Ανάλυση Ι – 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε 8 από τις ασκήσεις (ημερομηνία παράδοσης: 2-11-2020)

---

1. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και $f : X \to Y$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια

$$\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο Y.

(β) Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–άλγεβρα στο Y και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Έστω (X, d) και (Y, τ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αποδείξτε ότι: αν το B είναι Borel σύνολο στον Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο στον X.

2. (α) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

(β) Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.

(γ) Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αποδείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.

3. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$, όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F.

4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι το σύνολο τιμών του μ είναι άπειρο.

(α) Για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$G(E) = \{\mu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subseteq E\}.$$

Αποδείξτε ότι αν το $G(E)$ είναι άπειρο και $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq E$, τότε είτε το $G(A)$ ή το $G(E \setminus A)$ είναι άπειρο.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία (E_n) ξένων ανά δύο συνόλων στη $\mathcal{A}$, με $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ και $\mu(E_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(E) < \varepsilon$.

(δ) Αντίστροφα, αποδείξτε ότι αν για κάποιον πεπερασμένο χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει το (γ), τότε το σύνολο τιμών του μ είναι άπειρο.

5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, αποδείξτε ότι για κάθε $C > 0$ και κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = \infty$ υπάρχει $F \subset E$, $F \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $C < \mu(F) < \infty$.

6. Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X, αποδείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\big).$$

7. Έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται στο X από το **πεπερασμένο** προμέτρο μ_0. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο $\mu_*(E)$ του E από τη σχέση

$$\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c).$$

Αποδείξτε ότι το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

8. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\varphi(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}(E \cap \{1,\dots,n\})$ (όπου $\operatorname{card}(A)$ είναι ο πληθάριθμος του A). Εξετάστε αν η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

9. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο X και έστω μ το επαγόμενο μέτρο στη σ–άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*–μετρήσιμων συνόλων. Αν $E, G \subseteq X$ τότε λέμε ότι το G είναι μ^*–**μετρήσιμο κάλυμα** του E αν:

$$E \subseteq G,\ G \in \mathcal{A}_{\mu^*} \text{ και για κάθε } A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

(α) Αποδείξτε ότι αν G_1, G_2 είναι δύο μ^*–μετρήσιμα καλύματα του ιδίου $E \subseteq X$, τότε $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$, και συνεπώς, $\mu(G_1) = \mu(G_2)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\mu^*(E) = \mu(G) < +\infty$. Αποδείξτε ότι το G είναι μ^*–μετρήσιμο κάλυμα του E.

10. (α) Έστω $X \neq \emptyset$. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ πεπερασμένα προσθετική συνάρτηση (παρατηρήστε ότι $\mu(X) < \infty$ από την υπόθεση). Αποδείξτε ότι η μ είναι αριθμήσιμα προσθετική αν και μόνο αν ισχύει το εξής: αν (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ τότε $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

(β) Έστω (X,d) τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{B}(X)$ η Borel σ-άλγεβρα του X. Έστω $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0,\infty)$ πεπερασμένα προσθετική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, K \text{ συμπαγές}\}$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$. Αποδείξτε ότι η μ είναι αριθμήσιμα προσθετική.

11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου με την εξής ιδιότητα: αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) > 0$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ και $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών του μ είναι το $[0, \mu(X)]$. Δηλαδή, για κάθε $t \in [0, \mu(X)]$ υπάρχει $C \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(X) = t$.

12. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Ένα εξωτερικό μέτρο μ_* στο $\mathcal{P}(X)$ λέγεται **μετρικό εξωτερικό μέτρο** αν ικανοποιεί το εξής: αν $E_1, E_2 \subseteq X$ και $\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$. Αποδείξτε ότι, τότε, κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ είναι μ^*-μετρήσιμο. Συνεπώς, ο περιορισμός του μ^* στην $\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο.

(β) Έστω $\alpha > 0$. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\mu_\alpha^*(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(F_k))^\alpha : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \operatorname{diam}(F_k) \leqslant \delta \ \text{ για κάθε } k \geqslant 1 \right\}.$$

Αποδείξτε ότι το μ_α^* είναι εξωτερικό μέτρο και ικανοποιεί το εξής: αν E_1, E_2 είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\mu_\alpha^*(E_1 \cup E_2) = \mu_\alpha^*(E_1) + \mu_\alpha^*(E_2)$.