Ανάλυση I — 3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε 8 από τις ασκήσεις (ημερομηνία παράδοσης: 14/12/2020)

Παρακάτω λ συμβολίζει το μέτρο Lebesgue, όπου εμφανίζεται.

1. Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος και E_a, $a \in \mathbb{R}$, μια οικογένεια συνόλων τέτοια ώστε, $E_a \in \mathcal{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και
(i) $a < b \Rightarrow E_a \subseteq E_b$,
(ii) $\bigcup_{a\in\mathbb{R}} E_a = X$,
(iii) $\bigcap_{a\in\mathbb{R}} E_a = \varnothing$.
Δείξτε ότι υπάρχει $f\colon X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τέτοια ώστε $E_a \subseteq f^{-1}\big((-\infty, a]\big)$ και $X \setminus E_a \subseteq f^{-1}\big([a, +\infty)\big)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

2. Δείξτε ότι μία $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda\big(\{x \in \mathbb{R}\colon f(x) \neq g(x)\}\big) = 0$.

3. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int |f(x+t) - f(x)| \,\mathrm{d}x = 0.$$

4. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε $f_n \to f$ Lebesgue-σ.π.

5. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου. Έστω $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και έστω ότι $f_n \to f$ μ-σ.π. Έστω επιπλέον ότι

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{x\in X\colon |f_n(x)|>t\}} |f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$.

6. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{x\in X\colon |f_n(x)|>t\}} |f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

αν και μόνο αν (α) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ και (β) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $A \in \mathcal{M}$ με $\mu(A) < \delta$ έχει κανείς ότι $\int_A |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7. Έστω a_n, b_n, f_n, $n \in \mathbb{N}$, και a, b, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mu)$ και έστω ότι $a_n \to a$, $b_n \to b$ και $f_n \to f$, κάθε σύγκλιση μ-σ.π. Αν $\int a_n \,\mathrm{d}\mu \to \int a \,\mathrm{d}\mu$ και $\int b_n \,\mathrm{d}\mu \to \int b \,\mathrm{d}\mu$ και $a_n \leqslant f_n \leqslant b_n$ μ-σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$.

8. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και f μία μετρήσιμη συνάρτηση στον X που είναι γνήσια θετική μ-σ.π. Δείξτε ότι, αν για μια ακολουθία $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνόλων στην $\mathcal{M}$ ισχύει ότι $\int_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu \to 0$, τότε $\mu(E_n) \to 0$.

9. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων σε ένα διάστημα $[a,b]$ $(a<b)$, τέτοια ώστε το $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ να υπάρχει Lebesgue-σ.π. στο $[a,b]$. Αν $f \neq 0$ Lebesgue-σ.π. και $f_n \neq 0$ Lebesgue-σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι, δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχουν σταθερά $c > 0$ και μια ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $\lambda([a,b] \setminus E_n) \leqslant \varepsilon$ και $|f_n(x)| > c$ για κάθε $x \in E_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

10. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
(i) Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+n^2)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε $f = 0$ σ.π.
(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n^2x+n^2)$ είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της συναρτήσει του ολοκληρώματος της f.

11. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος μέτρου, f_n, $n\in\mathbb{N}$, και f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $A_n \in \mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{M}$. Αποδείξτε ότι αν $\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$, τότε $\int_{A_n} f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int_A f\,\mathrm{d}\mu$.

12. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια. Αιτιολογήστε πλήρως τους υπολογισμούς σας.
(α) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (x/n+1)^{-n} \sin(x/n)\,\mathrm{d}x$.
(β) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,\mathrm{d}x$.
(ς) (α) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n\sin(x/n)[x(1+x^2)]^{-1}\,\mathrm{d}x$.
(δ) $\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty n(1+nx^2)^{-1}\,\mathrm{d}x$. (Εξετάστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $a>0$, $a<0$ και $a=0$.)