Θεωρία Μέτρου

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2020

Περιεχόμενα

1 σ-άλγεβρες 1

2 Μέτρα 11

3 Εξωτερικά μέτρα 25

4 Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue 39

Κεφάλαιο 1

σ-άλγεβρες

Ομάδα Α΄.

1.1. Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο X και $C \subseteq X$. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο C.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_C$ είναι σ-άλγεβρα στο C αποδεικνύουμε τα εξής:

(α) $C \in \mathcal{A}_C$: Έχουμε $X \in \mathcal{A}$ και $C = X \cap C$, άρα $C \in \mathcal{A}_C$.

(β) Έστω $B \in \mathcal{A}_C$. Τότε, $B = A \cap C$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$. Το συμπλήρωμα του B στο C είναι το $C \setminus B = C \setminus (A \cap C) = (X \setminus A) \cap C \in \mathcal{A}_C$, διότι $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(γ) Έστω $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}_C$. Τότε, υπάρχουν $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $B_n = A_n \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap C) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap C$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_C$.

Για την περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο (απλώς, η ένωση που θεωρούμε είναι πεπερασμένη).

1.2. Έστω X, Y δύο σύνολα, $f : X \to Y$ και $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο Y. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο X.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και θα δείξουμε ότι η $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα:

(α) Έχουμε $Y \in \mathcal{B}$, συνεπώς $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

(β) Έστω $A \in f^{-1}(\mathcal{B})$. Υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $A = f^{-1}(B)$. Τότε, $Y \setminus B \in \mathcal{B}$ και $X \setminus A = f^{-1}(Y \setminus B)$, συνεπώς $X \setminus A \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

(γ) Έστω $A_n \in f^{-1}(\mathcal{B})$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathcal{B}$ ώστε $A_n = f^{-1}(B_n)$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Όμως, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, συνεπώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

Για την περίπτωση που η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο (απλώς, η ένωση που θεωρούμε είναι πεπερασμένη).

1.3. Έστω X ένα σύνολο και
$$\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}.$$
Να περιγράψετε την $\sigma(\mathcal{C})$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων
$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$
Θα δείξουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα:

(α) Έχουμε $X \in \mathcal{A}$ διότι το $X^c = \varnothing$ είναι αριθμήσιμο.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε είτε το A είναι αριθμήσιμο οπότε το A^c έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα είτε το A^c είναι αριθμήσιμο. Σε κάθε περίπτωση, $A^c \in \mathcal{A}$.

(γ) Έστω (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Αν όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν υπάρχει κάποιο A_m που δεν είναι αριθμήσιμο, τότε το A_m^c είναι αριθμήσιμο, άρα
$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_m^c$$
είναι αριθμήσιμο. Άρα, πάλι, το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε αριθμήσιμο $A \subseteq X$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων, των $\{x\}$ όπου $x \in A$, άρα ανήκει στην $\sigma(\mathcal{C})$. Αφού η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι σ-άλγεβρα, περιέχει και τα συμπληρώματα των αριθμήσιμων συνόλων. Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Αντίστροφα, κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, όπου $x \in X$, είναι αριθμήσιμο σύνολο, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Συνεπώς, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ και έπεται ότι $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$.

1.4. Έστω X ένα σύνολο και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε τα σύνολα
$$\limsup_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε άπειρα από τα } A_n\}$$
και
$$\liminf_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε όλα τελικά τα } A_n\}.$$
(α) Να δείξετε ότι
$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$
(β) Αν η (A_n) είναι αύξουσα, τότε
$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ενώ αν είναι φθίνουσα

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geqslant n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k.

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

(β) Αρχικά παρατηρούμε ότι $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$ (αυτό είναι άμεσο, για παράδειγμα, από τον ορισμό). Θέτουμε $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ και $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Παρατηρήστε ότι η (B_n) είναι φθίνουσα και η (C_n) αύξουσα. Επίσης, $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι η (A_n) είναι αύξουσα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, άρα

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B_1 \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \limsup_n A_n \supseteq \liminf_n A_n,$$

άρα έχουμε παντού ισότητα.

Έστω ότι η (A_n) είναι φθίνουσα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $B_n = A_n$, άρα

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = C_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n,$$

άρα έχουμε παντού ισότητα.

Ομάδα Β′.

1.5. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι υπάρχει η μικρότερη άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$. Αυτή λέγεται η *άλγεβρα που παράγει η* $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Υπόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια από άλγεβρες του X, τότε και η $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι μια άλγεβρα στο X. Θεωρούμε τώρα την οικογένεια αλγεβρών

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ αλγεβρα και } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Έχουμε $\mathcal{C} \neq \varnothing$ διότι $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C}$, και η οικογένεια υποσυνόλων του X

$$\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{C} = \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{C}\}$$

είναι μια άλγεβρα στο X. Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ και ότι η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη άλγεβρα με αυτή την ιδιότητα.

1.6. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\overline{\mathcal{I}} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\overline{\mathcal{I}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\sigma(\overline{\mathcal{I}}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a,b) γράφεται στη μορφή

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\Big],$$

άρα $(a,b) \in \sigma(\overline{\mathcal{I}})$. Κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση φραγμένων ανοικτών διαστημάτων, άρα $G \in \sigma(\overline{\mathcal{I}})$. Αφού η $\sigma(\overline{\mathcal{I}})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα ανοικτά $G \subseteq \mathbb{R}$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\overline{\mathcal{I}})$.

1.7. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Κάθε ανοικτό διάστημα (a,b) με άκρα ρητούς αριθμούς ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (x,y) με άκρα πραγματικούς αριθμούς γράφεται στη μορφή

$$(x,y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

όπου (a_n,b_n) διαστήματα με ρητά άκρα (θεωρήστε ρητούς $a_n < b_n$ στο (x,y) με την (a_n) να φθίνει γνήσια προς το x και την (b_n) να αυξάνει γνήσια προς το y) άρα $(x,y) \in \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$. Κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση φραγμένων ανοικτών διαστημάτων, άρα $G \in \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$. Αφού η $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα ανοικτά $G \subseteq \mathbb{R}$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$.

1.8. Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο. Περιγράψτε όλες τις σ-άλγεβρες στο X.

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Θεωρούμε την σχέση

$$x \sim y \iff \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ ισχύει ότι } x \in A \text{ αν και μόνο αν } y \in A.$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X, άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$ ορίζουν διαμέριση του X.

Δείχνουμε ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας της $\sim$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Πράγματι, θεωρούμε μια τέτοια κλάση ισοδυναμίας C. Από τον ορισμό της $\sim$, για κάθε $y \in X \setminus C$ υπάρχει $A_y \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_y$ και $y \notin A_y$ (εξηγήστε γιατί). Πάλι από τον ορισμό της $\sim$ έχουμε $C \subseteq A_y$ και $y \notin A_y$. Το $X \setminus C$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\bigcap_{y \in X\setminus C} A_y \in \mathcal{A}$. Όμως, $C \subseteq \bigcap_{y\in X\setminus C} A_y$ και για κάθε $y \in X \setminus C$ έχουμε $y \notin \bigcap_{y \in X\setminus C} A_y$. Έπεται ότι

$$C = \bigcap_{y \in X \setminus C} A_y \in \mathcal{A}.$$

Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $C_x \subseteq A$ για κάθε $x \in A$, όπου C_x είναι η κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει το x. Δηλαδή, $A = \bigcup_{x\in A} C_x$. Με άλλα λόγια, τα $A \in \mathcal{A}$ είναι οι (πεπερασμένες ή άπειρες αριθμήσιμες) ενώσεις κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$.

1.9. Έστω $(X,d),(Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και μια συνάρτηση $f: X \to Y$. Να δείξετε ότι το σύνολο
$$A = \{x \in X : \text{ η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$
είναι Borel υποσύνολο του X.

Υπόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$$A_m = \Big\{x \in X : \text{υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y,z \in B(x,\delta),\ \sigma(f(y),f(z)) < \frac{1}{m}\Big\}.$$
Παρατηρούμε ότι $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in A$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in B(x,\delta)$ ισχύει $\sigma(f(y),f(x)) < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y,z \in B(x,\delta)$ έχουμε
$$\sigma(f(y),f(z)) \leqslant \sigma(f(y),f(x)) + \sigma(f(x),f(z)) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$
άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in A$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y,z \in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(y),f(z)) < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in B(x,\delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε
$$\sigma(f(y),f(x)) < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$
Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x, δηλαδή $x \in A$. Έτσι, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y,z \in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(y),f(z)) < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $B(x,\delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m. Έστω $u \in B(x,\delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $B(u,\delta_1) \subseteq B(x,\delta)$. Τότε, αν $y,z \in B(u,\delta_1)$ έχουμε $y,z \in B(x,\delta)$, άρα $\sigma(f(y),f(z)) < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

1.10. Έστω X μετρικός χώρος και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το σύνολο
$$B = \{x \in X : \text{ υπάρχει το } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$
είναι Borel υποσύνολο του X.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \in X$, το $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η ακολουθία $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Έτσι, μπορείτε να γράψετε το B στη μορφή
$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{r,s=k}^{\infty}\Big\{x \in X : |f_r(x) - f_s(x)| \leqslant \frac{1}{m}\Big\}\Big)\Big).$$

Από τη συνέχεια των f_n, για κάθε k και m, το σύνολο

$$\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \Big\{x \in X : \, |f_r(x) - f_s(x)| \leqslant \frac{1}{m}\Big\}$$

είναι κλειστό σύνολο (ως τομή κλειστών συνόλων). Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$B_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \Big\{x \in X : \, |f_r(x) - f_s(x)| \leqslant \frac{1}{m}\Big\}\Big)$$

είναι F_σ–σύνολο. Έπεται ότι το $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ είναι $F_{\sigma\delta}$–σύνολο.

1.11. Έστω X ένα σύνολο. Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται *δακτύλιος* αν είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και τις διαφορές. Αν επιπλέον η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, θα λέγεται σ-δακτύλιος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Οι δακτύλιοι (αντίστ. οι σ-δακτύλιοι) είναι κλειστοί στις πεπερασμένες (αντίστ. αριθμήσιμες) τομές.

(β) Ένας δακτύλιος (αντίστ. σ-δακτύλιος) $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) αν και μόνο αν $X \in \mathcal{R}$.

(γ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

(δ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R} \text{ για κάθε } F \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $\mathcal{R}$ είναι δακτύλιος. Έστω $A, B \in \mathcal{R}$. Τότε, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ τότε $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{R}$. Αν υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος και αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία στον $\mathcal{R}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{R},$$

δηλαδή ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός στις αριθμήσιμες τομές.

(β) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα ή σ-άλγεβρα τότε από τον ορισμό έχουμε $X \in \mathcal{R}$. Έστω $\mathcal{R}$ δακτύλιος ή σ-δακτύλιος με $X \in \mathcal{R}$. Αφού ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς συνολοθεωρητικές διαφορές, για κάθε $A \in \mathcal{R}$ έχουμε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{R}$, δηλαδή ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς συμπληρώματα. Έπεται τώρα ότι είναι άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) αφού είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες (αντίστοιχα αριθμήσιμες) ενώσεις.

(γ) Ορίζουμε $\mathcal{B} = \{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$, άρα $\mathcal{B} \neq \varnothing$, και ότι η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{B}$. Θέτουμε $I = \{n : E_n \in \mathcal{R}\}$ και $J = \{n : E_n \notin \mathcal{R}\}$. Παρατηρήστε ότι $I \cap J = \varnothing$ και $\mathbb{N} = I \cup J$. Έχουμε $\bigcap_{n \in I} E_n \in \mathcal{R}$ και για κάθε $n \in J$ έχουμε $E_n^c \in \mathcal{R}$, άρα $\bigcup_{n \in J} E_n^c \in \mathcal{R}$, άρα

$$\bigcap_{n \in J} E_n = X \setminus \Big(\bigcup_{n \in J} E_n^c \Big) \in \mathcal{R}.$$

Συνεπώς,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \Big(\bigcap_{n\in I} E_n\Big) \cap \Big(\bigcap_{n\in J} E_n\Big) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}.$$

(δ) Ορίζουμε $\mathcal{C} = \{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R}$ για κάθε $F \in \mathcal{R}\}$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $X \in \mathcal{C}$. Αν $E \in \mathcal{C}$ τότε για κάθε $F \in \mathcal{R}$ έχουμε $E \cap F \in \mathcal{R}$, άρα για κάθε $F \in \mathcal{R}$ έχουμε $E^c \cap F = F \setminus E = F \setminus (E \cap F) \in \mathcal{R}$, το οποίο δείχνει ότι $E^c \in \mathcal{C}$. Άρα, η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{C}$. Για κάθε $F \in \mathcal{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $E_n \cap F \in \mathcal{R}$, άρα

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \cap F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap F) \in \mathcal{R}.$$

Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.

