Μ3, θα μας βοηθήσει περισσότερο, ώστε να πάρουμε τα περισσότερα στοιχεία του συνόλου που θέλουμε.

Έπειτα, οι μαθητές ερμήνευσαν (3ο στάδιο) τη λύση της δραστηριότητας, μέσω του μεταξύ τους διάλογου. Τέλος, στο ερώτημα δ, ελέγχοντας το μοντέλο, έφτιαξαν σύνολα, υποσύνολα, τομές και ενώσεις με τα αντίστοιχα διαγράμματα Venn (π.χ: ποδοσφαιρική ομάδα, βιβλία σε βιβλιοθήκη, σχολική τάξη, μενού εστιατορίου) οπότε επαλήθευσαν τη λύση τους (4ο στάδιο), για τα σύνολα και τις πράξεις, μέσα σε νέο πλαίσιο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα, γίνεται αντιληπτό ότι οι μαθητές και η εκπαιδευτικός, σταδιακά πέρασαν από τα επίπεδα 1-3 του θεωρητικού πλαισίου των Hufferd-Ackles et al.,(2004), με τις αντίστοιχες τροχιές να μην εμφανίζονται στο σύνολό τους σε κάθε επίπεδο. Βασική αιτία για την αλλαγή των επιπέδων θεωρείται η ανάπτυξη διαλόγου μεταξύ των μελών της κοινότητας και η ομαδική εργασία. Αν και η βιβλιογραφία αναφέρει ότι απαιτείται χρόνος για τη δημιουργία κοινότητας, στην παρέμβαση παρόλο τη μικρή της διάρκεια και το μικρό δείγμα μαθητών, επιτεύχθηκε η εμφάνιση των βασικών της χαρακτηριστικών. Έπειτα, σημαντική είναι η συμβολή της εκπαιδευτικού, αφού όταν αποστασιοποιείται, οι μαθητές απελευθερώνονται, ενισχύουν τον παραγωγικό λόγο και τη μαθηματική τους σκέψη. Ταυτόχρονα, σημειώνεται ότι η μετάφραση της φωτογραφίας, μέσα στη *math-talk* κοινότητα, νοηματοδότησε την έννοια του συνόλου μέσω της διαπραγμάτευσης. Έτσι, κομβική θεωρείται η επιρροή της κοινότητας, λόγω του διαλόγου και του κλίματος που υποστηρίζει, στη μοντελοποιήση των διαγραμμάτων Venn, αφού διαφορετικά θα ήταν δύσκολος ο σχηματισμός αναπαραστάσεων και άτυπων μοντέλων. Βέβαια, παρατηρήθηκε ότι η κοινότητα εξελισσόταν ανεξάρτητα από τη διαδικασία μοντελοποιήσης. Οπότε, επαληθεύεται η άποψη ότι η ομαδική εργασία, όπως σε μια *math-talk* κοινότητα, είναι κατάλληλος τρόπος εργασίας για τη μοντελοποίηση (Antonius et al., 2007). Τέλος, οι παράγοντες που απέτρεψαν την εκπαιδευτικό να φτάσει άμεσα στο 3ο επίπεδο της κοινότητας, και η επίδραση του είδους της παρέμβασης μοντελοποίησης στη κοινότητα, αποτελούν ζητήματα περαιτέρω μελέτης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Antonius, S. et al. (2007). Classroom Activities and the Teacher. *In: Blum W. et al. (Eds), Modelling and Applications in Mathematics Education. New York: Springer, 295-308.*

Barbosa, J. (2010). The Students' Discussions in the Modeling Environment. *In Lesh R. et al.(Eds.), Modeling students' mathematical modeling competencies (pp. 365–372). New York: Springer.*

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., & al., (2014). Teacher support for collective argumentation:A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*.

Hufferd-Ackles , K., Fuson, K., & Sherin, M. (2004). Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Ikeda, T., & Stephens, M. (2001). The Effects of Students' Discussion in Mathematical Modelling. *In Matos J. F. et al. (Eds.) Modelling and Mathematics Education: applications in science and technology (pp. 381-390). Chichester: Ellis Horwood.*

Kersaint, G. (2015). *Orchestrating Mathematical Discourse to Enhance Student Learning.* Curriculum Associates, LLC.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?*ZDM, 38(2), 113-142.*

Mousoulides , N., Sriraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modeling– the emergence of models and modelling perspectives. *Nordic Studies in Mathematics Education*.

Sherin, M. (2002). A balancing act : Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Νικολαΐδου-Μουσουλίδου, Μ., & Μουσουλίδης, Ν. (2015). Η μοντελοποιήση στην επιμόρφωση εκπαιδευτικών σε διερευνητικές μεθόδους διδασκαλίας στα μαθηματικά. *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Εν.Ε.Δι.Μ.*

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥΣ ΣΕ ΕΝΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δαφνοπούλου Δανάη

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

ddafnopoulou@gmail.com

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύσσουν μαθητές Α' και Β' Γυμνασίου κατά την επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος μαθηματικής μοντελοποίησης, που αφορά την έννοια του κλάσματος, καθώς και την πορεία της εξέλιξης τους. Η ανάλυση έγινε με βάση τη θεωρία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης και του κύκλου μοντελοποίησης. Εμφανίζονται άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά μοντέλα των οποίων η πορεία εξέλιξης εξαρτάται από τη σύνδεση και ερμηνεία τους με βάση το ρεαλιστικό πλαίσιο, καθώς επίσης και την καθοδήγηση που προωθείται από την εκπαιδευτικό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

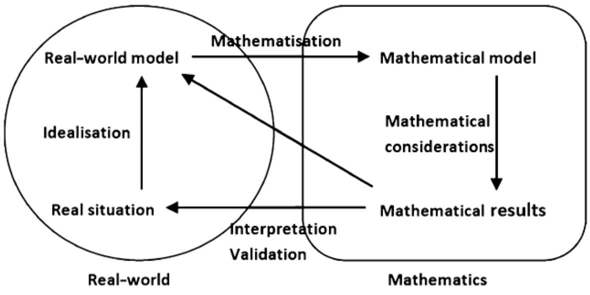
Τα μαθηματικά προβλήματα έχουν απασχολήσει το χώρο της διδακτικής των μαθηματικών αρκετές δεκαετίες τώρα. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1983, p. 41) αν ένα πρόβλημα δεν περιέχει «εκπλήξεις» και μπορεί να λυθεί επαρκώς με μια ρουτίνα ή οικείες διαδικασίες είναι μια άσκηση. Ένα βασικό ερώτημα είναι πόσο καλά προετοιμασμένοι είναι οι μαθητές στις μέρες μας να λύνουν προβλήματα που θα αντιμετωπίσουν εκτός σχολείου (Christou et al., 2005). Ο μαθηματικός εγγραμματισμός υποστηρίζει ότι η γνώση και η διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι μονάχα μετάδοση διαδικαστικών δεξιοτήτων αλλά και δημιουργία καταστάσεων, όπου ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει, ερμηνεύσει, αξιολογήσει και κρίνει τα μαθηματικά που βρίσκονται στα κοινωνικά και πολιτικά συστήματα και ισχυρισμούς (Mousoulides et al., 2007).

O Schoenfeld (1992) αναφέρει ότι, η μαθηματική μοντελοποίηση είναι κάτι παραπάνω από απλά υπολογισμούς ή παραγωγική διαδικασία. Εμπεριέχει παρατήρηση μοτίβων, εξέταση εικασιών και εκτίμηση των αποτελεσμάτων (Mousoulides et al., 2007). Έτσι, τα προβλήματα μοντελοποίησης τοποθετημένα στον πραγματικό κόσμο υποστηρίζεται πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καλλιεργήσουν το μαθηματικό εγγραμματισμό. Σε αυτά εμφανής είναι ο και ο ρόλος του εκπαιδευτικού, αφού όπως υποστηρίζουν οι English & Mousoulides (2015), σε δραστηριότητες μοντελοποίησης οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μπορούν να ανταποκρίνονται στον τρόπο σκέψης των μαθητών τους, να αλληλεπιδρούν μαζί τους, χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις, αιτιολογώντας τις διάφορες υποθέσεις και επικοινωνώντας μαθηματικά τα αποτελέσματα (Νικολαΐδου & Μουσουλίδης, 2015).

Η παρούσα εργασία αφορά ένα πρόβλημα μοντελοποίησης τοποθετημένο σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, ενώ μελετάται πως οι μαθητές αλληλεπιδρούν με αυτό. Συγκεκριμένα, θέτονται τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

ΕΕ1: Τι είδους μαθηματικά μοντέλα αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το πρόβλημα και με ποιον τρόπο αυτά εξελίσσονται κατά τη διδακτική παρέμβαση;

ΕΕ2: Ποιος είναι ο παράγοντας που επηρεάζει την εξέλιξη των μαθηματικών μοντέλων που αναπτύσσονται;



Εικόνα 1:Κύκλος της μοντελοποίησης

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME) καθορίστηκε κυρίως από τον Freudenthal (1971) και την άποψή του για τα μαθηματικά. Πίστευε ότι αυτά θα πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα και να είναι κοντά στις εμπειρίες των μαθητών. Υποστήριζε ότι η μαθηματική εκπαίδευση χρειάζεται να έχει σαν αφετηρία τα μαθηματικά, ως μια δραστηριότητα και όχι ως ένα προκατασκευασμένο σύστημα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ο πυρήνας της μαθηματικής δραστηριότητας είναι η «μαθηματικοποίηση», που σημαίνει οργάνωση από μαθηματικής αντίληψης. Η *μαθηματικοποίηση* μπορεί να αφορά εξίσου καθημερινά και μαθηματικά ζητήματα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Αυτή η δραστηριότητα είναι ένας τρόπος οι μαθητές να επανεφεύρουν τα μαθηματικά.

Συναφής με τη μαθηματικοποίηση είναι μια αρχή της RME, η οποία ονομάζεται *αρχή των επιπέδων*. Σε αυτή γίνεται λόγος για *μοντέλα*, τα οποία γεφυρώνουν το κενό μεταξύ άτυπων μαθηματικών , που συνδέονται με ένα πλαίσιο και πιο τυπικών μαθηματικών. Με βάση τον Treffers (1987) τα μοντέλα αποτελούν αναπαραστάσεις προβληματικών καταστάσεων, οι οποίες αντανακλούν βασικές διαστάσεις των μαθηματικών ιδεών και δομών τους. Υλικά, οπτικά σχέδια, παραδειγματικές καταστάσεις, σχήματα, διαγράμματα, ακόμα και σύμβολα μπορεί να αποτελούν μοντέλα (Van den Heuvel- Panhuizen 2003, Gravemeijer 1994). Στην αρχή των επιπέδων, οι μαθητές αρχικά αναπτύσσουν στρατηγικές στενά συνδεδεμένες με το πλαίσιο. Αργότερα, βασικές πλευρές του πλαισίου μπορεί να γίνουν πιο γενικές. Τελικά, το μοντέλο δίνει στους μαθητές πρόσβαση σε πιο τυπική μαθηματική γνώση (Van den Heuvel- Panhuizen 2000).

Τα μοντέλα προερχόμενα από μια προβληματική κατάσταση ανάλογα με το πλαίσιο που βρίσκονται μπορεί συνδέονται είτε με την πραγματικότητα ή τα μαθηματικά. Έτσι όπως φαίνεται στον κύκλο μοντε-λοποίησης της εικόνας 1 των Kaiser-Meimer (1986) και Blum (1996), το πραγματικό πρόβλημα που δίνεται απλοποιείται ώστε να δημιουργηθεί ένα πραγματικό μοντέλο της κατάστασης. Για να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό μοντέλο, το πραγματικό μοντέλο πρέπει να μεταφραστεί σε μαθηματικά. Όμως, είναι δύσκολη η διάκριση αυτών αφού είναι στενά συνδεδεμένα. Επίσης, το πραγματικό μοντέλο εξαρτάται από τις μαθηματικές γνώσεις του σχεδιαστή του. Τέλος, αφού ερμηνευθούν τα μαθηματικά αποτελέσματα, πρέπει να επικυρωθούν τα πραγματικά αποτελέσματα, όπως και όλη η διαδικασία μοντελοποίησης(Kaiser,2014).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πρόβλημα

Το πρόβλημα, της εικόνας 2, που δόθηκε στους μαθητές αφορούσε την τμήση ενός μπουκαλιού με γάλα. Συνοδευόταν από μια φωτογραφία, ενώ δόθηκε και συμπληρωματική φωτογραφία στην οποία οι μαθητές μπορούσαν να εργαστούν.

500 γρ. Φαρίνα	4-5 αυγά
250 γρ. βούτυρο	260 ml γάλα
440 γρ. ζάχαρη	ξύσμα πορτοκαλιού

Η Δανάη αποφάσισε να φτιάξει ένα κέικ. Έχει βρει τη συνταγή και έχει αγοράσει όλα τα υλικά που χρειάζεται. Όμως δεν έχει στο σπίτι της δοσομετρητή, για να μετρήσει τα υλικά. Συγκεκριμένα, θα μπορούσατε να τη βοηθήσετε ώστε να αδειάσει στο μείγμα το γάλα που πρέπει, αν το μπουκάλι περιέχει 1 λίτρο;

Συμπληρωματική φωτογραφία

Εικόνα 2: Το πρόβλημα

Ερευνητικό πλαίσιο και δεδομένα

Στην έρευνα ο σχεδιασμός του προβλήματος, η διδακτική παρέμβαση, η ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων έγινε από το ίδιο άτομο.

Η εφαρμογή του προβλήματος πραγματοποιήθηκε σε συνολικά τέσσερις μαθητές διαφορετικής τάξης. Σε έναν μαθητή Β' Γυμνασίου, 14 ετών. Ξεχωριστά δόθηκε σε μια ομάδα τριών μαθητών Α' Γυμνασίου ενός κοινωνικού φροντιστηρίου, αποτελούμενη από δύο κορίτσια και ένα αγόρι,12-13 ετών. Οι μαθητές επιλέχθηκαν τυχαία, με βάση την προθυμία τους να επιλύσουν το πρόβλημα. Σε κάθε περίπτωση ο χρόνος ενασχόλησης με το πρόβλημα ήταν 40 λεπτά της ώρας.

Τα ερευνητικά δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν οι συζητήσεις των μαθητών κατά την εμπλοκή τους με το μαθηματικό πρόβλημα, οι οποίες μαγνητοφωνήθηκαν. Δεδομένα , επίσης, αποτελούν τα σχεδιαγράμματα των μαθητών στην προσπάθεια να λύσουν το πρόβλημα. Επιπλέον, συλλέχθηκαν στιγμιότυπα της διαδικασίας επίλυσης μέσω φωτογραφιών.

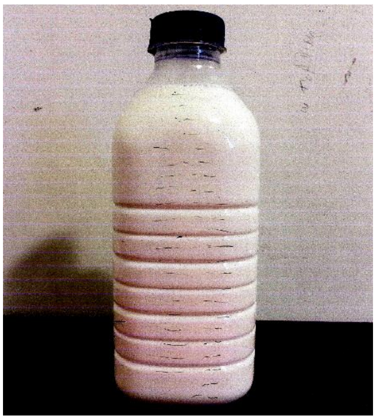
Ανάλυση των δεδομένων

Τα δεδομένα που αναλύθηκαν, επιλέχθηκαν με βάση την ποικιλία των μοντέλων και λόγω της διαφορετικής πορείας επίλυσης του προβλήματος. Έγινε ομαδοποίηση των μοντέλων των μαθητών, με βάση τον τρόπο με τον οποίο τα δημιούργησαν και τα βελτίωσαν για την επίλυση του προβλήματος αλλά και την σύνδεση τους με την έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζονται άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά μοντέλα που συμφωνούν με την *αρχή των επιπέδων*. Ειδικά, *άτυπα* θεωρούνται τα μοντέλα, όπου δίνονται αποκλειστικά και μόνο από την εικόνα του μπουκαλιού χωρίς την χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων και σχέσεων. *Προ-τυπικά* θεωρούνται εκείνα που χρησιμοποιούν την εικόνα και το πλαίσιο του προβλήματος, αλλά οι μαθηματικές ιδιότητες και πράξεις γίνονται μη συνειδητά, ενώ ως *τυπικά* θεωρούνται αυτά στα οποία γίνονται συνειδητά διαδοχικές διαιρέσεις κλασματικών μονάδων. Κατά τη δημιουργία και βελτίωση των μοντέλων με σκοπό την επίλυση του προβλήματος, εμφανίζεται ο *κύκλο της μοντελοποίησης* και αναγνωρίζονται τα εξής στοιχεία: η *πραγματική κατάσταση,* η οποία είναι η συνταγή και οι διαδικασίες υλοποίησής της, το *πραγματικό μοντέλο* που είναι η τμήση του μπουκαλιού, το *μαθηματικό μοντέλο* το οποίο είναι ο διαμερισμός περιοχών ενός καμπυλόγραμμου σχήματος και το *μαθηματικό αποτέλεσμα* που είναι το χωρίο που αντιπροσωπεύει τα 260ml. Τέλος, η ανάλυση εστιάζει στους παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη των μοντέλων αυτών κατά την παρέμβαση. Παράγοντες μπορεί να αποτελέσουν το ρεαλιστικό πλαίσιο, η δοσμένη φωτογραφία και οι ερωτήσεις ή παρατηρήσεις της εκπαιδευτικού.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από άτυπο σε τυπικό μοντέλο

Στην περίπτωση της Α' Γυμνασίου η πορεία της επίλυσης του προβλήματος είναι η δημιουργία όλων των τύπων μοντέλων ξεκινώντας από άτυπο και καταλήγοντας σε τυπικό.



Εικόνα 3: Άτυπο μοντέλο

Αρχικά, στην πρώτη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος βασικός παράγοντας δημιουργίας του μοντέλου από την ΑΛ ήταν η φωτογραφία και η ιδιομορφία της λόγο της εκτύπωσης (Εικόνα 3, η ιδιομορφία φαίνεται καλύτερα στην εικόνα 6).

Η μαθήτρια σημείωσε και μέτρησε τις ήδη κατανεμημένες περιοχές στη φωτογραφία. Αυτό αποτελεί *άτυπο μοντέλο,* αφού η ΑΛ κάνει απλά καταμέτρηση των περιοχών που βλέπει στην εικόνα, όπως φαίνεται στο απόσπασμα 1, ενώ θεωρεί αυθαίρετα ότι τα ml του κάθε χωρίου ως 10. Παρατηρείται ότι η ΑΛ δεν προσπαθεί να βελτιώσει το μοντέλο παρά το απορρίπτει γιατί το μαθηματικό αποτέλεσμα, δηλαδή το άθροισμα των διαμερίσεων δεν είναι 1000 ml, κάτι που είναι αντίθετο στα δεδομένα.

Απόσπασμα 1

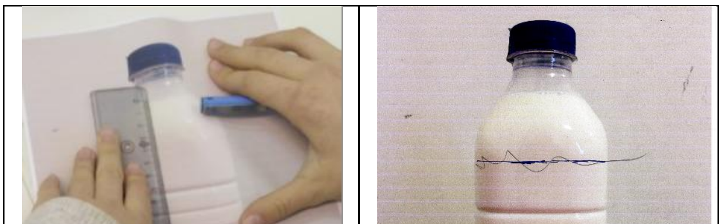
ΑΛ: Περίμενε να το σκεφτώ. 10,20,30,40,50,60…Καλά κάντο εσύ τώρα.

ΓΙ: Γιατί να το χωρίσεις έτσι;

ΑΛ: Δεν θέλω να το χωρίσω απλώς ήταν πρόχειρα, πες ότι δεν υπάρχουν αυτά.

ΓΙ: Και τι βρήκες; Δεν θέλω να το χωρίσω. Τι μου το δίνεις;

Αφού το μοντέλο απέτυχε να δώσει λύση η ΑΛ παροτρύνει τη ΓΙ να εφαρμόσει μια ιδέα που είχε διατυπώσει στην αρχή της παρέμβασης. Η ΓΙ δημιούργησε ένα νέο *προ-τυπικό μοντέλο* αυτό στην εικόνα 4. Το μοντέλο θεωρείται ως τέτοιο αφού η μαθήτρια κάνει μετρήσεις και χωρίζει το μπουκάλι σε τέταρτα. Σε αυτό το σημείο παρόλο που η ΓΙ δεν αναφέρεται στις μαθηματικές έννοιες που



Εικόνα 4: Προ-τυπικό μοντέλο

χρησιμοποιούνται, δηλαδή στην έννοια του κλάσματος και αγνοεί το καμπυλόγραμμο σχήμα του μπουκαλιού το μοντέλο δίνει μια λύση στο πρόβλημα η που ικανοποιεί σε μεγάλο βαθμό το ρεαλιστικό πλαίσιο.

Στο ίδιο μοντέλο, η ΑΛ φαίνεται για πρώτη φορά να διαχωρίζει το πραγματικό μοντέλο, από το μαθηματικό μοντέλο. Σε αυτό έπαιξαν ρόλο οι ερωτήσεις της εκπαιδευτικού προς τη ΓΙ με βάση το απόσπασμα 2.

Απόσπασμα 2

Καθηγήτρια: Αυτά είναι 260 ml;

ΓΙ: Ναι.

Καθηγήτρια : Ωραία… Πως είναι τόσο σίγουρη;

ΓΙ: Γιατί ξέρουμε μαθηματικά και ξέρουμε πως…

ΑΛ: Να σου πω δεν είναι 260 ml, θα σου πω γιατί. Γιατί πρέπει να υπολογίσω από το τέλος , πόσα είναι 260 ml.

ΕΜ: Πως το βρήκες;

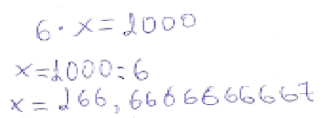
ΑΛ: Γιατί εδώ δεν είναι ίσιο. Άρα πρέπει να υπολογίσω από το τέλος.

ΓΙ: Ναι αλλά και από το τέλος δεν είναι ίσιο.

ΑΛ: Ε δεν πειράζει, από το τέλος όμως είναι πιο ίσιο.

ΓΙ: Το ίδιο πράγμα είναι.

Έτσι, η ΑΛ κάνει μια προσπάθεια βελτίωσης της λύσης του προβλήματος επιλέγοντας το κάτω μέρος του μπουκαλιού, που είναι λιγότερο καμπυλωτό όπως φαίνεται στο παραπάνω απόσπασμα.



Εικόνα 5: Προ-τυπικό μοντέλο

Ωστόσο, το μαθηματικό αποτέλεσμα δεν ερμηνεύεται από την πραγματική κατάσταση, δηλαδή το γεγονός ότι δεν αδειάζουμε το μπουκάλι από το κάτω μέρος. Παράγοντας για τη σύνδεση του αποτελέσματος με το ρεαλιστικό πλαίσιο ήταν η ερώτηση της εκπαιδευτικού. Όμως, η απάντηση των μαθητών δείχνει ότι αγνοούν το πλαίσιο δίνοντας τη δική τους ερμηνεία, απόσπασμα 3.

Απόσπασμα 3

Καθηγήτρια: Όταν θα αδειάσεις το μπουκάλι πως θα το αδειάσεις όμως;

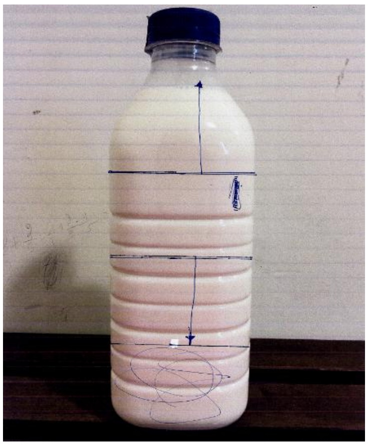
ΑΛ: Ναι κυρία όμως θα φύγει από κάτω…

ΓΙ: Γι' αυτό σας δίνουμε και τις δύο επιλογές , ή θα αδειάσει από εδώ πέρα (από πάνω) ή από εδώ πέρα (από κάτω).

Ακόμα, η ΓΙ υποστηρίζει το παραπάνω μοντέλο της και δεν το βελτιώνει αφού επικυρώνει το αποτέλεσμα της με βάση την πραγματική κατάσταση (*Κυρία συγγνώμη κιόλας, κέικ φτιάχνουμε , αν βάλουμε λίγο παραπάνω δεν θα γίνει κάτι).* Σε αυτό το σημείο φαίνεται ότι το ρεαλιστικό πλαίσιο, συγκεκριμένα η πραγματική κατάσταση, αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στη βελτίωση και εξέλιξη του μοντέλου.

Έπειτα, με παρότρυνση από την καθηγήτρια(*Αν θέλουμε να είναι πιο ακριβής; Τι σημαίνει να είναι πιο ακριβής ο τρόπος;)* η ΑΛ δημιούργησε ένα παρόμοιο μοντέλο με το προηγούμενο ώστε να το βελτίωσης. Αυτό ήταν η εκ νέου τμήση του μπουκαλιού σε 6 χωρία. Η μαθήτρια ΑΛ χρησιμοποίησε εξισώσεις, ώστε να βρει πόσα ml αντιστοιχούν σε καθένα από τα 6 χωρία. Το παραπάνω μοντέλο παρόλο που χρησιμοποιεί τυπικά μαθηματικά, όπως οι εξισώσεις θεωρείται προ-τυπικό, αφού γίνεται απλά διαφορετική τμήση του μπουκαλιού και οι ιδιότητες του κλάσματος δεν γίνονται αντιληπτές. Ξανά το μαθηματικό μοντέλο απορρίπτεται γιατί το κάθε χωρίο δεν αντιστοιχεί σε 250ml (*Ναι αλλά κυρία εμείς δεν θέλουμε 166,66666667*). Σε αυτό το σημείο το μαθηματικό πλαίσιο είναι αυτό που αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα της εξέλιξής του.

Τελικά, δημιουργήθηκε ένα *τυπικό μοντέλο* (Εικόνα 6 & Απόσπασμα 4)από τη μαθήτρια ΑΛ, που αποφάσισε ότι χρειάζεται να γίνει επιπλέον τμήση του μπουκαλιού και όχι να χωριστεί όλο το μπουκάλι εκ νέου. Η ιδέα για αυτό το μοντέλο δεν φαίνεται να δημιουργήθηκε άμεσα από κάποια συζήτηση, αλλά φαίνεται να παροτρύνθηκε από την καθηγήτρια που η οποία ζητούσε έναν πιο ακριβή τρόπο εύρεσης των 260 ml.



Εικόνα 6: Τυπικό μοντέλο

Απόσπασμα 4

ΑΛ: Λοιπόν, από τη στιγμή που αυτά είναι 4,7. Άμα εμείς καταλάβουμε πόσα εκατοστά είναι το κάθε, εδώ υποτίθεται πως είναι 250ml το καθένα.(αναφορά στα τέταρτα του μπουκαλιού) Το 250ml πρέπει να βρούμε πόσα… Μισό λεπτό.250 να κάνουμε, δεν ξέρω, να το διαιρέσουμε να δούμε πόσα μπορεί να χωράει ml.

Καθηγήτρια: Ποιος μπορεί να χωράει ml;

ΑΛ: Βασικά, άμα κάνουμε δια, πρέπει να βρούμε ένα τρόπο να τα χωρίσουμε 10, 10ml.

Στο παραπάνω μοντέλο παρόλο που γίνεται χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων του κλάσματος η κατασκευή του δεν ανταποκρινόταν στην *πραγματική κατάσταση.* Ο λόγος για αυτό ήταν ότι το χωρίο που επιλέχθηκε να χωριστεί βρισκόταν στη μέση του μπουκαλιού και όχι στο επάνω μέρος του, όπως φαίνεται στην εικόνα 6. Οι μαθητές δεν έκαναν σύνδεση του μαθηματικού αποτελέσματος με την πραγματική κατάσταση και χρειάστηκε να γίνει παρέμβαση της εκπαιδευτικού για να επικυρωθεί το μοντέλο που είχε δημιουργηθεί (*Από κάτω θα αφαιρέσω; Από εδώ θα φεύγει το γάλα;).*

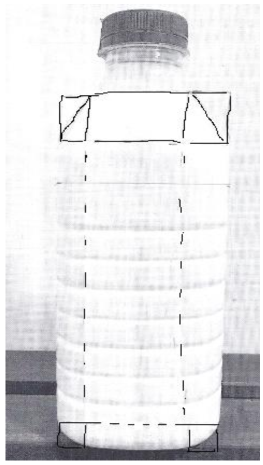
Από τυπικό σε προ-τυπικό μοντέλο

Στην περίπτωση της Β' Γυμνασίου , η πορεία της επίλυσης οδηγήθηκε από ένα τυπικό μοντέλο σε ένα προ-τυπικό κατά την προσπάθεια βελτίωσης του.

Δημιουργήθηκε απευθείας από το μαθητή *τυπικό μοντέλο* το οποίο περιγράφεται στο παρακάτω απόσπασμα, αφού αντιλαμβάνεται απευθείας ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσει την έννοια τους κλάσματος.

ΣΤ: Θα μετρήσεις πόσο είναι και θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα κομμάτια. Άρα, μετά νομίζω ότι πρέπει να χωρίσεις ένα από τα κομμάτια σε περισσότερα κομμάτια οπότε να κάνεις κάτι σαν που είναι ας πούμε ένα τέταρτο…

Το παραπάνω μοντέλο ταυτίζεται με αυτό των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου της εικόνας 6 και συγκεκριμένα ο καταμερισμός του μπουκαλιού έγινε στο κάτω μέρος του, αγνοώντας το ρεαλιστικό μοντέλο. Η εκπαιδευτικός μέσω ερώτησης καθοδήγησε το μαθητή να ελέγξει τη λύση του με βάση το ρεαλιστικό πλαίσιο. (*Άμα είναι θα άνοιγες τρύπα από δω-δηλαδή από κάτω-.Απλά βρήκαμε πόσο θέλουμε. Πόσο περίπου είναι*).



Εικόνα 7: Πρό-τυπικό μοντέλο

Η παρότρυνση της καθηγήτριας για βελτίωση του μοντέλου, οδήγησε σε αυτό έγινε προσπάθεια βελτίωσης του μαθηματικού μοντέλου, δηλαδή μετασχηματισμός του καμπυλόγραμμου σχήματος (Εικόνα 7). Το μοντέλο θεωρείται προ-τυπικό, αφού ο μαθητής δεν εξετάζει αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στα χωρία που έχει δημιουργήσει (Εικόνα 7).

Απόσπασμα 5

Καθηγήτρια: Σαν σχήμα τι θα ήταν αυτό που προσπαθούσες να πάρεις;

ΣΤ: Ένα ορθογώνιο κανονικό, αυτό θα το παίρναμε σαν ορθογώνιο.

Καθηγήτρια: Πως θα το κάναμε σαν ορθογώνιο;

ΣΤ: Τα κάναμε διακεκομμένες γραμμές εδώ, θα κάναμε τις μετρήσεις μας θα μετρούσαμε πόσο είναι η βάση εδώ πόσο είναι το ύψος εδώ. Άμα είχαμε πιο καλή γωνία θα μπορούσαμε να μετρήσουμε και αυτή εδώ την πλευρά, την από πίσω εδώ, θα μετρούσαμε τον όγκο.

Όμως το μοντέλο δεν εξελίχθηκε διότι ο μαθητής ήθελε να μετατρέψει τη φωτογραφία σε τρισδιάστατο αντικείμενο, όπως φαίνεται στο απόσπασμα 5. Σε αυτή την περίπτωση το ρεαλιστικό πλαίσιο και συγκεκριμένα η φωτογραφία φαίνεται να αποτελούν ανασταλτικό παράγοντα στην εξέλιξη του μοντέλου.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, εμφανίζονται διαφόρων ειδών άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά μοντέλα. Η πορεία εξέλιξης της λύσης του προβλήματος φαίνεται στην Α’ Γυμνασίου να είναι από άτυπο σε τυπικό μοντέλο, ενώ στην περίπτωση της Β’ Γυμνασίου από τυπικό σε προ-τυπικό. Στην εξέλιξη του κάθε μοντέλου παράγοντες που έπαιξαν ρόλο φάνηκε ότι ήταν η εκπαιδευτικός, το ρεαλιστικό και μαθηματικό πλαίσιο. Ανασταλτικό παράγοντα, αρκετές φορές, αποτέλεσαν κάποιες συνιστώσες του ρεαλιστικού πλαισίου όπως η συνταγή ή η φωτογραφία του μπουκαλιού. Επομένως, το πλαίσιο στο οποίο είναι τοποθετημένο το πρόβλημα φαίνεται να μην δημιουργεί την ανάγκη για ακριβέστερη μέθοδο επίλυσης. Ωστόσο, η συνιστώσα που αφορά το μπουκάλι, δεν αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στην επίλυση, αλλά φαίνεται να μην είναι οικεία στους μαθητές, αφού φτιάχνοντας το μαθηματικό μοντέλο αγνοούσαν το πραγματικό δηλαδή ότι το μπουκάλι θα αδειάσει από το πάνω μέρος. Τα παραπάνω αποτελέσματα συμφωνούν με ευρήματα των ερευνητών Jurdak &

Shahin (2001, p. 312), όπου σε πρόβλημα κατασκευής δοχείου από μαθητές, σχολιάζουν ότι η αλληλεπίδραση των μαθητών με το φυσικό περιβάλλον ήταν ελάχιστη και αντιμετώπισαν το πρόβλημα κατασκευής του ζητούμενου δοχείου εφαρμόζοντας τις διαδικασίες που προέρχονταν από την τάξη. Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα μοντέλα που μπορούν να δημιουργηθούν σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα μαθηματικής μοντελοποίησης, δεν εξελίσσονται με προκαθορισμένο τρόπο κάτι που συμφωνεί με ευρήματα έρευνας που αφορά την μοντελοποίηση των Νικολαΐδου & Μουσουλίδης (2015), όπου αναφέρουν ότι στα προβλήματα μοντελοποίησης δεν υπάρχει μια προκαθορισμένη πορεία προς τη μαθηματική γνώση. Τέλος, παρόλο που η εκπαιδευτικός αποτελεί παράγοντα στην επίλυση του προβλήματος δεν εξετάζεται εκτενώς ο ρόλος και η διαχείριση της ως αναφορά τη σύνδεση του μαθηματικού και ρεαλιστικού πλαισίου, δίνοντας έναυσμα για επιπλέον διερεύνηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, C., Mousoulides, N. , Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 37 (3)* , pp. 149-158.

English, L., & Mousoulides, N. (2015). Bringing STEM in a real world problem. *Mathematics Teaching in the Middle School ,20(9)* , pp. 532-539.

Freudenthal, H. (1971). ‘Geometry between the devil and the deep sea’ . *Educational Studies in Mathematics 3* , pp. 413-435.

Gravemeijer, K. (1994). Developing Realistic Mathematics Education. *CD-ß Press / Freudenthal Institute , Utrech , The Netherlands* .

Jurdak, M., & Shahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: The case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics, 47(3)*, pp. 297-315.

Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 396-404.

Mousoulides, N.,Sriraman, B. & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling - the emergence of models and modeling perspectives ,12 (1). *Nordic Studies in Mathematics Education*, pp. 23-47.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 334-370.

Schoenfeld, A. (1983). 'The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: a review of sorts'. *For the Learning of Mathematics, 3*, pp. 40-47.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction .* Dordrecht,The Netherlands: The Wiskobas Project, Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.*

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education : An example from a longitudinal tragectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, pp. 9-35.

Νικολαΐδου-Μουσουλίδου, Μ., & Μουσουλίδης, Ν. (2015). Η μοντελοποιήση στην επιμόρφωση εκπαιδευτικών σε διερευνητικές μεθόδους διδασκαλίας στα μαθηματικά. *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Εν.Ε.Δι.Μ.*

Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ GEOGEBRA ΣΤΗ ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Παρασκευή Καμπορούδη

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

pkamporoudi@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία διερευνάται η συμβολή του λογισμικού GeoGebra στην κατανόηση και στην εναλλαγή μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης. Για τον σκοπό αυτό, κρίθηκε αναγκαίο να μελετηθεί ο βαθμός εξοικείωσης των μαθητών με την έννοια και με τις αναπαραστάσεις της. Στην έρευνα συμμετείχαν 4 μαθητές που φοιτούσαν στην Α' τάξη Γενικού Λυκείου, με διαφορετικές επιδόσεις στο μάθημα των Μαθηματικών. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ένα δυναμικό περιβάλλον συμβάλλει στην κατανόηση γύρω από τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης και των συνδέσμων μεταξύ τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνάρτηση είναι μία από τις σημαντικότερες έννοιες με την οποία οι μαθητές έρχονται σε επαφή κατά τα σχολικά τους χρόνια. Σύμφωνα με την Sfard (1991), μπορεί να γίνει κατανοητή με δύο διαφορετικούς τρόπους: δομικά, σαν αντικείμενο, και λειτουργικά, σαν διαδικασία. Από τη σκοπιά της δομής, η συνάρτηση είναι διατεταγμένα ζεύγη τιμών, ενώ από τη λειτουργική σκοπιά είναι μια υπολογιστική διαδικασία ή μια καλώς ορισμένη μέθοδος για τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο.

Για τους μαθητές η συνάρτηση αποτελεί μία από τις δυσκολότερες προς κατανόηση έννοιες. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν αφορούν στην κατανόηση τόσο της ίδιας όσο και άλλων εννοιών και διαδικασιών που σχετίζονται με αυτήν. Σύμφωνα με την Sierpinska (1992), η συνάρτηση έχει τρεις όψεις: την αριθμητική (πίνακες ή διατεταγμένα ζεύγη τιμών), την γεωμετρική (γραφήματα) και την συμβολική (αλγεβρικές σχέσεις). Πολλοί μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην ερμηνεία και στη σύνδεση αυτών, ενώ πολύ συχνά τις αντιμετωπίζουν ως ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μάλιστα, δεν είναι σπάνιες οι περιπτώσεις στις οποίες ένας μαθητής πραγματοποιεί ορθά αυτή τη μετάβαση, χωρίς όμως να είναι σε θέση να μεταφέρει ή να συσχετίσει τις πληροφορίες από τη μια αναπαράσταση στην άλλη (Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007, Hitt, 1998).

Ωστόσο, η ουσιαστική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης εμπεριέχει τόσο την ικανότητα αναγνώρισης και διαχείρισής της μέσα σε ένα δοσμένο σύστημα αναπαραστάσεων, όσο και την ικανότητα της ορθής μετάβασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο (Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986). Στη σύνδεση μεταξύ αυτών, καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει το πλαίσιο μέσα στο οποίο εντάσσονται και αναπτύσσονται οι αναπαραστάσεις (Even, 1998).

Στη σχολική πραγματικότητα ωστόσο, συχνά δίνεται περισσότερη βαρύτητα στη διαδικαστική γνώση παρά στην εννοιολογική κατανόηση, κι έτσι δημιουργείται λανθασμένα η εντύπωση πως οι μαθητές γνωρίζουν σε βάθος την έννοια (Elia, et. al, 2007). Η εναλλαγή μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων της συνάρτησης είναι γνώση η οποία θεωρητικά κατακτάται και καλλιεργείται στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ωστόσο, οι γνώσεις αυτές περιορίζονται σε συγκεκριμένες διαδικασίες. Τα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια χρησιμοποιούν πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης, προκειμένου να κάνουν πιο προσιτή την έννοια στους μαθητές, όμως ο τρόπος μεταφοράς από τον έναν τρόπο αναπαράστασης στον άλλο παραβλέπεται (Janvier, 1987).

Με τη βοήθεια των ψηφιακών εργαλείων αναπτύσσονται δραστηριότητες, οι οποίες μεσολαβούν ανάμεσα στη σκέψη και τις κατανοήσεις του μαθητή και στη μάθηση (Sfard & McClain, 2002). Με το δυναμικό περιβάλλον που προσφέρουν παρέχονται δυνατότητες για αυτονομία και πειραματισμό, διερεύνηση, αναίρεση ενεργειών και παρατήρηση αλλαγών, οι οποίες δεν έχουν πρακτική εφαρμογή στο χαρτί, και μάλιστα με τρόπο που κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και είναι πιο κοντά στις εμπειρίες και στις προτιμήσεις τους. Έτσι, η προσοχή μετατοπίζεται από τον σχεδιασμό ενός καλού σχήματος στην παρατήρηση των ιδιοτήτων του, απεγκλωβίζοντας τη σκέψη και την προσοχή τους από διαδικαστικά θέματα (Papert, 1980).

Το λογισμικό GeoGebra (***Geo***metrie και Al***gebra***) δημιουργήθηκε από τον Αυστριακό μαθηματικό Markus Hohenwarter (2002). Αποτελεί ένα δυναμικό εργαλείο για το μάθημα των μαθηματικών και είναι κατάλληλο για τη διδασκαλία των συναρτήσεων, αφού προσφέρει με δυναμικό τρόπο τη σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων για μαθηματικά αντικείμενα, μέσω της γραφικής οπτικής, της αλγεβρικής οπτικής και της προβολής σε υπολογιστικό φύλλο (Hohenwarter & Jones, 2007). Ειδικότερα, καθιστά εύκολες λειτουργίες όπως η δημιουργία γραφήματος ως ίχνος σημείου (x, f(x)), ώστε να αναδεικνύεται η διαδικασία σχεδιασμού του, ο δυναμικός πίνακας τιμών, αφού κινώντας ένα σημείο κατά μήκος του γραφήματος μπορεί δυναμικά να ερευνηθεί κάθε ζευγάρι τιμών x και f(x), το δυναμόγραμμα, αφού κατά την κίνηση του x με το ποντίκι μπορούν να παρατηρηθούν οι αλλαγές που συμβαίνουν στο f(x), και η δυναμική εξερεύνηση παραμέτρων, με την οποία καθίσταται εύκολη η αλλαγή μιας παραμέτρου και η παρατήρηση των αποτελεσμάτων της αλλαγής αυτής στο γράφημα (Hohenwarter, 2004).

Μέσα από τα παραπάνω αναδεικνύεται το κριτήριο επιλογής του συγκεκριμένου λογισμικού για την παρούσα έρευνα. Σκοπός της αποτέλεσε η ανάδειξη της συμβολής ενός δυναμικού περιβάλλοντος στη σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης των συναρτήσεων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία αφορά σε μια ποιοτική έρευνα και αποτελεί κομμάτι μιας ευρύτερης έρευνας που έγινε στο πλαίσιο μιας διπλωματικής εργασίας. Στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα διερευνήθηκε η εικόνα που έχουν σχηματίσει οι μαθητές γύρω από την έννοια της συνάρτησης και πόσο εξοικειωμένοι είναι με τις αναπαραστάσεις της. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην γραφική αναπαράσταση, μιας και η παρουσίαση των συναρτήσεων με τη χρήση του λογισμικού έγινε με αναφορά σε γραφήματα. Στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο παρουσιάζεται στην εν λόγω εργασία, μελετάται η συμβολής της χρήσης του λογισμικού GeoGebra, από μαθητές της Α' τάξης Γενικού Λυκείου, για την ανάδειξη των συνδέσμων μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης.

Χαρακτηριστικά του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν τέσσερις μαθητές της Α' τάξης Γενικού Λυκείου ημιαστικής περιοχής, δύο αγόρια και δύο κορίτσια. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας, καθώς οι μαθητές είχαν συνεργαστεί και στο παρελθόν με την ερευνήτρια. Επίσης, κριτήρια για την επιλογή τους αποτέλεσαν το είδος του Λυκείου στο οποίο φοιτούσαν, οι σχολικές τους επιδόσεις στο μάθημα των Μαθηματικών, προκειμένου να υπάρχουν μαθητές διαφόρων επιπέδων, καθώς και η δυνατότητα λειτουργίας τους σε ομάδες.

Σύμφωνα με το ΑΠΣ, μετά το πέρας του Γυμνασίου οι μαθητές αναμένεται να κατέχουν βασικές γνώσεις γύρω από την έννοια της συνάρτησης, όπως η αναγνώριση μιας σχέσης ως συνάρτηση και η συσχέτισή της με καταστάσεις και προβλήματα της καθημερινής ζωής, η κατάκτηση της έννοιας της συμμεταβολής δύο μεγεθών, ένα βασικό χαρακτηριστικό των συναρτήσεων, και η κατανόηση και η συσχέτιση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας. Η έρευνα έλαβε χώρα κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, πριν τα παιδιά διδαχτούν τις αντίστοιχες ενότητες στο σχολείο.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν πραγματοποιήθηκε συνδυασμός της ανάλυσης περιεχομένου και της θεμελιωμένης θεωρίας. Τα δεδομένα ομαδοποιήθηκαν γύρω από τρεις βασικούς άξονες: την αναγνώριση των συναρτήσεων, την ανάγνωση γραφικών παραστάσεων και τη σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra.

Αρχικά, δόθηκε στους μαθητές ένα διαγνωστικό ερωτηματολόγιο – τεστ, ώστε να διασαφηνιστούν οι κατανοήσεις τους γύρω από την έννοια της συνάρτησης. Περιείχε ερωτήσεις ορισμού και αναγνώρισης της συνάρτησης, ανάγνωσης γραφημάτων και αντιστοίχισης μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεών της. Πιο συγκεκριμένα, η τελευταία άσκηση περιείχε προβλήματα (λεκτική έκφραση), αλγεβρικούς τύπους, διαγράμματα και πίνακες τιμών.

Στη συνέχεια, οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Αυτοί της πρώτης ομάδας (Γιώργος και Ελένη), παρουσιάζουν υψηλές επιδόσεις στο μάθημα των Μαθηματικών, ενώ αυτοί της δεύτερης (Κώστας και Μαρίνα) παρουσιάζουν μέτριες επιδόσεις.

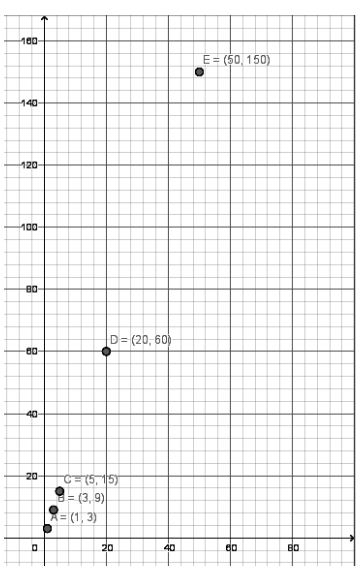
Με σημείο αναφοράς τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου, οργανώθηκαν και πραγματοποιήθηκαν δύο δίωρες διδασκαλίες ημιδομημένου χαρακτήρα ξεχωριστά σε κάθε ομάδα, με σκοπό τη βαθύτερη διερεύνηση των παρανοήσεων και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και πώς η χρήση λογισμικού μπορεί να ενισχύσει τις κατανοήσεις τους και να βοηθήσει στη σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων.

Μετά το πέρας των διδασκαλιών μοιράστηκε εκ νέου το ερωτηματολόγιο στους μαθητές για να το διορθώσουν, ώστε να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα της διδασκαλίας. Ακολούθησε συνέντευξη με τον καθένα ξεχωριστά, προκειμένου να αποσαφηνιστούν οι απαντήσεις τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι απαντήσεις των παιδιών στο ερωτηματολόγιο που μοιράστηκε πριν την παρέμβαση προδίδουν κατά βάση έναν διαδικαστικό τρόπο σκέψης. Για παράδειγμα, στη μετάβαση από τη λεκτική έκφραση στον τύπο, ο Γιώργος σκέφτηκε με «λέξεις κλειδιά» και όχι λογικά. Έτσι, στο πρόβλημα: *«Μερικοί εργαζόμενοι πληρώνονται 4€ ανά ώρα εργασίας»*, θεώρησε ότι η φράση «ανά ώρα» υποδηλώνει διαίρεση και το αντιστοίχισε με τη σχέση y=4/x. Επίσης, για την αντιστοιχία των τύπων με τα γραφήματα ο Κώστας και η Μαρίνα δημιούργησαν πίνακες τιμών και στη συνέχεια σχεδίασαν τα διαγράμματα για να βρουν την απάντηση. Ο Γιώργος και η Ελένη, όπως δήλωσαν στην συνέντευξη, έκαναν στο μυαλό τους τους πίνακες τιμών για να τους βοηθήσουν με τα διαγράμματα. Βέβαια, σε ορισμένες περιπτώσεις επαλήθευαν τις απαντήσεις τους. Για παράδειγμα, η Ελένη σκέφτηκε ότι η σχέση y=x+4 είναι ευθεία και δεν ξεκινάει από την αρχή των αξόνων, ενώ ο Κώστας αναγνώρισε τους τύπους των ευθειών, ότι δηλαδή η y=4x είναι της μορφής y=αx, οπότε θα είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ακόμη, η μετάβαση από τη λεκτική έκφραση κατευθείαν στο διάγραμμα φάνηκε σε όλους αδύνατη, ενώ στην αντιστοίχιση του αλγεβρικού τύπου με τον πίνακα τιμών, οι τρεις από τους τέσσερις δοκίμαζαν ζευγάρια τιμών από τους πίνακες στους τύπους, ώστε να βρουν ποια τους επαληθεύουν. Μόνο η Ελένη παρατηρούσε τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών στον τύπο και στην πορεία έψαχνε την αντίστοιχη σχέση στους πίνακες. Για παράδειγμα, για τον τύπο y=0,5x είπε ότι το y είναι το μισό του x, οπότε έψαξε κάτι αντίστοιχο στους πίνακες, ενώ στον y=12/x έψαξε στους πίνακες πού υπήρχαν τιμές του y οι οποίες ήταν μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές του x.

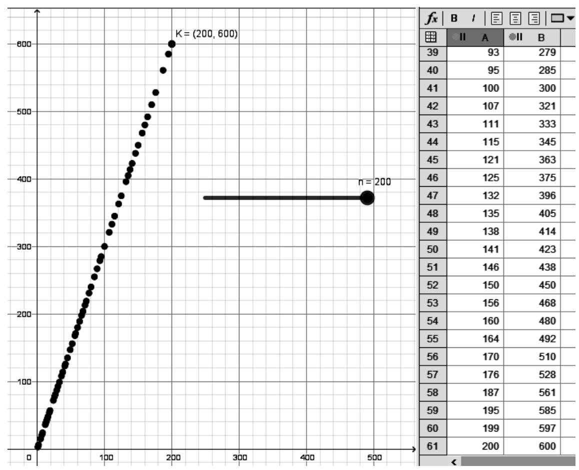


Εικόνα 1

Στις διδασκαλίες, αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να εντοπίσουν σημεία στο επίπεδο, δηλαδή ζεύγη τιμών, που θα προκύπτουν από τη σχέση μεταξύ περιμέτρου και πλευράς ισοπλεύρου τριγώνου (εικόνα 1). Θεωρήθηκε ότι ο άξονας x'x αντιπροσωπεύει την πλευρά του τριγώνου και ο άξονας y'y την περίμετρό του.

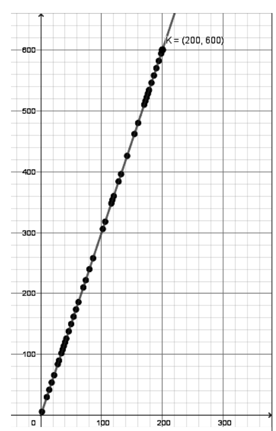
Η πρώτη ομάδα ευκολότερα, η δεύτερη πιο δύσκολα, κατάφεραν να προβλέψουν το είδος της γραμμής που θα προκύψει. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας, ήδη από τα πρώτα δύο σημεία, διαπίστωσαν ότι το διάγραμμα *«Θα είναι ευθεία, αφού η μία τιμή είναι τριπλάσια από την άλλη και αυτή η σχέση δεν αλλάζει»*.

Η δεύτερη ομάδα ήταν λιγότερο σίγουρη, αφού μετά την τοποθέτηση τεσσάρων σημείων ρώτησαν *«Ευθεία;»*, *«Να βάλουμε και άλλα σημεία πρώτα για να είμαστε σίγουροι»*. Στη συνέχεια, ενώ ήξεραν ότι *«Πάντα η περίμετρος θα είναι τριπλάσια από τις πλευρές»*, στην ερώτηση της ερευνήτριας *«Άρα πού θα βρίσκονται τα σημεία επάνω στη γραφική παράσταση;»* δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν. Έπειτα ρωτήθηκαν εάν υπάρχει περίπτωση να βρεθεί το σημείο με συντεταγμένες (7, 14) και απάντησαν *«Όχι! Άρα όλα τα σημεία θα είναι εδώ πάνω στην ευθεία»*. Εδώ παρατηρείται η αδυναμία και των δύο να αποδώσουν διαγραμματικά τη γνώση ότι η μια τιμή είναι τριπλάσια της άλλης, παρ' όλο που θεωρητικά η απόδοση σε γράφημα είναι γνώση που κατακτάται από την Β' Γυμνασίου.



Εικόνα 2

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός δρομέα, επιτεύχθηκε η κίνηση ενός σημείου στο επίπεδο, οι συντεταγμένες του οποίου αντιστοιχούσαν στη σχέση μεταξύ πλευράς και περιμέτρου ισοπλεύρου τριγώνου, δηλαδή η τεταγμένη του να είναι τριπλάσια από την τετμημένη του. Κατά την πορεία κίνησής του, το σημείο άφηνε το ίχνος του προδίδοντας έτσι το είδος της γραμμής που προκύπτει από αυτή τη σχέση (εικόνα 2). Παράλληλα, δημιουργήθηκε ένας πίνακας τιμών σε υπολογιστικό φύλλο δίπλα, όπου εμφανιζόταν οι συντεταγμένες της θέσης του σημείου κάθε στιγμή καθώς αυτό κινούνταν. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές παρατήρησαν αφενός ότι ο πίνακας έπαιρνε τις τιμές από το διάγραμμα και αφετέρου ότι όλα τα σημεία ακολουθούν το ίδιο μοτίβο.

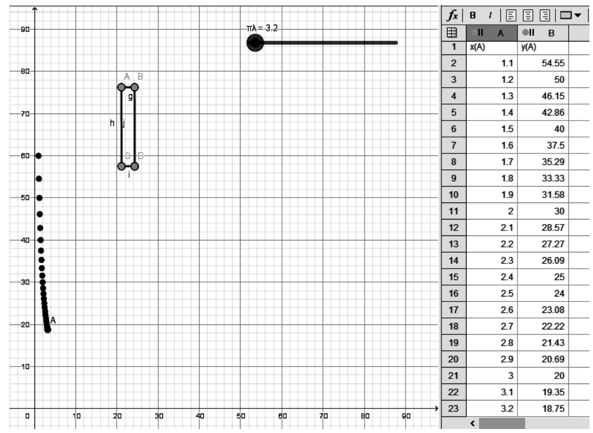


Εικόνα 3

Τέλος, ζητήθηκε η σχέση που δίνει την περίμετρο ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Και οι δύο ομάδες βρήκαν εύκολα ότι ισχύει Π=3α ή y=3x. Η σχέση προστέθηκε στο διάγραμμα, δημιουργώντας την ευθεία η οποία διαπερνούσε όλα τα σημεία και αποδεικνύοντας την ορθότητα των παραπάνω συλλογισμών (εικόνα 3).

Μέσα από αυτήν την δραστηριότητα αντιστράφηκε η σειρά την οποία ακολουθούσαν μέχρι τώρα οι μαθητές. Αυτή ήταν να δίνεται ο τύπος, να δημιουργείται πίνακας τιμών, ώστε να βρεθούν κάποια ζεύγη τιμών, και σύμφωνα με αυτά να σχεδιάζεται η γραφική παράσταση. Η ανατροπή αυτής της σειράς φάνηκε να καταρρίπτει κάποια πράγματα στη σκέψη των παιδιών, αφού οι μαθητές της δεύτερης ομάδας διαπίστωσαν: *«Ααα, δεν είναι απαραίτητο δηλαδή να κάνουμε και πίνακα τιμών; Δεν είναι λάθος;»*, ενώ ο Γιώργος είπε: *«Νόμιζα ότι δεν κάνουμε πίνακα τιμών όταν μπορούμε να το κάνουμε με το μυαλό. Ότι παραλείπουμε βήμα δηλαδή»* και η Ελένη είπε: *«Το ήξερα ότι δεν είναι απαραίτητος ο πίνακας, αλλά δεν σκέφτηκα ότι μπορούμε να τον φτιάξουμε από το διάγραμμα»*.

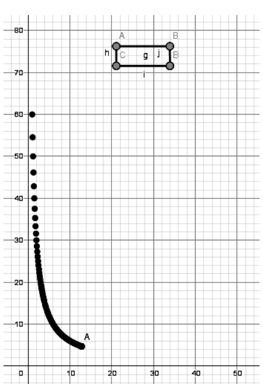
Μια άλλη δραστηριότητα με την οποία κλήθηκαν οι μαθητές να ασχοληθούν ήταν η εύρεση των διαστάσεων ορθογωνίου με εμβαδόν 60. Για τον σκοπό αυτό σχεδιάστηκε ένα παραλληλόγραμμο, οι διαστάσεις των πλευρών του οποίου έπαιρναν τις τιμές των συντεταγμένων ενός συγκεκριμένου σημείου Α. Με τη βοήθεια ενός δρομέα, οι τιμές του οποίου αντιστοιχούσαν στην τετμημένη του σημείου Α και δυναμικά επέφεραν αντίστοιχες αλλαγές στην τεταγμένη του (η σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές είναι y=60/x), επιτεύχθηκε η κίνηση του σημείου στο επίπεδο αφήνοντας το ίχνος του και προδίδοντας την πορεία που ακολουθούσε, σχηματίζοντας την υπερβολή (εικόνα 4). Οι αλλαγές στις τιμές των συντεταγμένων του σημείου Α επέφεραν παράλληλη αλλαγή στις διαστάσεις των πλευρών του ορθογωνίου, διατηρώντας σταθερό το εμβαδόν του (εικόνες 5 και 6). Οι τιμές καταγραφόταν και σε πίνακα σε υπολογιστικό φύλλο δεξιά, ώστε να γίνει η σύνδεση με τον πίνακα τιμών. Έπειτα από συζήτηση βρέθηκε και ο τύπος από τους μαθητές και σχεδιάστηκε η γραφική παράσταση.



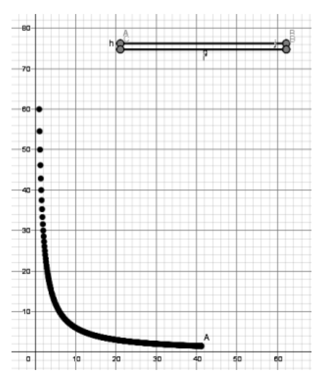
	A	B
1	x(A)	y(A)
2	1.1	54.55
3	1.2	50
4	1.3	46.15
5	1.4	42.86
6	1.5	40
7	1.6	37.5
8	1.7	35.29
9	1.8	33.33
10	1.9	31.58
11	2	30
12	2.1	28.57
13	2.2	27.27
14	2.3	26.09
15	2.4	25
16	2.5	24
17	2.6	23.08
18	2.7	22.22
19	2.8	21.43
20	2.9	20.69
21	3	20
22	3.1	19.35
23	3.2	18.75

Εικόνα 4

Για αρκετή ώρα οι μαθητές κινούσαν τον δρομέα και παρατηρούσαν τις αλλαγές που συνέβαιναν. Στη συνέχεια, τους έγιναν κάποιες ερωτήσεις, ώστε να έχουν την ευκαιρία να πειραματιστούν με το συγκεκριμένο περιβάλλον. Έτσι, ρωτήθηκαν πότε το παραλληλόγραμμο θα γίνει τετράγωνο. Έπειτα από πειραματισμούς και δοκιμές με τη βοήθεια του δρομέα, ανέτρεξαν στον πίνακα τιμών και παρατήρησαν ότι οι τιμές δεν είναι ρητοί αριθμοί. Έτσι, αξιοποίησαν τον τύπο, όπου στη θέση του x έβαλαν το γράμμα y. Λύνοντας την εξίσωση, κατέληξαν ότι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο είναι το τετράγωνο πλευράς 2√15.



Εικόνα 5



Εικόνα 6

Η πρώτη δραστηριότητα αποσκοπούσε κυρίως στον διαχωρισμό των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, δηλαδή στην απαγκίστρωση του καθενός από τους υπόλοιπους. Η δεύτερη, παρ' όλο που οι μαθητές δεν επενέβησαν ιδιαίτερα στο στήσιμό της, έγινε με σκοπό να τονιστεί η σύνδεση και η αλληλοσυμπλήρωση του ενός με τον άλλο, μέσα από τη δυναμική που προσέφερε το λογισμικό, ώστε να νοηματοδοτηθεί η ύπαρξη του καθενός, αλλά και των πολλών διαφορετικών. Ακόμη, συζητήθηκε ότι το είδος της γραμμής που προκύπτει κάθε φορά καθορίζεται από τη σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Μέσα από τα σχόλια των μαθητών όταν μοιράστηκαν εκ νέου τα ερωτηματολόγια για διόρθωση, φάνηκε να συγκλίνουν όλοι στην άποψη ότι η εννοιολογική κατανόηση καθιστά ευκολότερη τη διαχείριση των ασκήσεων. Έτσι, η Ελένη δήλωσε ότι *«Είναι πιο ενδιαφέρον να ξέρεις γιατί γίνεται κάτι και όχι απλά να ξέρεις να το κάνεις γιατί έτσι έμαθες»*, ενώ ο Γιώργος είπε *«Αχ, τώρα καταλαβαίνω τι βλακείες έκανα!* (αναφερόμενος κυρίως στο «ανά ώρα») *Μου φάνηκαν και δύσκολα στην αρχή!»*. Επίσης, οι μαθητές της δεύτερης ομάδας είπαν: *«Τώρα είναι πιο εύκολο. Σκέφτομαι πάλι τι μπορεί να είναι το x και το y, αλλά χωρίς πίνακα, στο περίπου»*. Συγκεκριμένα, ο Κώστας είπε: *«Για παράδειγμα, στο y=4x τα νούμερα πάνε 4, 8, 12… Εννοώ για το y. Άρα είναι ευθεία. Είναι όπως αυτό που κάναμε με το 3x* (την περίμετρο του ισοπλεύρου τριγώνου). *Εδώ, στην* $y=x^2+4$*, το y πάει όπως να' ναι. Εννοώ δεν θα είναι ευθεία»*. Μέσα από τα σχόλιά τους γίνεται φανερό ότι άρχισαν να κατανοούν ότι η σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών είναι αυτή που καθορίζει τη μορφή της γραφικής παράστασης και ότι ο τύπος φανερώνει τη σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση του λογισμικού GeoGebra φάνηκε να βοηθάει τους μαθητές να εστιάσουν την προσοχή τους στις ιδέες που μελετώνται. Αφενός, αυτό επιτεύχθηκε με την ακρίβεια που προσέφερε στην εύρεση τιμών στο επίπεδο, ελαχιστοποιώντας τις παρανοήσεις που προκύπτουν από τυχόν ανακρίβειες στο σχήμα. Αφετέρου, ενισχύθηκε με την άμεση απόδοση του γραφήματος δεδομένου τύπου που συνέβαλε σημαντικά στο να εξυπηρετηθούν οι σκοποί της άσκησης και να μην αναλωθούν οι μαθητές στον σχεδιασμό του (Kaput, Noss & Hoyles, 2002). Ουσιαστικά, το δυναμικό περιβάλλον αποφορτίζει τα παιδιά από το βάρος του «πώς θα σχεδιάσω το σχήμα», ενώ παράλληλα τους δίνει το έδαφος για πειραματισμούς.

Όλα τα παραπάνω μάλιστα επαυξάνονται σε περιπτώσεις όπως η συγκεκριμένη, όπου οι μαθητές έχουν ήδη κάποιες γνώσεις και οι νέες παραστάσεις έρχονται να συμπληρώσουν ή να μετασχηματίσουν τις παλιές. Επομένως, μέσα από έναν απλό και διασκεδαστικό για τους μαθητές τρόπο, το λογισμικό μπορεί να μεσολαβήσει μεταξύ των ήδη κατακτημένων γνώσεων και των νέων, επιτρέποντάς τους να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία μάθησης (Hohenwarter, 2004).

Επίσης, φαίνεται ότι η εννοιολογική κατανόηση της ίδιας της έννοιας και της συμβολικής γλώσσας που τη διέπει αποτελεί βασική προϋπόθεση για την κατανόηση και την διαχείριση των αναπαραστάσεών της και των ιδιοτήτων τους

(Christou, Pitta-Pantazi & Zachariades, 2005, Even, 1998), συνεπώς και για την μετάβαση από μια αναπαράσταση σε μια άλλη. Ωστόσο, η χρήση του λογισμικού δεν έρχεται να ανατρέψει το ισχύον σύστημα αναφορικά με τη διδασκαλία των συναρτήσεων. Αντίθετα, μέσα από απλές δραστηριότητες, οι οποίες δεν απαιτούν ιδιαίτερες γνώσεις σχετικά με τη χρήση του λογισμικού, μπορούν να αναδειχθούν ιδέες και να λειτουργήσει συμπληρωματικά, ώστε αποδοθούν διαφορετικά έννοιες και διαδικασίες, οι οποίες περιορίζονται με μη δυναμικά περιβάλλοντα και να ενισχυθεί η εκπαιδευτική διαδικασία.

Στο σημείο αυτό, δεν πρέπει να λησμονείται ότι η χρήση των νέων τεχνολογιών και η ενσωμάτωσή τους στην σχολική πραγματικότητα δεν αποτελεί από μόνη της ικανή συνθήκη η οποία θα επιφέρει ουσιαστικές αλλαγές στην εκπαιδευτική διαδικασία και στη μάθηση των μαθηματικών. Εξάλλου, σύμφωνα με τον Fuchs (1989), η χρήση των λογισμικών δεν έρχεται να καταρρίψει τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Αντίθετα, έρχεται να ενσωματωθεί σε αυτόν και να τον εμπλουτίσει, ώστε να ενισχυθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, C., Pitta-Pantazi, D., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2005). The embodied, proceptual, and formal worlds in the context of functions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5(2)*, 241-252.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5(3)*, 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, 105-121.

Fuchs, K. J. (1989). Computer im Geometrisch—Zeichenunterricht Integrieren statt Ersetzen. In *Informatik und Schule 1989: Zukunftsperspektiven der Informatik für Schule und Ausbildung* (pp. 334-339). Springer, Berlin, Heidelberg.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, 123-134.

Hohenwarter, M. (2002). *Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene* (Doctoral dissertation, master thesis. Salzburg: Paris Lodron University).

Hohenwarter, M. (2004). Dynamische Mathematik mit GeoGebra. *PM Praxis der Mathematik in der Schule 46 (6), S. 293, 295*.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *27*(3), 126-131.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J., Noss, R., & Hoyles, C. (2002). Developing new notations for a learnable mathematics in the computational era. *Handbook of international research in mathematics education*, 51-75.

Markovits, Z., Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 18-28.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc..

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 1-36.

Sfard, A., & McClain, K. (2002). Guest editor's introduction: Analyzing tools: Perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *Journal of the Learning Sciences*, *11*(2-3), 153-161.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΣΥΜΒΑΛΛΟΥΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΗΣ TIMSS

Ελένη Δημοσθένους, Κωνσταντίνος Χρίστου, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

Πανεπιστήμιο Κύπρου

edemos03@ucy.ac.cy; edchrist@ucy.ac.cy; dpitta@ucy.ac.cy

Σκοπός της μελέτης είναι η διερεύνηση παραγόντων, οι οποίοι επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών Δ' τάξης στην Κύπρο, μέσω πολυεπίπεδης ανάλυσης χρησιμοποιώντας δεδομένα από τη διεθνή έρευνα TIMSS 2015. Σε επίπεδο μαθητή, εξετάσαμε το φύλο, την αυτοπεποίθηση των μαθητών και το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι. Σε επίπεδο τάξης, εξετάσαμε την αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού και σε επίπεδο σχολείου, την έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία. Τα αποτελέσματα τονίζουν τη σημαντικότητα της αυτοπεποίθησης του μαθητή και του εκπαιδευτικού, και του κοινού στόχου για μάθηση από το σπίτι και το σχολείο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλές μελέτες διερευνούν διαφορετικά μοντέλα για να εξηγήσουν τους παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών, όπως προσωπικούς, οικογενειακούς, κοινωνικούς ή εκπαιδευτικούς. Ο Walberg (1984) έδωσε έμφαση στη σχέση σχολικών παραγόντων και κοινωνικο-περιβαλλοντικών παραγόντων με τα μαθησιακά αποτελέσματα. Οι Koutsoulis και Campbell (2001) αναφέρθηκαν επιπρόσθετα σε παράγοντες που σχετίζονται με το οικογενειακό υπόβαθρο, τη γονεϊκή υποστήριξη και τα κίνητρα των μαθητών, όπως η στάση απέναντι στο σχολείο. Η βιβλιογραφία δείχνει ότι όλοι αυτοί οι παράγοντες έχουν άμεσες και έμμεσες επιπτώσεις στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά.

Στην παρούσα μελέτη διερευνήθηκαν παράγοντες που επιδρούν στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά στην Κύπρο σε επίπεδο μαθητή, τάξης και σχολείου. Εξετάστηκαν διάφοροι παράγοντες και παρουσιάζονται οι μεταβλητές που αφορούν το φύλο, το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι και την αυτοπεποίθηση των μαθητών σε επίπεδο μαθητή. Εξετάστηκε επίσης η αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού και η έμφαση του σχολείου στην ακαδημαϊκή επιτυχία. Η ανάλυση έγινε μέσω της Ιεραρχικής Γραμμικής Μοντελοποίησης (HLM), χρησιμοποιώντας τη βάση δεδομένων της Κύπρου για την Δ' τάξη από τη διεθνή έρευνα TIMSS 2015.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Διάφοροι ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την ανάλυση μεταβλητών της TIMSS είτε παρατηρώντας τι συμβαίνει εντός μιας χώρας είτε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα ανάμεσα σε διαφορετικές χώρες (e.g., Kadijevich, 2006; Wiberg, 2019). Μελέτες που αφορούν τα αποτελέσματα των μαθητών της Κύπρου είναι περιορισμένες και ειδικότερα μελέτες που συνδυάζουν το υπόβαθρο του μαθητή με τα συναισθήματα του εκπαιδευτικού και το σχολικό περιβάλλον δεν έχουν εντοπιστεί στη βιβλιογραφία.

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι γονείς με υψηλό κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο και επίπεδο εκπαίδευσης είναι σε θέση να παρέχουν στα παιδιά τους υψηλής ποιότητας μέσα για να τα ενθαρρύνουν στις διάφορες μαθησιακές δραστηριότητες (Sandefur, Meier & Campbell, 2006). Ο Wiberg (2019) χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της TIMSS για τη Σουηδία, εντόπισε θετική σχέση ανάμεσα στον αριθμό των βιβλίων στο σπίτι και το επίπεδο εκπαίδευσης των γονέων με την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Σε χώρες με ψηλότερο εισόδημα, η επίδραση του οικογενειακού περιβάλλοντος είναι ακόμη μεγαλύτερη (Ilie & Lietz, 2010).

Το φύλο του μαθητή είναι μια άλλη μεταβλητή, η οποία επηρεάζει τη μαθηματική επίδοση. Παραδοσιακά, τα αγόρια επιτυγχάνουν καλύτερα από τα κορίτσια με τη διαφορά να αυξάνεται μεταξύ τους καθώς προχωρούν από την 6η τάξη δημοτικού στην 3η λυκείου (Fennema & Sherman, 1978). Πιο πρόσφατες έρευνες έχουν δείξει ότι η επίδοση δεν διαφοροποιείται ανάλογα με το φύλο αλλά οφείλεται στα διαφορετικά κινήτρα που έχουν τα αγόρια και τα κορίτσια (e.g., Sewasew, Schroeders, Schiefer, Weirich & Artelt, 2018).

Τα κίνητρα αποτελούν μέρος της μελέτης των συναισθηματικών παραγόντων. Εντός του εκπαιδευτικού συστήματος, οι συναισθηματικοί παράγοντες θεωρούνται συνήθως είτε ως ατομικές νοητικές διαδικασίες είτε ως πτυχές της κοινωνικής αλληλεπίδρασης και δομής (Hannula, 2012). Ιδιαίτερα, η αυτοπεποίθηση και τα κίνητρα των μαθητών έχουν θετική αλληλεπίδραση με τη μάθηση των μαθηματικών (Ma & Kishor, 1997). Η αυτοπεποίθηση αναφέρεται στη γνώση ή πεποίθηση ότι κάποιος μπορεί να μάθει να κάνει αυτό που αναμένεται. Ο Kadijevich (2006) έχει χρησιμοποιήσει δεδομένα της TIMSS 2003 από 33 χώρες και έχει εντοπίσει τη σημαντικότητα της αυτοπεποίθησης του μαθητή. Συγκεκριμένα, τα αγόρια τείνουν να έχουν υψηλότερη αυτοπεποίθηση από τα κορίτσια (Hannula, Maijala, Pehkonen & Nurmi, 2005). Στα πρώτα σχολικά χρόνια φαίνεται ότι η αιτιώδης σχέση είναι από την επίδοση στην αυτοπεποίθηση ενώ από την πέμπτη τάξη και έπειτα η αιτιώδης σχέση είναι από την αυτοπεποίθηση στην επίδοση (Hannula, Maijala & Pehkonen, 2004).

Περαιτέρω, μελέτες εισηγούνται ότι οι εκπαιδευτικοί με υψηλή αυτοπεποίθηση βοηθούν στην ανάπτυξη μαθητών με μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση (Pajares, 2005). Η αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών είναι ένας άλλος παράγοντας, ο οποίος σχετίζεται με την αποτελεσματικότητα τους και κατά συνέπεια με την μάθηση των μαθητών (Beswick, Callingham, & Watson, 2012). Φάνηκε ότι καθορίζει τη δημιουργία περιβάλλοντων μάθησης, στα οποία η εμπλοκή των μαθητών ξεπερνά τη χρησιμοθηρική μάθηση των μαθηματικών (Beswick et al., 2012). Επίσης, η ικανότητα των εκπαιδευτικών να προσαρμόζουν τις μαθηματικές ιδέες βασιζόταν στην καλή γνώση του περιεχομένου των μαθηματικών και στην αξιοποίηση των συνδέσεων ανάμεσα στις μαθηματικές ιδέες. Άρα, η αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών φαίνεται να συνδέεται με τη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση (Beswick et al., 2012). Επίσης, οι εκπαιδευτικοί έχουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης και των κινήτρων των μαθητών δημιουργώντας περιβάλλον μάθησης, το οποίο παρέχει υποστήριξη, καθοδήγηση και θετική ανατροφοδότηση (Ryan & Deci, 2000).

Οι εκπαιδευτικές φιλοδοξίες των γονέων για τα παιδιά τους και η συνεργασία με το σχολείο σχετίζονται με την αυτοπεποίθηση των μαθητών και την ακαδημαϊκή τους επίδοση (Fan & Williams, 2010). Η στήριξη από τους γονείς φάνηκε να επιδρά θετικά και στην ανάπτυξη κινήτρων μάθησης (Koutsoulis & Campbell, 2001). Η επίδραση αυτή στην επίδοση των μαθητών, έχει επίσης διαφανεί από τα δεδομένα της TIMSS για τα Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα (Badri, 2018). Οι ευκαιρίες μάθησης, σε συνδυασμό με υψηλές προσδοκίες και τη συνεχή γονεϊκή υποστήριξη, συνδέονται θετικά με την επίδοση των μαθητών (Catsambis, 2001). Αξίζει να αναφερθεί ότι η ευθύνη των γονέων στο να καθορίσουν την ακαδημαϊκή επίδοση των μαθητών διαφοροποιείται ανάλογα με την κουλτούρα της κάθε χώρας (Hong & Ho, 2005).

Αν υπάρχουν κοινές προτεραιότητες και φιλοδοξίες από τους μαθητές, γονείς και εκπαιδευτικούς με έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία, τότε οι μαθητές επιτυγχάνουν καλύτερα (Martin, Foy, Mullis, & O'Dwyer, 2013). Η έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία εμφανίζεται και ως ακαδημαϊκή πίεση ή «από κοινού αποτελεσματικότητα» (collective efficacy) (e.g. McGuigan & Hoy, 2006). Μερικοί ερευνητές επικεντρώνονται στην επιθυμία των μαθητών να επιτύχουν και τις προσδοκίες των εκπαιδευτικών ενώ άλλοι στην πίεση που νιώθουν οι μαθητές από εκπαιδευτικούς και γονείς.

Σκοπός

Η παρούσα μελέτη διερευνά την επίδραση παραγόντων στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά στο Κυπριακό εκπαιδευτικό σύστημα αξιοποιώντας δεδομένα της TIMSS 2015. Συγκεκριμένα, η επιλογή των παραγόντων στόχευε στη διερεύνηση του φύλου και της αυτοπεποίθησης του μαθητή, του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στο σπίτι, της αυτοπεποίθησης του εκπαιδευτικού και της έμφασης στην ακαδημαϊκή επιτυχία από το σχολείο. Παρόλες τις έρευνες που έγιναν σε άλλα εκπαιδευτικά συστήματα, στο κυπριακό εκπαιδευτικό σύστημα δεν έχει διερευνηθεί η πιο πάνω σύνθεση παραγόντων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πηγή δεδομένων και Δείγμα

Στην παρούσα μελέτη, τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν μέσω του ερωτηματολογίου των μαθητών, του ερωτηματολογίου του δασκάλου, του ερωτηματολογίου του διευθυντή του σχολείου και του μαθηματικού τεστ από τη διεθνή βάση δεδομένων της Κύπρου TIMSS 2015 για τους μαθητές της Δ' τάξης (https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-database/). Το δείγμα περιλαμβάνει 2018 μαθητές, 135 τάξεις και 114 σχολεία.

Το μαθηματικό τεστ αποτελείτο από έργα σχετικά με αριθμούς, άλγεβρα, γεωμετρία, μέτρηση και στατιστική. Το ερωτηματολόγιο των μαθητών αναφέρεται στις βασικές δημογραφικές πληροφορίες, στο περιβάλλον στο σπίτι και στη στάση απέναντι στα μαθηματικά. Το ερωτηματολόγιο της τάξης συμπληρώθηκε από τον εκπαιδευτικό και αναφερόταν στις διδακτικές πρακτικές, στην αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού, στις προκλήσεις και τα μέσα διδασκαλίας. Το ερωτηματολόγιο του σχολείου συμπληρώθηκε από τον διευθυντή και αφορούσε τα χαρακτηριστικά του σχολείου, τους πόρους και την τεχνολογία, τη συμμετοχή των γονέων, το σχολικό κλίμα για μάθηση, τον ρόλο της ηγεσίας και τη σχολική ετοιμότητα.

Ανάλυση Δεδομένων

Αξιοποιήθηκε η πολυεπίπεδη ανάλυση σε τρία επίπεδα (μαθητή, τάξης, σχολείου) χρησιμοποιώντας το λογισμικό HLM. Η εξαρτημένη μεταβλητή ήταν η επίδοση στο μαθηματικό τεστ, όπως υπολογίστηκε από την έρευνα TIMSS. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα του κάθε μαθητή ξεχωριστά στα έργα γνώσης, εφαρμογής και συλλογισμού.

Στο Επίπεδο 1 χρησιμοποιήθηκαν οι εξής μεταβλητές: (α) το φύλο μαθητή, (β) η αυτοπεποίθηση του μαθητή και (γ) το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι. Ελέχθηκε επίσης η αλληλεπίδραση των τριών μεταβλητών. Στο Επίπεδο 2 χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή σχετικά με την αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού. Ελέχθηκε η αλληλεπίδραση ανάμεσα στην αυτοπεποίθηση του μαθητή (Επίπεδο 1) και στην αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού (Επίπεδο 2). Στο Επίπεδο 3 αξιοποιήθηκε η μεταβλητή που αφορά την έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία, σύμφωνα με τις απαντήσεις του διευθυντή του σχολείου.

Η περιγραφή των ανεξάρτητων μεταβλητών παρουσιάζεται στον Πίνακα 1. Αξιοποιήθηκαν οι δείκτες που αφορούν την αυτοπεποίθηση των μαθητών, το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι και την έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία, όπως υπολογίστηκαν από την TIMSS 2015. Οι ερωτήσεις που εμφανίζονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα είχαν ομαδοποιήθηκαν σε ένα παράγοντα, ο οποίος εμφανίζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα. Η αυτοπεποίθηση του μαθητή αφορούσε τη στάση και τα συναισθήματα του όταν ασχολείται με μαθηματικές δραστηριότητες. Το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι έχει συνυπολογιστεί από τον αριθμό των βιβλίων στο σπίτι, την μόρφωση και το επάγγελμα των γονιών. Η έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία έχει υπολογιστεί με βάση τις απαντήσεις της διεύθυνσης του σχολείου σχετικά με τις ικανότητες των εκπαιδευτικών να επιτευχθούν οι ακαδημαϊκοί στόχοι, τα κίνητρα και τη στάση των μαθητών στη μάθηση και το ρόλο των γονέων στη σχολική ζωή. Στη συνέχεια, με αντίστοιχο τρόπο υπολογίστηκε η μεταβλητή για την αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών αξιοποιώντας ερωτήσεις για το πόσο ικανοί νιώθουν να διδάξουν αποτελεσματικά το μάθημα των μαθηματικών.

Επίπεδο 1 Μαθητή	
Αυτοπεποίθηση στα μαθηματικά	Σε ποιο βαθμό συμφωνείς με τα πιο κάτω; (1) Συνήθως τα πηγαίνω καλά στα μαθηματικά (2) Τα μαθηματικά είναι πιο δύσκολα για μένα από άλλους μαθητές (3) Δεν είμαι καλός/ή στα μαθηματικά (4) Μαθαίνω γρήγορα στα μαθηματικά

	(5) Τα μαθηματικά μου προκαλούν άγχος (6) Είμαι καλός/ή στο να επιλύω δύσκολα μαθηματικά προβλήματα (7) Ο/Η δάσκαλος/α μου λέει ότι είμαι καλός/ή στα μαθηματικά (8) Τα μαθηματικά είναι πιο δύσκολα για μένα από άλλα μαθήματα (9) Τα μαθηματικά με μπερδεύουν [1=Υψηλή αυτοπεποίθηση, 2=Αυτοπεποίθηση, 3=Χαμηλή αυτοπεποίθηση]
Εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι	(1) Αριθμός βιβλίων στο σπίτι (2) Αριθμός παιδικών βιβλίων στο σπίτι (3) Αριθμός βοηθημάτων στο σπίτι (π.χ. σύνδεση στο διαδίκτυο) (4) Επίπεδο μόρφωσης γονέων (5) Επαγγελματική ενασχόληση γονέων [1=Πολλοί εκπαιδευτικοί πόροι, 2=Μερικοί εκπαιδευτικοί πόροι, 3=Λίγοι εκπαιδευτικοί πόροι]
Φύλο	1=Κορίτσι, 2=Αγόρι
Επίπεδο 2 Τάξης	
Αυτοπεποίθηση εκπαιδευτικού	Στη διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη, σε ποιο βαθμό νιώθεις αυτοπεποίθηση για τα πιο κάτω; (1) Εμπνέω τους μαθητές να μάθουν μαθηματικά (2) Δείχνω στους μαθητές διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων (3) Παρέχω κατάλληλα έργα για τους μαθητές ψηλού επιπέδου (4) Προσαρμόζω τη διδασκαλία μου για να διατηρώ το ενδιαφέρον τους (5) Βοηθώ τους μαθητές να εκτιμήσουν την αξία των μαθηματικών (6) Αξιολογώ την κατανόηση των μαθητών (7) Βελτιώνω την κατανόηση των μαθητών χαμηλού επιπέδου (8) Παρουσιάζω τα μαθηματικά με τρόπο που να κάνουν νόημα (9) Αναπτύσσω τις υψηλού επιπέδου ικανότητες σκέψης [1=Υψηλή αυτοπεποίθηση, 2=Αυτοπεποίθηση, 3=Χαμηλή

	αυτοπεποίθηση]
Επίπεδο 3 Σχολείου	
Έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία	Σε ποιο βαθμό θα χαρακτήριζες τα πιο κάτω στο σχολείο σου; (1) Η κατανόηση των εκπαιδευτικών για τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος (2) Ο βαθμός επιτυχίας των εκπαιδευτικών στην υλοποίηση του αναλυτικού προγράμματος (3) Οι προσδοκίες των εκπαιδευτικών για την επίδοση των μαθητών (4) Η συνεργασία των εκπαιδευτικών για να βελτιώσουν την επίδοση των μαθητών (5) Η ικανότητα των εκπαιδευτικών να εμπνέουν τους μαθητές (6) Η εμπλοκή των γονέων στις σχολικές δραστηριότητες (7) Η δέσμευση των γονέων να διασφαλίσουν ότι οι μαθητές είναι έτοιμοι να μάθουν (8) Οι προσδοκίες των γονέων για την επίδοση των μαθητών (9) Η πίεση των γονέων για να διατηρήσει το σχολείο υψηλό ακαδημαϊκό επίπεδο (10) Η επιθυμία των μαθητών να τα πηγαίνουν καλά στο σχολείο (11) Η ικανότητα των μαθητών να ανταποκρίνονται στους ακαδημαϊκούς στόχους του σχολείου (12) Η ικανότητα των μαθητών να επιτύχουν τους ακαδημαϊκούς στόχους του σχολείου (13) Ο σεβασμός των μαθητών για συμμαθητές τους που αριστεύουν στο σχολείο [1=Σε υψηλό βαθμό, 2=Σε μέτριο βαθμό, 3=Σε χαμηλό βαθμό]

Πίνακας 1. Ανεξάρτητες μεταβλητές

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των δεδομένων με τη χρήση τεχνικών πολυεπίπεδης ανάλυσης έδειξε αρχικά ότι οι μεταβλητές που αφορούν την αυτοπεποίθηση του μαθητή, το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι, την αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού και την έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία στο σχολείο αποτελούν θετικούς παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τις τιμές του κάθε συντελεστή, καθώς και το μέγεθος του τυπικού σφάλματος στην παρένθεση. Οι αρνητικές τιμές στους συντελεστές προκύπτουν λόγω της κωδικοποίησης των μεταβλητών, δίνοντας τον αριθμό 1 στο μέγιστο βαθμό και 3 στον ελάχιστο βαθμό.

	Μαθηματικά	**Γνώση**	**Εφαρμογή**	**Συλλογισμός**
Μέσος όρος επίδοσης	522.45 (2.40)*	517.90 (2.48)*	529.51 (2.67)*	519.14 (2.50)*
Επίπεδο 1				
Φύλο μαθητή	14.43 (8.35)	17.24 (7.58)*	14.00 (8.00)	12.31 (8.54)
Αυτοπεποίθηση μαθητή	-39.09 (10.18)*	-41.51 (10.89)*	-36.40 (10.92)*	-51.99 (12.54)*
Εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι	-37.51 (7.23)*	-39.90 (8.16)*	-40.44 (8.42)*	-51.07 (10.19)*
Αυτοπεποίθηση *Εκπαιδευτικό περιβάλλον	3.18 (4.18)	5.49 (4.67)	2.87 (4.65)	10.11 (5.75)
Φύλο *Αυτοπεποίθηση	-5.03 (4.46)	-6.43 (3.99)	-5.24 (4.45)	-8.24 (5.08)
Επίπεδο 2				
Αυτοπεποίθηση εκπαιδευτικού	-10.06 (3.40)*	-7.99 (3.89)*	-9.11 (3.65)*	-10.14 (3.82)*
Επίπεδο 3				
Έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία	-10.98 (4.70)*	-13.80 (4.96)*	-15.72 (5.36)*	-14.59 (5.05)*

*Τιμή p<.05

Πίνακας 2. Παράγοντες που συμβάλλουν στην επίδοση των μαθηματικών

Σε επίπεδο μαθητή, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο σπίτι (p<0.001) και η αυτοπεποίθηση του μαθητή (p=0.001) παίζουν σημαντικό ρόλο στην επίδοσή του στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στα έργα γνώσης, εφαρμογής και συλλογισμού. Η επίδραση της αυτοπεποίθησης του εκπαιδευτικού (p=0.004) και η έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία στο σχολικό περιβάλλον (p=0.026) είναι στατιστικά σημαντικοί παράγοντες αλλά προβλέπουν σε μικρότερο βαθμό την επίδοση των μαθητών σε σύγκριση με τις άλλες δύο μεταβλητές. Το φύλο του μαθητή (p=0.056) δεν έχει στατιστικά σημαντική επίδραση στη γενική επίδοση του μαθητή και στα έργα εφαρμογής και συλλογισμού. Φάνηκε όμως, ότι τα αγόρια έχουν υψηλότερη επίδοση από τα κορίτσια στα έργα που αξιολογούν τη γνώση ($\bar{x} = 517.9$). Η ανάλυση έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ της αυτοπεποίθησης του μαθητή και του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος στο σπίτι (p=0.531), και μεταξύ της αυτοπεποίθησης του μαθητή και του φύλου του μαθητή (p=0.211). Επιπλέον, ελέγξαμε την αλληλεπίδραση ανάμεσα στην αυτοπεποίθηση του μαθητή και την αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού, η οποία δεν ήταν στατιστικά σημαντική (p=0.489).

Φαίνεται ότι η παρουσία βιβλίων στο σπίτι δείχνει περιβάλλον με έμφαση στην ακαδημαϊκή επίδοση αλλά και γονείς που πιθανόν να ενδιαφέρονται για την επίδοση και ταυτόχρονα μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά τους. Ένα τέτοιο περιβάλλον επιδρά θετικά στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά (p<0.001) όμως δεν φαίνεται να αλληλεπιδρά με την αυτοπεποίθηση του μαθητή (p=0.460).

