Ασκήσεις: Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μέτρο Lebesgue

1.1 Ομάδα Α

1. *(α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.*

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)^d$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \leqslant \ell((-\alpha, \alpha)^d) = (2\alpha)^d < +\infty.$$

(β) Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = \ell(I) > 0.$$

2. *(α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).*

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Από την $\lambda(A \triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\lambda(A \setminus B) = 0$ και $\lambda(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\lambda(B) = [\lambda(A) - \lambda(A \setminus B)] + \lambda(B \setminus A) = \lambda(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\lambda(A)+\lambda(B)=\lambda(A\cap B)+\lambda(A\setminus B)+\lambda(B)=\lambda(A\cap B)+\lambda(A\cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A\setminus B$, B είναι ξένα και $A\cup B=(A\setminus B)\cup B$.

(γ) Από την $B=A\cup(B\setminus A)$ παίρνουμε $\lambda(B)=\lambda(A)+\lambda(B\setminus A)$, διότι τα A και $B\setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\lambda(A)=\lambda(B)<+\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\lambda(B\setminus A)=0$.

(δ) Αν $A=[1,+\infty)$ και $B=[0,+\infty)$, τότε $A\subseteq B$, $\lambda(A)=\lambda(B)=+\infty$ και $B\setminus A=[0,1)$, δηλαδή $\lambda(B\setminus A)=1>0$.

3. *(α) Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}$ και $\lambda^*(B)=0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A\cup B)=\lambda^*(A)$.*

(β) Αν $A,B\subseteq\mathbb{R}$ και $\lambda^*(A\triangle B)=0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A)=\lambda^*(B)$.

Υπόδειξη. (α) Αφού $A\subseteq A\cup B$, έχουμε $\lambda^*(A)\leqslant\lambda^*(A\cup B)$. Από την υπόθεση και από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\lambda^*(A\cup B)\leqslant\lambda^*(A)+\lambda^*(B)=\lambda^*(A),$$

διότι $\lambda^*(B)=0$.

(β) Παρατηρήστε ότι $\lambda^*(A\setminus B)\leqslant\lambda^*(A\triangle B)=0$. Συνεπώς, $\lambda^*(A\setminus B)=0$. Όμοια, $\lambda^*(B\setminus A)=0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &\leqslant \lambda^*(A\cup B)=\lambda^*(B\cup(A\setminus B))\\ &\leqslant \lambda^*(B)+\lambda^*(A\setminus B)=\lambda^*(B).\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\lambda^*(B)\leqslant\lambda^*(A)$.

4. *(α) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και $t>0$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA=\{tx:x\in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA)=t\,\lambda^*(A)$.*

(β) Έστω $f:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|$ για κάθε $x,y\in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A))\leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A\subseteq B$.

(γ) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A'=\{x^2\mid x\in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A')=0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n=tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n)=t\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = t\ell(I)$ για κάθε διάστημα (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda^*(tA) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \ell(tI_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n\right\}\\ &= \inf\left\{t\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n\right\} = t\,\lambda^*(A).\end{aligned}$$

(β) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) \leqslant C\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty C\,\ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n\right\}\\ &= C\,\lambda^*(A).\end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leqslant 2n\lambda(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty f(A_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

5. *(α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα*

$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\,\ell(I).$$

(β) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\,\ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ και

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon)\lambda^*(A)$$

(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(E) < +\infty$, εξηγήστε γιατί). Από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(A \cap I_m) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\,\ell(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Σημείωση. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(E) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε το $E_M := E \cap [-M, M]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(E_M) < \infty$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 5 (α) για το E_M, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) \geqslant \lambda^*(E_M \cap I) > \alpha\,\ell(I).$$

(β) Αφού $\lambda(A \cap I) \leqslant \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, συμπεραίνουμε ότι $0 < \delta \leqslant 1$. Αν πάλι $\delta = 1$, έχουμε $\lambda(A \cap (-n, n)) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda(A^c \cap (-n, n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lambda(A^c) = 0$ (εξηγήστε τα βήματα).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \delta < 1$. Έστω ότι $\lambda(A^c) > 0$. Από το (α) υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda(A^c \cap I) > (1 - \delta)\,\ell(I).$$

Τότε,

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(A^c \cap I) < \ell(I) - (1-\delta)\,\ell(I) = \delta\,\ell(I),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

6. *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με*

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα $\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A \cup B) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1}, \ldots, J_{n,k_n}$ με μήκος μικρότερο από $\delta/2$, όπου $\delta = \mathrm{dist}(A, B)$, ώστε $I_n \subseteq J_{n,1} \cup \cdots \cup J_{n,k_n}$ και $\ell(I_n) < \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (αν $I_n = (a_n, b_n)$, θεωρήστε το κλειστό διάστημα $\left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ και χωρίστε το σε k_n διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$). Τότε, η $\{J_{n,s} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s \leqslant k_n\}$ είναι κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) + \varepsilon.$$

Αν $\{U_s\}_{s=1}^\infty$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $A\cap J_{n,s}\neq\emptyset$ και $\{V_s\}_{s=1}^\infty$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $B\cap J_{n,s}\neq\emptyset$, τότε $A\subseteq\bigcup_{s=1}^\infty U_s$, $B\subseteq\bigcup_{s=1}^\infty V_s$ και $U_s\cap V_m=\emptyset$ για κάθε s,m: για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $y\in U_s\cap V_m$ τότε υπάρχουν $a\in A\cap U_s$ και $b\in B\cap V_m$ ώστε $|y-a|<\ell(U_s)<\delta/2$ και $|y-b|<\ell(V_m)<\delta/2$, οπότε $\mathrm{dist}(A,B)\leqslant |a-b|\leqslant |a-y|+|y-b|<\delta$, το οποίο είναι άτοπο. Με άλλα λόγια, καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $J_{n,s}$ ανήκει σε μία το πολύ από τις $\{U_s\}_{s=1}^\infty$ και $\{V_s\}_{s=1}^\infty$. Τότε,

$$\begin{aligned}\lambda^*(A)+\lambda^*(B) &\leqslant \sum_{s=1}^\infty \ell(U_s)+\sum_{s=1}^\infty \ell(V_s)\\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty\sum_{s=1}^{k_n}\ell(J_{n,s})\\ &< \sum_{n=1}^\infty \ell(I_n)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ του $A\cup B$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A)+\lambda^*(B)\leqslant\lambda^*(A\cup B)+\varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\lambda^*(A)+\lambda^*(B)\leqslant\lambda^*(A\cup B)$.

7. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κλειστό $F\subseteq\mathbb{R}$ με $F\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus F)<\varepsilon$.

(iii) Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma\subseteq A$ και $\lambda^*\big(A\setminus\Gamma\big)=0$.

Υπόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon>0$. Το A είναι μετρήσιμο, άρα το A^c είναι μετρήσιμο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G ώστε $A^c\subseteq G$ και $\lambda^*(G\setminus A^c)=\lambda(G\setminus A^c)<\varepsilon$. Θέτουμε $F=G^c$. Τότε, το F είναι κλειστό, $F\subseteq A$, και $A\setminus F=G\setminus A^c$. Συνεπώς,

$$\lambda^*(A\setminus F)=\lambda^*(G\setminus A^c)<\varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_k\subseteq\mathbb{R}$ με $F_k\subseteq A$ και $\lambda^*(A\setminus F_k)<1/k$. Ορίζουμε $\Gamma=\bigcup_{k=1}^\infty F_k$. Το Γ είναι F_σ-σύνολο και $\Gamma\subseteq A$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^*(A\setminus\Gamma)\leqslant\lambda^*(A\setminus F_k)<\frac{1}{k}$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$, άρα

$$\lambda^*(A\setminus\Gamma)=0.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma\subseteq A$ και $\lambda^*\big(A\setminus\Gamma\big)=0$. Το $A\setminus\Gamma$ είναι μετρήσιμο (έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο). Το Γ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων). Άρα, το Γ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A=\Gamma\cup(A\setminus\Gamma)$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

8. *Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο Lebesgue του E θέτοντας*

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leqslant \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

Υπόδειξη. (α) Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\lambda(F) \leqslant \lambda^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leqslant \lambda^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\lambda_{(i)}(E)$ έπεται ότι $\lambda(E) < \lambda_{(i)}(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lambda^*(E) \leqslant \lambda_{(i)}(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) = \lambda_{(i)}(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E) = \lambda(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) - \lambda(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (με $\lambda(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0,1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.*

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, n]) = \lambda(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, -n]) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A \cap (-\infty, n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A \cap (-\infty, -n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A \cap (-\infty, -1]) \leqslant \lambda(A) < \infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\lambda(A)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \lambda(A),$$

υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x]) = \frac{\lambda(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F = A \cap (-\infty, x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

10. *(α) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geqslant n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:

(i) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(ii) $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε

$$\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n).$$

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geqslant n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k.

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

(β) (i) Αφού κάθε A_n είναι μετρήσιμο σύνολο, από τις

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

είναι φανερό ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα).

(ii) Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$. Άρα,

$$\lambda(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $B_n \subseteq A_n$ άρα $\lambda(B_n) \leqslant \lambda(A_n)$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$.

Όμοια, θέτουμε $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (C_n) είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(C_1) < +\infty$, άρα,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $A_n \subseteq C_n$ άρα $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n)$.

(iii) Με τον συμβολισμό του (ii), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(\limsup A_n) \leqslant \lambda(C_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) = 0.$$

Έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

11. *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:*

(i) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.*

(ii) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.*

(iii) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.*

(v) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. (i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) = 0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n) < \frac{1}{n} + \lambda^*(A)$. Ορίζουμε $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, οπότε $B \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G \setminus B) = \lambda(G) - \lambda(B) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N = G \setminus B$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Τότε, γράφοντας $A = B \cup (A \cap N)$ βλέπουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Αληθής: αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^ε) ώστε $\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n^\varepsilon) < \varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m} := J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Αντίστροφα, έστω (I_n) κάλυψη του A από ανοικτά διαστημάτων με $\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n) < +\infty$ και έστω $\varepsilon > 0$ Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^\infty \ell(I_n) < \varepsilon$. Αφού κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^\infty I_n$. Τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=n_0}^\infty \ell(I_n) < \varepsilon < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $\lambda^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: αν $\lambda(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα, και αν $\lambda(A) > 0$, τότε έχουμε δείξει ότι το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

12. *(α) Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

(β) (Λήμμα του Steinhaus) Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι το «σύνολο διαφορών»

$$A - A := \{x - y : x \in A, y \in A\}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

(γ) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. (α) Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda(A) > 0$.

(β) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^\infty \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k).$$

Από την $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant (1 + \varepsilon)\lambda(A \cap I_k).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\lambda(A\cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}.$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A\cap I) - (A\cap I) \supseteq (-t,t).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t,t)$ ώστε τα σύνολα $A\cap I$ και $(A\cap I)+s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I\cup(I+s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I)+|s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A\cap I) = \lambda(A\cap I) + \lambda((A\cap I)+s) \leqslant \ell(I)+s < \frac{3\ell(I)}{2},$$

δηλαδή $\lambda(A\cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A\cap I)-(A\cap I) \supseteq (-t,t)$.

(γ) Ορίζουμε $E_m = E\cap[m,m+1)$, $m\in\mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x-m : x\in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m\in\mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m\neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m\cap F_n\neq\emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1)) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\lambda(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1>1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m\neq n$ ώστε $(E_m - m)\cap(E_n-n)\neq\emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x\in E_m$ και $y\in E_n$ ώστε

$$x-m = y-n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x,y στο E ώστε $x-y = m-n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

13. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{x\in\mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{x\in\mathbb{R} : \text{υπάρχει } \delta>0 \text{ ώστε για κάθε } y,z\in(x-\delta,x+\delta),\ |f(y)-f(z)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x\in A$ και έστω $m\in\mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta>0$ ώστε, για κάθε $y\in(x-\delta,x+\delta)$ ισχύει $|f(y)-f(x)|<\frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y,z\in(x-\delta,x+\delta)$ έχουμε

$$|f(y)-f(z)| \leqslant |f(y)-f(x)| + |f(x)-f(z)| < \frac{1}{2m}+\frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in A$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x, δηλαδή $x \in A$. Έτσι, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m. Έστω $u \in (x-\delta, x+\delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $(u-\delta_1, u+\delta_1) \subseteq (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, αν $y, z \in (u-\delta_1, u+\delta_1)$ έχουμε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$, άρα $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

14. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $f_n(x) > s$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > s\}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς, κάθε σύνολο της μορφής $\{x : f_n(x) > s\}$ (όπου $s, n \in \mathbb{N}$) είναι ανοικτό. Άρα, το B είναι σύνολο Borel.

15. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.*

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$.

(i) Έχουμε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ και, αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(A^c) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$

διότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(iv) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

16. *Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) : x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) : x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \dots, \ x_n \neq 5\}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι
$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$
Συνεπώς, $\lambda(A_1) = \frac{9}{10}$.

(β) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0,1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0,1/10), [1/10,2/10), \dots, [9/10,1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10,6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0,1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10,(k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/100$. Συνεπώς,
$$\lambda(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

(γ) Συνεχίζοντας αυτόν τον συλλογισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο
$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \dots, x_n \neq 5\}$$
έχει μέτρο
$$\lambda(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$
Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \dots, \ x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε
$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

17. *Έστω $\vartheta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοικτό διά-*
στημα μήκους $\vartheta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα.

Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_ϑ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_ϑ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα.

