

ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

A. ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

<u>0. Εισαγωγή</u>	4
<u>1. Μαθηματικό Περιεχόμενο και Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών</u>	5
2. Μαθηματικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές διεργασίες/ πρακτικές	8
<u>3. Μαθηματικά έργα και μαθηματική δραστηριότητα: επιλογή/σχεδιασμός & διαχείριση στην τάξη</u>	144
<u>4. Μάθηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών</u>	177
<u>5. Βασικές Αρχές της Αξιολόγησης</u>	244
<u>6. Ο κύκλος σχεδιασμού, υλοποίησης και αξιολόγησης της διδασκαλίας ως πλαίσιο ανάπτυξης της διδακτικής πρακτικής και του εκπαιδευτικού</u>	255
Βιβλιογραφία γενικού μέρους	27

B. ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

α) Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση

Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

1. Σημασία του πεδίου

Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

2. Ανάπτυξη των ΠΜΑ του πεδίου Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση 31

3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες των μαθητών 34

4. Ενδεικτικά έργα και Δραστηριότητες 40

5. Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες 50

β) Γεωμετρία, Μέτρηση και Στοιχεία Αναλυτικής Γωμετρίας

Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

οριστεί σελιδοδείκτης.

1. Σημασία του πεδίου

Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

2. Ανάπτυξη των ΠΜΑ του πεδίου Γεωμετρία, Μέτρηση και Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας 59

3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες των μαθητών 69

4. Ενδεικτικά έργα και Δραστηριότητες 82

5. Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες 95

γ) Στοχαστικά Μαθηματικά

104

1. Σημασία του Πεδίου

104

2. Ανάπτυξη των ΠΜΑ του πεδίου των Στοχαστικών Μαθηματικών 112

3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες των μαθητών 117

<u>4. Ενδεικτικά έργα και Δραστηριότητες</u>	<u>123</u>
<u>5. Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες</u>	141
Βιβλιογραφία Ειδικού Μέρους	144

ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

0. Εισαγωγή

Ο Οδηγός στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού για να κατανοήσει τον προσανατολισμό του νέου ΠΣ, να αναγνωρίσει τις αλλαγές που αφορούν στο περιεχόμενο, το μαθησιακό περιβάλλον και τις διδακτικές προσεγγίσεις που αυτό εισάγει και να υποστηρίξει την αξιοποίησή τους στην τάξη. Δεν επιδιώκει να προσφέρει στον εκπαιδευτικό 'συνταγές' για το πώς να δράσει στην τάξη του, καθώς θεωρεί πως απευθύνεται σε έναν εκπαιδευτικό με επαρκή επιστημονική κατάρτιση και επαγγελματική ετοιμότητα να σχεδιάζει τη διδασκαλία του και να λαμβάνει αποφάσεις για την υλοποίησή της με βάση τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα και τις ιδιαίτερες συνθήκες της τάξης του.

Στο πλαίσιο του νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ), ο εκπαιδευτικός αναμένεται να είναι σε θέση να υποστηρίξει αποτελεσματικά όλους τους μαθητές να προσεγγίσουν τις γνώσεις, τη σκέψη και τις αξίες της μαθηματικής επιστήμης που το Πρόγραμμα Σπουδών προτάσσει. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ο Οδηγός φιλοδοξεί να προσφέρει κεντρικές αλλά συγκεκριμένες κατευθύνσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών με σεβασμό στους βαθμούς ελευθερίας που επιβάλλουν η αναγνώριση της πολυπλοκότητάς της, η επιστημονική συγκρότηση του εκπαιδευτικού και η μοναδικότητα του ρόλου του ως ειδικού που διδάσκει και διδάσκεται στην τάξη καθημερινά. Ειδικότερα, επιδιώκει να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να:

- αναγνωρίζει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε διδακτική ενότητα και να τα συνδέει με αυτά που οι μαθητές αναμένεται να έχουν επιτύχει στις προηγούμενες τάξεις ή θα επιτύχουν στις επόμενες
- καθορίζει με τη βοήθεια του ΠΣ τους στόχους του και τα μέσα επίτευξής τους ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών
- επιλέγει και να αναπτύσσει εκπαιδευτικό υλικό, έχοντας επίγνωση των διδακτικών του αποφάσεων και των αποτελεσμάτων που αυτές μπορεί να έχουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών
- σχεδιάζει τη διδασκαλία του αξιοποιώντας έργα και διδακτικά εργαλεία με τρόπους που αναδεικνύουν τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας
- πειραματίζεται με νέες διδακτικές προσεγγίσεις που επιτρέπουν την πολύτροπη πραγματοποίηση των διδακτικών του στόχων αναγνωρίζοντας τα γνωστικά, τα κοινωνικο-πολιτισμικά αλλά και τα κοινωνικο-πολιτικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης

- σχεδιάζει εργαλεία αξιολόγησης της επίτευξης των στόχων του για την ανατροφοδότηση και διαμόρφωση της μάθησης και της διδασκαλίας

Ο Οδηγός περιλαμβάνει ένα *Γενικό μέρος* στο οποίο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, αναλύεται η έννοια της δραστηριότητας, περιγράφονται παραδείγματα πόρων και εργαλείων για τη μάθηση και διδασκαλία, καθώς και παραδείγματα εργαλείων αξιολόγησης που ανταποκρίνονται στις βασικές αρχές αξιολόγησης που θέτει το ΠΣ. Επίσης, περιλαμβάνει ένα *Ειδικό μέρος* στο οποίο, για κάθε θεματικό πεδίο, παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της σημασίας του πεδίου και της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και των δυσκολιών των μαθητών που αφορούν το πεδίο. Επιπλέον, προσφέρονται ενδεικτικά έργα και ενδεικτικές οδηγίες διδακτικής διαχείρισης (ανάπτυξης μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη) που συνδέονται με συγκεκριμένα σημεία της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης ενός ΠΜΑ και ενίοτε της Τροχιάς Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ). Τέλος, προτείνονται πηγές που μπορεί να αξιοποιηθούν.

Ο Οδηγός του εκπαιδευτικού αποτελεί συμπλήρωμα του ΠΣ και μαζί με τα άλλα συνοδευτικά κείμενα του ΠΣ υποστηρίζουν τον εκπαιδευτικό στο σχεδιασμό, την υλοποίηση και την αξιολόγηση της διδασκαλίας του.

1. Μαθηματικό Περιεχόμενο και Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών

Η πρώτη αναγκαία συνθήκη για να μπορεί ο εκπαιδευτικός να μετασχηματίζει την επιστημονική μαθηματική γνώση σε μαθηματική γνώση κατάλληλη για τους μαθητές είναι η γνώση του μαθηματικού περιεχομένου του Προγράμματος Σπουδών. Η γνώση αυτή θα του επιτρέψει να επιλέξει τις κατάλληλες γνωστικές μαθηματικές πρακτικές (π.χ. δημιουργία συνδέσεων, οπτικοποίηση, κλπ), μαθηματικά έργα και πλούσιες μαθηματικές δραστηριότητες (Henningsen & Stein, 1997; Stein & Kim, 2009). Η γνώση του μαθηματικού περιεχομένου του προγράμματος σπουδών οργανώνεται σε θεματικές περιοχές και ενότητες (π.χ. Τετράπλευρα στη Γεωμετρία) και να συνδεθεί με **Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών**. Ως μεγάλη ιδέα θεωρείται μια κεντρική έννοια στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών η οποία συνδέει διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο (NCTM, 2000, σ. 17).

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών ως κατεξοχήν Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται η **Μαθηματική δομή**, η **Απόδειξη**, η **Γενίκευση**, η **Μεταβολή**, η **Ισοδυναμία**, οι **Μετασχηματισμοί** και η **Προσέγγιση-σύγκλιση**.

Η **Μαθηματική δομή** αφορά τον προσδιορισμό γενικών ιδιοτήτων ενός συνόλου οι οποίες εμφανίζονται ως σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων στοιχείων του συνόλου. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι μαθηματικά αντικείμενα όπως αριθμοί, τρίγωνα, εξισώσεις, σύνολα με σχέσεις μεταξύ τους, ή και σχέσεις σχέσεων. Για παράδειγμα, η

αναγνώριση της δομικής μονάδας δημιουργίας μιας κανονικότητας είναι σημαντική για την εύρεση του κανόνα της, όπως στην ακολουθία των περιττών αριθμών.

Η Απόδειξη αφορά τη συλλογιστική διαδικασία, η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσα από μια σειρά διαδοχικών επιχειρημάτων/συλλογισμών καταλήγει σε ένα συμπέρασμα. Η απόδειξη στο Δημοτικό Σχολείο έχει περισσότερο εμπειρικό και διαισθητικό χαρακτήρα, ενώ στο Γυμνάσιο και πολύ περισσότερο στο Λύκειο οι μαθητές καλούνται να εμβαθύνουν προοδευτικά στη διατύπωση εικασιών και στην επαλήθευση ή απόρριψή τους με αυστηρά μαθηματικές διαδικασίες.

Μία επιθυμητή πορεία προς την απόδειξη περιλαμβάνει διαδικασίες διερεύνησης, την διατύπωση εικασιών, τη διαισθητική ή άτυπη αιτιολόγηση, την ανάπτυξη συλλογισμών και τέλος την τυπική απόδειξη (Hanna & de Villiers, 2012). Έτσι, στο Δημοτικό Σχολείο, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το άθροισμα των γωνιών επαρκούς εύρους ειδών τριγώνων με διάφορους πρακτικούς (π.χ. κόβοντας και τοποθετώντας τις γωνίες την μια δίπλα στην άλλη) ή συμβατικούς (π.χ. μετρώντας τις γωνίες με μοιρογνωμόνιο ή σε ψηφιακό περιβάλλον) τρόπους και να οδηγηθούν στην 'εμπειρική και διαισθητική' διαπίστωση ότι είναι 180° .

Κατά την αποδεικτική διαδικασία ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να χρησιμοποιεί ένα γενεσιουργό παράδειγμα (generic example), πολλαπλές αναπαραστάσεις (οπτικοποίηση, πίνακες τιμών, κλπ) και ενδεχομένως χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία για να υποβοηθήσει τους μαθητές στην εύρεση της απόδειξης (Mariotti, 2000). Έτσι, για την απόδειξη της σχέσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}, \alpha \neq 0,$$

μπορεί να προηγηθεί ένα παράδειγμα της μορφής $x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$, καθώς και η

διερεύνηση της αντίστοιχης γραφικής αναπαράστασης με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Αντίστοιχα, στο πλαίσιο του αξιωματικού ορισμού των Πιθανοτήτων, είναι επιθυμητό οι μαθητές να δουν αρχικά τους κανόνες λογισμού των Πιθανοτήτων μέσα από παραδείγματα, στη συνέχεια να εικάσουν τους αντίστοιχους γενικούς κανόνες και τέλος να τους αποδείξουν, ξεκινώντας από τα αξιώματα.

Η Γενίκευση αφορά στην επέκταση ιδιοτήτων των στοιχείων ενός συνόλου στα στοιχεία ενός ευρύτερου συνόλου. Η γενίκευση επιτρέπει στους μαθητές την επέκταση εννοιών ή διεργασιών τις οποίες ήδη έχουν κατανοήσει ή την διατύπωση εικασιών που ενίοτε αποτελούν προ-στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας. Για παράδειγμα, η διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας των φυσικών αριθμών αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα γενίκευσης στο Δημοτικό Σχολείο. Αργότερα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η βασική ιδιότητα των τετραγωνικών ριζών $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$, μπορεί εύκολα να γενικευθεί στη σχέση $\sqrt{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = \sqrt{\alpha_1} \cdots \sqrt{\alpha_n}$, για κατάλληλες υπόριζες ποσότητες.

Επιπλέον, η γενίκευση επίσης αξιοποιείται από τους μαθητές σε ερωτήματα με πιο έντονη μαθηματική πρόκληση, όπως η συμπλήρωση των παρακάτω ισοτήτων:

$$1^3+2^3 = (1+2)^2$$

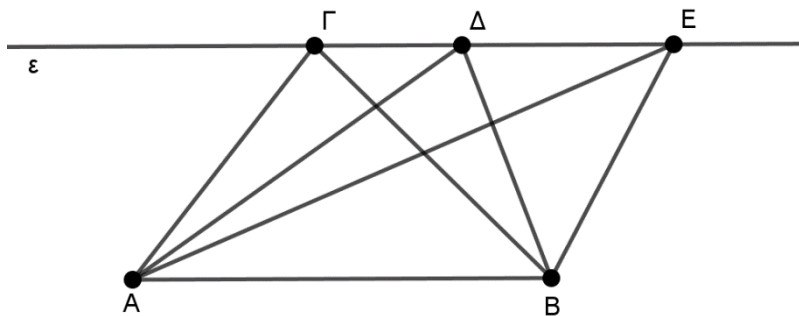
$$1^3+2^3+3^3 = (1+2+3)^2$$

$$\dots = \dots$$

που οδηγεί στην εικασία $1^3+2^3+\dots+v^3=(1+2+\dots+v)^2$, $v \in N^*$ η οποία συνήθως ακολουθείται από την αποδεικτική μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Η Μεταβολή συνδέεται με την αλλαγή ενός μεγέθους. Οι μεταβολές αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα του περιβάλλοντος και της ζωής μας γενικότερα. Η διερεύνηση και η μοντελοποίηση αυτών των αλλαγών αποτελεί κεντρική δραστηριότητα στο πεδίο της Άλγεβρας και των Στοχαστικών Μαθηματικών. Η μεταβολή εμφανίζεται στο Πρόγραμμα Σπουδών από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού με την αναγνώριση και διερεύνηση σχέσεων μεταξύ μεγεθών και αναπτύσσεται στις τελευταίες τάξεις με τη μελέτη ειδικών περιπτώσεων συμμεταβολής, όπως είναι τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο η έννοια της μεταβολής μορφοποιείται στην Άλγεβρα με γραμμικές ή μη-γραμμικές συναρτήσεις καθώς και με την έννοια του ρυθμού μεταβολής στα μαθηματικά των τελευταίων τάξεων. Προτείνεται, η αξιοποίηση της έννοιας της μεταβολής στην τάξη να συνδέεται με πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα που να ενδιαφέρουν τους μαθητές, προερχόμενα από διαφορετικά πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας. Στα Στοχαστικά Μαθηματικά, η μεταβολή αποκτά μια πιο γενική μορφή καθώς δεν μπορεί κανείς να υπολογίσει πώς ακριβώς μεταβάλλεται ένα μέγεθος όταν μεταβάλλεται κάποιο άλλο. Μπορούμε όμως να ποσοτικοποιήσουμε χαρακτηριστικά της συμμεταβολής με τις έννοιες της συν-διακύμανσης και του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης. Με βάση τις τιμές αυτών των δεικτών διερευνάται η προσαρμογή ενός στατιστικού μοντέλου (π.χ. ευθεία παλινδρόμησης) στα δεδομένα ώστε να μπορούμε να διατυπώσουμε πώς αναμένουμε να ανταποκριθεί μια μεταβλητή στις μεταβολές μιας άλλης. Επιπλέον, στη Στατιστική, η ιδέα της **μεταβλητότητας** συνδέεται με την ποικιλία και το εύρος των δεδομένων που αφορούν σε φαινόμενα, καταστάσεις και ποσότητες του καθημερινού κόσμου. Η ιδέα της μεταβλητότητας συνδέεται με εκείνη της αβεβαιότητας, που βρίσκεται στο επίκεντρο των Πιθανοτήτων, μέσω της διατύπωσης προβλέψεων με σκοπό τη λήψη αποφάσεων.

Η ισοδυναμία αφορά την αμφίδρομη συσχέτιση δύο μαθηματικών αντικειμένων. Η ισοδυναμία διατρέχει όλους τους κύκλους σπουδών στην Αριθμητική/Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Στην Αριθμητική/Άλγεβρα έχουμε την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων και των ισοδύναμων αλγεβρικών παραστάσεων όπως είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις. Στην Γεωμετρία η ισοδυναμία εμφανίζεται στα ισεμβαδικά σχήματα, όπως για παράδειγμα τα τρίγωνα που έχουν ίδια βάση και η τρίτη κορυφή κινείται σε μια παράλληλη προς τη βάση ευθεία (Σχήμα 1).



Σχήμα 1. Η ευθεία ε είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, επομένως τα τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΑΒ και ΕΑΒ είναι ισοδύναμα.

Οι Μετασχηματισμοί αφορούν τη διαδικασία με την οποία μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμοί ή συναρτησιακές σχέσεις ή γεωμετρικά σχήματα, μπορούν να μετατραπούν σε μία διαφορετική μορφή μέσω μαθηματικής επεξεργασίας. Οι Μετασχηματισμοί συναντώνται στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα ένας κλασσικός μετασχηματισμός είναι η απλοποίηση μιας αριθμητικής (π.χ. $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$) ή μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. $\frac{x^2-1}{x+1} + 1 = x$, για κάθε $x \neq -1$). Στη

Γεωμετρία, η ομοιότητα τριγώνων, για παράδειγμα, είναι ένας μετασχηματισμός που διαθέτει αμετάβλητα και μεταβλητά στοιχεία του μαθηματικού αντικειμένου (τριγώνου) που υπόκειται στον μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες των τριγώνων ενώ μεταβάλλονται με βάση το λόγο ομοιότητας τα μήκη των πλευρών και τα εμβαδά των τριγώνων.

Η προσέγγιση-σύγκλιση συνδέεται με άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου στην Ανάλυση. Ξεκινάει από το Δημοτικό Σχολείο, όπου έχουμε προσέγγιση εκατοστού, χιλιοστού κ.λ.π., αργότερα στο Γυμνάσιο και στη γενική παιδεία στο Λύκειο έχουμε προσέγγιση ενός άρρητου με ρητό (π.χ. ο π). Οι προσεγγίσεις αυτές είναι στατικές και έχουν ένα συγκεκριμένο σφάλμα. Η έννοια της προσέγγισης ολοκληρώνεται στα μαθήματα προσανατολισμού με τη σύγκλιση όπου η προσέγγιση αποκτά δυναμικό χαρακτήρα (οσοδήποτε κοντά).

2. Μαθηματικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές διεργασίες/πρακτικές

Βασική επιδίωξη του νέου ΠΣ των Μαθηματικών είναι η υποστήριξη της εμπλοκής όλων των μαθητών σε κρίσιμες διεργασίες κατανόησης και ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και σκέψης. Οι διεργασίες αυτές διέπουν και χαρακτηρίζουν το 'μαθηματικό γίνεσθαι' και το 'μαθηματικώς πράττειν' και, κατά συνέπεια, διαδραματίζουν

σημαντικό ρόλο στο 'μαθηματικώς μανθάνειν και διδάσκειν'. Διακρίνονται στις **αμιγώς μαθηματικές πρακτικές**, που συνδέονται με τις πρακτικές και τους λόγους (discourses) ανάπτυξης της επιστήμης των μαθηματικών και τις **κοινωνικο-πολιτισμικο-συναισθηματικές πρακτικές** που χαρακτηρίζουν τις πρακτικές και τους λόγους συμμετοχής των ατόμων σε αυτήν την ανάπτυξη.

Στην ενότητα αυτήν παρουσιάζονται οι πρακτικές των δυο παραπάνω ομάδων σε μια προσπάθεια σαφούς οριοθέτησης του περιεχομένου και της λειτουργικότητάς τους στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη στα μαθηματικά. Καθεμιά τους έχει μια μοναδική εστίαση, αλλά, ταυτόχρονα αλληλοεπιδρά με τις άλλες, όταν τίθεται σε λειτουργία.

(2α). Μαθηματικές διεργασίες και Μαθηματικές πρακτικές

Οι αμιγώς μαθηματικές πρακτικές περιλαμβάνουν την δημιουργία συνδέσεων, τον συλλογισμό και την επιχειρηματολογία, μαθηματική επικοινωνία, οπτικοποίηση, επιλογή και χρήση εργαλείων και επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, γνωστική ενημερότητα και παρουσιάζονται στη συνέχεια.

(i) *Δημιουργία συνδέσεων*: Η πρακτική της δημιουργίας συνδέσεων αφορά στην παροχή ευκαιριών στους μαθητές να συνειδητοποιούν:

α) σχέσεις μεταξύ διαφόρων μαθηματικών εννοιών, αναπαραστάσεων και διαδικασιών καθώς και των διαφορετικών μαθηματικών πεδίων (γεωμετρία, άλγεβρα, στοχαστικά μαθηματικά). Για παράδειγμα, τα παιδιά μπορεί να συζητήσουν τη σχέση ανάμεσα στο κλάσμα $\frac{1}{4}$, τον δεκαδικό 0.25, και το ποσοστό 25%, να ερμηνεύουν γεωμετρικά μια αλγεβρική παράσταση (π.χ. την $1x+21$ ως απόσταση) ή να συνδέουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (γεωμετρία) με τους πίνακες (άλγεβρα) .

β) σχέσεις των μαθηματικών με την καθημερινότητα και με άλλες επιστήμες. Ο εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να εντάσσει στη διδασκαλία του τη χρήση πλαισίων από την καθημερινότητα που έχουν νόημα για τα παιδιά (π.χ. αυθεντικά προβλήματα, παιχνίδια, μοντέλα λειτουργίας καθημερινών καταστάσεων), αλλά και πλαίσια που αναδεικνύουν τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα (π.χ. φυσικές επιστήμες, λογοτεχνία, φυσική αγωγή).

(ii) *Συλλογισμός & επιχειρηματολογία*: Η ανάπτυξη συλλογισμού και επιχειρηματολογίας διευκολύνεται όταν οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τον τρόπο λύσης που προτείνουν σε ένα μαθηματικό ερώτημα. Η αξιολόγηση των επιχειρημάτων που αναπτύσσουν τα ίδια τα παιδιά αλλά και οι συμμαθητές τους, η δικαιολόγηση ενός αποτελέσματος που δημιουργεί έκπληξη, η ανάλυση και σύγκριση διαφορετικών τρόπων επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, η διατύπωση ερωτημάτων και εικασιών, η παρουσίαση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, η κατασκευή μιας απόδειξης, η γενίκευση μιας ιδέας από συγκεκριμένα παραδείγματα και η εξαγωγή

συμπερασμάτων αποτελούν κρίσιμα στοιχεία της ανάπτυξης της συγκεκριμένης πρακτικής. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να παρουσιάζουν τον τρόπο λύσης τους, να επιχειρηματολογούν γι' αυτόν ανεξάρτητα από την ορθότητα του αποτελέσματος, να εξηγούν πως σκέφτηκαν ή να αναπτύσσουν επιχειρήματα για να πείσουν ένα συμμαθητή τους ότι έχει κάνει λάθος.

(iii) *Μαθηματική επικοινωνία*: Η επικοινωνία σχετίζεται με την ικανότητα των παιδιών να μοιράζονται τις σκέψεις τους, τις ερωτήσεις τους, τις ιδέες τους και τις λύσεις τους χρησιμοποιώντας τον προφορικό λόγο, τη γραπτή συμβολική γλώσσα των μαθηματικών, αλλά και μη λεκτικές μορφές επικοινωνίας. Η μετάφραση της φυσικής γλώσσας σε συμβολική γλώσσα και αντίστροφα και η έμφαση στην ακρίβεια της μαθηματικής γλώσσας βοηθά την επικοινωνία μεταξύ των μελών της τάξης. Για παράδειγμα, η σωστή χρήση του συμβόλου της ισότητας, η επιλογή των μονάδων μέτρησης, η απόδοση τίτλων σε στατιστικά διαγράμματα, η διατύπωση ορισμών. Οι μαθητές κατά την επικοινωνία τους στις ομάδες εργασίας και στην ολομέλεια της τάξης μπορούν να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο σκέψης τους και τον τρόπο σκέψης των συνομιλητών τους, να αναθεωρήσουν τις στρατηγικές τους, να οδηγηθούν στην αποσαφήνιση των ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που ανταλλάσσονται και να προχωρήσουν σε βαθύτερη κατανόηση εννοιών και διαδικασιών. Όταν ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τα παιδιά να συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία επικοινωνώντας τη σκέψη τους, τα αποτελέσματα στην κατανόηση των μαθηματικών είναι πολύ θετικά (Ing et al., 2015).

(iv) *Οπτικοποίηση*: Η πρακτική της οπτικοποίησης συνδέεται με τη χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων που ο μαθητής μπορεί να αξιοποιήσει στην επίλυση προβλήματος καθώς και για να επικοινωνήσει τη σκέψη του. Για παράδειγμα, όταν τα παιδιά στις μικρές ηλικίες κατασκευάζουν ένα εικονόγραμμα και ένα ραβδόγραμμα με βάση ένα πίνακα δεδομένων δίνεται η δυνατότητα να συνδέσουν και να συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των δεδομένων και να τους αξιολογήσουν ως προς την προσφορά τους. Επίσης, η χρήση της αριθμογραμμής είναι ένα κατάλληλο αναπαραστατικό εργαλείο για υπολογισμούς και ανάδειξη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, ενώ η χρήση και κατασκευή χαρτών βοηθούν την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης των μαθητών.

(v) *Επιλογή και χρήση εργαλείων*: Τα παιδιά ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν ποικιλία χειραπτικών, τυπικών και ψηφιακών εργαλείων. Τα χειραπτικά εργαλεία που δίνουν τη δυνατότητα στα παιδιά να συνδέσουν την άτυπη με την τυπική γνώση, μπορεί να είναι καθημερινά αντικείμενα από το περιβάλλον των μαθητών (π.χ. μολύβια, χαρτόνι), ή πολιτισμικά εργαλεία (π.χ. νομίσματα, ζυγαριά), ή εξειδικευμένα εργαλεία (π.χ. αριθμητήριο). Η χρήση τους μπορεί να διαφέρει ως προς τη μαθηματική δράση που υποστηρίζουν. Για παράδειγμα, το χειραπτικό υλικό μπορεί να είναι ένα μοντέλο αναπαράστασης μιας διαδικασίας (π.χ. το μοντέλο της ζυγαριάς), ένα μέσο διερεύνησης μιας σχέσης (π.χ. οι γεωπίνακες για τη διερεύνηση της σχέσης εμβαδού και περιμέτρου),

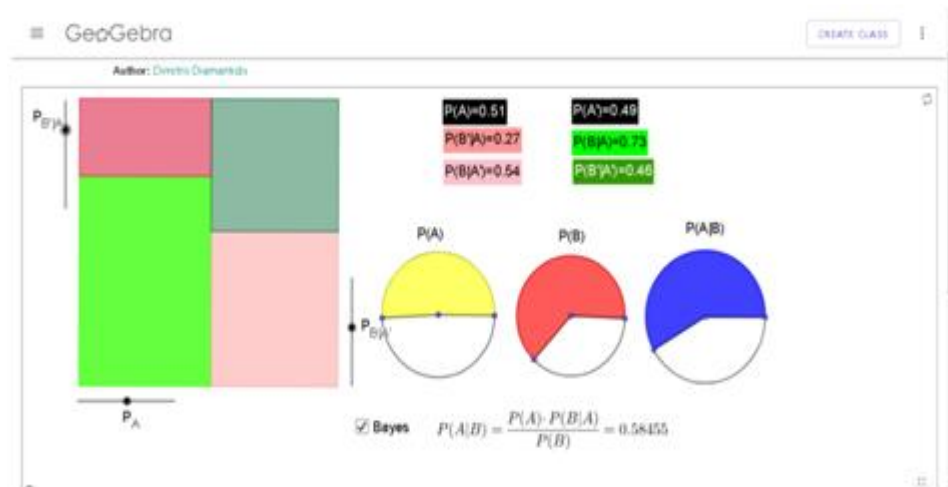
ή ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία για σχεδιασμό, κατασκευή, σύγκριση γεωμετρικών αντικειμένων (διαβήτη, όργανα μέτρησης).

Αντίστοιχα, τα ψηφιακά εργαλεία διαθέτουν χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη μαθηματική δραστηριότητα και την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων, όπως:

α) Δυνατότητες διερεύνησης και πειραματισμού. Για παράδειγμα, το μοντέλο της χαλασμένης αριθμομηχανής, το μοντέλο του άβακα και το μοντέλο ενός παντογράφου επιτρέπουν την ανάπτυξη διερευνητικών έργων και τον πειραματισμό.

β) Δυνατότητες δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, στο περιβάλλον επιτρέπει στους μαθητές να ασχοληθούν με γεωμετρικές κατασκευές και να τις χειριστούν με δυναμικό τρόπο, π.χ. να σύρουν σημεία, να αυξομειώσουν το μέγεθος ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών, να παρατηρήσουν μεταβολές και να διατυπώσουν εικασίες.

γ) Αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις: οι μεταβολές σε μια αναπαράσταση επιφέρουν αυτομάτως μεταβολές και στις υπόλοιπες διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, στην παρακάτω εφαρμογή η αλλαγή των τιμών των πιθανοτήτων $P(A)$, $P(B|A)$ και $P(B|A')$ μέσω δυναμικού χειρισμού επιφέρει αλλαγές τόσο στις «πίτες» των πιθανοτήτων $P(A)$, $P(B)$ και $P(A|B)$, όσο και στο τετράγωνο των συμπληρωματικών ενδεχομένων.



δ) Πολλαπλές δυνατότητες έκφρασης μαθηματικών νοημάτων. Για παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί η γλώσσα προγραμματισμού Logo στα πλαίσια περιβαλλόντων Γεωμετρίας της Χελώνας για την ανάπτυξη παραμετρικών ή μη διαδικασιών με στόχο την κατασκευή και διερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων.

Καθώς τα έργα μετασχηματίζονται σε δραστηριότητα από τους συμμετέχοντες στην τάξη των μαθηματικών, τα εργαλεία μπορούν να στηρίξουν τη δημόσια παρουσίαση εικασιών και επιχειρημάτων από τους μαθητές (Bussi, 2011). Η αξιοποίηση ποικιλίας εργαλείων για το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και η συζήτηση πάνω στις ομοιότητες και τις

διαφορές τους μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις μαθηματικές έννοιες, τις διαδικασίες και τις αναπαραστάσεις τους.

(vi) *Επίλυση προβλήματος*: Η επίλυση προβλήματος συνδέεται με την συμμετοχή των μαθητών σε ένα έργο που δεν γνωρίζουν εκ των προτέρων τον τρόπο λύσης του, διαφορετικά το έργο αφορά μια εφαρμογή ή άσκηση (NCTM, 2000). Επομένως, οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να προτείνουν τις δικές τους λύσεις σε νέες προβληματικές καταστάσεις, αλλά και σε προβλήματα που έχουν διατυπώσει οι ίδιοι. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος, όπως για παράδειγμα να το αναπαραστήσουν με υλικά, να χρησιμοποιήσουν ένα πίνακα με τις πληροφορίες του προβλήματος, να επαναδιατυπώσουν το πρόβλημα, να το απλοποιήσουν, να κάνουν μια υπόθεση, να εργαστούν αντίστροφα (Fan & Zhu, 2007). Η διατύπωση νέων προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές τους δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες που προσεγγίζουν, αξιοποιώντας δημιουργικά διαφορετικά πλαίσια από τον κόσμο των εμπειριών τους (English, 1997; Cai & Leikin, 2020).

(vii) *Μοντελοποίηση*: Η μαθηματική μοντελοποίηση προσφέρει τη δυνατότητα σύνδεσης της πραγματικής ζωής με τα μαθηματικά. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέγει έργα από την καθημερινότητα του μαθητή, την κοινωνία και τον χώρο εργασίας και να βοηθά στη μετάφρασή τους στη γλώσσα των μαθηματικών (π.χ. η κατασκευή μιας εξίσωσης για την επίλυση ενός καθημερινού προβλήματος, η επιλογή ενός δειγματικού χώρου και η απόδοση πιθανοτήτων στα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, η χρήση της γεωμετρίας σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού). Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει τόσο τη διαδικασία της αποπλαισίωσης μιας κατάστασης με σκοπό την συμβολική αναπαράστασή της και τον χειρισμό των συμβόλων όσο και την αναφορά στην αρχική κατάσταση για την ερμηνεία των συμβόλων και των αποτελεσμάτων (επανα-πλαισίωση). Για παράδειγμα, στις συνθετικές εργασίες, οι μαθητές καλούνται οι ίδιοι να διαμορφώσουν, να διερευνήσουν και να αξιολογήσουν μαθηματικά μοντέλα με τη χρήση χειραπτικών ή/και ψηφιακών εργαλείων.

(viii) *Μεταγνωστική ενημερότητα*: Οι μαθητές αναπτύσσουν μεταγνωστική ενημερότητα όταν θέτουν ερωτήματα στον εαυτό τους όπως: Τι κάνω; Γιατί το κάνω; Πώς με βοηθάει αυτό; Οι εκπαιδευτικοί υποστηρίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν μεταγνωστικές ικανότητες, όταν ενισχύουν το 'σκέφτομαι φωναχτά' κατά τη λύση ενός προβλήματος και τους δίνουν την ευκαιρία να αναστοχαστούν σε ένα πρόβλημα με ερωτήματα όπως: Γιατί χρησιμοποίησες αυτόν τον τρόπο; Το σκέφτηκες πρώτα με άλλο τρόπο; Έχεις λύσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα;

(2β). Κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές

Οι κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης, όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η μαθηματική ταυτότητα μάθησης και ο μαθηματικός γραμματισμός και αφορούν σε δεξιότητες και ικανότητες των μαθητών:

- Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά
- Να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις
- Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση
- Να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού, καθώς και την αξία της για την ανθρώπινη δραστηριότητα διαχρονικά.
- Να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά. Ένα “μαθηματικά εγγράμματο” άτομο αντιλαμβάνεται ότι οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν επινοηθεί για τη μελέτη φαινομένων του περιβάλλοντος και την επίλυση προβλημάτων. Διαθέτει, επιπλέον, την ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο-και εξω-μαθηματικών καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίζουν κάποιο ρόλο.

Οι κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές αφορούν σε νόρμες αναγνώρισης και διαχείρισης συναισθημάτων και συμπεριφορών, διαμόρφωσης και διατήρησης θετικών σχέσεων και λήψης υπεύθυνων αποφάσεων. Υποστηρίζουν τους μαθητές στη μελέτη των μαθηματικών, καθώς συντελούν στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης, της κριτικής σκέψης και, εν τέλει, στην ανάπτυξη θετικής ταυτότητας μάθησης των μαθηματικών. Ειδικότερα, μέσω των κοινωνικο-συναισθηματικών νορμών οι μαθητές:

- Αναπτύσσουν θετικά κίνητρα, αυτοπεποίθηση, εστίαση στις θετικές πτυχές των εμπειριών, υπομονή και επιμονή στην αντιμετώπιση οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης
- Εκτιμούν την ομορφιά και την κομψότητα των μαθηματικών
- Αναπτύσσουν πνεύμα περιέργειας και αγάπη για τα μαθηματικά

- Αναπτύσσουν και ασκούν δεξιότητες που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων σεβόμενοι την διαφορετικότητα στη σκέψη και έκφραση
- Αξιοποιούν δεξιότητες αξιολόγησης, ελέγχου και αυτογνωστικής ρύθμισης της προόδου τους προκειμένου να οικοδομήσουν ισχυρές ταυτότητες μαθητευομένων των μαθηματικών.
 - Αναγνωρίζουν και διαχειρίζονται διαφορετικού τύπου, ποιότητα και έντασης συναισθήματα και το άγχος με τρόπο αποτελεσματικό για τους ίδιους και τη μάθηση.

Οι κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές που αναφέρονται στο ΠΣ προωθούνται όταν οι εκπαιδευτικοί:

- Διατηρούν υψηλές προσδοκίες για όλους τους μαθητές.
- Βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν θετικές στάσεις για τα μαθηματικά ενισχύοντας τον ενθουσιασμό τους κατά την ενασχόλησή τους με αυτά.
- Επιλέγουν έργα στα οποία μπορούν να εμπλακούν όλοι οι μαθητές.
- Υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης των μαθητών καλλιεργώντας την πεποίθηση ότι όλοι μπορούν να τα καταφέρουν μέσω της προσπάθειας.
- Εμπλέκουν όλους τους μαθητές στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και μαθηματικής επικοινωνίας.
- Αναδεικνύουν τη σημασία των Μαθηματικών στη λήψη ορθολογικών αποφάσεων ακόμα και σε συνθήκες αβεβαιότητας
- Παροτρύνουν τους μαθητές να επιμένουν στην επίλυση ενός προβλήματος.
- Βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν τη χρήση των μαθηματικών στην καθημερινότητά τους και το ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον τους.
- Διευκολύνουν τη συνεργασία σε ομάδες, υποστηρίζοντας συνήθειες όπως: να ακούν και να προσπαθούν να κατανοούν τις εξηγήσεις των συμμαθητών τους, να συζητούν τις διαφωνίες τους στην ομάδα, να καταλήγουν σε κοινά αποδεκτές λύσεις.

3. Μαθηματικά έργα και μαθηματική δραστηριότητα: επιλογή/σχεδιασμός & διαχείριση στην τάξη

Μαθηματικό έργο και μαθηματική δραστηριότητα: Το μαθηματικό έργο αφορά στην εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τις δράσεις που αναλαμβάνουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να φέρουν σε πέρας ένα έργο που τους έχει ανατεθεί. Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη και έχει ως στόχο να προκαλέσει μαθηματική

δραστηριότητα. Αν και ένα έργο προορίζεται να προκαλέσει συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα, πρέπει να γίνει διάκριση ανάμεσα: α) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό σχεδιάστηκε αρχικά, β) στο μαθηματικό έργο, όπως παρουσιάστηκε από τον εκπαιδευτικό μέσα στην τάξη, γ) στο μαθηματικό έργο, ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ των μαθητών, δ) στο μαθηματικό έργο, όπως αυτό τελικά διαμορφώθηκε ως συνισταμένη των δράσεων εκπαιδευτικών και μαθητών (Margolinas, 2013, Caleja, 2013) στο πλαίσιο της σχολικής τάξης. Ένα μαθηματικό έργο συνδέεται με συγκεκριμένα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα, και στοχεύει όχι μόνο στην ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών γνώσεων, αλλά και στην καλλιέργεια μαθηματικών διεργασιών (π.χ. οπτικοποίηση, μοντελοποίηση κλπ.) και κοινωνικο-πολιτισμικών και κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών (π.χ. σύνδεση των μαθηματικών με τον πολιτισμό) (Schoenfeld, 2020).

Επιλογή/σχεδιασμός: Ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα επιλέξει ή θα σχεδιάσει ένα μαθηματικό έργο ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών του και, στη συνέχεια, θα το διαφοροποιήσει κατά τη διδασκαλία, με βάση την εξέλιξή της, στο πλαίσιο μιας κυκλικής διαδικασίας σχεδιασμού/τροποποίησης – εφαρμογής στην τάξη – αξιολόγησης του μαθηματικού έργου. Ένα έργο μπορεί να οδηγήσει σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα, όταν προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να μαθητεύσουν σε μια ποικιλία μαθηματικών πρακτικών και να μνηθούν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως η απόδειξη και η γενίκευση ή η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί) (Τζεκάκη, 2015).

Βασικό κριτήριο για την επιλογή/τροποποίηση ή το σχεδιασμό εξ αρχής ενός μαθηματικού έργου είναι οι μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές που επιδιώκεται να αναπτύξει ο μαθητής. Τα μαθηματικά έργα είναι σημαντικό να βρίσκονται κοντά στα ενδιαφέροντα ή/και τις εμπειρίες των μαθητών, να συνδέονται, όταν είναι δυνατό, με την ανθρώπινη δράση και δραστηριότητα, να τους εμπλέκουν στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού (Artigue, 2012). Ταυτόχρονα, να θέτουν μαθηματικές προκλήσεις αλλά και να βρίσκονται εντός των δυνατοτήτων των μαθητών. Οι μαθητές χρειάζεται, δηλαδή, να διαθέτουν τα εργαλεία και την πρότερη γνώση, ώστε να εμπλακούν δημιουργικά σε ένα μαθηματικό έργο. Μαθηματικά έργα με κυμαινόμενο βαθμό δυσκολίας και ποικίλους τρόπους αντιμετώπισης προσφέρουν τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να εμπλακούν στη διεκπεραίωσή τους. Τέλος, μια ποικιλία πόρων (αναπαραστάσεις, μοντέλα, χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία κλπ.) μπορεί να αξιοποιηθεί στο πλαίσιο ενός μαθηματικού έργου, ώστε να μετασχηματιστούν από τους μαθητές σε εργαλεία διερεύνησης, συλλογισμού και επικοινωνίας των μαθηματικών εννοιών. Ο κατάλληλος σχεδιασμός και η κατάλληλη διδακτική διαχείριση των μαθηματικών έργων στην τάξη συντελούν καθοριστικά στο να μειωθεί η απόσταση μεταξύ των προθέσεων

του εκπαιδευτικού και της μαθηματικής δραστηριότητας – και συνεπώς τη μάθησης - που τελικά αναπτύσσουν οι μαθητές (Ainley & Margolinas, 2013).

Διδακτική διαχείριση: Δύο σημεία φαίνεται να είναι καθοριστικά ως προς τη διδακτική διαχείριση ενός μαθηματικού έργου:

- η έμφαση που δίνεται από την πλευρά του εκπαιδευτικού στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα και μάθηση και όχι απλά στη διεκπεραίωση του έργου,
- η δυνατότητα του εκπαιδευτικού να υποστηρίζει και να συντονίζει το διάλογο και τη συζήτηση μέσα στην τάξη (Clarke & Mesiti, 2013).

Κατά την εφαρμογή ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη μπορούν να διακριθούν, σύμφωνα με τους Trevisan, Ribeiro, και da Ponte, (2020) τρία στάδια: Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και να το συνδέσουν με τις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές στην επιλογή και χρήση κατάλληλων πόρων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) (González, & Eli, 2017).

Στο δεύτερο στάδιο της αυτόνομης εργασίας, οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες και ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά μαζί τους. Καλό είναι ο εκπαιδευτικός να έχει προβλέψει κατά το σχεδιασμό του μαθηματικού έργου πιθανές στρατηγικές των μαθητών και πιθανές παρανοήσεις και να έχει σκεφτεί τρόπους και μεθόδους για να τις αναγνωρίσει και να τις αντιμετωπίσει. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποστηρίξει το διάλογο και τη συζήτηση στις ομάδες βοηθώντας τα παιδιά να αποσαφηνίσουν τις ιδέες τους με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με διευκρινιστικές ερωτήσεις ή ζητώντας από ένα μαθητή να αναδιατυπώσει τις ιδέες ενός άλλου μαθητή της ομάδας του. Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει έμφαση στη συλλογιστική σκέψη των παιδιών και στη νοερή επιχειρηματολογία με ερωτήσεις, όπως: «Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον συμμαθητή σας; Γιατί;», «Τι θα γινόταν αν...; Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;» «Η απάντηση που δώσατε έχει νόημα; Είστε σίγουροι ότι η απάντηση που δίνετε είναι σωστή; Πώς το ξέρετε;», «Υπάρχει άλλη σωστή απάντηση;», «Υπάρχει άλλος τρόπος να βρούμε τη λύση; Πού διαφέρουν οι διαφορετικές στρατηγικές που ακολουθήσατε;» κλπ. Όταν παρέχει οδηγίες ο εκπαιδευτικός ενδείκνυται να εστιάζει κυρίως στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν της μαθηματικής διερεύνησης. Για παράδειγμα μπορεί να απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις/υποδείξεις όπως: «Ποια είναι τα στοιχεία-κλειδιά τους προβλήματος;», «Τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό; Διατηρήστε όλες τις μεταβλητές πλην μιας σταθερές και αρχίστε να πειραματίζεστε με αυτή. Ποιος ο ρόλος της; Ακολουθήστε τη ίδια διαδικασία για κάθε μεταβλητή» κλπ. (Van de Walle et al., 2014).

Στο τρίτο στάδιο της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της δραστηριότητάς τους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που προσεγγίστηκαν (Dooley, 2009; Stein et al., 2008), ενώ παράλληλα επικυρώνει και αξιολογεί τη μαθηματική γνώση των μαθητών (Morgan, 2000). Παρακολουθώντας την εξέλιξη των στρατηγικών των μαθητών σε όλα τα στάδια της ενασχόλησής τους με το μαθηματικό έργο ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιολογήσει και την επίδραση του συγκεκριμένου έργου (Ainley & Margolinas, 2013) στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

4. Μάθηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών

(4α). Η τροχιά μάθησης και διδασκαλίας: Πρόκειται για περιγραφές της σκέψης και μάθησης ενός μαθητή σε μια συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή καθώς και την αντίστοιχη υποτιθέμενη διαδρομή που ακολουθείται μέσα από μια σειρά διδακτικών έργων που σκοπό έχουν να ενεργοποιήσουν τα διαδοχικά αυτά στάδια ανάπτυξης. Με αυτόν τον τρόπο επιδιώκεται να ανιχνευτεί και να υποβοηθηθεί η πορεία ανάπτυξης των σταδίων σκέψης ενός μαθητή επιτυγχάνοντας συγκεκριμένους στόχους (Clements & Sarama, 2004, p. 83).

Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι δεξιότητες και ικανότητες του μαθητή ακολουθούν μια εξελικτική πορεία η οποία επηρεάζεται από παράγοντες όπως η διδασκαλία, η μαθηματική ωρίμανση αλλά και υποκειμενικές συνιστώσες όπως οι προδιαθέσεις, οι στάσεις και τα ενδιαφέροντα. Με μια τροχιά γίνεται εφικτός ο χαρακτηρισμός των μαθησιακών στοιχείων που πλαισιώνουν μια πορεία μάθησης από ένα σημείο σε ένα άλλο καθώς και η περιγραφή των κατάλληλων ενδεχομένως διδακτικών πράξεων προκειμένου να διευκολυνθεί αυτή η μετάβαση. Οι τροχιές επομένως είναι συνυφασμένες με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους ή μαθησιακά αποτελέσματα και με τους τρόπους που οι μαθητές εφαρμόζουν τις προσδοκώμενες δεξιότητες και ικανότητες. Ο τρόπος χρήσης τους είναι διττός:

- οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν συγκεκριμένες σειρές από μαθηματικά έργα και δραστηριότητες προκειμένου να ενεργοποιήσουν τις νοητικές διεργασίες που οδηγούν προς την επιδιωκόμενη κατεύθυνση (ή χρησιμοποιούν το ΠΣ και διδακτικά υλικά που έχουν σχεδιαστεί βασιζόμενα στην ίδια σειρά υποθέσεων).
- η σκέψη και μάθηση των μαθητών σε μια συγκεκριμένη περιοχή των Μαθηματικών, διέρχεται μέσα από τα διαδοχικά επίπεδα που θα οδηγήσουν στο προτεινόμενο μαθησιακό αποτέλεσμα με την κατάλληλη διδακτική διαχείριση.

Στο Ειδικό μέρος του Οδηγού παρουσιάζονται παραδείγματα της εξελικτικής πορείας ανάπτυξης ορισμένων ΠΜΑ και ενίοτε ΤΜΔ. Έτσι, ο εκπαιδευτικός μπορεί να διευκολυνθεί στον σχεδιασμό της διδασκαλίας του και ειδικότερα:

- στην επισήμανση των κύριων στόχων που είναι αναγκαίο να επιτευχθούν
- στις αναγκαίες προηγούμενες γνώσεις που απαιτούνται
- στις συνδέσεις με επόμενες έννοιες και την κατοπινή εξέλιξη των εννοιών που διδάσκονται

(4β). Διδακτικές προσεγγίσεις/ στρατηγικές (teaching strategies): Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να πετύχει στην πραγμάτωση των στόχων ενός προγράμματος σπουδών, είναι αναγκαίο να αναζητά και να αξιοποιεί ποικιλία πρακτικών και εργαλείων για την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος στη σχολική τάξη. Η επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης απαιτεί προσεκτική αναζήτηση, καθώς δεν υπάρχει μια γενική συνταγή για όλες τις περιπτώσεις. Όσο εγγύτερη στις ανάγκες των μαθητών είναι μια διδακτική πρακτική, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να οδηγήσει σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην ενότητα αυτή συζητούνται διδακτικές προσεγγίσεις και προσανατολισμοί της διδακτικής πράξης που υποστηρίζονται από τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών.

(i) Διδασκαλία βασισμένη στην έρευνα (Research based teaching)

Ως διδασκαλία που βασίζεται στην έρευνα εννοούμε τη διδασκαλία η οποία σχεδιάζεται με βάση ευρήματα της έρευνας που αφορούν στη φύση της μαθηματικής σκέψης και μάθησης στη σχολική τάξη καθώς και τις αντίστοιχες προτάσεις διδακτικής διαχείρισης. Ο διδακτικός σχεδιασμός του εκπαιδευτικού οφείλει να ανανεώνεται, να εμπλουτίζεται και να αναπροσαρμόζεται στα δεδομένα που αφορούν στις εκπαιδευτικές, τις γνωστικές και τις αναπτυξιακές παραμέτρους που φέρνει στο φως η έρευνα για τη μάθηση των μαθηματικών.

Μια άλλη παράμετρος που είναι σημαντικό να λαμβάνει υπόψη του ο διδακτικός σχεδιασμός είναι ο τρόπος ανάπτυξης των εννοιών ώστε να είναι συμβατός με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών κάθε βαθμίδας: τις γνώσεις, τις εμπειρίες και το λεξιλόγιο που διαθέτουν για να εκφράσουν μαθηματικά τις ιδέες τους. Υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι η απομνημόνευση των μαθηματικών γνώσεων και η επικέντρωση στην διαδικαστική ευχέρεια δεν αρκεί για την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης. Στην κατεύθυνση αυτή, σημαντική η ενθάρρυνση της δημιουργικότητας των μαθητών, η δημιουργία συνεργατικού-συμπεριληπτικού περιβάλλοντος, η δημιουργία μικρο-κοινοτήτων εξερεύνησης και συζήτησης στην τάξη.

(ii) Διδασκαλία βασισμένη στη διερεύνηση (Inquiry based teaching)

Η διδασκαλία που βασίζεται στη διερεύνηση προωθεί την οικοδόμηση του μαθηματικού νοήματος στη σχολική τάξη, με τον μαθητή στο ρόλο του ερευνητή, ο οποίος ανακαλύπτει, οργανώνει και συγκροτεί νέα γνώση. Η εννοιολογική μάθηση αποκτά προβάδισμα έναντι της μάθησης αλγοριθμικών διαδικασιών, ενώ παράλληλα

υποστηρίζονται η ανάπτυξη και η εξέλιξη «συνηθειών του μυαλού» που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική σκέψη.

Σε μια τάξη διερεύνησης, οι γνωστικές συγκρούσεις που προκύπτουν, όταν οι μαθητές συνειδητοποιούν την ανεπάρκεια προηγούμενων γνώσεων, λειτουργούν ως μέσο ενεργούς εμπλοκής των μαθητών με σκοπό την επανεξέταση της σκέψης τους, τη συζήτηση και αναζήτηση νέων οπτικών ή ιδεών.

Ο παρακάτω πίνακας περιγράφει ορισμένα χαρακτηριστικά μιας διερευνητικού τύπου διδακτικής προσέγγισης.

