Ανάλυση Ι – 2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε 8 από τις ασκήσεις (ημερομηνία παράδοσης: 23-11-2020)

---

1. Έστω $A \subset [0,1]$ τέτοιο ώστε $m^*(A) + m^*([0,1] \setminus A) = 1$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

2. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

(β) Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m(A \setminus (A+x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $m(A) = 0$ ή $m(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

3. Έστω $\{J_1, \ldots, J_N\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο φραγμένων ανοικτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $s_1, \ldots, s_n \in \{1, \ldots, N\}$ τέτοια ώστε τα $J_{s_1}, \ldots, J_{s_n}$ να είναι ξένα ανά δύο και

$$m(J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_N) \leqslant 2m(J_{s_1} \cup J_{s_2} \cup \cdots \cup J_{s_n}).$$

4. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία διακεκριμένων Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$. Για κάθε $k \geqslant 1$ θεωρούμε το σύνολο G_k των $x \in \mathbb{R}$ τα οποία ανήκουν σε ακριβώς k από τα σύνολα A_n. Αποδείξτε ότι κάθε G_k είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} k m(G_k) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

5. Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο G του $\mathbb{R}^n$ γράφεται στη μορφή

$$G = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \Big) \cup N,$$

όπου D_n είναι ξένες ανά δύο ανοικτές μπάλες και $N \subseteq G$ με $m(N) = 0$.

6. Θεωρούμε το σύνολο $A := \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \text{ ή } 1 \Big\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό σύνολο με κενό εσωτερικό και μέτρο $m(A) = 0$.

Εξετάστε αν υπάρχει φυσικός αριθμός s τέτοιος ώστε το σύνολο

$$s \cdot A := A + A + \cdots + A = \{y_1 + \cdots + y_s \mid y_i \in A\}$$

να έχει θετικό μέτρο.

7. Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, μ πεπερασμένο μέτρο στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ του X και $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολικά φραγμένο $A \subseteq X$ τέτοιο ώστε $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$.

8. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει ανοικτό πυκνό $U \subset [0,1]$ με $m(U) < \varepsilon$ και $m(\partial(U)) > 1 - \varepsilon$, όπου $\partial(U)$ είναι το σύνορο του U.

9. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $S \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ αριθμήσιμο, με $0 \in \overline{S}$, ώστε

$$[0,1] \subseteq E + S \subseteq \mathbb{R} \setminus E.$$

Αποδείξτε ότι το E δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

10. Έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Αν $A \subset \mathbb{N}$ και τα A και $\mathbb{N} \setminus A$ είναι και τα δύο άπειρα σύνολα, τότε $A \in \mathcal{A}$ αν και μόνο αν $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ και B είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{A}$ και $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Αποδείξτε ότι το σύνολο $E = \left\{ \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k} : A \in \mathcal{A} \right\}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Επίσης, αν θέλετε, αποδείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που ικανοποιεί τα (α) και (β).

11. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f_n(x)| > 1/n\}) < \infty$. Αποδείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(i) υπάρχει C αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε $m(f^{-1}(\{y\})) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R} \setminus C$ και

(ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $m(g^{-1}(\{y\})) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.