(β) Το C_ϑ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_ϑ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\vartheta) = 1 - \vartheta > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\vartheta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\vartheta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\vartheta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\vartheta}{3^2} = 1 - \frac{\vartheta}{3} - 2\frac{\vartheta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\vartheta}{3} - 2\frac{\vartheta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\vartheta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\vartheta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\vartheta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \vartheta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1 - \vartheta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1 - \vartheta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_ϑ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

18. *Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε*

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leqslant \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leqslant q_n \leqslant 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A(1/j) \subseteq [-1/j, 1+1/j]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} [-1/j, 1+1/j] = [0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(A(1/j)) \leqslant 2/j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A) = 0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A(1/j)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j) = A$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = A \cup ([0,1] \setminus A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

19. *(α) Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

(β) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) > 0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. (α) Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

20. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η μετρική πυκνότητα του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0) = \alpha$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t, x+t)) = 0 \ \text{ και } \ \lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap (x-t, x+t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t, x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t, x+t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-t,x+t))}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t}{2t}=1.$$

(β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n=\left(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right]\cup\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n\subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n)=\alpha\lambda(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 9(β)). Ορίζουμε

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1}\leqslant t<\frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t}\leqslant\frac{\lambda(A\cap(-1/n,1/n))}{2/(n+1)}=\frac{2\alpha/n}{2/(n+1)}=\alpha\frac{n+1}{n}\leqslant\alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t}&\geqslant\frac{\lambda(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n}=\frac{2\alpha/(n+1)}{2/n}\\&=\alpha\frac{n}{n+1}\geqslant\alpha(1-2t).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t}=\alpha,$$

δηλαδή $\rho(A,0)=\alpha$.

1.2 Ομάδα Β

21. *Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E\subset F$ και $\lambda(E)<\lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha\in\big(\lambda(E),\lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E\subset K\subset F$ και $\lambda(K)=\alpha$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(W)>0$, τότε, για κάθε $0<\beta<\lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V\subset W$ ώστε $\lambda(V)=\beta$.

Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a,b]\subset\mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q\subset\mathbb{R}^{d-1}$ ώστε $W\subseteq Q_1:=[a,b]\times Q$. Ορίζουμε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$f(t)=\lambda(W\cap\{x=(x_1,\dots,x_k)\in Q_1:\,a\leqslant x_1\leqslant t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t)-f(s)|\leqslant\lambda_{d-1}(Q)\,|t-s|.$$

Αφού $f(a)=0$ και $f(b)=\lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. □

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E\subset F$ και $\lambda(E)<\lambda(F)$. Έστω $\alpha\in\big(\lambda(E),\lambda(F)\big)$. Αφού $\alpha-\lambda(E)<\lambda(F\setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W\subseteq F\setminus E$

με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

22. *Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0,1]$,*

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Υπόδειξη. Ελέγξτε πρώτα ότι αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n-οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0 < \delta < 1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0 < \delta_1 < 1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1) = 1 - \delta_1$.

Το $B_1 = [0,1] \setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1 = \cup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_2 < 1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2) = (1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2 = D^1 \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} D_j^2\right).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2) = (1-\delta_1) + (1-\delta_2)\delta_1 = 1 - \delta_1\delta_2.$$

Το $B_2 = [0,1] \setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2 = \cup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_3 < 1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $D^{n+1} \subset B^n = [0,1] \setminus D^n$.

(ii) $\lambda(D^n) = 1 - \delta_1\delta_2 \cdots \delta_n$.

(iii) Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D_j^n, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2 \cdots \delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \delta_1 \cdots \delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J = [a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R_j^n κάποιου B_n ώστε $R_j^n \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R_j^1 \subset B_1$ με $R_j^1 \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R_j^1 \cap J \neq \emptyset$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R_j^1 = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R_j^1 \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R_t^1 = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leqslant b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R_s^1 = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R_s^1 \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a, b] \subset R_j^1 = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R_j^1}$ κατασκευάστηκε το D_j^2. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R_j^2 \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R_j^n \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^n$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leqslant \inf_n \lambda(R_j^n) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R_j^n) \leqslant \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{3^n}$). □

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R_j^n, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R_j^n \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R_j^n}$ κατασκευάστηκε το D_j^{n+1}, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R_j^{n+1}) = \lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D_j^{n+2} με συνολικό μέτρο $\lambda(R_j^n)\delta_{n+1}(1 - \delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D_j^m, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R_j^n είναι ίσο με

$$\lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1}\delta_{n+2} \cdots) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E \cap R_j^n) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R_j^n \setminus E) = \lambda(R_j^n)\frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n} > 0.$$

Αφού $R_j^n \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E \cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

23. *Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$x, x + s, x + 2s, \ldots, x + (k-1)s \in E.$$

Υπόδειξη. Αφού $\lambda(E) > 0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5 βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε

$$\lambda(E \cap [a, b]) > \frac{k-1}{k}(b - a).$$

Θέτουμε $A = E \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b)$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$:

$$I_1 = [a, a + s), \;\; I_2 = [a + s, a + 2s), \;\; \ldots \;\; , \;\; I_k = [a + (k-1)s, b),$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a + s)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \bigcap_{j=1}^{k} B_j \neq \emptyset.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x+(j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j, έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \ldots, x+(k-1)s \in E.$$

Για την απόδειξη της $(*)$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda\left(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} (I_1 \setminus B_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_1 \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a,b] \setminus A) \\
&< \frac{1}{k}(b-a) = \lambda(I_1).
\end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1, και έπεται η $(*)$.

24. *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(B) > 0$. Δείξτε ότι το $A + B$ περιέχει διάστημα.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B έχουν πεπερασμένο και θετικό μέτρο. Μπορούμε να βρούμε αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ διαστημάτων, που οι κορυφές τους έχουν ρητές συντεταγμένες, ώστε $A \subseteq G$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A) \leqslant \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_k).$$

Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A \cap I_k).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα και στο B, καταλήγουμε στο εξής: υπάρχουν διαστήματα I_0 και J_0 με ρητά άκρα, ώστε

$$(*) \qquad \lambda(A \cap I_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Αφού τα μήκη των I_0 και J_0 είναι ρητοί αριθμοί, μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n διαδοχικά διαστήματα αντίστοιχα, που όλα έχουν το ίδιο μήκος. Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ βλέπουμε τώρα ότι υπάρχουν διαστήματα I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος, ώστε

$$\lambda(A \cap I_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει διάστημα I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda((A-x) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((B-y) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται ότι

$$\lambda((A-x)\cap(B-y)\cap I)\geqslant \frac{1}{2}\lambda(I)>0.$$

Θέτουμε $C=(A-x)\cap(B-y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $C-C$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$A-B-(x+y)=(A-x)-(B-y)\supseteq C-C,$$

συμπεραίνουμε ότι το $A-B$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το B με το $-B$ παίρνουμε το ζητούμενο.

25. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E)>0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x,y\in E$ ισχύει $\frac{1}{2}(x+y)\in E$. Δείξτε ότι το E έχει μη κενό εσωτερικό.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\frac{E}{2}=\left\{\frac{x}{2}:x\in E\right\}$. Αφού το E έχει θετικό μέτρο, το $\frac{E}{2}$ είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο:

$$\lambda\left(\frac{E}{2}\right)=\frac{\lambda(E)}{2}>0.$$

Από την Άσκηση 24, το σύνολο $\frac{E}{2}+\frac{E}{2}$ περιέχει κάποιο διάστημα.

Όμως, από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι $\frac{E}{2}+\frac{E}{2}\subseteq E$. Άρα, το E περιέχει διάστημα. Ειδικότερα, έχει μη κενό εσωτερικό.

26. *Δείξτε ότι το σύνολο των $x\in[0,2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^nx)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\sin(2^nx)\to a$ τότε $a=0$. Πράγματι, αν $\sin(2^nx)\to a\neq 0$ τότε, για μεγάλα n, έχουμε $\sin(2^nx)\neq 0$, άρα

$$\cos(2^nx)=\frac{\sin(2^{n+1}x)}{2\sin(2^nx)}\to\frac{1}{2}.$$

Όμως, τότε

$$\sin^2(2^nx)=\frac{1-\cos(2^{n+1}x)}{2}\to\frac{1}{4},$$

άρα

$$1=\cos^2(2^nx)+\sin^2(2^nx)\to\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το σύνολο A των $x\in[0,2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^nx)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει είναι το

$$A=\{x\in[0,2\pi):\sin(2^nx)\to 0\}.$$

Το A είναι μετρήσιμο: θέτουμε $f_k(x)=\sin(2^kx)$, και $A_{k,m}=\left\{x\in[0,2\pi):|f_k(x)|<\frac{1}{m}\right\}$. Για κάθε $k,m\in\mathbb{N}$ η f_k είναι συνεχής, άρα το $A_{k,m}$ είναι ανοικτό στο $[0,2\pi)$, και μπορούμε να δούμε ότι

$$A=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_{k,m}.$$

Άρα, το A είναι μετρήσιμο.

Υποθέτουμε ότι $\lambda(A)>0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι αν $x,y\in A$ τότε

$$\sin\left(2^n\frac{x+y}{2}\right)=\sin(2^{n-1}x)\cos(2^{n-1}y)+\cos(2^{n-1}x)\sin(2^{n-1}y)\to 0,$$

συνεπώς $\frac{x+y}{2}\in A$. Από την Άσκηση 25, το A, άρα και το $\frac{1}{2\pi}A\subseteq[0,1]$, έχουν μη κενό εσωτερικό.

Έπεται ότι το $\frac{1}{2\pi}A$ περιέχει έναν τριαδικό ρητό, της μορφής $\frac{k}{3^m}$, όπου $k\in\mathbb{N}$ με $0<k<3^m$, και ο k δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τότε, $\sin\left(\frac{2^{n+1}}{3^m}k\pi\right)\to 0$, άρα και η $\sin\left(\frac{2^n}{3}k\pi\right)\to 0$. Ειδικότερα, $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right)\to 0$. Παρατηρούμε ότι $3\mid 4^n-1$, άρα $6\mid 2^{2n+1}-2$. Επομένως, ο $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$ είναι άρτιος, άρα $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right)=\sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$. Επομένως, η $\sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$ (η οποία είναι σταθερή) συγκλίνει στο 0. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο $\frac{2k}{3}\pi$ δεν είναι ακεραιο πολλαπλάσιο του π.

27. *Έστω $A\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(A)>0$. Δείξτε ότι*

$$\lambda\big(\mathbb{R}\setminus(A+\mathbb{Q})\big)=0.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 24. Αν είχαμε $\lambda\big(\mathbb{R}\setminus(A+\mathbb{Q})\big)>0$ τότε το σύνολο $A-\big(\mathbb{R}\setminus(A+\mathbb{Q})\big)$ θα περιείχε κάποιο διάστημα I. Παρατηρούμε όμως ότι αν $x\in A-\big(\mathbb{R}\setminus(A+\mathbb{Q})\big)$ τότε $x\notin\mathbb{Q}$ (αλλιώς θα είχαμε $-x\in\mathbb{Q}$ και $x=a-y$, όπου $a\in A$ και $y\notin A+\mathbb{Q}$, το οποίο θα οδηγούσε στην $a-x=y\notin A+\mathbb{Q}$ το οποίο είναι άτοπο).

Αφού το διάστημα I περιέχει ρητούς, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Απευθείας απόδειξη. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n\geqslant 1$ υπάρχει πεπερασμένο $J_n\subseteq\mathbb{Q}$ ώστε

$$(*)\qquad \lambda\left([0,1]\setminus\bigcup_{t\in J_n}(A+t)\right)<\frac{2}{n}.$$

Αν θέσουμε $J=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$ τότε προκύπτει άμεσα ότι

$$\lambda\left([0,1]\setminus\bigcup_{t\in J}(A+t)\right)=0.$$

Τέλος, αν ορίσουμε $I=\bigcup_{r\in\mathbb{Z}}(J+r)$ και γράψουμε το I στη μορφή $\{t_s:s\in\mathbb{N}\}$ (παρατηρήστε ότι το I είναι αριθμήσιμο) μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\lambda\Big(\mathbb{R}\setminus\bigcup_{s=1}^{\infty}(A+t_s)\Big)\leqslant\sum_{r\in\mathbb{Z}}\lambda\left([r,r+1]\setminus\bigcup_{t\in J+r}(A+t)\right)=0$$

και αφού $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Z}}(J+r)\subseteq\mathbb{Q}$ έπεται το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της $(*)$ παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε $k\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και $I=\left[y-\frac{1}{k},y+\frac{1}{k}\right]$ για κατάλληλο $y\in\mathbb{Q}$, έχουμε

$$\lambda\,(A\cap I)\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{2}{k},$$

άρα

$$\lambda(I\setminus A)\leqslant\frac{1}{n}\frac{2}{k}.$$

Τώρα, $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{k-1}\left[\frac{j}{k}-\frac{1}{k},\frac{j}{k}+\frac{1}{k}\right]$. Άρα,

$$[0,1]\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}(A+\frac{j}{k}-y)\subseteq\bigcup_{j=1}^{k-1}\left((I\setminus A)+\frac{j}{k}\right).$$

Θέτοντας $J_n=\{\frac{j}{k}-y : j=1,\ldots,k-1\}$ παίρνουμε

$$\lambda\left([0,1]\setminus\bigcup_{t\in J_n}(A+t)\right)\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}\lambda\left((I\setminus A)+\frac{j}{k}\right)=(k-1)\lambda(I\setminus A)<\frac{2(k-1)}{k}\frac{1}{n}<\frac{2}{n}.$$

28. *Δείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $A,B\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=\lambda(B)=0$ και $\lambda(A+B)>0$. Μπορεί το $A+B$ να περιέχει διάστημα;*

Υπόδειξη. Μπορούμε να δείξουμε ότι $C+C/2\supseteq[0,1]$, όπου C είναι το σύνολο του Cantor και $C/2=\{x/2 : x\in C\}$. Πράγματι, έστω $x\in[0,1]$. Θεωρούμε το τριαδικό ανάπτυγμα $x=0.x_1x_2\ldots x_n\ldots$ του x. Για κάθε n έχουμε $x_n\in\{0,1,2\}$. Ορίζουμε $y_n=x_n$ αν $x_n\in\{0,2\}$ και $y_n=0$ αν $x_n=1$. Επίσης, ορίζουμε $z_n=x_n-y_n$ για κάθε n, δηλαδή $z_n=0$ αν $x_n\in\{0,2\}$ και $z_n=1$ αν $x_n=1$. Παρατηρήστε ότι $y\in C$: κάθε $y_n=0$ ή 2. Επίσης, αν θέσουμε $u=2y=0.(2y_1)(2y_2)\ldots(2y_n)\ldots$, τότε $u\in C$: κάθε $u_n=0$ ή 2. Άρα,

$$x=y+z=y+\frac{u}{2}\in C+\frac{C}{2}.$$

Τέλος, $\lambda(C)=\lambda(C/2)=0$. Θέτοντας $A=C$ και $B=C/2$ έχουμε το ζητούμενο.

