4 Μέτρα γινόμενο - Θεώρημα Fubini

Ορισμός 4.1 *Αν*[1] $(X, \mathcal{A})$ *και* $(Y, \mathcal{B})$ *είναι μετρήσιμοι χώροι, τα σύνολα* $A \times B$ *όπου* $A \in \mathcal{A}$ *και* $B \in \mathcal{B}$ *λέγονται* **μετρήσιμα ορθογώνια**. *Ορίζουμε* [2]

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{M}\{A \times B \subseteq X \times Y : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}.$$

Παρατήρηση $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Πρόταση 4.1 *Αν* $(Z, \mathcal{C})$ *είναι μετρήσιμος χώρος και* $f : Z \to X \times Y$*, τότε η* f *είναι* $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-*μετρήσιμη αν και μόνον αν η* $\pi_1 \circ f : Z \to X$ *είναι* $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}$-*μετρήσιμη και η* $\pi_2 \circ f : Z \to Y$ *είναι* $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-*μετρήσιμη (όπου* π_i *οι καρτεσιανές προβολές* $X \times Y \to X$ *και* $X \times Y \to Y$*).*

Πόρισμα 4.2 *Έστω* $(Z, \mathcal{C})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f_1, f_2 : Z \to \mathbb{R}$.
(α) *Αν οι* f_1, f_2 *είναι μετρήσιμες, τότε οι* $f_1 + f_2 : Z \to \mathbb{R}$ *και* $f_1 f_2 : Z \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμες.*
(β) *Οι* f_1, f_2 *είναι μετρήσιμες αν και μόνον αν η* $f_1 + i f_2 : Z \to \mathbb{C}$ *είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση 4.3 *Αν* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *είναι χώροι μέτρου, υπάρχει μέτρο*

$$\pi = \mu \times \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, +\infty]$$

ώστε

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{όταν } A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}.$$

Αν τα μ, ν *είναι σ-πεπερασμένα, τότε το* π *είναι μοναδικό και σ-πεπερασμένο.*

Η ιδέα της απόδειξης. Το π ορίζεται καλά στην οικογένεια $\mathcal{C}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων μετρησίμων ορθογωνίων. Η $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα, όπως έχουμε δείξει. Επεκτείνουμε το π στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα επέκτασης Καραθεοδωρή.

Παρατήρηση 4.4 *Το* $\mu \times \nu$ *δεν είναι συνήθως πλήρες μέτρο, ακόμα κι αν τα* μ *και* ν *είναι πλήρη.*

Παράδειγμα Αν $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{L}$ (Lebesgue μετρήσιμα) και $\mu = \nu = m$, το $\mu \times \nu$ δεν είναι πλήρες μέτρο: Αν $E \in \mathcal{A}$ με $m(E) = 0$ και $F \subseteq [0, 1]$ μη μετρήσιμο, τότε από την Πρόταση το $E \times F$ δεν μπορεί να είναι $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-μετρήσιμο. Όμως περιέχεται στο μετρήσιμο σύνολο $E \times [0, 1]$, το οποίο έχει μέτρο $m(E)m([0, 1]) = 0$.

Ορισμός 4.2 (Τομές (sections)) *Αν* $E \subseteq X \times Y$ *και* $f : X \times Y \to Z$*, για κάθε* $(x, y) \in X \times Y$ *θέτουμε*

$$\begin{aligned}
E_x &= \{v \in Y : (x, v) \in E\} \subseteq Y \\
E^y &= \{s \in X : (s, y) \in E\} \subseteq X \\
f_x &: Y \to Z \qquad f_x(v) = f(x, v)\ (v \in Y) \\
f^y &: X \to Z \qquad f^y(s) = f(s, y)\ (s \in X).
\end{aligned}$$

[1] fubinew20, 17 Δεκεμβρίου 2020

[2] Βεβαίως το σύνολο $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ δεν είναι άλγεβρα συνόλων, είναι όμως «στοιχειώδης οικογένεια» (Ορισμός 1.4).

Παράδειγμα $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$.