1.12. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid \text{ υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια } \mathcal{C}_A \text{ της } \mathcal{F} \text{ ώστε } A \in \sigma(\mathcal{C}_A)\}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα:

(α) Η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή και μάλιστα περιέχει την $\mathcal{F}$: αν $E \in \mathcal{F}$ τότε $E \in \sigma(\mathcal{C}_E)$ όπου $\mathcal{C}_E = \{E\} \subseteq \mathcal{F}$. Άρα, $E \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχει αριθμήσιμη $C_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$. Έπεται ότι $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_A)$. Άρα, $A \in \mathcal{A}$ (πάρτε $\mathcal{C}_{A^c} = \mathcal{C}_A$).

(γ) Έστω $A_n \in \mathcal{A}$. Υπάρχουν αριθμήσιμες $C_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{A_n})$. Η οικογένεια $\mathcal{C}_{\cup A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{A_n}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Άρα,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Αφού η σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη $C_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.

1.13. Αν X είναι ένα σύνολο, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X λέγεται *αριθμήσιμα παραγόμενη* αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{C}$ ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Επιπλέον, αποδείξτε το ίδιο για την $\mathcal{B}(X)$, όπου (X, d) τυχών διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Υπόδειξη. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X και την αριθμήσιμη οικογένεια

$$\mathcal{C} = \Big\{B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) : x \in D, n \in \mathbb{N}\Big\}$$

από ανοικτές μπάλες του X. Έχουμε $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(X)$, άρα $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αντίστροφα, από την Πραγματική Ανάλυση είναι γνωστό ότι κάθε ανοικτό σύνολο $G \subseteq X$ γράφεται ως (αριθμήσιμη) ένωση συνόλων από την $\mathcal{C}$, άρα $\mathcal{B}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Τελικά, $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$ και η $\mathcal{C}$ είναι αριθμήσιμη, άρα η $\mathcal{B}(X)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη.

Τα παραπάνω ισχύουν για την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ αφού το $\mathbb{Q}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ομάδα Γ΄.

1.14. Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X λέγεται *μονότονη κλάση* στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Είναι κλειστή στις αύξουσες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ii) Είναι κλειστή στις φθίνουσες τομές, δηλαδή αν (A_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε είναι και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, συμβολίζουμε με $m(\Delta)$ τη μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει την Δ (λέμε ότι η $m(\Delta)$ *παράγεται* από την Δ). Να αποδείξετε τα εξής:

(α) Κάθε κλάση Dynkin είναι μονότονη κλάση.

(β) Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Υπάρχει μονότονη κλάση που δεν είναι κλάση Dynkin.

(δ) Αν Δ είναι μια άλγεβρα στο X, τότε

$$m(\Delta) = \sigma(\Delta).$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $\mathcal{D}$ μια κλάση Dynkin. Από τον ορισμό της κλάσης Dynkin, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες αύξουσες ενώσεις, αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες φθίνουσες τομές. Έστω (A_n) φθίνουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{D}$. Η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, άρα η αύξουσα ακολουθία $(X \setminus A_n)$ περιέχεται στην $\mathcal{D}$. Έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n) \in \mathcal{D}$, δηλαδή $X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. Αφού η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, έχουμε τελικά ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

(β) Η $\delta(\Delta)$ είναι κλάση Dynkin, άρα είναι μονότονη κλάση από το (α). Αφού $\Delta \subseteq \delta(\Delta)$, από τον ορισμό της $m(\Delta)$ παίρνουμε αμέσως ότι $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Έστω $X = \mathbb{N}$ και $\mathcal{M} = \{\{1\}, \{1,2\}\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι μονότονη κλάση αλλά δεν είναι κλάση Dynkin, διότι το $\{1,2\} \setminus \{1\} = \{2\} \notin \mathcal{M}$.

(δ) Αφού η Δ είναι άλγεβρα, γνωρίζουμε ότι $\delta(\Delta) = \sigma(\Delta)$. Από το (β) έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \sigma(\Delta)$. Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(\Delta) \subseteq m(\Delta)$, και αφού $\Delta \subseteq m(\Delta)$ αρκεί να δείξουμε ότι η $m(\Delta)$ είναι σ-άλγεβρα, και αφού η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις αρκεί να δείξουμε ότι η $m(\Delta)$ είναι άλγεβρα:

1. Έχουμε $X \in \Delta \subseteq m(\Delta)$.

2. Δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \{A \subseteq X : A^c \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Αφού η Δ είναι άλγεβρα, έχουμε $\Delta \subseteq \mathcal{C}$. Έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \mathcal{C}$, δηλαδή για κάθε $A \in m(\Delta)$ ισχύει ότι $A^c \in m(\Delta)$. Άρα, η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα.

3. Δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{D} = \{A \subseteq X : A \cap B \in m(\Delta)$ για κάθε $B \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση και ότι $\Delta \subseteq \mathcal{D}$ (για τον δεύτερο εγκλεισμό σταθεροποιούμε $A \in \Delta$ και δείχνουμε ότι η $\mathcal{C}_A = \{B \subseteq X : A \cap B \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση και περιέχει την Δ). Από τα παραπάνω έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \mathcal{D}$, δηλαδή για κάθε $A, B \in m(\Delta)$ ισχύει $A \cap B \in m(\Delta)$. Επαγωγικά, η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

1.15. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ μια μη κενή αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του X. Να δειχθεί ότι και η $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ (βλ. Άσκηση 1.5) είναι αριθμήσιμη.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ και επαγωγικά, αν έχει η οριστεί η $\mathcal{F}_n$, ορίζουμε $\mathcal{F}_{n+1}$ να είναι η οικογένεια όλων των πεπερασμένων ενώσεων και των συμπληρωμάτων στοιχείων της $\mathcal{F}_n$. Δηλαδή,

$$\mathcal{F}_{n+1} = \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F}_n\} \cup \{A^c : A \in \mathcal{F}_n\}.$$

Παρατηρήστε ότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$. Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι κάθε $\mathcal{F}_n$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων. Επαγωγικά αποδεικνύουμε επίσης ότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα την (επίσης αριθμήσιμη) οικογένεια

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

Από τα προηγούμενα έχουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, οπότε $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Αρχικά παρατηρούμε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Επίσης, αν $A \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχει $n \geqslant 0$ ώστε $A \in \mathcal{F}_n$ και τότε $A^c \in \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}$. Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις. Έστω $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Υπάρχουν $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ ώστε $A_i \in \mathcal{F}_{k_i}$. Αν θέσουμε $m = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ τότε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_m$, άρα $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}_{m+1} \subseteq \mathcal{A}$.

1.16. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X με άπειρα στοιχεία. Να δείξετε ότι:

(α) Η $\mathcal{A}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.

(β) Η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την μερική διάταξη $\subseteq$ στην $\mathcal{A}$ και ένα μεγιστικό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $\{E_i : i \in I\}$ στην $\mathcal{A}$. Παρατηρούμε ότι το I είναι άπειρο. Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει τότε υπάρχει ένα μεγιστικό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $E_1 \subsetneqq E_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq E_n$ της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{B} = \sigma(\{E_1, \ldots, E_n\})$. Τότε, η $\mathcal{B}$ έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, και αφού η $\mathcal{A}$ είναι άπειρη, υπάρχει $E \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Τότε, $E \subseteq E_n$ αλλιώς θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ολικά διατεταγμένο σύνολο $E_1 \subsetneqq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneqq E_n \subsetneqq E_n \cup E$ στην $\mathcal{A}$. Παρατηρούμε ότι

$$E = E \cap E_n = E \cap \Big(E_1 \cup \Big(\bigcup_{k=2}^{n}(E_k \setminus E_{k-1}\Big)\Big) = (E \cap E_1) \cup \Big(\bigcup_{k=2}^{n}(E \cap (E_k \setminus E_{k-1}\Big)\Big).$$

Αφού $E \notin \mathcal{B}$, τουλάχιστον ένα από τα $E \cap E_1$ και $E \cap (E_k \setminus E_{k-1})$, $2 \leqslant k \leqslant n$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$:

1. Αν $E \cap E_1 \notin \mathcal{B}$ τότε $E \cap E_1 \subsetneqq E_1$ και έχουμε άτοπο θεωρώντας το ολικά διατεταγμένο σύνολο $E \cap E_1 \subsetneqq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneqq E_n$ στην $\mathcal{A}$.

2. Έστω ότι υπάρχει $k \geqslant 2$ τέτοιος ώστε $E \cap (E_k \setminus E_{k-1}) \notin \mathcal{B}$. Ορίζουμε $F = E_{k-1} \cup (E \cap (E_k \setminus E_{k-1}))$ και θεωρούμε την ακολουθία $E_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq E_{k-1} \subseteq F \subseteq E_k \subsetneq \cdots \subsetneqq E_n$ στην $\mathcal{A}$. Δεν μπορεί να ισχύει $F = E_{k-1}$, διότι τότε $E \cap (E_k \setminus E_{k-1}) = \varnothing \in \mathcal{B}$. Άρα, $E_{k-1} \subsetneqq F$. Αν πάλι $F = E_k$ τότε $E \cap (E_k \setminus E_{k-1}) = E_k \setminus E_{k-1} \in \mathcal{B}$. Άρα. $F \subsetneqq E_k$. Έχουμε λοιπόν το ολικά διατεταγμένο σύνολο $E_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq E_{k-1} \subsetneqq F \subsetneqq E_k \subsetneq \cdots \subsetneqq E_n$, το οποίο είναι άτοπο αφού το $E_1 \subsetneqq E_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq E_n$ ήταν μεγιστικό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο της $\mathcal{A}$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το I είναι άπειρο, δηλαδή υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A_1 = E_1$ και $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ για κάθε $k \geqslant 2$. Τα A_n είναι άπειρα το πλήθος ξένα ανά δύο σύνολα στην $\mathcal{A}$.

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ διακεκριμένων ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $M \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_M = \bigcup_{n \in M} A_n.$$

Τα σύνολα A_M είναι διαφορετικά ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$ και το πλήθος τους είναι το ίδιο με τον πληθάριθμο του $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, δηλαδή υπεραριθμήσιμο. Άρα, η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα

Ομάδα Α΄.

2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $C \in \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_C(A) = \mu(A \cap C), \quad A \in \mathcal{A}$$

ορίζει ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι $\mu_C(\varnothing) = \mu(\varnothing \cap C) = \mu(\varnothing) = 0$. Έστω τώρα $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Τα σύνολα $A_n \cap C$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και είναι επίσης ξένα ανά δύο. Αφού το μ είναι μέτρο, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu_C\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap C\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_C(A_n).\end{aligned}$$

Άρα, το μ_C είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

2.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (A_n) μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι

$$\mu(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n)$$

και ότι, αν επιπλέον $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, τότε

$$\limsup_n \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup_n A_n).$$

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Η ακολουθία $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Επίσης, $B_n \subseteq A_n$, άρα $\mu(B_n) \leqslant \mu(A_n)$ και έπεται ότι $\lim_n \mu(B_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n)$. Συνεπώς,

$$\mu\big(\liminf_{n\to\infty} A_n\big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(β) Έχουμε $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Η ακολουθία $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Από την υπόθεση, $\mu(C_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Επίσης, $A_n \subseteq C_n$, άρα $\mu(A_n) \leqslant \mu(C_n)$ και έπεται ότι $\limsup_n \mu(A_n) \leqslant \lim_n \mu(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big).$$

2.3. (1ο Λήμμα Borel-Cantelli) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και (A_n) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ για τα οποία ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Να δείξετε ότι $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $\mu\big(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\big) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $\mu\big(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\big) = 0$.

2.4. Έστω $A \neq \varnothing$ και $a : A \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση. Θέτουμε

$$\sum_{x\in A} a(x) = \sup\left\{ \sum_{x\in F} a(x) : F \subseteq A,\ F \neq \varnothing \text{ και } F \text{ πεπερασμένο} \right\}.$$

Επιπλέον, θέτουμε $\sum_{x\in\varnothing} a(x) = 0$. Έστω λοιπόν σύνολο $X \neq \varnothing$ και μια συνάρτηση $a : X \to [0, \infty]$. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Αν $\sum_{x\in X} a(x) < \infty$, τότε το σύνολο $J = \{x \in X : a(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. *Υπόδειξη:*

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ x \in X : a(x) > \frac{1}{n} \Big\}.$$

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_a : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ που ορίζεται από την

$$\mu_a(A) = \sum_{x\in A} a(x)$$

ορίζει ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$. Η μ_a είναι η *σημειακή κατανομή που επάγεται από την* a και ο $a(x)$ είναι η *μάζα* του x.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $J = \{x \in X : a(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$, όπου

$$J_n = \Big\{x \in X : a(x) > \frac{1}{n}\Big\}.$$

Κάθε J_n είναι πεπερασμένο σύνολο: αν κάποιο J_n είναι άπειρο, τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $F \subseteq J_n$ με N στοιχεία, και τότε

$$\frac{1}{n} N \leqslant \sum_{x\in F} a(x) \leqslant \sum_{x\in X} a(x).$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ καταλήγουμε σε άτοπο. Τώρα, αφού κάθε J_n είναι πεπερασμένο, το $J = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$ είναι αριθμήσιμο.