Χαρακτηριστικά μιας διδασκαλίας που υποστηρίζει την διερεύνηση	
Ο εκπαιδευτικός...	
Παρουσιάζει πλούσια μαθηματικά έργα που εμπλέκουν με ενεργό τρόπο τους μαθητές σε διαδικασίες σκέψης που ενθαρρύνουν την ανάπτυξη συνδέσεων	Τα έργα που δίνονται • είναι προσεγγίσιμα από όλους τους μαθητές • περιλαμβάνουν προκλήσεις που είναι εφικτές • αναπτύσσουν την κατανόηση και εκμάθηση διαδικασιών • εμπεριέχουν ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών • δίνουν έμφαση στην διαδικασία επίλυσης αντί για την απάντηση
Υποστηρίζει τη δημιουργία ενός συνεργατικού περιβάλλοντος που εμπλέκει τους μαθητές στην ανταλλαγή ιδεών, στην ανάπτυξη επιχειρημάτων, στην πρόκληση και στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων.	Η ατμόσφαιρα της τάξης • υποστηρίζει τον διαμοιρασμό ιδεών και προσεγγίσεων • αξιοποιεί διαφορετικές ιδέες και οπτικές • προωθεί ανταλλαγή απόψεων και κριτική ανάλυση • αναγνωρίζει ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν ο ένας από τον άλλο
Χρησιμοποιεί ερωτήσεις που προωθούν το συλλογισμό και κινητοποιούν τους μαθητές να επικοινωνούν με σαφήνεια τις μαθηματικές σκέψεις και τις ιδέες τους	Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού • θέτουν μαθηματικές προκλήσεις στους μαθητές • ενθαρρύνουν την αποτίμηση και ανάλυση των στρατηγικών • αξιοποιούν παρανοήσεις των μαθητών για να στηρίξουν τη μαθησιακή διαδικασία • προωθούν την εξερεύνηση εναλλακτικών στρατηγικών
Παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να αναλάβουν περισσότερες ευθύνες εκμάθησης και τους υποστηρίζει στην υλοποίηση των αποφάσεών τους	Οι μαθητές • θέτουν προβλήματα προς επίλυση • διατυπώνουν ερωτήσεις και αναζητούν απαντήσεις • σχεδιάζουν και ανακαλύπτουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων • εκφράζουν τις ιδέες τους και τις αποτιμούν με κριτικό τρόπο

(iii) Διδασκαλία ως διαδικασία επίλυσης προβλήματος (*Teaching as problem solving*)

Ως διδασκαλία επίλυσης προβλήματος (problem solving) εννοούμε τη διδασκαλία που επικεντρώνεται στην επίλυση προβλήματος, μέσα από τρεις διακριτές πρακτικές (Schroeder & Lester, 1989):

α) τη διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος, που αφορά την εισαγωγή νέων εννοιών μέσω της ανάγκης επίλυσης προβληματικών καταστάσεων. Με αφετηρία ένα

πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τα προηγούμενα εργαλεία, αναπτύσσονται νέες μαθηματικές τεχνικές και προσεγγίσεις. Η αναδιοργάνωση της γνώσης για την κατασκευή νέων μεθόδων και στρατηγικών, οδηγεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού περιεχομένου και τη ταυτόχρονη σύνδεση του με την προ υπάρχουσα γνώση. Έτσι αναπτύσσεται μια σύνθετη κατανόηση που περιλαμβάνει την τυπική γνώση η οποία δομείται στη συνέχιση της διαισθητικής – εμπειρικής κατανόησης (Baroody, 2003, Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). Για μια διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος είναι απαραίτητη η επιλογή κατάλληλων προβληματικών καταστάσεων που γεφυρώνουν παλιά και νέα γνώση ώστε να αναδεικνύεται η ανάγκη υιοθέτησης νέων προσεγγίσεων.

- β) τη διδασκαλία της επίλυσης η οποία αφορά στη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρούν οι ίδιοι την εξέλιξη της πορείας τους κατά την επίλυση (μέσα από μοντέλα επίλυσης όπως του Polya). Η εστίαση είναι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και βασίζεται στην οπτική των Μαθηματικών ως ενός τρόπου σκέψης, αναζήτησης και εύρεσης μοτίβων για την επίλυση προβλημάτων. Ο στόχος σε μια τέτοια προσέγγιση είναι η απόκτηση ελέγχου από τους μαθητές πάνω στη διαχείριση προβληματικών καταστάσεων, χρήση μεθόδων επίλυσης και ανάπτυξης της σκέψης τους. Μια διδασκαλία αυτού του τύπου περιλαμβάνει τη συζήτηση και ανάλυση κάθε συνιστώσας της διαδικασίας επίλυσης, την επισήμανση των ενεργειών των μαθητών ενώ επιλύουν προβλήματα καθώς και υιοθέτηση μεταγνωστικού τύπου ελέγχου των βημάτων της επίλυσης και στοιχείων αυτορρύθμισης.
- γ) τη διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος, όπου η εστίαση βρίσκεται στους τρόπους που οι νέες γνώσεις μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση συνήθων ή μη-συνήθων προβλημάτων.

Η διδασκαλία μέσω της επίλυσης οδηγεί σε βελτίωση της απόδοσης των μαθητών, καθώς και στην ανάπτυξη θετικότερων στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά και τη χρησιμότητα τους (Harwell et al., 2007; Huntley et al., 2000; Riordan & Noyce, 2001; Schoenfeld, 2002; Thompson & Senk, 2001). Η διδασκαλία μέσω επίλυσης μπορεί να ακολουθείται από διδασκαλία για την επίλυση ώστε η νέα γνώση να εφαρμόζεται σε καινούργια πλαίσια (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

Σε κάθε περίπτωση διδασκαλίας προβλημάτων, περιλαμβάνεται ο τονισμός στοιχείων που αποτελούν συνιστώσες κάθε είδους επίλυσης, όπως η προοδευτική εξέλιξη προς τον στόχο, η λειτουργική αξία του λάθους και η προσαρμοστικότητα της σκέψης.

(4γ). Διδακτικές πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών

Η ενότητα αυτή εστιάζει στις καθημερινές 'νόρμες' εργασίας του εκπαιδευτικού στην τάξη των μαθηματικών, όπως είναι η διαχείριση του λάθους και η διαχείριση της

μαθηματικής επικοινωνίας. Πρόκειται για πρακτικές διδακτικής διαχείρισης της μάθησης των μαθηματικών σε μικρο-επίπεδο, οι οποίες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές. Αρχικά, γίνεται αναφορά σε διδακτικές πρακτικές που στοχεύουν στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών, στην απόκτηση της μαθηματικής γνώσης και στην ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης. Ακολούθως προτάσσεται η συλλογική διάσταση της μαθηματικής δραστηριότητας που αναπτύσσεται στην τάξη. Προφανώς, οι δυο ομάδες διδακτικών πρακτικών αλληλοεπιδρούν διαλεκτικά κατά την διάρκεια της εξέλιξης της διδασκαλίας.

(i) Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στη γνωστική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η περίπτωση της διαχείρισης του λάθους

Από την βιβλιογραφία έχει επισημανθεί η παιδαγωγική αξία **του λάθους** και η διδακτική του αξιοποίηση

- Τα λάθη οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες. Συχνά επιτρέπουν να έρθουν στην επιφάνεια έννοιες που δεν έχουν κατανοήσει σε βάθος οι μαθητές και για τις οποίες είχαν μια επιφανειακή κατανόηση.
- Τα λάθη επιτρέπουν μια βαθύτερη κατανόηση των παρανοήσεων που έχουν δημιουργήσει οι μαθητές με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να έχει καλύτερη εικόνα των αδυναμιών που πρέπει να θεραπεύσει. Η ανακάλυψη του οδηγεί στην ανάδειξη και βαθύτερη κατανόηση της λειτουργίας των επιμέρους στοιχείων του θεωρήματος, της έννοιας κλπ.
- Η αναζήτηση του λάθους μετατοπίζει το βάρος από το αποτέλεσμα προς το συλλογισμό και τη μαθηματική επιχειρηματολογία. Έτσι οι μαθητές διευκολύνονται στη σταδιακή ανάπτυξη ορθών μαθηματικών συλλογισμών.

Μια άλλη πρακτική που αφορά στη διδασκαλία είναι η διδασκαλία με έμφαση στην **εννοιολογική κατανόηση**. Η διδασκαλία με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση και όχι μόνο στην κατάκτηση διαδικαστικής γνώσης περιλαμβάνει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, τη χρήση και σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων, την επισήμανση μαθηματικών σχέσεων μεταξύ αριθμών, παραστάσεων, σχέσεων, σχημάτων κλπ (Hiebert & Carpenter, 1992). Επιπλέον, η εννοιολογική κατανόηση περιλαμβάνει την επίγνωση της γνώσης που συγκροτείται στη βάση αυτής της κατανόησης (μεταγνώση). Η διδασκαλία είναι επιθυμητό να περιλαμβάνει την ανάπτυξη τόσο της εννοιολογικής όσο και της διαδικαστικής/ αλγοριθμικής κατανόησης που συμβάλλει στη σύνδεση της εννοιολογικής κατανόησης με τη συμβολική γλώσσα. Η εκμάθηση κανόνων και συμβόλων χωρίς κατανόηση των εννοιών που βρίσκονται πίσω από αυτές, οδηγεί σε επιφανειακή κατανόηση που εύκολα μπορεί να ξεχαστεί αργότερα. Αντίθετα, η διδασκαλία με εννοιολογική κατεύθυνση (όπως για παράδειγμα κατά την επίλυση ενός προβλήματος με τη διερεύνηση στρατηγικών επίλυσης) βοηθάει στον τρόπο

ανασύστασης και επαναδημιουργίας σχέσεων που ενδεχομένως ένας μαθητής δεν θυμάται.

(ii) Διδακτικές πρακτικές με έμφαση στην κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση της εμπλοκής στη μάθηση των μαθηματικών: η διαχείριση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στην τάξη & η διαχείριση των εργαλείων.

Η διδακτική πράξη μπορεί να προσφέρει πολλαπλές ευκαιρίες για εμπλοκή των μαθητών σε **μαθηματικές συζητήσεις** μέσα στην τάξη. Οι συζητήσεις δημιουργούν ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν να ακούνε τα επιχειρήματα των άλλων, να ασκούν κριτική και να εκφράζουν τα δικά τους. Το περιβάλλον στο οποίο αυτό υλοποιείται μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές: μέσω της επικοινωνίας με έναν συμμαθητή τους, με άλλα μέλη μιας ολιγομελούς ομάδας ή μέσα στην ολομέλεια της τάξης. Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού ή των συμμαθητών μπορούν να αποτελέσουν το εφαλτήριο μιας συζήτησης: ερωτήσεις που αφορούν στην περιγραφή ή στην επεξήγηση μιας διαδικασίας, το σκεπτικό ενός τρόπου υπολογισμού, μιας προσέγγισης ή το σχηματισμό μιας εικασίας μπορούν να λειτουργήσουν ως αφετηρία ανάλυσης, επεξήγησης και σχηματισμού νέων ιδεών και οπτικών. Οι συζητήσεις μπορούν να προκληθούν και μετά από κατάλληλες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού που επεκτείνουν τις σκέψεις των μαθητών, τους προκαλούν ή τους ξαφνιάζουν, που τους οδηγούν στην επανεξέταση και διερεύνηση συγκεκριμένων εννοιών, ικανοτήτων και πρακτικών. Ο σχηματισμός χρήσιμων διδακτικά ερωτήσεων απαιτεί προετοιμασία από τον διδάσκοντα και ενασχόληση με θέματα που έχουν μαθηματικό ενδιαφέρον ή αποτελούν πηγές παρανοήσεων από τους μαθητές. Η χρήση ανοικτών ερωτήσεων οι οποίες δεν απαντώνται με ένα ναι ή ένα όχι ή που μπορούν να έχουν πολλαπλές απαντήσεις ή ελλιπή δεδομένα, υποβοηθούν την ανάπτυξη συζητήσεων και συμμετοχικών διαδικασιών. Παράλληλα μεταφέρουν την εστίαση του διαλόγου από το δάσκαλο στους μαθητές και ενθαρρύνουν την έκφραση διαφορετικών οπτικών. Η υιοθέτηση ενός τέτοιου μοντέλου συζήτησης απαιτεί χρόνο εξοικείωσης από τους μαθητές.

Η διδακτική πρακτική της ενθάρρυνσης της **συνεργασίας** στην τάξη των μαθηματικών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης αλλά και στη δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά (MacMath, Wallace, & Xiaohong, 2009). Ένα συνεργατικό περιβάλλον επιταχύνει την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών και παράλληλα συνεισφέρει στην ανάπτυξη αυτοπεποίθησης, συναισθημάτων ικανοποίησης και δημιουργία δεσμών συνάφειας με τα υπόλοιπα μέρη του συνόλου. Η κοινωνική δυναμική που δημιουργείται συνεισφέρει θετικά στη συμπερίληψη όλων των μαθητών σε ένα σύνολο ισότιμης συμμετοχής και δημιουργίας (Suurtamm et al., 2015). Η καλλιέργεια ισχυρών δεσμών μεταξύ των μελών συνεισφέρει στην ανάπτυξη της συνοχής της ομάδας και στην εκμάθηση τεχνικών συνεργασίας και συνεισφοράς σε ένα σύνολο. Παράλληλα, οι συνεργατικές τεχνικές είναι πιο αποτελεσματικές κατά την

επίλυση προβλημάτων καθώς η έκφραση διαφορετικών ιδεών οδηγεί συχνά σε καλύτερη κατανόηση των επόμενων σταδίων επίλυσης και διερεύνησης (Fleming, 2000).

Οι μαθητές μπορούν να ενθαρρύνονται να «κάνουν» Μαθηματικά μέσα από διαδικασίες που υποβοηθούν την εξερεύνηση και τη δημιουργία. Τρόποι ενεργούς εμπλοκής των μαθητών, μπορεί να είναι μέσω:

1. της ενεργούς αλληλεπίδρασης με άλλους μαθητές
2. της διερεύνησης μαθηματικών εννοιών με διαφορετικούς τρόπους (π.χ κιναισθητικός, αναλυτικός, εικονιστικός κλπ)
3. της εμπλοκής τους σε συζητήσεις με σκοπό την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας
4. της διάθεσης ικανοποιητικού χρόνου για την ανάπτυξη και επεξεργασία των ιδεών τους.

Παράλληλα η συνεργασία και η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης συντελεί στην αντιμετώπιση της **μαθηματικοφοβίας** (δηλαδή, συναισθημάτων άγχους, νευρικότητας και αποφυγής, όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με μαθηματικά προβλήματα) (Stuart, 2000). Οι αιτίες της μαθηματικοφοβίας μπορεί να αναζητηθούν στην έλλειψη αυτοπεποίθησης στις μαθηματικές ικανότητες του ίδιου του μαθητή, στις αντιλήψεις του εκπαιδευτικού, των άλλων μαθητών, του οικογενειακού ή κοινωνικού περιβάλλοντος. Λόγω της συσχέτισης που έχει η μαθηματικοφοβία με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, είναι σημαντικό να υιοθετηθούν στρατηγικές από τον εκπαιδευτικό μείωσης της, όπως (Jackson & Leffingwell, 1999) :

1. προβολή θετικής στάσης απέναντι σε κάθε μαθητή ξεχωριστά
2. ενθάρρυνση όλων των ερωτήσεων, αποριών κλπ των μαθητών
3. συμπερίληψη των ενδιαφερόντων των μαθητών στις δραστηριότητες της τάξης
4. αφιέρωση περισσότερου χρόνου σε μαθητές που δυσκολεύονται με τα Μαθηματικά
5. χρήση ποικίλων υλικών (π.χ γραπτές οδηγίες, ηλεκτρονικές πηγές, εποπτικό-χειραπτικό υλικό, χρήση ψηφιακών περιβαλλόντων)

Παράλληλα με την αντιμετώπιση της μαθηματικοφοβίας, η δημιουργία **θετικών στάσεων** απέναντι στα Μαθηματικά είναι σημαντικός παράγοντας δημιουργίας υψηλών επιδόσεων στα Μαθηματικά (Colgan, 2014). Παράγοντες όπως η στήριξη του εκπαιδευτικού στους μαθητές, η υιοθέτηση θετικών στάσεων και προδιαθέσεων από τον ίδιο τον διδάσκοντα και η συνεργασία με τους γονείς/κηδεμόνες των μαθητών μπορούν να βοηθήσουν σε αυτή την κατεύθυνση.

5. Βασικές Αρχές της Αξιολόγησης

Η αξιολόγηση συμβάλλει στην εξέλιξη της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών και των μαθητριών και υποστηρίζει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων για τη διδασκαλία και τη μάθηση (NCTM, 2000). Η αξιολόγηση δεν συνιστά μια διακριτή συνιστώσα της διδασκαλίας, αλλά εντάσσεται στις διδακτικές πρακτικές και αναδεικνύει τις κατανοήσεις που έχουν επιτευχθεί.

Οι μορφές αξιολόγησης εντάσσονται γενικότερα σε δύο κυρίως κατευθύνσεις, την τελική και τη διαμορφωτική. Η τελική αξιολόγηση συνιστά μια αποτίμηση αθροιστικού χαρακτήρα, η οποία υποστηρίζει ελάχιστα τις διδακτικές αποφάσεις ή τον εντοπισμό παρανοήσεων, καθώς λειτουργεί αποσπασματικά. Με τη διαμορφωτική αξιολόγηση καθορίζεται το “σημείο” στο οποίο το άτομο τοποθετείται γνωστικά σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, ενώ η τοποθέτηση αυτή ερμηνεύεται και αξιοποιείται για τη λήψη αποφάσεων και για τον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας. Βασικές πτυχές της διαμορφωτικής αξιολόγησης αποτελούν (α) ο προσδιορισμός του “σημείου” στο οποίο τοποθετείται γνωστικά το άτομο, (β) ο καθορισμός των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων, (γ) η επιλογή τρόπων επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων και (δ) ο σχεδιασμός για μελλοντική δράση (van de Walle, 2017).

Με βάση την προβληματική που αναπτύχθηκε παραπάνω, υιοθετείται η προσέγγιση της αξιολόγησης που στοχεύει στη μάθηση (assessment for learning) και ανατροφοδοτεί μαθητές και εκπαιδευτικούς. Η αξιολόγηση για τη μάθηση αξιοποιεί το σύνολο των διαδικασιών αξιολόγησης, τόσο τις διαμορφωτικές όσο και τις αθροιστικές, ενώ πραγματοποιείται περισσότερες από μία φορές κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Στο πλαίσιο της αξιολόγησης για τη μάθηση, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την αξιολόγηση ως εργαλείο διερεύνησης της γνώσης και των ικανοτήτων των μαθητών, των παρανοήσεων, των προκαταλήψεων ή των ελλειμμάτων που μπορεί να έχουν.

Τα εργαλεία αξιολόγησης που προτείνονται στο πλαίσιο της αξιολόγησης με στόχο τη μάθηση δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να συλλέξει δεδομένα ώστε να αποκτήσει μια συνολική θέαση της μαθησιακής πορείας και της διδασκαλίας και να λάβει τεκμηριωμένες αποφάσεις για την ενίσχυση της μάθησης και την εξέλιξη της διδασκαλίας. Σε αυτή την κατεύθυνση η αξιολόγηση, η διδασκαλία και η μάθηση αλληλοτροφοδοτούνται.

Η προσέγγιση της αξιολόγησης για τη μάθηση υιοθετεί μια κυκλική αντίληψη σύνδεσης της αξιολόγησης με τις διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού. Ειδικότερα, η

αξιολογική διαδικασία θεωρείται πλήρως ενσωματωμένη στη διδασκαλία και αναπτύσσεται σε τέσσερα στάδια με βάση το Σχήμα 2 παρακάτω.

Η κριτική διερεύνηση της μάθησης και της διδασκαλίας, ο σχεδιασμός, η μάθηση μέσα από τη διδακτική πρακτική και η ανάπτυξη αναστοχαστικών διαδικασιών ως μέρους του επανασχεδιασμού της διδασκαλίας και της αξιολόγησης συνιστούν ένα πλαίσιο ανάπτυξης των διδακτικών πρακτικών αλλά και του ίδιου του εκπαιδευτικού.



Σχήμα 2. Στάδια ανάπτυξης της αξιολογικής διαδικασίας
(National Council of Teachers of Mathematics, 2000)

6. Ο κύκλος σχεδιασμού, υλοποίησης και αξιολόγησης της διδασκαλίας ως πλαίσιο ανάπτυξης της διδακτικής πρακτικής και του εκπαιδευτικού

Σύγχρονες θεωρήσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά προτείνουν την επαγγελματική μάθηση και τη συνεργασία μέσα από κοινότητες πρακτικής (Wenger, 1998) και κοινότητες διερεύνησης (Jaworski, 2006).

Κοινότητα πρακτικής: Τα άτομα “μοιράζονται” την επαγγελματική γνώση σε κοινές δράσεις και αλληλεπιδρούν στο πλαίσιο ενός κοινού εγχειρήματος. Η συμμετοχή του ατόμου στην κοινότητα πρακτικής αφορά τη διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση του εγχειρήματος (Lave & Wenger, 2005).

Η μάθηση των μελών μιας κοινότητας πρακτικής πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας νόμιμης ‘περιφερειακής συμμετοχής’. Στο πλαίσιο αυτό η διδασκαλία αποτελεί μαθητεία σε μια κοινότητα πρακτικής, η οποία απαρτίζεται από έμπειρα και μη μέλη, τα οποία δεσμεύονται σε ένα κοινό εγχείρημα/ μια κοινή δράση (Wenger, 1998). Χαρακτηριστικά μιας κοινότητας πρακτικής είναι η *δέσμευση* στην κοινότητα, η *εικόνα-ταυτότητα* των ατόμων που την απαρτίζουν και η *ευθυγράμμιση* με τους στόχους της κοινότητας.

Κοινότητα διερεύνησης: Η Jaworski (2012) υπέδειξε τη διερεύνηση ως εργαλείο επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, μέσα από τη διδασκαλία στην τάξη, και ως *διαδικασία*, μέσα από την οποία οι εκπαιδευτικοί κατασκευάζουν ατομικές και συλλογικές εννοιολογικές κατανοήσεις και πρακτικές ως μέλη της κοινότητας πρακτικής. Εισήγαγε δε τον όρο της 'κριτικής ευθυγράμμισης' για να αναφερθεί στην κριτική που ασκούν εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές στους στόχους, τις δράσεις και τις προοπτικές της κοινότητας πρακτικής (Goos, 2014). Η εξασφάλιση χρόνου για τη συνεργασία εκπαιδευτικών στο σχολείο αποτελεί σημαντικό παράγοντα υποστήριξης της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Sakonidis & Potari, 2014).

Προσέγγιση μελέτης μαθήματος (Lesson study): Οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται για να σχεδιάσουν επιλεγμένα μαθήματα και να εκφράσουν τον προβληματισμό τους για τη διδασκαλία που πρόκειται να πραγματοποιήσουν. Ειδικότερα, αποφασίζουν το μάθημα που θα διδαχθεί, προετοιμάζονται για τη συλλογή δεδομένων που αφορούν στους μαθητές και ορίζουν τον εκπαιδευτικό και την τάξη στην οποία θα πραγματοποιηθεί. Στη συνέχεια, σχεδιάζουν από κοινού το μάθημα, ένα μέλος της ομάδας διδάσκει και οι υπόλοιποι παρατηρούν, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία παρατήρησης που έχουν προ-αποφασίσει, οργανώνουν και επεξεργάζονται τα δεδομένα που προκύπτουν από την παρατήρηση της διδασκαλίας. Τέλος, «μοιράζονται» τις παρατηρήσεις/ σημειώσεις τους, αναλύουν και συζητούν τα συμπεράσματα και (ως ομάδα) αναστοχάζονται σε σχέση με τη μάθηση που επιτεύχθηκε και το τι σήμαινε αυτό για τη δική τους διδασκαλία.

Οι εκπαιδευτικοί εργάζονται σε ένα μάθημα, αντιμετωπίζοντάς το, καταρχάς, ως το «καλύτερο» μάθημα που θα μπορούσαν να ετοιμάσουν, αφιερώνουν χρόνο για να συλλέξουν δεδομένα, συμπληρώνοντας φύλλα παρατήρησης, για να αναστοχαστούν, δηλαδή οι εκπαιδευτικοί δημιουργούν μαθήματα από τα οποία πρόκειται να μάθουν. Μέσω της παρατήρησης οι εκπαιδευτικοί εξασφαλίζουν ότι θα συζητήσουν για όσα συμβαίνουν πραγματικά στην τάξη και λαμβάνουν ενήμερες (informed) αποφάσεις, οι οποίες βασίζονται σε γεγονότα της τάξης (Dudley et al., 2019).

Στο πλαίσιο της προσέγγισης επαγγελματικής ανάπτυξης Lesson study οι εκπαιδευτικοί έχουν τον απαιτούμενο χρόνο για να σχεδιάσουν ένα μάθημα, να αλληλεπιδράσουν, να αναπτύξουν τη σκέψη τους και να προβληματιστούν σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, και αναλαμβάνουν την ευθύνη για την ατομική επαγγελματική εξέλιξη, εστιάζοντας την προσοχή τους στους δικούς τους μαθητές.

7. Βιβλιογραφία Γενικού μέρους

Bussi, M. (2011). Artifacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 93-112.

Cai, J. & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 287-301.

Dudley, P., Xu, H., & Lang, J. (2019) Empirical evidence of the impact of lesson study on: students' achievement, teachers' professional learning and on institutional and system evolution: an illustrative, complex case-development exemplar in London. *European Journal of Education*.

English, L. (1997). Promoting a Problem-Posing classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4, 172-179.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics* 66, 61-75.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM*, 46(2), 189–200.

Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.) (2012) Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997) Mathematical tasks and student cognition: Classroom based factors that support and inhibit high level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524–549.

Ing, M., Webb, N., Franke, M., Turrou, A., Wong, J., Shin, N. Fernandez, C. (2015). Student participation in elementary mathematics classrooms: the missing link between teacher practices and students' achievement? *Educational Studies in Mathematics* 66, 341-356.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 187–211.

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 44, 613–625.

Mariotti M. A. (2000) Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics* 44: 25–53.

NCTM (2000) Principles and Standards for School Mathematics. The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author

Sakonidis, C., & Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM*, 46(2), 293–304. doi:10.1007/s11858-014-0569-z.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009) The role of mathematics curriculum materials in large scale urban reform. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 37-55). New York: Routledge.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press

Wood, T. (2000). Differences in teaching and opportunities for learning in primary mathematics classes. *ZDM*, 5, 149-154.

B. ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

α) Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση

1. Σημασία του πεδίου

1.1. Αριθμός

Θεματική Ενότητα: Φυσικοί αριθμοί

Διαιρετότητα (Α΄ Γυμνασίου)

Η ευκλείδεια διαίρεση, η διαιρετότητα και η ανάλυση των φυσικών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι έννοιες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της αριθμητικής δομής των φυσικών και των πράξεων των ρητών (μέσω των ισοδύναμων κλασμάτων). Επιπλέον, οι έννοιες αυτές παρουσιάζουν αναλογίες με έννοιες που εμφανίζονται στην Άλγεβρα (παραγοντοποίηση πολυωνύμων, πράξεις κλασματικών παραστάσεων).

Θεσιακά συστήματα αρίθμησης (Α΄ Γυμνασίου)

Η αξία θέσης των ψηφίων στη συμβολική γραφή των φυσικών είναι σημαντική τόσο για την κατανόηση των αριθμών και τη σύγκρισή τους όσο και για την κατανόηση των αλγορίθμων εκτέλεσης των πράξεων. Η ενασχόληση των μαθητών/-τριών με κάποιο θεσιακό σύστημα αρίθμησης εκτός του δεκαδικού, μπορεί να υποβοηθήσει την κατανόηση των ψηφίων που χρησιμοποιούμε και της αξίας της θέσης τους σε ένα αριθμητικό σύστημα.

Θεματική Ενότητα: Ακέραιοι (Α΄ Γυμνασίου), Ρητοί (Α΄ Γυμνασίου), Άρρητοι – Πραγματικοί (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου)

Οι αριθμοί και οι πράξεις τους είναι στο κέντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, τόσο ως απαραίτητο στοιχείο μαθηματικού γραμματισμού όσο και ως θεμελιώδεις ιδέες για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και γνώσης. Η σταδιακή επέκταση από τους φυσικούς στους ακέραιους, στους ρητούς και στους πραγματικούς παρέχει ευκαιρίες ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας από τη μέτρηση και την απαρίθμηση μέχρι τη διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων και συναρτήσεων.

Η έννοια της αριθμογραμμής εμφανίζεται ήδη από το Δημοτικό και βοηθάει την οικοδόμηση της διάταξης των αριθμών και τις πράξεις των ακεραίων. Αν και η έννοια του ρητού, της πυκνότητας των ρητών σχηματοποιήθηκε μετά από αιώνες εξέλιξης των μαθηματικών, η διασθητική κατανόηση τους είναι απαραίτητη για την κατασκευή και επέκταση της έννοιας του αριθμού από το σύστημα των ρητών στους πραγματικούς.

1.2 Άλγεβρα

Θεματική Ενότητα: Κανονικότητες – Συναρτήσεις

Κανονικότητες (Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου), Συναρτήσεις (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου)

Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης μαθηματική έννοια και αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο με το οποίο μπορεί να μελετηθεί μια ποικιλία θεμάτων από τους αριθμούς (π.χ. πράξεις), την άλγεβρα (π.χ. εξισώσεις), τη μέτρηση (π.χ. εμβαδά) κ.λπ. Συγχρόνως είναι και μια από τις πιο σύνθετες και δυσκολότερες μαθηματικές έννοιες για τους/τις μαθητές/-τριες. Η αναζήτηση κανονικοτήτων (και γενικότερα, αναλλοίωτων χαρακτηριστικών και σχέσεων) βρίσκεται στο κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας. Η ενασχόληση των μαθητών/-τριών με αυτό το πεδίο μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης (διερεύνηση, εικασία, μοντελοποίηση) και να αποτελέσει ένα σημείο εισαγωγής στις συναρτήσεις και την Άλγεβρα.

Θεματική Ενότητα: Αλγεβρικές Παραστάσεις

Αλγεβρική παράσταση (Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου), Ιδιότητες δυνάμεων (Β΄ Γυμνασίου), Ιδιότητες ριζών (Γ΄ Γυμνασίου)

Η ισχύς της Άλγεβρας (στη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και στην αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων μέσω της μοντελοποίησης) συνδέεται άμεσα με την έννοια της μεταβλητής, την αλγεβρική παράσταση και τους μετασχηματισμούς της. Ωστόσο, αυτές οι έννοιες και διαδικασίες αποτελούν συγχρόνως πηγή δυσκολίας, απογοήτευσης και συχνά αποξένωσης των μαθητών/-τριών από τα Μαθηματικά.

Θεματική Ενότητα : Ισότητα – Ανισότητα

Εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού (Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου), πολυωνυμικές εξισώσεις (Γ΄ Γυμνασίου), γραμμικά συστήματα (Γ΄ Γυμνασίου)

Η εξίσωση, η ανίσωση και τα συστήματα αποτελούν ισχυρά εργαλεία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων που μπορεί να προέρχονται από άλλα πεδία των Μαθηματικών, από άλλες επιστήμες, αλλά και από την καθημερινή ζωή. Οι έννοιες και οι διαδικασίες που σχετίζονται με την εξίσωση, την ανίσωση και τα συστήματα συνδέονται στενά με τη χρήση του γράμματος, την αλγεβρική παράσταση, τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους, την έννοια και τις ιδιότητες της ισότητας και της ανισότητας. Για αυτούς τους λόγους έχουν σημαντική θέση σε κάθε Πρόγραμμα Σπουδών. Επιπλέον, στο ΠΣ υιοθετείται η έμφαση στην κατανόηση των εννοιών και η βαθμιαία ανάπτυξη των συλλογισμών και των διαδικασιών (πχ. οι εξισώσεις α' βαθμού μελετώνται σε διαφορετικά επίπεδα στις τάξεις ΣΤ' Δημοτικού και Α' και Β' Γυμνασίου), αφού ο μονόπλευρος προσανατολισμός στους αλγόριθμους επίλυσης έχει φτωχά μαθησιακά αποτελέσματα.

2. Ανάπτυξη των ΠΜΑ του πεδίου Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση

Το μαθηματικό περιεχόμενο του Θεματικού Πεδίου Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση επιμερίζεται σε τρεις υποδιαίρεσεις, στους Αριθμούς, την Άλγεβρα και την Ανάλυση.

Η υποδιαίρεση του πεδίου Ι: Αριθμός πραγματεύεται τα αντικείμενα Φυσικοί, Ρητοί, Ακέραιοι, Άρρητοι & Πραγματικοί.

Στο **Δημοτικό** οι κεντρικοί στόχοι του ΠΣ για τον Αριθμό συμπεριλαμβάνουν την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και των πράξεων με αριθμούς, την ανάπτυξη στρατηγικών διαχείρισης των αριθμών και των πράξεων με αριθμούς και την εννοιολογική κατανόηση των φυσικών, ακέραιων και ρητών αριθμών. Οι μαθητές/-τριες, από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, διερευνούν τις αναπαραστάσεις των αριθμών (εικονιστική, λεκτική, συμβολική), την έννοια της διάταξης και σύγκρισης αριθμών και κάνουν υπολογισμούς με φυσικούς και ρητούς. Ειδικά στους φυσικούς υπολογίζουν το ΕΚΠ και το ΜΚΔ στη ΣΤ' τάξη. Στη Γ' και Δ' τάξη εισάγεται διαισθητικά η έννοια των ακέραιων αριθμών και στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές/-τριες κάνουν συγκρίσεις με ακέραιους και διερευνούν διαισθητικά προσθέσεις με ακέραιους αριθμούς.

Στο **Γυμνάσιο**, στην υποδιαίρεση Αριθμός, το ΠΣ έχει σκοπό να ενισχύσει την ανάδειξη των δομικών στοιχείων των αριθμητικών συνόλων που διδάσκονται στο Δημοτικό, χτίζοντας την αφηρημένη θεώρηση των πράξεων και αριθμών πάνω στην πλούσια, άτυπη αριθμητική γνώση των μαθητών/-τριών. Αυτό υλοποιείται κυρίως με τη Θεωρία Αριθμών στους φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον γίνεται η επέκταση της έννοιας και των ιδιοτήτων των φυσικών στους ακεραίους και των ακεραίων στους ρητούς. Στη Β' και Γ' τάξη του Γυμνασίου εισάγεται η έννοια της τετραγωνικής ρίζας και των άρρητων αριθμών.

Στο **Λύκειο** εισάγεται η ν-στή ρίζα και ορισμένοι άρρητοι αριθμοί, όπως ο αριθμός e , και μελετώνται ορισμένες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Τέλος, στη Β' τάξη (Μαθηματικά Προσανατολισμού) οι μαθητές/-τριες χρησιμοποιούν τη μαθηματική επαγωγή για να αποδείξουν ισχυρισμούς που αναφέρονται στο σύνολο των φυσικών.

Πίνακας 1. Διδασκαλία Θεματικών Ενοτήτων ανά βαθμίδα εκπαίδευσης

Αριθμοί/Βαθμίδα	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο
Φυσικοί			
Ρητοί			
Ακέραιοι			
Άρρητοι και πραγματικοί			

Η υποδιαίρεση του πεδίου II: Άλγεβρα πραγματεύεται τα αντικείμενα τα οποία απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3. Μαθηματικό περιεχόμενο στην υποδιαίρεση II: Άλγεβρα

Στο **Δημοτικό** η Άλγεβρα παρουσιάζεται κατά κανόνα είτε ως γενικευμένη αριθμητική είτε ως μελέτη του αριθμητικού συστήματος και της δομής του, η οποία αναφέρεται σε γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή σε αντιπροσώπους κλάσεων αριθμών. Επιπλέον, οι μαθητές/-τριες έρχονται σε επαφή με την έννοια της μεταβολής. Συγκεκριμένα, το μαθηματικό περιεχόμενο της Θεματικής Ενότητας «Κανονικότητες» αναπτύσσεται κυρίως στις πρώτες τέσσερις τάξεις. Οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται στην αναγνώριση, αναπαράσταση, μελέτη και περιγραφή κανονικοτήτων και αξιοποιούν τις ιδιότητές τους

στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Στις συναρτήσεις οι μαθητές/-τριες αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ συμμεταβαλλόμενων μεγεθών, από τις πρώτες τάξεις, ενώ στη Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη διερευνούν τη σχέση μεταξύ ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Στη Θεματική Ενότητα «Αλγεβρική παράσταση» εισάγεται η έννοια της μεταβλητής και οι μαθητές/-τριες υπολογίζουν την αριθμητική τιμή παραστάσεων και διατυπώνουν προβλήματα που μοντελοποιούνται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση. Στη Θεματική Ενότητα «Αλγεβρικές Σχέσεις» οι μαθητές/-τριες, στις πρώτες τάξεις, διερευνούν την έννοια της ισότητας και της ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια, ενώ στη ΣΤ΄ τάξη χρησιμοποιούν γράμματα ως αγνώστους σε απλές εξισώσεις, τις οποίες επιλύουν.

Στο **Γυμνάσιο**, στις Θεματικές Ενότητες Κανονικότητες και Συναρτήσεις οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται σε μεγάλο βαθμό με την έννοια της μεταβολής. Αναγνωρίζουν (συμμεταβολή μεγεθών, ανάλογα ποσά, αντιστρόφως ανάλογα ποσά) και αναπαριστούν με διάφορους τρόπους (αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση) κανονικότητες και συναρτήσεις. Διερευνούν μαθηματικές κανονικότητες που εκφράζονται μέσω των συναρτήσεων $y = ax$, $y = ax + \beta$, $y = ax^2$. Στη Θεματική Ενότητα Αλγεβρική παράσταση οι μαθητές/-τριες χρησιμοποιούν γράμματα για να παραστήσουν αριθμούς ή μεταβλητές εξισώσεων και μετασχηματίζουν αλγεβρικές παραστάσεις. Τέλος, επιλύουν εξισώσεις πρώτου βαθμού, εξισώσεις δευτέρου βαθμού (στη Γ΄ τάξη) με παραγοντοποίηση και συμπλήρωση τετραγώνου, ανισώσεις πρώτου βαθμού, καθώς και γραμμικά συστήματα (στη Γ΄ τάξη).

Στο **Λύκειο**, η Θεματική Ενότητα των κανονικοτήτων περιλαμβάνει τις ακολουθίες και ειδικότερα την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Σε συνέχεια των συναρτήσεων που αναπτύχθηκαν στο Γυμνάσιο, οι μαθητές/-τριες μελετούν τις πολυωνυμικές συναρτήσεις (πρώτου και δευτέρου βαθμού) στην Α΄ τάξη, τις πολυωνυμικές ανωτέρου βαθμού και τις ρητές, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (στη Β΄ τάξη γενικής παιδείας), καθώς και την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση (Β΄ τάξη, Μαθηματικά Προσανατολισμού). Η μελέτη των χαρακτηριστικών (μονοτονία, συμμετρίες κ.λπ.) των συναρτήσεων γίνεται με διαισθητικό τρόπο (γραφικά, αριθμητικά) στην Α΄ τάξη, ενώ η μελέτη των πολυωνυμικών και ρητών ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των αντίστοιχων ορισμών για όλες τις συναρτήσεις στη Β΄ τάξη. Επιπλέον, στην ενότητα αυτή οι μαθητές/-τριες ορίζουν τις συναρτήσεις 1-1 και την αντίστροφη συνάρτηση (Β΄ τάξη, Μαθηματικά Προσανατολισμού). Επίσης, ορίζουν την ισότητα και τις πράξεις των συναρτήσεων. Στη Θεματική Ενότητα των αλγεβρικών σχέσεων οι μαθητές/-τριες επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις (πολυωνυμικές, άρρητες, τριγωνομετρικές) και μη γραμμικά συστήματα χρησιμοποιώντας την αλγεβρική αλλά και τη συναρτησιακή προσέγγιση. Τέλος, αναγνωρίζουν τις πράξεις μεταξύ συνόλων και διακρίνουν πεπερασμένα και άπειρα

σύνολα αριθμών. Στα Μαθηματικά Γενικής παιδείας της Γ΄ τάξης οι μαθητές/-τριες έρχονται σε επαφή με την έννοια της εκθετικής μεταβολής και ορίζουν τους λογαρίθμους. Επίσης, αξιοποιούν τον ρυθμό μεταβολής στην επίλυση προβλημάτων.

Η υποδιαίρεση του πεδίου III: Ανάλυση πραγματεύεται τα αντικείμενα Σύγκλιση, Διαφόριση και Ολοκλήρωση.

Η υποδιαίρεση του πεδίου III: Ανάλυση αφορά αποκλειστικά το **Λύκειο**. Κεντρική έννοια της Ανάλυσης αποτελεί η σύγκλιση ακολουθίας στη Β΄ τάξη και της συνάρτησης στη Γ΄ τάξη. Βασικό προσανατολισμό του ΠΣ αποτελεί η αξιοποίηση της σύγκλισης σε εφαρμογές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Έτσι, στο διαφορικό λογισμό οι μαθητές/-τριες αναγνωρίζουν τη σημασία της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής και τον χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων και στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων. Επίσης, χρησιμοποιούν το διαφορικό λογισμό για τη μελέτη των χαρακτηριστικών συνάρτησης και τη χάραξη της γραφικής της παράστασης. Με ανάλογο τρόπο ο ολοκληρωτικός λογισμός αξιοποιείται για τον υπολογισμό εμβαδών, όγκων στερεών από περιστροφή και γενικότερα στην επίλυση προβλημάτων.

3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης/σκέψης και δυσκολίες των μαθητών

3.1 Αριθμοί

Θεματική Ενότητα: Φυσικοί Αριθμοί

Οι μαθητές/-τριες στο Δημοτικό σχολείο έχουν διαπραγματευθεί τις έννοιες και τις διαδικασίες της διαιρετότητας με συγκεκριμένους φυσικούς.

Σε αυτή την ενότητα επιχειρείται η συμβολική διατύπωση της ταυτότητας της ευκλείδειας διαίρεσης, η ανάλυση ενός φυσικού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων για την εύρεση του ΕΚΠ και ΜΚΔ, καθώς και μια πρώτη επαφή των μαθητών/-τριών με την αιτιολόγηση.

Οι δυσκολίες των μαθητών/-τριών σχετίζονται κυρίως με:

- την ιδέα ότι ένας αριθμός μπορεί να γραφεί με διαφορετικούς τρόπους χωρίς να αλλάζει (π.χ. για να εξετάσουν αν ο αριθμός $15 \cdot 34$ διαιρείται με το 15, κάποιοι μαθητές/-τριες μπορεί να υπολογίσουν πρώτα το γινόμενο, ώστε να κάνουν μετά τη διαίρεση),
- την αιτιολόγηση ισχυρισμών και συμπερασμάτων (ίσως να μην αναγνωρίζουν την ανάγκη αιτιολόγησης και συχνά δυσκολεύονται να διατυπώσουν επιχειρήματα).

Η εξοικείωση των μαθητών/-τριών με κάποια από τα περιεχόμενα της ενότητας στο Δημοτικό αποτελεί πλεονέκτημα για την πρώτη επαφή τους με τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο. Η έμφαση εδώ είναι τόσο στη γενίκευση (ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης) όσο και στην αιτιολόγηση ισχυρισμών και την επιχειρηματολογία. Γι' αυτόν τον λόγο, οι μαθητές/-τριες θα πρέπει να έχουν ευκαιρίες συζήτησης, επιχειρηματολογίας και αυτοαξιολόγησης των προτάσεων και των στρατηγικών τους. Ο/Η εκπαιδευτικός μπορεί να διευκολύνει με κατάλληλες ερωτήσεις (όπως «γιατί;», «πώς το σκέφτηκες;», «ισχύει πάντα;», «τι λέτε για την ιδέα του/της συμμαθητή/-ριάς σας;» κ.λπ.). Η ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, εκτός από ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, είναι χρήσιμο και διδακτικά, αφού επιτρέπει γενικεύσεις (π.χ. στην εύρεση του ΕΚΠ και του ΜΚΔ) και αιτιολογήσεις (π.χ. στο γιατί ο 15 διαιρεί τον 23·32·5). Η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών/-τριών μπορεί να αποκτά νόημα μέσα από μαθηματικά προβλήματα και ρεαλιστικές καταστάσεις.

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης: Η ενασχόληση με διαφορετικά θεσιακά αριθμητικά συστήματα συντελεί στη βαθύτερη κατανόηση και ανάπτυξη ισχυρότερης διαίσθησης για τους αριθμούς και τις σχέσεις τους (Nickerson & Whitacre, 2010). Προβλήματα που αφορούν την ανάγνωση ή τη δημιουργία κώδικα, ιστορικά προβλήματα, όπως η κατανόηση του συστήματος αρίθμησης των Βαβυλωνίων, μπορούν να αποτελέσουν δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις, όπου η κατανόηση ενός διαφορετικού συστήματος αναπαράστασης προκύπτει ως αναγκαία προϋπόθεση επεξεργασίας και επίλυσης ενός προβλήματος. Στο Δημοτικό έχουν αξιοποιηθεί δραστηριότητες που αναδεικνύουν στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών, δηλαδή τον ρόλο της θέσης στην αξία ενός ψηφίου. Σε αυτή την ενότητα επιχειρείται μια εμβάθυνση, μέσω της ενασχόλησης με ένα σύστημα αρίθμησης διαφορετικό του δεκαδικού (το δυαδικό) που είναι όμως θεσιακό (όπως και το δεκαδικό).

Οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών/-τριών σχετίζονται με:

- το ότι το 2 και το 10 έχουν τους ίδιους ρόλους (βάσεις) στα διαφορετικά συστήματα αρίθμησης
- την ιδέα ότι ένας αριθμός μπορεί να γραφεί με διαφορετικούς τρόπους χωρίς να αλλάζει (π.χ. ο 7 στο δεκαδικό γράφεται 111 στο δυαδικό) και αντίστροφα, το ίδιο σύμβολο αναπαριστά διαφορετικούς αριθμούς σε διαφορετικά συστήματα (π.χ. το 11 αναπαριστά διαφορετικούς αριθμούς στο δεκαδικό και στο δυαδικό).

Θεματική ενότητα: Ρητοί και Άρρητοι αριθμοί

Οι αριθμοί και οι πράξεις τους είναι στο κέντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης τόσο ως απαραίτητο στοιχείο μαθηματικού γραμματισμού όσο και ως θεμελιώδεις ιδέες για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και γνώσης. Η σταδιακή επέκταση από τους φυσικούς στους ακέραιους, στους ρητούς και στους πραγματικούς παρέχει ευκαιρίες

ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας από τη μέτρηση και την απαρίθμηση μέχρι τη διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων και συναρτήσεων.

Οι μαθητές/-τριες από μικρές ηλικίες χειρίζονται καθημερινές καταστάσεις που χρησιμοποιούν ακραίους (π.χ. το θερμόμετρο, το ασανσέρ κ.λπ.) και στο Δημοτικό έχουν έρθει σε μια πρώτη διαισθητική επαφή με αυτούς και την πρόσθεσή τους. Έχουν εξοικειωθεί με τους κλασματικούς (και τους δεκαδικούς) αριθμούς και τις πράξεις τους, αν και είναι αναμενόμενο να παραμένουν δυσκολίες και παρανοήσεις (σχετικά με το τι μπορεί να παριστάνει ένα κλάσμα, με το αν είναι αριθμός, με την ισοδυναμία κλασμάτων, με πράξεις μεταξύ κλασμάτων κ.λπ.).

Στην Α΄ Γυμνασίου θα ασχοληθούν πιο συστηματικά με τους ακραίους, ώστε να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και ιδιότητες και θα διερευνήσουν τις πράξεις τους καταλήγοντας σε σχετικά συμπεράσματα. Η χρήση της έννοιας του κλάσματος θα οδηγήσει στην επέκταση από τους ακέραιους στους ρητούς αριθμούς και τις πράξεις τους, επιδιώκοντας κατανόηση των αντίστοιχων εννοιών, ιδιοτήτων και σχέσεων, αλλά και ικανοποιητική ευχέρεια στην επίλυση προβλημάτων και την εκτέλεση υπολογισμών. Τέλος, στη Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές/-τριες θα γνωρίσουν την ύπαρξη των αρρήτων, οι οποίοι μαζί με τους ρητούς αποτελούν τους πραγματικούς αριθμούς.

Σύμφωνα με έρευνες (π.χ. Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995) οι μαθητές/-τριες που έρχονται σε επαφή με την έννοια του άρρητου αντιμετωπίζουν δύο βασικές δυσκολίες: μία που αφορά την ασυμμετρία των ρητών μεγεθών και μία δεύτερη που αφορά την υπεραριθμισμό των πραγματικών. Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται με τη μαθηματική ωριμότητα που δεν έχει αναπτυχθεί αρκετά σε αυτές στις ηλικίες και οδηγούν στην αδυναμία των μαθητών/-τριών να αναγνωρίζουν τότε ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος (Tirosh κ.ά., 1998· Sirotic & Zazkis, 2007).

Οι δυσκολίες των μαθητών/-τριών σχετικά με τους ακέραιους αριθμούς αφορούν κυρίως:

- την πρόσθεση ετερόσημων (επειδή ανάγεται σε αφαίρεση φυσικών),
- την αφαίρεση (επειδή μετασχηματίζεται σε πρόσθεση),
- τους διαφορετικούς ρόλους του «-» (ως πρόσημο και ως σύμβολο της αφαίρεσης),
- το πώς προκύπτουν οι «κανόνες των προσήμων» στον πολλαπλασιασμό.
- τον ρόλο της παρένθεσης και την απαλοιφή της.

Οι δυσκολίες των μαθητών/-τριών όσον αφορά τους ρητούς σχετίζονται κυρίως με:

- τις ερμηνείες του κλάσματος (π.χ. ως σχέση μέρους – όλου) και κυρίως ως αποτέλεσμα της διαίρεσης ακραίων και ως σημείο της αριθμογραμμής (στα δύο τελευταία δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σ' αυτή την ενότητα),
- την ισοδυναμία κλασμάτων, ιδιαίτερα με την αναγνώριση δύο ισοδύναμων κλασμάτων ως ίσων, δηλαδή ότι αναπαριστούν τον ίδιο αριθμό και αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής,

- τη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών (π.χ. μπορεί να μην αναγνωρίζουν το $\frac{3}{5}$ και το 0,6 ως τον ίδιο αριθμό) και ιδιαίτερα όταν αυτή είναι περιοδική (π.χ. ο 0,33... συχνά αναγνωρίζεται ως άρρητος ή ταυτίζεται με τον 0,33),
- την ιδιότητα της πυκνότητας των ρητών, δηλαδή ότι μεταξύ δύο διαφορετικών ρητών υπάρχει πάντα ρητός αριθμός σε αντίθεση με τους ακέραιους, και ότι κάθε ακέραιος έχει επόμενο, σε αντίθεση με τους ρητούς,
- τις πράξεις μεταξύ ρητών, τον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων, την προτεραιότητα των πράξεων, τον ρόλο της παρένθεσης και την απαλοιφή της.

Επιπλέον, σχετικά με τη συμβολική διατύπωση ιδιοτήτων και σχέσεων (που συναντούν για πρώτη φορά οι μαθητές/-τριες στην ενότητα των ρητών), δυσκολία παρουσιάζουν:

- η χρήση του γράμματος ως γενικευμένου αριθμού (στη διατύπωση των ιδιοτήτων των πράξεων),
- ο ρόλος του «—» ως δηλωτικό του αντίθετου ($-α$) ενός αριθμού $α$ και η σύγχυση αυτού του ρόλου με εκείνον του προσήμου (ο $-α$ δεν είναι κατ' ανάγκη αρνητικός).

Σημεία που μπορεί να δυσκολεύουν τους/τις μαθητές/-τριες σχετικά με τους άρρητους, είναι:

- η δεκαδική αναπαράστασή τους (δεν μπορούμε να έχουμε πλήρη εικόνα της δεκαδικής αναπαράστασης ενός άρρητου) και η σύγχυση μεταξύ άρρητου και ρητής προσέγγισής του (π.χ. μεταξύ του π και του 3,14 ή μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του 1,41),
- η ηλικία και το επίπεδο μαθηματικής σκέψης που δεν επιτρέπουν (για τους/τις περισσότερους/-ες μαθητές/-τριες) μια αιτιολόγηση του γιατί δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα.

Τέλος, συχνά υπάρχουν δυσκολίες αναγνώρισης και ταξινόμησης ενός αριθμού ως φυσικού, ακέραιου, ρητού ή άρρητου που συνδέονται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των αριθμών (π.χ. ο $\frac{1}{3}$ μπορεί να θεωρείται ρητός, ενώ ο $0,\bar{3}$ άρρητος, ο 2 μπορεί να θεωρείται ακέραιος αλλά όχι ρητός κ.λπ.).

3.2 Άλγεβρα

Θεματική Ενότητα: Κανονικότητες – Συναρτήσεις

Οι μαθητές/-τριες στο Δημοτικό σχολείο έχουν ασχοληθεί με κανονικότητες (γεωμετρικά μοτίβα αλλά και ακολουθίες αριθμών) και έχουν φτάσει να διατυπώνουν τον γενικό όρο μιας κανονικότητας (τουλάχιστον λεκτικά). Έχουν ασχοληθεί με φαινόμενα συμμεταβολής μεγεθών (από την καθημερινή ζωή και από τη Γεωμετρία) και με

προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Επιπλέον, έχουν χρησιμοποιήσει συστήματα συντεταγμένων. Στην Α' και Β' Γυμνασίου θα ασχοληθούν με την αλγεβρική και τη γραφική αναπαράσταση αριθμητικών κανονικοτήτων, στη Β' Γυμνασίου με την έννοια της συνάρτησης, τις αναπαραστάσεις της και ιδιαίτερα με τις $y=ax$, $y=ax+b$ και $y=a/x$, ενώ στη Γ' Γυμνασίου με την $y=ax^2$. Συγχρόνως, θα συνδέουν τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης με τις εξισώσεις, τα συστήματα και άλλα θέματα.