29. *Δώστε παράδειγμα ανοικτού υποσυνόλου G του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: το σύνορο του $\overline{G}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο D τύπου Cantor το οποίο έχει θετικό μέτρο (για παράδειγμα, το σύνολο C_ϑ της Άσκησης 17. Ένα ανοικτό υποσύνολο G του $[0,1]$ με την ιδιότητα $\lambda(\partial(\overline{G}))>0$ είναι η ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «περιττά» βήματα της κατασκευής (το πρώτο, το τρίτο, κλπ). Για να το δούμε αυτό, ονομάζουμε U την ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «άρτια» βήματα της κατασκευής. Έχουμε $[0,1]=G\cup(D\cup U)$, και τα τρία αυτά σύνολα είναι ξένα. Τώρα, αποδείξτε τα εξής:

(i) $\overline{G}=G\cup D$. Το $G\cup D$ είναι κλειστό, διότι το $[0,1]\setminus(G\cup D)=U$ είναι ανοικτό σύνολο. Επίσης, $G\subseteq G\cup D$, αρκεί λοιπόν να δείξετε ότι κάθε $x\in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του G (αυτό είναι απλό: μιμηθείτε την απόδειξη του ότι κάθε $x\in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του D).

(ii) $\partial(G\cup D)=D$.

Έπεται ότι $\lambda(\partial(\overline{G}))=\lambda(D)>0$.

30. *Γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι ο δίσκος $D=\{(x,y) : x^2+y^2<1\}$ δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση ανοικτών ορθογωνίων.*

Υπόδειξη. Έστω ότι ο δίσκος μπορεί να γραφτεί ως ένωση ανοικτών και ξένων ορθογωνίων. Τότε, το $(0,0)$ ανήκει σε ένα από αυτά, έστω R. Στρέφοντας το σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $R=(a,b)\times(c,d)$. Τότε $a<0<b$ και $c<0<d$. Επίσης, αν $d>1$, τότε το $\left(0,\frac{d+1}{2}\right)$ ανήκει στο R, άρα και στον δίσκο, το οποίο είναι άτοπο, άρα $d\leqslant 1$. Επίσης, $a>-1$: όπως και για το d, αρχικά έχουμε ότι $a\geqslant -1$. Επιπλέον, αν $a=-1$, τότε $\frac{-1}{2}<\frac{-\sqrt{1-d^2/4}}{2}<\frac{1}{2}$, άρα $a=-1<\frac{-1-\sqrt{1-d^2/4}}{2}<0<b$, επομένως το σημείο $\left(\frac{-1-\sqrt{1-d^2/4}}{2},\frac{d}{2}\right)$ ανήκει στο R, άρα και στον δίσκο, και με πράξεις βλέπουμε ότι αυτό είναι άτοπο.

Θεωρούμε τώρα το σημείο $(a,0)$, το οποίο από τα παραπάνω ανήκει στον δίσκο. Τότε, υπάρχει ορθογώνιο S, ξένο προς το R, με $(a,0)\in S$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $(a,0)\in B((a,0),\varepsilon)\subseteq S$, αλλά οποιαδήποτε μπάλα με κέντρο το $(a,0)$ τέμνει το R.

31. *Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $B=\mathbb{Q}\cap(-\infty,0]$ και $C=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(0,\infty)$. Παρατηρήστε ότι το B είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και το C είναι G_δ-σύνολο διότι γράφεται στη μορφή $C=\bigcap_{\mathbb{Q}\cap(0,\infty)}((0,\infty)\setminus\{q\})$. Ειδικότερα, τα B και C είναι Borel σύνολα. Ορίζουμε

$$A=B\cup C=(\mathbb{Q}\cap(-\infty,0])\cup((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(0,\infty)).$$

Το A είναι Borel σύνολο ως ένωση δύο Borel συνόλων.

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Το B δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n\subseteq\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. Θέτοντας $U_n=G_n\cap(-\infty,0]$ θα είχαμε $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ και κάθε U_n θα ήταν ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $(-\infty,0]$ αφού $U_n\supseteq B$ και το B είναι πυκνό στο $(-\infty,0]$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n:n\in\mathbb{N}\}$ του B και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n=(-\infty,0]\setminus\{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset=B\cap((-\infty,0]\setminus B)=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.

(ii) Το C δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε το $\mathbb{R}\setminus C=\mathbb{Q}\cup(-\infty,0]$ θα ήταν G_δ-σύνολο, άρα και η τομή του με το G_δ-σύνολο $[1,\infty)$, δηλαδή το $\mathbb{Q}\cap[1,\infty)$ θα ήταν G_δ-σύνολο. Αυτό οδηγεί σε άτοπο όπως πριν.

(iii) Το A δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $(-\infty,0]$ είναι G_δ-σύνολο, θα είχαμε ότι το $B=A\cap(-\infty,0]$ είναι G_δ-σύνολο.

(iv) Ομοίως, το A δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $[0,\infty)$ είναι κλειστό σύνολο, θα είχαμε ότι το $C=A\cap[0,\infty)$ είναι F_σ-σύνολο.

32. *Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, τότε το $A+B$ είναι κλειστό. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A+B$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to a \in A$. Τότε, $b_{k_n} = x_{k_n} - a_{k_n} \to x - a$. Αφού το B είναι κλειστό, έχουμε $x - a \in B$. Άρα, $x = a + (x-a) \in A + B$. Έπεται ότι το $A+B$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι κλειστά. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n \cap [-n,n]$. Το A_n είναι συμπαγές, άρα το $A_n + B$ είναι κλειστό από την προηγούμενη παρατήρηση. Έπεται ότι το

$$A + B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + B)$$

είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το $A+B$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Ορίζουμε $A = \mathbb{Z}$ και $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Τα A, B είναι κλειστά (εξηγήστε γιατί). Όμως, το $A + B = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = (\sqrt{2}-1)^n$ είναι στο $A+B$ και $\alpha_n \to 0$. Έστω $x > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $0 < \alpha_{n_0} < \varepsilon$ και μετά $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $m\alpha_{n_0} \leqslant x < (m+1)\alpha_{n_0}$. Τότε, $0 \leqslant x - m\alpha_{n_0} < \alpha_{n_0} < \varepsilon$. Αν $x < 0$ δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε πάλι $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|x - m\alpha_{n_0}| < \varepsilon$. Αφού $m\alpha_{n_0} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = A + B$, έπεται ότι $\overline{A+B} = \mathbb{R}$.

33. *Έστω $\epsilon > 0$. Έστω A το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$. Δείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = A \cap [-n,n]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0,$$

άρα $\lambda(A) = 0$. Για κάθε $q \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$B_{n,q} = \bigcup_{p=-nq}^{nq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right).$$

Τότε,

$$A_n \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{q=k}^{\infty} B_{n,q} = \limsup_q B_{n,q}.$$

Έχουμε

$$\lambda(B_{n,q}) \leqslant \sum_{p=-nq}^{nq} \frac{2}{q^{2+\epsilon}} = \frac{4n}{q^{1+\epsilon}} + \frac{2}{q^{2+\epsilon}},$$

άρα

$$\sum_{q=1}^{\infty} \lambda(B_{n,q}) \leqslant 4n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\epsilon}} + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+\epsilon}} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup_q B_{n,q}) = 0$.

34. *Θέτουμε* $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. *Δείξτε ότι:*

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ακολουθία* $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ *ανοικτών διαστημάτων ώστε:* $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ *και* $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε* $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} R_j$, *τότε* $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geqslant 1$.

Υπόδειξη. (α) Το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορούμε να το γράφουμε στη μορφή $A = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $R_j = \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}, a_j + \frac{1}{2^{j+2}}\right)$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(β) Έστω ότι $R_j = (a_j, b_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $T_j = (a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Παρατηρήστε ότι, αφού $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_m$,

$$[0,1] = \overline{A} \subseteq \overline{R_1 \cup \cdots \cup R_m} = \overline{R_1} \cup \cdots \cup \overline{R_m} \subseteq T_1 \cup \cdots \cup T_m.$$

Έπεται (το έχουμε δεί στη θεωρία) ότι

$$1 = \ell([0,1]) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \ell(T_j) = \sum_{j=1}^{m} (\ell(R_j) + 2\varepsilon = 2m\varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j).$$

Το πλήθος m των διαστημάτων είναι σταθερό. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

35. *(α) Έστω* G *φραγμένο, μη κενό ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη* $\{B_j\}$ *του* G *από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του* G *ανήκει σε άπειρες το πλήθος* B_j *και* $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ *ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το* G *όπως στο (α) και για κάθε* $p > 1$ *να ισχύει* $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$. Τότε, η πρώτη υπόθεση μας λέει ότι

$$G \subseteq \limsup_j B_j.$$

Από την δεύτερη υπόθεση και από το λήμμα Borel-Cantelli (Άσκηση 10 (β)) έχουμε ότι $\lambda\left(\limsup_j B_j\right) = 0$. Άρα, $\lambda(G) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού το G έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Το G είναι φραγμένο, άρα περιέχεται σε έναν κύβο Q με μήκος ακμής a. Θέτουμε $Q_1^0 = Q$.

Διχοτομούμε κάθε ακμή του Q_1^0, και παίρνουμε 2^d κλειστούς κύβους $Q_i^1, i = 1, \dots 2^d$. Αν x_i^1 είναι το κέντρο του Q_i^1, θέτουμε $B_i^1 = B\left(x_i^1, 3\frac{a\sqrt{d}}{2}\right)$. Τότε $Q_i^1 \subseteq B_i^1$ για κάθε $i = 1, \dots 2^d$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε 2^{dn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p 2^{dn} \left(3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}\right)^{dp} = [\lambda(B_d)]^p (3a\sqrt{d})^{dp} 2^{nd(1-p)},$$

όπου B_d είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε σημείο του Q ανήκει σε κάποιον κύβο του n-οστού, άρα και σε μία μπάλα του n-οστού βήματος. Αν θεωρήσουμε την συλλογή όλων των μπαλών που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο σε οποιοδήποτε βήμα, έχουμε μια κάλυψη $\{B_j\}_j$ του Q, άρα και του G, με την ιδιότητα ότι κάθε $x \in G$ ανήκει σε άπειρες B_j. Τέλος, το άθροισμα της σειράς των p-δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p \sum_{n=1}^{\infty} (3a\sqrt{d})^{dp} 2^{d(1-p)n} < \infty,$$

αφού $2^{d(1-p)} < 1$.

36. *Εξετάστε αν υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να ορίσουμε αρίθμηση των ρητών για την οποία

$$\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) < \infty.$$

Αυτό προφανώς αποδεικνύει το ζητούμενο. Θεωρούμε μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $M := \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ στο $\mathbb{Q} \setminus [0,1]$ και μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N} \setminus M$ στο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Συνδυάζοντάς τις, έχουμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα: $n = k^2$ αν και μόνο αν $|q_n| > 1$. Παρατηρήστε ότι $\bigcup\limits_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \subseteq [-1, 2]$, άρα

$$\lambda \left(\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) \leqslant 3.$$

Επίσης,

$$\sum_{n \in M} \lambda \left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < 4.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) &\leqslant \lambda \left(\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{n \in M} \lambda \left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right) \right) < \infty.\end{aligned}$$

37. *(α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.*

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (α) $\lambda(\Gamma + \Gamma) > 0$, (β) το $\Gamma + \Gamma$ περιέχει κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο, (γ) η f δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε το $[a, b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ. Τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \{(x, f(x)) : x \in I_j\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times f(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \times T_j) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)\ell(T_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \ell([a, b]) = b - a.$$

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι το $\Gamma + \Gamma$ είναι μετρήσιμο. Πράγματι, $\Gamma + \Gamma = g([a, b] \times [a, b])$, όπου $g(x, y) = (x + y, f(x) + f(y))$. Η g είναι συνεχής, άρα το $\Gamma + \Gamma$ είναι συμπαγές (ειδικότερα, μετρήσιμο) ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου $[a, b] \times [a, b]$. Η συνεπαγωγή (β) $\Longrightarrow$ (α) είναι απλή: αν το $\Gamma + \Gamma$ περιέχει κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο, τότε περιέχει κάποια μπάλα, άρα και κάποιο μη εκφυλισμένο ορθογώνιο Q. Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma + \Gamma) \geqslant \lambda(Q) = \ell(Q) > 0.$$

Δείχνουμε τώρα τη συνεπαγωγή (α) $\Longrightarrow$ (γ): έστω ότι $\lambda(\Gamma + \Gamma) > 0$ και ότι η f είναι γραμμική, δηλαδή $f(x) = Ax + B$ για κάποιους $A, B \in \mathbb{R}$. Τότε, $\Gamma + \Gamma = \{(x+y, A(x+y)+2B) : a \leqslant x \leqslant b\}$. Δηλαδή, το $\Gamma + \Gamma$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ (που περιέχεται στην ευθεία $z = Au + 2B$). Εύκολα ελέγχουμε ότι $\lambda(\Gamma + \Gamma) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος, δείχνουμε την συνεπαγωγή (γ) $\Longrightarrow$ (β): η υπόθεση είναι ότι η f δεν είναι γραμμική. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x \neq y$ στο (a, b) με $f'(x) \neq f'(y)$ (αν η f' ήταν σταθερή στο (a, b) τότε η f θα ήταν γραμμική. Για την συνάρτηση g που ορίσαμε παραπάνω έχουμε τότε ότι η Ιακωβιανή της στο (x, y) δεν μηδενίζεται: ελέγξτε ότι είναι ίση με $|f'(x) - f'(y)| > 0$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έπεται ότι η g είναι ομοιομορφισμός σε μια περιοχή του (x, y), άρα το $\Gamma + \Gamma = g([a, b] \times [a, b])$ έχει μη κενό εσωτερικό.