(β) Έχουμε θέσει $\sum_{x\in\varnothing} a(x) = 0$, συνεπώς $\mu_a(\varnothing) = 0$. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X. Θέτουμε $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του A υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $F \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_N$. Ορίζουμε $F_n = F \cap A_n$, $n = 1, \ldots, N$. Τότε,

$$\sum_{x\in F} a(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{x\in F_n} a(x) \leqslant \sum_{n=1}^N \mu_a(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu_a(A_n),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\sum_{x\in F_n} a(x) \leqslant \mu_a(A_n)$ που ισχύει αφού το F_n είναι (πεπερασμένο) υποσύνολο του A_n. Παίρνοντας supremum πάνω από όλα τα πεπερασμένα $F \subseteq A$ καταλήγουμε στην

$$\mu_a(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu_a(A_n).$$

Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^N \mu_a(A_n) \leqslant \mu_a(A).$$

Για κάθε επιλογή πεπερασμένων $F_n \subseteq A_n$, $n = 1, \ldots, N$, έχουμε ότι τα F_n είναι ξένα και το $F = F_1 \cup \cdots \cup F_N$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του A. Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^N \sum_{x\in F_n} a(x) = \sum_{x\in F} a(x) \leqslant \mu_a(A).$$

Παίρνοντας διαδοχικά supremum ως προς τα πεπερασμένα $F_n \subseteq A_n$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^N \mu_a(A_n) \leqslant \mu_a(A).$$

2.5. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$. Να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

(β) Αν επιπλέον κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, τότε και η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι επίσης μέτρο πιθανότητας.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\nu_n = \mu_1 + \cdots + \mu_n$. Κάθε ν_n είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και $\nu_n(A) \leqslant \nu_{n+1}(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A)$. Το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει, και ενδεχομένως είναι άπειρο, για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geqslant \nu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\varnothing) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\varnothing) = 0$, αφού $\nu_n(\varnothing) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(\varnothing) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \nu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \nu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Άρα,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(β) Το ν είναι μέτρο από το (α), αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $A \mapsto \frac{1}{2^n}\mu_n(A)$, $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Μένει να ελέγξουμε ότι $\nu(X) = 1$. Όμως, κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, άρα $\mu_n(X) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έπεται ότι

$$\nu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

2.6. Περιγράψτε όλα τα μέτρα στο χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Υπόδειξη. Έστω μ ένα μέτρο στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $a_n = \mu(\{n\})$. Τότε, για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in A} a_n.$$

Αντίστροφα, αν (a_n) είναι τυχούσα ακολουθία στο $[0,\infty]$, ορίζουμε $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,+\infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} a_n.$$

Από την Άσκηση 2.4 η μ είναι μέτρο.

2.7. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ έχουμε $A\triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A\triangle B) = 0$, να δείξετε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

Υπόδειξη. Αφού $B \setminus A \subseteq A \triangle B$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, η πληρότητα του $(X,\mathcal{A},\mu)$ εξασφαλίζει ότι $B\setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(B\setminus A) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $A\setminus B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A\setminus B) = 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα, συνεπώς, $A\cap B = A\setminus(A\setminus B) \in \mathcal{A}$ και $\mu(A\cap B) = \mu(A)-\mu(A\setminus B) = \mu(A) - 0 = \mu(A)$. Ομοίως, $B = (A\cap B)\cup(B\setminus A) \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A) = \mu(A\cap B) + 0 = \mu(A)$.

Ομάδα Β΄.

2.8. Δώστε παράδειγμα σ-πεπερασμένου μέτρου μ στο χώρο $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ώστε $\mu((a,b)) = \infty$ για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών αριθμών και το μέτρο $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{q_n}$, όπου δ_x είναι το μέτρο Dirac στο $x \in \mathbb{R}$. Από την Άσκηση 2.5 (α) το μ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ το μέτρο $\mu(A)$ του A είναι ίσο με το πλήθος των ρητών που ανήκουν στο A. Για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί στο ανοικτό διάστημα (a,b), συνεπώς $\mu((a,b)) = \infty$.

2.9. Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X,\mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$. Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A).$$

Να δείξετε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Αφού η $\{\mu_n\}$ είναι αύξουσα, το $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A)$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι άπειρο) για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geqslant \mu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\varnothing) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\varnothing) = 0$, αφού $\mu_n(\varnothing) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Άρα,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

2.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι για κάθε $E \in \mathcal{A}$ το σύνολο $J_A = \{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη. Αφού το μ είναι σ–πεπερασμένο, υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $E \in \mathcal{A}$. Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\mu(E \cap A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n \cap A_i).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $U_n = \{i \in I : \mu(E\cap B_n\cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Παρατηρήστε ότι, για κάθε n και για κάθε k, το σύνολο

$$U_{n,k} = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 1/k\}$$

είναι πεπερασμένο: τα σύνολα $(E \cap B_n \cap A_i)_{i\in U_{n,k}}$ είναι ξένα και περιέχονται στο $E \cap B_n$, άρα

$$\frac{1}{k} \cdot \mathrm{card}(U_{n,k}) \leqslant \mu(E \cap B_n) \leqslant \mu(B_n) < \infty.$$

Έπεται ότι το $U_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n,k}$ είναι αριθμήσιμο.

2.11. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα σε ένα σύνολο X και μ ένα πεπερασμένο μέτρο στο χώρο $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\mu(A \triangle F) < \varepsilon,$$

όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ ώστε } \mu(A \triangle F) < \varepsilon\}.$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ (αν $A \in \mathcal{F}$ τότε παίρνοντας $F = A$ έχουμε $A \triangle F = A \triangle A = \varnothing$). Ειδικότερα, $\mathcal{A} \neq \varnothing$.

Αν $A \in \mathcal{A}$ και αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $F^c \in \mathcal{F}$ και $A^c \triangle F^c = A \triangle F$, άρα $\mu(A^c \triangle F^c) < \varepsilon$. Έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Συνεπώς, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n = 1, \ldots, k$ βρίσκουμε $F_n \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2k}$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα, η ένωση $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{F}$. Παρατηρήστε ότι

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \triangle F \subseteq \Big(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\Big) \cup (A_1 \triangle F_1) \cup \cdots \cup (A_k \triangle F_k).$$

Συνεπώς,

$$\mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \triangle F\Big) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Από τα παραπάνω, η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα. Αφού $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$.

2.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mu(A_n) \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{k_n\}$ ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\mu\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \geqslant \mu(A_k) \geqslant \delta.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\mu(E_1) \leqslant \mu(X) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k) \geqslant \delta > 0.$$

Αφού $\mu(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing$.

2.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ λέγεται *ημιπεπερασμένο* αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ υπάρχει $B \subseteq A$ με $B \in \mathcal{A}$ και $0 < \mu(B) < \infty$. Να δείξετε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος ημιπεπερασμένου μέτρου και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$, τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$. Ορίζουμε

$$S = \{B \in \mathcal{A}, B \subseteq A, 0 < \mu(B) < \infty\}$$

και θέτουμε
$$s = \sup(S).$$
Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, το σύνολο S είναι μη κενό. Συνεπώς, $s > 0$.

Υποθέτουμε ότι $s < \infty$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $B_n \in S$ ώστε $\mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$. Θεωρούμε το σύνολο
$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$
Τότε, $B \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq A$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\mu(B) < \infty$, τότε $B \in S$. Επίσης,
$$\mu(B) \geqslant \mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(B) = s$. Θεωρούμε το $A \setminus B$: έχουμε $\mu(A \setminus B) = \infty$. Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε $C \subseteq A \setminus B$ ώστε $0 < \mu(C) < \infty$. Όμως τότε, $B \cup C \subseteq A$ και $0 < \mu(B \cup C) < \infty$, οπότε $B \cup C \in S$ και $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) > s$. Άτοπο.

2. Αν $\mu(B) = \infty$, από την $\mu(B) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\right)$ μπορούμε να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\Big) > s.$$
Αφού $\bigcup_{n=1}^{k} B_n \in S$, καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $s = \infty$. Από τον ορισμό του s έπεται τώρα ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

Ομάδα Γ΄.

2.14. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με
$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\}, \quad A \in \mathcal{A}.$$
Να δείξετε ότι:

(α) Το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το *ημιπεπερασμένο μέρος* του μ).

(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.

(γ) Υπάρχει μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞, τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι από τον ορισμό του μ_0 (και τη μονοτονία του μ) έχουμε $\mu_0(A) \leqslant \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, αν $F \in \mathcal{A}$ και $\mu(F) < \infty$ τότε $\mu_0(F) = \mu(F)$ (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε
$$S(A) = \{F \in \mathcal{A} : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\}.$$

(α) Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu_0(A) = \infty$. Από τον ορισμό του $\mu_0(A)$ υπάρχει ακολουθία (F_n) στην $\mathcal{A}$ με $F_n \subseteq A$, $\mu(F_n) < \infty$ και $\mu(F_n) \to \mu_0(A) = \infty$. Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < \mu(F_N)$. Τότε, για το $F := F_N$ έχουμε $F \subseteq A$, $F \in \mathcal{A}$ και $0 < \mu_0(F) = \mu(F) < \infty$. Με βάση τον ορισμό (της Άσκησης 2.13) το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο.

Για να δείξουμε ότι το μ_0 είναι μετρο, αρκεί να ελέγξουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Αν $F \in S(A)$ τότε $F \cap A_n \in S(A_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τα $F \cap A_n$ είναι ξένα, συνεπώς

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(F \cap A_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Άρα,

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \in S(A)\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_0(A) < \infty$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu_0(A_n) \leqslant \mu_0(A) < \infty$. Τότε, για τυχόν $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $F_n \in S(A_n)$ με $\mu_0(A_n) < \mu(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Για τυχόν $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$. Έχουμε $B_N \in \mathcal{A}$, $B_N \subseteq A$ και $\mu(B_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_0(A_n) < \infty$, άρα $B_N \in S(A)$. Συνεπώς,

$$\mu_0(A) \geqslant \mu(B_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n) > \sum_{n=1}^{N} (\mu_0(A_n) - \varepsilon/2^n) > \sum_{n=1}^{N} \mu_0(A_n) - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν παίρνουμε

$$\mu_0(A) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_0(A_n),$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έχουμε σημειώσει ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \infty$ τότε $\mu_0(A) = \mu(A)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \infty$ τότε $\mu_0(A) = \infty$. Όμως, αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, από την Άσκηση 2.13 γνωρίζουμε ότι για κάθε $n > 0$ υπάρχει $F_n \in \mathcal{A}$ με $F_n \subseteq A$ και $n < \mu(F) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\} = \infty = \mu(A).$$

(γ) Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$ την κλάση όλων των $A \in \mathcal{A}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: $\mu(A) < \infty$ ή $\mu(A) = \infty$ και για κάθε $F \subseteq A$ με $\mu(F) = \infty$ υπάρχει $F_1 \subseteq F$ με $0 < \mu(F_1) < \infty$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με $\nu(A) = 0$ αν $A \in \mathcal{C}$ και $\nu(A) = \infty$ αλλιώς.

Αρκεί να ελέγξουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του ν. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $A_m \notin \mathcal{C}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{C}$ είναι τότε φανερό ότι $A \notin \mathcal{C}$, άρα

$$\nu(A) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $A_n \in \mathcal{C}$. Θα δείξουμε ότι $A \in \mathcal{C}$, οπότε έχουμε πάλι ισότητα, αυτή τη φορά την

$$\nu(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Έστω $F \subseteq A$ με $\mu(F) = \infty$. Αφού $\mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap A_n)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(F \cap A_m) > 0$. Αν $\mu(F \cap A_m) < \infty$ τότε ορίζουμε $F_1 = F \cap A_m$ και έχουμε $F_1 \subseteq F$ και $0 < \mu(F_1) < \infty$. Αν $\mu(F \cap F_m) = \infty$ τότε αφού $A_m \in \mathcal{C}$ πάλι μπορούμε να βρούμε $F_1 \subseteq F \cap A_m \subseteq F$ με $0 < \mu(F_1) < \infty$. Αφού το $F \subseteq A$ ήταν τυχόν (με $\mu(F) = \infty$) έπεται ότι $A \in \mathcal{C}$.

Μένει να ελέγξουμε ότι $\mu = \mu_0 + \nu$. Έστω $A \in \mathcal{A}$.

(i) Αν $\mu(A) < \infty$ τότε έχουμε $\mu_0(A) = \mu(A)$ και επίσης $A \in \mathcal{C}$ άρα $\nu(A) = 0$. Συνεπώς, $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.

(ii) Αν $\mu(A) = \infty$ και $A \in \mathcal{C}$ τότε όπως στην Άσκηση 2.13 βλέπουμε ότι $\mu_0(A) = \infty$, άρα πάλι ισχύει ότι $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.

(iii) Τέλος, αν $A \notin \mathcal{C}$ έχουμε $\mu(A) = \infty$ και $\nu(A) = \infty$, άρα και πάλι ισχύει ότι $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.