Οι δυσκολίες των μαθητών/-τριών με τις συναρτήσεις σχετίζονται κυρίως με:

- τη συνθετότητα της έννοιας, την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή (ανεξάρτητη και εξαρτημένη), συμμεταβολή, σύνολο, καθώς και την ποικιλία των αναπαραστάσεων της (λεκτική διατύπωση, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών)
- το επίπεδο αφαίρεσης που απαιτεί η μελέτη της συνάρτησης από τα διαφορετικά πλαίσια στα οποία μπορεί να εμφανίζεται (αριθμητική, μέτρηση κ.λπ.), καθώς και η ίδια η διαφορετικότητα αυτών των πλαισίων
- την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές/-τριες την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία (π.χ. βρίσκω την τιμή του y για κάποια τιμή του x) και σε ένα άλλο ως αντικείμενο που συνοδεύεται από μια ποικιλία αναπαραστάσεων (π.χ. διαφορετικές συναρτήσεις – αντικείμενα μπορεί να συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά). Συνήθως οι μαθητές/-τριες Γυμνασίου παραμένουν στην αντίληψη της συνάρτησης ως μιας υπολογιστικής διαδικασίας και δυσκολεύονται να μεταβούν μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης – αντικείμενο, όπως στη γραμμική συνάρτηση, όπου χρειάζεται να συσχετίσουν τη γραφική της παράσταση με την αλγεβρική. Έτσι, συνήθως οι μαθητές/-τριες δυσκολεύονται να αξιοποιήσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010):

- Το μοτίβο που εκφράζει
- Πίνακας τιμών
- Λεκτική περιγραφή
- Συμβολική ισότητα
- Γράφημα

Θεματική Ενότητα: Αλγεβρικές Παραστάσεις

Οι μαθητές/-τριες από το Δημοτικό σχολείο έχουν εμπειρίες που μπορούν να υποστηρίξουν τη μετάβαση στην Άλγεβρα: Έχουν ασχοληθεί με τις ιδιότητες της αριθμητικής, με κανονικότητες και σχέσεις συμμεταβολής, με τύπους για υπολογισμό εμβαδού, με εξισώσεις κ.λπ. Έχουν συναντήσει το γράμμα ως άγνωστο και ως «ετικέτα» ενός μεγέθους (π.χ. $E=\beta \cdot u$). Στο πλαίσιο του Γυμνασίου θα διερευνήσουν έννοιες και διαδικασίες που σχετίζονται με την αλγεβρική παράσταση και τους μετασχηματισμούς

της, χρησιμοποιώντας τες παράλληλα στις εξισώσεις, στις συναρτήσεις και στη Γεωμετρία – Μέτρηση και τη Φυσική. Στην Α' και τη Β' τάξη θα ασχοληθούν κυρίως με αλγεβρικές παραστάσεις πρώτου βαθμού, ενώ στη Γ' κυρίως με παραστάσεις μεγαλύτερου βαθμού. Επιπλέον, στις Β' και Γ' τάξεις θα ασχοληθούν με τις ιδιότητες των δυνάμεων και των ριζών ως αλγεβρικών αναπαραστάσεων που σχετίζονται με τη γραφή των αριθμών.

Οι δυσκολίες των μαθητών/-τριών σχετίζονται κυρίως με:

- τη γλώσσα (φυσική και συμβολική) που χρησιμοποιείται στην Άλγεβρα και τους διαφορετικούς ρόλους του γράμματος: ετικέτα μεγέθους, άγνωστος, γενικευμένος αριθμός, μεταβλητή, παράμετρος,
- τη μετάφραση ανάμεσα σε λεκτικές διατυπώσεις, συμβολικές (αλγεβρικές) εκφράσεις, πίνακες τιμών, εικονικές – γεωμετρικές αναπαραστάσεις,
- το ότι δεν αποδίδουν νόημα στα αλγεβρικά σύμβολα και στη χρήση τους.

Θεματική Ενότητα: Ισότητα – Ανισότητα

Από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές/-τριες έχουν συναντήσει εξισώσεις χωρίς γράμματα που η επίλυσή τους απαιτεί μια πράξη (πχ. $3+_=5$, $_ :5=7$, κοκ), ενώ στη ΣΤ' τάξη έχουν συναντήσει τις ίδιες μορφές εξισώσεων αλλά με χρήση του γράμματος. Στην Α' Γυμνασίου θα ασχοληθούν με εξισώσεις που έχουν άγνωστο μόνο στο ένα μέλος (που δεν απαιτούν αλγεβρικούς χειρισμούς με τον άγνωστο και στα δύο μέλη), στην Β' με εξισώσεις της μορφής $ax+b=cx+d$ (και που μπορεί να περιέχουν και ρητούς συντελεστές και παρενθέσεις), για να φτάσουν στην Γ' τάξη να διαπραγματευθούν ανισώσεις α' βαθμού, πολυωνυμικές εξισώσεις (που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες μετά από παραγοντοποίηση) και γραμμικά συστήματα (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους). Αργότερα θα ασχοληθούν και με άλλες μορφές εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων (πχ. εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις, μη γραμμικά συστήματα κ.λπ.) που απαιτούν κατανόηση των εννοιών και ευχέρεια στην επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού.

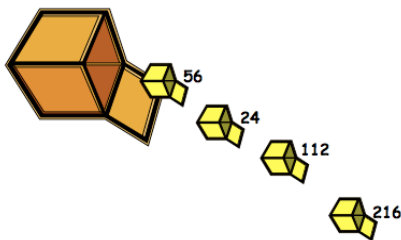
Κάποιες από τις πρώτες δυσκολίες των μαθητών/-τριών, οι οποίες συχνά παραμένουν και στο Γυμνάσιο, σχετίζονται με την κατανόηση του "=" περισσότερο ως προτροπή να κάνουν μια πράξη, να δώσουν ένα αποτέλεσμα, παρά ως σύμβολο ισότητας (ισοδυναμίας των δύο μελών). Επιπλέον, δε γίνεται πάντα κατανοητή η έννοια του αγνώστου (π.χ. για κάποιους/-ες μαθητές/-τριες, οι εξισώσεις $3a+14=58$ και $3b+14=58$ έχουν διαφορετικές λύσεις και για κάποιους/-ες δεν είναι καν εξισώσεις, αφού δεν περιέχουν τον άγνωστο x). Νέες δυσκολίες αναμένονται σχετικά με τον τρόπο που οι μαθητές/-τριες αντιλαμβάνονται τις διαδικασίες επίλυσης μιας εξίσωσης και τη δικαιολόγησή τους, αφού συχνά απομνημονεύονται τεχνικές χωρίς κατανόηση (π.χ.

«αλλάζω μέλος αλλάζοντας πρόσημο») που οδηγούν σε σύγχυση και παρανοήσεις. Το ίδιο φαίνεται να ισχύει για τα συστήματα, με επιπλέον δυσκολία τη γραφική αναπαράσταση και επίλυσή τους. Η «βολική» επέκταση των διαδικασιών επίλυσης εξισώσεων και στις ανισώσεις δημιουργεί δυσκολίες που σχετίζονται με τις ιδιότητες των ανισοτήτων και με το πλήθος λύσεων των ανισώσεων. Σχετικά με τις πολυωνυμικές εξισώσεις και με δεδομένο ότι η επίλυσή τους στηρίζεται στην παραγοντοποίηση, οι δυσκολίες σχετίζονται με τον συλλογισμό «αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ » και με το πλήθος των λύσεων (π.χ. η ύπαρξη δύο λύσεων μπορεί να γίνεται κατανοητή ως ένα είδος «αοριστίας»). Η επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις αποτελεί μία από τις δυσκολότερες δραστηριότητες της Άλγεβρας για τους/τις μαθητές/-τριες του Γυμνασίου και αυτό σχετίζεται με τις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές/-τριες να μοντελοποιήσουν μια κατάσταση και να εκφράσουν αλγεβρικά ένα πρόβλημα.

4 Ενδεικτικά έργα και δραστηριότητες

Έργο 1 (Α' Γυμνασίου, ΜΚΔ)

Μία μαγική μηχανή πολλαπλασιάζει τους αριθμούς που εισέρχονται σε αυτή με έναν αριθμό. Η εικόνα δείχνει τους αριθμούς που βγήκαν από τη μηχανή. Να βρείτε με ποιον αριθμό μπορεί να πολλαπλασιάζει η μηχανή τους αριθμούς που της βάζουμε.



ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	Ειδικά	Συστηματοποίηση, γενίκευση,	Προτεινόμε να χαρακτηρισ τικά της	Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσι
Ενότητα	Α' Γυμνασίου/φυσικοί				

	ΜΚΔ		επέκταση, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες	διδασκτικής προσέγγισης	μο σε όλους/-ες
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, Οπτικοποίηση	Γενικά	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	Προτεινόμενοι πόροι	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές		Συγκεκριμένο	Παιχνίδι		

Διδακτική Διαχείριση: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να διερευνήσουν οι μαθητές/-τριες τις έννοιες του κοινού διαιρέτη και του ΜΚΔ. Πρόκειται για ένα πρόβλημα με περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις (ανοικτό). Μέσα από προβλήματα αυτού του είδους διευκολύνεται η διερεύνηση των μαθητών/-τριών και αποκτά αξία η επιχειρηματολογία. Αν και από την πρώτη διερεύνηση των μαθητών/-τριών οι αναμενόμενες απαντήσεις είναι συγκεκριμένοι αριθμοί (2, 4, 8), οι ερωτήσεις του/της εκπαιδευτικού μπορούν να οδηγήσουν σε αιτιολογήσεις και σε γενικεύσεις, ακόμα και στον κανόνα εύρεσης του ΜΚΔ (ως γινόμενο των κοινών παραγόντων στον μικρότερο εκθέτη). Για παράδειγμα, μια ερώτηση όπως: «πώς ξέρουμε ότι δεν υπάρχει και κάποιος πολλαπλάσιος του 8 που να είναι ο ζητούμενος αριθμός;» μπορεί να οδηγήσει στην αναγκαιότητα ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η ερώτηση «αν οι αριθμοί που βγαίνουν από τη μηχανή ήταν οι 36, 60, 144 και 216, ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός με τον οποίο μπορεί να πολλαπλασιάζει η μηχανή;» μπορεί να οδηγήσει στην ιδέα του ΜΚΔ. Τέλος, οι μαθητές/-τριες θα μπορούσαν να «ανακαλύψουν» έναν τρόπο να βρίσκουν την απάντηση στο συγκεκριμένο πρόβλημα για οποιουδήποτε αριθμούς (δηλαδή τον κανόνα εύρεσης του ΜΚΔ).

Έργο 2 (Α΄ Γυμνασίου, θεσιακά αριθμητικά συστήματα)

Ένας αριθμός μετατρέπεται από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα και δίνει τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο αρχικός αριθμός;

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα
--	---	---

		(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	Ειδικά	Εξήγηση, επαλήθευση, τεκμηρίωση	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδασκτικής προσέγγισης	Διερεύνηση
Ενότητα	Α' Γυμνασίου/φυσικοί_θεσιακά_αριθμητικά συστήματα				
Μεγάλες Ιδέες	Ισοδυναμία				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμού & επιχειρηματολογίας	Γενικά	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	Προτεινόμενοι πόροι	
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές					
		Συγκεκριμένο	μαθηματικό πρόβλημα		

Διδακτική Διαχείριση: Ο στόχος του έργου είναι να εμπλακούν οι μαθητές/-τριες σε διερεύνηση και αναστοχασμό της αξίας θέσης των ψηφίων στα δύο συστήματα και του ρόλου των δυνάμεων του 2 στο δυαδικό σύστημα. Έτσι, αν και οι πρώτες σκέψεις των μαθητών/-τριών μπορεί να στηρίζονται σε απλοϊκές μεθόδους (π.χ. δοκιμή και έλεγχο), η αναζήτηση όλων των αριθμών που θα μπορούσαν να έχουν το χαρακτηριστικό που περιγράφεται οδηγεί σε μια πιο συστηματική διερεύνηση, που μπορεί να περιέχει ερωτήσεις όπως «ποια ψηφία μπορεί να έχει ένας τετραψήφιος στο δυαδικό;», «ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος από τους τετραψήφιους στο δυαδικό και πώς γράφονται στο δεκαδικό;». Η γραφή του αριθμού ως ανάπτυγμα είναι ένα επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτής της δραστηριότητας (π.χ. $11_{10}=1 \cdot 10+1 \cdot 1$, ενώ $1011_2=1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1$).

Έργο 3 (Α' Γυμνασίου, Ακέρατοι αριθμοί)

Σε μια παραλλαγή του παιχνιδιού με τις κάρτες, μπορούν από μια ομάδα να αφαιρούνται κάρτες, θετικές ή αρνητικές. Έτσι, για παράδειγμα, όταν αφαιρούνται 5 θετικές κάρτες από 10, μένουν 5, δηλαδή $(+10)-(+5)=+5$.

α) Πώς μπορούμε να εκφράσουμε (με πράξη) την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 5 αρνητικές κάρτες και της αφαιρέθηκαν 3 αρνητικές; Ποιο είναι τώρα το σκορ της ομάδας;

- β) Μια ομάδα έχει σκορ +25. Με ποιους τρόπους μπορεί να αυξήσει το σκορ της σε +28; Με ποιους τρόπους μπορεί να μειωθεί το σκορ της σε +20;
- γ) Πώς θα μπορούσαν από μια ομάδα που δεν έχει ούτε θετικές ούτε αρνητικές κάρτες να αφαιρεθούν 5 θετικές κάρτες; 3 αρνητικές;
- δ) Χρησιμοποιήστε το παιχνίδι με τις κάρτες για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν.

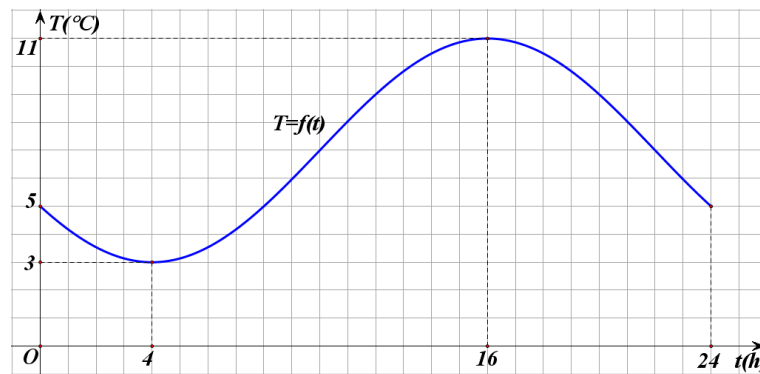
ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
<i>Πεδίο</i>	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	<i>Ειδικά</i>	Δημιουργί α συνδέσεων , τεκμηρίωσ η,	<i>Προτεινόμεν α χαρακτηριστι κά της διδασκτικής προσέγγισης</i>	Διερεύννη ση
<i>Ενότητα</i>	Α΄ Γυμνασίου/ακέρα ιοι				
<i>Μεγάλες Ιδέες</i>	Μεταβολή				
<i>Μαθηματικ ές διεργασίες & ρακτικές</i>	Επίλυση προβλήματος επιλογή και χρήση εργαλείων	<i>Γενικά</i>	Ευελιξία μαθηματικ ού συλλογισμ ού	<i>Προτεινόμεν οι πόροι</i>	
<i>Κοινωνικο- πολιτισμικέ ς πρακτικές</i>					
		<i>Συγκεκριμέ νο</i>	Παιχνίδι		

Διδακτική Διαχείριση: Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή στην αφαίρεση ακεραίων. Ο στόχος της είναι να ανακαλύψουν και να διατυπώσουν οι ίδιοι/-ες οι μαθητές/-τριες τον ορισμό της αφαίρεσης ως πρόσθεση με τον αντίθετο του αφαιρετέου. Η χρήση των θετικών και αρνητικών καρτών έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να οδηγήσει στην ιδέα του μετασχηματισμού της αφαίρεσης σε πρόσθεση. Για παράδειγμα, για την αφαίρεση $(+3)-(-5)$, δηλαδή για να αφαιρεθούν 5 αρνητικές κάρτες, ενώ έχουμε μόνο 3 θετικές, θα πρέπει πρώτα να προστεθούν 5 «ζεύγη του μηδενός», δηλαδή 5 θετικές και 5 αρνητικές κάρτες, ώστε να μπορούν μετά να αφαιρεθούν οι 5 αρνητικές. Έτσι όμως, το αποτέλεσμα είναι $(+3)+(+5)$, αφού έμειναν οι 5 θετικές κάρτες. Μετά την εξοικείωση των μαθητών/-τριών με το πλαίσιο της κατάστασης και τη συμβολική έκφραση της αφαίρεσης (ερώτημα α), το ερώτημα (β) έχει

ως στόχο τη διερεύνηση καταστάσεων όπου η πρόσθεση (αντιστοίχως αφαίρεση) θετικών καρτών μπορεί να φέρει τα ίδια αποτελέσματα με την αφαίρεση (αντιστοίχως πρόσθεση) αρνητικών. Στο (γ) προσδοκούμε οι μαθητές/-τριες να χρησιμοποιήσουν την εισαγωγή ζευγαριών του μηδενός (π.χ. 5 θετικές και 5 αρνητικές κάρτες), ώστε να μπορέσουν να αντιμετωπίσουν το ερώτημα. Για την αποφυγή πιθανών συγχύσεων, η ομάδα έχει 0 πόντους και πρέπει να της αφαιρεθούν 5 θετικές κάρτες (ως «ποινή» ή λόγω των κανόνων του παιχνιδιού). Αυτό ίσως είναι και το δυσκολότερο έργο, γιατί απαιτεί εφευρετικότητα και χρόνο. Στο ερώτημα (δ) είναι χρήσιμο να συνεχίσουν οι μαθητές/-τριες να σκέφτονται με βάση τις κάρτες πριν επιχειρηθεί μια γενίκευση στο (ε) ερώτημα. Απαιτείται να αφιερωθεί αρκετός χρόνος (ιδιαίτερα για τα ερωτήματα β, γ και ε) στη συζήτηση μεταξύ των μαθητών/-τριών και μεταξύ αυτών και του/της εκπαιδευτικού, μέσα στις ομάδες των μαθητών/-τριών και στο σύνολο της τάξης. Ο/Η εκπαιδευτικός είναι προτιμότερο να επιλέξει τον ρόλο του/της συντονιστή/-στριας της συζήτησης (που ίσως χρειαστεί με κατάλληλες ερωτήσεις να βοηθήσει τους/τις μαθητές/-τριες στην εστίαση των συζητήσεων) και όχι του/της καθοδηγητή/-τριας ή και αυτού/-ής που λύνει την άσκηση.

Έργο 4 (Β' Γυμνασίου, Συναρτήσεις)

Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.



- Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν; Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία;
- Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6°C ;
- Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο $(20, 9)$ της γραφικής παράστασης;
- Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
------------------------	----------------	---------------------------------

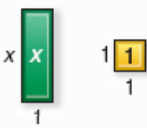
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμοί, Άλγεβρα και Ανάλυση	Ειδικά	Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίηση, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (μοντελοποίηση, εξήγηση, τεκμηρίωση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Ενότητα	Β΄ Γυμνασίου, Συναρτήσεις				
Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Δημιουργία συνδέσεων, οπτικοποίηση	Γενικά	Να αντιμετωπίσουν τα Μαθηματικά ως μέρος της πολιτεότητας (citizenship) – πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου	Προτεινόμενοι πόροι	
Κοινωνικο- πολιτισμικές πρακτικές	Να είναι μαθηματικά εγγράμματοι/-ες, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα Μαθηματικά αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά.			Συγκείμενο	

Διδακτική διαχείριση: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Το πρόβλημα και η εξοικείωση των μαθητών/-τριών με τέτοιου είδους εικόνες από την καθημερινή και τη σχολική τους ζωή, αναμένεται να διαμορφώσουν ένα πρόσφορο πλαίσιο για τη διερεύνηση εννοιών όπως γραφική παράσταση, ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών. Γενικότερα, το πέρασμα στο επίπεδο της συνάρτησης – αντικείμενο μπορεί να υποστηριχθεί δίνοντας έμφαση στην ποικιλία των αναπαραστάσεων και στη μετάφραση από τη μία στην άλλη, καθώς και από τη διερεύνηση και σύγκριση στοιχείων όπως η κλίση, ο ρόλος των α και β στην $y=\alpha x+\beta$, κ.ο.κ. Η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει αποτελεσματικά εργαλεία διερεύνησης, οπτικοποίησης και σύνδεσης των παραπάνω στοιχείων, με την προϋπόθεση ότι οι

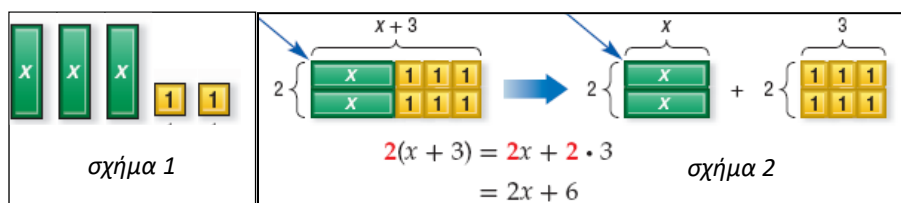
μαθητές/-τριες δεν έχουν τον ρόλο του/της θεατή, αλλά εμπλέκονται με τη χρήση των προσφερόμενων αναπαραστάσεων για την εκτέλεση μαθηματικών δράσεων, τη διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και την επίλυση προβλημάτων.

Έργο 5 (Β' Γυμνασίου, Μετασχηματισμός)

Για να «δούμε» μια αλγεβρική παράσταση (όπως η $3x+2$), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορθογώνια μήκους x και πλάτους 1 για το x και τετράγωνα πλευράς 1 για το 1.



Έτσι, η παράσταση $3x+2$ μπορεί να απεικονιστεί όπως στο σχήμα 1. Χρησιμοποιώντας αυτά τα «πλακάκια», μπορούμε να βρούμε το διπλάσιο της παράστασης $x+3$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



α) Χρησιμοποιώντας τα πλακάκια γράψτε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις: $2x+3x$, $5x-2x$, $2x+5x+2$, $(2x+3)+(5x+3)$.

β) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσετε τις ίδιες παραστάσεις;

γ) Κάποιος/-α μαθητής/-τρια έγραψε: $2x+5+6x=13x$. Είναι σωστό ή λάθος; Εξηγήστε την απάντησή σας με τους δύο τρόπους που χρησιμοποιήσατε στα δύο προηγούμενα ερωτήματα

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμοί, Άλγεβρα και Ανάλυση	Ειδικά	Μετασχηματιστικές δράσεις (συστηματοποίηση, οπτικοποίηση,	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία - πολλαπλά σημεία
Ενότητα	Β' Γυμνασίου, Άλγεβρικές παραστάσεις				

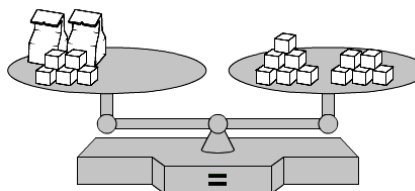
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί		αναπαράστασ η).	ς	«εισόδου», ποικιλία προσεγγίσεων / στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους/-ες
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	συλλογισμού & επιχειρηματολογίας, μαθηματικής επικοινωνίας, οπτικοποίησης, επιλογής και χρήσης εργαλείων	Γενικά	Να μιλήσουν, να γράψουν και να ακούσουν μαθηματικά (μαθηματική επικοινωνία)	Προτεινόμενοι πόροι	Πλακίδια
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Αξιοποιούν δεξιότητες αξιολόγησης, ελέγχου και αυτογνωστικής ρύθμισης της προόδου τους προκειμένου να οικοδομήσουν ισχυρές ταυτότητες μαθητευομένων των Μαθηματικών.	Συγκεκριμένο	Ρεαλιστικό		

Διδακτική Διαχείριση: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι η απλοποίηση γραμμικών αλγεβρικών παραστάσεων με εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας. Η χρήση των «πλακιδίων» είναι μια επιλογή με στόχο τη δημιουργία εικονικών αναπαραστάσεων που από τη μια μεριά θα υποστηρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα και από την άλλη θα βοηθούν στην ανάπτυξη, από τους/τις μαθητές/-τριες «αυτοματισμών» στην αναγωγή όμοιων όρων. Μια άλλη (παρόμοια) επιλογή θα μπορούσε να είναι η χρήση εμβαδών ορθογωνίων. Στην αρχή της δραστηριότητας χρειάζεται να δοθεί χρόνος για την εξοικείωση των μαθητών/-τριών με το πλαίσιο των πλακιδίων. Οι διερευνήσεις τους έχουν στόχο την ανάπτυξη από τους/τις ίδιους/-ες στρατηγικών σε απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς και τη σύγκριση διαφορετικών στρατηγικών και μεθόδων.

Η ευχέρεια στον αλγεβρικό λογισμό αποτελεί έναν στόχο ο οποίος διαφοροποιείται και αναπτύσσεται από τάξη σε τάξη, αλλά σε κάθε περίπτωση μπορεί και πρέπει να επιδιώκεται σε συνδυασμό με την κατανόηση και τη δημιουργία κατάλληλων αναπαραστάσεων. Έτσι, στην Α' και τη Β' Γυμνασίου, η απλοποίηση γραμμικών παραστάσεων μπορεί να στηριχτεί σε γεωμετρικές εικόνες ή στα «πλακίδια» (algebra tiles), όπως στο παραπάνω έργο που είναι συμβατές με τη «θεμελιώδη ιδέα» της επιμεριστικής ιδιότητας.

Έργο 6 (Α΄ Γυμνασίου, Εξισώσεις)

Στο διπλανό σχήμα οι τσάντες έχουν το ίδιο βάρος και κάθε κυβάκι ζυγίζει 50 g. Η ζυγαριά ισορροπεί. Υπολογίστε πόσο ζυγίζει κάθε τσάντα. Περιγράψτε τον τρόπο που θα το υπολογίζατε, αν είχατε μπροστά σας τη ζυγαριά και δεν είχατε χαρτί και μολύβι. Πώς θα περιγράφατε τον παραπάνω τρόπο με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης;



ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμοί, Άλγεβρα και Ανάλυση	Ειδικά	Επίλυση προβλήματος/ μοντελοποίησ η, αποδεικτική διαδικασία, εφαρμογή (συμβολισμός, εξήγηση, τεκμηρίωση)	Προτεινόμεν α χαρακτηρισ τικά της διδασκαλίας προσέγγισ ς	Πολιτισμικά ευαισθητοποιη μένη διδασκαλία - πολλαπλά σημεία «εισόδου», ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους/-ες
Ενότητα	Α΄ Γυμνασίου, Άλγεβρικές σχέσεις				
Μεγάλες Ιδέες	Ισοδυναμία				
Μαθηματι κές διεργασί ες & πρακτικές	Οπτικοποίηση ς, επίλυσης προβλήματος, μοντελοποίησ ης	Γενικά	Να μιλήσουν, να γράψουν και να ακούσουν Μαθηματικά (μαθηματική επικοινωνία).	Προτεινόμεν οι πόροι	
Κοινωνικο	Να είναι				

- πολιτισμικ ές πρακτικές	μαθηματικά εγγράμματοι/ -ες, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιού νται τα Μαθηματικά, αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιών τας τα Μαθηματικά.	Συγκεί μενο	Καθημερινότη τα		
------------------------------------	--	----------------	--------------------	--	--

Διδακτική Διαχείριση: Μέσα από το μοντέλο της ζυγαριάς οι μαθητές/-τριες μπορούν να εξερευνήσουν τόσο τις ιδιότητες της ισότητας (ότι η ισότητα – ισορροπία δεν αλλάζει αν κάνουμε τη ίδια πράξη – δράση και στα δύο μέλη) όσο και τη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης. Είναι σημαντικό η εξερεύνηση αυτή να γίνει από τους/τις ίδιους/-ες τους/τις μαθητές/-τριες μέσα από το νοητικό πείραμα με τη ζυγαριά (χωρίς χαρτί και μολύβι) και κατόπιν να διατυπωθεί συμβολικά από τους/τις ίδιους/-ες. Είναι πιθανό κάποιοι/-ες μαθητές/-τριες να λύσουν το πρόβλημα με δοκιμές, εφόσον αυτή η μέθοδος είναι πιο προσιτή στον άπειρο λύτη και πιο κοντά στην καθημερινή εμπειρία. Με κατάλληλη μετατροπή των δεδομένων (π.χ. ένα κυβάκι λιγότερο στον έναν από τους δίσκους) μπορεί να φανεί ότι αυτή η μέθοδος δεν είναι πάντα εύχρηστη.

Στόχος είναι η εξοικείωση των μαθητών/-τριών με την αλγεβρική επίλυση μιας εξίσωσης με χρήση των ιδιοτήτων της ισότητας (με την ίδια πράξη και στα δύο μέλη). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο με προσεκτικό σχεδιασμό που υπερβαίνει τα χρονικά όρια μιας τάξης. Στην Α΄ Γυμνασίου, πριν από την εστίαση στις ιδιότητες της ισότητας (π.χ. με το μοντέλο της ζυγαριάς) είναι χρήσιμες οι μέθοδοι δοκιμής – λάθους – βελτίωσης (η οποία βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής – αγνώστου, της εξίσωσης και της επίλυσής της) και των αντίστροφων πράξεων (που προετοιμάζει για περισσότερο αναπτυγμένες αλγεβρικές μεθόδους). Η χρήση εξισώσεων για τη μοντελοποίηση και επίλυση απλών προβλημάτων ή προβλημάτων που έχουν αντιμετωπιστεί με απλούστερες μεθόδους (ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, προβλήματα τόκου, εκπτώσεων και αυξήσεων κ.λπ.) εισάγει τους/τις μαθητές/-τριες στη γενίκευση και την αφαίρεση αναδεικνύοντας τη δύναμη των αλγεβρικών μεθόδων.

6. Ενδεικτικό παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες

Υποπεδίο: Αριθμοί

Στους Αριθμούς δίνεται ένα παράδειγμα για την εξέλιξη των ΠΜΑ στις ενότητες Φυσικοί αριθμοί και Ρητοί αριθμοί, που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθούν στην πορεία όλων των τάξεων τα ΠΜΑ.

Στην ενότητα των Ρητών αριθμών η μελέτη των αιγυπτιακών κλασμάτων (κλάσματα με αριθμητές μονάδα) μπορεί να υποβοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση τόσο των ρητών όσο και των ανισοτικών σχέσεων.

Έργο (τάξεις Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού)

Στους/Στις μαθητές/-τριες τίθεται το πρόβλημα:

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα με αριθμητή μονάδα, γράφοντας τους αριθμούς ως άθροισμα τέτοιων κλασμάτων. Έτσι, για παράδειγμα έγραφαν αντί για $\frac{7}{12}$ το άθροισμα: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

α1) (Δημοτικό) Μπορείτε να γράψετε το κλάσμα $\frac{2}{3}$ ως άθροισμα 2 κλασμάτων με αριθμητές το 1;

α2) (Δημοτικό) Μπορείτε να γράψετε το κλάσμα $\frac{5}{6}$ ως άθροισμα 2 κλασμάτων με αριθμητές το 1;

α3) (Δημοτικό) Μπορείτε να γράψετε τη μονάδα ως άθροισμα 2 κλασμάτων με αριθμητή το ένα; Ως άθροισμα τριών κλασμάτων με αριθμητή το ένα;

β1) (Α΄ Γυμνασίου) Μπορείτε να βρείτε φυσικούς x, y, z ώστε: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$;

β2) (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου) Μπορούν και οι τρεις φυσικοί x, y, z ώστε: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ να ξεπερνούν το 3;

β3) (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου) Έστω $x \leq y \leq z$, ώστε: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Εξηγήστε γιατί $x < 1$ και $x \leq 3$.

γ1) (Α΄ Λυκείου) Να λυθεί η εξίσωση για φυσικούς αριθμούς x, y, z : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

γ2) (Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού) Να λυθεί η εξίσωση για φυσικούς αριθμούς x, y, z : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

γ3) (Β' Λυκείου Προσανατολισμού) Να λυθεί η εξίσωση για φυσικούς αριθμούς x, y, z, w :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 1.$$

γ4) (Β' Λυκείου Προσανατολισμού) Ποιος θα είναι ο μεγαλύτερος παρονομαστής, αν υπάρχουν n κλάσματα στην αριστερή πλευρά της ισότητας;

γ5) επέκταση (Β' Λυκείου Προσανατολισμού) Να προσδιοριστούν όλοι οι φυσικοί $n > 2$ οι οποίοι μπορούν να γραφτούν στη μορφή: $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ για κατάλληλους φυσικούς x, y, z .

δ) (για όλες τις τάξεις) Βρείτε πληροφορίες σχετικά με τη χρήση των αιγυπτιακών κλασμάτων. Γιατί οι Αιγύπτιοι τα χρησιμοποιούσαν; Ποια ήταν η θέση των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή τους; Ποια η σύνδεση των Μαθηματικών με πρακτικά προβλήματα;

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	Ειδικά	Εξήγηση, επαλήθευση, τεκμηρίωση	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Ομαδοσυνεργατική διερεύνηση
Ενότητα	Α' Γυμνασίου/ρητοί, Γ' Γυμνασίου, Α' Λυκείου, Β' Λυκείου Προσανατολισμού /πράξεις ρητών, ανισώσεις				
Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Επίλυση προβλήματος συλλογισμού & επιχειρηματολογίας, επιλογής και χρήσης εργαλείων, επίλυσης προβλήματος, μεταγνωστικής ενημερότητας	Γενικά	Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	Προτεινόμενοι πόροι	Κείμενα με ιστορία αρχών αιγυπτιακών Μαθηματικών

Κοινωνικο - πολιτισμι κές πρακτικές	Να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις. Να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού, καθώς και την αξία της για την ανθρώπινη δραστηριότητα διαχρονικά.	Συγκε ίμενο	Μαθηματικό/ιστορικό πλαίσιο		

Διδακτική διαχείριση: Το έργο απευθύνεται σε πολλές τάξεις και αναδεικνύει την εξέλιξη των ΠΜΑ του αριθμού (φυσικοί και ρητοί) στα τάξεις της Δευτεροβάθμιας, καθώς και τα ΠΜΑ της ανισότητας και των αλγεβρικών σχέσεων - πράξεων. Επιπλέον αναδεικνύει τη μαθηματική πρακτική της επίλυσης προβλήματος μέσα από την εύρεση στρατηγικών επίλυσης και την υιοθέτηση τεχνικών μεταγνωστικής ενημερότητας (έλεγχος και επαναδιατύπωση εικασιών και μεθόδων επίθεσης στο πρόβλημα).

Οι μαθητές/-τριες μπορούν να πειραματιστούν ελέγχοντας τριάδες αριθμών που να ικανοποιούν την εξίσωση. Έτσι, οδηγούνται κατά φυσιολογικό τρόπο στον σχηματισμό εικασιών. Παράλληλα μπορούν να παρατηρήσουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί, ώστε να επιλύουν το πρόβλημα. Υπάρχει μια προφανής λύση: $(x, y, z) = (3, 3, 3)$. Κάποιοι μαθητές/-τριες μπορεί να δουν και τη λύση: $(x, y, z) = (2, 3, 6)$. Το πρόβλημα είναι στη συνέχεια να βρουν όλες τις δυνατές λύσεις. Η πρώτη στρατηγική επίθεσης στο πρόβλημα είναι η μείωση του επιπέδου της πολυπλοκότητας χρησιμοποιώντας τη συμμετρία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $x < y < z$. Η επιπλέον αυτή υπόθεση, αν και δεν είναι μέρος της συνήθους διδακτέας ύλης, ωστόσο αποτελεί μια κλασική στρατηγική, η οποία συναντάται σε αρκετά προβλήματα.

Ενώ τα προβλήματα που συναντούν οι μαθητές/-τριες είναι συνήθως καθοδηγητικά, με την έννοια ότι ο/η μαθητής/-τρια ακολουθεί μια καθορισμένη διαδικασία και οδηγείται

έτσι απευθείας στη λύση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αναδεικνύει την αναγκαιότητα να αποκτάει ο/η λύτης μια συνολική αποτίμηση της κατάστασης πριν επιλέξει κάποια συγκεκριμένη ενέργεια επίλυσης. Η παρατήρηση ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν μπορεί όλοι να ξεπερνούν το 3 σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι $x > 1$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι μόνες περιπτώσεις που πρέπει να εξεταστούν είναι οι: $x=3$ και $x=2$. Η πρώτη οδηγεί σε 1 λύση, ενώ η δεύτερη στις περιπτώσεις: $y = 3$ ή $y = 4$, οπότε οδηγούμαστε στην επιπλέον (των δύο προηγούμενων) λύση $(x, y, z) = (2, 4, 4)$.

Οι ερωτήσεις β) και γ) μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα στους/στις μαθητές/-τριες να αναπτύξουν περαιτέρω στρατηγικές επίλυσης διερευνώντας το γενικό ερώτημα.

Η ερώτηση δ) (για μαθητές Β' Λυκείου προσανατολισμού που θα ενδιαφέρονταν να «πειραματιστούν» με κάτι πιο προκλητικό) αποτελεί παράδειγμα ερωτήματος που μπορεί να οδηγήσει σε εικασίες που δεν έχουν ακόμη απαντηθεί. Πιο συγκεκριμένα η εικασία του Paul Erdos ότι ο $4/n$ έχει τέτοια αναπαράσταση για κάθε $n > 3$ δεν έχει λυθεί. Οι περισσότερες περιπτώσεις αυτού του προβλήματος μπορούν να αντιμετωπιστούν σε μικρό χρονικό διάστημα.

Η παρατήρηση-κλειδί που μπορεί να κρίνει ο/η διδάσκοντας/-ουσα ότι πρέπει σε κάποια στιγμή να δοθεί ως σχέση προς απόδειξη είναι η σχέση: $\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa+1} = \frac{1}{\kappa(\kappa+1)}$

Πολλοί/-ές μαθητές/-τριες, πειραματιζόμενοι/-ες με τα κλάσματα ενδεχομένως να την ανακαλύψουν. Αυτό αυτόματα μας βοηθάει να λύσουμε την περίπτωση που ο n είναι άρτιος ακέραιος. Πράγματι, αν $n = 2m$, έχουμε: $\frac{4}{n} = \frac{2}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$

Οι μαθητές/-τριες της Β' ή Γ' Γυμνασίου ή της Α' Λυκείου σε 1 διδακτική ώρα είναι πιθανόν να φτάσουν σε ένα σύνολο περιπτώσεων που καλύπτουν κάθε αριθμό που δεν αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 24. Οι μαθητές/-τριες της Β' Προσανατολισμού, θα μπορέσουν στη Θεωρία Αριθμών να εκφράσουν τη σχέση αυτή στη γενικότητά της και να την αποδείξουν.

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα καλό παράδειγμα του πώς μπορεί ο/η μαθητής/-τρια να σημειώσει πρόοδο σε όποια τάξη της Δευτεροβάθμιας και αν βρίσκεται (ανάλογη της ηλικίας του/της και των δεξιοτήτων που έχει αναπτύξει), και να υπάρχουν ακόμη μέρη του προβλήματος που δεν έχουν απαντηθεί από τη μαθηματική κοινότητα.

Ενδεικτικά τα ερωτήματα θα μπορούσαν να διαχωριστούν με βάση την τάξη ως εξής:

ερώτημα α):

- από Α' Γυμνασίου η μελέτη περιπτώσεων,
- από Β'-Γ' Γυμνασίου η εύρεση της συνθήκης των φυσικών (σε σχέση με το 3) και η αναγνώριση των διαφορετικών περιπτώσεων με βάση τη σχετική θέση των x, y, z .

- από Α΄ Λυκείου η αναγνώριση της γενικής περίπτωσης με βάση την υπόθεση της σχετικής διάταξης των x, y, z .

ερώτημα β):

- από Α΄ Γυμνασίου η μελέτη περιπτώσεων,
- από Β΄-Γ΄ Γυμνασίου η εύρεση της συνθήκης των φυσικών (σε σχέση με το 3) και η αναγνώριση των διαφορετικών περιπτώσεων με βάση τη σχετική θέση των x, y, z .
- από Α΄ Λυκείου μεταφορά της διαδικασίας σε τέσσερις φυσικούς και η επακόλουθη λύση (η αναγνώριση της γενικής περίπτωσης με βάση την υπόθεση της σχετικής διάταξης των x, y, z).

ερώτημα γ), Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού: η ανάδειξη στρατηγικών από τις προηγούμενες περιπτώσεις που μπορούν να οδηγήσουν στη μελέτη της γενικής περίπτωσης.

ερώτημα δ), Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού: Οι μαθητές/-τριες εξετάζουν την περίπτωση για $n=3$ και εκφράζουν τη σχέση των ισοϋπόλοιπων ως προς 24.

β) Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία

1. Σημασία του πεδίου

Το πεδίο διαιρείται σε: α) Γεωμετρία, β) Μετρήσεις και γ) Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας – Θέση στο επίπεδο.

1.1 Γεωμετρία

Η Γεωμετρία αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο των Μαθηματικών στα Προγράμματα Σπουδών της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην Ελλάδα, τα τελευταία δε χρόνια αρχίζει να αποκτά κεντρικό ρόλο στις αντίστοιχες βαθμίδες εκπαίδευσης διεθνώς και τονίζεται η σπουδαιότητά της τόσο ως αυτόνομο πεδίο αλλά και ως μέσο ανάπτυξης και άλλων μαθηματικών εννοιών. Ιστορικά η Γεωμετρία αποτέλεσε το πεδίο με βάση το οποίο αναπτύχθηκε κάθε παραγωγική επιστήμη. Το γεωμετρικό μοντέλο από την εποχή του Ευκλείδη αποτέλεσε τη βάση της ανάπτυξης των Μαθηματικών ως λογική δομή στην οποία μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα με βάση κάποιες δεδομένες προτάσεις.

Η Γεωμετρία ως μαθηματικό πεδίο συνίσταται από «ένα δίκτυο εννοιών, τρόπων σκέψης και συστημάτων αναπαράστασης» (Batista, 2007, σ. 843) μέσω των οποίων διερευνούμε τα δομικά στοιχεία του χώρου (τα γεωμετρικά σχήματα, τις ιδιότητες και τις σχέσεις τους) και γίνονται ορατοί οι τρόποι δόμησης του χώρου, καθώς και οι τρόποι ανάλυσης των συνεπειών αυτής της δόμησης (Battista, 1999). Η Γεωμετρία έχει διττή φύση, από τη μια μεριά είναι ένα θεωρητικό αντικείμενο και από την άλλη ασχολείται με αντικείμενα της πραγματικότητας. Οι γεωμετρικές έννοιες αποτελούν τη βάση της μαθηματικής σκέψης, ο χωρικός και ο γεωμετρικός συλλογισμός που τη συνοδεύουν είναι κεντρικής σημασίας για την κατανόηση των Μαθηματικών. Η ενίσχυση των ικανοτήτων των μαθητών/-τριών να σκέφτονται λογικά και να επιχειρηματολογούν με συνέπεια θεωρείται σημαντικός στόχος της διδασκαλίας στο σχολείο. Η ανάπτυξη ικανοτήτων λογικής συλλογιστικής και επιχειρηματολογίας είναι σημαντική για πολλούς διαφορετικούς τομείς και παίζει ειδικό ρόλο στα Μαθηματικά. Κατά συνέπεια, η συλλογιστική, η επιχειρηματολογία και η μαθηματική απόδειξη έχουν ενσωματωθεί στην τάξη των Μαθηματικών σε όλα τα Προγράμματα Σπουδών Μαθηματικών αλλά με διαφορετική έμφαση και προσεγγίσεις. Η ενασχόληση με τη Γεωμετρία συμβάλλει στην ανάπτυξη διαφόρων χαρακτηριστικών της **γεωμετρικής σκέψης** (Duval, 1998), από την απλή αναγνώριση σχημάτων, στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων των σχημάτων μέχρι την ικανότητα σύνθεσης μιας τυπικής γεωμετρικής απόδειξης (Van Hiele, 1986).

Όμως η προπαρασκευαστική αξία της Γεωμετρίας μπορεί να φανεί και στις συνδέσεις της Γεωμετρίας με άλλα γνωστικά ζητήματα τόσο των Μαθηματικών όσο και άλλων

τομέων των φυσικών επιστημών. Οι έννοιες και οι διαδικασίες της Γεωμετρίας στηρίζουν την προσέγγιση πολλών μαθηματικών εννοιών: Αξιοποιούνται στην επίλυση προβλήματος με τη δημιουργία κατάλληλων διαγραμμάτων, στηρίζουν τη δημιουργία νοερών εικόνων, την κατανόηση συμβόλων, την κατανόηση σχηματισμών για την απόδοση αριθμητικών σχέσεων, τη γραμμή των αριθμών, γραφικές παραστάσεις ή άλλες μαθηματικές διαδικασίες που στηρίζονται σε δισδιάστατες ή τρισδιάστατες διατάξεις (πράξεις, υποδιαιρέσεις μονάδων, πίνακες κ.ά.). Για παράδειγμα, είναι γνωστή η αξιοποίηση γεωμετρικών γνώσεων στη Φυσική ή η αξιοποίηση γεωμετρικών αναπαραστάσεων προκειμένου να βρεθεί κάποιος αλγεβρικός τύπος που μοντελοποιεί και επιλύει ένα πρόβλημα, η ανάπτυξη γεωμετρικών μοντέλων για την αναπαράσταση των πράξεων, την απόδειξη αλγεβρικών ιδιοτήτων (όπως της επιμεριστικής ιδιότητας $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$) και ταυτοτήτων (π.χ. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$) κ.ά.

Η γεωμετρία ως πεδίο διδασκαλίας και μάθησης δεν αφορά μόνο μαθηματικά ζητήματα, αλλά και την ανάπτυξη των γνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών/-τριών, όπως η διερεύνηση, η κριτική, η δημιουργική σκέψη, η αναπαράσταση όσων έχουν μάθει και η αυτοέκφραση (Erdogan, Akkaya & Akkaya, 2009; Mistretta, 2000).

Η σημασία της διδασκαλίας της συνδέεται τόσο με τη χρησιμότητά της στην καθημερινή ζωή όσο και με άλλους τεχνολογικούς και επιστημονικούς τομείς. Ένα πλήθος από χωρικές και γεωμετρικές γνώσεις και διαδικασίες είναι απαραίτητες για την αντίληψη και διαχείριση καθημερινών καταστάσεων και προβλημάτων και χρησιμοποιούνται σε διάφορα επαγγέλματα, επειδή τα σχήματα και τα αντικείμενα που μαθαίνουμε από τη Γεωμετρία είναι επίσης διαθέσιμα στον κόσμο μας (Goos & Spencer, 2003). Ως εκ τούτου, πολλές δράσεις του σύγχρονου ατόμου στηρίζονται σε γεωμετρικές γνώσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε διαδικασίες όπως η ανάγνωση και η λειτουργική χρήση σχεδίων, μοντέλων, διαγραμμάτων και χαρτών, ο σχεδιασμός και η διαχείριση φυσικών και τεχνητών αντικειμένων, η οργάνωση και η λειτουργική ταξινόμηση αντικειμένων στον χώρο. Για παράδειγμα, επιστήμονες και επαγγελματίες όπως οι αρχιτέκτονες, οι καλλιτέχνες και οι τοπογράφοι χρησιμοποιούν τακτικά τη Γεωμετρία (Schäfer, 2004). Η δημιουργία και η επεξεργασία νοερών εικόνων και αναπαραστάσεων, η αντίληψη των δισδιάστατων και τρισδιάστατων καταστάσεων, η ευλυγισία στην αλλαγή οπτικών γωνιών και η χωρική μνήμη που καλλιεργούνται με την κατάλληλη διδασκαλία της Γεωμετρίας έχουν μεγάλη σημασία για τον άνθρωπο και αποκτούν στα Προγράμματα Σπουδών τα τελευταία χρόνια την ίδια σημασία με την αντίληψη των αριθμών και των νοερών πράξεων (Clements & Battista, 1992). Πρόκειται για δεξιότητες απαραίτητες ολόένα και περισσότερο για την αποτελεσματική λειτουργία ενός ατόμου στη σύγχρονη κοινωνία, που θα μπορούσαν να αποκτηθούν σταδιακά κατά τη διάρκεια της μαθητείας του/της εκπαιδευόμενου/-ης στη Γεωμετρία.

Επιπρόσθετα, η εμπλοκή με τη μελέτη της Γεωμετρίας μπορεί να καλύψει διαφοροποιημένες ανάγκες και ικανότητες μαθητών/-τριών που ενδιαφέρονται

ιδιαίτερα για την ανάπτυξη συλλογισμών με βάση τις μορφές σχημάτων και αντικειμένων του χώρου ή για καλλιτεχνικές δημιουργίες που βασίζονται σε γεωμετρικές ιδέες και απαντώνται στην τέχνη και την αρχιτεκτονική ή ακόμα για την επίλυση προβλημάτων με «κομψό» τρόπο (Henderson κ.ά., 2006).

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στη βαθμίδα του **Γυμνασίου** αποσκοπεί στην απόκτηση απαραίτητου υπόβαθρου **γνώσεων** για τα στοιχεία του **γεωμετρικού χώρου** καθώς και των χαρακτηριστικών **γεωμετρικής σκέψης**, το οποίο οφείλει να έχει κάποιος/-α μαθητής/-τρια για την πιο τυπική και αφαιρετική προσέγγιση της Γεωμετρίας στη βαθμίδα του Λυκείου. Επιπρόσθετα, αποσκοπεί στην καλλιέργεια του απαραίτητου διαισθητικού και εμπειρικού υπόβαθρου για την πιο τυπική και αφαιρετική προσέγγιση των εννοιών και των ιδιοτήτων τους σταδιακά. Η διδασκαλία των γεωμετρικών σχημάτων, των ιδιοτήτων και των σχέσεων τους έχει στόχο να μειωθεί η ολιστική αντίληψη των μαθητών/-τριών για τα γεωμετρικά σχήματα και να ενισχυθεί η αντίληψή τους για αυτά με βάση τις ιδιότητές τους παρέχοντάς τους ένα ευρύ φάσμα γεωμετρικών εμπειριών στον χώρο των δύο και τριών διαστάσεων. Επιπρόσθετα, στοχεύει στο να παρέχει μια καλή ευκαιρία για την προσέγγιση του συλλογισμού και της (άτυπης αρχικά) απόδειξης, που διευκολύνει τους/τις μαθητές/-τριες να εισαχθούν στο Λύκειο στη γεωμετρική και γενικότερα στη μαθηματική απόδειξη. Οι διαδικασίες αυτές υποστηρίζονται από την ανάπτυξη της κατάλληλης γλώσσας και όρων που βοηθούν τους/τις μαθητές/-τριες να διατυπώσουν απλούς ορισμούς και να παρουσιάσουν με συστηματικό τρόπο ιδιότητες και σχέσεις. Η γεωμετρική (τυπική) απόδειξη είναι μία σημαντική πτυχή της διδασκαλίας των Μαθηματικών (Schoenfeld, 1994), αλλά δεν αποτελεί αυτοσκοπό στη βαθμίδα του Γυμνασίου. Η αποδεικτική διαδικασία είναι μια σύνθετη γνωστική δραστηριότητα, η οποία δε χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από τη λογική επιχειρηματολογία, αλλά περιλαμβάνει πλούτο διερευνητικών, επαγωγικών και απαγωγικών διαδικασιών. Η ικανότητα διερεύνησης μιας προβληματικής κατάστασης, η ανταλλαγή επιχειρημάτων και η οργάνωσή τους σε μια λογική σειρά είναι επίσης σημαντικές για τη μάθηση των μαθητών/-τριών αυτής της βαθμίδας. Συνεπώς, το πλαίσιο της Γεωμετρίας θεωρείται κατάλληλο για την εισαγωγή τους στην αποδεικτική διαδικασία άτυπα και μεθοδικά.

