

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

Χρονοσειρές – Εργασία στην Οικονομετρία Παράδοση έως Κυριακή 14/12/2025

Ερώτημα Α. Στο αρχείο `cobb_douglas_data.txt` περιέχονται δεδομένα για το Ελληνικό ΑΕΠ (στήλη 1), το Κεφάλαιο (στήλη 2) και την Εργασία (στήλη 3) για τα έτη 1961-2003. Να χρησιμοποιηθούν αυτά τα δεδομένα για να εκτιμηθεί η συνάρτηση Cobb Douglas για την Ελληνική Οικονομία. Συγκεκριμένα, θεωρήστε το υπόδειγμα

$$Q_t = AK_t^{b_1} L_t^{b_2} e^{\varepsilon_t}$$

α) Να εκτιμήσετε τα b_1, b_2 με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και να υπολογίσετε 90% διαστήματα εμπιστοσύνης για αυτά. Ερμηνεύστε τα b_1, b_2 . Τι συμπεράσματα βγάζετε από τα διαστήματα εμπιστοσύνης;

β) Να ελεγχθεί η στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων b_1, b_2 , καθώς και η στατιστική σημαντικότητα του υποδείγματος, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=10\%$.

γ) Να γίνουν οι παρακάτω έλεγχοι υποθέσεων σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας $\alpha=10\%$:

$$(i) \begin{matrix} H_0 : b_1 = 1 \\ H_1 : b_1 < 1 \end{matrix}, (ii) \begin{matrix} H_0 : b_2 = 1 \\ H_1 : b_2 > 1 \end{matrix}, (iii) \begin{matrix} H_0 : b_1 + b_2 = 1 \\ H_1 : b_1 + b_2 \neq 1 \end{matrix}, (iv) \begin{matrix} H_0 : b_1 + b_2 = 1 \\ H_1 : b_1 + b_2 > 1 \end{matrix}.$$

Για τους ελέγχους αυτούς να υπολογίσετε τα αντίστοιχα p-values. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

δ) Να γίνει πρόβλεψη του ΑΕΠ για (i) $K=5000000, L=3500000$ και (ii) $K = \bar{K}, L = \bar{L}$, όπου $\bar{K}, \bar{L}$ οι δειγματικοί μέσοι για το Κεφάλαιο και την Εργασία. Να υπολογίσετε 90% διαστήματα εμπιστοσύνης για τις προβλέψεις.

ε) Θεωρείστε τα παρακάτω υποδείγματα

$$M1: Q_t = AK_t^{b_1} L_t^{b_2} e^{\varepsilon_t}$$

$$M2: Q_t = AL_t^{b_2} e^{\varepsilon_t}$$

$$M3: Q_t = AK_t^{b_1} e^{\varepsilon_t}$$

$$M4: Q_t = Ae^{\varepsilon_t}$$

Να επιλεγεί το καταλληλότερο υπόδειγμα για την Ελληνική Οικονομία σύμφωνα με (i) το R_{adj}^2 , (ii) το AIC, (iii) το BIC.

Ερώτημα Β. Στο αρχείο `consumption_data_cross_sectional.txt` περιέχονται δεδομένα για την κατανάλωση, C , (στήλη 7) και το εισόδημα, Y , (στήλη 6) 326 ελληνικών νοικοκυριών για το έτος 2004.

α) Για αυτές τις διαστρωματικές παρατηρήσεις υποθέτουμε το ακόλουθο απλό γραμμικό υπόδειγμα

$$C_i = b_0 + b_1 Y_i + \varepsilon_i.$$

Να εκτιμήσετε τα b_0, b_1 με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και να υπολογίσετε 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για αυτά. Τι συμπεράσματα βγάξετε από τα διαστήματα εμπιστοσύνης;

β) Να γίνει ο έλεγχος ($\alpha=5\%$) ετεροσκεδαστικότητας (i) Breusch-Pagan, θεωρώντας ότι η ετεροσκεδαστικότητα περιγράφεται από σχέση $\sigma_i^2 = a^2 Y_i$, $i=1, \dots, 326$, (ii) White. Για τους ελέγχους αυτούς να υπολογίσετε τα αντίστοιχα p-values. Τι συμπεράσματα βγάξετε; Τί διαφορές έχουν οι έλεγχοι αυτοί;