Ο σημαντικός ρόλος της αυτοπεποίθησης του μαθητή έχει φανεί και στα δεδομένα των μαθητών της Κύπρου. Τα αποτελέσματα τονίζουν τη σημασία της ενίσχυσης της αυτοπεποίθησης του μαθητή τόσο στο σχολείο όσο και στο σπίτι. Η διδασκαλία στην τάξη θα μπορούσε να αξιοποιεί και δραστηριότητες όπου όλοι μαθητές μπορούν να νιώσουν ικανοί στα μαθηματικά, να δίνεται έμφαση στην θετική ανατροφοδότηση και να αναπτύσσεται περιβάλλον που ενθαρρύνει και σέβεται τους μαθητές. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι χρειάζεται να ενισχύεται και η αυτοπεποίθηση του εκπαιδευτικού. Άρα αντίστοιχες ενέργειες μπορούν να λαμβάνουν χώρα από την διοίκηση του σχολείου.

Ιδιαίτερα σημαντική, είναι η αναφορά του διευθυντή για τις ικανότητες των εκπαιδευτικών του σχολείου και το τι πιστεύει ότι μπορούν κάνουν αλλά και η συνεργασία των γονέων με το σχολείο. Η εμπλοκή και το ενδιαφέρον των γονέων πιθανόν να προδιαθέτει θετικά τους μαθητές για το σχολείο και τη μάθηση. Επιπλέον, τα κίνητρα των μαθητών και οι στόχοι για επιτυχία δημιουργούν κλίμα μάθησης στο σχολικό περιβάλλον. Είναι σημαντικό να αναγνωριστεί ότι τα δεδομένα αυτά βασίζονται στις δηλώσεις του διευθυντή, το οποίο αποτελεί και περιορισμό στη συγκεκριμένη έρευνα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα έχουν δείξει ότι χρειάζεται να δοθεί έμφαση στην καλλιέργεια εκπαιδευτικού κλίματος τόσο στο σπίτι όσο και στο σχολείο αλλά και σε ενέργειες που θα ενισχύσουν την αυτοπεποίθηση του μαθητή και του εκπαιδευτικού. Οι θετικές στάσεις για τα μαθηματικά και οι κοινές αξίες για μάθηση υποστηρίζουν τη μάθηση των μαθηματικών. Χρειάζεται να διεξαχθούν περαιτέρω μελέτες στις οποίες θα μελετηθεί ξεχωριστά η επίδραση του ρόλου των γονέων και των εκπαιδευτικών στην επίδοση των μαθητών αλλά και παραγόντων που πιθανόν επηρεάζουν την ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης του μαθητή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Badri, M. (2018). School emphasis on academic success and TIMSS science/math achievements. *International Journal of Research in Education and Science, 5*(1), 176-189.

Beswick, K., Callingham, R., & Watson, J. (2012). The nature and development of middle school mathematics teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(2), 131-157.

Catsambis, S. (2001). Expanding knowledge of parental involvement in children's secondary education: connections with high school seniors' academic success. *Social Psychology of Education, 5*(2), 149-177.

Fan, W., & Williams, C.M. (2010). The effects of parental involvement on students' academic self-efficacy, engagement and intrinsic motivation. *Educational Psychology, 30*(1), 53-74.

Fennema, E.H., & Sherman, J.A. (1978). Sex-related differences in mathematics achievement and related factors: a further study. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(3), 189-203.

Hannula, M.S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 137-161.

Hannula, M.S., Maijala, H., Pehkonen, E., & Nurmi, A. (2005). Gender comparisons of pupils' self-confidence in mathematics learning. *Nordic Studies in Mathematics Education, 3-4*, 29-42.

Hannula, M.S., Maijala, H., & Pehkonen, E. (2004). Development of understanding and self-confidence in mathematics; grades 5–8. In M.J. Høines, & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, vol. 3 (pp. 17–24). Bergen: PME.

Hong, S., & Ho.H-Z. (2005). Direct and indirect longitudinal effects of parental involvement on student achievement: Second-order growth modelling across ethnic groups. *Journal of Educational Psychology, 97*, 32-42.

Ilie, S., & Lietz, P. (2010). School quality and student achievement in 21 European countries: The Heyneman-Loxley eff ect revisited. *IERI Monograph Series: Issues and Methodologies in Large-Scale Assessments, 3*, 57–84.

Kadijevich, D. (2006). Developing trustworthy TIMSS background measures: A case study on mathematics attitude. *The teaching of mathematics, 9*(2), 41-51.

Koutsoulis, M.K. & Campbell, J.R. (2001). Family processes affect students' motivation, and science and math achievement in Cypriot high schools. *Structural Equation Modeling: A multidisciplinary Journal, 8*(1), 108-127.

Ma, X., & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: a meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 26-47.

Martin, M. O., Foy, P., Mullis, I. V. S., & O'Dwyer, L. M. (2013). Effective schools in reading, mathematics, and science at fourth grade. In M. O. Martin & I. V. S. Mullis (Eds.), *TIMSS and PIRLS 2011: Relationships among reading, mathematics, and science achievement at the fourth grade – Implications for early learning* (pp. 109–178) .Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

McGuigan, L., & Hoy, W.K. (2006). Principal leadership: creating a culture of academic optimism to improve achievement for all students. *Leadership and policy in schools, 5*(3), 203-229.

Pajares, F. (2005). Gender differences in mathematics self-efficacy beliefs. In A.M.Gallagher and J.C. Kaufman (Eds.), *Gender differences in mathematics: an integrative psychological approach* (pp. 294-315). Cambridge: Cambridge University Press.

Ryan, R.M., & Deci, E.L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 54-67.

Sandefur, G.D., Meier, A., & Campbell, M. (2006). Family resources, social capital and college attendance. *Social Science Research, 35*, 525-553.

Sewasew, D., Shroeders, U., Schiefer, I.M., Weirich, S., & Artelt, C. (2018). Development of sex differences in math achievement, self-concept, and interest from grade 5 to 7. *Contemporary Educational Psychology, 54*, 55-65.

Walberg, H.J. (1984). Families as partners in educational productivity. *Phi Delta Kappan, 65*(6), 397-400.

Wiberg, M. (2019). The relationship between TIMSS mathematics achievements, grades, and national test scores. *Educational Inquiry.* doi: 10.1080/20004508.2019.1579626

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΜΕ ΨΗΦΙΑΚΑ ‘ΠΟΛΥΕΡΓΑΛΕΙΑ’ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ FUNCTION PROBE ΣΤΟ GEOGEBRA

Δημήτρης Διαμαντίδης[1], Ελισάβετ Καλογερία[2], Χρόνης Κυνηγός[3], Χρήστος Μάλλιαρης[1], Μάριος Σπάθης[4]

[1]2ο Πειρ/κό Γ/σιο Αθηνών, [2]3ο Γ/σιο Αργυρούπολης, Εργ. [3]Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΦΣ, ΕΚΠΑ, [4]Πειρ/κό ΓΕΛ Αγίων Αναργύρων

dimitrd@ppp.uoa.gr, ekaloger@math.uoa.gr, kynigos@ppp.uoa.gr, chrismalliaris@gmail.com, mspathis@gmail.com

Η παρούσα έρευνα εστιάζει στις σχεδιαστικές επιλογές μιας ομάδας έμπειρων εκπαιδευτικών, που κατασκευάζει στο Geogebra ένα νέο εργαλείο ώστε να προσομοιάζει χρηστικά και λειτουργικά στο εργαλείο «αυξομείωση» του Function Probe. Η ανάλυση των επιλογών αυτών ανέδειξε δυο διακριτές φάσεις της διαδικασίας σχεδιασμού, κατά τη διάρκεια των οποίων ενεργοποιούνται διαφορετικές μορφές γνώσης σε σχέση με το μοντέλο TPACK.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αφορμή για την εκπόνηση της παρούσας μελέτης αποτέλεσε το ανανεωμένο Πρόγραμμα Σπουδών της Επιμόρφωσης Επιμορφωτών για την παιδαγωγική αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, τα υποδειγματικά σενάρια με χρήση τριών κατηγοριών λογισμικών (Δυναμικής Γεωμετρίας: The Geometer’s Sketchpad / Cabri, Αλγεβρικών συστημάτων: Function Probe, Μοντελοποίησης: Modelus) αντικαταστάθηκαν με το πιο προσαρμοσμένο στις σύγχρονες τεχνολογικές εξελίξεις και ελεύθερης πρόσβασης Geogebra. Η αντικατάσταση αυτή που σηματοδοτεί τη μετάβαση από τα εξειδικευμένα για κάθε μαθηματική χρήση ψηφιακά εργαλεία, σε «πολυεργαλεία» ευρύτερης χρήσης, αποτελεί πρόκληση για τη μαθηματική εκπαίδευση και χρήζει περαιτέρω έρευνας. Πόσο απαραίτητα θεωρούνται τα εξειδικευμένα εργαλεία για τη διδασκαλία των Μαθηματικών και πώς μπορούν να κατασκευασθούν στο Geogebra; Ο εκπαιδευτικός-χρήστης του FP εξελίσσεται στον εκπαιδευτικό-σχεδιαστή με το Geogebra; Αυτή η εξέλιξη αφορά και γνωστικές πτυχές του εκπαιδευτικού, άρα μπορεί να συντελέσει στην επαγγελματική του ανάπτυξη; Με αφορμή αυτά τα ερωτήματα, η παρούσα εργασία εστιάζει σε μια πτυχή αυτής της μετάβασης, που αφορά την σύγκριση αναπαραστασιακών εργαλείων μεταξύ ενός «πολυεργαλείου» όπως το GeoGebra και ενός πιο εξειδικευμένου λογισμικού όπως το Function Probe (FP).

Το FP είναι ένα πολυαναπαραστασιακό λογισμικό με τρία αλληλο-συνδεδεμένα παράθυρα: «Πίνακας», «Γράφημα» και «Αριθμομηχανή». Τα γραφήματα μπορούν να παραχθούν με διάφορους τρόπους, π.χ. εισάγοντας ζεύγη (x, y) από έναν πίνακα (μπορούν να δημιουργηθούν στήλες "x" και "y"). Επίσης υπάρχει και το παράθυρο «Εργαλειοθήκη», που ένα από τα εργαλεία του είναι η «αυξομείωση». Επιλέγοντάς το, ο χρήστης μπορεί να προκαλέσει άμεσα και δυναμικά «οριζόντια» και «κατακόρυφη» παραμόρφωση στα γραφήματα των συναρτήσεων, που βρίσκονται στο παράθυρο «Γράφημα» (η λειτουργία περιγράφεται παρακάτω). Το συγκεκριμένο λογισμικό δεν λειτουργεί πλέον στα σύγχρονα λειτουργικά συστήματα και αντικαταστάτης του θεωρείται το Geogebra, ένα λογισμικό ανοικτού κώδικα που συνδυάζει τα βασικά χαρακτηριστικά των Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας (DGS) με αυτά των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας (CAS) με στόχο να γεφυρώσει κάποια κενά μεταξύ γεωμετρίας, άλγεβρας και λογισμού (http://www.geogebra.gr/joomla/).

Η έρευνά μας επικεντρώνεται στο εργαλείο «αυξομείωση» του FP που δεν υπάρχει στο Geogebra και στην προσπάθειά μας (ως μέλη της συγγραφικής-ερευνητικής ομάδας) να κατασκευάσουμε αντίστοιχο εργαλείο σε αυτό. Θελήσαμε να ερμηνεύσουμε τις σχεδιαστικές επιλογές μας κατά τη διαδικασία κατασκευής ενός τέτοιου εργαλείου, κυρίως σε σχέση με τις μορφές γνώσης που ενεργοποιούνται.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μελέτη του σχεδιασμού και κατασκευής του εργαλείου «αυξομείωσης» στο GeoGebra, υλοποιήθηκε μέσω του θεωρητικού δομήματος της «δημιουργίας εργαλείων» (instrumental genesis) (Vérillon & Rabardel, 1995) και του μοντέλου TPaCK (Mishra & Koehler, 2006). Το πρώτο αναφέρεται στην αλληλεπίδραση των ψηφιακών εργαλείων με τον εκπαιδευτικό που τα χρησιμοποιεί και τα τροποποιεί, ενώ το δεύτερο στην περιγραφή της γνώσης των εκπαιδευτικών που αξιοποιούν ψηφιακά μέσα.

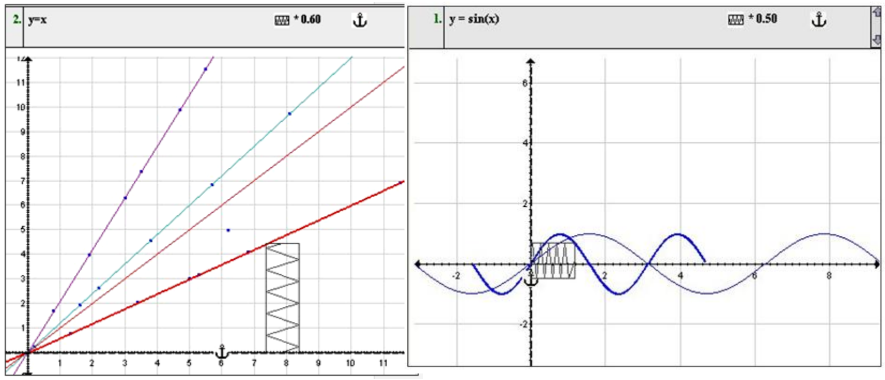
Οι Vérillon & Rabardel (1995) διαχώρισαν τα τεχνουργήματα (artifacts), που είναι προϊόντα ανθρώπινης δραστηριότητας, από τα εργαλεία, που είναι ατομικές κατασκευές, ανάμικτες οντότητες, φτιαγμένες από τεχνουργήματα και σχήματα χρήσης τους (schemes). Σύμφωνα με τον Vergnaud (2009), ως σχήμα ορίζεται η σταθερή οργάνωση μιας δραστηριότητας που έχει ολοκληρωθεί, η οποία ενσωματώνει γνώση και είναι δομημένη μέσω άτυπων εννοιών και κανόνων που διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Η διαδικασία μέσω της οποίας ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα μετατρέπεται σε εργαλείο περιγράφεται με τον όρο «δημιουργία εργαλείου» και περιλαμβάνει δυο εσωτερικές διεργασίες (Vérillon & Rabardel, 1995): (α) τη δημιουργία εργαλείου (instrumentation): αναφέρεται στο πώς το ίδιο το εργαλείο με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του χαράσσει τη δραστηριότητα του χρήστη και (β) την αλλοίωση εργαλείου (instrumentalisation): αναφέρεται στο πώς ο χρήστης παρεμβαίνει στο εργαλείο και ορίζει τρόπους χρήσης του. Στην εργασία μας θεωρούμε ως τεχνουργήματα την «αυξομείωση» του FP, τον δρομέα του GeoGebra και τις εφαρμογές που κατασκευάζονται σε αυτά τα περιβάλλοντα. Ταυτόχρονα όμως είναι και εργαλεία εφόσον ο χρήστης (μαθητής ή εκπαιδευτικός, ο δεύτερος στην περίπτωσή μας) τους αποδίδει μία χρήση.

Οι γνώσεις που απαιτούνται για την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδασκαλία περιγράφονται από το μοντέλο TPACK (Mishra & Koehler, 2006), το οποίο λαμβάνει υπόψη την αλληλεπίδραση μεταξύ περιεχομένου, παιδαγωγικής και τεχνολογίας: α) Η τεχνολογική γνώση (TK) αφορά τη γνώση σχετικά με τις τεχνικές πτυχές του λογισμικού. (β) Η τεχνολογική γνώση περιεχομένου (TCK) αναφέρεται στους τρόπους με τους οποίους η τεχνολογία μπορεί να αλληλοσυνδέεται με τη γνώση του αντικειμένου (των μαθηματικών εν προκειμένω). γ) Η τεχνολογική παιδαγωγική γνώση (TPK) περιγράφει μια ευρύτερη γνώση της τεχνολογίας σε σχέση με τις παιδαγωγικές στρατηγικές που επικεντρώνονται στη γνώση των εργαλείων και των λειτουργικοτήτων τους, καθώς και στην αλληλεξάρτηση μεταξύ ειδικών εργαλείων και δραστηριοτήτων. (δ) Η τεχνολογική παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (TPCK) περιγράφει μια αναδυόμενη μορφή γνώσης που απαιτεί κατανόηση των εννοιών, παιδαγωγικές τεχνικές για την επικοινωνία του μαθηματικού περιεχομένου με εποικοδομητικούς τρόπους, γνώση των δυσκολιών των μαθητών στην μάθηση συγκεκριμένων θεμάτων, γνώση της προηγούμενης γνώσης των μαθητών και πώς όλα τα παραπάνω μπορούν να απευθυνθούν με νέο τρόπο μέσω της χρήσης της τεχνολογίας. Η κατηγοριοποίηση των Mishra & Koehler μας χρησίμευσε στη σύνδεση των σχεδιαστικών επιλογών με τις γνώσεις που βρίσκονται πίσω από αυτές.

Υποθέτοντας ότι οι γνώσεις του εκπαιδευτικού - όπως αυτές περιγράφονται μέσω του μοντέλου TPACK – συνδέονται με τις σχεδιαστικές επιλογές καταλήξαμε στο παρακάτω ερευνητικό ερώτημα «*Ποιες γνώσεις του εκπαιδευτικού ενεργοποιούνται μέσα από τις σχεδιαστικές του επιλογές κατά τη διαδικασία δημιουργίας ενός συγκεκριμένου εργαλείου με το Geogebra*».

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης (Yin, 2014) η οποία εστιάζει στις σχεδιαστικές επιλογές της συγγραφικής - ερευνητικής ομάδας (τέσσερις έμπειροι καθηγητές Μαθηματικών, ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με την παιδαγωγική αξιοποίηση της τεχνολογίας στα Μαθηματικά) για την κατασκευή ενός εργαλείου τύπου «αυξομείωσης» στο GeoGebra. Ξεκινήσαμε από την υπόθεση ότι οι επιλογές της ομάδας καθοδηγούνταν από την κοινή, διαμορφωμένη κουλτούρα των μελών της, τα οποία συνεργάστηκαν για μεγάλο χρονικό διάστημα για την αναμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού του ΠΑΚΕ. Συνεπώς, η μεθοδολογική προσέγγιση είχε στοιχεία εθνογραφίας αφού οι ερευνητές ήταν μέλη της ομάδας, λειτουργώντας ως συμμετέχοντες παρατηρητές (Hammersley & Atkinson, 2010). Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι σημειώσεις από τις δια ζώσης συνομιλίες της ομάδας, τα κείμενα των εξ αποστάσεως ηλεκτρονικών συνομιλιών, καθώς και τα παραγόμενα ψηφιακά υλικά, στις διάφορες φάσεις τους μέχρι το τελικό προϊόν. Η περιγραφή των σχεδιαστικών επιλογών των εκπαιδευτικών βασίζεται στη χρονική αλληλουχία με την οποία παράχθηκαν τα δεδομένα μας. Οι επιλογές αυτές αναλύονται σε σχέση με τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων μορφών γνώσης του μοντέλου TPACK. Σημειώνουμε ότι αν και ο σχεδιασμός υλοποιήθηκε μέσω αλληλεπίδρασης των μελών της συγγραφικής-ερευνητικής ομάδας, στην παρούσα μελέτη εστιάζουμε στις σχεδιαστικές επιλογές ως αποτέλεσμα της συνεργασίας και όχι στην ίδια τη διαδικασία μέσα από την οποία προέκυψαν.



Εικόνα 1: Αριστερά κατακόρυφη - δεξιά οριζόντια παραμόρφωση

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ «ΑΥΞΟΜΕΙΩΣΗ» ΣΤΟ GEOGEBRA

Η αυθεντική μορφή της «αυξομείωσης»

Επιλέγοντάς την «αυξομείωση» ο χρήστης του FP μπορούσε μέσω κουμπιών τα οποία απεικόνιζαν ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο ελατήριο να παραμορφώσει αντίστοιχα το γράφημα της συνάρτησης που εμφανιζόταν στο παράθυρο «Γράφημα». Η τιμή της κάθε «αυξομείωσης» εμφανιζόταν στην επάνω δεξιά γωνία του γραφήματος, με μορφή αριθμού. Ένα παράθυρο ιστορικού στο γράφημα επέτρεπε την προβολή των τύπων των μετασχηματισμένων συναρτήσεων και ο μαθητής έβλεπε στην οθόνη του (Εικ.1) τον αρχικό τύπο της συνάρτησης, τις τιμές της «αυξομείωσης» που αντιστοιχούσαν στις ‘μεταβολές’ λόγω της χρήσης των ελατηρίων και τις αλγεβρικές αλλαγές στις οποίες υπόκειται ο αρχικός τύπος της συνάρτησης.

Η χρήση αυτών των εργαλείων οδηγεί σε μετασχηματισμούς του αρχικού τύπου της συνάρτησης στις μορφές του πίνακα 1 (οι μετατροπές αυτές είναι εμφανέστερες σε περιοδική συνάρτηση).

Αρχικός τύπος	Νέος τύπος	Αποτέλεσμα «αυξομείωσης»
$y = f(x)$	$y = f\left(\frac{1}{\alpha}\cdot x\right)$	Οριζόντια κίνηση (παραμόρφωση)
$y = f(x)$	$y = \beta \cdot f(x)$	Κατακόρυφη κίνηση (παραμόρφωση)

Πίνακας 1: Μετασχηματισμοί του αρχικού τύπου της συνάρτησης

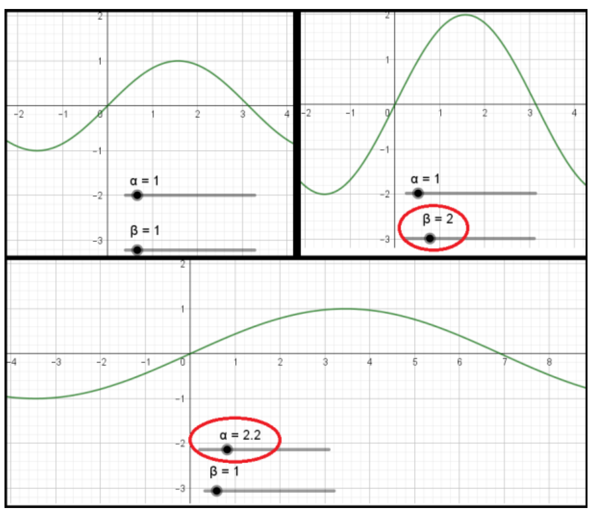
Από διδακτικής πλευράς η χρήση του εργαλείου ήταν διερευνητική. Ο μαθητής μπορούσε να εισάγει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης στο αντίστοιχο παράθυρο του FP και στη συνέχεια να την παραμορφώσει με την «αυξομείωση» ώστε π.χ. να την «ταιριάξει» με δοσμένα σημεία και να ανακαλύψει γραφικά ένα μαθηματικό μοντέλο πίσω από κάποια δεδομένα. Κάθε παραμόρφωση που προκαλούσε στην γραφική παράσταση αντιστοιχούσε σε κάποιον αλγεβρικό μετασχηματισμό του τύπου της συνάρτησης (Πίνακας 1), ωστόσο αυτός ο μετασχηματισμός δε φαινόταν ούτε ήταν μέρος του χειρισμού ή της διερεύνησης (τουλάχιστον σε αυτή τη φάση). Ο μαθητής που προκαλούσε μία παραμόρφωση στη γραφική παράσταση, δε χρειαζόταν να γνωρίζει την αντίστοιχη αλγεβρική αναπαράσταση που υλοποιούσε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό. Για παράδειγμα, αν προκαλούσε «κατακόρυφη» παραμόρφωση στη συνάρτηση ημx, δε χρειαζόταν να γνωρίζει ότι αλγεβρικά αυτό αντιστοιχούσε στην συνάρτηση β·ημx με μεταβλητό β. Η διερεύνηση γινόταν μόνο γραφικά και η εικόνα του εργαλείου (ελατήριο) είχε κιναισθητικό χαρακτήρα.

Η «αυξομείωση» στο GeoGebra ή «τεντώστρα»

Ξεκινώντας από το δεδομένο ότι στο Geogebra ο χειρισμός γίνεται πάντα μέσω δρομέων που βρίσκονται έξω από το σχήμα, η βασική ιδέα ήταν η δημιουργία ενός εργαλείου χειρισμού παρόμοιου με την «αυξομείωση» του FP για μία συγκεκριμένη συνάρτηση και στη συνέχεια η δημιουργία ενός εργαλείου γενικής χρήσης για πολλές συναρτήσεις. Έτσι, εισαγάγαμε δύο δρομείς α και β και στη συνέχεια τους χρησιμοποιήσαμε όπως στον πίνακα 1, στον τύπο της συνάρτησης της οποίας τη γραφική παράσταση θέλαμε να υποβάλλουμε σε παραμόρφωση τύπου «αυξομείωση» (στο εξής ΠΤΑ). Το χαρακτηριστικό του δρομέα που είχαμε σκοπό να εκμεταλλευτούμε ήταν αυτό του δυναμικού χειρισμού. Για παράδειγμα, για να υποβάλουμε σε ΠΤΑ τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημx εισαγάγαμε στη «γραμμή εισαγωγής» του GeoGebra την οικογένεια συναρτήσεων $f(x)=\beta\cdot \text{ημ}\left(\frac{1}{\alpha}x\right)$, με παραμέτρους α και β με αρχικές τιμές των δρομέων α=1 και β=1. Έτσι, στο παράθυρο των γραφικών αποτυπώνεται η γραφική παράσταση της ημx, ως στιγμιότυπο της παραπάνω οικογένειας. Με μετακίνηση του δρομέα α είχαμε οριζόντια ΠΤΑ, ενώ με μετακίνηση του δρομέα β είχαμε κατακόρυφη ΠΤΑ (Εικ. 2): όταν μεταβάλαμε δυναμικά το δρομέα β από την τιμή 1 στην τιμή 2, στο παράθυρο των γραφικών αποτυπώθηκε η δυναμική μεταβολή της γραφικής παράστασης από το στιγμιότυπο της ημx στο στιγμιότυπο της 2ημx, δίνοντας την αίσθηση της ζητούμενης παραμόρφωσης. Αντίστοιχα, ο χειρισμός του δρομέα α από την τιμή 1 στην τιμή 2,2 οδηγεί στη δυναμική μεταβολή της γραφικής παράστασης από το στιγμιότυπο της ημx στο στιγμιότυπο της $\text{ημ}\left(\frac{1}{2,2}x\right)$, ενώ ο χειρισμός και των δύο μεταβολέων οδηγεί σε μεικτή ΠΤΑ (και οριζόντια και κατακόρυφη). Για να υποβάλουμε άλλη συνάρτηση ΠΤΑ, θα έπρεπε να σβήσουμε τη γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης και να εισαγάγουμε τη νέα συνάρτηση στη γραμμή εισαγωγής, χρησιμοποιώντας καταλλήλως τις μεταβλητές α και β.

Συγκρίνοντας με το αυθεντικό εργαλείο «αυξομείωσης», παρατηρήσαμε ότι ο χρήστης του στο FP, όχι μόνο δε χρειαζόταν να ορίσει νέα συνάρτηση γράφοντας τον τύπο της για να ξαναχρησιμοποιήσει το εργαλείο, αλλά δεν χρειαζόταν καν να γνωρίζει το αλγεβρικό «μέρος» της παραπάνω διερεύνησης. Σε αυτό το σημείο αποφασίσαμε ότι θα έπρεπε να αρθεί κατά το δυνατόν αυτή τη διαφοροποίηση από την αυθεντική «αυξομείωση», γιατί θεωρήσαμε αλλάζει πολύ η διδακτική αξιοποίηση του εργαλείου.

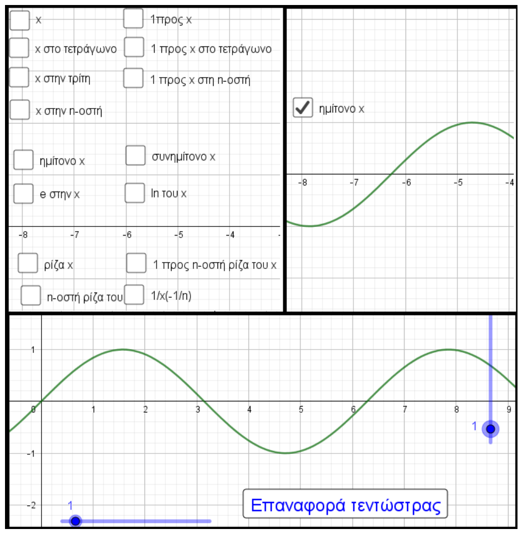
Αν η διερεύνηση για την κατάλληλη συνάρτηση γινόταν μέσω της αλγεβρικής αναπαράστασης, τότε αυτό προϋπέθετε κάποια ικανότητα χειρισμού αυτής της αναπαράστασης. Αντιθέτως, στο FP η «λογική» είναι να μπορεί να γίνει η διερεύνηση χωρίς να χρειάζεται ο μαθητής να χειριστεί την αλγεβρική αναπαράσταση. Αυτό ενισχύεται και από την εικόνα του ελατηρίου που χρησιμοποιείται στο FP η οποία παραπέμπει σε ένα περισσότερο χωρικό χαρακτηριστικό της γραφικής παράστασης (Εικ. 1). Σε αντίθεση με αυτό, η αναπαράσταση του δρομέα στο GeoGebra είναι ένας ολισθητής που παραπέμπει σε ποσοτική μεταβολή (Εικ. 2). Έτσι, αποφασίσθηκε η εισαγωγή όλων των συναρτήσεων που μελετάμε στη Β΄/θμια εκπαίδευση, χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές α και β με κατάλληλο τρόπο στους τύπους τους, ώστε να μπορεί να λειτουργήσει το εργαλείο «τύπου αυξομείωσης» στο GeoGebra, ή αλλιώς «τεντώστρα». Στη συνέχεια «κρύψαμε» τους τύπους τους και τοποθετήσαμε κατάλληλα κουμπιά επιλογής, ώστε να μπορεί ο χρήστης να επιλέξει ποια συνάρτηση θέλει να εμφανίσει. Επιπλέον, φροντίσαμε με χρήση εντολών Boolean (κρυφές για το χρήστη), όταν επιλέγει κανείς μία συνάρτηση, τα υπόλοιπα κουμπιά να εξαφανίζονται ώστε να υπάρχει «καθαρό» το παράθυρο των γραφικών. Όταν ο χρήστης αποεπιλέξει το κουτί επιλογής που είχε αρχικά επιλέξει, ξαναεμφανίζονται μπροστά του όλες οι δυνατές επιλογές για να διαλέξει την επόμενη συνάρτηση και να συνεχίσει τη διερεύνησή του (Εικ. 3).



Εικόνα 2: Κατακόρυφη και οριζόντια παραμόρφωση της ημx

Ένα ακόμα σημείο σύγκρισης με το FP ήταν ο προσανατολισμός των δρομέων του Geogebra σε σχέση με τα ελατήρια που στο FP είναι είτε οριζόντια είτε κατακόρυφα και μέσα στο σχήμα. Έτσι, ο δρομέας που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη ΠΤΑ τοποθετήθηκε κατακόρυφα ώστε να είναι περισσότερο συμβατή η κίνηση του ολισθητή με τη μεταβολή που προκαλεί στη συνάρτηση. Επίσης αφήσαμε εμφανή μόνο την τιμή του κάθε δρομέα και όχι τους συμβολισμούς α και β, που παραπέμπουν σε αλγεβρικό χειρισμό. Τέλος, προσθέσαμε το κουμπί «επαναφορά τεντώστρας», ώστε να μπορεί ο χρήστης να επαναφέρει τη γραφική παράσταση στην αρχική της θέση, χωρίς παραμορφώσεις. Το ίδιο συμβαίνει όταν ο χρήστης επιλέγει νέα συνάρτηση από το αντίστοιχο κουτί επιλογής. Στην Εικόνα 3, επάνω αριστερά φαίνονται τα κουτιά επιλογής, επάνω δεξιά με την επιλογή ενός κουτιού εμφανίζεται η γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης και κάτω οι δρομείς της «τεντώστρας» και το κουμπί «επαναφορά τεντώστρας».

Μια τελική σύγκριση των λειτουργικοτήτων των δύο εργαλείων δείχνει ότι η «τεντώστρα» δεν λειτουργεί ακριβώς όπως η «αυξομείωση» (οι περιορισμοί προκύπτουν από τα διαθέσιμα εργαλεία του GeoGebra και τον τρόπο που τα αξιοποιεί ο σχεδιαστής), αν και στο Geogebra μπορεί να δημιουργηθεί ένα φιλικό προς τον χρήστη περιβάλλον για χειρισμό-μετασχηματισμό των γραφημάτων οικογενειών συναρτήσεων. Ωστόσο ο δρομέας παραμένει «εκτός» του γραφήματος και δεν παρέχει τα κιναισθητικά χαρακτηριστικά μιας μεταβολής όπως τα ελατήρια του FP, οι παραμορφώσεις των οποίων συνδέονται άμεσα με το γράφημα.



Εικόνα 2: Κουμπιά επιλογής συνάρτησης και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις

Ανάλυση των σχεδιαστικών επιλογών

Η ανάλυση της διαδικασίας σχεδιασμού-δημιουργίας του νέου εργαλείου ανέδειξε δυο διακριτές φάσεις (όχι απαραίτητα με προτεραιότητα) στις οποίες ο εκπαιδευτικός-σχεδιαστής καλείται να λάβει αποφάσεις.

Α) Ερμηνεία της λειτουργίας και λειτουργικότητας του αυθεντικού εργαλείου: Αρχικά ερμηνεύει τη λειτουργία της «αυξομείωσης», με όρους αλγεβρικού συμβολισμού (Πίνακας 1), δηλαδή ενεργοποιώντας γνώσεις TCK. Στη συνέχεια μέσω του δυναμικού χειρισμού της «αυξομείωσης» και βλέποντάς την ως μέσο δράσης για τον χρήστη, φαίνεται να εντοπίζει τη λειτουργικότητα μίας συμμεταβολής που συντονίζει δύο χαρακτηριστικά: τη μορφή της γραφικής παράστασης και τη μορφή του ελατηρίου. Από την άλλη μεριά, στο δρομέα του GeoGebra, η συμμεταβολή συντονίζει λειτουργικά τη μορφή της γραφικής παράστασης και τη θέση ενός σημείου στον ολισθητή (Thompson & Carlson, 2017). Η συνειδητοποίηση αυτών των λειτουργικοτήτων (με κατεύθυνση από το εργαλείο προς τον χρήστη), οδηγεί στην βαθύτερη οικειοποίησή του εργαλείου (instrumentation), ώστε να μπορέσει στη συνέχεια να προχωρήσει στην επόμενη φάση.

Β) Μεταφορά λειτουργικοτήτων του αυθεντικού εργαλείου στον δρομέα του Geogebra: Ο σχεδιαστής έχοντας εντοπίσει την παραπάνω διαφορά, προσπαθεί να μεταφέρει στο δρομέα του GeoGebra το «νέο» σχήμα χρήσης. Θεωρούμε ότι η γνώση του σχεδιαστή που ενεργοποιείται παράλληλα με τον εντοπισμό αυτής της διαφοράς είναι η TPCK, καθώς η ερμηνεία του γίνεται με όρους διδακτικής προσέγγισης της λειτουργικότητας του εργαλείου με αναφορά (ρητή ή άρρητη) στην έννοια της συμμεταβολής. Για να μεταφέρει το νέο σχήμα χρήσης, ο σχεδιαστής αρχικά συνδέει την κίνηση του ολισθητή με την παραμόρφωση της γραφική παράστασης. Θεωρούμε ότι εδώ ενεργοποιείται η γνώση TCK, ώστε να γίνει λειτουργικό το νέο εργαλείο. Στη συνέχεια μετατρέπει τη διεπαφή του δρομέα (τον ολισθητή) έτσι ώστε οι εξωτερικές αναπαραστάσεις του να είναι πιο κοντά σε αυτό σχήμα (Norman, 1991): αλλάζει τις εξωτερικές ιδιότητές του δρομέα (από οριζόντιο σε κατακόρυφο, κρύβεται η ονομασία των μεταβλητών) και χρησιμοποιεί τις εσωτερικές αναπαραστάσεις του (συνάρτηση, μεταβλητές) ώστε ο χειρισμός του ολισθητή να προκαλεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Εδώ θεωρούμε ότι ενεργοποιούνται γνώσεις TPCK, καθώς το εργαλείο αρχίζει και μετατρέπεται σε διδακτικό, με το κρύψιμο κάποιων αλγεβρικών σημαινόντων, η επιλογή των οποίων έγινε με συνδυαστικά κριτήρια διδακτικής προσέγγισης και περιεχομένου, αναδεικνύοντας τη διαλεκτική σχέση μεταξύ σχεδιασμού και πιθανής δραστηριότητας υποθετικών μαθητών με το συγκεκριμένο εργαλείο (Kynigos & Psycharis, 2013). Τέλος, για να είναι πιο εργονομικό το νέο εργαλείο, ο σχεδιαστής προσθέτει λειτουργικότητες (κουτιά επιλογής, κουμπί επαναφοράς) που απαιτούν καλή γνώση των δυνατοτήτων του GeoGebra. Εδώ θεωρούμε ότι ενεργοποιούνται γνώσεις TPK. Οι διαδικασίες σχεδιασμού σε αυτή τη φάση έχουν κατεύθυνση από τον χρήστη προς το εργαλείο, καθώς προσπαθεί να του προσδώσει συγκεκριμένα μαθηματικά και διερευνητικά χαρακτηριστικά: Ο δρομέας παίρνει νέο σχήμα χρήσης, που προσαρμόζεται σε αυτό των ελατηρίων της «αυξομείωσης» (instrumentalization).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία σχεδιάσαμε και δημιουργήσαμε ένα νέο εργαλείο στο Geogebra που να «μοιάζει» με το εργαλείο «αυξομείωση» του FP και μέσα από την παρατήρηση της διαδικασίας σχεδιασμού καταγράψαμε τις διαστάσεις που συνδέονται με γνωστικές πτυχές του εκπαιδευτικού-σχεδιαστή. Η ανάλυση των φάσεων σχεδιασμού έδειξε ότι η μετάβαση από τα εξειδικευμένα μαθηματικά λογισμικά στα πολυεργαλεία είναι μια διαδικασία πολυεπίπεδη, καθώς κάποιες από τις λειτουργικότητες των πρώτων δεν υπάρχουν στα δεύτερα και η δημιουργία τους (στο μέτρο του δυνατού) ενεργοποιεί μια σειρά γνώσεων του εκπαιδευτικού-σχεδιαστή. Η αντικατάσταση ενός εργαλείου με ένα άλλο, συνδέεται με: α) την οπτική του σχεδιαστή για τις λειτουργικότητες του πρώτου (σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, τα τεχνικά και παιδαγωγικά χαρακτηριστικά του, καθώς και τις μεθόδους διδακτικής του αξιοποίησης) β) τη δυνατότητα μεταφοράς κάποιων από αυτά σε ένα νέο περιβάλλον-εργαλείο, το οποίο με τη σειρά του αλλοιώνεται προκειμένου να ενσωματώσει τα ανωτέρω.

Θεωρούμε πως η διαδικασία αυτή εμπεριέχει σημαντικά χαρακτηριστικά για την επαγγελματική εξέλιξη του εκπαιδευτικού, καθώς συνδέεται με την ενεργοποίηση ή ανάπτυξη μιας σειράς μορφών γνώσεων σχετικών με τη χρήση της τεχνολογίας στα Μαθηματικά. Με αυτή την έννοια, η διαδικασία μετατροπής εργαλείων θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ως μια από τις μεθόδους σε προγράμματα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Hammersley, M., & Atkinson, P. (2010). *Ethnography: Principles in practice* (3. ed., reprinted). London: Routledge.

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2013). Designing for Instrumentalisation: Constructionist Perspectives on Instrumental Theory. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *20*(1), 15–19.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Norman, D. A. (1991). Cognitive Artifacts. In J. M. Carroll (Ed.), *Designing interaction: Psychology at the human-computer interface*. Cambridge [England] ; New York: Cambridge University Press.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods* (Fifth edition). Los Angeles: SAGE.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.

ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΚΕΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΕΝΑ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Παρασκευή Σοφοκλέους, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Κωνσταντίνος Χρίστου

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

skevi_sophocleous@yahoo.gr, dpitta@ucy.ac.cy & edchrist@ucy.ac.cy

Σκοπός της εργασίας είναι η παρουσίαση ενός μοντέλου για τον ορισμό της ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Οκτακόσιοι δυο μαθητές Στ΄ δημοτικού συμπλήρωσαν ένα δοκίμιο που αξιολογούσε ικανότητες ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Χρησιμοποιώντας επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, βρέθηκε ότι η ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά είναι ένα πολυδιάστατο σύστημα που περιγράφεται από τέσσερις αλληλοσχετιζόμενες ικανότητες: τη βασική γνώση περιεχομένου, την κριτική σκέψη, τη δημιουργική σκέψη και τις σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σημασία της ανάπτυξης της ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά είναι αδιαμφισβήτητη. Όμως, αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι είναι δύσκολο να εφαρμοστούν συνθήκες προώθησης ανώτερου επιπέδου σκέψης στις τάξεις και πιο συγκεκριμένα ασκήσεις που είναι μαθηματικά πλούσιες και προκαλούν τους μαθητές να σκεφτούν, να συλλογιστούν και να λύνουν προβλήματα (Stein, Grover & Henningsen, 1996). Αυτό που παρατηρείται, όταν γίνεται προσπάθεια εισαγωγής της, είναι οι μαθητές να καταλήγουν να εφαρμόζουν τύπους και κανόνες χωρίς σύνδεση, νόημα ή κατανόηση και να χάνονται ευκαιρίες σκέψης και συλλογισμού (Smith Bill, & Hughes, 2008). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι η ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά δεν έχει ξεκαθαριστεί ακόμη τι είναι, από ποιες ικανότητες περιγράφεται και με ποιο τρόπο οι ικανότητες της αναπτύσσονται στο δημοτικό σχολείο (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να παρουσιάσει ένα μοντέλο για ορισμό της ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά μέσα από την ανάλυση εμπειρικών δεδομένων.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες ερμηνείες της έννοιας της ανώτερου επίπεδου σκέψης από ερευνητές που ανήκουν σε διαφορετικές ερευνητικές περιοχές (Brookhart, 2010). Μία πολυδιάστατη προσέγγισή της παρουσιάζεται στο Μοντέλο Σκέψης (Integrated Thinking Model) του Iowa Department of Education (IDE) (1989) το οποίο αναφέρεται γενικά στον τρόπο που μπορεί να ενισχυθεί η ανώτερου επιπέδου σκέψη στην τάξη και όχι εξειδικευμένα στα μαθηματικά. Αυτό το μοντέλο δεν είναι το μοναδικό που προσεγγίσει πολυδιάστατα την έννοια της ανώτερου επιπέδου σκέψης, αλλά αποτελεί ένα οργανωμένο, καλά ορισμένο και ολοκληρωμένο μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως λειτουργικός ορισμός για την ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά (Sophocleous & Pitta-Pantazi, 2015).

Με βάση το Μοντέλο Σκέψης, ο συνδυασμός βασικής γνώσης περιεχομένου, κριτικής σκέψης, δημιουργικής σκέψης και σύνθετων διαδικασιών σκέψης είναι απαραίτητος, για να αποκτήσει κάποιος ανώτερου επιπέδου σκέψη. Οι τέσσερις αυτές ικανότητες αλληλοσχετίζονται και εξαρτάται η μία από την άλλη (IDE, 1989). Το μοντέλο αυτό δεν δείχνει πώς λειτουργεί το μυαλό ή με ποιο τρόπο οι νοερές διαδικασίες αναπτύσσονται σε ένα άτομο. Βασική παραδοχή του μοντέλου αυτού είναι ότι οι ικανότητες που περιγράφουν την ανώτερου επιπέδου σκέψη μπορούν να αναπτυχθούν και να ενισχυθούν σε όλους τους μαθητές από το δημοτικό. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι τρεις διαστάσεις της ανώτερου επιπέδου σκέψης είναι η κριτική, η δημιουργική και οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης, αλλά για να μπορούν να εκδηλωθούν αυτές οι διαστάσεις χρειάζονται τη βασική γνώση περιεχομένου.

Οι τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανώτερου επιπέδου σκέψη με βάση το Μοντέλο Σκέψης έχουν αναφερθεί τα τελευταία χρόνια και από ερευνητές της μαθηματικής παιδείας ως διαδικασίες που περιγράφουν την ανώτερου επιπέδου σκέψη, αλλά δεν έχει εντοπιστεί ερευνητική προσπάθεια η οποία να αξιοποιήσει όλες αυτές τις ικανότητες μαζί για να ορίσει την ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά και να επιβεβαιώσει το μοντέλο με εμπειρικά δεδομένα. Έτσι, στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε κατά πόσο επιβεβαιώνεται η δομή του πολυδιάστατου Μοντέλου Σκέψης (IDE, 1989) με δεδομένα μαθητών σε μαθηματικές ασκήσεις. Για να μπορέσει να γίνει αυτό, έχει μελετηθεί και οριστεί η κάθε μια ικανότητα του Μοντέλου Σκέψης και υπό το πρίσμα της βιβλιογραφίας της μαθηματικής παιδείας.

Βασική γνώση περιεχομένου στα μαθηματικά ορίζεται ως οι γνώσεις και οι διαδικασίες που χρειάζεται να κατέχει έναν άτομο με βάση την ηλικία του για να μπορέσει να σκεφτεί κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα και να ελέγχει και να ρυθμίζει τις γνώσεις του. Δεν αποτελεί απλώς ανάκληση μαθηματικών γνώσεων και διαδικασιών (IDE, 1989).

Η κριτική σκέψη στα μαθηματικά είναι η ικανότητα του ατόμου να αναδιοργανώνει τη βασική του μαθηματική γνώση περιεχομένου (IDE, 1989) χρησιμοποιώντας το λογικό συλλογισμό του. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της ανάλυσης (χειρισμός σχέσεων μέρους/όλου), της σύνδεσης (χειρισμός σχέσεων μεταξύ όλων) και της αξιολόγησης (κρίση πληροφοριών με βάση κριτήρια) της βασικής του γνώσης, παράγει την αναδιοργανώμενη γνώση (IDE, 1989·Σοφοκλέους & Πίττα-Πανταζή, 2017). Η διαδικασία της ανάλυσης περιλαμβάνει τις ικανότητες: αναγνώριση μοτίβων, ταξινόμηση αντικειμένων με κοινά χαρακτηριστικά, εντοπισμός των περιορισμών μιας κατάστασης, εύρεση της κύριας ιδέας/νοήματος και σειροθέτηση. Η διαδικασία της σύνδεσης περιλαμβάνει τις ικανότητες: εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ διαφόρων αντικειμένων, λογική σκέψη, παραγωγικό και επαγωγικό συλλογισμό και προσδιορισμό αιτιατών σχέσεων. Η αξιολόγηση περιλαμβάνει τις ικανότητες: αξιολόγηση πληροφοριών, προσδιορισμός κριτηρίων, εντοπισμός προτεραιοτήτων, αναγνώριση λαθών και τεκμηρίωση (IDE, 1989).

Η δημιουργική σκέψη στα μαθηματικά αποτελεί την ικανότητα του ατόμου να παράγει νέα γνώση (IDE, 1989), η οποία αφορά είτε τη δημιουργία μιας πρωτότυπης, μη αναμενόμενης ιδέας (πρωτοτυπία) είτε την εύρεση πολλών (ευχέρεια) και διαφορετικών λύσεων ή στρατηγικών για ένα πρόβλημα (ευελιξία) (π.χ., Leikin, 2009). Για να παραχθεί αυτή η νέα γνώση, το άτομο χρησιμοποιεί και επεκτείνει τη βασική του γνώση και την κριτική του σκέψη (π.χ., Haylock, 1997·IDE, 1989· Sheffield, 2003). Όμως, δεν αρκούν μόνο αυτά για την παραγωγή της νέας γνώσης (π.χ., IDE, 1989). Συγκεκριμένα, το άτομο μέσω της σύνθεσης πληροφοριών και της νοητικής δημιουργίας (διαίσθηση, νοερές εικόνες, έμπνευση) παράγει τη νέα γνώση (π.χ., Sheffield, 2003). Οι ασκήσεις που βοηθούν τους μαθητές να εκφράσουν τη δημιουργική τους σκέψης στα μαθηματικά έχουν τη μορφή συνήθως πολλαπλών λύσεων και κατασκευής προβλήματος (Leikin, 2009).

Οι σύνθετες διαδικασίες σκέψης στα μαθηματικά αποτελούν το συνδυασμό της βασικής γνώσης περιεχομένου, της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης που οδηγούν στην παραγωγή μιας σύνθεσης της αποδεκτής, αναδιοργανώμενης και παραγόμενης γνώσης (IDE, 1989). Ο συνδυασμός αυτός είναι φανερός στα μαθηματικά σε ασκήσεις άγνωστες για τον λύτη και έχουν τη μορφή μη συνηθισμένων προβλημάτων, προβλημάτων σχεδιασμού λύσης και λήψης απόφασης. Δηλαδή, ο λύτης αναπτύσσει πρακτικές για να μπορέσει να αντιμετωπίσει την άγνωστη σε εκείνο κατάσταση αξιοποιώντας τη βασική του γνώση περιεχομένου και τις διαδικασίες της κριτικής και δημιουργικής του σκέψης (Rasmussen, Zandieh, King, & Teppo, 2005). Στο Μοντέλο της Σκέψης ως σύνθετες διαδικασίες σκέψης ορίζονται η λύση προβλήματος, ο σχεδιασμός και η λήψη απόφασης. Αυτές οι τρεις διαδικασίες μοιάζουν με τα τρία είδη προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στο πρόγραμμα αξιολόγησης της λύσης προβλήματος PISA το 2003: διάγνωση και λήψη διορθωτικών μέτρων (trouble shooting), ανάλυση συστήματος και σχεδιασμός (system analysis and design) και λήψη απόφασης (decision making) (OECD, 2004).

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σκοπός της εργασίας

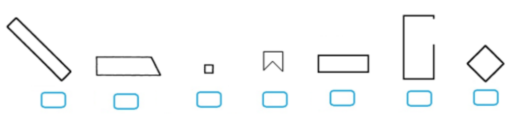
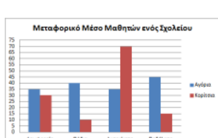
Σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσει ένα μοντέλο για ορισμό της ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Για αυτό, αξιοποιώντας το μοντέλο που προτάθηκε από το Iowa Department of Education (1989) για την ανώτερου επιπέδου σκέψη, εξετάστηκε το ερευνητικό ερώτημα:

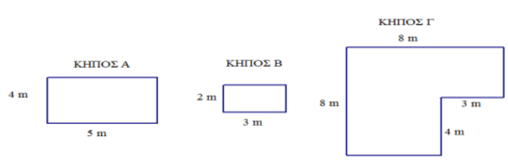
Επιβεβαιώνεται η δομή του Μοντέλου της Ανώτερου Επιπέδου Σκέψης (IDE, 1989) στα μαθηματικά με βάση εμπειρικά δεδομένα μαθητών Στ΄δημοτικού;

Δείγμα της εργασίας - Μέσα συλλογής δεδομένων - Διαδικασία

Το δείγμα της εργασίας αυτής αποτέλεσαν 802 μαθητές Στ΄ δημοτικού από 33 δημόσια και ιδιωτικά σχολεία της Κύπρου. Οι μαθητές αυτοί συμπλήρωσαν ένα δοκίμιο ανώτερου επιπέδου σκέψης που αποτελείτο από 24 έργα. Για τη συμπλήρωσή του δόθηκε χρόνος 120 λεπτών. Ο χρόνος αυτός δεν ήταν συνεχόμενος, αλλά μοιραζόταν σε δυο ή τρεις διαφορετικές μέρες με διάστημα μίας εβδομάδας η μία από την άλλη, ώστε να περιοριστεί η επίδραση του παράγοντα κούραση και να καταγράφονται οι πραγματικές ικανότητες των μαθητών. Τα έργα που επιλέχθηκαν βασίζονταν στον ορισμό της κάθε ικανότητας, όπως παρουσιάζεται πιο πάνω. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται ενδεικτικά έργα για κάθε ικανότητα που περιγράφει την ανώτερου επιπέδου σκέψη και αιτιολογείται η επιλογή του κάθε έργου για μέτρηση της συγκεκριμένης διάστασης.

Σημειώνεται ότι για τη βαθμολόγηση όλων των έργων, με εξαίρεση αυτών της δημιουργικότητας, δόθηκαν βαθμολογίες από μηδέν μέχρι τέσσερα, με τέσσερα την υψηλότερη βαθμολογία που δηλώνει την ορθή απάντηση στο έργο και με μηδέν τη λανθασμένη απάντηση. Οι ενδιάμεσες βαθμολογίες προέκυψαν από το διαφορετικό βαθμό ορθότητας της απάντησης και κατανόησης της έννοιας ή χρήσης της διαδικασίας σκέψης που απαιτείται για κάθε έργο. Όσον αφορά την αξιολόγηση του δημιουργικού προϊόντος έγινε με βάση τα πιο ευρέως χρησιμοποιημένα κριτήρια αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία, όπως υπολογίζονται από τη Leikin (2009). Η βαθμολογία που δόθηκε σε κάθε κριτήριο σχετίζεται με την επίδοση των μαθητών όλου του δείγματος και βασίζεται στις προηγούμενες εμπειρίες τους και για αυτό στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιείται η σχετική δημιουργικότητα και όχι η απόλυτη (Leikin, 2009). Η εσωτερική αξιοπιστία των επιδόσεων των μαθητών στα έργα του δοκιμίου ήταν Cronbach a=.90, που θεωρείται μέτρια προς υψηλή.

ΕΡΓΑ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ
Βασική γνώση περιεχομένου *Β2: Αναγνώριση ορθογωνίων* Να σημειώσεις τα ορθογώνια με √. 	Απαιτείται η χρήση όχι μόνο κατανόησης οπτικών χαρακτηριστικών του ορθογωνίου αλλά και όλων των κρίσιμων ιδιοτήτων του. Αποτελεί ένδειξη βασικής γνώσης, αφού η ικανότητα αναγνώρισης ορθογωνίου χρειάζεται για να σκεφτεί κάποιος πιο σύνθετα σε σχέση με διάφορες σχέσεις σχημάτων.
Κριτική σκέψη (Βλέπε ενδεικτικά έργα για Ανάλυση, Σύνδεση και Αξιολόγηση στους Σοφοκλέους & Πίττα-Πανταζή, 2017)	
Δημιουργική σκέψη ***Σύνθεση*** *Δ1: Κατασκευή ερωτήσεων* Να κατασκευάσεις όσες περισσότερες και διαφορετικές ερωτήσεις μπορείς, με βάση την πιο κάτω γραφική παράσταση. 	Απαιτείται η χρήση διαδικασιών σύνθεσης για την παραγωγή πολλών, διαφορετικών και πρωτότυπων ερωτήσεων. Δηλαδή, οι μαθητές χρειάζεται να καταστρώσουν ένα συστηματικό πλάνο εργασίας ώστε να καταγράψουν με βάση τις γνώσεις που διαθέτουν και τις δεξιότητες κριτικής σκέψης, μεγάλο αριθμό ερωτήσεων, που να διακρίνονται ως προς τη διαφορετική δομή τους και συνθετότητά τους και έτσι να

Νοητική Δημιουργία *Δ3: Σχεδιασμός σχημάτων με εμβαδόν 2 cm²* Να κατασκευάσεις όσα περισσότερα και διαφορετικά σχήματα μπορείς με εμβαδόν 2 cm².  (Τροποποιήθηκε από Haylock, 1997)	προκύψουν και πρωτότυπες ερωτήσεις, που δεν σκέφτηκε κάποιος άλλος. Απαιτείται η χρήση διαδικασιών νοητικής δημιουργίας για την παραγωγή πολλών, διαφορετικών και πρωτότυπων σχημάτων με εμβαδόν 2 cm². Δεν ακολουθείται μια συγκεκριμένη πορεία λύσης, αλλά οι διάφορες ιδέες προέρχεται από νοερές διαδικασίες ως έμπνευση. Για παράδειγμα, περιστρέφοντας το σχήμα που ήδη σχεδίασε ή σπάζοντας το σε μικρότερα σχήματα και μετακινώντας αυτά.
Σύνθετες διαδικασίες σκέψης *Σ3: Επίλυση μη συνηθισμένου προβλήματος εύρεσης σχέσεων με βάση δεδομένα* Μια εταιρεία που φροντίζει κήπους χρεώνει ως εξής: Για το κούρεμα του γρασιδιού και της περίφραξης του κήπου Α €74. Για το κούρεμα του γρασιδιού και της περίφραξης του κήπου Β €36. Πόσα θα χρεώσει για τον κήπο Γ;  *(Οι κήποι δεν είναι σχεδιασμένοι με ακρίβεια.)* (Τροποποιήθηκε από Butterworth & Thwaites,2013)	Απαιτείται η χρήση της βασικής γνώσης των μαθητών για την περίμετρο, το εμβαδόν και τις πράξεις αριθμών, αλλά και διαδικασιών κριτικής και δημιουργικής σκέψης για την επιτυχή εύρεση της χρέωσης για τον κήπο Γ. Δηλαδή, οι μαθητές αναμένεται να συνδέσουν το κούρεμα του γρασιδιού με την έννοια του εμβαδού και την περίφραξη με την έννοια της περιμέτρου (διαδικασίες σύνδεσης). Ακολούθως, να υπολογίσουν το εμβαδόν και την περίμετρο του κάθε κήπου και να προσπαθήσουν να βρουν τη σύνδεση των αριθμών αυτών με τις τιμές χρέωσης που δίνονται. Η σύνδεση αυτή μπορεί να προέλθει ως έμπνευση ή από διάφορες δοκιμές και ελέγχους (διαδικασίες νοητικής δημιουργίας και αξιολόγησης).

Πίνακας 1: Ενδεικτικά έργα δοκιμίου

Τεχνικές ανάλυσης δεδομένων

Για να εξεταστεί η προσαρμογή των δεδομένων των μαθητών από το δοκίμιο στο προτεινόμενο μοντέλο σχετικά με τις ικανότητες που περιγράφουν την ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά, χρησιμοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση στο λογισμικό δομικής ανάλυσης Mplus. Συγκεκριμένα, το μοντέλο υποθέτει ότι: (α) οι επιδόσεις των μαθητών στις 32 μεταβλητές μπορούν να εξηγηθούν από τέσσερις παράγοντες, δυο πρώτης τάξης (βασική γνώση και σύνθετες διαδικασίες σκέψης) και δυο ανώτερης τάξης (κριτική σκέψη και δημιουργική σκέψη), (β) κάθε μεταβλητή φορτίζει σε κάθε παράγοντα που έχει σχεδιαστεί και δεν φορτίζει σε άλλους παράγοντες και (γ) οι τέσσερις παράγοντες συσχετίζονται μεταξύ τους (βασική γνώση, κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη, σύνθετες διαδικασίες σκέψης). Για έλεγχο της προσαρμογής των δεδομένων των 802 μαθητών στο μοντέλο χρησιμοποιήθηκαν πέντε δείκτες (Geiser, 2010): (α) ο δείκτης *CFI*>.95, (β) ο δείκτης *TLI*>.95, (γ) ο λόγος x^2/df<1.96, (δ) ο δείκτης *RMSEA*<.05 και (ε) ο δείκτης *SRMR*<.05.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

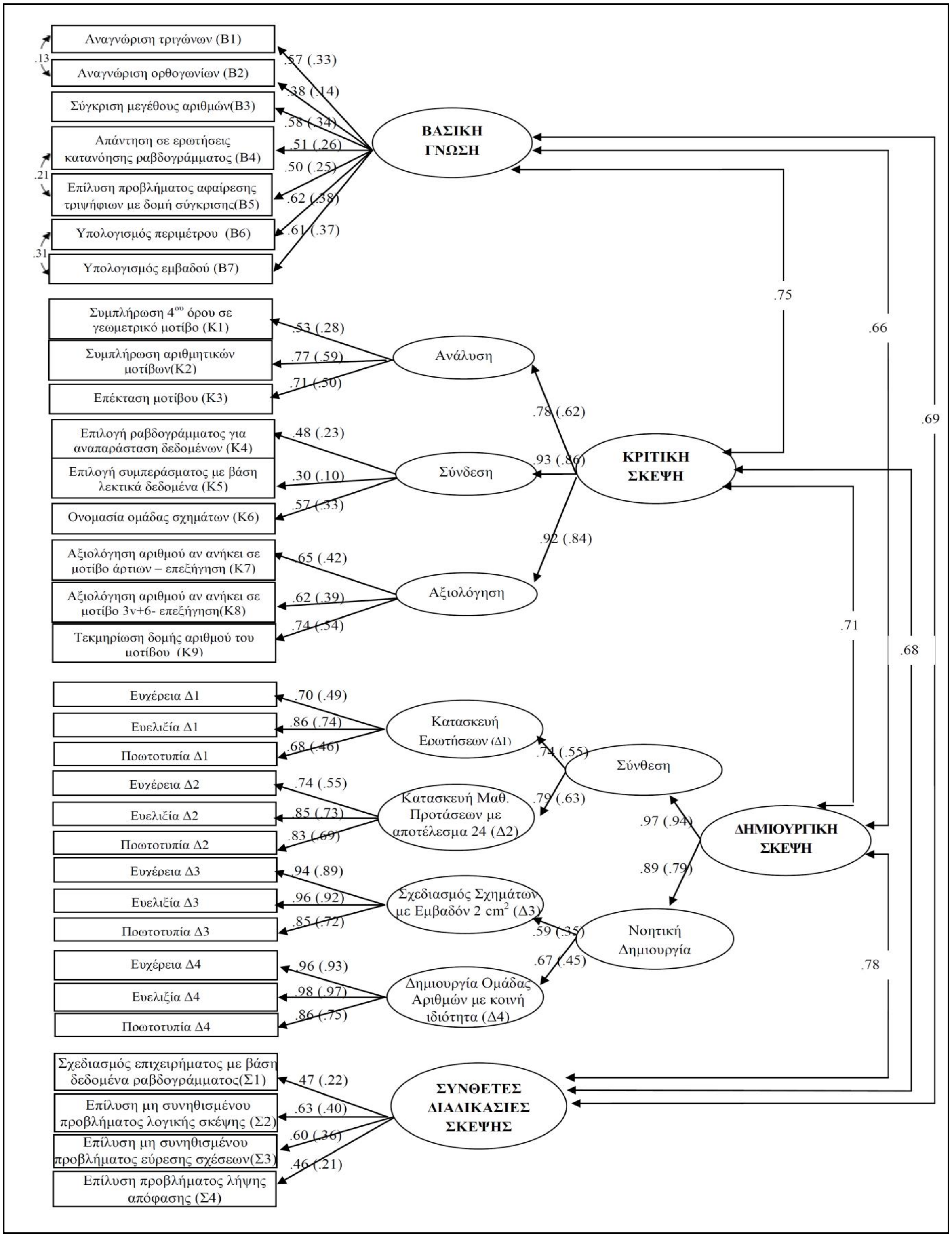
Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι τα δεδομένα των μαθητών των δείγματος προσαρμόζονται στο προτεινόμενο μοντέλο σε ικανοποιητικό βαθμό (βλέπε Διάγραμμα 1), αφού οι τιμές των πέντε δεικτών που εξετάζονται είναι μέσα στο εύρος τιμών που ορίζονται για καλή προσαρμογή (Μοντέλο I) (βλέπε Πίνακα 2). Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει ότι το μοντέλο των τεσσάρων παραγόντων: βασική γνώση, κριτική σκέψη, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης, μπορεί να περιγράψει την ικανότητα της ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Επίσης, εξετάστηκε κατά πόσο τα δεδομένα προσαρμόζονται σε ένα μόνο παράγοντα (Μοντέλο II) ή και σε ένα παράγοντα ανωτέρας τάξης (Μοντέλο III). Τα αποτελέσματα από την ανάλυση έδειξαν ότι το μοντέλο ενός παράγοντα (Μοντέλο II) δεν πληροί τα κριτήρια που ορίζονται για καλή προσαρμογή, ενώ στο μοντέλο παράγοντα ανωτέρας τάξης (Μοντέλο III) προσαρμόζονται τα δεδομένα σε ικανοποιητικό βαθμό (βλέπε Πίνακα 2). Όμως συγκρίνοντας τα δυο μοντέλα (δηλαδή αυτό των τεσσάρων διακριτών παραγόντων και αυτό της ανωτέρα τάξης), φαίνεται ότι στο μοντέλο των τεσσάρων διακριτών παραγόντων (Μοντέλο I) τα δεδομένα να προσαρμόζονται στατιστικά σημαντικά καλύτερα σε σχέση με το μοντέλο ανωτέρας τάξης (Μοντέλο III) (το πηλίκο της διαφοράς των x^2 των δυο μοντέλων προς τη διαφορά των βαθμών ελευθερίας -df τους αποτελεί στατιστικά σημαντικό σε επίπεδο $p<.025$ με βάση τον πίνακα κατανομής x^2).

	CF1	**TLI**	**x^2/df**	**RMSEA**	**SRMR**
Μοντέλο I	.968	.964	1.86	.033	.036
Μοντέλο II	.495	.457	13.93	.127	.086
Μοντέλο III	.966	.963	1.90	.033	.038

Πίνακας 2: Δείκτες προσαρμογής των μοντέλων που εξετάστηκαν

Στο Διάγραμμα 1 δίνεται το μοντέλο των τεσσάρων διακριτών παραγόντων που περιγράφουν την ικανότητα της ανωτέρας επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά. Σε αυτό φαίνονται οι φορτίσεις των μεταβλητών στους αντίστοιχους παράγοντες, οι φορτίσεις παραγόντων πρώτης τάξης ή δευτέρας τάξης σε ανωτέρας τάξης παράγοντες και η αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά τους (στην παρένθεση). Όλες αυτές οι τιμές είναι στατιστικά σημαντικές. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του μοντέλου αυτού επιβεβαιώνει ότι τα έργα που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι κατάλληλα έργα μέτρησης των τεσσάρων άδηλων παραγόντων. Δηλαδή, τα έργα Β1-Β7 αφορούν τη βασική γνώση που πρέπει να έχουν μαθητές Στ΄Δημοτικού για να σκεφτούν κριτικά, δημιουργικά και σύνθετα, ενώ τα έργα Κ1-Κ9 αφορούν την ικανότητα των μαθητών να αναδιοργανώνουν τη γνώση τους μέσω των διαδικασιών της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης συνθέτοντας τον παράγοντα Κριτική σκέψη. Τα έργα Δ1-Δ4 αφορούν την ικανότητα των μαθητών να παράγουν νέα γνώση μέσω της σύνθεσης πληροφοριών και της νοητικής δημιουργίας συνθέτοντας τον παράγοντα Δημιουργική Σκέψη, ενώ τα έργα Σ1-Σ4 αφορούν την ικανότητα των μαθητών να λύνουν σύνθετα προβλήματα χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ικανότητες. Επίσης, στο Διάγραμμα 1 διακρίνονται και οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων, οι οποίες είναι στατιστικά σημαντικές και κυμαίνονται από .66 μέχρι .78.

Η επίδοση των μαθητών του δείγματος σε κάθε ένα από τους τέσσερις παράγοντες της ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά είναι διαφορετική. Οι μαθητές σημείωσαν τον υψηλότερο μέσο όρο στον παράγοντα της βασικής γνώσης περιεχομένου ($\overline{X}$=.71, SD=.18) και το χαμηλότερο μέσο όρο στον παράγοντα των σύνθετων διαδικασιών σκέψης ($\overline{X}$=.35, SD=.20). Ο μέσος όρος στους παράγοντες κριτικής ($\overline{X}$=.58, SD=.20) και δημιουργικής ($\overline{X}$=.53, SD=.18) σκέψης είναι μεγαλύτερος από 50%.



Διάγραμμα 1:Το μοντέλο για την ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εργασία αυτή επιβεβαίωσε ότι η επίδοση των μαθητών Στ΄δημοτικού σε μαθηματικές ασκήσεις υποστηρίζει τη δομή του Μοντέλου Σκέψης (IDE, 1989) για τις τέσσερις αλληλοσχετιζόμενες ικανότητες που περιγράφουν την ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά: βασική γνώση, κριτική, δημιουργική σκέψη και σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Έτσι, παρουσιάζεται στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας ένα καλά οργανωμένο, και ταυτόχρονα πρακτικά διαχειρίσιμο μοντέλο για την ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά. Είναι καλά οργανωμένο αφού αποτελείται από τέσσερις ευδιάκριτες ικανότητες, οι οποίες αλληλοσχετίζονται. Είναι πρακτικά διαχειρίσιμο αφού μπορεί να αξιοποιηθεί για ανάπτυξη περιβαλλόντων ενίσχυσης της ανώτερου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά καθώς και για μέτρησή της, δηλώνοντας ταυτόχρονα ότι δεν αποτελεί κάτι δύσκολο και άγνωστο στους μαθητές (Brookhart, 2010).

Η επίδοση των μαθητών του δείγματος στις τέσσερις ικανότητες που περιγράφουν την ανώτερου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά ήταν διαφορετική. Συγκεκριμένα, σημείωσαν υψηλή επίδοση στη βασική γνώση περιεχομένου και πιο χαμηλές επιδόσεις στην κριτική σκέψη, στη δημιουργική σκέψη και στις σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Η χαμηλότερη επίδοση στις τρεις ικανότητες πιθανόν να οφείλεται στο ότι τα έργα που απαιτούσαν τη χρήση αυτών των ικανοτήτων ήταν γνωστικά απαιτητικά ή και στη μη κατάλληλη διδασκαλία τους. Η μη κατάλληλη διδασκαλία είναι αποτέλεσμα της μη ύπαρξης ξεκάθαρου ορισμού στα μαθηματικά για την ανώτερου επιπέδου σκέψη και τις ικανότητες που την περιγράφουν που να μπορεί να αξιοποιηθεί για τη μέτρησή της και τη διδασκαλία της (π.χ., Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). Κλείνοντας, περαιτέρω έρευνες χρειάζονται να γίνουν ώστε να εξεταστούν με ποιο τρόπο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα με δεδομένα μαθητών άλλων εκπαιδευτικών συστημάτων. Αυτό γιατί οι μαθητές από άλλα εκπαιδευτικά συστήματα διδάσκονται με διαφορετικό τρόπο και υλικό, έχουν άλλη κουλτούρα και έτσι δεν αποκλείεται η διαφοροποίηση του μοντέλου που επιβεβαιώθηκε στην εργασία αυτή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brookhart, S. M. (2010). *How to assess higher order thinking skills in your classroom*. Virginia, USA: ASCD.

Butterworth, J., & Thwaites, G. (2013). *Thinking skills: Critical thinking and problem solving* (2nd ed.). UK: Cambridge University Press.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on Priority Mathematics Education: Unpacking and Understanding a Complex Relationship Linking Teacher Knowledge, Teaching, and Learning. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp 19-59). UK: Routledge.

Geiser, C. (2010). *Data analysis with MPLUS*. New York: The Guiford press.

Haylock, D. W. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 68 – 74. doi:10.1007/s11858-997-0002-y

Iowa Department of Education (1989). *A guide to developing higher order thinking across the curriculum*. Des Moines, IA: Department of Education. Retrieved from ERIC database (ED 306 550).

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129 – 145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Organisation for economic co-operation and development (OECD). (2004). *Problem solving for tomorrow's world: First measures of cross-curricular competencies from PISA 2003*. Paris, France: OECD. Retrieved from:http://www.oecd.org/dataoecd/25/12/34009000.pdf

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity. A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in Mathematics: Developing mathematical promise in K - 8 pupils*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

Smith, M.S., Bill, V., & Hughes, E.K. (2008). Thinking through a lesson protocol: A key for successfully implementing high-level tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(3), 132-138.

Sophocleous, P., & Pitta-Pantazi, D. (2015), Higher order thinking in mathematics. In F. M. Singer, F. Toader, & C. Voica (Eds.), *Proceedings of the 9th MCG* (pp. 160-165). Sinaia, Romania: MCG.

Σοφοκλέους, Π., & Πίττα-Πανταζή, Δ. (2017). Κριτική σκέψη στα μαθηματικά: Ένα μοντέλο τριών διαστάσεων. Στους Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ.), *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ* (σελ. 920 – 930). Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Stein,M . K., Grover,B . W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*, 455-488.

ΔΙΑΓΛΩΣΣΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ (ΚΡΙΤΙΚΗ) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ, ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΣΧΕΣΕΙΣ

Γεωργία Κασάρη

Western Norway University of Applied Sciences (HVL), Norway

geka@hvl.no

Στο παρόν κείμενο μελετάται θεωρητικά η παιδαγωγική της διαγλωσσικότητας, ως μία εναλλακτική προσέγγιση για την αντίληψη της πολυγλωσσίας στη σχολική τάξη. Ο σκοπός του κειμένου είναι να εξετάσει την κριτική πτυχή της διαγλωσσικότητας στη μαθηματική εκπαίδευση και να σκιαγραφήσει τον κοινό τους προσανατολισμό, μέσα από τη μελέτη της αναγκαιότητάς τους για την αντιμετώπιση εκπαιδευτικών προκλήσεων της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών που έχουν επιφέρει οι κοινωνικές, πολιτισμικές, πολιτικές και γλωσσικές συνθήκες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Η γλωσσική ποικιλομορφία, πέρα από την πολιτισμική, φαίνεται πως αποτελεί ολοένα και ισχυρότερο πόλο έλξης της μαθηματικής εκπαίδευσης και της έρευνας του πεδίου σε τοπικό, εθνικό και διεθνές επίπεδο. Η αναγνώριση της εκ φύσεως γλωσσικής εξάρτησης των μαθηματικών, καταδεικνύοντας πως διαφορετικές πολιτισμικές ομάδες χρησιμοποιούν τη «μαθηματική γλώσσα» με διαφορετικούς τρόπους (Schütte, 2018), έχει φέρει στο φως νέες μελέτες και νέα δεδομένα που εστιάζουν στον ρόλο της γλώσσας ή των γλωσσών ενός ατόμου στη μαθηματική σκέψη, κατανόηση και επικοινωνία.

Ταυτόχρονα, η έννοια της επικοινωνίας στο πλαίσιο των μαθηματικών αποκτά σταδικά νέες διαστάσεις. Η πολυτροπικότητα που κυριαρχεί στην κοινωνία της εποχής που διανύουμε συνιστά, πλέον, γεγονός που εύλογα ανακλάται στον μικρόκοσμο της μαθηματικής τάξης, προκαλώντας το «άνοιγμα» της τελευταίας προς εναλλακτικά κανάλια επικοινωνίας, πέρα από τα γλωσσικά.

Τα δεδομένα αυτά έρχονται συνάμα σε συνδυασμό με τη στροφή των μελετών προς την αντιμετώπιση της πολυγλωσσίας ως πηγής, στη θέση εκείνων που θέλουν τη γλώσσα, όταν διαφέρει από τη γλώσσα διδασκαλίας, να μοιάζει να αποτελεί «πρόβλημα» ή «έλλειμμα» του πολύγλωσσου ατόμου όταν εμπλέκεται σε μαθησιακές διεργασίες. Οι εν λόγω τάσεις υπογραμμίζουν αφενός τον ρόλο των πολλαπλών πηγών μάθησης και επικοινωνίας, και ειδικότερα την αξιοποίηση γλωσσικών και μη γλωσσικών πόρων, και, αφετέρου, τον κρίσιμο ρόλο του δασκάλου που καλείται να ανταπεξέλθει στις προκλήσεις της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών διατηρώντας τα χαρακτηριστικά μιας ποιοτικής και κριτικής εκπαίδευσης.

Το κείμενο αυτό, λοιπόν, ξεκινά με κατανοήσεις που θεμελιώνουν τη «διαγλωσσικότητα» (translanguaging), ως μία συμπεριφορά, πρακτική και παιδαγωγική που αναπαριστά τη σύνθετη πραγματικότητα της πολυγλωσσίας σε επίπεδο ατομικό, σχολικό και κοινωνικό. Στα σημεία αυτά ενέχονται κριτικά ζητήματα τα οποία δημιουργούν τόσο υποσχέσεις όσο και προκλήσεις ιδιαίτερα στον εκπαιδευτικό τομέα, που αφορούν άμεσα την μαθηματική εκπαίδευση και την κριτική της θεώρηση. Πώς σκιαγραφείται, λοιπόν, η σχέση της διαγλωσσικότητας και της Κριτικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης;

(ΔΙΑ)ΓΛΩΣΣΙΚΟΤΗΤΑ.

Στις παραπάνω γραμμές έγινε αναφορά στη θεώρηση της γλώσσας ως πηγής για τη μαθηματική κατανόηση. Μεταξύ των εκτενών ερευνών γύρω από αυτό το ζήτημα συναντάται, για παράδειγμα, η όψη της γλώσσας ως «πολιτισμικό εργαλείο» (Adler, 2000, σελ. 207), ως «όχημα» για την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων (Gorgorió & Planas, 2001), ή ακόμα και ως πηγή με παιδαγωγική αξία που προαπαιτείται της γλώσσας ως πολιτικό δικαίωμα (Planas & Setati, 2014). Παρά τις συνεισφορές αυτών των μελετών, υποστηρίζεται από τον Barwell (2018) πως εξακολουθούν να εμπεριέχουν μία μεταφορά της γλώσσας με στατική, περιορισμένη υπόσταση, σα να αποτελεί υλικό που μπορεί να «αποκτηθεί» (Adler, 2000, ό.π. στο Barwell, 2018), ή η «χρήση» της είναι θέμα επιλογής (Planas, 2018).

Ένα ρεύμα πέρα από αυτές τις οριοθετήσεις ακολουθεί την έμφαση στις γλώσσες, αντί του πολιτισμικού τεχνουργήματος «μίας γλώσσας» -μία κατάσταση που, κατά την García (2009β) είναι ούτως ή άλλως ασυνήθιστη στις διαλογικές πρακτικές. Κάποιες πρώιμες αναφορές προς αυτήν την κατεύθυνση εντοπίζονται στις έρευνες των Planas και Setati (2009), οι οποίοι προσέγγισαν τις γλώσσες ως πολλαπλές ικανότητες των δίγλωσσων μαθητών, με σκοπό να διερευνήσουν τις γλωσσικές επιλογές των τελευταίων κατά την ολοκλήρωση μαθηματικών διεργασιών και την παρουσίαση επιχειρημάτων, σύμφωνα με την πρόσβασή τους στο αντίστοιχο λεξιλόγιο κάθε γλώσσας. Ωστόσο, η προσέγγιση των ερευνητών αυτών αφορά στο σύνολο των γλωσσών ως πηγών, ειδικά για ένα μέρος της μαθηματικής τάξης που εμπλέκεται σε συζητήσεις σε μικρές ομάδες, και, ως τέτοια, περιορίζει τελικά τη συνεισφορά των πραγματικών πολλαπλών χαρακτηριστικών των πολλαπλών γλωσσών που είναι διαθέσιμα για την κατασκευή νοημάτων στο πλαίσιο μιας ποικιλόμορφης τάξης (Barwell, 2018), είτε από την πλευρά των μαθητών είτε από αυτήν του εκπαιδευτικού.

Βασισμένος κυρίως στις παραπάνω ιδέες, ο Barwell (2018) καταλήγει στην έννοια των «πηγών νοήματος» (sources of meaning) και προτείνει ένα πλαίσιο, βασισμένο στην κοινωνιογλωσσολογία και στην υπερποικιλότητα (superdiversity), κατά το οποίο η γλώσσα προβάλλεται ως ρήμα, ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα «γλωσσικότητας» (languaging). Σε αυτήν την δραστηριότητα, σύμφωνα με τον Thibault (2017, ό.π. στο Li, 2017), συγκαταλέγεται η αλληλεπίδραση πληθώρας διεργασιών σε νευρικό, σωματικό, συγκειμενικό, κοινωνικό και πολιτισμικό επίπεδο, που εκτείνονται σε διάφορους χρονικούς ορίζοντες και ενορχηστρώνονται σε πραγματικό χρόνο. Ο Barwell δεν εμβαθύνει αμεσότερα στην έννοια της γλωσσικότητας, όμως την προσδιορίζει σε μαθηματικό πλαίσιο: τα πολύγλωσσα άτομα δε χρησιμοποιούν απλά τη μαθηματική γλώσσα, αλλά όλο το φάσμα των ρεπερτορίων τους ως πηγές νοήματος για να «γλωσσίσουν τα μαθηματικά» και, κατ' επέκταση, να «κάνουν μαθηματικά».

Με αυτό το σκεπτικό γίνεται ένα σημαντικό βήμα από τις μονόγλωσσες αντιλήψεις που υποστηρίζουν την ύπαρξη δύο ή περισσότερων διακριτών γλωσσών και γλωσσικών ευχερειών που μπορεί να λειτουργούν μόνο συμπληρωματικά και όχι συνδετικά για τα πολύγλωσσα άτομα (Kuzu & Prediger, 2017), προς την αναγνώριση των τελευταίων ως έμπειρων και ευέλικτων ομιλητών σύνθετων, δυναμικών ρεπερτορίων. Αυτός ο κριτικός αναστοχασμός αναπαριστάται στην έννοια της *διαγλωσσικότητας*, προσδιοριζόμενη ως οι «*πολλαπλές πρακτικές λόγου στις οποίες μυούνται τα δίγλωσσα άτομα προκειμένου να αποδώσουν το νόημα των δίγλωσσων κόσμων τους*» (García, 2009α, σελ. 45).

Πιο εξειδικευμένα, υπό το πρίσμα της κοινωνιογλωσσολογίας τρίτου κύματος (ανθρωπολογική γλωσσολογία), η διαγλωσσικότητα αναφέρεται στη δίγλωσση συμπεριφορά που επιδεικνύεται φυσικά και αυθόρμητα σε επικοινωνιακές περιστάσεις μεταξύ κοινοτήτων, και, ως τέτοια, συνιστά έναν δυναμικό μηχανισμό για τη διαμόρφωση των κατανοήσεων του ατόμου όταν βρίσκεται σε αλληλεπίδραση με άλλες γλωσσικές ομάδες (García, 2009α; Li & García, 2017). Αυτές οι πρακτικές λόγου, δηλαδή, έχουν παγκόσμια διάσταση, καθώς μπορούν να παρατηρηθούν ως εγγενές χαρακτηριστικό διαφόρων κοινοτήτων ανά τον κόσμο (García, 2009α).

Η πρόταση της διαγλωσσικότητας παρέχει έναν νέο αναλυτικό φακό για την κατανόηση της διασύνδεσης πολλαπλών γλωσσών και ρεπερτορίων σε ένα ολοκληρωμένο, ενσωματωμένο σύστημα που συνεχώς μεταμορφώνεται κατά τη διάρκεια πολύγλωσσων αλληλεπιδράσεων. Χάρη στην ύπαρξη διαφόρων γλωσσικών και σημειωτικών πόρων, αυτού του είδους οι πολύγλωσσες επικοινωνίες έχουν έντονο πολυτροπικό χαρακτήρα (García, 2018· Li & García, 2017).

Στο πλαίσιο μιας πολύγλωσσης και πολυπολιτισμικής σχολικής τάξης, σύμφωνα με τον Li Wei (2011) οι μαθητές αλληλεπιδρούν σε έναν κοινωνικό χώρο (*χώρο διαγλωσσικότητας*) που δημιουργείται *από* και *για* τις διαγλωσσικές πρακτικές. Έτσι, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να διαπραγματευτούν το συνεχές των ρεπερτορίων τους και να μοιραστούν προσωπικές ιστορίες, εμπειρίες, πεποιθήσεις, ιδεολογίες και γνωστικές ή φυσικές δυνατότητες. Ακόμη, αναδιαμορφώνονται οι τυπικές δασκαλομαθητικές και διαμαθητικές σχέσεις, καθώς οι ίδιοι οι μαθητές, με το πολύπλευρο υπόβαθρό τους, αποκτούν μία σχετική εξουσιαστική δύναμη στις αλληλεπιδράσεις τους (Creese & Blackledge, 2015· Makalela, 2015).

Ο Li Wei (2017) υποστηρίζει επίσης πως με τη διαγλωσσικότητα πραγματοποιείται το «άνοιγμα» της τάξης προς τις πρακτικές και τις ταυτότητες του «άλλου», και διασπώνται τυχόν διχοτομήσεις μεταξύ κοινωνίας και ατόμου, που παραδοσιακά μπορεί να επέτρεπαν σε μερικές «φωνές» να ακουστούν περισσότερο από άλλες. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγει πως η διαγλωσσικότητα σχετίζεται με την Κριτική Παιδαγωγική και την κριτικότητα, την κοινωνική διακαιοσύνη και ισότητα ευκαιριών, καθώς και τα ανθρώπινα δικαιώματα.

ΔΙΑΓΛΩΣΣΙΚΟΤΗΤΑ: ΜΙΑ ΚΡΙΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ;

Η διάσταση της κριτικής παιδαγωγικής στην παιδαγωγική της διαγλωσσικότητας, όπως αναφέρθηκε καταληκτικά στην προηγούμενη ενότητα, δεν έρχεται χωρίς προκλήσεις, γι' αυτό και ενδεχομένως, σύμφωνα με την Τσιπλάκου (2015), δεν έχει επισημανθεί αρκετά στις σχετικές βιβλιογραφικές μελέτες. Γενικά, στις αρχές και αξίες που πρεσβεύει η διαγλωσσικότητα ως παιδαγωγική, συναντώνται έννοιες όπως δημοκρατία, δύναμη, ευθύνη, φωνή, αυτονομία, δημιουργικότητα, κριτικότητα, ταυτότητα και πολιτειότητα. Το γεγονός ότι οι όροι αυτοί πρωταγωνιστούν επίσης σε λόγους γύρω από την Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση (ΚΜΕ), η οποία αντλεί βασικά στοιχεία από την Κριτική Παιδαγωγική της φρεϊριανής παράδοσης, διεγείρει το ενδιαφέρον για τη διερεύνηση της σχέσης τους.

Η ΚΜΕ αναφέρεται σε ένα πλήθος αντιλήψεων και δραστηριοτήτων που αφορούν κυρίαρχα στις κοινωνικές και πολιτικές πτυχές της μάθησης των μαθηματικών, και στην ανάπτυξη της κριτικής πολιτειότητας (Skovsmose & Borba, 2004). Πιο συγκεκριμένα, δίνει έμφαση σε ζητήματα όπως η αναπαραγωγή ανισοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση και η ανάγκη για ισότιμη πρόσβαση όλων των μαθητών στις μαθηματικές ιδέες, η χρήση και λειτουργία των μαθηματικών στην πράξη ως ένα εργαλείο της προηγμένης τεχνολογικής εποχής, καθώς και η πραγματικότητα της σχολικής τάξης με τις δημοκρατικές αρχές ή τις σχέσεις εξουσίας που ενδεχομένως αναπτύσσονται (Skovsmose & Borba, 2004· Skovsmose & Nielsen, 1996).

Αυτές οι θέσεις αποτελούν παράλληλα και την υπόσχεση της ΚΜΕ: τη στροφή προς την εκπαίδευση για την κοινωνική δικαιοσύνη και τον εκδημοκρατισμό της σχολικής ζωής, με μαθηματικές τάξεις που αντιπροσωπεύουν **δημοκρατικούς χώρους συζητήσεων**, όπου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν σε επικοινωνιακές περιστάσεις που έχουν νόημα για αυτούς, να αναδείξουν τη φωνή τους σε δυναμικές αλληλεπιδράσεις και να ανταλλάξουν ιδέες ή να διαπραγματευτούν νοήματα (François & Stathopoulou, 2012· Skovsmose, 2011). Ο κυριότερος σκοπός της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, λοιπόν, είναι κάθε μαθητής και μαθήτρια να αναπτύξει **κριτική σκέψη** για την κοινωνία και τη μαθηματική γνώση, αναγνωρίζοντας τις πολλαπλές μορφές της τελευταίας μεταξύ διαφορετικών πολιτισμών ή ακόμα και εντός του ίδιου πολιτισμού (Καφούση & Χαβιάρης, 2013).

Η έως τώρα αναφορά στις κυριότερες αντιλήψεις της διαγλωσσικότητας και της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, πιθανώς αφήνει αναπάντητα ορισμένα ζητήματα, όμως μπορεί να αποτελέσει έναυσμα για βαθύτερες διερευνήσεις. Εάν, λοιπόν, η διαγλωσσικότητα δύναται να ειδωθεί ως μία παιδαγωγική στο πλαίσιο της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, κρίνεται σκόπιμο να μελετηθεί εν συντομία η τοποθέτησή της ως προς ορισμένα καίρια ζητήματα.

Όπως προαναφέρθηκε, η διαγλωσσικότητα μεταμορφώνει τις σχέσεις εξουσίας μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικών, γεγονός που συνιστά παράλληλα μία από τις κυριότερες προκλήσεις της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, η ΚΜΕ καλεί τους εκπαιδευτικούς να παραχωρήσουν τον τυπικά αποκλειστικό τους έλεγχο των εκπαιδευτικών διεργασιών (Appelbaum & Stathopoulou, 2015) και να δραστηριοποιηθούν σε πρακτικές που υποστηρίζουν όχι μόνο τη γλωσσική ποικιλομορφία, αλλά και τη γλώσσα ως αναπαράσταση πολιτική (Chronaki & Planas, 2018). Δηλαδή, ο εκπαιδευτικός μιας πολύγλωσσης τάξης καλείται να αποδεχθεί τον ρόλο του και να είναι συνειδητοποιημένος απέναντι στις γλωσσικές πολιτικές του κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου, οι οποίες, ενδεχομένως, αντιστέκονται τόσο στην αναγνώριση της πολυγλωσσίας ως νόρμας της τάξης, όσο και στην αξιοποίησή της ως αναγκαία και ισότιμη πηγή νοήματος (Duarte, 2018· Li & García, 2017).