Οι γεωμετρικοί **Μετασχηματισμοί** αποτελούν ένα νέο στοιχείο του Προγράμματος Σπουδών και η διδασκαλία τους αποσκοπεί στο να αποκτήσουν οι μαθητές/-τριες μια ευελιξία στον τρόπο της γεωμετρικής τους σκέψης και να τους χρησιμοποιούν ως εργαλείο για τη μελέτη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς βασικές έννοιες της Γεωμετρίας, όπως η ισότητα και η ομοιότητα των γεωμετρικών σχημάτων, εντάσσονται σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο. Οι ισομετρίες (μεταφορά, στροφή, ανάκλαση) και η ομοιοθεσία δείχνουν ότι η ισότητα και η ομοιότητα υπακούουν σε συγκεκριμένες ιδιότητες των μετασχηματισμών (διατήρηση γωνιών και αποστάσεων, διατήρηση γωνιών και λόγων αποστάσεων αντίστοιχα) και δεν εξαρτώνται από τη θέση ή τον προσανατολισμό των σχημάτων.

Η **Τριγωνομετρία** είναι ένα κομμάτι των Μαθηματικών που συνδέει τη Γεωμετρία, τη Μέτρηση και την Άλγεβρα. Χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων τα οποία μπορεί να προέρχονται από τα Μαθηματικά, άλλες επιστήμες ή από την καθημερινή ζωή. Συνδέεται αρχικά με την έννοια της ομοιότητας ορθογωνίων τριγώνων, με τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας, αλλά και με την κλίση μιας ευθείας. Σημαντικές είναι οι πρακτικές εφαρμογές της, όπως είναι η μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων, ο υπολογισμός γωνιών, η γωνία που σχηματίζει ο Ήλιος σε σχέση με τον ορίζοντα, ο υπολογισμός της κλίσης ενός δρόμου, μιας ράμπας, μιας σκάλας κ.λπ.

1.2 Μέτρηση

Η Μέτρηση παίζει κεντρικό ρόλο στον συλλογισμό για όλες τις πτυχές του χωρικού μας περιβάλλοντος (Battista, 2007), οι δε αρχές που διέπουν τη Μέτρηση και τη διδασκαλία της είναι πολύπλοκες (Owens & Outhred, 2006). Είναι μία από τις διαδικασίες που έχουν μεγάλη πρακτική εφαρμογή σε καθημερινές καταστάσεις, ενώ ταυτόχρονα παρέχει ευκαιρίες για την εκμάθηση και την εφαρμογή άλλων μαθηματικών γνώσεων. Όσον αφορά τη μέτρηση γεωμετρικών μεγεθών, οι διαδικασίες, οι τεχνικές και τα εργαλεία μέτρησης έχουν μεγάλη σημασία κι ενδιαφέρον για πολλές εφαρμογές της καθημερινής ζωής αλλά και διαστάσεις των Μαθηματικών. Ως διαδικασία η μέτρηση εισάγει την έννοια *του μεγέθους*, την έννοια της *μονάδας*, όπως και την έννοια της *επανάληψης*, που είναι τα βασικά στοιχεία σε μία οποιαδήποτε μέτρηση μεγεθών. Βασική προϋπόθεση για τη μέτρηση οποιουδήποτε μεγέθους είναι η κατανόηση του χαρακτηριστικού του αντίστοιχου μεγέθους που μετριέται και η χρήση της κατάλληλης μονάδας μέτρησης του μεγέθους, καθώς και ότι ο αριθμός που μετράει το μέγεθος προκύπτει από τη σύγκριση της μονάδας μέτρησης με το μέγεθος αυτού που μετριέται.

Στο **Γυμνάσιο**, η διδασκαλία της Μέτρησης επιδιώκει να ασκήσει τους/τις μαθητές/-τριες στην ουσιαστική κατανόηση και εφαρμογή της διαδικασίας μέτρησης γεωμετρικών μεγεθών με τη χρήση τεχνικών και εργαλείων, αλλά και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων για ακριβείς υπολογισμούς και υπολογισμούς κατά προσέγγιση (Bragg & Outhred, 2000). Η διδασκαλία της δεν περιορίζεται στην εξάσκηση οργάνων και μονάδων μέτρησης, αλλά συνδέεται με την προσπάθεια για μια περισσότερο θεωρητική ανάπτυξη της Γεωμετρίας και συμβάλλει εκτός από τη μελέτη της Γεωμετρίας με την οποία συνδέεται στενά, στη μελέτη των αριθμών, των συναρτήσεων, της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Επιπρόσθετα, επιδιώκει να διαχειριστεί με προσοχή τη σύνδεση συνεχών χαρακτηριστικών, όπως είναι το «άνοιγμα» γωνίας, το μήκος, η επιφάνεια ή ο όγκος με διακριτά τυπικά μεγέθη που αποτελούν οι μονάδες, καθώς και την αντιστοίχιση αυτής της σύνδεσης με έναν αριθμό.

Οι μαθητές/-τριες προσεγγίζουν εννοιολογικά το *αμετάβλητο* του μεγέθους (μήκος, εμβαδόν, όγκο και μέτρο γωνίας), τις *άμεσες* και τις *έμμεσες συγκρίσεις* μεγεθών, όπως και τη *χρήση τυπικών και μη τυπικών μονάδων*. Οι συγκρίσεις και οι υπολογισμοί μηκών και γωνιών βασίζονται στη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων. Η μέτρηση επιφάνειας

συνδέεται με τους μετασχηματισμούς, που διατηρούν αναλλοίωτη την επιφάνεια που αιτιολογούν τους τύπους εμβαδού γνωστών σχημάτων. Ομοίως και η μέτρηση όγκου συνδέεται με την ιδέα του αναλλοίωτου του χώρου και οδηγεί στην αιτιολόγηση των τύπων υπολογισμού του όγκου γνωστών στερεών, τη μεταξύ τους σχέση καθώς με τη χρήση τους στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

1.3 Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας-Θέση στο επίπεδο

Η σημασία της συμπερίληψης **στοιχείων Αναλυτικής Γεωμετρίας** στο Πρόγραμμα Σπουδών του **Γυμνασίου**, όπως αυτής του **διανύσματος**, έγκειται στην ανάπτυξη εννοιών και διαδικασιών σχετικά με τον προσανατολισμό στον χώρο, όπως αυτών της φοράς, της διεύθυνσης και κατεύθυνσης, και τον προσδιορισμό της θέσης στο επίπεδο μέσω της έννοιας των συντεταγμένων. Το **διάνυσμα** εισάγεται ως ένα βασικό γεωμετρικό εργαλείο αναπαράστασης του προσανατολισμού στον χώρο, με κύριο στόχο να κατανοηθεί η σημασία του σε σχέση με τις έννοιες του ευθύγραμμου τμήματος, της παραλληλίας και της μεταφοράς και να γίνει αντιληπτή η σχέση του με τον προσδιορισμό διανυσματικών μεγεθών.

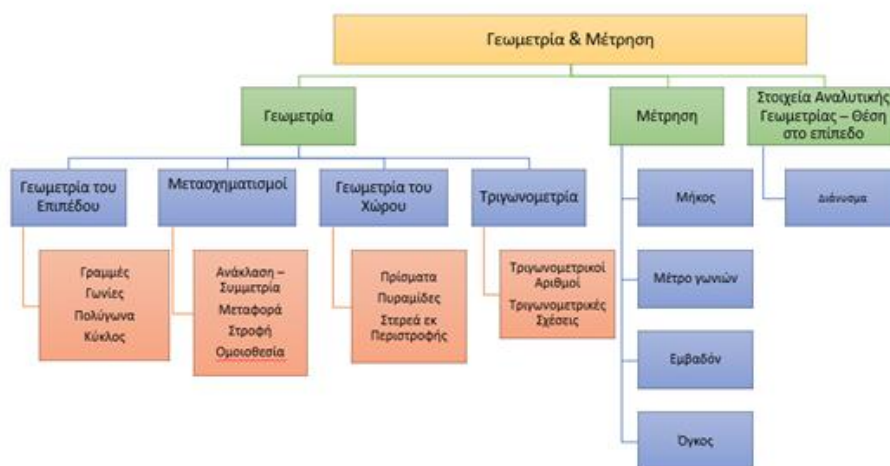
Η διδασκαλία των διανυσμάτων στο **Γυμνάσιο** εντάσσεται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο και δεν αποτελούν ένα αποκομμένο τμήμα ανάμεσα στα υπόλοιπα, καθώς συνδέονται και χρησιμοποιούνται στους μετασχηματισμούς της μεταφοράς ή μετατόπισης και με κάποιες έννοιες και μεγέθη της φυσικής που διδάσκονται στη βαθμίδα του Γυμνασίου, όπως η έννοια της δύναμης. Οι μαθητές/-τριες στο Γυμνάσιο προσεγγίζουν περισσότερο εννοιολογικά την έννοια και τα χαρακτηριστικά του διανύσματος (σύγκριση – διάκριση με το ευθύγραμμο τμήμα, σχέση με έννοιες προσανατολισμού και μεταφοράς) και δεν εμπλέκονται με αλγοριθμικές διαδικασίες, όπως αυτές των πράξεων με διανύσματα. Η σύνδεση με έννοιες και μεγέθη της φυσικής πραγματοποιείται για να ενισχύσει αυτόν τον προσανατολισμό και όχι για να υπηρετήσει τις αλγοριθμικές ανάγκες της φυσικής.

2. Ανάπτυξη των ΠΜΑ του πεδίου Γεωμετρία, Μέτρηση και Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας

Το μαθηματικό περιεχόμενο του Πεδίου II **Γεωμετρία & Μέτρηση** επιμερίζεται σε τρία υποπεδία: **Γεωμετρία**, **Μέτρηση** και **Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας - Θέση στο επίπεδο**. Το περιεχόμενο κάθε υποδιαίρεσης αναπτύσσεται σε συγκεκριμένες Θεματικές Ενότητες (Σχήμα 4).

- Το περιεχόμενο του υποπεδίου **Γεωμετρία** αναπτύσσεται στις Θεματικές Ενότητες: (α) Γεωμετρία του επιπέδου, (β) Γεωμετρία του Χώρου, (γ) Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί και (δ) Τριγωνομετρία.
- Το περιεχόμενο του υποπεδίου **Μέτρηση** αναπτύσσεται στις Θεματικές Ενότητες: (α) Μήκος, (β) Μέτρο Γωνίας, (γ) Εμβαδόν και (δ) Όγκος.
- Το περιεχόμενο του υποπεδίου **Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας - Θέση στο επίπεδο** αναπτύσσεται στη Θεματική Ενότητα Διάνυσμα.

Η ανάπτυξη των περιεχομένων των Θεματικών Ενοτήτων δε γίνεται απαραίτητα ανεξάρτητα από κάποιες άλλες Θεματικές Ενότητες του αντίστοιχου υποπεδίου ή άλλου υποπεδίου. Για παράδειγμα, στοιχεία σχετικά με τη μέτρηση (μήκους, εμβαδού και όγκου) ή του σχεδιασμού και των κατασκευών (σχεδιασμός αναπτύγματος στερεού) παρεμβάλλονται όταν είναι σκόπιμο και συμπληρώνουν τη μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων της Γεωμετρίας.



Σχήμα 4: Υποδιαιρέσεις και Θεματικές Ενότητες του πεδίου Γεωμετρία & Μέτρηση

2.1 Γεωμετρία

Θεματική Ενότητα: Γεωμετρία του Επιπέδου

Η Θεματική Ενότητα **Γεωμετρία του Επιπέδου** στο Γυμνάσιο περιλαμβάνει τέσσερις ομάδες προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων: α) αναγνώριση, β) ιδιότητες, γ) σχεδίαση - κατασκευή και δ) σχέσεις, που αφορούν (i) γραμμές και γωνίες [**Α΄ και Β΄ Γυμνασίου**], (ii) πολύγωνα (**τρίγωνα Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου – τετράπλευρα Α΄ Γυμνασίου – κανονικά πολύγωνα Β΄ Γυμνασίου**)], και (iii) κύκλο [**Α΄ και Β΄ Γυμνασίου**].

Στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες έχουν γνωρίσει πτυχές για τα περισσότερα γεωμετρικά αντικείμενα, τις ιδιότητες, καθώς και τις σχέσεις τους μέσω του σχήματός τους. Έχουν εμπλακεί με την αναγνώριση, την ονομασία, την περιγραφή και την ταξινόμηση γεωμετρικών αντικειμένων, με την κατασκευή τους (με χειραπτικά υλικά) και με τη σχεδιάσή τους με όργανα (υλικά ή ψηφιακά). Η αναγνώριση των σχημάτων υποστηρίζεται με δράσεις ανάλυσης - σύνθεσης με χρήση χειραπτικών ή ψηφιακών υλικών σε φυσικό ή ψηφιακό περιβάλλον.

Η αναγνώριση, η ονομασία, η ταξινόμηση των σχημάτων και η αναγνώριση κάποιων ιδιοτήτων και σχέσεών τους ξεκινάει από τις μικρότερες τάξεις (Α΄ και Β΄). Στη συνέχεια, η αναγνώριση διευρύνεται στα στοιχεία των σχημάτων, στα οποία αναγνωρίζονται οι περισσότερες βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα), καθώς

και σχέσεις τους όπως η παραλληλία, η καθετότητα, η ισότητα, η ανισότητα κ.λπ., αναγνωρίζεται η ορθή γωνία και μέσω της σύγκρισης με αυτή η οξεία και η αμβλεία γωνία. Η ταξινόμηση των σχημάτων σε τρίγωνα, τετράπλευρα και πολύγωνα γίνεται με βάση το πλήθος κορυφών ή πλευρών ή γωνιών, ή τις σχέσεις μήκους των πλευρών τους ή το είδος των γωνιών (ορθή γωνία) κ.λπ. (Δ' - $\Sigma\Gamma'$). Τέλος, οι μαθητές/-τριες συντάσσουν απλές περιγραφές (μη τυπικούς ορισμούς) για τα τετράπλευρα και περιγράφουν τις σχέσεις τους ($\Sigma\Gamma'$). Αναγνωρίζουν την περιφέρεια κύκλου και στοιχεία του (κέντρο, ακτίνα κύκλου, ημικύκλια κύκλου), τη σχέση διαμέτρου και ακτίνας και τη σχέση του αθροίσματος γωνιών τριγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων και τετραπλεύρων ($\text{Ε}' - \Sigma\Gamma'$).

Στο **Γυμνάσιο**, οι μαθητές/-τριες επεκτείνουν τις γνώσεις τους για βασικές γεωμετρικές έννοιες που αφορούν γραμμές, γωνίες, πολύγωνα και κύκλο, τις οποίες αρχίζουν να προσεγγίζουν σε πιο γενικευμένο επίπεδο. Εμπλέκονται με την αναγνώριση νέων γεωμετρικών εννοιών, την περιγραφή τους μέσω σύνταξης ορισμών, με την αναγνώριση ιδιοτήτων και σχέσεων και με την ταξινόμηση των γεωμετρικών αντικειμένων (γραμμών, γωνιών, πολυγώνων) με βάση γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις των στοιχείων της δομής τους. Η αναγνώριση και περιγραφή ιδιοτήτων που χρησιμοποιούνται στη σύνταξη ορισμού μιας νέας γεωμετρικής έννοιας, καθώς και οι ιδιαίτερες ιδιότητες που τη συνοδεύουν γίνονται μέσω διερευνήσεων. Επίσης, εμπλέκονται με την αιτιολόγηση ιδιοτήτων και σχέσεων σε γεωμετρικά σχήματα με επαγωγικούς συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις. Επιπλέον, σχεδιάζουν και κατασκευάζουν γεωμετρικά αντικείμενα με γεωμετρικά όργανα ή ψηφιακά εργαλεία σε υλικό (χαρτί) ή ψηφιακό περιβάλλον, αξιοποιώντας τις ιδιότητές τους. Σταδιακά, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται ότι οι γεωμετρικές μορφές της εμπειρίας τους είναι γεωμετρικές έννοιες που παίρνουν τη σημασία τους μέσα από τους ορισμούς τους, τις ιδιότητες που τις συνοδεύουν, τις σχέσεις τους με ίδιας κατηγορίας γεωμετρικά αντικείμενα και γίνονται αντιληπτές μέσω της σχηματικής αναπαράστασής τους.

Στην **Α' Γυμνασίου**, οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται με την αναγνώριση και την περιγραφή γραμμών -γωνιών- τετραπλεύρων μέσω σύνταξης ορισμών, ιδιοτήτων και σχέσεων. Η αναγνώριση των βασικών γεωμετρικών εννοιών σημείο, ευθεία, ημιευθεία, επίπεδο επεκτείνεται σε απλά και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα και στον κύκλο, και νέες έννοιες παράγονται με βάση αυτές, όπως οι έννοιες μέσο τμήματος, απόσταση δύο σημείων, μεσοκάθετος τμήματος, διχοτόμος γωνίας, αντικείμενες ημιευθείες, κατακορυφήν γωνίες κ.ά. Οι παραγόμενες έννοιες αναγνωρίζονται, ονομάζονται, περιγράφονται μέσω απλών ορισμών και αναπαριστώνται (σχηματικά, συμβολικά). Αναγνωρίζονται και περιγράφονται ιδιότητες και σχέσεις που αφορούν:

- θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο, καθώς και τη θέση ευθείας ως προς κύκλο, την έννοια της μεσοκάθετου τμήματος και την ιδιότητα των σημείων της, καθώς και την έννοια της διχοτόμου γωνίας και την ιδιότητα των σημείων της.

- νέα είδη γωνιών σε απλά και σύνθετα σχήματα, όπως: σχέσεις μεταξύ συμπληρωματικών, παραπληρωματικών και κατακορυφήν γωνιών, σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από την τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών, σχέσεις του αθροίσματος γωνιών πολυγώνων, σχέσεις τόξων και αντίστοιχων επίκεντρων γωνιών στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους.
- στοιχεία τριγώνων και τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο)

Για την ταξινόμηση γραμμών, γωνιών και τετραπλεύρων χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες των στοιχείων τους, οι οποίες αναγνωρίζονται μέσω διερευνήσεων. Οι ιδιότητες και οι σχέσεις που αναγνωρίζονται αξιοποιούνται στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων γεωμετρικών σχημάτων με επαγωγικούς συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις.

Στην **Α' Γυμνασίου** οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται με επιλεγμένες κατασκευές γραμμών, γωνιών, τριγώνων και παραλληλογράμμων προκειμένου να κατανοήσουν τη σημασία των σχέσεων και των ιδιοτήτων τους. Για παράδειγμα η κατασκευή παράλληλης προς δοθείσα ευθεία από σημείο εκτός αυτής με χρήση κανόνα και γνώμονα βασίζεται στην ιδιότητα ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες, ή στην ιδιότητα ότι, αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη έχουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, θα είναι παράλληλες. Κατασκευάζουν τη μεσοκάθετο τμήματος και τη διχοτόμο γωνίας, κάθετες και παράλληλες ευθείες, κάθετη από σημείο σε ευθεία, την κάθετη σε σημείο ευθεία, την εφαπτομένη σε σημείο κύκλου, δεδομένες γωνίες, ύψη-διαμέσους τριγώνου, τρίγωνα και παραλληλόγραμμο με δεδομένα στοιχεία.

Στη **Β' Γυμνασίου**, οι μαθητές/-τριες αναγνωρίζουν, περιγράφουν μέσω ορισμών και ταξινομούν πολύγωνα σε κανονικά και μη κανονικά, αναγνωρίζουν και περιγράφουν τα στοιχεία τους και προσδιορίζουν τις μεταξύ τους σχέσεις. Εμπλέκονται με την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο και με την κατασκευή κανονικών πολυγώνων. Αναγνωρίζουν και περιγράφουν (λεκτικά-συμβολικά-σηματικά) το Πυθαγόρειο Θεώρημα και διατυπώνουν την αντίστροφη πρότασή του, και τα αξιοποιούν ως θεωρητικά εργαλεία για υπολογισμούς πλευρών ή γωνιών ορθογωνίου τριγώνου.

Στην **Γ' Γυμνασίου**, οι μαθητές/-τριες γνωρίζουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και τα αξιοποιούν στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων σχημάτων και στην επίλυση απλών γεωμετρικών προβλημάτων. Αναγνωρίζουν και περιγράφουν την ομοιότητα πολυγώνων μέσω του μετασχηματισμού ομοιοθεσίας, καθώς και των σχέσεων περιμέτρων και εμβαδών όμοιων πολυγώνων.

Και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου, οι μαθητές/-τριες αξιοποιούν γνώσεις που αφορούν γεωμετρικές έννοιες, ιδιότητες και σχέσεις τους στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων κατ' αναλογία και αντιστοιχία με το επίπεδο γνώσεων και την τάξη στην οποία έχουν αποκτηθεί.

Στο **Λύκειο**, δίνεται έμφαση στη λογική οργάνωση των ιδιοτήτων των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων (τριγώνων-τετραπλεύρων-κύκλου) (Α'-Β'). Προσδιορίζονται σύνολα ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν κλάσεις σχημάτων και αναγνωρίζονται σχήματα με βάση τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες. Στο επίπεδο των σχέσεων, οι μαθητές/-τριες τεκμηριώνουν τις ιδιότητες των σχημάτων που προκύπτουν από την ανάλυση και τη σύνθεσή τους, διακρίνουν και ταξινομούν κλάσεις σχημάτων και τις συσχετίζουν με αντίστοιχες κλάσεις ιδιοτήτων. Επιπλέον, οι μαθητές/-τριες σχεδιάζουν σχήματα με βάση λεκτικές περιγραφές, κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με δεδομένες ιδιότητες, περιγράφουν και αιτιολογούν τις συγκεκριμένες κατασκευές (Α'-Β'-Γ'). Επεκτείνουν τις γεωμετρικές τους γνώσεις για απλούς γεωμετρικούς τόπους (Α') και πιο σύνθετους εφαρμόζοντας πιο τυπικές προσεγγίσεις και τις αξιοποιούν σε γεωμετρικές κατασκευές (Γ').

Θεματική Ενότητα: Μετασχηματισμοί

Η ενότητα **Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί** περιλαμβάνει τέσσερις ομάδες προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων: α) αναγνώριση, β) ιδιότητες σχέσεις, γ) εφαρμογή και δ) αξιοποίηση στην αποδεικτική διαδικασία βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών του επιπέδου, της **μεταφοράς** κατά διάνυσμα (**Β' Γυμνασίου**), της **στροφής** ως προς κέντρο και δεδομένη γωνία και της **κεντρικής συμμετρίας** ως ειδική περίπτωση στροφής κατά 180^0 (**Β' Γυμνασίου**), της **ανάκλασης** ως προς άξονα ή **αξονική συμμετρία** (**Α' Γυμνασίου**), καθώς και της **ομοιοθεσίας** με δεδομένο κέντρο και λόγο ομοιοθεσίας (**Γ' Γυμνασίου**).

Στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες από πολύ νωρίς γνωρίζουν πτυχές από τα διάφορα είδη μετασχηματισμών. Παρατηρούν μετατοπίσεις και στροφές (90^0 , 180^0 , 360^0), αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα, εντοπίζουν άξονες και συμμετρίες και κάνουν κατασκευές συμμετρικών καταστάσεων και σχημάτων σε πραγματικά περιβάλλοντα προσεγγίζοντας τις ιδιότητες της συμμετρίας (Α' - Β'-Γ'). Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς για να συγκρίνουν σχήματα, κάνουν κατασκευές με χρήση μετατοπίσεων και στροφών, κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα ως προς οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες και περιγράφουν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας (Γ'-Δ'-Ε'-ΣΤ').

Στο **Γυμνάσιο**, οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται με τη μεταφορά σχημάτων, τη στροφή τους ως προς σημείο και υπό συγκεκριμένη γωνία και την ανάκλασή τους ως προς ευθεία. Συνδέουν την ανάκλαση με την αξονική συμμετρία και την κεντρική συμμετρία με τη στροφή κατά 180^0 . Αναγνωρίζουν και περιγράφουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά των μετασχηματισμών ισομετρίας (ανάκλαση, μεταφορά, στροφή). Εφαρμόζουν και περιγράφουν έναν μετασχηματισμό ισομετρίας σε ένα σχήμα και κατασκευάζουν την εικόνα του. Αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς ισομετρίας μεταξύ σχημάτων και προσδιορίζουν τα στοιχεία των μετασχηματισμών, και αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ των σχημάτων και των στοιχείων τους (αρχικού και της εικόνας του) που

συνδέονται μέσω συγκεκριμένων μετασχηματισμών. Σχεδιάζουν τα συμμετρικά σχημάτων ως προς διάφορους άξονες, αναγνωρίζουν ιδιότητες συμμετρίας. Συνδέουν τους μετασχηματισμούς ισομετρίας με την ιδέα του αμετάβλητου του σχήματος μέσω της κίνησής του, και μέσω αυτού με την έννοια της ισότητας σχημάτων και αναγνωρίζουν σχέσεις ισότητας των στοιχείων τους. Αντιλαμβάνονται ως ίσα τα σχήματα που το ένα ταυτίζεται με το άλλο μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού ($A' - B'$). Μέσω των συμμετριών (αξονικής και κεντρικής) αναγνωρίζουν και αιτιολογούν ιδιότητες επίπεδων σχημάτων ($A' - B' - \Gamma'$).

Στη **Γ' τάξη** οι μαθητές/-τριες αναγνωρίζουν και περιγράφουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού ομοιοθεσίας. Εφαρμόζουν και περιγράφουν έναν μετασχηματισμό ομοιοθεσίας σε ένα σχήμα και κατασκευάζουν την εικόνα του. Συσχετίζουν τον μετασχηματισμό ομοιοθεσίας με την ομοιότητα σχημάτων και με τις έννοιες μεγέθυνση -σμίκρυνση. Αναγνωρίζουν ως όμοια τα σχήματα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου μέσω συγκεκριμένου μετασχηματισμού ομοιοθεσίας και ως γενίκευση, αντιλαμβάνονται ως όμοια τα σχήματα που το ένα καθίσταται ομοιόθετο του άλλου μέσω της αναγνώρισης μιας ακολουθίας μετασχηματισμών.

Στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες περιορίζονται στην αξιοποίηση της ομοιότητας πολυγώνων για την επίλυση Μαθηματικών (**Β' Λυκείου**). Στην κατεύθυνση του Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της **Γ' τάξης οι μαθητές/-τριες αναγνωρίζουν** την ανάκλαση, τη στροφή και την ομοιοθεσία ως Γραμμικούς Μετασχηματισμούς στο Καρτεσιανό Επίπεδο και μελετούν σχετικά ζητήματα μέσω πινάκων στο Θεματικό Πεδίο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Θεματική Ενότητα: Γεωμετρία του Χώρου

Η Θεματική Ενότητα **Γεωμετρία του Χώρου** περιλαμβάνει τέσσερις ομάδες προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων: α) αναγνώριση, β) ιδιότητες, γ) σχεδίαση -κατασκευή και δ) σχέσεις που αφορούν γεωμετρικά στερεά, όπως α) ορθά πρίσματα (κύβος, παραλληλεπίδο, τριγωνικό, τετραγωνικό) και πυραμίδες (τριγωνική, τετραγωνική) και β) στερεά εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος και σφαίρα) (**Γ' Γυμνασίου**).

Στα πλαίσια της Γεωμετρίας του χώρου δίνεται έμφαση σε διεργασίες οπτικοποίησης.

Στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες ασκούνται στην αναγνώριση κατασκευών από διαφορετικές οπτικές γωνίες, σταδιακά κάνουν κατασκευές από εικόνες, σχέδια και άλλες αναπαραστάσεις και σχεδιάζουν σε ισομετρικό χαρτί ή σε ψηφιακό περιβάλλον δοσμένες τρισδιάστατες κατασκευές ($\Gamma' - \Delta' - \text{Ε}'$), αναγνωρίζουν όψεις, σχεδιάζουν 3D σχήματα, όπως όψεις και κατόψεις και αναπτύγματα στερεών ($\text{Ε}' - \Sigma\Gamma'$). Αναφορικά με τα πρίσματα και τις πυραμίδες, ξεκινούν από τις μικρότερες τάξεις ($A' - B'$) με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των στερεών με βάση τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμού, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν

βασικές ιδιότητες και σχέσεις (Γ'-Δ'). Παράλληλα, κατασκευάζουν και αναπαριστούν στερεά με διάφορα μέσα, ενώ αναγνωρίζουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως έδρες στερεών. Διατυπώνουν απλούς ορισμούς και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών σχημάτων εφαρμόζοντάς τες στην επίλυση προβλημάτων (Ε'-ΣΤ').

Στο **Γυμνάσιο** στη **Α' Τάξη**, οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται με την αναγνώριση βασικών γεωμετρικών στερεών και των στοιχείων τους, όπως, ορθό πρίσμα (τριγωνικό – τετραγωνικό - εξαγωνικό), παραλληλεπίπεδο, κύβος, πυραμίδα (τριγωνική και τετραγωνική), κύλινδρος (κώνος και σφαίρα), τα ταξινομούν και τα συνδέουν με τα αναπτύγματά τους. Αναγνωρίζουν τομές τρισδιάστατων στερεών σχημάτων (κώνος, κύλινδρος) με επίπεδο παράλληλο σε βάση τους. Σχεδιάζουν όψεις και αναπτύγματα ορθών πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων και κώνων με ποικίλα μέσα (π.χ. ισομετρικό χαρτί, ψηφιακά εργαλεία ή με ελεύθερη σχεδίαση). Διερευνούν και αναγνωρίζουν στερεά που προκύπτουν από την περιστροφή βασικών γεωμετρικών σχημάτων, για παράδειγμα, ως προς άξονα τον φορέα μιας πλευράς του ή άξονα συμμετρίας του σχήματος.

Στο **Λύκειο (Α' Λυκείου)**, οι μαθητές/-τριες αναγνωρίζουν τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στον χώρο, διερευνούν τομές στερεών σχημάτων από ένα επίπεδο αξιοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία και υποστηρίζεται η αναλογική προσέγγιση ιδιοτήτων του χώρου σε αντιστοιχία των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων. Επίσης, μελετούν ιδιότητες των στερεών σχημάτων και τις αξιοποιούν στη μέτρηση επιφανειών και όγκων.

Θεματική Ενότητα: Τριγωνομετρία

Η ενότητα «**Τριγωνομετρία**» αφορά τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο [**Γ' Γυμνασίου**].

Πτυχές του λόγου, της αναλογίας και της ομοιότητας είναι οικείες στους/τις μαθητές/-τριες από προηγούμενες τάξεις, αλλά και από την καθημερινή ζωή.

Στο **Γυμνάσιο**, οι μαθητές/-τριες ασχολούνται με τη μελέτη των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, τους οποίους αναγνωρίζουν ως σταθερούς λόγους ζεύγους πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Συσχετίζουν τον τριγωνομετρικό αριθμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας με την έννοια της κλίσης ευθείας. Χρησιμοποιούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς για την εύρεση του μέτρου γωνίας ή πλευράς ορθογωνίου τριγώνου αξιοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες, καθώς και στην επίλυση ορθογωνίων τριγώνων σε προβλήματα σε συνδυασμό με το Πυθαγόρειο Θεώρημα (**Γ' Γυμνασίου**).

Στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες θα γνωρίσουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις τριγωνομετρικές εξισώσεις στην Άλγεβρα.

2.2 Μέτρηση

Κάθε Θεματική Ενότητα **Μέτρο γωνίας, Μήκος, Εμβαδόν και Όγκος** περιλαμβάνει τέσσερις ομάδες προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων: α) διατήρηση, β) επικάλυψη /μονάδες, γ) με ή χωρίς μέτρηση σύγκριση - διάταξη - εκτίμηση, δ) με ή χωρίς μέτρηση πράξεις μεταξύ ομοειδών μεγεθών και ε) μήκος περιμέτρου-κύκλου-τόξου με χρήση τύπων που αφορούν το μέτρο γωνίας και το μήκος ευθύγραμμων και καμπύλων γραμμών [**Α΄ και Β΄ Γυμνασίου**], το εμβαδόν επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και τον όγκο γεωμετρικών σχημάτων, επίπεδων στερεών και στερεών εκ περιστροφής [**Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου**].

Στο **Δημοτικό** οι μαθητές/-τριες εξοικειώνονται με άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις γεωμετρικών μεγεθών χρησιμοποιώντας ποικιλία μέσων και πρακτικών. Μετρούν τα γεωμετρικά μεγέθη με χρήση άτυπων μονάδων μέτρησης, σταδιακά συστηματοποιούν τις μετρήσεις με τις τυπικές μονάδες και κάνουν απλές μετατροπές των μονάδων μέτρησης του αντίστοιχου μεγέθους.

Στο **Γυμνάσιο**, οι μαθητές/-τριες συγκρίνουν και υπολογίζουν τα μέτρα μεγεθών χρησιμοποιώντας ιδιότητες, σχέσεις και θεωρήματα (π.χ. το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (υλικά ή ψηφιακά) για να βρουν το μέτρο γεωμετρικών μεγεθών. Διαμορφώνουν τύπους και τους χρησιμοποιούν για να υπολογίζουν το μέτρο απλών γεωμετρικών μεγεθών επιλέγοντας κατάλληλες μονάδες μέτρησης.

Στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες αντιλαμβάνονται το μέτρο ενός γεωμετρικού μεγέθους ως τον λόγο του προς μία κατάλληλη μονάδα μέτρησης και εμπλέκονται σε αποδεικτικές διαδικασίες για την εγκυροποίηση τύπων υπολογισμού των γεωμετρικών μεγεθών και αξιοποίησης των τύπων αυτών στην επίλυση προβλημάτων.

Θεματική Ενότητα: Μέτρο Γωνίας

Στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες συγκρίνουν γωνίες άμεσα με την ορθή (με υπέρθεση μοντέλου ορθής ή χρήση γνώμονα (Α΄-Γ΄) ή με μη τυπικά όργανα μέτρησης γωνιών (μοιρογνωμόνια από υλικά ή ψηφιακά μέσα) και μη τυπικές μονάδες μέτρησης (Δ΄). Μετρούν γωνίες με μη τυπικά όργανα και μη τυπικές μονάδες μέτρησης γωνιών και το τυπικό μοιρογνωμόνιο (Δ- ΣΤ΄). Σχεδιάζουν ορθές γωνίες χρησιμοποιώντας τον γνώμονα (Γ΄) και κατασκευάζουν γωνίες μέχρι 180° με το μοιρογνωμόνιο (ΣΤ΄).

Στο **Γυμνάσιο** οι μαθητές/-τριες μετρούν γωνίες με τυπικές μονάδες μέτρησης γωνιών και τυπικά εργαλεία (υλικά ή ψηφιακά), συγκρίνουν και υπολογίζουν το μέτρο γωνίας χρησιμοποιώντας ιδιότητες και σχέσεις γωνιών, κάνουν πράξεις γωνιών (γεωμετρικά) και κατασκευές γωνιών συγκεκριμένων μέτρων ή συγκεκριμένων ιδιοτήτων με όργανα (Α΄ -Β΄). Συνδέουν το μέτρο της επίκεντρης γωνίας με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων [Α΄]. Προσεγγίζουν το μέτρο γωνιών μέσω των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας και της κλίσης [Β΄ -Γ΄].

Αναφορικά με τη μέτρηση **γωνίας**, στο **Λύκειο** οι μαθητές/-τριες υπολογίζουν γωνίες επίπεδων σχημάτων, γωνίες μεταξύ στοιχείων στερεών σχημάτων με χρήση ιδιοτήτων, σχέσεων και θεωρημάτων.

Θεματική Ενότητα: Μήκος

Στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες αρχικά πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις και διατάξεις, όπως και αναλύσεις και συνθέσεις μηκών, επικαλύψεις με επαναλήψεις με μη τυπικές και τυπικές μονάδες και συνδέουν το αριθμητικό αποτέλεσμα με το μήκος. Κάνουν μετρήσεις με τον χάρακα που έχουν κατασκευάσει, επιλύουν απλά μετρικά προβλήματα και συγκρίνουν μήκη κατ' εκτίμηση ($A'-B'$). Στη συνέχεια, συστηματοποιούν τις μετρήσεις χρησιμοποιώντας τυπικές μονάδες και κάνουν απλές μετατροπές μονάδων ($\Gamma'-\Delta'$). Τέλος, υπολογίζουν περιμέτρους σχημάτων, διερευνούν τις σχέσεις πλευρών και περιμέτρων όπως και διαμέτρου και μήκους κύκλου ($\Delta'-E'-\Sigma\tau'$).

Αναφορικά με μέτρηση μηκών στο Γυμνάσιο, οι μαθητές/-τριες επιλέγουν τυπικές μονάδες μέτρησης μήκους και κάνουν μετατροπές μεταξύ μονάδων, συγκρίνουν και υπολογίζουν μήκη πλευρών και περιμέτρων πολυγώνων (A') και το μήκος κύκλου (B') χρησιμοποιώντας ιδιότητες και σχέσεις, υπολογίζουν μήκη τμημάτων και τόξου με χρήση λόγων, αναλογιών και θεωρημάτων ($B'-\Gamma'$). Επιλύουν προβλήματα μέτρησης μήκους με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (A' , B' , Γ') και αναπτύσσουν μεθόδους και στρατηγικές προσεγγιστικού υπολογισμού περιμέτρων ακανόνιστων σχημάτων ($B'-\Gamma'$).

Αναφορικά με τη μέτρηση **μηκών**, στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες χρησιμοποιούν ιδιότητες, σχέσεις και θεωρήματα και υπολογίζουν μήκη στοιχείων επίπεδων και μεικτόγραμμων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών (B' Τάξη).

Θεματική Ενότητα: Εμβαδόν

Αναφορικά με τη μέτρηση **επιφάνειας** στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες αρχικά πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών, επικαλύψεις επιφανειών με μη τυπικές ή τυπικές μονάδες, δομούν επιφάνειες σε γραμμές και στήλες και καταμετρούν συστηματικά το πλήθος των μονάδων, ενώ ασκούνται στη μέτρηση κατ' εκτίμηση (A' και B' Δημοτικού). Χρησιμοποιούν την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ γραμμών και στηλών για να υπολογίσουν το εμβαδόν δομημένων επιφανειών και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών, περιμέτρου και εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος ($\Delta'-\Sigma\tau'$). Επιλύουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών (με τη χρήση οργάνων και τύπων και πραγματοποιούν συγκρίσεις επιφανειών κατ' εκτίμηση).

Αναφορικά με τη μέτρηση **επιφάνειας** στο **Γυμνάσιο**, οι μαθητές/-τριες επιλέγουν τυπικές μονάδες μέτρησης εμβαδού και κάνουν μετατροπές μεταξύ μονάδων, πραγματοποιούν συγκρίσεις καμπυλόγραμμων ή μικτόγραμμων ή ακανόνιστων επιφανειών εφαρμόζοντας διαδικασίες διάσπασης/ανασυνθέσης χρησιμοποιώντας ιδιότητες και σχέσεις. Επιλέγουν μη τυπικές μονάδες μέτρησης και επικυρώνουν τον

τύπο υπολογισμού του εμβαδού ορθογωνίου. Συνδέουν τη μέτρηση επιφάνειας με ισοδύναμους μετασχηματισμούς επιφάνειας που την διατηρούν αναλλοίωτη (διάσπαση/ανασύνθεση) και αιτιολογούν τους τύπους των εμβαδών τριγώνων, παραλληλογράμμων και τραπεζίου. Υπολογίζουν το εμβαδόν κύκλου, το εμβαδόν κυκλικού τομέα ως μέρη του εμβαδού κυκλικού δίσκου. Αναπτύσσουν μεθόδους και στρατηγικές για τον υπολογισμό του εμβαδού μικτόγραμμων σχημάτων (**B'**). Αναπτύσσουν μεθόδους και στρατηγικές προσεγγιστικού υπολογισμού του εμβαδού ακανόνιστων σχημάτων (**B'-Γ'**), χρησιμοποιούν τους τύπους εμβαδού βασικών σχημάτων και υπολογίζουν τα εμβαδά επιφανειών στερεών σχημάτων αξιοποιώντας τα αναπτύγματά τους και επιλύουν σχετικά προβλήματα υπολογισμού επιφάνειας (**Γ'**).

Αναφορικά με τη μέτρηση **επιφάνειας** στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες συνδέουν τη μέτρηση επιφάνειας με διαμερίσεις ή διαμερίσεις και αναδιατάξεις του σχήματος σε σχήματα γνωστού τύπου υπολογισμού εμβαδού. Υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και μικτόγραμμων χωρίων, το εμβαδόν επιφάνειας (παράπλευρης – ολικής) γεωμετρικών στερεών (**B' Τάξη**).

Θεματική Ενότητα: Όγκος

Αναφορικά με τη μέτρηση του **όγκου** στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες αρχικά συγκρίνουν άμεσα ή έμμεσα τους όγκους δοχείων. Συνεχίζουν με συγκρίσεις όγκων κατασκευών που αποτελούνται από μικρό αριθμό δομικών υλικών (κύβοι) και εκτιμήσεις του όγκου απλών κατασκευών (**A'-B' Τάξεις**). Σταδιακά συστηματοποιούν τον υπολογισμό του πλήθους των κύβων που απαρτίζουν ορθογώνιες κατασκευές συνδυάζοντάς τον με τις γραμμικές διαστάσεις των ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων και καταλήγουν στη διατύπωση τύπων. Τέλος, υπολογίζουν τον όγκο στερεών με χρήση τυπικών μονάδων και υποδιαίρέσεων και πραγματοποιούν υπολογισμούς κατ' εκτίμηση (**Γ' - ΣΤ'**).

Αναφορικά με τη μέτρηση του **όγκου** στο **Γυμνάσιο**, οι μαθητές/-τριες υπολογίζουν τους όγκους των βασικών στερεών με τη χρήση προηγούμενων γνώσεων (κύβος-ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) επιλέγοντας κατάλληλη μονάδα μέτρησης. Διερευνούν με εμπειρικούς ή πρακτικούς τρόπους τη σχέση γραμμικών διαστάσεων, εμβαδού επιφανειών και όγκου όπως, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και πυραμίδα με την ίδια βάση και ύψος ή κύλινδρος και κώνος με την ίδια βάση και ύψος ή σφαίρας και δύο κυλίνδρων με ακτίνα βάσης ίση με την ακτίνα της σφαίρας και ύψος διπλάσιο της ακτίνας της σφαίρας). Επιλύουν προβλήματα όγκου αναπτύσσοντας μεθόδους και στρατηγικές υπολογισμού (**Γ'**).

Αναφορικά με τη μέτρηση **όγκου** στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες ορίζουν τον όγκο πολυέδρου, συνδέουν τη μέτρηση του όγκου ορθού πρίσματος και πυραμίδας με διαμερίσεις, προσεγγίζουν τον όγκο κυλίνδρου και πρισμάτων και χρησιμοποιούν τους τύπους στην επίλυση προβλημάτων υπολογισμού όγκου στερεών (**B' Λυκείου**).

Υπολογίζουν τον όγκο στερεού εκ περιστροφής τριγώνων, κυρτών τετραπλεύρων γύρω από άξονα που ταυτίζεται ή είναι παράλληλος σε πλευρά του και επιλύουν προβλήματα όγκου στερεών εκ περιστροφής (**Γ΄ Λυκείου**).

2.3 Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας -Θέση στο επίπεδο

Στο **Δημοτικό**, οι μαθητές/-τριες από τις μικρές τάξεις συστηματοποιούν τις χωρικές τους εμπειρίες με την αξιοποίηση διαφορετικών συστημάτων αναφοράς και με τη χρήση χωρικών εννοιών και έρχονται σε πρώτη επαφή με οικείους χάρτες. Σταδιακά συστηματοποιούν την αναγνώριση, την περιγραφή θέσεων, με χρήση όρων πάνω/κάτω/δεξιά/αριστερά, σχέσεων και διαδρομών σε χάρτες και οδηγούνται στην προσέγγιση της κλίμακας (**Ε΄ Δημοτικού**). Παράλληλα συστηματοποιούν τη χρήση αριθμητικών ζευγών (**Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού**) και διατεταγμένων ζευγών για την παράσταση θέσεων στο πρώτο τεταρτημόριο καθώς και σε γεωγραφικούς χάρτες (**Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού**).

Στο **Γυμνάσιο**, ζητήματα προσανατολισμού, θέσεων και διαδρομών προσεγγίζονται μέσω διανυσμάτων. Οι μαθητές/-τριες προσεγγίζουν εννοιολογικά την έννοια και τα χαρακτηριστικά του διανύσματος (σύγκριση – διάκριση με το ευθύγραμμο τμήμα, σχέση με έννοιες προσανατολισμού και μεταφοράς) και αναγνωρίζουν τη σημασία του σε σχέση με τις έννοιες του ευθυγράμμου τμήματος, της παραλληλίας και της μεταφοράς και να γίνει αντιληπτή η σχέση του με τον προσδιορισμό διανυσματικών μεγεθών το συνδέουν με μεγέθη της φυσική [**Β΄ Γυμνασίου**].

Στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες επεκτείνουν την έννοια του διανύσματος και εμπλέκονται με αλγοριθμικές διαδικασίες με διανύσματα.

3 Ανάπτυξη της Μαθηματικής Γνώσης/ Σκέψης και Δυσκολίες των Μαθητών

Η μαθηματική γνώση, δεν υφίσταται ως συγκροτημένη αντικειμενική πραγματικότητα την οποία οι δάσκαλοι καλούνται να μεταδώσουν στους μαθητές τους, δεν είναι ανεξάρτητη από αυτόν που προσπαθεί να μάθει και δεν αποτελείται αποκλειστικά από αυστηρούς ορισμούς, αρχές και διαδικασίες, αλλά οικοδομείται από ενέργειες και αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον (von Glasersfeld, 1990; Confrey, 1995; Piaget & Inhelder, 1967; Clausen-May et al., 2000). Όμως, ο μαθητής αποκομίζει διαφορετικές γνώσεις, από την εξερεύνηση και την περιγραφή του περιβάλλοντός του μέχρι την εφαρμογή των γνώσεων του και την υποστήριξη της εργασίας του. Η μαθηματική γνώση οικοδομείται με την ανάπτυξη αυτού που ονομάζεται μαθηματικός συλλογισμός. Η ικανότητα **μαθηματικού συλλογισμού** είναι κάτι περισσότερο από την απομνημόνευση ορολογιών και την εφαρμογή θεωρημάτων σε γνωστές καταστάσεις. Αναφέρεται στην ικανότητα κάποιου να διατυπώνει και να παρουσιάζει ένα δεδομένο μαθηματικό πρόβλημα, και να εξηγεί και να δικαιολογεί τη λύση ή το επιχείρημα (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

3.1 Γεωμετρία

Η μαθηματική γνώση, και εν προκειμένω η γεωμετρική, είναι πλούσια σε περιεχόμενο (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα, αποδείξεις, προβλήματα), έχει εξελιγμένη δομή (από βασικές έννοιες σε παράγωγες έννοιες, από απλά σχέδια και διαγράμματα σε απλά γεωμετρικά σχήματα και σε περίπλοκες γεωμετρικές σχηματικές διαμορφώσεις), οικοδομείται με την ανάπτυξη αυτού που ονομάζεται **χωρικός¹, γεωμετρικός² και οπτικοποιημένος³ συλλογισμός** (Clements & Sarama, 2000) που είναι κεντρικής σημασίας για την κατανόηση των Μαθηματικών και κρίσιμα συστατικά της **γεωμετρικής σκέψης**. Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, δεδομένου ότι καλείται να οδηγήσει στην θεωρητική Γεωμετρία, συνδέεται με τη μετάβαση από μια γενικότερη αντίληψη των γεωμετρικών μορφών με τις αισθήσεις και την εμπειρία (αισθησιο-κινητική) σε μια κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τα στοιχεία τους, τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις (αναλυτικο-συνθετική).

Τα γεωμετρικά αντικείμενα (οντότητες τόσο πραγματικές όσο και θεωρητικές, προσβάσιμες κυρίως μέσω του **γεωμετρικού σχήματος** και της **γλώσσας**, προφορικής και γραπτής) και οι ιδιότητές τους εκφράζονται με προτάσεις (θεωρήματα) που απαιτούν διαφορετικά είδη προσέγγισης και ελέγχου από τους/τις μαθητές/-τριες (Parzysz, 1988). Οι προτάσεις απαιτούν μια αναλυτική προσέγγιση που υπόκειται σε θεωρητικούς ελέγχους. Τα σχήματα απαιτούν μια σφαιρική αντίληψη, επιτρέποντας έτσι την οπτικοποίηση των σχέσεων και ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων υπό αντιληπτικούς ελέγχους.

Η έρευνα δείχνει ότι πολλοί μαθητές βασίζονται σε ένα οπτικό πρότυπο και όχι σε έναν λεκτικό ορισμό κατά την ταξινόμηση και την αναγνώριση σχημάτων (Fujita 2012; Gal and Linchevski 2010). Ένα πρότυπο παράδειγμα είναι συνήθως το πιο κεντρικό μέλος μιας έννοιας, με τη μεγαλύτερη λίστα χαρακτηριστικών - όλα τα κρίσιμα καθώς και μη κρίσιμα χαρακτηριστικά που έχουν ισχυρά οπτικά χαρακτηριστικά (Vinner και Hershkowitz 1980), συνήθως επιτυγχάνεται πρώτα και σχηματίζεται γρήγορα στην αρχική εικόνα. Για παράδειγμα, βλέποντας ένα ορθογώνιο να έχει δύο μεγάλες πλευρές και δύο μικρές πλευρές δημιουργείται η αντίληψη ότι όλα τα ορθογώνια έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά και απορρίπτεται έτσι ένα τετράγωνο ως ειδικό ορθογώνιο.

Το **γεωμετρικό** σχήμα δεν είναι μια απλή έννοια, *έχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες* (Fiscbein, 1993) και τα προσωπικά νοήματα των μαθητών για αυτό

¹ ικανότητα αντίληψης, κατανόησης και παράστασης θέσεων, αμοιβαίων σχέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών (τροχιά) των γεωμετρικών σχημάτων και αντικειμένων μέσα στο χώρο και γενικότερα τη διαχείριση κάθε χωρικής πληροφορίας και των μετασχηματισμών της

² ικανότητα οργάνωσης και επεξεργασίας του χώρου στη βάση του γεωμετρικού μοντέλου

³ ικανότητα ερμηνείας διαφορετικών παραστάσεων αντικειμένων ή καταστάσεων και αντίληψής τους από διαφορετικές οπτικές γωνίες, δημιουργίας νοερών εικόνων για αντικείμενα ή καταστάσεις που βρίσκονται έξω από το οπτικό πεδίο (για γεωμετρικές ή άλλες χωρικές πληροφορίες) και νοερής επεξεργασίας τους

διαφέρουν από τα γεωμετρικά νοήματα της αντίστοιχης έννοιας που αντιπροσωπεύει. Ο **συλλογισμός** χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στη σχηματική και εννοιολογική πτυχή των γεωμετρικών εννοιών, εξετάζει αφενός αφηρημένες ιδέες (έννοιες) και αφετέρου, αναπαραστάσεις με συγκεκριμένες σχηματικές πληροφορίες και διαδικασίες. Οι λανθασμένες εκφάνσεις του συλλογισμού μπορούν να ερμηνευτούν ως δυσαρμονία μεταξύ της σχηματικής και της εννοιολογικής λειτουργίας των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Ενώ στο μαθηματικό επίπεδο τα γεωμετρικά σχήματα είναι νοητικές κατασκευές που υπάρχουν μέσω των ορισμών και των ιδιοτήτων τους, στο μυαλό των παιδιών συνδέονται με αντικείμενα του πραγματικού χώρου ή αντιμετωπίζονται ως απλές εικόνες (πχ. ένα τετράγωνο είναι ένα πραγματικό αντικείμενο αλλά και ένα γεωμετρικό αντικείμενο με διακριτές ιδιότητες).

Το πώς να μετακινηθούν οι μαθητές/-τριες από το συλλογισμό που είναι άτυπος και βασίζεται στα σχήματα και στις εικόνες στο συλλογισμό με βάση την εννοιολογική κατανόηση των ιδιοτήτων και της ιεραρχίας είναι ένα κρίσιμο ζήτημα. Για να γίνει ολοένα και πιο ολοκληρωμένη και συνδετική η γεωμετρική γνώση, η έκθεση σε πολλαπλές αναπαραστάσεις γεωμετρικών εννοιών σε διάφορες καταστάσεις όπου οι μαθητές/-τριες καλούνται να ερμηνεύσουν, να εξηγήσουν, να αιτιολογήσουν, να βελτιώσουν και να επικοινωνήσουν την κατανόησή τους είναι ζωτικής σημασίας (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Η **γλώσσα** παίζει σημαντικό ρόλο στην επίδραση της οπτικής και χωρικής αντίληψης και στην επιχειρηματολογία τεκμηρίωσης. Το πόσο καλά βλέπει κάποιος ένα αντικείμενο επηρεάζεται από τους ορισμούς αυτού του αντικειμένου. Στη γεωμετρία, όροι όπως τετράγωνο, τρίγωνο και κύκλοι είναι συμπυκνώσεις ορισμών, δεν είναι απαραίτητοι όταν χρησιμοποιούνται για χαρακτηρισμό ή περιγραφή, αλλά είναι κρίσιμοι όταν χρησιμοποιούνται για να συναχθεί ή να δικαιολογηθεί ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό επιχείρημα (Duval 2014).

