

## Μαθηματικά της αγοράς και της παραγωγής

### Ασφάλειες Ζωής

Εξέταση 16 Δεκεμβρίου 2019

1. (25 βαθμοί) Έστω ότι η ένταση θνησιμότητας για τα άτομα ενός πληθυσμού είναι  $\mu_s = 1/(100 - s)$  για κάθε  $s \in [0, 100)$  και  $\mu_s = \infty$  για  $s \geq 100$ .

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση επιβίωσης για τα άτομα του πληθυσμού.

(β) Ποια η πιθανότητα ένα άτομο 20 ετών να ζήσει τουλάχιστον ως τα 50;

(γ) Ποια είναι η μέση τιμή  $\mathbf{E}(T_{20})$  της υπολοιπούμενης ζωής ενός ατόμου που τώρα είναι 20 ετών;

2. (20 βαθμοί) Έστω ότι η συνάρτηση επιβίωσης για τα άτομα ενός πληθυσμού είναι  $s(x) = 1 - (x/110)$  για  $x \in [0, 110]$  ενώ ένταση επιτοκίου είναι  $\delta = 0.04$

(α) Να υπολογιστεί το εννιαίο καθαρό ασφάλιστρο για ένα άτομο ηλικίας 40 που πληρώνει  $K = 10,000$  Ευρώ τη στιγμή του θανάτου μόνο αν αυτή συμβεί ως τα 70 χρόνια του ατόμου.

(β) Ποια είναι μεγαλύτερη από τις τιμές  $A_{40}, \bar{A}_{40}$ ; Δώστε αλγεβρική απόδειξη ή οικονομικό επιχείρημα.

3. (20 βαθμοί) (α) Έστω  ${}_n\ddot{a}_x$  η παρούσα αξία μιας ράντας ζωής που πληρώνει μια μονάδα σε καθεμία από τις στιγμές  $n, n + 1, \dots$  από σήμερα κατά τις οποίες ο ασφαλισμένος ( $x$ ) είναι ζωντανός, και έστω  $\ddot{a}_y$  η αξία μιας ράντας ζωής που δίνει μια μονάδα σε καθεμία από τις στιγμές  $0, 1, 2, \dots$  από σήμερα κατά τις οποίες ο ασφαλισμένος ( $y$ ) είναι ζωντανός. Να δειχθεί ότι

$${}_n\ddot{a}_x = v^n {}_n p_x \ddot{a}_{x+n}.$$

(β) Να περιγραφεί μια ράντα της οποίας η παρούσα αξία ισούται με

$$Z := \sum_{k=1}^{20} v^k {}_k p_x k.$$

Είναι ληξιπρόθεσμη ή προκαταβλητέα;

4. (15 βαθμοί) Να δειχθεί ότι

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1$$

όπου  $d = 1 - v = 1 - e^{-\delta}$ .

5. (20 βαθμοί) Θεωρούμε άτομο (50) που ασφαρίζεται ώστε να πάρουν ποσό  $K=20,000$  ευρώ οι κληρονόμοι του στο τέλος του έτους του θανάτου του. Η ασφάλιση πληρώνεται συνεχώς, με σταθερό ρυθμό  $\bar{P}$ .

(α) Ποια είναι η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή;

(β) Αν η τιμολόγηση της ασφάλισης γίνεται με την αρχή της ισοσυναμίας, να βρεθεί το  $\bar{P}$  ως συνάρτηση συνηθισμένων αναλογιστικών συναρτήσεων ( $\bar{A}_x, A_x, a_x, \dots$ ).

**Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι  $2\frac{1}{2}$  ώρες.**

**Καλή επιτυχία!**