20 Οκτ. (1)

Τελικη Ταχυτητα "μικρων" αντικειμενων (αντιστ...

(οριακη ταχυτητα πτωσης)

δυναμη αντιστασης λογω της ατμοσφαιρας.

$\vec{F}_{αν} = -b\vec{v}$ 2ος Νομος: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (1)

Συνολικη Δυναμη: $\sum \vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v}$ (2)

βαρος

mg

(1), (2) $\Longrightarrow m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - b\vec{v}$ (3)

b = θετικη σταθερα

• Θετικη φορα y-αξονα προς τα κατω ετσι ωστε η ταχυτητα των αντικειμενων που πεφτει θετικη.

(3) $m\dfrac{dv}{dt} = mg - bv$ $\qquad |\vec{v}| = v$

$\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{b}{m}v = g$, $v(0) = v_0$ = αρχικη ταχυτητα εισοδου στην ατμοσφαιρα.

$$v(t) = e^{-\frac{b}{m}t}v_0 + \int_0^t e^{-\frac{b}{m}(t-s)} g\, ds$$

$$= e^{-\frac{b}{m}t}v_0 + e^{-\frac{b}{m}t} g \int_0^t e^{\frac{b}{m}s} ds = e^{-\frac{b}{m}t}v_0 + e^{-\frac{b}{m}t} g \frac{m}{b}\left(e^{\frac{b}{m}t} - 1\right)$$

$$= e^{-\frac{b}{m}t}v_0 + \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

Τελικη Ταχυτητα: $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = \dfrac{mg}{b}$.

#

1.7

$a, \lambda > 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall$ λύση της $y' + ay = be^{-\lambda t}$ $\quad y \to 0$, $t \to \infty$.

$f(t) = be^{-\lambda t}$, $\sigma = a$ εφαρμόζουμε την 1.5 (α)

#

1.9 $\quad y' - \frac{1}{2}y = 2\sin t$, $y(0) = \alpha$ τ.ω. $y(t)$ περιοδική.

Λύση

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t}y(0) + \int_0^t e^{\frac{1}{2}(t-s)} 2\sin s\, ds = e^{\frac{1}{2}t}\alpha + 2e^{\frac{1}{2}t}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}s}\sin s\, ds = e^{\frac{1}{2}t}\alpha + 2e^{\frac{1}{2}t} I(t)$$

$$I(t) = \frac{4}{5}\left[1 - e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)\right]$$

$$y(t) = \alpha e^{\frac{1}{2}t} + (2)\left(\frac{4}{5}\right)\left[e^{\frac{1}{2}t} - \left(\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)\right]$$

$$\therefore \left(\alpha + \frac{8}{5}\right)e^{\frac{1}{2}t} - \frac{8}{5}\left(\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right).$$

$$\therefore \quad \alpha = -\frac{8}{5}.$$

#

1.19 $\quad y' = \varepsilon y - \sigma y^3$, $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$

$$y' y^{-3} = \varepsilon y^{-2} - \sigma \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(y^{-2})' = \varepsilon y^{-2} - \sigma, \quad v = y^{-2}$$

$$-\frac{1}{2}v' = \varepsilon v - \sigma \Leftrightarrow v' + 2\varepsilon v = 2\sigma \Leftrightarrow (ve^{2\varepsilon t})' = 2\sigma e^{2\varepsilon t}$$

$$\Rightarrow ve^{2\varepsilon t} = \frac{\sigma}{\varepsilon}e^{2\varepsilon t} + c$$

$$v(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon} + ce^{-2\varepsilon t}, \quad v(0) = \frac{1}{y_0^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon} + c \Rightarrow c = \frac{1}{y_0^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{y^2(t)} = \frac{\sigma}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{y_0^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)e^{-2\varepsilon t}$$

$$y^2(t) = \frac{1}{\frac{\sigma}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{y_0^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)e^{-2\varepsilon t}} \qquad (y_0 \neq 0).$$

Σημ: $y_0 = 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0$.

#

1.23 (a) $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2$, $y_1(t) = -\frac{1}{t}$, $t>0$.

$y(t) = -\frac{1}{t} + u(t)$, $y' = \cancel{\frac{1}{t^2}} + u' = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t}+u\right) + \left(-\frac{1}{t}+u\right)^2$

$$= -\cancel{\frac{1}{t^2}} + \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{t}u + \frac{1}{t^2} + u^2 - \frac{2u}{t}$$

$$= -\frac{3u}{t} + \cancel{\frac{1}{t^2}} + u^2$$

(Bernoulli)

$\therefore\ u' + \frac{3u}{t} = u^2 \implies u'u^{-2} + \frac{3}{t}\frac{1}{u} = 1$

$$-\left(u^{-1}\right)' + \frac{3}{t}\left(u^{-1}\right) = 1$$

$$v' - \frac{3}{t}v = -1 \Rightarrow \left(v t^{-3}\right)' = -t^{-3}$$

$v t^{-3} = \frac{t^{-2}}{2} + c \implies v(t) = \frac{1}{2}t + c\,t^3$

$u(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}t + c t^3}$, $\therefore\ y(t) = -\frac{1}{t} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}t + ct^3}$

Σημ: Για $c=0$ παίρνουμε $y(t) = \frac{1}{t}$ που είναι λύση

Για $c=\infty$ 〃 $y(t) = -\frac{1}{t}$ 〃

#

1.55 $y' + y = \Big(\underbrace{\int_0^1 y\,dt}_{m}\Big)^{1/2}$, $y(0)=1$.

$y'+y = m^{1/2} \implies y(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} m^{1/2} ds = e^{-t} + m^{1/2}e^{-t}\int_0^t e^{s}ds =$

$y(0)=1$ $\qquad = e^{-t} + e^{-t}m^{1/2}\left(e^{t}-1\right) = e^{-t} + m^{1/2}\left[1-e^{-t}\right]$

$m = \int_0^1 y(t)dt = \int_0^1 \left[e^{-t} + m^{1/2}\left(1-e^{-t}\right)\right]dt = \left(1-e^{-1}\right) + m^{1/2}e^{-1}$

$\therefore\ m - m^{1/2}e^{-1} - \left(1-e^{-1}\right) = 0$

$$m^{1/2} = \frac{e^{-1} + \sqrt{e^{-2} + 4\left(1-e^{-1}\right)}}{2}$$

#