2.15. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

(α) Για δύο σύνολα $A, B \in \mathcal{A}$ γράφουμε $A \sim B$ αν $\mu(A \triangle B) = 0$. Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{A}$.

(β) Για $A, B \in \mathcal{A}$ ορίζουμε $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Να δείξετε ότι η ρ είναι πλήρης μετρική στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{A}/\sim$.

Υπόδειξη. (α) Είναι φανερό ότι $A \sim A$ και ότι $A \sim B \implies B \sim A$ για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $A, B, C \in \mathcal{A}$, $A \sim B$ και $B \sim C$ τότε $A \sim C$.

Έχουμε $\mu(A \triangle B) = 0$ και $\mu(B \triangle C) = 0$. Παρατηρούμε ότι: $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ και $C \setminus A \subseteq (C \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Άρα,

$$\begin{aligned}\mu(A \triangle C) &= \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A)\\ &\leqslant \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus C)) + \mu((C \setminus B) \cup (B \setminus A))\\ &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus C) + \mu(C \setminus B) + \mu(B \setminus A)\\ &= \mu(A \triangle B) + \mu(B \triangle C) = 0.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $A \sim C$.

(β) Στο (α) δείξαμε ότι η ρ είναι ψευδομετρική στην $\mathcal{A}$, δηλαδή ικανοποιεί την

$$\rho(A, B) = \mu(A \triangle B) \leqslant \mu(A \triangle C) + \mu(C \triangle B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$$

για κάθε $A, B, C \in \mathcal{A}$. Αν λοιπόν ορίσουμε $\rho([A], [B]) = \rho(A, B)$ στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{D}_\mu := \mathcal{A}/\sim$ τότε έχουμε μετρική.

Έστω $([A_n])_n$ μια βασική ακολουθία στον (D_μ,ρ). Μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $([B_n])_n = ([A_{k_n}])_n$ της $([A_n])_n$ τέτοια ώστε $\rho(B_n,B_m)\leqslant \frac{1}{2^n}$ για κάθε $m\geqslant n$. Ορίζουμε $E_n=\bigcup_{m=n}^\infty B_m$. Τότε, $B_n\subseteq E_n$ και

$$E_n\setminus B_n=\bigcup_{m=n+1}^\infty (B_m\setminus B_n)\subseteq \bigcup_{m=n+1}^\infty (B_m\setminus B_{m-1})$$

διότι $B_m\setminus B_n\subseteq \bigcup_{k=n+1}^m (B_k\setminus B_{k-1})$, άρα

$$\begin{aligned}\mu(E_n\triangle B_n)=\mu(E_n\setminus B_n)&\leqslant \sum_{m=n+1}^\infty \mu(B_m\setminus B_{m-1})\leqslant \sum_{m=n+1}^\infty \mu(B_m\triangle B_{m-1})\\ &\leqslant \sum_{m=n+1}^\infty \frac{1}{2^{m-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $B=\limsup B_n=\bigcap_{n=1}^\infty E_n$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu(B\setminus B_n)\leqslant \mu(E_n\setminus B_n)\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(B_n\setminus B)&=\mu\Big(B_n\cap\Big(\bigcup_{m=1}^\infty E_m^c\Big)\Big)=\mu\Big(\bigcup_{m=1}^\infty (B_n\cap E_m^c)\Big)=\lim_{m\to\infty}\mu(B_n\cap E_m^c)\\ &=\lim_{m\to\infty}\mu(B_n\setminus E_m)\leqslant \limsup_{m\to\infty}\mu(B_n\setminus B_m)\leqslant \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\rho(B_n,B)=\mu(B_n\setminus B)+\mu(B\setminus B_n)\leqslant \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{3}{2^n},$$

δηλαδή

$$\rho([A_{k_n}],[B])=\rho([B_n],[B])\to 0.$$

Αφού η $([A_n])_n$ είναι βασική ακολουθία και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $[B]$, συμπεραίνουμε ότι $\rho([A_n],[B])\to 0$. Άρα, ο $(\mathcal{D}_\mu,\rho)$ είναι πλήρης.

2.16. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $E\subseteq X$ λέγεται *τοπικά μετρήσιμο* αν $E\cap A\in\mathcal{A}$ για κάθε $A\in\mathcal{A}$ με $\mu(A)<\infty$. Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{A}}=\{E\subseteq X:\ E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

(α) Να δείξετε ότι $\mathcal{A}\subseteq\tilde{\mathcal{A}}$ και ότι η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι σ-άλγεβρα. Αν $\mathcal{A}=\tilde{\mathcal{A}}$ τότε ο $(X,\mathcal{A},\mu)$ λέγεται *κορεσμένος* χώρος μέτρου.

(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε $\mathcal{A}=\tilde{\mathcal{A}}$.

(γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{\mu}:\tilde{\mathcal{A}}\to[0,\infty]$ με $\tilde{\mu}(A)=\mu(A)$ για $A\in\mathcal{A}$ και $\tilde{\mu}(A)=\infty$ για $A\in\tilde{\mathcal{A}}\setminus\mathcal{A}$. Δείξτε ότι ο $(X,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$: αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (δεν χρειάζεται η υπόθεση ότι $\mu(A) < \infty$). Ειδικότερα, η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι μη κενή.

Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \mathcal{A}$, άρα $E^c \cap A = A \setminus (E \cap A) \in \mathcal{A}$. Από τον ορισμό, $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Τέλος, έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A) \in \mathcal{A}$$

διότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα και $E_n \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(β) Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ–πεπερασμένο. Υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Τότε, $E \cap B_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap B_n) \in \mathcal{A}.$$

Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$.

(γ) Δείξτε πρώτα ότι το $\tilde{\mu}$ είναι μέτρο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}})$. Έστω E ένα τοπικά μετρήσιμο σύνολο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$. Τότε, για κάθε $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ με $\tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Από τον ορισμό του $\tilde{\mu}$ αυτό σημαίνει ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$ και $\tilde{\mu}(E \cap A) \leqslant \tilde{\mu}(A) < \infty$, δηλαδή $E \cap A \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Αφού κάθε τοπικά μετρήσιμο σύνολο του $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι στην $\tilde{\mathcal{A}}$, ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

2.17. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (γ): Για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$G(E) = \{\mu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subseteq E\}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι αν το $G(E)$ είναι άπειρο και $F \in \mathcal{A}$, $F \subseteq E$, τότε είτε το $G(F)$ ή το $G(E \setminus F)$ είναι άπειρο. Πράγματι, αν τα $G(F)$ και $G(E \setminus F)$ είναι πεπερασμένα, τότε για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq E$ έχουμε $B = (F \cap B) \cup ((E \setminus F) \cap B)$ και τα δύο αυτά σύνολα είναι ξένα, άρα $\mu(B) = \mu(F \cap B) + \mu((E \setminus F) \cap B) \in G(F) + G(E \setminus F)$. Το τελευταίο σύνολο είναι πεπερασμένο, και αφού το $B \subseteq E$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι το $G(E) \subseteq G(F) + G(E \setminus F)$ είναι πεπερασμένο σύνολο, το οποίο είναι άτοπο.

Εφαρμόζουμε τώρα αυτόν τον ισχυρισμό επαγωγικά. Από την υπόθεση έχουμε ότι το $G(X)$ είναι άπειρο, άρα μπορούμε να βρούμε $F_1 \in \mathcal{A}$, $F_1 \subseteq X$ με $0 < \mu(F_1) < \mu(X)$. Τώρα ξέρουμε ότι κάποιο από τα $G(F_1)$ και $G(X \setminus F_1)$ είναι άπειρο. Αν το $G(F_1)$ είναι άπειρο τότε θέτουμε $C_1 = F_1$ και αν το $G(F_1)$ είναι πεπερασμένο τότε θέτουμε $C_1 = X \setminus F_1$. Σε κάθε περίπτωση, $0 < \mu(C_1) < \mu(X)$ και το $G(C_1)$ είναι άπειρο.

Τώρα βρίσκουμε $F_2 \in \mathcal{A}$, $F_2 \subseteq C_1$ με $0 < \mu(F_2) < \mu(C_1)$. Πάλι ξέρουμε ότι κάποιο από τα $G(F_2)$ και $G(C_1 \setminus F_2)$ είναι άπειρο. Αν το $G(F_2)$ είναι άπειρο τότε θέτουμε $C_2 = F_2$ και αν το $G(F_2)$ είναι πεπερασμένο τότε θέτουμε $C_2 = C_1 \setminus F_2$. Σε κάθε περίπτωση, $C_2 \subseteq C_1$, $0 < \mu(C_2) < \mu(C_1) < \mu(X)$ και το $G(C_2)$ είναι άπειρο.

Επαγωγικά ορίζουμε φθίνουσα ακολουθία (C_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(C_{n+1}) < \mu(C_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν θεωρήσουμε τα σύνολα $A_n = C_n \setminus C_{n+1}$ τότε αυτά ανήκουν στην $\mathcal{A}$, είναι ξένα και $\mu(A_n) = \mu(C_n) - \mu(C_{n+1}) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) $\Longrightarrow$ (β): Θεωρούμε ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \infty,$$

συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \mu(A_n) < \varepsilon$.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Ας υποθέσουμε ότι το $G(X) = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι πεπερασμένο. Από την υπόθεση, το σύνολο των θετικών στοιχείων του $G(X)$ είναι μη κενό, άρα έχει ελάχιστο θετικό στοιχείο $\mu(B) = \varepsilon > 0$, για κάποιο $B \in \mathcal{A}$. Τότε, πάλι από την υπόθεση, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A) < \varepsilon$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το M είναι άπειρο.

2.18. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:

(i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.

(ii) Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.

(iii) Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{E}$ με $\mu(A) > 0$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αρχικά ορίζουμε $\mathcal{E}_0 := \{A \in \mathcal{E} : \mu(A) > 0\}$ και επιλέγουμε $A_1 \in \mathcal{E}_0$ με $\mu(A_1) > \frac{1}{2}\sup\{\mu(A) : A \in E_0\}$. Ορίζουμε επίσης $\mathcal{E}_1 := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap A_1 = 0\}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Αν τα $A_1, \ldots, A_n$ έχουν επιλεγεί και έχει οριστεί η οικογένεια $\mathcal{E}_n$, επιλέγουμε $A_{n+1} \in \mathcal{E}_n$ έτσι ώστε $\mu(A_{n+1}) > \frac{1}{2}\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{E}_n\}$ και θέτουμε $\mathcal{E}_{n+1} := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = \varnothing\}$.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mathcal{E}_m = \varnothing$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{E}$ με $A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \varnothing$ ισχύει ότι $\mu(A) = 0$. Τότε, η $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια, τα $A_1, \ldots, A_m$ είναι ξένα, έχουν μέτρο $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, και το $X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m)$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Έστω τώρα ότι $\mathcal{E}_n \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την $\mathcal{F} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα σύνολα A_n είναι ξένα και $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $\mu(X) < +\infty$ και τα A_n είναι ξένα, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, άρα $\mu(A_n) \to 0$.

Έστω $A \in \mathcal{E}$ το οποίο περιέχεται στο $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και έστω ότι $\mu(A) > 0$. Αφού $\mu(A_n) \to 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_n) < \frac{1}{2}\mu(A)$, και έστω n_0 ο μικρότερος φυσικός με αυτή την ιδιότητα. Αφού $A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n_0-1}) = \varnothing$, έχουμε $A \in \mathcal{E}_{n_0-1}$, άρα $\frac{1}{2}\mu(A) < \mu(A_n)$ το οποίο είναι άτοπο.

Κεφάλαιο 3

Εξωτερικά μέτρα

Ομάδα Α΄.

3.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $A^\circ \neq \varnothing$. Να δείξετε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Υπόδειξη. Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = \mathrm{v}(I) > 0.$$

3.2. Έστω X ένα σύνολο. Δίνονται οι συναρτήσεις $\phi_j : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, $j = 1,2,3,4$ με

$$\phi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \varnothing \\ 1, & \text{αν } A \neq \varnothing \end{cases}, \quad \phi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \varnothing \\ \infty, & \text{αν } A \neq \varnothing \end{cases},$$

$$\phi_3(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi_4(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα και να βρείτε τις $\mathcal{M}_{\phi_j}$.

Υπόδειξη. Το γεγονός ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα ελέγχεται εύκολα για κάθε $j = 1,2,3,4$.

Έχουμε $\mathcal{M}_{\phi_1} = \{\varnothing, X\}$. Πράγματι, αν A είναι ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο του X τότε υπάρχουν $x \in A$ και $y \in X \setminus A$, οπότε για το σύνολο $B = \{x,y\}$ έχουμε $B \cap A = \{x\}$ και $B \setminus A = \{y\}$, άρα

$$1 = \phi_1(B) < 2 = \phi_1(B \cap A) + \phi_1(B \setminus A).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{M}_{\phi_2} = \mathcal{M}_{\phi_4} = \mathcal{P}(X)$. Για κάθε $A, B \neq \varnothing$ έχουμε είτε $B \cap A \neq \varnothing$ είτε $B \setminus A \neq \varnothing$, άρα

$$\phi_j(B) = \infty = \phi_j(B \cap A) + \phi_j(B \setminus A),$$

ενώ αν $A = \varnothing$ ή $B = \varnothing$ τότε η παραπάνω ισότητα ισχύει και πάλι.