Στην ΚΜΕ τα ζητήματα ισότητας, πέρα από το παραπάνω, αφορούν ως επί πλείστον στην ισότιμη πρόσβαση και στο δικαίωμα συμμετοχής όλων των μαθητών στη μαθηματική εκπαίδευση, ανεξάρτητα από το κοινωνικό, πολιτισμικό, οικονομικό, ταξικό, γεωγραφικό και γλωσσικό τους υπόβαθρο (Skovsmose & Borba, 2004). Η διαγλωσσικότητα, βέβαια, εστιάζει περαιτέρω στο γεγονός ότι τα πολύγλωσσα άτομα διαθέτουν ένα συνεχές γλωσσών και ρεπερτορίων (Hornberger & Link, 2012), και κατ' επέκταση όλες οι γλώσσες τους αξιοποιούνται και ενδυναμώνονται ταυτόχρονα και ισοδύναμα.

Χάρη σε αυτήν την κριτική και πολιτική διάσταση **μη γλωσσικού διαχωρισμού**, η διαγλωσσικότητα διαφοροποιείται από άλλες κοινωνιογλωσσικές πρακτικές, όπως η μετάφραση ή η εναλλαγή κώδικα (code-switching) (Τσιπλάκου, 2015). Εκτός από τη διαφορετική σκοπιμότητα εφαρμογής των δύο αυτών πρακτικών, η διαγλωσσικότητα θεωρείται ότι υπερβαίνει την εναλλαγή κώδικα σε ό,τι αφορά ζητήματα υπευθυνότητας, καθώς η τελευταία φαίνεται να μεταφέρει τυχόν αποτυχία κατασκευής νοημάτων σε «ελλιπείς ικανότητες» των μελών της τάξης σε μία από τις δύο γλώσσες, όπως χαρακτηριστικά παρατηρείται στην έρευνα του Kajoro (2016).

Για τον λόγο αυτό η ΚΜΕ στρέφει την προσοχή στις ίδιες τις πρακτικές που υιοθετούνται στο σχολικό πλαίσιο και στην ανάγκη οικειοποίησης της ευθύνης (Καφούση & Χαβιάρης, 2013). Όταν, ειδικότερα, τα μέλη της τάξης έχουν ίσους ρόλους, όπως στην παιδαγωγική της διαγλωσσικότητας, και η έμφαση δε δίνεται στην ελάφρυνση του «γνωστικού φορτίου» ή σε (κοινωνιο-)γνωστικές «συγκρούσεις», αλλά στη δημιουργία ενός **χώρου** για αλληλεπιδράσεις, οι μαθητές αποκτούν περισσότερη **αυτονομία** και, όπως καταλήγουν οι Fernandes, Kahn και Civil (2017), έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν τον πλούτο της πολυτροπικής τους σκέψης.

Ακόμη, η διαγλωσσικότητα, ακολουθώντας το πνεύμα της κριτικής εκπαίδευσης, επεκτείνει την κοινή έννοια της γλωσσικής και πολιτισμικής επαφής, καταρρίπτοντας τα σύνορα μεταξύ λαών και εθνικοτήτων και μετατρέποντας μυωπικές αντιλήψεις σε συνύπαρξη και ενίσχυση του αισθήματος του ανήκειν (Creese & Blackledge, 2015· Makalela, 2015). Δηλαδή, δεν εκφράζονται ανησυχίες για ζητήματα γλωσσικής παρεμβολής, μεταφοράς ή δανεισμού και αλλοίωσης των γλωσσών, ιδίως των πολιτικά ισχυρών (Hornberger & Link, 2012), εξαιτίας του ρόλου της γλώσσας που η διαγλωσσικότητα μας προκαλεί να συλλογιστούμε -

αυτόν της γλώσσας «της κριτικής και των δυνατοτήτων», μέσα από εναλλακτικούς λόγους (Gounari, 2014).

Η έννοια της «**κριτικής**» στη διαγλωσσικότητα (ή στον χώρο διαγλωσσικότητας) συναντάται και ως «κριτικότητα» (criticality). Σύμφωνα με τον Li Wei (2011), η χρήση των διαθέσιμων πηγών για τη διατύπωση, την αμφισβήτηση και τον προβληματισμό απόψεων σχετικά με κοινωνικά, πολιτισμικά, πολιτικά ή και γλωσσικά φαινόμενα, αποτελεί χαρακτηριστική ικανότητα κριτικότητας, που είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη «δημιουργικότητα» (creativity), δηλαδή το σύνολο ικανοτήτων επιλογής των νορμών της γλωσσικής χρήσης και συμπεριφοράς που θα τηρηθούν ή όχι, κατά την κρίση του ατόμου. Επομένως, η «χρήση» της γλώσσας σε αυτό το πλαίσιο, δεν είναι απλά «θέμα επιλογής» τυχαίων μορφών και τρόπων, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα του κειμένου (βλ. Planas, 2018).

Στην ΚΜΕ, η κριτική σκέψη βρίσκεται στο επίκεντρο της στοχοθεσίας της, με την έννοια της κριτικής δέσμευσης του ατόμου σε κοινωνικά, πολιτικά και περιβαλλοντικά ζητήματα που μπορεί να προβληματιστεί, να θέσει και να μοντελοποιήσει, χωρίς να παραβλέπει την κριτική του ίδιου του ρόλου των μαθηματικών (Jablonka, 2014). Ο βαθμός αυτής της αντιστοιχίας μπορεί να ενισχυθεί εάν πραγματοποιηθούν μελέτες σε εκπαιδευτικό πλαίσιο που αξιοποιούν την παιδαγωγική της διαγλωσσικότητας για τη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ.

Αναμφίβολα, η ανάγκη περαιτέρω διερεύνυσης τόσο της διαγλωσσικότητας στις συνθήκες του πολύγλωσσου και πολυπολιτισμικού σχολείου, όσο και της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης είναι φανερή. Κάθε προσέγγιση φαίνεται πως ανατρέπει τις έως τώρα νόρμες της επικοινωνίας, ιδιαίτερα μέσα από την έμφαση που δίνουν στην ανάδειξη της φωνής των μαθητών και στον αμοιβαίο σεβασμό.

Όπως υποστηρίζουν οι Cramer και Knipping (2018), αν η φωνή των μαθητών δεν αντιπροσωπεύεται επαρκώς, δεν αξιοποιείται ή δεν συμπεριλαμβάνεται στην εκπαίδευση της εποχής μας, είναι πιθανό να παραβλέψουμε, όχι μόνο τις πολλαπλές κοινωνιο-γνωστικές ικανότητες που φέρνουν οι μαθητές από τα ρεπερτόριά τους, αλλά και τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε πλούσια μαθησιακά συγκείμενα, τα οποία, κατά την García (2009β), χτίζουν τις ταυτότητες των μαθητών. Παράλληλα, εκπαιδευτικοί και ερευνητές χρειάζεται να είναι περισσότερο συνειδητοποιημένοι ως προς την πολυπλοκότητα των παραγόντων που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών, ως μια δραστηριότητα περισσότερο από απλά γνωστική και ατομικιστική (Valero, 2004, ό.π. στο Svensson, Meaney & Norén, 2014).

Με βάση αυτό το σκεπτικό θα ήταν σκόπιμο να μελετήσουμε περαιτέρω τις προκλήσεις της δια-γλωσσικότητας στο πλαίσιο της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι δύο προσεγγίσεις φαίνεται να έχουν κοινές γραμμές που μπορούν να φανούν χρήσιμες στην προσπάθεια να καλύψουμε το κενό από τις υποσχέσεις προς την πράξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 205–224.

Appelbaum, P., & Stathopoulou, C. (2015). Critical Issues in Culture and Mathematics Learning. *Handbook of international research in mathematics education*, *336*, 744-798.

Barwell, R. (2018). From language as a resource to sources of meaning in multilingual mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior, 50*, 155-168. doi:10.1016/j.jmathb.2018.02.007

Cramer, J. C., & Knipping, C. (2018). Participation in argumentation. In U. Gellert, C. Knipping and H. Straehler-Pohl (Eds.), Inside the mathematics class: Sociological perspectives on participation, inclusion, and enhancement (pp. 229–244). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Creese, A., & Blackledge, A. (2015). Translanguaging and Identity in Educational Settings. *Annual Review of Applied Linguistics, 35,* 20-35.

Chronaki, A., & Planas, N. (2018). Language diversity in mathematics education research: a move from language as representation to politics of representation. *ZDM, 50*, 1101–1111

Duarte, J. (2018). Translanguaging in the context of mainstream multilingual education. *International Journal of Multilingualism*, 1-16. doi: 10.1080/14790718.2018.1512607

Fernandes, A., Kahn, L. H., & Civil, M. (2017). A closer look at bilingual students' use of multimodality in the context of an area comparison problem from a large-scale assessment. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(3), 263-282.

François, K., & Stathopoulou, C. (2012). In-Between Critical Mathematics Education and Ethnomathematics. A Philosophical Reflection and an Empirical Case of a Romany Students' group Mathematics Education. *Journal for Critical Education Policy Studies (JCEPS)*, *10*(1), 234-247.

García, O. (2009α). *Bilingual education in the 21st century: A global perspective*. Malden: Wiley/Blackwell.

García, O. (2009β). Education, multilingualism and translanguaging in the 21st century. *Social justice through multilingual education*, 140-158.

Gorgorió, N., & Planas, N. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 7–33.

Gounari, P. (2014). Rethinking heritage language in a critical pedagogy framework. *Rethinking Heritage Language Education*, 254-268

Hornberger, N. H., & Link, H. (2012) Translanguaging and transnational literacies in multilingual classrooms: a biliteracy lens. *International Journal of Bilingual*

Education and Bilingualism, 15(3), 261-27. DOI: 10.1080/13670050.2012.658016.

Jablonka, E. (2014). Critical thinking in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 121-125.

Kajoro, P. M. (2016). Transition of the medium of instruction from English to Kiswahili in Tanzanian primary schools. In *Teaching and learning mathematics in multilingual classrooms* (pp. 73-85). Rotterdam: Sense Publishers.

Καφούση, Σ., Χαβιάρης, Π. (2013). *Σχολική τάξη, οικογένεια, κοινωνία και μαθηματική εκπαίδευση*. Αθήνα: Πατάκης.

Kuzu, T., & Prediger, S. (2017). Two languages–separate conceptualizations? Multilingual students' processes of combining conceptualizations of the part-whole concept. In *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121-128).

Li, W. (2011). Moment analysis and translanguaging space: Discursive construction of identities by multilingual Chinese youth in Britain. *Journal of Pragmatics, 43*, 1222–1235.

Li, W.. (2017). Translanguaging as a practical theory of language. *Applied linguistics, 39*(1), 9-30.

Li, W., & García, O. (2017). From Researching Translanguaging to Translanguaging Research. In K. King, Y.J. Lai, & S. May (Eds), *Research Methods in Language and Education* (pp. 1-14). Cham: Springer.

Makalela, L. (2015). Moving out of linguistic boxes: The effects of translanguaging strategies for multilingual classrooms. *Language and education*, *29*(3), 200-217.

Planas, N. (2018). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 98*(3), 215-229.

Planas, N., & Setati, M. (2009). Bilingual students using their languages in the learning of mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 21*(3), 36–59.

Planas, N., & Setati-Phakeng, M. (2014). On the process of gaining language as a resource in mathematics education. *ZDM, 46*(6), 883–893.

Schütte, M. (2018). Subject-specific academic language versus mathematical discourse. In *Language and communication in mathematics education* (pp. 25-36). Springer, Cham.

Skovsmose, O. (2011). *An Invitation to Critical Mathematics Education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Skovsmose, O., & Marcelo, B. (2004). Research Methodology and Critical Mathematics Education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics* (pp. 207-226). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Svensson, P., Meaney, T., & Norén, E. (2014). Immigrant students'perceptions of their possibilities to learn mathematics: the case of homework. *For the Learning of Mathematics, 34*(3), 32-37.

Τσιπλάκου, Σ. (2015). 'Ακίνδυνη' εναλλαγή κωδίκων και Διαγλωσσικότητα: it's complicated. *Επιστήμες Αγωγής, 2015*, 140-160.

ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΙΔΕΑ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΥ ΠΟΡΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Διονυσία Μπακογιάννη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

dbakogianni@math.uoa.gr

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να συνεισφέρει στη συζήτηση για την έννοια του ανθρώπινου πόρου και να δώσει μια οπτική για τη εμπειρική προσέγγιση της έννοιας. Η μελέτη της συνεργασίας 11 εκπαιδευτικών στο πλαίσιο μιας Κοινότητας Πρακτικής (Wenger,1998) που διερευνά και αναπτύσσει τη διδασκαλία της στατιστικής, αποτελεί το πλαίσιο για την εμπειρική προσέγγιση του ανθρώπινου πόρου. Με την χρήση εργαλείων από τη θεμελιωμένη θεωρία εμφανίζονται κατηγορίες ανθρώπινων πόρων που αναδεικνύουν τη στοχαστική φύση των στατιστικών προβλημάτων, τη σημασία του συνεργατικού πλαισίου της κοινότητας πρακτικής αλλά και την πολυπλοκότητα της εμπειρικής προσέγγισης της έννοιας του ανθρώπινου πόρου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με τον όρο *διδακτικός πόρος* νοούνται τα υλικά ή πολιτιστικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται ή αναπτύσσονται από τους εκπαιδευτικούς μέσα στη διδασκαλία (μαθηματικά αντικείμενα, αναλυτικό πρόγραμμα, ψηφιακά εργαλεία, υπολογιστές τσέπης, πίνακας, φύλλο εργασίας, γλώσσα κ.α.). Η μελέτη των διδακτικών πόρων αποτελεί κεντρικό θέμα συζήτησης στην έρευνα για τη Διδακτική των Μαθηματικών και η εστίαση είναι κυρίως στην αλληλεπίδραση του εκπαιδευτικού με τους διδακτικούς πόρους και στο σχεδιασμό διδακτικών πόρων (Adler, 2000; Gueudet & Trouche, 2009). Η μελέτη των διδακτικών πόρων είναι ιδιαίτερα σημαντική στην περίπτωση της διδασκαλίας της στατιστικής (α) λόγω της υπερ-πληθώρας των διαθέσιμων διδακτικών πόρων που προτείνονται για την υποστήριξη της διδασκαλίας και της μάθησης της στατιστικής (π.χ. Ben-Zvi, Gravemeijer, & Ainley, 2018), (β) εξαιτίας του γεγονότος ότι οι πόροι που σχετίζονται με τη στατιστική (π.χ. πραγματικά δεδομένα, λογισμικά εξερεύνησης δεδομένων, προσομοιώσεις τυχαίων καταστάσεων) αποτελούν καινοτόμους διδακτικούς πόρους και η αξιοποίησή του είναι πρόκληση για τους καθηγητές μαθηματικών (π.χ. Lee & Hollebrands, 2011; Bakogianni & Potari, 2019) και (γ) λόγω του στοχαστικού πλαισίου που κυριαρχεί στα προβλήματα στατιστικής και που διαφοροποιεί τις συνθήκες διδασκαλίας και μάθησης σε σχέση με τα άλλα πεδία μαθηματικών (Moore & Cobb, 2000).

Το ενδιαφέρον των ερευνητών που ασχολούνται με τη μελέτη των διδακτικών πόρων κατευθύνεται ολοένα και εντονότερα στο πλαίσιο της συνεργασίας μεταξύ εκπαιδευτικών, και τους παράγοντες που επιδρούν στην συλλογική εργασία των εκπαιδευτικών με τους διδακτικούς πόρους και την επαγγελματική μάθηση που απορρέει από αυτήν. Μέσα σε αυτήν την οπτική, η Adler (2000), ανάμεσα στις διάφορες κατηγορίες διδακτικών πόρων που ορίζει, συζητά για τους ανθρώπινους πόρους (*human resources*) και το ρόλο τους στη διαμόρφωση της πρακτικής των εκπαιδευτικών. Οι ανθρώπινοι πόροι σχετίζονται με την ταυτότητα και τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις των ανθρώπων (π.χ. η γνώση που προέρχεται από τη διδασκαλία, η καθημερινή γνώση, οι ακαδημαϊκές εμπειρίες, η αλληλεπίδραση με συναδέλφους ή ερευνητές κ.α.). Οι πόροι αυτοί έχουν αποτελέσει συχνά εστίαση της έρευνας σε όρους γνώσης του αντικειμένου, πεποιθήσεων, παρανοήσεων, συναισθημάτων κ.α. παρόλα αυτά η συζήτηση γύρω από τη μεθοδολογική προσέγγιση των ανθρώπινων πόρων σε εμπειρικά δεδομένα είναι ακόμα πολύ περιορισμένη. Η παρούσα μελέτη επιχειρεί, να εξερευνήσει μέσα στο πλαίσιο μιας κοινότητας πρακτικής (Wenger, 1998):

> Πως εμφανίζονται οι ανθρώπινοι πόροι στις συζητήσεις μιας κοινότητας εκπαιδευτικών που συνεργάζονται για την ανάπτυξη της διδασκαλίας της στατιστικής.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι ανθρώπινοι πόροι (*human resources*), αν και εμφανίζονται στην βιβλιογραφία για τους διδακτικούς πόρους δεν αποτελούν σημείο εστίασης, καθώς η έρευνα επικεντρώνεται κυρίως σε υλικούς πόρους (ψηφιακά εργαλεία, μαθηματικά εργαλεία, αναλυτικά προγράμματα). Παρόλα αυτά η συζήτηση γύρω από την αξιοποίηση των διδακτικών πόρων από τους εκπαιδευτικούς και τη χρήση τους μέσα στην τάξη, φέρνει συχνά στο προσκήνιο πόρους που εκτείνονται πέρα από τα υλικά τεχνουργήματα και περιλαμβάνουν τα άτομα που συνδέονται με την εφαρμογή ή τη χρήση των υλικών πόρων, δηλαδή τους εκπαιδευτικούς, τους μαθητές, τους γονείς, τους ερευνητές κτλ., οι οποίοι μέσα από τη γνώση, τις εμπειρίες, τις πεποιθήσεις ή τα συναισθήματά τους αποδίδουν νόημα και δυναμική στους υλικούς και πολιτιστικούς πόρους (Adler, 2000; Gueudet & Trouche, 2009). Η Adler (2000) αναγνωρίζει δύο κατηγορίες ανθρώπινων πόρων ως κεντρικούς διδακτικούς πόρους. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τους βασικούς ανθρώπινους πόρους (*basic human resources*) που σχετίζονται με την εκπαιδευτική διαδικασία γενικά, όπως το μέγεθος της τάξης, την αναλογία μαθητή-δασκάλου, τα τυπικά προσόντα του δασκάλου κ.α.. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει ανθρώπινους πόρους που σχετίζονται ειδικότερα με την διδασκαλία των μαθηματικών, με κεντρικότερο ανθρώπινο πόρο το δάσκαλο και τη γνώση του σε επίπεδο περιεχομένου, παιδαγωγικής, τεχνολογικής γνώσης, γνώσης διδακτικών πρακτικών κ.α.. Στη θεώρηση της Adler (2000) ως ανθρώπινος πόρος θεωρείται το ίδιο το άτομο με ότι γνώσεις, εμπειρίες κτλ, αυτό έχει να συνεισφέρει στην διδακτική πρακτική. Οι Gueudet & Trouche (2009), έχουν διαμορφώσει ένα θεωρητικό πλαίσιο για τη μελέτη της δημιουργίας διδακτικού υλικού μέσα από την αξιοποίηση διδακτικών πόρων. Στη δουλειά τους υιοθετούν επίσης μια ευρεία οπτική για το τι είναι διδακτικός πόρος, και μέσα στο σύνολο των πόρων που μελετούν περιλαμβάνονται και οι ανθρώπινοι πόροι. Η έρευνά τους επικεντρώνεται στη μελέτη υλικών πόρων και την διαδικασία γένεσις διδακτικών τεκμηρίων (*documentational genesis*) και βλέπουν τους ανθρώπινους πόρους μέσα στο σχήμα αξιοποίησης αυτής της διαδικασίας που αποδίδει νόημα στους πόρους και καθορίζεται η χρήση τους.

Στην παρούσα μελέτη υιοθετείται η ευρεία θεώρηση του όρου πόρος ώστε να περιλαμβάνει οτιδήποτε μπορεί να αξιοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς προκειμένου να υποστηρίξουν τη διδασκαλία και τη μάθηση της στατιστικής σε ένα περιβάλλον που να ενισχύει την ανάπτυξη της στατιστικής συλλογιστικής (*statistical reasoning*). Λέγοντας στατιστική συλλογιστική αναφέρομαι στη συλλογιστική που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι όταν προσπαθούν να κατανοήσουν και να βγάλουν συμπέρασμα από μια στατιστική πληροφορία (πχ. ερμηνεία βασισμένη σε δεδομένα ή αναπαραστάσεις δεδομένων, κατανόηση στατιστικής σύνοψης δεδομένων κ.α.) (Garfield, delMas, & Chance, 2003).Έτσι, μέσα στην έννοια του διδακτικού πόρου αναγνωρίζω υλικούς πόρους (όπως ψηφιακά εργαλεία, σχολικά εγχειρίδια ή καθημερινά αντικείμενα όπως ζάρια, κέρματα κ.α.), πολιτιστικούς πόρους (όπως ο διδακτικός χρόνος που αφιερώνεται στη στατιστική, η γλώσσα ή προσβασιμότητα σε βάσεις δεδομένων), καθώς και ανθρώπινους πόρους. Παραδείγματα ανθρώπινων πόρων είναι: δυσκολίες που έχει αναδείξει η έρευνα γύρω από το ρόλο της διαίσθησης στη λήψη αποφάσεων μέσα σε πλαίσια αβεβαιότητας, η κατανόηση στατιστικών γραφημάτων, η γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της στατιστικής, το ρόλο των καθημερινών εμπειριών και των συναισθημάτων στον χειρισμό και την ερμηνεία στατιστικών δεδομένων, αλλά και τη σημασία της αλληλεπίδρασης με συναδέλφους όταν αναπτύσσουν τη διδασκαλία της στατιστικής (Eichler & Zapata-Cardona, 2016).

Η παρούσα μελέτη είναι μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που βλέπει τους διδακτικούς πόρους ως τον κινητήριο μοχλό για τη διαπραγμάτευση του νοήματος στην ανάπτυξη της διδασκαλίας της στατιστικής (βλ. Bakogianni & Potari, 2019). Μέσα στο πλαίσιο μιας Κοινότητας Πρακτικής (Wenger, 1998), οι εκπαιδευτικοί αλληλοεπιδρούν με διάφορους πόρους προκειμένου να αναπτύξουν πρακτικές για την υποστήριξη της στατιστικής συλλογιστικής μέσα στην τάξη. Στο άρθρο αυτό εστιάζουμε στη διαπραγμάτευση των ανθρώπινων πόρων μέσα από την εμπειρική μελέτη μιας κοινότητας πρακτικής έντεκα εκπαιδευτικών που αναπτύσσει τη διδασκαλία της στατιστικής.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που βασίστηκε σε μια διερευνητική μελέτη περίπτωσης (Yin, 2003), όπου την περίπτωση αποτέλεσαν 11 εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας, πέντε από τους οποίους υπηρετούσαν περισσότερα από 8 χρόνια σε σχολεία (Άκης, Κίμων, Λυδία, Μάρκος, Ντίνος), και έξι οι οποίοι είχαν πολύ μικρή εμπειρία από την τάξη (Αθηνά, Εύα, Λία, Ρία, Σόφη, Χλόη). Όλοι οι εκπαιδευτικοί είχαν κάνει μεταπτυχιακές σπουδές στη Διδακτική των Μαθηματικών, το υπόβαθρό τους στη στατιστική διέφερε σημαντικά αλλά κανένας δεν είχε εξοικείωση με διδακτικές πρακτικές ανάπτυξης στατιστικής συλλογιστικής. Οι εκπαιδευτικοί συνεργάστηκαν σε εθελοντική βάση για δύο ακαδημαϊκά έτη (2012-2013 και 2013-2014) και οι συναντήσεις ήταν περίπου 2 ανά μήνα, καθεμία από τις οποίες διαρκούσε περίπου δυόμιση ώρες. Δύο ερευνητές συμμετείχαν στην έρευνα ενθαρρύνοντας την ενεργό συμμετοχή των εκπαιδευτικών, τροφοδοτώντας τους με καινοτόμους διδακτικούς πόρους και αναπτύσσοντας την ατζέντα εργασίας της ομάδας. Οι συναντήσεις είχαν μια κυκλική δομή όπου οι εκπαιδευτικοί (α) διερευνούσαν το περιεχόμενο της στατιστικής μέσα από στατιστικά προβλήματα και έργα που αντιμετώπιζαν οι ίδιοι, (β) διερευνούσαν τη διδασκαλία της στατιστικής μέσα από τη μελέτη και τη διαπραγμάτευση της ερευνητικής βιβλιογραφίας (γ) σχεδίαζαν έργα για την ανάπτυξη στατιστικής συλλογιστικής από τους μαθητές τους και (δ) εφάρμοζαν και αναστοχάζονταν πάνω στην εφαρμογή των έργων που είχαν σχεδιάσει. Βλέπω αυτήν την ομάδα ως μία αναδυόμενη Κοινότητα Πρακτικής (Wenger,1998) το συλλογικό αντικείμενο της οποίας είναι να αναπτύξει την διδασκαλία της στατιστικής με στόχο της ανάπτυξη στατιστικής συλλογιστικής από τους μαθητές. Στην παρούσα μελέτη εστιάζω στη διαπραγμάτευση των ανθρώπινων πόρων μέσα σε αυτήν την κοινότητα. Συγκεκριμένα βασίζομαι στα δεδομένα των 10 πρώτων συναντήσεων, τα οποία αποτελούν έναν πλήρη κύκλο δράσης της κοινότητας και προσπαθώ να δω μέσα στις διάφορες δράσεις ανθρώπινους πόρους που αναδείχθηκαν αλλά και πως διαφοροποιήθηκαν κατά την ανάπτυξη της πρακτικής μέσα στην υπό μελέτη κοινότητα.

Οι συναντήσεις της κοινότητας καταγράφτηκαν σε ηχητικά αρχεία και βίντεο, ενώ την ανάλυση των δεδομένων υποστήριξαν και δεδομένα από τις ατομικές συνεντεύξεις που έγιναν με τους εκπαιδευτικούς στην αρχή και το τέλος της έρευνας. Η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε σε μια προσέγγιση θεμελιωμένης θεωρίας και συγκεκριμένα σε μια διαδικασία ανοιχτής κωδικοποίησης που υποστηρίχτηκε από το λογιστικό ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων ATLAS.ti. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας ως μονάδα ανάλυσης την κάθε μία από τις τέσσερις δράσεις της κοινότητας που περιέγραψα παραπάνω, δούλεψα γραμμή-γραμμή σε κάθε τοποθέτηση των μελών της κοινότητας προσπαθώντας να ξεχωρίσω διάφορες κατηγορίες διδακτικών πόρων (υλικούς, ανθρώπινους, πολιτισμικούς) και κωδικούς που συνδέονται με αυτούς. Ο πίνακας 1 παρουσιάζει ένα παράδειγμα της κωδικοποίησης που έγινε με βάση τους διδακτικούς πόρους. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, παρουσιάζονται με italics τα σημεία της τοποθέτησης που ανέδειξαν κωδικούς υλικών πόρων και με underlying τα σημεία της τοποθέτησης που σχετίζονται με ανθρώπινους πόρους.

Τοποθέτηση	*Υλικοί πόροι*	<u>Ανθρώπινοι</u>
Άκης: Αυτό <u>δεν το κατάλαβα πολύ καλά</u>. Ο *Fischbein στο άρθρο* του αναφέρει ότι πίσω από αυτά είναι *η ιδέα της αναλογίας*. Συγκεκριμένα ότι έχουμε την τάση να σκεφτόμαστε αναλογικά αντί να σκεφτόμαστε χρησιμοποιώντας *το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.*	• Fischbein & Schnarch, 1997 • η ιδέα της αναλογίας • ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών	• Στατιστικό υπόβαθρο
Μάρκος: Είναι αυτό που λέμε <u>να προσεγγίσουμε τη *θεωρητική πιθανότητα* μέσα από τη *σχετική συχνότητα*</u>. Έτσι θεωρούμε την πιθανότητα *ως τον αριθμό των*	• Θεωρητική πιθανότητα • Σχετική συχνότητα • Φόρμουλα υπολογισμού της	• Στατιστικό υπόβαθρο • Παιδαγωγικό στατιστικό υπόβαθρο

ευνοϊκών περιπτώσεων προς το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων, όταν επαναλαμβάνουμε πολλές φορές, τόσες που να φτάνει στο άπειρο κτλ. Εδώ έχεις *ένα μικρό κι ένα μεγάλο νοσοκομείο* και παίρνεις ένα *μικρό δείγμα* από το καθένα, ποιο πιστεύεις ότι θα είναι πιο *αξιόπιστο* από τα δύο αυτά δείγματα? Το μεγάλο, <u>εδώ έρχεται *η ιδέα της μεταβλητότητας* που λέμε</u>.	πιθανότητας • Δείγμα • Η ιδέα της αξιοπιστίας του δείγματος • μεταβλητότητα

Πίνακας 1: Παράδειγμα από την ανάλυση στην 2η συνάντηση, δράση (β) – συζήτηση γύρω από το 5ο πρόβλημα που παρουσιάζεται στο άρθρο των Fischbein & Schnarch (1997)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την κωδικοποίηση που προέκυψε σε σχέση με τους ανθρώπινους πόρους. Μια πιο λεπτομερής παρουσίαση των αποτελεσμάτων της ανοιχτής κωδικοποίησης σε όλο το εύρος της έρευνας αυτής παρουσιάζεται σε άλλη δημοσίευση (Bakogianni & Potari, 2019).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι συζητήσεις των εκπαιδευτικών ανέδειξαν μία πληθώρα ανθρώπινων πόρων, οι οποίοι φάνηκε να είναι καθοριστικοί στη διαπραγμάτευση του νοήματος γύρω από την ανάπτυξη της διδασκαλίας της στατιστικής. Οι κατηγορίες που προέκυψαν χωρίστηκαν σε δύο οικογένειες: (α) σε σχέση με το δάσκαλο και τον ερευνητή, δηλαδή τους πόρους που αναπτύσσουν τη διδασκαλία και (β) σε σχέση με το μαθητή, δηλαδή τον πόρο που αποδέχεται τη διδασκαλία. Στον πίνακα 2 συνοψίζονται οι συχνότητες των δύο οικογενειών στα διάφορα έργα των εκπαιδευτικών, ενώ οι πίνακες 2 και 3 παρουσιάζουν τις κυρίαρχες κατηγορίες κωδικών στην κάθε κατηγορία καθώς και κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα για το πώς αυτές προέκυψαν μέσα στα δεδομένα.

Οικογένεια ανθρώπινων πόρων	Εισαγωγική συνάντηση	Δράση α	Δράση β	Δράση γ	Δράση δ	Σύνολο
Σχετικοί με τον δάσκαλο/ερευνητή	8	34	31	164	11	248
Σχετικοί με το μαθητή		2	6	25	21	54
Σύνολο	8	36	37	189	32	302

Πίνακας 2: Συχνότητες εμφάνισης ανθρώπινων πόρων ανά δράση

Οι ανθρώπινοι πόροι φάνηκε να έχουν ένα ισχυρό ρόλο στα δεδομένα που προέκυψαν από τη δουλειά της κοινότητας τόσο σε συχνότητα όσο και σε πληθώρα κωδικών. Οι ανθρώπινοι πόροι αποτέλεσαν το 36% των κωδικών που αποδόθηκαν συνολικά στην ανάλυση των διδακτικών πόρων (58% ήταν υλικοί πόροι και 5% πολιτισμικοί). Πιο συγκεκριμένα στον Πίνακα 3 βλέπουμε τις διαφορετικές κατηγορίες κωδικών που κυριάρχησαν στην οικογένεια δάσκαλος/ερευνητής.

Κατηγορία	**Παράδειγμα**
Στατιστικό υπόβαθρο (θεωρητική	“όταν παίρνεις 2 από τα 10, είναι σα διαλέγεις 2 κελιά για να τοποθετήσεις κάτι. Όταν παίρνεις 8 από τα 10 είναι το αντίστροφο, σαν να διαλέγεις 2 κελιά για να μην
Διδακτική εμπειρία	“Εδώ χρειάζεται να αναπτύξεις την αντίστροφη συλλογιστική, αυτό για το μαθητή είναι μεγάλη πρόκληση” (Μάρκος, 2η συνάντηση)
Στατιστικό υπόβαθρο (εξερεύνηση δεδομένων)	“αν είναι τυχαίο είναι τυχαίο, το τυχαίο δείγμα έχει δύναμη από μόνο του”, (Ντίνος, 1η συνάντηση)
Καθημερινή εμπειρία	“Τι εννοείς όταν λες προσομοίωση? Εγώ για παράδειγμα την προσομοίωση την έχω συναντήσει σε παιχνίδια κονσόλας. Εκεί παίζεις, είσαι ένας χαρακτήρας, αυτό λέγεται προσομοίωση ή ότι οδηγείς ένας αυτοκίνητο, προσομοίωση λέγεται αυτό.” (Λία, 5η συνάντηση)
Συναισθηματικό υπόβαθρο	“Όχι πάλι νοσοκομεία! Έχω τόσο κακές εμπειρίες που ούτε που θέλω να ακούω για νοσοκομεία.” (Λυδία, 4η συνάντηση)
Εμπειρία μέσα από την Κοινότητα Πρακτικής	“Το παράδειγμα που έδωσε ο Ντίνος μας βοήθησε να καταλάβουμε, κι αφού ήταν τόσο βοηθητικό για εμάς ίσως είναι και για τα παιδιά” (Σόφη, 6η συνάντηση)
Στάσεις / Ευρετικές	“Το θέμα είναι ότι έχουμε κι εμείς δυσκολία με την αντιπροσωπευτικότητα, κι εμείς κάνουμε γενικεύσεις χωρίς ακρίβεια, όχι μόνο οι μαθητές” (Κίμων, 1η συνάντηση)
Τεχνολογικό υπόβαθρο	“Τώρα θα βάλω τα δεδομένα στο Fathom*. Το εργαλείο αυτό έχει πολλές δυνατότητες, θα σας δείξω μερικές τώρα καθώς αναλύουμε τα δεδομένα μας.” (Μάρκος, 7η συνάντηση)

* Το Fathom είναι ένα δυναμικό ψηφιακό εργαλείο ειδικά σχεδιασμένο για τη διδασκαλία της στατιστικής (Finzer, 2001).

Πίνακας 3: Βασικές κατηγορίες κωδικών και παραδείγματα από την οικογένεια ανθρώπινοι πόροι σχετικοί με τον εκπαιδευτικό/ ερευνητή.

Όπως βλέπουμε στον πίνακα 3 στα αποτελέσματα αναδεικνύονται πόροι οι οποίοι σχετίζονται άμεσα με το περιεχόμενο της στατιστικής (π.χ. στατιστικό υπόβαθρο – θεωρητικό ή που βασίζεται σε εμπειρία από εξερεύνηση δεδομένων, στάση/ευρετικές), πόροι οι οποίοι σχετίζονται με τη διδασκαλία της στατιστικής (διδακτική εμπειρία, τεχνολογικό υπόβαθρο), καθώς και πόροι οι οποίοι συνδέονται με εμπειρίες από τη ζωή έξω από τη σχολική τάξη (καθημερινές εμπειρίες, συναισθηματικό υπόβαθρο). Επιπλέον, αναδείχθηκε ισχυρά και το στοιχείο της αλληλεπίδρασης μέσα στο πλαίσιο της κοινότητας, καθώς συχνά οι τοποθετήσεις των εκπαιδευτικών βασιζόντουσαν σε θέματα που είχα συζητηθεί ή αναδειχθεί μέσα στις συναντήσεις.

Η δεύτερη οικογένεια σχετίζεται με ανθρώπινους πόρους που συνδέονται με τους μαθητές. Παρότι οι ίδιοι οι μαθητές δεν αποτελούν άμεσο αντικείμενο μελέτης της δουλειάς αυτής, οι μαθητές φάνηκε να αποτελούν κυρίαρχο πόρο στις συζητήσεις των εκπαιδευτικών στο πλαίσιο της κοινότητας, και ιδιαίτερα στα έργα που σχετίζονται πιο άμεσα με την πρακτική τους μέσα στην τάξη (βλ. Πίνακα 2). Στον Πίνακα 4 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι βασικές κατηγορίες κωδικών που προέκυψαν σε αυτήν την οικογένεια.

Κατηγορία	**Παράδειγμα**
Στατιστικό υπόβαθρο	“Οι μαθητές θα χαθούν αν τους αφήσουμε εντελώς ελεύθερους να διατυπώσουν ένα στατιστικό ερώτημα, δεν έχουν τις εμπειρίες να διατυπώσουν ένα ερώτημα που μπορεί να απαντηθεί με ποσοτικά δεδομένα” (Ντίνος, 6η συνάντηση)
Στάσεις / Ευρετικές	“Οι μαθητές είναι συχνά προκατειλημμένοι με τη στατιστική, για αυτό πιστεύω ότι είναι σημαντικό να τους δίνουμε θετικά παραδείγματα κι όχι μόνο αρνητικά. Για παράδειγμα πως η στατιστική βοηθά τη λήψη αποφάσεων στην ιατρική, τη βιολογία ή τις επιχειρήσεις” (Μάρκος, 1η συνάντηση)
Ενδιαφέροντα /Καθημερινές συνήθειες	“φάνηκε να τους ενδιαφέρει το πρόβλημα με το χαρτζιλίκι, πιο πολύ από το πρόβλημα με τους φίλους στο facebook” (Αθηνά, 6η συνάντηση) “παίζουν πολλά διαδικτυακά παιχνίδια στα οποία εξοικειώνονται αρκετά με την ιδέα της συχνότητας και την εκτίμηση πιθανοτήτων” (Μάρκος, 10η συνάντηση)
Μαθηματικό υπόβαθρο	“Ξέρουμε ότι οι μαθητές έχουν την τάση να σκέφτονται αναλογικά για το δείγμα και ακριβώς εκεί θέλουμε να προκαλέσουμε σύγκρουση” (Σόφη, 7η συνάντηση)
Συναισθηματικό υπόβαθρο	“Μπορεί κάποιοι να νοιώσουν άσχημα αν ρωτήσουμε πόσο χαρτζιλίκι παίρνεις, μπορεί κάποιοι να μην παίρνουν καθόλου χαρτζιλίκι” (Αθηνά, 6η συνάντηση)
Μέγεθος της	“Έχει σημασία που το είδαμε γιατί αυτήν την περίοδο οι τάξεις έχουν το πολύ 15 μαθητές, τι αποτελέσματα να

τάξης	βγάλεις με 15 μαθητές" (Μάρκος, 7η συνάντηση)

Πίνακας 4: Βασικές κατηγορίες κωδικών και παραδείγματα από την οικογένεια ανθρώπινοι πόροι σχετικοί με το μαθητή.

Όπως και στην περίπτωση της οικογένειας των δασκάλων/ερευνητών, έτσι και σε αυτήν την περίπτωση, εκτός από τις κατηγορίες που σχετίζονται άμεσα με το περιεχόμενο της στατιστικής, φαίνεται να αναδεικνύονται ιδιαίτερα και πόροι που σχετίζονται τις καθημερινές συνήθειες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών αλλά και συναισθήματα των μαθητών και οι οποίοι φαίνεται να επηρεάζουν σημαντικά τη διαπραγμάτευση των διδακτικών πόρων από τους δασκάλους. Επίσης, είδαμε να αναδεικνύεται ένας από τους βασικούς ανθρώπινους πόρους στην κατηγοριοποίηση της Adler (2000), το μέγεθος της τάξης, που στην περίπτωση της διδασκαλίας της στατιστικής φαίνεται να έχει σημαντικό ρόλο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν να εστιάσει στην ιδέα του ανθρώπινου πόρου που φαίνεται να είναι σημαντική στα πλαίσια που έχουν αναπτυχθεί γύρω από την αξιοποίηση των πόρων στη διδασκαλία των μαθηματικών (Adler, 2000; Gueudet & Trouche, 2009). Η εστίαση αυτή φαίνεται να έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση της διδασκαλίας της στατιστικής καθώς η βιβλιογραφία έχει αναδείξει μια πληθώρα ανθρώπινων πόρων που φαίνεται να επηρεάζουν της στατιστική δραστηριότητα αλλά και το σχεδιασμό για τη διδασκαλία της στατιστικής (Fischbein, & Schnarch, 1997; Eichler & Zapata-Cardona, 2016).

Το ερευνητικό ερώτημα αυτής της εργασίας ήταν πως εμφανίζονται οι ανθρώπινοι πόροι στις συζητήσεις μιας κοινότητας εκπαιδευτικών που συνεργάζονται για την ανάπτυξη της διδασκαλίας της στατιστικής. Η συχνότητα εμφάνισης των ανθρώπινων πόρων μελετήθηκε σε διάφορα έργα με τα οποία ασχολήθηκαν οι εκπαιδευτικοί στο πλαίσιο της συνεργασίας τους. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν την ύπαρξη μιας μεγάλης ποικιλίας πόρων που σχετίζονται με το περιεχόμενο της στατιστικής (θεωρητικό υπόβαθρο, στάσεις/ευρετικές και τεχνολογικό υπόβαθρο δασκάλου και μαθητή, διδακτική εμπειρία του δασκάλου), αλλά και πόρους που φαίνεται να συνδέονται ισχυρά με τη διδασκαλία της στατιστικής, παρότι όχι άμεσα με την ίδια τη στατιστική (καθημερινές συνήθειες, ενδιαφέροντα, συναισθηματικό υπόβαθρο). Η κυριαρχία του πλαισίου στα προβλήματα στατιστικής αλλά και η στοχαστική φύση των προβλημάτων φάνηκε να φέρνουν ισχυρά στο προσκήνιο πόρους που είναι έξω από το πλαίσιο της σχολικής τάξης αλλά και βασικούς ανθρώπινους πόρους, όπως το μέγεθος της τάξης, που είναι συχνά έξω από την εστίαση της έρευνας στη μελέτη των πόρων για τη διδακτική των μαθηματικών. Είδαμε επίσης ότι το πλαίσιο της Κοινότητας Πρακτικής (Wenger, 1998) μας έδωσε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε εμπειρικά τον ανθρώπινο πόρο στην ανάπτυξη της πρακτικής αλλά και να αναδείξουμε την σημασία της αλληλεπίδρασης των εκπαιδευτικών στη διαμόρφωση της διδασκαλίας της στατιστικής μέσα από την εμφάνιση του κωδικού Εμπειρία μέσα από την Κοινότητα Πρακτικής.

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να συνεισφέρει στη συζήτηση για την έννοια του ανθρώπινου πόρου και να δώσει μια οπτική για τη εμπειρική προσέγγιση της έννοιας. Παρόλα αυτά, η ερευνητική εστίαση στους ανθρώπινους πόρους και η βαθύτερη κατανόηση του ρόλου τους στη διαμόρφωση της διδασκαλίας της στατιστικής αποτελεί ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο και απαιτητικό πεδίο που αξίζει να μελετηθεί περαιτέρω και αποτελεί επέκταση της παρούσας εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adler, J. (2000a). Conceptualising resources as a theme for mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3:205*. DOI:10.1023/A:1009903206236

Bakogianni, D., & Potari, D. (2019). Re-sourcing secondary mathematics teachers' teaching of statistics in the context of a community of practice. *The Journal of Mathematical Behavior.*

Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K., & Ainley, J. (2018). Design of statistics learning environments. In *International handbook of research in statistics education* (pp. 473-502). Springer, Cham.

Eichler, A. & Zapata-Cardona, L. (2016). *Empirical Research in Statistics Education. ICME 13 Topical Surveys*. Springer International Publishing. DOI:10.1007/978-3-319-389684

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for research in mathematics education*, 96-105.

Garfield, J., delMas, R., & Chance, B. (2003, April). The Web-based ARTIST: Assessment resource tools for improving statistical thinking. In *annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago. Available at http://www. gen. umn. edu/artist/publications. html.*

Gueudet, G., Pepin, B., Sabra, H., & Trouche, L. (2016). Collective design of an e-textbook: Teachers' collective documentation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19(2-3)*, 187-203.

Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2011). Characterizing and developing teachers' knowledge for teaching statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 359-369). New York, NY: Springer.

Moore, D. S., & Cobb, G. W. (2000). Statistics and mathematics: tension and cooperation. *American Mathematical Monthly, 107(7),* 615–630.

Trouche, L., Gitirana, V., Miyakawa, T., Pepin, B., & Wang, C. (2019). Studying mathematics teachers interactions with curriculum materials through different lenses: Towards a deeper understanding of the processes at stake. *International Journal of Educational Research, 93*, 53-67.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods (3rd ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage.

ΣΤΟΧΕΥΟΝΤΑΣ ΣΤΗ ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΞΙΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΛΕΣΧΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΟΠΤΙΚΟΓΡΑΦΗΜΕΝΩΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΩΝ

Κασσάνδρα Γεωργίου, Χαράλαμπος Χαραλάμπους

Πανεπιστήμιο Κύπρου

kgeorg03@ucy.ac.cy, cycharal@ucy.ac.cy

Ελάχιστες έρευνες διενεργήθηκαν μέχρι τώρα που να εστιάζουν κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ενεργοποιήσουν γνωστικά διαφορετικά επίπεδα μαθητών. Αξιοποιώντας δεδομένα από μια παρέμβαση που στηριζόταν στις Λέσχες Ανάλυσης Οπτικογραφημένων Διδασκαλιών και αποσκοπούσε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να επιλέγουν και να εφαρμόζουν γνωστικά απαιτητικά έργα με διαφορετικές ομάδες μαθητών, η παρούσα έρευνα εξετάζει δυσκολίες που εντόπισαν οι εκπαιδευτικοί προς αυτή την κατεύθυνση και πρακτικές διδασκαλίας με τις οποίες πειραματίστηκαν. Η ανάλυση των δεδομένων εισηγείται αφενός την πολυπλοκότητα του εγχειρήματος και αφετέρου τη δυνατότητα υλοποίησής του μέσα από την αξιοποίηση συγκεκριμένων πρακτικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών αποτελεί στις μέρες μας βασική επιδίωξη διάφορων εκπαιδευτικών συστημάτων παγκόσμια. Για τον σκοπό αυτό, κάθε εκπαιδευτικό σύστημα επιδιώκει να βελτιώσει τους τρόπους με τους οποίους αναπτύσσονται επαγγελματικά οι εκπαιδευτικοί του, έτσι ώστε να μεγιστοποιούνται τα μαθησιακά αποτελέσματα. Στη μελέτη αυτή διερευνάται το κατά πόσο εν ενεργεία εκπαιδευτικοί του κυπριακού εκπαιδευτικού συστήματος μπορούν να ευαισθητοποιηθούν σε θέματα γνωστικής ενεργοποίησης των μαθητών αλλά και διαφοροποίησης της διδασκαλίας τους στο μάθημα των Μαθηματικών, μέσω των Λεσχών Ανάλυσης Οπτικογραφημένων Διδασκαλιών (ΛΑΟΔ) και του αναστοχαστικού χαρακτήρα που τις διέπει. Παράλληλα, στο πλαίσιο των ΛΑΟΔ δόθηκε η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς μέσα από τους δικούς τους αναστοχασμούς να αναπτύξουν και να κωδικοποιήσουν έναν αριθμό πρακτικών διδασκαλίας που θα μπορούσαν να συμβάλλουν στη διατήρηση του γνωστικού επιπέδου των έργων κατά την εφαρμογή τους και στη διαφοροποίηση της προσέγγισής τους ώστε να ανταποκρίνονται σε διαφορετικά επίπεδα μαθητών τους, στοιχεία που δεν έχουν διερευνηθεί στην Κύπρο μέχρι στιγμής. Η συνεισφορά της έρευνας επεκτείνεται, ωστόσο, πέρα από τα κυπριακά όρια, αφού δύναται να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί μπορούν να εργαστούν ταυτόχρονα στους τομείς της γνωστικής ενεργοποίησης και της διαφοροποίησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Γνωστικές Διεργασίες Κατά την Επίλυση Μαθηματικών Έργων

Ευρήματα διαφορών ερευνών (Doyle, 1983· Hiebert & Wearne, 1993) επισημαίνουν ότι μία σημαντική πτυχή η οποία επιδρά ουσιαστικά στα μαθησιακά αποτελέσματα είναι οι γνωστικές διεργασίες στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές κατά την ενασχόληση με διάφορα (μαθηματικά) έργα[1]. Οι υψηλού επιπέδου γνωστικές διεργασίες είναι καθοριστικές για την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας και κατ’ επέκταση τη μάθηση των μαθητών, κάτι στο οποίο φαίνεται να υπάρχει ευρύτερη συμφωνία μεταξύ των ερευνητών. Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι το τι ακριβώς μαθαίνουν οι μαθητές και γενικότερα το τι ευκαιρίες μάθησης έχουν καθορίζεται, εν πολλοίς, από τις γνωστικές διεργασίες στις οποίες εμπλέκονται και το είδος των έργων με τα οποία έρχονται σε επαφή (Boston & Smith, 2009· Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000). Το γνωστικό επίπεδο ορίζεται ως το είδος και το επίπεδο της σκέψης που απαιτείται από τους μαθητές, ώστε να εμπλέκονται με επιτυχία και να επιλύνουν τις ανατιθέμενες δραστηριότητες (Stein κ.ά. 2000). Με βάση τα πιο πάνω, οι μαθητές που εμπλέκονται σε έργα υψηλών γνωστικών απαιτήσεων αναπτύσσουν σε μεγαλύτερο βαθμό τη εννοιολογική τους κατανόηση καθώς και ικανότητες και δεξιότητες μαθηματικού συλλογισμού (Doyle, 1983), σε αντίθεση με τους μαθητές που εμπλέκονται σε έργα χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων που απαιτούν απλή ανάκληση ιδεών και εφαρμογή τους. Το γνωστικό αυτό επίπεδο καθορίζεται, εν πολλοίς, από τον εκπαιδευτικό[2] με τα έργα που επιλέγει και αναθέτει στους μαθητές αλλά και τον τρόπο που εργάζεται σε αυτά αλληλεπιδρώντας με τους μαθητές του. Έρευνες έχουν υπογραμμίσει την ανάγκη διατήρησης του γνωστικού επιπέδου των έργων κατά την παρουσίαση και εφαρμογή τους με στόχο τη μεγιστοποίηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων (Boston & Smith, 2009· Boaler & Staples, 2008 · Stein et al, 1996). Διάφορες ερευνητικές προσπάθειες εισηγούνται ότι μέσα από κατάλληλες παρεμβάσεις (Baumert κ.ά., 2017· Boston & Smith, 2011) οι εκπαιδευτικοί είναι δυνατό να εξοικειωθούν και να εμβαθύνουν σε θέματα γνωστικής ενεργοποίησης των μαθητών μέσα από την επιλογή και εφαρμογή γνωστικά απαιτητικών έργων. Ωστόσο οι προαναφερθείσες προσπάθειες επικεντρώθηκαν στη μέση εκπαίδευση. Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να καλύψει το κενό αυτό επικεντρωνόμενη στη δημοτική εκπαίδευση.

Αρχές Διαφοροποίησης και Γνωστικά Επίπεδα

Βάσει των πιο πάνω και εξετάζοντας κριτικά την υπάρχουσα βιβλιογραφία φαίνεται ότι μέχρι τώρα οι ερευνητές δεν έχουν ασχοληθεί συστηματικά με το κατά πόσον και με ποιον τρόπο μπορούν να αξιοποιηθούν τα γνωστικά απαιτητικά έργα με *όλους* τους μαθητές ανεξαρτήτως των επιπέδων ετοιμότητας και των ικανοτήτων τους.

Από το παραπάνω, προκύπτει η ανάγκη προσεκτικής εξέτασης όχι μόνο της γνωστικής ενεργοποίησης αλλά και της διαφοροποίησης παράλληλα. Όπως υποστηρίζει η Κουτσελίνη (2006), η διαφοροποίηση αποτελεί ένα «από τα κρισιμότερα θέματα στη θεωρία της διδασκαλίας και στις διάφορες προσεγγίσεις για αποτελεσματική διδασκαλία σε τάξεις μικτής ικανότητας» (σελ. 36), αφού κύριος στόχος της είναι η παροχή ίσων ευκαιριών μάθησης για όλους τους μαθητές. Με τα παραπάνω, συμφωνεί και η Παντελιάδου (2013), η οποία συμπληρώνει,

[1] Ο όρος χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει άτομα και των δύο φύλων.
[2] Ο όρος χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει άτομα και των δύο φύλων.

τονίζοντας ότι η μάθηση βελτιώνεται μόνο σε ένα περιβάλλον, όπου η γνώση είναι καλά οργανωμένη, *κοντά στο επίπεδο που ήδη τα καταφέρνουν οι μαθητές*, οι οποίοι εμπλέκονται ενεργητικά στη μάθηση και αισθάνονται ασφαλείς. Η ίδια υποστηρίζει ότι όλα τα παραπάνω μπορούν να επιτευχθούν μέσω της προσέγγισης της διαφοροποίησης.

Ο Doyle (1983) ισχυρίζεται ότι ακόμα και οι πιο αδύνατοι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν όταν εκτίθενται σε έργα υψηλών γνωστικών απαιτήσεων, κάτι με το οποίο συμφωνεί και η Boaler (2008), η οποία αναφέρει πως μπορεί να επιδράσει θετικά στους μαθητές η εμπλοκή όλων σε διαφορετικού επιπέδου έργα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Ακόμη, οι Stein και Lane (1996) ενστερνίζονται τις παραπάνω απόψεις, προσθέτοντας ότι πρέπει να εκθέτουμε τα παιδιά σε γνωστικά απαιτητικά έργα, έστω κι αν κατά τη διάρκεια μεταφοράς του έργου από η μια φάση στην άλλη υπάρχει πιθανότατα να υποβαθμιστεί. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα γνωστικά επίπεδα των έργων είναι διαθέσιμες στο άρθρο των Stein et al (2000). Ο τρόπος με τον οποίο τούτο μπορεί να καταστεί εφικτό δεν έχει διερευνηθεί συστηματικά. Στη συγκριμένη ερευνητική προσπάθεια, αντλώντας από τον χώρο της γενικής παιδαγωγικής, επιχειρούμε να βοηθήσουμε τους εκπαιδευτικούς να αξιοποιούν έργα υψηλών γνωστικών απαιτήσεων προς όφελος όλων των μαθητών τους στηριζόμενοι στις αρχές της διαφοροποιημένης διδασκαλίας.

Λέσχες Ανάλυσης Οπτικογραφημένων Διδασκαλιών (ΛΑΟΔ)

Η επιχειρηθείσα παρέμβαση στην οποία επικεντρωνόμαστε στο παρόν άρθρο στηρίζεται στις Λέσχες Ανάλυσης Οπτικογραφημένων Διδασκαλιών (ΛΑΟΔ, video clubs). Ερευνητικά δεδομένα της τελευταίας δεκαετίας έδειξαν ότι η συμμετοχή εκπαιδευτικών σε ΛΑΟΔ επηρεάζει την επαγγελματική τους όραση, αφού τους καθιστά ικανούς να αναλύουν πιο αποτελεσματικά διδασκαλίες (βλ. Charalambous, Philippou, & Olympiou, 2018). Βρέθηκε, επίσης, ότι οι ΛΑΟΔ βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να βελτιώσουν συγκεκριμένες πτυχές της διδασκαλίας τους, όπως, για παράδειγμα, τον τρόπο διδασκαλίας μαθηματικών προβλημάτων (Yap & Leong, 2015) και την καλλιέργεια δεξιοτήτων μαθηματικής σκέψης. Παράλληλα, βρέθηκε ότι μέσω των ΛΑΟΔ οι εκπαιδευτικοί αντιλήφθηκαν τη σημαντικότητα ανάλυσης και εμβάθυνσης στις μαθηματικές απόψεις/ιδέες των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (Sherin, Jacobs & Philipp, 2011). Ωστόσο, οι μέχρι στιγμής ερευνητικές προσπάθειες για τους εν υπηρεσία εκπαιδευτικούς εστιάζονται κυρίως σε γενικότερα θέματα επαγγελματικής ανάπτυξης ή ακόμη και σε θέματα διοίκησης της τάξης. Παρόλο που έγιναν αρκετές ερευνητικές προσπάθειες με συμμετοχή εν υπηρεσία εκπαιδευτικών σε ΛΑΟΔ, δεν έχουν μέχρι τώρα διεξαχθεί έρευνες που να εστιάζουν αποκλειστικά στη γνωστική ενεργοποίηση διαφορετικών επιπέδων μαθητών κατά το μάθημα των Μαθηματικών.

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Απώτερος σκοπός της επιχειρηθείσας παρέμβασης ήταν η ευαισθητοποίηση των εν υπηρεσία εκπαιδευτικών για την ανάγκη προσεκτικής εξέτασης του γνωστικού επιπέδου στο οποίο εργάζονται οι μαθητές ούτως ώστε να διασφαλίζεται ότι όλοι οι μαθητές, στον βαθμό που αυτό είναι εφικτό, εργάζονται σε γνωστικά απαιτητικά έργα. Συγκεκριμένα, μέσα από την παρέμβαση επιδιώχτηκε η υποβοήθηση των εκπαιδευτικών ώστε να αναπτύξουν στρατηγικές για διατήρηση του γνωστικού επιπέδου των έργων εμπλέκοντας ενεργά όλους τους μαθητές. Σε αυτό το πλαίσιο, η παρούσα έρευνα αποσκοπούσε να απαντήσει στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

(1) Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί κατά την αξιοποίηση γνωστικά απαιτητικών έργων με στόχο τη γνωστική ενεργοποίηση όλων των μαθητών τους;
(2) Ποιες πρακτικές εφάρμοσαν οι εκπαιδευτικοί με στόχο τη γνωστική ενεργοποίηση διαφόρων επιπέδων μαθητών;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συλλογή Δεομένων

Η ***δειγματοληψία*** ήταν βολική κριτηριακή ως προς την επιλογή σχολικών μονάδων και των εκπαιδευτικών, αφού σκοπός μας ήταν να συμπεριλάβουμε στην έρευνα εκπαιδευτικούς που δίδασκαν σε διαφορετικές τάξεις. Το ***δείγμα*** αποτέλεσαν οκτώ εκπαιδευτικοί, επτά γυναίκες και ένας άντρας. Δύο από τις εκπαιδευτικούς δίδασκαν σε δημόσιο Δημοτικό Σχολείο, ενώ οι υπόλοιπες πέντε γυναίκες και ο άντρας εκπαιδευτικός δίδασκαν σε ιδιωτικό Δημοτικό Σχολείο. Στους οκτώ εκπαιδευτικούς δόθηκαν ψευδώνυμα για σκοπούς ανωνυμίας. Για την καλύτερη κατανόηση και ερμηνεία των πτυχών της παρούσας έρευνας, αξιοποιήθηκαν ***διαφορετικές πηγές συλλογής δεδομένων***. Συγκεκριμένα, διενεργήθηκαν αρχικές και τελικές συνεντεύξεις με τους οκτώ εκπαιδευτικούς και οπτικογραφήθηκαν τέσσερις διδασκαλίες για τον καθένα από αυτούς. Αξιοποιήθηκαν, επίσης, οι οπτικογραφημένες συναντήσεις των εκπαιδευτικών στο πλαίσιο των ΛΑΟΔ (σύνολο 15 συναντήσεις, πέντε για κάθε μια από τις τρεις δημιουργηθείσες ομάδες).

Ανάλυση Δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν αξιοποιήθηκαν διαφορετικές μέθοδοι. Αρχικά, αφού απομαγνητοφωνήθηκαν αυτολεξεί όλες οι συνεντεύξεις αναλύθηκαν με τη μέθοδο της συνεχούς σύγκρισης, εστιάζοντας στις δυσκολίες που εντόπισαν οι εκπαιδευτικοί και στις πρακτικές διδασκαλίας τις οποίες κατονόμασαν ή με τις οποίες πειραματίστηκαν. Όσον αφορά στις συναντήσεις στο πλαίσιο των ΛΑΟΔ, λόγω του ότι οπτικογραφούνταν, αρχικά κρίθηκε αναγκαίο όπως για κάθε συνάντηση αναπτυχθεί μια γραπτή περιγραφή (memo) που συνόψιζε το τι συζητήθηκε στη συνάντηση (σε σχέση με πρακτικές διδασκαλίας καθώς και τα θέματα που ήγειραν οι εκπαιδευτικοί σε σχέση με τον πειραματισμό τους και τις δυσκολίες τους αναφορικά με τα θέματα αυτά). Στη συνέχεια οι γραπτές αυτές σημειώσεις αναλύθηκαν με τη μέθοδο της συνεχούς σύγκρισης, όπως και οι συνεντεύξεις. Τέλος, αξιοποιήθηκαν οι οπτικογραφημένες διδασκαλίες των εκπαιδευτικών για σκοπούς τριγωνοποίησης (σύγκρισης των λεχθέντων τους στις συνεντεύξεις ή τις ΛΑΟΔ σε σχέση με το τι έκαναν κατά την πρακτική τους).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Διαφοροποίηση και Γνωστικά Επίπεδα των Έργων

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι οι εκπαιδευτικοί επεσήμαναν διάφορες δυσκολίες στην προσπάθειά τους να διατηρήσουν υψηλό το γνωστικό επίπεδο για διαφορετικά επίπεδα μαθητών. Οι κυριότερες από τις δυσκολίες αυτές παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: *Δυσκολίες για Γνωστική Ενεργοποίηση Όλων των Μαθητών*

Δυσκολίες
1. Δυσκολία ανταπόκρισης σε πολλά διαφορετικά μαθησιακά επίπεδα
2. Πίεση χρόνου
3. Μεγάλος αριθμός μαθητών στην τάξη
4. Δυσκολία στη διαχείριση της τάξης
5. Αντίληψη ότι οι πιο «αδύνατοι» μαθητές δεν μπορούν να βελτιωθούν
6. Δυσκολία να αντιληφθούν πώς σκέφτονται οι μαθητές
7. Αντίληψη ότι η διαφοροποίηση δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάθε μέρα, σε κάθε μάθημα το ίδιο για όλα τα παιδιά
8. Έλλειψη ευελιξίας, αυτοπεποίθησης και ανεξαρτησίας

Για παράδειγμα, ο Τάσος (ΤΣ/4_333)[3] και η Ελεωνόρα (ΤΣ/7_89) επεσήμαναν μεταξύ άλλων ότι το να εφαρμόζει κάποιος διαφοροποίηση δεν είναι εφικτό επί καθημερινής βάσεως σε όλα τα μαθήματα Αυτό πιθανόν να οφείλεται στον μεγάλο αριθμό μαθητών που είχαν οι δύο εκπαιδευτικοί στις τάξεις τους, ο οποίος απαιτεί καλύτερη διαχείριση της τάξης και μεγαλύτερο χρόνο για να μπορέσει να ανταποκριθεί ο εκπαιδευτικός σε ακόμα περισσότερα επίπεδα μαθητών. Σε αυτό φάνηκε να συμφωνεί και η Λουκία, η οποία βρισκόταν ακριβώς στην αντίπερα όχθη. Δηλαδή η τάξη της ήταν μικρότερη αριθμητικά και τόνισε πώς αυτός ήταν ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που της επέτρεψε να διαφοροποιεί το επίπεδο και να ενισχύει συγκεκριμένους μαθητές (ΤΣ/6_236-240). Τα λεγόμενα της Λουκίας συμφωνούν και με τις κωδικοποιήσεις των οπτικογραφημένων διδασκαλιών της, από όπου φάνηκε ότι όντως προσπάθησε και εφάρμοσε αρκετές πρακτικές διαφοροποίησης για ενεργοποίηση των μαθητών.

Μία άλλη βασική αντίληψη των εκπαιδευτικών, η οποία φάνηκε να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην προσπάθειά τους για εφαρμογή διαφοροποίησης για διάφορα γνωστικά επίπεδα, ήταν οι προσδοκίες τους για τους μαθητές τους. Σε σχέση με

[3] Τα αρχικά «ΤΣ» υποδηλώνουν την «τελική συνέντευξη» και οι αριθμοί μετά από τα αρχικά τη σελίδα και τις γραμμές του μεταγραμμένου κειμένου από το οποίο λήφθηκε το απόσπασμα που παρουσιάζεται εδώ.

αυτό τον παράγοντα εντοπίστηκαν δύο ομάδες εκπαιδευτικών. Εκπαιδευτικοί όπως η Ζήνα, η οποία ανέφερε: *«Το ότι καταφέρνω τον κάθε ένα να τον ανεβάσω σε κάτι παραπάνω, δύο, τρία, ένα, μισό από τις δυνατότητές του, αυτό μου δίνει πολλή δύναμη να το προσπαθώ» (ΤΣ/1, 168-171).* Από το πιο πάνω απόσπασμα, φαίνεται ότι η Ζήνα ενστερνίζεται την άποψη πώς όλα τα παιδιά, ανεξαιρέτως του επιπέδου τους, μπορούν να πάνε ένα βήμα πιο πάνω από εκεί που βρίσκονται. Η πεποίθηση αυτή φάνηκε να αντανακλάται και στις οπτικογραφήσεις της, όπου παρόλο που είχε ένα μεγάλο αριθμό μαθητών στην τάξη της, εντούτοις σε όλα της τα μαθήματα προσπαθούσε να εντάξει και μαθητές με αναπηρίες ή που αντιμετώπιζαν άλλες μαθησιακές δυσκολίες. Από την άλλη, η Νιόβη δεν φάνηκε να συμμερίζεται την άποψη της Ζήνας, αφού μεταξύ άλλων υποστήριξε ότι οι πιο αδύνατοι μαθητές δεν μπορούν να πάνε πιο πάνω, κι αν καταφέρουν κάτι τέτοιο, τούτο θα καταστεί εφικτό μέσω πολλής εξάσκησης (ΤΣ/2_68). Η συγκεκριμένη άποψη της εκπαιδευτικού πιθανόν να επηρέαζε το έργο της, αφού από τις οπτικογραφήσεις της συγκεκριμένης εκπαιδευτικού πράγματι φάνηκε ότι δεν έγιναν προσπάθειες για ουσιαστική εφαρμογή διαφοροποίησης για εμπλοκή διαφορετικών επιπέδων μαθητών σε γνωστικά απαιτητικά έργα.

Παρ' όλες τις παραπάνω δυσκολίες, στο σύνολο των οκτώ εκπαιδευτικών, οι επτά φαίνεται να κατάφεραν σε κάποιο βαθμό να διατηρήσουν υψηλό το γνωστικό επίπεδο για διαφορετικά επίπεδα μαθητών. Προς την κατεύθυνση αυτή προτάθηκαν διάφορες πρακτικές από τους εκπαιδευτικούς ή συνδιαμορφώθηκαν κατά την αλληλεπίδραση με τους καθοδηγητές στις ΛΑΟΔ. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται επιλεγμένα οι κυριότερες από αυτές.

Πίνακας 2: *Πρακτικές Διαφοροποίησης κατά την Παρουσίαση και Εφαρμογή Ενός Έργου*

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ	- Εξηγώ το έργο με πιο απλά λόγια - Ζητώ να εκτελεστεί μέρος του έργου - Αλλάζω τις συνθήκες του έργου – όχι τον στόχο
ΕΦΑΡΜΟΓΗ	- Επιλέγω στοχευμένα ποιοι μαθητές θα παρουσιάσουν στην ολομέλεια - Ενθαρρύνω πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης - Ενθαρρύνω την αξιοποίηση υλικού για όσους μαθητές το χρειάζονται/το επιθυμούν
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ	- Υποβάλλω διαφοροποιημένες ερωτήσεις - Προβλέπω ερωτήματα στα οποία είναι δυνατόν να δυσκολεύονται οι μαθητές - Δίνω χρόνο στους μαθητές να σκεφτούν, να εργαστούν και να απαντήσουν - Διαφοροποιώ το υλικό, τους στόχους ή/και την αξιολόγηση

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στο πρόγραμμα πειραματίστηκαν με μια ή περισσότερες από τις πρακτικές αυτές. Αν και οι πειραματισμοί τους δεν ήταν πάντοτε επιτυχημένοι και υπήρχαν αρκετά περιθώρια βελτίωσης, εν τούτοις έκαναν το πρώτο βήμα για να εμπλέξουν γνωστικά τις επιμέρους ομάδες μαθητών στη διδασκαλία τους.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη επιχείρησε να εξετάσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί κατά την προσπάθειά τους να εμπλέξουν διαφορετικά επίπεδα μαθητών σε γνωστικά απαιτητικά έργα καθώς και πρακτικές με τις οποίες πειραματιστήκαν και αξιοποίησαν προς αυτή την κατεύθυνση. Παρόλες τις δυσκολίες αυτές, θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι από την ανάλυση των δεδομένων φάνηκε ότι επτά από τους οκτώ εκπαιδευτικούς είχαν ευαισθητοποιηθεί σε θέματα γνωστικών διεργασιών και προσπάθησαν να θέσουν σε πράξη τις ιδέες που πήραν μέσα από το πρόγραμμα όσον αφορά στην επιλογή και εφαρμογή έργων υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Συνεπώς θεωρείται σημαντικό στοιχείο το ότι οι εκπαιδευτικοί κατανόησαν τη σημαντικότητα των γνωστικών επιπέδων των έργων και προσπάθησαν να διατηρήσουν το επίπεδό τους (βλ. αντίστοιχα αποτελέσματα σε άλλες έρευνες όπως Doyle, 1983· Jackson κ.ά., 2013·Stein κ.ά., 1996).

Επιπρόσθετα, οι εκπαιδευτικοί πρότειναν ή συνδιαμόρφωσαν με τους καθοδηγητές των ΛΑΟΔ διάφορες πρακτικές για εμπλοκή διαφορετικών επιπέδων μαθητών σε γνωστικά απαιτητικά έργα. Ωστόσο, δεν θα πρέπει να παραγνωρίζονται και τα εμπόδια/δυσκολίες που εντόπισαν οι εκπαιδευτικοί ως τροχοπέδη στην προσπάθεια διαφοροποίησης της διδασκαλίας τους. Παρόλη δηλαδή την προσπάθεια των εκπαιδευτικών, η γνωστική ενεργοποίηση διαφορετικών επιπέδων μαθητών φάνηκε να αποτελεί σημαντική πρόκληση, λόγω της πολυπλοκότητάς του και των διαφορετικών μαθησιακών στυλ και επιπέδων σε μία τάξη, κάτι το οποίο έχει προκύψει και από άλλες έρευνες (Boaler, 2008·Jackson et al, 2013). Βέβαια, μία παράμετρος που θα μπορούσε να εξεταστεί σε πιο πολύ βάθος που πιθανόν να επηρεάζει σε κάποιο βαθμό, είναι και η μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών και η γνώση τους για τη διδασκαλία του περιεχομένου.

Για την υπέρβαση της πρόκλησης αυτής χρειάζονται συστηματικές και στοχευμένες παρεμβάσεις, οι οποίες να βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν και εφαρμόζουν πρακτικές που απαιτούνται για τη διατήρηση του γνωστικού επιπέδου μαθηματικών έργων για διαφορετικές ομάδες μαθητών. Τέτοιες πρακτικές θα πρέπει να αφορούν τόσο στη φάση του σχεδιασμού μαθημάτων όσο και στη φάση της παρουσίασης των έργων και της εφαρμογής τους (κατά την αυτόνομη εργασία των μαθητών και κατά τη συζήτηση στην ολομέλεια). Στο πλαίσιοο του ερευνητικού προγράμματος ERASMUS+ KA2 EDUCATE αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε εκπαιδευτικό υλικό προς τη συγκεκριμένη κατεύθυνση. Σε μεταγενέστερες ερευνητικές εργασίες θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παρέμβασης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., & Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180. https://doi.org/10.3102%2F0002831209345157

Boaler, J. (2008). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach. *British Educational Research Journal, 34* (2), 167–194. https://doi.org/10.1080/01411920701532145

Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: the case of Railside school. *Teachers College Record, 110* (3), 608 – 645.

Boston, M., & Smith, M. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 40* (2), 119–156.

Charalambous, C. Y., Philippou, S., & Olympiou, G. (2018). Reconsidering the use of video clubs for student-teachers' learning during field placement: Lessons drawn from a longitudinal multiple case study. *Teaching and Teacher Education*, *74*, 49-61. https://doi.org/10.1016/j.tate.2018.04.002

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research, 53*, (2), 159-199.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2), 393-425. https://doi.org/10.3102%2F00028312030002393

Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(4), 646-682. https://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.44.4.0646

Sherin, M., Jacobs, V., & Philipp, R. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York, NY: Routledge.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488. https://doi.org/10.3102%2F00028312033002455

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based math instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.

Yap, R. A. S., & Leong, Y. H. (2015). Using video clubs to learn for mathematical problem solving instruction in the Philippines: The case of teaching extensions. *Mathematics Professional Development in East Asian Countries* (pp. 83-106). Springer Singapore.

Ελληνόφωνη Βιβλιογραφία

Κουτσελίνη-Ιωαννίδου, Μ. (2006). *Διαφοροποίηση διδασκαλίας-μάθησης σε τάξεις μικτής ικανότητας: Φιλοσοφία και έννοια προσεγγίσεις και εφαρμογές*. Λευκωσία.

Παντελιάδου, Σ. και Αντωνίου, Φ. (2008). *Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*. Εκδόσεις: Γράφημα.

Παντελιάδου, Σ. (2013). Διαφοροποιημένη διδασκαλία και ειδική αγωγή: μια πρόσκληση για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών. Στους Σ. Παντελιάδου και Δ. Φιλιππάτου (Επιμ. Εκδ.) *Διαφοροποιημένη διδασκαλία. Θεωρητικές προσεγγίσεις και εκπαιδευτικές πρακτικές* (σελ. 302-358). Αθήνα: Πεδίο.

ΣΥΝΕΧΙΖΟΜΕΝΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σ. Χατζηλεοντιάδου[1], Ά. Κλώθου[1], Α. Πετρίδου[2], Χ. Σακονίδης[1]

[1]ΠΤΔΕ, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

[2]1ο Πειραματικό Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης

schatzil@eled.duth.gr, aklothou@eled.duth.gr, pantonia65@gmail.com, xsakonid@eled.duth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία διερευνά τη σχέση μεταξύ γνώσης και διδακτικών πρακτικών που υιοθετούνται για τη δυναμική διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών με τις μετατοπίσεις μίας εκπαιδευτικού πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, με στόχο την επαγγελματική της ανάπτυξη, στο πλαίσιο του Προγράμματος i-INQUIRY_1 σε σχολική μονάδα της Θράκης. Οι μετατοπίσεις της εκπαιδευτικού μετά από τη συμμετοχή της στο Πρόγραμμα εντοπίζονται σε ατομικό, κοινωνικό και επαγγελματικό επίπεδο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση έχει στρέψει το ενδιαφέρον της στη συνεχιζόμενη επαγγελματική ανάπτυξη (Continuing Professional Development, CPD) των εκπαιδευτικών. Οι Fraser et al. (2007) ορίζουν ως CPD των εκπαιδευτικών τις αλλαγές που προκύπτουν σε βάθος χρόνου και έχουν ως αποτέλεσμα ποιοτικές μετατοπίσεις στον εκπαιδευτικό επαγγελματισμό τους. Επιπλέον, υιοθετώντας την οπτική του εκπαιδευτικού που μαθαίνει στο πλαίσιο της επαγγελματικής ανάπτυξης (professional development, PD), ορίζουν ως επαγγελματική μάθηση (professional learning, PL) την τυχαία ή σκόπιμη, ατομική ή κοινωνική διαδικασία, η οποία καταλήγει σε συγκεκριμένες αλλαγές στην επαγγελματική γνώση και στις δεξιότητες, στάσεις, πεποιθήσεις ή ενέργειες/πρακτικές των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά.

Προγράμματα CPD: οριοθέτηση

Οι Fraser et al. (2007) σε μια προσπάθεια να οριοθετήσουν τον όρο CPD, πρότειναν ένα πλαίσιο παραγόντων, οι οποίοι επηρεάζουν την CPD και συντίθενται με βάση τις παρακάτω τρεις οπτικές (Α-Γ):

Α. Πτυχές της PLτου εκπαιδευτικού και αντίστοιχοι παράγοντες: α) *Ατομική* (πεποιθήσεις, αξίες και στάσεις, αυτο-αποτελεσματικότητα, αυτοπεποίθηση, ενδιαφέρον και κίνητρα), β) *Κοινωνική* (σχέσεις μεταξύ εκπαιδευτικού και ομάδων/ύπαρξη υποστηρικτικού περιβάλλοντος για τη δραστηριοποίηση και την ανάληψη ρίσκου από την πλευρά του εκπαιδευτικού και γ) *Επαγγελματική* (ισχυρές συνδέσεις μεταξύ της θεωρίας και της πράξης).

Β. Μοντέλα CPD και χαρακτηριστικά τους ως προς την επαγγελματική αυτονομία και τη μετασχηματιστική πρακτική: α) *Μοντέλα μετάδοσης* (επιμόρφωσης/αξιολόγησης-επιβράβευσης/διάχυσης επιμορφωτικών εμπειριών), δηλαδή ‘εξωτερικών’ επιμορφωτικών διαδικασιών, με αποτέλεσμα την ανεπαρκή προαγωγή της επαγγελματικής αυτονομίας, β) *Μοντέλα μετάβασης* (βασισμένα σε δείκτες/ coaching/mentoring/κοινότητας πρακτικής), τα οποία συνιστούν μια προσπάθεια ενδιάμεσης προαγωγής της επαγγελματικής αυτονομίας και γ) *Μοντέλα μετασχηματισμού* (έρευνα δράση/μετασχηματιστικά μοντέλα), τα οποία βασίζονται στην ισχυρή σχέση ανάμεσα στη θεωρία και την πράξη, εσωτερίκευση εννοιών, αναστοχασμό, κατασκευή και μεταφορά νέας γνώσης σε άλλα πλαίσια, επίγνωση του επαγγελματικού και πολιτικού πλαισίου, με αποτέλεσμα την προαγωγή της επαγγελματικής αυτονομίας.

Γ. Τεταρτημόρια χώρου ευκαιριών επαγγελματικής μάθησης με βάση τους άξονες: α) *Τυπικές- Άτυπες* ευκαιρίες και β) *Σχεδιασμένες-Τυχαίες.*

Η CPD στη μαθηματική εκπαίδευση: Η περίπτωση της κοινότητας διερεύνησης

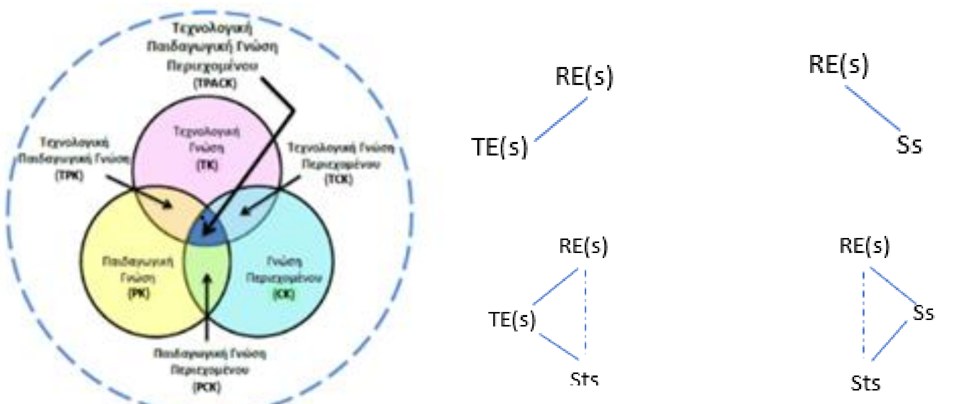
Η εξέλιξη των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών είναι στενά συνδεδεμένη με τη συμμετοχή τους σε "κοινότητες διερεύνησης". Η διερεύνηση συνιστά εργαλείο για τη μελέτη των προκλήσεων που αντιμετωπίζουν εκπαιδευτικοί και ερευνητές και μια διαδικασία μέσα από την οποία οι εκπαιδευτικοί κατασκευάζουν τις δικές τους εννοιολογικές κατανοήσεις και πρακτικές, είτε ατομικά είτε συλλογικά ως μέλη κοινοτήτων. Η Jaworski (2012) υποστηρίζει την ιδέα της CPD των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, μέσω της διδασκαλίας στην τάξη (teaching as learning in practice), με τη συνεργασία εκπαιδευτικών (teacher/s, TE(s)) και ερευνητών (researcher/s, RE(s)) της διδακτικής των μαθηματικών. Η συνεργασία εκπαιδευτικών με ερευνητές, ως βασικό χαρακτηριστικό της "κοινότητας διερεύνησης", φαίνεται ότι είναι καθοριστική για την αποτελεσματικότητα των προγραμμάτων CPD. Τα πλεονεκτήματα της συνεργασίας αυτής αναδεικνύονται σε μια σειρά από έρευνες και μπορούν να συνοψιστούν στα παρακάτω: δημιουργία ισότιμων σχέσεων και ανοιχτό πλαίσιο συνεργασίας, λήψη πρωτοβουλιών, δημιουργικότητα, αίσθημα αυτοπεποίθησης ως προς τα μαθηματικά και ως προς τις στρατηγικές διδασκαλίας και αξιολόγησης του αντικειμένου (Louws, et al., 2017), ισχυρή δέσμευση των εκπαιδευτικών με τους στόχους της κοινότητας, η οποία υποστηρίζει τον αναστοχασμό τους σε σχέση με τις διδακτικές τους ενέργειες και οδηγεί στην ανάπτυξη μιας ταυτότητας "εκπαιδευτικού-ερευνητή" που τους ωθεί σε συνεχή αναθεώρηση και εξέλιξη της διδακτικής τους πρακτικής (Sakonidis & Potari, 2014), αναγνώριση του αναστοχασμού ως βασικού παράγοντα της επαγγελματικής τους ανάπτυξης στο πλαίσιο μιας "κοινότητας διερεύνησης", εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, συνειδητοποίηση των γνώσεων και των διδακτικών πρακτικών που αξιοποιούνται σε διαφορετικές βαθμίδες, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί ομαλά η μετάβαση από τη μία βαθμίδα στην άλλη.

Η CPD στη δυναμική γεωμετρία

Η δυναμική γεωμετρία αποτελεί μια περιοχή ανάδειξης των δυνατοτήτων αξιοποίησης της τεχνολογίας στη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας. Ειδικότερα αξιοποιούνται κατάλληλα λογισμικά (π.χ., το Geogebra), τα οποία διακρίνονται, μεταξύ άλλων, από τη δυνατότητα να υποστηρίζουν μετρήσεις και συνεχείς και άμεσους μετασχηματισμούς γεωμετρικών αντικειμένων μέσω της διαδικασίας του «συρσίματος». Αυτές οι δυνατότητες, παρέχουν στον χρήστη του ψηφιακού περιβάλλοντος τη διατύπωση υποθέσεων και την επιβεβαίωση ή την απόρριψή τους μέσα από πειραματισμό, την επιχειρηματολογία, τη μοντελοποίηση, αλλά και τη συνεργασία και τον αναστοχασμό σχετικά με το σύνολο των διαδικασιών μελέτης γεωμετρικών φαινομένων (Psycharis & Kalogeria, 2018). Το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, αποτελεί έναν νέο αναπαραστατικό πόρο της γεωμετρικής γνώσης, αλλά παράλληλα, μέσω του δυναμικού χαρακτήρα του, λειτουργεί και ως εργαλείο για τη διαμόρφωσή της. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να μετασχηματίζει και τις πρακτικές εκπαιδευτικού και μαθητών στην τάξη, έναντι των παραδοσιακών καθοδηγητικών τρόπων με "μολύβι και χαρτί". Ωστόσο, η πρόσβαση σε λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας δεν εξασφαλίζει από μόνη της τον παραπάνω μετασχηματιστικό ρόλο. Εμπειρικές έρευνες καταγράφουν εμπόδια των εκπαιδευτικών στην αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στην τάξη, μεταξύ των οποίων και η έλλειψη απαραίτητης γνώσης (Jones, 2004). Προβάλλεται το θέμα της CPD του εκπαιδευτικού μέσω της ανάπτυξης PL στην αξιοποίηση της τεχνολογίας. Το μοντέλο Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), αποτυπώνει πρωταρχικές μορφές γνώσης και συνθέσεις τους που πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί προκειμένου να εντάξουν την τεχνολογία στο μάθημά τους (Mishra & Koehler, 2006, p.1022) (Σχήμα 1(α)): (1) *Content Knowledge (CK).* Η γνώση του γνωστικού περιεχομένου προς διδασκαλία/μάθηση, (2) *Pedagogical Knowledge (PK).* Η βαθιά γνώση σχετικά με τις διαδικασίες και πρακτικές ή μεθόδους διδασκαλίας και μάθησης και πώς αυτές εξυπηρετούν τους εκπαιδευτικούς στόχους και αξίες, (3) *Pedagogical Content Knowledge (PCK).* Η γνώση της κατάλληλης παιδαγωγικής προσέγγισης για τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου γνωστικού περιεχομένου, (4) *Technology Knowledge (TK)* – Γνώση εργαλείων, ψηφιακών και μη. Στην περίπτωση των ψηφιακών εργαλείων, η TK αφορά γνώση εφαρμογών πληροφορικής, παρακολούθηση των τεχνολογικών εφαρμογών και δεξιότητες αξιοποίησής τους στο έργο του εκπαιδευτικού. Λόγω της εξέλιξης της τεχνολογίας η γνώση αυτή θα πρέπει να επικαιροποιείται διαρκώς, (5) *Technological Content Knowledge (TCK).* Είναι η γνώση σχετικά με το πώς μπορεί να εμπλουτίζει αναπαραστάσεις του περιεχομένου (6) *Technological Pedagogical Knowledge (TPK).* Είναι η γνώση της ύπαρξης στοιχείων και δυνατοτήτων διαφόρων τεχνολογιών προς αξιοποίηση στη διδασκαλία και τη μάθηση, καθώς και η γνώση του πώς η διδασκαλία και η μάθηση μπορούν να αλλάξουν με τη χρήση συγκεκριμένων τεχνολογιών, και (7) *Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK).* Είναι η σύνθεση των επιμέρους μορφών γνώσεων και η βάση για την αποτελεσματική διδασκαλία με αξιοποίηση της τεχνολογίας.

Η προαγωγή της TPACK στο πλαίσιο προγραμμάτων CPD γίνεται μέσα από πέντε στάδια (Niess et al., 2009): α) *Αναγνώριση*, β) *Αποδοχή*, γ) *Υιοθέτηση*, δ) *Εξερεύνηση και* ε) *Εξέλιξη* της ενσωμάτωσης κατάλληλης ψηφιακής τεχνολογίας στη διδακτική/μαθησιακή διαδικασία. Η θεώρηση των σταδίων αυτών προς την κατάκτηση της TPACK δεν είναι αποκλειστικά γραμμική και εξαρτάται από το πλαίσιο εντός του οποίου λαμβάνει χώρα (βλ. διακεκομμένη γραμμή ορίου στο TPACK, Σχήμα 1(α)), όπως π.χ., το πρόγραμμα PD, η τάξη του εκπαιδευτικού, η διαδικασία σχεδιασμού και ανάπτυξης δραστηριοτήτων (Psycharis & Kalogeria, 2018).

Προγράμματα CPD, με στόχο την ανάπτυξη TPACK στη δυναμική γεωμετρία, περιλαμβάνουν συνεργασίες τύπου (βλ. Σχήμα 1(β): REs-TEs (Jones et al., 2009), REs-Ss (Durdu & Dag, 2017), όπως και REs-Ss-Sts (Tzavara et al., 2018). Αναφορικά με τα στάδια προαγωγής της TPACK και ειδικότερα με αυτό της *εξοικείωσης*, προγράμματα CPD προβλέπουν, για τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς, εμπλοκή, α) στην ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού (Jones et al., 2009), β) στην επίλυση προβλημάτων στο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, γ) σταδιακή εξοικείωση με το λογισμικό μέσα στην τάξη (Jones et al., 2009) και δ) ανάλυση βιντεοσκοπημένων μαθημάτων δυναμικής γεωμετρίας στο περιβάλλον του PD ή στην τάξη, ενώ για τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς εμπλοκή, α) στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων (Durdu & Dag, 2017) β) σε μικροδιδασκαλίες (Durdu & Dag, 2017) και γ) σε διδασκαλίες στην τάξη (Tzavara et al.. 2018).



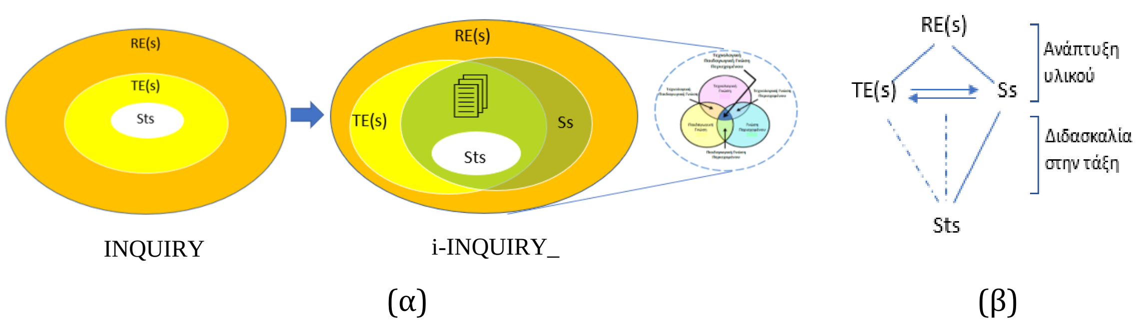
(α) (β)

Σχήμα 1. (α) το TPACK, (β) μορφές συνεργασίας σε προγράμματα CPD εκπαιδευτικών: (RE(s) ερευνητής/ές, TE(s) εν ενεργεία εκπαιδευτικός/οί, Ss, μελλοντικοί εκπαιδευτικοί (προπτυχιακοί φοιτητές), Sts, μαθητές.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται το i-INQUIRY_1, ένα πρόγραμμα CPD σε πλαίσιο κοινότητας διερεύνησης, το οποίο προτείνει έναν διαφορετικό τύπο συνεργασιών των συμμετεχόντων, σε σχέση με τους προαναφερθέντες, και διαφορετικούς τρόπους υποστήριξής τους προς την κατεύθυνση της μετατόπισής τους σύμφωνα με τα στάδια της TPACK.