Πρόταση 4.5 *Αν* $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *τότε για κάθε* $(x, y) \in X \times Y$,

$$E_x \in \mathcal{B}, \qquad E^y \in \mathcal{A}.$$

Πρόταση 4.6 *Αν* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *είναι* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-μετρήσιμη τότε για κάθε* $(x, y) \in X \times Y$,

$$f_x \quad \text{είναι } \mathcal{B}\text{-μετρήσιμη}, \qquad f^y \quad \text{είναι } \mathcal{A}\text{-μετρήσιμη}.$$

Απόδειξη Παρατήρησε ότι, αν $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε (γιατί;)

$$f_x^{-1}(U) = (f^{-1}(U))_x.$$

Θεώρημα 4.7 (Fubini για χαρακτηριστικές) *Θεωρούμε χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$*. Για κάθε* $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

(α) *οι συναρτήσεις*

$$X \to [0, +\infty] : \;\; x \to \nu(E_x) = \int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y)$$
$$Y \to [0, +\infty] : \;\; y \to \mu(E^y) = \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x)$$

είναι $\mathcal{A}$ *(αντιστοίχως* $\mathcal{B}$*) μετρήσιμες και*

(β) *ισχύουν οι ισότητες*

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E)$$

δηλαδή

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y). \tag{1}$$

Η ιδέα της απόδειξης Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(X) < \infty$ και $\nu(Y) < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\Theta \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ των συνόλων για τα οποία (όλα) τα συμπεράσματα του Θεωρήματος ισχύουν. Παρατηρούμε ότι η Θ περιέχει όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ξένες ενώσεις, άρα περιέχει την άλγεβρα $\mathcal{C}$ που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης) καθώς και ως προς φθίνουσες τομές (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). Έπεται τότε (δες το επόμενο Λήμμα) ότι η Θ περιέχει την σ- άλγεβρα που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια, άρα $\Theta \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Η επέκταση στην περίπτωση σ-πεπερασμένων μέτρων γίνεται γράφοντας τον $X \times Y$ ως αριθμήσιμη ξένη ένωση μετρησίμων ορθογωνίων πεπερασμένου μέτρου και εφαρμόζοντας την γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων και το Θεώρημα Beppo Levi.

Λήμμα 4.8 (Μονοτόνων κλάσεων) *Έστω* $\mathcal{C}$ *μια άλγεβρα συνόλων και* $\mathcal{M}$ *μια οικογένεια που είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις και ως προς φθίνουσες τομές (μια τέτοια* $\mathcal{M}$ *λέγεται* μονότονη κλάση*). Αν η* $\mathcal{M}$ *περιέχει την* $\mathcal{C}$*, τότε περιέχει την σ-άλγεβρα* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ *που παράγει η* $\mathcal{C}$.

Απόδειξη Παραλείπεται.

Πρόταση 4.9 (Αρχή Cavalieri) *Αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $E,F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, τότε*

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)(E)=(\mu\times\nu)(F) &\iff \nu(E_x)=\nu(F_x) \quad \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x\in X\\ &\iff \mu(E^y)=\mu(F^y) \quad \nu\text{-σχεδόν για κάθε } y\in Y.\end{aligned}$$

Απόδειξη Άμεση από την σχέση (1) στο Θεώρημα 4.7.

Παρατήρηση 4.10 Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.7, αν η

$$f:X\times Y\to[0,+\infty] \qquad \text{με } \ f(x,y)=\sum_{k=1}^{N}c_k\chi_{E_k}(x,y) \quad (c_k\geq 0)$$

είναι απλή και $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμη, τότε η $\phi_f:X\to[0,+\infty]$ με

$$\phi_f(x)=\int_Y f(x,y)d\nu(y)=\sum_k c_k\nu((E_k)_x)$$

είναι $\mathcal{A}$ μετρήσιμη[3] ως γραμμικός συνδυασμός μετρησίμων συναρτήσεων.
Επιπλέον έχουμε

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_X\phi_f(x)d\mu(x)=\sum_k c_k\int_X\nu((E_k)_x)d\mu(x)=\sum_k c_k\pi(E)$$

(όπου $\pi=\mu\times\nu$) συνεπώς

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\sum_k c_k\pi(E)=\int_{X\times Y}f(x,y)d\pi(x,y).$$

Γενικότερα,

Θεώρημα 4.11 (Tonelli) *Έστω $f:X\times Y\to[0,+\infty]$ όπου οι $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν η f είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμη, τότε*

(α) οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned}X\to[0,+\infty]: \quad x\to\int_Y f(x,y)d\nu(y)\\ Y\to[0,+\infty]: \quad y\to\int_X f(x,y)d\mu(x)\end{aligned}$$

είναι $\mathcal{A}$ (αντιστοίχως $\mathcal{B}$) μετρήσιμες και

(β) ισχύουν οι ισότητες $\iint fd\nu d\mu=\iint fd\mu d\nu=\int fd\pi$, δηλαδή

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)=\int_{X\times Y}fd(\mu\times\nu).$$

[3] Δεν είναι εν γένει απλή. Πάρε για παράδειγμα την $f=\chi_E$ όπου $E\subseteq[0,1]\times[0,1]$ το σύνολο Borel $E=\{(x,y):x\leq y\}$ και υπολόγισε την ϕ_f (μέτρο Lebesgue).