Τέλος, $\mathcal{M}_{\phi_3} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } X \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε: αν $B \subseteq X$ αριθμήσιμο έχουμε $\phi_3(B) = 0 = \phi_3(B \cap A) + \phi_3(B \setminus A)$ διότι τα $B \cap A, B \setminus A$ είναι επίσης αριθμήσιμα, ενώ αν το B είναι υπεραριθμήσιμο τότε το $B \cap A$ είναι αριθμήσιμο και το $B \setminus A$ υπεραριθμήσιμο, συνεπώς $\phi_3(B) = 1 = 0 + 1 = \phi_3(B \cap A) + \phi_3(B \setminus A)$.

2. Αν το $X \setminus A$ είναι αριθμήσιμο τότε από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $X \setminus A \in \mathcal{M}_{\phi_3}$, άρα και $A \in \mathcal{M}_{\phi_3}$.

3. Έστω ότι τα A και $X \setminus A$ είναι υπεραριθμήσιμα. Τότε, $\phi_3(X) = 1 < 1 + 1 = \phi_3(X \cap A) + \phi_3(X \setminus A)$, άρα $A \notin \mathcal{M}_{\phi_3}$.

3.3. Για $A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\phi(A) = \limsup_n \frac{1}{n}|\{A \cap \{1, \ldots, n\}|$, όπου $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του A. Εξετάστε αν η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $A_m = \{m\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \mathbb{N}$. Άρα,

$$\varphi\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,|\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, n\}| = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Όμως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \geqslant m$ έχουμε $|A_m \cap \{1, \ldots, n\}| = 1$. Άρα,

$$\varphi(A_m) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,|A_m \cap \{1, \ldots, n\}| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\varphi\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = 1 > 0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m).$$

Αφού η φ δεν είναι σ–υποπροσθετική, η φ δεν είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

3.4. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C}$ που αποτελείται από το κενό σύνολο και όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\varnothing) = 0$ και $\tau(\{m, n\}) = 2$ για κάθε $\{m, n\} \in \mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(A)$ για $A \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε τα μ^*-μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Δείξτε ότι:

(i) Αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

(ii) Αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k-1}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

Για παράδειγμα, αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k-1}\}$ τότε

$$E \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} \{n_{2j-1}, n_{2j}\}\Big) \cup \{n_{2k-1}, n_1\},$$

άρα

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \tau(\{n_{2j-1}, n_{2j}\}) + \tau(\{n_{2k-1}, n_1\}) = 2k.$$

Αφού το E δεν καλύπτεται από λιγότερα από k δισύνολα, έχουμε $\mu^*(E) = 2k$.

Τέλος, αν το E έχει άπειρα στοιχεία τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_k \subset E$ με $\mathrm{card}(A_k) = 2k$. Άρα, $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(A_k) = 2k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\mu^*(E) = \infty$.

(β) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{\varnothing, \mathbb{N}\}$. Έστω A ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Αν $m \in A$ και $n \notin A$ τότε για το $E = \{m, n\}$ έχουμε

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(\{m\}) + \mu^*(\{n\}) = 2 + 2 = 4 > 2 = \mu^*(E).$$

Αυτό δείχνει ότι $A \notin \mathcal{M}_{\mu^*}$.

3.5. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία και κάθε κύκλος στο $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε κάτι γενικότερο: Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τότε το γράφημα $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ έχει μέτρο $\lambda(\Gamma) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε να χωρίσουμε το $[a, b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ. Τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \{(x, f(x)) : x \in I_j\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times f(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \times T_j) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)\ell(T_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \ell([a, b]) = b - a.$$

Για τα ερωτήματα της άσκησης, παρατηρήστε ότι κάθε κύκλος γράφεται ως ένωση $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ δύο γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων όπως παραπάνω, και κάθε ευθεία γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ ευθυγράμμων τμημάτων, δηλαδή γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων όπως παραπάνω.

3.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$.
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A\cap(-\infty,n]) = \lambda(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A\cap(-\infty,-n]) = \lambda(\varnothing) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A\cap(-\infty,n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A\cap(-\infty,-n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A\cap(-\infty,-1]) \leqslant \lambda(A) < \infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\lambda(A)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \lambda(A),$$

υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \lambda(A\cap(-\infty,x]) = \frac{\lambda(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F = A\cap(-\infty,x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

3.7. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και ένα $A\subseteq X$. Δείξτε ότι υπάρχει $A_0\in\mathcal{A}$ με $A_0\subseteq A$ και $\mu_*(A) = \mu(A_0)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu_*(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εσωτερικού μέτρου, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n\subseteq A$ και $\mu(E_n) > \mu_*(A) - \frac{1}{n}$. Ορίζουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $A_0\in\mathcal{A}$, έχουμε $A_0\subseteq A$ και $\mu(A_0) \geqslant \mu(E_n) > \mu_*(A) - \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $\mu(A_0) \geqslant \mu_*(A)$. Η αντίστροφη ανισότητα, $\mu(A_0) \leqslant \mu_*(A)$, είναι άμεση από τον ορισμό του $\mu_*(A)$, αφού $A_0\subseteq A$.

Έστω τώρα ότι $\mu_*(A) = \infty$. Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ πορούμε να βρούμε $E_n\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n\subseteq A$ και $\mu(E_n) > n$. Ορίζουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $A_0\in\mathcal{A}$, έχουμε $A_0\subseteq A$ και $\mu(A_0) \geqslant \mu(E_n) > n$ για κάθε n, άρα $\mu(A_0) = \infty = \mu_*(A)$.

3.8. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Από τη μονοτονία του μ^*, η ακολουθία $\mu^*(A_n)$ είναι αύξουσα και $\mu^*(A_n) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Άρα, το $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n\supseteq A_n$ και $\mu(E_n) = \mu^*(A_n)$. Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$. Για κάθε $k\geqslant n$ έχουμε $E_k\supseteq A_k\supseteq A_n$, διότι η (A_n) είναι αύξουσα, άρα $E_n\supseteq B_n\supseteq A_n$. Τώρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, άρα

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big).$$

Παρατηρήστε ότι $B_n \subseteq B_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \geqslant \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Ομάδα Β′.

3.9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda^*(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda^*(A) > 0$.

3.10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Να δείξετε ότι και για το $A' = \{x^2 : x \in A\}$ ισχύει $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν B είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : B \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά $C > 0$ τότε $\lambda^*(f(B)) \leqslant C\lambda^*(B)$. Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του B από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B \cap I_n \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in B \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(B \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(B \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(B)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda^*(f(B)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}\\ &= C\,\lambda^*(B).\end{aligned}$$

Έστω τώρα $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leqslant 2n\lambda(A_n) = 0,$$

δηλαδή $\lambda^*(f(A_n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

3.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_*(A) < \infty$ και $\mu^*(X \setminus A) < \infty$. Αν όχι, τότε έχουμε και $\mu(X) = \infty$ (εξηγήστε γιατί) και ισχύει το ζητούμενο.

Έχουμε δεί ότι υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $X \setminus A \subseteq B$ και $\mu^*(X \setminus A) = \mu(B) < \infty$. Τότε, $X \setminus B \subseteq A$ και $X \setminus B \in \mathcal{A}$, άρα

$$\mu_*(A) \geqslant \mu(X \setminus B) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A).$$

Ειδικότερα, $\mu(X) < \infty$. Στην Άσκηση 3.7 είδαμε επίσης ότι υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E \subseteq A$ και $\mu(E) = \mu_*(A) < \infty$. Τότε, $X \setminus E \supseteq X \setminus A$ και $X \setminus E \in \mathcal{A}$, άρα

$$\mu^*(X \setminus A) \leqslant \mu(X \setminus E) = \mu(X) - \mu(E) = \mu(X) - \mu_*(A).$$

Από τις δύο αυτές ανισότητες έπεται ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X) < \infty.$$

3.12. Δείξτε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\lambda^*((a,b)) = \lambda^*((a,b) \cap A) + \lambda^*((a,b) \setminus A), \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο τότε η ισότητα $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)$ ισχύει για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$. Ειδικότερα ισχύει αν $E = (a,b)$, όπου $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι $\lambda^*((a,b)) = \lambda^*((a,b) \cap A) + \lambda^*((a,b) \setminus A)$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ θα δείξουμε ότι το $A \cap (a,b)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$, οπότε το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap (-n,n))$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Έστω (a,b) ένα φραγμένο διάστημα. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει B_1 μετρήσιμο με $(a,b) \setminus A \subseteq B_1$ και $\lambda(B_1) = \lambda^*((a,b) \setminus A)$. Θέτοντας $B = B_1 \cap (a,b)$ έχουμε $B \subseteq (a,b)$, $(a,b) \setminus A \subseteq B$ και $\lambda(B) = \lambda^*((a,b) \setminus A)$ (εξηγήστε γιατί). Τότε $(a,b) \setminus B \subseteq (a,b) \cap A$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda^*((a,b) \cap A) &= \lambda((a,b)) - \lambda^*((a,b) \setminus A) = \lambda((a,b)) - \lambda(B) = \lambda((a,b) \setminus B)\\ &\leqslant \lambda_*((a,b) \cap A).\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lambda^*((a,b) \cap A) = \lambda_*((a,b) \cap A)$, άρα το $(a,b) \cap A$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

3.13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ και $\alpha \in (0,1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(A \cap I) > \alpha\lambda(I).$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $0 < \lambda^*(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\lambda^*(A)$$

(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(A) < +\infty$, εξηγήστε γιατί). Γράφοντας $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap I_n)$, από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n),$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\lambda^*(A \cap I_m) > \frac{1}{1+\varepsilon}\,\lambda(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα δείχνουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(A) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A_m := A \cap [-m, m]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(A_m) < \infty$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για το σύνολο A_m, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(A \cap I) \geqslant \lambda^*(A_m \cap I) > \alpha\,\lambda(I).$$

3.14. Να δείξετε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A \cap I) < \lambda(I)$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα I.

Υπόδειξη. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

Το B είναι ανοικτό και

$$\lambda(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\Big((q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < 4,$$

άρα το σύνολο $A := [0, 4] \setminus B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και $\lambda(A) > 0$.

Έστω I μη τετριμμένο διάστημα. Υπάρχει ρητός q_n ο οποίος είναι εσωτερικό σημείο του I, και τότε το $J := I \cap (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)$ είναι μη τετριμμένο διάστημα, άρα $\lambda(J) > 0$. Παρατηρούμε ότι $A^c \supseteq B$, άρα $\lambda(I \cap A^c) \geqslant \lambda(I \cap B) \geqslant \lambda(J)$. Συνεπώς, αν $\lambda(I) < \infty$ έχουμε

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(I \cap A^c) \leqslant \lambda(I) - \lambda(J) < \lambda(I),$$

ενώ αν $\lambda(I) = +\infty$ τότε $\lambda(A \cap I) \leqslant \lambda(A) \leqslant 4 < \lambda(I)$.

3.15. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο X. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(A) < \infty$, τότε το A είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι $\sigma-$πεπερασμένο, τότε στο (β) δε χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(A) < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu^*(A) < +\infty$. Από τον ορισμό του $\mu^*(A)$, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ και $\sum_{n=1}^\infty \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Ορίζουμε $B = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B$, και

$$\mu^*(B) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

(β) Έστω $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < +\infty$. Από το (α), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B_n$ και $\mu^*(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Αφού το A είναι μ^*-μετρήσιμο, και κάθε B_n είναι επίσης μ^*-μετρήσιμο, έχουμε

$$\mu^*(B_n \setminus A) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A) < \frac{1}{n}$$

για κάθε n. Θέτουμε $B = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) \leqslant \mu^*(B_n \setminus A) < \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$ τότε το $A = B \setminus (B \setminus A)$ είναι μ^*-μετρήσιμο, διότι τα B και $B \setminus A$ ανήκουν στην $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο τότε έχουμε επιπλέον ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (F_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω A ένα μ^*-μετρήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_n := A \cap F_n$ είναι μ^*-μετρήσιμο και $\mu^*(A_n) < \infty$. Από το (β) για κάθε $k \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $B_{n,k} \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A_n \subseteq B_{n,k}$ και $\mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \frac{1}{k \cdot 2^n}$. Τότε, το σύνολο $B_k = \bigcup_{n=1}^\infty B_{n,k}$ ανήκει στην $\mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B_k$ και

$$\mu^*(B_k \setminus A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{k \cdot 2^n} = \frac{1}{k}.$$

Συνεχίζουμε όπως στο (β). Το σύνολο $B = \bigcap_{k=1}^\infty B_k$ ανήκει στην $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $B \supseteq A$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είχαμε χρειαστεί την υπόθεση ότι $\mu^*(A) < \infty$.