Το πόσο καλά μαθαίνεται και αιτιολογείται ένα σχήμα εξαρτάται από τον βαθμό σύνδεσης μεταξύ των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται για την έκφραση των εννοιών και την ικανότητα ενός ατόμου να οπτικοποιεί και να επικοινωνεί τις σχέσεις. Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής ορίσει ένα εξάγωνο ως το σχήμα με πολλές γωνίες ή «στρογγυλό» είναι πιθανό να ονομάσει εξάγωνο ένα οκτάγωνο. Παρόμοια, αν η μοναδική εμπειρία με 3-διάστατα αντικείμενα είναι το πρίσμα, είναι πιθανό να ονομάσει τριγωνική πυραμίδα ένα τριγωνικό πρίσμα. Ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνεται και μιλά ένας μαθητής για γεωμετρικές οπτικές αναπαραστάσεις αποκαλύπτει τη διαδικασία της σκέψης του και ταυτόχρονα τη διαμορφώνει (Sfard, 2008). Η αλλαγή του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές/-τριες οπτικοποιούν το τρισδιάστατο αντικείμενο απαιτεί την αλλαγή του λόγου τους.

Οι μαθητές, ήδη από τις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, έχουν ασχοληθεί με έννοιες των σχημάτων, επίπεδων και στερεών, με όλες τις σχετικές πτυχές όπως το

μέγεθος, η θέση, ο προσανατολισμός. Η εκμάθηση στοιχείων της γεωμετρίας δεν ακολουθεί μια γραμμική πορεία με τον τρόπο που κάποιοι έχουν δει την εκμάθηση αριθμών. Τα παιδιά δεν μαθαίνουν όλα τα τρίπλευρα σχήματα πριν προχωρήσουν στην εκμάθηση τετράπλευρων σχημάτων. Αντίθετα, οι αρχικές γεωμετρικές τους ιδέες βασίζονται σε πρωτότυπα μοντέλα σχημάτων όπως τα τρίγωνα, τα τετράγωνα και οι κύκλοι που συνάντησαν. Για να προοδεύσουν, πρέπει να κατανοήσουν ότι τα σχήματα και τα αντικείμενα δεν είναι αυτόνομες οντότητες, αλλά, μάλλον, ένα συνδεδεμένο δίκτυο εννοιών που παρουσιάζονται με τη μορφή σημείων, γραμμών, γωνιών, διαγραμμάτων και συγκεκριμένων αντικειμένων.

Θεματική Ενότητα: Γεωμετρία του επιπέδου

Στο Δημοτικό, οι μαθητές/-τριες έχουν μάθει να αναγνωρίζουν, ονομάζουν και να ταξινομούν σχήματα με βάση γεωμετρικά και μη χαρακτηριστικά, να κατασκευάζουν και να σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα με χειραπτικά υλικά και γεωμετρικά όργανα σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον.

Η μελέτη των ιδεών αντικειμένων της **Γεωμετρίας** στο Γυμνάσιο επιδιώκεται να γίνεται μέσω της μελέτης του σχήματός τους και περιλαμβάνει την αναγνώριση (αντίληψη) των κατηγοριών των γεωμετρικών αντικειμένων, την αναγνώριση των ιδιοτήτων τους –μετρικών και μη μετρικών, την αναγνώριση των σχέσεων της ίδιας κατηγορίας γεωμετρικών αντικειμένων και τη σχεδίαση και κατασκευή τους με γεωμετρικά όργανα, με βάση τις ιδιότητές τους (van Hiele 1986; Clements & Battista, 1992). Οι δράσεις αυτές συμπληρώνονται με την ανάλυση και σύνθεση επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων και με *μετασχηματισμούς* των σχημάτων. Η πορεία που ακολουθείται διδακτικά είναι μια σύνδεση μεταξύ οπτικού, λεκτικού και αφηρημένου (Owens & Outhred, 2006; Duval, 1998) και των μεταξύ τους σχέσεων. Οι διεργασίες αυτές αποτελούν ένα ενιαίο πλέγμα νοητικής προσέγγισης των γεωμετρικών αντικειμένων που σχετίζεται με την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης.

Η **αναγνώριση** των βασικών γεωμετρικών σχημάτων (τρίγωνα, τετράπλευρα, κανονικά πολύγωνα κ. λπ), των ιδιοτήτων τους και των σχέσεων που τα συνοδεύουν με την ταυτόχρονη ανάπτυξη κατάλληλου λεξιλογίου αποτελούν αναγκαίες προϋποθέσεις για την περαιτέρω ανάπτυξη της γεωμετρικής γνώσης και σκέψης των μαθητών. Η αναγνώριση επιδιώκεται να γίνεται μέσω πειραματισμού, διερεύνησης, παρατήρησης, αναγνώρισης των συστατικών στοιχείων των σχημάτων, διατύπωσης των σχετικών με τα αντικείμενα ορισμών και περιγραφής των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων τους και των διακριτών σχέσεων μεταξύ των σχημάτων, όπως της ισότητας, της παραλληλίας, της συνευθειακότητας και της ομοιότητας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές/-τριες να αντιλαμβάνονται τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων και ανάμεσα στα σχήματα, να αρχίζουν να διατυπώνουν ορισμούς για γεωμετρικά αντικείμενα, να διακρίνουν ποιες ιδιότητες είναι επαρκείς για την περιγραφή ενός γεωμετρικού αντικειμένου, να χρησιμοποιούν διάφορες μορφές παράστασής του (σχέδια, σχήματα,

λεκτική παρουσίαση, σύμβολα) και να προβάλουν άτυπα επιχειρήματα για να αιτιολογήσουν το συλλογισμό τους. Για παράδειγμα, αντιλαμβάνονται ότι ένα τρίγωνο στην ουσία είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο που ορίζεται με βάση κάποιες ιδιότητες και αναπαριστάνεται με ένα ιδιαίτερο σχήμα. Η ταξινόμηση σχημάτων ως προς κάποιο χαρακτηριστικό και η συμπερίληψη σχημάτων σε κλάσεις (το τετράγωνο είναι ορθογώνιο) αρχίζουν να γίνονται κατανοητά. Στο τέλος των σπουδών τους (στη Γ' Γυμνασίου) αρχίζουν να περνούν σε ένα θεωρητικοποιημένο επίπεδο σκέψης, η σκέψη τους αποκτά πιο τυπικά χαρακτηριστικά. Είναι σε θέση να διατυπώνουν και να αξιολογούν εικασίες και να αναπτύσσουν (άτυπα) επιχειρήματα τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων τους. Αντίστοιχα οι αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων σε άλλα σχήματα και η αξιοποίηση των μετασχηματισμών αναπτύσσουν μια ευλυγισία στην προσέγγιση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων, όπως της ισότητας και της ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων.

Ο σχεδιασμός, οι κατασκευές και οι χαράξεις των γεωμετρικών αντικειμένων με τη χρήση μιας ποικιλίας μέσων και μεθόδων (κανόνας, διαβήτη, χάρακας, μοιρογνωμόνιο, ψηφιακά εργαλεία, διπλώσεις χαρτιού, διαφανές χαρτί, κ.λπ.), είναι ένα από τα σημαντικά μέρη του ΠΣ σε σχέση με την γεωμετρία. Μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά τους/τις μαθητές/-τριες να κατανοήσουν τη σημασία των σχέσεων και ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων για την κατασκευή τους καθώς και στον εντοπισμό στοιχείων (σημείων, τμημάτων κλπ.) και στην αναγνώριση και χρήση σχέσεων και ιδιοτήτων τους που αποτελούν ένα μέρος των γεωμετρικών γνώσεων που επιδιώκουμε να αναπτύξουν ολοκληρώνοντας τη διδασκαλία πριν από την εισαγωγή στη θεωρητική Γεωμετρία στο Λύκειο. Για παράδειγμα η κατασκευή παράλληλης προς δοθείσα ευθεία από σημείο εκτός αυτής με χρήση κανόνα και γνώμονα βασίζεται στην ιδιότητα ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες ή στην ιδιότητα ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη έχουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, γωνίες ίσες θα είναι παράλληλες. Είναι σημαντικό οι μαθητές/-τριες τελειώνοντας το Γυμνάσιο να είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση των τυπικών οργάνων σχεδίασης και χάραξης σχημάτων, καθώς και με βασικές γεωμετρικές κατασκευές, με διάφορα μέσα και μεθόδους.

Το κάθε μέσο μπορεί να αναδείξει διαφορετικές πτυχές των εμπλεκόμενων εννοιών και έτσι να βοηθήσει τους/τις μαθητές/-τριες στην κατανόηση αυτών των εννοιών, στην ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης και του γεωμετρικού τους συλλογισμού. Για παράδειγμα, η κατασκευή της διχοτόμου μιας γωνίας με μοιρογνωμόνιο στηρίζεται στην μέτρηση και την ισότητα των γωνιών μέσω του μέτρου τους, η κατασκευή με διπλωση διαφανούς χαρτιού αναδεικνύει την ισότητα των γωνιών μέσω της ταύτισής τους αλλά και την διχοτόμο ως άξονα συμμετρίας της γωνίας, η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη βασίζεται σε γεωμετρικές ιδιότητες ή σχέσεις (ισότητα τριγώνων κ.λπ.), ενώ η κατασκευή της διχοτόμου σε ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας, αν και σχετικά απλοποιημένη, πέρα από την ακρίβεια της κατασκευής, αναδεικνύει το αναλλοίωτο της σχέσης της ισότητας των δύο γωνιών μέσω του δυναμικού χειρισμού και της συνεχούς αλλαγής των

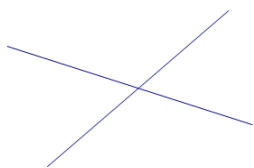
σχημάτων και των μετρήσεων και βοηθάει τους/τις μαθητές/-τριες στην απαλλαγή από πρωτοτυπικές εικόνες (συγκεκριμένος προσανατολισμός των σχημάτων).

Οι μαθητές, εμπλεκόμενοι σε διαδικασίες πειραματισμού και διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου εικασιών και τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων τους, κατανοούν ότι οι γεωμετρικές μορφές της εμπειρίας τους είναι γεωμετρικές έννοιες που παίρνουν τη σημασία τους μέσα από τους ορισμούς τους, τις ιδιότητες που τις συνοδεύουν, τις σχέσεις τους με ίδιας κατηγορίας γεωμετρικά αντικείμενα και γίνονται αντιληπτές μέσω της σχηματικής αναπαράστασής τους.

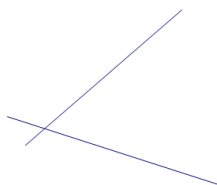
Στο **Λύκειο**, οι μαθητές/-τριες θα κατοχυρώσουν την αντίληψη τους για τα γεωμετρικά σχήματα με βάση τις ιδιότητες τους και όχι τις πρωτοτυπικές μορφές τους, οργανώνουν σε λογικές δομές τις ιδιότητες των σχημάτων και αναπτύσσουν λογικούς συλλογισμούς και αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι μαθητές/-τριες δυσκολεύονται με την αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων και αντικειμένων σε μη τυπικό προσανατολισμό, με την κατανόηση της συμπερίληψης σχημάτων σε κλάσεις, την οπτικοποίηση γεωμετρικών στερεών σε δισδιάστατη (2D) μορφή και την επίλυση προβλημάτων μέτρησης που απαιτούν γεωμετρική λογική (Fujita 2012; Fujita και Jones 2007; Levenson et al. 2011; Seah and Horne 2018a).

Στοιχεία όπως το σημείο, η ευθεία, η ημιευθεία, το επίπεδο κ.λπ. δεν γίνονται άμεσα αντιληπτά στους μαθητές, λόγω του θεωρητικού τους χαρακτήρα. Συνήθως, οι μαθητές/-τριες αντιλαμβάνονται στοιχεία που χαράσσουν ή «βλέπουν», όπως για παράδειγμα τα ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι, μπορούν να αναγνωρίσουν κατακορυφήν γωνίες στην εικόνα 1, ενώ όχι στην εικόνα 2. Ομοίως τα σημεία που είναι σχεδιασμένα στην εικόνα 3, δεν αντιλαμβάνονται ότι ανήκουν στην κυρτή γωνία.



Εικόνα 1

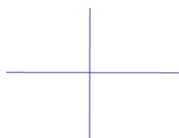


Εικόνα 2

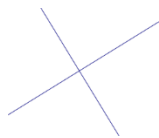


Εικόνα 3

Ο συνηθισμένος τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα γεωμετρικά σχήματα (γραμμές που ακολουθούν τον οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό) εμποδίζουν τους/τις μαθητές/-τριες να διακρίνουν τις ίδιες σχέσεις σε άλλες καταστάσεις. Για παράδειγμα αναγνωρίζουν την καθετότητα στην περίπτωση της εικόνας 4 αλλά με δυσκολία στην περίπτωση της εικόνας 5. Ακόμα και η σχέση της παραλληλίας (ή της μη παραλληλίας) μπορεί να είναι δύσκολα αναγνωρίσιμη όταν οι ευθείες ακολουθούν πλάγιες διευθύνσεις (εικόνα 6)



Εικόνα 4



Εικόνα 5



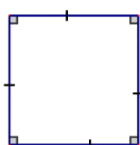
Εικόνα 6



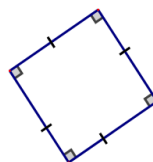
Εικόνα 6

Οι μαθητές/-τριες δυσκολεύονται να δουν με ένα «δυναμικό» τρόπο τα σχήματα, να φανταστούν τα σχήματα να στρέφονται, τις ευθείες και τις ημιευθείες να προεκτείνονται κ.λπ. Μία από τις αιτίες για το προηγούμενο είναι το ότι τα σχήματα που σχεδιάζουμε στο χαρτί ή στον πίνακα είναι στατικά. Για πολλούς μαθητές το σχήμα παριστάνει μόνο μια συγκεκριμένη κατάσταση.

Πολλοί από τους/τις μαθητές/-τριες αντιλαμβάνονται τα σχήματα ολιστικά, δηλαδή δεν μπορούν να αναγνωρίσουν και να διακρίνουν σχέσεις ή ιδιότητες. Έτσι για παράδειγμα μπορούν να αναγνωρίσουν ένα τετράγωνο σαν αυτό της εικόνας 7, αλλά δεν μπορούν να αναγνωρίσουν την ισότητα των πλευρών, την παραλληλία και τις ορθές γωνίες για να αναγνωρίσουν ότι και το τετράπλευρο της εικόνας 8 είναι τετράγωνο. Επιπλέον δε βλέπει τις κορυφές ως σημεία, συχνά μπερδεύει το τετράγωνο με το εσωτερικό τους και είναι πιθανόν να μην το αναγνωρίσει σε μια μη στερεοτυπική θέση, όπως αυτό της εικόνας 8.



Εικόνα 7



Εικόνα 8

Πολλοί μαθητές υποστηρίζουν ότι «η γωνία αυτή είναι ορθή γιατί φαίνεται (ορθή)» θεωρώντας περιττή τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων. Μπορεί να αναγνωρίζουν ένα τετράγωνο χωρίς να εντοπίζουν ότι έχει τέσσερις ίσες πλευρές, καθετότητες και παραλληλίες.

Λόγω της ολιστικής αντίληψης των σχημάτων πολλοί μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν σχήματα τα οποία είναι μέσα σε άλλα σχήματα. Επίσης, ενδέχεται να υπάρχουν μαθητές οι οποίοι δεν μπορούν να αναγνωρίσουν σχήματα όταν παρουσιάζονται με μη πρωτοτυπικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα ένα τρίγωνο στο οποίο η μια πλευρά του είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες για κάποιο μαθητή μπορεί «να μην είναι τρίγωνο».

Σε σχέση με την ταξινόμηση των σχημάτων μπορεί να υπάρχουν μαθητές που να έχουν τη δυνατότητα να καταγράψουν σε λίστα όλες τις ιδιότητες κάποιων σχημάτων π.χ. των τετραγώνων, των ορθογωνίων, των ρόμβων και των παραλληλογράμμων αλλά να μην διακρίνουν ότι αυτές είναι υποκατηγορίες η μια της άλλης. Δηλαδή ότι όλα τα τετράγωνα

είναι ορθογώνια και ρόμβοι και όλα τα ορθογώνια και οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα. Επίσης, όταν ορίζουν ένα σχήμα είναι πιθανό να καταγράψουν σε λίστα όλες τις ιδιότητες των σχημάτων που γνωρίζουν π.χ. ισόπλευρο τρίγωνο είναι αυτό που έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

Οι μαθητές/-τριες συναντούν δυσκολίες στο σχεδιασμό και τις κατασκευές γεωμετρικών αντικειμένων με δεδομένα χαρακτηριστικά οι οποίες ενδέχεται να σχετίζονται με τη χρήση και τον χειρισμό των οργάνων μέτρησης και σχεδίασης, τη συνειδητοποίηση των σχέσεων και ιδιοτήτων που απαιτούνται για τη σχεδίαση ή την κατασκευή ενός σχήματος και την εξοικείωση με τα ψηφιακά εργαλεία, των δυνατοτήτων τους και των περιορισμών τους, για την δημιουργία κατασκευών.

Θεματική Ενότητα: Γεωμετρία του Χώρου

Οι μαθητές, ήδη από το δημοτικό αποκτούν εμπειρίες για γεωμετρικές έννοιες με τρισδιάστατα σχήματα μέσα από δραστηριότητες που δίνουν τη δυνατότητα να δράσουν, να σκέφτονται και να εργάζονται με το σχήμα και το χώρο, να εκφραστούν λεκτικά και να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους και τη διαίσθησή τους, να πειραματιστούν με τη χρήση διαφόρων και διαφορετικών υλικών και ενθαρρύνουν την κατασκευή και το σχεδιασμό δοσμένων τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και των αναπτυγμάτων τους.

Στο **Γυμνάσιο**, η μελέτη της Γεωμετρίας του χώρου πραγματοποιείται στις τάξεις της **Α΄** και **Γ΄ Γυμνασίου**. Στη μελέτη αυτή αξιοποιούνται οι εμπειρίες και οι γνώσεις που έχουν αποκτήσει οι μαθητές/-τριες για τα γεωμετρικά σχήματα στο χώρο. Δίνεται έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων νοητικών χειρισμών γεωμετρικών στερεών και τη μετατροπή τους σε άλλες οπτικές μορφές μέσω της ανάλυσης των δομικών χαρακτηριστικών τους, του προσδιορισμού των στοιχείων τους και του ελεύθερου σχεδιασμού όψεων και αναπτυγμάτων τους σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον. Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να συμβάλλει και ο υπολογισμός του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου των βασικών γεωμετρικών στερεών η οποία αναπτύσσεται στη Μέτρηση.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται σε διαδικασίες αναγνώρισης βασικών γεωμετρικών στερεών και προσδιορισμού των στοιχείων τους, ελεύθερου σχεδιασμού όψεων και αναπτυγμάτων γεωμετρικών στερεών σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον.

Στο **Λύκειο**, η μελέτη της Γεωμετρίας του χώρου περιορίζεται στην **Α΄ Λυκείου** όπου οι μαθητές/-τριες διαπραγματεύονται τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο και διερευνούν τα σχήματα που δημιουργούνται στην τομή πρισμάτων, πυραμίδων και στερεών εκ περιστροφής με επίπεδα, αξιοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία. Επίσης, διερευνούν αναλογικά ιδιότητες και χαρακτηριστικά σε επίπεδα σχήματα και σε σχήματα στο χώρο και αντίστροφα.

Δυσκολίες των μαθητών: Είναι σημαντικό οι μαθητές/-τριες να αναπτύξουν ικανότητες που τους επιτρέπουν να χειρίζονται διαφορετικές δισδιάστατες αναπαραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων, δηλαδή ικανότητες που τους επιτρέπουν να δημιουργούν, να μετακινούν, να μετασχηματίζουν και να αναλύουν νοητικές εικόνες τρισδιάστατων αντικειμένων που δημιουργούνται από τις πληροφορίες που φέρει ένα επίπεδο σχέδιο (Gutierrez, 1996b).

Η ικανότητα των παιδιών να αναγνωρίζουν τη σχέση μεταξύ στερεών και αναπτυγμάτων είναι στενά συνδεδεμένη με τη γενικότερη αντίληψή τους για το χώρο (Πόταρη & Σπηλιωπούλου, 2003).

Η **μετάβαση** από τον χώρο των δύο διαστάσεων και αντίστροφα δημιουργεί δυσκολίες στους μαθητές, η **μετάφραση** ανάμεσα σε τρισδιάστατα στερεά και τις δισδιάστατες αναπαραστάσεις τους αποτελεί σημαντική διαδικασία στα μαθηματικά, επιπλέον η **αναπαράσταση** τρισδιάστων αντικειμένων **μέσω της κατασκευής αναπτυγμάτων** συμβάλει στην κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στα στοιχεία ενός στερεού.

Υπάρχει μια ποικιλία μέσων που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση τρισδιάστατων δομών όπως, στατικές γραφικές αναπαραστάσεις (όπως οι εικόνες στα σχολικά εγχειρίδια,) αναπαραστάσεις με κίνηση μέσω γραφικών στο υπολογιστή (διαδραστικά προγράμματα για τρισδιάστατες δομές), φυσικά μοντέλα τρισδιάστατων αντικειμένων). Κάθε μια από αυτές τις τεχνικές έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα και με κάθε είδος επίπεδης αναπαράστασης υπάρχει κάποιος βαθμός απώλειας πληροφοριών.

Ένα μαθησιακό περιβάλλον που περιλαμβάνει δυναμικούς μετασχηματισμούς γεωμετρικών στερεών ενθαρρύνει την ανάπτυξη της ικανότητας να επικεντρώνονται στις ιδιότητες κάθε στερεού και να οικοδομούν σχέσεις ανάμεσα σε αυτές τις ιδιότητες, και βάσει των σχέσεων αυτών, σε διαφορετικά στερεά (Markopoulos & Potari, 1999).

Θεματική Ενότητα: Μετασχηματισμοί

Οι μαθητές/-τριες έχουν καθημερινές άτυπες εμπειρίες σε σχέση με την ανάκλαση (είδωλα στον καθρέφτη, συμμετρικές ως προς άξονα εικόνες), τη μεταφορά (επαναλαμβανόμενα διακοσμητικά - γεωμετρικά μοτίβα), τη στροφή (καλειδοσκόπια, ζάντες αυτοκινήτων) και την ομοιοθεσία (μεγεθύνσεις – σμικρύνσεις σχημάτων και φωτογραφιών) και στο Δημοτικό έχουν γνωρίσει πτυχές από τα διάφορα είδη μετασχηματισμών⁴.

⁴ Ο διδάσκων πρέπει να λάβει υπ' όψη ότι η στροφή σχήματος, όπως και η μεταφορά σχήματος εισάγονται με το τωρινό πρόγραμμα σπουδών και δεν υπήρχαν στα παλιότερα προγράμματα.

Στην **Α΄ Γυμνασίου** θα εμπλακούν με την ανάκλαση σχημάτων ως προς ευθεία (αξονική συμμετρία). Μέσω της αξονικής συμμετρίας θα μελετήσουν και θα αιτιολογήσουν ιδιότητες των σχημάτων.

Στην **Β΄ Γυμνασίου** θα εμπλακούν με τη μεταφορά σχημάτων, τη στροφή τους ως προς σημείο υπό συγκεκριμένη γωνία (και ως ειδική περίπτωση την κεντρική συμμετρία). Μέσω του μετασχηματισμού μεταφορά και στροφής ως προς σημείο (κεντρική συμμετρία) θα μελετήσουν και θα αιτιολογήσουν επίσης ιδιότητες των σχημάτων.

Στην **Γ΄ Γυμνασίου** οι μαθητές/-τριες θα εμπλακούν με την ομοιοθεσία και θα την συνδέσουν με την ομοιότητα των σχημάτων. Θα εξετάσουν χαρακτηριστικά του συνόλου των μετασχηματισμών καθώς και συνθέσεις μετασχηματισμών.

Δυσκολίες των μαθητών: Η αναγνώριση των συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα ή σχημάτων με άξονα συμμετρίας είναι απλή για τους/τις μαθητές/-τριες, όταν ο άξονας συμμετρίας έχει κατακόρυφο ή οριζόντιο προσανατολισμό αλλά δυσκολεύει όταν ο άξονας είναι πλάγιος ή οι πλευρές του σχήματος δεν είναι παράλληλες προς τον άξονα. Η ευκολία να αντιλαμβάνονται οι μαθητές/-τριες τα συμμετρικά σχήματα δεν οδηγεί με την ίδια ευκολία στην κατασκευή τους, γιατί η ολιστική αντίληψη δεν διευκολύνει τη σημειακή κατασκευή. Το τετραγωνισμένο χαρτί διευκολύνει τις μετρήσεις. Ως προς την κατασκευή του συμμετρικού ως προς άξονα σχήματος, συνήθως κάνουν μεταφορά αντί για ανάκλαση.

Οι μαθητές/-τριες μπορεί να μην έχουν εξασκηθεί σε νοερούς μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι απαραίτητοι στη στροφή σχήματος ή στην κεντρική συμμετρία και για αυτό το λόγο ένα μέρος των δραστηριοτήτων πρέπει να περιλαμβάνει πρακτικές περιστροφές, δηλαδή περιστροφές σχημάτων από χαρτόνι ή περιστροφή σχεδίου σε διαφανές χαρτί πάνω από το πρωτότυπο κ.λπ.

Στον μετασχηματισμό της στροφής ως προς κέντρο και υπό συγκεκριμένη γωνία, διαφορετική των 180° , οι μαθητές/-τριες ενδέχεται να δυσκολεύονται με τα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού όπως: η φορά (που κατά σύμβαση είναι η αριστερόστροφη) ή η 1-1 αντιστοιχία των σημείων του σχήματος και της εικόνας του.

Θεματική Ενότητα: Τριγωνομετρία

Πτυχές του λόγου, της αναλογίας και της ομοιότητας, είναι οικείες στους μαθητές από προηγούμενες τάξεις, αλλά και από την καθημερινή ζωή.

Στην **Γ΄ Γυμνασίου** οι μαθητές/-τριες θα ασχοληθούν με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και την επίλυση ορθογωνίων τριγώνων.

Στο **Λύκειο** οι μαθητές/-τριες θα γνωρίσουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι μαθητές/-τριες δυσκολεύονται να αντιληφθούν το λόγο δύο τμημάτων ως ένα αριθμό κι ακόμα περισσότερο να συνδέσουν το λόγο με το μέτρο της γωνίας. Ακόμη μία από τις βασικές δυσκολίες των μαθητών μπορεί να σχετίζεται με την αναγνώριση ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εξαρτώνται αποκλειστικά από τη γωνία και όχι από το συγκεκριμένο τρίγωνο. Επίσης η ερμηνεία του ίδιου του λόγου μπορεί να αποτελεί εμπόδιο. Για παράδειγμα, ο λόγος $\frac{AB}{AG} = \frac{1}{2}$ όπου AB και AG πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, ερμηνεύεται από μαθητές αποκλειστικά ως AB=1 μονάδα μήκους και AG=2 μονάδες μήκους. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές/-τριες ενδέχεται να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την ορθή γωνία και την υποτείνουσα όταν το ορθογώνιο τρίγωνο δεν έχει τον συνηθισμένο γι' αυτούς προσανατολισμό. Είναι όμως σημαντικό να αναγνωρίζουν αυτά τα στοιχεία ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του σχήματος.

3.2 Μέτρηση

Η έννοια της μέτρησης (σύγκριση του μεγέθους που μετράμε με μία μονάδα που έχει το ίδιο χαρακτηριστικό, για παράδειγμα επιφάνεια με επιφάνεια), η εξοικείωση με την μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται, τα όργανα μέτρησης (βαθμολογημένος χάρακας, μετροταινία, μοιρογνωμόνιο κ.λπ.) ως εργαλεία με τα οποία κάνουμε συγκρίσεις και η χρήση τους, ο τρόπος μεταβολής του αποτελέσματος της μέτρησης όταν χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια ή υποδιαιρέσεις μιας μονάδας μέτρησης και η προσεγγιστική φύση της μέτρησης είναι στοιχεία που πρέπει να κατανοηθούν από τους/τις μαθητές/-τριες.

Αν και η μέτρηση ως διαδικασία ξεκινάει από τις μικρές ηλικίες, συχνά οι τυπικές και αποκομμένες από την πραγματικότητα προσεγγίσεις στη διαδικασία μέτρησης δεν επιτρέπουν τους/τις μαθητές/-τριες να μεταφέρουν την εμπειρία τους στις εφαρμογές που πραγματοποιούν (Τζεκάκη, κ.ά., 2011). Έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές/-τριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της μονάδας και αντιμετωπίζουν τη μέτρηση ως διαδικασία και όχι ως σχέση ανάμεσα στο μέγεθος και τη μονάδα μέτρησης και για αυτό ενθαρρύνονται στη χρήση αρχικά άτυπων και στη συνέχεια τυπικών μονάδων μέτρησης. (Jones & Tzekaki, 2016). Το πέρασμα από τις αυθαίρετες στις τυπικές μονάδες μπορεί να βοηθηθεί από τις συγκρίσεις με διαφορετικού είδους μονάδες που δίνει διαφορετικά αποτελέσματα.

Στο **Γυμνάσιο**, αρχικά προσεγγίζονται οι *μετρικές έννοιες* δηλαδή οι ιδιότητες ή οι σχέσεις ανάμεσα σε αντικείμενα ή καταστάσεις του χώρου που σχετίζονται με τα μαθηματικά μεγέθη (γωνία, μήκος, επιφάνεια και όγκος). Οι μετρικές έννοιες χρησιμοποιούνται για συγκρίσεις και υπολογισμούς γωνιών και μηκών. Στην συνέχεια οι μετρήσεις συνδέονται με τους τύπους των επιφανειών επίπεδων σχημάτων και των όγκων στερεών σχημάτων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ως εργαλεία σε αντίστοιχες

υπολογιστικές ασκήσεις υπολογισμού καθώς και στη σχέση που έχουν μεταξύ τους κάποιοι απ' αυτούς.

Οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται με την αιτιολόγηση των τύπων του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου, καθώς και το εμβαδόν κυκλικού τομέα. Εδώ εντάσσεται και το Πυθαγόρειο θεώρημα με στόχο την ανάδειξη της σχέσης των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, αλλά και τη χρήση του στον υπολογισμό αποστάσεων και στον έλεγχο αν μία γωνία είναι ορθή. Το Πυθαγόρειο θεώρημα, εκτός από τις άμεσες εφαρμογές, προσφέρεται ιδιαίτερα για δραστηριότητες που εισάγουν μια ιστορική προοπτική στη διδασκαλία των Μαθηματικών και αναδεικνύουν τη σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας (γεωμετρικά εμβαδά, αλγεβρική σχέση).

Σχετικά με τη μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου των γεωμετρικών στερεών, βασικοί στόχοι της διδασκαλίας είναι η αιτιολόγηση των σχετικών τύπων για το πρίσμα, την πυραμίδα, τον κύλινδρο και τον κώνο καθώς και η χρήση τους, όπως και η χρήση των τύπων για την σφαίρα, στην επίλυση προβλημάτων. Παράλληλα, επιδιώκεται η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών για οπτικοποιημένη σκέψη μέσω της χρήσης πραγματικών αντικειμένων ή γεωμετρικών μοντέλων και των αναπτυγμάτων τους. Η ορθή χρήση των τύπων για την μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου των στερεών συνδέεται στενά με την ικανότητα των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό, γεγονός που μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά με διάφορους τρόπους.

Η έννοια της μέτρησης (σύγκριση του μεγέθους που μετράμε με μία μονάδα που έχει το ίδιο χαρακτηριστικό, για παράδειγμα επιφάνεια με επιφάνεια), η εξοικείωση με την μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται, τα όργανα μέτρησης (βαθμολογημένος χάρακας, μετροταινία, μοιρογνωμόνιο κ.λπ.) ως εργαλεία με τα οποία κάνουμε συγκρίσεις και η χρήση τους, ο τρόπος μεταβολής του αποτελέσματος της μέτρησης όταν χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια ή υποδιαιρέσεις μιας μονάδας μέτρησης και η προσεγγιστική φύση της μέτρησης είναι στοιχεία που πρέπει να κατανοηθούν από τους/τις μαθητές/-τριες. Η χρήση των οργάνων μέτρησης δυσκολεύουν συχνά μαθητές και στο Γυμνάσιο.

Θεματική Ενότητα: Μέτρηση Γωνίας -Μήκος

Αν και η **μέτρηση μήκους** είναι μία διαδικασία που φαντάζει σχετικά απλή, ενδέχεται να υπάρχουν μαθητές που να συναντούν δυσκολίες σε σχέση με αυτή. Συγκεκριμένα όταν μετρούν με χάρακα δεν αντιστοιχούν διαστήματα αλλά αντιστοιχούν σημεία.

Η **μέτρηση γωνιών** αποτελεί και αυτή συχνά πηγή δυσκολιών για τους/τις μαθητές/-τριες γιατί:

- συγκρίνουν γωνίες λαμβάνοντας υπ' όψη άλλα μεγέθη (τα μήκη των πλευρών ή την επιφάνεια που περικλείουν).

- δυσκολεύονται να δώσουν προσοχή σε μια γωνία ως ένα από τα χαρακτηριστικά του σχήματος και να τη διακρίνουν από τη μέτρηση μιας πλευράς ενός σχήματος.
- δυσκολεύονται στην χρήση του μοιρογνωμονίου (χρήση της σωστής κλίμακας μέτρησης , αναγνώριση της μονάδας μέτρησης).
- δεν έχουν σαφή εικόνα για τις μονάδες μέτρησης, ακτίνια και τις μοίρες.

Η **μέτρηση του τόξου** αποτελεί πηγή δυσκολίας των μαθητών μια και είναι δύο τα χαρακτηριστικά που μετράμε: το μήκος του τόξου και το μέτρο του τόξου.

Θεματική Ενότητα: Εμβαδόν - Όγκος

Ως προς την **μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου** θα πρέπει να αντιμετωπιστούν κάποιες από τις δυσκολίες των μαθητών, που θεωρούν ότι:

- βάση (ή βάσεις) στα σχήματα είναι μόνο αυτή (ή αυτές) που έχουν οριζόντιο προσανατολισμό και ύψος είναι μόνο αυτό που έχει κατακόρυφο προσανατολισμό ή μόνον αυτό που άγεται από κάποια κορυφή (στην περίπτωση των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων) και όχι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων.
- η μεταβολή κατά ανάλογο τρόπο των διαστάσεων ενός σχήματος (διπλασιασμός, τριπλασιασμός κ.λπ. όλων των πλευρών) επιφέρει ανάλογη μεταβολή στο εμβαδό των σχημάτων.
- σχήματα με μεγαλύτερη περίμετρο έχουν μεγαλύτερο εμβαδό.
- αν αλλάξει το σχήμα, αλλάζει και η επιφάνεια πχ. δύο διαφορετικά τρίγωνα με την ίδια βάση και ίσα ύψη.
- η μεταβολή κατ' ανάλογο τρόπο των διαστάσεων ενός στερεού επιφέρει ανάλογη μεταβολή στον όγκο των σχημάτων.
- στερεά με μεγαλύτερη επιφάνεια έχουν και μεγαλύτερο όγκο.
- στερεά με ίσο όγκο έχουν και ίση επιφάνεια.

3.3 Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας -Θέση στο Επίπεδο

Θεματική Ενότητα: Διάνυσμα

Οι δυσκολίες των μαθητών ενδέχεται να σχετίζονται με την διάκριση ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα, δηλαδή ότι το τελευταίο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και δεν είναι μόνο το μήκος του που το καθορίζει , αλλά ταυτόχρονα η διεύθυνση και η φορά. Επίσης μπορεί να έχουν δυσκολίες στη διάκριση ανάμεσα στη διεύθυνση και τη κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά μαζί) λόγω του τρόπου χρήσης των δύο εννοιών στην καθημερινή ζωή και στα μαθηματικά.

4. Ενδεικτικά έργα και δραστηριότητες

Α' Γυμνασίου

Έργο1. Το Κουτί

Το παρακάτω σχήμα παριστάνει ένα κουτί συσκευασίας δώρου που έχει τη μορφή ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

α) Ονομάστε τα επίπεδα που μπορείτε να διακρίνετε.

β) Χρωματίστε το επίπεδο $EZHΘ$. Σημειώστε δυο σημεία K και Λ πάνω στο επίπεδο $EZHΘ$ και ένα τρίτο σημείο που δε βρίσκεται πάνω σε αυτό. Βρείτε άλλα σημεία του σχήματος από αυτά που σημειώνονται τα οποία δε βρίσκονται πάνω στο επίπεδο $EZHΘ$.

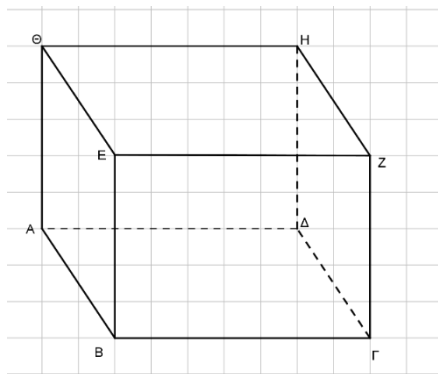
γ) Σχεδιάστε μια ευθεία που περνάει από το E και το H και μια ημιευθεία από το Δ που περνάει από το B . Την ευθεία και την ημιευθεία μπορείτε να τις προεκτείνετε έξω από το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Στην περίπτωση που κάποιο από αυτά μπορεί να προεκταθεί να σχεδιάσετε την προέκτασή του πάνω στο σχέδιο.

δ) Γράψτε στο τετράδιό σας όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που μπορείτε να αναγνωρίσετε πάνω στο σχέδιο. Είναι κάποια από αυτά ίσα; Αν υπάρχουν ίσα, εξηγήστε γιατί είναι ίσα.

ε) Χρωματίστε τις ευθείες $AΘ$ και EB πάνω στο σχέδιο. Βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο; Αν ναι, ποιο είναι; Τέμνονται; Είναι παράλληλες; Χρωματίστε πάνω στο σχέδιο άλλες δυο ευθείες με την ίδια σχέση.

στ) Βρείτε μια ευθεία στο σχέδιο που βρίσκεται πάνω στο ίδιο επίπεδο με την ευθεία EZ . Ονομάστε το επίπεδο αυτό. Μπορείτε να βρείτε άλλες ευθείες πάνω στο σχέδιο που βρίσκονται σε ίδιο επίπεδο με την ευθεία EZ ; Αν ναι, ποιες είναι αυτές οι ευθείες και ποια είναι τα επίπεδα;

ζ) Γράψτε στο τετράδιό σας όλες τις γωνίες που μπορείτε να αναγνωρίσετε πάνω στο σχέδιο. Γράψτε τα ονόματα των γωνιών χρησιμοποιώντας τρία γράμματα.



Χαρακτηριστικά έργου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)

		σημαντικά)			
Πεδίο	Γεωμετρία – Μέτρηση	Ειδικά	Διαδικασίες εκτέλεσης, δήλωση γεγονότων/διαπιστώσεως -Δομή - Εξήγηση. Συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Πολλαπλά σημεία 'εισόδου' βασικών γεωμετρικών εννοιών , Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Α' Γυμνασίου – Γεωμετρία του επιπέδου				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή				
Μαθηματικές διεργασίες & ρακτικές	Μαθηματική Επικοινωνία, Συλλογισμός & επιχειρηματολογία, Επιλογή -Χρήση εργαλείων - Οπτικοποίηση	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία μαθηματικός συλλογισμός	Προτεινόμενοι πόροι	Γεωμετρικά όργανα (χάρακας),
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων να που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση				
		Συγκεκριμένο	Μαθηματικό πρόβλημα		

Διδακτική Διαχείριση: Το έργο επικεντρώνεται στην ανάδειξη των δομικών στοιχείων των γεωμετρικών σχημάτων και των μεταξύ τους σχέσεων προκειμένου οι μαθητές/-τριες να αρχίζουν να αναγνωρίζουν γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις. Οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται με την αναγνώριση βασικών γεωμετρικών εννοιών όπως επίπεδο, σημείο, ευθεία, ημιευθεία, και γωνία σε ένα σύνθετο σχήμα και των μεταξύ τους σχέσεων, καθώς και με την αναγνώριση και προσδιορισμό σχετικών θέσεων ευθειών στο επίπεδο. Το έργο, μέσω των ερωτημάτων του, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να επεκτείνουν τις γνώσεις τους για έννοιες που έχουν διδαχθεί στην προηγούμενη βαθμίδα, να συμπληρώσουν το γεωμετρικό σχήμα με σημεία και ειδικές γραμμές (τμήματα, ευθείες, ημιευθείες), να εντοπίσουν κοινά χαρακτηριστικά και διαφοροποιήσεις μεταξύ των εννοιών ευθεία – ημιευθεία – ευθύγραμμο τμήμα, ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ τμημάτων (ίσα τμήματα, τεμνόμενες και παράλληλες ευθείες) και να παρέχουν εξηγήσεις, και να προσεγγίσουν διαισθητικά και άτυπα έννοιες του «ανήκει» και «δεν ανήκει».

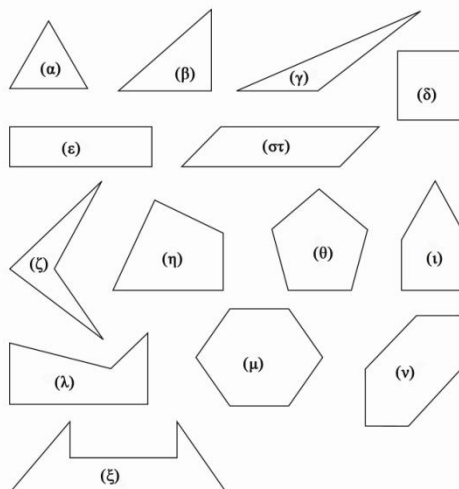
Έργο2. Κάρτες με πολύγωνα

Στην εικόνα παρουσιάζονται διάφορα σχέδια πολυγώνων.

α) Χωρίστε τα σχήματα σε ομάδες με βάση κάποιο κοινό τους χαρακτηριστικό (ή αλλιώς, κριτήριο ταξινόμησης). Μοιραστείτε τις ιδέες σας με τον διπλανό σας και διαμορφώστε από κοινού κριτήρια ταξινόμησης των πολυγώνων σε ομάδες.

Παρουσιάστε με συστηματικό τρόπο τα συμπεράσματά σας. Για παράδειγμα, φτιάξτε λίστες ή διαγράμματα ή πίνακες χαρακτηριστικών όπως, τρίγωνα- τετράπλευρα – όχι τετράπλευρα – σχήματα με ορθή γωνία - κανονικά- όχι κανονικά κ.τλ.. και εντάξτε σε αυτά το κάθε σχήμα.

Συζητείστε και καταγράψτε σε ένα φύλλο τα επιχειρήματά σας που εξηγούν τους λόγους για τους οποίους διαμορφώσατε τις συγκεκριμένες ομάδες και εντάξτε το καθένα πολύγωνο σε κάποια από αυτές. Παρουσιάστε στην ολομέλεια τα συμπεράσματά σας και τον τρόπο που σκεφτήκατε.



β) Δημιουργήστε με τον διπλανό σας έναν πίνακα με δύο στήλες. Δώστε τον τίτλο «κυρτό πολύγωνο» στη μία στήλη και τίτλο «όχι κυρτό πολύγωνο» στην άλλη στήλη. Εντάξτε τα σχήματα της εικόνας στις δυο αυτές κατηγορίες. Παρουσιάστε στην ολομέλεια τα συμπεράσματά σας και εξηγήστε ποιο χαρακτηριστικό των πολυγώνων της κατηγορίας «όχι κυρτό πολύγωνο» τα διαφοροποιεί από τα άλλα της κατηγορίας «κυρτό σχήμα».

Προσπαθήστε να σχεδιάσετε τέσσερα «όχι κυρτά» πολύγωνα με 2, 3, 4 και 5 πλευρές. Συζητείστε και εξηγήστε ποια από αυτά μπορούν να σχεδιαστούν και ποια όχι. Συνοψίστε και γενικεύστε τα συμπεράσματά σας.

γ) Ποιο ή ποια από τα πολύγωνα της προηγούμενης εικόνας θα χαρακτηρίζατε ως «τετράπλευρο»? Συζητείστε και προσδιορίστε ποιο είναι το χαρακτηριστικό της έννοιας «τετράπλευρο» και προσπαθήστε να γράψετε στο φύλλο σας έναν απλό ορισμό της. Κοινοποιείτε στην ολομέλεια τον ορισμό που γράψατε για την έννοια «τετράπλευρο».

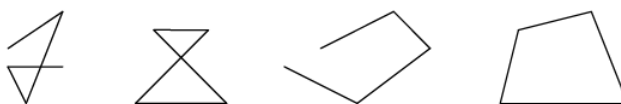
Χαρακτηριστικά έργου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Γεωμετρία – Μέτρηση	Ειδικά	Δήλωση γεγονότων, Διαδικασίες εκτέλεσης, Συστηματοποίηση η, Οπτικοποίηση Ομαδοποίηση, σύγκριση, ταξινόμηση, γενίκευση, δομή, Εξήγηση	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Πολλαπλά σημεία 'εισόδου', Ποικιλία προσεγγίσεων/στратηγικών επιλύσεων,
Ενότητα	Α' Γυμνασίου – Γεωμετρία του επιπέδου				
Μεγάλες Ιδέες	Μαθηματική δομή				

Μαθηματικές διεργασίες & ρακτικές	Μαθηματική Επικοινωνία, Συλλογισμός & επιχειρηματολογία Επιλογή -Χρήση εργαλείων - Οπτικοποίηση	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία Μαθηματικός συλλογισμός	Προτεινόμενοι πόροι	Αναπαράσταση με ψηφιακά εργαλεία (π.χ https://www.geogebra.org/m/efnjwc5 https://www.geogebra.org/m/c6jds925)
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση		Μαθηματικό πρόβλημα		

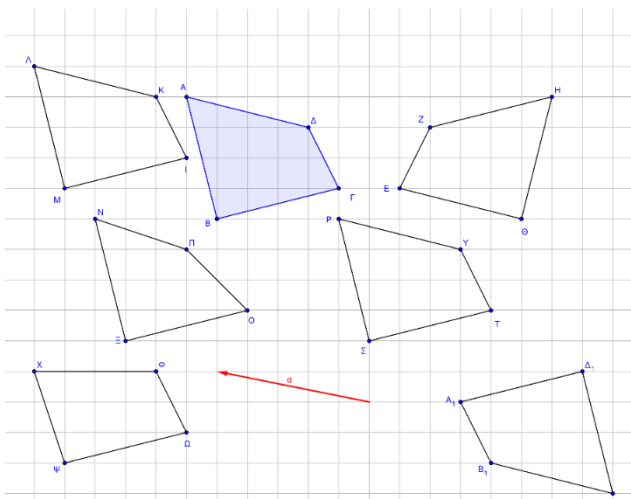
Διδακτική διαχείριση: Στόχος του έργου είναι, οι μαθητές/-τριες να εξερευνήσουν διάφορες μορφές πολυγώνων, να αναγνωρίσουν τις συνιστώσες πολυγώνου και τετραπλεύρου, να συγκρίνουν τα σχήματα σύμφωνα με κοινά χαρακτηριστικά των συστατικών τους που αναγνώρισαν και να διαμορφώσουν κριτήρια ταξινόμησής τους, να δημιουργήσουν ομάδες κοινών χαρακτηριστικών, τα ονομάσουν και να διατυπώσουν απλούς ορισμούς για τις έννοιες «κυρτό - μη κυρτό πολύγωνο», «τετράπλευρο» και «κυρτό – μη κυρτό τετράπλευρο». Τα ερωτήματα επιτρέπουν στους μαθητές να αναγνωρίσουν και να συζητήσουν χαρακτηριστικά νέων εννοιών και να επαναπροσδιορίσουν έννοιες που ήδη κατέχουν από το δημοτικό, να εισαχθεί νέα ομολογία (κυρτό- μη κυρτό πολύγωνο, τετράπλευρο). Οι μαθητές/-τριες περνούν από την οπτικοποίηση, στην περιγραφή και τελικά στην έννοια των κυρτών τετραπλεύρων, κατηγορία στην οποία ανήκουν τα τετράπλευρα που μελετούν στη συνέχεια.

Οι ερωτήσεις του/της εκπαιδευτικού μπορούν να οδηγήσουν σε αιτιολογήσεις και σε γενικεύσεις Για παράδειγμα, ο/η εκπαιδευτικός με αφορμή τους όρους που χρησιμοποιήθηκαν για την ταξινόμηση των σχημάτων στα προηγούμενα α) και β) ερωτήματα και τους «ορισμούς» που κοινοποιούνται στην ολομέλεια, ο/η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να τους καθοδηγήσει στη διατύπωση του ορισμού της έννοιας «τετράπλευρο» στο γ) ερώτημα. Στην πολύ πιθανή απάντηση “ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές”, παρουσιάζει διαδοχικά τα παρακάτω σχήματα και ζητά κάθε φορά από τους/τις μαθητές/-τριες να εντοπίσουν εκείνο το χαρακτηριστικό που δεν συνδέεται με την εικόνα που έχουν για την έννοια “τετράπλευρο”. Οι μαθητές/-τριες λόγω της προηγούμενης εξερεύνησης θα μπορέσουν να δώσουν τελικά έναν ορισμό αρκετά κοντά στον τυπικό ορισμό.



Έργο 1 Μετασχηματισμός μεταφοράς (παράλληλη μετατόπιση)

α) Σας δίνεται η πληροφορία ότι κάποιο από τα (6) έξι τετράπλευρα της εικόνας έχει προκύψει από την παράλληλη μετατόπιση του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατά το διάνυσμα $\vec{a}$. Βρείτε ποιο τετράπλευρο είναι και εξηγήστε πώς σκεφτήκατε για να το βρείτε.



β) Ποιο ή ποια από τα υπόλοιπα τετράπλευρα μπορεί να προκύψει από παράλληλη μετατόπιση του τετραπλεύρου $ABΓΔ$ ως προς κάποιο διάνυσμα; Να προσδιορίσετε το διάνυσμα μεταφοράς και να εξηγήσετε πώς σκεφτήκατε.

γ) Να εξετάσετε αν κάποιο από τα τετράπλευρα μπορεί να προκύψει από την εφαρμογή ενός μετασχηματισμού στροφής ή ανάκλασης στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να εξηγήσετε πώς σκέφτεστε να επιβεβαιώσετε ή μη την ύπαρξή του. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο τετράπλευρο, να προσδιορίσετε τα στοιχεία του αντίστοιχου μετασχηματισμού, τα τμήματα και τις αντίστοιχες γωνίες που συνδέονται με το μετασχηματισμό και να περιγράψετε τις μεταξύ τους σχέσεις.

Σε κάθε περίπτωση να τεκμηριώστε με επιχειρήματα τα συμπεράσματά σας.