ΤΟ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ CPD ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: I-INQUIRY_1

Το 2010-2011, σε πειραματικό σχολείο αστικής περιοχής της βόρειας Ελλάδας, δημιουργήθηκε η κοινότητα διερεύνησης INQUIRY, με πλαίσιο συνεργασίας REs-TEs-Sts (Σχήμα 2(α)) και αντικείμενο μελέτης την PCK στα μαθηματικά, η οποία λειτουργεί μέχρι σήμερα. Αξιοποιώντας το πλαίσιο της INQUIRY, το 2018-2019 δημιουργήθηκε η “υπο”-κοινότητα i-INQUIRY με αντικείμενο διερεύνησης την ανάπτυξη της TPACK (Σχήμα 1(α)) στο πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας και της διδασκαλίας της Σχήμα 2(α). Στην i-INQUIRY συμμετέχουν Sts και TE(s) του πειραματικού σχολείου, μεταξύ των οποίων και η τρίτη συγγραφέας της παρούσας εργασίας, οι υπόλοιποι συν-συγγραφείς ως REs, καθώς και οι Ss των δύο πρώτων συν-συγγραφέων-διδασκουσών σε εξαμηνιαίο μάθημα δυναμικής γεωμετρίας, που εισήχθη στο ΠΤΔΕ ΔΠΘ κατά το έτος 2018-2019, με στόχο την ανάπτυξη της TPACK τους (μέσα από διερευνητικές προσεγγίσεις-θεωρία/εργαστήριο). Κατά το ίδιο έτος υλοποιήθηκε στο πειραματικό σχολείο ένα project με στόχο την κατασκευή, από τους μαθητές, ενός σχεδίου εκκένωσης του κτιρίου, με την απλή και εύληπτη αποτύπωση των κατόψεων των ορόφων του σχολείου, ως ένα σύνολο από ορθογώνια (αίθουσες), τοποθετημένα στο χαρτί με κλίμακα 1:100 σε κατάλληλες θέσεις, σύμφωνα με τη δόμηση του κτιρίου στον χώρο. Το εγχείρημα ανέλαβε ομάδα τριών εκπαιδευτικών (μελών της i-INQUIRY) των δύο τμημάτων της Ε τάξης και ενός τμήματος της Δ τάξης. Η PCK του project συνδέθηκε με προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του νέου ΠΣ των μαθηματικών και υλοποιήθηκαν δραστηριότητες που προετοίμασαν τους μαθητές ώστε, σε ζευγάρια, να μετρήσουν και να κάνουν αρχικά το σκαρίφημα της κάτοψης μίας αίθουσας και στη συνέχεια να την σχεδιάσουν σε κλίμακα 1:100 στο χαρτί. Ακολούθησε η σύνθεση της κάτοψης κάθε ορόφου σε σκαρίφημα στο χαρτί και ο εντοπισμός λαθών ως προς τη θέση κάθε αίθουσας στην κάτοψη (σε σύγκριση με τα αρχιτεκτονικά σχέδια του κτιρίου) και η συζήτηση της σημασίας της ακρίβειας των μετρήσεων. Εντός της i-INQUIRY κατά το ίδιο έτος σχεδιάστηκε ένα πρόγραμμα CPD, στη δυναμική γεωμετρία, το i-INQUIRY_1 με στόχο την επέκταση του παραπάνω project στην περιοχή της δυναμικής γεωμετρίας. Ειδικότερα, αξιοποιήθηκε το λογισμικό Geogebra για τη σχεδίαση των αιθουσών με κλίμακα και για τη σύνθεση των κατόψεων του κτιρίου με στόχο την επεξεργασία των βασικών εννοιών, *ορθογώνιο (*με συγκεκριμένες διαστάσεις, *κλίμακα*, και μετασχηματισμοί (*μετακίνηση* και *περιστροφή* ορθογωνίου) ώστε να συντεθεί η κάτοψη σωστά και με *ακρίβεια*.



Σχήμα 2. (α) Κοινότητες INQUIRY (απόδοση κατά Jaworski, 2012) και i-INQUIRY (β) Το σχήμα συνεργασίας στην i-INQUIRY_1.

ΜΕΘΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Στο i-INQUIRY_1 συμμετείχαν οι παραπάνω τρεις TEs, με τους Sts τους, οι συν-συγγραφείς Res και 15 Ss τους, και τέθηκε το εξής ερευνητικό ερώτημα προς διερεύνηση: *Το i-INQUIRY_1 αποτελεί ένα πρόγραμμα CPD που μπορεί να προάγει την TPACK των συμμετεχόντων σε αυτό;*

Το σχήμα συνεργασίας, στο πλαίσιο του i-INQUIRY_1, ενσωματώνει τις προαναφερθείσες μορφές (Σχήμα 1(β)), προσθέτει τη συνεργασία TE(s) και Ss, (Σχήμα 2(β)) και προβλέπει δύο φάσεις: α) τη συνεργασία Res-TEs-Ss για τον σχεδιασμό αυθεντικών, διερευνητικών δραστηριοτήτων με το Geogebra στο πλαίσιο του project και β) την υλοποίηση των δραστηριοτήτων στην τάξη από τους μαθητές κάθε τμήματος με την υποστήριξη των Ss, παρουσία των Res και του TE του. Υλοποιήθηκαν τρεις διδασκαλίες διάρκειας 90΄ σε κάθε τμήμα (εξοικείωση με το Geogebra-κατασκευή ορθογωνίων-αιθουσών-σύνθεση κάτοψης), με κατάλληλη ανάπτυξη της TCK των Ss, αλλά μόνο θεωρητική TPK και PCK, στο πλαίσιο του μαθήματος. Οι Res, TES και Ss κατέγραψαν τον αναστοχασμό τους σχετικά με τη συμμετοχή τους στις δύο φάσεις. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας παρουσιάζεται η οπτική της TE_A, τρίτης συν-συγγραφέως της παρούσας εργασίας, σχετικά με το ερευνητικό ερώτημα, όπως αυτή προέκυψε μέσα από τη θεματική ανάλυση του αναστοχασμού της από τους Res. Η TE_A έχει 20 χρόνια διδακτικής υπηρεσίας, καθώς και πλήθος συμμετοχών σε ομάδες συνεργασίας και είναι ιδρυτικό μέλος της INQUIRY, με αντικείμενο τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους, συνεπώς έχει ένα ισχυρό υπόβαθρο στην PCK, αλλά χαμηλό στην TK (Geogebra).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται αποσπάσματα του αναστοχασμού της TE_A και συζητιούνται, κατά Fraser et al., 2007 και Niess et al., 2009.

Ατομική πτυχή	[1]Τα ψηφιακά εργαλεία έχουν σημαντική συμβολή στη μάθηση. [2]Χρειάζομαι πολύ χρόνο για να ετοιμάσω δραστηριότητες με το Geogebra. [3] Δεν έχω μέχρι στιγμής επενδύσει αρκετά στη χρήση του λογισμικού τόσο ώστε να έχω ένα πορτφόλιο με δραστηριότητες. [4]Η επιμόρφωση που είχα κάνει στο Geogebra, θεωρώ ότι είναι ελλιπής με αποτέλεσμα να μην έχω αυτοπεποίθηση. [5]Δεν είχα δυνατότητα να συζητήσω τις ιδέες μου με κάποιον συνάδελφο ή ειδικό προκειμένου να λύσω απορίες. [6]Χρειάζομαι περισσότερες εμπειρίες σε σχέση με την αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία της γεωμετρίας.
Δραστηριότητα	[7] Στόχος ήταν να δουν οι μαθητές πώς μπορούν να αξιοποιηθούν οι *υπολογιστές στην ακρίβεια της σχεδίασης του χώρου* (TK) και να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια της *κλίμακας* (CK). [8]Οι *οδηγίες κατασκευής* των αιθουσών ανέδειξαν τις *ιδιότητες* των σχημάτων-παραλληλογράμμων (TPCK). [9]Για την κατασκευή των δραστηριοτήτων απαιτείται καλή γνώση γεωμετρικών εννοιών και των δυνατοτήτων του λογισμικού (TCK). [10]Στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων συνέβαλλα στη μεγαλύτερη αυτονομία των μαθητών στη διερεύνηση (PK). [11]Η παραγωγή υλικού από μόνη της αποτελεί μια πολύ δημιουργική διαδικασία κατά την οποία προκύπτουν συνεχώς διλήμματα και ερωτήματα που αφορούν τη *διαδικασία μάθησης* (PK).

Υλοποίηση διδασκαλίας	[12]Οι μαθητές θεωρώ ότι απέκτησαν μία ακόμα εμπειρία κατασκευάζοντας σχέδια υπό *κλίμακα* (TCK) και διαπίστωσαν τη σημασία της *ακρίβειας* στη σμίκρυνση (CK). [13]Η παρατήρηση των φοιτητών στο εργαστήριο και στη διδακτική παρέμβαση με βοήθησε να καταλάβω καλύτερα ποιος πρέπει να είναι ο ρόλος μου ως διευκολυντή της μάθησης μέσω λογισμικού (TPK). [14]Η διδασκαλία θεωρώ ότι συνέβαλε στο να αποκτήσω γνώσεις που αφορούν *το ίδιο το λογισμικό* (TK), τις δυνατότητες της δυναμικής γεωμετρίας (TPACK) και τις *διδακτικές πρακτικές* δεδομένου ότι ήθελα και μπόρεσα να δω πώς θα μπορούσε να αξιοποιηθεί λογισμικό στη διδασκαλία της γεωμετρίας και κατά πόσο οι μαθητές θα μπορούσαν να δουλεύουν μόνοι τους (TPK).
i-INQUIRY	[15]Το G*eogebra* διευκολύνει την *οπτικοποίηση* των εννοιών (TC), διευκολύνει την κατανόησή τους (TPK), παρέχει τη δυνατότητα *περιστροφής/ μετατόπισης* των σχημάτων (TCK) και έτσι βοηθάει στην *άρση των παρανοήσεων* που αφορούν τα γεωμετρικά σχήματα και τις γεωμετρικές έννοιες, καθώς και έννοιες του χώρου (TPACK).[16]Η συμμετοχή μου στο πρόγραμμα μού έδωσε την ευκαιρία να ανταλλάξω ιδέες για την κατασκευή δραστηριοτήτων, τον σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης και την υλοποίησή της στην τάξη (TPACK). [17]Η ενσωμάτωση του Geogebra στο μάθημα απαιτεί άλλου τύπου σχεδιασμό (TPACK). [18]Τώρα έχω πιο ισχυρές πεποιθήσεις για την αξία της ενσωμάτωσης των ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών. [19]Θεωρώ ότι θα μπορούσα να κάνω ένα μάθημα με το Geogebra χωρίς την παρουσία φοιτητριών. [20]Θέλω να διδάξω και άλλες γεωμετρικές έννοιες χρησιμοποιώντας το Geogebra.

Πίνακας 1: Αποσπάσματα από τον αναστοχασμό της ΤΕ_Α. (χαρακτηρισμός αναφορών σε μορφές γνώσης κατά TPACK από τους Res).

Α. Ως προς τις πτυχές PL. (α) Στο *ατομικό επίπεδο*. Η εκπαιδευτικός ΤΕ_Α, πριν από τη συμμετοχή της στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων, στο πλαίσιο του i-INQUIRY_1, ήταν ικανή να χρησιμοποιήσει ως ένα σημείο το Geogebra [1-3], αναγνώριζε και αποδεχόταν τη συμβολή του [1], αλλά δεν την ενσωμάτωνε στη διδακτική/μαθησιακή διαδικασία (*στάδια αναγνώρισης-αποδοχής*), αναγνωρίζοντας τα εμπόδια που είχε [2-6]. (β) *Στο κοινωνικό επίπεδο*. Αρχικά, η εκπαιδευτικός δεν είχε σαφή εικόνα για τον τρόπο αξιοποίησης του Geogebra στη δική της διδασκαλία, αν και τα επίσημα εκπαιδευτικά υλικά παρείχαν σχετικές ιδέες. Μετά από τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων [7-11] και την παρατήρηση της διδασκαλίας με χρήση Geogebra [12-14], η εκπαιδευτικός είχε σταδιακά σημαντικές ευκαιρίες για να αποδεχθεί μετά από εμπλοκή (*στάδιο υιοθέτησης*) την αξία της ενσωμάτωσης του Geogebra στη μάθηση της γεωμετρίας ως εργαλείο διερεύνησης και για να "δοκιμάσει" έμμεσα τον σχεδιασμό της μέσω παρατήρησης και αναστοχασμού (*στάδιο 'εξερεύνησης'*). (γ) Στο *επαγγελματικό επίπεδο*. Η εκπαιδευτικός ΤΕ_Α εξελίχθηκε επίσης ως προς τη σύνδεση θεωρίας με την πράξη μέσα από τη διαπραγμάτευση εννοιολογικών θεμάτων γεωμετρίας και τη σύνδεσή τους με τη διδασκαλία.

Β. Ως προς τον τύπο του μοντέλου. Το i-INQUIRY στοχεύει στην ανάπτυξη της TPACK. Μέσω της παρατήρησης των μελλοντικών εκπαιδευτικών στη δική της τάξη η εκπαιδευτικός Α ανέπτυξε ένα προκαταρκτικό μοντέλο για να περιγράψει και να συζητήσει την πρόοδο στην εφαρμογή των νέων γνώσεων σχετικά με την αξιοποίηση του ψηφιακού εργαλείου. Η παρατήρηση διδασκαλιών σε συνδυασμό με αναστοχαστική διαδικασία αποδεικνύεται ότι συμβάλλει στην PD και σε άλλα πλαίσια μελέτης (Psycharis & Kalogeria, 2018). Η εκπαιδευτικός ΤΕ_Α δήλωσε ότι ανέπτυξε μορφές γνώσεων στην TPACK και ήταν πρόθυμη να αξιοποιήσει περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, έχοντας τη δυνατότητα μετάβασης σε πιο προχωρημένο επίπεδο, όπου θα αποδέχεται την τεχνολογία ως απαραίτητη για τη διερεύνηση των γεωμετρικών εννοιών και τη διδασκαλία τους (στάδια *εξερεύνησης* και *εξέλιξης*)[15-20]. Με βάση την οπτική της ΤΕ_Α το i-INQUIRY διακρίνεται για τον μετασχηματιστικό του χαρακτήρα.

Γ. Ως προς τις ευκαιρίες μάθησης, το i-INQUIRY παρέχει ένα πλαίσιο σχεδιασμένων ευκαιριών PL στην TPACK (βλ. πλαίσιο στο Σχήμα 1(α)), με μεγάλο βαθμό πιθανοτήτων να προκύψει η μάθηση μέσα από άτυπες ή/και τυχαίες ευκαιρίες που μπορεί να παρουσιαστούν μέσα σε αυτό.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Προγράμματα που στοχεύουν στην υποστήριξη της διδασκαλίας της Γεωμετρίας με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων είναι σχετικά περιορισμένα στην ελληνική εκπαίδευση, παρά το γεγονός ότι η “απαίτηση” για αξιοποίησή τους είναι ισχυρή. Η κοινότητα εκπαιδευτικών i-INQUIRY βασίστηκε στην αντίληψη ότι οι εκπαιδευτικοί (εν ενεργεία και μελλοντικοί) χρειάζονται εμπειρίες μάθησης ψηφιακών εργαλείων και υποστήριξη κατά την υλοποίηση στις δικές τους τάξεις. Η i-INQUIRY “πληροφορεί” για τη γνώση και τις πρακτικές που αναπτύσσονται στο πλαίσιο του CPD i-INQUIRY_1, επεκτείνοντας υπάρχοντες (βλ. Σχήματα 1, 2) και επιτρέποντας την εμβάθυνση σε τρόπους υποστήριξης των εκπαιδευτικών που συμμετέχουν. Ο αναστοχασμός της ΤΕ_Α αποτελεί μια πρώτη εκτίμηση της αποτελεσματικότητας του σχεδιασμού του i-INQUIRY_1, η οποία θα διερευνηθεί περαιτέρω μέσω των οπτικών των λοιπών συμμετεχόντων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Durdu, L. & Dag, F. (2017). Pre-Service Teachers’ TPACK Development and Conceptions through a TPACK-Based Course. *Australian Journal of Teacher Education*, 42(11), 150-171.

Fraser, C., Kennedy, A., Reid, L. & Mckinney, S. (2007). Teachers’ continuing professional development: contested concepts, understandings and models. *Journal of In-Service Education*, *33*(2), 153-169.

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM*, *44*, 613-625.

Jones, A. (2004). *A review of the research literature on barriers to the uptake of ICT by teachers*. UK: Becta.

Jones, K., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Lu, A., Dawes, M., Alison Parish, A. &

Borcherds, M. (2009). BSRLM Geometry working group: Establishing a professional development network to support teachers using dynamic mathematics software GeoGebra. In M.Joubert, (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *29*(1).

Louws, M., Meirink, J., Veen, K & Driel, J. (2017). Teachers' self-directed learning and teaching experience: What, how, and why teachers want to learn. *Teaching and Teacher Education, 66*, 171-183.

Mishra, P. & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teachers' knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Niess, M.L., Ronau, R.N., Shafer, K.G., Driskell, S.O., Harper S.R., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S.A., & Kersaint, G. (2009). Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 4-24.

Psycharis, G. & Kalogeria, E. (2018). Studying the process of becoming a teacher educator in technology-enhanced mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 631-660.

Sakonidis, C. & Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM*, 46(2), 293-304.

Tzavara, A., Komis, V., & Karsenti, T. (2018). A methodological framework for investigating TPACK integration in educational activities using ICT by prospective early childhood teachers. *Italian Journal of Educational Technology*, *26*(1), 71-89.

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΔΗΜΟΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κυριακούλα Γεωργίου, Χαρούλα Αγγελή

Πανεπιστήμιο Κύπρου

georgiou.kyriakoula@ucy.ac.cy, cangeli@ucy.ac.cy

Η ανάπτυξη της υπολογιστικής σκέψης στην προδημοτική εκπαίδευση θεωρείται απαραίτητη (Bers κ.ά., 2013· Ching κ.ά., 2018) καθώς συγκαταλέγεται ανάμεσα στις δεξιότητες του 21ου αιώνα (Lye & Koh, 2014· Yadav κ.ά., 2016). Ο αριθμός των ερευνών που διερευνούν την ανάπτυξη της υπολογιστικής σκέψης στην προσχολική εκπαίδευση είναι περιορισμένος (Angeli & Valanides, 2019). Για αυτό η παρούσα έρευνα διερευνά την επίδραση του φύλου και της γνωστικής σκαλωσιάς στην ανάπτυξη της υπολογιστικής σκέψης εκατόν ογδόντα παιδιών προδημοτικής εκπαίδευσης, μέσω έργων επίλυσης προβλήματος, που αποτελούνται από υποέργα με κλιμακούμενο βαθμό δυσκολίας (Armoni & Gal-Ezer, 2014).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιστήμη, η τεχνολογία, η μηχανική και τα μαθηματικά (STEM) αποτελούν τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζεται η υγιής ανάπτυξη της κοινωνίας μας (Chabbott & Ramirez, 2000). Επιπρόσθετα, έχει προβλεφθεί ότι, μέχρι το 2020, το 50% των επαγγελμάτων STEM θα χρησιμοποιούν έννοιες και αρχές από την επιστήμη των υπολογιστών (ACM Pathways Report, 2013). Παρόλα αυτά, παρατηρείται μία σημαντική μείωση του ανθρώπινου δυναμικού στα προαναφερόμενα πεδία και ταυτόχρονα μία μειωτική τάση του αριθμού των μαθητών που επιλέγουν τα μαθήματα STEM. Σε μαθησιακά περιβάλλοντα όπου η ΥΣ έχει χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για τη μάθηση περιεχομένου μαθημάτων STEM έχει παρατηρηθεί ότι συνεργικά εμβαθύνει τη μάθηση τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η υπολογιστική σκέψη (Computational Thinking, εφεξής ΥΣ) αφορά ένα σύνολο από πρακτικές, έννοιες και δεξιότητες που προέρχονται από την επιστήμη των υπολογιστών και εφαρμόζονται για την επίλυση προβλημάτων με υπολογιστικό τρόπο (Wing, 2006). Θεωρείται σημαντικό γεγονός, η ανάπτυξη της ΥΣ να πραγματοποιείται εντός σχολικών πλαισίων (Smith, 2016), όπως επίσης και η περαιτέρω ενσωμάτωση της στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (Grover & Pea, 2013). Παρόλο που έχουν διεξαχθεί αρκετές ερευνητικές μελέτες για τη μελέτη της ανάπτυξης της ΥΣ στη δημοτική και μέση εκπαίδευση, η ερευνητική περιοχή της ανάπτυξης της ΥΣ στην προδημοτική εκπαίδευση βρίσκεται ακόμη σε εμβρυϊκό στάδιο (Angeli & Valanides, 2019).

Η ανάπτυξη της ΥΣ, κυρίως στην προδημοτική εκπαίδευση, πραγματοποιείται με τη βοήθεια της εκπαιδευτικής ρομποτικής (Angeli & Valanides, 2019). Η εκπαιδευτική ρομποτική ενισχύει τη μάθηση εφαρμοσμένων εννοιών των μαθηματικών και της επίλυσης προβλήματος (Rogers & Portsmore, 2004). Πιο συγκεκριμένα, η σχεδίαση των διάφορων ρομποτικών συσκευών στοχεύει στην ανάπτυξη βαθύτερης κατανόησης μαθηματικών εννοιών όπως ο αριθμός, το μέγεθος και το σχήμα (Brosterman, 1997). Επιπροσθέτως μέσω της διαδικασίας της δημιουργίας και αποσφαλμάτωσης προγραμμάτων, τα παιδιά αναπτύσσουν όχι μόνο την ΥΣ τους αλλά και μία μεταγνωστική προσέγγιση επίλυσης προβλήματος και μάθησης (Bers, 2010), ενώ βελτιώνεται η οπτική μνήμη και η αίσθηση του αριθμού (Clements, 1999).

Είναι καλά τεκμηριωμένο στη βιβλιογραφία ότι η χρήση της γνωστικής σκαλωσιάς είναι επιτακτική στην εκπαίδευση, ειδικά όταν η μάθηση συνοδεύεται από εργαλεία της εκπαιδευτικής τεχνολογίας (Azevedo & Hadwin, 2005). Επιπλέον, η παροχή γνωστικής σκαλωσιάς είναι απαραίτητη για την εκπαίδευση μαθητών μικρών σε ηλικία (Belland, 2014), καθώς στην απουσία της οι μαθητές ενδέχεται να μην ολοκληρώσουν το έργο που τους ανατίθεται (Van de Pol, Volman, & Beishuizen, 2010). Μελέτες συνδέουν τη γνωστική σκαλωσιά με τη θεωρία του γνωστικού φορτίου καθώς τα εργαλεία γνωστικής σκαλωσιάς μειώνουν το γνωστικό φορτίο, που επιβάλλεται στον μαθητή κατά τη διάρκεια της μάθησης (Myhill & Warren, 2005), και παράλληλα βελτιώνουν την απόκτηση γνωστικών δεξιοτήτων (Reid-Griffin & Carter, 2004).

Ένας άλλος παράγοντας, που εξετάζεται στην παρούσα μελέτη είναι το φύλο, αφού μελέτες (π.χ. Duckworth & Seligman, 2006) υποστηρίζουν ότι οι διαφορές στο φύλο επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών και τα μαθησιακά επιτεύγματα (Sousa & Tomlinson, 2011). Συγκεκριμένα έρευνες από τον τομέα της νευρο-επιστήμης αναφέρουν ότι οι διαφορές αυτές είναι συνυφασμένες με το γεγονός ότι οι εγκέφαλοι αγοριών και κοριτσιών έχουν μορφολογικές διαφορές, με αποτέλεσμα περισσότερες περιοχές του φλοιού του εγκέφαλου να είναι αφιερωμένες στη λεκτική λειτουργία στα κορίτσια και την οπτικό-χωρική επεξεργασία της πληροφορίας στα αγόρια αντίστοιχα (Halpern κ.ά., 2007). Τα κορίτσια επομένως έχουν περισσότερο αναπτυγμένη την λεκτική και αισθητηριακή μνήμη εργασίας ενώ τα αγόρια την οπτικό-χωρική μνήμη εργασίας (Bonomo, 2010). Αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι τα κορίτσια διαπρέπουν σε σύνθετα έργα ανάγνωσης και γραφής ενώ τα αγόρια σε έργα που απαιτούν νοητική περιστροφή (Maeda & Yoon, 2013) που σύμφωνα με ερευνητικά ευρήματα σχετίζεται άμεσα με την επίδοση στα μαθηματικά (Weckbacher & Okamoto, 2014).

Η νοητική περιστροφή ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να μετασχηματίζει νοητικά την εικόνα ενός αντικειμένου για να προβλέψει πως θα είναι η εικόνα του αν περιστραφεί στον χώρο (Moore & Johnson, 2011). Με βάση τη βιβλιογραφία, οι μαθητές έχουν παρανοήσεις σε έννοιες που αφορούν την νοητική περιστροφή (Sarama & Clements, 2009). Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά δεν είναι σε θέση να διακρίνουν σωστά τα αριστερά και δεξιά μέρη του σώματος τους ούτε και να χρησιμοποιήσουν και να εφαρμόσουν τις έννοιες αριστερά και δεξιά (Sarama & Clements, 2009). Ωστόσο, τα παιδιά με κατάλληλη εκπαίδευση μπορούν να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν σωστά την έννοια του αριστερά και δεξιά, ανεξαρτήτως του φύλου τους, ενώ ασχολούνται με δραστηριότητες που σχετίζονται με την νοητική περιστροφή (Shusterman & Spelke, 2005).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

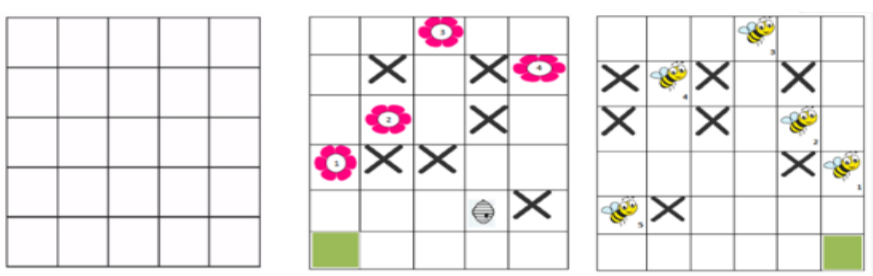
Ο συνολικός αριθμός των συμμετεχόντων ήταν εκατόν ογδόντα μαθητές της προδημοτικής εκπαίδευσης, ηλικίας πέντε με έξι ετών.

Η ρομποτική συσκευή Bee-Bot

Η ρομποτική συσκευή Bee-Bot ου χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα είναι ένα ρομπότ με γλώσσα προγραμματισμού όπως η Logo. Οι εντολές της την κατευθύνουν να κινείται μπροστά και πίσω, καθώς και να πραγματοποιεί στροφές ενενήντα μοιρών προς τα δεξιά και τα αριστερά.

Έργα επίλυσης προβλήματος

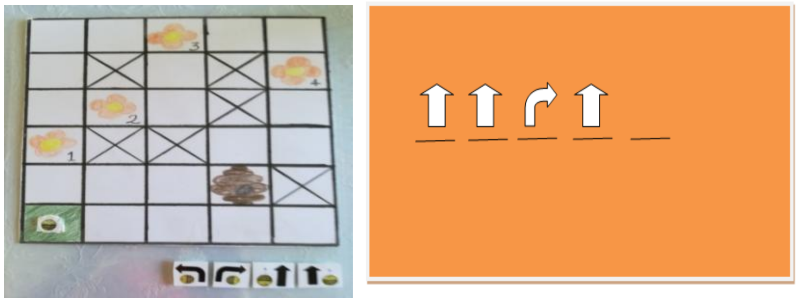
Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας έχουν σχεδιαστεί τρία έργα επίλυσης προβλήματος και τρεις πίστες εργασίας (εικόνα 1), για να εμπλέξουν τα παιδιά σε δραστηριότητες προγραμματισμού της ρομποτικής συσκευής Bee-Bot. Το πρώτο έργο στόχευε στη διδασκαλία βασικών εντολών της γλώσσας προγραμματισμού Bee-Bot και αποτελείτο από δεκατρία υποέργα. Κατά το δεύτερο έργο επίλυσης προβλήματος, η ερευνήτρια έθετε στο κάθε παιδί ένα πρόβλημα σε σχέση με το «ποια κουμπιά πάνω στη πλάτη της μελισσούλας (Bee-Bot) πρέπει να πιέσουμε για να μαζέψει τη γύρη από το λουλούδι με τον αριθμό ένα, μετά με τον αριθμό δύο κ.ο.κ. και να επιστρέψει στο τέλος στην κυψέλη της». Το δεύτερο έργο αποτελείτο από πέντε υποέργα με κλιμακούμενο βαθμό δυσκολίας καθώς, κάθε επόμενο υποέργο απαιτούσε μεγαλύτερο πλήθος εντολών για να επιλυθεί. Για το τρίτο και τελευταίο έργο κάθε παιδί καλείτο να επιλύσει το πρόβλημα: «ποια κουμπάκια πρέπει να πατήσουμε για να μπορέσει η μελισσούλα να προσκαλέσει τη μελισσούλα με τον αριθμό ένα, μετά με τον αριθμό δύο κ.ο.κ. στο πάρτυ γενεθλίων της». Το έργο αυτό αποτελείτο πάλι από πέντε υποέργα με κλιμακούμενο βαθμό δυσκολίας.



Εικόνα 1: Πίστες εργασίας για τη ρομποτική συσκευή Bee-Bot.

Εργαλεία γνωστικής σκαλωσιάς

Το πρώτο εργαλείο γνωστικής σκαλωσιάς που χρησιμοποιήθηκε, αποτελείτο από μία καρτέλα που ήταν ουσιαστικά μικρογραφία της πίστας εργασίας, της ρομποτικής συσκευής Bee-Bot και των βασικών εντολών προγραμματισμού της (εικόνα 2 αριστερά). Το παιδί μέσω του εργαλείου αυτού κατασκεύαζε τον αλγόριθμο που θα κατεύθυνε το Bee-Bot σε συγκεκριμένο μονοπάτι.



Εικόνα 2: Εργαλεία γνωστικής σκαλωσιάς.

Το δεύτερο εργαλείο παροχής γνωστικής σκαλωσιάς (εικόνα 2 δεξιά) αποτελείτο από μία καρτέλα που σε αυτή το παιδί μπορούσε να τοποθετήσει σε μία ευθεία γραμμή, μικρότερες καρτέλες που αντιπροσώπευαν τις εντολές, αναπαριστώντας τον γραμμικό τρόπο γραφής κώδικα προγραμματισμού.

Ερευνητικές διαδικασίες

Η ερευνητική διαδικασία πραγματοποιήθηκε σε τρεις ερευνητικές φάσεις, σε τρεις διαδοχικές μέρες και εξατομικευμένα για το κάθε παιδί. Κατά την πρώτη ερευνητική φάση τα παιδιά εξοικειώθηκαν με τις βασικές εντολές της ρομποτικής συσκευής Bee-Bot. Κατά τη δεύτερη ερευνητική φάση τα παιδιά χωρίστηκαν σε τρεις ισοδύναμες ομάδες (πίνακας 1) και έμαθαν να δημιουργούν αλγόριθμους που αποτελούνταν από κώδικες που το μήκος τους ξεκινούσε με τέσσερις εντολές (για το πρώτο υποέργο) και τελείωνε σε επτά εντολές (για το πέμπτο υποέργο). Κατά την δεύτερη ερευνητική φάση σημειώθηκε η αρχική αξιολόγηση της ΥΣ. Τα εργαλεία παροχής γνωστικής σκαλωσιάς αποσύρθηκαν κατά την τρίτη ερευνητική φάση από τις ομάδες που τα χρησιμοποίησαν στη δεύτερη φάση. Κατά την τρίτη και τελευταία ερευνητική φάση τα παιδιά επίλυσαν συνολικά πέντε υποέργα που είχαν την ίδια δομή με τα υποέργα της δεύτερης ερευνητικής φάσης.

Ομάδες	**Συμμετέχοντες**		
Ομάδα ελέγχου	60 (33,3%)	**Αγόρια**	**Κορίτσια**
		37	23
Εργαλείο γνωστικής σκαλωσιάς με βάση τη μοντελοποίηση	60 (33,3%)	**Αγόρια**	**Κορίτσια**
		35	25
Εργαλείο γνωστικής σκαλωσιάς με βάση τη χρήση κώδικα	60 (33,3%)	**Αγόρια**	**Κορίτσια**
		26	34
Σύνολο	180 (100%)	96	82

Πίνακας 1: Σύνθεση ομάδων συμμετεχόντων.

Ανάλυση δεδομένων

Οι αλληλεπιδράσεις των παιδιών με τη ρομποτική συσκευή Bee-Bot βιντεογραφήθηκαν παράγοντας βιντεογραφημένο υλικό διάρκειας εκατόν ογδόντα ωρών, το οποίο κωδικοποιήθηκε και αναλύθηκε κατά τη διάρκεια ενός χρόνου. Τα ερευνητικά δεδομένα αναλύθηκαν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο «process coding» (Saldaña, 2015), η οποία θεωρείται ως η καταλληλότερη όταν οι παρατηρούμενες δράσεις των μαθητών στα έργα που τους ανατίθενται περιλαμβάνουν επίλυση προβλήματος (Corbin & Strauss, 2008).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Έντυπο διαβαθμισμένων κριτηρίων

Οι ερευνήτριες διεξήγαγαν πιλοτική έρευνα για να εξετάσουν πώς τα έντυπα διαβαθμισμένων κριτηρίων μπορούσαν να σχεδιαστούν για να διατυπώσουν τις βαθμολογίες που αντιστοιχούν στην επίδοση των παιδιών ακολουθώντας το πρότυπο των Basu κ.ά. (2018). Οι ερευνήτριες συνέλεξαν όλες τις πιθανές λύσεις από τους εκατόν ογδόντα συμμετέχοντες για το κάθε έργο επίλυσης προβλήματος και στη συνέχεια παρατήρησαν κατά πόσο τα παιδιά έλυσαν τα έργα με επιτυχία κατά την πρώτη τους προσπάθεια ή αν χρειάστηκαν περισσότερες προσπάθειες αποσφαλμάτωσης. Κατά συνέπεια η μέγιστη βαθμολογία δόθηκε στους μαθητές που κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα από την πρώτη προσπάθεια όπως στο παράδειγμα του Πίνακα 2. Ένα έντυπο διαβαθμισμένων κριτηρίων δημιουργήθηκε με βάση τον συνολικό αριθμό προσπαθειών επίλυσης προβλήματος.

Κωδικός	Περιγραφή	Βαθμοί
1	Επιτυχής επίλυση προβλήματος με την πρώτη προσπάθεια	3
2	Επιτυχής επίλυση προβλήματος με την δεύτερη προσπάθεια	2
3	Επιτυχής επίλυση προβλήματος με την τρίτη προσπάθεια	1

Πίνακας 2: Παράδειγμα έντυπου διαβαθμισμένων κριτηρίων.

Επίδοση στην ανάπτυξη της ΥΣ

Διεξήχθη ανάλυση 2X3 MANOVA για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση στις επιδόσεις των αγοριών και κοριτσιών που χρησιμοποίησαν διαφορετικό εργαλείο γνωστικής σκαλωσιάς κατά τη δεύτερη ερευνητική φάση. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η χρήση της γνωστικής σκαλωσιάς έχει στατιστικά σημαντική επίδραση στην επίδοση της ΥΣ ($F(2, 179) = 49.26$, $p < 0.000$). Για να προσδιοριστεί η διαφοροποίηση στις επιδόσεις της ΥΣ όσον αφορά στα εργαλεία γνωστικής σκαλωσιάς διεξήχθη έλεγχος post-hoc χρησιμοποιώντας τη μέθοδο LSD. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι ομάδες που χρησιμοποίησαν γνωστική σκαλωσιά ξεπέρασαν σε επιδόσεις την ομάδα ελέγχου που δεν χρησιμοποίησε γνωστική σκαλωσιά.

Κατά την τρίτη ερευνητική φάση, όπου τα εργαλεία γνωστικής σκαλωσιάς αποσύρθηκαν, τα αγόρια είχαν κατά μέσο όρο καλύτερες επιδόσεις από τα κορίτσια. Διεξήχθη ανάλυση 2Χ3 MANOVA για να διερευνηθεί κατά πόσο οι διαφορές στους μέσους όρους των ομάδων κατά την τελική αξιολόγηση της υπολογιστικής σκέψης ήταν στατιστικά σημαντικές. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης κατέδειξαν ότι μόνο το φύλο είχε σημαντική επίδραση στην επίδοση της ΥΣ ($F(1, 179) = 12.82$, $p < 0.000$), αποκαλύπτοντας ότι η παρέμβαση παρήγαγε στατιστικά σημαντικότερα οφέλη για τα αγόρια ανεξάρτητα από τη χρήση ή όχι γνωστικής σκαλωσιάς κατά την προηγούμενη ερευνητική φάση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έδειξαν ότι οι επιδόσεις των αγοριών κατά την αξιολόγηση της ΥΣ υπερέβησαν τις επιδόσεις των κοριτσιών. Τα αποτελέσματα είναι συγγραμμικά με τα αποτελέσματα ερευνών που διεξήχθηκαν από τους Angeli και Valanides (2019) και από τους Román-González κ.ά (2018) και τα οποία αποκάλυψαν ότι τα αγόρια υπερέχουν σε δραστηριότητες ανάπτυξης της ΥΣ.

Οι ανισότητες μεταξύ των φύλων στην ανάπτυξη της ΥΣ μπορεί να σχετίζονται με την ικανότητα της νοητικής περιστροφής των συμμετεχόντων, δεδομένου ότι η πλειονότητα των έργων επίλυσης προβλήματος απαιτούσε το σχηματισμό ακολουθιών εντολών που περιελάμβαναν τις εντολές: στροφή προς τα δεξιά και τα αριστερά. Μελέτες έχουν δείξει ότι τα αγόρια, λόγω μεγαλύτερης οπτικο-χωρικής μνήμης εργασίας, είναι πιθανό να υπερέχουν σε οπτικό-κινητικά έργα από τα κορίτσια (π.χ. Maeda & Yoon, 2013). Για αυτόν τον λόγο οι επιδόσεις των αγοριών κατά την τρίτη ερευνητική φάση, όταν αποσύρθηκε η γνωστική σκαλωσιά ήταν καλύτερες από ότι στα κορίτσια.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας στηρίζουν τη χρήση γνωστικής σκαλωσιάς σε έργα επίλυσης προβλήματος κατά την ανάπτυξη της ΥΣ με τη χρήση της εκπαιδευτικής ρομποτικής. Αυτό διαφαίνεται από τα ευρήματα των στατιστικών αναλύσεων κατά τη δεύτερη ερευνητική φάση όπου δεν σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα. Επομένως η γνωστική σκαλωσιά αποτέλεσε σημαντικό αρωγό και για τα δύο φύλα όπως έδειξαν και προηγούμενες έρευνες που επισημαίνουν τη σημαντικότητα χρήσης της γνωστικής σκαλωσιάς σε δραστηριότητες με εκπαιδευτική τεχνολογία (Angeli & Valanides, 2004· Azevedo & Hadwin, 2005).

Τα ευρήματα αυτής της μελέτης έχουν τόσο θεωρητική όσο και πρακτική σημασία. Όσον αφορά τη θεωρητική, η παρούσα έρευνα επεκτείνει προηγούμενα ευρήματα στις διαφορές φύλου στην ανάπτυξη της ΥΣ παρέχοντας πρόσθετα δεδομένα. Σχετικά με τη πρακτική σημασία, οι συγγραφείς προτείνουν συγκεκριμένα εργαλεία γνωστικής σκαλωσιάς και έργα επίλυσης προβλήματος σε εκπαιδευτικούς προδημοτικής εκπαίδευσης που προωθούν στην ανάπτυξη της ΥΣ και αποτελούν συνάμα μία σύγχρονη προσέγγιση στη διδασκαλία της ΥΣ.

Εν κατακλείδι τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας υποστηρίζουν την ανάπτυξη της ΥΣ στην προδημοτική εκπαίδευση μέσω της εκπαιδευτικής ρομποτικής και κατά επέκταση της ενσωμάτωσης της διδασκαλίας της ΥΣ στα αναλυτικά προγράμματα της προδημοτικής εκπαίδευσης. Αυτό το γεγονός μπορεί να αποτελέσει σημαντικό στοιχείο για την αύξηση του ενδιαφέροντος των μαθητών και της πιθανότητας της μετέπειτα κατανόησης εννοιών από τα πεδία της επιστήμης, της τεχνολογίας, της μηχανικής και των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Armoni, M., & Gal-Ezer, J. (2014). Early computing education: why? what? when? who?. *ACM Inroads, 5*(4), 54-59.

Angeli, C., & Valanides, N. (2004). The effect of electronic scaffolding for technology integration on perceived task effort and confidence of primary student teachers. *Journal of Research on Technology in Education*, 37(1), 29-43

Angeli, C., & Valanides, N. (2019). Developing Young Children's Computational Thinking with Educational Robotics: An Interaction Effect between Gender and Scaffolding Strategy. *Computers in Human Behavior.*

Azevedo, R., & Hadwin, A. F. (2005). Scaffolding self-regulated learning and metacognition–Implications for the design of computer-based scaffolds. *Instructional Science, 33*(5), 367-379.

Basu, S., McElhaney, K., Grover, S., Harris, C., & Biswas, G. (2018). *A Principled Approach to Designing Assessments That Integrate Science and Computational Thinking.* London, England: ISLS.

Belland, B. R., Kim, C., & Hannafin, M. J. (2013). A framework for designing scaffolds that improve motivation and cognition. *Educational psychologist, 48*(4), 243-270.

Bers, M. U. (2010). The TangibleK Robotics program: Applied computational thinking for young children. *Early Childhood Research & Practice, 12*(2), 1-20.

Bers, M., Seddighin, S., & Sullivan, A. (2013). Ready for robotics: Bringing together the T and E of STEM in early childhood teacher education. *Journal of Technology and Teacher Education, 21*(3), 355-377.

Bonomo, V. (2010). Gender Matters in Elementary Education: Research-Based Strategies to Meet the Distinctive Learning Needs of Boys and Girls. *Educational Horizons, 88*(4), 257-264.

Chabbott, C., Ramirez, F. 2000. Development and education. In: M. Hallinan (Ed.), *Handbook of sociology of education* (pp. 163–188). New York, NY: Plenum.

Ching, Y. H., Hsu, Y. C., & Baldwin, S. (2018). Developing Computational Thinking with Educational Technologies for Young Learners. *TechTrends*, 1-11.

Clements, Douglas H. (1999). The future of educational computing research: The case of computer programming. *Information Technology in Childhood Education Annual*, 147-179.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Strategies for qualitative data analysis. Basics of Qualitative Research. Techniques and procedures for developing grounded theory.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Duckworth, A. L., & Seligman, M. E. (2006). Self-discipline gives girls the edge: Gender in self-discipline, grades, and achievement test scores. *Journal of educational psychology, 98*(1), 198-208.

Halpern, D. F., Benbow, C. P., Geary, D. C., Gur, R. C., Hyde, J. S., & Gernsbacher, M. A. (2007). The science of sex differences in science and mathematics. *Psychological Science in the Public Interest, 8*(1), 1–51.

Lye, S. Y., & Koh, J. H. L. (2014). Review on teaching and learning of computational thinking through programming: What is next for K-12?. *Computers in Human Behavior, 41*, 51-61.

Maeda, Y., & Yoon, S. Y. (2013). A meta-analysis on gender differences in mental rotation ability measured by the Purdue spatial visualization tests: Visualization of rotations (PSVT: R). *Educational Psychology Review, 25*(1), 69-94.

Moore, D., & Johnson, S. P. (2011). Mental rotationof dynamic, three-dimensional stimuli by 3month-old infants. *Infancy, 16*(4), 435-445.

Reid-Griffin, A., & Carter, G. (2004). Technology as a tool: applying an instructional model to teach middle school students to use technology as a mediator of learning. *Journal of Science Education and Technology, 13*(4), 495-504.

Rogers, C., & Portsmore, M. (2004). Bringing engineering to elementary school. *Journal of STEM Education: Innovations & Research, 5*(4), 17-28.

Román-González, M., Pérez-González, J. C., Moreno-León, J., & Robles, G. (2018). Extending the nomological network of computational thinking with non-cognitive factors. *Computers in Human Behavior, 80,* 441-459.

Saldaña, J. (2015). *The coding manual for qualitative researchers.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children. New York, NY: Routledge:

Shusterman A, Spelke ES. Language and the development of spatial reasoning. In: Carruthers P, Laurence S, Stich S, editors. The innate mind: Structure and contents. New York, NY: Oxford University Press.

Sousa, D. A., & Tomlinson, C. A. (2011). *Differentiation and the brain: How neuroscience supports the learner-friendly classroom.* Bloomington: Solution Tree Press.

Van Merriënboer, J. J., Kirschner, P. A., & Kester, L. (2003). Taking the load off a learner's mind: Instructional design for complex learning. *Educational psychologist, 38*(1), 5-13.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the development of children, 23*(3), 34-41

Weckbacher, L. M., & Okamoto, Y. (2014). Mental rotation ability in relation to self-perceptions of high school geometry. *Learning and Individual Differences, 30*, 58-63.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. Communications of the ACM, 49(3), 33-35.

Yadav, A., Hong, H., & Stephenson, C. (2016). Computational thinking for all: pedagogical approaches to embedding 21st century problem solving in K-12 classrooms. *TechTrends, 60*(6), 565-568.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Γενοβέφα Τσιρικίδου[1], **Χαράλαμπος Σακονίδης**[2]

[1]1ο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Θεσσαλονίκης, [2]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

[1]veffapapa@gmail.com, [2]xsakonid@eled.duth.gr

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι διδακτικές πρακτικές που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη των μαθηματικών, παρά τον κρίσιμο ρόλο τους στη μάθηση των μαθητών, είναι περιορισμένης εμβέλειας. Η εργασία εστιάζει στις διδακτικές πρακτικές δυο έμπειρων εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα αποτυπώνουν τη χρήση περιορισμένου αριθμού διδακτικών πρακτικών, με συχνότερες εκείνες της διατύπωσης ερωτήσεων και της αξιοποίησης της συμβολής του μαθητή που όμως προσφέρουν χαμηλές προκλήσεις μάθησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ

Η λειτουργία μιας τάξης των μαθηματικών συνιστά ένα περίπλοκο φαινόμενο, στο επίκεντρο του οποίου βρίσκεται το μαθηματικό περιεχόμενο, οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός, καθώς και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους (Kaldrimidou, Sakonidis, & Tzekaki, 2003).

Η ερώτηση ‘τι χαρακτηρίζει μια διδασκαλία των μαθηματικών καλή’ δεν διαθέτει ακόμη ικανοποιητική απάντηση (Charalampous & Litke, 2018). Αυτό οφείλεται αφενός στην πολυπλοκότητα της διδακτικής πράξης που καθορίζεται τόσο από εξωγενείς όσο και ενδογενείς παράγοντες και αφετέρου (ή εξαιτίας αυτού) στη δυσκολία προσδιορισμού μιας επιστημονικά έγκυρης μεθοδολογίας αξιολόγησής της (English & Kirshner, 2015). Τις τελευταίες δεκαετίες η σχετική έρευνα επικεντρώθηκε σε δυο βασικές συνιστώσες της εκπαιδευτικής πράξης στα μαθηματικά και στην αλληλεπίδρασή τους: τις γνώσεις και τη διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών.

Είναι γενικά αποδεκτό ότι προϋπόθεση για μια αποτελεσματική διδασκαλία αποτελεί η γνώση του αντικειμένου μάθησης από τον εκπαιδευτικό σε επίπεδο που θα επιτρέψει να υποστηρίξει τους μαθητές του να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη σε βαθμό που διασφαλίζει την κοινωνική, προσωπική, ακαδημαϊκή και επαγγελματική επιτυχία τους ως πολίτες. Σε αυτήν την ‘καλή γνώση’ των μαθηματικών θα πρέπει να προστεθεί και η ‘καλή γνώση’ της παιδαγωγικής του αντικειμένου μάθησης. Μελέτες των τελευταίων δυο δεκαετιών καταγράφουν σοβαρές υστερήσεις στους δυο αυτούς τύπους γνώσης των εκπαιδευτικών που συνδέονται με την ελλιπή προετοιμασία και επαγγελματική τους στήριξη, με προφανείς συνέπειες για τη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών (Ball, Thames, & Phelps, 2008).

Οι ανωτέρω γνώσεις των εκπαιδευτικών αλλά και οι τρόποι που τις αξιοποιούν στην τάξη, δηλαδή, οι διδακτικές τους πρακτικές, καθώς και οι επιπτώσεις τους στη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές προσέλκυσαν το ερευνητικό ενδιαφέρον ιδιαίτερα τις δυο τελευταίες δεκαετίας. Οι σχετικές μελέτες εστιάζουν σε ζητήματα διαχείρισης κοινωνικο-πολιτισμικών παραμέτρων (κυρίως επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης) και γνωστικών παραμέτρων (της κατανόησης των μαθηματικών ιδεών από τους μαθητές, των παρανοήσεών τους και των ερωτήσεων με στόχο τη γνωστική τους ανάπτυξη). Τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα παρουσιάζονται στη συνέχεια με συντομία.

Μια από τις κρίσιμες διδακτικές πρακτικές αφορά σε αυτές της επικοινωνίας στην τάξη. Ο εκπαιδευτικός καλείται να δημιουργήσει κατάλληλο περιβάλλον λόγου που θα βοηθήσει τους μαθητές να επικοινωνήσουν μαθηματικά. Να ενθαρρύνει την προσέγγιση σημαντικών μαθηματικών ιδεών μέσα από τη δρομολόγηση πολλαπλών διαδρομών στο πλαίσιο της διδασκαλίας. Η διαμόρφωση μαθηματικού λόγου, η ανάπτυξη προτύπων ενασχόλησης με τα μαθηματικά αλλά και σχέσεων με τους άλλους εταίρους της μάθησης στην τάξη είναι στοιχεία που καθορίζουν την επικοινωνιακή πρακτική της τάξης (Franke, Kazemi, & Battey, 2007).

Ένας άλλος σημαντικός τομέας άσκησης της διδακτικής πρακτικής, που συνδέεται άμεσα με τα επιτεύγματα των μαθητών, αφορά στην αλληλεπίδραση μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητών αλλά και των μαθητών μεταξύ τους Allen et al. (2011). Πολλές φορές οι ευκαιρίες μάθησης που εμφανίζονται σε μια μαθηματική τάξη επηρεάζονται από περιβαλλοντικούς παράγοντες, όπως η συναισθηματική ένταση που προκαλούν οι αλληλεπιδράσεις (Walkowiak, et al., 2014).

Συχνά ο εκπαιδευτικός προσεγγίζει μια μαθηματική ιδέα από την πλευρά του μαθητή, επιλέγοντας τα στοιχεία που θα οδηγήσουν στην κατανόησή της (Ball, Hill, & Bass, 2005), ενώ παράλληλα παρακολουθεί ποιος συμμετέχει, και πώς συμμετέχει, επιδιώκοντας να αναδείξει τόσο το γλωσσικό και μαθηματικό υπόβαθρο των μαθητών όσο και τις αντιλήψεις, στάσεις και ταυτότητες που διαθέτουν (Lampert, 2001).

Παρά το γεγονός ότι τα λάθη συνιστούν σημαντικές πτυχές της διαδικασίας μάθησης, οι λίγες μελέτες που εστιάζονται σε δραστηριότητες αντιμετώπισης λαθών δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί δεν τα χρησιμοποιούν συστηματικά ως ευκαιρίες μάθησης για τους μαθητές τους, ακολουθώντας μια έμμεσα συμπεριφοριστική προσέγγιση (Oser & Spychiger, 2005). Επιπλέον, η συζήτηση για τη διαχείριση των μαθηματικών λαθών στην τάξη είναι αξιοσημείωτα περιορισμένη. Για παράδειγμα, η Borasi (1996), εστιάζοντας στα λάθη που χρησιμοποιούνται ως αφορμή για διερεύνηση, περιγράφει τρία επίπεδα αφαίρεσης του μαθηματικού λόγου (εκτέλεση συγκεκριμένου μαθηματικού έργου, κατανόηση του περιεχομένου των τεχνικών μαθηματικών και κατανόηση της φύσης των μαθηματικών), καθώς και τρεις διακριτές φάσεις μάθησης (αποκατάσταση, ανακάλυψη και διερεύνηση).

Αν και είναι ευρέως αποδεκτό ότι η διατύπωση ερωτήσεων στην τάξη, τόσο από τον εκπαιδευτικό όσο και από τους μαθητές, προωθεί τη σκέψη και τη μάθηση των τελευταίων, η σχετική έρευνα υποδεικνύει φτωχή αξιοποίηση της συγκεκριμένης πρακτικής στην τάξη των μαθηματικών. Οι σχετικές έρευνες υποδεικνύουν ότι περισσότερο από το 1/3 του διδακτικού χρόνου δαπανάται στη διατύπωση ερωτήσεων που στην πλειοψηφία τους δεν ενθαρρύνουν τη σκέψη των μαθητών, μαθητές με χαμηλότερη επίδοση έχουν λιγότερες ευκαιρίες να απαντούν σε ερωτήσεις συγκριτικά με τους υπόλοιπους, οι εκπαιδευτικοί περιμένουν λιγότερο από 1 δευτερόλεπτο για την απάντηση σε μια ερώτηση, ενώ, όταν περιμένουν 3 - 5 δευτερόλεπτα μετά την ερώτηση, οι μαθητές δίνουν απαντήσεις υψηλότερου επιπέδου, απαντούν με περισσότερη σιγουριά και επιζητούν επιπλέον ερωτήσεις (Orletsky, 1997).

Τα ανωτέρω σκιαγραφούν σε ένα πρώτο επίπεδο την πολυπλοκότητα της εκπαιδευτικής πράξης στα μαθηματικά υποδεικνύοντας, ταυτόχρονα, και την περιορισμένη σχετική έρευνα, παρά την αναγνωρισμένη αξία χαρτογράφησης της διδακτικής πρακτικής και των τρόπων με τους οποίους επηρεάζει τα μαθησιακά αποτελέσματα. Η μελέτη που παρουσιάζεται στη συνέχεια επιχειρεί μια πρώτη συστηματική αποτύπωση σε αυτήν την κατεύθυνση.

Η ΜΕΛΕΤΗ

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των κυρίαρχων διδακτικών πρακτικών που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στο πλαίσιο της διαχείρισης της γνώσης και των γνωστικών παραμέτρων στην τάξη των μαθηματικών.

Για τη διεξαγωγή της έρευνας υιοθετήθηκε η μέθοδος της πολλαπλής μελέτης περίπτωσης. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε Δημοτικό Σχολείο αστικής περιοχής της Βορείου Ελλάδας όπου τα υποκείμενα της μελέτης, η Ελένη (9 χρόνια υπηρεσίας) και η Δέσποινα (15 χρόνια υπηρεσίας), με περιορισμένη και εκτεταμένη επαγγελματική κατάρτιση, δίδασκαν στις Γ΄ και Στ΄ τάξεις αντιστοίχως. Οι μαθητές των δυο τάξεων δεν παρουσιάζουν κάποια διαγνωσμένη απόκλιση μαθησιακού ή συμπεριφορικού χαρακτήρα, σύμφωνα με τις εκπαιδευτικούς.

Τα δεδομένα αποτέλεσαν οι απομαγνητοφωνήσεις τριών διδακτικών περιόδων για καθεμιά εκπαιδευτικό σε διαφορετικές χρονικές στιγμές κατά το σχολικό έτος 2016-17, καθώς και σημειώσεις πεδίου. Υιοθετώντας τεχνικές της Θεμελιωμένης Θεωρίας (grounded theory) επιχειρήθηκε η χαρτογράφηση των πρακτικών που αξιοποιούσε κάθε εκπαιδευτικός. Συγκεκριμένα, εντοπίστηκαν αρχικά οι κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές που συνδέονταν με γνώση και γνωστικές παραμέτρους της μάθησης στο απομαγνητοφωνημένο κείμενο της πρώτης διδασκαλίας για κάθε εκπαιδευτικό και κωδικοποιήθηκαν. Οι πρακτικές αυτές αναζητήθηκαν και στις υπόλοιπες διδασκαλίες κάθε εκπαιδευτικού, εμπλουτίστηκαν και χωρίστηκαν σε υπο-κατηγορίες με κριτήριο τη σκοπιμότητά τους, δημιουργώντας ένα χάρτη διδακτικών πρακτικών της εκπαιδευτικού.

Για την αναπαράσταση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το συστημικό δίκτυο που επιτρέπει την ενιαία απεικόνιση δεδομένων και τη διάκριση διαφόρων επιπέδων συνθετότητας σε αυτά (μέσω της δημιουργίας υποκατηγοριών), παρέχοντας έτσι τη δυνατότητα αποσαφήνισης της δομής τους με βάση προκαθορισμένο θεματικό άξονα (Mason, 2002/2011). Στο δίκτυο που συγκροτήθηκε για κάθε εκπαιδευτικό διακρίνονται τρία επίπεδα απεικόνισης: του περιεχομένου, του τύπου/ είδους και της στόχευσής της διδακτικής πρακτικής που υιοθετείται. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στο περιεχόμενο των κυρίαρχων διδακτικών πρακτικών που καταγράφηκαν, δηλαδή, της γνώσης και των γνωστικών λειτουργιών του μαθητή.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τέσσερις δημοφιλείς διδακτικές πρακτικές που αφορούσαν τη γνώση και τις γνωστικές διεργασίες αποτυπώθηκαν στις δυο τάξεις: η διατύπωση ερωτήσεων, η αξιοποίηση της συμβολής του μαθητή, η διαχείριση του λάθους και η χρήση παραδειγμάτων. Τα χαρακτηριστικά και η λειτουργικότητά τους παρουσιάζονται και σχολιάζονται στην παρούσα ενότητα, μέσα από αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα αξιοποίησής τους.

Η εκπαιδευτικός της Γ΄ τάξης (Ελένη) χρησιμοποιεί ως κυρίαρχη πρακτική στις διδασκαλίες της την αξιοποίηση της συμβολής του μαθητή, τείνοντας, ωστόσο, απλώς να επαναλαμβάνει τις απαντήσεις μαθητών στοχεύοντας στην κατανόηση. Το παρακάτω επεισόδιο προέρχεται από διδασκαλία της σχετική με την έννοια του κλάσματος (1η διδασκαλία).

Δ (Ελένη): Να το χωρίσει. Στο αντικείμενό μου;

Μ: Μία πίτσα.

Δ: Άλλο… πίτσα…τι άλλο μπορώ να χωρίσω.. Μαρία;

Μ: Μπορώ να χωρίσω μια ...πίτα

Δ: Πίτσα, πίτα τι άλλο;

Μ; Σοκολάτα!

Δ: Σοκολάτα ..Χριστίνα;

Μ: Τούρτα!

Δ: Τούρτα, Στέλλα;

Μ: Ντομάτα

Δ: Ντομάτα ... Έλενα…

Η χρήση ανολοκλήρωτων φράσεων για την επέκταση του τρόπου σκέψης του μαθητή, καθώς και η συμπλήρωση απάντησης για την προσέγγιση της γνώσης εμφανίζονται σε χαμηλότερο βαθμό συγκριτικά με την παραπάνω πρακτική, ενώ η αποκάλυψη μιας διαδικασίας για τη διευκόλυνση της σκέψης του μαθητή προκύπτει σπανιότερα.

Η αμέσως επόμενη σε προτίμηση πρακτική της Ελένης είναι η διατύπωση αλληλουχίας ερωτήσεων, πρωτίστως για την αποσαφήνιση της μαθηματικής γνώσης και σε μικρότερο βαθμό για τη διευκόλυνση της κατανόησης της μαθηματικής έννοιας. Η χρήση ερωτήσεων με σκοπό την επανάληψη της μαθηματικής γνώσης, τη συμπλήρωση/επέκταση του τρόπου σκέψης των μαθητών αλλά και την υποστήριξη της υπολογιστικής σκέψης ελάχιστα εμφανίζεται στις διδασκαλίες της (2η διδασκαλία).

Δ: Πόσα έχει αυτή τη στιγμή η λίμνη;

Μ: 1.919

Δ: Αλλά πέταξαν πίσω…τα 563…πόσα είχατε πει;;

Μ: Εεε…517

Δ: Ωραία, τι πράξη θα κάνουμε;

Μ: Πρόσθεση.

Δ: Πρόσθεση. Ποιος θα έρθει; Έλα, Δημήτρη. Τι αριθμούς θα βάλουμε;

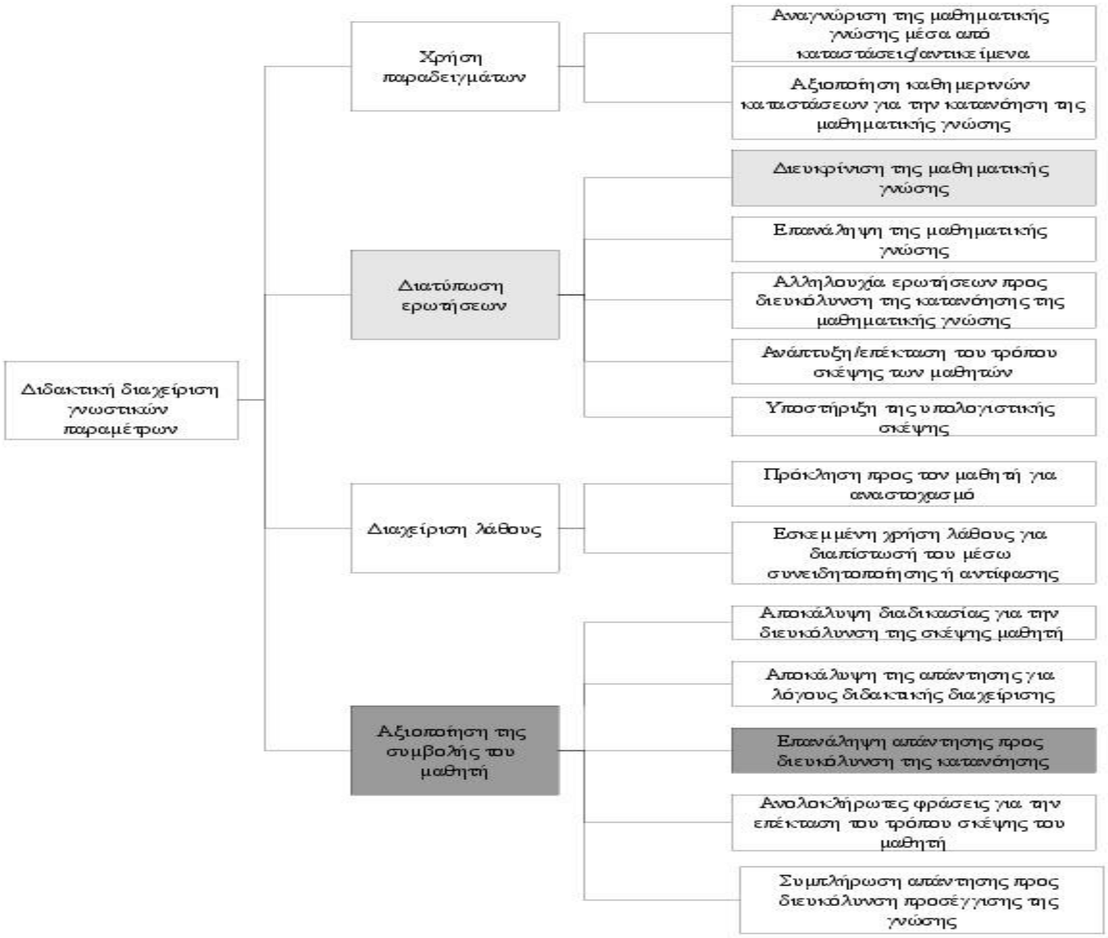
Η πρακτική της διαχείρισης του λάθους εμφανίζεται στις διδασκαλίες της Γ΄ τάξης σε ακόμα μικρότερη συχνότητα σε σχέση με τις προηγούμενες. Τείνει να διαχειρίζεται το λάθος κυρίως για να προκαλέσει τον μαθητή να σκεφτεί ξανά μια λανθασμένη σκέψη του και σπάνια εσκεμμένα (2η διδασκαλία).

Μ: 9 και 6 δεκατρία

Δ: Πες το πάλι Θέκλα.

Η διδακτική αξιοποίηση παραδειγμάτων παρουσιάζεται σε πολύ μικρό ποσοστό στις διδασκαλίες της Ελένης.

Το δίκτυο με τις κυρίαρχες πρακτικές που αποτυπώθηκαν στην Γ΄ τάξη παρουσιάζεται στο Σχεδιάγραμμα 1.



Σχεδιάγραμμα 1. Δίκτυο διδακτικών πρακτικών Γ΄ τάξης (σκιασμένες οι επικρατούσες)

Η κυρίαρχη διδακτική πρακτική της εκπαιδευτικού της Στ΄ τάξης (Δέσποινα) κατά τη διαχείριση των γνωστικών παραμέτρων είναι η διατύπωση ερωτήσεων με σκοπό την αποσαφήνιση της μαθηματικής γνώσης/ σκέψης και τη συμπλήρωση/επέκταση του τρόπου σκέψης των μαθητών (1η διδασκαλία).

Δ: Λέει να συμπληρώσουμε τα κενά με κατάλληλους αριθμούς

ώστε οι λόγοι να γίνουν αναλογίες.

Δ: Δηλαδή, τι θέλει; Οι λόγοι να είναι….;

Χρησιμοποιεί, επίσης, ερωτήσεις με σκοπό την επανάληψη της μαθηματικής γνώσης όμως, σε μικρότερο βαθμό, ενώ η αλληλουχία ερωτήσεων και οι ερωτήσεις για την υποστήριξη της υπολογιστικής σκέψης εμφανίζονται ελάχιστα.

Η διδακτική πρακτική της αξιοποίησης της συμβολής του μαθητή εμφανίζεται με μικρότερη συχνότητα σε σχέση με τη διατύπωση ερωτήσεων. Ασκώντας αυτήν την πρακτική, η Δέσποινα τείνει να αποκαλύπτει την απάντηση για λόγους διευκόλυνσης της διδακτικής διαχείρισης και να επαναλαμβάνει με σκοπό την κατανόηση. Το παρακάτω στιγμιότυπο αποτυπώνει την πρακτική της αξιοποίησης της συμβολής του μαθητή με την αποκάλυψη της απάντησης (2η διδασκαλία):

Δ: Για δείτε τι έκανε ο Χρυσόστομος. Πρώτα λέει ας απλοποιήσω.

αυτό το κλάσμα. Πώς το απλοποιώ; Διαιρώ και τα δύο με το 4.

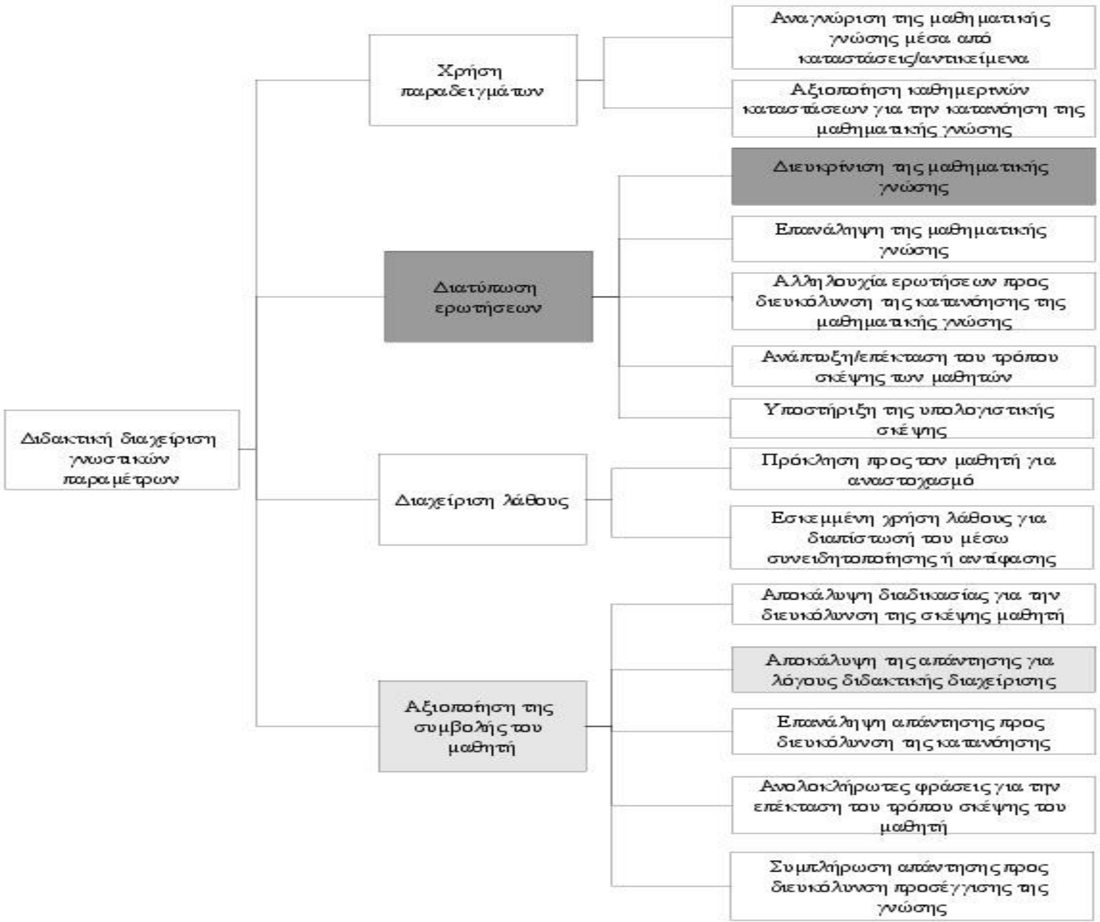
Σε μικρότερο βαθμό χρησιμοποιεί η Δέσποινα την αποκάλυψη διαδικασίας για την διευκόλυνση της σκέψης των μαθητών, καθώς και φράσεις που παραμένουν ανολοκλήρωτες με σκοπό να βοηθήσουν στην επέκταση του τρόπου σκέψης. Ακόμη, αξιοποιεί με πολύ μικρή συχνότητα τη συμπλήρωση απαντήσεων για τη διευκόλυνση προσέγγισης της γνώσης στις διδασκαλίες της. Τέλος, κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών της δεν παρατηρήθηκαν η πρακτική της χρήσης παραδειγμάτων και της διαχείρισης του λάθους σε βαθμό που να τις καθιστά υπολογίσιμες.

Στο συστημικό δίκτυο που παρουσιάζεται στο Σχεδιάγραμμα 2 (βλ. επόμενη σελίδα) εμφανίζονται συγκεντρωτικά οι κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές που αξιοποιήθηκαν από την εκπαιδευτικό της Στ΄ τάξης.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Οι εκπαιδευτικοί των δυο τάξεων, που απευθύνονται σε διαφορετικούς μαθητές ηλικιακά και αναπτυξιακά, χρησιμοποιούν μικρό αριθμό διδακτικών πρακτικών, περιορισμένης εμβέλειας, για την επίτευξη του μαθηματικού στόχου μάθησης από τους μαθητές τους, με πιο συνήθεις τη χρήση παραδειγμάτων, τη διατύπωση ερωτήσεων, τη διαχείριση λάθους και την αξιοποίηση της συμβολής του μαθητή.

Η διδακτική πρακτική της διατύπωσης ερωτήσεων υιοθετείται και από τις δύο εκπαιδευτικούς, σε συμφωνία με τη σχετική βιβλιογραφία που υποστηρίζει ότι σχεδόν ο μισός διδακτικός χρόνος χρησιμοποιείται στη διατύπωση ερωτήσεων (Orletsky, 1997), με διαφοροποίηση, όμως, ως προς τη συχνότητα εφαρμογής της. Η εκπαιδευτικός της Στ΄ τάξης την εφαρμόζει σε μεγαλύτερη συχνότητα σε σχέση με την εκπαιδευτικό της Γ΄ τάξης. Ωστόσο, η στόχευση της πρακτικής εμφανίζεται κοινή: την αποσαφήνιση της μαθηματικής σκέψης που διατυπώνουν οι μαθητές.



Σχεδιάγραμμα 2. Δίκτυο διδακτικών πρακτικών Στ΄ τάξης (σκιασμένες οι επικρατούσες).

Η διδακτική πρακτική της αξιοποίησης της συμβολής του μαθητή εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα στην εκπαιδευτικό της Γ΄ τάξης παρά της Στ΄ τάξης, όπου αποτελεί τη δεύτερη σε συχνότητα πρακτική. Επιπλέον, η μορφή και η στόχευση της συγκεκριμένης πρακτικής διαφέρουν στις δυο εκπαιδευτικούς. Στην Γ΄ τάξη συνίσταται στην επανάληψη της απάντησης για 'διευκόλυνση' της κατανόησης, ενώ στη Στ΄ στην 'αποκάλυψη' της απάντησης για 'να προχωρήσει το μάθημα'.

Η χρήση του παραδείγματος ως διδακτική πρακτική αξιοποιήθηκε κυρίως από την εκπαιδευτικό της Γ΄ τάξης και αρκετά συχνά, με αναφορά σε καθημερινές καταστάσεις, για να διευκολύνει την κατανόηση της μαθηματικής γνώσης. Η εκπαιδευτικός της ΣΤ΄ τάξης σπανίως χρησιμοποίησε παραδείγματα για να υποστηρίξει διδακτικά τη μάθηση των μαθητών.

Τέλος, η διδακτική αξιοποίηση του λάθους στις δυο τάξεις διέφερε σημαντικά από άποψη συχνότητας αλλά και λειτουργικότητας, συνάδοντας συνολικά με τη βιβλιογραφική διαπίστωση για την απουσία ουσιαστικής επαγγελματικής γνώσης των εκπαιδευτικών σχετικά με τη διαχείριση των μαθηματικών λαθών στην τάξη (Oser & Spychiger, 2005). Η εκπαιδευτικός της Γ΄ τάξης έτεινε να την προτιμά συχνά, έχοντας ως στόχο να προκαλέσει τους μαθητές να αναστοχαστούν σχετικά με τη λανθασμένη σκέψη. Η εκπαιδευτικός της Στ΄ τάξης από την άλλη σπάνια έδινε την ευκαιρία στους μαθητές να προβληματιστούν έστω αναφορικά με κάποιο λάθος που πρόκυπτε στην τάξη.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων υποδεικνύουν ότι, παρά τις διαφορές του επαγγελματικού τους προφίλ, οι δυο εκπαιδευτικοί αξιοποιούν περιορισμένο σε συχνότητα και εύρος φάσμα διδακτικών πρακτικών στην προσπάθεια διαχείρισης της γνώσης και των γνωστικών παραμέτρων της μάθησης των μαθηματικών στην τάξη. Επιπλέον, η τυπολογία των τεσσάρων πλέον δημοφιλών διδακτικών τους πρακτικών (διατύπωση ερωτήσεων, αξιοποίηση της συμβολής του μαθητή, διαχείριση του λάθους και χρήση παραδειγμάτων) διαφέρει ελάχιστα. Τέλος, οι μικρές διαφορές που ανιχνεύονται στις διδακτικές τους πρακτικές αναφορικά με τη μαθησιακή τους στόχευση συνδέονται περισσότερο με μια συμπεριφορστική παρά με μια κονστρουκτιβιστική ανάγνωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, κυρίως στην περίπτωση της εκπαιδευτικού της Στ΄ τάξης.

Τα ευρήματα της έρευνας συνάδουν με αυτά της βιβλιογραφίας που εντοπίζει χαμηλών προκλήσεων διδακτικές πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο (π.χ., Orletsky, 1997), υποδεικνύοντας ότι ακόμη και σήμερα παραμένει ένα κλειστό και κυρίαρχα συμπεριφοριστικό περιβάλλον μάθησης. Καθιστούν δε φανερή την ανάγκη για έρευνες που συμβάλουν στη βαθιά κατανόηση του φαινομένου και την οργάνωση προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών που μπορούν να ανατρέψουν την ανησυχητική και επίμονη αυτή πραγματικότητα της διδακτικής πράξης στην τάξη των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Allen, J. P., Pianta, R. C., Gregory, A., Mikami, A. Y., & Lun, J. (2011). An interaction-based approach to enhancing secondary school classrooms: Revisiting the factor structure and practical application of the Classroom Assessment Scoring System Secondary. *The Journal of Early Adolenscence*(35), pp. 651-680.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*(29), pp. 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*(59), pp. 389-407.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ:Ablex Publishing Corporation.

Charalambous, C. Y., & Litke, E. (2018). Studing instructional quality by using a content - specific lens: The case of mathematical quality of instruction framework. *ZDM*(50), pp. 445-460.

English, L. D., & kirshner, D. (2015). *Handbook of international research in mathematics education.* New York : Routledge.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. k. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Carlotte. NC.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, C., & Tzekaki, M. (2003). Teachers' interventions in students' mathematical work: a classification. In m. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME. 3*, pp. 1-11. Italy: University of Pisa.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven: Yale University Press.

Mason, J. (2002/2011). *Η διεξαγωγή της ποιοτικής έρευνα.* Αθήνα: Πεδίο.

Orletsky, S., (1997). *Questioning and understanding to improve learning and thinking*. Appalachia Educational Laboratory; http://www.ael.org.

Oser, F., & Spychiger, M. (2005). *Lernen ist schmerzhaft. Zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur*. Weinheim (Germany): Beltz.

Walkowiak, T. A., Berry, R. Q., Meyer, J. P., & Rimm-Kaufman, S. E. (2014). Introducing an observational measure of standards-based mathematics teaching practices:Evidence of validity and score reliability. *Educational Studies in Mathematics* (85), pp. 109-128.

ΑΝΑΔΥΟΜΕΝΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΕΞΙΣΤΟΡΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΙΑ ΜΑΚΡΟΧΡΟΝΙΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

Χαρά Κορτέση - Δαφέρμου[1], Χαράλαμπος Σακονίδης[2]

[1]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,

[2]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

[1]hdafermou@ecd.uoa.gr, [2]xsakonid@eled.duth.gr

Η έννοια της ταυτότητας μάθησης των μαθηματικών (ΤΜΜ) επιτρέπει τη διερεύνηση της σχέσης που διαμορφώνει ο μαθητής με τα μαθηματικά μέσα από εξιστορήσεις που καθιστούν ορατή τη διεργασία συγκρότησής του ως μαθηματικού υποκειμένου. Η έρευνα που παρουσιάζεται εδώ εξετάζει τις ΤΜΜ ομάδας μαθητών που συνυπήρχαν για μια σημαντική περίοδο της σχολικής τους ζωής, διάρκειας επτά ετών, όπως αποτυπώνονται στις εξιστορήσεις τόσο των ίδιων των μαθητών όσο και των δασκάλων τους σχετικά με τις σχολικές μαθηματικές τους εμπειρίες. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν την συνύπαρξη πολλαπλών τύπων ΤΜΜ που οριοθετούνται από κυρίαρχες πρακτικές μάθησης και είναι ευμετάβλητες.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η τάξη των μαθηματικών συνιστά ένα δυναμικό πεδίο μάθησης, όπου οι δυο βασικοί εταίροι της, ο μαθητής και ο εκπαιδευτικός, προσδιορίζουν και επανα-προσδιορίζουν, γνωστικά αλλά και κοινωνικο-πολιτισμικά, τη σχέση ο ένας του άλλου, και ταυτόχρονα του εαυτού τους, με το αντικείμενο των μαθηματικών, βραχυπρόθεσμα αλλά και μακροπρόθεσμα. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας θεώρησης, η έννοια της ‘μαθηματικής ταυτότητας’ ή της ‘ταυτότητας μάθησης των μαθηματικών’ (ΤΜΜ) έχει προσελκύσει το ερευνητικό ενδιαφέρον τις τελευταίες δυο δεκαετίες. Αυτό οφείλεται στις δυνατότητες που προσφέρει για τη διερεύνηση όψεων της σχέσης που διαμορφώνουν οι εκπαιδευόμενοι με τα μαθηματικά, όπως η συμμετοχή τους στη μαθηματική δραστηριότητα και το πώς το ‘ανήκειν’ σε κάποιες κοινωνικές κατηγορίες (π.χ. κοινωνική τάξη, φύλο, φυλή), μπορεί να επηρεάσει τη μαθηματική ενεργοποίηση και εμπλοκή, με δεδομένο τον συνήθη τρόπο λειτουργίας του σχολείου (π.χ., Nasir & Cobb, 2007).

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Έχει χρησιμοποιηθεί ένα ευρύ φάσμα ‘εννοιολογήσεων’ της έννοιας της ‘ταυτότητας μάθησης’ οι οποίες, καθώς προέρχονται από αντικρουόμενες επιστημολογίες, οδήγησαν σε πολυάριθμες, κατά κανόνα ασυνεπείς προσεγγίσεις (Darragh, 2016). Ωστόσο, μια αρκετά δημοφιλής αποτύπωσή της, που υιοθετείται και στην παρούσα εργασία, είναι αυτή των McGee & Martin (2011), σύμφωνα με τους οποίους η μαθηματική ταυτότητα περιλαμβάνει τις διαθέσεις και τις βαθιά ριζωμένες πεποιθήσεις που αναπτύσσουν τα άτομα σχετικά με την ικανότητά τους να συμμετέχουν και να δρουν αποτελεσματικά σε μαθηματικά πλαίσια, αλλά και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να αλλάξουν τις συνθήκες της ζωής τους. Η ταυτότητα μάθησης των μαθηματικών συμπεριλαμβάνει τις αυτο-κατανοήσεις ενός ατόμου, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο η συγκρότησή τους επηρεάζεται από τους άλλους στο πλαίσιο της ενασχόλησης με τα μαθηματικά. Μια μαθηματική ταυτότητα εκφράζεται κατά την αφήγηση ως ‘εαυτός υπό διαπραγμάτευση', μια διαπραγμάτευση μεταξύ των ισχυρισμών του ατόμου και των προσδοκιών των άλλων.

Οι Radovic et al. (2018) εντοπίζουν τρεις βασικές διαστάσεις της Ταυτότητας Μάθησης των Μαθηματικών (ΤΜΜ): υποκειμενική/ κοινωνική (subjective/ social), αντιπροσωπευτική/ ενεργοποιημένη (representational/ enacted) και διάσταση αλλαγής/ σταθερότητας (change/ stability). Αναφορικά με την πρώτη διάσταση, η ταυτότητα θεωρείται είτε ως υποκειμενική έννοια του εαυτού - μια ιδιωτική εμπειρία του ποιος είναι κάποιος – είτε ως κοινωνική κατασκευή ή συγκρότηση που αναγνωρίζεται από άλλους. Σε σχέση με την αντιπροσωπευτική/ εν ενεργεία διάσταση, η ταυτότητα γίνεται αντιληπτή είτε ως διαμεσολαβούμενη από το λόγο ή τη γλώσσα είτε ως εκφρασμένη και επιτελούμενη στην πράξη, χωρίς να απαιτείται διαμεσολάβηση γλωσσικών αναπαραστάσεων. Στη διάσταση αλλαγής/ σταθερότητας η ταυτότητα θεωρείται ότι κατασκευάζεται μέσω μιας διαδικασίας και, κατά συνέπεια, είναι ανοιχτή στην αλλαγή. Οι ταυτότητες 'ξεδιπλώνονται' στο χρόνο ή τροποποιούνται κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Η σχετική έρευνα αναγνωρίζει τα χαρακτηριστικά κάθε διάστασης είτε ως ανταγωνιστικά είτε ως αμοιβαία εξαρτώμενα και τείνει να συνδυάζει χαρακτηριστικά από διαφορετικές διαστάσεις κατά την εννοιολόγηση της έννοιας της ΤΜΜ.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΤΜΜ

Οι Radovic et al. (2018) αναγνωρίζουν στο ερευνητικό πεδίο πέντε διαφορετικές κατηγορίες *ταυτότητας:*

Ταυτότητες ως ατομικά χαρακτηριστικά (τύπος 1): έννοια του εαυτού ως αποτελούμενου από ατομικά χαρακτηριστικά που συνδέονται μεμονωμένα μεταξύ τους και είναι σχετικά ανεξάρτητα από το πλαίσιο. Σχετικές μελέτες τείνουν να βλέπουν τα άτομα και τα κοινωνικά τους περιβάλλοντα ως ξεχωριστές οντότητες, ενώ θεωρούν τις ΤΜΜ εύπλαστες και ευμετάβλητες.

Ταυτότητες ως αφηγήσεις (τύπος 2): προσωπικές αφηγήσεις (αναπαραστάσεις) που οριοθετούνται κοινωνικά και πολιτισμικά και γίνονται αντιληπτές ως 'πράξεις ταυτότητας', η οποία κατασκευάζεται στη στιγμή και δεν αποτελεί αναπαράσταση μιας εσωτερικής ταυτότητας. Οι αφηγήσεις προσλαμβάνονται ως αυτο-τοποθέτηση σε περιβάλλοντα λόγου (self-positioning in discursive spaces), με έμφαση σε κοινωνικά χαρακτηριστικά και δομικούς περιορισμούς. Έτσι, γίνονται κατανοητές ως μια διαδικασία επεξεργασίας ταυτότητας που ενεργοποιείται κατά τη διαπραγμάτευση κυρίαρχων λόγων, οι οποίοι περιορίζουν αυτά που το άτομο βλέπει ως 'πιθανές ή/και επιθυμητές'τοποθετήσεις (π.χ., Holmegaard, Madsen & Ulriksen, 2014).

Ταυτότητες ως σχέση με μια συγκεκριμένη πρακτική (τύπος 3): ορίζονται από τη σχέση που τα άτομα εγκαθιδρύουν με μια συγκεκριμένη μαθηματική πρακτική, η οποία περιγράφεται κυρίως ως υποκειμενική και αντιπροσωπευτική. Τα υποκειμενικά και τα κοινωνικά χαρακτηριστικά θεωρούνται ενοποιημένα στην ταυτότητα των ατόμων. Οι ταυτότητες γίνονται αντιληπτές ως 'αίσθηση του ανήκειν' ή ως 'μορφές ιδιότητας μέλους» και κατανοούνται σε σχέση με την από κοινού πρακτική. Με δεδομένη την έμφαση στους πόρους αναπαράστασης σχετικά με τοπικές πρακτικές, οι σχετικές μελέτες τονίζουν την πλαισιοθετημένη φύση της διαδικασίας με την οποία το νόημα κατασκευάζεται και ορίζουν την ανάπτυξη ταυτότητας ως διαπραγμάτευση νοημάτων (π.χ., Solomon, 2007).

Ταυτότητες ως τρόποι δράσης (τύπος 4): η εστίαση εδώ μετατοπίζεται στη δράση. Η συμμετοχή γίνεται κατανοητή ως μια διαρκώς μεταβαλλόμενη διεργασία, όπου οι ταυτότητες τίθενται σε διαπραγμάτευση στο πλαίσιο αλληλεπιδράσεων. Οι σχετικές μελέτες επικεντρώνονται σε μορφές 'υποκειμενικοποίησης' (subjectivisation) ή συμμετοχής των μαθητών. Οι πρώτες εξετάζουν τον τρόπο που τα άτομα τοποθετούν τον εαυτό τους σε σχέση με τους άλλους στο λόγο που αρθρώνουν (Heyd-Metzuyanim, 2013), ενώ οι δεύτερες τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα υποδηλώνουν ότι είναι ή δεν είναι σε θέση να δρουν με συγκεκριμένους τρόπους (Bishop, 2012). Υπογραμμίζοντας τις εν ενεργεία ταυτότητες, οι ανωτέρω μελέτες ενοποιούν τα υποκειμενικά και τα κοινωνικά χαρακτηριστικά της ταυτότητας. Επιπλέον, επικεντρώνονται στην αλλαγή και τη διεργασία ανάπτυξης ταυτότητας κατά την αλληλεπίδραση με άλλους. Η ταυτότητα θεωρείται ως κάτι ρευστό και μεταβαλλόμενο συγκυριακά, αλλά και ως μια αναδυόμενη διαδικασία που μπορεί να αποκρυσταλλωθεί (π.χ.,Turner et al., 2013).

Ταυτότητες ως απόρροια ευκαιριών και περιορισμών τοπικών πρακτικών (τύπος 5): η οπτική αυτή επικεντρώνεται στους χώρους που προσφέρονται στους μαθητές για να αναπτύξουν, να αφηγηθούν ή να ενεργοποιήσουν συγκεκριμένες ταυτότητες. Η έμφαση βρίσκεται όχι στην υποκειμενική πλευρά των ταυτοτήτων, αλλά σε πλαίσια και πόρους που καθιστούν δυνατές ορισμένες ταυτότητες. Εδώ το ερευνητικό ενδιαφέρον βρίσκεται στην κανονιστική (normative) ταυτότητα μιας ιδιαίτερης πρακτικής, στους περιορισμούς και στις προοπτικές της, στο πώς η αναπτυσσόμενη ικανότητα καθορίζεται από κάθε πρακτική και πώς διαφορετικές μορφές εμπλοκής και ταυτότητας νομιμοποιούνται μέσα σε κάθε πρακτική (π.χ. Nasir & Hand, 2008).