Απόδειξη Αν η f είναι απλή, δείξαμε στην Παρατήρηση 4.10 ότι η ϕ_f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και ότι $\int_X \phi_f d\mu = \int f d\pi$.

Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία (f_n) από $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \nearrow f$ κατά σημείο. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον $X \times Y$ έχουμε

$$\int_{X\times Y} f_n d\pi \nearrow \int_{X\times Y} f d\pi. \tag{2}$$

Όμως, αν $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x,y)d\nu(y)$ τότε κάθε ϕ_n είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. Επίσης, για κάθε $x \in X$, επειδή $(f_n)_x(y) \nearrow f_x(y)$ για κάθε $y \in Y$, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον Y έχουμε

$$\phi_n(x) = \int_Y (f_n)_x(y)d\nu(y) \nearrow \int_Y f_x(y)d\nu(y) \equiv \phi_f(x) \quad \text{για κάθε } \ x \in X.$$

Αφού η ϕ_f είναι κατά σημείο όριο μετρησίμων, είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και (από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον X) έπεται ότι

$$\int_X \phi_n d\mu \nearrow \int_X \phi_f d\mu.$$

Όμως κάθε f_n είναι απλή, άρα (από την Παρατήρηση 4.10)

$$\int_X \phi_n d\mu = \int_X \left(\int_Y f_n(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f_n d\pi.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\int_X \phi_f d\mu = \lim_n \int_{X\times Y} f_n d\pi. \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι

$$\int_{X\times Y} f d\pi = \int_X \phi_f d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

και η άλλη ισότητα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο. $\square$

Παράδειγμα 4.12 *Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα όταν δεν είναι και οι δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για παράδειγμα, έστω $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ τα σύνολα Borel, μ το μέτρο Lebesgue και ν το μέτρο απαρίθμησης. Αν $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$, τότε τα τρία ολοκληρώματα*

$$\int_Y (\int_X \chi_D d\mu) d\nu = 0, \ \int_X (\int_Y \chi_D d\nu) d\mu = 1 \ \ \textit{και} \ \ \int_{X\times Y} \chi_D d(\mu\times\nu) = +\infty$$

είναι διαφορετικά ανά δύο.

Ας δείξουμε ότι $\int_{X\times Y} \chi_D d(\mu\times\nu) = +\infty$, δηλαδή ότι $\pi(D) = (\mu\times\nu)(D) = +\infty$. Αφού το D είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμο, το μέτρο του ισούται με το εξωτερικό του μέτρο, δηλαδή

$$\pi(D) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) : A_i \in \mathcal{A}, \, B_i \in \mathcal{B}, \, D \subseteq \bigcup_i A_i \times B_i \right\}.$$

Θεωρούμε μια τυχαία αριθμήσιμη κάλυψη $D \subseteq \bigcup_i A_i \times B_i$. Για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ ώστε $(x,x) \in A_i \times B_i$, οπότε $x \in A_i \cap B_i := C_i$. Έχουμε λοιπόν $[0,1] = \bigcup_i C_i$, άρα κάποιο C_j θα έχει θετικό μέτρο Lebesgue: $\mu(C_j) > 0$. Τότε όμως το C_j είναι άπειρο, οπότε $\nu(C_j) = +\infty$. Συνεπώς $\pi(A_j \times B_j) \geq \pi(C_j \times C_j) = \mu(C_j)\nu(C_j) = +\infty$ και άρα $\sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) = +\infty$. Αφού η κάλυψη είναι τυχαία, έπεται ότι $\pi(D) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.13 *Η υπόθεση $f \geq 0$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ (μ το μέτρο απαρίθμησης) και*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y+1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε $\int_Y (\int_X f d\mu) d\nu = 0$ ενώ $\int_X (\int_Y f d\nu) d\mu = 1$.
Παρατηρούμε εδώ ότι $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) = +\infty$.

Θεώρημα 4.14 (Fubini) *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ όπου οι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε*

(α) σχεδόν όλες οι τομές της f είναι ολοκληρώσιμες, δηλαδή

$\int_Y |f(x,y)| d\nu(y) < +\infty$ *μ-σχεδόν για κάθε* $x \in X$

και $\int_X |f(x,y)| d\mu(y) < +\infty$ *ν-σχεδόν για κάθε* $y \in Y$

(β) οι (σχεδόν παντού ορισμένες) συναρτήσεις

$$x \to \int_Y f(x,y) d\nu(y) \quad \text{και} \quad y \to \int_X f(x,y) d\mu(x)$$

ορίζουν στοιχεία[4] *του $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντιστοίχως $L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$) και*

(γ) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε το Θεώρημα για την περίπτωση $f(X \times Y) \subseteq [-\infty, +\infty]$. Η περίπτωση $f(X \times Y) \subseteq \mathbb{C}$ έπεται εύκολα (θεωρώντας χωριστά τις $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$).