γ) Δεδομένης της ύπαρξης ισχυρής ετεροσκεδαστικότητας του διαταρακτικού όρου ως προς το εισόδημα Y_i , θεωρούμε ότι αυτή περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$\sigma_i^2 = a Y_i$$

Να εκτιμήσετε τα b_0, b_1 με τη μέθοδο weighted least squares (WLS) και να υπολογίσετε 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για αυτά. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά της μεθόδου least squares (LS - μ.ε.τ).

δ) Θεωρήστε ότι η ετεροσκεδαστικότητα περιγράφεται από τη σχέση

$$\sigma_i^2 = a_0 + a_1 Y_i$$

Να εκτιμήσετε τα b_0, b_1 με τη μέθοδο generalized least squares (GLS) και να υπολογίσετε 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για αυτά. Πόσο αλλάζουν τώρα τα αποτελέσματά σας; Τι συμπεράσματα βγάξετε;

ε) Επιπλέον, στη στήλη 5 του αρχείου δεδομένων δίνεται πληροφορία για τον τόπο διαμονής των νοικοκυριών (0: αστική, 1: ημιαστική, 2: αγροτική). Να εκτιμήσετε (σημειακά με μ.ε.τ και με 95% διαστήματα εμπιστοσύνης) ένα γραμμικό υπόδειγμα για τη σχέση κατανάλωσης εισοδήματος που να λαμβάνει υπόψη την επίδραση του τόπου διαμονής των νοικοκυριών. Να ελέγξετε αν η επίδραση του τόπου διαμονής και η αλληλεπίδραση αυτού με το εισόδημα είναι στατιστικά σημαντικές και με βάση αυτό να επιλέξετε το καταλληλότερο γραμμικό υπόδειγμα για αυτά τα δεδομένα.

στ) Για το γραμμικό μοντέλο που θα επιλέξετε, θεωρήστε ότι η ετεροσκεδαστικότητα περιγράφεται από τη σχέση

$$\sigma_i^2 = a_0 + a_1 Y_i$$

Να εκτιμήσετε τα b_0, b_1 με τη μέθοδο generalized least squares (GLS) και να υπολογίσετε 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για αυτά. Πόσο αλλάζουν τα αποτελέσματά σας σε σχέση με αυτά της μ.ε.τ; Τι συμπεράσματα βγάξετε από τη συνολική ανάλυση που έγινε στο ερώτημα Β;

Ερώτημα 3. Θεωρήστε το ακόλουθο γραμμικό υπόδειγμα χρονολογικής σειράς

$$y_t = b_0 + b_1x_{1t} + b_2x_{2t} + \varepsilon_t$$

Στα αρχεία **y** και **X** περιέχονται, αντίστοιχα, οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής και των δύο επεξηγηματικών μεταβλητών για ένα δείγμα $T = 200$ χρονολογικών παρατηρήσεων.

α) Να ελέγξετε αν υπάρχει δομική αλλαγή σε όλους τους συντελεστές του γραμμικού υποδείγματος τη χρονική στιγμή $T_1 = 100$ χρησιμοποιώντας έναν έλεγχο F για τους κατάλληλους γραμμικούς περιορισμούς.

β) Να ελέγξετε αν υπάρχει δομική αλλαγή ξεχωριστά σε καθέναν από τους συντελεστές του γραμμικού υποδείγματος τη χρονική στιγμή $T_1 = 100$ χρησιμοποιώντας (i) κατάλληλη ψευδομεταβλητή χρονικής επίδρασης, (ii) ελέγχους F για τον κατάλληλο γραμμικό περιορισμό κάθε φορά.

γ) Να ελέγξετε αν υπάρχει δομική αλλαγή ταυτόχρονα στους δύο συντελεστές κλίσης του μοντέλου χρησιμοποιώντας έναν έλεγχο F για τους κατάλληλους γραμμικούς περιορισμούς.