3.16. Έστω ϕ ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X και μ το επαγόμενο μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{M}_\phi)$. Αν $E, G \subseteq X$, το G λέγεται $\phi-$*μετρήσιμο κάλυμα* του E αν:

$$E \subseteq G,\ G \in \mathcal{M}_\phi \ \text{ και για κάθε } A \in \mathcal{M}_\phi \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

Δείξτε ότι:

(α) Αν G_1 και G_2 είναι δύο $\phi-$μετρήσιμα καλύματα του ίδιου $E \subseteq X$, τότε $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$.

(β) Αν $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{M}_\phi$ και $\phi(E) = \mu(G) < \infty$, τότε το G είναι ένα $\phi-$μετρήσιμο κάλυμα του E.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $G_2 \setminus G_1 \subseteq G_2 \setminus E$ διότι $E \subseteq G_1$. Αφού $G_2 \setminus G_1 \in \mathcal{M}_\phi$ και το G_2 είναι μετρήσιμο κάλυμα του E, συμπεραίνουμε ότι $\mu(G_2 \setminus G_1) = 0$.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\mu(G_1 \setminus G_2) = 0$. Συνεπώς,

$$\mu(G_1 \triangle G_2) = \mu(G_2 \setminus G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = 0.$$

Τέλος, από τις $\mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_1 \setminus G_2) = 0$ έπεται ότι

$$\mu(G_2) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_2 \setminus G_1) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_1).$$

(β) Έστω $A \in \mathcal{M}_\phi$ με $A \subseteq G \setminus E$. Τότε, $E \subseteq G \setminus A$. Άρα,

$$\mu(G) = \phi(E) \leqslant \phi(G \setminus A) = \mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μονοτονία του μ^*, το γεγονός ότι $G \setminus A \in \mathcal{M}_\phi$ και την υπόθεση ότι $\mu(G) < \infty$. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$. Άρα, το G είναι ϕ–μετρήσιμο κάλυμα του E.

3.17. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_n \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0,1)$ υπάρχει υπακολουθία (A_{k_n}) της (A_n) ώστε

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) > \alpha.$$

Υπόδειξη. Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) = 1 - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

Ομάδα Γ′.

3.18. Έστω $\{q_n\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\Big).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A\left(\frac{1}{j}\right)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon))\leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A\subseteq[0,1]$ και $\lambda(A)=0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\big(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\big)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n}=2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1]\subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1\leqslant\lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon))\leqslant 2\varepsilon<1$.

(γ) Αφού $0\leqslant q_n\leqslant 1$, για κάθε $j\in\mathbb{N}$ έχουμε $A\subseteq A\left(\frac{1}{j}\right)\subseteq\left[-\frac{1}{j},1+\frac{1}{j}\right]$. Άρα,

$$A\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}\Big[-\frac{1}{j},1+\frac{1}{j}\Big]=[0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A)\leqslant\lambda(A(1/j))\leqslant 2/j$$

για κάθε $j\in\mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A)=0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq A\left(\frac{1}{j}\right)$ για κάθε $j\in\mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}A\left(\frac{1}{j}\right)=A$.

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, το $[0,1]\setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1]=A\cup([0,1]\setminus A)=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big([0,1]\setminus A\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big)\Big).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1]\setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Όμως, κανένα από τα $\{x_n\}$ δεν περιέχει διάστημα και κανένα από τα $[0,1]\setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ δεν περιέχει διάστημα διότι δεν περιέχει ρητούς.

Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

3.19. Έστω A ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) < \infty$ και $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του A ώστε $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάποιο $c > 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών αριθμών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(A) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing$.

3.20. Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο* αν για κάθε $a > 0$, το σύνολο $\{x \in A : |x| > a\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο,} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο χωρίς σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο,} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο με σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\mathcal{M}_\phi = \{A \subseteq \mathbb{R} :\ A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Έχει κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ $\phi-$μετρήσιμο κάλυμα;

Υπόδειξη. (α) Το ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$: η μόνη ιδιότητα που χρειάζεται προσοχή είναι η $\sigma-$υποπροσθετικότητα. Πιο συγκεκριμένα, η περίπτωση $\phi\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι το $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ είναι υπεραριθμήσιμο και έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Παρατηρήστε ότι τουλάχιστον ένα από τα A_n είναι υπεραριθμήσιμο. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, τα $A_{m_1}, \ldots, A_{m_s}$, και κανένα από αυτά δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο, τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, s$ υπάρχει $\alpha_j > 0$ ώστε το σύνολο $\{x \in A_{m_j} : |x| > \alpha_j\}$ να είναι αριθμήσιμο. Τότε, αν θέσουμε $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ βλέπουμε ότι το σύνολο $\{x \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n : |x| > \alpha\}$ είναι αριθμήσιμο. Αυτό είναι άτοπο.

Απομένουν λοιπόν δύο περιπτώσεις:

(i) Κάποιο A_m έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Τότε, $\phi(A_m) = \infty$, άρα

$$\phi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \infty = \phi(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

(ii) Υπάρχουν άπειρα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, κανένα όμως δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Αφού $\phi(A_m) = 1$ για καθένα από αυτά, παίρνουμε

$$\phi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

(β) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ το $E \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα

$$\phi(E \cap A) + \phi(E \cap A^c) = 0 + \phi(E \cap A^c) \leqslant \phi(E)$$

από τη μονοτονία του ϕ. Έπεται ότι $A \in \mathcal{A}_\phi$, και συνεπώς,

$$\mathcal{A}_\phi \supseteq \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Έστω τώρα A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με υπεραριθμήσιμο συμπλήρωμα. Μπορούμε να βρούμε υπεραριθμήσιμα $G \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$ τα οποία δεν έχουν σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί). Αν θέσουμε $E = G \cup F$ τότε το E δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\phi(E \cap A) + \phi(E \cap A^c) = \phi(G) + \phi(F) = 1 + 1 = 2 > 1 = \phi(E).$$

Άρα, $A \notin \mathcal{A}_\phi$.

(γ) Έστω μ το επαγόμενο μέτρο στην $\mathcal{M}_\phi$ (δείτε την Άσκηση 3.16). Κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει ϕ–μετρήσιμο κάλυμα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Το E είναι αριθμήσιμο. Τότε, $E \in \mathcal{A}_\phi$ οπότε μπορούμε να πάρουμε $G = E$.

(ii) Το E είναι υπεραριθμήσιμο. Παίρνουμε $G = \mathbb{R}$. Αν $A \in \mathcal{A}_\phi$ και $A \subseteq \mathbb{R} \setminus E = E^c$, τότε το A δεν έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (παρατηρήστε ότι $A^c \supseteq E$) άρα είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$.

3.21. Έστω Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Από την $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda(A \cap I_k).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}.$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t,t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I+s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leqslant \ell(I) + |s| < \frac{3\ell(I)}{2},$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t,t)$.

Κεφάλαιο 4

Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Ομάδα Α΄.

4.1. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο N του Vitali. Έχουμε δει ότι αν θεωρήσουμε μια αρίθμηση $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και ορίσουμε $N_n := N + q_n$, τότε:

(α) τα σύνολα N_n είναι ξένα ανά δύο,

(β) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$,

(γ) το σύνολο $N_n - N_n = N - N$ δεν περιέχει κανέναν ρητό $q \neq 0$.

Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Γράφουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap N_n)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^* έχουμε

$$0 < \lambda^*(A) = \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap N_n)\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap N_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda^*(A \cap N_m) > 0$. Το $A \cap N_m$ είναι μη μετρήσιμο. Αν ήταν μετρήσιμο τότε, από το θεώρημα του Steinhaus, θα υπήρχε $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$(-\delta, \delta) \subseteq (A \cap N_m) - (A \cap N_m) \subseteq N_m - N_m = N - N,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού υπάρχουν ρητοί $q \neq 0$ στο $(-\delta, \delta)$.

4.2. Δώστε παράδειγμα ενός Lebesgue μετρήσιμου υποσυνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε το $\pi_1(A)$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμο, όπου $\pi_1(x, y) = x$ για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη).

Υπόδειξη. Αν N είναι ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε θεωρήστε το σύνολο $E = \{(x, 0) : x \in N\}$ και παρατηρήστε ότι:

(α) Το E περιέχεται στην ευθεία $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $\lambda_2(L) = 0$ (εξηγήστε γιατί) άρα το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda_2(E) = 0$.

(β) Το σύνολο $\pi_1(E) = N$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.3. Αν C είναι το σύνολο του Cantor, δείξτε ότι $\frac{1}{4} \in C$, παρόλο που το $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα διαστήματα που ορίζουν το σύνολο του Cantor.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε το n-οστό σύνολο C_n της κατασκευής του C και τα 2^n κλειστά διαστήματα I_k^n, $k = 1, \ldots, 2^n$ που σχηματίζουν το C_n. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα I_k^n και χωρίζει το I_k^n σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3:1$ αν ο n είναι περιττός και $1:3$ αν ο n είναι άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα I_k^n.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^n = [a, b]$ και $x - a = 3(b - x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a, b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]$ και $\left[\frac{2b+a}{3}, b\right]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b + a}{4} = \frac{b - a}{4} = 3\Big(\frac{3b + a}{4} - \frac{2b + a}{3}\Big) = 3\Big(x - \frac{2b + a}{3}\Big).$$

4.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ ισχύει $a + t \in A$ ή $a - t \in A$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) \geqslant \delta$.

Υπόδειξη. Έστω $t \in (-\delta, \delta)$. Αν $a + t \in A$ τότε $t \in -a + A$ και αν $a - t \in A$ τότε $t \in a - A := \{a - x : x \in A\}$. Σε κάθε περίπτωση, $t \in (-a + A) \cup (a - A)$. Άρα, $(-\delta, \delta) \subseteq (-a + A) \cup (a - A)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$2\delta = \lambda^*((-\delta, \delta)) \leqslant \lambda^*((-a + A) \cup (a - A)) \leqslant \lambda^*(-a + A) + \lambda^*(a - A).$$

Όμως, $\lambda^*(-a + A) = \lambda^*(a - A) = \lambda^*(A)$ από το αναλλοίωτο του λ^* ως προς μεταφορές και την $\lambda^*(\varrho \cdot A) = |\varrho|\lambda^*(A)$, $\varrho \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $2\delta \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(A)$, δηλαδή $\lambda^*(A) \geqslant \delta$.

Ομάδα Β′.

4.5. Έστω E, F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $a \in (\lambda(E), \lambda(F))$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K με $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = a$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(W) > 0$, τότε, για κάθε $0 < \beta < \lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \beta$. Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q \subset \mathbb{R}^{k-1}$ ώστε $W \subseteq Q_1 := [a, b] \times Q$. Ορίζουμε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \lambda(W \cap \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in Q_1 : a \leqslant x_1 \leqslant t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t) - f(s)| \leqslant \lambda_{k-1}(Q)\, |t - s|.$$

Αφού $f(a) = 0$ και $f(b) = \lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Έστω $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$. Αφού $\alpha - \lambda(E) < \lambda(F \setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W \subseteq F \setminus E$ με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

4.6. Έστω $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon.$$

(β) Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{m}$ ανοικτών διαστημάτων με

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} I_n \quad \text{ισχύει} \quad \sum_{n=1}^{m} \lambda(I_n) \geqslant 1.$$

Υπόδειξη. (α) Το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(β) Έστω ότι $I_n = (a_n, b_n)$, $1 \leqslant n \leqslant m$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $T_n = (a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon)$, $1 \leqslant n \leqslant m$. Παρατηρήστε ότι, αφού $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_m$,

$$[0,1] = \overline{A} \subseteq \overline{I_1 \cup \cdots \cup I_m} = \overline{I_1} \cup \cdots \cup \overline{I_m} \subseteq T_1 \cup \cdots \cup T_m.$$

Έπεται (το έχουμε δεί στη θεωρία) ότι

$$1 = \ell([0,1]) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \ell(T_n) = \sum_{n=1}^{m} (\ell(I_n) + 2\varepsilon) = 2m\varepsilon + \sum_{n=1}^{m} \lambda(I_n).$$

Το πλήθος m των διαστημάτων είναι σταθερό. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

4.7. Έστω $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει ένα σύνολο B με $\lambda(B) = 0$ ώστε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus B$ να έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $|x - q_n| \geqslant 1/n^2$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο B των $x \in \mathbb{R}$ που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Τότε, $x \in B$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geqslant k$ ώστε $|x - q_n| < 1/n^2$. Δηλαδή,

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |x - q_n| < 1/n^2\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2).$$

Έπεται ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(B) \leqslant \lambda\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)\Big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \lambda\big((q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)\big) = 2\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ έχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, άρα $\lambda(B) = 0$.

