Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
Θεωρία Αριθμών 532
2 Μαΐου 2017

Να απαντήσετε σε τουλάχιστον τόσα ερωτήματα ώστε το άθροισμα των μονάδων να είναι τουλάχιστον 100. Υποχρεωτικό είναι το δεύτερο θέμα.

Θέμα 1ο

1. (13) Έστω m το γινόμενο πέντε διαδοχικών θετικών ακεραίων. Να δείξετε ότι $120|m$.
2. (13) Να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 343, 165 και να εκφρασθεί αυτός σαν γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω αριθμών.
3. (11) Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $343x+165y=7$, όπου x, y ακέραιοι.
4. (17) Να δείξετε ότι $11^{12}+13^{10} \equiv 1 \mod 143$.
5. (11) Να λυθεί η γραμμική ισοδυναμία $3x \equiv 5 \mod 26$.
6. (19) Να εξετάσετε αν η διοφαντική εξίσωση $x^2+13y-22=0$ έχει λύση, όπου x, y ακέραιοι.
7. (11) Έστω a το υπόλοιπο της διαίρεσης του 7^{17} με το 3. Να βρεθεί το a.
8. (11) Αν a είναι η σωστή απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, να ελέγξετε εάν ο αριθμός 2^a είναι τετραγωνικό υπόλοιπο $\mod 11$.
9. (07) Να γράψετε τον ορισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο ακεραίων a, b εκ των οποίων ένας τουλάχιστον δεν είναι μηδέν.

Θέμα 2ο

1. (17) Έστω $N=k(k+1)(k+2)$ το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών ακέραιων αριθμών. Τότε για κάποιο $s>k$ το N διαιρείται από έναν αριθμό της μορφής
   - s^2-1
   - s^2-2
   - s^2
   - s^2+1

2. (19) Με προσέγιση ακρίβειας 1%, ο αριθμός των ακεραίων n της ακολουθίας $0^4, 1^4, 2^4, 3^4, \ldots, 999^4, 1000^4$ για τους οποίους ισχύει $n \mod 16 \equiv 1$ είναι

   - 20%
   - 50%
   - 30%
   - 25%
   - 10%

3. (5) Κάθε σύνθετος φυσικός αριθμός $n \geq 1$ αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

   - Σ
   - Λ

4. (5) Κάθε φυσικός αριθμός n έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη.

   - Σ
   - Λ

5. (5) Για κάθε πρώτο διάφορο του 2 και κάθε ακέραιο a ισχύει $a^p \equiv a \mod p$.

   - Σ
   - Λ

6. (5) Για κάθε ακέραιο a με $mkd(a, m) = 1$ ισχύει $a^{\phi(m)} \equiv -1 \mod m$.

   - Σ
   - Λ

7. (5) Έστω ακέραιος a και p περιττός πρώτος. Τότε το a είναι τετραγωνικό υπόλοιπο $\mod p$ εάν $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod m$.

   - Σ
   - Λ

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες.
Καλή επιτυχία.