Στην κοινωνικο-πολιτισμική θεώρηση που σκιαγραφείται στην παραπάνω κατηγοριοποίηση, η έννοια της ΤΜΜ γίνεται αντιληπτή σε διαλεκτική σχέση με την παιδαγωγική πρακτική στην τάξη των μαθηματικών και ανιχνεύσιμη μέσα από αντίστοιχες πλαισιοθετημένες πράξεις αφήγησης των μαθητών. Η εμπειρική μελέτη που παρουσιάζεται στη συνέχεια αποτελεί μια προσπάθεια διερεύνησης ΤΜΜ με βάση την κατηγοριοποίηση των Radovic et al. (2018).

Η ΜΕΛΕΤΗ

Στόχος της μελέτης είναι η διερεύνηση των ΤΜΜ μιας ομάδας μαθητών, έτσι όπως αναδύονται μέσα από τις εξιστορήσεις τόσο των ιδίων όσο και των δασκάλων τους σχετικά με τις σχολικές μαθηματικές τους εμπειρίες σε μια περίοδο επτά χρόνων, από την Γ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου μέχρι και το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Η συλλογή των δεδομένων ξεκίνησε το 2000, όταν τα παιδιά, 11 κορίτσια και 10 αγόρια φοιτούσαν στην Γ΄ τάξη ενός Δημοτικού Σχολείου σε μη προνομιούχα συνοικία πόλης της κεντρικής Ελλάδας, της τάξεως των 30 χιλιάδων κατοίκων. Αρκετά παιδιά προέρχονταν από αγροτικές οικογένειες, λιγότερα ήταν παιδιά οικονομικών μεταναστών, ωστόσο, εξαιτίας της καλής φήμης του σχολείου, φοιτούσαν σ' αυτό και παιδιά περισσότερο προνομιούχων οικογενειών, με γονείς με πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Αφορμή για την συλλογή των δεδομένων αποτέλεσε η συμμετοχή της τάξης σε πρόγραμμα που αφορούσε την εισαγωγή καινοτόμων διδακτικών προσεγγίσεων, η οποία στα μαθηματικά επιχειρήθηκε μέσα από δραστηριότητες που ενθάρρυναν την αυτονομία και τη διερεύνηση και ήταν οργανωμένες σε επίπεδα δυσκολίας και κατά θεματική περιοχή του Αναλυτικού Προγράμματος.

Από τον Ιούνιο του 2000 μέχρι και τον Ιούνιο του 2003, που τα παιδιά ολοκλήρωναν τη φοίτησή τους στο δημοτικό σχολείο με την ίδια δασκάλα, πραγματοποιούνταν δύο βιντεοσκοπήσεις το χρόνο – Δεκέμβριο και Ιούνιο - κατά την αξιοποίηση του εκπαιδευτικού υλικού (στο περιθώριο μαθημάτων του κανονικού προγράμματος, 10 ή 15 λεπτά στο τέλος της ώρας των μαθηματικών ή όποτε υπήρχε χρόνος, κάποιες φορές και στα διαλείμματα, επειδή το ζητούσαν τα παιδιά). Στο ίδιο χρονικό διάστημα πραγματοποιήθηκαν κι άλλες καταγραφές, όπως βιντεο-σκοπήσεις 'τυπικών' μαθημάτων των μαθηματικών, αξιολογικές κρίσεις της εκπαιδευτικού για τις δυνατότητες κάθε μαθητή στα μαθηματικά, ομαδικές συνεντεύξεις με τα παιδιά και την δασκάλα.

Από τα 21 παιδιά, 9 αγόρια και 7 κορίτσια ξεκίνησαν να φοιτούν στο Γυμνάσιο που βρίσκεται ακριβώς δίπλα στο Δημοτικό τους Σχολείο και τα 15 από αυτά αποφοίτησαν από εκεί, ενώ ένα κορίτσι διέκοψε. Από τα υπόλοιπα παιδιά 4 φοίτησαν σε άλλα γυμνάσια της πόλης και ένα δεν συνέχισε το γυμνάσιο. Κάθε Ιούνιο, για τα παιδιά που φοιτούσαν στο διπλανό Γυμνάσιο συγκεντρώνονταν βαθμολογικά τους στοιχεία και τα γραπτά τους στις προαγωγικές εξετάσεις. Επίσης, συζητούνταν οι επιδόσεις τους με την καθηγήτριά τους των μαθηματικών, η οποία και τα τρία χρόνια ήταν η ίδια. Για τις συζητήσεις αυτές τηρούνταν αναλυτικές σημειώσεις πεδίου. Κι ακόμη κάθε Ιούνιο πραγματοποιούνταν συνάντηση στην οποία συμμετείχαν σταθερά τα περισσότερα παιδιά, όπου συζητούνταν οι μαθηματικές εμπειρίες τους στην τάξη. Οι συζητήσεις αυτές ηχογραφούνταν ή τηρούνταν αναλυτικές σημειώσεις. Η ίδια πρακτική ακολουθήθηκε και όταν τα παιδιά φοιτούσαν στο λύκειο, αλλά τα σχετικά στοιχεία δεν αξιοποιούνται εδώ.

Η ερευνητική μέθοδος που υιοθετήθηκε είναι η μελέτη περίπτωσης με εθνογραφικά χαρακτηριστικά, καθώς οι ερευνητές εισήλθαν στον κόσμο των συμμετεχόντων με τρόπους που επέτρεψαν την ανίχνευση του 'εξιστορημένου υποκειμένου' μέσα από πλαισιοθετημένες πράξεις αφήγησής του.

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν συνδυαστικά τεχνικές ανάλυσης περιεχομένου και θεματικής ανάλυσης. Ειδικότερα αναζητήθηκαν στα δεδομένα εξιστορήσεις από τους μαθητές αλλά και τις εκπαιδευτικούς, σε διαφορετικές χρονικές περιόδους καθ' όλη τη διάρκεια της επταετίας, οι οποίες χαρακτηρίστηκαν και κωδικοποιήθηκαν με βάση την κατηγοριοποίηση των Radovic et al. (2018). Η εστίαση βρίσκεται αρχικά στις ΤΜΜ που εντοπίζονται στα δεδομένα του Δημοτικού Σχολείου και, στη συνέχεια, σε εκείνα του Γυμνασίου, σε αναζήτηση των ιδιαιτεροτήτων συγκρότησής τους στα δυο εκπαιδευτικά περιβάλλοντα.

Προκειμένου να είναι ορατές διαφοροποιήσεις ως προς την τάση διαμόρφωσης ΤΜΜ σε κάθε εκπαιδευτικό περιβάλλον, στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων έχουν επιλεγεί αποσπάσματα από το λόγο των μαθητών σε διαφορετικές στιγμές της φοίτησής τους στο δημοτικό και στο γυμνάσιο, αλλά και των εκπαιδευτικών του Δημοτικού και του Γυμνασίου για συγκεκριμένους μαθητές και μαθήτριές τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι συζητήσεις με τα παιδιά όσο αυτά φοιτούσαν στο δημοτικό σχολείο εστιάζονται στην αξιοποίηση του εναλλακτικού υλικού για τα μαθηματικά. Τελειώνοντας την Γ΄ δημοτικού δηλώνουν ότι τους αρέσει η ενασχόληση με το υλικό γιατί 'βάζουμε το κεφάλι μας να σκέφτεται'(Αφροδίτη), 'δεν είναι βαρετό, σε κάνει να μαθαίνεις πράγματα που δεν τα ξέρεις'(Σωφρόνης), 'Άμα δεν ξέρεις μπορείς να ρωτήσεις τον συμμαθητή σου, αν δεν ξέρει ούτε αυτός ανοίγεις το βιβλίο με τις απαντήσεις και μπορείς να καταλάβεις'(Αλίκη), αποκαλύπτοντας ότι τείνουν να αναπτύξουν μια ταυτότητα που συγκροτείται σε σχέση με μια συγκεκριμένη πρακτική (τύπος 3), αυτήν της αξιοποίησης του εναλλακτικού υλικού στην τάξη τους [1].

Καθώς προχωρούν στις τάξεις του δημοτικού σχολείου παραμένουν στον ίδιο προσανατολισμό, επισημαίνοντας ότι το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό τους αρέσει γιατί 'έχει ωραίες δραστηριότητες, χαιρόμαστε με αυτό'(Σωφρόνης) 'δεν βαριέσαι, θέλεις να κάνεις κι άλλο'(Γιώτης), 'σε κάνει να σκέφτεσαι'(Αφροδίτη). Σε ερώτηση τι θα έλεγαν για το υλικό σε κάποιον μαθητή που θα ερχόταν πρώτη φορά να δουλέψει μαζί τους, τονίζουν ότι θα του έλεγαν 'να διαβάσει προσεκτικά τις οδηγίες, να δει προσεκτικά την εικόνα αν υπάρχει κι αν δεν υπάρχει να την φτιάξει στο μυαλό του'(Αφροδίτη), υποδεικνύοντας μια ΤΜΜ που συγκροτείται στο πλαίσιο της συγκεκριμένης πρακτικής (τύπος 3).

Τελειώνοντας το δημοτικό σχολείο στην ερώτηση 'τι θα έλεγαν σε άλλα παιδιά για να τα πείσουν να αξιοποιήσουν το υλικό' απαντούν ότι θα τους έλεγαν 'για να διασκεδάσουν'(Αφροδίτη), για να σκεφτούν'(Σωφρόνης) 'για να βοηθηθούν στα μαθηματικά γιατί με τα παιχνίδια και τις δραστηριότητες θα καταλαβαίνουν καλύτερα τα μαθηματικά που κάνουν στο σχολείο'(Γιώτης), αναδεικνύοντας μια άλλη εκδοχή της ΤΜΜ που αναπτύσσουν, ως απόρροιας ευκαιριών που δίνονται από τις πρακτικές που αναπτύσσονται στην τάξη τους (τύπος 5).

Στην αφήγηση της δασκάλας τους εντοπίζονται στοιχεία που εναρμονίζονται με τις αυτο-κατανοήσεις των μαθητών της, καθώς υποστηρίζει ότι τα παιδιά 'συνεχώς ρωτούσαν πότε θα αρχίσει η δουλειά με το υλικό', 'βοηθούσαν πάρα πολύ το ένα το άλλο, 'ήθελαν να ασχολούνται με τα μαθηματικά', αποκαλύπτοντας τη διαμόρφωση ΤΜΜ που συνδέεται τόσο με μια ορισμένη πρακτική (τύπος 3) όσο και με την διευκόλυνση πρόσβασης σε αυτήν από την (τοπική) πρακτική της συγκεκριμένης τάξης (τύπος 5). Τονίζει ότι 'το βασικό είναι πως μαθαίνουν να συνεργάζονται. Ο ένας δίπλα στον άλλο ρωτάει, βοηθάει, μαθαίνει. Ο καλός αισθάνεται ότι μπορεί να καταφέρει πολλά, ο αδύνατος ότι τα καταφέρνει…', εστιάζοντας στην δράση (τύπος 4). Κι ακόμη, καταθέτοντας ότι 'έμαθαν να διαβάζουν με προσοχή τις οδηγίες για να κατανοήσουν τι ζητάει κάθε δραστηριότητα, αποκτώντας μεγαλύτερη αυτονομία', επανέρχεται στις ευκαιρίες που τους δόθηκαν από τη συγκεκριμένη πρακτική (τύπος 5). Ωστόσο, σε μια παράλληλη εξιστόρηση, αξιολογώντας τα αποτελέσματα γραπτών δοκιμασιών που δόθηκαν στα παιδιά, αναφέρει 'περίμενα ότι θα θυμόντουσαν τον κανόνα, είχαμε κάνει πολλές αναφορές πάνω σε αυτά' αποκαλύπτοντας την προσδοκία της διαμόρφωσης μιας ταυτότητας για τους μαθητές της που επίσης στηρίζεται σε συγκεκριμένη πρακτική (τύπος

3), αλλά εντελώς διαφορετικού προσανατολισμού από αυτήν στην οποία αναφερόταν κατά την αξιοποίηση του εναλλακτικού υλικού. Αργότερα, καθώς μιλά για τα παιδιά που αποφοιτούν από το δημοτικό σχολείο για την Αλίκη αναφέρει ότι 'δείχνει μεγάλο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά', για το Σωφρόνη ότι 'του αρέσουν τα μαθηματικά και ασχολείται με προθυμία, για τον Γεράσιμο ότι 'τα καταφέρνει καλά με τις τέσσερις πράξεις, του είναι όμως δύσκολο να αναπτύξει επιχειρήματα και τρόπους απόδειξης', για το Διομήδη ότι 'δουλεύει με μεγάλο ενδιαφέρον και πολλή σκέψη', για την Αφροδίτη ότι 'μπορεί να ερμηνεύσει πληροφορίες και να συνδέσει παλαιότερες με καινούργιες εμπειρίες, συνδέοντας τις ΤΜΜ όλων των μαθητών της κυρίαρχα με δράση (τύπος 4).

Στο γυμνάσιο διαπιστώνονται μετατοπίσεις. Το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό, παρότι υπάρχει στο σχολείο, δεν αξιοποιείται, ενώ το συστηματικό και επίπονο διάβασμα τονίζεται ως προϋπόθεση για να 'πάει κάποιος καλά' στα μαθηματικά. Η καθηγήτρια στην Α΄ Γυμνασίου, μιλώντας για καθέναν από τους μαθητές της ομάδας δηλώνει για την Αλίκη 'είναι άριστη, πολύ καλό μυαλό… είναι το παιδί που θέλει να διαβάζει', ενώ για τον Γιώτη 'Προσπαθεί να ξεφεύγει από την εργασία που έχει να κάνει στο σπίτι…', 'δουλεύει πολύ, διαβάζει πολύ αλλά δεν έχει ιδιαίτερη ευστροφία', λέει για τη Στέλλα ενώ για τον Γεράσιμο 'δεν μπορεί το παιδί'. Για όλους αναφέρεται σε ταυτότητες που τις συνδέει με ατομικά χαρακτηριστικά (τύπος 1), ενώ δηλώνει εμφατικά ότι 'Κάποιος πρέπει να βοηθά την κατάσταση στο σπίτι', 'Οι περισσότεροι με ένα σωστό περιβάλλον και μια υποστήριξη θα μπορούσαν να είναι καλοί μαθητές', κάνοντας μνεία σε εν δυνάμει ταυτότητες, που θα μπορούσαν να κινηθούν στην επιθυμητή κατεύθυνση ως απόρροια ευκαιριών τοπικών πρακτικών, μόνο που οι πρακτικές αυτές αναμένονται από το οικογενειακό τους περιβάλλον (τύπος 5). Κι ενώ επιμένει να αναφέρεται σε ταυτότητες ως ατομικά χαρακτηριστικά (τύπος 1), π.χ. 'έχει μέτριο μυαλό', 'είναι τεμπέλης', 'έχει καλό μυαλό', κι ακόμη να τις εκλαμβάνει ως απόρροια ανεπιθύμητων πρακτικών της οικογένειας ή του μαθητή του ίδιου 'θα μπορούσε να πάει καλά αν ξέφευγε από την παρέα και το παιχνίδι' (τύπος 5), μέσα από την εξιστόρηση διαφαίνεται η διαμόρφωση ΤΜΜ ως απόρροια περιορισμών που συνδέονται με τις σχολικές πρακτικές.

Το τελευταίο επιβεβαιώνεται από τον τρόπο που οι μαθητές μιλούν για τη σχέση τους με τα μαθηματικά αλλά και για την καθηγήτριά τους: ''Ηταν δύσκολα και δεν είχα διαβάσει πολύ', λέει ο Σωφρόνης 'Δεν διάβαζα όσο θα έπρεπε, αλλά μερικά δεν τα καταλάβαινα τόσο καλά, δεν μας τα εξηγούσε τόσο καλά', λέει ο Χάρης, αποκαλύπτοντας ότι η διεργασία ανάπτυξης ταυτότητας μπορεί να μεταβάλλεται κατά την αλληλεπίδραση με άλλους (τύπος 4). 'Λέω τη δουλειά που θα κάναμε στο σπίτι να την κάνουμε στην τάξη και μετά να λέμε τι καταλάβαμε, τι δεν καταλάβαμε' λέει ο Άρης, υπονοώντας μια ταυτότητα που απορρέει από τους περιορισμούς των τοπικών πρακτικών (τύπος 5). Πολλά παιδιά φαίνεται να τείνουν να διαμορφώσουν ΤΜΜ ως απόρροια των περιορισμών των τοπικών πρακτικών: 'Αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι καθηγητές, όταν δουν κάποιο παιδί πιο εύστροφο, που τα καταφέρνει περισσότερο, τότε ασχολούνται περισσότερο μαζί του κι αυτό θυμώνει τα άλλα παιδιά' λέει ο Διομήδης, ενώ ο Γιώτης μετά την αποφοίτηση από το γυμνάσιο δηλώνει την οργή του για την καθηγήτριά του: 'την έβλεπα στον ύπνο μου. Κάθε μέρα μας έλεγχε τα τετράδια, έβαζε τις φωνές… Ήθελα να με αφήσουν να την κλείσω σε ένα δωμάτιο και να την βασανίζω…'. Ωστόσο, δεν έχουν όλοι την ίδια άποψη κι εδώ το κοινωνικό περιβάλλον φαίνεται να διαδραματίζει κάποιο ρόλο. 'Ήμουν χαρούμενη που την είχα καθηγήτρια' λέει η Αφροδίτη, από περιβάλλον με σχετική οικονομική άνεση και ιδιαίτερα μαθήματα στο σπίτι. 'Προσπαθούσε να βοηθήσει τα αδύνατα παιδιά, όταν σου φωνάζει κάποιος σημαίνει ότι ενδιαφέρεται για σένα', παραπέμποντας σε ταυτότητα που διαμορφώνεται ως απόρροια τοπικών πρακτικών (τύπος 5), θεωρώντας όμως ως ευκαιρίες πρακτικές που συμμαθητές της εκλαμβάνουν ως περιορισμούς.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Η ενασχόληση στο Δημοτικό Σχολείο με το εναλλακτικό εκπαιδευτικό υλικό και η συνακόλουθη αλλαγή του μαθησιακού κλίματος στην τάξη φάνηκε να συμβάλουν στην ανάπτυξη μιας δυναμικής και στη δημιουργία κινήτρων για την εισαγωγή των παιδιών σε μια διαφορετική πρακτική μάθησης και άρα στην ανάδυση ΤΜΜ με αίσθηση του 'ανήκειν' (Solomon, 2007) που τροφοδοτούνται από τις ευκαιρίες που προσφέρονται από την εναλλακτική πρακτική μάθησης των μαθηματικών. Καθώς όμως αυτή η πρακτική αναπτύσσεται σε περιορισμένο χρόνο αλλά και συνυπάρχει με παραδοσιακού χαρακτήρα πρακτικές που διέπουν το κυρίαρχο 'κανονικό μάθημα' και, επιπλέον, σταματά με το τέλος του δημοτικού σχολείου, δεν φαίνεται να έχει βιώσιμα αποτελέσματα. Οι προσωπικές σχολικές διαδρομές που αναπτύσσονται στη συνέχεια εμφανίζεται να καθορίζονται περισσότερο από την υποστήριξη που παρέχεται από το οικογενειακό περιβάλλον ή/και από την επιθυμία για μόρφωση που αυτό έχει καλλιεργήσει, καθώς οι σχολικές πρακτικές στο συγκεκριμένο Δημοτικό Σχολείο, παρότι γέννησαν ελπίδες, δεν φάνηκε να δημιούργησαν κίνητρα και προοπτικές με διάρκεια στο χρόνο.

Κάποια από τα κορίτσια, παιδιά οικογενειών που επενδύουν ιδιαίτερα στη μόρφωσή τους, με φροντιστήριο στα μαθηματικά, συνεχίζουν να τα πηγαίνουν καλά και να προετοιμάζονται ήδη από το γυμνάσιο για την προοπτική της τριτοβάθμιας. Κάποια από τα αγόρια από περισσότερο 'λαϊκές' και χαμηλότερου μορφωτικού επιπέδου οικογένειες, ενώ η σχέση τους με τα μαθηματικά στο δημοτικό έδειχνε άλλες προοπτικές, στο γυμνάσιο 'σκοντάφτουν'. Οι επιδόσεις τους αποδίδονται από την εκπαιδευτικό της δευτεροβάθμιας σε προσωπικά χαρακτηριστικά και στην ατομική τους δράση αλλά και σε ευκαιρίες και τους περιορισμούς που απορρέουν από το οικογενειακό περιβάλλον (Nasir & Hand, 2008).

Οι δυο εκπαιδευτικοί φαίνεται να μη διακρίνουν το ρόλο τους στη διαμόρφωση των ΤΜΜ των μαθητών αλλά και οι μαθητές, καθώς προχωρούν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παρότι ενοχλούνται από την πιεστική και ενίοτε απορριπτική αντιμετώπισή τους, τείνουν να συνδέουν τις δυσκολίες τους στα μαθηματικά κυρίως με την ελλειμματική τους προσπάθεια ή/και την προσωπική τους αδυναμία ανταπόκρισης και λιγότερο με τις σχολικές πρακτικές. Φαίνεται δηλαδή να ενοχοποιούν τους εαυτούς τους, εσωτερικεύοντας όσα η εκπαιδευτικός τους αποδίδει.

Συμπερασματικά, οι σχολικές πρακτικές φάνηκε να διέπονται από μια ισχυρή παραδοσιακή αντίληψη για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών που συμβάλλει στη διαμόρφωση ευμετάβλητων ΤΜΜ. Το 'διάλειμμα' ανάπτυξης μιας εναλλακτικής πρακτικής μάθησης, εύκολα αποδυναμώθηκε καθώς η παραδοσιακή λειτουργία στο Δημοτικό Σχολείο παρέμεινε παράλληλη και στο Γυμνάσιο επανήλθε εξαιρετικά ισχυρή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bishop, J.P. (2012). She's always been the smart one. I've always been the dumb one: Identities in the mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(1), 34–74.

Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 19–33.

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics: Teacher-student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 341–368.

Holmegaard, H.T., Madsen, L.M., & Ulriksen, L. (2014). To choose or not to choose science: Constructions of desirable identities among young people considering a STEM higher education programme. *International Journal of Science Education*, 36(2), 186–215.

McGee, E. O., & Martin, D. B. (2011). You would not believe what I have to go through to prove my intellectual value! Stereotype management among academically successful black mathematics and engineering students. *American Educational Research Journal*, 48(6), 1347–1389.

Nasir, N. S., & Cobb, P. (Eds.). (2007). *Improving access to mathematics: Diversity and equityin the classroom*. New York: Teachers College.

Nasir, N.S. & Hand, V. (2008). From the court to the classroom: Opportunities for engagement, learning, and identity in basketball and classroom mathematics. *Journal of the Learning Science*, 17(2), 143–179.

Radovic, Darinka & Black, Laura & Williams, Julian & Salas, Christian. (2018). Towards conceptual coherence in the research on mathematics learner identity: a systematic review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 21-42.

Solomon, Y. (2007). Not belonging? What makes a functional learner identity in undergraduate mathematics? *Studies in Higher Education*, 32(1), 79–96.

Turner, E., Dominguez, H., Maldonado, L. & Empson, S (2013). English learners' participation in mathematical discussion: Shifting positionings and dynamic identities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 199–234.

ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΦΗΓΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χαράλαμπος Λεμονίδης, **Ιωάννα Καϊάφα**

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

xlemon@uowm.gr, j.kaiafa@windowslive.com

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας διερευνώνται οι πτυχές της εκπαιδευτικής διαδικασίας που επηρεάζονται από τη χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η εργασία αποτελεί τμήμα ευρύτερης έρευνας που είχε ως βασικό της σκοπό τη διερεύνηση του ρόλου που μπορεί να διαδραματίσει η χρήση στοχοεπικεντρωμένων διδακτικών ιστοριών στη διδασκαλία και μάθηση των κλασμάτων σε μαθητές Γ΄ Δημοτικού. Από την ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων της έρευνας προέκυψε ότι η αξιοποίηση αφηγηματικών κειμένων στη διδασκαλία των κλασμάτων συνέβαλε στη βελτίωση του κλίματος στην τάξη, στη συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών, καθώς και στη δημιουργία των προϋποθέσεων για την ανάπτυξη συζήτησης μέσα στην τάξη, με θέμα τα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μεταξύ των βασικών σκοπών της μαθηματικής εκπαίδευσης συγκαταλέγονται όχι μόνο η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, αλλά και η ανάπτυξη της ικανότητάς τους να συνδέουν τη μαθηματική γνώση με την καθημερινή τους ζωή και να επικοινωνούν τη γνώση αυτή στους άλλους (Altieri, 2009). Το εγχείρημα της χρήσης της αφήγησης στη διδασκαλία των μαθηματικών συνδέεται με τον γενικότερο προβληματισμό που αφορά την επιλογή και αξιοποίηση ενός κατάλληλου πλαισίου εκφοράς της μαθηματικής γνώσης, προκειμένου να καταστούν τα μαθηματικά ελκυστικά και ενδιαφέροντα για τους μαθητές. Εξάλλου, η διανοητική και συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (Κολέζα, 2006).

Έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης καταδεικνύουν ότι η χρήση αφηγηματικών κειμένων με μαθηματικό περιεχόμενο στη διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλει στη βελτίωση του κλίματος στην τάξη, στην ανάπτυξη θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών, καθώς και στη διαμόρφωση των προϋποθέσεων για να αναπτυχθεί μια γόνιμη συζήτηση μέσα στην τάξη, με θέμα τις μαθηματικές έννοιες (Monroe & Livingston, 2002; Young & Marroquin, 2006; Van den Heuvel-Panhuizen, Boogaard & Doig, 2009; Capraro και Capraro, 2006).

Η θετική στάση απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο θεωρείται ως ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που προωθούν την εκπαιδευτική διαδικασία. Οι Meyer και Turner (2006), επεκτείνοντας την παραδοσιακή θεωρία της σκαλωσιάς (scaffolding), εισάγουν τον όρο «συναισθηματική σκαλωσιά» (emotional scaffolding), για να περιγράψουν τις αλληλεπιδράσεις που σχεδιάζονται και υλοποιούνται από τον εκπαιδευτικό και έχουν ως στόχο τη δημιουργία θετικών συναισθηματικών εμπειριών στους μαθητές, προκειμένου οι τελευταίοι να προσεγγίσουν μια σειρά από διδακτικούς στόχους. Η συναισθηματική σκαλωσιά μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση των μαθητών, τα κίνητρά τους, τα επίπεδα συμμετοχής τους στην εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς και τη συναισθηματική τους ευεξία.

Ο Rosiek (2003) θεωρεί ως συναισθηματική σκαλωσιά την παιδαγωγική χρήση της αναλογίας, της μεταφοράς και της αφήγησης που πραγματοποιείται με σκοπό να επηρεάσει τη συναισθηματική απόκριση των μαθητών απέναντι σε συγκεκριμένες όψεις και πτυχές ενός γνωστικού αντικειμένου, με τρόπο που προωθεί τη μάθηση.

Η παρούσα εργασία αποτελεί τμήμα ευρύτερης έρευνας, στο πλαίσιο της οποίας διερευνήθηκε ο ρόλος που μπορεί να διαδραματίσει η χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία και μάθηση των κλασμάτων σε μαθητές της Τρίτης Δημοτικού (Καϊάφα, 1019; Lemonidis & Kaiafa, 2019). Από τα πορίσματα της έρευνας προέκυψε ότι η αξιοποίηση αφηγηματικών κειμένων μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών της Γ΄ Δημοτικού στα κλάσματα και κυρίως των μαθητών με μέση και χαμηλή επίδοση. Επιπλέον, προσδιορίστηκαν οι επιμέρους γνωστικοί τομείς οι οποίοι συνδέονται με τη μάθηση των κλασμάτων και επηρεάζονται από τη χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας επιχειρείται η διερεύνηση των πτυχών της εκπαιδευτικής διαδικασίας που επηρεάζονται από τη χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στη διδασκαλία χρησιμοποιήθηκαν στοχοεπικεντρωμένες ιστορίες που γράφτηκαν, προκειμένου να υποστηρίξουν τους στόχους του νέου προγράμματος σπουδών για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών που προτείνει ο Χαράλαμπος Λεμονίδης (2016).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της έρευνας

Στην έρευνα πήραν μέρος 38 μαθητές Τρίτης Δημοτικού, οι οποίοι κατά το σχολικό έτος 2015-2016 φοιτούσαν σε δύο Δημοτικά Σχολεία της πόλης της Φλώρινας. Οι μαθητές αυτοί αποτελούσαν την πειραματική ομάδα της ευρύτερης έρευνας (Καϊάφα, 2019; Lemonidis & Kaiafa, 2019).

Μέθοδος

Οι καταγραφές των ημερολογίων αναλύθηκαν με τη μέθοδο της θεματικής ποιοτικής ανάλυσης. Πρόκειται για μια μέθοδο εντοπισμού, περιγραφής, αναφοράς και «θεματοποίησης» νοηματικών μοτίβων που επαναλαμβάνονται και τα οποία προκύπτουν από τα ερευνητικά δεδομένα (Braun & Clark, 2006; Holloway & Tondres, 2003). Κατά την έκθεση των δεδομένων που προέκυψαν από την επεξεργασία των καταγραφών, όπου κρίθηκε αναγκαίο, προστέθηκαν αυτούσια αποσπάσματα τόσο από τα ημερολόγια, όσο και από τις απομαγνητοφωνήσεις των διδασκαλιών.

Υλικά της παρέμβασης

Κατά την εκπαιδευτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα υλικά:

Α) Βιβλίο Μαθητή και Τετράδιο Εργασιών. Όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν στην πειραματική διαδικασία έλαβαν σε έντυπη μορφή (έγχρωμη εκτύπωση) και βιβλιοδετημένο ένα βιβλίο 32 σελίδων με όλη την ύλη.

Η ανάπτυξη του υλικού για τη διδασκαλία των κλασμάτων ακολούθησε την τροχιά μάθησης και διδασκαλίας του νέου προγράμματος για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών που προτείνει ο Χαράλαμπος Λεμονίδης (2016).

Β) Εικονογραφημένες αφηγήσεις, σε μορφή Power Point.

Το αφηγηματικό μέρος της διδακτικής παρέμβασης ολοκληρώνεται σε επτά ιστορίες – επεισόδια που αποτελούν μια αφηγηματική ενότητα. Κάθε διδακτική ιστορία είναι στοχοεπικεντρωμένη, αποσκοπεί, δηλαδή στην εισαγωγή μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας ή διαδικασίας. Η αφήγηση δεν αποτελεί απλά το πλαίσιο για μια μαθηματική έννοια, αλλά η μαθηματική έννοια αποτελεί στοιχείο της δομής της ιστορίας, με τρόπο που επηρεάζει την εξέλιξή της. Οι ιστορίες αυτές γράφτηκαν προκειμένου να στηρίξουν τη διδασκαλία των κλασμάτων, όπως αυτή προτείνεται από το συγκεκριμένο πρόγραμμα σπουδών (Λεμονίδης, 2016) και είναι σύμφωνες με τους διδακτικούς στόχους της κάθε ενότητας.

Η αφήγηση έχει τίτλο «Ταξίδι στη Χώρα των Κλασμάτων». Πρόκειται για την ιστορία του Τάκη Κλασματάκη, μιας κλασματικής μονάδας που παρά τη μεγάλη προσπάθεια που καταβάλλει, σημειώνει χαμηλές επιδόσεις στο σχολείο, γεγονός που έχει ως συνέπεια τη μείωση της αξίας του (μέσα από την αύξηση του παρονομαστή του). Η απογοήτευση του Τάκη είναι μεγάλη και ο ίδιος αποφασίζει να φύγει από το σπίτι του και την πόλη του και να επιστρέψει μόνο όταν καταφέρει να βελτιώσει την αξία του. Στην προσπάθειά του αυτή τον βοηθούν δύο «ολόκληροι αριθμοί», το 3 και το 5, οι οποίοι βρίσκονται στη Χώρα των Κλασμάτων γιατί κέρδισαν ένα ταξίδι, ως έπαθλο, σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό.

Διαδικασία

Στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης (διάρκειας 16 διδακτικών ωρών) που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε, η εκπαιδευτικός, κατά την έναρξη της διδασκαλίας, διάβαζε στους μαθητές ένα επεισόδιο, μια διδακτική ιστορία και παράλληλα προβάλλονταν οι εικόνες που συνόδευαν το κείμενο. Στη συνέχεια πραγματοποιούνταν μια συζήτηση στην τάξη, για το περιεχόμενο της αφήγησης και οι μαθητές επεξεργάζονταν κάποιες δραστηριότητες που συνόδευαν το κείμενο και σχετίζονταν με τις μαθηματικές έννοιες της ενότητας. Τέλος, οι μαθητές εργάζονταν στις δραστηριότητες του βιβλίου του μαθητή και του τετραδίου εργασιών.

Μέσα συλλογής δεδομένων

Α) Ημερολόγιο εκπαιδευτικού. Η εκπαιδευτικός τηρούσε δομημένο ημερολόγιο μετά το πέρας κάθε διδακτικής ενότητας, το οποίο χρησιμοποιήθηκε όχι μόνο ως μέσο συλλογής δεδομένων, αλλά και ως ένα εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης των μαθητών και της διδασκαλίας.

Το ημερολόγιο δομήθηκε στη βάση τριών αξόνων (διδακτική διαδικασία, μαθητές και γενική αποτίμηση της διδασκαλίας), ενώ κάθε άξονας χωρίστηκε σε επιμέρους υποάξονες.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση του τρίτου άξονα του ημερολογίου.

Β) Απομαγνητοφωνήσεις των διδασκαλιών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση του ημερολογίου αναφορικά με τον άξονα «Συνολική αποτίμηση της διδασκαλίας».

Συνολική αποτίμηση της διδασκαλίας	**Κλίμα της τάξης**
	Θετικό κλίμα
	Απουσία προβλημάτων συμπεριφοράς
	Διάθεση των μαθητών για συνεργασία
	Τάση των μαθητών με υψηλές επιδόσεις να βοηθήσουν τους συμμαθητές τους.
	Συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών
	Ταύτιση των μαθητών με τον βασικό ήρωα της ιστορίας
	Ερωτήματα των μαθητών για την εξέλιξη και το τέλος της ιστορίας
	Εικασίες των μαθητών για την εξέλιξη και το τέλος της ιστορίας
	Δημιουργία διδακτικών καταστάσεων
	Ερωτήματα των μαθητών για την εξέλιξη της ιστορίας που συνδέονταν με τα μαθηματικά
	Δημιουργία καταστάσεων γνωστικής σύγκρουσης
	Σύνδεση εννοιών και διαδικασιών στη βάση της πλοκής της ιστορίας

Πίνακας 1: Συγκεντρωτικός πίνακας ανάλυσης του άξονα «Συνολική αποτίμηση της διδασκαλίας»

Θετικό κλίμα στην τάξη και απουσία προβλημάτων συμπεριφοράς

Το κλίμα της τάξης, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολύ θετικό, ενώ δεν σημειώθηκαν προβλήματα συμπεριφοράς. Κατά τη διάρκεια της αφήγησης, η προσοχή των μαθητών ήταν στραμμένη στην εξέλιξη της ιστορίας και η καλή τους διάθεση διατηρούνταν και κατά τα επόμενα στάδια της διδασκαλίας.

«Στην τάξη επικρατούσε ένα κλίμα συνεργασίας, ενώ δε σημειώθηκαν προβλήματα συμπεριφοράς. Το γεγονός αυτό βοήθησε πολύ στη διεξαγωγή της διδασκαλίας» (απόσπασμα από το ημερολόγιο της 5ης ενότητας).

Το θετικό κλίμα της τάξης πιστοποιείται και από το γεγονός ότι οι μαθητές δεν εκδήλωσαν σημάδια ανταγωνισμού, αλλά έδειξαν διάθεση για συνεργασία, ενώ εμφανής ήταν η τάση των μαθητών με υψηλή επίδοση να βοηθήσουν τους συμμαθητές τους, όταν αυτοί αντιμετώπιζαν δυσκολίες με μία έννοια ή διαδικασία.

Ταύτιση των μαθητών με τον βασικό ήρωα της ιστορίας

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης που διεξαγόταν μετά την αφήγηση, οι μαθητές εξέφραζαν τη γνώμη τους και διατύπωναν εικασίες τόσο για την εξέλιξη της ιστορίας και τον τρόπο που αυτή θα ολοκληρωνόταν, όσο και για τις προθέσεις και τα συναισθήματα των πρωταγωνιστών της. Ιδιαίτερα οι μαθητές με χαμηλή επίδοση φάνηκε να ταυτίζονται περισσότερο με τον βασικό ήρωα της ιστορίας και να νοιάζονται για τη μοίρα του.

«Η Μ. (μαθήτρια με χαμηλή επίδοση) εξέφρασε την ανησυχία μήπως ο φρουρός ανακαλύψει ότι το 3 και το 5 είναι ολόκληροι αριθμοί και ότι παριστάνουν το κλάσμα 3/5» (απόσπασμα από το ημερολόγιο της 3ης ενότητας).

«Ο Ε. (μαθητής με υψηλή επίδοση) εξέφρασε την άποψη ότι όλα θα πάνε καλά στο τέλος, γιατί ο Τάκης έχει καλό χαρακτήρα και καλούς φίλους που τον αγαπάνε» (απόσπασμα από το ημερολόγιο της 5ης ενότητας).

Δημιουργία διδακτικών καταστάσεων με αφορμή την ιστορία

Η αφήγηση γεννούσε ερωτήματα στους μαθητές. Και μέσα από τη συζήτηση που ακολουθούσε, οι μαθητές μιλούσαν όχι πια για την ιστορία που άκουσαν, αλλά για τα μαθηματικά.

Επιπλέον, ορισμένες φορές, η αφήγηση έφερνε τους μαθητές σε γνωστική σύγκρουση, καθώς προσπαθούσαν να εξηγήσουν έννοιες και διαδικασίες, διαμορφώνοντας και πάλι ένα κλίμα για γόνιμη συζήτηση, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Αφηγηματικό πλαίσιο: Καθώς η είσοδος στο Κλασματοχώρι επιτρεπόταν μόνο στα κλάσματα, το 5 πήρε ένα κλαδί, το 3 ανέβηκε πάνω του και έγιναν το κλάσμα 3/5, προκειμένου να ξεγελάσουν τον φρουρό.

Μαθητής 1: Κυρία, γιατί δεν ανέβηκε το 5 πάνω στο 3;

Μαθητής 2: Δεν γίνεται ρε, το 5 είναι πιο μεγάλο και πιο βαρύ… Ε, κυρία;

Εκπαιδευτικός: Κι όμως, θα μπορούσε… Αν το 5 κουραζόταν, θα μπορούσαν να αλλάξουν θέση. Για να δούμε, ποιο κλάσμα θα δημιουργούνταν τότε;

Μαθητής 1: Το 5/3 (η εκπαιδευτικός το γράφει στον πίνακα).

Εκπαιδευτικός: Τι σημαίνει 5/3, ποιος θα μου πει; Ε.;

Μαθητής 3: Κυρία, δεν γίνεται…

Εκπαιδευτικός: Τι δεν γίνεται;

Μαθητής 3: Δεν μπορεί, κυρία... Τι; Κόβω κάτι σε 3 κομμάτια, μια σοκολάτα... και παίρνω τα 5; Δεν γίνεται...

Εκπαιδευτικός: Για να δούμε τι λένε και οι άλλοι. Γίνεται παιδιά; Για να το σκεφτούμε λίγο... Τι λέτε;

Μαθητής 4: Μάλλον δεν γίνεται...

Εκπαιδευτικός: Για προσέξτε λίγο. Χθες δεν μάθαμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε τις κλασματικές μονάδες;

Μαθητής 4: Ναι

Εκπαιδευτικός: Τι είναι λοιπόν το 5/3; Πώς μπορώ να το σχηματίσω; Ποιος θα μου πει; Ν. θα βοηθήσεις;

Μαθητής 5: 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 (η εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα)

Εκπαιδευτικός: Πολύ ωραία! Για να δούμε τώρα. Έχω δύο σοκολάτες και τις κόβω σε 3 ίσα κομμάτια την καθεμιά (η εκπαιδευτικός σχεδιάζει στον πίνακα). Τι μέρος της σοκολάτας είναι το κάθε κομμάτι. Δεν φωνάζουμε, είπαμε. Ε., μπορείς να μας πεις;

Μαθητής 6: 1/3

Εκπαιδευτικός: Πολύ ωραία! Για να μετρήσουμε τώρα μέχρι το 5/3. Όλοι μαζί.

Όλοι οι μαθητές: 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3... (Η εκπαιδευτικός, ενώ οι μαθητές απαγγέλλουν, γραμμοσκιάζει τα αντίστοιχα κομμάτια).

Εκπαιδευτικός: Τέλεια! Τι έχουμε λοιπόν; Ποιος θα μου πει; Β.;

Μαθητής 7: Τι;

Εκπαιδευτικός: Για πες μας. Τι έχουμε εδώ. Δες το σχήμα.

Μαθητής 7: Μια ολόκληρη σοκολάτα και δύο κομμάτια.

Εκπαιδευτικός: Μπράβο! Αλλιώς, πώς μπορώ να το πω; Μία ολόκληρη σοκολάτα και...

Μαθητής 8: 2/3

Εκπαιδευτικός: Πολύ ωραία! Επομένως, θα μπορούσε το 5 να ανέβει πάνω στο 3; Τι λέτε;

Όλοι οι μαθητές: Ναι! Μπορεί!

Εκπαιδευτικός: Ωραία! Σε λίγο θα το δούμε και στην αριθμογραμμή... Ανοίξτε τώρα τα βιβλία σας.

Η ανάγκη, λοιπόν, για την εξήγηση των εννοιών και των διαδικασιών ξεκινούσε από τους ίδιους τους μαθητές, γεγονός που τους ενέπλεκε με τρόπο φυσικό στη μαθησιακή διαδικασία. Στο προηγούμενο παράδειγμα, δόθηκε στην εκπαιδευτικό η ευκαιρία να μιλήσει για τα καταχρηστικά κλάσματα, χωρίς να αναφερθεί στον συγκεκριμένο όρο, μέσα από την επιθυμία των ίδιων των μαθητών να διερευνήσουν τα δεδομένα της ιστορίας που άκουσαν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η αφήγηση φαίνεται πως συνέβαλε στη βελτίωση του κλίματος της τάξης (Mink & Fraser, 2005). Οι μαθητές παρακολουθούσαν με προσοχή το αφηγηματικό μέρος της διδασκαλίας και η καλή τους διάθεση και η θετική τους στάση απέναντι στο μάθημα διατηρούνταν και κατά τα επόμενα στάδια της διδασκαλίας.

Το θετικό κλίμα της τάξης πιστοποιείται και από το γεγονός ότι δεν σημειώθηκαν προβλήματα συμπεριφοράς. Επιπλέον, οι μαθητές δεν εκδήλωσαν σημάδια ανταγωνισμού, έδειξαν τη διάθεση για συνεργασία, ενώ εμφανής ήταν η τάση των μαθητών με υψηλές επιδόσεις να βοηθήσουν τους συμμαθητές τους, όταν αυτοί αντιμετώπιζαν δυσκολίες με μία έννοια ή μία διαδικασία. Ενδεχομένως, επηρέασαν τη στάση των μαθητών το περιεχόμενο της αφήγησης και οι συζητήσεις που πραγματοποιήθηκαν στην τάξη με αφορμή αυτό το περιεχόμενο, καλλιεργώντας στους μαθητές την ενσυναίσθηση (Haven, 2000).

Η συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών και η ταύτισή τους, κυρίως των μαθητών με χαμηλή επίδοση, με τον βασικό ήρωα της αφήγησης φαίνεται πως συνετέλεσε σε σημαντικό βαθμό στην αύξηση της συμμετοχής τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η αφήγηση φαίνεται πως λειτούργησε ως ένα είδος «συναισθηματικής σκαλωσιάς» (Meyer & Turner, 2006), καθώς δημιούργησε θετικές συναισθηματικές εμπειρίες στους μαθητές, με αποτέλεσμα οι τελευταίοι να προσεγγίσουν με αποτελεσματικό τρόπο μια σειρά από διδακτικούς στόχους που αφορούσαν στη μάθηση των κλασμάτων.

Η αφήγηση δημιούργησε συναισθηματικά κίνητρα στους μαθητές (Szurmak & Thuna, 2013), γεγονός που συνέβαλε στην επικέντρωση της προσοχής τους στο γνωστικό αντικείμενο (Haven, 2000). Η χρήση της αναλογίας και της μεταφοράς μέσα στο πλαίσιο της αφήγησης φαίνεται πως επηρέασε τη συναισθηματική απόκριση των μαθητών απέναντι σε συγκεκριμένες πτυχές του γνωστικού αντικειμένου, με τρόπο που προώθησε τη διαδικασία μάθησης (Rosiek, 2003).

Από την επεξεργασία των ποιοτικών δεδομένων της έρευνας προέκυψε ότι η χρήση αφηγηματικών κειμένων με μαθηματικό περιεχόμενο μπορεί να συμβάλει στη διαμόρφωση ενός πλούσιου συγκείμενου για διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, καθώς δημιουργεί ευκαιρίες για ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε διαδικασίες που προωθούν την επικοινωνία και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Monroe & Livingston, 2002).

Το αφηγηματικό περιεχόμενο και η πλοκή της ιστορίας ενθάρρυναν τους μαθητές να θέτουν ερωτήματα για τους ήρωες, τα κίνητρα και τη δράση τους. Και καθώς η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών γινόταν παράλληλα με την εξέλιξη της ιστορίας, οι μαθητές ενώ συζητούσαν για την ιστορία, στην ουσία μιλούσαν για τα μαθηματικά. Η ιστοριογραμμή στην οποία βασιζόταν κάθε αφήγηση ενθάρρυνε τους μαθητές να θέτουν ερωτήματα, να κάνουν προβλέψεις, να προτείνουν και να δοκιμάζουν διαφορετικές στρατηγικές αντιμετώπισης μιας προβληματικής κατάστασης (Monroe & Livingston, 2002; Young & Marroquin, 2006).

Συνοψίζοντας, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η προσεκτική επιλογή ενός αφηγηματικού κειμένου και η στοχοεπικεντρωμένη ένταξή του στη διδασκαλία μπορούν να φωτίσουν την κατανόηση των μαθητών αναφορικά με τις μαθηματικές έννοιες. Η αφήγηση παρείχε στους μαθητές ένα πλαίσιο στο οποίο μπορούσαν να επικοινωνήσουν και να συζητήσουν τις μαθηματικές ιδέες που αναδύονταν από το κείμενο (McDuffie & Young, 2003). Το πλαίσιο της ιστορίας παρείχε την ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν ουσιαστική γνώση πάνω στις έννοιες και τις διαδικασίες μέσω της διερεύνησης και όχι μέσω της απομνημόνευσης (Carparo & Carparo, 2006).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Altieri, J. L. (2009). Strengthening connections between elementary classroom mathematics and literacy. *Teaching Children Mathematics, 15* (6), 346-351.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Capraro, R.M., & Capraro, M. M. (2006). Are You Really Going to Read Us A Story? Learning Geometry Through Children's Mathematics Literature. *Reading Psychology, 27*(1), 21-36.

Haven, K. (2000). *Super simple storytelling: A can-do guide for every classroom, every day.* Englewood, CO: Teacher Ideas Press.

Holloway, I., & Todres, L. (2003). The status of method: flexibility, consistency and coherence. *Qualitative Research, 3*(3), 345-357.

Καϊάφα, Ι. (2019). *Η χρήση της αφήγησης στη διδασκαλία των κλασμάτων σε μαθητές Γ΄ Δημοτικού.* (Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Ελλάδα). Ανακτήθηκε από Εθνικό Αρχείο Διδακτορικών Διατριβών https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/45458

Κολέζα, Ε. (2006). Τα μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της λογοτεχνίας: Ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων. Στο: Χασάπης, Δ. (επιμ.) *Μαθηματικά & Λογοτεχνία. Πρακτικά 6ου Διημέρου Διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών.* 17 & 18 Μαρτίου 2006 (σσ. 27-47). Θεσσαλονίκη: CopyCity Publish.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην τροχιά των ρητών.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη.

Lemonidis, Ch. & Kaiafa I. (2019). The Effect of Using Storytelling Strategy on Students' Performance in Fractions. *Journal of Education and Learning, 8*(2), 165 – 175.

McDuffie, A. M. R., & Young, T. A. (2003). Promoting mathematical discourse through children's literature. *Teaching Children Mathematics, 9*, 385–389.

Meyer, D. K., & Turner, J. C. (2006). Scaffolding emotions in classrooms. In P. A. Schultz and R. Pekrun (Eds.), *Emotions in Education.* Academic Press/Elsevier.

Mink, D. V., & Fraser, B. J. (2005). Evaluation of a K–5 mathematics program which integrates children's literature: Classroom environment and attitudes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 3*, 59-85.

Monroe, E. E., & Livingston, N. (2002). It figures: Language and mathematics add up through children's literature. *The Dragon Lode, 20*(2),37-41.

Rosiek, J. (2003). Emotional scaffolding: An exploration of the teacher knowledge at the intersection of student emotion and the subject matter. *Journal of Teacher Education, 54*, 399-412.

Szurmak, J., & Thuna, M. (2013). Tell Me a Story: The Use of Narrative as a Tool for Instruction. *Indianapolis, IN*, 546-552.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Boogaard, S., & Doig, B. (2009). Picture Books Stimulate the Learning of Mathematics. *Australian Journal of Early childhood, 34*(3), 30-39.

Young, E., & Marroquin, C. (2006). Posing problems from children's literature. *Teaching Children Mathematics, 12*, 362-366.

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ, ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Θεόδωρος Χατζηπαντελής, Μαρίνα Σωτήρογλου, Αντώνης Παπαοικονόμου

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

chadjip@polsci.auth.gr, misotiro@polsci.auth.gr, papaoikoa@polsci.auth.gr

Η παρούσα εισήγηση αφορά στην διδακτική του γνωστικού αντικειμένου της «Πολιτικής Παιδείας» και παρουσιάζει διδακτικά και διαδραστικά εργαλεία που μπορεί να εφαρμοστούν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Για το σκοπό αυτό σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν διδακτικά εργαστήρια με χρήση της αρχής της διαβούλευσης σε σχολεία της Θεσσαλονίκης, στο πλαίσιο του μαθήματος «Σύγχρονος Κόσμος, Πολίτης και Δημοκρατία» της Β' Λυκείου. Στο τέλος της παρέμβασης, πραγματοποιήθηκε μια έρευνα στους μαθητές για τη θέση τους όσον αφορά τη διαβούλευση και τις εκλογικές διαδικασίες. Πρόκειται για μια προσπάθεια ανάπτυξης ενός δομημένου και διαδραστικού διδακτικού πακέτου της «Πολιτικής Παιδείας» που θα συμβάλει στη διαμόρφωση ενεργών και συνειδητοποιημένων πολιτών. Η διδακτική πρακτική στηρίζεται σε βασικές μαθηματικές δεξιότητες, όπως η κατανόηση του μεγέθους, το πείραμα, η χρήση βασικών αριθμητικών μεγεθών και στατιστικές έννοιες.

ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΟΙ ΠΟΛΙΤΕΣ

Πολίτης δεν λέγεται κάποιος μόνο την ημέρα των εκλογών. Στο βιβλίο «Delibaration in the classroom: Fostering Critical Thinking, Community, and Citizenship in Schools» καθηγητές ανέφεραν ότι οι μαθητές δεν είναι προετοιμασμένοι για να γίνουν πολίτες. Επιδίωξη τους είναι η προετοιμασία των μαθητών στη πολιτική ζωή. Η παρούσα εισήγηση προτείνει διδακτικές μεθόδους ικανές να αναπτύξουν έναν ενεργό πολίτη με αίσθημα ατομικής ευθύνης, κοινωνικής αλληλεγγύης και συλλογικής δράσης. Ενώ, επιδιώκεται η προώθηση της στατιστικής σκέψης, ο εμπλουτισμός της διδασκαλίας της στατιστικής και την περαιτέρω ανάπτυξη των εννοιών της Δημοκρατίας και της αντιπροσώπευσης [1]. Η παρούσα διδακτική προσέγγιση προτείνεται ώστε η σχολική/μαθητική κοινότητα να αναπτύξει μαθηματική και στατιστική σκέψη μέσω της έννοιας της Δημοκρατίας. Η έννοια της αντιπροσώπευσης, ο ρόλος του αντιπροσώπου (μελέτη μορφών ψηφοδελτίου, Λίστες, Δικαίωμα επιλογής (είτε για να αλλάξει η σειρά, είτε για να επιλεγούν οι υποψήφιοι), το εκλογικό σύστημα (δηλαδή χρησιμοποιείται το αναλογικό σύστημα, το πλειοψηφικό ή επιλέγονται συνδυασμοί εκλογικών συστημάτων για την εκλογή των αντιπροσώπων όπως στην περίπτωση της Ελλάδας που έχει μεικτό σύστημα) και τα κριτήρια με τα οποία επιλέγει το εκλογικό σώμα αποτελούν τα σημαντικότερα θέματα για την αποτελεσματική λειτουργία της δημοκρατίας [2]. Προτείνεται η οργάνωση εργαστήριων για τη καλύτερη κατανόηση των παραπάνω με χρήση των διδακτικών εργαλείων: Moderating, ομάδες μαθητών (Team-based Learning), δραστηριότητα "project", χρήση "poster", έρευνα και ερωτηματολόγιο σεναρίου και αξιολόγηση αποτελεσμάτων της παρέμβασης. Η εκτεταμένη χρήση των TBL στις σχολικές αίθουσες θα αναβαθμίσει την εκπαιδευτική διαδικασία κάνοντάς την πιο ευχάριστη στους μαθητές. Σκοπός της παρέμβασης είναι να συσχετιστούν τα παραπάνω θέματα με τη σχολική/μαθητική κοινότητα που αποτελεί ένα εισαγωγικό θεσμό στην οργάνωση της πολιτείας. Οι μαθητές, όπως οι πολίτες, εκλέγουν αντιπροσώπους για τα μαθητικά τους συμβούλια. Έτσι, η ανάδειξη αντιπροσώπων στα πενταμελή και δεκαπενταμελή μαθητικά συμβούλια λειτουργεί ως προσομοίωση της εκλογικής διαδικασίας και της δημοκρατικής αρχής της αντιπροσώπευσης.

Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν σε δύο ημερίδες του τμήματος Πολιτικών Επιστημών που πραγματοποιήθηκαν τον Μάρτιο και Μάιο καθώς και κατά τη διάρκεια του παγκόσμιου συνεδρίου της IFCS τον Αύγουστο του ίδιου έτους (http://ifcs2019.gr/).

ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΚΑΙ ΠΑΙΔΕΙΑ

Η πολιτική συμμετοχή ως στοιχείο του ενεργού πολίτη στις δημοκρατίες έχει προβληθεί σημαντικά στις εκπαιδευτικές πολιτικές τόσο σε διεθνές όσο και σε εθνικό επίπεδο. Η κύρια κατεύθυνση αυτών των πολιτικών έγκειται στην παροχή δεξιοτήτων συμμετοχής και γνώσεων σε όλους τους νέους. Για τους λήπτες των πολιτικών αποφάσεων η πολιτική συμμετοχή αποτελεί πλέον θεμελιώδες συστατικό της δημοκρατικής τάξης [3]. Οι δραστηριότητες για την συμμετοχική εκπαίδευση, όπως αυτές παρουσιάζονται από την ΕΕ, το Συμβούλιο της Ευρώπης και άλλους εθνικούς εκπαιδευτικούς οργανισμούς μπορούν να θεωρηθούν ως μία προσπάθεια συνδυασμού πρακτικής εφαρμογής και παροχής γνώσεων [4]. Οι πρωταγωνιστές της εκπαιδευτικής πολιτικής σκιαγραφούν μια πολλά υποσχόμενη εικόνα απόψεων και πρακτικών: καθώς η δημοκρατία χρειάζεται ενεργούς πολίτες, πολιτικές οι οποίες στηρίζονται σε ερευνητικά δεδομένα διασφαλίζουν το γεγονός ότι τα σχολεία πρέπει να διδάσκουν την πολιτική συμμετοχή αποτελεσματικά σε όλους τους μαθητές, οι οποίοι ως πολίτες, θα κάνουν χρήση των δεξιοτήτων που θα αποκτήσουν, θα είναι ενεργοί και συνεπώς θα συνεισφέρουν στην διαιώνιση της δημοκρατίας [5]. Ταυτόχρονα, η ανατροφοδότηση εγγυάται την καλύτερη εφαρμογή των εκπαιδευτικών προγραμμάτων και τη συνεχή βελτίωση τους. Σε αυτές τις εκπαιδευτικές πολιτικές και στο σχετικό διδακτικό υλικό όπως επίσης και σε σχετικές έρευνες αναφορικά με την πολιτική παιδεία, οι βασικές ιδέες της δημοκρατίας θεωρούνται δεδομένες ενώ στην ουσία χρειάζεται να εμπεδωθούν. Συχνά αναφέρονται στη δημοκρατία εμφατικά ως ένα καλό, δίκαιο και αρμονικό χαρακτηριστικό των ευρωπαϊκών κοινωνιών το οποίο όμως πρέπει να υποστηριχθεί και να εμπεδωθεί βιωματικά με την εκπαίδευση των πολιτών με στόχο την ενεργό συμμετοχή τους σε μία δημοκρατία [6].

Η αντιπαράθεση και η ανταλλαγή απόψεων, όμως, είναι ένα ενσωματωμένο χαρακτηριστικό του δημοκρατικού πολιτεύματος, των θεωριών συμμετοχής, των θεσμών και φυσικά των ίδιων των πρακτικών συμμετοχής. Η παραπάνω διαπίστωση φαίνεται ότι πλέον θεωρείται δεδομένη: σε ευρωπαϊκό επίπεδο η πολιτική παιδεία και η σχετική έρευνα βασίζεται σε μια προσδοκώμενη κοινή κατανόηση της ενεργής πολιτικής συμπεριφοράς, της δημοκρατίας και της συμμετοχής [7]. Πλέον, οι μελετητές θεωρούν ότι οι πολιτικές της συμμετοχής και της ενεργής πολιτικής συμπεριφοράς δεν απαιτούν περαιτέρω έρευνα και θεωρητική συγκρότηση. Διαφοροποιήσεις αναφορικά με πολιτισμικές διαφορές, το φύλο ή το κυρίαρχο πολιτικό και κοινωνικό αφήγημα θεωρούνται περιττές. Οι εκπαιδευτικές πολιτικές σε διεθνές επίπεδο βασίζονται σε μία ενιαία εικόνα της πολιτικής παιδείας, η οποία πλέον έχει δεδομένες καλές και κακές πρακτικές. Παρά όμως τη θεωρητική, την πολιτική και την εκπαιδευτική διαφοροποίηση και αντιπαράθεση, η ενιαία κατασκευή εννοιών όπως δημοκρατία, ενεργή πολιτική συμπεριφορά και συμμετοχή ως κοινά μοντέλα ευρωπαϊκής πολιτικής παραμένει μια πρόκληση. Κριτικές αναλύσεις των πολιτικών συμμετοχής και των αντίστοιχων πρακτικών δείχνουν ότι αυτά τα προβλήματα είναι σημαντικά και δεν μπορούν να αγνοηθούν. Η πολιτική συμμετοχή μπορεί να θεωρηθεί ως η συμμετοχή σε δημόσιες αντιπαραθέσεις, σε ανταγωνισμούς εξουσίας και σε διαφωνίες αναφορικά με την αναγνώριση της διαφορετικότητας [8]. Για αυτό και η πολιτική εκπαίδευση στα σχολεία κινδυνεύει να πετύχει το τελείως αντίθετο αποτέλεσμα: αυτό της αποπολιτικοποίησης αν παραμείνει μια απλή παιδαγωγική πρακτική χωρίς τη δημιουργία προϋποθέσεων πολιτικής συμμετοχής και παρέμβασης. Για τους παραπάνω λόγους, η παρούσα εισήγηση παρουσιάζει ένα δομημένο και διαδραστικό διδακτικό πακέτο της «Πολιτικής Παιδείας» που θα συμβάλει στη διαμόρφωση ενεργών και συνειδητοποιημένων πολιτών. Οι μαθητικές κοινότητες αποτελούν το χώρο για την ανάπτυξη της μαθητικής πρωτοβουλίας και κοινωνικοποίησης στο σχολείο.

Η έννοια της πολιτικής κοινωνικοποίησης θεωρείται ως μια λειτουργία, που διεκπεραιώνεται από το πολιτικό σύστημα, με σκοπό τη μετάδοση πολιτικά σχετικής πληροφορίας, στάσεων και αξιών. Οι μελετητές έχουν επιδιώξει να ερευνήσουν τις κοινωνικές δομές και τις διαδικασίες όπως επίσης και τους παράγοντες που έχουν εφαρμοστεί με σκοπό τη διατήρηση του πολιτικού συστήματος από τη μια γενιά στην άλλη αλλά και για αυτούς που ευθύνονται για την αλλαγή [9].

Η εξέλιξη του πεδίου βασίστηκε στη δυναμική αντίληψη του ατόμου στην πορεία της κοινωνικοποίησης του, με δυνατότητες όχι μόνο κατανόησης του υπάρχοντος πολιτικού συστήματος αλλά και συμβολής στην πολιτική και κοινωνική αλλαγή. Ο δυναμικός χαρακτήρας της κοινωνικοποίησης του πολίτη βασίζεται στην άποψη ότι η πολιτική θεμελιώνεται σε συγκεκριμένα πρότυπα σκέψης τα οποία επιβάλλονται και τα οποία μπορούν να αλλάξουν και να ανατραπούν [10]. Βασική παράμετρος της θεωρίας της πολιτικής κοινωνικοποίησης αποτελεί η άποψη ότι επιζητείται η παγίωση του πολιτικού συστήματος, αλλά προϋποθέτει μέσω της αγωγής των νέων μια διαδικασία κριτικού αναστοχασμού, μέσω του οποίου καταρχάς κατανοούνται τα πολιτικά φαινόμενα ενώ ελέγχονται ταυτόχρονα οι επιδράσεις τους στην καθημερινή ζωή [11]. Με τον όρο πολιτική αγωγή δηλώνεται η εκπαιδευτική διαδικασία στο πλαίσιο του σχολείου η οποία στοχεύει στην πολιτική κοινωνικοποίηση. Είναι η αφομοίωση του ατόμου στις αξίες πάνω στις οποίες είναι δομημένο το κράτος και η κοινωνία. Χαρακτηριστικά παραδείγματα, αποτελούν, η συμμετοχή του ατόμου στις εκλογικές διαδικασίες και στη λήψη αποφάσεων σε τοπικό και σε εθνικό επίπεδο. Η διαδικασία αυτή ενέχει την ενημέρωση του μαθητή στη λειτουργία του πολιτεύματος και του εκλογικού συστήματος με τη βοήθεια των μαθηματικών.

Για το σκοπό αυτό σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν κατά το ακαδημαϊκό έτος 2018-19 διδακτικά εργαστήρια με χρήση της αρχής της διαβούλευσης σε σχολεία του Πολεοδομικού Συγκροτήματος Θεσσαλονίκης, στο πλαίσιο του μαθήματος «Σύγχρονος Κόσμος, Πολίτης και Δημοκρατία». Τα εργαστήρια αφορούν την λειτουργία της μαθητικής κοινότητας, τις εκλογές για την ανάδειξη των μαθητικών συμβουλίων και τις Ευρωεκλογές. Δεδομένα συγκεντρώθηκαν με τη χρήση του ερωτηματολογίου σεναρίου και αναλύθηκαν με τη Μέθοδο της Conjoint Analysis [12] καθώς επίσης και με ειδικό ερωτηματολόγιο μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης. Τα υλικά διδασκαλίας και οι διδακτικές πρακτικές εμπλουτίζονται, κατά την πρόταση, με επιπλέον δραστηριότητες για την εξοικείωση των μαθητών με τις κοινοβουλευτικές λειτουργίες μέσω (και) βιωματικών δράσεων. Οι μαθητές μέσω της διαδραστικής μάθησης και του TBL εξοικειώνονται με τις δημοκρατικές διαδικασίες, εφαρμόζουν τις διαδικασίες μέσω της εκλογής μαθητικών συμβουλίων και εξοικειώνονται με την έννοια της συμμετοχής με την καθημερινή πρακτική και λειτουργία τους.

Η ΕΡΕΥΝΑ

Παρακάτω παρουσιάζονται αποτελέσματα δειγματοληπτικής έρευνας που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος «Διδακτική της Πολιτικής Παιδείας» του τμήματος Πολιτικών Επιστημών και του Εργαστήριου Εφαρμοσμένης Πολιτικής Έρευνας. Επιδιώκοντας την ανάπτυξη νέων εργαλείων διδασκαλίας το Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Πολιτικής Έρευνας του τμήματος στο πλαίσιο του μαθήματος δόθηκαν οι κατάλληλες κατευθύνσεις και τα διδακτικά εργαλεία, ώστε οι φοιτητές να σχεδιάσουν, να οργανώσουν και να αναπτύξουν το διδακτικό υλικό με σύγχρονες διδακτικές μεθόδους με αντικείμενο διδασκαλίας την Πολιτική Παιδεία. Οι φοιτητές ανέλαβαν να χρησιμοποιήσουν το υλικό που ετοίμασαν και παρουσίασαν κατά τη διάρκεια της πειραματικής διδασκαλίας μίας διδακτικής ώρας στο μάθημα «Σύγχρονος Κόσμος, Πολίτης και Δημοκρατία» της Β’ Λυκείου με αντικείμενο την λειτουργία της μαθητικής κοινότητας, τις εκλογές για την ανάδειξη των μαθητικών συμβουλίων και την Ευρωπαϊκή Ένωση και τις Ευρωεκλογές. Οι φοιτητές του τμήματος υλοποίησαν σε μία διδακτική ώρα εργαστηριακή διδασκαλία σε ομάδες μαθητών βάσει της αρχής της διαβούλευσης ενώ προγενέστερα είχαν ενημερώσει τους μαθητές σχετικά με την διαδικασία και τους εκπαιδευτικούς σκοπούς της διαβούλευσης. Στο τέλος, της εργαστηριακής διδασκαλίας, οι συμμετέχοντες συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο καταγραφής στάσεων και απόψεων και αξιολόγησης σεναρίων. Η παρέμβαση αυτή υλοποιήθηκε σε 14 Λύκεια της Θεσσαλονίκης και συγκεντρώθηκαν 500 ερωτηματολόγια από μαθητές και μαθήτριες της Β’ Λυκείου.

Η ανάλυση γίνεται με τη μέθοδο της Conjoint Analysis [13]. Οι φοιτητές στο τέλος των εργαστηρίων, ζήτησαν από τους μετέχοντες στην έρευνα να ταξινομήσουν τα προφίλ των επιλογών με βάση το σενάριο που παρουσιάζουμε παρακάτω. Η ιεράρχηση γίνεται από το 1 μέχρι και το 8. Στην περίπτωση μας, για το ερευνητικό ερώτημα που τίθεται ο αριθμός «1» αντιπροσωπεύει αυτό τον συνδυασμό επιλογών που θα φέρουν το καλύτερο αποτέλεσμα στη σχολική κοινότητα και σταδιακά φτάνουμε στο «8» που αντιπροσωπεύει το προφίλ επιλογών που κατά τη γνώμη του ερωτώμενου θα είναι λιγότερο αποτελεσματικό. Η χρήση της Conjoint Analysis επιτρέπει στους ερευνητές να διερευνούν και να αποτυπώνουν τις επιλογές των ατόμων ως αποτέλεσμα αποφάσεων μεταξύ πολλαπλών και διαφορετικών χαρακτηριστικών/ παραγόντων/ προφίλ. Αποτιμάται η «σχετική βαρύτητα» κάθε παράγοντα που διερευνάται. Κάθε φορά που διερευνούμε μία έννοια ή μία κατάσταση καθορίζουμε τα χαρακτηριστικά ή τους παράγοντες που υποθέτουμε ότι συνθέτουν το ευρύτερο ερώτημα. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ένα σχέδιο από τον ορθογώνιο σχεδιασμό με τους συνδυασμούς (προφίλ επιλογών) και τα επίπεδα (στάθμες) των παραγόντων που θα μελετηθούν.

Η Γενική Συνέλευση

Η γενική συνέλευση των μελών της κάθε μαθητικής κοινότητας, δηλαδή όλοι οι μαθητές κάθε τάξης ή τμήματος, είναι το ανώτερο όργανο κάθε μαθητικής κοινότητας. Στην γενική συνέλευση οι μαθητές συζητούν και αποφασίζουν για τα προβλήματα που τους απασχολούν (Υ.Α.Γ2/336/1991). Το ερώτημα είναι πως θα πρέπει να λειτουργεί η γενική συνέλευση σύμφωνα με τους μαθητές. Το ερωτηματολόγιο σεναρίου διαμορφώθηκε με βάση πέντε επίπεδα παραγόντων: το σύστημα εκλογής συμβουλίου (πρόσωπα ή παρατάξεις), την αντιπροσώπευση (ένας μαθητής από κάθε τμήμα ή όλοι), την επίλυση προβλημάτων (ενεργή συμμετοχή ή συμβουλευτική), την εκλογή του 15μελούς συμβουλίου (είναι απαραίτητη ή όχι) και τον συντονισμό των Σχολείων σε επίπεδο Δήμου (ναι ή όχι).

Από την ανάλυση προκύπτει ότι, οι μαθητές θεωρούν απαραίτητη την εκλογή του 15μελούς συμβουλίου επιδιώκοντας την ενεργή συμμετοχή στα θέματα που αφορούν τη σχολική τους μονάδα. Επιλέγουν πρόσωπα και επιθυμούν να αντιπροσωπεύεται κάθε τμήμα ξεχωριστά. Επίσης επιθυμούν τον συντονισμό των σχολείων σε επίπεδο Δήμου ώστε να έχουν τη δυνατότητα να προωθούν τα προβλήματα/ ανάγκες/ ζητήματα τους στους τοπικούς άρχοντες. Ο παράγοντας με τη υψηλότερη σχετική βαρύτητα, είναι η «εκλογή του 15μελούς» (25.3%) και «σύστημα εκλογής» (22.2%) δεύτερο στην κατάταξη.

Υποψηφιότητα στο μαθητικό συμβούλιο

Δικαίωμα για υποβολή ή πρόταση υποψηφιότητας στο μαθητικό συμβούλιο έχουν όλοι οι μαθητές, όλα τα μέλη της μαθητικής κοινότητας. Οι εκλογές για την ανάδειξη των συμβουλίων πρέπει να ακολουθούν, ύστερα από διάλογο πάνω στα προβλήματα των μαθητών και του σχολείου. Το ερώτημα αφορά τα κριτήρια με τα οποία ψηφίζουν οι μαθητές τους αντιπροσώπους τους. Το ερωτηματολόγιο σεναρίου διαμορφώθηκε με βάση πέντε επίπεδα παραγόντων: τα χαρακτηριστικά αντιπροσώπου (διεκδικητικός-συναινετικός), την προτεραιότητα (σχολείο ή τμήμα), τις επιδόσεις του μαθητή/υποψηφίου (καλός μαθητής ή όχι καλός), τις κοινωνικές δεξιότητες (επικοινωνιακός ή όχι) και τον παράγοντα δημοφιλία (δημοφιλής ή όχι).

Οι μαθητές προτιμούν οι αντιπρόσωποι τους στα μαθητικά συμβούλια να είναι καλοί στα μαθήματα, δημοφιλείς με επικοινωνιακές δεξιότητες. Επιλέγουν περισσότερα άτομα που έχουν διεκδικητικό χαρακτήρα και έχουν σαν προτεραιότητας το συμφέρον του σχολείου τους. Ο παράγοντας με τη υψηλότερη σχετική βαρύτητα, είναι η «προτεραιότητα» δηλαδή, η υπεράσπιση των συμφερόντων του τμήματος ή του σχολείου με ποσοστό 31.1% και οι επικοινωνιακές δεξιότητες (25.8%)

Ευρωεκλογές, «ψηφίζω πρώτη φορά»

Στις 26 Μαΐου 2019 πραγματοποιήθηκαν οι εκλογές για την εκλογή των αντιπροσώπων του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου. Το ερώτημα σε αυτή την περίπτωση αφορούσε τα κριτήρια επιλογής των νέων ψηφοφόρων. Τα επίπεδα παραγόντων ήταν: το κόμμα (ιδεολογικές αρχές και κοσμοαντίληψη), τα πρόσωπα (υποψήφιοι και πολιτικό προσωπικό), τα θέματα (προγραμματικές και πολιτικές προτάσεις) και η συνεργασία (με την έννοια της θετικής ή αρνητικής διάθεση των συνδυασμών). Από την ανάλυση προκύπτει ως σημαντικότερος παράγοντας το «κόμμα» (30.6%), επόμενος σε σημασία η «συνεργασία» (28.0%), τα «θέματα» (24.2%) και τα «πρόσωπα» (17.0%). Δηλαδή, οι μαθητές εξετάζουν κατά σειρά τις ιδεολογικές αρχές των κομμάτων, την θέση τους όσον αφορά την συνεργασία, τις προγραμματικές τους θέσεις και τελικά τους υποψηφίους και το πολιτικό προσωπικό. Ο παράγοντας με τη υψηλότερη σχετική βαρύτητα, είναι ο κόμμα (30.6%) και η συνεργασία (28.0%).

Παράλληλα, στην έρευνα ανιχνεύεται η στάση των μαθητών και μαθητριών αναφορικά με την Ευρωπαϊκή Ένωση, τον βαθμό πολιτικής γνώσης, την πολιτική κινητοποίηση, την θέση στην κλίμακα Δεξιά-Αριστερά, την πρόθεση στάσης στις Ευρωεκλογές, το ενδιαφέρον για την πολιτική, τις πηγές ενημέρωσης, τις αξίες και τις αντιλήψεις για τη Δημοκρατία.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες εμπιστεύονται την ΕΕ (38%), εκτιμούν ότι δεν υπάρχει κοινή ευρωπαϊκή πολιτική (62.%), πιστεύουν ότι το ευρωπαϊκό κοινοβούλιο πρέπει να έχει μεγαλύτερη δύναμη (48.0%) και οι Ευρωπαίοι πολίτες πρέπει να έχουν μεγαλύτερη ανάμειξη στις αποφάσεις (86.0%). Αισθάνονται ότι δεν είναι πληροφορημένοι για τους θεσμούς και τις πολιτικές (55.0%) και εκτιμούν ότι η γνώμη της χώρας μας (43.5%) και η προσωπική τους γνώμη (53.5%) δεν μετρούν στην Ευρωπαϊκή Ένωση.

Όσον αφορά την πρόθεση στάσης στις εκλογές ποσοστό 72.8% δηλώνει ότι προτίθεται να ψηφίσει, 10.4% ότι επιλέγει άκυρο/λευκό, 13.3% ότι θα απέχει και 3.5% δεν απαντά. Από το σύνολο των μαθητών και μαθητριών έχει αφαιρεθεί το ποσοστό 1% που δηλώνει ότι δεν έχει δικαίωμα ψήφου. Ποσοστό 40% των μαθητών και μαθητριών δηλώνει ότι ενδιαφέρεται («πολύ» και «αρκετά») για την πολιτική, ποσοστό 46.5% «λίγο» και 12.5% «καθόλου».

Από το σύνολο των μαθητών που δήλωσαν ότι θα ψηφίσουν ποσοστό 16% δεν αιτιολογεί την απόφαση του. Από τους υπόλοιπους (πολλαπλή επιλογή) ποσοστό 50% ψηφίζει διότι έχει ευθύνη, 43.2% δηλώνει για εμπειρία συμμετοχής, 26.5% αναφέρεται στην ιδιότητα του πολίτη, 28.8% αναφέρεται σε συλλογική ευθύνη και το 18.7% προβάλλει την συμβολή στο μέλλον. Από όσους δηλώνουν ότι θα ψηφίσουν άκυρο/λευκό ή ότι θα απέχουν ποσοστό 31.8% δεν αιτιολογεί την απόφαση του. Από τους υπόλοιπους ποσοστό 38.8% δηλώνει ότι δεν έχει δυνατότητα διαμόρφωσης άποψης, 31.3% ότι έχει ανεπαρκή πληροφόρηση και

27.5% ότι δεν έχει εμπιστοσύνη στα κόμματα και τους πολιτικούς. Η αυτοτοποθέτηση στην κλίμακα Αριστερά-Δεξιά παρουσιάζει κανονική κατανομή (μέση τιμή 4,77).

Όσον αφορά τη μορφή πολιτικής κινητοποίησης, συλλογικές μορφές κινητοποίησης επιλέγει ποσοστό 19.0%, ποσοστό 20.0% επιλέγει να δραστηριοποιηθεί μέσω των Μέσων Κοινωνικής Δικτύωσης, ποσοστό 21.0% επιλέγει την ατομική διαμεσολάβηση και ποσοστό 40.0% δεν κινητοποιείται. Ποσοστό 5.0% δηλώνει ότι δεν ενημερώνεται για την πολιτική. Από τους υπόλοιπους μαθητές και μαθήτριες που δηλώνουν τις δύο κύριες πηγές ενημέρωσης τους, πρώτη κατά σειρά πηγή αναδεικνύονται τα Μέσα Ενημέρωσης (Τηλεόραση, Ραδιόφωνο: 53.0%) και δεύτερη η οικογένεια (43.5%). Ένας στους τρεις (34.0%) ενημερώνεται από τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης και ένας στους τέσσερεις από το Internet. Ο κοινωνικός περίγυρος είναι πηγή ενημέρωσης για το 14.5% και για το 5.0% εφημερίδες και περιοδικά αποτελούν πηγή ενημέρωσης.

Με τη βοήθεια διαφορετικών απεικονίσεων [14] της Δημοκρατίας, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να επιλέξουν 3 εικόνες (από τις 12) που κατά την γνώμη τους σχετίζονται με τη Δημοκρατία. Στην πρώτη θέση τοποθετείται η συμβολική απεικόνιση της αντιπροσωπευτικής Δημοκρατίας (46.0%). Πάνω από 30.0% τοποθετούνται κατά σειρά οι απεικονίσεις της «Αρχαίας Ελλάδας» (38.5%), της «Διαμαρτυρίας» (37.0%), της «Άμεσης-συμμετοχής» (36.0%) και της «Άμεσης Δημοκρατίας» (31.0%).

Αρχής της διαβούλευσης

Οι μαθητές, στο τέλος της διαδικασίας, αξιολόγησαν την αρχής της διαβούλευσης και τη διαδικασία διεξαγωγής της. Ποσοστό 78.0% δήλωσε ότι βρίσκει χρήσιμη τη διαδικασία της διαβούλευσης και 72.0% αναφέρει ότι ενημερώθηκε επαρκώς για το υπό μελέτη ζήτημα. Μετά την ολοκλήρωση του εργαστηρίου ποσοστό 18.0% δήλωσε ότι δεν βελτιώθηκε «καθόλου» η αρχική άποψη που είχε για το θέμα ενώ ποσοστό 80.0% των μαθητών δήλωσε ότι βελτιώθηκε η αρχική άποψη του («πολύ» με 6.0%, «αρκετά» με 30.0% και «λίγο» με 44.0%).

Σημείωση

1. **Chadjipadelis & Sotiroglou 2017**
2. **Χατζηπαντελής & Σωτήρογλου**
3. **Council of Europe, 2010b**
4. **Birzea et al., 2005. Gollob, Krapf & Weidinger, 2010a, 2010b**
5. **Council of Europe 2002. Schulz et al., 2010a, 2010b**
6. **Eurydice, 2005. Hoskins, 2006**
7. **Hoskins & Mascherini, 2009. Torney-Purta et al., 2001**
8. **Held, 2006. Norris, 2011**
9. **Sears & Valentino, 1997· Sherrod, Flanagan & Youniss, 2002**

10. **Fahmy, 2006· Feldmann, 2007**
11. **Furlong & Cartmel, 2006**
12. **Orme, 2010**
13. **Halme & Kallio, 2011**
14. **Αναλυτικά στοιχεία της έρευνας https://www.eps.auth.gr/el/polsci/6845**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bîrzea, C., Cecchini, M., Harrison, C., Krek, J., & Spajić-Vrkaš, V., (2005). Tool for Quality Assurance of Education for Democratic Citizenship in Schools. Paris: UNESCO, Council of Europe and CEPS. Προσπελάστηκε στις 11/9/2019 http://www.coe.int/t/dg4/education/edc/Source/Pdf/Documents/2006_4_Tool4QA_EDC.pdf).

Council of Europe, (2010b). Recommendation 1849 (2008) For the Promotion of a Culture of Democracy and Human Rights through Teacher Education. Strasbourg: Council of Europe.

Council of Europe, ed. (2002). Stocktaking Research on Policies for Education for Democratic Citizenship and Management of Diversity in Southeast Europe. Regional Analysis and Intervention Proposals. Strasbourg: Council of Europe.

Chadjipadelis T. & Sotiroglou M. (2017). Teaching Mathematics and Electoral Systems in Political Science, AUTH Department. In J. Morskan & A. Rogerson [WTM Munster] (Ed.) *Challenges in Mathematics Education for the Next Decade,* (3): pp. 46-5.

Eurydice. (2005). Citizenship Education at School in Europe. Brussels: European Commission.

Fahmy, E. (2006), Young citizens: young People's involvement in politics and decision making, Bristol: Ashgate.

Feldmann, G. (2007) Classroom Civility Is Another of Our Instructor Responsibilities, College Teaching, 49(4):137-140.

Furlong, H & Cartmel, A. (2006). Young People and Social Change. McGraw-Hill Education (UK).

Halme, M. and Kallio, M. (2011). Estimation methods for choice-based conjoint analysis of consumer preferences. European Journal of Operational Research, 214(1):160-167.

Held, D. (2006). Models of Democracy. Third Edition. Cambridge: Polity.

Hoskins, B. (2006). Working towards Indicators for Active Citizenship. Report from the Active Citizenship for Democracy Conference. Προσπελάστηκε στις 11/9/2019 (http://crell.jrc.ec.europa.eu/download/Conferences/conference%20report%20final3.pdf).

Hoskins, B. & Mascherini, M. (2009). Measuring Active Citizenship through the Development of a Composite Indicator. Social Indicators Research 90(3):459–88.

Orme, B. (2010). Getting started with conjoint analysis. 2nd ed. Madison, WI: Research Publishers, LLC.

Sears, D. & Valentino, N. (1997). Politics Matters: Political Events as Catalysts for Preadult Socialization. American Political Science Review, 91(1): 45-65.

Sherrod, L. R., Flanagan, C., & Youniss, J. (2002). Dimensions of citizenship and opportunities for youth development: The what, why, when, where, and who of citizenship development. Applied Developmental Science, 6(4): 264-272.

Torney-Purta, J, Lehmann, R., Oswald, H., & Schulz, W. (2001). Citizenship and Education in Twenty-Eight Countries: Civic Knowledge and Engagement at Age Fourteen. Amsterdam: IEA.

Χατζηπαντελής Θ. & Σωτήρογλου Μ. (2018). Μαθηματικά και Στατιστική στην Δημοκρατία. Μια διαθεματική προσέγγιση στα πρακτικά της *10η Διεθνής Μαθηματική Εβδομάδα 2018*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας, 25-29 Απριλίου, Θεσσαλονίκη.

ΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μαριάννα Καραμάνου, Μαριλένα Παντζιαρά, Αλεξάνδρα Πετρίδου

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Κύπρου, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης, mkaramanou@hotmail.com, marilena.p@cytanet.com.cy, petridou.a@cyearn.pi.ac.cy,

Η παρούσα μελέτη διεξήχθη στο πλαίσιο της διεθνούς συγκριτικής έρευνας New Open Research: Beliefs about Teaching Mathematics (NorBa), η οποία εξετάζει πεποιθήσεις εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά σε περισσότερες από 15 χώρες. Συγκεκριμένα, στο άρθρο αυτό διερευνάται η δομή και το επίπεδο των επιστημολογικών πεποιθήσεων καθηγητών Μαθηματικών σε Λύκεια της Κύπρου αλλά και διαφορές που παρουσιάζουν οι καθηγητές όσον αφορά τις επιστημολογικές τους πεποιθήσεις σε σχέση με το υπόβαθρό τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι πεποιθήσεις θεωρούνται καθοριστικές στο πώς οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται καταστάσεις, αφού επηρεάζουν τις δράσεις τους (Felbrich, Müller, & Blömeke, 2008; Felbrich, Kaiser, & Schmotz, 2012) και έχουν σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία καθώς αποτελούν γέφυρα μεταξύ γνώσεων και διδασκαλίας (Wilkins, 2008; Felbrich et al., 2012). Με βάση αυτή την οπτική, οι περισσότερες θεωρητικές κατηγοριοποιήσεις της επαγγελματικής επάρκειας των εκπαιδευτικών (π.χ. Ernest, 1989; Thompson, 1992) περιλαμβάνουν, εκτός από τις γνώσεις, τις πεποιθήσεις και τις στάσεις τους. Αν και είναι γνωστό ότι υπάρχει πλουραλισμός και πολλές φορές ασυμφωνία στον ορισμό των πεποιθήσεων (Xenofontos, 2018), στην έρευνα αυτή υιοθετείται ο ορισμός του Ernest (1989) που επισημαότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών αναφέρονται σε προσωπικές αντιλήψεις, πιστεύω και απόψεις που διαμορφώνουν τη διδακτική τους πρακτική.

Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις (ΕΠ) αποτελούν ένα υποσύστημα των πεποιθήσεων του ατόμου και, όσον αφορά τα Μαθηματικά, αναφέρονται στη φύση της μαθηματικής γνώσης και στην κατάκτησή της (Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2016; Fellbrich et al., 2012). Διάφορες ερευνητικές προσπάθειες έδειξαν ότι οι ΕΠ των εκπαιδευτικών επηρεάζουν άμεσα τις διδακτικές τους επιλογές, έχουν άμεση επίδραση στη διδασκαλία και αξιολόγηση που εφαρμόζουν και επηρεάζουν τις ΕΠ των μαθητών τους (Depaepe et al., 2016). Σύμφωνα με σχετική βιβλιογραφία (Felbrich et al., 2012; Schoenfeld, 1998), έχουν βιωματική και αναλόγως-του-πλαισίου/περιβάλλοντος φύση και αποτελούν, σύμφωνα με τη Schommer (1990) ένα πολυδιάστατο σύστημα σχετικά ανεξάρτητων πεποιθήσεων.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες κατηγοριοποιήσεις σχετικά με τις ΕΠ των εκπαιδευτικών που αφορούν τη φύση των Μαθηματικών (π.χ. Ernest, 1989). Μεταξύ αυτών, οι Grigutsch, Raatz και Törner (1998) ανέπτυξαν μια κατηγοριοποίηση, η οποία περιλαμβάνει τέσσερις θεωρήσεις όσον αφορά στη φύση των Μαθηματικών: (α) τη Φορμαλιστική (formalism-related) θεώρηση, όπου τα Μαθηματικά γίνονται αντιληπτά ως ένα αξιωματικό σύστημα επαγωγικά οικοδομημένο, (β) την Αλγοριθμική (the scheme-related) θεώρηση, όπου τα

Μαθηματικά θεωρούνται ως μια συλλογή αλγόριθμων, όρων, κανόνων και τύπων, (γ) τη Διερευνητική (the process-related) θεώρηση, όπου τα Μαθηματικά γίνονται αντιληπτά ως μια επιστήμη, η οποία αποτελείται από διαδικασίες επίλυσης προβλήματος και (δ) τη Χρηστική (the application-related) θεώρηση, όπου τα Μαθηματικά εξετάζονται ως μια επιστήμη, η οποία είναι σχετική, επίκαιρη για την κοινωνία και την καθημερινή ζωή. Οι Grigutsch et al. (1998) εισηγούνται, ότι οι τέσσερις αυτές κατηγορίες μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο ευρύτερες διαστάσεις: τη στατική διάσταση, όπου η φορμαλιστική και η αλγοριθμική κατηγορία περιγράφουν τα Μαθηματικά ως μια στατική επιστήμη και τη δυναμική διάσταση, όπου η διερευνητική και η χρηστική θεώρηση χαρακτηρίζουν τα Μαθηματικά ως μια δυναμική διαδικασία. Στην έρευνά τους εντόπισαν ότι η χρηστική και διερευνητική κατηγορία συσχετίζονταν θετικά μεταξύ τους και το ίδιο παρατήρησαν για τη φορμαλιστική και την αλγοριθμική κατηγορία. Επιπλέον, ανακάλυψαν ότι η διερευνητική κατηγορία συσχετιζόταν αρνητικά με τη φορμαλιστική και την αλγοριθμική κατηγορία, ενώ δεν υπήρχε συστηματική συσχέτιση μεταξύ της χρηστικής και κάποιας άλλης κατηγορίας εκτός από τη διερευνητική.