4.8. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι η f απεικονίζει σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue σε σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(ii) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

(β) Είναι σωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα;

Υπόδειξη. (α) (i) Από την υπόθεση, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $C_k > 0$ τέτοια ώστε η $f : [-k, k] \to \mathbb{R}$ να είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C_k, δηλαδή $|f(x)-f(y)| \leqslant C_k|x-y|$ για κάθε $x, y \in [-k, k]$. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C_{k+1}\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq [-k, k]$. Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \emptyset$ και ότι $I_n \subseteq [-(k+1), k+1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_{k+1}|x - y| \leqslant C_{k+1}\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leqslant C_{k+1}\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C_{k+1}\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leqslant C_{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C_{k+1}\ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= C_{k+1}\lambda^*(A).\end{aligned}$$

Έστω τώρα $B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(B) = 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_k = B \cap [-k, k]$. Τότε, $\lambda^*(f(B_k)) \leqslant C_{k+1}\lambda^*(B_k) = 0$, δηλαδή $\lambda^*(f(B_k)) = 0$. Ειδικότερα, κάθε $f(B_k)$ είναι μετρήσιμο. Η $\{f(B_k)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $f(B) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(B_k)$. Έπεται ότι

$$\lambda(f(B)) = \lim_{k\to\infty} \lambda(f(B_k)) = 0.$$

(ii) Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν F_σ σύνολο $H \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(B) = 0$ ώστε $A = H \cup B$. Παρατηρούμε επίσης ότι το H μπορεί να γραφτεί στη μορφή $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, όπου κάθε K_n είναι συμπαγές σύνολο (εξηγήστε γιατί). Αφού η f είναι συνεχής, κάθε $f(K_n)$ είναι συμπαγές, και ειδικότερα μετρήσιμο, σύνολο. Από το (i) έχουμε ότι το $f(B)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(f(B)) = 0$. Τώρα,

$$f(A) = f(H \cup B) = f(H) \cup f(B) = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n)\Big) \cup f(B),$$

άρα το $f(A)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

(β) Έχουμε δεί ότι αυτό δεν είναι σωστό. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0, 1] \to [0, 2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί.

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$, συνεπώς υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C και $g(K) = M$, δηλαδή το $g(K)$ δεν είναι μετρήσιμο.

4.9. Έστω G μη κενό, φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.

(α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμο κάλυμμα $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών η οποία καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$. Τότε, η πρώτη υπόθεση μας λέει ότι

$$G \subseteq \limsup_j B_j.$$

Από την δεύτερη υπόθεση και από το λήμμα Borel-Cantelli (Άσκηση 2.3) έχουμε ότι $\lambda\left(\limsup_j B_j\right) = 0$. Άρα, $\lambda(G) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού το G έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Το G είναι φραγμένο, άρα περιέχεται σε έναν κύβο Q με μήκος ακμής a. Θέτουμε $Q_1^0 = Q$.

Διχοτομούμε κάθε ακμή του Q_1^0, και παίρνουμε 2^k κλειστούς κύβους $Q_i^1, i = 1, \ldots 2^k$. Αν x_i^1 είναι το κέντρο του Q_i^1, θέτουμε $B_i^1 = B\left(x_i^1, \frac{3a\sqrt{k}}{2}\right)$. Τότε $Q_i^1 \subseteq B_i^1$ για κάθε $i = 1, \ldots 2^k$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε 2^{kn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $\frac{3a\sqrt{k}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_k)]^p 2^{kn} \Big(\frac{3a\sqrt{k}}{2^n}\Big)^{kp} = [\lambda(B_k)]^p (3a\sqrt{k})^{kp} 2^{nk(1-p)},$$

όπου B_k είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε σημείο του Q ανήκει σε κάποιον κύβο του n-οστού βήματος, άρα και σε μία μπάλα του n-οστού βήματος. Αν θεωρήσουμε την συλλογή όλων των μπαλών που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο σε οποιοδήποτε βήμα, έχουμε μια κάλυψη $\{B_j\}_j$ του Q, άρα και του G, με την ιδιότητα ότι κάθε $x \in G$ ανήκει σε άπειρες B_j. Τέλος, το άθροισμα της σειράς των p-δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_k)]^p (3a\sqrt{k})^{kp} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(1-p)n} < \infty,$$

αφού $2^{k(1-p)} < 1$.

4.10. Έστω A το υποσύνολο του $[0,1]$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα δεν περιέχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και βρείτε το $\lambda(A)$.

Υπόδειξη. Μιμούμαστε την κατασκευή του συνόλου του Cantor. Θεωρούμε το διάστημα $I^0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε δέκα ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα

$\left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right]$. Ονομάζουμε I^1 το σύνολο που απομένει, το οποίο αποτελείται από εννέα διαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$.

Χωρίζουμε καθένα από αυτά σε δέκα ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα. Ονομάζουμε I^2 το σύνολο που απομένει. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα σύνολο I^n έτσι ώστε η ακολουθία (I^n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^n \supset I^{n+1}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(ii) Το I^n είναι η ένωση 9^n διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10^n}$.

Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n$. Το C είναι μετρήσιμο και από την $\lambda(I^n) = 9^n/10^n$ έπεται ότι $\lambda(C) = 0$. Παρατηρήστε ότι το $x \in [0,1]$ δεν έχει δεκαδικό ανάπτυγμα που να περιέχει το ψηφίο 4 αν και μόνο αν $x \in C$.

4.11. Αν C το σύνολο του Cantor δείξτε ότι $C - C = [-1, 1]$. Συνάγετε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Steinhaus.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $C + C = [0, 2]$. Έστω $z \in [0, 2]$. Τότε,

$$\frac{z}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}, \qquad \epsilon_k \in \{0, 1, 2\}.$$

Ορίζουμε $(a_k, b_k) = (0, 0), (2, 0)$ ή $(2, 2)$ αν $\epsilon_k = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα, και θεωρούμε τους

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad \text{και} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}.$$

Τότε, $x, y \in C$ και

$$\frac{x+y}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{2} \cdot \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} = \frac{z}{2},$$

δηλαδή $z = x + y \in C + C$. Ο άλλος εγκλεισμός, $C + C \subseteq [0, 2]$, είναι άμεσος αφού $C \subseteq [0, 1]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι το C είναι συμμετρικό ως προς το $\frac{1}{2}$: Έχουμε $x \in C$ αν και μόνο αν $1 - x \in C$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} C - C &= \{x - y \mid x, y \in C\} = \{x - (1 - y) \mid x, y \in C\} = \{x + y - 1 \mid x, y \in C\} \\ &= -1 + (C + C) = -1 + [0, 2] = [-1, 1]. \end{aligned}$$

4.12. Έστω $\theta \in (0, 1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με την διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.
(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.
(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0, 1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\theta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \Big[1 - \theta\Big(1 - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}\Big)\Big] = 1 - \theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\Big[1 - \theta\Big(1 - \big(\frac{2}{3}\big)^{n-1}\Big)\Big] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

4.13. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές.

(ii) Αν το $E \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι F_σ–σύνολο τότε το E μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Από το προηγούμενο βήμα, το $T(E)$ είναι F_σ–σύνολο.

(iii) Η T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x) - T(y)\|_2 \leqslant M\,\|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^k$.

(iv) Αν R είναι ένας κύβος (διάστημα με ισομήκεις ακμές) στον $\mathbb{R}^k$, τότε το $T(R)$ περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας το πολύ ίσης με $\frac{M\cdot d}{2} = \frac{M\sqrt{k}\alpha}{2}$ όπου d η διάμετρος και α η ακμή του R. Δηλαδή, υπάρχει $c = c(M,k) > 0$ ώστε το $T(R)$ να περιέχεται σε κύβο ακμής $c\alpha$. Έπεται ότι $\lambda(T(R)) \leqslant c^k\lambda(R)$.

(v) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και την παρατήρηση ότι για τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου του A αρκεί να θεωρήσουμε καλύψεις του A με κύβους, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

Γράφοντας το τυχόν μετρήσιμο σύνολο σαν ένωση ενός F_σ–συνόλου και ενός συνόλου μέτρου 0 παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

Ομάδα Γ΄.

4.14. Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A\cap(x-t,x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x)=0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Έστω $0<\alpha<1$. Κατασκευάστε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0)=\alpha$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για κάθε $t>0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q}\cap(x-t,x+t))=0 \;\text{ και }\; \lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-t,x+t))=2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t,x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q},x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda(\mathbb{Q}\cap(x-t,x+t))}{2t}=0$$

και

$$\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-t,x+t))}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t}{2t}=1.$$

(β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n=\left(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right]\cup\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n\subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n)=\alpha\lambda(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 3.6). Ορίζουμε

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1}\leqslant t<\frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t}\leqslant\frac{\lambda(A\cap(-1/n,1/n))}{2/(n+1)}=\frac{2\alpha/n}{2/(n+1)}=\alpha\frac{n+1}{n}\leqslant\alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} &\geqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n}=\frac{2\alpha/(n+1)}{2/n}\\ &= \alpha\frac{n}{n+1}\geqslant\alpha(1-2t).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t}=\alpha,$$

δηλαδή $\rho(A,0)=\alpha$.

4.15. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος. Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $[0,1]$:

$$x \sim y \iff x-y\in\mathbb{Q}.$$

Αν $\{F_\alpha : \alpha\in A\}$ είναι η οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$, ορίζουμε, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, ένα σύνολο $E\subset[0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε F_α. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ των ρητών του $[-1,1]$ και ορίζουμε $E_n=q_n+E$. Από τον τρόπο ορισμού του E ελέγχουμε ότι τα E_n είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$[0,1]\subseteq \cup_{n=1}^{\infty}E_n\subseteq[-1,2].$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(E_n)=\lambda^*(E)>0$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$1=\lambda([0,1])\leqslant\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=0.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(E_n)=+\infty>3=\lambda([-1,2])\geqslant\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big).$$

Δεύτερος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $A\subset\mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $E\subset\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(E)<\lambda^*(E\cap A)+\lambda^*(E\cap A^c).$$

Θεωρήστε τα σύνολα $E_1=E\cap A$, $E_2=E\cap A^c$, $E_3=E_4=\cdots=\varnothing$.

4.16. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0<\lambda(E)<\infty$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to0}\lambda(E\cap(E+t))=\lambda(E).$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, υπάρχουν $x,s\in\mathbb{R}$ ώστε

$$x, x+s, x+2s,\dots,x+(k-1)s\in E.$$

Υπόδειξη. (β) Αφού $\lambda(E)>0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.13 βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a,b]$ ώστε

$$\lambda(E\cap[a,b])>\frac{k-1}{k}(b-a).$$

Θέτουμε $A = E \cap [a,b]$. Χωρίζουμε το $[a,b)$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$:

$$I_1 = [a, a+s),\ \ I_2 = [a+s, a+2s),\ \ \dots\ \ ,\ \ I_k = [a+(k-1)s, b),$$

και για κάθε $j = 1, \dots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \dots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \dots, k$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \bigcap_{j=1}^{k} B_j \neq \varnothing.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j, έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \dots, x+(k-1)s \in E.$$

Για την απόδειξη της $(*)$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j\Big) &= \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{k} (I_1 \setminus B_j)\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_1 \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a,b] \setminus A) \\
&< \frac{1}{k}(b-a) = \lambda(I_1).
\end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1, και έπεται η $(*)$.

4.17. Έστω μ ένα μη αρνητικό μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$ με $\mu(F) = 1$ και την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό σύνολο E που περιέχεται γνήσια στο F ισχύει $\mu(F) < 1$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$G = \{x \in \mathbb{R} :\ \text{υπάρχει } \delta_x > 0 \text{ ώστε } \mu((x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0\}.$$

Παρατηρήστε ότι το G είναι ανοικτό: αν $x \in G$ τότε παίρνουμε $\delta_x > 0$ ώστε $\mu((x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0$ και βλέπουμε ότι $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq G$, άρα $x \in G^{\circ}$. [Πράγματι, αν $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ τότε μπορούμε να βρούμε $\delta_y > 0$ ώστε $(y - \delta_y, y + \delta_y) \subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x)$ και από τη μονοτονία του μέτρου έπεται ότι $\mu((y - \delta_y, y + \delta_y)) = 0$, άρα $y \in G$.]

Παρατηρούμε επίσης ότι το G γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων I_n με $\mu(I_n) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(G) = 0$. [Πράγματι, αν $x \in G$ τότε παίρνουμε $\delta_x > 0$ ώστε $\mu((x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0$ και βρίσκουμε ανοικτό διάστημα I_x με άκρα στο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x \in I_x \subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x)$. Τότε, όπως πριν έχουμε $x \in I_x$ και $I_x \subseteq G$. Άρα, $G = \bigcup_{x \in G} I_x$ και αυτή η ένωση είναι αριθμήσιμη διότι το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.]