38. *Έστω $A \subseteq E \subseteq B$. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $\lambda(A) = \lambda(B) < \infty$, δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\lambda(A) = \lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(B) = \lambda(B)$. Από την υπόθεση ότι $\lambda(A) = \lambda(B)$ έπεται ότι ισχύει παντού ισότητα στην παραπάνω σχέση. Ειδικότερα, $\lambda(A) = \lambda^*(E)$.

Αφού το A είναι μετρήσιμο, και από την $E \cap A = A$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A) = \lambda^*(E) &= \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A) \\ &= \lambda^*(A) + \lambda^*(E \setminus A) = \lambda(A) + \lambda^*(E \setminus A),\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\lambda^*(E\setminus A)=0$. Άρα, το $E\setminus A$ είναι μετρήσιμο, και έπεται ότι το το $E=A\cup(E\setminus A)$ είναι μετρήσιμο.

39. *Έστω $E\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(E)<\infty$. Υποθέτουμε ότι $E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\emptyset$ και $\lambda(E)=\lambda^*(E_1)+\lambda^*(E_2)$. Δείξτε ότι τα E_1,E_2 είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A_n,B_n,G_n με

$$E_1\subseteq A_n,\ \ E_2\subseteq B_n\ \text{ και }\ E\subseteq G_n,$$

τέτοια ώστε

$$\lambda(A_n)<\lambda^*(E_1)+\frac{1}{n},\ \ \lambda(B_n)<\lambda^*(E_2)+\frac{1}{n}\ \text{ και }\ \lambda(G_n)<\lambda(E)+\frac{1}{n}.$$

Θέτουμε $C_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(G_k\cap A_k)$ και $D_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(G_k\cap B_k)$. Τότε, οι $(C_n),(D_n)$ είναι φθίνουσες ακολουθίες ανοικτών συνόλων, με $E_1\subseteq C_n, E_2\subseteq D_n$, και

$$\lambda(C_n)<\lambda^*(E_1)+\frac{1}{n},\ \ \lambda(D_n)<\lambda^*(E_2)+\frac{1}{n}.$$

Ορίζουμε τώρα $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ και $D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n$. Τα C,D είναι G_δ-σύνολα, άρα είναι μετρήσιμα. Επιπλέον, $E_1\subseteq C$ και $E_2\subseteq D$, άρα $E\cap D^c\subseteq E_1$. Άρα, για να δείξουμε ότι το E_1 είναι μετρήσιμο, από την Άσκηση 38 αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(C)=\lambda(E\cap D^c)$. Αφού τα $C,E\cap D^c$ έχουν πεπερασμένο μέτρο και $E\cap D^c\subseteq C$, αρκεί να δείξουμε ότι το $C\setminus(E\cap D^c)=(C\cap D)\cup(C\cap E^c)$ έχει μηδενικό μέτρο.

Για το $C\cap E^c$, γράφουμε $C\cap E^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}(C_n\cap E^c)$. Όμως, η $(C_n\cap E^c)$ είναι φθίνουσα, και

$$\lambda(C_n\cap E^c)\leqslant\lambda(G_n\cap E^c)=\lambda(G_n)-\lambda(E)\leqslant\frac{1}{n}.$$

Επομένως, $\lambda(C\cap E^c)=0$.

Για το $C\cap D$, γράφουμε $C\cap D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(C_n\cap D_n)$. Όμως, η $(C_n\cap D_n)$ είναι φθίνουσα, και

$$\begin{aligned}\lambda(C_n\cap D_n)&=\lambda(C_n)+\lambda(D_n)-\lambda(C_n\cup D_n)\leqslant\lambda^*(E_1)+\lambda^*(E_2)+\frac{2}{n}-\lambda(C_n\cup D_n)\\&\leqslant\lambda^*(E_1)+\lambda^*(E_2)+\frac{2}{n}-\lambda(E)=\frac{2}{n},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $E=E_1\cup E_2\subseteq C_n\cup D_n$ και $\lambda(E)=\lambda^*(E_1)+\lambda^*(E_2)$. Άρα, $\lambda(C\cap D)=0$.

40. *Έστω E Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και έστω $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν το $F\subseteq\mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές, και δείξτε ότι αν το E είναι F_σ–σύνολο τότε το $T(E)$ είναι F_σ–σύνολο. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η T είναι Lipschitz συνεχής, δείξτε ότι αν $\lambda(A)=0$ τότε $\lambda(T(A))=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ολοκλήρωμα Lebesgue

2.1 Ομάδα Α

1. *Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)]$. Εφόσον, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in(a,b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f'(x)$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη οπότε η f' είναι μετρήσιμη.

2. *(α) Αν $A\subseteq\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A)=0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:A\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη.*

(β) Έστω A,B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B)=0$ και έστω $f:A\cup B\to[-\infty,+\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο αφού κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $a\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$[f>b]=\{x\in A\cup B: f(x)>b\}=\{x\in B: f(x)>b\}\cup\{x\in A: f(x)>b\}.$$

Το πρώτο σύνολο στην προηγούμενη ένωση είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο μηδενικού συνόλου ενώ το δεύτερο είναι μετρήσιμο διότι η $f|_A$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Έστω $C=C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Τότε, το $B=A\setminus C$ είναι μηδενικό σύνολο αφού η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Καθώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, το συμπέρασμα έπεται από το (β).

3. *(α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.*

(β) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x\in A: f(x)>0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το μη μετρήσιμο σύνολο V του Vitali στο $[0,1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=1$ αν $x\in V$ και -1 αλλιώς. Τότε, η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά η f^2 είναι η σταθερή 1 κι άρα είναι μετρήσιμη.

(β) Παρατηρήστε ότι το σύνολο $A_2=\{x\in A\mid f(x)\leqslant 0\}$ είναι επίσης μετρήσιμο, αφού το $A_1=\{x\in A\mid f(x)>0\}$ είναι μετρήσιμο. Έστω $b\in\mathbb{R}$. Αν $b\leqslant 0$. Τότε, $[f\leqslant b]=[f^2\geqslant b^2]\cap A_2$ το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $b>0$ τότε

$$[f\leqslant b]=(A_1\cap[f^2\leqslant b^2])\cup A_2$$

το οποίο είναι μετρήσιμο, ως πράξεις τέτοιων.

4. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n:A\to[-\infty,+\infty]$, $n\in\mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$L=\{x\in A\mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει }\}$$

είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x)=\liminf f_n(x)$ και $h(x)=\limsup f_n(x)$ είναι μετρήσιμες. Τότε, το L γράφεται ως $L=[g=h]=\{x\in A\mid g(x)=h(x)\}$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

5. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f:A\to[-\infty,+\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q\in\mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x\in A: f(x)>q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a\in\mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει (q_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών ώστε $q_n\to a$. Τότε,

$$\{x\in A\mid f(x)\geqslant a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in A\mid f(x)>q_n\}.$$

Επειδή κάθε $\{x\in A\mid f(x)>q_n\}$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $[f\geqslant a]$ είναι μετρήσιμο. Καθώς το $a\in\mathbb{R}$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

6. *Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B\subseteq\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}^d: f(x)\in B\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A}=\{B\subseteq\mathbb{R}\mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R}\in\mathcal{A}$. Αν $B\in\mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus B)=\mathbb{R}\setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B\in\mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R}\setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty}B_n)=\cup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a,b))=[f<b]\cap[f>a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Δηλαδή, $(a,b)\in\mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

7. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f.

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(x \in A : f(x) > t_n) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\lambda(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\lambda(x \in A : f(x) > t) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t) \overset{\lambda(A)<\infty}{\iff} \lambda(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leqslant \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty} \lambda(x \in A : f_k(x) > t) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lambda(x \in A : f(x) > t) = \omega_f(t).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

8. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $A = g^{-1}((a, +\infty))$ είναι διάστημα της μορφής $[b, +\infty)$ ή (b, ∞) αφού η g είναι αύξουσα. Επομένως, το $(g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη.

9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \to [0, \infty]$ με $F(t) = \lambda(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $t > s \geqslant 0$ έχουμε $\{f > t\} \subseteq \{f > s\}$. Συνεπώς,

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) \leqslant \lambda(\{f > s\}) = F(s).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n \to t$ ισχύει $F(t_n) \to F(t)$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό). Όμως,

$$\{f > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > t_n\}.$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι αν για κάποιον n ισχύει $f(x) > t_n$ τότε $f(x) > t$, ενώ αντίστροφα, αν $f(x) > t$, από το γεγονός ότι $t_n \to t$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $f(x) > t_n > t$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι η (t_n) είναι φθίνουσα, άρα $\{f > t_n\} \subseteq \{f > t_{n+1}\}$ για κάθε n. Δηλαδή, η $(\{f > t_n\})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\{f > t_n\}) = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

Τέλος, για κάθε $t > 0$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$tF(t) = t\,\lambda(\{f > t\}) \leqslant \int f.$$

Άρα,

$$F(t) \leqslant \frac{1}{t}\int f,$$

και αυτό δείχνει ότ $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

10. *Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \to \int (f_k - f).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant f_k - f \leqslant f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leqslant \int (f_k - f) \leqslant \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \to \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

11. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\,\lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} f \leqslant \int_E f = 0,$$

άρα $\lambda(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ σ.π.: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\lambda(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\lambda(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\lambda(E) = 0$.

12. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geqslant 1/n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f = \int f\chi_{[-n,n]} = \int g_n \to \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geqslant 1/n\} \subseteq \{f \geqslant 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f = \int f\chi_{\{f\geqslant 1/n\}} = \int h_n \to \int f.$$

13. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \leqslant n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leqslant n\} \subseteq \{f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leqslant n$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{f\leqslant n\}} = \int g_n = \int g_n\chi_E \to \int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\lambda(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int f\chi_E = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

14. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;*

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = 0$. Όμως, το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \to 1 \text{ και } f(-n) \to 1.$$

15. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\lambda(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int f, d\lambda = \int_0^\infty \lambda(f > t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(f > t)\, dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $t \mapsto \lambda(f > t)$ είναι φθίνουσα η τελευταία σειρά είναι ισοδύναμη με την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\lambda(f > 2^k)$ και το συμπέρασμα έπεται.

16. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε*

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leqslant f \leqslant n\} \subseteq \{1/(n+1) \leqslant f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ και $f(x) \leqslant n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leqslant f \leqslant n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n \int f < +\infty.$$

17. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leqslant F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$ (όμοια αντιμετωπίζεται κι άλλη περίπτωση). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty,x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty,x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n \, d\lambda$ και $F(x) = \int g \, d\lambda$. Επιπλέον, $g_n \to g$ κατά σημείο και $|g_n| \leqslant f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f = \int g_n \, d\lambda \to \int g \, d\lambda = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι δεξιά συνεχής.

18. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leqslant n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leqslant \int_E f_n + \int (f - f_n) \leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

19. *Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.*

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n,n+1)}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

ενώ $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

20. *Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n \right) ;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη $(0 \leqslant f_n \leqslant 1)$. Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

21. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n \leqslant \int f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

22. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n - \int_E f_n \right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty} \left(- \int f_n \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_E f_n \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

23. *Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.*

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

24. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n\chi_{[0,n]}(x)$ των μετρησίμων συναρτήσεων για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \to e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

25. *Υπολογίστε το* $\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2}dx$ *(αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n e^{x/2}\chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείται από από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leqslant e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκηρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geqslant 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\right] = e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-x/2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = 2,$$

που υπολογίζει το ζητούμενο όριο.

26. *Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geqslant 0$, $g_n \geqslant g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυϊκό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – Άσκηση 10):

$$\int f - \lim_n \int f_n = \lim_n \left(\int f - \int f_n\right) = \lim_n \left(\int f - f_n\right) = \lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

27. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left|\int |f_n| - \int |f|\right| \leqslant \int \big|\,|f_n| - |f|\,\big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left|\int f_n - \int f\right| = \left|\int (f_n - f)\right| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

28. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.*

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| = \left|\int_E (f_n - f)\right| \leqslant \int_E |f_n - f| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 27. Με την υπόθεση ότι $\int |f_n - f| \to 0$, δείξαμε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int f_n^+ &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} = \frac{1}{2}\int f_n + \frac{1}{2}\int |f_n| \to \frac{1}{2}\int f + \frac{1}{2}\int |f| \\ &= \int \frac{f + |f|}{2} = \int f^+.\end{aligned}$$

29. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f|\, d\lambda = \int_0^\infty \lambda(|f| > t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t)\, dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t \mapsto \lambda(|f| > t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t > 0$, οπότε

$$2^{k-1}\lambda(|f| > 2^k) < \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t)\, dt < 2^{k-1}\lambda(|f| > 2^{k-1}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f|\, d\lambda$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(|f| > 2^k) < +\infty$.

30. *Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.*

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leqslant g_n$ έχουμε $-g_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geqslant 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f+g) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \to \int g$). Άρα,

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g-f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

31. *Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leqslant \int \big|\, |f_n| - |f| \,\big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big|\, |f_n - f| - |f_n| \,\big| \leqslant |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

32. *Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι*

$$\int \Big(\liminf_n f_n\Big) \leqslant \liminf_n \int f_n \leqslant \limsup_n \int f_n \leqslant \int \Big(\limsup_n f_n\Big).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $h_n = g - f_n$, η οποία είναι ακολουθία ολοκηρωσίμων συναρτήσεων με $h_n \geqslant 0$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε:

$$\int [g + \liminf(-f_n)]\, d\lambda = \int \liminf h_n \, d\lambda \leqslant \liminf \int h_n \, d\lambda = \liminf \left(\int g \, d\lambda - \int f_n \, d\lambda \right).$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\liminf(-f_n) - \limsup f_n$ και ότι $\int g\, d\lambda < +\infty$ προκύπτει ότι

$$- \int \limsup f_n \, d\lambda \leqslant - \limsup \int f_n \, d\lambda,$$

το οποίο αποδεικνύει το δεξιό ζευγάρι ανισοτήτων. Για την άλλη μη τετριμμένη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $u_n = g + f_n$.