Χαρακτηριστικά έργου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
<i>Πεδίο</i>	Γεωμετρία —Μέτρηση	<i>Ειδικά</i>	Δήλωση γεγονότων / διαπιστώσεων, Οπτικοποίηση, Σύγκριση, (μεταβολή), Δομή, Πρόβλεψη, Συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες, Εξήγηση	<i>Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης</i>	Πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’ της έννοιας της μετατόπισης, Ποικιλία προσεγγίσεων σταρτηγικών, Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
<i>Ενότητα</i>	Β Γυμνασίου – Μετασχηματισμοί- (Μεταφορά/ Ανάκλαση)				
<i>Μεγάλες Ιδέες</i>	Μετασχηματισμοί (γεωμετρικοί) στο επίπεδο				
<i>Μαθηματικές διεργασίες &</i>	Μαθηματική	<i>Γενικά</i>	Μαθηματική επικοινωνία		

πρακτικές	Επικοινωνία (προφορικά, γραπτά, σχηματικά) Επιλογή -Χρήση εργαλείων (χάρακας για σχεδίαση – διαβήτη για μεταφορά και σύγκριση)		(προφορικά- γραπτά- σχηματικά), Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού (πειθώ)	Προτεινόμενοι πόροι	Γεωμετρικά όργανα (χάρακας - διαβήτη),
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και Λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο και τη διαπραγμάτευση	Συγκείμενο	Μαθηματικό πρόβλημα		

Διδακτική διαχείριση: Στόχος του έργου είναι οι μαθητές/-τριες να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των μετασχηματισμών μεταφοράς και ανάκλασης, να αναπτύξουν μεθόδους και στρατηγικές αναγνώρισης και τεκμηρίωσης των στοιχείων του τετράπλευρου ΑΒΓΔ που μεταφέρονται από το συγκεκριμένο διάνυσμα σε κάποιο από τα άλλα τετράπλευρα. Να εξετάσουν και να εντοπίσουν σε άλλα τετράπλευρα στοιχεία και χαρακτηριστικά μετασχηματισμών ανάκλασης/ μεταφοράς του ΑΒΓΔ, να αναπτύξουν μεθόδους και στρατηγικές προσδιορισμού και τεκμηρίωσης του διανύσματος μεταφοράς και του άξονα ανάκλασης, των τμημάτων και των αντίστοιχων γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ που μεταφέρονται από το διάνυσμα ή ανακλώνται ως προς τον άξονα.

Οι μαθητές/-τριες ενθαρρύνονται να συμμετέχουν και να εκφράζονται σωστά, να μοιράζονται τις ιδέες τους με άλλους συμμαθητές τους και να επικοινωνούν τα συμπεράσματά τους στην ολομέλεια της τάξης και αν χρειαστεί να διορθώσουν τις προτάσεις τους. Βοηθιούνται να χρησιμοποιούν κατάλληλη γεωμετρική και ορολογία για να διατυπώσουν επιχειρήματα που αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους, να αίρονται οι παρανοήσεις μέσα από συζητήσεις στην ομάδα ή με την ολομέλεια της τάξης.

Το τετραγωνισμένο χαρτί επιτρέπει τους/τις μαθητές/-τριες να «δουν» τις μετατοπίσεις των κορυφών του ΑΒΓΔ παράλληλα κατά το διάνυσμα, να εκτιμήσουν τις τελικές τους θέσεις και να εντοπίσουν την εικόνα του ΑΒΓΔ, να αναγνωρίσουν τη σχέση ισότητας των αποστάσεων μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης-των σημείων τους ΑΒΓΔ και της εικόνας του. Επίσης, δίνει τη δυνατότητα οι μαθητές/-τριες να εξετάσουν ποιο ή ποια από τα υπόλοιπα τετράπλευρα θα μπορούσε να προκύψει από μεταφορά του ΑΒΓΔ ή την ανάκλασή του ως προς ευθεία και να προσδιορίσουν τα τμήματα και τις αντίστοιχες γωνίες που μεταφέρονται από το διάνυσμα ή ανακλώνται ως προς τον άξονα.

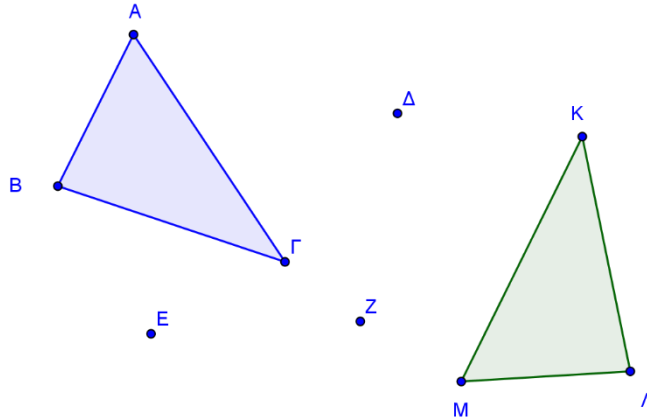
Τα επιχειρήματα τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων των μαθητών μπορεί να διαφοροποιούνται ανάλογα με το επίπεδο γνώσεων που κατέχουν για τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των μετασχηματισμών που διερευνώνται. Ενδεχομένως, να σχετίζονται με οικείες και διαισθητικές ιδέες για τα χαρακτηριστικά του αντίστοιχου μετασχηματισμού ή να στηρίζονται σε υπολογισμούς μηκών με μέτρηση ή

χρήση θεωρητικών εργαλείων (όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα) ή σε χρήση του διαβήτη για μεταφορές και συγκρίσεις τμημάτων ή στη σχεδίαση και κατασκευές με κανόνα και διαβήτη (όπως για παράδειγμα της μεσοκαθέτου κάποιου από τα τμήματα με άκρα ζεύγη συμμετρικών σημείων στην περίπτωση του άξονα συμμετρίας).

Έργο 2: Βρες το κέντρο στροφής

Η εικόνα περιέχει τα σχέδια δύο τριγώνων, των $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ καθώς και τρία σημεία Δ , E και Z . Έχετε την πληροφορία ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι η εικόνα του του τριγώνου $AB\Gamma$ πάνω στο οποίο έχει εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός στροφής.

Να προσδιορίσετε ως προς ποιο από τα σημεία Δ , E και Z έχει περιστραφεί το τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε να προκύψει το τρίγωνο $K\Lambda M$.



Συζητείστε και προτείνετε τρόπους αποκλεισμού κάποιων από τα σημεία ως δυνατά κέντρα περιστροφής.

Να τεκμηριώστε με επιχειρήματα τις προτάσεις σας.

Χαρακτηριστικά έργου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Γεωμετρία – Μέτρηση	Ειδικά	Διαπιστώσεις, Οπτικοποίηση, Δομή, Πρόβλεψη, Εξήγηση	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	B Γυμνασίου – Μετασχηματισμού				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί (γεωμετρικοί) στο επίπεδο				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Μαθηματική Επικοινωνία (προφορικά, γραπτά, σχηματικά) Επιλογή -Χρήση εργαλείων (χάρακας για σχεδίαση – διαβήτη για μεταφορά και σύγκριση) Μεταγνωστική ενημερότητα	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού (πειθώ)	Προτεινόμενοι πόροι	Γεωμετρικά όργανα (χάρακας - διαβήτη),

Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Επιχειρηματολογία και Λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο και τη διαπραγμάτευση	Συγκείμενο	Μαθηματικό πρόβλημα		

Διδακτική διαχείριση: Στόχος του έργου είναι οι μαθητές/-τριες να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες τους μετασχηματισμού στροφής, να αναπτύξουν μεθόδους και στρατηγικές προσδιορισμού του κέντρου της στροφής και να αιτιολογήσουν τις προτάσεις τους.

Οι μαθητές/-τριες ενθαρρύνονται οι μαθητές/-τριες να συμμετέχουν και να εκφράζονται σωστά, να μοιράζονται τις ιδέες τους με άλλους συμμαθητές τους και να επικοινωνούν τα συμπεράσματά τους στην ολομέλεια της τάξης και αν χρειαστεί να διορθώσουν τις προτάσεις τους. Βοηθούνται να χρησιμοποιούν γεωμετρική γλώσσα και ορολογία για να διατυπώσουν επιχειρήματα που αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους, να αίρονται οι παρανοήσεις μέσα από συζητήσεις στην ομάδα ή με την ολομέλεια της τάξης.

Με βάση το γεγονός ότι το σημείο περιστροφής πρέπει να ισαπέχει από τα αντίστοιχα σημεία του αρχικού τριγώνου και της εικόνας του, οι μαθητές/-τριες συζητούν και προτείνουν μεθόδους εντοπισμού του κέντρου περιστροφής. Για παράδειγμα, μπορούν να εκτιμήσουν την απόσταση που έχουν αυτά τα σημεία Δ, Ε και Ζ, από τα σημεία των κορυφών των δύο τριγώνων ή μπορεί να μετρήσουν αυτές στις αποστάσεις με βαθμολογημένο χάρακα ή να τις συγκρίνουν με το διαβήτη κ.λπ. και να εικάζουν ποιο από τα σημεία είναι το κέντρο περιστροφής. Στη συνέχεια τους ζητείται να προσδιορίσουν γεωμετρικές μεθόδους για να επιβεβαιώσουν την εικασία τους. Για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιήσουν το διαβήτη και να σχεδιάσουν κύκλους με κέντρο το σημείο που εικάζουν ότι είναι το κέντρο στροφής και ακτίνες τις αποστάσεις του από τα σημεία κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ και να εξετάσουν κατά πόσο ο κάθε κύκλος διέρχεται από αντίστοιχες κορυφές της εικόνας του ΚΛΜ. Ή, να σχεδιάσουν τις μεσοκαθέτους των τμημάτων που εντόπισαν ότι τα άκρα τους έχουν ίσες αποστάσεις το σημείο-κέντρο στροφής της εικασίας τους. Έπειτα συζητούν για τη μέθοδο προσδιορισμού της γωνίας στροφής.

Έργο 3 : Βρες τον τύπο

Έχετε στη διάθεσή σας περισσότερα από ένα μη ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

α) Βρείτε τρόπο ή τρόπους να χωρίσετε κατάλληλα το παραλληλόγραμμο σε δύο άλλα ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα που όταν τα επανασυνδέσετε να δημιουργηθεί ένα ορθογώνιο.

β) Υπολογίστε και συγκρίνετε τα εμβαδά του αρχικού παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου που σχηματίσατε.

γ) Πόσα και ποια στοιχεία χρειάζεται να γνωρίζετε για να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος που δημιουργήσατε; Τι παρατηρείτε;

δ) Βρείτε μια σχέση που να σας επιτρέπει να υπολογίζετε το εμβαδόν του αρχικού παραλληλογράμμου.

Χαρακτηριστικά έργου

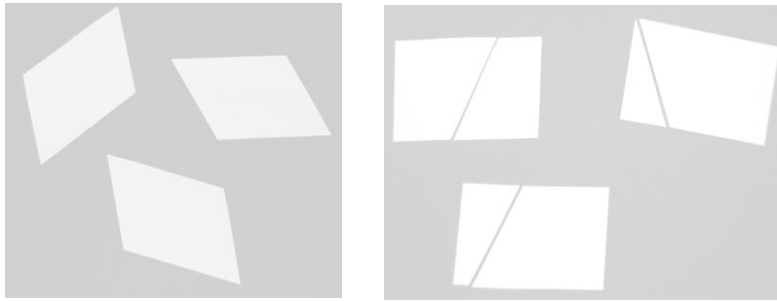
ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Γεωμετρία – Μέτρηση	Ειδικά	Οργάνω ση, αναδιάτ αξη, γενίκευσ η, δομή, μεταβολ ή	Προτεινό μενα χαρακτη ριστικά της διδασκτικής προσέγγι σης	πολλαπλά σημεία ‘εισόδου’, συμπερίληψη διαφορετικών προσεγγίσεων
Ενότητα	Β Γυμνασίου – Γεωμετρία του επιπέδου				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματι σμοί - Ισοδυναμία				
Μαθημα τικές διεργασί ες & ρακτικές	Συλλογισμός & επιχειρηματολ ογία, Επίλυση προβλήματος	Γενικά	Τα μαθημα τικά ως συλλογικ ό προϊόν ανθρώπι νης δράσης, Μαθημα τική επικοινω νία μαθημα τικός συλλογι σμός	Προτεινό μενοι πόροι	Αναπαράσταση με ψηφιακά εργαλεία (π.χ https://www.geogebra.org/m/D8rjsGzF , https://www.geogebra.org/m/pjdSHjcv) ή από το internet: https://www.basic-mathematics.com/proof-of-the-area-of-a-parallelogram.html , https://www.youtube.com/watch?v=ZeNvb0TikG4 , https://elementarymath.edc.org/resource/measurement-discovering-formulas-for-area/ ,
Κοινωνικ ο- πολιτισμ ικές πρακτικέ ς	Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολ ογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευ ση				
		Συγκείμενο	Μαθημα τικό πρόβλημ α		

Διδακτική διαχείριση: Στόχος του έργου είναι οι μαθητές/-τριες να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για τα στοιχεία και τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου, να αναπτύξουν μεθόδους και στρατηγικές διαμέρισης και επανασύνδεσης των μερών του που αφήνουν αναλλοίωτο το μέγεθος της επιφάνειάς του, να γενικεύσουν τα συμπεράσματά τους και να αιτιολογήσουν τον τύπο του εμβαδού παραλληλογράμμου.

Οι μαθητές/-τριες δουλεύουν σε ομάδες. Ενθαρρύνονται να συμμετέχουν και να εκφράζονται σωστά, να μοιράζονται τις ιδέες τους με άλλους συμμαθητές τους και να επικοινωνούν τα συμπεράσματά τους στην ολομέλεια της τάξης και αν χρειαστεί να διορθώσουν και να τις προτάσεις τους. Βοηθούνται να χρησιμοποιούν γεωμετρική γλώσσα και ορολογία για να διατυπώσουν επιχειρήματα που αιτιολογούν τους

συλλογισμούς τους, να αίρονται οι παρανοήσεις μέσα από συζητήσεις στην ομάδα ή με την ολομέλεια της τάξης.

Ο/Η εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε ομάδα 2-3 ίσα μη ορθογώνια παραλληλόγραμμα από χαρτί. Οι μαθητές/-τριες προσπαθούν να βρουν τρόπο ή τρόπους να κόψουν με ψαλίδι τα παραλληλόγραμμα και να τα μετασχηματίσουν σε ισοδύναμα ορθογώνια. Η συνειδητοποίηση εκ μέρους των μαθητών ότι η δημιουργία ορθογωνίου απαιτεί την ύπαρξη ορθών γωνιών ενδέχεται να τους οδηγήσει στην χάραξη της κάθετης προς ένα ζεύγος απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου και τον χωρισμό του σε δύο μέρη με την βοήθεια του ψαλιδιού



Κατόπιν οι ομάδες παροτρύνονται και καταγράφουν σε ένα χαρτί την διαδικασία που ακολούθησαν, σχεδιάζοντας κατάλληλα σχήματα και χρησιμοποιώντας γεωμετρική ορολογία προσπαθούν να αιτιολογήσουν τα βήματα της διαδικασίας που ακολούθησαν, με βάση τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και των μετασχηματισμών που έκαναν. Για παράδειγμα, δικαιολογούν γιατί ταιριάζουν οι πλευρές των δύο σχημάτων ή γιατί η κάτω βάση είναι ευθύγραμμο τμήμα και όχι τεθλασμένη γραμμή κ.λπ. Συζητούν με το σύνολο της τάξης τους τρόπους που ακολούθησαν, αν έχει σημασία ή όχι το σημείο στο οποίο σχεδίασαν την κάθετη και γιατί, αν έχει σημασία ή όχι ποια πλευρά του παραλληλογράμμου ονομάζουν βάση, αν μπορεί η μέθοδος να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο και τι συμπεράσματα βγάζουν σχετικά με τις επιφάνειες των δύο σχημάτων και το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

Το μέσο (χαρτί) είναι τέτοιο που θα βοηθήσει τους/τις μαθητές/-τριες να το χειριστούν άμεσα και να δημιουργήσουν το ορθογώνιο, αφήνοντας όμως αμφιβολίες για το τελικό αποτέλεσμα και άρα την ανάγκη αιτιολόγησης.

Η διερεύνηση μπορεί να γίνει επικουρικά με τη χρήση λογισμικού. Οι μαθητές/-τριες μεταφέρουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο μετασχηματίζοντας έτσι το σχέδιο ενός παραλληλογράμμου σε ορθογώνιο. Η προστιθέμενη αξία χρήσης του λογισμικού βρίσκεται στην δυνατότητα δυναμικής μεταβολής του σχήματος του παραλληλογράμμου, από τους/τις μαθητές/-τριες και στην ευκολότερη

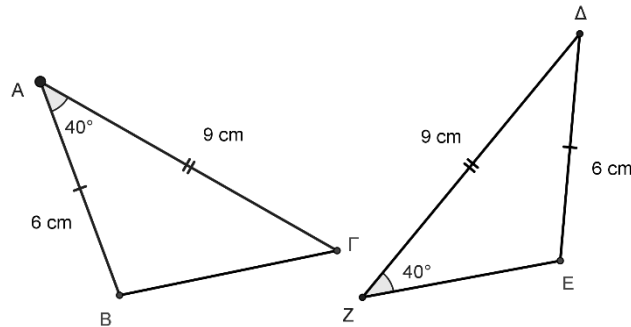


δυνατότητα αναγνώρισης ότι ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ισχύει σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο (γενίκευση).

Γ' Γυμνασίου

Έργο 1: Είναι τα τρίγωνα ίσα?

Σε μια δοκιμασία Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου ζητήθηκε από τους/τις μαθητές/-τριες να εξετάσουν αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ της εικόνας είναι ίσα και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.



Ένας μαθητής διατύπωσε το εξής επιχείρημα: «Αφού τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση, τότε θα είναι ίσα». Το επιχείρημα που διατύπωσε ο μαθητής για να δικαιολογήσει την ισότητα των τριγώνων είναι σωστό; Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα την απάντησή σας.

Χαρακτηριστικά έργου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Γεωμετρία – Μέτρηση	Ειδικά	Δήλωση διαπιστώσεων, Οργάνωση πληροφοριών, Δομή των κριτηρίων ισότητας, Τεκμηρίωση απαντήσεων	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Πολλαπλά σημεία 'εισόδου', Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο από όλους,
Ενότητα	Γ' Γυμνασίου – Γεωμετρία του επιπέδου				
Μεγάλες Ιδέες	Ισότητα				
Μαθηματικές διεργασίες & ρακτικές	Συλλογισμός & επιχειρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία (γραπτός λόγος) Μαθηματικός συλλογισμός (πειθώ)	Προτεινόμενοι πόροι	Αναπαράσταση με ψηφιακά εργαλεία (π.χ https://www.geogebra.org/m/v9HDs27F)
Κοινωνικο-πολιτισμικές	Αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, Επιχειρηματολογία				

πρακτικές	γούν και λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση		Τα μαθηματικά ως συλλογικό προϊόν (κατανόηση σχολίων που διατυπώνονται από άλλους)		
		Συγκείμενο	Μαθηματικό πρόβλημα		

Διδακτική διαχείριση: Στόχος του έργου είναι οι μαθητές/-τριες να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο σκέψης συνομήλικων τους, να συνειδητοποιήσουν την σημασία των δεδομένων σε βασικά θεωρητικά μαθηματικά εργαλεία, όπως τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, να εμπλακούν στη διερεύνηση περιπτώσεων ισότητας τριγώνων που τα δεδομένα κριτηρίου ισότητας δεν είναι άμεσα προφανή και να κατοχυρώσουν τη γνώση τους για την έννοια της ισότητας τριγώνων μέσα από διερεύνηση περιπτώσεων ισότητας και μη ισότητας τριγώνων. Οι μαθητές/-τριες ενθαρρύνονται να ανταλλάξουν απόψεις και να μοιραστούν τα επιχειρήματά τους με άλλους συμμαθητές τους, να χρησιμοποιήσουν γεωμετρική γλώσσα και να διατυπώσουν τα επιχειρήματα που αιτιολογούν την απάντησή τους.

Έργο 2: Κύλινδροι

Έχετε στη διάθεσή σας δυο φύλλα χαρτί Α4. Χρησιμοποιείτε τα δυο φύλλα για να δημιουργήσετε δυο κυλίνδρους με διαφορετικές σε μέγεθος νοητές βάσεις.

α) Συγκρίνετε τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών των δυο κυλίνδρων. Τι παρατηρείτε;

β) Ποιος από τους δυο κυλίνδρους έχει το μεγαλύτερο όγκο;

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Χαρακτηριστικά έργου

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Γεωμετρία – Μέτρηση	Ειδικά	Κατασκευή, διατύπωση εικασιών /διαπιστώσεως	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέ	Πολλαπλά σημεία 'εισόδου', Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο από όλους,
Ενότητα	Γ' Γυμνασίου – Μέτρηση [εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας και όγκου στερεού]		Οπτικοποίηση Δομή (έννοια όγκου κυλίνδρου, συσχέτιση με οικίες και διαισθητικές ιδέες		
Μεγάλες ιδέες	Μετασχηματισμοί - Ισοδυναμία		Διατύπωση εικασίας, Μοντελοποίηση		

Μαθηματικές διεργασίες & ρακτικές	Συλλογισμός & επιχειρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία (γραπτός προφορικός λόγος) Μαθηματικός συλλογισμός (απόδειξη)	γγισης Προτεινόμενοι πόροι	Αναπαράσταση με ψηφιακά εργαλεία (π.χ https://www.geogebra.org/m/v9HDs27F
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση		Συγκεκριμένο	Πραγματικό πρόβλημα	

Διδακτική διαχείριση: Το έργο αποσκοπεί στη διδακτική διαχείριση των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές/-τριες με τη μέτρηση επιφανειών και όγκου όπως, εν προκειμένω, στερεά με ίσες επιφάνειες ότι έχουν ίσους όγκους και ότι η μεταβολή των διαστάσεων ενός σχήματος, εν προκειμένω, η μεταβολή της περιφέρειας βάσης του κυλίνδρου, συνοδεύεται με ανάλογη μεταβολή του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και του όγκου.

Στόχος του έργου είναι οι μαθητές/-τριες να αναπτύξουν στρατηγικές κατασκευής κυλίνδρων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (διαφορετικές σε μέγεθος νοητές βάσεις) και από συγκεκριμένα χειραπτικά υλικά (δυο ίσα σε μέγεθος φύλλα A4), στρατηγικές διερεύνησης και μεθόδους υπολογισμού των παράπλευρων επιφανειών και των όγκων των κυλίνδρων που κατασκεύασαν, να τα συγκρίνουν και να τεκμηριώσουν τα συμπεράσματά τους.

Οι μαθητές/-τριες καλούνται να αναγνωρίσουν ότι το κάθε φύλλο A4 αναπαριστά την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου και ως εκ τούτου οι παράπλευρες επιφάνειες είναι ίσες. Να αναγνωρίσουν στις διαστάσεις (μήκος-πλάτος) του φύλλου A4 στοιχεία του κυλίνδρου (περιφέρεια βάσης- ύψος). Συγκεκριμένα, να αναγνωρίσουν σε κάθε διάσταση του φύλλου A4 διαφορετικά χαρακτηριστικά, είτε ως περιφέρεια της νοητής κυκλικής βάσης είτε ως ύψος του κυλίνδρου. Ως εκ τούτου, να συνδέσουν το μήκος της μιας διάστασης με το μήκος της περιφέρειας κυκλικής βάσης και στη συνέχεια την περιφέρεια με την ακτίνα της, την δε άλλη διάσταση να τη συνδέσουν με το ύψος.

Ο/Η εκπαιδευτικός τους παροτρύνονται να δημιουργήσουν σχέδια των κυλίνδρων που κατασκεύασαν και να συμπληρώσουν πάνω σε αυτά τις μετρικές αναγκαίες πληροφορίες, για τον υπολογισμό του όγκου του κάθε κυλίνδρου. Για παράδειγμα, δικαιολογούν γιατί η διάμετρος της κυκλικής βάσης είναι στην περίπτωση που η περιφέρεια της βάσης είναι η διάσταση του μήκους μέσω της σχέσης $2\pi r = \text{μήκος}$ καταλήγουν ότι $r = \text{μήκος} / 2\pi$.

5. Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες

Υπο-πεδίο: Γεωμετρία

Μέσα από τρία κύρια μαθηματικά έργα και των επεκτάσεων τους που παρουσιάζονται στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια να σκιαγραφηθεί η εξέλιξη των ΠΜΑ από το Δημοτικό, στη συνέχεια στο Γυμνάσιο και τέλος στο Λύκειο στην ενότητα Γεωμετρία του Επιπέδου, τα οποία αφορούν την έννοια του αθροίσματος γωνιών τριγώνου. Τα αντίστοιχα ΠΜΑ σε συγκεκριμένες τάξεις κάθε βαθμίδας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Ε Δημοτικού	ΠΜΑ: Διερευνούν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι είναι 180°
Α' Γυμνασίου	ΠΜΑ: Αναπτύσσουν λογικούς συλλογισμούς για να τεκμηριώσουν ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180° .
Α' Λυκείου	ΠΜΑ: Αποδεικνύουν ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι ίσο με μία ευθεία γωνία.

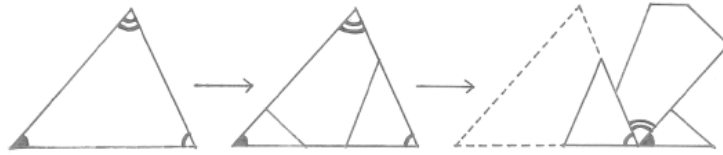
Η έννοια του αθροίσματος γωνιών τριγώνου και η σχέση του με την έννοια της ευθείας γωνίας και το μέτρο της προσεγγίζεται σταδιακά μέσα από πειραματισμό, διερεύνηση και τεκμηρίωση αποδεκτή στο πλαίσιο της γεωμετρικής θεωρίας. Στόχοι των έργων είναι οι μαθητές/-τριες να αισθητοποιήσουν την έννοια του αθροίσματος γωνιών τριγώνου, να το συνδέσουν με άλλες έννοιες και υπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις. Συγκεκριμένα α) να αντιληφθούν ότι το μέτρο του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου είναι σταθερό και ίσο με 180° [Ε Δημοτικού – Α' Γυμνασίου] και ότι γεωμετρικά εκφράζει ευθεία γωνία [Ε Δημοτικού - Α' Γυμνασίου - Α' Λυκείου], β) να επαληθεύσουν πειραματικά τις εικασίες τους μέσω της χρήσης κατάλληλων εργαλείων χειραπτικών, ψηφιακών και οπτικών αναπαραστάσεων [Ε Δημοτικού – Α' Γυμνασίου] και γ) να παρέχουν εξηγήσεις διατυπώνοντας λογικά και δομημένα επιχειρήματα τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων τους στο πλαίσιο μιας μη τυπικής [Α' Γυμνασίου] και τυπικής απόδειξης [Α' Λυκείου].

Διδακτική προσέγγιση του θέματος: Το πρόβλημα της εύρεσης του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου παρέχει ένα πλαίσιο εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης και ανακάλυψης της σχέσης με την οποία συνδέονται οι τρεις εσωτερικές γωνίες οποιουδήποτε τριγώνου.

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις που θα μπορούσαν να ακολουθήσουν οι μαθητές/-τριες για να λύσουν αυτό το πρόβλημα και διάφοροι τρόποι για να επαληθεύσουν και να τεκμηριώσουν το συμπέρασμά τους ανάλογα με το διδακτικό συμβόλαιο και τη βαθμίδα εκπαίδευσης, οι οποίες κυμαίνονται από μεθόδους χαρτιού και μολυβιού έως τη χρήση αριθμομηχανών, υπολογιστικών φύλλων, ή λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (πχ. GeoGebra) αλλά και πιο τυπικές μεθόδους μέσω της χρήσης θεωρητικών εργαλείων. Η χρήση της τεχνολογίας επιτρέπει στους μαθητές πολλαπλούς τρόπους να δημιουργήσουν λύσεις, να σχηματίσουν εικασίες και να δοκιμάσουν αυτές τις εικασίες καθώς διερευνούν το πρόβλημα σε ένα διαδραστικό περιβάλλον μάθησης.

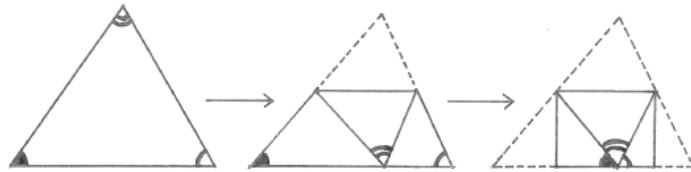
Ενδεικτικές προσεγγίσεις επίλυσης του προβλήματος και ενέργειες που οδηγούν τους/τις μαθητές/-τριες στη διατύπωση εικασίας :

- Μέτρηση των γωνιών τριγώνου με το μοιρογνωμόνιο είτε με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (πχ. GeoGebra) και άθροιση των μέτρων τους [**Ε Δημοτικού – Α' Γυμνασίου**].
- κατάλληλη μεταφορά των γωνιών τριγώνου ώστε να γίνουν διαδοχικές με εφαρμογή στρατηγικών όπως,
 - «αποκοπή» των γωνιών σχεδίου τριγώνου και την τοποθέτησή τους τη μία δίπλα στην άλλη σχηματίζοντας μια νέα γωνία, όπως στην εικόνα 1 [**Ε Δημοτικού – Α' Γυμνασίου**].



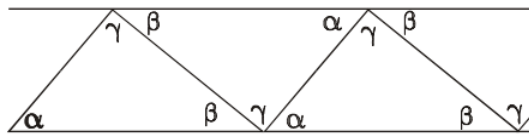
Εικόνα 1

- ή μεταφορά των τριών γωνιών μέσω κατάλληλης δίπλωσης του σχεδίου τριγώνου έτσι ώστε και οι τρεις γωνίες να καταστούν γωνίες με κοινή κορυφή, όπως στην εικόνα 2 [**Ε Δημοτικού – Α' Γυμνασίου**].



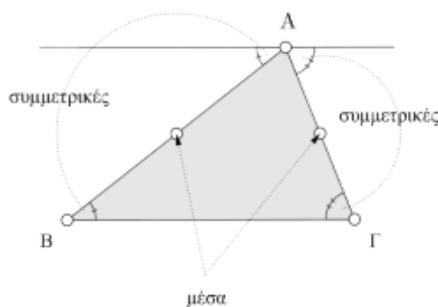
Εικόνα 2

- ή τοποθέτηση του τριγώνου όπως στην εικόνα 3 [**Α' Γυμνασίου – Α' Λυκείου**].



Εικόνα 3

- ή κατασκευή (γεωμετρική) της γωνίας του αθροίσματος των τριών γωνιών τριγώνου με χάρακα και διαβήτη [**Α' Γυμνασίου – Α' Λυκείου**].
- ή εφαρμογή μετασχηματισμών κεντρικής συμμετρίας σε δύο γωνίες του με χρήση λογισμικού γεωμετρίας (πχ. GeoGebra), για παράδειγμα τις γωνίες Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ με κέντρα συμμετρίας τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, όπως στην εικόνα 4 [**Β' Γυμνασίου**].



Εικόνα 4

- Χάραξη από μια κορυφή, έστω Α τριγώνου ΑΒΓ, ευθεία παράλληλη στην απέναντι πλευρά ΒΓ τεκμηριώνοντας τη μοναδικότητά της [Α' Λυκείου] και να παρέχουν αιτιολόγηση γιατί οι σχηματιζόμενες δυο νέες γωνίες είναι ίσες με τις εσωτερικές γωνίες Β και Γ ως εντός εναλλάξ [Α' Γυμνασίου - Α' Λυκείου] διατυπώνοντας λογικά επιχειρήματα ή παρέχοντας μια τυπική απόδειξη.

Οι πρώτες βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στη χρήση τεχνουργημάτων, σε ορισμούς και μέτρα γωνιών και ιδιότητες συμμετρικών σχημάτων και αφορούν αντικείμενα που γίνονται αντιληπτά πάνω στο σχήμα, ενώ η τελευταία βασίζεται κυρίως σε προτάσεις - θεωρήματα εν ισχύ στο πλαίσιο της γεωμετρικής θεωρίας.

Η μέτρηση των γωνιών ενός τριγώνου και ο υπολογισμός του αθροίσματος τους είναι ένα πρώτο βήμα για τη διατύπωση μιας εικασίας αλλά δεν προσφέρει κάποια ιδέα για την αποδεικτική διαδικασία. Ο έλεγχος του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου με τη χρήση μοιρογνωμονίου σίγουρα δεν είναι μαθηματική απόδειξη. Ακόμα και αν υπήρχε ένα ιδανικό απόλυτα ακριβές μοιρογνωμόνιο ή ένας τρόπος μέτρησης απόλυτα ακριβής, η επαλήθευση μέσω της μέτρησης στερείται μαθηματικού περιεχομένου.

Οι μέθοδοι της κοπής και επικόλλησης των γωνιών ή της δίπλωσης ή της τοποθέτησης του σχεδίου του τριγώνου διαδοχικά ή ακόμα και της γεωμετρικής κατασκευής αποκαλύπτουν το μαθηματικό περιεχόμενο που είναι η έννοια της παραλληλίας, ενισχύουν τη βεβαιότητα ως προς το γιατί το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με τη γωνία που σχηματίζεται από μια ευθεία και μπορεί να προκαλέσει ιδέες που σχετίζονται με την απόδειξη της πρότασης και φωτίζει τα επιχειρήματα της τεκμηρίωσης. Αναδεικνύεται έμμεσα η βασική παραδοχή του αναλλοίωτου της μορφής και του μεγέθους ενός γεωμετρικού σχήματος κατά τη μετατόπισή του μέσα στο επίπεδο (στη συγκεκριμένη περίπτωση, αυτό της γωνίας και κατ' επέκταση των τριών γωνιών τριγώνου) καθώς και η ιδέα του μετασχηματισμού των τριών διαφορετικών γωνιών του τριγώνου σε γωνία συγκεκριμένου μέτρου, αυτού των 180° .

Χαρακτηριστικά των προτεινόμενων έργων

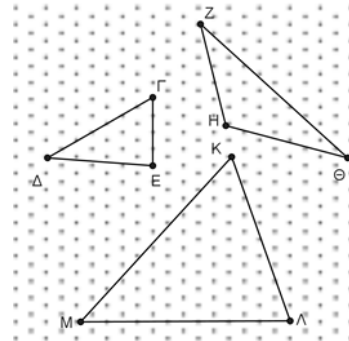
ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ	ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
--------------	--	---------------------

ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Γεωμετρία – Μέτρηση	Ειδικά	Βασικές δράσεις: (δήλωση γεγονότων/διαπιστώσεων (μέσω παρατήρησης) σχετικά με το μέτρο και το είδος της γωνίας που σχηματίζει το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου) Μετασχηματιστικές δράσεις: πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις Δυναμική διαχείριση γεωμετρικών αντικειμένων Οπτικοποίηση μέσω χειραπτικών υλικών και δυναμικής διερεύνησης της σχέσης του αθροίσματος γωνιών τριγώνου με την ευθεία γωνία και το μέτρο της. Δράσεις οικοδόμησης έννοιας: γενίκευση, μεταβολή, ορισμός, συσχέτιση με οικείες και διαισθητικές ιδέες Επίλυση προβλήματος: Διατύπωση εικασίας, υπόθεση, πρόβλεψη, εξήγηση, επαλήθευση, τεκμηρίωση, αμφισβήτηση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Πολλαπλά σημεία 'εισόδου', Πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο από όλους,
Ενότητα	Ε Δημοτικού – Α' Γυμνασίου – Α' Λυκείου Αθροισμα γωνιών τριγώνου				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί – Αμετάβλητο				
Μαθηματικές διεργασίες & ρακτικές	Συλλογισμός & επιχειρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία (γραπτός προφορικός λόγος) Μαθηματικός συλλογισμός (Να συλλογιστούν για να διατυπώσουν εικασίες, να ελέγξουν, να χρησιμοποιήσουν μαθηματική ανατροφοδότηση, όπως αυτο-διόρθωση μέσω δυναμικής διαχείρισης γεωμετρικών αντικειμένων, διαχείριση μιας 'συνολικής αίσθησης', τεκμηρίωση)	Προτεινόμενοι πόροι	1^η εκδοχή: όργανα μέτρησης, χάρακας-διαβήτη 2^η εκδοχή: Ψηφιακά Μικροτεράματα -Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1837 https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/6195 https://www.geogebra.org/m/m732t7pe https://www.geogebra.org/m/xfxrfbyv
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση				
		Συγκεκριμένο	Γεωμετρικό πρόβλημα		

Ε ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

1^η Φάση (περιβάλλον χαρτί-μολύβι): Έχετε στη διάθεσή σας τρία διαφορετικά σε μορφή και μέγεθος τρίγωνα και με διαφορεικά μεγέθη γωνιών το καθένα. Χρωματίστε με διαφορετικά χρώματα τις γωνίες κάθε τριγώνου.

- Συζητείστε στην ομάδα σας και προτείνετε τρόπους υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών κάθε τριγώνου.
- Μοιραστείτε τις ιδέες σας για τους τρόπους υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου με άλλους συμμαθητές σας.
- Παρουσιάστε τα συμπεράσματά σας.

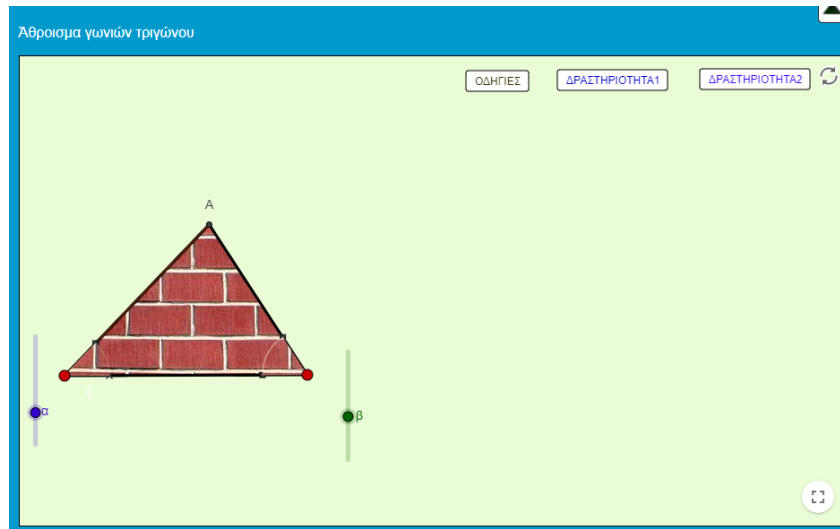


2^η Φάση (Ψηφιακό Περιβάλλον -Μικροπείραμα):

Ανοίξτε το μαθησιακό αντικείμενο με τίτλο 'Αθροισμα γωνιών τριγώνου' στην παρακάτω διεύθυνση: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1837>

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα απλό τρίγωνο και δυο δρομείς α και β με τους οποίους μπορείτε να μεταβάλετε το σχήμα του τριγώνου σύροντάς τους. Επίσης, μπορείτε να «κόψετε» δυο γωνίες του σύροντας τις κόκκινες κορυφές τους και να τις μεταφέρετε δίπλα στην τρίτη γωνία που έχει κορυφή Α.

- Επίλεξε το «[ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1](#)» και διερεύνησε πόσο είναι το άθροισμα των τριών γωνιών του τριγώνου όταν οι δυο γωνίες του «κοπούν» και βρεθούν δίπλα -δίπλα με την τρίτη του γωνία Α.
- Επίλεξε το «[ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2](#)» και διερεύνησε αν μπορείς να κατασκευάσεις ένα τρίγωνο
α) στην περίπτωση που δυο γωνίες του είναι ίσες με 90° και
β) στην περίπτωση που οι γωνίες του δεν έχουν άθροισμα 180° .



Διδακτική διαχείριση: Με το έργο της 1^{ης} φάσης σε περιβάλλον χαρτί μολύβι, μέσω της μέτρησης των γωνιών με το μοιρογνωμόνιο είναι πολύ πιθανόν οι μαθητές/-τριες να καταλήξουν εσφαλμένα στο συμπέρασμα ότι το άθροισμα των γωνιών του κάθε τριγώνου τους είναι λίγο πάνω ή λίγο κάτω από 180° και είναι βέβαιο ότι δεν είναι πάντα 180° . Ενδεχομένως, κάποιοι να ισχυριστούν ότι το μεγάλο τρίγωνο έχει και τις πιο μεγάλες γωνίες οπότε το άθροισμα τους θα είναι αυτό «λίγο» πάνω από 180° ή ότι το μικρότερο τρίγωνο έχει τις πιο μικρές γωνίες οπότε το άθροισμα τους θα είναι αυτό το «λίγο» κάτω από 180° ή ότι το τρίγωνο που έχει τις πιο πολλές μικρές γωνίες θα αντιστοιχεί σε άθροισμα γωνιών «λίγο» κάτω από 180° .

Αντίστοιχα, με το έργο της 2^{ης} φάσης οι μαθητές, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία αποκοπής - μεταφοράς και επανατοποθέτησης των δυο γωνιών δίπλα – δίπλα με την τρίτη γωνία, αντιλαμβάνονται και τις τρεις γωνίες ως μια γωνία και αισθητοποιούν το άθροισμα των τριών γωνιών του τριγώνου ως μια γωνιά γνωστού μέτρου 180° . Επαληθεύουν το συμπέρασμά τους στα διαφορετικά τρίγωνα που διαμορφώνονται σύροντας τους δρομείς και επαναλαμβάνοντας το πείραμα μεταφοράς των δυο γωνιών. Συμπεραίνουν ότι το άθροισμα των τριών γωνιών είναι πάντα ίσο με 180° και ότι είναι ανεξάρτητο από τη μορφή και το μέγεθος του τριγώνου και των γωνιών του. Με τη 2^η δραστηριότητα συνδέουν το μέτρο του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου με την ύπαρξη τριγώνου και έμμεσα (άτυπα) με το αίτημα παραλληλίας.

Σημείωση: Το μαθηματικό έργο της 1^{ης} φάσης μπορεί να αξιοποιηθεί στην Α' Λυκείου προκειμένου οι μαθητές/-τριες να αποκτήσουν μια πρώτη αντίληψη της διαφοράς ανάμεσα στην Γεωμετρία, που χρησιμοποιεί την παρατήρηση των σχημάτων και τις μετρήσεις, και στη Γεωμετρία που χρησιμοποιεί γενικές προτάσεις και λογικές αποδείξεις.

A ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(Ψηφιακό Περιβάλλον -Μικροπείραμα)

Ανοίξτε το μαθησιακό αντικείμενο με τίτλο **Πειράματα με το Άθροισμα γωνιών τριγώνου** στην παρακάτω διεύθυνση:

<http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/6195#>

Στην οθόνη εμφανίζεται το σχέδιο ενός τριγώνου $AB\Gamma$, τα μέτρα των τριών γωνιών του και δυο δρομείς β και γ που σχετίζονται με τα μέτρα δυο γωνιών, της B και της Γ αντίστοιχα. Σύροντας τον ένα δρομέα (για παράδειγμα τον β) μεταβάλλονται τα μέτρα δυο γωνιών του τριγώνου (της B και της A) χωρίς να μεταβάλλεται το μέτρο της τρίτης γωνίας (της Γ) που σχετίζεται με τον δεύτερο δρομέα. Η οποιαδήποτε μεταβολή του μέτρου μιας γωνίας με το σύρσιμο ενός δρομέα συνοδεύεται με μεταβολή του τριγώνου. Επίσης, το τρίγωνο μπορεί να μεταβληθεί σύροντας μια από της κορυφές του.

A) Να διερευνήσετε:

α) αν υπάρχει σχέση μεταξύ της μεταβολής του μέτρου της γωνίας A με τη μεταβολή του μέτρου της γωνίας B . Να κάνετε το ίδιο για το μέτρο της γωνίας A με το μέτρο της γωνίας Γ .

β) κατά πόσο οι μεταβολές των μέτρων του ζεύγους γωνιών A και B (αντίστοιχα του ζεύγους γωνιών A και Γ) συνοδεύονται με μεταβολή του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου σε κάθε περίπτωση.

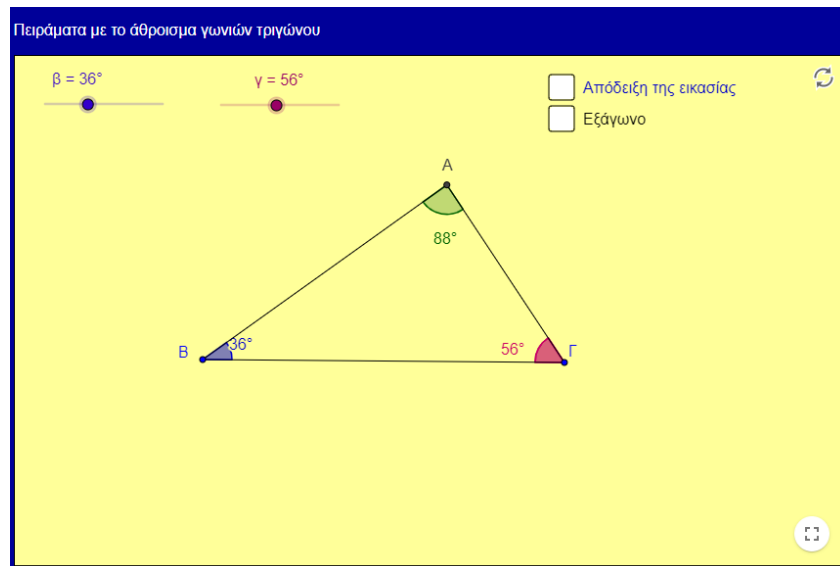
γ) αν είναι δυνατόν δυο γωνίες του τριγώνου (πχ οι B και Γ) να είναι ορθές.

δ) αν είναι δυνατόν δυο γωνίες του τριγώνου (πχ οι B και Γ) να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο των 180° .

Διατυπώστε επιχειρήματα που υποστηρίζουν τα συμπεράσματά σας σε κάθε περίπτωση.

Β) Επιλέγοντας « [Απόδειξη της εικασίας](#) » εμφανίζεται μια ευθεία (ϵ) που περνάει από το A και είναι παράλληλη προς την $B\Gamma$ και δυο γωνίες με ίδια κορυφή με τη γωνία A .

Να διερευνήσετε αν υπάρχει σχέση του αθροίσματος των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ με το άθροισμα των τριών διαδοχικών γωνιών στην κορυφή A . Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα το συμπέρασμά σας.



Διδακτική διαχείριση: Το μαθηματικό έργο αποσκοπεί στην αισθητοποίηση της έννοιας του αθροίσματος γωνιών τριγώνου και στην επικύρωση με λογικά επιχειρήματα του μέτρου του αθροίσματος των εσωτερικών γωνιών τριγώνου.

Με τους δρομείς οι μαθητές/-τριες μετασχηματίζουν τη μορφή του τριγώνου, παρατηρούν τις μεταβολές των μέτρων των γωνιών και εικάζουν για συσχετίσεις των μέτρων μεταξύ των γωνιών του τριγώνου, καταγράφουν τα συμπεράσματά τους, αναζητούν εξηγήσεις, συνεργάζονται και διατυπώνουν επιχειρήματα τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων τους.

Ο διδάσκων με κατάλληλες ερωτήσεις μπορεί να καθοδηγήσει τους/τις μαθητές/-τριες στην επικύρωση της εικασίας τους, όπως: α) Ποιο είναι το μέτρο των γωνιών που σχηματίστηκαν από την ευθεία (ϵ) και τις πλευρές AB και $A\Gamma$ και γιατί; β) Ποιο είναι το άθροισμα των τριών διαδοχικών γωνιών στην κορυφή A ; Εξηγήστε.

Οι μαθητές/-τριες μπορούν να κληθούν να μετασχηματίσουν το σχήμα του τριγώνου σύροντας μια από τις κορυφές Β, Γ και να διαπιστώσουν ότι ενώ το τρίγωνο αυξομειώνεται, τα μέτρα των γωνιών των γωνιών του διατηρούνται, γεγονός που συμβάλλει στην αισθητοποίηση της σταθερότητας του αθροίσματος των γωνιών για κάθε τρίγωνο.

Το μαθηματικό έργο μπορεί να αξιοποιηθεί από το δάσκαλο για συζήτηση του τι σημαίνει εικασία στα μαθηματικά και τι απόδειξη καθώς και για πρόσθετες διερευνητικές ερωτήσεις, όπως: *ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του μέτρου της γωνίας Α; ή σε τι είδους γωνία μετασχηματίζεται η γωνία Α όταν η γωνία Β (ή η γωνία Α) μικραίνει και τείνει να γίνει μηδέν;*

Επίσης, το μαθηματικό έργο μπορεί να αξιοποιηθεί στην υποστήριξη πρόσθετων διερευνητικών δράσεων και επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων με θέμα το άθροισμα γωνιών τριγώνου [**Α' Γυμνασίου – Α' Λυκείου**].

Για παράδειγμα, να τεθούν προς διερεύνηση ερωτήματα και προβλήματα, όπως:

- Πώς μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το Β;
- Πώς μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή το Α;
- Πώς μπορείτε να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το Α; Πόσα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα μπορείτε να κατασκευάσετε.
- Να εξετάσετε αν μπορεί να κατασκευαστεί τρίγωνο όταν η γωνία Γ είναι τριπλάσια της γωνίας Β. Πόσες τέτοιες περιπτώσεις υπάρχουν; Σε ποια από τις παραπάνω περιπτώσεις η γωνία Γ γίνεται 48° ;

A ΛΥΚΕΙΟΥ

Γνωρίζετε ήδη από προηγούμενη τάξη ότι «το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180° ».

Σχεδιάστε ένα τρίγωνο. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά το άθροισμα των γωνιών του. Τι διαπιστώνετε ότι μπορεί να εκφράζει γεωμετρικά το άθροισμα των γωνιών τριγώνου;

Λαμβάνοντας υπόψη τις διαπιστώσεις σας, να επαναδιατυπώσετε την πρόταση που αφορά το άθροισμα των γωνιών τριγώνου και να την αποδείξετε.

Διδακτική διαχείριση: Οι μαθητές/-τριες με το συγκεκριμένο έργο εμπλέκονται στην απόδοση γεωμετρικού νοήματος της έννοιας του αθροίσματος των εσωτερικών γωνιών τριγώνου, στην διατύπωση εικασίας για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αθροίσματος των γωνιών και στην τεκμηρίωσή της στο πλαίσιο της γεωμετρικής θεωρίας.

Με στόχο την καλλιέργεια θετικών στάσεων και τη δημιουργία κλίματος που ευνοεί την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στην διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας, θα μπορούσε να παρατεθούν και να συγκριθούν η απόδειξη της Πρότασης Ι.32 των Στοιχείων του Ευκλείδη για το άθροισμα των γωνιών και την εξωτερική γωνία ενός τριγώνου, η απόδειξη του Εύδημου που παραθέτει ο Πρόκλος στα Σχόλια του (377. 14 -

378. 9) καθώς και η απόδειξη που αναφέρει ο Πρόκλος για την πρόταση Ι.32. Η μελέτη διαφορετικών τρόπων απόδειξης μέσα από τη μελέτη ιστορικών πηγών παρέχει ευκαιρίες απόκτησης μαθηματικής γνώσης και οδηγεί σε σύνθεση απόψεων και ενισχύει το μαθηματικό διάλογο.

γ) Στοχαστικά Μαθηματικά

1. Σημασία του πεδίου

Το πεδίο αποτελείται από τα «υποπεδία» Στατιστική και Πιθανότητες.

1.1. Γενικά για τα Στοχαστικά Μαθηματικά

Τα **Στοχαστικά Μαθηματικά (Πιθανότητες και Στατιστική)** είναι μια ιδιαίτερη περιοχή των Μαθηματικών που στην εποχή μας γίνεται όλο και πιο επίκαιρη. Ένας βασικός λόγος που αυτό συμβαίνει είναι γιατί τα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε με μαθηματικά εργαλεία γίνονται πιο πολύπλοκα και η **πολυπλοκότητα εμφανίζεται ως τυχαιότητα**. Για να κατανοήσει κανείς αυτό, αρκεί να φανταστεί το στρίψιμο ενός κέρματος. Παρότι η κίνηση του κέρματος υπακούει στους νόμους της κλασικής μηχανικής, το να βρει κανείς πώς εξαρτάται το αποτέλεσμα από τον τρόπο που στρίβουμε το κέρμα είναι μια διαδικασία τόσο πολύπλοκη που πρακτικά είναι αδύνατη, γι' αυτό και φανταζόμαστε συχνά το αποτέλεσμα ως τυχαίο. Σε ένα ακόμα παράδειγμα, ας φανταστούμε ένα πείραμα που το αποτέλεσμά του είναι συνάρτηση πολλών παραμέτρων, από τις οποίες εμείς γνωρίζουμε μόνο ένα μέρος. Ας φανταστούμε ακόμα ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα, κρατώντας τις παραμέτρους που γνωρίζουμε σταθερές. Το αποτέλεσμα του πειράματος μπορεί να αλλάζει σε κάθε επανάληψη, παρότι εμείς κρατάμε τις παραμέτρους που γνωρίζουμε σταθερές, επειδή αλλάζουν οι παράμετροι που δεν μπορούμε να ελέγξουμε. Αυτός ο μηχανισμός **μεταβλητότητας** κάνει το αποτέλεσμα του πειράματος να *φαίνεται σε εμάς τυχαίο*.