Έρευνες στο διεθνή χώρο σχετικά με τις ΕΠ εκπαιδευτικών όσον αφορά τη φύση των Μαθηματικών περιλάμβαναν εκπαιδευτικούς από διάφορες βαθμίδες της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Η έρευνα των Felbrich et al. (2008) διερεύνησε τη δομή και το επίπεδο των πεποιθήσεων για τα Μαθηματικά μελλοντικών εκπαιδευτικών Μαθηματικών τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος των σπουδών τους, καθώς επίσης και τις ΕΠ των καθηγητών τους. Χρησιμοποιώντας μια προσαρμοσμένη εκδοχή του ερωτηματολογίου αναπτυγμένου από τους Grigutsch et al. (1998), επιβεβαίωσαν τους τέσσερις παράγοντες που αναφέρονταν στις τέσσερις προαναφερθείσες κατηγορίες. Αναφορικά με το επίπεδο των πεποιθήσεών των φοιτητών, και στην αρχή και στο τέλος των σπουδών τους συμφωνούσαν σε μεγάλο βαθμό με δηλώσεις της διερευνητικής κατηγορίας ενώ συμφωνούσαν λιγότερο με δηλώσεις της αλγοριθμικής κατηγορίας. Στις απόψεις των μελλοντικών αυτών εκπαιδευτικών επικρατούσε η δυναμική διάσταση των Μαθηματικών ενώ συμφωνούσαν λιγότερο με τη στατική διάσταση. Ενδιαφέρον προκαλεί και το αποτέλεσμα ότι οι φοιτητές με υψηλή μαθηματική γνώση αντιλαμβάνονταν τα Μαθηματικά ως μια πιο δυναμική διαδικασία σε σχέση με αυτούς με χαμηλότερη μαθηματική γνώση. Όσον αφορά τους καθηγητές, οι καθηγητές Μαθηματικών στο δείγμα αυτό συμφώνησαν με δηλώσεις διερευνητικής, χρηστικής και φορμαλιστικής κατηγορίας και επέδειξαν λιγότερο θετική στάση απέναντι σε δηλώσεις της αλγοριθμικής κατηγορίας. Στο ίδιο πνεύμα, οι Roesken και Törner (2010) βρήκαν ότι οι καθηγητές Μαθηματικών σε πανεπιστήμια διατηρούν ταυτόχρονα στατικές και δυναμικές ΕΠ. Οι Liebendorfer και Schukajlow (2017) σε έρευνά τους με πρωτοετείς φοιτητές Μαθηματικών και χρησιμοποιώντας τις κλίμακες μέτρησης που αναπτύχθηκαν από τον Grigutsch et al. (1998) βρήκαν ότι οι δύο παράγοντες που αφορούσαν τη φορμαλιστική και την αλγοριθμική κατηγορία σχετίζονταν μεταξύ τους αλλά δεν βρήκαν σχέση μεταξύ της χρηστικής και διερευνητικής κατηγορίας. Τέλος, ένα από τα αποτελέσματα της συγκριτικής έρευνας των Fellbrich et al. (2012) που αφορούσε τις ΕΠ φοιτητών εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης σε 15 χώρες, ανάφερε ότι οι φοιτητές με υψηλότερη γνώση Μαθηματικών υιοθετούσαν περισσότερο δυναμικές πεποιθήσεις από ότι στατικές πεποιθήσεις.

Στο κυπριακό πλαίσιο, η Παναούρα (2014) σε έρευνα με δευτεροετείς φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος, χρησιμοποιώντας ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε τις τρεις κατηγορίες ΕΠ όπως ορίστηκαν από τον Ernest (1989), βρήκε ότι οι φοιτητές είχαν ισχυρές απόψεις όσον αφορά στην προσέγγιση των μαθηματικών, η οποία περιλαμβάνει κανόνες, διαδικασίες, τυπικά σύμβολα, τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση, με αύξηση των ΕΠ που αφορούσαν την πειραματική-διερευνητική θεώρηση μετά την παρέμβαση. Σε ποιοτική έρευνα με εκπαιδευτικούς Δημοτικής εκπαίδευσης, ο Xenofontos (2018), βρήκε ότι, τουλάχιστον σε πρώτο επίπεδο, οι εκπαιδευτικοί Δημοτικής Εκπαίδευσης δεν διατηρούσαν ταυτόχρονα και στατικές και δυναμικές ΕΠ, ενώ περαιτέρω ανάλυση κατέδειξε ότι κάποιοι εκπαιδευτικοί διατηρούσαν και τις δύο διαστάσεις των ΕΠ. Τέλος, σε έρευνα των Φιλίππου, Μονογυιού και Καουρή (2018), με κύπριους εκπαιδευτικούς Δημοτικής Εκπαίδευσης και χρησιμοποιώντας μια διαφορετική κατηγοριοποίηση ΕΠ από τις προαναφερθείσες, αποτελούμενη από πέντε διαστάσεις, δεν εντόπισαν σημαντική συσχέτιση των ΕΠ με το φύλο, ενώ βρέθηκε ότι οι ΕΠ σχετίζονταν θετικά με τα έτη υπηρεσίας καθώς και με τα έτη που δίδαξαν Μαθηματικά.

Από την επισκόπηση της βιβλιογραφίας φαίνεται ότι οι έρευνες για τις επιστημολογικές πεποιθήσεις των καθηγητών Μαθηματικών που εργάζονται σε Λύκεια είναι λίγες. Ως εκ τούτου, ο σκοπός αυτής της έρευνας είναι η διερεύνηση (α) της δομής των ΕΠ των καθηγητών Μαθηματικών σε Λύκεια της Κύπρου (β) του επιπέδου των ΕΠ τους και (γ) των διαφορών που παρουσιάζουν οι ΕΠ των καθηγητών Μαθηματικών σε σχέση με προσωπικά χαρακτηριστικά τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η Δημόσια Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην Κύπρο παρέχεται σε μαθητές ηλικίας 12-18 ετών, μέσω δύο τριετών κύκλων σπουδών: το Γυμνάσιο (ηλικίες 12-14) και το Λύκειο (ηλικίες 15-18). Σύμφωνα με την Ετήσια Έκθεση του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού, στην Κύπρο λειτουργούν 45 Λύκεια, όπου απασχολούνται 280 περίπου καθηγητές Μαθηματικών. Τα απαιτούμενα προσόντα για διορισμό ως καθηγητής Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση περιλαμβάνουν πανεπιστημιακό δίπλωμα στα Μαθηματικά και μονοετή φοίτηση σε Πρόγραμμα Παιδαγωγικής Κατάρτισης για Υποψήφιους Εκπαιδευτικούς Μέσης Εκπαίδευσης.

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν καθηγητές Μαθηματικών, οι οποίοι κατά τη σχολική χρονιά 2015-2016 εργάζονταν σε Λύκεια. Η έρευνα διεκπεραιώθηκε στο πλαίσιο της διεθνούς συγκριτικής έρευνας, New Open Research: Beliefs about Teaching Mathematics (NorBa), η οποία διερευνά τις πεποιθήσεις εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά σε περισσότερες από 15 χώρες. Στο πλαίσιο της διεθνούς αυτής έρευνας, αναπτύχθηκε σε όλες τις συμμετέχουσες χώρες ένα πολιτισμικά προσαρμοσμένο ερωτηματολόγιο. Το ερωτηματολόγιο αυτό αποτελείται από επτά μέρη, εκ των οποίων το ένα είναι ποιοτικό και τα υπόλοιπα έξι ποσοτικά (86 δηλώσεις). Τα ερωτηματολόγια στάλθηκαν στους καθηγητές Μαθηματικών σε όλα τα Λύκεια, καλώντας τους να συμμετέχουν σε εθελοντική βάση. Συνολικά το ερωτηματολόγιο συμπληρώθηκε και επιστράφηκε από 147 καθηγητές (44,8 % άνδρες και 55,2% γυναίκες). Το ποσοστό ανταπόκρισης ήταν 52,5%.

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από δύο μέρη (Α΄ και Στ΄ Μέρος) του ερωτηματολογίου. Το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου αφορούσε στη συλλογή προσωπικών στοιχείων των εκπαιδευτικών (φύλο, ηλικία, διδακτική εμπειρία και επίπεδο σπουδών) ενώ το Στ΄ Μέρος διερευνούσε τις επιστημολογικές τους πεποιθήσεις για τα Μαθηματικά.

Το Στ΄ Μέρος περιλάμβανε τη σύντομη εκδοχή (20 δηλώσεις) εργαλείου που αναπτύχθηκε από τους Grigutsch et al. (1998). Οι 20 δηλώσεις χωρίζονται σε τέσσερις επιμέρους κλίμακες: τη φορμαλιστική κατηγορία (5 δηλώσεις), την αλγοριθμική (5 δηλώσεις), τη διερευνητική (6 δηλώσεις) και τη χρηστική (4 δηλώσεις). Από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να εκφράσουν τις πεποιθήσεις τους σε σχέση με τις πιο πάνω δηλώσεις χρησιμοποιώντας πενταβάθμια κλίμακα τύπου Likert, όπου 1= Διαφωνώ απόλυτα και 5= Συμφωνώ απόλυτα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, εφαρμόστηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση (CFA), χρησιμοποιώντας το στατιστικό πακέτο AMOS, για την εγκυροποίηση της δομής των 20 δηλώσεων. Με την εφαρμογή της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimation), τρεις στατιστικοί δείκτες (CFI, chi-square και RMSEA) χρησιμοποιήθηκαν για να αξιολογήσουν την προσαρμογή του μοντέλου. Σύμφωνα με τους Hu και Bentler (1999), το μοντέλο για να έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα η τιμή του CFI πρέπει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από 0.95 και του RMSEA μικρότερη ή ίση με 0.06. Επιπρόσθετα, ο λόγος του χ^2 με τους βαθμούς ελευθερίας (CMIN/degrees of freedom) δεν πρέπει να υπερβαίνει το 3. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας κατέδειξαν ότι οι το μοντέλο με τέσσερις παράγοντες δεν είχε καλή προσαρμογή στα δεδομένα που συλλέγηκαν στο κυπριακό πλαίσιο (x^2 = 272.334, df=164, p<0.001, CFI=0.847, RMSEA=0.068). Κατά συνέπεια, στη συνέχεια εφαρμόστηκε διερευνητική παραγοντική ανάλυση (EFA) ώστε να διερευνηθεί η δομή των 20 δηλώσεων στο κυπριακό συγκείμενο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood) με περιστροφή μέγιστης διακύμανσης (varimax). Οι στατιστικοί δείκτες Kaiser-Meyer-Olkin (0.77) και Bartlett’s Test of Sphericity (χ^2 (120) =694.872, p<.001), κατέδειξαν ότι τα δεδομένα ήταν κατάλληλα για την παραγοντική ανάλυση. Για να προσδιοριστεί ο αριθμός των παραγόντων που θα διατηρηθεί, χρησιμοποιήθηκαν δύο κριτήρια: (α)Το κριτήριο Kaiser το οποίο ορίζει ότι οι ιδιοτιμές (eigenvalues) πρέπει να είναι μεγαλύτερες από 1 και το (β) διάγραμμα χαρακτηριστικών ριζών (scree plot).

Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, στην ανάλυση παρέμειναν μόνο 16 δηλώσεις που είχαν φορτίσεις μεγαλύτερες από 0.30 . Και τα δύο κριτήρια υποστήριξαν τη δομή των τεσσάρων παραγόντων επεξηγώντας το 48.08% της συνολικής διακύμανσης (total variance). Οι παράγοντες ονομάστηκαν σύμφωνα με τις δηλώσεις που περιλαμβάνονταν σε καθένα από αυτούς. Οι δηλώσεις που φόρτιζαν στον παράγοντα 1 αναπαριστούν τη Φορμαλιστική θεώρηση, οι δηλώσεις που φόρτιζαν στον παράγοντα 2 αναπαριστούν τη Χρηστική, ο παράγοντας 3 αντιπροσωπεύει την Αλγοριθμική και ο παράγοντας 4 τη Διερευνητική θεώρηση. Όλοι οι παράγοντες είχαν ικανοποιητική εσωτερική αξιοπιστία (Φορμαλιστική-α=0.78, Χρηστική-α=0.76, Μηχανιστική-α=0.72 και Διερευνητική-α=0.70).

	1	2	3	4
Παράγοντας 1: Φορμαλιστική θεώρηση (Formalism)				
Ουσιώδες για τα Μαθηματικά είναι η αυστηρότητα στους ορισμούς, δηλαδή μια ακριβής και συγκεκριμένη μαθηματική ορολογία.	.784			
Θεμελιώδες για τα Μαθηματικά είναι η λογική αυστηρότητα και η ακρίβεια.	.744			
Τα Μαθηματικά χαρακτηρίζονται από αυστηρότητα, συγκεκριμένα αυστηρότητα στους ορισμούς και στην τυπική μαθηματική επιχειρηματολογία.	.673			
Η μαθηματική σκέψη χαρακτηρίζεται από αφαίρεση και λογική.	.462			
Χαρακτηριστικά γνωρίσματα των Μαθηματικών είναι η σαφήνεια, η ακρίβεια και η βεβαιότητα.	.410			
Παράγοντας 2: Χρηστική θεώρηση (application)				
Τα Μαθηματικά βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων και έργων της καθημερινής ζωής.		.776		
Τα Μαθηματικά επιφέρουν θεμελιώδη ωφελήματα για την κοινωνία.		.755		
Πολλά στοιχεία των Μαθηματικών έχουν πρακτικές εφαρμογές.		.540		
Τα Μαθηματικά είναι χρήσιμα για όλα τα επαγγέλματα.		.484		
Παράγοντας 3: Αλγοριθμική θεώρηση (scheme)				
Για να κάνεις Μαθηματικά χρειάζεται πολλή εξάσκηση, ορθή εφαρμογή ρουτινών και στρατηγικών επίλυσης προβλήματος.			.877	
Κατά την επίλυση μαθηματικών δραστηριοτήτων πρέπει να γνωρίζουμε την ορθή διαδικασία αλλιώς θα αποτύχουμε.			.570	
Μαθηματικά σημαίνει μάθηση, απομνημόνευση, εφαρμογή.			.565	

Τα Μαθηματικά είναι μια συλλογή από κανόνες και διαδικασίες που προδιαγράφουν πώς λύνεται ένα πρόβλημα.	.517
Παράγοντας 4: Διερευνητική θεώρηση (Process)	
Τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με πολλούς τρόπους.	.762
Στα Μαθηματικά μπορούμε να ανακαλύψουμε και να δοκιμάσουμε μόνοι μας πολλά πράγματα.	.601
Συνήθως υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόποι να λύνονται μαθηματικά προβλήματα και έργα.	.567

Πίνακας 1: Διερευνητική παραγοντική ανάλυση των επιστημολογικών πεποιθήσεων για τα Μαθηματικά

Σε σχέση με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, ο Πίνακας 2 παρουσιάζει το μέσο όρο κάθε μιας από τις τέσσερις κατηγορίες των ΕΠ. Οι ΕΠ των καθηγητών Λυκείων της Κύπρου χαρακτηρίζονται από τη Χρηστική και τη Διερευνητική θεώρηση. Επιπρόσθετα, παρουσιάζεται σε υψηλό βαθμό και η Φορμαλιστική θεώρηση ενώ η Αλγοριθμική θεώρηση υποστηρίζεται σε μέτριο βαθμό.

Κλίμακα/Scale	Μέσος Όρος	Τυπική απόκλιση
Φορμαλιστική	4.08	.57
Χρηστική	4.46	.46
Αλγοριθμική	3.47	.70
Διερευνητική	4.30	.48

Πίνακας 2: Μέσος όρος των επιστημονικών πεποιθήσεων

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τις συσχετίσεις (correlations) μεταξύ των διαφορετικών θεωρήσεων των ΕΠ. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3, οι συσχετίσεις δεν ήταν στατιστικά σημαντικές για τους τέσσερις παράγοντες.

	Αλγοριθμική	Χρηστική	Διερευνητική
Φορμαλιστική	.060	.051	.021
Διερευνητική	-.026	.105	
Χρηστική	.040		

Πίνακας 3: Γραμμικές συσχετίσεις μεταξύ των τεσσάρων επιστημολογικών πεποιθήσεων σχετικά με τα Μαθηματικά

Όσον αφορά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, έγινε διερεύνηση των διαφορών μεταξύ των ΕΠ των εκπαιδευτικών σε σχέση με προσωπικά χαρακτηριστικά τους εφαρμόζοντας τη multivariate analysis of variance (MANOVA). Ως εξαρτημένες μεταβλητές χρησιμοποιήθηκαν οι τέσσερις παράγοντες των ΕΠ των εκπαιδευτικών και ως ανεξάρτητες τα προσωπικά χαρακτηριστικά ηλικία, έτη υπηρεσίας και διδακτική εμπειρία. Περιγραφικά στοιχεία για τα προσωπικά χαρακτηριστικά των καθηγητών Μαθηματικών παρουσιάζονται στον Πίνακα 4. Όσον αφορά το επίπεδο σπουδών των καθηγητών, 77 καθηγητές (ποσοστό 52,7%) κατείχαν μεταπτυχιακό τίτλο και 9 (6,2%) κατείχαν διδακτορικό. Οι αναλύσεις MANOVA δεν κατέδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφοροποιήσεις στις ΕΠ των καθηγητών με βάση τα προσωπικά χαρακτηριστικά τους.

	Ελάχιστο	Μέγιστο	Μέσος Όρος
Ηλικία	34	62	45,64
Έτη υπηρεσίας	4	35	15,53
Έτη διδ. Μαθηματικών	1	32	11,58

Πίνακας 4: Ηλικία και διδακτική εμπειρία των εκπαιδευτικών

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, η διερευνητική ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας κατέδειξε την ύπαρξη τεσσάρων παραγόντων που αντιστοιχούν στις τέσσερις κατηγορίες των ΕΠ των εκπαιδευτικών, όπως αυτές παρουσιάζονται στη σχετική βιβλιογραφία Grigutsch et al., 1998). Οι ΕΠ που αφορούσαν τη χρηστική και τη διερευνητική θεώρηση υποστηρίχθηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό σε αντίθεση με αποτελέσματα άλλων ερευνών (Fellbrich et al., 2008; Παναούρα, 2014). Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να αποδοθεί τόσο στο διαφορετικό δείγμα της έρευνας, όσο και στην εφαρμογή του Νέου Αναλυτικού Προγράμματος (από το 2011), το οποίο αναπτύχθηκε με βάση αρχές, όπως το να εμπλέκονται οι μαθητές σε μαθηματικές διερευνήσεις, συνδεδεμένες με την καθημερινή ζωή.

Σε αντίθεση με αποτελέσματα άλλων ερευνών (Felbrich et al., 2008; Grigutsch et al., 1998) η συσχέτιση μεταξύ των τεσσάρων παραγόντων δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Επιπλέον, η δυναμική και η στατική διάσταση των Μαθηματικών δεν εμφανίστηκαν ως ανταγωνιστικές στο δείγμα αυτό, συμφωνώντας με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών (Felbrich et al., 2008; Liebendorfer & Schukajlow, 2017; Roesken & Törner, 2010), οι οποίες καταδεικνύουν ότι οι καθηγητές Μαθηματικών μπορούν να διατηρούν ταυτόχρονα στατικές και δυναμικές ΕΠ.

Αξίζει να αναφερθεί ότι η έρευνα αυτή δεν κατέδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές όσον αφορά τις ΕΠ των καθηγητών Μαθηματικών σε σχέση με προσωπικές μεταβλητές (φύλο, ηλικία, διδακτική εμπειρία, επίπεδο σπουδών). Το αποτέλεσμα αυτό δεν συμφωνεί με αποτελέσματα του Felbrich et al. (2012), κατά τα οποία μελλοντικοί εκπαιδευτικοί Δημοτικής Εκπαίδευσης με υψηλότερη γνώση Μαθηματικών υιοθετούσαν δυναμικές πεποιθήσεις περισσότερο από τις στατικές πεποιθήσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι στην Κύπρο όλοι οι καθηγητές κατέχουν τουλάχιστον πανεπιστημιακό τίτλο στα Μαθηματικά, με τη διαφοροποίηση στο επίπεδο γνώσης να αφορά μεταπτυχιακούς και διδακτορικούς τίτλους. Το αποτέλεσμα δεν συμφωνεί ούτε με αποτελέσματα της έρευνας του

Φιλίππου et al. (2018) που βρήκαν ότι οι ΕΠ των εν υπηρεσία εκπαιδευτικών Δημοτικής Εκπαίδευσης σχετίζονταν θετικά με τα έτη υπηρεσίας καθώς και με τα έτη που δίδαξαν Μαθηματικά. Αποτελέσματα συγκριτικών ερευνών σχετικά με τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, αναφέρουν ότι οι πεποιθήσεις τους επηρεάζονται από το πολιτισμικό πλαίσιο. Αυτό σημαίνει ότι διάφοροι παράγοντες όπως οι εκπαιδευτικές πολιτικές, η δομή των εκπαιδευτικών συστημάτων καθώς και οι αξίες και οι φιλοδοξίες για την εκπαίδευση επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών (Xenofontos, 2018). Ενδεχομένως, η συγκεντρωτική δομή του κυπριακού εκπαιδευτικού συστήματος, η προπτυχιακή εκπαίδευση των καθηγητών Μαθηματικών που γίνεται κατά το πλείστο σε πανεπιστήμια της Κύπρου και της Ελλάδας, όσο και η μορφή της ενδο-υπηρεσιακής επιμόρφωσης την οποία λαμβάνουν οι καθηγητές στην Κύπρο, να σχετίζεται με το αποτέλεσμα αυτό. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της έρευνας αυτής με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών καταδεικνύει την πολυπλοκότητα της δυναμικής που αφορά τις ΕΠ.

Περαιτέρω έρευνες κρίνονται σημαντικές στο πεδίο των ΕΠ για τα Μαθηματικά εκπαιδευτικών που διδάσκουν Μαθηματικά σε διάφορες χώρες αλλά και σε διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης. Επιπλέον, όπως αναφέρει ο Depaepe et al. (2016), σημαντική είναι η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ ΕΠ των καθηγητών και των διδακτικών πρακτικών που χρησιμοποιούν στην τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Depaepe, F., De Corte, E., & Verchaffel, L. (2016). Mathematical epistemological beliefs: A review of the research literature. In G. Greene, W. Sandoval, I., Bråten (Eds.), *Handbook of Epistemic Cognition* (pp. 147-164). New York: Taylor and Francis.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of art* (pp.249-253). New York: Flamer.

Felbrich, A., Kaiser, G., & Schmotz, C. (2012). The cultural dimension of beliefs: An investigation of future primary teachers' epistemological beliefs concerning the nature of mathematics in 15 countries. *ZDM, 44*, 355-366.

Felbrich, A., Müller, C., & Blömeke, S. (2008). Epistemological beliefs concerning the nature of mathematics among teacher educators and teacher education students in mathematics. *ZDM, 40*, 763-776.

Φιλίππου, Γ., Μονογυιού, Α., Καουρή, Ζ. (2018). Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις των δασκάλων, οι αντιλήψεις τους για τη διδασκαλία και οι πεποιθήσεις των μαθητών τους. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 0*(4), 39 - 71

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik, 19*, 3-45.

Grigutsch, S., & Törner, G. (1998). World views held by university teachers of mathematics science. *Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik* (pp.420). Universität Duisburg.

Hu, L., & Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modeling, 6*, 1-55.

Liebendörfer, M. & Schukajlow, S. (2017). Interest development during the first year at university: do mathematical beliefs predict interest in mathematics? *ZDM, 49*, 355-366.

Παναούρα, Ρ. (2014). Επιστημολογικές πεποιθήσεις για τα μαθηματικά, ιστορία των μαθηματικών και διαπολιτισμικότητα. *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ).* Φλώρινα.

Roesken, B., & Törner, G. (2010). Beliefs of university teachers of mathematics. In F. Furinghetti & F. Morselli (Eds.), Proceedings of the conference *MAVI-15: Ongoing research on beliefs in mathematics education* (pp. 35-46). Genova: Department of Mathematics, University of Genova.

Schoenfeld, A.H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*, 1-94.

Schommer, M. (1990). Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. *Journal of Educational Psychology, 82*(3), 498 – 504.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127–146). New York: MacMillan.

Wilkins, J. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 139-164.

Xenofontos, C. (2018). Greek-Cypriot elementary teachers' epistemological beliefs about mathematics. *Teaching and Teacher Education, 70*, 47-57.

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ, ΠΛΑΙΣΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φραγκίσκος Καλαβάσης[1], Ευγενία Κολέζα[2], Χρόνης Κυνηγός[3], Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος[1]

[1]Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

[2]Εργαστήριο Θετικών Επιστημών, ΠΜΣ– S.T.E.M. στην Εκπαίδευση, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Πατρών

[3]Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Φιλοσοφική Σχολή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

kalabas@aegean.gr, ekoleza@upataras.gr, kynigos@pp.uoa.gr, amoutsiosrentzos@aegean.gr

Η διεπιστημονικότητα για τη Διδακτική των Μαθηματικών επιχειρεί μια συνεργατική διδακτικο-μαθησιακή διαδικασία ανάδειξης της παρουσίας, της αξιοποίησης και της δημιουργίας των Μαθηματικών στο *πορώδες, συνδεδεμένο και τεχνολογικά διευρυμένο* σχολικό πλαίσιο της ψηφιακής εποχής. Από τη σχεδόν παράλληλη ανάπτυξη, από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα, των μαθηματικών, της φυσικής, της βιολογίας, της γενετικής επιστημολογίας και της τεχνητής νοημοσύνης, αναδύθηκαν νέες συνθετικές προσεγγίσεις για θεμελιώδη ερωτήματα σχετικά με την ανθρώπινη νοημοσύνη και τις μηχανικές δυνατότητές της. Άρχισε να χτίζεται διεθνώς μια *διεπιστημονική και συνεργατική επιστημονική πρακτική,* συνυφασμένη *με την αναζήτηση και ανάπτυξη μορφών κοινωνικο-τεχνολογικής νοημοσύνης.* Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της διεπιστημονικής προσέγγισης στη Διδακτική των Μαθηματικών είναι η ανάδειξη και ο σχεδιασμός αλληλεπιδράσεων με τη διδασκαλία-μάθηση και άλλων γνωστικών αντικειμένων, κατά συνέπεια με την λειτουργία και την κουλτούρα της σχολικής μονάδας. Ένας τέτοιος σχεδιασμός είναι αδιαχώριστος από την ανάπτυξη συλλογισμού και κριτικής σκέψης στο ψηφιακό περιβάλλον που συνυφαίνει την μάθηση με τη δράση (learning, doing), θέτοντας το ζήτημα νέων γνωσιακών ικανοτήτων και συνεργατικών πρακτικών. Η αναδυόμενη πολυπλοκότητα του εκπαιδευτικού σχεδιασμού και η ποικιλία μαθησιακών διασυνδέσεων των μαθηματικών και των θετικών επιστημών με το ψηφιακό και δικτυακό περιβάλλον, συνδέεται με την αξιακή ανα-πλαισίωση των σχολικών μαθηματικών.

Η προσέγγιση που αναπτύσσεται στο Πανεπιστήμιο Πατρών, εστιάζει *στην συνέργεια Μαθηματικών και Μηχανικής σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο:* τα εργαλεία των Μαθηματικών (σύμβολα, μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες) είναι απαραίτητα για τη Μηχανική, και αντιστρόφως. Η μαθηματική σκέψη, και πιο συγκεκριμένα η μαθηματική μοντελοποίηση –ως μία από τις βασικές δεξιότητες της μαθηματικής σκέψης– είναι απαραίτητη για την ανάλυση και το σχεδιασμό των μηχανικών δομών και συστημάτων και οι μηχανικές δομές προσφέρουν ένα γόνιμο πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Παρ 'όλα αυτά, στη μαθηματική εκπαίδευση, όπως αναφέρουν οι Tolbert και Cardella (2013), οι μαθητές συχνά διδάσκονται να ακολουθούν μια γραμμική, μεθοδική διαδικασία για να φτάσουν στην καλύτερη δυνατή λύση. Ως αποτέλεσμα, όταν έχουν να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα ή ερώτημα που αναφέρεται σε μια πραγματική κατάσταση, ή που δεν μπορεί εύκολα να ενταχθεί σε ένα αναγνωρίσιμο μοτίβο επίλυσης, δυσκολεύονται τόσο στο επίπεδο της κατανόησης της κατάστασης όσο και στο επίπεδο της επιλογής του κατάλληλου μαθηματικού εργαλείου. Πολλές έρευνες εντοπίζουν φθίνουσες μαθηματικές δεξιότητες των φοιτητών στα τμήματα μηχανικών και συντριπτική προτίμηση για «κύκλους μαθημάτων» με τα ελάχιστα Μαθηματικά. Η συνέργεια Μαθηματικών και Μηχανικής στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών, θα μπορούσε να συμβάλει στην βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Η προσέγγιση που ακολουθούμε θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ως “αντίστροφη μηχανική” (reverse engineering), δεδομένου ότι μέσα από την ανάλυση της δομής της μηχανής (mechanical linkage) και του είδους της κίνησης που εκτελεί, οι μαθητές «ανασύρουν» έννοιες Μαθηματικών και Φυσικής, τις οποίες (βάσει του σχεδιασμού που έχουμε κάνει) εκφράζουν/επικοινωνούν κάνοντας χρήση πολλών και διαφορετικών σημειωτικών καταγραφών. Η έρευνα υλοποιείται σε δυο άξονες: τις *απλές μηχανές* (τροχαλία, κεκλιμένο κλπ), και τις *μαθηματικές μηχανές*. Μια «μαθηματική μηχανή» (η οποία σχετίζεται με την Γεωμετρία) είναι ένα τεχνούργημα σχεδιασμένο και κατασκευασμένο με στόχο τον εξαναγκασμό ενός σημείου, ενός ευθυγράμμου τμήματος ή ενός επίπεδου σχήματος να μετακινηθεί ή να μετασχηματιστεί σύμφωνα με έναν μαθηματικό νόμο ο οποίος έχει καθοριστεί από τον σχεδιαστή της μηχανής (Bartolini Bussi & Pergola, 1996). Οι μαθηματικές μηχανές που έχουν έως τώρα διερευνηθεί σε βάθος είναι: οι παραβολογράφοι του van Schooten και του Cavalieri (παραβολή) και ο παντογράφος του Scheiner (ομοθεσία).

Κατά την προσέγγιση που αναπτύσσεται στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, υπάρχει σε αυτή τη χρονική στιγμή μια νεφελώδης επικοινωνία στον επιστημονικό και τον εκπαιδευτικό χώρο με το τι εννοούμε με τον όρο STEM. Μερικά ερωτήματα που ίσως συμβάλουν στην αποσαφήνιση εννοιών, προσεγγίσεων και επιστημονικών προθέσεων είναι: 1) Ως επιστημονική/εκπαιδευτική κοινότητα, επιδιώκουμε να αντιληφθούμε όλα τα αντικείμενα του STEM ενιαία και συνυφασμένα ή απλά συζητάμε για το κάθε ένα αντικείμενο σε κοινό φόρουμ, παίρνουμε δηλαδή το κάθε αντικείμενο, εδώ τα μαθηματικά, και ενσωματώνουμε κάποιο από τα άλλα του STEM με στόχο την όδευση προς τη διεπιστημονικότητα; Με σκοπό την κατανόηση μέσω εφαρμοσμένων μαθηματικών; τότε γιατί αν βάλουμε π.χ. φυσική, τα μαθηματικά γίνονται εφαρμοσμένα; 2) Τι ακριβώς σημαίνει συνύφανση επιστημολογικά και παιδαγωγικά, π.χ. θέλουμε να δώσουμε έμφαση σε όλα τα αντικείμενα για τη θεώρηση η/και τη διδασκαλία της περιοδικότητας ή της αναλογίας; Ταυτόχρονα; Υπάρχει αντικείμενο που πρέπει να προτάσσεται ανάλογα με την έννοια; Τι ακριβώς αποκομίζουμε με τη διδασκαλία της περιοδικότητας διεπιστημονικά όταν ο στόχος είναι η κατανόηση της μαθηματικής της υπόστασης; 3) Η λύση ενός προβλήματος που έχει στόχο τη συνυφασμένη θεώρηση (π.χ. όρισε το παραλληλόγραμμο με σκοπό να το παράξει ένα ψηφιακό άβαταρ με θέση και διεύθυνση αφήνοντας ίχνος κάθε φορά που μετακινείται και αιτιολόγησε τον ορισμό) μπορεί ποτέ να είναι ουδέτερη ως προς το αντικείμενο που «υπηρετεί»; π.χ. η λύση του προβλήματος υπηρετεί τη γεωμετρία, τις γραμμικές συναρτήσεις, την έννοια της μεταβλητής, του αλγορίθμου, της επανάληψης; Η παραγωγή τέτοιων ερωτημάτων και η συνάθροιση παραδειγμάτων που τα αναδεικνύουν είναι χρήσιμη για την έρευνα στο STEM στην εκπαίδευση με στόχο την πιο ευκρινή και οργανωμένη αντιμετώπιση του χώρου. Έχει ωφέλεια ή νόημα να σκεφτούμε την συνύφανση των αντικειμένων ανά δυο τουλάχιστον στην αρχή; Το πρόβλημα του παραλληλογράμμου για παράδειγμα ενέχει στοιχεία άλγεβρας, γεωμετρίας, προγραμματισμού και μηχανικής. Είναι καλό πρόβλημα για τη νοηματοδότηση; ποιων εννοιών ή διαδικασιών ή πρακτικών;

Για το *Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Πανεπιστημίου Αιγαίου*, η διεπιστημονική προσέγγιση επιχειρεί να διακρίνει και να συμφιλιώσει τις ασύμμετρες εικόνες των μαθηματικών ως επιστήμης και ως μαθήματος με την ανάδειξη των συνδέσεων και αλληλο-επιρροών των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες και περιοχές της ανθρώπινης δραστηριότητας (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2016). Η προσέγγιση της πολυπλοκότητας της εμφάνισης της μαθηματικής δραστηριότητας στην εκπαίδευση θα μπορούσε να ιδωθεί να συμβαίνει στην αλληλεπίδραση *εκπαιδευτικών πρωταγωνιστών δύο συστημάτων*, του συστήματος των επιστημών και της σχολικής μονάδας (Μούτσιος-Ρέντζος & Καλαβάσης, 2013), ενώ στο σύστημα σχολική μονάδα μπορούν να θεωρηθούν τρία επίπεδα διεπιστημονικών συνδέσεων και αλληλεπιδράσεων: α) *Συμβολικό/κανονιστικό* (οι αντιλαμβανόμενες επίσημες οδηγίες), β) *Πραγματιστικές αναπαραστάσεις* (οι αντιλαμβανόμενες τρέχουσες πρακτικές στις σχολικές μονάδες), γ) *Επιθυμητές/Προτιθέμενες δράσεις* (οι προσωπικές, υποθετικές δράσεις, δεδομένης της εξουσίας και δυνατότητας πραγματοποίησής τους). Μια τέτοια διασυστημική και πολυεστιακή οπτική επιτρέπει την ανάδυση ενός χώρου συνδέσεων και αλληλεπιδράσεων, στον οποίο επικοινωνούν χωρίς να συγχέονται οι διακριτές επιστήμες, οι ρόλοι και τα συστήματα (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2016).

Στη συνεδρία θα παρουσιαστούν μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα οι τρείς οπτικές και στη συνέχεια θα αναπτυχθούν εργαστηριακές δραστηριότητες με στόχο την ανταλλαγή απόψεων και εμπειριών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bartolini Bussi, M. G., & Pergola, M. (1996). History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry. In H. N. Jahnke, N. Knoche, & M. Otte (Eds.), *History of Mathematica and Education: Ideas and Experiences* (pp. 39-67). No. 11 in Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik.Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Moutsios-Rentzos, A., & Kalavasis, F. (2016). Systemic approaches to the complexity in mathematics education research. *International Journal for Mathematics in Education*, *7*, 97-119.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Καλαβάσης, Φ. (2013). Σχολείο, κρίση και συγκριτική τοποθέτηση των μαθημάτων στο σχολικό χωροχρόνο: μια συστημική προσέγγιση ‘εν δυνάμει’ εκπαιδευτικών στελεχών για τα μαθηματικά. Στο Α. Κοντάκος & Φ. Καλαβάσης (Επ.). *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού 5 «Κρίση και Διακυβέρνηση Εκπαιδευτικών Συστημάτων»* (σελ. 167-187). Αθήνα: Διάδραση.

Tolbert, D. A., & Cardella, M. E. (2013). Early work for the Mathematics as a Gatekeeper to Engineering Project: A Review of Informal Learning, Engineering and Design Thinking Literature. Paper presented in the 120th ASEE Annual Conference and Exposition (Paper ID#8106). June 23-26, Atlanta, USA. Available at http://www.asee.org/public/conferences/20/ papers/8106/download.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΣΗΜΕΡΑ, ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΑΥΡΙΟ

Χαράλαμπος Σακονίδης[1], Μαριάννα Τζεκάκη[2], Μαρία Καλδρυμίδου[3]

[1]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, [2]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης,[3]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

xsakonid@eled.duth.gr,tzekaki@nured.auth.gr, mkaldrim@uoi.gr

Τα Αναλυτικά Προγράμματα (ΑΠ) ορίζουν το περιεχόμενο και τους στόχους μάθησης που η εκάστοτε επίσημη πολιτική της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρεί κρίσιμα για τον μελλοντικό πολίτη, συνιστώντας οδηγό της διδακτικής πρακτικής και βασικό πόρο της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών.

Η έννοια της επιτυχίας στα μαθηματικά άλλαξε σημαντικά τον τελευταίο αιώνα, ακολουθώντας τις κοινωνικές, οικονομικές, πολιτικές, επιστημονικές και εκπαιδευτικές αλλαγές που επικράτησαν. Κατά το πρώτο μισό του εικοστού αιώνα επιτυχία στην εκμάθησή τους σήμαινε ευχέρεια στις υπολογιστικές δεξιότητες. Κατά τις δεκαετίες του 1950 και του 1960 το κίνημα των 'νέων μαθηματικών' υπέδειξε ως επιτυχία στα μαθηματικά την κατανόηση των δομών. Ακολούθησε η αντίληψη «πίσω στα βασικά», όπου επιτυχία στα μαθηματικά σήμαινε έμφαση στους κανόνες και τις διαδικασίες. Το μεταρρυθμιστικό κίνημα της δεκαετίας του '80 και του '90 επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη 'μαθηματικής ισχύος', που περιλάμβανε το συλλογισμό, την επίλυση προβλημάτων, τη σύνδεση των μαθηματικών ιδεών μεταξύ τους και την επικοινωνία τους. Οι τελευταίες δύο δεκαετίες βρίσκουν τα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα να θέτουν ερωτηματικά για την ικανότητα των μαθητών να αξιοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις για να κατανοούν καθημερινές ή άλλες καταστάσεις. Όλες αυτές οι μετατοπίσεις ενθάρρυναν διαφορετικούς στόχους για τη μάθηση των μαθηματικών και, κατά συνέπεια, τη δημιουργία διαφορετικών ΑΠ.

Η ανάπτυξη νέων ΑΠ βρίσκεται σήμερα αντιμέτωπη με δυο μεγάλες προκλήσεις: την αλλαγή του περιεχομένου τους, που έχει ελάχιστα τροποποιηθεί τον τελευταίο μισό αιώνα, με δεδομένη την τεράστια και συνεχή ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης που παράγεται παγκοσμίως, και την αλλαγή των στόχων μάθησης έτσι ώστε να μπορούν να συμβάλουν στη διαμόρφωση ενός εγγράμματου μαθηματικά πολίτη.

Οι εξελίξεις της μαθηματικής επιστήμης και η ένταξή τους στα ΑΠ των μαθηματικών: Η σχολική έμφαση στην αριθμητική, την άλγεβρα και τη γεωμετρία είναι βαθιά ριζωμένη. Ωστόσο, καθώς τα πεδία της έρευνας στη μαθηματική επιστήμη επεκτείνονται, τα ιστορικά της σύνορα τροποποιούνται, το ίδιο και αυτά των εφαρμογών της: τα μαθηματικά δεν είναι πλέον μόνο η γλώσσα της Φυσικής και της Μηχανικής, αποτελούν καίρια γνώση για τις τραπεζικές συναλλαγές, τις κατασκευές, τις κοινωνικές επιστήμες (στοχαστικά μαθηματικά), την ιατρική κ.ά.. Δεν γίνονται κατανοητά πλέον μόνο ως η μελέτη του αριθμού και του σχήματος αλλά κάθε είδους προτύπου (pattern) και διάταξης (order).

Οι ανωτέρω αλλαγές επιβάλλουν αναπόφευκτα την επανεξέταση του περιεχομένου και των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι υπολογιστές, αλλά και νέες εφαρμογές και θεωρίες επέκτειναν το ρόλο των μαθηματικών στις επιστήμες, την επιχειρηματικότητα και την τεχνολογία. Οι μαθητές και μελλοντικοί πολίτες που θα χρησιμοποιούν τους υπολογιστές ως εργαλείο ρουτίνας καλούνται να μάθουν διαφορετικά μαθηματικά από τους προγόνους τους. Η τυπική σχολική πρακτική, που έχει τις ρίζες της σε παραδόσεις αιώνων, δεν μπορεί να προετοιμάσει επαρκώς τους μαθητές για τις μαθηματικές ανάγκες του 21ου αιώνα.

Σε αναζήτηση μιας ατζέντας 'γραμματισμού' στα ΑΠ των μαθηματικών: Η εστίαση πολλών εκπαιδευτικών συστημάτων σε κανόνες και διαδικασίες στα μαθηματικά ακόμη και σήμερα οδήγησε σε προβληματισμό για την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να τα χρησιμοποιούν για να κατανοούν και να ελέγχουν καταστάσεις. Από τις αρχές κιόλας του αιώνα, πολλές κριτικές υποστήριξαν την ανάγκη υιοθέτησης μιας ατζέντας 'μαθηματικού γραμματισμού'.

Ο μαθηματικός γραμματισμός επιτρέπει τους εκπαιδευόμενους να αναπτύξουν την ικανότητα και την εμπιστοσύνη να σκέφτονται 'με μαθηματικό τρόπο', για να ερμηνεύουν και να αναλύουν κριτικά καθημερινές καταστάσεις. Ένας τέτοιος προσανατολισμός επικεντρώνεται στη δυνατότητα των εκπαιδευόμενων να ενεργούν με τρόπους που εμπεριέχουν την επίγνωση των ρόλων και των χρήσεων των μαθηματικών και μια κλίση να σκέφτονται 'μαθηματικώς' και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην πραγματική ζωή. Επιπλέον, περιλαμβάνει την οικειοποίηση από αυτούς των μαθηματικά εγγράμματων λόγων (discourses) που απαιτούνται για την ερμηνεία και την κριτική συμμετοχή στις πρακτικές που σχετίζονται με τους μελλοντικούς ρόλους ζωής τους.

Το ερώτημα της μετάβασης σε ΑΠ των μαθηματικών που λαμβάνουν υπόψη τις εξελίξεις στο πεδίο της μαθηματικής επιστήμης και αποδίδουν ιδιαίτερη σημασία στις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου είναι καίριο για την εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης διεθνώς.

Στόχος της Ομάδας Ανταλλαγών είναι να αποτελέσει βήμα συζήτησης και προβληματισμού σχετικά με τα παραπάνω ζητήματα ανάπτυξης νέων ΑΠ στα μαθηματικά τόσο στον ελλαδικό χώρο όσο και διεθνώς. Ειδικότερα, οι εργασίας της ομάδας θα εστιάσουν στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Ποιες είναι οι σύγχρονες προσεγγίσεις και οι προσανατολισμοί για την ανάπτυξη νέων ΑΠ για τα μαθηματικά διεθνώς;
- Πώς τα ερευνητικά δεδομένα αλλά και αυτά της υλοποίησης νέων ΑΠ στα μαθηματικά έχουν επηρεάσει την ανάπτυξη σύγχρονων ΑΠ στον ελλαδικό χώρο;
- Ποιες είναι οι προοπτικές (και οι προσδοκίες) ανάπτυξης που προδιαγράφονται για το μέλλον σε ότι αφορά νέα ΑΠ για τα μαθηματικά;
- Με βάση τα παραπάνω, πώς διαφοροποιούνται οι διδακτικές αλλά και οι αξιολογικές διαδικασίες στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;
- Ποιος είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην αξιοποίηση πόρων και στη συν-διαμόρφωση των αναλυτικών προγραμμάτων;

Οι εργασίες της ομάδας στο πλαίσιο του συνεδρίου περιλαμβάνουν τις παρακάτω σύντομες εισηγήσεις (1ο μέρος/ 50 λεπτά):

ΑΠ των μαθηματικών για τον πολίτη του 21ου αιώνα: θεωρητικοί και ερευνητικοί προσανατολισμοί, Χαράλαμπος Σακονίδης, ΔΠΘ

ΑΠ και διδακτική πράξη: Σύνδεση των ευρημάτων της Διδακτικής των Μαθηματικών με τις διδακτικές πρακτικές, Μαριάννα Τζεκάκη, ΑΠΘ

Η ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης στα ΑΠ υπό το πρίσμα των νέων θεωρήσεων της ΜΕ, Μαρία Καλδρυμίδου, Παν/μιο Ιωαννίνων

Τρόποι υποστήριξης των εκπαιδευτικών στην προσπάθεια υλοποίησης ενός νέου ΑΠ, Δέσποινα Πόταρη, ΕΚΠΑ

ΑΠ των μαθηματικών και προετοιμασία των μαθητών για σπουδές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, Θεοδόσης Ζαχαριάδης, ΕΚΠΑ.

Τις εισηγήσεις θα ακολουθήσει εργασία σε μικρές ομάδες (2ο μέρος / 30 λεπτά) και συζήτηση στην ολομέλεια (3ο μέρος/ 10 λεπτά)

MATHTASK ΚΑΙ CAPTEAM: ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΑΞΗ ΩΣ ΕΝΑΥΣΜΑ ΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟ

Ειρήνη Μπιζά, Έλενα Ναρδή

University of East Anglia

i.biza@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk

Η προτεινόμενη ομάδα ανταλλαγών στοχεύει στον αναστοχασμό πάνω στη διδασκαλία των μαθηματικών χρησιμοποιώντας δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν στο πλαίσιο δύο προγραμμάτων: MathTASK και CAPTeaM. Και στα δύο προγράμματα καλούμε τους εκπαιδευτικούς να εμπλακούν με συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις (δραστηριότητες) όπου ο δάσκαλος και οι μαθητές διαπραγματεύονται ένα μαθηματικό πρόβλημα. Ειδικά στο CAPTeaM ανάμεσα στους μαθητές είναι και άτομα με αναπηρία. Στη συνεδρία θα παρουσιάσουμε σύντομα αρχές και ευρήματα από τα παραπάνω προγράμματα ενώ ο περισσότερος χρόνος θα διατεθεί στη συμμετοχή των συνέδρων σε δραστηριότητες από τα δύο προγράμματα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το MathTASK είναι ένα συλλογικό ερευνητικό πρόγραμμα που ασχολείται με το μαθηματικό και παιδαγωγικό λόγο των εκπαιδευτικών και το μετασχηματισμό των προσδοκιών τους σε παιδαγωγικές πρακτικές. Όπως παρατηρείται στη βιβλιογραφία, υπάρχει φανερή απόκλιση ανάμεσα στις θεωρητικές και εκτός πλαισίου απόψεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους και της προσέγγισης που αυτοί οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν στη τάξη (για παράδειγμα, Speer, 2005). Για αυτό το λόγο, συχνά, προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών χρησιμοποιούν συγκεκριμένα παραδείγματα από τη τάξη στην προετοιμασία των εκπαιδευτικών (π.χ. Markovits and Smith, 2008). Η δική μας έρευνα συνάδει με αυτές τις απόψεις και συμφωνεί ότι η γνώση των εκπαιδευτικών διερευνάται και αναπτύσσεται καλύτερα σε συγκεκριμένο διδακτικό πλαίσιο. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζουμε δραστηριότητες βασισμένες σε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις από τη διδασκαλία των μαθηματικών (*Δραστηριότητες*) τις οποίες μετά χρησιμοποιούμε ως έναυσμα για συζήτηση με εκπαιδευτικούς. Αυτές οι διδακτικές καταστάσεις είναι μεν υποθετικές, αλλά βασίζονται σε θέματα μάθησης και διδασκαλίας που η βιβλιογραφία αλλά και η εμπειρία έχουν επισημάνει ως σημαντικά (Biza, Nardi & Zachariades, 2007). Τόσο στην έρευνα όσο και στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών (μελλοντικών και εν-υπηρεσία), οι *Δραστηριότητες* αυτές έχουν φανεί πολύ χρήσιμες στη διευκόλυνσή τους να διατυπώσουν τόσο τις απόψεις τους όσο και τις προτιθέμενες διδακτικές τους πρακτικές (Biza, Nardi & Zachariades, 2018· Nardi, Biza & Zachariades, 2012). Μέχρι τώρα, ερευνητές της διδακτικής μαθηματικών και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών από το Ηνωμένο Βασίλειο, την Ελλάδα και τη Βραζιλία έχουν συμμετάσχει στο MathTASK. Η μορφή των *Δραστηριοτήτων* ποικίλλει προκειμένου να καλύψει το εύρος των θεμάτων που λαμβάνουν χώρα στην τάξη των μαθηματικών. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι μονόλογος ή διάλογος, να είναι σε μορφή γραπτού σεναρίου ή βίντεο, να περιλαμβάνει έναν ή περισσότερους μαθητές, να περιλαμβάνει ή όχι παρέμβαση εκπαιδευτικού, κ.ά..

Η έρευνα που έχει διεξαχθεί – και αναμένουμε να συνεχισθεί στα επόμενα χρόνια – εστιάζει στη *μαθηματική σκέψη* σχετικά με παιδαγωγικές και διδακτικές πρακτικές για τη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών· τη *διαχείριση της τάξης* ειδικά όταν δυσκολίες στη διαχείριση της τάξης παρεμβαίνουν στην εκμάθηση των μαθηματικών· *στο ρόλος της ψηφιακής τεχνολογίας και άλλων πηγών* στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών· και στη *συμπερίληψη* στη τάξη των μαθηματικών ατόμων με ειδικές ανάγκες. Η τελευταία θεματική αφορά αποκλειστικά το έργο CAPTeaM. Το CAPTeaM (Changing Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics – Αλλάζοντας τις "ικανοτιστικές" (ableist) απόψεις για την διδασκαλία των μαθηματικών) εστιάζει στην εκπαίδευση χωρίς αποκλεισμούς και διερευνά κυρίαρχες απόψεις σχετικά με το πώς οι μαθητές με αναπηρία – π.χ. με περιορισμούς στην ακοή ή την όραση – ενεργοποιούνται, ή όχι, στην τάξη των μαθηματικών (π.χ. Nardi, Healy, Biza & Fernandes, 2018).

ΔΟΜΗ

Η συνεδρία θα έχει τη μορφή εργαστηρίου όπου τα 90 λεπτά θα δομηθούν σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, το πρόγραμμα MathTASK και οι βασικές αρχές σχεδιασμού δραστηριοτήτων θα παρουσιαστεί σε συντομία (5 λεπτά), στη συνέχεια, οι σύνεδροι θα κληθούν να δουλέψουν ομαδικά σε μία δραστηριότητα βασισμένη σε ένα περιστατικό από τη σχολική τάξη των μαθηματικών (30 λεπτά). Στο δεύτερο μέρος, το έργο CAPTeaM θα παρουσιαστεί (5 λεπτά) και μετά οι σύνεδροι θα κληθούν να δουλέψουν σε μία δραστηριότητα βασισμένη σε ένα επεισόδιο όπου μαθητές, κάποιοι εκ των οποίων έχουν προβλήματα όρασης, εργάζονται πάνω σε ένα μαθηματικό πρόβλημα (30 λεπτά). Η συνεδρία θα κλείσει με μία σύνοψη των ευρημάτων από την έρευνα τόσο στο MathTASK όσο και στο CAPTeaM (10 λεπτά), καθώς και ανατροφοδότηση από το κοινό (10 λεπτά).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τα MathTASK και CAPTeaM είναι έργα της ερευνητικής ομάδας στη μαθηματική παιδεία (RME) του University of East Anglia χρηματοδοτούμενα από το HEIF, Ian Hunter Prize και Erasmus. Επίσης, το CAPTeaM χρηματοδοτείται από τη Βρετανική Ακαδημία (British Academy). Δημοσιεύσεις και δραστηριότητες στις ιστοσελίδες των προγραμμάτων: MathTASK (https://www.uea.ac.uk/education/mathtask); CAPTeaM (http://www.uea.ac.uk/capteam) και στο @mathtask2016.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 301-309

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In T. Leuders, J. Leuders, & K. Philipp (Eds.), Diagnostic Competence of Mathematics

Teachers. Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice, (pp. 55-78). New York: Springer.

Markovits, Z, & Smith, M.S. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Volume 2, Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 3965). Rotterdam: Sense Publishers.

Nardi, E., Biza, I. & Zachariades, T. (2012). Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model of argumentation. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 157-173.

Nardi, E., Healy, L., Biza, I., & Fernandes, S.H.A.A. (2018). 'Feeling' the mathematics of disabled learners: Supporting teachers towards attuning and resignifying in inclusive mathematics classrooms. In R. Hunter, M. Civil, B. Herbel-Eisenmann, N. Planas, & D. Wagner (Eds.), Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners, (pp. 147-170). SENSE Publications.

Speer, M.N. (2005). Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. Educational Studies in Mathematics, 58(3), 361–391.

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΑΙΔΙΑ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΑΝΑΠΗΡΙΕΣ: ΜΙΑ ΚΑΙΝΟΤΟΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ-ΥΠΟΣΤΗΡΙΖΟΜΕΝΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Έφη Δαρείου[1], Γιάννης Γεωργίου[2], Άντρη Ιωάννου[2]

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου[1], Cyprus Interaction Lab (ΤΕΠΑΚ)[2]

edario0182@ gmail.com[1]

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ο σχεδιασμός της παρούσας μαθησιακής παρέμβασης υιοθετεί την παιδαγωγική προσέγγιση της τεχνολογικά-υποστηριζόμενης ενσώματης μάθησης. Η ενσώματη μάθηση είναι μια σύγχρονη παιδαγωγική θεωρία που δίνει έμφαση στην ενεργό εμπλοκή του σώματος στη μαθησιακή διαδικασία, θεωρώντας ότι το σώμα, ως πηγή γνώσης, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση νοητικών και γνωστικών λειτουργιών (Stolz, 2015).

Κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας, η τεχνολογικά-υποστηριζόμενη ενσώματη μάθηση, ως παιδαγωγική προσέγγιση, έχει αρχίσει να εδραιώνεται, λόγω της εμφάνισης καινοτόμων τεχνολογιών που επιτρέπουν νέες μορφές αλληλεπίδρασης. Παράλληλα, έχει κερδίσει έδαφος στο πλαίσιο της Ειδικής και Ενιαίας εκπαίδευσης, αφού αρκετά χαρακτηριστικά των τεχνολογιών αυτών ανταποκρίνονται στις ανάγκες παιδιών με αναπηρία (Martínez-Monés, Villagrá-Sobrino, Georgiou, Ioannou, & Ruiz, 2019).

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, παιδαγωγικές δραστηριότητες που υιοθετούν την προσέγγιση της ενσώματης μάθησης έχουν πολλαπλά οφέλη για ΟΛΑ τα παιδιά, με και χωρίς αναπηρία, αφού αυξάνουν τα μαθησιακά κίνητρα, προωθούν τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, και συμβάλλουν στην ακαδημαϊκή ανάπτυξη των παιδιών (Georgiou & Ioannou, 2019).

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Η μαθησιακή παρέμβαση αναπτύχθηκε και υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού έργου INTELed (https://www.inteled.org). Η παρέμβαση αξιοποιεί καινοτόμα εκπαιδευτικά εργαλεία και τεχνολογίες ενσώματης μάθησης, μέσω των οποίων αναμένεται να δημιουργηθούν μαθησιακές ευκαιρίες, ώστε να προωθηθεί η ενεργός εμπλοκή ΟΛΩΝ των παιδιών, με ή χωρίς αναπηρίες, στις μαθησιακές δραστηριότητες. Οι επιμέρους διδακτικοί στόχοι είναι: (α) η κατάκτηση και εμπέδωση βασικών πυρηνικών εννοιών της γεωμετρίας όπως γωνίες, τρίγωνα, πολύγωνα και οι ιδιότητες αυτών·
(β) η επίλυση προβλήματος μέσω του προγραμματισμού· (γ) η ενεργός εμπλοκή όλων των παιδιών· (δ) η καλλιέργεια δεξιοτήτων του 21ου αιώνα.

Η παρούσα μαθησιακή παρέμβαση, διάρκειας 80 λεπτών, αποτελεί μια εναλλακτική πρόταση για τη διδασκαλία της ενότητας «Γεωμετρία» του Αναλυτικού Προγράμματος των τάξεων Δ΄, Ε΄ και Στ΄ της Δημοτικής Εκπαίδευσης. Τα παιδιά εργάζονται αυτόνομα, σε ομάδες μεικτών ικανοτήτων, σε τέσσερις μαθησιακούς σταθμούς, τους οποίους επισκέπτονται και στους οποίους δραστηριοποιούνται διαδοχικά.

Μαθησιακός Σταθμός 1: «Λύσε το γρίφο με Engino» (Διάρκεια: 20')

Διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα τοποθετούνται στο έδαφος. Ένα παιδί, διαβάζει γρίφους και σύμφωνα με τις πληροφορίες που παρέχονται, τα μέλη της ομάδας χρειάζεται να εντοπίσουν τις ορθές απαντήσεις και να σταθούν σε αυτές ή να προγραμματίσουν το ρομπότ τους να κατευθυνθεί σε αυτές.

Μαθησιακός Σταθμός 2: «Robot Mouse Bingo» (Διάρκεια: 20')

Τα παιδιά προγραμματίζουν διαδοχικά το ποντικάκι «Robot Mouse» να μετακινηθεί σε πίστα προκαθορισμένης διαδρομής, τόσα βήματα όσα δείχνει το ζάρι. Στο σημείο που θα σταματήσει το ποντικάκι υπάρχει γραμμένο ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο όλοι οι παίκτες χρειάζεται να λύσουν και να ελέγξουν αν η λύση υπάρχει στην καρτέλα bingo που κρατούν.

Μαθησιακός Σταθμός 3: «Διαδρομές Blue-bots» (Διάρκεια: 20')

Τα παιδιά καλλιεργούν την αλγοριθμική σκέψη, προγραμματίζοντας το Blue-bot, ώστε να εκτελέσει σε πίστα, τη διαδρομή που θα περιλαμβάνει τα σχήματα που έχουν ομαδοποιήσει στη βάση συγκεκριμένων κριτηρίων.

Μαθησιακός Σταθμός 4: «Γωνιογνώστες» (Διάρκεια: 20')

Τα παιδιά παίρνουν τον ρόλο του «κατασκευαστή γωνιών» και βιώνουν τον κόσμο της γεωμετρίας, μέσα από μια παιγνιώδη και διασκεδαστική εμπειρία ενσώματης μάθησης, με τη βοήθεια της εφαρμογής «The Angle Makers» (https://youtu.be/DVfqenJGBPE), η οποία αξιοποιεί ανιχνευτές κίνησης.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η παρούσα μαθησιακή παρέμβαση, σύμφωνα με την ανάλυση αρχικών και τελικών διαγνωστικών δοκιμίων που χορηγήθηκαν στα παιδιά, φαίνεται να έχει πολλαπλά οφέλη στην ακαδημαϊκή, συναισθηματική και κοινωνική τους ανάπτυξη. Η εκπαιδευτική συνεισφορά της παρέμβασης έγκειται στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών σε ετερογενείς σχολικές τάξεις, όπου συνυπάρχουν παιδιά με και χωρίς αναπηρίες, ενώ η κοινωνική συμβολή της, έγκειται στην προώθηση της κοινωνικής ένταξης ατόμων με αναπηρίες, ενισχύοντας ικανότητες και κοινωνικές δεξιότητες, ώστε να ενσωματωθούν ομαλότερα στην κοινωνία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΦΙΑ

Abrahamson, D., & Bakker, A. (2016). Making sense of movement in embodied design for mathematics learning. *Cognitive research: principles and implications*, *1*(1), 33.

Becker, K. (2005). How are games educational? Learning theories embodied in games.

Burte, H., Gardony, A. L., Hutton, A., & Taylor, H. A. (2017). Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training. *Cognitive Research: Principles and Implications*, *2*(1), 13.

Georgiou, Y., & Ioannou, A. (2019). Embodied learning in a digital world: a systematic review of empirical research in K-12 education. In *Learning in a Digital World* (pp. 155-177). Springer, Singapore.

Hutto, D. D., Kirchhoff, M. D., & Abrahamson, D. (2015). The enactive roots of STEM: Rethinking educational design in mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(3), 371-389.

Martínez-Monés, A., Villagrá-Sobrino, S., Georgiou, Y., Ioannou, A., & Ruiz, M. J. (2019, June). The INTELed pedagogical framework: Applying embodied digital apps to support special education children in inclusive educational contexts. In *Proceedings of the XX International Conference on Human Computer Interaction* (p. 35). ACM.

Silva, M. J., Ferreira, E., Andrade, V., Nunes, O., & da Luz Carvalho, M. (2015, November). Embodied education: Senses, emotions, and technology. In *2015 International Symposium on Computers in Education (SIIE)* (pp. 32-37). IEEE.

Skulmowski, A., Pradel, S., Kühnert, T., Brunnett, G., & Rey, G. D. (2016). Embodied learning using a tangible user interface: The effects of haptic perception and selective pointing on a spatial learning task. *Computers & Education*, *92*, 64-75.

Stolz, S. A. (2015). Embodied learning. *Educational philosophy and theory*, *47*(5), 474-487.

ΑΠΕΙΚΟΝΙΖΟΝΤΑΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΘΕΡΜΟΚΗΠΙΟΥ ΜΕ ΜΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ: ΜΙΑ ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Καλλιόπη Μαλάη-Λάμπρου, **Ελένη Παπαγεωργίου, Παυλίνα Χατζηθεοδούλου-Λοϊζίδου**

Λανίτειο Λύκειο Λεμεσού, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου
kalliopi@cytanet.com.cy, papageorgiou.e@cyearn.pi.ac.cy,
hadjitheodoulou.p@cyearn.pi.ac.cy

Η εργασία παρουσιάζει μια διδακτική παρέμβαση για τη διδασκαλία της έννοιας της εκθετικής συνάρτησης, βασισμένη στη συμπεριληπτική προσέγγιση. Η παρέμβαση εφαρμόζει ποικιλοτρόπως τη μάθηση με διερώτηση, για την κατανόηση της έννοιας από όλους τους μαθητές και την προώθηση θεμελιωδών αξιών, κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος MASDIV (supporting MAthematics and Science teachers in addressing DIVersity and promoting fundamental Values) (Erasmus+: KA3) και εφαρμόστηκε σε μαθητές Β΄Λυκείου, που είχαν επιλέξει Μαθηματικά Κατεύθυνσης κατά τη σχολική χρονιά 2018-2019. Προτείνει τη συμπεριληπτική προσέγγιση για την κατανόηση της έννοιας της εκθετικής συνάρτησης από όλους τους μαθητές, εφαρμόζοντας τη μάθηση με διερώτηση ως μέσο διαχείρισης της διαφορετικότητας, που σχετίζεται με την επίδοση ή την κουλτούρα (Wilson, κ.α., 2010). Αξιοποιεί ως θεματικό πλαίσιο το λιώσιμο των παγετώνων, επιδιώκοντας την πρόκληση κινήτρων (Bennett, Lubben, & Hogarth, 2007) για το μάθημα των Μαθηματικών και την ευαισθητοποίηση όλων των μαθητών σε κοινωνικά/κοινωνιολογικά ζητήματα (Bruder, & Prescott, 2013).

ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Στόχος παρέμβασης

Η εν λόγω παρέμβαση έχει διττό στόχο: (α) την κατανόηση της έννοιας της εκθετικής συνάρτησης μέσα από πολυτροπικές αναπαραστάσεις, και (β) την ενίσχυση ή ανάπτυξη της οικολογικής συνείδησης των μαθητών, του σεβασμού προς την πολιτισμική ποικιλομορφία και την ανθρώπινη ζωή γενικότερα.

Δραστηριότητες

Οι μαθητές, αφού παρακολούθησαν βίντεο σχετικό με το λιώσιμο των παγετώνων, προβληματίστηκαν για τις συνέπειες του φαινομένου σε ολόκληρο τον κόσμο. Στη συνέχεια, κατασκεύασαν γραφική παράσταση πραγματικών δεδομένων που τους δόθηκαν σε μορφή πινάκων, για να απεικονίσουν την αύξηση της θαλάσσιας στάθμης σε σχέση με τον χρόνο. Συζητήθηκαν οι γραφικές τους παραστάσεις και ακολούθως, σχολιάστηκε ο ρυθμός μεταβολής της στάθμης των θαλασσών σε γραφική παράσταση εμπειρικών/επιστημονικών δεδομένων. Οι μαθητές έκαναν προβλέψεις για μελλοντικό χρόνο, επεκτείνοντας ταυτόχρονα τις δικές τους γραφικές παραστάσεις. Στη συνέχεια, οι μαθητές ερμήνευσαν την παράσταση πραγματικών δεδομένων, εστιάζοντας στο πεδίο ορισμού, στο σύνολο τιμών, στη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού και στη σχέση της αύξησης της στάθμης του νερού με τον χρόνο. Ακολούθησε παρουσίαση, περιγραφή και ερμηνεία μαθηματικών μοντέλων εκθετικών παραστάσεων. Τέλος, οι μαθητές προβληματίστηκαν για το πώς μπορεί ο άνθρωπος να συμβάλει, ώστε να περιοριστεί το λιώσιμο των παγετώνων.

ΣΧΟΛΙΑ

Η εφαρμογή της προσέγγισης ενεργοποίησε όλους τους μαθητές στο μάθημα και τους προβλημάτισε για τα σχετικά περιβαλλοντικά και κοινωνικά θέματα που συζητήθηκαν. Αν και κάποιοι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή της εκθετικής γραφικής παράστασης, εντούτοις η συνεργασία και η αλληλεπίδραση μεταξύ όλων και οι διερευνητικές δραστηριότητες φαίνεται να συνέβαλαν στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας. Η διδασκαλία με τη συγκεκριμένη προσέγγιση ήταν αποτελεσματική, τόσο στην κατανόηση της έννοιας όσο και στην προώθηση θεμελιωδών αξιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bennett, J., Lubben, F. and Hogarth, S. (2007). Bringing science to life: A synthesis of the research evidence on the effects of context-based and STS approaches to science teaching. *Science education, 91*, 347–370.

Bruder, R., & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM - Mathematics Education, 45*(6), 811-822.

Wilson, C., Taylor, J., Kowalski, S., & Carlson, J. (2010). The relative effects and equity of inquiry-based and commonplace Science teaching on students' knowledge, reasoning, and argumentation. *Journal of Research in Science teaching 47*(3), 276–301.

ΕΜΕΙΣ ΚΑΙ ΕΝΑ ΒΙΒΛΙΟ

Κουμούτση Σοφία –**Παπαδοπούλου Βασιλική**

Μουσικό Γυμνάσιο Σάμου - ΔΙΔΕ Σάμου

Sofik1176@yahoo.gr Vicky_papadopoulou@windowslive.com

Η εισήγηση αναφέρεται στην εμπλοκή μιας ομάδας μαθητών Γ΄ Γυμνασίου (15 κορίτσια, 7 αγόρια) σε ένα διαθεματικό project που αφορούσε την κατανόηση απλών μαθηματικών εννοιών, μία πρώτη επαφή με μαθηματικές έννοιες που δεν είναι στα σχολικά εγχειρίδια και τέλος μια ιστορική αναδρομή των μαθηματικών. Το project αυτό υλοποιήθηκε στα πλαίσια της εκπαιδευτικής δράσης «Μαθαίνοντας επιστήμη μέσα από το θέατρο» , στο 1ο Γυμνάσιο Σάμου το σχολικό έτος 2017-2018 και είχε διάρκεια πέντε μηνών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σεπτέμβριος 2018.Γίνεται ένα πρώτο καλωσόρισμα στους μαθητές του Γ3 και παρουσίαση της ύλης των μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου. Ακολουθεί συζήτηση που αφορά στα περιεχόμενα του σχολικού βιβλίου και τότε αρχίζουν οι ερωτήσεις.

Μαθητής1:Γιατί λέμε θεώρημα Θαλή, Νόμος Ημιτόνων γιατί Θεώρημα γιατί Νόμος;

Μαθητής2:Και γιατί μαθαίνουμε Μαθηματικά; Που θα τα χρειαστούμε;

Το βιβλίο του Αποστόλου Δοξιάδη «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ» αποδείχτηκε πολύ χρήσιμο στην ερώτηση του δεύτερου μαθητή.

Εκπαιδευτικός: Τα μαθηματικά είναι παντού γύρω μας. Από την Αρχαία Αίγυπτο μέχρι … Κάθε είδος φυσικής πραγματικότητας περιέχει κάποια μαθηματική θεωρία. (Δοξιάδης ,2001)

Στο πρώτο ερώτημα δόθηκε εξήγηση στους μαθητές ότι στα μαθηματικά υπάρχουν θεωρήματα, προτάσεις, λήμματα ,πορίσματα, αξιώματα, ταυτότητες, κανόνες, νόμοι ,αρχές αλλά και εικασίες. Αφού έγινε συζήτηση για όλα τα παραπάνω φτάνοντας στον όρο εικασία κινητοποιήθηκε ξαφνικά όλη η τάξη .Το γεγονός ότι ακόμα υπάρχουν στα Μαθηματικά δηλώσεις-υποθέσεις που δεν έχουν αποδειχθεί ,ότι επιστήμονες έχουν αφιερώσει τη ζωή τους σε αυτό και πάλι δεν τα κατάφεραν είχε μεταφέρει το Γ3 στον μαγικό κόσμο των μαθηματικών. Έτσι ξεκίνησαν όλα…

Φάσεις του project: Το project χωρίστηκε σε πέντε φάσεις.

1η φάση: Οργάνωση λέσχης ανάγνωσης με το όνομα «Εμείς και ένα βιβλίο». **2η φάση:** Ανάγνωση του βιβλίου και παράλληλα αναζήτηση πληροφοριών.**3ηφάση:** Συμμετοχή στον πανελλήνιο διαγωνισμό «Μαθαίνοντας επιστήμη μέσα από το θέατρο» (https://www.scienceview.gr/project/lstt/) .**4η φάση:** Συγγραφή σεναρίου και προετοιμασία της παράστασης. Αυτό ήταν μία ευκαιρία να αρχίσουμε να συνδέουμε το επιστημονικό μέρος της εργασίας με το θεατρικό (Κουρετζής, 1991). **5η φάση :** Παρουσίαση της παράστασης στους μαθητές του σχολείου μας αλλά και στο κοινό του νησιού μας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

- Ενισχύθηκε το στοιχείο του «απροσδόκητου» ,στοιχείο που λείπει από την παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών(Θωμαΐδης,2012).
- Οι μαθητές κατάλαβαν ότι οι όροι των μαθηματικών προκαλούν προβληματισμό, συναισθήματα, ανακαλούν διάφορες εικόνες (Siety , 2003).
- Στη δράση ακολουθήθηκαν τα επτά στάδια της διερευνητικής μάθησης ,μέσω της οποίας οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά στη διαδικασία μάθησης και αυξάνεται το ενδιαφέρον τους (Κεχαγιά, 2017).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anne Siety (2003). Μαθηματικά ο αγαπημένος μου φόβος. Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλα.

Δοξιάδης Α.(1992).Ο θείος Πέτρος και η εικασία του *Γκόλντμπαχ*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.

Εξαρχάκος Θ.(1993).Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

Κεχαγιά, Δ. (2017). *Αξιολόγηση Διερευνητικών Δεξιοτήτων στις Φυσικές Επιστήμες*. Ερευνητική Μεταπτυχιακή Εργασία. Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα. Ανάκτηση 2 Φεβρουαρίου 2018.

Κουρετζής Λ. (1991). *Το Θεατρικό Παιχνίδι*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.

ΜΕΤΡΗΣΤΕ ΤΗΝ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΛΙΜΝΗΣ ΔΟΪΡΑΝΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γιώργος Καραβασίλης

4ο Περιφερειακό Κέντρο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού Κεντρικής Μακεδονίας

gkaravasilis@sch.gr

Περίληψη

Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση επιχειρείται η διαισθητική επιβεβαίωση και η θεωρητική απόδειξη του τύπου για τον υπολογισμό της περιφέρειας του κύκλου, με γνώσεις Λυκείου. Το πρόβλημα της εύρεσης της περιμέτρου της λίμνης Δοϊράνης λειτουργεί ως αφόρμηση για την επεξεργασία προσεγγιστικών λύσεων σε μια πραγματική κατάσταση. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geogebra συνεισφέρουν αποφασιστικά στην αποτελεσματικότητα και των δύο προσεγγίσεων καθώς και στην επίλυση του ρεαλιστικού προβλήματος.

ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Το κεντρικό ζήτημα της διδακτικής παρέμβασης αφορά την εμπειρική ανακάλυψη και διαισθητική επιβεβαίωση του τύπου για την περίμετρο του κύκλου, με τη μέθοδο της προσέγγισης της περιμέτρου του κύκλου με πλευρές κανονικών πολυγώνων, από τους μαθητές της Β Λυκείου. Η σχέση που οι μαθητές ζητείται να ανακαλύψουν είναι ήδη γνωστή σε αυτούς οπότε κυρίως γίνεται επιβεβαίωση και πολύ λιγότερο ανακάλυψη. Συμπληρωματικά με την παραπάνω προσέγγιση προτείνεται μια θεωρητική απόδειξη του ίδιου τύπου με την εισαγωγή της έννοια του ορίου ακολουθίας, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν και την αντίστοιχη θεωρητική απόδειξη. Οι δυσκολίες που ανακύπτουν και με τις δύο προσεγγίσεις ξεπερνιούνται με την χρήση του λογισμικού GeoGebra. Επιπλέον, η επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος, όπως είναι η εύρεση της περιμέτρου της λίμνης Δοϊράνης, με τη χρήση των Google maps, αποτελεί αφόρμηση αλλά και πεδίο εφαρμογής των δεξιοτήτων και γνώσεων που έχουν αποκτηθεί από τους μαθητές. Το πραγματικό πρόβλημα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο πειραματισμού που μπορεί να αξιοποιηθεί στην κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης δουλεύοντας με ομάδες και την ολομέλεια με ανταλλαγή απόψεων και επιχειρημάτων. Η διδακτική παρέμβαση είναι αναρτημένη και αξιοποιεί τις δυνατότητες του eclass (eclass.sch.gr) κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τα ερευνητικά ερωτήματα που διερευνά η προταθείσα διδακτική παρέμβαση είναι:

- Η εμπλοκή των μαθητών με πραγματικά προβλήματα αποτελεί ενδιαφέρουσα, για τους μαθητές της Β΄ Λυκείου, μαθηματική δραστηριότητα για την παρούσα διδακτική παρέμβαση;
- Η προσέγγιση της περιφέρειας του κύκλου με κανονικά πολύγωνα, μέσω λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, ενισχύει την βεβαιότητα των μαθητών για την ορθότητα του τύπου που αφορά το μήκος κύκλου;
- Η αντίστοιχη θεωρητική απόδειξη αποτελεί για τους μαθητές ουσιώδες στοιχείο μιας ολοκληρωμένης αποδεικτικής διαδικασίας;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Η διδακτική παρέμβαση ξεκινά με το πρόβλημα της περιμέτρου της λίμνης Δοϊράνης που αποτελεί ένα πραγματικό πρόβλημα δεδομένου ότι η απάντηση διαφοροποιείται καθημερινά ανάλογα με τις κλιματικές συνθήκες. Πέρα από την παιδαγωγική αξιοποίηση (π.χ. επιχειρηματολογία μεταξύ των ομάδων για τις προτεινόμενες λύσεις) ο απώτερος στόχος του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η επαφή των μαθητών με την έννοια της προσέγγισης η οποία ακολουθείται για την επίλυσή του και κατόπιν συμπληρώνεται από την έννοια της σύγκλισης και στις δύο προσεγγίσεις που ακολουθούν (διαισθητική, θεωρητική). Η εφαρμογή της διδακτικής πρότασης στην τάξη έδειξε ότι οι μαθητές ενεργοποιούνται με την επίλυση του προβλήματος και αυτό συντελεί σημαντικά στην εμπλοκή τους και στα επόμενα στάδια της διδασκαλίας.

Η προσέγγιση της περιμέτρου του κύκλου με την περίμετρο κανονικών πολυγώνων ακολουθείται από το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα τόσο από το σχολικό βιβλίο (Αργυρόπουλος κ.ά., 2015, ενότητα 11.4) όσο και από τα ψηφιακά δομήματα που έχουν αναπτυχθεί στα διαδραστικά βιβλία του Ψηφιακού Σχολείου (ebooks.edu.gr). Στην συγκεκριμένη πρόταση, οι μαθητές, αξιοποιούν τον δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των εφαρμογών που προσφέρει το Ψηφιακό Σχολείο με την καθοδήγηση φύλλων εργασίας και καταλήγουν στη διαισθητική απόδειξη-επιβεβαίωση της σχέσης για την περίμετρο του κύκλου. Η πρακτική εφαρμογή έδειξε ότι οι μαθητές ενίσχυσαν την βεβαιότητά τους σχετικά με τον προς απόδειξη τύπο, μέσω των δραστηριοτήτων αυτών. Οι μαθητές όμως δεν έχουν αποδείξει τον παραπάνω τύπο, παρόλο που τον έχουν χρησιμοποιήσει πάρα πολλές φορές στη μαθητική τους ζωή. Επιχειρείται λοιπόν και η αυστηρή μαθηματική απόδειξη με γνώσεις Λυκείου, χωρίς να προέκυψε όμως από τους μαθητές έντονο ενδιαφέρον προς την κατεύθυνση αυτή, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σίδερης, Π. (2015) *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, ΙΤΥΕ Διόφαντος.

ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΤΗΝ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Κατσομήτρος Σωτήριος

Msc «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

sotkatso@gmail.com

Η παρούσα διδακτική πρόταση στοχεύει στην εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής στην Στ΄ δημοτικού με την μορφή του γενικευμένου αριθμού. Ο διδακτικός σχεδιασμός βασίστηκε αποκλειστικά στο ψηφιακό λογισμικό eXpresser και στην Αναθεωρημένη Ταξινομία Bloom. Κατά την εφαρμογή της δύναται να προκύψει το ζήτημα της σημειωτικής διαμεσολάβησης του ψηφιακού εργαλείου αλλά και δυσκολίες των μαθητών στην χρήση του.

Η ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΤΟΝ ΨΗΦΙΑΚΟ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟ EXPRESSER

Ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser[1] (Noss et al., 2009) ενθαρρύνει την μαθηματική γενίκευση μαθητών ηλικίας 11 έως 14. Εμπεριέχει μια μορφή «άλγεβρας», όπου ο μαθητής μπορεί να δημιουργεί σταθερές, να ενεργεί με μεταβλητές και να συντάσσει εκφράσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Μέσα από την χρήση έγχρωμων τετραγώνων (για την κατασκευή μοτίβων), ο μαθητής χρησιμοποιεί «εικονικές μεταβλητές», για να αναπαράγει τις κατασκευές του για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων και για να εκφράσει σχέσεις γενίκευσης. Πάντα λαμβάνει σχετική ανατροφοδότηση για την ορθότητα αυτών των σχέσεων. Κατ' αντιστοιχία, η «εικονική μεταβλητή» είναι η εικονογραφημένη αναπαράσταση της μεταβλητής.

Δραστηριότητες

Η παρούσα διδακτική πρόταση, συνολικής διάρκειας 6 διδακτικών ωρών, προτείνεται να εφαρμοστεί στην Στ΄ δημοτικού στο εργαστήριο των η/υ. Βασικός άξονας είναι η εισαγωγή της μεταβλητής με την μορφή του γενικευμένου αριθμού και όχι με την μορφή ενός συγκεκριμένου πάντα άγνωστου αριθμού (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003) μέσα από την μαθηματική γενίκευση γεωμετρικών μοτίβων. Οι διδακτικοί στόχοι είναι οι μαθητές: να αναγνωρίσουν την δομή του μοτίβου, να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής, να αποτυπώσουν αλγεβρικά τον γενικό κανόνα και να εξασκηθούν στον επαγωγικό τρόπο σκέψης. Οι μαθητές δύναται να εργαστούν εταιρικά ανά η/υ, ενώ ο εκπαιδευτικός να έχει τον ρόλο του συντονιστή της διαδικασίας.

Η συγκεκριμένη παρέμβαση είναι χωρισμένη σε 3 δίωρες φάσεις (Α-Β-Γ), η πορεία των οποίων βασίζεται στα επίπεδα των γνωστικών στόχων της Αναθεωρημένης Ταξινομίας Bloom (Επίπεδο/Επ. 1: Θυμάμαι, Επ. 2: Κατανοώ, Επ. 3: Εφαρμόζω, Επ. 4: Αναλύω, Επ. 5: Αξιολογώ, Επ. 6: Δημιουργώ) (Krathwohl &Anderson, 2001).

Η Α΄ φάση περιλαμβάνει την εξοικείωση των μαθητών με τις αναπαραστάσεις/λειτουργίες του eXpresser. Η Β΄ και Γ΄ φάση εμπεριέχει από ένα φύλλο εργασίας, στο οποίο υπάρχει ένα διαφορετικό μοτίβο. Ειδικότερα, στην Β΄ φάση υπάρχουν ερωτήματα που αφορούν: την λεκτική περιγραφή του μοτίβου, τον συνολικό αριθμό των τετραγώνων για 1,2,3 επαναλήψεις (κοντινή γενίκευση/ Επ. 2: Κατανοώ), την συμπλήρωση πίνακα για διάφορο αριθμό επαναλήψεων π.χ. 10,15,100 (μακρινή γενίκευση) ανά χρώμα τετραγώνων (Επ. 3: Εφαρμόζω) και την αποτύπωση του γενικού κανόνα μέσα από τον eXpresser. Μετέπειτα, η Γ΄ φάση εμπεριέχει επιπλέον ερωτήματα, όπου ανάμεσα σε 4 διαφορετικούς αλγεβρικούς τύπους, οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τον κατάλληλο για το δοσμένο μοτίβο και να το αιτιολογήσουν με την χρήση του eXpresser (Επ. 5: Αξιολογώ). Έπειτα, καλούνται να δημιουργήσουν το δικό τους μοτίβο στο λογισμικό και να διατυπώσουν τον αντίστοιχο αλγεβρικό τύπο (Επ. 6: Δημιουργώ). Κατά την εφαρμογή της παρέμβασης ενδέχεται να παρατηρηθούν αρχικά δυσκολίες των μαθητών στη χρήση του eXpresser, αλλά και στον τρόπο που νοηματοδοτούν εννοιολογικά την μεταβλητή. Ίσως ορισμένοι μαθητές την νοηματοδοτήσουν ως ένα γενικευμένο αριθμό ενώ άλλοι να την προσεγγίσουν περισσότερο ως ένα «εικονίδιο».

1. **Ηλεκτρονική έκδοση eXpresser: http://web-expresser.appspot.com**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Krathwohl, D. R., & Anderson, L. W. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. *Theory into practice*, *41*(4), 212.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. *ZDM*, *41*(4), 493-503.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΑΝΗΓΥΡΙ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ: ΜΙΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΠΡΟ(Σ)ΚΛΗΣΗ ΜΑΘΗΣΗΣ

Μαρία Σιακαλλή, Ελένη Παπαγεωργίου

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

shiakalli.m@cyearn.pi.ac.cy, papageorgiou.e@cyearn.pi.ac.cy

Η εργασία προτείνει «Το μαθηματικό πανηγύρι» ως μια εναλλακτική παιδαγωγική προσέγγιση για την ανάπτυξη θετικής στάσης των παιδιών του νηπιαγωγείου για τα Μαθηματικά και ενδυνάμωση των δεξιοτήτων των γονέων όσον αφορά στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των παιδιών τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το μαθηματικό πανηγύρι αποτελεί πρόκληση για τα παιδιά και πρόσκληση προς τους ενήλικες για συνεργασία και αλληλεπίδραση στην επίλυση προβλημάτων. Είναι μια οργανωμένη δραστηριότητα, όπου τα παιδιά διαχειρίζονται με διασκεδαστικό τρόπο τα Μαθηματικά (Friesen & Francis-Poscente, 2014) και συνεργάζονται με τους γονείς τους, στην επίλυση των προβλημάτων. Η σύνθετη αλληλεπίδραση γονέων-παιδιών-δημιουργικών περιβαλλόντων συμβάλλει στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης και της θετικής στάσης των παιδιών προς τα Μαθηματικά (Wang κ.ά., 2014) και κατ' επέκταση, της αναπτυξιακής τους πορείας και των ακαδημαϊκών τους επιτευγμάτων (Engel & Claessens, 2013). Επιπρόσθετα, ενδυναμώνει τις δεξιότητες των γονέων να στηρίζουν τη μάθηση των παιδιών τους (Ginsburg, Rashid, & English-Clarke, 2008) στα Μαθηματικά. Τα προβλήματα σε ένα μαθηματικό πανηγύρι σχεδιάζονται, ώστε τα παιδιά να συμμετέχουν αποτελεσματικά και μη ανταγωνιστικά, αναπτύσσοντας τον μαθηματικό τους συλλογισμό. Απαιτούν ανακάλυψη συνδέσεων και μοτίβων, διατύπωση εικασιών και εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης προβλήματος (Friesen & Francis-Poscente, 2014).

Το μαθηματικό πανηγύρι αποτελεί μια καινοτόμα προσέγγιση του Αναλυτικού Προγράμματος Προσχολικής Εκπαίδευσης της Κύπρου, που εφαρμόζεται στα νηπιαγωγεία τα τρία τελευταία χρόνια.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΑΝΗΓΥΡΙΟΥ

Το μαθηματικό πανηγύρι στα νηπιαγωγεία της Κύπρου εστιάζει στη διασκεδαστική οπτική της μάθησης των Μαθηματικών και αποσκοπεί στην ενδυνάμωση των δεξιοτήτων των γονέων να αξιοποιούν τα Μαθηματικά στις καθημερινές δραστηριότητες των παιδιών τους. Ως εκ τούτου, σχεδιάζονται δραστηριότητες/παιχνίδια από τους εκπαιδευτικούς, στα οποία απαιτείται η συνεργασία γονέα-παιδιού για την επίλυση των προβλημάτων που περιλαμβάνουν. Στον σχεδιασμό λαμβάνονται υπόψη οι μαθηματικές εμπειρίες των παιδιών, η δυνατότητα προαγωγής συνεργασίας και αλληλεπίδρασης γονέων-παιδιών και η προσβασιμότητα των γονέων στα υλικά. Αξιοποιούνται μαθηματικές έννοιες σε διάφορα γνωστικά επίπεδα, όπως αναφέρονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα, ενώ βασική αρχή στο περιεχόμενο των δραστηριοτήτων είναι η δυνατότητα επιτυχίας όλων.

Το μαθηματικό πανηγύρι ολοκληρώνεται με αξιολόγηση της συγκεκριμένης προσέγγισης και με συζήτηση μεταξύ γονέων και εκπαιδευτικών. Συζητούνται ο ρόλος των γονέων και πρακτικές που μπορούν να εφαρμόζουν καθημερινά, για την ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας και της θετικής στάσης των παιδιών προς τα Μαθηματικά.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η αξιολόγηση, που διενεργήθηκε μέσα από δελτία εξόδου τα οποία συμπληρώθηκαν από γονείς και παιδιά, έχει αναδείξει τη θετική επίδραση της συγκεκριμένης προσέγγισης στη συναισθηματική στάση των παιδιών για τα Μαθηματικά και στην ενημερότητα των γονέων για διάφορα παιχνίδια μάθησης, που οι ίδιοι μπορούν να αξιοποιούν στο σπίτι με τα παιδιά τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Engel, M., & Claessens, A. (2013). Teaching students what they already know? The (mis)alignment between mathematics instructional content and student knowledge in Kindergarten. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 35*(2), 157–178.

Wang, Z., Hart, S. A., Kovas, Y., Lukowski, S., Soden, B., Thompson, L. A., & Petrill, S. A. (2014). Who is afraid of math? Two sources of genetic variance for mathematical anxiety. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 55,* 1056-1064.

Friesen, Sh., & Francis-Poscente, K. (2014). Teaching and learning Mathematics with math fair, lesson study and classroom mentorship. *The Mathematics Enthusiast, 11*(1), 61-82.

GENA. (2008). *Developing mathematical proficiency through math fair rubric*. Ανακτήθηκε 1/9/2019 από http://www.galileo.org/math.

Ginsberg, L., Rashid, H., & English-Clarke, T. (2008). Parents learning mathematics: For their children, from their children, with their children. *Adult Learning, 15*(3–4), 21– 26.