Ορίζουμε τώρα $F = \mathbb{R} \setminus G$. Το F είναι κλειστό σύνολο και

$$\mu(F) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(G) = 1 - 0 = 1.$$

Έστω E κλειστό σύνολο το οποίο περιέχεται γνήσια στο F. Επιλέγουμε $x \in F \setminus E$. Έχουμε $x \notin G$, άρα για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι $\mu((x-\delta, x+\delta)) > 0$. Αφού $x \notin E$ και το E είναι κλειστό, μπορούμε να βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $(x-\delta_0, x+\delta_0) \cap E = \varnothing$. Τότε,

$$1 = \mu(\mathbb{R}) \geqslant \mu(E) + \mu((x-\delta_0, x+\delta_0)) > \mu(E).$$

4.18. Έστω E, F δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) > 0$ και $\lambda(F) > 0$. Δείξτε ότι το $E + F$ περιέχει διάστημα.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B έχουν πεπερασμένο και θετικό μέτρο. Μπορούμε να βρούμε αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ διαστημάτων, που οι κορυφές τους έχουν ρητές συντεταγμένες, ώστε $A \subseteq G$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A) \leqslant \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_k).$$

Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A \cap I_k).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα και στο B, καταλήγουμε στο εξής: υπάρχουν διαστήματα I_0 και J_0 με ρητά άκρα, ώστε

$$(*) \qquad \lambda(A \cap I_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Αφού τα μήκη των I_0 και J_0 είναι ρητοί αριθμοί, μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n διαδοχικά διαστήματα αντίστοιχα, που όλα έχουν το ίδιο μήκος. Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ βλέπουμε τώρα ότι υπάρχουν διαστήματα I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος, ώστε

$$\lambda(A \cap I_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει διάστημα I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda((A - x) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((B - y) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται (θυμηθείτε και την Άσκηση 3.21) ότι

$$\lambda((A - x) \cap (B - y) \cap I) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(I) > 0.$$

Θέτουμε $C = (A - x) \cap (B - y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $C - C$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$A - B - (x + y) = (A - x) - (B - y) \supseteq C - C,$$

συμπεραίνουμε ότι το $A-B$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το B με το $-B$ παίρνουμε το ζητούμενο.

4.19. Αποδείξτε ότι: αν $\lambda(E)>0$ και για κάθε $x,y\in E$ έπεται ότι $\frac{1}{2}(x+y)\in E$, τότε το E έχει μη κενό εσωτερικό.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\frac{E}{2}=\left\{\frac{x}{2}:x\in E\right\}$. Αφού το E έχει θετικό μέτρο, το $\frac{E}{2}$ είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο:

$$\lambda\Big(\frac{E}{2}\Big)=\frac{\lambda(E)}{2}>0.$$

Από την Άσκηση 4.18, το σύνολο $\frac{E}{2}+\frac{E}{2}$ περιέχει κάποιο διάστημα.

Όμως, από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι $\frac{E}{2}+\frac{E}{2}\subseteq E$. Άρα, το E περιέχει διάστημα. Ειδικότερα, έχει μη κενό εσωτερικό.

4.20. Έστω E το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^nx)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι $\lambda(E)=0$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\sin(2^nx)\to a$ τότε $a=0$. Πράγματι, αν $\sin(2^nx)\to a\neq 0$ τότε, για μεγάλα n, έχουμε $\sin(2^nx)\neq 0$, άρα

$$\cos(2^nx)=\frac{\sin(2^{n+1}x)}{2\sin(2^nx)}\to\frac{1}{2}.$$

Όμως, τότε

$$\sin^2(2^nx)=\frac{1-\cos(2^{n+1}x)}{2}\to\frac{1}{4},$$

άρα

$$1=\cos^2(2^nx)+\sin^2(2^nx)\to\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το σύνολο A των $x\in[0,2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^nx)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει είναι το

$$A=\{x\in[0,2\pi):\sin(2^nx)\to 0\}.$$

Το A είναι μετρήσιμο: θέτουμε $f_k(x)=\sin(2^kx)$, και $A_{k,m}=\left\{x\in[0,2\pi):|f_k(x)|<\frac{1}{m}\right\}$. Για κάθε $k,m\in\mathbb{N}$ η f_k είναι συνεχής, άρα το $A_{k,m}$ είναι ανοικτό στο $[0,2\pi)$, και μπορούμε να δούμε ότι

$$A=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_{k,m}.$$

Άρα, το A είναι μετρήσιμο.

Υποθέτουμε ότι $\lambda(A)>0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι αν $x,y\in A$ τότε

$$\sin\left(2^n\frac{x+y}{2}\right)=\sin(2^{n-1}x)\cos(2^{n-1}y)+\cos(2^{n-1}x)\sin(2^{n-1}y)\to 0,$$

συνεπώς $\frac{x+y}{2}\in A$. Από την Άσκηση 4.19, το A, άρα και το $\frac{1}{2\pi}A\subseteq[0,1]$, έχουν μη κενό εσωτερικό.

Έπεται ότι το $\frac{1}{2\pi}A$ περιέχει έναν τριαδικό ρητό, της μορφής $\frac{k}{3^m}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ με $0 < k < 3^m$, και ο k δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τότε, $\sin\left(\frac{2^{n+1}}{3^m}k\pi\right) \to 0$, άρα και η $\sin\left(\frac{2^n}{3}k\pi\right) \to 0$ (εξηγήστε γιατί). Ειδικότερα, $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) \to 0$. Παρατηρούμε ότι $3 \mid 4^n - 1$, άρα $6 \mid 2^{2n+1} - 2$. Επομένως, ο $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$ είναι άρτιος, άρα $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) = \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$. Επομένως, η $\sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$ (η οποία είναι σταθερή) συγκλίνει στο 0. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο $\frac{2k}{3}\pi$ δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π.

4.21. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{t \in [0,1] : \text{ υπάρχει } x \in [0,1] \text{ ώστε } f(x+t) = f(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι το A είναι κλειστό, άρα και μετρήσιμο.

(β) Αν $B = \{t \in [0,1] : 1 - t \in A\}$, δείξτε ότι $A \cup B = [0,1]$.

(γ) Δείξτε ότι $\lambda(A) \geqslant 1/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ακολουθία (t_n) στοιχείων του A η οποία συγκλίνει σε κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Προφανώς, αφού κάθε $t_n \in [0,1]$, θα έχουμε και ότι $t \in [0,1]$. Για κάθε n βρίσκουμε $x_n \in [0,1]$ ώστε $x_n + t_n \in [0,1]$ και $f(x_n + t_n) = f(x_n)$. Η ακολουθία των x_n περιέχεται ολόκληρη στο συμπαγές $[0,1]$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in [0,1]$. Τότε όμως $x_0 + t \in [0,1]$ (αφού $x_{k_n} + t_{k_n} \to x_0 + t$ και για κάθε n, $0 \leqslant x_{k_n} + t_{k_n} \leqslant 1$), ενώ από την συνέχεια της f,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \;\; \text{και} \;\; \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_0 + t).$$

Αφού για κάθε n, $f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_{k_n})$, συμπεραίνουμε ότι $f(x_0+t) = f(x_0)$, που σημαίνει ότι $t \in A$.

(β) Αφού $f(0) = f(1)$, μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς την f σε μία 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (όπου $\tilde{f}(z) = f(z - \lfloor z \rfloor)$). Έστω $t \in [0,1]$. Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)$. Η g μηδενίζεται για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ (αφού, αν θεωρήσουμε $y \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(y) = \min f = \min \tilde{f}$, θα ισχύει $g(y-t) \leqslant 0 \leqslant g(y)$). Επειδή η g είναι και 1-περιοδική, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in [0,1]$ στο οποίο η g να μηδενίζεται. Παρατηρούμε τώρα ότι αν $x_0 + t \leqslant 1$ τότε $t \in A$. Αλλιώς, αν $x_0 + t > 1$, τότε $0 < x_0 + t - 1 \leqslant 1$ και $g(x_0 - 1) = 0$, άρα $f(x_0 + t - 1) = f(x_0) = f((x_0 + t - 1) + 1 - t)$. Αυτό σημαίνει ότι $1 - t \in A$, ή ισοδύναμα ότι $t \in B$.

(γ) Από το (β) έχουμε ότι $[0,1] \setminus A \subseteq B$. Επίσης,

$$\mu(B) = \mu((-A+1) \cap [0,1]) \leqslant \mu(-A+1) = \mu(A).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$1 = \mu([0,1]) = \mu(A) + \mu([0,1] \setminus A) \leqslant \mu(A) + \mu(B) \leqslant 2\mu(A),$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

4.22. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι

$$\lambda\left(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\right) = 0.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x \in A - \big(\mathbb{R} \setminus (A+\mathbb{Q})\big)$ τότε $x \notin \mathbb{Q}$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{Q}$ τότε $-x \in \mathbb{Q}$ και ταυτόχρονα $x = a - y$, όπου $a \in A$ και $y \notin A + \mathbb{Q}$, το οποίο μας δίνει $y = a - x \in A + \mathbb{Q}$, άτοπο.

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 4.18. Αν είχαμε $\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A+\mathbb{Q})\big) > 0$ τότε το σύνολο $A - \big(\mathbb{R} \setminus (A+\mathbb{Q})\big)$ θα περιείχε κάποιο διάστημα I. Αφού το διάστημα I περιέχει ρητούς, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Απευθείας απόδειξη. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει πεπερασμένο $J_n \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε

$$(*) \qquad \lambda\Big([0,1] \setminus \bigcup_{t \in J_n} (A+t)\Big) < \frac{2}{n}.$$

Αν θέσουμε $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ τότε προκύπτει άμεσα ότι

$$\lambda\Big([0,1] \setminus \bigcup_{t \in J} (A+t)\Big) = 0.$$

Τέλος, αν ορίσουμε $D = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} (J+r)$ και γράψουμε το I στη μορφή $\{t_s : s \in \mathbb{N}\}$ (παρατηρήστε ότι το D είναι αριθμήσιμο) μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\lambda\Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s=1}^{\infty} (A+t_s)\Big) \leqslant \sum_{r \in \mathbb{Z}} \lambda\Big([r, r+1] \setminus \bigcup_{t \in J+r} (A+t)\Big) = 0$$

και αφού $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Z}} (J+r) \subseteq \mathbb{Q}$ έπεται το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της $(*)$ παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και $I = \big[y - \frac{1}{k}, y + \frac{1}{k}\big]$ για κατάλληλο $y \in \mathbb{Q}$, έχουμε

$$\lambda\,(A \cap I) \geqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\frac{2}{k},$$

άρα

$$\lambda(I \setminus A) \leqslant \frac{2}{nk}.$$

Τώρα, $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{k-1} \big[\frac{j}{k} - \frac{1}{k}, \frac{j}{k} + \frac{1}{k}\big]$. Άρα,

$$[0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \Big(A + \frac{j}{k} - y\Big) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k-1} \Big((I \setminus A) + \frac{j}{k}\Big).$$

Θέτοντας $J_n = \{\frac{j}{k} - y : j = 1, \dots, k-1\}$ παίρνουμε

$$\lambda\Big([0,1] \setminus \bigcup_{t \in J_n} (A+t)\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \lambda\Big((I \setminus A) + \frac{j}{k}\Big) = (k-1)\lambda(I \setminus A) < \frac{2(k-1)}{k}\frac{1}{n} < \frac{2}{n}.$$

4.23. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0,1]$ ισχύει

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 4.12, αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n-οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0 < \delta < 1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0 < \delta_1 < 1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1) = 1 - \delta_1$.

Το $B_1 = [0,1] \setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1 = \bigcup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_2 < 1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2) = (1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2 = D^1 \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j^2 \Big).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2) = (1-\delta_1) + (1-\delta_2)\delta_1 = 1 - \delta_1\delta_2.$$

Το $B_2 = [0,1] \setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2 = \bigcup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_3 < 1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $D^{n+1} \subset B^n = [0,1] \setminus D^n$.

(ii) $\lambda(D^n) = 1 - \delta_1\delta_2 \cdots \delta_n$.

(iii) Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D_j^n, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2 \cdots \delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim_{n\to\infty} (1 - \delta_1 \cdots \delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J = [a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R_j^n κάποιου B_n ώστε $R_j^n \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R_j^1 \subset B_1$ με $R_j^1 \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R_j^1 \cap J \neq \varnothing$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R_j^1 = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R_j^1 \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R_t^1 = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leqslant b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R_s^1 = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R_s^1 \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a,b] \subset R_j^1 = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R_j^1}$ κατασκευάστηκε το D_j^2. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R_j^2 \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R_j^n \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^n$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leqslant \inf_n \lambda(R_j^n) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R_j^n) \leqslant \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{3^n}$). □

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R_j^n, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R_j^n \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R_j^n}$ κατασκευάστηκε το D_j^{n+1}, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R_j^{n+1}) = \lambda(R_j^n)(1-\delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D_j^{n+2} με συνολικό μέτρο $\lambda(R_j^n)\delta_{n+1}(1-\delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D_j^m, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R_j^n είναι ίσο με

$$\lambda(R_j^n)(1-\delta_{n+1}\delta_{n+2}\cdots) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E \cap R_j^n) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R_j^n \setminus E) = \lambda(R_j^n)\frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n} > 0.$$

Αφού $R_j^n \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E \cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$