Η καθημερινότητά μας κατακλύζεται από τέτοια παραδείγματα. Φανταστείτε για παράδειγμα μια γιατρό που προσπαθεί να αποφασίσει αν ένας ασθενής που προσέρχεται στο Τμήμα Επειγόντων Περιστατικών θα χρειαστεί να διασωληνωθεί, βασιζόμενη μόνο στις παραμέτρους που αποτυπώνονται στις εξετάσεις του ασθενούς. Προκειμένου να κατανοήσουμε πολύπλοκα φαινόμενα και να λάβουμε **ορθολογικές αποφάσεις μέσα στις συνθήκες αβεβαιότητας** που αυτή η πολυπλοκότητα συνεπάγεται, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε **μαθηματικά μοντέλα που ποσοτικοποιούν την αβεβαιότητα** και να αναπτύξουμε εργαλεία για την ανάλυση αυτών των μοντέλων. Αυτός ακριβώς είναι και ο σκοπός των Στοχαστικών Μαθηματικών.

Ένας ακόμα λόγος που τα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι επίκαιρα είναι ότι παρέχουν τα εργαλεία για την **ανάλυση δεδομένων** και την **εξαγωγή πληροφοριών** από αυτά. Εκτιμάται ότι από τα δεδομένα που έχουν παραχθεί από ανθρώπινη δραστηριότητα από την αρχή της ιστορίας το 90% έχει παραχθεί τα τελευταία 2 χρόνια. Ο πολίτης κατακλύζεται καθημερινά από στατιστικές πληροφορίες. Στις δημοσκοπήσεις, στις οικονομικές αναλύσεις, στις επιστημονικές ανακοινώσεις, στις κοινωνικές μελέτες χρησιμοποιούνται στατιστικά διαγράμματα και δείκτες ώστε να παρουσιαστούν, να αναλυθούν και να ερμηνευτούν τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί με σκοπό την λήψη

αποφάσεων. Τις στατιστικές μεθόδους τις χρησιμοποιεί σχεδόν το σύνολο των επιστημονικών κλάδων, με σκοπό να εξαχθούν συμπεράσματα, να ανακαλυφθούν σχέσεις εξάρτησης και να θεμελιωθούν προβλέψεις με **επαγωγικό** τρόπο· με βάση την πληροφορία που διαθέτουμε από ένα υποσύνολο του υπό μελέτη πληθυσμού εξαγάγουμε συμπεράσματα για όλον τον πληθυσμό. Συνήθως ο εν λόγω πληθυσμός αποτελείται από ένα τεράστιο το πλήθος μονάδες (τις οποίες μπορεί και να μην έχουμε μηχανισμούς καταγραφής τους), οπότε η **ολική απογραφή** είναι είτε χρονοβόρα είτε αδύνατον να επιτευχθεί. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα αφορούν ένα ή περισσότερα **χαρακτηριστικά** του εν λόγω πληθυσμού, τα οποία εμπλέκονται στο πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε.

Η *επίλυση στατιστικών προβλημάτων* είναι μια διαδικασία η οποία περιλαμβάνει τέσσερα βασικά στάδια με την ακόλουθη σειρά (Bargagliotti et al., 2020):

- Προσδιορισμός του ερευνητικού προβλήματος και διατύπωση ερωτημάτων που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα.
- Σχεδιασμός και συλλογή δεδομένων.
- Ανάλυση των δεδομένων με χρήση κατάλληλα επιλεγμένων γραφικών αναπαραστάσεων, στατιστικών δεικτών και εν συνεχεία πιθανοθεωρητικών μοντέλων.
- Ερμηνεία των αποτελεσμάτων και απάντηση των αρχικών ερευνητικών ερωτημάτων.

Οι ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα, συνήθως αφορούν πολύπλοκους φυσικούς μηχανισμούς, στους οποίους είναι σχεδόν αδύνατη μια αιτιοκρατική προσέγγιση. Για την εξαγωγή έγκυρης γνώσης χρησιμοποιούνται **εμπειρικά δεδομένα παρατήρησης**, τα οποία πρέπει να **συλλεχθούν ορθώς**, ώστε να «μιμούνται» κατάλληλα τον φυσικό μηχανισμό που μελετάμε, και εν συνεχεία να αναλυθούν, να παρουσιαστούν συνοπτικά, και να μοντελοποιηθούν κατάλληλα, ώστε να προκύψουν από αυτά χρήσιμες πληροφορίες και ασφαλή συμπεράσματα για λήψη ορθών αποφάσεων.

Η ύπαρξη της **μεταβλητότητας** είναι αυτή που διαφοροποιεί ένα **ντεντερμινιστικό** από ένα **στατιστικό** ερώτημα. Η ερώτηση, για παράδειγμα, πόσο ψηλός είμαι, μπορεί να απαντηθεί με έναν μόνο αριθμό και δεν αποτελεί στατιστικό ερώτημα, μιας και όσες φορές καταγράψουμε (σε ένα μικρό χρονικό διάστημα) την ζητούμενη τιμή, αυτή θα είναι πάντα η ίδια. Αντίθετα η ερώτηση πόσο ψηλοί είναι οι ενήλικοι άνδρες στην Ελλάδα, θα αποτελούσε μια ντεντερμινιστική ερώτηση μόνο αν όλοι οι ενήλικοι άνδρες στην Ελλάδα είχαν το ίδιο ύψος. Το γεγονός πως υπάρχουν διαφορετικά ύψη, σημαίνει πως αναμένουμε μια απάντηση που στηρίζεται σε μετρήσεις ύψους που μεταβάλλονται, οπότε έχουμε ένα στατιστικό ερώτημα. Είναι εύλογο τότε αυτές τις μεταβαλλόμενες τιμές να τις περιγράψουμε κατάλληλα, δίνοντας πληροφορία για ένα ή περισσότερα **μέτρα θέσης** αυτών (αντιπροσωπευτικές τιμές), όπως και πληροφορία για το βαθμό **μεταβλητότητας** αυτών.

Στη **Στατιστική**, τα εμπειρικά δεδομένα που συλλέγουμε, είναι σημαντικό να τα **περιγράψουμε** με κάποιον συνοπτικό τρόπο, χωρίς όμως έτσι να χάσουμε την πληροφορία που μας παρέχουν, ώστε να εξάγουμε την απαιτούμενη πληροφορία που αναζητάμε από αυτά. Η συνοπτική αυτή παρουσίαση μπορεί να στηρίζεται σε **γραφικές μεθόδους**, όπου κατάλληλα επιλεγμένα **διαγράμματα** δημιουργούνται, καθώς και σε **αριθμητικές μεθόδους**, όπου στατιστικοί δείκτες υπολογίζονται με σκοπό τον προσδιορισμό **μέτρων θέσης και μεταβλητότητας** των δεδομένων αυτών. Για την ορθή επιλογή διαγραμμάτων και στατιστικών δεικτών, πρέπει αρχικά να είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε αν τα δεδομένα προέρχονται από **κατηγορικά** ή **ποσοτικά** χαρακτηριστικά του υπό μελέτη πληθυσμού. Επιπλέον τα ποσοτικά χαρακτηριστικά, μπορούμε να τα διαχωρίσουμε σε **διακριτά** και **συνεχή**. Τα διαγράμματα καθώς και οι κατάλληλα επιλεγμένοι αριθμητικοί δείκτες, μπορούν να χρησιμοποιηθούν, επιπλέον, για να ανακαλυφθούν **σχέσεις εξάρτησης** που διέπουν τα δεδομένα. Η **ερμηνεία** των αποτελεσμάτων είναι πολύ σημαντική. Από τα παραγόμενα διαγράμματα και τους στατιστικούς δείκτες πρέπει να εξάγουμε κάποια πρώτα συμπεράσματα, τα οποία σε ένα αρχικό στάδιο να απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί. Εν συνεχεία, με χρήση κατάλληλων (**στοχαστικών**) **μοντέλων** θα προσπαθήσουμε να αποφανθούμε αν τα αρχικά αυτά συμπεράσματα που καταλήξαμε, με βάση τα δεδομένα που διαθέτουμε, οφείλονται στην τύχη ή μπορούν να γενικευτούν σε όλο τον πληθυσμό.

Η **Θεωρία των Πιθανοτήτων** παρέχει το μαθηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε στοχαστικά μοντέλα για πολύπλοκα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου και να αναλύσουμε αυτά τα μοντέλα για να εξερευνήσουμε τις συνέπειές τους. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, η πεποίθησή μας για το πόσο βέβαιο θεωρούμε να συμβεί το ενδεχόμενο, αποκτά συγκεκριμένο μαθηματικό νόημα και αναπτύσσεται σε ένα σύνολο από κανόνες λογισμού που συνδέουν τις πιθανότητες ενδεχομένων και μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων από εκείνες απλούστερων. Ταυτόχρονα αναπτύσσουμε μεθόδους που επιτρέπουν να αξιοποιούμε πληροφορίες που λαμβάνουμε για το φαινόμενο που μάς ενδιαφέρει ώστε να επικαιροποιούμε τις πεποιθήσεις μας με βάση αυτές τις πληροφορίες (**δεσμευμένη πιθανότητα**). Έννοιες του πραγματικού κόσμου όπως η **ανεξαρτησία**, το να μην επηρεάζει δηλαδή η εμφάνιση ενός ενδεχομένου την εμφάνιση ενός άλλου, αποκτούν συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο και μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε απλά πιθανοθεωρητικά μοντέλα, όπως το στρίψιμο ενός κέρματος, ως δομικούς λίθους για να κατασκευάσουμε πολύπλοκα ρεαλιστικά μοντέλα για προβλήματα του πραγματικού κόσμου και να κατανοήσουμε τις βαθιές και συχνά απρόβλεπτες συνέπειές τους. Έτσι, η Θεωρία Πιθανοτήτων δεν παρέχει απλά τη μαθηματική θεμελίωση των στατιστικών μεθόδων αλλά έχει εξελιχθεί σε έναν κεντρικό κλάδο των σύγχρονων Μαθηματικών με συνδέσεις και προβολές σε πολλά πεδία των Θεωρητικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Ο στόχος της σχολικής εκπαίδευσης στα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι να διδάξει τους αυριανούς πολίτες

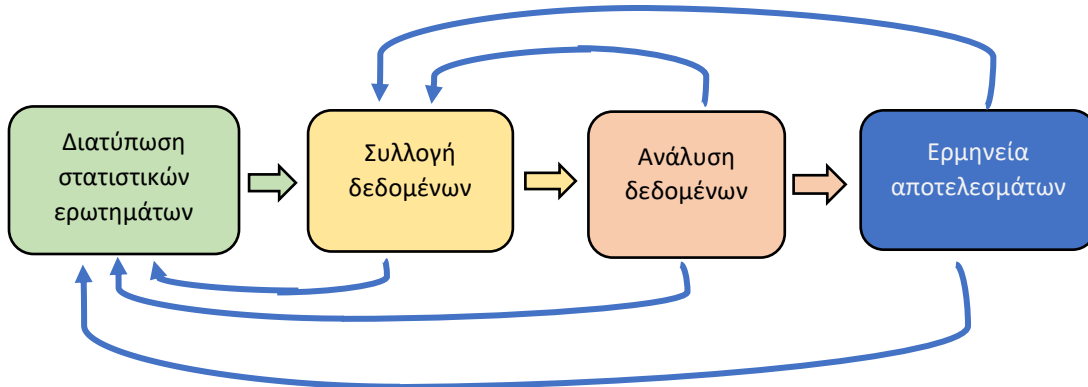
- να οργανώνουν και να παρουσιάζουν δεδομένα με σκοπό να επικοινωνήσουν πληροφορίες με εύληπτο και έγκυρο τρόπο, αξιοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία,
- να είναι ικανοί και κριτικοί χρήστες των στατιστικών πληροφοριών που μας κατακλύζουν και των συμπερασμάτων που συχνά εξάγονται,
- να κατανοούν ποσοτικά την εγγενή αβεβαιότητα πολύπλοκων καταστάσεων και να μπορούν να κάνουν ορθολογικά δικαιολογημένες προσωπικές επιλογές σε καταστάσεις που εμπεριέχουν ρίσκο.

1.2. Στατιστική

Η Στατιστική συχνά ονομάζεται ως «η επιστήμη των δεδομένων» (Bargagliotti & Franklin, 2021). Κυρίαρχα χαρακτηριστικά της εποχής μας είναι η ποσοτικοποίηση της καθημερινότητάς μας, η συλλογή δεδομένων και η λήψη αποφάσεων με βάση αυτά, είτε στην ιδιωτική, είτε στη δημόσια ζωή. Για παράδειγμα, τα κινητά τηλέφωνα (smart phones) μας επιτρέπουν να συλλέγουμε δεδομένα από τη δραστηριότητά μας καθημερινά. Υπάρχουν φορητές συσκευές που συλλέγουν δεδομένα σχετικά με τη σωματική μας λειτουργία, π.χ. όταν κοιμόμαστε ή όταν αθλούμαστε, με στόχο την ποσοτικοποίησή της. Επίσης, υπάρχουν διαδικτυακές εφαρμογές που μας ενημερώνουν για τις χαμηλότερες τιμές της βενζίνης στην περιοχή μας, την κίνηση που υπάρχει στους δρόμους, κτλ., εκείνη τη στιγμή. Αυτές οι διεργασίες συνδέονται με την επίλυση στατιστικών προβλημάτων και τις απαντήσεις σε στατιστικά ερωτήματα. Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά μας οδηγούν στην λήψη των σχετικών αποφάσεων. Π.χ., η σωστή ερμηνεία των κατάλληλων δεδομένων που συλλέγει ένα ‘smart watch’ κατά τη διάρκεια της σωματικής μου άσκησης μπορεί να με βοηθήσουν να προσαρμόσω τον τρόπο άσκησής μου, ώστε να είναι επωφελής για εμένα. Συνεπώς, στην καθημερινή μας ζωή, η συλλογή, ανάλυση και ερμηνεία δεδομένων και η απάντηση σε στατιστικά ερωτήματα (δηλαδή ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν μέσα από τα στάδια της διαδικασίας στατιστικής επίλυσης προβλήματος) μας βοηθά στη λήψη των κατάλληλων αποφάσεων από «για πόση ώρα είναι καλό να γυμνάζομαι κάθε ημέρα και με τι ρυθμό», «τι να τρώω και πότε», «αν η επιλογή ενός μουσικού κομματιού είναι σχετική με τα γούστα μου», πριν το ακούσω μέχρι ποια μέτρα χρειάζεται να ληφθούν για την βελτίωση των παρεχόμενων υπηρεσιών υγείας στο κοινωνικό σύνολο. Ως ενεργά μέλη της κοινωνίας, σημερινοί και αυριανοί πολίτες, τα παιδιά χρειάζεται να μπορούν να χρησιμοποιούν τη Στατιστική, ώστε να βγάζουν συμπεράσματα, να παίρνουν αποφάσεις ή να κρίνουν πληροφορίες που συναντούν στη δημόσια σφαίρα, ως αξιόπιστες ή όχι.

Τα τέσσερα στάδια της επίλυσης στατιστικών προβλημάτων (Σχήμα 5), όπως αναφέρθηκαν παραπάνω (Bargagliotti et al., 2020) είναι «οδηγός» (διεθνώς) για τη δραστηριότητα που προσδοκούμε να εμπλακούν τα παιδιά στο σχολείο, ώστε να αποκτήσουν εμπειρίες χρήσης της Στατιστικής, γνώσεις και δεξιότητες τις οποίες να αξιοποιήσουν στην καθημερινότητά τους και ως αυριανοί πολίτες. Μια άλλη, αντίστοιχη περιγραφή είναι ο «στατιστικός κύκλος έρευνας», ο οποίος αποτελείται από τα στάδια α) της διατύπωσης ερωτήματος, β) του σχεδιασμού μιας διερεύνησης για να απαντηθεί το ερώτημα, γ) της συλλογής δεδομένων για την απάντηση του ερωτήματος, δ) της

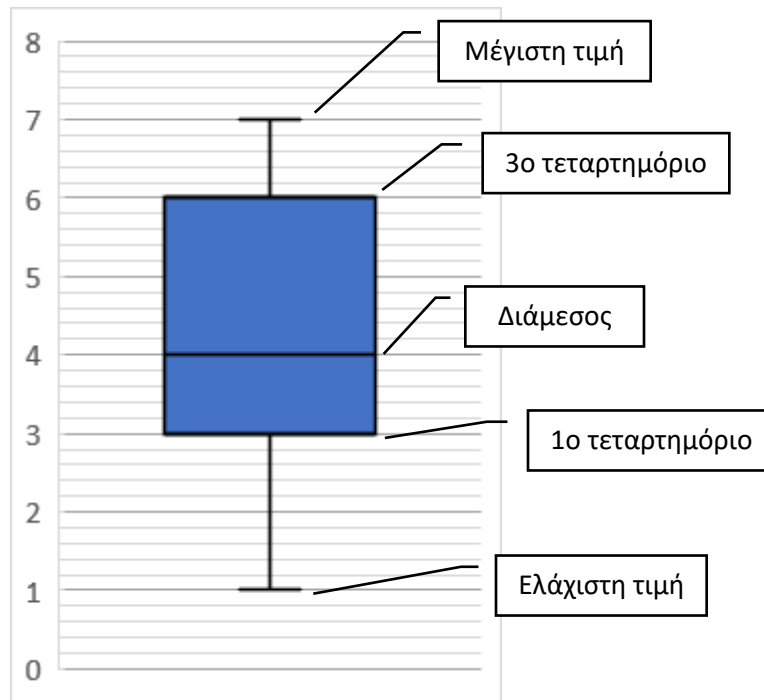
ανάλυσης των δεδομένων αυτών, ε) ερμηνεία των αποτελεσμάτων/εξαγωγή συμπερασμάτων και επικοινωνία αυτών στην κοινότητα (τάξη, οικογενειακό περιβάλλον, κτλ.). Τα στάδια του κύκλου δεν είναι αυστηρά διαδοχικά καθώς είναι αναμενόμενα τα «πισωγυρίσματα».



Σχήμα 5: Τα στάδια της διαδικασίας επίλυσης στατιστικού προβλήματος.

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για τη Στατιστική, στο Γυμνάσιο περιγράφουν αυτές τις γνώσεις και δεξιότητες που είναι απαραίτητο στο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών να έχουν τα παιδιά αυτής της ηλικιακής ομάδας, ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν με κατάλληλο τρόπο τα στάδια της στατιστικής επίλυσης προβλήματος (ή του κύκλου του στατιστικού ερωτήματος) σε θέματα της καθημερινής τους ζωής και να συνεχίσουν στο Λύκειο με άλλες, πιο σύνθετες επίσης πραγματικές καταστάσεις, που απαντώνται θέτοντας και διερευνώντας στατιστικά ερωτήματα.

Η Στατιστική στο Γυμνάσιο αναπτύσσεται σε δύο ενότητες, τη «διαχείριση δεδομένων» και τα «μέτρα θέσης και μεταβλητότητας». Όσο αφορά τα ΠΜΑ που αντιστοιχούν στη **διαχείριση δεδομένων**, τα παιδιά διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συλλογή και ανάλυση δεδομένων, αποφασίζουν τι είδους δεδομένα χρειάζεται να συλλέξουν για να τα απαντήσουν και κάνουν συλλογή δεδομένων και αναπαράσταση δεδομένων με τα κατάλληλα διαγράμματα. Πιο συγκεκριμένα, καλούνται για πρώτη φορά να διατυπώσουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με **συνεχή ποσοτικά** δεδομένα που απαρτίζουν όλον τον πληθυσμό. Για την αναπαράστασή τους κατασκευάζουν ιστογράμματα συχνοτήτων ίσου πλάτους, καθώς και απλά θηκογράμματα (χρησιμοποιώντας την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη και μέγιστη τιμή, 1^ο, 2^ο και 3^ο τεταρτημόριο) (Σχήμα 6).



Σχήμα 6: Ένα απλό θηκόγραμμα, για ένα σύνολο 31 δεδομένων, που αντιστοιχούν στις ημέρες μιας συγκεκριμένης εβδομάδας που προπονήθηκε κάθε ένας από 31 δρομείς. Η ελάχιστη τιμή των παρατηρήσεων είναι 1 και αντιστοιχεί στον ή στους δρομείς που προπονήθηκαν 1 ημέρα, από τους 31. Αντίστοιχα η μέγιστη τιμή είναι 7 (που σημαίνει ότι κάποιος ή κάποιοι προπονήθηκαν όλες τις ημέρες της εβδομάδας) και η διάμεσος 4. Το 1ο τεταρτημόριο ισούται με 3 και το 3ο τεταρτημόριο με 6.

Για κατηγορικά δεδομένα κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα. Επιπλέον, διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα και κατασκευάζουν χρονοδιαγράμματα. Στην Γ' Γυμνασίου, για πρώτη φορά διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον, αναγνωρίζουν τους περιορισμούς που έχει η διεξαγωγή ολικής απογραφής και άρα την αναγκαιότητα χρήσης δείγματος για την απάντηση στατιστικών ερωτημάτων. Διακρίνουν το δείγμα από τον πληθυσμό όπως και πιθανούς τρόπους συλλογής δεδομένων. Έμφαση δίνεται στην απλή τυχαία δειγματοληψία, την οποία και χρησιμοποιούν για να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν μικρές στατιστικές έρευνες.

Τα ΠΜΑ της υποενότητας **«μέτρα θέσης και μεταβλητότητας»** αφορούν την δυνατότητα των μαθητών να περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων όπως το εύρος χρησιμοποιώντας διάφορα μέτρα θέσης (μέση τιμή και διάμεσος), να επισημαίνουν και να περιγράφουν την ύπαρξη πολλαπλών κορυφών και απόμακρων τιμών σε ένα δείγμα, από τα αντίστοιχα στατιστικά διαγράμματα (ιστογράμματα συχνότητας). Επίσης, να κάνουν συγκρίσεις, να εξαγάγουν συμπεράσματα και σε ορισμένες περιπτώσεις να διερευνούν πιθανές ερμηνείες για τα χαρακτηριστικά των δεδομένων, όπως προέκυψαν από την ανάλυση. Ως ένα επιπλέον μέτρο μεταβλητότητας για ποσοτικά δεδομένα, οι

μαθητές και οι μαθήτριες⁵ προσδιορίζουν τεταρτημόρια και υπολογίζουν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

1.3. Πιθανότητες

Η καθημερινότητα φέρνει συχνά τους ανθρώπους αντιμέτωπους με την αναγκαιότητα να λάβουν αποφάσεις σε καταστάσεις που υπεισέρχεται η τυχαιότητα (σελίδα 104) χωρίς να έχουν στη διάθεσή τους όλες τις πληροφορίες που θα τους βοηθήσουν σε αυτό (Watson et al., 2013). Συχνά οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν στην προσπάθειά τους να ανταποκριθούν σε τέτοιες προκλήσεις εμπεριέχουν συστηματικά λάθη. Ενδεικτικά, σε έρευνα⁶ των Kahneman, Slovic και Tversky, το 1982, φάνηκε ότι μαθητές 11-18 ετών για να απαντήσουν τέτοιου είδους ερωτήματα και να επιλέξουν ανάμεσα σε ένα σύνολο εκδοχών τι θα αποφασίσουν, είτε βασίζονται σε προηγούμενες εμπειρίες τους με παρόμοιες καταστάσεις, είτε στην αντίληψη ότι τα αποτελέσματα οφείλουν να είναι αντιπροσωπευτικά του πλήθους των πιθανών εκβάσεων της κατάστασης. Ωστόσο, όπως φάνηκε, σε αυτές τις στρατηγικές μπορεί να είναι μεροληπτικές (υπέρ ή κατά μιας ή περισσοτέρων εκβάσεων) και έτσι να οδηγήσουν σε λάθος εκτίμηση και απόφαση. Για παράδειγμα, ένα άτομο λαμβάνει μια φαρμακευτική αγωγή, αλλά μια πρόσφατη είδηση για κάποιον που εμφάνισε συμπτώματα αλλεργίας σε αυτή μπορεί να τον κάνει διστακτικό: εκτιμά ότι είναι πολύ πιθανό να συμβεί και στο ίδιο -αν και παίρνει ήδη το φάρμακο για κάποιο διάστημα- ενώ στην πραγματικότητα η πιθανότητα αυτή έχει εκτιμηθεί και το φάρμακο έχει χαρακτηριστεί ασφαλές. Η αξιοποίηση των εμπειριών του ήταν μεροληπτική, καθώς μια δυσάρεστη έκβαση επισκίασε τις άλλες εμπειρίες του. Σε ένα άλλο παράδειγμα, κάποιος στρίβοντας ένα συνηθισμένο κέρμα και καταγράφοντας τα αποτελέσματα παρατηρεί ότι έχει φέρει πολλές συνεχόμενες φορές κεφαλή και αναμένει -εσφαλμένα- στις επόμενες να έρθει πολλές φορές γράμματα, σύμφωνα με την αντίληψη ότι τα αποτελέσματα οφείλουν να αντικατοπτρίζουν τις πιθανές εκβάσεις και, στην περίπτωση του κέρματος να είναι μισά-μισά.

Η εισαγωγή των Πιθανοτήτων στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών αποσκοπεί να αποκτήσουν τα παιδιά γνώσεις και δεξιότητες που θα τα βοηθήσουν να διερευνούν πολύπλοκες, καθημερινές καταστάσεις στις οποίες υπεισέρχεται η τυχαιότητα, να διαχειρίζονται και να ελέγχουν πιθανά σφάλματα, να αναπτύσσουν επιχειρήματα και να οδηγούνται μέσω αυτών στη λήψη των αποφάσεων. Αντίστοιχα με τον στατιστικό κύκλο έρευνας, για τις Πιθανότητες και για την περιγραφή της δραστηριότητας των μαθητών που εμπλέκονται σε διερεύνηση ο «κύκλος διερεύνησης πιθανοτήτων» είναι αρκετά διαφωτιστικός. Τα στάδια του κύκλου είναι: α) διατύπωση του ερωτήματος, β) ο σχεδιασμός μιας διερεύνησης (π.χ. εκτέλεση ενός πειράματος τύχης και καταγραφή των αποτελεσμάτων) για να απαντηθεί το ερώτημα, γ) η διατύπωση εικασιών για το αναμενόμενο αποτέλεσμα της διερεύνησης, δ) εκτέλεση πειράματος τύχης, συλλογή

⁶ Kahneman, D., Slovic, P., and Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

δεδομένων, ε) διερεύνηση, ανάλυση και συμπεράσματα, στ) αύξηση του δείγματος (και επανάληψη των προηγούμενων σταδίων), ζ) επικοινωνία των αποτελεσμάτων στην κοινότητα (τάξη, οικογενειακό περιβάλλον, κτλ.). Όπως και στον στατιστικό κύκλο έρευνας και εδώ τα στάδια δεν είναι αυστηρά διαδοχικά.

Οι Πιθανότητες, στο Γυμνάσιο αναπτύσσονται κυρίως στη θεματική ενότητα **πειράματα τύχης και πιθανότητες** ενώ κάνει το ξεκίνημά της η ενότητα **συσχέτιση**, η οποία θα αναπτυχθεί κυρίως στο Λύκειο. Οι μαθητές του Γυμνασίου μελετούν σύνθετα πειράματα τύχης που εξελίσσονται σε περισσότερα στάδια (π.χ. στρίβουμε ένα συνηθισμένο κέρμα 4 φορές) και βρίσκουν κατάλληλες αναπαραστάσεις για τον δειγματικό χώρο (π.χ. πίνακες, δεντροδιαγράμματα). Αντιστοιχίζουν εκβάσεις που περιγράφονται με φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου και αντίστροφα και χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων. Ακόμα χρησιμοποιούν τη βασική αρχή απαρίθμησης για να υπολογίζουν το πλήθος ενδεχομένων χωρίς να απαριθμούν τα στοιχεία τους. Στη Γ' Γυμνασίου οι μαθητές επαναλαμβάνουν πειράματα τύχης **είτε φυσικά είτε μέσα από προσομοιώσεις με τη βοήθεια ψηφιακών εργαλείων** και εξερευνούν πειραματικά ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, **τον νόμο των μεγάλων αριθμών**: η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σε μια σειρά από επαναλήψεις του πειράματος τύχης πλησιάζει την πιθανότητα του ενδεχομένου, καθώς το πλήθος των επαναλήψεων του πειράματος γίνεται πολύ μεγάλο. Ιδιαίτερη αξία έχει η σύνδεση του νόμου των μεγάλων αριθμών με τη δραστηριότητα των μαθητών στο στάδιο ζ) του κύκλου του ερωτήματος πιθανοτήτων. Ένα παράδειγμα φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

Στάδια κύκλου ερωτήματος πιθανοτήτων	Παράδειγμα
A. Διατύπωση του ερωτήματος	Είναι το ζάρι τίμιο;
B. Σχεδιασμός μιας διερεύνησης	Να ρίξουμε το ζάρι πολλές φορές (π.χ. 100) και να καταγράψουμε τα αποτελέσματά του.
Γ. Διατύπωση εικασιών για το αποτέλεσμα	Αναμένουμε κάθε αποτέλεσμα να εμφανιστεί $\frac{1}{6}$ φορές των συνολικών ρίψεων.
Δ. Εκτέλεση πειράματος τύχης, συλλογή δεδομένων	Ρίχνουμε το ζάρι 100 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.
Ε. Διερεύνηση, ανάλυση, συμπεράσματα	Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με την εικασία του Γ. Αποφασίζουμε αν θα χαρακτηρίσουμε το ζάρι τίμιο, ή όχι, ή αν χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.
ΣΤ. Αύξηση δείγματος	Επιστρέφουμε στο Β και σχεδιάζουμε να ρίξουμε το ζάρι 1000 φορές.
Ζ. Επικοινωνία αποτελεσμάτων	Θεωρούμε ότι το ζάρι είναι, γιατί

Σε αυτό το παράδειγμα, οι μαθητές αξιοποιούν τον νόμο των μεγάλων αριθμών στο ζ) για τη διερεύνηση και την απάντηση του ερωτήματος στο α) και επιπλέον, μέσω της δραστηριότητάς τους σε όλον τον κύκλο νοηματοδοτούν την ιδέα του νόμου των μεγάλων αριθμών και άρα τη σχέση της θεωρητικής πιθανότητας με τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του πειράματος τύχης.

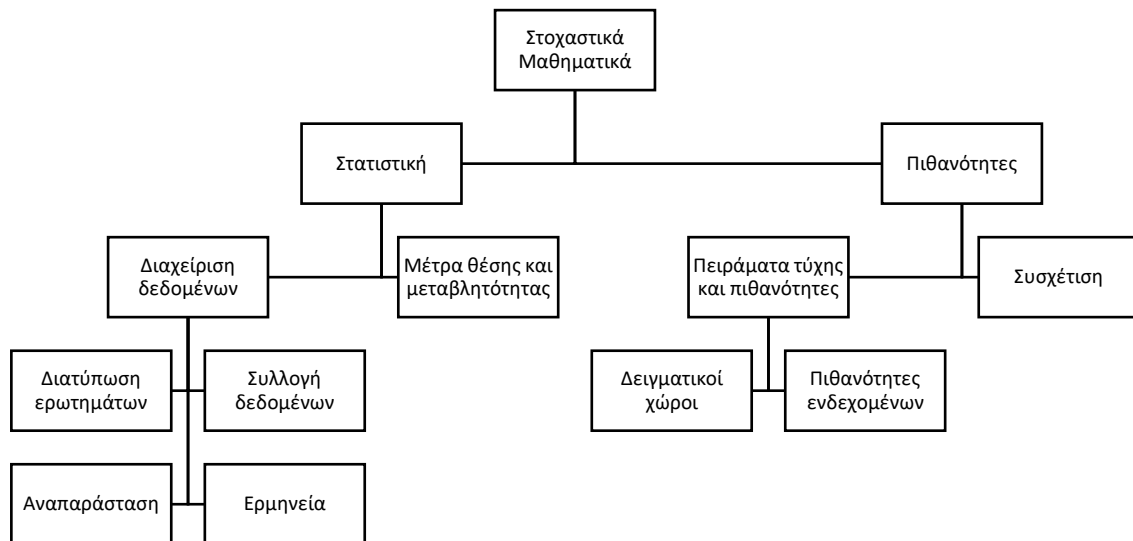
Με αντίστοιχο πειραματικό τρόπο, οι μαθητές εισάγονται στην ιδέα ότι η εμφάνιση ενός αποτελέσματος μπορεί να επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης ενός άλλου (ενότητα της συσχέτισης). Αυτή η πολύ κεντρική ιδέα των στοχαστικών μαθηματικών θα αναπτυχθεί διεξοδικά στο Λύκειο.

2. Ανάπτυξη των ΠΜΑ του πεδίου των Στοχαστικών Μαθηματικών

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα Στοχαστικά Μαθηματικά εμπεριέχουν τα «υποπεδία» Στατιστική και Πιθανότητες.

Τα ΠΜΑ της Στατιστικής στο Γυμνάσιο αναπτύσσονται σε δύο ενότητες: **διαχείριση δεδομένων και μέτρα θέσης και μεταβλητότητας**.

Στις Πιθανότητες, τα ΠΜΑ αναπτύσσονται κυρίως στην ενότητα **Πειράματα τύχης και πιθανότητες**. ΠΜΑ για την **συσχέτιση** εμφανίζονται για πρώτη φορά στη Γ' Γυμνασίου και η ενότητα θα αναπτυχθεί κυρίως στο Λύκειο.



Σχήμα 7: Υποδιαίρεσεις και θεματικές ενότητες και υποενότητες του πεδίου Στοχαστικά Μαθηματικά.

2.1. Στατιστική

Θεματική Ενότητα: Διαχείριση δεδομένων.

Η πρώτη ενότητα **διαχείριση δεδομένων** περιλαμβάνει τις υποενότητες: διατύπωση ερωτημάτων, συλλογή δεδομένων, αναπαράσταση και ερμηνεία.

Όσο αφορά την υποενότητα **διατύπωση ερωτημάτων** ήδη από το **Δημοτικό** τα παιδιά έχουν διατυπώσει ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα ή με διακριτά ποσοτικά ή με συνδυασμό τους, σε μία ομάδα και σε δύο ομάδες μικρές ίσου πλήθους (π.χ. τα δεδομένα μπορεί να είναι τα ύψη των παιδιών μιας τάξης, ή τα ύψη των παιδιών δύο ισάριθμων, σε παιδιά, τάξεων). Επίσης έχουν διατυπώσει ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται.

Στο **Γυμνάσιο** οι μαθητές διατυπώνουν ερωτήματα εξάρτησης ως εξής: «Ποια είναι η διατύπωση οικείου περιβάλλον τους (Α΄ Γυμνασίου),

- ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά **χρονικά** δεδομένα (Β΄ Γυμνασίου),
- ερωτήματα που αφορούν το **ευρύτερο κοινωνικό** περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους (Γ΄ Γυμνασίου).

Επίσης, διακρίνουν τους διαφορετικούς τύπους δεδομένων: κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά.

Στο **Λύκειο** οι μαθητές διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού.

Η **συλλογή δεδομένων** για την απάντηση των ερωτημάτων που διατυπώνουν τα παιδιά ήδη έχει ξεκινήσει από το **Δημοτικό**, που οι μαθητές συλλέγουν δεδομένα, αρχικά από το οικείο περιβάλλον τους και στη συνέχεια μέσω πειραμάτων και μετρήσεων, τα καταγράφουν, τα οργανώνουν και τα ομαδοποιούν. Αλλά και στην **Α΄ Γυμνασίου** η **συλλογή των δεδομένων** είναι απογραφική και πραγματοποιείται μέσω ερευνών από το οικείο περιβάλλον των παιδιών. Ωστόσο, για πρώτη φορά τα εν λόγω δεδομένα μπορεί να προέρχονται και από συνεχή ποσοτικά χαρακτηριστικά. Στην **Β΄ Γυμνασίου** οι μαθητές μελετούν επιπλέον για πρώτη φορά και απογραφικά χρονικά δεδομένα τα οποία προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κάποιου χαρακτηριστικού, ενώ στην **Γ΄ Γυμνασίου** μελετούν για πρώτη φορά δεδομένα από το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους. Σε αυτή την τάξη, σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών χρειάζεται οι μαθητές να διερευνήσουν και να αναγνωρίσουν τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων, **με χρήση προσομοιώσεων από ψηφιακά εργαλεία**, καθώς και τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για ένα πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα, χρησιμοποιώντας και πάλι ψηφιακά εργαλεία και προσομοιώσεις. Από τις προσομοιώσεις μπορούν να ανακαλύψουν, πως όσο αυξάνουν το μέγεθος του δείγματος, η μεταβλητότητα των στατιστικών δεικτών μειώνεται. Όσο μεγαλύτερο μέγεθος έχουν τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, τόσο περισσότερο εμπιστευόμαστε τα αποτελέσματα που παρατηρούμε, υπό την προϋπόθεση το δείγμα να είναι

αντιπροσωπευτικό. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε εδώ να χρησιμοποιήσει ένα παράδειγμα. Οι μαθητές μπορούν να συλλέξουν δεδομένα σχετικά με το ύψος παιδιών της Γ' Γυμνασίου. Το πρώτο δείγμα μπορεί να είναι πολύ μεγάλο, αλλά να απαρτίζεται από αγόρια μόνο, ενώ το δεύτερο μικρότερο και τυχαία σε αυτό να υπάρχουν και αγόρια και κορίτσια της Γ' Γυμνασίου. Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν το μέσο ύψος και να συζητήσουν ποια μέση τιμή θεωρούν πως προσεγγίζει «καλύτερα» το μέσο ύψος όλων των μαθητών της Γ' Γυμνασίου του σχολείου. Στο **Λύκειο** αξιοποιούν τη συλλογή δεδομένων για να διερευνήσουν και να απαντήσουν ερωτήματα που διατυπώνουν.

Οι τρόποι **αναπαράστασης** των δεδομένων που έχουν αξιοποιήσει οι μαθητές στο **Δημοτικό** είναι εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα, φυλλογράμματα, διαγράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων και απλά κυκλικά διαγράμματα (π.χ. με υποδιαίρεσεις του κύκλου σε 4 ίσα μέρη). Στο **Γυμνάσιο** αναπαριστούν δεδομένα με:

- κυκλικά διαγράμματα για κατηγορικά δεδομένα (χρησιμοποιώντας σχετικές συχνότητες) και ιστογράμματα συχνοτήτων ίσου πλάτους, με δεδομένο πλήθος κλάσεων, για συνεχή ποσοτικά δεδομένα (Α' Γυμνασίου),
- χρονοδιαγράμματα για απογραφικά χρονικά δεδομένα που συλλέγουν στην Β' Γυμνασίου,
- απλά θηκογράμματα (χρησιμοποιώντας την περίληψη πέντε αριθμών (σελίδα 10815): ελάχιστη και μέγιστη τιμή, 1^ο, 2^ο και 3^ο τεταρτημόριο) για συνεχή ποσοτικά δεδομένα (Β' Γυμνασίου).

Οι μαθητές, σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου έχουν την ευκαιρία να ερμηνεύουν τα δεδομένα τους, διερευνώντας πληροφορίες στις διαφορετικές αναπαραστάσεις δεδομένων με τις οποίες έχουν ασχοληθεί και να εξαγουν απλά συμπεράσματα με βάση το πρόβλημα που μελετούν.

Στο **Λύκειο** κατασκευάζουν θηκογράμματα στα οποία φαίνονται οι οριακές τιμές (μια διαφορά από τα θηκογράμματα, στο Γυμνάσιο), ενώ κάνουν συγκρίσεις μεταξύ συνόλων δεδομένων με τη χρήση πολλαπλών θηκογραμμάτων. Επίσης για να διερευνήσουν σχέσεις εξάρτησης -κάτι που αποτελεί νέα θεματική υποενότητα που ξεκινά στο Λύκειο- χρησιμοποιούν κατάλληλες αναπαραστάσεις (πίνακες συνάφειας συχνοτήτων, στοιβαγμένα ραβδογράμματα και διαγράμματα διασποράς).

Όσο αφορά την **ερμηνεία** στο **Δημοτικό** εμφανίζεται κυρίως με την άντληση πληροφοριών και την εξαγωγή συμπερασμάτων για τα δεδομένα από αναπαραστάσεις τους, π.χ. από ένα ραβδόγραμμα που παριστάνει τις προτιμήσεις των παιδιών μιας τάξης για δραστηριότητες ελεύθερου χρόνου συμπεραίνουν ποια είναι η δημοφιλέστερη. Από το **Γυμνάσιο** και μετά η **ερμηνεία** των δεδομένων «διασταυρώνεται» και με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας. Στο Γυμνάσιο οι μαθητές:

- Χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης, για να περιγράψουν τα δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξαγάγουν συμπεράσματα.
- Σχολιάζουν την παρατηρούμενη τάση σε χρονοδιαγράμματα (Β' Γυμνασίου).

- Επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης, ώστε να απαντήσουν σε ερωτήματα αντλώντας τις πληροφορίες που χρειάζονται.
- Διερευνούν πιθανές ερμηνείες για χαρακτηριστικά των δεδομένων. Για παράδειγμα εντοπίζουν πολλαπλές κορυφές σε ιστογράμματα, εντοπίζουν την ύπαρξη απόμακρων τιμών και διερευνούν πιθανούς λόγους της ύπαρξής τους. Επίσης, διερευνούν πιθανούς λόγους για το βαθμό μεταβλητότητας των δεδομένων.
- Εξετάζουν κριτικά έτοιμες ερμηνείες στατιστικών διαγραμμάτων, εντοπίζοντας περιπτώσεις εσφαλμένων και παραπλανητικών συμπερασμάτων.

Στο **Λύκειο** οι ερμηνείες εμπεριέχουν και την διερεύνηση σχέσεων εξάρτησης μεταξύ χαρακτηριστικών (π.χ. μεταξύ ύψους και ηλικιακής ομάδας).

Θεματική Ενότητα: μέτρα θέσης και μεταβλητότητας.

Η δεύτερη ενότητα **μέτρα θέσης και μεταβλητότητας** αφορά στη χρήση αριθμητικών εκφράσεων θέσης και μεταβλητότητας, οι οποίες επιτρέπουν τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων, προερχόμενα από ποσοτικά χαρακτηριστικά, καθώς και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων με βάση αυτά.

Από το **Δημοτικό** τα παιδιά ήδη προσδιορίζουν την επικρατούσα τιμή, το εύρος, τη διάμεσο και τον μέσο όρο σε πραγματικές καταστάσεις και μελετούν δεδομένα με βάση αυτά τα μέτρα.

Στο **Γυμνάσιο** τα παιδιά αξιοποιούν τα μέτρα θέσης, το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, για να απαντήσουν σε ερωτήματα που διατυπώνουν στις αντίστοιχες τάξεις. Πιο συγκεκριμένα:

- Στην Α΄ Γυμνασίου χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης που έχουν διδαχθεί από το Δημοτικό για να περιγράψουν ποσοτικά δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα.
- Επιπλέον από το ιστόγραμμα, εκτιμούν μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και ερμηνεύουν χαρακτηριστικά των δεδομένων (όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών ή πολλαπλές κορυφές) ή πιθανούς λόγους ύπαρξης έντονης μεταβλητότητας.
- Στη Β΄ Γυμνασίου διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής.

Πώς θα μεταβληθεί η μέση τιμή:

- Αν σε όλα τα δεδομένα αυξηθούν κατά την ίδια ποσότητα.
- Αν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, π.χ. όταν υπάρχει κοινή ποσοστιαία αύξηση ή μείωση όλων των δεδομένων, όπως όταν αυξάνονται κατά 5% οι μισθοί όλων των εργαζομένων μιας εταιρείας.

Επιπλέον, διερευνούν πώς επηρεάζεται η μέση τιμή και η διάμεσος από την ύπαρξη απόμακρων τιμών.

- Επίσης, προσδιορίζουν τα τεταρτημόρια καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- Τέλος, περιγράφουν τα δεδομένα με βάση την περίληψη των πέντε αριθμών: ελάχιστη τιμή, 1ο, 2ο και 3ο τεταρτημόριο και μέγιστη τιμή.
- Στη Γ΄ Γυμνασίου αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα στατιστικών δεικτών που αφορούν το ίδιο χαρακτηριστικό (π.χ. της μέσης τιμής) μεταξύ δειγμάτων του ίδιου πληθυσμού (το συγκεκριμένο ΠΜΑ εμφανίζεται στην διαχείριση δεδομένων,

καθώς εστιάζει κυρίως στην αναγνώριση της δυνατότητας λήψης δείγματος, άρα στη συλλογή δεδομένων).

Στο **Λύκειο** η μελέτη και η περιγραφή της μεταβλητότητας γίνεται με περισσότερα μέσα, όπως η διασπορά και η τυπική απόκλιση. Επίσης, με στόχο τη σύγκριση και την διερεύνηση σχέσεων εξάρτησης, εκτός από την μεταβλητότητα ολόκληρου του συνόλου των δεδομένων υπολογίζουν την μεταβλητότητα σε μικρότερες ομάδες δεδομένων του ίδιου συνόλου. Για παράδειγμα, υπολογίζουν τη μεταβλητότητα του συνόλου δεδομένων των υψών των μαθητών ενός Λυκείου και στη συνέχεια υπολογίζουν τη μεταβλητότητα κάθε τάξης του Λυκείου ως προς το ίδιο χαρακτηριστικό (τα ύψη), με βάση τα ίδια δεδομένα.

Γενική επισήμανση: Είναι σημαντικό να μην δίνεται έμφαση στην απομνημόνευση τύπων και στον υπολογισμό στατιστικών δεικτών, όπως π.χ. η μέση τιμή. Αντίθετα, θα πρέπει να δίνεται βάρος στην ερμηνεία των στατιστικών δεικτών. Όταν απαιτείται ο υπολογισμός στατιστικών δεικτών, συνιστάται η χρήση ψηφιακών εργαλείων.

2.2. Πιθανότητες

Στις Πιθανότητες, τα ΠΜΑ αναπτύσσονται κυρίως στην ενότητα **πειράματα τύχης και πιθανότητες**. Η ενότητα **συσχέτιση** ξεκινά στη Γ' Γυμνασίου και θα αναπτυχθεί κυρίως στο Λύκειο.

Θεματική ενότητα: πειράματα τύχης και πιθανότητες.

Η ενότητα πειράματα τύχης και πιθανότητες συγκροτείται από δύο υποενότητες: δειγματικοί χώροι και πιθανότητες ενδεχομένων.

Από το **Δημοτικό** τα παιδιά, σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών, όσο αφορά τους **δειγματικούς χώρους** περιγράφουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ενός ή δύο σταδίων (π.χ. η ρίψη ενός συνηθισμένου κέρματος, η τυχαία επιλογή από ένα κουτί με 3 κόκκινες και 2 πράσινες μπάλες, δύο μπαλών τη μία μετά την άλλη και η καταγραφή του χρώματός τους). Στο **Γυμνάσιο** η υποενότητα «δειγματικοί χώροι» ξεκινά με την αναπαράσταση των δυνατών εκβάσεων ενός πειράματος τύχης που μπορεί να εξελίσσεται σε στάδια. Οι δυνατές εκβάσεις μπορούν να αναπαρασταθούν ως διαγράμματα Venn για απλά πειράματα, ως πίνακες διπλής εισόδου για πειράματα δύο σταδίων και ως δένροδιαγράμματα για πειράματα περισσότερων σταδίων. Οι μαθητές αναγνωρίζουν σε αυτές τις αναπαραστάσεις εκβάσεις που περιγράφονται σε φυσική γλώσσα και αντίστροφα. Εισάγεται η έννοια των ασυμβίβαστων ενδεχομένων. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη βασική αρχή απαρίθμησης για να μετρήσουν, χωρίς να απαριθμήσουν, τις δυνατές εκβάσεις ενός πειράματος τύχης ή γενικότερα τα στοιχεία ενός συνόλου.

Στο **Λύκειο** οι μαθητές αναγνωρίζουν δειγματικούς χώρους ως σύνολα και χρησιμοποιούν συνδυαστικές μεθόδους υπολογισμού του πλήθους των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου, όταν αυτό είναι αναγκαίο.

Όσο αφορά την υποεπινότητα «πιθανότητες ενδεχομένων», από το Δημοτικό οι μαθητές υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα, την αναπαριστούν σε κλίμακα από 0 έως 1 και τη συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης. Το Γυμνάσιο ξεκινά με τον υπολογισμό πιθανοτήτων ενδεχομένων με τον κλασικό ορισμό, για πειράματα τύχης με ισοπίθανες εκβάσεις. Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι μαθητές χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό ήδη από το Δημοτικό για απλά πειράματα τύχης ή πειράματα δύο σταδίων και τώρα επεκτείνουν την εφαρμογή του σε πειράματα που μπορεί να εξελίσσονται σε περισσότερα στάδια. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο και τη βασική αρχή απαρίθμησης για να υπολογίσουν πιθανότητες ενδεχομένων χωρίς απαρίθμηση των εκβάσεων. Στη Γ' Γυμνασίου οι μαθητές, αξιοποιώντας ψηφιακά εργαλεία για να κάνουν προσομοιώσεις, επαναλαμβάνουν πειράματα τύχης και αναγνωρίζουν ότι καθώς το πλήθος των επαναλήψεων γίνεται πολύ μεγάλο, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου πλησιάζει την πιθανότητά του (νόμος των μεγάλων αριθμών). Στο Λύκειο οι μαθητές περιγράφουν πειράματα τύχης με μη ισοπίθανα ενδεχόμενα και χρησιμοποιούν τον γενικό-αξιωματικό ορισμό (αφού αναγνωρίσουν τις συνδέσεις του με τον κλασικό ορισμό) και συνδυαστικές μεθόδους για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις και να αντιμετωπίσουν μαθηματικές προκλήσεις.

Θεματική ενότητα: Συσχέτιση

Η ενότητα **συσχέτιση** ξεκινά στη Γ' Γυμνασίου με τη διερεύνηση της ανεξαρτησίας ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων. Ωστόσο η θεματική ενότητα αυτή αναπτύσσεται κυρίως στο Λύκειο με την εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes, που θα αξιοποιήσουν και θα νοηματοδοτήσουν οι μαθητές μέσα από την επίλυση πραγματικών προβλημάτων (π.χ. ο υπολογισμός της πιθανότητας το αποτέλεσμα ενός τεστ στο οποίο υποβάλλεται ένα άτομο για μια ασθένεια να είναι ψευδώς αρνητικό, δηλαδή το άτομο να ασθενεί, ενώ το αποτέλεσμα του τεστ δείχνει το αντίθετο).

3. Ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και δυσκολίες των μαθητών

Η βασική έννοια που είναι συνυφασμένη με τα Στοχαστικά Μαθηματικά είναι αυτή της **μεταβλητότητας**. Η προσέγγιση της μεταβλητότητας από μαθητές έχει μελετηθεί εκτενώς στα πλαίσια της έρευνας στη Μαθηματική Εκπαίδευση (Watson, 2006, Reading & Reid, 2007). Η ανάδειξη της μεταβλητότητας είναι σημαντική για την ανάπτυξη του **στατιστικού συλλογισμού**, δηλαδή του συλλογισμού που χρησιμοποιεί ιδέες από τη Στατιστική, σχετικές πληροφορίες και στατιστικά διαγράμματα (Wild & Pfannkuch, 1999, Garfield, 2002). Ωστόσο, διαφορετικοί συλλογισμοί μπορούν να προκληθούν ανάλογα με το περιεχόμενο των έργων (Reading & Reid, 2007), με τα διαθέσιμα εργαλεία, π.χ. διαγράμματα, που έχουν τα παιδιά στην διάθεσή τους (Pfannkuch, 2005), και με τον βαθμό στον οποίο αναδεικνύεται από τον εκπαιδευτικό η μεταβλητότητα (Watson, 2006). Ατυχώς, συχνά αυτή υπονοείται και δεν δίνεται η ευκαιρία στην τάξη (χρόνος και κατάλληλα έργα για την προσεγγίσουν οι μαθητές διερευνητικά), είτε επειδή κυριαρχεί,

ενδεχομένως παραπλανητικά, η αντίληψη ότι είναι προφανής, όπως στην μεταβλητότητα που εμφανίζεται στα μεγέθη παπουτσιών, είτε επειδή εκλαμβάνεται ως εύκολη να την συλλάβει κανείς (π.χ. στα αποτελέσματα από το στρίψιμο ενός νομίσματος).