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ ΜΕΣΩ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΕΝΣΩΜΑΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ: Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ "ΓΩΝΙΟΓΝΩΣΤΕΣ"

Αλεξία Αλεξάνδρου[1], Ζωή Καουρή[2], Νεόφυτος Νεοφυτίδης[3], Παρασκευή Σοφοκλέους[4]

[1]Δημοτικό Ανάγειας, Λευκωσία, [2]Θ΄Δημοτικό Λεμεσού (ΚΑ), [3]Δ΄ Δημοτικό Λεμεσού (ΚΒ) & [4]Α΄ Δημοτικό Λεμεσού, ΥΠΠΑΝ

[1]alexia2412@gmail.com,[2]kaouri.zoi@gmail.com, [3]neophytos.neophytides@gmail.com, & [4]skevi_sophocleous@yahoo.gr

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει τη χρήση της εφαρμογής ενσώματης μάθησης: «Γωνιογνώστες» στη διδασκαλία γωνιών και τα αποτελέσματα από την ένταξή της σε τάξεις δημοτικού. Στην εφαρμογή αυτή, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν το σώμα τους για να σχηματίσουν γωνίες και δίνεται ανάλογη ανατροφοδότηση. Οι μαθητές συμπλήρωσαν διαγνωστικά εννοιολογικά δοκίμια πριν και μετά την αξιοποίηση της εφαρμογής. Τα αποτελέσματα έδειξαν στατιστικά σημαντική βελτίωση της επίδοσής τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανόηση της έννοιας της γωνίας αποτελεί σημαντικό μέρος της γεωμετρικής γνώσης των μαθητών (π.χ., Clements & Burns, 2000). Ταυτόχρονα, υπάρχει συμφωνία στο ότι η κατανόηση της έννοιας της γωνίας και η μέτρηση της αποτελούν θέματα τα οποία δυσκολεύουν τους μαθητές στη Δημοτική Εκπαίδευση (π.χ., Clements & Burns, 2000). Το ευρωπαϊκό πρόγραμμα INTELed [1] στηριζόμενο στη θεωρία της ενσώματης μάθησης και στη χρήση καινοτόμων πολυαισθητηριακών τεχνολογιών προτείνει τη χρήση της εκπαιδευτικής εφαρμογής «Γωνιογνώστες» για αντιμετώπιση της δυσκολίας αυτής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΩΝΙΟΓΝΩΣΤΕΣ

Η εφαρμογή «Γωνιογνώστες» αναπτύχθηκε με βάση τη θεωρία της ενσώματης μάθησης. Σύμφωνα με την εν λόγω θεωρία, το σώμα είναι πηγή γνώσης και ως εκ τούτου οι μαθητές μπορούν να μάθουν οποιαδήποτε πληροφορία μέσω αισθητηριο-κινητικών ερεθισμάτων (Georgiou & Ioannou, 2019). Στο πλαίσιο χρήσης της εφαρμογής, οι μαθητές σχηματίζουν με το σώμα τους (είτε ατομικά είτε σε συνεργασία με ένα άλλο παιδί) γωνίες μπροστά στην κάμερα Kinect και ενώ η εφαρμογή δίνει ταυτόχρονη ανατροφοδότηση. Η εφαρμογή αποτελείται από 2 στάδια: (1) το «Ελεύθερο», όπου οι μαθητές σχηματίζουν γωνίες με το σώμα τους και (2) Το «Καθοδηγούμενο» όπου σχηματίζουν με το σώμα τους διαφορετικά είδη γωνίας (π.χ. οξεία, αμβλεία, ορθή) όπως ορίζει η εφαρμογή.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ

Στο πλαίσιο του έργου INTELed, διοργανώθηκε σειρά επιμορφωτικών σεμιναρίων. Σε αυτά συμμετείχαν οι συγγραφείς της εργασίας αυτής, ετοιμάζοντας και υλοποιώντας σχέδια μαθήματος, για ένταξη της εφαρμογής στην τάξη τους. Για τις Α΄ και Β΄ τάξεις επικεντρώθηκαν στην έννοια της γωνίας και της ορθής γωνίας, ενώ στις μεγαλύτερες τάξεις στα διαφορετικά είδη γωνιών. Η εφαρμογή

«Γωνιογνώστες» αξιοποιήθηκε είτε στην ολομέλεια της τάξης είτε σε διάταξη σταθμών [2] με 234 μαθητές. Οι μαθητές συμπλήρωσαν διαγνωστικά δοκίμια (διαφοροποιημένα ανά επίπεδο) πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι της επίδοσης των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση ανά τάξη. Οι μέσοι όροι παρουσιάζουν βελτίωση στο μεταπειραματικό δοκίμιο (ΜΠ) σε σχέση με το προπειραματικό (ΠΠ) και η διαφορά αυτή ήταν στατιστικά σημαντική (έλεγχος με κριτήριο t για εξαρτημένα δείγματα).

	Α΄τάξη (Ν=13)	**Β΄τάξη (Ν=15)**	**Γ΄τάξη (Ν=40)**	**Δ΄τάξη (Ν=66)**	**Ε΄τάξη (Ν=51)**	**Στ΄τάξη (Ν=49)**
ΠΠ	6,27	4,30	6,15	5,36	7,94	8,20
ΜΠ	7,13	8,68	7,88	6,36	8,00	8,58

Πίνακας 1: Μέσοι όροι επίδοσης στο ΠΠ και στο ΜΠ δοκίμιο

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν τη θετική συμβολή της τεχνολογικά υποστηριζόμενης ενσώματης μάθησης στη διδασκαλία των μαθηματικών.

1. "This work is part of the INTELed Project [INnovative Training via Embodied Learning and multi-sensory techniques for inclusive Education] (Project 2017-1-CY01-KA201-026733), which is co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union". (https://www.inteled.org/)
2. https://www.youtube.com/watch?v=GyapM1kI4XE, http://photodentro.pi.ac.cy/ugc/r/8544/2079

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D. H., & Burns, B. A. (2000). Students' development of strategies for turn and angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 41*(1), 31-45.

Georgiou, Y., & Ioannou, A. (2019). Embodied learning in a digital world: A systematic review of empirical research in K-12 education. In P. Díaz, A. Ioannou, K. Bhagat & J. Spector (Eds.), *Learning in a digital world* (pp. 155-177). Springer.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΣΚΕΥΩΝ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΠΟ ΟΜΑΔΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Δημήτρης Διαμαντίδης, Αγγελική Βλάχου, Ελισάβετ Δαλιεράκη, Ελένη Ζιάκα, Χρήστος Μάλλιαρης

2ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών

dimitrd@ppp.uoa.gr, ag.vlachou@gmail.com, ldalieraki@yahoo.com, eziaka@otenet.gr, chrismalliaris@gmail.com

ΤΟ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΚΑΙ Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Η πρακτική που παρουσιάζεται περιγράφει μία μέθοδο συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών Μαθηματικών του ίδιου σχολείου, με στόχο την από κοινού παραγωγή και τη χρήση διδακτικού υλικού, που την υλοποιήσαμε στο δεύτερο τετράμηνο του σχολικού έτους 2018-19, στο 2ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών. Το υλικό που παράχθηκε βασίστηκε στα μικροπειράματα των διαδραστικών σχολικών βιβλίων (ΔΣΒ) Μαθηματικών του ελληνικού Υπουργείου Παιδείας (που είναι διαθέσιμα στο http://ebooks.edu.gr/new) της Β΄ Γυμνασίου, είναι δηλαδή νέα μικροπειράματα, διασκευές των αρχικών. Η απόφασή μας να διασκευάσουμε ψηφιακό υλικό, προσαρμόζοντάς το στις δικές μας εκπαιδευτικές πρακτικές έχει διαφορετικές διαστάσεις.

Η διδακτική αξιοποίηση των ψηφιακών μέσων στα Μαθηματικά δίνει την ευκαιρία στους/τις μαθητές/τριες, να χειριστούν και να αλληλεπιδράσουν με αντικείμενα υπό κατασκευή και διερεύνηση, να διατυπώσουν υποθέσεις, να τις «δοκιμάσουν» και, μέσα από διαδικασίες πειραματισμού, να κατασκευάσουν προσωπικά νοήματα για μαθηματικές έννοιες και ιδέες (Κυνηγός, 2010). Ο σχεδιασμός του υλικού και ο τρόπος χρήσης του είναι δύο βασικές μεταβλητές του μαθησιακού αποτελέσματος και όπως έχει φανεί από έρευνες (Clark-Wilson, Robutti, & Sinclair, 2014) οι επιστημολογικές, διδακτικές και παιδαγωγικές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, που δεν είναι κοινές, επηρεάζουν και τις δύο μεταβλητές. Η απόφασή μας να εμπλακούμε από κοινού στο σχεδιασμό του υλικού έγινε ώστε το παραγόμενο υλικό να είναι αποτέλεσμα σύνθεσης διαφορετικών προσεγγίσεων. Επίσης, η σκέψη μας να διασκευάσουμε «επίσημο» υλικό του Υπουργείου Παιδείας και όχι να φτιάξουμε μικροπειράματα «από το μηδέν», στηρίζεται στην προσσέγιση ότι αυτό το υλικό θα φέρει μαζί του το πολιτισμικό/ιστορικό φορτίο που φέρουν τεχνουργήματα που απευθύνονται και χρησιμοποιούνται από ευρύ κοινό (Hegedus & Moreno-Armella, 2010), όπως π.χ. οι αντιλήψεις των προγραμμάτων σπουδών.

Στην πράξη, σχηματίσαμε μία «κοινότητα σχεδιασμού» (Fischer, 2004), θεωρώντας ότι θα λειτουργούσε και ως ευκαιρία επαγγελματικής ανάπτυξης για εμάς. Συνεδριάζαμε, αρχικά μία φορά την εβδομάδα με αντικείμενο την επιλογή και τη διασκευή των πρώτων μικροπειραμάτων και στη συνέχεια, όταν αυτά άρχισαν να χρησιμοποιούνται στην τάξη, οι εβδομαδιαίες συναντήσεις έγιναν δύο: η πρώτη για τη διασκευή των επόμενων μικροπειραμάτων και η δεύτερη για αναστοχαστική συζήτηση της εφαρμογής. Μετά τη συζήτηση, προτεινόταν μία νέα, τελική διασκευή κάθε μικροπειράματος, καθώς και ένα συνοδεύον κείμενο με προτάσεις προς έναν εκπαιδευτικό που, υποθετικά, θα χρησιμοποιούσε τη διασκευή μας στο μέλλον. Έτσι, κάθε παραγόμενο είχε περάσει από τα εξής στάδια: αρχική διασκευή, εφαρμογή, αναστοχασμός μετά την εφαρμογή, τελική διασκευή.

Η ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Τελικά προέκυψαν 7 διασκευές μικροπειραμάτων Άλγεβρας, Γεωμετρίας και Στατιστικής, ως διδακτικές προτάσεις του σχολείου μας προς την εκπαιδευτική κοινότητα με ανατροδφοδότηση από την τάξη, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν σε 23 διδασκαλίες, στο σχολείο. Δε διακινδυνεύουμε να αποτιμήσουμε το μαθησιακό αποτέλεσμα με ποσοτικά χαρακτηριστικά. Ωστόσο, ισχυριζόμαστε, ότι η λειτουργία της κοινότητας οδήγησε σε υλικά με σαφή διδακτικό σχεδιασμό, χωρίς να είναι «κλειδωμένα», με περιθώρια προσαρμογής τους από έναν/μία εκπαιδευτικό που θα τα χρησιμοποιήσει.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Sinclair, N. (2014). *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology fucused professional development*. Dordrecht: Springer.

Fischer, G. (2004). Social creativity: Turning barriers into opportunities for collaborative design. *Proceedings of the Eighth Conference on Participatory Design Artful Integration: Interweaving Media, Materials and Practices - PDC 04*, *1*, 152.

Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental γένεσις framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics*, *30*(1), 26–31. Retrieved from JSTOR.

Κυνηγός, Χ. (2010). *Το μάθημα της Διερεύνησης* (3η). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΝΟΗΜΑΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ/ΤΡΙΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΠΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

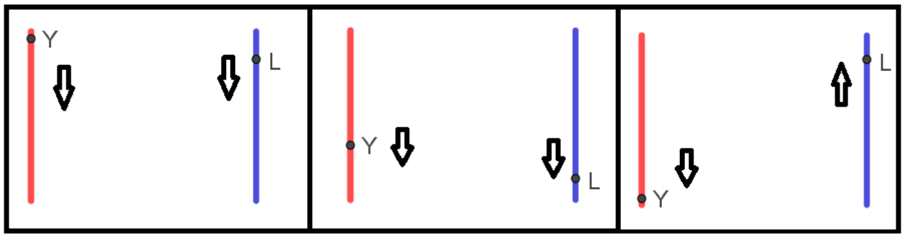
Δημήτρης Διαμαντίδης, Χρήστος Μάλλιαρης

2ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών

dimitrd@ppp.uoa.gr, chrismalliaris@gmail.com

Παρουσιάζουμε μία διδακτική πρακτική που τη σχεδιάσαμε και την υλοποιήσαμε στο 2ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών, πριν τη διδασκαλία των συναρτήσεων. Η συμμεταβολή είναι η νοητική εικόνα του ατόμου για δύο ποσότητες που μεταβάλλονται με μία αντιστοιχία μεταξύ των τιμών της μίας με την άλλη και άρα σχετίζεται με κάποιες προσεγγίσεις των μαθητών/τριών για τη συνάρτηση Kleiner (1989). Η παρέμβασή μας στηρίζεται σε μία διαφορετική προσέγγιση που καταγράφεται για την εικόνα των μαθητών/τριών για την συνάρτηση, μεταξύ της οπτικής των Confrey και Smith (1994) και αυτής των Saldanha και Thompson (1998). Σύμφωνα με τους Confrey και Smith η συμμεταβολή μεταξύ δύο ποσοτήτων y και x, γίνεται αντιληπτή ως η δυνατότητα να μπορεί κανείς να αλλάξει την τιμή της y από y_m σε y_{m+1} σε *συντονισμό* με την αλλαγή της τιμής της x από x_m σε x_{m+1}. Από την άλλη, οι Saldanha και Thompson (1998), μιλούν για τη συμμεταβολή ως την νοητική εικόνα δύο ποσοτήτων που οι τιμές τους μεταβάλλονται ταυτόχρονα και που κυριαρχεί της νοητικής εικόνας της μεταβολής κάθε ποσότητας χωριστά. Έτσι, ο *συντονισμός* ως χαρακτηριστικό της συμμεταβολής δύο ποσοτήτων αντικαθίσταται από ένα *«παραγόμενο νοητικό αντικείμενο»* που εκφράζει κάθε στιγμιότυπο αυτής της μεταβολής και είναι επίσης μεταβαλλόμενο. Κάθε κατάσταση αυτού του *παραγόμενου αντικειμένου* εκφράζει το «ταίριασμα» των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσοτήτων. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, σε περιπτώσεις που υπάρχει αδυναμία *συντονισμού* των μεταβαλόμενων ποσοτήτων, η «ύπαρξη» του *παραγόμενου αντικειμένου* δίνει τη δυνατότητα στο άτομο να εντοπίσει και να εξεικονίσει μέσω συγκεκριμένων ιδιοτήτων αυτού του αντικειμένου, τη συμμεταβολή των ποσοτήτων αυτών. Με αυτό το σκεπτικό σχεδιάσαμε ένα μικρόκοσμο στο λογισμικό GeoGebra και μία δραστηριότητα, ώστε οι μαθητές/τριες που ενεπλάκησαν σε αυτή, να σχηματίσουν νοήματα για τη συνάρτηση, ως συμμεταβολή και με τις δύο παραπάνω προσεγγίσεις.

Μία σειρά στιγμιοτύπων του μικρόκοσμου φαίνονται στην εικόνα 1. Ο/η μαθητής/τρια, πατώντας ένα κουμπί θέτει σε κίνηση τα σημεία (Y και L) πάνω στα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα. Τα σημεία παλινδρομούν και η θέση τους είναι συσχετισμένη, άλλά ούτε η ύπαρξή της σχέσης αυτής, ούτε η μορφή της είναι εμφανής στο/τη μαθητή/τρια. Το ερώτημα που τίθεται στη δραστηριότητα είναι: «Υπάρχει κάποια σχέση που να συνδέει την κίνηση των δύο σημείων; Αν, ναι ποια είναι;». Μόλις οι μαθητές/τριες απαντήσουν ο/η εκπαιδευτικός μπορεί στο παρασκήνιο να αλλάξει αυτή τη σχέση η οποία κάνει την κίνηση να είναι «ομαλή» ή και «ακανόνιστη» με ξαφνικά «σκαμπανευάσματα» του ενός σημείο σε σχέση με το άλλο. Η υπόθεσή μας ήταν ότι με χρήση κατάλληλων σχέσεων στο παρασκήνιο οι μαθητές/τριες θα οδηγούνταν άλλες φορές στην προσπάθεια συντονισμού, και άλλες στην κατασκευή παραγόμενων αντικειμένων για να περιγράψουν την κίνηση.



Εικόνα 1: Στιγμιότυπα του μικρόκοσμου

Εφαρμόζοντας, την παραπάνω δραστηριότητα για δύο σχολικά έτη, στο εργαστήριο υπολογιστών και στην η-τάξη, και επιχειρώντας μόνο μία εμπειρική αποτίμηση, διαπιστώσαμε ότι εμφανίζονται και οι δύο προσεγγίσεις, αλλά όταν η κίνηση είναι «ακανόνιστη», συχνά εμφανίζεται η προσέγγιση παραγόμενου αντικειμένου (Διαμαντίδης & Μάλλιαρης, 2019).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 135-164.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal, 20*, 232-300.

Saldanha, L.A., & Thompson, P.W. (1998). Re-thinking co-variation from quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S.B. Berenson & W.N. Coulombe (Eds.) *Proceeding of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education-North America* (pp. 298-304), Raleigh: North Carolina State University.

Διαμαντίδης Δ., Μάλλιαρης Χ. (2019). Χρήση εργαλείων ασύγχρονης επικοινωνίας και συνεργασίας για τη δημιουργία νοημάτων για τα Μαθηματικά από μαθητές/-τριες Γυμνασίου: Η περίπτωση της συμμεταβολής. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 1,* 298-304.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΡΟΜΠΟΤ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρασκευή Σοφοκλέους

Α΄ Δημοτικό Σχολείο Λεμεσού, skevi_sophocleous@yahoo.gr

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει με ποιο τρόπο χρησιμοποιήθηκαν ρομποτικά πακέτα στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών σε μαθητές Β΄ Δημοτικού. Συγκεκριμένα, τρία εκπαιδευτικά ρομπότ: "probot", "ozobot" και "Code & Go Robot Mouse" αξιοποιήθηκαν για ανάπτυξη δραστηριοτήτων με σκοπό την ενίσχυση των δεξιοτήτων των μαθητών να δίνουν οδηγίες κατεύθυνσης και να περιγράφουν τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του τετραγώνου και τη σχέση μεταξύ τους. Οι δραστηριότητες αυτές ενεργοποίησαν όλους τους μαθητές και ταυτόχρονα φάνηκε να ενισχύθηκε τόσο η βασική τους μαθηματική γνώση όσο και η κριτική και η δημιουργική τους σκέψη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για αξιοποίηση της ρομποτικής στην εκπαιδευτική διαδικασία. Στο πεδίο της μαθηματικής παιδείας δεν είναι κάτι καινούριο, αφού τη δεκαετία 1980-1990 μελετήθηκε η χρήση της logo στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από τότε σε ερευνητικό επίπεδο, με βάση μια πρόσφατη ανασκόπηση των Leoste και Heidmets (2019) εντοπίστηκαν μόνο 20 άρθρα τα οποία μελετούν τη χρήση της ρομποτικής στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από αυτά, μόνο ένα βρήκε ότι δεν ωφελεί η χρήση των ρομπότ στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα υπόλοιπα άρθρα υπογραμμίζουν ότι η χρήση των ρομπότ στη διδασκαλία των μαθηματικών ενισχύει τις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών. Έτσι, στην εργασία αυτή θα παρουσιαστούν δραστηριότητες που αξιοποιούν ρομποτικά πακέτα στη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών. Οι δραστηριότητες αυτές υλοποιήθηκαν σε τάξη Β΄ Δημοτικού με 20 μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2018-2019. Θα παρουσιαστούν αποτελέσματα μέσα από τις παρατηρήσεις της δασκάλας τους (συγγραφέας) και των εργασιών που συμπλήρωσαν. Στόχος είναι να δοθούν ενδείξεις της επίδρασης τέτοιων δραστηριοτήτων, ώστε να σχεδιαστούν και να υλοποιηθούν περισσότερες σχετικές έρευνες.

ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ - ΟΔΗΓΙΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ένας από τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών της Κύπρου είναι οι μαθητές Β΄ δημοτικού να περιγράφουν και να καθορίζουν θέσεις στο χώρο, χρησιμοποιώντας έννοιες του χώρου και να δίνουν οδηγίες κατεύθυνσης. Έτσι, οι μαθητές καλούνταν να λύσουν μαθηματικά προβλήματα τεσσάρων πράξεων που είχαν ήδη διδαχθεί και να βρουν την απάντηση σε τετραγωνισμένο χάρτη με αριθμούς. Ακολούθως, σε ζευγάρια να γράψουν τις οδηγίες που θα έδιναν στο ρομπότ "Code & Go Robot Mouse" (εντολές: μπροστά, πίσω, δεξιά, αριστερά) για να φτάσει στη λύση. Πάντα καλούνταν να βρουν περισσότερες από μία διαδρομή προς τη λύση και στην πορεία των μαθημάτων απέκτησαν τη δεξιότητα να ελέγχουν τη διαδρομή που πρότειναν και να την διορθώνουν. Παρόμοια, καλούνταν να βρουν σχήματα με συγκεκριμένες ιδιότητες (π.χ., σχήμα που δεν έχει γωνίες) σε τετραγωνισμένο χάρτη με σχήματα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Ένας άλλος στόχος του αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών της Κύπρου είναι οι μαθητές Β΄ Δημοτικού να περιγράφουν τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του τετραγώνου και τη σχέση μεταξύ τους, καθώς και να τα κατασκευάζουν. Έτσι, οι μαθητές γνωρίζοντας από τη Α΄Δημοτικού τα σχήματα αυτά, κλήθηκαν να αναγνωρίζουν αρχικά το ορθογώνιο που κατασκευάστηκε με συγκεκριμένες οδηγίες στο "probot" (δέχεται εντολές μπροστά, πίσω, δεξιά και αριστερά) και μετά να αλλάξουν τις οδηγίες αυτές ώστε να σχηματιστεί τετράγωνο. Ακολούθως, κλήθηκαν να γράψουν οδηγίες στο "probot", για να κατασκευάσει διαφορετικά ορθογώνια [1]. Όλοι οι μαθητές ενεργοποιήθηκαν και έδωσαν πολλαπλές λύσεις. Σε μια άλλη δραστηριότητα οι μαθητές κατασκεύασαν ορθογώνιες και τετράγωνες διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το "ozobot" με κώδικες χρωμάτων που επέλεγαν οι ίδιοι για να δηλώσουν την ταχύτητα και την κατεύθυνση του ρομπότ [2]. Ακολούθως, κλήθηκαν να περιγράψουν τις διαδρομές αυτές. Δείγματα εργασιών μπορείτε να βρείτε εδώ [3].

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όλοι οι μαθητές, ανεξαρτήτου επιπέδου, με ενθουσιασμό και επιμονή στην εργασία τους συμμετείχαν στις πιο πάνω δραστηριότητες. Από τη συμπλήρωση των διαφόρων φύλλων εργασίας, φάνηκε να έχουν κατανοήσει τις έννοιες που διδάχθηκαν, να αξιολογούν και να διορθώνουν την εργασία τους (κριτική σκέψη) και να δίνουν πολλαπλές και διαφορετικές λύσεις (δημιουργική σκέψη).

[1] Φύλλο εργασίας "probot": http://photodentro.pi.ac.cy/ugc/r/8544/2074

[2] Φύλλο εργασίας "ozobot": http://photodentro.pi.ac.cy/ugc/r/8544/2073

[3] http://dim-lemesos1-lem.schools.ac.cy/data/uploads/kainotomasxoleia/rompotiki.pdf

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Leoste J., & Heidmets M. (2019). The impact of educational robots as learning tools on mathematics learning outcomes in basic education. In T. Väljataga & M. Laanpere (Eds.), *Digital Turn in Schools—Research, Policy, Practice* (pp. 203-217). Singapore: Springer.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ - ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Παντελής Πετρίδης

Εσπερινό ΕΠΑΛ Γιαννιτσών (Ν. Πέλλας)

p.n.petridis@gmail.com

Διδακτική πρόταση που δημιουργήθηκε αρχικά στα πλαίσια της πρακτικής άσκησης του ΠΑΚΕ Μαθηματικών Θεσσαλονίκης. Επιχειρείται η προσέγγιση του τριωνύμου και η απόκτηση της ικανότητας εφαρμογής των τύπων επίλυσης της εξίσωσής του. Η εφαρμογή των τύπων στην οποία εστιάζει κυρίως η πρόταση γίνεται με τη χρήση κατάλληλης εφαρμογής-γεννήτορα ασκήσεων με το σκεπτικό ότι θα δώσει την ελάχιστη αυτοπεποίθηση σε ένα μαθητή για να ασχοληθεί περαιτέρω με τα μαθηματικά και ταυτόχρονα χρόνο στο διδάσκοντα, ενώ μία ευρύτερη χρήση τέτοιων εφαρμογών θα δημιουργήσει καλύτερες συνθήκες στην τάξη. Τέλος, γίνεται μία πρώτη προσέγγιση για τη σύνδεση των ριζών ενός τριωνύμου με το γράφημά του.

ΤΟ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ - ΑΝΑΛΥΣΗ

Η δραστηριότητα διαμορφώθηκε κυρίως με γνώμονα προβλήματα που συναντάμε μέσα στην τάξη, ίσως σε μεγαλύτερο βαθμό ή συχνότητα στο Εσπερινό ΕΠΑΛ, αλλά όχι μόνο σ’ αυτό. Τέτοια προβλήματα αφορούν μαθητές που έχουν χάσει το ενδιαφέρον τους καθώς δεν έχουν κατανοήσει βασικές έννοιες και διαδικασίες. Από την άλλη, ο διδάσκοντας δεν μπορεί να διαθέσει πολύ περισσότερο χρόνο από τον προβλεπόμενο ούτε σε κάλυψη τέτοιων βασικών εννοιών και διαδικασιών ούτε σε πολλά απλά παραδείγματα που απαιτούνται για την κατανόηση και εμπέδωση από τους αδύναμους μαθητές. Επίσης, δεν έχει απεριόριστο χρόνο και θα χάσει το ενδιαφέρον των υπόλοιπων μαθητών. Κι όλα αυτά με αποτέλεσμα να υπάρχει μερίδα μαθητών που αδρανοποιούνται χωρίς ο διδάσκοντας να έχει τη δυνατότητα να ασχοληθεί μαζί τους.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω αναζητήθηκε διδασκαλία που να αφορά τις βασικές αυτές έννοιες και διαδικασίες. Επιλέχθηκε το τριώνυμο και η επίλυση των εξισώσεών του ως χαρακτηριστική και βασική διαδικασία ρουτίνας που θα πρέπει να μπορεί να εκτελεί κάθε μαθητής και η οποία απαιτεί πολλές απλούστερες γνώσεις καθώς η εύρεση της διακρίνουσας και των ριζών εμπλέκει βασικές πράξεις, πρόσημα, ύψωση στο τετράγωνο, εύρεση τετραγωνικής ρίζας. Επιχειρήθηκε να δημιουργηθεί μία εφαρμογή φιλική στη χρήση και συμβατή με κάθε έξυπνη συσκευή η οποία να παράγει διαφορετικές ασκήσεις αλλά και να παρουσιάζει αναλυτικά τις λύσεις τους. Η προσέγγιση είναι μεν συμπεριφοριστική, κάτι που κατά κύριο λόγο αποφεύγεται στις διδακτικές προτάσεις στις οποίες προτιμάται να υιοθετούνται προσεγγίσεις ανώτερων μορφών μάθησης όπως η μάθηση με πειραματισμό και ανακάλυψη, η ομαδοσυνεργασία ή η προσέγγιση εννοιών παρά ρουτίνων, αλλά είναι κάτι που υπάρχει και γίνεται στη διδασκαλία των μαθηματικών, κυρίως όσο αφορά διαδικασίες ρουτίνας.

Έπειτα, προτεραιότητα ήταν να υιοθετηθούν και να ενσωματωθούν καλές πρακτικές ως προς την διδακτική προσέγγιση και τη χρήση των ΤΠΕ. Χρησιμοποιήθηκε το MoodleCloud για να βοηθήσει την εκπαιδευτική διαδικασία φιλοξενώντας κάθε κομμάτι της και ενσωματώνοντας την αλυσίδα των βημάτων που προτείνεται να ακολουθηθούν χωρίς την αναγκαιότητα φύλλων εργασίας.

Επιπλέον, στα βήματα-εργασίες δίνεται στο μαθητή σχετική ευελιξία στο χρόνο και τη διαχείρισή του, όπως και στη μορφή εργασίας, ατομικής ή ομαδικής.

Δημιουργήθηκε κουίζ με στόχο την -κατευθυνόμενη- ανακάλυψη της διαδικασίας συμπλήρωσης τετραγώνου κι έτσι την ανάδειξη της ανάγκης για τη διάκριση τριών περιπτώσεων που θα ακολουθήσουν με τη διακρίνουσα.

Τέλος, χρησιμοποιήθηκε ένα δόμημα GeoGebra από το Φωτόδεντρο με στόχο να γίνει μία πρώτη -μη αυστηρή- σύνδεση των ριζών του τριωνύμου με το γράφημά του, κάτι που μπορεί αργότερα να επεκταθεί σε οποιαδήποτε συνάρτηση γενικά. Αυτό έγινε με το σκεπτικό να υπάρξει μία πρώτη γνωριμία με τη γραφική παράσταση συνάρτησης και μία πρώτη σύνδεση με τις ρίζες της και κατ' επέκταση ίσως και με το πρόσημό της.

Κύρια καινοτομία της διδακτικής πρότασης αποτελεί καταρχάς η δημιουργία της εφαρμογής - γεννήτορα και λύτη ασκήσεων, αλλά και η εστίαση στην απόκτηση από το μαθητή βασικών δεξιοτήτων ρουτίνας στα μαθηματικά ώστε να αποτελέσουν τη βάση για την πρόσληψη ανώτερων γνώσεων και την κατανόηση συνθετότερων διαδικασιών και εννοιών. Επίσης, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω στο σκεπτικό, θα μπορέσει κάτι τέτοιο να βοηθήσει μαθητές με χαμηλή αυτοπεποίθηση και που έχουν σταματήσει να ασχολούνται με τα μαθηματικά. Μάλιστα, η σκέψη αυτή θα μπορούσε να επεκταθεί και να αποτελέσει το μέρος μίας συνολικότερης διδακτικής πρότασης με αλυσίδα παραδειγμάτων μη στατικών που δημιουργούνται από εφαρμογές-γεννήτορες. Με αυτόν τον τρόπο ο καθηγητής θα μπορεί χρησιμοποιώντας τα εργαλεία αυτά να τα παρουσιάζει στους μαθητές οι οποίοι με τη σειρά τους θα γνωρίζουν ότι θα μπορούν σε δικό τους χρόνο να έχουν στη διάθεσή τους περισσότερα παραδείγματα και μάλιστα λυμένα, ώστε να εξασκούνται μόνοι τους, να επαληθεύουν τις λύσεις τους και τελικά να ελέγχουν το βαθμό αφομοίωσης τους. Ακόμη, με αυτόν τον τρόπο ο καθηγητής θα έχει περισσότερο διδακτικό χρόνο να ασχοληθεί με συνθετότερες διαδικασίες και έννοιες μέσα στο μάθημα.

Καινοτομίες επίσης αποτελούν, όπως αναφέρθηκαν παραπάνω, και

η χρήση της πλατφόρμας MoodleCloud και η ενσωμάτωση του φύλλου εργασίας μέσα στα βήματα εργασιών που περιέχονται,

η ευελιξία στη εξατομικευμένη διαχείριση του χρόνου του μαθητή προκειμένου να ανταποκριθεί στα όσα του ζητούνται,

η δυνατότητα εργασίας σε ομάδες,

η χρήση του λογισμικού GeoGebra προκειμένου να πειραματιστούν οι μαθητές και να ανακαλύψουν τη σύνδεση της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης με τις ρίζες και ίσως κατ’ επέκταση και το πρόσημό της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Σ. Ανδρεαδάκης Β. Κατσαργύρης Σ. Παπασταυρίδης Γ. Πολύζος Α. Σβέρκος Λ. Αδαμόπουλος Χ. Δαμιανού (1991) *Άλγεβρα*, ΙΤΥΕ Διόφαντος.

Γραφική επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού (Φωτόδεντρο) από http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1969

ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Georgia Mylordou

Advanced Media Institute

giorgia4u@hotmail.com

Η εκπαιδευτική ρομποτική αποτελεί ένα νέο σχετικά επιστημονικό κλάδο ο οποίος ασχολείται με την κατασκευή, τον προγραμματισμό και την αξιοποίηση των ρομπότ σε εκπαιδευτικό επίπεδο. Εμπεριέχεται ως διδακτικό αντικείμενο στο μάθημα Σχεδιασμός και Τεχνολογία και αποσκοπεί στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων για την ενίσχυση δραστηριοτήτων υπολογιστικής σκέψης. Η παρούσα εργασία αποτελεί μια διδακτική προσέγγιση στην οποία εμπλέκονται δύο γνωστικά αντικείμενα Μαθηματικά και Σχδιασμός και Τεχνολογία. Η συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση στηρίζεται στη χρήση εκπαιδευτικής ρομποτικής και συγκεκριμένα του εκπαιδευτικού πακέτου Lego Mindstorms EV3 για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΟΡΕΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Είναι γενικά παραδεκτό ότι η σπουδαιότερη διδακτική αρχή για την αποτελεσματική μάθηση είναι η αρχή της αυτενέργειας. Όσο περισσότερο αυτενεργεί ο μαθητής στην προσπάθεια της κατάκτησης της γνώσης ή της καλλιέργειας ικανοτήτων και δεξιοτήτων ή της δημιουργίας θετικών στάσεων, τόσο καλύτερη είναι και η ποιότητα της μάθησής του.

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση έχει εφαρμοστεί κατά τη σχολική χρονιά 2016-2017 σε Στ΄ τάξη και κατά την σχολική χρονιά 2018-2019 σε Ε΄ τάξη. Στο μάθημα Σχεδιασμός και Τεχνολογία γίνεται εισαγωγή του εκπαιδευτικού πακέτου LEGO Mindstorms EV3, όπου τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να φτιάξουν το δικό τους ρομπότ και στη συνέχεια αφού διδαχθούν και εξοικειωθούν με το ανάλογο λογισμικό πακέτο, να προγραμματίσουν το ρομπότ τους για να εκτελεί απλές οδηγίες.

Στο μάθημα Μαθηματικών εφόσον οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με το ανάλογο λογισμικό πακέτο και έχοντας έτοιμα απλά ρομπότ, εργάζονται σε ομάδες (3 ή 4) με στόχο τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών μέσω της διερευνητικής και βιωματικής μάθησης. Κάθε δραστηριότητα θεωρείται αποστολή με απώτερο στόχο την επίλυση ενός γενικότερου προβλήματος. Οι βασικότερες έννοιες που διδάσκονται με τη χρήση της ρομποτικής είναι οι αναλογίες, η μέτρηση αποστάσεων, οι αρνητικοί και θετικοί αριθμοί και η κατανόηση βασικών γεωμετρικών ιδιοτήτων όπως η περίμετρος. Δίνεται επίσης η δυνατότητα και για διαισθητική συνειδητοποίηση σύνθετων φαινομένων όπως η σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα, το χρόνο και τη μετακίνηση.

Τα διδακτικά σενάρια οργανώνονται με τη μορφή ψηφιακών παιχνιδιών, ενώ συνδυάζουν τον εικονικό με τον πραγματικό κόσμο, έχοντας ως αποστολές την εξερεύνηση του πλανήτη Άρη, τον προγραμματισμό ρομπότ για διαστημικές αποστολές ή την χαρτογράφηση συγκεκριμένων οικοπέδων της κυπριακής ΑΟΖ.

Ενδεικτικό απόσπασμα σχέδιου εργασίας

Μαθηματικά Στ΄τάξης (Θέμα: Έννοια συνάρτησης, γραφή γενικού τύπου και γραφική αναπαράσταση)

ΘΕΜΑ: (Ενότητα 10) Έχουν προηγηθεί τα Μαθήματα 8-9 (σελ.89 -97) **ΤΑΞΗ**: Στ΄ **ΧΡΟΝΟΣ**: 40 λεπτά **ΜΕΣΑ – ΥΛΙΚΑ**: 4 Η/Υ, 2 πακέτα Lego Mindstorms EV3, φύλλα εργασίας, τετραγωνισμένο χαρτί, τετράδιο μαθηματικών, **ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ**: μεταβλητές, ανάλογα ποσά, αρνητικοί αριθμοί, εξίσωση, γραφική παράσταση **ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΗ ΓΝΩΣΗ**: Αρνητικοί αριθμοί, διατεταγμένα ζεύγη, μεταβλητές, αναπαραστάσεις σχέσης μεταξύ 2 μεταβλητών	**Δείκτες επιτυχίας** • ***Αλ3.5.*** Αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης ως «ένα-προς-ένα αντιστοιχία» μέσω πινάκων, διαγραμμάτων και γραφικών παραστάσεων. • **Αλ3.6.** Περιγράφουν, αναπαριστούν, επεξηγούν και βρίσκουν τον γενικό τύπο συναρτήσεων. • ***Αλ3.7.*** Αναπαριστούν γραφικά γενικούς τύπους συναρτήσεων. **Στόχοι μαθήματος (προσαρμοσμένοι δείκτες επάρκειας):** ***Οι μαθητές/τριες να:*** *1. Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης ως «ένα-προς-ένα αντιστοιχία» μέσω πινάκων και γραφικών παραστάσεων.* *2. Προγραμματίζουν το ρομπότ να εκτελεί απλές οδηγίες.* *3. Συμπληρώνουν πίνακα με βάση τις μετρήσεις που καταγράφουν από την κίνηση του ρομπότ.* *4. Αναπαριστούν με τη βοήθεια πίνακα γραφικά γενικούς τύπους συναρτήσεων.* *5. Σχεδιάζουν την πραγματική κίνηση ενός ρομπότ - οχήματος με βάση δοσμένη γραφική παράσταση που αναπαριστά τη σχέση μεταξύ του χρόνου και της απόστασης.*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

C. Rogers, M. Portsmore, Bringing engineering to elementary school, J. STEM Educ. 5 (2004) 17–29

Ψαρά Ε. (2016). Εκπαιδευτική ρομποτική και ανάπτυξη υπολογιστικής σκέψης: η επίδραση των ρόλων των μαθητών κατά τη συνεργασία. http://ikee.lib.auth.gr/record/282778/files/GRI-2016-16447.pdf

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΛΑ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ: ΤΑ ΟΦΕΛΗ ΤΗΣ ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ

Δέσποινα Χριστοφόρου, Δήμητρα Πετρουλά

Γυμνάσιο Νάουσας Πάρου

dbchrist_2001@yahoo.gr , petrouladimitra@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Διαπιστώνουμε από τη βιβλιογραφία ότι η διεθνής πρακτική στην ειδική αγωγή κινείται προς την κατεύθυνση της όσο το δυνατόν μεγαλύτερης συμπερίληψης των παιδιών με ειδικές μαθησιακές ανάγκες στην γενική τάξη (Mastropieri et al. 2005· Solis, Vaughn, Swanson & McCulley, 2012· Stylianidou & Nardi, 2019). Αυτή η πρακτική φαίνεται να έχει μεγαλύτερα οφέλη για το σύνολο των μαθητών της τάξης (Friend, Cook, Chamberlain & Shamberger, 2010). Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, το μοντέλο διδασκαλίας το οποίο εξυπηρετεί καλύτερα αυτό το σκοπό είναι αυτό της συνδιδασκαλίας. Ωστόσο, στην Ελλάδα ενώ γίνεται προσπάθεια στήριξης των μαθητών με ειδικές μαθησιακές ανάγκες, πρακτικά δεν εφαρμόζεται το συγκεκριμένο μοντέλο και το ελληνικό σχολείο χαρακτηρίζεται από μια κουλτούρα χαμηλής συνεργατικότητας (Mavropalias & Anastasiou, 2016). Οι μαθητές είτε δέχονται ξεχωριστή διδασκαλία στα τμήματα ένταξης, είτε σε περίπτωση σοβαρής αναπηρίας δέχονται εξατομικευμένη παρέμβαση μέσα στη γενική τάξη με τη μορφή της παράλληλης στήριξης.

ΣΤΟΧΟΣ

Σε αυτή τη διδακτική παρέμβαση, στόχος μας ήταν να διδάσκονται όσο δυνατόν περισσότερες ώρες οι μαθητές ειδικής αγωγής μαζί με τους συμμαθητές τους στη γενική τάξη των μαθηματικών, και όχι χωριστά στο τμήμα ένταξης. Επιπλέον, να επωφεληθούν και οι υπόλοιποι μαθητές από τις πρακτικές προσέγγισης της ειδικής αγωγής και τα πολλαπλά οφέλη που απορρέουν από τη συνεργατική δράση δύο εκπαιδευτικών. Γενικότερα, να ερευνηθούν οι δυνατότητες εφαρμογής πιο σύγχρονων μορφών συνδιδασκαλίας και ενταξιακών πρακτικών στα πλαίσια της συμπερίληψης όλων των μαθητών σε ένα σύγχρονο σχολείο χωρίς αποκλεισμούς.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Εφαρμόσαμε τις εξής τρεις διακριτές μορφές συνδιδασκαλίας κατά περίπτωση: (1) ένας διδάσκει - ένας βοηθάει (one teach - one assist), (2) ένας διδάσκει – ένας παρατηρεί (one teach – one observe) και (3) την ομαδική διδασκαλία (teaming). Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου συνδιδασκαλίας, αλλά και η συχνότητα εφαρμογής αυτής, συναποφασιζόταν από τους διδάσκοντες με βάση τις εκπαιδευτικές ανάγκες όλων των μαθητών και από τις ιδιαιτερότητες του διδακτικού αντικειμένου. Οι ίδιοι παράγοντες καθόριζαν και τον σχεδιασμό των φύλλων εργασιών.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο τέλος της σχολικής χρονιάς δόθηκε στους μαθητές ανώνυμο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης της διδακτικής παρέμβασης. Η πλειοψηφία των μαθητών αξιολόγησε θετικά τη διδασκαλία, δήλωσαν ότι θα ήθελαν να γίνεται σε περισσότερα μαθήματα, ότι βοηθήθηκαν πολύ από την ύπαρξη δύο εκπαιδευτικών στην τάξη και χαρακτήρισαν ως βοηθητικά τα φύλλα εργασιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Friend, M., Cook, L., Chamberlain, D. H., & Shamberger, C. (2010). Co-teaching: An illustration of the complexity of collaboration in special education. *Journal of Educational and Psychological Consultation, 20*(1), 9-27.

Mastropieri, M. A., Scruggs, T., Graetz, J., Norland, J., Gardizi, W., & McDuffie, K. (2005). Case Studies in co-teaching in the content areas: Successes, failures, and challenges. *Intervention in School and Clinic, 40*(5), 260-270.

Mavropalias,T., & Anastasiou, D. (2016). What does the Greek model of parallel support have to say about co-teaching?. *Teaching and Teacher Education, 60,* 224-233.

Solis, M., Vaughn, S., Swanson, E., & McCulley, L. (2012). Collaborative models of instruction: The empirical foundations of inclusion and co-teaching. *Psychology in the Schools, 49*(5), pp.498-510.

Stylianidou, A., & Nardi, E. (2019). Tactile construction of mathematical meaning: Benefits for visually impaired and sighted pupils. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 343-350). South Africa: University of Pretoria.

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ / POSTERS

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΑΙΔΙΑ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΑΝΑΠΗΡΙΕΣ: ΜΙΑ ΚΑΙΝΟΤΟΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ-ΥΠΟΣΤΗΡΙΖΟΜΕΝΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΝΙΑΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Έφη Δαρείου[1], Γιάννης Γεωργίου[2], Άντρη Ιωάννου[2]

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου[1], Cyprus Interaction Lab (ΤΕΠΑΚ)[2]

edario0182@ gmail.com[1]

Η μαθησιακή παρέμβαση αναπτύχθηκε και υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού έργου INTELed (https://www.inteled.org). Η παρέμβαση αξιοποιεί καινοτόμα εκπαιδευτικά εργαλεία και τεχνολογίες ενσώματης μάθησης, μέσω των οποίων αναμένεται να δημιουργηθούν μαθησιακές ευκαιρίες, ώστε να προωθηθεί η ενεργός εμπλοκή ΟΛΩΝ των παιδιών, με ή χωρίς αναπηρίες, στις μαθησιακές δραστηριότητες. Οι επιμέρους διδακτικοί στόχοι είναι: (α) η κατάκτηση και εμπέδωση βασικών πυρηνικών εννοιών της γεωμετρίας όπως γωνίες, τρίγωνα, πολύγωνα και οι ιδιότητες αυτών·
(β) η επίλυση προβλήματος μέσω του προγραμματισμού· (γ) η ενεργός εμπλοκή όλων των παιδιών· (δ) η καλλιέργεια δεξιοτήτων του 21ου αιώνα.

Η παρούσα μαθησιακή παρέμβαση, διάρκειας 80 λεπτών, αποτελεί μια εναλλακτική πρόταση για τη διδασκαλία της ενότητας «Γεωμετρία» του Αναλυτικού Προγράμματος των τάξεων Δ΄, Ε΄ και Στ΄ της Δημοτικής Εκπαίδευσης, προσφέροντας στους μαθητές μια μοναδική ευκαιρία να βιώσουν τον κόσμο των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας μέσα από μια παιγνιώδη και διασκεδαστική εμπειρία ενσώματης μάθησης. Τα παιδιά εργάζονται αυτόνομα, σε ομάδες μεικτών ικανοτήτων, σε τέσσερις μαθησιακούς σταθμούς, τους οποίους επισκέπτονται και στους οποίους δραστηριοποιούνται διαδοχικά: (α) «Λύσε το γρίφο με Engino»· (β) «Robot Mouse Bingo»· (γ) «Διαδρομές Blue-bots»· (δ) «Γωνιογνώστες».

Η παρούσα μαθησιακή παρέμβαση, σύμφωνα με την ανάλυση αρχικών και τελικών διαγνωστικών δοκιμίων που χορηγήθηκαν στα παιδιά, φαίνεται να έχει πολλαπλά οφέλη στην ακαδημαϊκή, συναισθηματική και κοινωνική τους ανάπτυξη. Η εκπαιδευτική συνεισφορά της παρέμβασης έγκειται στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών σε ετερογενείς σχολικές τάξεις, όπου συνυπάρχουν παιδιά με και χωρίς αναπηρίες, ενώ η κοινωνική συμβολή της, έγκειται στην προώθηση της κοινωνικής ένταξης ατόμων με αναπηρίες, ενισχύοντας ικανότητες και κοινωνικές δεξιότητες, ώστε να ενσωματωθούν ομαλότερα στην κοινωνία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΦΙΑ

Abrahamson, D., & Bakker, A. (2016). Making sense of movement in embodied design for mathematics learning. *Cognitive research: principles and implications*, *1*(1), 33.

Becker, K. (2005). How are games educational? Learning theories embodied in games.

Burte, H., Gardony, A. L., Hutton, A., & Taylor, H. A. (2017). Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training. *Cognitive Research: Principles and Implications*, *2*(1), 13.

Georgiou, Y., & Ioannou, A. (2019). Embodied learning in a digital world: a systematic review of empirical research in K-12 education. In *Learning in a Digital World* (pp. 155-177). Springer, Singapore.

Hutto, D. D., Kirchhoff, M. D., & Abrahamson, D. (2015). The enactive roots of STEM: Rethinking educational design in mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(3), 371-389.

Martínez-Monés, A., Villagrá-Sobrino, S., Georgiou, Y., Ioannou, A., & Ruiz, M. J. (2019, June). The INTELed pedagogical framework: Applying embodied digital apps to support special education children in inclusive educational contexts. In *Proceedings of the XX International Conference on Human Computer Interaction* (p. 35). ACM.

Silva, M. J., Ferreira, E., Andrade, V., Nunes, O., & da Luz Carvalho, M. (2015, November). Embodied education: Senses, emotions, and technology. In *2015 International Symposium on Computers in Education (SIIE)* (pp. 32-37). IEEE.

Skulmowski, A., Pradel, S., Kühnert, T., Brunnett, G., & Rey, G. D. (2016). Embodied learning using a tangible user interface: The effects of haptic perception and selective pointing on a spatial learning task. *Computers & Education*, *92*, 64-75.

Stolz, S. A. (2015). Embodied learning. *Educational philosophy and theory*, *47*(5), 474-487.

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ «ΓΩΝΙΟΓΝΩΣΤΕΣ»: ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΜΕΣΩ ΕΝΣΩΜΑΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Αλεξία Αλεξάνδρου[1], Ζωή Καουρή[2], Νεόφυτος Νεοφυτίδης[3]

[1]Δημοτικό Σχολείο Ανάγειας, [2]Θ΄Δημοτικό Σχολείο Λεμεσού (Κ.Α΄), [3]Δ΄Δημοτικό Σχολείο Λεμεσού (Κ.Β΄)

[1]alexia2412@gmail.com,[2]kaouri.zoi@gmail.com, [3]neophytos.neophytides@gmail.com

ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΣΩΜΑΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η ενσώματη μάθηση είναι μια κιναισθητική, συλλογική και βιωματική διαδικασία μάθησης η οποία απαιτεί τη συμμετοχή του σώματος. Αυτό το θεωρητικό πλαίσιο υποστηρίζει την αδιάσπαστη σχέση μεταξύ εγκεφάλου, σώματος και περιβάλλοντος (Antle, 2013; Kosmas, Ioannou, & Retalis, 2018). Η ανάπτυξη τη πληροφορικής έχει κυρίαρχο ρόλο στη δημιουργία δραστηριοτήτων που βασίζονται στην ενσώματη μάθηση (Enyedy, Danish & DeLiema, 2015).

Ψηφιακή εφαρμογή «Γωνιογνώστες»

Η εφαρμογή της ενσώματης μάθησης σε ψηφιακά διαδραστικά περιβάλλοντα μπορεί να δώσει δυνατότητες να κατανοηθούν αφηρημένες έννοιες. Η κάμερα Kinect είναι το εργαλείο το οποίο αξιοποιήθηκε στην ψηφιακή εφαρμογή «Γωνιογνώστες»[1]. Με την εφαρμογή αυτή οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τις γωνίες, φτιάχνοντας με το σώμα τους τα είδη των γωνιών.

Διδακτικές παρεμβάσεις

Στο πλαίσιο του προγράμματος INTELed, διοργανώθηκε μια σειρά επιμορφωτικών σεμιναρίων προς εκπαιδευτικούς. Σε αυτά συμμετείχαν οι συγγραφείς της εργασίας αυτής. Έτσι, αφού ενημερώθηκαν σχετικά, ετοίμασαν και υλοποίησαν σχέδια μαθήματος αξιοποιώντας την ψηφιακή εφαρμογή «Γωνιογνώστες».

Πριν την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης πραγματοποιήθηκε το προπειραματικό δοκίμιο. Μια μέρα μετά την παρέμβαση δόθηκε το μεταπειραματικό δοκίμιο. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των δοκιμίων, η επίδοση των μαθητών βελτιώθηκε μετά τη διδακτική παρέμβαση.

1. "This work is part of the INTELed Project [INnovative Training via Embodied Learning and multi-sensory techniques for inclusive Education] (Project 2017-1-CY01-KA201-026733), which is co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union". (https://www.inteled.org/)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Antle, A. N. (2013). Research opportunities: Embodied child-computer interaction. International Journal of Child-Computer Interaction, 1(1), 30–36. https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2012.08.001.

Enyedy, N., Danish, J. A., & DeLiema, D. (2015). Constructing liminal blends in a collaborative augmented-reality learning environment. International Journal of

Computer-Supported Collaborative Learning, 10(1), 7–34. https://doi.org/10.1007/s11412-015-9207-1.

Kosmas, P., Ioannou, A., & Retalis, S. (2018). Moving bodies to moving minds: A study of the use of motion-based games in special education. TechTrends, 1–8. https://doi.org/10.1007/s11528- 018-0294-5.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΠΟ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΑΣΗΣ

Ανδριανή Νικολάκου, Αναστασία Μπλιούμη

ΕΚΠΑ

adriani@otenet.gr, anasblio35@gmail.com

Η παρούσα μελέτη διερευνά την ερμηνεία της μαθηματικής έννοιας του Ανοιχτού Συνόλου (Α.Σ) από τη θέαση φοιτήτριας (Χ), τελειόφοιτης Μαθηματικού Τμήματος με προβλήματα όρασης. Για τα άτομα με προβλήματα όρασης, εξέχοντα ρόλο στη γνωστική επεξεργασία κατέχει η απτική αντίληψη που σχετίζεται με την αντιστάθμιση (Nardi et. al., 2018). Τα δεδομένα προέκυψαν μέσα από μια σειρά συνεντεύξεων με την Χ στηριζόμενη στα παρακάτω έργα: να αποδώσει λεκτικά τον ορισμό, να περιγράψει πώς «βλέπει» την έννοια, να γράψει τον τυπικό ορισμό με τη χρήση της γραφομηχανής Braille, να αναπαραστήσει με το χέρι της ερευνήτριας την εικόνα του ανοικτού συνόλου και να τη σχεδιάσει με το 3D pen. Τα αποτελέσματα έδειξαν την νοερή εικόνα του Α.Σ ως κυκλικό δίσκο με «κουκίδες όσο πιο κοντά προς την περιφέρεια χωρίς να περιέχονται σ' αυτή. Όποια κουκκίδα κι αν επιλέξεις με κέντρο x και οσοδήποτε μικρή ακτίνα να έχει, θα περιέχεται μέσα στο Α- και όχι στην περιφέρεια». Η φοιτήτρια φθάνει στον ορισμό σταδιακά, δημιουργώντας η ίδια νοερές εικόνες: «Διαβάζω αρκετές φορές τον ορισμό σιγά-σιγά φτιάχνω εικόνα. Η απτική εικόνα από την άλλη, δεν είναι κάθε φορά αναγκαία ... θέλω να φτιάξω τη δική μου εικόνα κι όχι να μου παρέχεται έτοιμη». Στο πλαίσιο της αναπαράστασης της εικόνας συνέκρινε τη νοερή της εικόνας που κατείχε έως τώρα με τον ορισμό του Α.Σ δείχνοντας μια μορφή αντιστάθμισης όπου εν τέλει διαπιστώνεται η ασυμβατότητα, καθώς εντοπίζει ότι η απεικόνιση των απείρων σημείων δεν είναι επιτεύξιμη: «Θέλω στην περιφέρεια να έχει συνεχείς κουκκίδες που ασυμπτωτικά να πηγαίνουν στην περιφέρεια. Θέλω να το γεμίσω κι άλλο εδώ γιατί έχει κενό ...για να φανεί ότι έχει άπειρα ... αυτό είναι το καλύτερο που μπορώ να σχηματίσω». Η Χ. είχε τη δυνατότητα να ερμηνεύσει με τους προαναφερόμενους τρόπους τον αλγεβρικό ορισμό του Α.Σ αλλά η ίδια έκρινε πως δεν επετεύχθη η γεωμετρική απεικόνιση του Α.Σ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Nardi, E., Healy, L., Biza, I., & Hassan Ahmad Ali Fernandes, S. (2018). 'Feeling' the mathematics of disabled learners: Supporting teachers towards attuning and resignifying in inclusive mathematics classrooms. In R. Hunter, M. Civil, B. Herbel-Eisenmann, N. Planas, & D. Wagner (Eds.), *Mathematical Discourse that Breaks Barriers and Creates Space for Marginalized Learners* (pp. 147-170). Sense Publishers.

ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

Ματθαίος Αντωνόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
m.antonopoulos@outlook.com

ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το άπειρο είναι μία σύνθεση της φιλοσοφίας, των μαθηματικών και της φυσικής και αποτελεί συστηματικά αντικείμενο μελέτης μέσα στους χρόνους. Ο πραγματικός κόσμος, είναι πεπερασμένος και γι' αυτό δεν υπάρχουν αφορμές για συζητήσεις για το άπειρο, τη στιγμή που οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν πράγματα όταν βασίζονται στις προηγούμενες εμπειρίες τους (Monaghan 2001, Jirotková and Littler 2004).

Οι αντιλήψεις των μαθητών αφορούν τις περισσότερες φορές στο εν δυνάμει ή δυνητικό άπειρο, δηλαδή στο άπειρο ως διαδικασία, ενώ πολύ λιγότερες στο πραγματικό άπειρο (Monaghan, 2001). Η έννοια του απείρου έχει αντιφατική φύση, καθώς έρχεται αντιμέτωπη με τα νοητικά μας σχήματα ταοποία έχουν προσαρμοστεί σε έναν πεπερασμένο κόσμο (Fischbein et al. 1979).

Στα περισσότερα σχολικά βιβλία των μαθηματικών η έννοια του απείρου, ενώ υπεισέρχεται σε αρκετά θέματα, δε φαίνεται να γίνεται αντικείμενο μελέτης και η λέξη άπειρο φαίνεται να αποκρύπτεται ή να αποφεύγεται. Επομένως, η διαισθητική προσέγγιση εννοιών του Απειροστικού Λογισμού σε μικρότερες ηλικίες θα βοηθούσε τόσο στην αντιμετώπιση των προβλημάτων, όσο και γενικότερα στην επίτευξη των στόχων που τίθενται κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία.

Συνεπώς, στη διδακτορική μου έρευνα μελετώ τις διαισθητικές αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια του απείρου. Ειδικότερα, επιχειρείται μια σύγκριση των κυρίαρχων αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του απείρου καθώς και η διερεύνηση των αιτιών που τις διαμορφώνουν.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τα βασικά ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης είναι τα ακόλουθα:

1. Ποιες αντιλήψεις διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης και ποιες είναι οι αιτίες που οδηγούν σε αυτές;
2. Ποιες διαφοροποιήσεις προκύπτουν στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης;
3. Υπάρχει αναπτυξιακή πορεία στην αντίληψη της έννοιας κατά τη διάρκεια των σχολικών σπουδών και, αν υπάρχει, ποια είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την έρευνα θα γίνει συνδυασμός ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας. Σε πρώτο στάδιο θα δοθούν ερωτηματολόγια σε μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, της Γ' Γυμνασίου και της Γ' Λυκείου. Αφού γίνει μελέτη των απαντήσεων και με βάσει κάποια αρχική κατηγοριοποίηση των απαντήσεων θα γίνει μία σειρά προσωπικών συνεντεύξεων σε μαθητές που θα επιλεγούν. Παράλληλα θα γίνει προσπάθεια να δημιουργηθεί ένα πλαίσιο ανάλυσης των διαισθητικών αντιλήψεων των μαθητών. Στόχος είναι η ανάδειξη των κυρίαρχων αντιλήψεων για το άπειρο σε διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης, η σύγκριση αυτών και η διερεύνηση των αιτιών που τις διαμορφώνουν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*,*10*, 3-40

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 239-257

Jirotkova, D. & Littler, G. (2004). Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 97–104.

ΕΙΚΟΝΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Βασιλεία Πιννίκα, Φραγκίσκος Καλαβάσης, Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος

Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

psed15003@aegean.gr, kalabas@aegean.gr, amoutsiosrentzos@aegean.gr

Η παρούσα εργασία αξιοποιεί και διευρύνει επιμέρους αποτελέσματα διδακτορικής διατριβής, στην οποία η *εικόνα* των Μαθηματικών εννοιοποιείται ως ένα τετραδιάστατο σύστημα θυμικού (*affective system*) που αναδύεται στη σύνθεση σχέσεων μεταξύ πεποιθήσεων (Ernest, 2008), αξιών (Bishop, 2001), στάσεων και προσδοκιών (Di Martino & Zan, 2003· Rosenthal & Jacobson, 1968).

Η διατριβή, υπό το πρίσμα της Συστημικής Θεωρίας, ερευνά την ποικιλία *εικόνων* για τα Μαθηματικά σε δομές της Ειδικής Εκπαίδευσης (Ειδ.Εκπ.), ως μάθημα και ως κοινωνικό προϊόν. Ισχυριζόμαστε ότι οι εικόνες για τα Μαθηματικά στην Ειδ.Εκπ. συνδιαμορφώνονται σε τρεις πραγματικότητες: το *θεσμικό πλαίσιο*, την *ερευνητική βιβλιογραφία* και το πεδίο των *πρωταγωνιστών*. Στις δομές περιλαμβάνουμε το Ειδικό Σχολείο, το Τμήμα Ένταξης, και την Παράλληλη Στήριξη, καθώς σε αυτά προσλαμβάνονται κατά προτεραιότητα ειδικοί εκπαιδευτικοί (Ν.3699/2008). Ο ερευνητικός σχεδιασμός της διατριβής ακολουθεί την μεθοδολογία της Εκπαιδευτικής Μηχανικής και αποτελείται από τέσσερις φάσεις: την κατασκευή ερευνητικού ερωτηματολογίου, την ανάλυση περιεχομένου στα τεκμήρια ερευνητικής και θεσμικής προέλευσης και τη συμπλήρωση ερωτηματολογίου από τους πρωταγωνιστές της εκπαίδευσης.

Στην παρούσα εργασία επικεντρωνόμαστε στις εικόνες για τα Μαθηματικά που σχηματίζονται στο θεσμικό πλαίσιο και την ερευνητική βιβλιογραφία που αφορά το Ειδικό Νηπιαγωγείο και Δημοτικό. Πραγματοποιήθηκε ανάλυση περιεχομένου και θεματική ανάλυση για την ανάδειξη των τεσσάρων διαστάσεων του συστήματος στα δυο πεδία: αφενός στον Ν.3699/2008, στο αναλυτικό πρόγραμμα της Ειδικής Αγωγής (Π.Α.Π.Ε.Α.), στο ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (Α.Π.) και στα σχολικά εγχειρίδια Πρωτοβάθμιας και τα αντίστοιχα προσαρμοσμένα, και αφετέρου στα τεκμήρια από τις διαγνωστικές διαδικασίες στις οποίες αξιολογείται το νοητικό και μαθησιακό επίπεδο του παιδιού, και σε δημοσιευμένα άρθρα σε επιστημονικά περιοδικά της Διδακτικής των Μαθηματικών (Δ.τ.Μ.).

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φαίνεται ότι κυρίαρχο ρόλο στα περισσότερα στοιχεία των δύο πραγματικοτήτων φαίνεται να έχει η *αξία του ελέγχου* και οι *μαθησιακές ικανότητες*. Ειδικότερα, στα σχολικά εγχειρίδια, στα Α.Π., και στα διαγνωστικά εργαλεία που επικεντρώνονται σε δυσκολίες στα Μαθηματικά υπάρχει μεγαλύτερη ποικιλία στη σύνθεση της εικόνας. Προκύπτει *ποικιλία εικόνων* για τα Μαθηματικά, η οποία λειτουργεί σε *παράλληλες πραγματικότητες*, στις οποίες η έλλειψη ορισμένων όψεων από τις τέσσερις διαστάσεις που συγκροτούν την εκάστοτε εικόνα φαίνεται να αναπληρώνεται από την εικόνα στις άλλες πραγματικότητες. Η προοπτική της συνεκπαίδευσης θα πρέπει να λάβει υπόψη τις συστημικές αλληλεπιδράσεις αυτών των αποσιωπημένων αλληλοεπικαλύψεων.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας» (MIS-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bishop, A. (2001). What values do you teach when you teach mathematics? Στο P. Gates (Επιμ.), *Issues in Mathematics Teaching* (σσ. 93–104). London: RoutledgeFalmer.

Di Martino, P., & Zan, R. (2003). *What does 'positive' attitude really mean? 4*, 451–458. Honolulu.

Ernest, P. (2008). What does the new philosophy of mathematics mean for mathematics education? *25ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας: Η Μαθηματική Εκπαίδευση και η σύνθετη πραγματικότητα του 21ου αιώνα*, 60–91. Βόλος: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Rosenthal, R., & Jacobson, L. F. (1968). *Teachers expectations for the disadvantaged*. *218*(4), 19–23.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Bozena Maj-Tatsis, Κωνσταντίνος Τάτσης, Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος

University of Rzeszow, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

bmaj@ur.edu.pl, ktatsis@uoi.gr, amoutsiosrentzos@aegean.gr

Λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία της κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς σχεδιάσαμε μια εκπαιδευτική παρέμβαση διάρκειας 11 εβδομάδων. Η παρέμβαση υλοποιήθηκε στο Πανεπιστήμιο του Ζέσουφ (Rzeszow) στην Πολωνία, στο πλαίσιο προπτυχιακού μαθήματος που απευθύνεται σε τριτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Η παρέμβαση συνίστατο σε σειρά εργαστηρίων κατασκευής προβλημάτων και σε ομάδα εστίασης, καθώς και σχεδιασμό και εφαρμογή διδασκαλιών με ενσωμάτωση της κατασκευής προβλήματος σε πραγματικές τάξεις κατά τη διάρκεια της πρακτικής άσκησης. Τα συλλεχθέντα δεδομένα περιελάμβαναν βιντεοσκοπήσεις των εργαστηρίων, ερωτηματολόγια διερεύνησης διάφορων όψεων συναισθηματικής σχέσης με τα μαθηματικά, βιντεοσκόπηση της ομάδας εστίασης, και προσωπικές καταγραφές από τους φοιτητές. Στην παρούσα αναρτημένη εργασία επικεντρωνόμαστε σε δύο βασικούς ερευνητικούς άξονες: α) τη διερεύνηση της εξέλιξης των στάσεων και των αντιλήψεων των συμμετεχόντων όσον αφορά στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους, και β) τη διερεύνηση των τρόπων εφαρμογής της κατασκευής προβλήματος κατά τη διάρκεια της πρακτικής άσκησης των συμμετεχόντων. Μετά το πέρας της εκπαιδευτικής παρέμβασης, παρατηρήθηκε μια προσωρινή μεταβολή στις στάσεις και τις αντιλήψεις των φοιτητών για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Ενδιαφέρον εύρημα συνιστά ο βαθμός αποδοχής της κατασκευής προβλήματος από τους φοιτητές, καθώς και η αντιμετώπισή της ως μια δημιουργική (Silver, 1997) και ιδιαίτερα σημαντική διδακτική διαδικασία. Ένα ζήτημα που απασχόλησε ιδιαίτερα τους φοιτητές στην ομάδα εστίασης ήταν η καταλληλότητα των κατασκευασμένων προβλημάτων, σε σχέση με το βαθμό δυσκολίας τους, αλλά και με τη διασύνδεσή τους με το αναλυτικό πρόγραμμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem posing and problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29*(3), 75-80.

ΣΤΑΣΕΙΣ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ WHAT-IF-NOT

Μαρία Κατωγιάννη[1], Κωνσταντίνος Τάτσης[1], Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος[2]

[1]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, [2]Πανεπιστήμιο Αιγαίου

mkatog@yahoo.gr, ktatsis@uoi.gr, amoutsiosrentzos@aegean.gr

Η κατασκευή προβλήματος, ιδιαίτερα σε συνδυασμό με την επίλυση προβλήματος, αποτελεί μια από τις σημαντικότερες διαδικασίες των μαθηματικών, αλλά και της μαθηματικής εκπαίδευσης (Brown & Walter, 1983). Αυτό οδηγεί στην ανάγκη εκπαίδευσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών στις συγκεκριμένες διαδικασίες. Επιπλέον, η σύγχρονη έρευνα αναδεικνύει τη σημασία της θετικής στάσης και της αυτοπεποίθησης στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Goldin et al., 2016). Με βάση τα προηγούμενα, σχεδιάστηκε μια έρευνα με στόχο τη διερεύνηση της επίδρασης της κατασκευής προβλήματος στις στάσεις 78 πρωτοετών φοιτητών και φοιτητριών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων απέναντι στα μαθηματικά. Επιπλέον, διερευνήθηκε η συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης τους σε εισαγωγικό μάθημα μαθηματικών και των στάσεών τους απέναντι στα μαθηματικά και τέλος αν οι στάσεις αυτές σχετίζονται με το πλήθος των προβλημάτων που κατασκεύασαν. Η παρέμβαση ξεκίνησε με παρουσίαση της στρατηγικής “what-if-not” («τι θα συνέβαινε εάν δεν…»· Lavy & Bershadsky, 2003). Στη συνέχεια δόθηκαν δύο προβλήματα από το βιβλίο της ΣΤ΄ Δημοτικού και οι φοιτητές διατύπωσαν, με χρήση της συγκεκριμένης στρατηγικής, δύο προβλήματα για το κάθε αρχικό πρόβλημα. Πριν και μετά την παρέμβαση, καταγράφηκαν οι στάσεις σύμφωνα με το ερωτηματολόγιο ATMI (Attitudes Toward Mathematics Inventory· Tapia & Marsh, 2004), το οποίο αποτελείται από 40 ερωτήσεις, οι οποίες αναγνωρίζουν τέσσερις διαστάσεις: ευχαρίστηση, κίνητρο, αξία, αυτοπεποίθηση. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης φανέρωσαν την μη στατιστικώς σημαντική διαφοροποίηση στις στάσεις των φοιτητών και των φοιτητριών πριν και μετά την παρέμβαση. Οι σχέσεις επίδοσης με τις στάσεις, καθώς και των στάσεων με το πλήθος κατασκευασμένων προβλημάτων διερευνώνται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing.* Philadelphia, Pa: Franklin Institute Press.

Goldin, G. A., Hannula, M. S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Middleton, J. A., Pantziara, M., & Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education*. Springer Open. Διαθέσιμο στο: https://doi.org/10.1007/978-3-319-32811-9_1

Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" strategy in solid geometry - a case study. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*, 369-387.

Tapia, M., & Marsh, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly, 8*, 16-21.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΑΛΙΤΣΑ: ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΚΑΙ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ

Βασσιλική Αλεξάνδρου – Λεωνίδου

Α’ Δημοτικό Σχολείο Δαλίου

leo_vasso_leonidou@cytanet.com.cy

Το Σχολείο συμμετέχει σε ευρωπαϊκό πρόγραμμα Erasmus+ με τίτλο: Mathematics for the million (2017-1-UK01-KA201-036545). Ένας από τους στόχους του έργου είναι η ενεργοποίηση της οικογένειας στη μάθηση και εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων των μαθητών μας στην καθημερινή ζωή. Το εκπαιδευτικό προσωπικό του Σχολείου σχεδίασε δραστηριότητες που απαιτούσαν την ενεργό συμμετοχή και συνεργασία των γονέων/αδελφών/παππούδων των μαθητών εντός και εκτός του σπιτιού. Οι δραστηριότητες γίνονταν εκτός σχολικού χρόνου. Παρατηρήθηκε έντονο ενδιαφέρον τόσο από μαθητές όσο και από την οικογένεια για τη συμμετοχή τους στις δραστηριότητες, αλλά και στο μάθημα των μαθηματικών γενικότερα.

ΣΤΟΧΟΣ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Η μαθηματική βαλίτσα περιλάμβανε πέντε δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν με στόχο να καλλιεργήσουν τις δεξιότητες των παιδιών στους νοερούς υπολογισμούς (πρόσθεσης και αφαίρεσης), στην εκτίμηση μεγεθών και ποσοτήτων και να απολαύσουν τα μαθηματικά μέσα από άτυπες προσεγγίσεις. Περιλάμβανε παιχνίδια και καρτέλες για έρευνα τιμών σε υπεραγορά.

Τα σχόλια από τις οικογένειες ήταν πολύ θετικά.

Κάποια παιδιά έγραψαν:

Μ1: Η ιδέα του σακιδίου Μαθηματικών ήταν πολύ καλή, γιατί παίξαμε όλη η οικογένεια μαζί και εξασκηθήκαμε στα Μαθηματικά.

Μ2: Καταπληκτική η ιδέα του σακιδίου. Συμμετείχε όλη η οικογένεια και το χαρήκαμε πολύ!

Κάποιος γονέας έγραψε για τα συναισθήματα του παιδιού του:

Γ1: Ενθουσιασμός, πρόθεση να εξηγήσει και να οργανώσει παιχνίδια, απόλαυση, τρόπος να προβάλει τις δεξιότητες και γνώσεις του σε εμάς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Stenmark, J. K., Thompson, V. & Cossey, R. (1986). *Family Math*. California, U.S.A.: Lawrence Hall of Science.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΠΡΟΩΘΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΙΣΟΤΗΤΑ, ΤΗ ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΨΗ, ΚΑΙ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΔΙΚΑΙΟΣΥΝΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κωνσταντίνος Ξενοφώντος

University of Stirling, Ηνωμένο Βασίλειο constantinos.xenofontos@stir.ac.uk

Το πρόγραμμα «Promoting equity, inclusion, and social justice in Scottish mathematics classrooms: Early years, primary, and secondary teachers' perspectives» χρηματοδοτείται από το Carnegie Trust for the Universities of Scotland και έχει διάρκεια ένα χρόνο (1η Σεπτεμβρίου 2019 - 31η Αυγούστου 2020). Στη Σκωτία, πρόσφατες πολιτικές δράσεις τονίζουν τη σημασία στήριξης των παιδιών που ζουν σε δυσμενείς οικονομικές συνθήκες, ειδικά σε ό,τι αφορά την καλλιέργεια του γλωσσικού και του μαθηματικού εγγραμματισμού (Education Scotland, 2018/2019· Scottish Government, 2018). Επιπλέον, επισημαίνεται η ανάγκη γεφύρωσης της μετάβασης από τη μια σχολική βαθμίδα στην άλλη, κυρίως για τα παιδιά από χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα (Scottish Government, 2016). Στο πρόγραμμα εξετάζονται τα εξής:

1. Πώς οι εκπαιδευτικοί στην προδημοτική, τη δημοτική και τη μέση εκπαίδευση βλέπουν τους μαθητές από χαμηλά οικονομικά στρώματα σε σχέση με το μάθημα των μαθηματικών;
2. Ποιες είναι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη σχέση εννοιών όπως η ισότητα, η συμπερίληψη, και η κοινωνική δικαιοσύνη και των σχολικών μαθηματικών;
3. Ποιες πρακτικές θεωρούνται αποτελεσματικές από τους εκπαιδευτικούς για τη γεφύρωση του χάσματος επιδόσεων στα μαθηματικά;

Αναμένεται να διεξαχθούν 45 συνεντεύξεις, με 15 εκπαιδευτικούς από κάθε βαθμίδα (προδημοτική, δημοτική, μέση). Οι συνεντεύξεις θα βασίζονται στα πιο πάνω ερωτήματα και θα λάβουν χώρα στα σχολεία των εκπαιδευτικών. Έμφαση θα δοθεί σε εκπαιδευτικούς που εργάζονται στην κεντρική ζώνη της Σκωτίας, καθώς η συγκεκριμένη περιοχή, σύμφωνα με το Scottish Index of Multiple Deprivation, έχει τα υψηλότερα ποσοστά κατοίκων που ζουν κάτω από το όριο της φτώχειας.

Τα αποτελέσματα θα κοινοποιηθούν στα πανεπιστήμια της Σκωτίας που προσφέρουν προγράμματα κατάρτησης εκπαιδευτικών, τα δημοτικά συμβούλια (councils) της χώρας, και στο Κοινοβούλιο της Σκωτίας. Σε επόμενη φάση, τα αποτελέσματα θα αποτελέσουν τη βάση για σχεδιασμό προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών, το οποίο θα εξετάζει τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών υπό το πρίσμα της ισότητας, της συμπερίληψης, και της κοινωνικής δικαιοσύνης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Education Scotland (2018/2019). Scottish Attainment Challenge. Πρόσβαση μέσω: https://education.gov.scot/improvement/learningresources/Scottish%20Attainment%20Challenge

Scottish Government (2016). Transforming Scotland into a maths positive nation: final report of the Making Maths Count group. Πρόσβαση μέσω https://www.gov.scot/publications/transforming-scotland-maths-positivenation-final-report-making-mathscount/pages/4/

Scottish Government (2018). National Improvement Framework and Improvement Plan for Scottish Education: Achieving Excellence and Equity. Πρόσβαση μέσω https://www.gov.scot/binaries/content/documents/govscot/publications/report/2017/12/2018-nationalimprovement-framework-improvementplan/documents/00528872-pdf/00528872-pdf/govscot%3Adocument

MATHEMATICS FOR THE MILLION: MATHEMATICS FOR MY WORLD (M4TM)

Θέκλα Αφαντίτη Λαμπριανού

Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

theklaafantiti@hotmail.com

Το συγκεκριμένο Πρόγραμμα έχει χρηματοδοτηθεί από το πλαίσιο του ERASMUS+, Key Action 2 (2017-2020) και έχει σκοπό την ανάπτυξη και την αξιολόγηση καλών πρακτικών στις σχολικές μονάδες, καθώς και την ενίσχυση της αυτο-εκτίμησης και στήριξη της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών σε σχέση με το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών και συγκεκριμένα με την ενότητα των «Αριθμών». Το πρόγραμμα θα εμπλέξει τρεις πληθυσμούς, τους/τις εκπαιδευτικούς, τους/τις μαθητές/μαθήτριες και τους γονείς τους. Ο ευρύτερος σκοπός του είναι να διερευνηθεί και να απαλειφθεί (εάν γίνεται) η αρνητική στάση (mindset) (Dweck, 2017) ως προς τις σχετικές δυσκολίες με τα Μαθηματικά. Θα επιδιωχθεί η ανάπτυξη των γνώσεων και των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών, καθώς και της αυτοπεποίθησής τους, με τον σχεδιασμό επιμόρφωσης αριθμών εκπαιδευτικών από κάθε σχολική μονάδα/εταίρο και διάχυση των νέων γνώσεων στους/στις συναδέλφους/συναδέλφισσές τους.

Στο Πρόγραμμα αυτό συμμετέχουν 10 εταίροι από 6 ευρωπαϊκές χώρες (Κύπρος, Αγγλία, Ισπανία, Λιθουανία, Ουγγαρία και Δανία). Ο κάθε εταίρος/σχολική μονάδα θα αναπτύξει το δικό του σχέδιο δράσης (Elliot, 1991· Schon, 1983) με βάση τις ανάγκες των μαθητών/τριών ηλικίας 10 ετών (για την Κύπρο Δ΄ τάξη Δημοτικού) και θα επιχειρηθεί η εφαρμογή καλών πρακτικών που να συνδέουν τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή και τα επαγγέλματα (διεπιστημονική προσέγγιση και εμπλοκή των γονέων στη διδασκαλία), λαμβάνοντας υπόψη τα διαφορετικά επίπεδα μάθησης. Για την αξιολόγηση της όλης παρεμβατικής προσπάθειας θα κατασκευαστούν ερωτηματολόγια για να διερευνηθούν οι απόψεις των εκπαιδευτικών, των μαθητών/τριών και των γονέων τους σχετικά με το σχέδιο δράσης.

Τα τελικά προϊόντα του προγράμματος είναι η παραγωγή «αληθινών ιστοριών» γονέων που έχουν αλλάξει την αρνητική τους στάση σε σχέση με τα Μαθηματικά, μετά από διερεύνηση και εμπλοκή τους στις σχολικές δραστηριότητες, η κατασκευή ενός τριπτύχου που να περιγράφει το σχέδιο δράσης της κάθε σχολικής μονάδας, τα αποτελέσματα και τον αναστοχασμό των εκπαιδευτικών για βελτίωσή του και η συγκέντρωση των καλών πρακτικών από τις διάφορες σχολικές μονάδες των 6 χωρών που λαμβάνουν μέρος στο Πρόγραμμα.

Η πρωτοτυπία του Προγράμματος έγκειται 1.) στη σύνδεση της διδασκαλίας με την εμπλοκή της ευρύτερης σχολικής κοινότητας (π.χ. εμπλοκή γονιών), 2.) στη διεύρυνση της αξίας των Μαθηματικών σε ένα μεγαλύτερο εύρος επαγγελμάτων 3.) στις καινοτόμες, μαθητοκεντρικές προσεγγίσεις της διδασκαλίας των

Μαθηματικών και 4.) στην ενδυνάμωση των εκπαιδευτικών με την εμπλοκή σχεδίου δράσης για τη βελτίωση των διαγνωσμένων μαθησιακών αναγκών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Dweck, C. (2017). *Mindset. Changing the way you think to fulfil your potential.* London: Robinson. ISBN: 978-1-47213-996-2

Elliot, J. (1991). *Action Research for Educational Change.* Milton Keynes: Open University Press.

Schon, D. (1983). *The Reflective Practitioner*. New York: Basic Books.

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΤΗΤΑ, ΘΕΛΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΞΙΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΜΕ ΔΙΕΡΩΤΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ: ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ MASDIV

Ελένη Παπαγεωργίου, Παυλίνα Χατζηθεοδούλου, Χριστίνα Σιδερά, Γιώργος Τσαλακού

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

papageorgiou.e@cyearn.pi.ac.cy, hadjitheodoulou.p@cyearn.pi.ac.cy, sidera.chr@cyearn.pi.ac.cy, tsalakos.g@cyearn.pi.ac.cy

Το πρόγραμμα MASDIV (supporting **MA**thematics and **S**cience Teachers in addressing **Di**versity and promoting fundamental **V**alues) εντάσσεται στη Δράση 3: Initiatives for policy innovation-European Policy Experimentations, του Ευρωπαϊκού Προγράμματος Erasmus+ και αναπτύσσεται στο χρονικό διάστημα Φεβρουάριος 2017-2020. Αποσκοπεί στην ενίσχυση των πεποιθήσεων, των γνώσεων και των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών όσον αφορά στην εφαρμογή της μάθησης με διερώτηση (Inquiry Based Learning) σε πολυπολιτισμικές τάξεις μαθητών, για την εκπαίδευση χωρίς αποκλεισμούς και την προώθηση θεμελιωδών αξιών κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών (Bruder, & Prescott, 2013).

Προτείνει τη συμπερίληψη ως βασικό μεθοδολογικό άξονα, για την αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών για όλους τους μαθητές και ειδικά για αυτούς που προέρχονται από εξειδικευμένες ομάδες πληθυσμού. Η καινοτομία της εν λόγω προσέγγισης έγκειται στο ότι περιλαμβάνει τρεις ενότητες/οπτικές της μάθησης με διερώτηση, οι οποίες αλληλοσυνδέονται κατά τη διδασκαλία με τρόπο που να προάγουν τη βελτίωση της επίδοσης όλων των μαθητών, την ενεργή/αυτόνομη συμμετοχή τους στην κοινωνία και τον σεβασμό στην πολιτισμική ποικιλομορφία. Συγκεκριμένα, η μάθηση με διερώτηση εισάγεται ως μέσο διαχείρισης της σχετικής με την επίδοση διαφορετικότητας (Wilson, κ.α., 2010) (διδακτική ενότητα 1: *επίδοση/επιτεύγματα*), επεκτείνεται σε ρεαλιστικά πλαίσια (Bennett, Lubben, & Hogarth, 2007: Koski, Klapwijk, & de Vries, 2011) (διδακτική ενότητα 2: *θεματικά πλαίσια*) και ενσωματώνεται σε πολυπολιτισμικά περιβάλλοντα (διδακτική ενότητα 3: *κουλτούρα*), αναπτύσσοντας κίνητρα προώθησης θεμελιωδών αξιών. Στο πρόγραμμα συμμετέχουν εκπαιδευτικοί που διδάσκουν Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες σε μαθητές ηλικίας 11-16 ετών.

Για την αξιολόγηση του συγκεκριμένου προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης αξιοποιείται συνδυασμός ποσοτικών και ποιοτικών μετρήσεων, που λαμβάνονται πριν και μετά τη συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο πρόγραμμα. Οι μετρήσεις αφορούν: (α) στην επάρκεια των εκπαιδευτικών στην εφαρμογή της μάθησης με διερώτηση για την αντιμετώπιση της διαφορετικότητας, (β) στις πεποιθήσεις τους για τις ηθικές και πολιτισμικές διαστάσεις των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών και (γ) στις απόψεις τους για τη συμπεριληπτική προσέγγιση στα μαθήματα αυτά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Armstrong, F. (2016). Inclusive education: School cultures, teaching and learning. In G. Richards and F. Armstrong (Eds.), *Teaching and learning in diverse and inclusive classrooms. Key issues for new teachers* (pp. 7–18). Abingdon, Oxon, New York, NY: Routledge.

Bennett, J., Lubben, F. and Hogarth, S. (2007). Bringing science to life: A synthesis of the research evidence on the effects of context-based and STS approaches to science teaching. *Science education, 91*, 347–370.

Bruder, R., & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 811-822.

Koski, M. I., Klapwijk, R. M., & de Vries, M. J. (2011). Connecting Domains in Concept-Context Learning: A Model to Analyse Education Situations. *Journal of Design & Technology Education, 16*(3), 50-61.

Thomas, B & Watters, J. (2015). Perspectives on Australian, Indian and Malaysian approaches to STEM education. *International Journal of Educational Development, 45*, 42-53.

Wilson, C., Taylor, J., Kowalski, S., & Carlson, J. (2010). The Relative Effects and Equity of Inquiry-Based and Commonplace Science Teaching on Students' Knowledge, Reasoning, and Argumentation. *Journal of Research in Science teaching 47*(3), 276–301.

«ΜΑΘ.Ε.Τ.Ε.»: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Κατερίνα Κασιμάτη [1], Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος [2], Νικόλαος Ματζάκος [1], Βαρβάρα Ρόζου [3], Διονύσιος Κουλουμπής [4]

[1]Ανώτατη Σχολή Παιδαγωγικής και Τεχνολογικής Εκπαίδευσης, [2]Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, [3]Τμήμα Φιλοσοφίας, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, [4]Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

kkasimati@hotmail.com, amoutsiosrentzos@aegean.gr, nikmatz@gmail.com, vana_rozou@yahoo.gr, dionkoul8@gmail.com

Η μαθηματική εκπαίδευση σε πλαίσιο μη πρωτίστως 'μαθηματικό' προσελκύει αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον (Engelbrecht, Bergsten, & Kågesten, 2012· FitzSimons, 2001). Στην Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε. η μαθηματική εκπαίδευση στο πλαίσιο του γνωστικού αντικειμένου φοίτησης Μηχανικών (Πολιτικοί, Ηλεκτρολόγοι & Ηλεκτρονικοί, Μηχανολόγοι) συνδυάζεται με την παιδαγωγική προσέγγιση και εκπαίδευση σχετικά με το γνωστικό αντικείμενο, διαμορφώνοντας μια πολύπλοκη διδακτικομαθησιακή σχέση. Στο ερευνητικό πρόγραμμα ΜΑΘ.Ε.Τ.Ε. (ΜΑΘηματική Εκπαίδευση και Τεχνολογική Εκπαίδευση), υιοθετούμε μια συστημική θεωρητική οπτική (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2016) για τη μελέτη της αποτελεσματικότητας (Creemers & Kyriakides, 2008· Patrick & Smart, 1998) της διδασκαλίας των μαθηματικών στο πρώτο έτος στην Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε., διερευνώντας: α) τις επιστημολογικές αντιλήψεις για τα μαθηματικά και για το ρόλο τους στις σπουδές και στην καριέρα (Wood, Petocz & Reid, 2012), β) των διδακτικών και επικοινωνιακών πρακτικών σχετικά με τα μαθηματικά (McCroskey & Richmond, 1990· Φερεντίνος & Κασιμάτη, 2001), και γ) των ευρύτερων προσεγγίσεων μελέτης (Biggs, 1979). Συνδυάζοντας ανάλυση κειμένων, ερωτηματολόγιο, συνέντευξη και παρατήρηση, εντάσσουμε στην έρευνα μας θεσμικά κείμενα, εκπαιδευτικό υλικό, καθηγητές/τριες, καθώς και πρωτοετείς φοιτητές/τριες σχετικά με τα μαθήματα των μαθηματικών, αλλά και με τις εμφανίσεις των μαθηματικών στα βασικά μαθήματα ειδίκευσης των Τμημάτων στην Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.. Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η καλλιέργεια μιας κουλτούρας συνέργειας μεταξύ τω διαφορετικών πρωταγωνιστών με στόχο την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των μαθηματικών, συμβάλλοντας στη συστημική ανάπτυξη αποτελεσματικότερων διδακτικών πρακτικών για τα μαθηματικά που συναντούν οι φοιτητές/τριες, καθώς και στην επαγγελματική ανέλιξη των εκπαιδευτικών της Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε..

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή χρηματοδοτήθηκε (εν μέρη) από τον ΕΛΚΕ της Ανώτατης Σχολής Παιδαγωγικής Τεχνολογικής Εκπαίδευσης μέσω του προγράμματος «Ενίσχυση της Έρευνας στην Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.» - Έργο 80147: «Μαθηματική και Τεχνολογική Εκπαίδευση».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biggs, J. B. (1979). Individual differences in study processes and the quality of learning outcomes. *Higher Education, 8*, 381-394.

Creemers, B. P. M., & Kyriakides, L. (2008). *The dynamics of educational effectiveness: A contribution to policy, practice and theory in contemporary schools*. London and New York: Routledge.

Engelbrecht, J., Bergsten, C., & Kågesten, O. (2012). Conceptual and procedural approaches to mathematics in the engineering curriculum: student conceptions and performance. *Journal of Engineering Education*, *101*(1), 138-162.

FitzSimons, G. E. (2001). Integrating mathematics, statistics, and technology in vocational and workplace education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(3), 375-383.

McCroskey, J. C., & Richmond, V. P. (1990). Willingness to communicate: Differing cultural perspectives. *Southern Journal of Communication, 56*(1), 72-77.

Moutsios-Rentzos, A., & Kalavasis, F. (2016). Systemic approaches to the complexity in mathematics education research. *International Journal for Mathematics in Education*, *7*, 97-119.

Patrick, J., & Smart, R. M. (1998). An empirical evaluation of teacher effectiveness: The emergence of three critical factors. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *23*(2), 165-178.

Wood, L. N., Petocz, P., & Reid, A. (2012). *Becoming a mathematician*. Dordrecht: Springer.