33. *Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.*

(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf \left\{ \int_E f : \lambda(E) \geqslant \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\lambda([0,1] \setminus (A \cup B)) \geqslant 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\lambda(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f = \int_{A\cup C} f - \int_C f = -\int_C f = \int_{B \cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f = 0 = \int_{B\cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\lambda(A \cup C) = \lambda(B \cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\lambda(B) = 1/4$ και $A \cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2 \int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\lambda(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant m \leqslant 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(D) > 0$, όπου $D = \{f \geqslant 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\lambda(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geqslant \frac{1}{k}\lambda(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\lambda(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\lambda(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\lambda(E) \geqslant 1/2$ τότε

$$\int_E f\,d\lambda \geqslant \int_{E\cap F} f\,d\lambda \geqslant \varepsilon\lambda(E\cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\lambda(E\cap F) \geqslant \lambda(E)+\lambda(F)-1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f\,d\lambda \geqslant \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

34. *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:*

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$

ισχύει

$$|s_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqslant F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

35. *(α) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.*

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leqslant |f|$ και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

36. *Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \geqslant k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f \, d\lambda \geqslant k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda(E_i) \geqslant \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geqslant \frac{k}{n}$.

2.2 Ομάδα Β′

37. *(α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.*

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι το $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε φ την επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\varphi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\varphi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \varphi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subsetneq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

38. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a,b]$ σε κλειστά. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a,b]$, επειδή το $[a,b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

39. *(α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.*

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leqslant \alpha$, άρα $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$.

(β) Όπως προηγουμένως, υπάρχει Z με $\lambda(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $f_n(x) \leqslant \varepsilon_n$. Καθώς, $\varepsilon_n \to 0^+$ το ζητούμενο έπεται.

40. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.*

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\lambda(x : |g(x)| > \beta) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leqslant n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0,1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, είναι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda([0,1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\lambda(x : |g(x)| > k) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(x : |f_n(x)| > \beta_n) < 1/2^n$. Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = \frac{1}{n\beta_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

41. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μη αρνητική και φραγμένη. Ορίζουμε $F(x) = \int_0^x f(t)\, d\lambda(t)$. Για κάθε y της μορφής $y = kt + ms,\ k, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) = \int_0^x f(t+y)\, d\lambda(t) = \int_y^{x+y} f(t)\, d\lambda(t) = F(x+y) - F(y),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Kronecker γνωρίζουμε ότι το σύνολο $D = \{kt + ms : k, m \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Εφόσον, η F είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $F(x+y) = F(x) + F(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε y σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = \alpha x$. Έτσι,

$$F(x) - \alpha x = \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) - \alpha x = \int_0^x (f(t) - \alpha)\, d\lambda(t) = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η $h(t) = f(t) - \alpha$ έχει ολοκλήρωμα μηδέν σε κάθε διάστημα κι άρα είναι μηδέν σχεδόν παντού.

Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctan f(t)$ για την οποία πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι είναι μετρήσιμη και ότι $0 < f_1 < 2$.

42. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_n(x) = f(x)\chi_{E\cap[-n,n]}(x).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lusin, για κάθε n βρίσκουμε ένα κλειστό σύνολο $F_n \subseteq E \cap [-n,n]$ ώστε η $g_n|_{F_n}$ να είναι συνεχής και $\lambda(E \cap [-n,n] \setminus F_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την g_n σε μια συνεχή συνάρτηση $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (θεώρημα Tietze, στην περίπτωσή μας είναι πιο απλό, αφού το $\mathbb{R} \setminus F_n$ είναι μια ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων). Τότε, οι $f_n := h_n|_E : E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θέτουμε

$$D = \{x \in E : f_n(x) \not\to f(x)\}$$

και θα δείξουμε ότι $\lambda(D) = 0$. Έστω $x \in D$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x| \leqslant n_0$ και, άρα $x \in E \cap [-n, n]$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $g_n(x) = f(x)$. Αφού $f_n(x) \not\to f(x)$, θα πρέπει να υπάρχουν άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $f_n(x) \neq g_n(x)$, δηλαδή άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $x \in E_n := E \cap [-n, n] \setminus F_n$. Δηλαδή,

$$D \subseteq \limsup_{n\to\infty}(E_n).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $\lambda(\limsup_n(E_n)) = 0$, άρα $\lambda(D) = 0$.

43. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x, y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x, y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x, y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$E_n(\alpha) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x, y) > \alpha\right\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο

$$\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$$

είναι μετρήσιμο. Έπεται ότι το $E_n(\alpha)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x, y) \to f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n} \to x$ καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x, y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \to f^y(x) = f(x, y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

44. *Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν η $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0, 1]$.*

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 22 του Κεφαλαίου 1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0, 1]$,

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Θεωρούμε την $f=\chi_E:[0,1]\to\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι αν $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in[0,1]$.

Έστω $x_0\in(0,1)$ και $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$. Τα σύνολα $A_\delta=E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ και $B_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus E$ έχουν θετικό μέτρο. Αφού $f(x)=g(x)$ σχεδόν παντού, μπορούμε να βρούμε $x_\delta\in A_\delta$ και $y_\delta\in B_\delta$ για τα οποία επιπλέον έχουμε

$$g(x_\delta)=f(x_\delta)=1\quad\text{και}\quad g(y_\delta)=f(y_\delta)=0.$$

Βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)\subset(0,1)$ για κάθε $n\geqslant n_0$, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση βρίσκουμε x_n,y_n με $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$, $|y_n-x_0|<\frac{1}{n}$, $g(x_n)=1$ και $g(y_n)=0$. Αφού $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$ και

$$\lim_{n\to\infty}g(x_n)=1\neq 0=\lim_{n\to\infty}g(y_n),$$

η g είναι ασυνεχής στο x_0.

Παρόμοιο επιχείρημα εφαρμόζεται για τα $x_0=0$ και $x_0=1$ (θεωρήστε διαστήματα της μορφής $[0,\delta)$ ή $(1-\delta,1]$ αντίστοιχα).

45. *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $\sup_n|f_n(x)|\,d\lambda<\infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $A\subseteq[0,1]$ μετρήσιμο και $M>0$ ώστε $\lambda([0,1]\setminus A)<\varepsilon$ και, για κάθε $x\in A$, $\sup_n|f_n(x)|\leqslant M$.*

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(x)=\sup_n|f_n(x)|$ είναι μετρήσιμη, διότι οι f_n είναι μετρήσιμες. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n=\{x\in[0,1]:f(x)>n\}.$$

Αφού $\sup_n|f_n(x)|<\infty$ για κάθε $x\in[0,1]$, βλέπουμε ότι η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $\bigcap_{n=1}^\infty E_n=\emptyset$. Από τη συνέχεια του μέτρου Lebesgue έχουμε $\lambda(E_n)\to 0$. Άρα, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_{n_0})<\varepsilon$. Θέτοντας $A=[0,1]\setminus E_{n_0}$ και $M=n_0$, έχουμε

$$\lambda([0,1]\setminus A)=\lambda(E_{n_0})<\varepsilon$$

και, για κάθε $x\in A$,

$$\sup_n|f_n(x)|=f(x)\leqslant n_0=M.$$

46. *Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n\subseteq[0,1]$. Συμβολίζουμε με f_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n.*

(α) Αν $\lambda(I_n)\leqslant\frac{1}{n^2}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δείξτε ότι $f_n(x)\to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n)\leqslant\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Αν για κάποιο $x\in[0,1]$ η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν συγκλίνει στο 0, τότε το x ανήκει σε άπειρα από τα I_n. Δηλαδή,

$$\{x\in[0,1]:f_n(x)\not\to 0\}\subseteq\limsup_{n\to\infty}I_n.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^\infty\lambda(I_n)\leqslant\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}<\infty,$$

από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} I_n\right) = 0$, άρα $\lambda(\{x \in [0,1] : f_n(x) \not\to 0\}) = 0$. Έπεται ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Όχι. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$ με $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$, τέτοια η $f_n(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$, $I_3 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1\right]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4} < 1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2 > 4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2} \frac{1}{n} > 1$. Καλύπτουμε τότε το $[0,1]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα $I_4, I_5, \ldots, I_{n_2}$ για τα οποία έχουμε ότι $\lambda(I_k) \leqslant \frac{1}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων I_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$, οποιαδήποτε δύο διαδοχικά από τα I_n έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, και $\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} I_i = [0,1]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε σημείο $x \in [0,1]$ ανήκει σε άπειρα από τα I_n, αλλά όχι σε όλα τελικά τα I_n, επομένως η $f_n(x)$ δεν συγκλίνει.

47. *Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\delta_n := \frac{\log(n/a)}{n(b-a)}$. Τότε, για κάθε $n > a$ ισχύει $\delta_n > 0$ και $f_n(x) < 0$ για $0 < x < \delta_n$. Επομένως,

$$\int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda \geqslant \int_0^{\delta_n} [ne^{-nbx} - ae^{-nax}] \, d\lambda = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{b}{b-a}}} \left(1 - \frac{a}{b}\right) a^{\frac{a}{b-a}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = +\infty$.

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a\frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} - \frac{e^{-bx}}{(1 - e^{-bx})^2}.$$

Έπεται ότι $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\lambda = +\infty$. Τέλος, είναι

$$\int_0^{\infty} f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} - \frac{1}{b},$$

συνεπώς έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda = -\infty$.

48. *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-q_n)}{2^n}$.*

(α) Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της g σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(γ) Δείξτε ότι $g^2 < \infty$ σχεδόν παντού, αλλά η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x-q_n)|}{2^n}\, d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x-q_n)|\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{q_n}^{q_n+1} \frac{1}{\sqrt{x-q_n}}\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, d\lambda(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, 2\sqrt{t}\, \Big|_0^1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2 < \infty.\end{aligned}$$

Αφού $f \geqslant 0$ έχουμε

$$|g(x)| = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x-q_n)|}{2^n},$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, d\lambda(x) < \infty,$$

δηλαδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω (a,b) ένα διάστημα κα έστω $M > 0$. Θεωρούμε ένα ρητό $q_m \in (a,b)$ και βρίσκουμε $\epsilon > 0$ ώστε $(q_m, q_m+\epsilon) \subset (a,b)$. Παρατηρήστε ότι

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} = \frac{1}{2^m\sqrt{x-q_m}} > M$$

για κάθε $x \in (q_m, q_m+\delta)$, όπου $\delta = \min\left\{\frac{1}{2^m M}, \epsilon\right\}$. Αφού το $(q_m, q_m+\delta)$ είναι υποδιάστημα του (a,b), έπεται ότι

$$\lambda(\{x \in (a,b) : g(x) > M\}) > 0$$

και το ίδιο θα ισχύει για κάθε συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε τέτοια h δεν είναι φραγμένη στο (a,b).

Έπεται επίσης ότι η g δεν είναι συνεχής σε κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = +\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $g(x) < \infty$ παρατηρούμε ότι αν η g ήταν συνεχής στο x τότε θα υπήρχε κάποιο διάστημα $(x-\eta, x+\eta)$ στο οποίο η g θα ήταν φραγμένη, κάτι που είδαμε ότι δεν μπορεί να συμβεί.

(γ) Θεωρούμε τυχόν διάστημα $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Υπάρχει ρητός q_m τέτοιος ώστε $q_m < b < q_m+1$. Αφού

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} \geqslant 0,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)} g^2(x)\,d\lambda(x) &\geqslant \int_{(a,b)} \frac{f^2(x-q_m)}{2^{2m}}\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2^{2m}}\int_{q_m}^{b} \frac{1}{x-q_m}\,d\lambda(x)\\ &= \int_0^{b-q_m} \frac{1}{t}\,d\lambda(t) = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (a,b), παρόλο που, αφού $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού, έχουμε $g^2(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

49. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f\,d\lambda \geqslant \delta$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \left\{x \in A : f(x) < \frac{1}{n}\right\}$. Η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του A, και $\bigcap_n A_n = \emptyset$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(A) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $lim_n \lambda(A_n) = 0$.

Έστω $t > 0$. Επιλέγουμε $n(t)$ ώστε $\lambda(A_{n(t)}) < \frac{t}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq A$ με $\lambda(E) > t$, έχουμε

$$\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \lambda(E) - \lambda(A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f\,d\lambda \geqslant \int_{E\setminus A_{n(t)}} f\,d\lambda \geqslant \frac{1}{n(t)}\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2n(t)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(t) = \frac{t}{2n(t)}$.

50. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leqslant M$ για κάθε $t \in [0,\delta]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n(x)|\,d\lambda(x) &= \frac{1}{n}\int_0^1 |f(t)|\,t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{n}\int_0^{\delta} |f(t)|\,t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t) + \frac{1}{n}\int_{\delta}^1 |f(t)|\,t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \frac{M}{n}\int_0^{\delta} t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t) + \frac{1}{n\delta^{1-\frac{1}{n}}}\int_{\delta}^1 |f(t)|\,d\lambda(t)\\ &\leqslant M\delta^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta^{\frac{1}{n}}}{\delta n}\int_0^1 |f(t)|\,d\lambda(t) < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f_n \in L_1[0,1]$.

51. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x)+1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Πράγματι, αν $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant 1 \leqslant f(x)+1$, ενώ αν $f(x) \geqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x) \leqslant f(x)+1$. Αν ορίσουμε

$$g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

έχουμε λοιπόν $0 \leqslant g_n \leqslant f+1$, και η συνάρτηση $f+1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $f(x)=0$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} = 0 \to 0$, ενώ αν $0 < f(x) < \infty$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} \to 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leqslant f(x) < \infty$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\sqrt[n]{f(x)} = g_n(x) \to \chi_{\{x:f(x)>0\}}$$

σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,d\lambda(x) = \int_0^1 g_n(x)\,d\lambda(x) \to \int_0^1 \chi_{\{x:f(x)>0\}}(x)\,d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

52. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)\,d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $B = \{f \leqslant 0\}$ και $B_k = \left\{f < \frac{1}{k}\right\}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, η (B_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$, και $\bigcap_{k=1}^\infty B_k = B$, άρα

$$\lim_{k\to\infty}\lambda(B_k) = \lambda(B) = 0.$$

Επομένως, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\lambda(B_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{A_n} f\,d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2k_0}.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$, αφού $f \geqslant \frac{1}{k_0}$ στο $[0,1]\setminus B_{k_0}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \lambda(A_n\cap B_{k_0}) + \lambda(A_n\cap([0,1]\setminus B_{k_0})) \leqslant \lambda(B_{k_0}) + k_0\int_{A_n\cap([0,1]\setminus B_{k_0})}\frac{1}{k_0}\,d\lambda\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + k_0\int_{A_n} f\,d\lambda \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lambda(A_n) \to 0$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι το $[0,1]$ έχει πεπερασμένο μέτρο χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά. Αν θεωρήσουμε την $f(x)=\frac{1}{x^2}$ στο $[1,\infty)$, τότε η f είναι γνήσια θετική και αν θέσουμε $A_n=[n,n+1]$ έχουμε

$$\int_{A_n} f\,d\lambda \leqslant \frac{1}{n^2}\to 0,$$

όμως $\lambda(A_n)=1\not\to 0$.

53. *Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x>0$ ορίζουμε $g(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\,d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.*

Υπόδειξη. Έστω $t>0$. Θέτουμε $g_t(x)=e^{-xt}$. Η παράγωγος της g_t είναι ίση με $g_t'(x)=-te^{-xt}$. Σταθεροποιούμε $x_0>0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\frac{x_0}{2}$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|e^{-tx}-e^{-tx_0}|=|g_t'(z)||x-x_0|=te^{-tz}|x-x_0|$$

για κάποιο z μεταξύ των x,x_0. Αφού $z\geqslant x_0-\frac{x_0}{2}=\frac{x_0}{2}$, έχουμε $e^{-tz}\leqslant e^{-tx_0/2}$. Άρα,

$$|e^{-tx}-e^{-tx_0}|\leqslant te^{-tx_0/2}|x-x_0|.$$

Θεωρούμε την $h_{x_0}(t)=te^{-tx_0/2}$. Αφού $\lim_{t\to0^+}h_{x_0}(t)=0$ και $\lim_{t\to+\infty}h_{x_0}(t)=0$, υπάρχει $M_{x_0}>0$ τέτοιος ώστε $|h_{x_0}(t)|\leqslant M_{x_0}$ για κάθε $t>0$. Άρα, αν $|x-x_0|<\frac{x_0}{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|g(x)-g(x_0)| &= \left|\int_0^\infty f(t)(e^{-xt}-e^{-x_0t})\,d\lambda(t)\right| \leqslant |\int_0^\infty |f(t)|te^{-tx_0/2}|x-x_0|\,d\lambda(t)\\ &\leqslant M_{x_0}|x-x_0|\int_0^\infty |f|d\lambda.\end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $x\to x_0$ βλέπουμε ότι $g(x)\to g(x_0)$, άρα η g είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$, θεωρούμε τυχόν $0<\varepsilon<1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\delta |f|\,d\lambda<\varepsilon.$$

Επομένως, αν $x>\frac{-\log\varepsilon}{\delta}$ και $t>\delta$, τότε $-xt<\log\varepsilon$. Άρα, αν $x>\frac{-\log\varepsilon}{\delta}$,

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leqslant \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}\,d\lambda(t)=\int_0^\delta |f(t)|e^{-xt}\,d\lambda(t)+\int_\delta^\infty |f(t)|e^{-xt}\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \int_0^\delta |f(t)|\,d\lambda(t)+\int_\delta^\infty |f(t)|e^{\log\varepsilon}\,d\lambda(t)<\varepsilon+\varepsilon\int_0^\infty |f|\,d\lambda.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon\in(0,1)$ ήταν τυχόν και $\int_0^\infty |f|\,d\lambda<\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.

54. *Έστω $E\subset\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E)<\infty$ και έστω $f,g:E\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με*

$$\int_E f\,d\lambda=\int_E g\,d\lambda.$$

Δείξτε ότι είτε (α) $f=g$ σχεδόν παντού στο E είτε (β) υπάρχει μετρήσιμο $A\subset E$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f\,d\lambda<\int_A g\,d\lambda.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι
$$\int_A g\,d\lambda \leqslant \int_A f\,d\lambda$$
για κάθε μετρήσιμο $A \subset E$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$, θέτοντας $A = E \setminus F$ στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_F g\,d\lambda &= \int_E g\,d\lambda - \int_{E\setminus F} g\,d\lambda \\ &= \int_E f\,d\lambda - \int_{E\setminus F} g\,d\lambda \\ &\geqslant \int_E f\,d\lambda - \int_{E\setminus F} f\,d\lambda \\ &= \int_F f\,d\lambda,\end{aligned}$$

άρα τελικά έχουμε
$$\int_F g\,d\lambda \leqslant \int_F f\,d\lambda$$
για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $B_\varepsilon = \{f - g \geqslant \varepsilon\}$ και $C_\varepsilon = \{g - f \geqslant \varepsilon\}$. Τότε, τα B_ε και C_ε είναι μετρήσιμα, και

$$0 = \int_{B_\varepsilon} f\,d\lambda - \int_{B_\varepsilon} g\,d\lambda = \int_{B_\varepsilon} (f-g)\,d\lambda \geqslant \varepsilon\lambda(B_\varepsilon),$$

άρα $\lambda(B_\varepsilon) = 0$. Όμοια δείχνουμε ότι $\lambda(C_\varepsilon) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda(\{|f-g| \geqslant 1/n\}) = \lambda(B_{1/n} \cup C_{1/n}) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα
$$\lambda(\{f \neq g\}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{n} \{|f-g| \geqslant 1/n\}\right) = 0.$$
Δηλαδή, $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

55. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει το εξής: για κάθε $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) > 0$ ισχύει*

$$t_E := \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f\,d\lambda \in A.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Υπόδειξη. Αφού το A είναι κλειστό, μπορούμε να γράψουμε το συμπλήρωμά του σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων:

$$\mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Παρατηρήστε ότι

$$Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\} = \left\{x \in [0,1] : f(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)\right\}$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in [0,1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}.$$

Υποθέτουμε ότι $\lambda(Z) > 0$. Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο

$$Z_k := \{x \in [0,1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}$$

να έχει θετικό μέτρο. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $E = Z_k$ βλέπουμε ότι

$$t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f \, d\lambda \in A.$$

Όμως, $a_k < f(x) < b_k$ για κάθε $x \in Z_k$. Άρα,

$$a_k \lambda(Z_k) < \int_{Z_k} f \, d\lambda < b_k \lambda(Z_k),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$a_k < t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f \, d\lambda < \beta_k.$$

Δηλαδή, $t_k \in (a_k, b_k)$. Άρα, $t_k \notin A$, το οποίο είναι άτοπο.

56. *Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Άρα, η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. Ειδικότερα, $f_n(t) - f(t) \to 0$ σχεδόν παντού.

57. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \to 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η h είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E h \, d\lambda < \varepsilon$.

Έστω A Borel υποσύνολο του $[0,1]$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές K και ανοικτό $U \subset [0,1]$ ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Urysohn βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g(x) = 1$ για κάθε $x \in K$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus U$. Τώρα γράφουμε

$$\int_A f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_n(\chi_A - g) \, d\lambda,$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left| \int_{[0,1]} f_n(\chi_A - g) \, d\lambda \right| &\leqslant \int_{[0,1]} |f_n| \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{[0,1]} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \\ &= \int_{U \setminus K} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{U \setminus K} h \, d\lambda < \varepsilon,\end{aligned}$$

διότι $\chi_A - g \equiv 0$ στο K και στο $[0,1] \setminus U$, $|\chi_A - g| \leqslant 1$ στο $U \setminus K$, και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left| \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right| + \varepsilon = \varepsilon,$$

διότι $\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0$ από την υπόθεση. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

58. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, και*

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant 10$$

για κάθε n. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} |f(x)| \, d\lambda(x) \to 0.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $\alpha > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda &= \int_{\{|f_n|\leqslant \alpha\}} |f_n|\, d\lambda + \int_{\{|f_n|>\alpha\}} |f_n|\, d\lambda \\ &\leqslant \int_{\{|f_n|\leqslant \alpha\}} |f_n|\, d\lambda + \int_{\{|f_n|>\alpha\}} \frac{|f_n|^2}{\alpha}\, d\lambda \\ &\leqslant \alpha \int_{\{|f_n|\leqslant \alpha\}} d\lambda + \frac{10}{\alpha} \\ &= \alpha \int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n|\leqslant \alpha\}}\, d\lambda + \frac{10}{\alpha}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι $g_n := \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}$ φράσσονται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g \equiv 1$ στο $[0,1]$, και από την υπόθεση ότι $|f_n(x)| \to 0$ σχεδόν παντού έπεται ότι «$|f_n(x)| < \alpha$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή «$\chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}(x) = 0$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή $\chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}\, d\lambda \to 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda \leqslant \frac{10}{\alpha}.$$

Αφού το $\alpha > 0$ ήταν τυχόν, αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda = 0 \ \text{ άρα } \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda = 0.$$

59. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \leqslant \left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right)^2$, άρα

$$n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leqslant 2n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leqslant 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln\left(1 + \frac{|f(x)|}{n}\right) \leqslant \frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, έχουμε $|g_n| \leqslant 2|f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)| = n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \leqslant n \frac{|f(x)|^2}{n^2} = \frac{|f(x)|^2}{n} \to 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n \to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) d\lambda(x) \to 0.$$

60. *Έστω $f : [0,1] \to [1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha = \int_{[0,1]} f \, d\lambda > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g = f/\alpha$. Παρατηρούμε ότι $(y-1)\ln y \geqslant 0$ για κάθε $y > 0$ (αν $y \leqslant 1$ τότε $y - 1 \leqslant 0$ και $\ln y \leqslant 0$, ενώ αν $y > 1$ τότε $y - 1 > 0$ και $\ln y > 0$). Συνεπώς, $y \ln y \geqslant \ln y$ για κάθε $y > 0$. Αφού η g παίρνει θετικές τιμές, έχουμε $g \ln g \geqslant \ln g$ στο $[0,1]$, άρα

$$\int_{[0,1]} g \ln g \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} \ln g \, d\lambda.$$

Αφού $g = f/\alpha$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha}(\ln f - \ln \alpha) \, d\lambda &= \int_{[0,1]} \frac{f}{\alpha} \ln \frac{f}{\alpha} \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} \ln \frac{f}{\alpha} \, d\lambda \\ &\geqslant \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \int_{[0,1]} \ln \alpha \, d\lambda = \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \ln \alpha,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\alpha} \int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda - \frac{\int_{[0,1]} f \, d\lambda}{\alpha} \ln \alpha \geqslant \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda - \ln \alpha,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \alpha \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda = \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χώροι L_p

3.1 Ομάδα Α΄

1. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(E)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_{\{|f| \geqslant \alpha\}} \alpha^p d\lambda(x) = \alpha^p \lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}).$$

2. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : n-1 \leqslant |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant n^p \lambda(E_n).$$

Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f|^p \, d\lambda$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L_p(E)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^p \lambda(E_n) &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \lambda(E_n) \\ &\leqslant 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant 2^p \int_E |f|^p \, d\lambda < \infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \, d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} n^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty,\end{aligned}$$

άρα $f \in L_p(E)$.

3. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι*

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$\big|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,\big| \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \to 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 (γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned}|f_n - f|^p &\leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2\max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \to g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L_1(E)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L_1(E)$) και

$$\int_E |g_n| \, d\lambda = 2^p \left(\int_E |f_n|^p \, d\lambda + \int_E |f|^p \, d\lambda \right) \to 2^{p+1} \int_E |f|^p \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda,$$

διότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \to 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E |f_n - f|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \to 0$.

4. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leqslant \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Hölder. Επίσης, αφού

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0,$$

έχουμε $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n. Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$, άρα

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant M\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0.$$

5. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.*

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.

Υπόδειξη. (α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L_q(E)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \cdot \mathbf{1}\, d\lambda &\leqslant \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{p/q} \left(\int_E \mathbf{1}\, d\lambda\right)^{1-p/q} \\ &= \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-p/q},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ' όπου έπεται ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

(γ) Έστω $1 \leqslant p < q < \infty$. Θα ορίσουμε $f \in L_p(E) \setminus L_q(E)$. Αφού $0 < \lambda(E) < \infty$ μπορούμε να βρούμε ξένα μετρήσιμα $E_n \subset E$ με $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$ και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}(x),$$

όπου $a_n > 0$ που θα επιλεγούν κατάλληλα. Έχουμε

$$\|f\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^q \quad \text{και} \quad \|f\|_p^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^p.$$

Αν ορίσουμε

$$a_n = 2^{n/q}$$

τότε

$$\|f\|_q^q = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \infty$$

ενώ

$$\|f\|_p^p = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{np/q} = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-p/q)}} < \infty$$

(έχουμε $\delta = 1 - p/q > 0$ διότι $p < q$, και η γεωμετρική σειρά με λόγο $2^{-(1-p/q)} = 2^{-\delta} < 1$ συγκλίνει).

6. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |g|^p d\lambda &= \int_E |f|^p \chi_B \, d\lambda = \int_B |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_B |f|^q \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $g \in L_p(E)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{E \setminus B}$, και $|h(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in E \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leqslant |h(x)|^q$ για κάθε $x \in E \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |h|^r d\lambda &= \int_E |f|^r \chi_{E \setminus B} \, d\lambda = \int_{E \setminus B} |f|^r \, d\lambda \leqslant \int_{E \setminus B} |f|^q \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $h \in L_r(E)$.

7. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Υπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\int_E |f|^q \, d\lambda = \int_E |f|^{(1-t)p} |f|^{tr} \, d\lambda \leqslant \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)p} \right)^{\frac{1}{1-t}} d\lambda \right)^{1-t} \left(\int_E \left(|f|^{tr} \right)^{\frac{1}{t}} d\lambda \right)^t$$
$$= \left(\int_E |f|^p d\lambda \right)^{1-t} \left(\int_E |f|^r d\lambda \right)^t = \|f\|_p^{(1-t)p} \|f\|_r^{tr} < \infty.$$

Άρα, $f \in L_q(E)$.

8. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι*

$$\ln \|f\|_p \geqslant \int_E \ln |f| \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\ln \|f\|_p = \ln \left[\left(\int_E |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \right] = \frac{1}{p} \ln \left(\int_E |f|^p \, d\lambda \right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln \left(\int_E |f|^p \, d\lambda \right) \geqslant p \int_E \ln |f| \, d\lambda = \int_E p \ln |f| \, d\lambda = \int_E \ln(|f|^p) \, d\lambda.$$

Θέτοντας $g = |f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g \in L_1(E)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E g \, d\lambda \right) \geqslant \int_E \ln g, d\lambda.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E e^h \, d\lambda \right) \geqslant \int_E h \, d\lambda.$$

Ορίζουμε

$$t_0 = \int_E h \, d\lambda.$$

Υποθέτουμε ότι $t_0 \in \mathbb{R}$ (αν $t_0 = -\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0 < \infty$ διότι $h = \ln g \leqslant g - 1$ και η $g - 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο E). Η συνάρτηση $u(t) := e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t - e^{t_0} = u(t) - u(t_0) \geqslant u'(t)(t - t_0) = e^{t_0}(t - t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)} - e^{t_0} \geqslant e^{t_0}(h(x) - t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο E και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lambda(E) = 1$ παίρνουμε

$$\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x) - \int_E e^{t_0} \, d\lambda(x) \geqslant e^{t_0} \left[\int_E h(x) \, d\lambda(x) - \int_E t_0 \, d\lambda(x) \right]$$
$$= e^{t_0} \left[t_0 - t_0 \lambda(E) \right] = 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_E e^{h(x)}\,d\lambda(x) \geqslant \int_E e^{t_0}\,d\lambda(x) = e^{t_0},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\ln\left(\int_E e^{h(x)}\,d\lambda(x)\right) \geqslant t_0 = \int_E h\,d\lambda.$$

9. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1,\ldots,c_m > 0$ με $c_1+\cdots+c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1,\ldots,f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}.$$

Υπόδειξη. Αν $\int_E |f_i|\,d\lambda = 0$ για κάποιο $i = 1,\ldots,m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_E |f_i|\,d\lambda > 0$ για κάθε $i = 1,\ldots,m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_E |f_i|\,d\lambda} f_i, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Τότε, $\int_E |g_i|\,d\lambda = 1$ για κάθε $i = 1,\ldots,m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1,\ldots,m$)

$$\begin{aligned}\ln(|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m}) &= c_1\ln(|g_1(x)|) + c_2\ln(|g_2(x)|) + \cdots + c_m\ln(|g_m(x)|)\\ &\leqslant \ln(c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant c_1\int_E |g_1|\,d\lambda + \cdots + c_m\int_E |g_m|\,d\lambda = c_1+\cdots+c_m = 1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}.$$

10. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p,q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp}\|f\|_q^{(1-t)q}.$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα αποδείχθηκε για την Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{tp}$ και $|f|^{(1-t)q}$ με εκθέτες $\frac{1}{t}$ και $\frac{1}{1-t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^r \,d\lambda &= \int_E |f|^{tp}|f|^{(1-t)q}\,d\lambda \leqslant \left(\int_E \left(|f|^{tp}\right)^{\frac{1}{t}}\,d\lambda\right)^t \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)q}\right)^{\frac{1}{1-t}}\,d\lambda\right)^{1-t} \\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^t \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{1-t} = \|f\|_p^{tp}\|f\|_r^{(1-t)q}.\end{aligned}$$

11. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.*

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \to |f|^p$ σχεδόν παντού στο E, από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p\,d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n|^p\,d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E |f_n|^p\,d\lambda \leqslant 1,$$

διότι

$$\int_E |f_n|^p\,d\lambda = \|f_n\|_p^p \leqslant 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

12. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n\,d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\,d\lambda = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{[-\delta,\delta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}(2\delta)^{1/q}\|f_n\|_p &= \left(\int |g_\delta|^q\,d\lambda\right)^{1/q}\|f_n\|_p \geqslant \left|\int f_n g_\delta\,d\lambda\right| \\ &= \int_{\{x:|x|\leqslant\delta\}} f_n\,d\lambda = \int f_n\,d\lambda - \int \{x : |x| > \delta\} f_n\,d\lambda \\ &= 1 - \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\,d\lambda.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση υπάρχει $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\,d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0(\delta)$ έχουμε

$$\|f_n\|_p > \frac{1}{2}\frac{1}{(2\delta)^{1/q}}.$$

Έπεται ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{(2\delta)^{1/q}}$$

για κάθε $\delta > 0$, και αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ παίρνουμε $\liminf_n \|f_n\|_p = +\infty$. Άρα, $\|f_n\|_p \to 0$.

13. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι*

$$\int_E |f|^p \, d\lambda = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda_1(t).$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \chi_E(x)\, d\lambda(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}\, d\lambda_1(t)\right)\chi_E(x)\, d\lambda(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{\infty} pt^{p-1}\chi_{[0,|f(x)|)}(t)\, d\lambda_1(t)\right)\chi_E(x)\, d\lambda(x)\\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x)\chi_{[0,|f(x)|)}(t)\, d\lambda(x)\right) pt^{p-1}\, d\lambda_1(t)\\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{x\in E:|f(x)|>t\}}(x)\, d\lambda(x)\right) pt^{p-1}\, d\lambda_1(t)\\
&= \int_0^{\infty} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) pt^{p-1}\, d\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

14. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρ- τήσεων στο E με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο E. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $g_n \to g$ σχεδόν παντού, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|g\|_\infty \leqslant M$ (υπάρχει $Z \subset E$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in E \setminus Z$ ισχύουν οι $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και $g_n(x) \to g(x)$, άρα για κάθε $x \in E \setminus Z$ έχουμε $|g(x)| \leqslant M$).

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L_p(E)$ και $v \in L_\infty(E)$ τότε $uv \in L_p(E)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_E |u|^p|v|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |u|^p\|v\|_\infty^p \, d\lambda = \|v\|_\infty^p\|u\|_p^p.$$

δηλαδή

$$\|uv\|_p \leqslant \|v\|_\infty\|u\|_p.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_ng_n - fg\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leqslant \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\ &\leqslant \|g_n\|_\infty\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \to 0$, άρα $M\|f_n - f\|_p \to 0$. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p|g_n - g|^p \leqslant |f|^p(|g_n| + |g|)^p \leqslant (2M)^p|f|^p$$

σχεδόν παντού, και η $(2M)^p|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L_p(E)$ (ως $\|\cdot\|_p$-όριο των $f_n \in L_p(E)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, διότι $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού και $g_n(x) - g(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_E |f(g_n - g)|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \to 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_ng_n - fg\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \to 0.$$

15. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:*

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim\limits_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα την $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Έχουμε $f_t(x) = \chi_E(x+t) = \chi_{-t+E}(x)$, άρα $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και

$$\int f_t \, d\lambda = \lambda(-t + E) = \lambda(E) = \int f \, d\lambda.$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν φ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\varphi_t \in L_1(\mathbb{R}^d$ και

$$\int \varphi_t \, d\lambda = \int \varphi \, d\lambda.$$

Έστω τώρα $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ με $f \geqslant 0$. Θεωρούμε ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων φ_n με $\varphi_n \nearrow f$. Έστω $t \in \mathbb{R}^d$. Έχουμε $(\varphi_n)_t \in L_1(\mathbb{R}^d$, $(\varphi_n)_t \nearrow f_t$, και

$$\int (\varphi_n)_t \, d\lambda = \int \varphi_n \, d\lambda.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int f_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n)_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Έτσι βλέπουμε ότι $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

Στη γενική περίπτωση, όπου $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f^+ και f^-.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$, άρα μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ώστε $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $K = \mathrm{supp}(g)$. Η g είναι συνεχής, με φορέα το συμπαγές K, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x-y| < \delta$ τότε $|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}$. Τότε, για κάθε $|t| < \delta$ έχουμε

$$\|g - g_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) = \int_{K\cup(K-t)} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\|f - f_t\|_1 \leqslant \|f - g\|_1 + \|g - g_t\|_1 + \|g_t - f_t\|_1 < 3\varepsilon,$$

χρησιμοποιώντας και την $\|f-g\|_1 = \|f_t - g_t\|_1$, η οποία ισχύει για κάθε t από το (α).

16. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*

Υπόδειξη. Έστω $0 \neq f \in L_\infty(E)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p\, d\lambda \leqslant \int_E \|f\|_\infty^p d\lambda = \|f\|_\infty^p \lambda(E) < \infty,$$

άρα $f \in L_p(E)$. Επίσης,

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty [\lambda(E)]^{1/p} \to \|f\|_\infty$$

καθώς το $p \to \infty$, άρα $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d\, d\lambda \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \lambda(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p\to\infty} [\lambda(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. *Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^{-a}|\ln x|^b$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 < p < p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p \leqslant p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p \geqslant p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p < p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p > p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$.

18. *Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.*

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. Δηλαδή, το $E - F$ έχει μη κενό εσωτερικό.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}|(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)]\chi_F(z) d\lambda(z)\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z).\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε $\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y) = f(z+(x-y)) = f_{x-y}(z)$ με την ορολογία της Άσκησης 15. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Έπεται ότι

$$\lim_{y\to x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{x\to y} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{x-y}|\, d\lambda = 0$$

από την Άσκηση 15 (β).

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε

$$\lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Θέτουμε $F_1 = F + x_0$. Η συνάρτηση

$$f(x) := (\chi_{-E} * \chi_{F_1})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x-z)\chi_{F_1}(z)\, d\lambda(z) = \lambda((x+E) \cap F_1)$$

είναι συνεχής, από το πρώτο ερώτημα. Όμως,

$$f(0) = \lambda(E \cap F_1) = \lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|u| < \varepsilon$ τότε

$$f(u) = \lambda((E+u) \cap (F + x_0)) > 0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $|u| < \varepsilon$ έχουμε $E \cap (F + x_0 - u) = -u + (E+u) \cap (F + x_0) \neq \emptyset$, και θέτοντας $x = x_0 - u$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ με $|x - x_0| < \varepsilon$ ισχύει $E \cap (F + x) \neq \emptyset$.

3.2 Ομάδα Β′

19. *Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και*

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\; dt = 1.$$

Έστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t)\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g\|_1\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|g_n\|_1 \leqslant \|g\|_1 < +\infty.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\|g_n - g\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g_t - g\|_1\, d\lambda(t),$$

όπου $g_t(x) = g(x-t)$. Πράγματι,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t),$$

άρα

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)|\, d\lambda(x)\right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 15 (β) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $\|g_t - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,1/n]} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) \\ &< \varepsilon \int_{[0,1/n]} f_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

και έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$.

20. *Έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ τότε $f * g \in L_r(\mathbb{R}^d)$ και*

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $a = 1 - \frac{p}{r}$ και $b = 1 - \frac{q}{r}$. Παρατηρούμε ότι $r \geqslant p$ και $r \geqslant q$ λόγω των υποθέσεων ότι $p, r, q \geqslant 1$ και $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Ορίζουμε $p_1 = \frac{pr}{r-p}$ και $p_2 = \frac{rq}{r-q}$. Τότε, $p_1, p_2 \geqslant 1$ και $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$. Γράφουμε

$$|(f * g)(x)| = \left|\int f(x-y) g(y)\, d\lambda(y)\right| \leqslant \int (|f(x-y)|^{1-a} |g(y)|^{1-b}) |f(x-y)|^a |g(y)|^b d\lambda(y).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9 έχουμε

$$\begin{aligned}|(f * g)(x)| &\leqslant \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r} |g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y)\right)^{1/r} \left(\int |f(x-y)|^{ap_1} d\lambda(y)\right)^{1/p_1} \\ &\qquad \times \left(\int |g(y)|^{bp_2} d\lambda(y)\right)^{1/p_2} \\ &= \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r} |g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y)\right)^{1/r} \|f\|_{ap_1}^a \|g\|_{bp_2}^b.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-a)r = p$ και $(1-b)r = q$. Υψώνοντας στην r και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|f * g\|_r^r &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \left[\int \left(\int |f(x-y)|^p d\lambda(x)\right) |g(y)|^q d\lambda(y)\right] \\ &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \|f\|_p^p \|g\|_q^q.\end{aligned}$$

Όμως, $ap_1 = p$ και $bp_2 = q$. Άρα,

$$\|f * g\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{p+ar}\|g\|_q^{q+br} = \|f\|_p^r\|g\|_q^r,$$

δηλαδή, $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$.

21. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(E)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

Υπόδειξη. Έστω $q \leqslant r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^r\, d\lambda(x) &= \int_0^\infty rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t) \\
&+ \int_1^\infty rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t) \\
&\leqslant \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(E)\, d\lambda(t) + \int_1^\infty rt^{r-1}\frac{c}{t^p}\, d\lambda(t) \\
&= \lambda(E)\int_0^1 rt^{r-1} d\lambda(t) + Cr\int_1^\infty t^{r-p-1}\, d\lambda(t) \\
&= \lambda(E) + \frac{Cr}{p-r} < \infty,
\end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^\infty t^{r-p-1}\, d\lambda(t) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p}\right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r - p < 0$.

Έπεται ότι $f \in L_r(E)$.

22. *Έστω $r > 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_0^1 |f|^r\, d\lambda \leqslant \liminf \int_0^1 |f_n|^r\, d\lambda \leqslant M^r,$$

διότι $\|f\|_r \leqslant m$ για κάθε n. Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r\, d\lambda \leqslant \int_0^1 2^r(|f_n|^r + |f|^r)\, d\lambda \leqslant 2^{r+1}M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1-\delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Για τυχόν $1 \leqslant p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_{E^c} |f_n - f|^r \right)^{\frac{p}{r}} \\ &< \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_0^1 |f_n - f|^r \right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \to 0$.

23. *Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\varphi_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \; d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\|\varphi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\varphi_h(f) - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, d\lambda(t) \right|^2 &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \left(\int_{x-h}^{x+h} \mathbf{1}^2 \, d\lambda(t) \right) \\ &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \cdot (2h) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|\varphi_h(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, d\lambda(t) \right|^2 d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) f^2(t)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[t-h, t+h](x)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t)(2h)\, d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(t)\, d\lambda(t) = \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|\varphi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε πρώτα ότι αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\varphi_h(g) \to g$ ομοιόμορφα καθώς το $h \to 0$ και $\|\varphi_h(g) - g\|_2 \to 0$ αφού $\varphi_h(g) - g \equiv 0$ έξω από κάποιο κλειστό διάστημα (αν π.χ. $0 < h < 1$). Κατόπιν, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχή, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $\varphi_h(f-g) = \varphi_h(f) - \varphi_h(g)$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|\varphi_h(f) - f\|_2 &\leqslant \|\varphi_h(f) - \varphi_h(g)\|_2 + \|\varphi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\
&= \|\varphi_h(f-g)\|_2 + \|\varphi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\
&\leqslant \|\varphi_h(g) - g\|_2 + 2\|g - f\|_2 < \|\varphi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\varphi_h(f) - f\|_2 \leqslant \lim_{h\to 0^+} \|\varphi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\varphi_h(f) - f\|_2 = 0,$$

δηλαδή $\|\varphi_h(f) - f\|_2 \to 0$.

24. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι $n \cdot \big(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\big) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\chi_E(x) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z).$$

Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}|n(\chi_E * \chi_{[0,1/n]})(x) - \chi_E(x)| &= \left| n \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(x)]\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{1/n} \int_{[0,1/n]} |\chi_E(x-z) - \chi_E(x)| d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{[x-1/n,x]} |\chi_E(t) - \chi_E(x)| d\lambda(t) \to \chi_E(x)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(\chi_E)$, δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

25. *Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geqslant n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \mathrm{sign}(g(x)) \chi_{A_n}(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x),$$

και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi, ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Όμως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) |g(x)|\, d\lambda(x) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

26. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L_p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f) \chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ *και* $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\, d\lambda$. *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x) - 2^n a_{n,k}(f)|^p \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (f(x) - f(y))\, d\lambda(y) \right|^p d\lambda(x) \\
ls &\sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \cdot 2^{-np/q} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} 2^p (|f(x)|^p + |f(y)|^p)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n 2^p \cdot 2\lambda(J_{n,k}) \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \|f\|_p^p \leqslant 4^p \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν η g είναι συνεχής και αν ορίσουμε αντίστοιχα τις g_n, τότε $\|g - g_n\|_p \to 0$. Πράγματι, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in [0,1]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ να έχουμε $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $1/2^{n_0} \leqslant \delta$, και για κάθε $n \geqslant n_0$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g-g_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n}\int_{J_{n,k}} |g(x)-2^n a_{n,k}(g)|^p \, d\lambda(x)\\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np}\int_{J_{n,k}} \left|\int_{J_{n,k}} (g(x)-g(y))\, d\lambda(y)\right|^p \, d\lambda(x)\\
&ls \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np}\int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |g(x)-g(y)|^p \, d\lambda(y)[\lambda(J_{n,k})]^{p/q}\right) d\lambda(x)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np}\int_{J_{n,k}} \lambda(J_{n,k})\varepsilon^p\, 2^{-np/q}\, d\lambda(x)\\
&= 2^n 2^{np}(2^{-n})^2\varepsilon^p\, 2^{-np/q} = \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

δηλαδή $\|g-g_n\|_p \leqslant \varepsilon$.

Θεωρούμε τώρα $f\in L_p[0,1]$ και για τυχόν $\varepsilon>0$ βρίσκουμε συνεχή g με $\|f-g\|_p\leqslant\varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $a_{k,n}(f-g)=a_{k,n}(f)-a_{k,n}(g)$, άρα $(f-g)_n=f_n-g_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|f-f_n\|_p &\leqslant \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+\|g_n-f_n\|_p\\
&\leqslant \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+\|(g_n-f_n)-(g-f)\|_p+\|g-f\|_p\\
&= \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+\|(g-f)_n-(g-f)\|_p+\|g-f\|_p\\
&\leqslant \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+4\|g-f\|_p+\|g-f\|_p\\
&\leqslant 6\varepsilon+\|g-g_n\|_p.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n\to\infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty}\|g-g_n\|_p+6\varepsilon=6\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon\to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0,$$

δηλαδή $\|f-f_n\|_p\to 0$.

27. *Έστω $1<p<\infty$ και έστω $f\in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι*

$$\left|\int_0^x f(t)\ d\lambda(t)\right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x>0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}}\int_0^x f(t)\ d\lambda(t)=0.$$

Υπόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| &\leqslant \int_0^x |f(t)|\,d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)|\chi_{[0,x]}(t)\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \|f\|_p\|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q\,d\lambda\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}\,d\lambda\right)^{1/q} = [\lambda([0,x])]^{1/q} = x^{1/q}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιον α, διότι $|f|^p\chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \to \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_0^\infty |f|^p\,d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p\,d\lambda\right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*)\qquad \frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t) &\leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\|\chi_{[\alpha,x]}\|_q\\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p < \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\\ &\leqslant \|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p < \varepsilon\end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η $(*)$ δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

28. *Υποθέτουμε ότι* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *για κάθε* $1 \leqslant p < 2$ *και επιπλέον ότι*

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$ *και*

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda \leqslant M^p$$

για κάθε $p \in [1, 2)$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant M^{2-1/n}.$$

Από το λήμμα του Fatou και από το γεγονός ότι $|f|^{2-1/n} \to |f|^2$ σχεδόν παντού, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant \liminf M^{2-1/n} = M^2 < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{p\to 2^-} \|f\|_p = \|f\|_2$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p_n \in [1, 2)$ με $p_n \uparrow 2$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} = \|f\|_2.$$

Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

Κατόπιν, θα έχουμε

$$\|f\|_{p_n} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p_n}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$$

διότι $\frac{1}{p_n} \to \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n = |f|^2 \chi_{\{|f|<1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f|\geqslant 1\}}$ και $g_n = |f|^2 \chi_{\{|f|\geqslant 1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f|<1\}}$, και παρατηρούμε ότι:

(α) $f_n \leqslant |f|^{p_n} \leqslant g_n$ για κάθε n, άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda.$$

(β) Η (f_n) είναι αύξουσα (διότι η (p_n) είναι αύξουσα) και $f_n \nearrow |f|^2$ σχεδόν παντού, άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

(γ) Η (g_n) είναι φθίνουσα και $g_n \searrow |f|^2$ σχεδόν παντού. Επίσης, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} g_1 \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_1} \, d\lambda \leqslant M^2 + M^{p_1} < \infty,$$

άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την $(g_1 - g_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

Από τα (α), (β), (γ) και από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

29. *Έστω $f \in L_1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε*

$$\int_A |f| \, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L_2[0,1]$;

Υπόδειξη. Από την υπόθεση και από την ανισότητα Markov, αν $A_t = \{|f| \geqslant t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leqslant \int_{A_t} |f| \, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή

$$\lambda(A_t) \leqslant \frac{C^2}{t^2}.$$

Έστω $1 \leqslant p < 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f|^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\}) \, d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\}) \, d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\}) \, d\lambda(t) \\ &\leqslant \int_0^1 pt^{p-1} d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1} + C^2 p \int_1^\infty t^{p-3} d\lambda(t) < \infty \end{aligned}$$

διότι $p - 3 < -1$. Άρα, $f \in L_p([0,1])$.

30. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει*

$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right) \, d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = \mathrm{supp}(f)$. *Αποδείξτε ότι* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *για κάθε* $1 \leqslant p < \infty$ *και* $\|f\|_p \leqslant Cp$, *όπου* $C > 0$ *μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης* f *που ικανοποιεί την* $(*)$ *αλλά* $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t^p e^{-t}$, $t > 0$. Έχουμε $g'(t) = (pt^{p-1} - t^p)e^{-t}$, άρα η g έχει μέγιστο στο $t_0 = p$. Δηλαδή,

$$t^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} e^t$$

για κάθε $t > 0$. Τότε,

$$\int |f|^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} \int \exp(|f(x)|)\, d\lambda(x) = \frac{p^p}{e^p},$$

άρα

$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{e} p.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η $f(x) = c + \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$ στο $(0,1)$, όπου το $c \in \mathbb{R}$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\int_0^1 e^{f(x)} d\lambda(x) = e^c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = e^c \cdot 2 = 1.$$

Η f δεν είναι φραγμένη, αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

31. *Έστω* $f \in L^1((0,1))$. *Για* $x \in (0,1)$ *ορίζουμε*

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ *και*

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(x)|\, d\lambda(x) &= \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 |f(t)|\, d\lambda(t) = \|f\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli. Άρα, $g \in L^1((0,1))$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και, ακολουθώντας την ίδια πορεία, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,d\lambda(x) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,d\lambda(t)\right) d\lambda(x)\\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\chi_{(x,1)}(t)\,d\lambda(t)\,d\lambda(x)\\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t)\,d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\lambda(\{x : 0 < x < t\})\,d\lambda(t)\\ &= \int_0^1 f(t)\,d\lambda(t) = \int_0^1 f(x)\,d\lambda(x).\end{aligned}$$

32. *Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0,1)$.*

Υπόδειξη. Αφού $|f(x)| < \infty$ για κάθε $x \in (0,1)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A = \{x \in (0,1) : |f(x)| \leqslant m] \subseteq (0,1)$ να έχει θετικό μέτρο. Θέτουμε $B = \{x \in (0,1) : |(x)| > m\}$. Τότε, αν $(x,y) \in B \times A$, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - |f(y)| \geqslant |f(x)| - m > 0.$$

Από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)\times(0,1)} |f(x) - f(y)|\,d\lambda(x,y) &\geqslant \int_{B\times A} |f(x) - f(y)|\,d\lambda(x,y)\\ &\geqslant \int_{B\times A} (|f(x)| - m)\,d\lambda(x,y)\\ &= \int_B \int_A (|f(x)| - m)\,d\lambda(y)\,d\lambda(x)\\ &= \lambda(A)\int_B (|f(x)| - m)\,d\lambda(x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_B |f(x)|\,d\lambda(x) \leqslant \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) < \infty.$$

Αφού $f \leqslant m$ στο A, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} |f(x)|\,d\lambda(x) = \int_A |f(x)|\,d\lambda(x) + \int_B |f(x)|\,d\lambda(x) &\leqslant m\lambda(A) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B)\\ = m(\lambda(A) + \lambda(B)) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} &= m + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

33. *Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) συζυγή εκθέτη q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0, \infty]$ δείξτε ότι*

$$\int fg \, d\lambda \geqslant \left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\lambda \right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p \, d\lambda \right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και $s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int f^p \, d\lambda &= \int (fg)^p g^{-p} \, d\lambda \\
&\leqslant \left(\int fg \, d\lambda \right)^p \left(\int (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} \\
&= \left(\int fg \, d\lambda \right)^p \left(\int g^q \right)^{-\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1 - p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int fg \, d\lambda \right)^p \leqslant \left(\int f^p \, d\lambda \right) \left(\int g^q \right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη γράφουμε

$$\left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda \right)^{1/q} \leqslant \int f(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda$$

και

$$\left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda \right)^{1/q} \leqslant \int g(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p} \right] \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda \right)^{1/q} \\
&\qquad \leqslant \int (f+g)(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda = \int (f+g)^p \, d\lambda.
\end{aligned}$$

Αφού $-(1-p)q = p$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}
\left(\int f^p \, d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda \right)^{1/p} &\leqslant \left(\int (f+g)^p \, d\lambda \right)^{1-1/q} \\
&= \left(\int (f+g)^p \, d\lambda \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

34. *Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.*

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ τότε $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Άρα, για κάθε $f \in L_q[0,1]$ έχουμε $f \in L_p[0,1]$. Δηλαδή, $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L_p[0,1] : \|f\|_q \leqslant n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L_q[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L_p[0,1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p$−κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n, δηλαδή $\|f_k\|_q \leqslant n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αν $\|f_k - f\|_p \to 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q \leqslant n$: αφού $f_k \xrightarrow{L_p} f$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\lambda(|f_k - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-p}\|f_k - f\|_p^p,$$

άρα $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s} \to f$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι $|f_{k_s}|^q \to |f|^q$ και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int |f|^q \, d\lambda \leqslant \liminf_{s\to\infty} \int |f_{k_s}|^q \, d\lambda \leqslant n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q \leqslant n$. Άρα, $f \in F_n$.

(β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f \in F_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(f,\varepsilon) = \{g \in L_p[0,1] : \|f - g\|_p < \varepsilon\} \nsubseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f \in F_n$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\alpha \in (1/q, 1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\varepsilon(1-\alpha p)^{1/p}}{2t^\alpha},$$

η οποία ανήκει στον $L_p[0,1] \setminus L_q[0,1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f + h \in L_p[0,1]$ και μάλιστα $f + h \in B(f,\varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$, αλλά $f + h \notin F_n$, αφού $h \notin L_q[0,1]$.