Από το Θεώρημα Tonelli η συνάρτηση $\phi_{|f|} : X \to [0, +\infty]$ με $\phi_{|f|}(x) = \int_Y |f(x,y)| d\nu(y)$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και

$$\int_X \phi_{|f|}(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y |f(x,y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| d\pi < +\infty.$$

Επομένως το σύνολο

$$A = \{x \in A : \phi_{|f|}(x) < \infty\}$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$ και $\mu(A^c) = 0$. Με άλλα λόγια

$$\mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X, \quad \int_Y |f_x(y)| d\nu(y) < +\infty, \quad \text{δηλ.} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(\nu).$$

[4] δηλαδή π.χ. η πρώτη συνάρτηση είναι μ-ισοδύναμη με μία $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Για τον ίδιο λόγο υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $\nu(B^c) = 0$ ώστε για κάθε $y \in B$ να ισχύει $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και το (α) αποδείχθηκε.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Tonelli στην $f_+ = \max\{f, 0\}$: έπεται ότι η συνάρτηση

$$\phi_+ : X \to [0, +\infty] \quad \text{με} \;\; \phi_+(x) = \int_Y f_+(x,y) d\nu(y)$$

είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και ότι

$$\int_X \phi_+ d\mu = \int_X \left(\int_Y (f_+)_x(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f_+ d(\mu\times\nu) \le \int_{X\times Y} |f| d(\mu\times\nu) < \infty,$$

δηλαδή $\phi_+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Ομοίως η συνάρτηση $\phi_-(x) = \int_Y f_-(x,y)d\nu(y)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ και

$$\int_X \phi_+ d\mu = \int_{X\times Y} f_+ d(\mu\times\nu) < \infty, \qquad \int_X \phi_- d\mu = \int_{X\times Y} f_- d(\mu\times\nu) < \infty$$

$$\text{άρα} \quad \int_X \phi_+ d\mu - \int_X \phi_- d\mu = \int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu)\,. \tag{4}$$

Όμως, αν $x \in A$ οπότε $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ και άρα $(f_\pm)_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$, έχουμε

$$\int_Y f_x(y)d\nu(y) = \int_Y (f_+)_x(y)d\nu(y) - \int_Y (f_-)_x(y)d\nu(y) = \phi_+(x) - \phi_-(x) \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή η συνάρτηση

$$x \to \int_Y f(x,y)d\nu(y)$$

είναι μ-σχεδόν παντού ορισμένη και ίση με τη διαφορά δύο στοιχείων του $L^1(\mu)$, άρα ορίζει στοιχείο του $L^1(\mu)$. Ακριβέστερα, αν θέσουμε

$$g(x) = \phi_+(x)\chi_A(x) - \phi_-(x)\chi_A(x) \qquad (x \in X) \tag{5}$$

τότε η g είναι (παντού) διαφορά δύο συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1(\mu)$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, άρα ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ και ικανοποιεί

$$g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad \text{για κάθε} \;\; x \in A$$

δηλαδή μ-σχεδόν παντού.

Από την (5) και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_X g(x)d\mu(x) \\ &= \int_X \phi_+(x)d\mu(x) - \int_X \phi_-(x)d\mu(x) \overset{(4)}{=} \int_{X\times Y} f(x,y)d\pi(x,y).\end{aligned}$$

Ομοίως η (ν-σχεδόν παντού ορισμένη) συνάρτηση

$$y \to \int_X f(x,y)d\mu(x)$$

ορίζει στοιχείο του $L^1(\nu)$ και προκύπτει ότι

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)d\pi(x,y).$$

$\square$

Παρατήρηση 4.15 Τα Θεωρήματα Tonelli και Fubini συνήθως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό: αν δοθεί μια $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση f, παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Tonelli οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \int_X \left(\int_Y |f(x,y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \\
(ii) \quad & \int_Y \left(\int_X |f(x,y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty \\
\text{και} \quad (iii) \quad & \int_{X \times Y} |f(x,y)| d\pi(x,y) < \infty \quad (\text{όπου} \ \ \pi = \mu \times \nu)
\end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες. Ελέγχουμε λοιπόν αν κάποιο από τα διαδοχικά ολοκληρώματα στο (i) ή στο (ii) δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα, οπότε έχουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \pi)$, και αν αυτό ισχύει, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini συμπεραίνουμε ότι το «διπλό» ολοκλήρωμα $\int_{X \times Y} f d\pi$ υπάρχει και ισούται με οποιοδήποτε από τα τα διαδοχικά ολοκληρώματα $\int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y)$ και $\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$.