Φερεντίνος, Σ., & Κασιμάτη, Κ. (2001). Διδακτικές πρακτικές μέσα στη σχολική τάξη: απόψεις και στάσεις εκπαιδευτικών ως προς τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄*, 55, 22-36.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΥΝΔΕΣΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ: ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

Φραγκίσκος Καλαβάσης, Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος, Βασιλεία Πιννίκα, Γεώργιος Κρητικός

Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

kalabas@aegean.gr, amoutsiosrentzos@aegean.gr, psed15003@rhodes.aegean.gr, gkritikos@aegean.gr

Το παρόν ερευνητικό πρόγραμμα επικεντρώνεται στην ανάδειξη των συνδέσεων της εκπαίδευσης των Μαθηματικών και της Φυσικής αναφορικά με την έννοια της ισότητας και το σημείο ‘=’ κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Η έννοια και το σύμβολο της ισότητας συνδέεται με διδακτικές δυσκολίες και με επιστημολογικά εμπόδια, ενώ οι νοητικές διεργασίες οικοδόμησης της ισότητας, η αυστηρή λειτουργία και οι παράλληλες συμβατικές εναλλακτικές χρήσεις του συμβολισμού καθιστούν το ζήτημα εκπαιδευτικά επίκαιρο, απαιτώντας πολύπλοκη ερευνητική επεξεργασία. Η κατανόηση των λειτουργιών του συμβόλου της ισότητας συνδέεται με τη σχολική επίδοση, τις δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων και στην αλγεβρική σκέψη, ενώ λειτουργίες της ισότητας των δύο πεδίων φαίνεται να μη ταυτίζονται (Capraro & Capraro, 2007· Kanderakis, 2016· Kieran, 1981· Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006· Powell, 2012· Sherin, 2001). Υιοθετείται μια συστημική, διεπιστημονική προσέγγιση εκπαιδευτικής μηχανικής, καθώς η σχολική μονάδα ιδωμένη ως ευφυές ανοικτό σύστημα σε αλληλεπίδραση με το ευρύτερο εκπαιδευτικό και κοινωνικό περιβάλλον επιτρέπει την ανάδειξη (διε)επιστημονικών σημασιών και κατασκευές αναφορικά με την ισότητα στα μαθηματικά και τη φυσική στην οργάνωση του σχολείου και την διάρθρωση του προγράμματος, καθώς και τη μετάβαση από την μια βαθμίδα στην επόμενη (Davis & Simmt, 2003· Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2016· Gueudet, Bosch, Disessa, Kwon, & Verschaffel, 2016· Williams et al, 2016). Η συστημική διερεύνηση πραγματοποιείται μέσω μικτής μεθοδολογίας που περιλαμβάνει ανάλυση περιεχομένου (εγχειρίδια κ.ά.), συνεντεύξεις και ερωτηματολόγια με εκπαιδευτικούς και διευθυντές/ντριες, παρατήρηση διδακτικών πρακτικών κ.ά. Στοχεύουμε στην ανάπτυξη ενός θεωρητικά και εμπειρικά τεκμηριωμένου εργαλείου που να βοηθά τον διεπιστημονικό εκπαιδευτικό σχεδιασμό στην τάξη, τη σχολική μονάδα έως τα αναλυτικά προγράμματα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση» στο πλαίσιο της πρόσκλησης «Υποστήριξη ερευνητών με έμφαση στους νέους ερευνητές».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2007). Thirty years of research: interpretations of the equal sign in China and the USA. *Psychological Reports, 101*, 784–786.

Davis, B., & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for research in mathematics education*, *34*(2), 137-167.

Gueudet, G., Bosch, M., Disessa, A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in mathematics education*. Springer Open.

Kanderakis, N. (2016). The mathematics of high school physics: models, symbols, algorithmic operations and meaning. *Science & Education, 25*(7-8), 837-868.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312.

Moutsios-Rentzos, A., & Kalavasis, F. (2016). Systemic approaches to the complexity in mathematics education research. *International Journal for Mathematics in Education*, *7*, 97-119.

Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The Elementary school journal*, *112*(4), 627-648.

Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and instruction*, *19*(4), 479-541.

Williams, J, Roth, W. M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo Ferri, R., & Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary Mathematics Education: A State of the Art*. Springer Open.

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Στο στρογγυλό τραπέζι συμμετέχουν:

***Ειρήνη Μπιζά, **Ιωάννης Παπαδόπουλος, ***Δέσποινα Πόταρη, ****Χαράλαμπος Σακονίδης**

*University of East Anglia, **Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, *** Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, **** Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

I.Biza@uea.ac.uk, ypapadop@eled.auth.gr, dpotari@math.uoa.gr,

xsakonid@eled.duth.gr

Συντονιστής:

Γιώργος Ψυχάρης

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών G.Psycharis@math.uoa.gr

Η μαθηματική πρόκληση στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί κεντρικό στόχο πολλών εκπαιδευτικών συστημάτων και Αναλυτικών Προγραμμάτων, ενώ γίνεται προσπάθεια να ενσωματωθούν κατάλληλες δραστηριότητες σε σχολικά εγχειρίδια και να επιμορφωθούν οι εκπαιδευτικοί σε προγράμματα επαγγελματικής εκπαίδευσης. Ωστόσο, η έρευνα και η εμπειρία δείχνουν ότι οι παραπάνω συνθήκες δεν αποτελούν εγγύηση για την δημιουργία πλούσιων μαθησιακών περιβαλλόντων που ενεργοποιούν όλους τους μαθητές στη σχολική τάξη. Σε αυτό το στρογγυλό τραπέζι εστιαζόμαστε στη μαθηματική πρόκληση ως συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας των μαθηματικών και της μαθησιακής εμπειρίας των διδασκομένων με στόχο να εξετάσουμε ζητήματα που αναδύονται στο επίπεδο της έρευνας και της πρακτικής στη διεθνή αλλά και στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην αφετηρία μας βρίσκονται σημαντικά ερευνητικά ευρήματα από πολλές έρευνες αναφορικά με την αξιοποίηση γνωστικά απαιτητικών δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών και της συνεισφοράς τους τόσο στην υποστήριξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και την βελτίωση της μαθησιακής τους εμπειρίας (π.χ. Stein, Remillard, & Smith, 2007) όσο και στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών (Sullivan et al., 2015). Στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών, παρότι για πολλά χρόνια ο όρος μαθηματική πρόκληση αναφερόταν στην εκπαίδευση των ταλαντούχων μαθητών, τις τελευταίες δύο δεκαετίες χρησιμοποιείται για να περιγραφούν τρόποι ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών σε οποιαδήποτε σχολική τάξη (Barbeau & Taylor, 2009) μέσα από τη σύνδεση της μαθηματικής εκπαίδευσης με την έρευνα στα μαθηματικά (Applebaum & Leikin, 2014). Η Leikin (2009) ορίζει τη μαθηματική πρόκληση ως μια «ενδιαφέρουσα δυσκολία» η οποία κινητοποιεί τους μαθητευόμενους να προσπαθήσουν να την ξεπεράσουν ανάλογα με την ατομική εμπειρία τους στην επίλυση προβλημάτων. Σε μια σειρά θεωρητικών πλαισίων της διδακτικής των μαθηματικών η μαθηματική πρόκληση θεωρείται ως συστατικό στοιχείο της εκπαιδευτικής διαδικασίας που σχετίζεται ευθέως με την παροχή ευκαιριών για μάθηση στους μαθητές και την ποιότητα της διδασκαλίας. Για παράδειγμα, ο Brousseau (1997), θεμελιώνοντας τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, επισημαίνει ότι ο κύριος ρόλος του εκπαιδευτικού είναι η μεταβίβαση (devolution) της ευθύνης επίλυσης ενός καλού – με την έννοια του προκλητικού – προβλήματος στον μαθητή. Οι Potari και Jaworski (2002) βλέπουν τη μαθηματική πρόκληση ως ένα από τα τρία κεντρικά στοιχεία της διδασκαλίας μαζί με την ευαισθητοποίηση προς τους μαθητές και τη διδακτική διαχείριση. Οι Yackel και Cobb (1996) αναδεικνύουν τη σημασία των κοινωνικών και κοινωνικο-μαθηματικών νορμών στη μαθηματική επικοινωνία στην τάξη και τη δυνατότητα πρόσβασης όλων των μαθητών στο μαθηματικό νόημα.

Η πρόσφατη έρευνα γύρω από την μαθηματική πρόκληση φέρνει στο φως δυσκολίες και διλήμματα που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στην υποστήριξη της εφαρμογής δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση στην τάξη. Μελετώντας τα διαφορετικά στάδια εξέλιξης μιας μαθηματικής δραστηριότητας πριν και κατά την εφαρμογή της στην τάξη, οι Stein et al. (2009) συσχετίζουν το αν η μαθηματική πρόκληση διατηρείται, ενδυναμώνεται ή αποδυναμώνεται κατά την εξέλιξη της διδασκαλίας με μια σειρά από διαφορετικούς παράγοντες που περιλαμβάνουν: τις νόρμες της τάξης, τις υποθέσεις της δραστηριότητας, τις διδακτικές ρυθμίσεις του εκπαιδευτικού και τις διαθέσεις των μαθητών. Ταυτόχρονα ερευνητικά ευρήματα τεκμηριώνουν τα οφέλη του συνόλου των μαθητών όταν η διδασκαλία βασίζεται σε δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση (Boaler, 2002).

Στο φως των παραπάνω ευρημάτων, η προβληματική που αναπτύσσεται τα τελευταία στον ερευνητικό χώρο θέτει ζητήματα πρόσβασης στη μαθηματική πρόκληση για το σύνολο των μαθητών της τάξης, φέρνοντας εγγύτερα την ανάγκη διερεύνησης της μαθηματικής πρόκλησης σε σχέση με τις διαφορετικές ανάγκες όλων των μαθητών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πρόγραμμα EDUCATE [1] που στοχεύει στον εντοπισμό και τη διερεύνηση των προκλήσεων που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στην προσπάθειά τους να εργαστούν με γνωστικά απαιτητικές δραστηριότητες και να εφαρμόσουν διαφοροποιημένη διδασκαλία.

Στο παρόν στρογγυλό τραπέζι λαμβάνοντας υπόψη τα υπάρχοντα ερευνητικά δεδομένα αλλά και τα σημεία εστίασης της σύγχρονης έρευνας εστιάζουμε σε μια σειρά από πολυδιάστατα ζητήματα της διδακτικής των μαθηματικών με τα οποία συνδέεται η μαθηματική πρόκληση. Αυτά είναι: (1) η φύση των δραστηριοτήτων και των πόρων (πηγών και διδακτικών υλικών) που μπορούν να στηρίξουν τη μαθηματική πρόκληση, (2) οι κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές πτυχές που διέπουν την εισαγωγή της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη, (3) οι πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης που μπορούν να υποστηρίξουν τους εκπαιδευτικούς στον σχεδιασμό και τη διδακτική διαχείριση καταστάσεων μαθηματικής πρόκλησης ώστε να συναντήσουν τις διαφορετικές ανάγκες των μαθητών, και (4) ο μετασχηματισμός της μαθηματικής γνώσης σε μαθηματική πρόκληση κατά τη μετάβαση των μελλοντικών εκπαιδευτικών από το πανεπιστήμιο στη σχολική τάξη.

Μέσα από τις θεωρήσεις των τεσσάρων εισηγήσεων υιοθετούμε μια περισσότερο ολιστική προσέγγιση της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη και την εκπαίδευση εκπαιδευτικών συνδυάζοντας θεωρητικά δομήματα και μεθοδολογικά εργαλεία από διαφορετικές περιοχές έρευνας όπως η διερευνητική δραστηριότητα, οι συμπεριληπτικές και οι πολιτισμικά υποστηριζόμενες διδακτικές πρακτικές, η ισότητα και η κοινωνική δικαιοσύνη, ο Μαθηματικός Ορίζοντας, η μελέτη βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών από ομάδες εκπαιδευτικών (video-clubs). Στο επίπεδο του σχεδιασμού δραστηριοτήτων αναρωτιόμαστε, π.χ., ποια είναι τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση και πώς η μαθηματική πρόκληση σχετίζεται με τη δημιουργική μαθηματική σκέψη; Στο επίπεδο της διδασκαλίας διερευνούμε τις κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παραμέτρους που καθορίζουν τις δυνατότητες συμπερίληψης όλων των μαθητών στη μαθηματική πρόκληση. Στο επίπεδο της εκπαίδευσης (εν ενεργεία και μελλοντικών) εκπαιδευτικών διερευνούμε ερωτήματα όπως: πώς οι εκπαιδευτικοί κατανοούν τη μαθηματική πρόκληση και τη διαφορετικότητα των μαθητών; ποιες πρακτικές αναπτύσσουν για να φέρουν τη μαθηματική πρόκληση κοντά στις ανάγκες των μαθητών; πόσο σημαντική είναι η μαθηματική πρόκληση στο πανεπιστήμιο για την προετοιμασία των μελλοντικών εκπαιδευτικών και πώς το πανεπιστήμιο μπορεί να τους προετοιμάσει για να διδάξουν σε μία τάξη μαθηματικής πρόκλησης;

Οι τέσσερις ενότητες που ακολουθούν εστιάζονται σε ένα από τα τέσσερα ζητήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ο Γιάννης Παπαδόπουλος επιμελήθηκε το πρώτο (δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση), ο Χαράλαμπος Σακονίδης το δεύτερο (η μαθηματική πρόκληση στη σχολική τάξη), η Δέσποινα Πόταρη το τρίτο (η μαθηματική πρόκληση στην εκπαίδευση των εν ενεργεία εκπαιδευτικών) και η Ειρήνη Μπιζά το τέταρτο (η μαθηματική πρόκληση στην εκπαίδευση των μελλοντικών εκπαιδευτικών στο πανεπιστήμιο).

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 1: ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΩΣ ΟΧΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Η κατάλληλη επιλογή και χρήση δραστηριοτήτων στην τάξη των μαθηματικών είναι κεντρικής σημασίας για την αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών. Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών συνιστούν την εμπλοκή των μαθητών μέσω της αξιοποίησης δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση γιατί αυτές βοηθούν τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση του τί είναι και πώς αναπτύσσονται τα μαθηματικά (Sullivan, Clarke & Clarke, 2013).

Όμως τί είναι οι δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση; Οι ορισμοί που κατά καιρούς έχουν δοθεί συγκλίνουν: Δραστηριότητες για τις οποίες ο μαθητής δεν έχει αρχικά επίγνωση κάποιων αλγοριθμικών εργαλείων που θα του επιτρέψουν να φτάσει στη λύση και κατά συνέπεια πρέπει ο ίδιος για το σκοπό αυτό να επινοήσει τις απαραίτητες μαθηματικές ενέργειες. Ταυτόχρονα, ο εκπαιδευτικός δεν παρέχει σαφή καθοδήγηση σχετικά με το πώς θα έπρεπε να λυθεί το πρόβλημα ή κατά πόσο η λύση που αναπτύσσεται από το μαθητή είναι σωστή ή όχι - κάτι που αφήνεται στους μαθητές (Sullivan, Clarke & Clarke, 2013). Επιπλέον, η δραστηριότητα αυτή είναι ενδιαφέρουσα και διασκεδαστική ίσως, όμως δεν λύνεται τόσο εύκολα

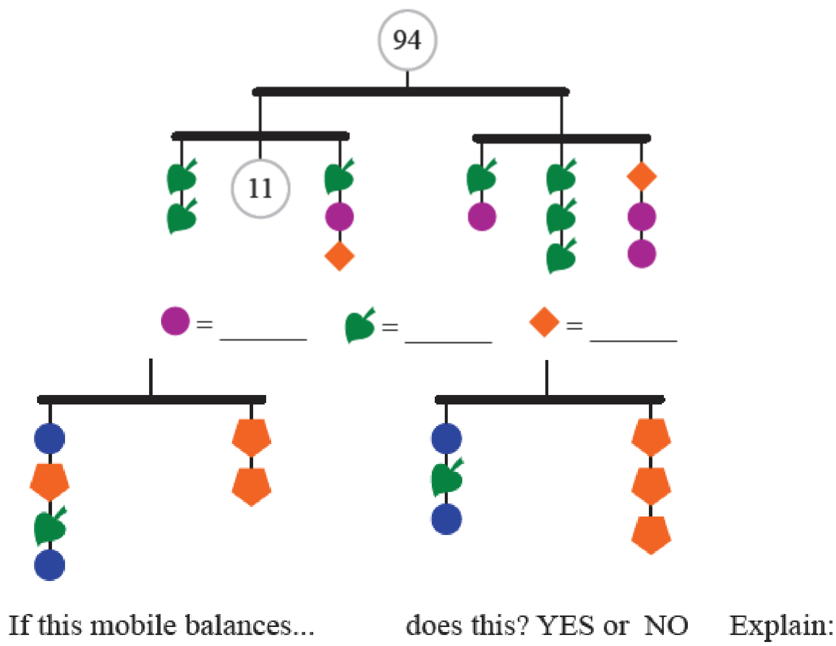
(Goldenberg et al., 2015), αναπτύσσοντας μαθηματική περιέργεια και παρακινώντας τους μαθητές να επιμένουν και να μην παραιτούνται πριν την ολοκλήρωση της δραστηριότητας (Guberman & Leikin, 2013). Βέβαια το κατά πόσο μια τέτοια δραστηριότητα κομίζει ή όχι μαθηματική πρόκληση εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη μαθηματική εμπειρία του κάθε μαθητή.

Οι ίδιοι οι μαθητές θεωρούν «δραστηριότητα με μαθηματική πρόκληση» αυτήν που ενέχει το στοιχείο της δυσκολίας στην επίλυση, της εξυπνάδας στο σχεδιασμό που μπορεί να σε ξεγελάσει, της ανάγκης να εξηγεί ο λύτης τι κάνει (Sullivan, Clarke & Clarke, 2013).

Η βιβλιογραφία κάνει διάκριση σε διαφορετικούς τύπους δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση (Powell et al., 2009) κάποιοι από τους οποίους είναι σχετικοί με χρήση παράδοξων, χρήση προτάσεων που αντιβαίνουν στη διαίσθηση, μοτίβα και ακολουθίες, γεωμετρία, συνδυαστική και πιθανότητες, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι εδώ εξαντλείται ο κατάλογος των διαφόρων τύπων. Βέβαια, αυτή η κατηγοριοποίηση συνδέεται κυρίως με το μαθηματικό περιεχόμενο και γι αυτό ίσως θα είχε ενδιαφέρον να παρουσιαστούν τύποι δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση στη βάση της πρόθεσής τους και οι οποίες μπορεί να λαμβάνουν χώρα είτε στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί-μολύβι είτε σε ένα ψηφιακό περιβάλλον όπως πχ τα videogames. Εδώ θα παρουσιαστούν τρεις τέτοιες περιπτώσεις. Δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση που (1) εμπλέκουν τους μαθητές σε ενέργειες δημιουργίας μαθηματικού νοήματος, (2) διευκολύνουν το συστηματικό πειραματισμό και σχετίζονται με την ανάπτυξη στρατηγικών, και (3) προωθούν την δημιουργική μαθηματική σκέψη.

Υποστηρίζοντας τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος

Τα mobile puzzles είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση στην τάξη που υποστηρίζει τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος από μέρους των μαθητών (Papadopoulos, 2019).



Εικόνα 1: Παραδείγματα δραστηριοτήτων mobile puzzle

Πρόκειται για μια συλλογή πολλαπλών αντικειμένων σε ισορροπία. Οι οριζόντιες ράβδοι είναι πάντα κρεμασμένες με σύρμα στο μέσο τους και έτσι τα δύο άκρα της ράβδου έχουν το ίδιο βάρος. Οι ράβδοι και το σύρμα δεν έχουν βάρος, τα ίδια σχήματα έχουν το ίδιο βάρος και διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο ή διαφορετικό βάρος. Ο λύτης πρέπει να προσδιορίσει τα άγνωστα βάρη. Οι δραστηριότητες αυτές εστιάζουν στην ισότητα παραστάσεων και οι μαθητές κάνουν χρήση της φαντασίας τους για να δομήσουν τη λογική της «ισορροπίας» των εξισώσεων ενώ την ίδια στιγμή δεν χρειάζονται κανόνες για να λύσουν την εξίσωση (Εικ.1, πάνω). Σε άλλες περιπτώσεις ο λύτης καλείται να αποφασίσει κατά πόσο κάποιο mobile ισορροπεί (πάντα, μερικές φορές, ποτέ) στη βάση δοσμένης πληροφορίας και να τεκμηριώσει την απάντησή του (Εικ. 1, κάτω). Οι γρίφοι αυτοί στην ουσία δεν είναι παρά συστήματα εξισώσεων και οι μαθητές δεν χρειάζεται να απομνημονεύσουν καμία σειρά βημάτων για την επίλυση του συστήματος. Αντ' αυτού, επινοούν άτυπες μεθόδους ισοδύναμες με τον φορμαλιστικό χειρισμό που επιβάλλει η άλγεβρα (Goldenberg, 2019)

Ο μαθητής στην προσπάθεια να βρει το άγνωστο βάρος προβαίνει σε μια σειρά ενεργειών και στην ουσία αυτό που αργότερα θα του διδαχθεί επισήμως ως ιδιότητες της πρόσθεσης, ή ως βήματα για την επίλυση μιας εξίσωσης (η ενός συστήματος εξισώσεων) φαίνεται να ξεκινά από τώρα ως μια διαισθητική αντίληψη της διατήρησης της ισορροπίας. Η αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τα δύο μέρη μιας ισότητας, η απομόνωση μιας μεταβλητής, η αντικατάσταση μιας ποσότητας με ισοδύναμή της, οι ιδιότητες της ισότητας και των πράξεων (ανακλαστική, αντιμεταθετική, προσεταιριστική), είναι μερικές από τις μη τυπικές ενέργειες που επινοούν οι μαθητές πριν ακόμη τις διδαχθούν τυπικά. Πράγματι, μπορούν να δημιουργήσουν εξισώσεις μεταφράζοντας απλά την κατάσταση ισορροπίας, πχ. 2 + =3 . Μπορούν να αφαιρέσουν την ίδια ποσότητα από τα δύο μέλη μιας ισότητας. Στην Εικόνα 1 (κάτω), στο αριστερό mobile η κατάσταση μεταφέρεται σε μορφή εξίσωσης ως 2 + + = 2. Η απομάκρυνση ενός πενταγώνου και από τα μέρη δεν επηρεάζει την ισορροπία και έτσι πετυχαίνεται μια νέα εξίσωση, 2 + =. Αυτή η νέα εξίσωση μπορεί να αντικαταστήσει κάποια άλλη και έτσι να επιτευχθεί πάλι νέα πληροφορία. Όντως, αν αντικατασταθεί η εξίσωση αυτή στο δεξί mobile της ίδιας δραστηριότητας προκύπτει η σχέση 1=3 κάτι που θα καθιστά προφανή την αρνητική απάντηση στη συγκεκριμένη δραστηριότητα (1 πεντάγωνο δεν μπορεί να έχει το ίδιο βάρος με 3 πεντάγωνα – αν εξαιρέσει κανείς την περίπτωση που το βάρος του πενταγώνου είναι μηδέν).

Υποστηρίζοντας το συστηματικό πειραματισμό και την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης

Το παράδειγμα για αυτόν τον τύπο δραστηριότητας με μαθηματική πρόκληση αντλείται από το χώρο των Ψηφιακών Τεχνολογιών και πρόκειται για τα videogames που περιέχουν συλλογές δραστηριοτήτων οι οποίες προκαλούν το μαθητή να διερευνήσει μια κατάσταση. Το παράδειγμα που θα αναφερθεί αξιοποιεί το videogame “The logical journey of Zoombinis” και πιο συγκεκριμένα την πίστα του «The Mudwall puzzle» και σχετίζεται με τη δυνατότητα ανάπτυξης συστηματικού πειραματισμού και στρατηγικών επίλυσης από τη μεριά του μαθητή (Thoma & Biza, in press).

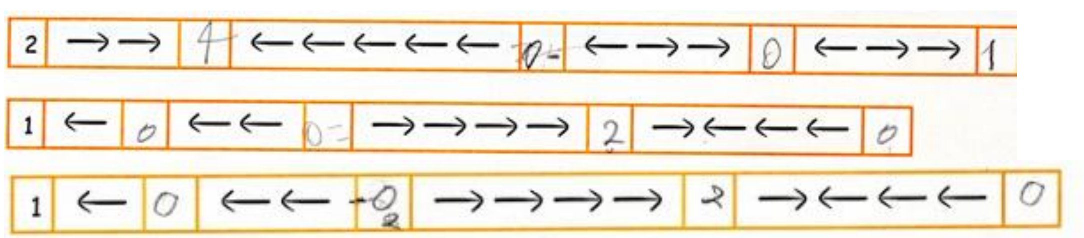
Εικόνα 2: Η πίστα Mudwall puzzle στο videogame Zoombinis

Στη συγκεκριμένη πίστα οι ήρωες εμποδίζονται από έναν τοίχο (πίνακα) 5x5 με κάποια κελιά να διαθέτουν έναν ιδιαίτερο συμβολισμό. Οι ήρωες έχουν στη διάθεσή τους έναν καταπέλτη που πετάει μπάλες στον τοίχο οι οποίες ενσωματώνουν δύο χαρακτηριστικά: ένα χρώμα (μπλε, κόκκινο, κίτρινο, μωβ ή πράσινο) και ένα σχήμα (τετράγωνο, τρίγωνο, αστέρι, κύκλος, ή ρόμβος). Ο πίνακας 5x5 αποτελεί στην ουσία μια μετάθεση των 5 σχημάτων στον ένα άξονα και των 5 χρωμάτων στον άλλο που όμως δεν είναι γνωστά στον λύτη. Κάθε κελί του πίνακα αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό συνδυασμό σχήματος και χρώματος. Τέλος υπάρχει μια κρυμμένη ακόμη μετάθεση των δύο αξόνων αφού π.χ. τα χρώματα μπορεί να βρίσκονται είτε στον οριζόντιο είτε στον κατακόρυφο άξονα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα 5! x 5! x 2! = 28800 δυνατούς διαφορετικούς τέτοιους πίνακες. Ο παίκτης πρέπει να κάνει χρήση συγκεκριμένου επιτρεπόμενου αριθμού ρίψεων ώστε να πετύχει τα μαρκαρισμένα κελιά και να προχωρήσει στο παιχνίδι. Αναγκάζεται έτσι σταδιακά μετά από τυχαίες δοκιμές να στραφεί προς έναν συστηματικό πειραματισμό προκειμένου να αναπτύξει στρατηγικές που επιτρέπουν την επιτυχή λύση του προβλήματος σε συγκεκριμένο αριθμό ρίψεων. Ο πειραματισμός αυτός εντοπίζεται στην εξής σειρά βημάτων: (α) Εντόπισε τις μεταβλητές που εμπλέκονται στη λύση (εδώ είναι το χρώμα, το σχήμα), (β) Διατήρησε τη μια μεταβλητή σταθερή και κάνε αλλαγές στην άλλη για να συλλέξεις πληροφορία σχετικά με το πώς συμβάλλει η μεταβλητή αυτή στη λύση του προβλήματος, (γ) κάνε το ίδιο για κάθε μεταβλητή και (δ) χρησιμοποίησε συνδυαστικά αυτήν την πληροφορία αποκλείοντας συγκεκριμένους συνδυασμούς προκειμένου να πετύχεις τον επιθυμητό αριθμό ρίψεων που οδηγεί στη λύση.

Υποστηρίζοντας τη δημιουργική μαθηματική σκέψη

Οι δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση μπορούν να αποτελέσουν επίσης εργαλεία πρόκλησης της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης (Powell et al., 2009). Δραστηριότητες που δημιουργούν έκπληξη προκαλούν στους μαθητές την περιέργεια και την προθυμία να ικανοποιήσουν αυτήν την περιέργεια διερευνώντας έτι περεταίρω όσα διαπραγματεύεται η δραστηριότητα.

Το παράδειγμα που θα αναφερθεί κάνει χρήση ενός περιβάλλοντος που ονομάζεται «Βηματισμός» (Slezáková, Hejný, & Kloboučková, 2012) και αφορά το πώς συμβολίζουν μαθητές δημοτικού τους αρνητικούς αριθμούς (τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής παρουσιάζονται σε σχετική εργασία στο παρόν συνέδριο).



Εικόνα 3: Παραδείγματα που καλλιεργούν τη δημιουργικότητα

Οι μαθητές κινούνται βηματικά με οδηγό τις συλλογές των βελών πάνω σε μια αριθμογραμμή στο πάτωμα με αριθμητικές ενδείξεις μόνο στο θετικό μέρος της και τους ζητείται μετά από κάθε επιμέρους υπολογισμό να συμπληρώσουν στο κενό κουτί την αριθμητική ένδειξη για τη θέση στην οποία βρίσκονται. Στην περίπτωση που καταλήγουν στην περιοχή των αρνητικών αριθμών δημιουργείται η ανάγκη να επινοήσουν έναν τρόπο συμβολισμού που -πολύ σημαντικό- έχει νόημα γι αυτούς. Τα αποτελέσματα δείχνουν να παρακινεί η πρόκληση αυτή δημιουργικές επιλογές που οδηγούν τους μαθητές σε έναν ευφάνταστο δικό τους λειτουργικό συμβολισμό για τους αρνητικούς (Εικ. 3). Αν και ίσως μπορεί κάποιος να πει ότι αυτό δεν είναι «δημιουργικό» με την ευρέως κοινή χρήση του όρου εν τούτοις ο τρόπος που κάθε μαθητής νοηματοδοτεί κάθε λεπτομέρεια της σημειογραφίας του είναι εξαιρετικό στιγμιότυπο αυτού που η βιβλιογραφία αποκαλεί mini-c δημιουργικότητα

(Beghetto & Kaufman, 2009). Επιπλέον αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τη σημειογραφία αυτή με συνέπεια στη συνέχεια στους υπολογισμούς που ακολουθούν και που εμπλέκουν τη χρήση αρνητικών, τους οποίους όμως τυπικά αγνοούν.

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 2: ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ 'ΠΡΟΚΛΗΣΗΣ' ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Η πρόσβαση σε υψηλού επιπέδου μαθηματική γνώση και η συνακόλουθη ανάπτυξη ανώτερης μαθηματικής σκέψης αποτελούν δικαίωμα κάθε παιδιού και υποχρέωση κάθε σύγχρονης δημοκρατικής κοινωνίας, η οποία βρίσκεται αντιμέτωπη με την πρόκληση να εξασφαλίσει τα υλικά, τις συνθήκες και το είδος της διδασκαλίας που εγγυώνται αυτήν την εκπαιδευτική λειτουργία. Ωστόσο, η εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματική δραστηριότητα με φιλόδοξους στόχους συχνά εξαντλείται στην προσφορά γνωστικών προκλήσεων που στόχο έχουν να τους προτρέψουν να αναπτύξουν βαθύτερη κατανόηση, ερήμην των διαφορετικών μαθηματικών βιογραφιών και ταυτοτήτων που έχουν συγκροτήσει.

Η ανωτέρω προσέγγιση διατρέχει τον κίνδυνο να ανάγει τη μαθηματική πρόκληση σε μηχανισμό αναπαραγωγής και νομιμοποίησης της αποτυχίας μαθητών που προέρχονται από περιβάλλοντα που μειονεκτούν σε υψηλού επιπέδου μαθηματικές γνώσεις, καθώς αγνοεί τις κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παραμέτρους που καθορίζουν τον τρόπο συμμετοχής των μαθητών σε αυτές και δη τα θέματα ισότητας και σχέσεων εξουσίας που συνδέονται με τη δυνατότητα μαθηματικής ενδυνάμωσης όλων των μαθητών.

Μια μαθηματική πρόκληση, για να αποτελέσει αυθεντική πρόκληση συμμετοχής των μαθητών σε ανώτερες εκφάνσεις της μαθηματικής πρακτικής και να τους ενδυναμώσει όχι μόνο μαθηματικά, αλλά και κοινωνικά, θα πρέπει να αποτελέσει πρόκληση και σε κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικό επίπεδο μέσα από τη διδακτική διαχείριση του εκπαιδευτικού στην τάξη. Δηλαδή, πρόκληση που θα ενεργοποιήσει και αξιοποιήσει το κεφάλαιο και τους πόρους κάθε μαθητή που συνδέονται με τη συμμετοχή του σε διαφορετικές κοινότητες εντός και εκτός του σχολείου.

Διδακτική πλαισίωση της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη: κοινωνικά, πολιτισμικά & πολιτικά χαρακτηριστικά

Το αφήγημα της μαθηματικής εκπαίδευσης περιλαμβάνει τρεις κυρίαρχες αναγνώσεις της μάθησης και της διδασκαλίας. Αρχικά, την ατομική, με κεντρικές οπτικές αυτές του κονστρουκτιβισμού και του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, όπου η έμφαση βρίσκεται στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης και της αυτονομίας στη μάθηση του μαθητή. Στη συνέχεια, την κοινωνικο-πολιτισμική, η οποία επικεντρώνεται στις εμπειρίες των μαθητών, στα κεφάλαια και τους πόρους (funds and resources) της γνώσης τους και στοχεύει στην ανάπτυξη της μάθησης που βασίζεται στη γνώση και στο πολιτισμικό υπόβαθρο των μαθητών. Τέλος, την κοινωνικοπολιτική, που αναδεικνύει το ρόλο του ευρύτερου πλαισίου, εστιάζοντας σε θέματα εξουσίας.

Την ανωτέρω πορεία ανάπτυξης των τριών αυτών κρίσιμων αναγνώσεων, η οποία δεν υπήρξε γραμμική ούτε υποδηλώνει κάποια ιεραρχία, αλλά συμπληρωματικότητα μάλλον στον τρόπο κατανόησης των παραμέτρων της μαθηματικής εκπαίδευσης, συνοδεύει μια παράλληλη πορεία εξέλιξης σε ό,τι αφορά ζητήματα παροχής ίσων ευκαιριών μάθησης. Η ισότητα ευκαιριών γίνεται αντιληπτή στην αρχή ως ανάγκη όλοι οι μαθητές να αποκτήσουν πρόσβαση σε ‘πλούσια μαθηματικά’ και να τους παρέχονται οι ίδιες για όλους ευκαιρίες να κατασκευάσουν τις δικές τους κατανοήσεις, αργότερα ως διανομή δίκαιων ευκαιριών για εννοιολογική κατανόηση και συμμετοχή στην τάξη μέσω συνεργατικών μορφών μάθησης, στη συνέχεια ως αξιοποίηση του πολιτισμικού κεφαλαίου / των πόρων γνώσης τους, και σήμερα ως ζήτημα κοινωνικής δικαιοσύνης. Και σε αυτήν την περίπτωση η εξέλιξη δεν είναι γραμμική, ούτε είναι πάντοτε σαφής ο διαχωρισμός μεταξύ των διαφορετικών κατανοήσεων της ισότητας των ευκαιριών στην εκπαίδευση των μαθηματικών.

Οι Civil, Hunter, και Crespo (2019), σε μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που συνδέεται με την έννοια της ισότητας στη μαθηματική εκπαίδευση κατά τη δεκαετία 2008 – 2018, υιοθετώντας την έννοια της ισότητας ως ευκαιρίας συμμετοχής, επιχειρούν να χαρτογραφήσουν διδακτικές πρακτικές που συμβάλλουν στην αύξηση της συμμετοχής στην τάξη των μαθηματικών, ιδίως των ‘περιθωριοποιημένων’ μαθητών. Η χαρτογράφηση που αποτυπώνουν προσφέρει έναν ενδιαφέροντα τρόπο ανάγνωσης της συμμετοχής των μαθητών σε μαθηματικά αλλά και σε κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά προκλητικές δραστηριότητες στην τάξη, που απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς να απομακρυνθούν από:

«Γνωστικές διαφορές/επιδόσεις των μαθητών … προς σημειωτικές αλληλεπιδράσεις τους μέσα σε μαθηματικές πρακτικές ή δραστηριότητες που βρίσκονται σε ένα ευρύτερο ιστορικό/κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο … η αντιμετώπιση της γνωστικής δράσης με όρους συμβολικής διαμεσολάβησης σημαίνει ότι διαφορετικά άτομα θα αλληλοεπιδράσουν με σημειωτικά διαφορετικούς τρόπους. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν ότι, παράγοντας διαφορετικά νοήματα, οι μαθητές διαμορφώνουν ξεχωριστές ανάγκες…» (Frade et al., 2013, σελ. 116)

Αναζητώντας πρακτικές των εκπαιδευτικών που επιδιώκουν την ανάπτυξη μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία προσφέρουν ίσες ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές, οι Civil, etal. (2019) αναγνωρίζουν τρεις κυρίαρχες κατηγορίες, κυρίως κοινωνικο-πολιτισμικού και κοινωνικο-πολιτικού χαρακτήρα, οι οποίες παρουσιάζονται με συντομία στη συνέχεια: τις συμπεριληπτικές, τις πολιτισμικά υποστηριζόμενες και τις κοινωνικής δικαιοσύνης.

Συμπεριληπτικές Διδακτικές Πρακτικές των Μαθηματικών (Σ-ΔΠ): αναγνωρίζουν ότι ορισμένοι μαθητές μαθαίνουν περισσότερο κι άλλοι λιγότερο στην τάξη των μαθηματικών, όχι μόνο λόγω των προσωπικών τους χαρακτηριστικών, αλλά και της άνισης πρόσβασης στις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στην τάξη.

Διδακτικές πρακτικές αυτής της κατηγορίας αφορούν αρχικά τη διαχείριση των έμφυλων ανισοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση (π.χ., Leder, 1992). Επιπλέον, την ομιλία/συζήτηση στην τάξη των μαθηματικών, η ποσότητα και η ποιότητα της οποίας έχει σημασία για τη μάθηση των μαθητών - όσο περισσότερο οι μαθητές μιλούν, τόσο περισσότερο μαθαίνουν (O'Connor, 1998). Ωστόσο, η συζήτηση είναι συχνά άνισα κατανεμημένη στους μαθητές: αυτοί που χρειάζονται περισσότερες ευκαιρίες να μιλήσουν και να μοιραστούν τις ιδέες τους είναι εκείνοι που περιθωριοποιούνται στην τάξη των μαθηματικών (π.χ. Crespo & Featherstone, 2012). Ακόμη, συμπεριληπτικές διδακτικές πρακτικές θεωρούνται αυτές που υποστηρίζουν την αξιοποίηση των συμμαθητών ως πολύτιμων πόρων μάθησης, αποδίδοντας αξία σε παραγωγικές αλληλεπιδράσεις μάθησης μεταξύ συμμαθητών στην τάξη.

Πολιτισμικά Υποστηριζόμενες Διδακτικές Πρακτικές των Μαθηματικών (ΠΥ-ΔΠ): στοχεύουν σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα τόσο ισότιμο όσο και πολιτισμικά διαφορετικό, με προγράμματα σπουδών και παιδαγωγικές πρακτικές που ανταποκρίνονται στις πολιτισμικές αξίες των μαθητών. Επιθυμητές διδακτικές πρακτικές σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εκείνες που αξιοποιούν τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά, τις εμπειρίες και τις προοπτικές τους, υποστηρίζουν την ανάπτυξη πολιτισμικά ευαίσθητων κοινοτήτων μάθησης, ενθαρρύνουν την διαπολιτισμική επικοινωνία και ανταποκρίνονται στην εθνοτική ποικιλομορφία κατά τη διδασκαλία (Johnson, 2014). Κι ακόμη, διδακτικές πρακτικές με ‘κοινωνικο-πολιτική’ επίγνωση, που υποστηρίζουν «το γλωσσικό και πολιτισμικό πλουραλισμό ως μέρος του δημοκρατικού σχεδίου εκπαίδευσης και ως αναγκαία απάντηση στη δημογραφική και κοινωνική αλλαγή» (Paris & Alim, 2014, σελ. 88).

Ακρογωνιαίο λίθο αυτής της οπτικής της διδασκαλίας των μαθηματικών αποτελεί η συστηματική υποστήριξη όλων των μαθητών για πρόσβαση σε κρίσιμες κατανοήσεις της ‘πειθαρχίας των μαθηματικών’. Προϋποθέσεις αποτελούν ο εκπαιδευτικός που κατανοεί τους μαθητές ως ‘πολιτισμικά όντα’, η οικοδόμηση σχέσεων εμπιστοσύνης και ισχυρών δεσμών με την κοινότητα (καθώς μαθητές, γονείς και κοινότητα θεωρούνται εν δυνάμει συνεργάτες και πόροι για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών), η προσφορά ευκαιριών συμμετοχής όλων στον μαθηματικό λόγο, μέσα από την αξιοποίηση στην τάξη των τρόπων «ύπαρξης και δράσης που χαρακτηρίζουν την πολιτισμική τους πραγματικότητα, συμπεριλαμβανομένων των γλωσσών του σπιτιού, των τρόπων ομιλίας τους, της χρήσης του χιούμορ και των αξιών που δεν συναντώνται απαραίτητα σε άλλους τομείς της σχολικής τους εκπαίδευσης» (Civil & Hunter, 2015, σελ. 308).

Διδακτικές Πρακτικές των Μαθηματικών για Κοινωνική Δικαιοσύνη (ΚΔ-ΔΠ): αφορούν στη διαχείριση των σχέσεων εξουσίας και των εντάσεων που προκύπτουν μεταξύ των αναδυόμενων στόχων κοινωνικής δικαιοσύνης και των στόχων των μαθηματικών. Απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς κατανόηση του εαυτού τους προσωπικά αλλά και σε σχέση με τους άλλους, καθώς και των διαφόρων δομών εξουσίας και του ρόλου τους στην εκπαίδευση. Μια τέτοια κατανόηση είναι χρονοβόρα και προϋποθέτει συνεργασίες, διάλογο και διάθεση για πειραματισμό με διαφορετικές προσεγγίσεις και έργα στην τάξη, που συχνά συνοδεύονται από εντάσεις, οι οποίες αφορούν στο μαθηματικό περιεχόμενο σε αντιπαράθεση με το πλαίσιο, τα έργα που δίνονται, την καταλληλότητα του επιπέδου και της φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας, κ.ά. (π.χ., Felton-Koestler, 2019).

Σημαντική παράμετρο των διδακτικών πρακτικών αυτής της κατηγορίας αποτελεί η αντίδραση των μαθητών σε ζητήματα κοινωνικής δικαιοσύνης. Η Vithal (2012) περιγράφει τις προκλήσεις γύρω από τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της συμμετοχής των μαθητών σε πραγματικά και σχετικά προβλήματα. Αναφέρει την ανάγκη μιας παιδαγωγικής της σύγκρουσης και του διαλόγου και προσθέτει την ανάγκη για μια παιδαγωγική της συγχώρεσης:

«Μια παιδαγωγική της σύγκρουσης και του διαλόγου για μια μαθηματική εκπαίδευση για ισότητα και κοινωνική δικαιοσύνη ανοίγει πάντοτε πληγές, έτσι ώστε η αλήθεια να γίνει γνωστή … κατανοητή. Καθένας μαθαίνει με το να βρίσκεται στη θέση και στην εμπειρία του 'Άλλου'. Όμως, μια τέτοια παιδαγωγική, για να μη διακινδυνεύσει να βαθύνει τις διαιρέσεις και τη διαφορά, πρέπει να προσφέρει ένα μέσο θεραπείας. Μια παιδαγωγική της συγχώρεσης ενσωματώνεται σε συγκρούσεις και διάλογο, ένα σημείο ελπίδας και δημιουργικής δράσης» (Vithal, όπ. π., σελ. 9)

Συνοψίζοντας, στις συμπεριληπτικές διδακτικές πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών η έμφαση βρίσκεται στην απομάκρυνση από μορφές που ‘αποκλείουν’ και στηρίζονται στην αντίληψη ότι κάθε μαθητής συμβάλλει στην μαθηματική ενδυνάμωση στην τάξη. Οι πολιτισμικά υποστηριζόμενες διδακτικές πρακτικές αντιμετωπίζουν τις εμπειρίες των μαθητών (στο σπίτι ή / και στην κοινότητα) ως μαθηματικά πλούσιες και στηρίζονται σε αυτές τις εμπειρίες. Τέλος, οι διδακτικές πρακτικές για κοινωνική δικαιοσύνη εμπλέκουν τους μαθητές στην αξιοποίηση των μαθηματικών για να αναλύσουν κριτικά σχετικά ζητήματα.

Συμπερασματικά

Στόχος της παροχής μαθηματικών προκλήσεων είναι η ενδυνάμωση των μαθητών τόσο ως ατόμων όσο και ως μελών μιας κοινωνίας πολιτών. Σε αυτήν την κατεύθυνση, η διδακτική διαχείριση μιας μαθηματικής πρόκλησης προϋποθέτει την ενεργοποίηση των ‘μαθηματικών δυνάμεων’ που ο κάθε μαθητής φέρνει στην τάξη και την επίγνωση της λειτουργίας της σε μικρο- και μακρο- επίπεδο. Αυτό προϋποθέτει την αποδοχή, την αξιοποίηση και, ακόμη περισσότερο, την ενεργοποίηση των κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικών χαρακτηριστικών κάθε μαθητή κατά τη διδακτική πράξη, παρέχοντας έτσι σε όλους τη δυνατότητα ανάπτυξης μαθηματικής ισχύος με συνέπειες στην ακαδημαϊκή, προσωπική, επαγγελματική και ευρύτερα κοινωνική τους επιτυχία. Κι ακόμη παρέχοντάς τους τη δυνατότητα ενίσχυσης της κριτικής συνείδησης και της δημοκρατικής ιδιότητας του πολίτη. Μακροπρόθεσμος στόχος μια τέτοιας προσέγγισης είναι η κοινωνική αλλαγή μέσω της ενδυνάμωσης των αυριανών πολιτών και της εκπαίδευσής τους στη βάση αρχών και διαδικασιών που οδηγούν σε μια πιο δίκαιη και ισότιμη κοινωνία, ·δηλαδή μέσω της ενίσχυσης της δημοκρατίας.

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 3: ΕΠΑΓΓΕΜΑΤΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ

Στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών η στροφή στον εκπαιδευτικό και στην επαγγελματική του εξέλιξη αρχίζει με προσπάθειες εστίασης στις γνωστικές ανάγκες των μαθητών καθώς και στην έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση και στην ανάπτυξη συλλογισμού και στρατηγικών επίλυσης προβλήματος. Έχουμε κυρίως εστίαση στην ανάπτυξη της γνώσης των εκπαιδευτικών ώστε να υποστηρίζει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών και ένας μεγάλος αριθμός ερευνών ασχολείται με τις διαστάσεις αυτής της γνώσης και με το πώς αυτή μπορεί να αναπτυχθεί (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Ο εκπαιδευτικός που έχει αναπτύξει αυτή τη γνώση αναμένεται να θέτει καταστάσεις μαθηματικής πρόκλησης λαμβάνοντας υπόψη τις γνωστικές ανάγκες των μαθητών. Ένας αριθμός ερευνών εστιάζει στην ανάπτυξη της γνώσης των εκπαιδευτικών με προσεγγίσεις που είναι όλο και περισσότερο ενσωματωμένες στην πρακτική της διδασκαλίας. Έτσι έχουμε πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης, όπως μελέτη μαθήματος (Hart, Alston & Murata, 2011), παρατήρηση και μελέτη βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών (Wallin & Amador, 2019), ή κοινότητες διερεύνησης με βασικό στοιχείο τον αναστοχασμό (Jaworski, 2008). Οι πρακτικές αυτές εστιάζουν κυρίως στη σύνδεση της διδασκαλίας με τα γνωστικά χαρακτηριστικά των μαθητών, ενώ πρόσφατα η έρευνα μελετά πώς οι εκπαιδευτικοί μπορούν να πάρουν υπόψη τους τις ανάγκες μαθητών από διαφορετικά κοινωνικά ή πολιτισμικά υπόβαθρα. Στην τελευταία περίπτωση, οι ομάδες και κοινότητες διερεύνησης γίνονται πιο διευρυμένες, ενώ αντικείμενο μελέτης γίνεται το πώς οι μαθητές μπορούν να έχουν ίσες ευκαιρίες συμμετοχής σε ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα (Civil, Hunter & Crespo, 2019).

Στην εισήγησή μου θα αναφερθώ σε πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού Προγράμματος, EDUCATE [1], το οποίο συντονίζεται από το πανεπιστήμιο της Κύπρου και έχει ως στόχο την υποστήριξη των εκπαιδευτικών ώστε να σχεδιάζουν και να διαχειρίζονται στη διδασκαλία τους μαθηματικά προκλητικές δραστηριότητες που να μπορούν να εμπλέκουν όλους τους μαθητές στην τάξη. Συγκεκριμένα θα περιγράψω το πλαίσιο επαγγελματικής εξέλιξης καθώς και τις κατανοήσεις και διδακτικές πρακτικές που ανέπτυξαν οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί.

Το πλαίσιο και οι πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης

Στο πρόγραμμα EDUCATE συμμετείχαν 4 χώρες και σε κάθε χώρα εκπαιδεύτηκαν περίπου 20 εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μελλοντικοί και εν ενεργεία). Στην Ελλάδα σχηματίστηκαν 4 ομάδες εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με 5-6 άτομα στην κάθε ομάδα. Θα αναφερθώ σε μια ομάδα εκπαιδευτικών Λυκείου με τους οποίους συνεργάστηκα κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2018-2019. Στην ομάδα συμμετείχαν 6 έμπειροι εκπαιδευτικοί που δίδασκαν μαθηματικά σε Γενικά Λύκεια της Αττικής καθώς και τρεις ερευνητές και πραγματοποιήθηκαν 8 τρίωρες συναντήσεις.

Στις συναντήσεις οι εκπαιδευτικοί ταξινόμησαν προβλήματα σε σχέση με τη μαθηματική πρόκληση που μπορούσαν να δημιουργήσουν στην τάξη, συζήτησαν γύρω από πρακτικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας και μαθηματικής πρόκλησης σε διάφορες φάσης της διδασκαλίας και συνέδεσαν αυτές τις πρακτικές με την κουλτούρα της τάξης. Οι παραπάνω συζητήσεις βασίστηκαν σε υλικό που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος όπου οι εκπαιδευτικοί αντιμετώπιζαν φαινόμενα διδασκαλίας που παρουσιάζονταν κυρίως μέσα από περιγραφές και βιντεοσκοπημένα επεισόδια από σχολική τάξη.

Οι εκπαιδευτικοί, στηριζόμενοι στις παραπάνω δράσεις, σχεδίαζαν και πραγματοποιούσαν μαθήματα (3 διδασκαλίες ο καθένας), τα οποία βιντεοσκοπούσαν και επέλεγαν σύντομα επεισόδια που σχετίζονταν με ζητήματα που είχαν συζητηθεί στις συναντήσεις σχετικά με τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας και μαθηματική πρόκληση. Τα επεισόδια αυτά τα παρουσίαζαν στις συναντήσεις και γινόταν συζήτηση πάνω στις πρακτικές διδασκαλίας που χρησιμοποιούσαν.

Παρακάτω παρουσιάζω πώς η μαθηματική πρόκληση και η διαφοροποίηση εμφανίστηκαν στον σχεδιασμό των εκπαιδευτικών, κατά τις διδασκαλίες τους στην τάξη καθώς και στις συναντήσεις.

Η νοηματοδότηση της μαθηματικής πρόκλησης

Η μαθηματική πρόκληση φάνηκε οικεία έννοια στους εκπαιδευτικούς αλλά ο τρόπος που ο κάθε εκπαιδευτικός την κατανοούσε και την έφερνε στην τάξη του ήταν διαφορετικός. Οι δραστηριότητες που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί αφορούσαν α) προβλήματα μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης όπως για παράδειγμα την τοποθέτηση ενός καθρέπτη στον τοίχο του δωματίου ώστε να φαίνεται ολόκληρο το είδωλό μας όταν είμαστε σε απόσταση ενός μέτρου από τον καθρέπτη, β) τη διατύπωση και τεκμηρίωση μιας εικασίας μέσα από μια γεωμετρική διερεύνηση, γ) την κατασκευή προβλημάτων από τους μαθητές που η λύση τους να εκφράζεται μέσα από την επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού, δ) την κατασκευή σχημάτων μέσα από τη χρήση χειραπτικών υλικών, για παράδειγμα την κατασκευή τριγώνων μέσα από ξύλινες ράβδους διαφορετικών μηκών και ε) την επίλυση ασκήσεων υψηλής δυσκολίας όπως για παράδειγμα πολυωνυμικών εξισώσεων ή εφαρμογή των τύπων Vieta.

Η μαθηματική πρόκληση φάνηκε για κάποιους να έχει στοιχεία μαθηματικής διερεύνησης και ανάπτυξη συλλογισμών καθώς και διατύπωση ορισμών, ενώ για άλλους εκπαιδευτικούς να απαιτεί πολύπλοκες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και έμφαση στην ακρίβεια και αυστηρότητα των μαθηματικών. Στη διδασκαλία στην τάξη η μαθηματική πρόκληση και η διατήρηση της εκφράστηκε μέσα από ερωτήσεις επέκτασης, μέσα από πολύ μειωμένο βαθμό παρέμβασης, μέσα από ερωτήσεις επεξήγησης, και μέσα από νόρμες επικοινωνίας και συνεργασίας που προσπάθησαν οι εκπαιδευτικοί να δημιουργήσουν.

Το παρακάτω απόσπασμα από τη συζήτηση στη δεύτερη συνάντηση δείχνει τις διαφορετικές θέσεις των εκπαιδευτικών σε σχέση με τη μαθηματική πρόκληση. Ο εκπαιδευτικός Τ3 παρουσιάζει το μάθημα που έκανε σε μια τάξη της Α΄ Λυκείου όπου εισάγει τις ρίζες ανώτερης τάξης μέσα από την εύρεση της πλευράς ενός τετραγώνου όταν είναι γνωστό το εμβαδόν του. Ο στόχος του είναι οι μαθητές να καταλήξουν στον ορισμό της ρίζας. Η αντίθεση εμφανίζεται κυρίως ανάμεσα στον εκπαιδευτικό Τ3 και στον Τ5. Ο Τ5 βλέπει ότι το γεωμετρικό πλαίσιο είναι περιοριστικό καθώς αναπαριστάνει μόνο θετικούς αριθμούς και αναρωτιέται τι έμαθαν τελικά οι μαθητές μέσα από μια τέτοια δραστηριότητα. Ο Τ3 θεωρεί ότι αυτό που έμαθαν οι μαθητές ήταν η μαθηματική διερεύνηση:

> Η μεγάλη πρόκληση εδώ είναι ότι για πρώτη φορά διερωτόμαστε γιατί χρειάζομαι αυτό [την τετραγωνική ρίζα], το δεύτερο είναι η εμβάθυνση σε αυτές τις έννοιες πέρα από τον ορισμό. Δεν υπάρχει αυτό το βάθος όταν δίνω τον ορισμό και αρχίζω να κτίζω στον ορισμό...

Ο Τ5 σχολιάζει προσπαθώντας να δει ακριβώς ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο:

> Το πρώτο ζήτημα που βλέπω είναι ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας και το άλλο το είδος των αριθμών. Θα έδινα έμφαση στον ορισμό των ριζών, τι είναι αυτά τα πράγματα, πώς ορίζονται. Η ρίζα είναι μια διαδικασία και αυτό δικαιολογεί το σύμβολο. Είναι σημαντικό να εισάγουμε τους μαθητές στη διαδικασία που οδηγεί στη ρίζα. Και για αυτό χρησιμοποιώ το σύμβολο... και είναι άλλο πράγμα η φύση των αριθμών ότι το $\sqrt{9}$ είναι ακέραιος ενώ το $\sqrt{2}$ δεν είναι ... βλέπω δύο διαφορετικά θέματα.

Στην παραπάνω συζήτηση η μαθηματική πρόκληση αντιμετωπίζεται από τον Τ5 μέσα από την έμφαση στο περιεχόμενο και στον συμβολισμό αναζητώντας την ακρίβεια και την αυστηρότητα των μαθηματικών ενώ ο Τ3 βλέπει την πρόκληση μέσα στην προσπάθεια των μαθητών να οδηγηθούν μόνοι τους στην έννοια της ρίζας νιοστής τάξης.

Η νοηματοδότηση της διαφοροποίησης της διδασκαλίας

Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας με βάση τις ανάγκες των μαθητών εμφανίστηκε στον σχεδιασμό των μαθημάτων από τους εκπαιδευτικούς μέσα από α) τη διατύπωση προβλημάτων που επιδέχονται περισσότερες από μια λύση όπως για παράδειγμα το σχεδιασμό καθέτων ευθυγράμμων τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις πλευρές τετραγώνου, β) τη διάθεση εργαλείων όπως τετραγωνισμένο χαρτί, χειραπτικό ή ψηφιακό υλικό, αναπαραστάσεις, γ) την εργασία των μαθητών σε ομάδες με βάσει την προτίμηση τους ή την επίδοση τους, δ) τη χρήση πλαισίου οικείου στους μαθητές, ε) τις διαφορετικής δυσκολίας ασκήσεις και στ) γραπτές υποδείξεις που οι μαθητές θα χρησιμοποιούσαν όταν θα χρειάζονταν βοήθεια.

Στην τάξη πρακτικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας κυρίως εκφράστηκαν από την υπενθύμιση προηγούμενων γνώσεων, τη συζήτηση γύρω από το πραγματικό πλαίσιο και τις βασικές μαθηματικές ιδέες της δραστηριότητας κυρίως στην αρχή του μαθήματος, την παροχή ατομικής βοήθειας όταν οι μαθητές τη χρειάζονταν μέσα από εστιασμένες ερωτήσεις, στην ενθάρρυνση των μαθητών να εκφράσουν τις σκέψεις τους και να ακούσουν τη σκέψη των συμμαθητών τους, καθώς στη συζήτηση στην τάξη των διαφορετικών λύσεων των μαθητών.

Από την πρώτη συνάντηση οι εκπαιδευτικοί αναζητούσαν το νόημα της διαφοροποίησης που διαμορφωνόταν μέσα από την αλληλεπίδραση με τα υλικά του προγράμματος και τις συζητήσεις. Διαφορετικές απόψεις εκφράζονταν από τους εκπαιδευτικούς ιδιαίτερα στις αρχικές συναντήσεις. Απόψεις όπως «κάθε μαθητής μπορεί να σκεφτεί», «πρέπει να γνωρίζουμε τους μαθητές μας για να κάνουμε διαφοροποίηση», «είναι δύσκολο γιατί κάποιοι μαθητές έχουν πολλές δυσκολίες» καθόρισαν σε μεγάλο βαθμό τις κατανοήσεις που αναπτύχθηκαν. Όλοι οι εκπαιδευτικοί έβαλαν τους μαθητές τους να δουλέψουν σε ομάδες και είδαν αυτό βοηθούσε όλους τους μαθητές να εμπλακούν. Οι εκπαιδευτικοί περιέγραψαν ως στοιχεία διαφοροποίησης προσεγγίσεις που δοκίμασαν στις διδασκαλίες τους όπως η σύνδεση αλγεβρικού και γεωμετρικού πλαισίου, η σταδιακή γενίκευση των απαιτήσεων του προβλήματος, η χρήση εργαλείων για πειραματισμό, η κατασκευή προβλημάτων από τους μαθητές και η χρήση γραπτών υποδείξεων.

Συμπερασματικά σχόλια

Το πλαίσιο επαγγελματικής εξέλιξης όπου οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούσαν με τα υλικά του προγράμματος, και συζητούσαν τις διδασκαλίες τους αναφορικά με τη μαθηματική πρόκληση και τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας υποστήριξε καινούριες κατανοήσεις και πρακτικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί συνεχίζουν και την τρέχουσα σχολική χρονιά τη συνεργασία πέρα από το πλαίσιο του προγράμματος. Δημιουργείται έτσι μια κοινότητα εκπαιδευτικών όπου η μαθηματική πρόκληση για όλους τους μαθητές γίνεται ένα ζήτημα από κοινού διερεύνησης.

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 4: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Η σύνδεση και οι διαφορές μεταξύ των μαθηματικών του πανεπιστημίου και αυτών της σχολικής τάξης έχουν συζητηθεί στη βιβλιογραφία κυρίως στο πλαίσιο της μετάβασης από τη σχολική τάξη στο πανεπιστήμιο (Gueudet, 2008). Αυτό ήταν και το θέμα του στρογγυλού τραπεζιού στο προηγούμενο συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ. (Μπαμπίλη κ.ά., 2017). Για αυτό το στρογγυλό τραπέζι και αναφορικά με τη μαθηματική πρόκληση στη σχολική τάξη πιο σχετικό είναι ένα άλλο είδος μετάβασης: η μετάβαση των εκπαιδευτικών, ή μελλοντικών εκπαιδευτικών για την ακρίβεια, από τις σπουδές τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση στη σχολική τάξη. Αυτή η διπλή μετάβαση απο το σχολείο (ως μαθητής) στο πανεπιστήμιο (ως φοιτητής) και μετά από το πανεπιστήμιο (ως φοιτητής) στην τάξη (ως εκπαιδευτικός) περιγράφεται από τον Klein (1908/1932) ως *διπλή ασυνέχεια* (*double discontinuity*). Το δεύτερο τμήμα αυτής της ασυνέχειας είναι μία πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς που καλούνται να εφαρμόσουν στην τάξη αυτά που μαθαίνουν στο πανεπιστήμιο. Ένα θέμα για συζήτηση στο στρογγυλό τραπέζι είναι εάν και πώς το πανεπιστήμιο προετοιμάζει (ή θα μπορούσε να προετοιμάζει) τους εκπαιδευτικούς για μία τάξη μαθηματικής πρόκλησης.

Σύμφωνα με τον Klein (1908/1932), ο εκπαιδευτικός χρειάζεται γνώση που είναι *ευρύτερη* από αυτή που θα διαχειριστεί στη τάξη και αναμένεται να είναι προετοιμασμένος για τις δυσκολίες των μαθητών ώστε να μπορεί να τους βοηθήσει να τις ξεπεράσουν. Ακόμα περισσότερο είναι αναγκαίο να νιώθει σιγουριά για να μπορέσει να προκαλέσει τους μαθητές μαθηματικά και να ανταποκριθεί στο απαιτητικό κλίμα της τάξης. Τι είναι όμως αυτό που στοιχειοθετεί αυτή την *ευρύτητα* στην γνώση;

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι πτυχιούχοι μαθηματικών τμημάτων και εκείνοι της πρωτοβάθμιας έχουν παρακολουθήσει μαθήματα μαθηματικών στις πανεπιστημιακές σπουδές τους. Γενικά, υπάρχει η παραδοχή ότι ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο του εκπαιδευτικού είναι *αναγκαίο* για την υψηλή ποιότητα του μαθήματος. Είναι όμως και *ικανό;*

Ο Winsløw (2014), για παράδειγμα, περιγράφει διαφορετικές μαθηματικές πρακτικές (praxeologies) στο πανεπιστήμιο από αυτές που συναντάμε στο σχολείο. Αυτό που θεωρείται ως αποδεκτή δραστηριότητα, τεχνική, μεθοδολογία ή θεωρία στο πανεπιστήμιο είναι διαφορετικό από αυτό που χρησιμοποιείται στο σχολείο. Όταν οι εκπαιδευτικοί δεν είναι προετοιμασμένοι να αναγνωρίσουν και να αντιμετωπίσουν αυτές τις διαφορές, δυσκολεύονται να μετατρέψουν ό,τι έχουν μάθει σε διδακτική πράξη. Κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι στόχος των πανεπιστημιακών μαθηματικών είναι να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να διευρύνουν τον *Μαθηματικό Ορίζοντά* τους (Ball, Thames & Phelps, 2008). Ο Ορίζοντας αυτός θεωρείται η διεύρυνση του μαθηματικού περιεχομένου πέρα από το σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα (Papadaki, 2019; Zoitsakos, Zachariades & Sakonidis, 2018). Οι Zazkis and Mamolo (2011) βλέπουν τον Ορίζοντα ως *εφαρμογή της προχωρημένης μαθηματικής σκέψης* σε μία διδακτική κατάσταση. Οι Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernandez και Deulofeu (2011) κριτικάρουν αυτή την οπτική και ισχυρίζονται ότι πέρα από την προχωρημένη μαθηματική σκέψη, ο βαθύτερος αναστοχασμός πάνω στις μαθηματικές ιδέες και στις συνδέσεις τους είναι απαραίτητος για τους εκπαιδευτικούς. Σε συμφωνία με αυτή την οπτική, οι Jakobsen, Thames, Ribeiro και Delaney (2012) βλέπουν τον Ορίζοντα περισσότερο ως τον *προσανατολισμό*, την *εξοικείωση* με το μαθηματικό αντικείμενο και την *επίγνωση* των μαθηματικών αρχών και δομών που συνεισφέρουν στη διδασκαλία στο σχολείο δείχνοντας στους εκπαιδευτικούς πώς το περιεχόμενο του αναλυτικού πρόγραμματος συνδέται με την ευρύτερη μαθηματική θεωρία. Ποιες είναι όμως οι προτεραιότητες αυτών που διδάσκουν μαθηματικά στο πανεπιστήμιο;

Κατά κανόνα, στα μαθηματικά τμήματα, τα προπτυχιακά μαθήματα των μαθηματικών διδάσκονται από μαθηματικούς (πολύ συχνά ενεργούς ερευνητές) και απευθύνονται σε φοιτητές που έχουν επιλέξει να σπουδάσουν μαθηματικά ανεξάρτητα με το αν τελικά θα εργαστούν στην εκπαίδευση. Στα παιδαγωγικά τμήματα, τα μαθηματικά μπορεί να διδάσκονται από ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών. Οι πρακτικές των ερευνητών μαθηματικών είναι διαφορετικές από αυτές των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών όταν διδάσκουν μαθηματικά σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Για παράδειγμα, οι Cooper και Zaslavsky (2017) παρατήρησαν ότι σε μαθήματα για μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, ο ερευνητής μαθηματικός εστιάζει στην ορθότητα της απόδειξης που προτείνεται, ενώ η ερευνήτρια της διδακτικής στο άτομο που παράγει την απόδειξη και στις διδακτικές διαστάσεις της εμπλοκής του με αυτήν την απόδειξη. Τι θεωρούν όμως οι εκπαιδευτικοί ως χρήσιμο στα μαθήματα που παρακολούθησαν στο πανεπιστήμιο για τη διδασκαλία τους στη τάξη;

Η έρευνα έχει δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η πανεπιστημιακή γνώση σχετικά με μαθηματικές έννοιες, επίλυση προβλήματος, χρήση των μαθηματικών σε άλλα γνωστικά αντικείμενα αλλά και ο ρόλος της διαίσθησης στη μαθηματική δραστηριότητα επηρεάζουν τη διδασκαλία τους (π.χ., Zazkis & Leikin, 2010). Επιπλέον, αναγνωρίζουν ότι οι σπουδές τους ενισχύουν την αυτοπεποίθησή τους με το αντικείμενο και την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν τις δυσκολίες των μαθητών τους (ibid). Πρόσφατες μελέτες προτείνουν ότι η διδασκαλία στο πανεπιστήμιο από ερευνητές μαθηματικούς εισάγει τους φοιτητές σε πρακτικές βασισμένες στη μαθηματική έρευνα, όπως αξιοποίηση παραδειγμάτων, σύνδεση μαθηματικών περιοχών, οπτικοποίηση και απλοποίηση, οι οποίες μπορούν μετά να αξιοποιηθούν στην τάξη (Πετροπούλου, Μάλη & Μπιζά, 2019). Παρότι οι εκπαιδευτικοί ομολογούν ότι η εμπλοκή τους με το μαθηματικό περιεχόμενο συνεισφέρει στην ποιότητα του μαθήματός τους, εκφράζουν παράλληλα δυσκολία να δουν τη χρήση αυτών που έμαθαν στο πανεπιστήμιο στη σχολική τάξη (Zazkis & Leikin, 2010). Επιπλέον, πολύ συχνά οι εκπαιδευτικοί ενώ έχουν τις μαθηματικές γνώσεις και τις προσδοκίες να εμπλέξουν τους μαθητές τους στη μαθηματική πρόκληση, η σχολική πραγματικότητα, π.χ., το εξεταστικό σύστημα ή η διαχείριση της τάξης, τους αναγκάζουν να κάνουν *συμβιβασμούς* (practical rationality of teaching, Herbst & Chazan, 2003), άλλοτε ασυνείδητα και άλλοτε συνειδητά, με κριτήρια προσωπικά, επαγγελματικά ή και θεσμικά (Nardi, Biza & Zachariades, 2012). Πώς, επομένως, το πανεπιστήμιο προετοιμάζει (ή θα μπορούσε να προετοιμάζει) τους εκπαιδευτικούς για μία τάξη μαθηματικής πρόκλησης;

Η θέση μου είναι ότι τα πανεπιστημιακά μαθηματικά μπορούν να διευρύνουν τον Μαθηματικό Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών, πέρα από το αναλυτικό πρόγραμμα, όταν συνδυάζονται με τη παιδαγωγική διάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Μαθηματικό περιεχόμενο και παιδαγωγική θεωρία είναι αλληλένδετα με στόχο τη διαμόρφωση του *μαθηματικού και παιδαγωγικού λόγου* των εκπαιδευτικών. Η τοποθέτηση αυτή ενστερνίζεται απόψεις που ισχυρίζονται ότι αυτός ο λόγος μπορεί να αναπτυχθεί στο πλαίσιο και τη διαπραγμάτευση συγκεκριμένων διδακτικών καταστάσεων (Goodell, 2006). Τέτοιες καταστάσεις μπορεί να έχουν τη μορφή κρίσιμων συμβάντων (Goodell, 2006; Potari & Psycharis, 2018), δηλαδή συμβάντων που οι εκπαιδευτικοί θεωρούν σημαντικά για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στην τάξη τους. Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί χρειάζεται να αναπτύξουν τις δεξιότητες να μπορούν να τα δουν μέσα στην πολυπλοκότητα της σχολικής πραγματικότητας και στη συνέχεια να είναι σε θέση να αναστοχαστούν πάνω σε αυτά. Η συζήτηση για τα μαθηματικά ή για τη θεωρία της διδακτικής των μαθηματικών χωρίς συνδέσεις με συγκεκριμένες καταστάσεις δεν διευκολύνει τη δημιουργία συνδέσεων και την ανάπτυξη τεχνικών που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην τάξη. Όταν, για παράδειγμα, μια ευκαιρία για μαθηματική πρόκληση προσφέρεται στην τάξη μέσω της απάντησης ενός μαθητή, πώς θα μπορέσει ο εκπαιδευτικός να την αναγνωρίσει; πώς θα την αξιοποιήσει για το όφελος όλης της τάξης λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες των άλλων μαθητών; θα παρακάμψει το σχέδιο μαθήματος; ή θα την αγνοήσει παρασυρμένος από τη φασαρία στην τάξη και τη μη συμμετοχή των μαθητών; Αυτά είναι θέματα που δε μπορούν διακριθούν όταν η συζήτηση είναι θεωρητική και χωρίς πλαίσιο. Αντίθετα, αναδεικνύονται με σαφήνεια όταν η συζήτηση είναι πλαισιωμένη σε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις.

Στη δουλειά μας στο πρόγραμμα MathTASK (π.χ., Biza, Nardi & Zachariades, 2018; https://www.uea.ac.uk/education/mathtask), χρησιμοποιούμε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις για την έρευνα και την ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Δίνουμε στους εκπαιδευτικούς (μελλοντικούς ή εν ενεργεία) μία διδακτική κατάσταση που έχει σχεδιαστεί με βάση τη διδακτική εμπειρία και τα αποτελέσματα της έρευνας και τους ζητάμε να απαντήσουν γραπτά σε μία σειρά ερωτημάτων σχετικά με την εν λόγω κατάσταση και το πώς θα δρούσαν αν είχαν τον ρόλο του διδάσκοντα στη συγκεκριμένη τάξη. Μετά τους προσκαλούμε σε ανοιχτή ή σε μικρές ομάδες συζήτηση ή σε συνέντευξη. Η ανάλυση γραπτών απαντήσεων και της συζήτησης που ακολουθεί ανέδειξε τέσσερα χαρακτηριστικά των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών να αναγνωρίζουν κρίσιμα σημεία σε διδακτικές καταστάσεις και να διαμορφώνουν την αντίδρασή τους σε αυτά:

α) *Συνέπεια* ανάμεσα στις προτεραιότητες/αρχές που εκφράζει ο εκπαιδευτικός και πώς προτίθεται να αντιδράσει στον/στους μαθητή/ές της διδακτικής κατάστασης. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός λέει ότι η συμμετοχή των μαθητών είναι σημαντική στο μάθημά του, προτείνει ενέργειες που ενθαρρύνουν αυτή τη συμμετοχή ή απλά λέει στους μαθητές τι πρέπει να κάνουν;

β) *Εξειδίκευση* της απάντησης στη συγκεκριμένη κατάσταση της τάξης. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός μιλά για τα οφέλη της οπτικοποίησης, δίνει παραδείγματα σχετικά με το πλαίσιο της διδακτικής κατάστασης ή μιλά με γενικότητες;

γ) *Υποστασιοποίηση του παιδαγωγικού λόγου* όπως χρησιμοποιείται στη θεωρία της διδακτικής των μαθηματικών. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί θεωρητική ορολογία από τη διδακτική των μαθηματικών (π.χ., *εννοιολογική* και *διαδικαστική κατανόηση*) για να αναλύσει μία διδακτική κατάσταση όπου οι μαθητές εργάζονται με αλγεβρικές παραστάσεις, είναι η χρήση των όρων συνεπής με τη θεωρία και σχετική με τη κατάσταση που αναφέρονται; και

δ) *Υποστασιοποίηση του μαθηματικού λόγου* όπως χρησιμοποιείται στη μαθηματική θεωρία. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός αναφέρεται στα αριθμητικά σύνολα (π.χ., ακέραιους, φυσικούς, ρητούς αριθμούς) για να αναλύσει μία διδακτική κατάσταση όπου οι μαθητές εργάζονται με προβλήματα κλασμάτων, είναι αυτή η χρήση ορθή και σχετική με τη κατάσταση στην οποία αναφέρονται; (Biza et al., 2018).

Χρησιμοποιώ διδακτικές καταστάσεις στα μαθήματα της διδακτικής των μαθηματικών για προπτυχιακούς φοιτητές μαθηματικών στο πανεπιστήμιό μου και τα τέσσερα παραπάνω χαρακτηριστικά έχουν φανεί πολύ χρήσιμα στη διαμορφωτική και τελική αξιολόγηση των φοιτητών. Επίσης, η αναφορά στα χαρακτηριστικά διευκολύνει την σύνθεση και την ισορροπία του μαθηματικού και παιδαγωγικού λόγου που διαμορφώνουν αυτό που θεωρώ σημαντικό για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική πρόκληση στη σχολική τάξης.

ΣΥΝΘΕΣΗ

Μέσα από τις τέσσερις εισηγήσεις φαίνεται ότι η εισαγωγή της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη και στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών εδράζεται σε μια σειρά πολλαπλών μεταβάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση και τη διδασκαλία: από τον σχεδιασμό της διδασκαλίας στην υλοποίησή της και στην πολυπλοκότητα της διαχείρισης πολλαπλών μαθησιακών αναγκών και προφίλ των μαθητών στη σχολική τάξη, από τη σχολική τάξη και την προσπάθεια εξισορρόπησης μαθηματικής πρόκλησης και διαφοροποίησης στον διαμοιρασμό εμπειριών με συναδέλφους και ερευνητές στο πλαίσιο της ομάδας επαγγελματικής ανάπτυξης στο πανεπιστήμιο και, από τα μαθηματικά των πανεπιστημιακών σπουδών και τις προκλήσεις των προχωρημένων μαθηματικών στην παιδαγωγική διάσταση της μαθηματικής πρόκλησης στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ακολουθώντας μια ολιστική προσέγγιση της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη και την εκπαίδευση εκπαιδευτικών και οι τέσσερις εισηγήσεις φωτίζουν προβληματικές πτυχές αυτών των μεταβάσεων μιας και η μαθηματική πρόκληση φαίνεται να αυξάνει την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας και τα διλήμματα για τον εκπαιδευτικό.

Για παράδειγμα, στο επίπεδο του σχεδιασμού κατάλληλων δραστηριοτήτων εντοπίσαμε την ένταση μεταξύ της μαθηματικής πρόκλησης και της δυνατότητας ευθυγράμμισής της με τη μαθηματική εμπειρία κάθε μαθητή στην τάξη όπως και με την δημιουργική μαθηματική σκέψη. Στο επίπεδο της διδασκαλίας στην τάξη, αναγνωρίσαμε ως κεντρικό το ζήτημα της παροχής ίσων ευκαιριών μάθησης στους μαθητές και αναζητήσαμε τις διαφορετικές οπτικές μέσω των οποίων η υπάρχουσα έρευνα έχει φωτίσει το θέμα: ως δυνατότητα κατασκευής προσωπικών κατανοήσεων σε ‘πλούσια’ μαθηματικά, ως εννοιολογική κατανόηση και συμμετοχή στο μάθημα μέσω συνεργατικών μορφών μάθησης, ως αξιοποίηση του πολιτισμικού κεφαλαίου των μαθητών και ως ζήτημα κοινωνικής δικαιοσύνης.

Στην εκπαίδευση εν ενεργεία εκπαιδευτικών αναζητήσαμε δραστηριότητες και υλικά που θα μπορούσαν να τροφοδοτήσουν τη δημιουργία προβλημάτων και διδακτικών καταστάσεων από τους ίδιους προκειμένου να φέρουν τη μαθηματική πρόκληση στην τάξη και να την κάνουν προσβάσιμη για όλους τους μαθητές. Επίσης, αναγνωρίσαμε τις δυσκολίες εξισορρόπησης της μαθηματικής πρόκλησης και της διαφοροποίησης τόσο στον σχεδιασμό όσο και στην εφαρμογή γνωστικά απαιτητικών δραστηριοτήτων στην τάξη. Τέλος, αναδείξαμε τη διάσταση στις νοηματοδοτήσεις της μαθηματικής πρόκλησης από εν ενεργεία εκπαιδευτικούς με έμφαση είτε στη μαθηματική διερεύνηση και την ανάπτυξη συλλογισμών είτε στην πολυπλοκότητα των μεθόδων επίλυσης προβλήματος και την μαθηματική αυστηρότητα.

Στην εκπαίδευση μελλοντικών εκπαιδευτικών εντοπίσαμε την επιστημολογική διάσταση ανάμεσα στη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο μέσα από πρακτικές που βασίζονται στη μαθηματική έρευνα και στη διδασκαλία στη σχολική τάξη. Επίσης, θίξαμε την σχέση του μαθηματικού υπόβαθρου των εκπαιδευτικών με τη δυνατότητά τους να σχεδιάζουν μαθηματικά προκλητικές δραστηριότητες, ενώ αναφερθήκαμε στη ματαίωση των προσπαθειών των εκπαιδευτικών να εμπλέξουν τους μαθητές σε τέτοιες δραστηριότητες λόγω των αναγκαίων συμβιβασμών που προκαλεί η καθημερινή σχολική πραγματικότητα, το εξεταστικό σύστημα και η εδραιωμένη κουλτούρα.

Και οι τέσσερις εισηγήσεις, χωρίς να παρακάμπτουν τις διαστάσεις που αφορούν το μαθηματικό περιεχόμενο, συμβάλλουν στη διεύρυνση της οπτικής μας για την μαθηματική πρόκληση στη διδασκαλία φέρνοντας στην επιφάνεια μια σειρά από άλλες διαστάσεις όπως η χρήση (ψηφιακών και μη) πηγών και εργαλείων, η αναζήτηση κατάλληλων διδακτικών πρακτικών κοινωνικο-πολιτισμικού και κοινωνικο-πολιτικού χαρακτήρα, το είδος της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών είτε σε προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης είτε στο πανεπιστήμιο. Ένα κοινό στοιχείο όλων των εισηγήσεων είναι αναγνώριση της σημασίας των δραστηριοτήτων με τις οποίες εμπλέκονται μαθητές και εκπαιδευτικοί ως μαθητευόμενοι όπως και του κεντρικού ρόλου του εκπαιδευτικού στην εισαγωγή και τη διαχείριση της μαθηματικής πρόκλησης κατά τη διδασκαλία. Οι προτάσεις μας περιλαμβάνουν:

- Τη διάκριση των δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση όχι μόνο με βάση το μαθηματικό περιεχόμενο αλλά και την στόχευσή τους σε επιδιωκόμενες δράσεις των μαθητών όπως η δημιουργία μαθηματικού νοήματος, ο συστηματικός πειραματισμός και η ανάπτυξη στρατηγικών, η δημιουργική μαθηματική σκέψη.
- Την ανάπτυξη διδακτικών πρακτικών που ενισχύουν την παροχή ίσων ευκαιριών σε όλους τους μαθητές όπως: (α) πρακτικές συμπερίληψης που εστιάζονται στην διαχείριση των έμφυλων ανισοτήτων, στη συζήτηση στην τάξη, και την αξιοποίηση των αλληλεπιδράσεων των μαθητών ως πηγών μάθησης, (β) πολιτισμικά υποστηριζόμενες διδακτικές πρακτικές που αξιοποιούν στη διδασκαλία τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά των μαθητών, υποστηρίζουν την διαπολιτισμική επικοινωνία και τον γλωσσικό και πολιτισμικό πλουραλισμό και αξιοποιούν τις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών (π.χ. στο σπίτι) ως μαθηματικά πλούσιες, (γ) διδακτικές πρακτικές διαχείρισης των σχέσεων εξουσίας που εμπλέκουν τους μαθητές στην αξιοποίηση των μαθηματικών για να αναλύσουν με κριτικό τρόπο ζητήματα κοινωνικής δικαιοσύνης.
- Την ενίσχυση των προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών μέσα από πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης που μπορούν να υποστηρίξουν τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν κατανοήσεις για το τι σημαίνει ουσιαστική μαθηματική εμπλοκή όλων των μαθητών στην τάξη και διδακτικές πρακτικές για την επίτευξη του στόχου αυτού. Αυτές περιλαμβάνουν: τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων, τη συζήτηση διαφορετικών νοηματοδοτήσεων

για τη μαθηματική πρόκληση, την έμφαση στο είδος των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών (π.χ. «γιατί», ερωτήσεις επέκτασης) και γενικότερα στο είδος και την έκταση των παρεμβάσεών τους κατά τη διδασκαλία και την εστίαση στη δημιουργία κατάλληλων νορμών επικοινωνίας μέσα στην τάξη (π.χ. συζήτηση με όλη την τάξη, διαμοιρασμός ιδεών/λύσεων).

- Τη στόχευση της διδασκαλίας των πανεπιστημιακών μαθηματικών στη δημιουργία ενός μαθηματικού και παιδαγωγικού λόγου που θα διευρύνει τον Μαθηματικό Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών και παράλληλα θα αναδεικνύει την παιδαγωγική διάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Σε συμφωνία με υπάρχουσες προσεγγίσεις στον χώρο της εκπαίδευσης των (μελλοντικών) εκπαιδευτικών σε διεθνές επίπεδο, ο λόγος αυτός μπορεί να αναπτυχθεί στο πλαίσιο της διαπραγμάτευσης συγκεκριμένων διδακτικών καταστάσεων (π.χ. με τη μορφή υποθετικών καταστάσεων, κρίσιμων συμβάντων).

Σημειώσεις

1. Το πρόγραμμα με τίτλο «Enhancing Differentiated Instruction and Cognitive Activation in Mathematics Lessons by Supporting Teacher Learning (EDUCATE)» (Project reference: 2017-1-CY01-KA201-026749, Programme: Erasmus+) χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παρούσα δημοσίευση δεσμεύει μόνο τους συντάκτες της και η Επιτροπή δεν ευθύνεται για τυχόν χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Applebaum, M., & Leikin, R. (2014). Mathematical challenge in the eyes of the beholder: Mathematics teachers' views. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14*(4), 388–403.

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V.Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th edition) (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barbeau E., & P. Taylor (Eds.) (2009). *Mathematical challenge in and beyond the classroom: ICMI Study-16 Volume*. New York, NY: Springer.

Beghetto, R., & Kaufman, J. (2009). Do we all have multicreative potential? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(1-2), 39-44.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In T. Leuders, J. Leuders, & K. Philipp (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice,* (pp. 55-78). New York: Springer.

Boaler, J. (2002). Learning from teaching: Exploring the relationship between ‘reform’ curriculum and equity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(4), 239-258.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Civil, M., & Hunter, R. (2015). Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom. *Intercultural Journal*, *26*(4), 296–312.

Civil, M., Hunter, R. & Crespo, S. (2019). Mathematics Teachers Committed to Equity: A Review of Teaching Practices. In D. Potari & O. Chapman (Eds.) *The Handbook of Mathematics Teacher Education*, Vol.1 (pp. 231- 262). Leiden, Boston: Brill Sense.

Cooper, J., & Zaslavsky, O. (2017). A mathematics educator and a mathematician co-teaching mathematics – Affordances for teacher education. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 1945-1952). Dublin, Ireland.

Crespo, S., & Featherstone, H. (2012). Counteracting the language of math ability: Preservice teachers explore the role of status in elementary classrooms. In L. J. Jacobsen, J. Mistele, & B. Sriraman (Eds.), *Mathematics teacher education in the public interest* (pp. 159–179). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Felton-Koestler, M. (2019). Children know more than I think they do: The evolution of one teacher’s views about equitable mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(2), 153-177.

Figueiras, L., Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. (2011). Teacher’s advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 26-28.

Frade, C., Acioly-Régnier, N., & Jun, L. (2013). Beyond deficit models of learning mathematics: Socio-cultural directions for change and research. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *3rd International Handbook of Mathematics Education* (pp. 101-144). NY: Springer.

Goldenberg, E. P. (2019). Problem posing and creativity in elementary-school mathematics. *Constructivist Foundations, 14*(3), 319-331.

Goldenberg, E. P., Mark, J., Kang, J., Fries, M., Carter, C., & Cordner, T. (2015). *Making sense of algebra. Portsmouth.* NH: Heinemann.

Goodell, J. E. (2006). Using Critical Incident Reflections: A Self-Study as a Mathematics Teacher Educator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 221-248.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers’ views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33–56.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 237-254.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education*. Netherlands: Springer.

Herbst, P., & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: The case of engaging students in proving. *For the Learning of Mathematics*, *23*(1), 2–14.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. In *12th International Congress on Mathematical Education (12th ICME)* (pp. 4635–4644). Seoul, Korea.

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: Teachers and didacticians in collaboration. In K. Krainer & T. Wood (Eds.) *Participants in mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks. The international handbook of mathematics teacher education* (Vol.3, pp. 309-330). Rotterdam: Sense Publishers.

Johnson, L. (2014). Culturally responsive leadership for community empowerment. *Multicultural Education Review*, *6*(2), 145–170.

Klein, F. (1908/1932). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint* (trans: Hedrick, E., Noble, C.). London: MacMillan.

Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 597–622). NY: Macmillan Publishing.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students.* (Part IV—synthesis, Ch. 23, pp. 385–411). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Μπαμπίλη, Α., Μπούφη, Α., Στουραΐτης, Τριανταφυλλίδης, Τ., & Ναρδή, Ε. (Συντονίστρια) (2017). Στρογγυλό τραπέζι - Μεταβάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση (πρωτοβάθμια-δευτεροβάθμια-τριτοβάθμια-σχολείο): Επιστημολογικές, ψυχολογικές, παιδαγωγικές και θεσμικές διαστάσεις. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (Επιμ.), *Πρακτικά του 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 85-105). Αθήνα, Ελλάδα: ΕΝΕΔΙΜ.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). ‘Warrant’ revisited: Integrating mathematics teachers’ pedagogical and epistemological considerations into Toulmin’s model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173.

O’ Connor, M. C. (1998). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. In M. Lampert & M. Blunk (Eds.), *Talking mathematics: Studies of teaching and learning in school* (pp. 17–55). NY: Cambridge University Press.

Papadaki, E. (2019). Mapping out different discourses of mathematical horizon. In F. Curtis, (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *39*(1), 1-6. Available at https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2019/07/BSRLM-CP-39-1-07.pdf.

Papadopoulos, I. (2019). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 210-227.

Paris, D., & Alim, S. (2014). What are we seeking to sustain through culturally sustaining pedagogy? A loving critique forward. *Harvard Educational Review*, *84*(1), 85–100.

Πετροπούλου, Γ., Μάλη, Α., & Μπιζά, Ε. (2019). Οι ερευνητές μαθηματικοί στη διδακτική πράξη: Δυνατότητες και προοπτικές για την εκπαίδευση των μελλοντικών εκπαιδευτικών. Στα *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. XXX-XXX). Λάρνακα, Κύπρος: ΕΝΕΔΙΜ

Potari, D., & Psycharis, G. (2018). Prospective Mathematics Teacher Argumentation While Interpreting Classroom Incidents. In M. E. Strutchens, R. Huang, D. Potari, & L. Losano (Eds.), *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers* (pp. 169-187). ICME-13 Monographs: Springer.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(4), 351-380.

Powell A. B., Borge I. C., Fioriti G. I., Kondratieva M., Koublanova E., & Sukthankar N. (2009). Challenging Tasks and Mathematics Learning. In E. J. Barbeau, P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom*. New ICMI Study Series, 12, Springer NY, 133-170.

Slezáková, J., Hejný, M., & Kloboučková, J. (2012). Entrance to negative number via two didactical environments. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93*, 990-994.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.* New York: Teachers College Press, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer.

Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*, 123-140.

Thoma, G., & Biza, I. (in press). Problem-solving techniques in the context of an educational video game: The mudwall puzzle in Zoombinis. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Vithal, R. (2012). Mathematics education, democracy and development: Exploring connections. *Pythagoras*, *33*(2), 1–14. doi:10.4102/ pythagoras.v33i2.200

Wallin, A. J., & Amador, J. M. (2019). Supporting secondary rural teachers' development of noticing and pedagogical design capacity through video clubs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(5), 515-540.

Winsløw, C. (2014). Klein's double discontinuity revisited: Contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(1), 59-86.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458–477.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263-281.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8-13.

Zoitsakos, S., Zachariades, T, & Sakonidis, C. (2018). The role of horizon content knowledge in teachers' recognition and interpretation of students' mathematical misconceptions. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 4, pp. 475-482). Umeå, Sweden: PME.

8ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

6-8 Δεκεμβρίου, 2019

ISBN: 978-9925-580-79-8

Διοργανωτές Συνεδρίου:

Χορηγοί:

Διοικητική Υποστήριξη: