**Φροντιστήριο2: Διαιρετότητα – Πρώτοι αριθμοί**

1. Αποδείξτε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί ισχύουν πάντοτε, ισχύουν μερικές φορές, δεν ισχύουν ποτέ:

(α) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και τη διαφορά τους

(β) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και το γινόμενο τους

(γ) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και το πηλίκο τους

(δ) Αν α είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε ο μόνο θετικός διαιρέτης του α και του α+1 είναι ο 1.

2. Ένας τριψήφιος αριθμός διαιρείται με το 37. Α) Τι συμβαίνει για τους αριθμούς που προκύπτουν όταν αλλάξεις κυκλικά τη σειρά των ψηφίων του σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού; Για παράδειγμα αν ο αρχικός τριψήφιος είναι ο 296 παίρνω τους αριθμούς 296, 962, 629, 296. Διατυπώστε μια εικασία και ελέγξτε την ισχύ της. Β) Ισχύει το ίδιο για τετραψήφιους αριθμούς; Γ) αν έχουμε άλλους διαιρέτες άλλους από το 37 ισχύει η εικασία;

1. Υπολογίστε με ανάλυση πρώτων παραγόντων και με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο το ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών: α) 1769 και 2378 β) 5032 και 313764

Βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών α) 306, 357 β) 25, 15

1. i) Στη συγκέντρωση τροφίμων για άπορες οικογένειες συγκεντρώθηκαν 96 πακέτα μακαρόνια, 72 κουτιά γάλα και 48 πακέτα αλεύρι. Πόσα το πολύ ίδια δέματα μπορούν να γίνουν χωρίς να περισσέψει κανένα απ’ τα τρόφιμα που συγκεντρώθηκαν;

ii) Τρεις αντιπρόσωποι μίας εταιρείας συνηθίζουν όταν επιστρέφουν από τα ταξίδια τους να τρώνε μαζί. Αν ο Α χρειάζεται 6 ημέρες για να καλύψει την περιοχή του, ο Β χρειάζεται 9 ημέρες και ο Γ 12 ημέρες, να βρεθεί πόσο συχνά τρώνε μαζί.

1. Έστω α φυσικός αριθμός και ρ θετικός πρώτος αριθμός. Αν ρǀα3, να δείξετε ότι ρ3ǀα3.
2. Να δείξετε ότι κάθε θετικός πρώτος αριθμός με ρ$\geq $5 γράφεται σε μία απ’ τις μορφές ρ=6κ+1 ή ρ=6κ+5
3. Αν α,β ακέραιοι αριθμοί με (α,β)=1 (δηλαδή είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους), να δείξετε ότι (α) (α+β,αβ)=1 και

 (β) (α2+β2, αβ)=1

1. Δίνονται α, β ακέραιοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι 7ǀ(α+5) και 7ǀ(19-β). Να δείξετε ότι 7ǀ(α+β)
2. Να αποδείξετε ότι (α) το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 2,

 (β) το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3.

1. Ανοιχτό πρόβλημα

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

α) Βρες πεντόμινα αριθμών στο παραπάνω τετράγωνο

β) Διερεύνησε αν και πότε το άθροισμα των αριθμών των πεντόμινων που έχεις φτιάξει είναι πολλαπλάσιο του 5

γ) Ποια αφήνουν υπόλοιπα όταν το άθροισμα των στοιχείων τους διαιρεθεί με το 5;

δ) Μπορείς να καταλήξεις σε κάποια γενικά συμπεράσματα; Δικαιολόγησε