Ενώ οι υπόλοιποι κλάδοι των Μαθηματικών αναζητούν και μελετούν μοτίβα, στα Στοχαστικά Μαθηματικά τα μοτίβα είτε απουσιάζουν είτε είναι πολύ δύσκολο να ανακαλυφθούν. Επιπλέον, ο ανθρώπινος νους αναζητά τα μοτίβα και δυσκολεύεται να αναπτύξει σωστά τη διαίσθησή του για την τυχαιότητα. Αυτό, σε επίπεδο επιστημολογίας των Στοχαστικών Μαθηματικών, καταδεικνύεται και από τα πολλά απλά πιθανοθεωρητικά παράδοξα, όπως π.χ. το πρόβλημα των γενεθλίων και το πρόβλημα του Monty Hall. Όπως έχει φανεί από εμπειρικές έρευνες (Watson, 2006) ο τρόπος συλλογισμού που χρησιμοποιούν τα παιδιά για να απαντήσουν σε ερωτήματα που χρειάζονται στοχαστική επιχειρηματολογία, αλλάζει και αναπτύσσεται. Τα επιχειρήματά τους μπορεί αρχικά να βασίζονται στην υποκειμενικότητα, στη συνέχεια να αναζητούν κανονικότητες και μοτίβα και στη συνέχεια να χρησιμοποιούν στοχαστικά επιχειρήματα τα οποία δεν "εγκλωβίζονται" στην αναζήτηση κανονικότητας και αιτιοκρατικών σχέσεων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας στη διδακτική των Στοχαστικών Μαθηματικών δεν είναι τόσο πυκνά όσο σε κλάδους που αποτελούσαν μέρος των σχολικών Μαθηματικών σε μεγαλύτερη έκταση και σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου. Έχει φανεί, από έρευνες στην τάξη -όχι στην Ελλάδα- ότι η δυνατότητα χρήσης προσομοιώσεων, ψηφιακών εργαλείων (Pratt, 2005) και εκτέλεσης μεγάλου πλήθους δοκιμών υποστηρίζει τη δημιουργία νοημάτων από τα παιδιά για τις έννοιες των Στοχαστικών Μαθηματικών. Θα ήταν επομένως χρήσιμο για τη σωστή ανάπτυξη του στατιστικού συλλογισμού να εισαχθούν στην σχολική τάξη εργαλεία όπως οι προσομοιώσεις και τα μεγάλα σύνολα δεδομένων. Στον αντίποδα αυτών των δυσκολιών, τα Στοχαστικά Μαθηματικά αποτελούν μια περιοχή η οποία δεν χρησιμοποιεί δύσκολο φορμαλισμό στο επίπεδο του σχολείου. Έτσι, μπορεί να είναι ένα αρκετά συμπεριληπτικό κομμάτι των σχολικών Μαθηματικών που

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει ομοφωνία (Bargagliotti et al., 2020' Franklin et al., 2007) στο ότι η ένασχολση με τα Στοχαστικά Μαθηματικά από τις πολύ μικρές σχολικές τάξεις βοηθάει στη συμφιλίωση με τη μεταβλητότητα και στην ανάπτυξη ενός σωστού ποιοτικά και ποσοτικά τρόπου σκέψης για την τυχαιότητα. Επειδή τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του Προγράμματος Σπουδών είναι εξελισσόμενα, είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ποια Στοχαστικά Μαθηματικά μελέτησαν οι μαθητές στο Δημοτικό.

3.1. Στατιστική

Παρακάτω επισημαίνονται κρίσιμα σημεία για το διδακτικό σχεδιασμό σε σχέση με το περιεχόμενο της Στατιστικής του Γυμνασίου, ανά θεματική ενότητα.

Θεματική Ενότητα: Διαχείριση δεδομένων.

- **Α΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να είναι σε θέση να διακρίνουν διαφορετικούς τύπους δεδομένων (κατηγορικά, διακριτά ή συνεχή ποσοτικά) που έχουν προκύψει από **απογραφή** σε έναν **πληθυσμό**.
- **Α΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να αντιλαμβάνονται σε ένα κυκλικό διάγραμμα τι ακριβώς εκφράζουν οι κυκλικοί τομείς.
- **Α΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να επιλέγουν πληροφορίες από διαφορετικές αναπαραστάσεις ποσοτικών δεδομένων και να καταλήγουν σε αρχικά συμπεράσματα. Έμφαση θα πρέπει να δοθεί όχι στον τρόπο κατασκευής ενός διαγράμματος (ο οποίος μπορεί να γίνει με χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου ή λογισμικού), αλλά στην ανάλυση τους. Τι πληροφορίες αντλούμε από ένα διάγραμμα; Τι πληροφορία μας δίνει το διάγραμμα σχετικά με τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας των δεδομένων; Υπάρχουν απόμακρες τιμές; Υπάρχουν πολλαπλές κορυφές; Παρατηρούμε συμμετρία στα δεδομένα; Ποια άλλα διαγράμματα θα μας βοηθούσαν να αντλήσουμε επιπλέον πληροφορίες; Για την ανάγνωση και/ή την ερμηνεία των διάφορων γραφημάτων που χρησιμοποιούνται στην στατιστική θα πρέπει οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τι ακριβώς απεικονίζεται σε κάθε διάγραμμα και τι εκφράζουν οι δύο άξονες. Σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων λόγου χάρη, τα ποσοτικά δεδομένα έχουν χωριστεί σε κλάσεις, και τα ύψη των ράβδων απεικονίζουν τις συχνότητες των κλάσεων. Γιατί επιλέγονται αυτές οι κλάσεις; Τι πληροφορία θα χάναμε αν είχαμε πολύ μεγάλο πλήθος κλάσεων ή πολύ μικρό; Πως έχουν κατασκευαστεί οι κλάσεις, π.χ. το αριστερό (αντίστοιχα δεξιό) άκρο του διαστήματος περιλαμβάνεται σε κάθε κλάση; Είναι σημαντικό εδώ να κατανοήσουν πως οι κλάσεις δεν πρέπει να έχουν αλληλοκαλύψεις.
- **Β΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να αρχίσουν να αναπτύσσουν μία κριτική στάση απέναντι σε παραπλανητικές ή εσφαλμένες παρουσιάσεις δεδομένων. Π.χ. πως αλλάζει η εικόνα ενός διαγράμματος αν μεταβληθεί η κλίμακά του. Είναι σημαντικό τα διαγράμματα που κατασκευάζονται να έχουν τίτλους στους άξονες και λεζάντες αν αυτό κρίνεται απαραίτητο. Επιπλέον με την βοήθεια ενός τίτλου να δίνεται μια περιγραφή της αναπαράστασης. Τέλος ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουν να επιλέγουν κατάλληλες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα θα δημιουργούσατε ένα ιστόγραμμα για κατηγορικά δεδομένα;
- **Γ΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος και να την αξιολογήσουν.
- **Γ΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να αναγνωρίζουν τη δυνατότητα επαγωγικής εξαγωγής συμπερασμάτων για ένα πληθυσμό από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα, με τη βοήθεια προσομοιώσεων.
- **Γ΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να αναγνωρίζουν τη **μεταβλητότητα** στατιστικών δεικτών μεταξύ δειγμάτων, με τη βοήθεια προσομοιώσεων.

- **Γ΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να χρησιμοποιούν (αντιπροσωπευτικά) δεδομένα που έχουν αρκετά μεγάλο μέγεθος, ώστε να καλύπτουν όλες τις «πτυχές» του υπό μελέτη πληθυσμού. Τα μικρά σετ δεδομένων εύκολα μπορεί να καταλήξουν σε μη έγκυρα συμπεράσματα, λόγω μεγάλης μεταβλητότητας που διέπει τους στατιστικούς δείκτες.
- **Α΄ - Γ΄ Γυμνασίου:** Είναι σημαντικό οι μαθητές σε όλες τις τάξεις να χρησιμοποιούν και πραγματικά δεδομένα, από διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Τα δεδομένα αυτά μπορεί να τα έχουν συλλέξει οι ίδιοι με δικές τους στατιστικές έρευνες, πειράματα κ.λ.π. ή να προέρχονται από άλλες πηγές όπως οι στατιστικές υπηρεσίες, το διαδίκτυο, ή έρευνες που έχουν κάνει άλλοι. Η συλλογή δεδομένων θα επιτρέψει στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά με διαδικασίες της στατιστικής, ενώ παράλληλα θα αναδυθούν θέματα που σχετίζονται με έννοιές της καθώς και σε ορισμένες περιπτώσεις με έννοιες από άλλες μαθηματικές περιοχές. Η συλλογή δεδομένων δεν είναι απαραίτητο να γίνεται μόνο κατά τη διάρκεια διδασκαλίας της ενότητας αλλά μπορεί να γίνει με αφορμή κάποια άλλη δραστηριότητα. Κάτι τέτοιο θα επιτρέψει στον διδάσκοντα να διαχειριστεί καλύτερα τον διδακτικό χρόνο ή να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις με άλλες μαθηματικές έννοιες ή δεσμούς με άλλα αντικείμενα όπως η Φυσική. Τα δεδομένα που συλλέγουν οι μαθητές μια χρονιά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και κάποια επόμενη (αρκεί να τα έχει φυλάξει ο καθηγητής) μαζί με νέα, για να αποτελέσουν π.χ. αντικείμενο συγκρίσεων ή ανάπτυξης νέων εννοιών. Τέλος, είναι σημαντικό τα δεδομένα που συλλέγονται να είναι ρεαλιστικά, ώστε να καταλήγουν συμπεράσματα με πρακτική σημασία.

Θεματική Ενότητα: Μέτρα θέσης-μεταβλητότητα.

- **Α΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να είναι σε θέση να περιγράφουν χαρακτηριστικά των ποσοτικών δεδομένων από ιστογράμματα χρησιμοποιώντας εκφράσεις όπως: **εύρος, ύπαρξη πολλαπλών κορυφών, απόμακρες τιμές**. Επιπλέον να ερμηνεύουν χαρακτηριστικά των δεδομένων (όπως **λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών**) ή πιθανούς **λόγους για την μεταβλητότητα** των δεδομένων.
- **Β΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές να είναι σε θέση να διερευνήσουν ιδιότητες της μέσης τιμής, όπως την μεταβολή της όταν προστίθενται – πολλαπλασιάζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο αριθμό, ενώ παράλληλα θα αρχίσουν να εξετάζουν κριτικά στατιστικές έρευνες και τις ερμηνείες τους.
- **Β΄ Γυμνασίου:** Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη διαφορά μεταξύ της διαμέσου και της μέσης τιμής. Από την ύπαρξη ή μη συμμετρίας σε ένα ιστόγραμμα προσδιορίζουν αν αυτά τα δύο μέτρα είναι περίπου ίσα και αν όχι ποιο είναι μεγαλύτερο και γιατί. Επίσης αντιλαμβάνονται πώς οι απόμακρες τιμές επηρεάζουν αυτά τα δύο μέτρα, και ποιο πρέπει να επιλέγουμε και γιατί όταν υπάρχουν απόμακρες τιμές στα δεδομένα.

3.2. Πιθανότητες

Οι μαθητές γνωρίζουν ήδη από το Δημοτικό να υπολογίζουν πιθανότητες σε πειράματα τύχης με ισοπίθανες εκβάσεις ως κλάσματα χρησιμοποιώντας τον κλασικό ορισμό. Έχουν επίσης μελετήσει πειράματα τύχης που εξελίσσονται σε 2 στάδια και έχουν δοκιμάσει να επαναλάβουν ένα πείραμα τύχης και να συγκρίνουν τη σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου με την πιθανότητά του.

Η σύγχυση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με τη σχετική συχνότητα εμφάνισής του είναι μια συνηθισμένη δυσκολία που χρειάζεται να δουλευτεί μέσα από παραδείγματα γιατί θα εξοικειώσει τους/τις μαθητές με την έννοια της μεταβλητότητας. Για παράδειγμα, όταν η πιθανότητα επιτυχίας είναι $p=1/6$, είναι συνηθισμένο σφάλμα να απαντά κανείς ότι σε 6 επαναλήψεις του πειράματος θα έχει 1 επιτυχία, σε 12 επαναλήψεις 2, κ.λπ. ενώ στην πραγματικότητα υπάρχει μεταβλητότητα στο πλήθος των επιτυχιών. Είναι χρήσιμο να ζητηθεί από όλους/-ες τους/τις μαθητές μιας τάξης να κάνουν ένα τέτοιο πείραμα και στη συνέχεια κάθε μαθητής να αναφέρει το αποτέλεσμα του στην τάξη ενώ ο καθηγητής θα σημειώνει τη συχνότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος. Έτσι οι μαθητές θα συνειδητοποιήσουν ότι το πλήθος των επιτυχιών σε 12 επαναλήψεις μεταβάλλεται από μαθητή σε μαθητή, παρά το ότι η πιθανότητα επιτυχίας είναι η ίδια για όλους. Μερικά ακόμα επιχειρήματα για να ξεκαθαρίσουν οι μαθητές τη διαφορά ανάμεσα σε πιθανότητα και σχετική συχνότητα είναι ότι αν στρίψουμε ένα συνηθισμένο κέρμα, το οποίο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $p=1/2$, περιττό αριθμό φορές είναι αδύνατον να φέρουμε κεφαλή ακριβώς τις μισές φορές.

Πειράματα όπως το προηγούμενο μπορούν να γίνουν με το ψηφιακό εργαλείο *spinner* (Polaki, 2005; Pratt 2005), το οποίο δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να κάνουν υποθέσεις, να παίξουν το παιχνίδι, να το αναλύσουν, να θέσουν δικά τους ερωτήματα και να εμπλουτίσουν την νοητική εικόνα που έχουν για έννοιες όπως η μεταβλητότητα. Η χρήση του *spinner* ή άλλων ψηφιακών εργαλείων (Pratt & Noss, 2002), με εργασία σε μικρές ομάδες και ατομική εμπλοκή των μαθητών, συνιστάται πολύ ισχυρά. Στη Γ' Γυμνασίου τα ψηφιακά εργαλεία χρησιμοποιούνται με καθοριστικό τρόπο ώστε οι μαθητές να εξερευνήσουν πειραματικά τον νόμο των μεγάλων αριθμών, προσομοιώνοντας την επανάληψη ενός πειράματος τύχης πολλές φορές. Επειδή είναι φυσικό οι μαθητές να μην έχουν αρχικά εμπιστοσύνη σε συγκεντρωτικά αποτελέσματα που δίνει το εργαλείο για πολλές προσομοιώσεις, είναι καλό η χρήση του να αρχίσει ήδη από την Α' Γυμνασίου με την εκτέλεση μικρού αριθμού προσομοιώσεων, μία προς μία, ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν με τον μηχανισμό της προσομοίωσης.

Φυσικά, η σχετική συχνότητα έχει σχέση με την πιθανότητα. Ένα χρήσιμο πείραμα που θα μπορούσε να γίνει ήδη στην Α' Γυμνασίου θα ήταν οι μαθητές, χωρισμένοι σε μικρές ομάδες, να διαιρέσουν τον δίσκο του *spinner* σε 6 ίσους τομείς και να βάψουν 3 από αυτούς με ένα χρώμα, 2 με ένα άλλο χρώμα και 1 με ένα τρίτο χρώμα, ώστε η πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος να είναι $1/2$, $1/3$ και $1/6$ αντίστοιχα, σε κάθε στρίψιμο. Επαναλαμβάνοντας το στρίψιμο του *spinner* μερικές φορές, οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι: α) η συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος παρουσιάζει

μεταβλητότητα από ομάδα σε ομάδα και β) όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ενός χρώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι και η συχνότητα εμφάνισής του μετά από μερικά στριψίματα και γ) παρά τη μεταβλητότητα από ομάδα σε ομάδα, φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στην πιθανότητα κάθε χρώματος και στη σχετική συχνότητα εμφάνισης του χρώματος. Στη Γ' Γυμνασίου οι μαθητές θα εξερευνήσουν πειραματικά μέσα από προσομοιώσεις τον νόμο των μεγάλων αριθμών και θα δουν ότι καθώς το πλήθος των επαναλήψεων μεγαλώνει, η σχετική συχνότητα κάθε χρώματος τείνει να εξισωθεί με την πιθανότητα εμφάνισης του χρώματος και ότι αυτό συμβαίνει σε όλες τις ομάδες.

Στην Α' Γυμνασίου οι μαθητές μαθαίνουν για πειράματα τύχης πολλών σταδίων και στη Β' Γυμνασίου μαθαίνουν τη βασική αρχή της απαρίθμησης. Αυτές οι γνώσεις μπορούν να συνδυαστούν στη μελέτη του στριψίματος ενός αμερόληπτου κέρματος μερικές φορές. Ένα σημείο που δυσκολεύει συνήθως τους/τις μαθητές είναι ότι αν στρίψουμε ένα αμερόληπτο κέρμα 4 φορές, είναι εξίσου πιθανό να φέρουμε ΚΚΚΚ, ΚΚΓΓ και ΚΓΚΓ. Η δεύτερη ακολουθία μπορεί να θεωρηθεί από κάποιους μαθητές πιο πιθανή από την πρώτη επειδή έχει ίσο πλήθος από Κ και Γ και η τρίτη πιο πιθανή από τη δεύτερη επειδή οι κεφαλές και τα γράμματα δεν εμφανίζονται μαζεμένα. Είναι μια άριστη ευκαιρία να εμπλακούν οι μαθητές και να προσπαθήσουν να υποστηρίξουν την άποψή τους. Μια διδακτική προσέγγιση για να πειστούν οι μαθητές ότι όλα αυτά τα αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά είναι να μιλήσει κανείς πρώτα για δύο στριψίματα, να παρουσιάσει τον δειγματικό χώρο ως ένα δέντρο και να επιχειρηματολογήσει λέγοντας ότι είτε στρίψουμε ένα αμερόληπτο κέρμα 2 φορές είτε στρίψουμε 2 διαφορετικά αμερόληπτα κέρματα δεν πρέπει να αλλάζει η πιθανότητα να δούμε μια συγκεκριμένη δυάδα αποτελεσμάτων. Επομένως, από ένα επιχείρημα συμμετρίας καθεμιά από τις δυάδες ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ πρέπει να έχει πιθανότητα $1/4$. Αυτή η θεωρητική προσέγγιση μπορεί να συνδυαστεί με την πειραματική προσέγγιση, βάζοντας τους/τις μαθητές να προσομοιώσουν αρκετές φορές το στρίψιμο ενός κέρματος στο spinner, με τον δίσκο χωρισμένο σε δύο ημικύκλια διαφορετικού χρώματος. Αντίστοιχα, αν στρίψουμε ένα κέρμα 3 φορές, καθεμιά από τις 2^3 δυνατές τριάδες αποτελεσμάτων έχει πιθανότητα $1/8$ κ.ο.κ.

Στη Γ' Γυμνασίου οι μαθητές θα πρέπει να εξερευνήσουν τον νόμο των μεγάλων αριθμών μέσα από πολλά παραδείγματα. Το απλούστερο είναι το στρίψιμο ενός αμερόληπτου κέρματος πολλές φορές. Αυτό είναι καλό να γίνει τόσο πειραματικά, βάζοντας τους/τις μαθητές να στρίψουν 10-20 φορές ο καθένας ένα κέρμα και συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα όλων των μαθητών είτε προσομοιώνοντας το στρίψιμο ενός κέρματος. Είναι επίσης χρήσιμο οι μαθητές να χωριστούν σε μικρές ομάδες, κάθε ομάδα να κατασκευάσει τη γραφική παράσταση της σχετικής συχνότητας των κεφαλών ως προς το πλήθος των στριψιμάτων με τη βοήθεια ψηφιακών εργαλείων, φτάνοντας σε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό στριψιμάτων, ώστε η σχετική συχνότητα να έχει πλησιάσει αρκετά την πιθανότητα, και να συγκριθούν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των γραφικών παραστάσεων κάθε ομάδας.

4. Ενδεικτικά έργα και δραστηριότητες

4.1. Στατιστική

Α' Γυμνασίου: Ο χρόνος μελέτης των μαθητών μιας τάξης.

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	Ειδι κά	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης) Μετασχηματιστικέ ς δράσεις (οργάνωση, αναπαράσταση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (ομαδοποίηση) Επίλυση Προβλήματος/ (εξήγηση)	Προτειν όμενα χαρακτη ριστικά της διδασκ τικής προσέγγ ισης	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Ενότητα	Στατιστική				
Μεγά λες Ιδέες	Μεταβλητότη τα				
Μαθημ ατικές διεργα σίες & πρακτι κές	οπτικοποίηση, δημιουργία συνδέσεων	Γενι κά	Μαθηματική επικοινωνία, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου	Προτειν όμενοι πόροι	-
Κοινων ικο- πολιτισ	Ερμηνεία καταστάσεων στον προσωπικό βίο,				

μικές πρακτι κές	Μαθηματικός γραμματισμός, απόδοση αξιών στους άλλους και στα επιχειρήματά τους, λήψη αποφάσεων με διάλογο	Συγ κείμ ενο	Προσωπικό, κοινωνικό		
---------------------------------	--	-----------------------------	-------------------------	--	--

Το παρακάτω ιστόγραμμα παρουσιάζει τις τιμές του του χρόνου μελέτης των μαθημάτων στο σπίτι, κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας, για τους/τις μαθητές/τριες της Α΄ Γυμνασίου ενός σχολείου. Με τη βοήθεια του ιστογράμματος απαντήστε στα επόμενα ερωτήματα:

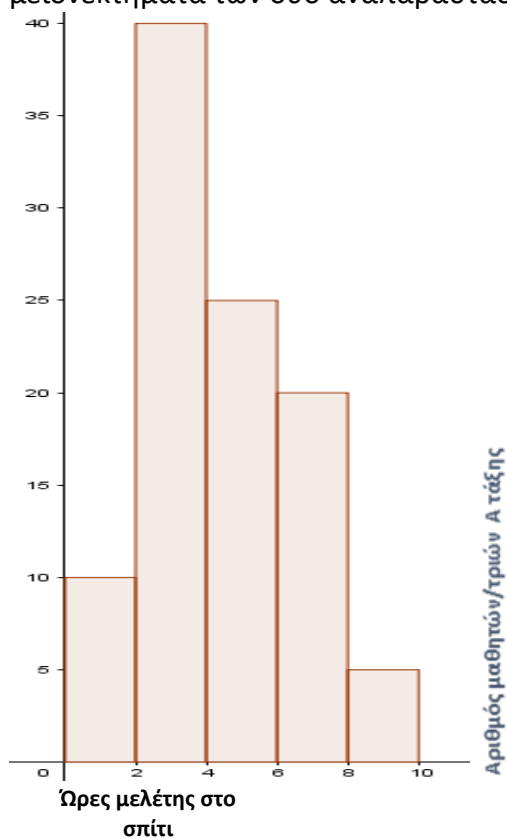
α) Πόσοι είναι οι μαθητές/-τριες της Α΄ τάξης του Γυμνασίου του δείγματος μας;

β) Πόσοι μαθητές/-τριες του δείγματος μας μελετούν στο σπίτι

- τουλάχιστον 4 ώρες την εβδομάδα
- το πολύ 6 ώρες την εβδομάδα.

Στη συνέχεια, να βρείτε και τα αντίστοιχα ποσοστά.

γ) Ποιο άλλο γράφημα θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε για να παρουσιάσετε τις τιμές του χρόνου μελέτης των μαθημάτων στο σπίτι, κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας, για τους/τις μαθητές/-τριες της Α΄ Γυμνασίου; Συζητήστε μεταξύ σας πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των δύο αναπαραστάσεων.



Με το ερώτημα (γ) οι μαθητές/-τριες είναι επιθυμητό να απαντήσουν σε συζήτηση και διαπραγμάτευση η οποία αφορά όλα τα στάδια της επίλυσης στατιστικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, ένα θέμα που μπορούν να συζητήσουν είναι «ποιο είναι το ερώτημα που μας ενδιαφέρει να απαντήσουμε με την παρούσα εργασία των δεδομένων; (διατύπωση στατιστικών ερωτημάτων). Μας ενδιαφέρει η σύγκριση μεταξύ του πλήθους των παιδιών κάθε ομάδας; Ή θέλουμε να γνωρίζουμε, επιπλέον το ακριβές πλήθος, για κάθε ομάδα; Το ερώτημα που χρειάζεται να απαντηθεί από τα δεδομένα είναι ένα κριτήριο για το ποιο γράφημα θα επιλέξουν να χρησιμοποιήσουν (Σ.Δ.7.6). Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων, επίσης, μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή άλλου γραφήματος, από αυτό που υπάρχει: «εφόσον φαίνεται να υπάρχει μια ομάδα με μεγάλο πλήθος, ίσως θα είχε νόημα να φαίνεται με μια ματιά, τι μέρος του δείγματος εκπροσωπεί αυτή η ομάδα». Έτσι, μπορούν να επιλέξουν το κυκλικό διάγραμμα και να προσπαθήσουν να απαντήσουν στα προηγούμενα ερωτήματα του έργου, παρατηρώντας πως με το συγκεκριμένο διάγραμμα δεν δίνεται όλη η πληροφορία που χρειάζονται για την απάντηση των ερωτημάτων που τους έχουν δοθεί. Στόχος είναι να δοθεί στην τάξη η δυνατότητα να συζητήσουν για τις επιλογές τους και να επιχειρηματολογήσουν για αυτές. Η εργασία σε ομάδες είναι ένα ευνοϊκό περιβάλλον για κάτι τέτοιο με τους μαθητές και τις μαθήτριες να δοκιμάζουν γραφήματα και να συζητούν πάνω σε αυτό. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι όχι μόνο να διευκολύνει τη συζήτηση και να συντονίζει την συνεργασία, αλλά σχεδιάζει τη εξέλιξή της, χωρίς να την κατευθύνει: μπορεί να φέρνει στη συζήτηση της ολομέλειας θέματα που συζητούν μικρές ομάδες, τα οποία θα ενισχύσουν την μαθηματική επικοινωνία στην παραπάνω κατεύθυνση, π.χ. μια πιθανή διαφωνία μεταξύ της χρήσης κυκλικού ή άλλου διαγράμματος.

Β' Γυμνασίου: Μεταβολές του πληθυσμού μιας χώρας.

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ	
(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		(Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	Ειδικά	Βασικές δράσεις (δήλωση γεγονότων/διαπιστώσεων)	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας προσέγγισης	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε
Ενότητα	Στατιστική		Μετασχηματιστικές δράσεις		

Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή /Μεταβλητότητα		(οπτικοποίηση, αναπαράσταση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Μεταβολή, Σύγκριση) Επίλυση Προβλήματος/ μοντελοποίηση, εφαρμογή (εξήγηση)		όλους)
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	μαθηματική επικοινωνία, οπτικοποίηση	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτεότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου, μαθηματικά ως ανθρώπινη αξία	Προτεινόμενοι πόροι	Ψηφιακά εργαλεία (διαδίκτυο) Επιστημονικές εκθέσεις ΕΛ.ΣΤΑΤ.
Κοινωνικο - πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερα κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, απόδοση αξιών στους άλλους και στα επιχειρήματά τους, λήψη αποφάσεων με διάλογο	Συγκείμενο	Κοινωνικό		

Στο χρονόγραμμα που δίνεται παρακάτω φαίνεται ο αριθμός γεννήσεων και θανάτων στη χώρα μας από το 1932 έως και το 2016 (Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ: [Στατιστικές/Γεννήσεις/2016/Φυσική Κίνηση πληθυσμού 2016](#)).

α) Ποια χρονιά ο αριθμός των θανάτων ξεπερνά για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων στη χώρα μας;

β) Ποια χρονιά είχαμε τη μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού;

γ) Τι παρατηρείτε την περίοδο 2005 – 2010 και τι συμβαίνει μετά το 2010;

δ) Συζητήστε, μεταξύ σας, πιθανές αιτίες στις οποίες οφείλονται οι απαντήσεις που δώσατε στα προηγούμενα ερωτήματα. Αναζητήστε στην ιστοσελίδα της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛ.ΣΤΑΤ.) την έκθεση που αφορά στη φυσική κίνηση του πληθυσμού για το 2019 ([Στατιστικές/Γεννήσεις/2019/Φυσική Κίνηση πληθυσμού 2019](#)) και παρουσιάστε στο τμήμα σας την εξέλιξη του πληθυσμού από το 2016 μέχρι και το 2019.

Διδακτική διαχείριση: Σκοπός των ερωτημάτων (α), (β) και (γ) είναι η εξοικείωση των μαθητών/τριών με το χρονόγραμμα. Πιο συγκεκριμένα από το διάγραμμα που δίνεται οι μαθητές/τριες χρειάζεται να αντιληφθούν τι εκφράζουν οι δύο άξονες καθώς και οι δύο (διαφορετικού χρώματος) αναπαραστάσεις. Η συνεργασία των παιδιών σε μικρές και ομάδες, αρχικές ή κατά διαστήματα και η συζήτηση – στη συνέχεια – στην ολομέλεια είναι μια στρατηγική που μπορεί να δώσει την ευκαιρία να συζητηθούν αυθόρμητες ερμηνείες τους, για το γράφημα. Ερμηνείες που οδηγούν σε λανθασμένα ή «αφύσικα» συμπεράσματα σχετικά με την αύξηση γεννήσεων ή θανάτων είναι αφορμή για να διακρίνουν οι τα παιδιά τι είδους πληροφορίες μπορούν να συλλέξουν από το χρονόγραμμα. Στο ερώτημα (δ) οι μαθητές/τριες θα συζητήσουν τις πιθανές αιτίες στις οποίες οφείλονται οι απαντήσεις που δώσανε στα προηγούμενα ερωτήματα, ψάχνοντας στο διαδίκτυο. Με τον τρόπο αυτό θα τεκμηριώσουν τις απαντήσεις που έδωσαν. Εδώ, θα διερευνήσουν ποια ερωτήματα μπορούν να απαντήσουν με τα απογραφικά χρονικά δεδομένα που έχουν και για τι είδους πληροφορίες μπορούν να αντλήσουν, ώστε να οδηγηθούν στη διατύπωση νέων ερωτημάτων, τα οποία μπορούν είτε να απαντηθούν με νέα στατιστική έρευνα, είτε με άλλου είδους μελέτη: π.χ. «αν και υπάρχει μια συνολική μείωση των γεννήσεων, αυτές μειώνονται περισσότερο σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους. Πού μπορεί να οφείλεται αυτό;». Με αυτό τον τρόπο αναγνωρίζουν τα όρια ερμηνείας των στατιστικών δεδομένων που έχουν στη διάθεσή τους, ή εκείνων που μπορούν να συλλέξουν.

Β' Γυμνασίου: Η μεταβολή της θερμοκρασίας σε τρεις περιοχές την ίδια ημέρα.

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
<i>Πεδίο</i>	Στοχαστικά Μαθηματικά	<i>Ειδικά</i>	Βασικές δράσεις (δήλωση γεγονότων/διαπιστώσεων)	<i>Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας προσέγγισης</i>	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
<i>Ενότητα</i>	Στατιστική		Μετασχηματιστικές δράσεις (οπτικοποίηση, αναπαράσταση)		
<i>Μεγάλες Ιδέες</i>	Μεταβολή /μεταβλητή ότητα		Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (Μεταβολή, Σύγκριση) Επίλυση Προβλήματος/ μοντελοποίηση, εφαρμογή (εξήγηση)		

Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	μαθηματική επικοινωνία, οπτικοποίηση	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτεότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου, μαθηματικά ως ανθρώπινη αξία.	Προτεινόμενοι πόροι	Ψηφιακά εργαλεία για την κατασκευή θηκογραμμάτων https://www.geogebra.org/m/a239bfnt Υπολογιστικά φύλλα.
Κοινωνικό - πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον ευρύτερο κοινωνικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, απόδοση αξιών στους άλλους και στα επιχειρήματά τους, λήψη αποφάσεων με διάλογο		Συγκείμενο Επιστημονικό, κοινωνικό.		

Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται μετρήσεις της θερμοκρασίας σε τρεις περιοχές, Α, Β και Γ, για το ίδιο εικοσιτετράωρο. Σε κάθε περιοχή έγιναν 17 μετρήσεις της θερμοκρασίας, μία μέτρηση ανά 1,5 ώρα περίπου.

Περιοχή	Μέτρηση θερμοκρασίας σε κάθε πόλη Μία μέτρηση περίπου κάθε 1,5 ώρα																
A	-2	-1	0	0	0	3	7	8	9	10	10	11	12	13	-5	-4	-3
B	2	2	2	2	2	3	5	6	6	7	7	7	7	13	-5	1	1
Γ	2	2	2	2	2	3	5	6	6	7	7	7	7	8	0	1	1

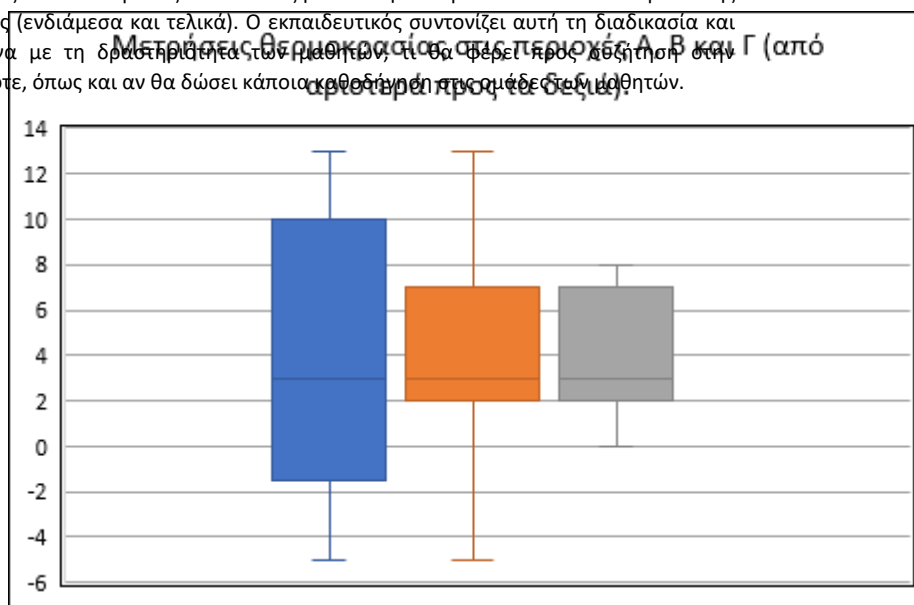
α) Ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας από τα παραπάνω δεδομένα; (π.χ. σε ποια περιοχή καταγράφηκε η υψηλότερη και η χαμηλότερη θερμοκρασία);

β) Μπορείτε να απαντήσετε στο ερώτημα: «Ποια περιοχή είναι πιο ζεστή»;

γ) Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή [Απλό Θηκόγραμμα – GeoGebra](#) να κατασκευάσετε τα απλά θηκογράμματα για τις θερμοκρασίες κάθε περιοχής. Τι παρατηρείτε;

δ) Να διατυπώσετε πιθανούς λόγους για τις παρατηρήσεις σας (ένα αλάνθρα απλό έχει πιαστεί ως εργαλείο για τη στατιστική ανάλυση ανάμεσα σε άλλα από τους μαθητές στο α). Είναι χρήσιμο να συζητηθεί στην τάξη για το πώς το ερώτημα που διατυπώνεται στο β) μπορεί να απαντηθεί από τον πίνακα των καταγεγραμμένων θερμοκρασιών. Με αυτό τον τρόπο θα προκληθεί συζήτηση γύρω από τα στάδια της στατιστικής επίλυσης προβλήματος, δηλαδή τη διατύπωση ερωτημάτων, τη συλλογή δεδομένων αλλά και για το πώς θα γίνει η ανάλυση των δεδομένων, ώστε να απαντηθεί κατά το δυνατόν «ποια περιοχή είναι πιο ζεστή;». Μπορούμε να αξιοποιήσουμε τη μέση θερμοκρασία κάθε περιοχής

για να απαντήσουμε; Μετά τον σχεδιασμό των θηκογραμμάτων στο γ) οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τις διαφορές στα θηκογράμματα και να τις ερμηνεύσουν στο πλαίσιο του έργου: Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της θερμοκρασίας σε κάθε περιοχή, βάσει των δεδομένων; Σε ποια περιοχή η θερμοκρασία παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα; Η μεταβλητότητα αυτή αντιστοιχεί σε πιο υψηλές θερμοκρασίες σε σύγκριση με τη μέση θερμοκρασία κάθε περιοχής; Για την κατασκευή των θηκογραμμάτων και τη διερεύνηση των ερωτημάτων είναι χρήσιμο οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες και να συζητούν στην ολομέλεια τα αποτελέσματα της διερεύνησής τους (ενδιάμεσα και τελικά). Ο εκπαιδευτικός συντονίζει αυτή τη διαδικασία και επιλέγει, ανάλογα με τη δραστηριότητα των μαθητών, τι θα φέρει προς διείκτιση στην ολομέλεια και τότε, όπως και αν θα δώσει κάποια καθοδήγηση στις ομάδες των μαθητών.



Σχήμα 8: Τα θηκογράμματα του έργου «Η μεταβολή της θερμοκρασίας σε τρεις περιοχές την ίδια ημέρα».

Γ' Γυμνασίου: Η πιο σωστή δημοσκόπηση

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	Ειδικά	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)	Προτεινόμενα α χαρακτηριστικά κά της διδασκαλίας	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε
Ενότητα	Στατιστική		Μετασχηματιστική		

Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή/ μεταβλητό- τητα		ές δράσεις (οργάνωση, αναπαράσταση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (ομαδοποίηση) Επίλυση Προβλήματος/ (εξήγηση)	προσέγγισης	όλους)
Μαθηματι- κές διεργασίες & πρακτικές	οπτικοποίη- ση, δημιουργία συνδέσεων	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία, μαθηματικά ως μέρος της πολιτείας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου	Προτεινόμε- νοι πόροι	-
Κοινωνικο- πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον προσωπικό βίο, Μαθηματικός γραμματισμός, απόδοση αξιών στους άλλους και στα επιχειρήματά τους, λήψη αποφάσεων με διάλογο	Συγκεκριμέ- νο	Προσωπικό, κοινωνικό		

Σε μια φανταστική χώρα «Ζεντ» έγινε μια δημοσκόπηση, για να εκτιμηθεί το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου στις επόμενες εκλογές. Τρεις εκδότες εφημερίδων έκαναν ξεχωριστές εθνικές δημοσκοπήσεις. Τα αποτελέσματα για τις τρεις δημοσκοπήσεις των εφημερίδων είναι τα εξής:

- Εφημερίδα 1: 36,5% (η δημοσκόπηση έγινε στις 06 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 2000 αναγνωστών της εφημερίδας)
- Εφημερίδα 2: 41% (η δημοσκόπηση έγινε στις 20 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 1000 πολιτών με δικαίωμα ψήφου)
- Εφημερίδα 3: 39% (η δημοσκόπηση έγινε στις 06 Ιανουαρίου, σε ένα τυχαίο δείγμα 1000 πολιτών με δικαίωμα ψήφου)

Ποιας εφημερίδας τα αποτελέσματα θεωρείτε πιο έγκυρη εκτίμηση για το ποσοστό υποστήριξης του Προέδρου, εάν οι εκλογές γίνουν στις 25 Ιανουαρίου; Να γράψετε δύο επιχειρήματα για να υποστηρίξετε την απάντησή σας. (PISA, 2012)

Διδακτική διαχείριση: Σκοπός του παρόντος έργου είναι οι μαθητές/-τριες να μπορούν να αξιολογήσουν την αντιπροσωπευτικότητα ή μη ενός δείγματος. Στην εφημερίδα 1 η

δημοσκόπηση γίνεται αποκλειστικά σε αναγνώστες της, με αποτέλεσμα να υπάρχει πιθανό **συστηματικό σφάλμα επιλογής**. Στις άλλες δύο δημοσκοπήσεις, έχει χρησιμοποιηθεί απλή τυχαία δειγματοληψία, από τον πληθυσμό ενδιαφέροντος, με το δείγμα όμως στη δεύτερη εφημερίδα να είναι αντιπροσωπευτικότερο μιας και η μελέτη είναι μεταγενέστερη. Στόχος είναι η μαθηματική δραστηριότητα που θα προκληθεί στην τάξη να οδηγήσει στην συζήτηση των παραπάνω, μέσα από αυθόρμητες αντιλήψεις των παιδιών. Συνεπώς είναι σκόπιμο να έχουν το χρόνο να συζητήσουν για το «ποια εκτίμηση θεωρούν εγκυρότερη», ακόμα και με αυθόρμητη γλώσσα, χωρίς αναγκαστικά να χρησιμοποιούν – αρχικά – επιχειρήματα που έχουν αναφορές σε έννοιες Στατιστικής. Αυτή η συζήτηση μπορεί να γίνει σε μικρότερες ομάδες και στην ολομέλεια. Ο εκπαιδευτικός, αντλώντας στοιχεία από αυτή τη συζήτηση κατά την εξέλιξή της είναι σκόπιμο να φέρει στη συζήτηση την «αντιπροσωπευτικότητα» του δείγματος, εκμεταλλευόμενος τις αυθόρμητες αντιλήψεις των παιδιών. Δηλαδή, η ανάγκη να μιλήσουμε για αντιπροσωπευτικότητα θα προκύψει ως συμπέρασμα της συζήτησης στην τάξη. Έτσι, ενισχύεται η αντίληψη ότι πρόκειται για μια έννοια, αναγκαία στην πράξη, ώστε η ερμηνεία των αποτελεσμάτων να μην είναι παραπλανητική. Συνεπώς χρειάζεται να λαμβάνεται υπόψη κατά τη συλλογή των δεδομένων.

4.2. Πιθανότητες

Α' Γυμνασίου: Κλήρωση αριθμών.

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	Ειδικά	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης)	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Ενότητα	Πιθανότητες		Μετασχηματιστικές δράσεις (συστηματοποίηση)		
Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή/μεταβλητότητα		Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (σύγκριση, δομή) Επίλυση		

			Προβλήματος / (υπόθεση, τεκμηρίωση)		
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμός/επιχειρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία	Προτεινόμενοι πόροι	-
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων στον κοινωνικό βίο, μαθηματικός γραμματισμός	Συγκεκριμένο	Προσωπικό-κοινωνικό		

Τρεις κληρωτίδες Α, Β και Γ περιέχουν η καθεμία τα δεκαδικά ψηφία 0,1,2,...,9. Από κάθε κληρωτίδα επιλέγουμε ένα ψηφίο και σχηματίζουμε έναν ακέραιο από το 0 έως το 999. Π.χ. αν η κληρωτίδα Α δώσει 3, η κληρωτίδα Β δώσει 7 και η κληρωτίδα Γ δώσει 0, ο αριθμός που σχηματίζουμε είναι ο 370.

α) Έχουν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από το 0 έως το 999 την ίδια πιθανότητα να σχηματιστούν;

β) Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 5; Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 7; Ποια είναι η πιθανότητα να είναι τέλειο τετράγωνο;

γ) Χωριστείτε σε ομάδες, στην τάξη σας και θέστε ερωτήματα η μία ομάδα στην άλλη. Τέτοια ερωτήματα μπορεί να είναι: Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός να έχει τρία ίδια ψηφία ή να έχει τουλάχιστον δύο ίδια ψηφία ή ο αριθμός να είναι πρώτος ή οτιδήποτε άλλο φέρει η συζήτηση.

Διδακτική διαχείριση: Πρόκειται για ένα πείραμα τύχης τριών σταδίων (ένα στάδιο για κάθε κληρωτίδα). Στόχος είναι τα παιδιά να διερευνήσουν τις απαντήσεις, χωρίς να προκριθεί εξ αρχής ένας τρόπος απάντησης σε κάθε ερώτημα (π.χ. μόνο με χρήση δένδροδιαγράμματος). Η μαθηματική δραστηριότητα που αναμένεται να προκληθεί με το έργο μπορεί να ενισχυθεί αν ο εκπαιδευτικός σχεδιάσει και ενισχύσει την μαθηματική επικοινωνία στην τάξη, όπως ενδεικτικά περιγράφεται παρακάτω:

Για την απάντηση στο ερώτημα (α) μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές προσεγγίσεις, καταγραφές, αλλά και διαφορετικά επιχειρήματα. Είναι σκόπιμο να δοθεί

η ευκαιρία στα παιδιά, να αναπτύξουν αυτά τα επιχειρήματα, με γενικές περιγραφές, ή συγκεκριμένα παραδείγματα, κτλ. Η συζήτηση στην τάξη μπορεί να καταλήξει σε ένα επιχείρημα συμμετρίας, που θα αιτιολογεί την απάντηση, χωρίς να γίνεται καταγραφή. Για το ερώτημα (β) είναι σκόπιμο τα παιδιά να συζητήσουν για το «ευνοϊκό ενδεχόμενο», ποιο είναι αυτό και να ανταλλάξουν ιδέες για το πώς μπορούν να υπολογίσουν το πλήθος των στοιχείων του, χωρίς αναγκαστικά να τα καταγράψουν ένα προς ένα. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ότι $31^2=961$ ενώ $32^2=1024$, αλλά είναι κρίσιμο να έχουν τα παιδιά το χρόνο να εκφράσουν και να δοκιμάσουν τις δικές τους προσεγγίσεις. Στο (γ) ενθαρρύνουμε τους/τις μαθητές να περιγράψουν σύνολα τριψήφιων αριθμών από μια ιδιότητά τους και να μετρήσουν το πλήθος των στοιχείων τους, όπως χρειάστηκε να κάνουν στο (β). Π.χ. Το πρώτο (δεύτερο, τρίτο) ψηφίο είναι 7, τα τρία ψηφία να είναι ίδια, κτλ.

Β' Γυμνασίου: Έγκυρες ή όχι πινακίδες κυκλοφορίας οχημάτων.

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	Ειδικά	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, δήλωση γεγονότων/διαπισ τώσεων)	Προτεινό μενα χαρακτηρ ιστικά της διδασκαλί ας προσέγγι σης	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημέν η διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Ενότητα	Πιθανότητες		Μετασχηματιστικ ές δράσεις (οργάνωση)		
Μεγάλε ς Ιδέες	Μεταβολή/μεταβλ ητότητα		Δράσεις οικοδόμησης έννοιας ταξινόμηση, Σύγκριση) Επίλυση Προβλήματος/ μοντελοποίηση, εφαρμογή (τεκμηρίωση, δοκιμή ειδικών περιπτώσεων)		
Μαθημ ατικές	Συλλογισμός/επιχε	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία,		

διεργασίες & πρακτικές	ιρηματολογία, Μαθηματική επικοινωνία, Επίλυση προβλήματος, μεταγνωστική ενημερότητα		ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου,	Προτεινόμενοι πόροι	
Κοινωνικοπολιτισμικές πρακτικές	Κριτική επίγνωση του τρόπου χρήσης των μαθηματικών στην κοινωνία, Μαθηματικός γραμματισμός	Συγκείμενο	Ρεαλιστικό		

Μια έγκυρη ελληνική πινακίδα αυτοκινήτου αποτελείται από 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, τα οποία πρέπει να υπάρχουν ως σύμβολα και στο αγγλικό αλφάβητο, ακολουθούμενα από 4 δεκαδικά ψηφία (από το 0, 1,...,9), όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα.



- α) Πόσες διαφορετικές έγκυρες ελληνικές πινακίδες υπάρχουν;
 β) Θα μπορούσαν οι έγκυρες πινακίδες στη Ρωσία να ακολουθούν ανάλογο κανόνα;
 γ) Συζητήστε μεταξύ σας πόσες διαφορετικές έγκυρες πινακίδες από τις ακόλουθες υπάρχουν και αναζητήστε πινακίδες στο διαδίκτυο από διάφορες χώρες:



Διδακτική διαχείριση: Σκοπός του έργου είναι οι μαθητές να αξιοποιήσουν την βασική αρχή απαρίθμησης σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα. Τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου που υπάρχουν στο αγγλικό αλφάβητο είναι 14: Α,Β,Ε,Ζ,Η,Ι,Κ,Μ,Ν,Ο,Ρ,Τ,Υ,Χ, ενώ στο ρώσικο αλφάβητο τα αντίστοιχα είναι 11. Αυτή είναι μια πληροφορία που στοχεύει τα ίδια τα παιδιά να διατυπώσουν ότι τη χρειάζονται, για το δεύτερο ερώτημα. Έτσι, μέσα από τη συζήτηση στην τάξη, αναμένεται ο αντίστοιχος κανόνας που θα διατυπωθεί να είναι: 3 κεφαλαία γράμματα του ρωσικού αλφάβητου, τα οποία πρέπει να υπάρχουν ως σύμβολα και στο αγγλικό αλφάβητο, ακολουθούμενα από 4 δεκαδικά ψηφία (από το 0, 1,...,9). Εδώ οι έγκυρες πινακίδες είναι λιγότερες εφόσον, τα κοινά

κεφαλαία γράμματα είναι 11. Θα πρέπει να γίνει μια αδρή εκτίμηση σχετικά με το πόσα αυτοκίνητα κυκλοφορούν στη Ρωσία. Επίσης, αυτό είναι ένα σημείο που είναι αναμένεται να προκύψει μέσα από τη συζήτηση και να έχει ως αφετηρία τα επιχειρήματα που θα ακουστούν στην τάξη. Σκόπιμο είναι τα παιδιά να συζητήσουν τρόπους για να καταφέρουν μια εκτίμηση σαν αυτή. Ένας τρόπος θα ήταν να αναζητήσουν την αντίστοιχη πληροφορία για την Ελλάδα και να επεκτείνουν αναλογικά με βάση τον πληθυσμό των 2 χωρών.

Γ' Γυμνασίου: Ο τροχός της τύχης

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	Ειδικά	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες εκτέλεσης) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (οπτικοποίηση) Επίλυση Προβλήματος/ (διατύπωση εικασίας, εξήγηση, δοκιμή ειδικών περυπτώσεων)	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδασκτικής προσέγγισης	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία (πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Ενότητα	Πιθανότητες				
Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή, Γενίκευση				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Συλλογισμός/επιχειρηματολογία , μοντελοποίηση	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία, ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικά ως μέρος της πολιτείας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου,	Προτεινόμενοι πόροι	Ψηφιακά εργαλεία (λογιστικά φύλλα excel) και διαδίκτυο (www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner)
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Κριτική επίγνωση του τρόπου χρήσης των μαθηματικών, απόδοση αξίας τις ιδέες και επιχειρήματα των άλλων				

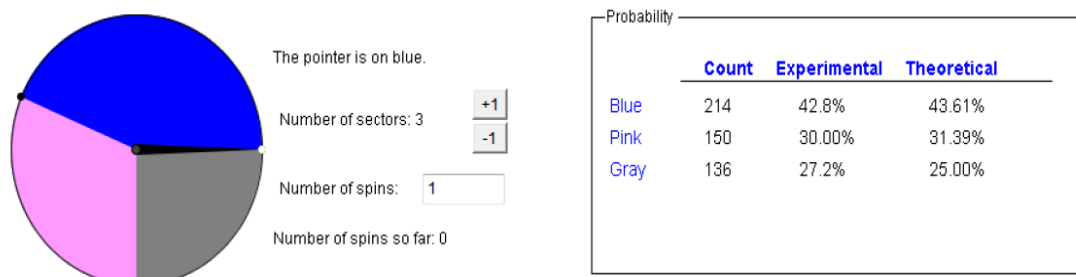
		Συγκείμενο	Προσωπικό, επιστημονικό		
--	--	------------	-------------------------	--	--

Σε ένα τροχό τύχης www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner που είναι χωρισμένος σε 2 ή περισσότερους κυκλικούς τομείς με διαφορετικά χρώματα θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα, όταν γυρίσουμε το δείκτη, να πετύχουμε κάποιο συγκεκριμένο χρώμα, π.χ. το μπλε. Αρχικά θεωρούμε 2 ίσους κυκλικούς τομείς, διαφορετικών χρωμάτων (το ένα είναι μπλε).

α) Σημειώστε σε ένα φύλλο εργασίας τις τιμές της σχετικής συχνότητας για το μπλε χρώμα μετά από 5, 10 50, 100, 500, 1000, 2000, 5000 κ.λ.π. δοκιμές. Είναι φυσιολογικό που η σχετική συχνότητα του μπλε χρώματος δεν είναι ακριβώς 50% (ή 0,5); Τι παρατηρείτε, καθώς το πλήθος των δοκιμών μεγαλώνει;

β) Στη συνέχεια χωρίζουμε τον δίσκο σε $N=6$ ίσους κυκλικούς τομείς, τους οποίους βάφουμε με $n=3$ χρώματα ώστε η πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος να είναι διαφορετική. Ποια πιστεύετε ότι είναι η πιθανότητα να πετύχουμε το κάθε χρώμα; Με ποιον τρόπο θα μπορούσατε να εκτιμήσετε αυτή την πιθανότητα;

γ) Διατυπώστε εικασίες για διάφορες τιμές των N τομέων και του χρωματισμού τους με $n < N$ χρώματα και ελέγξτε τις εικασίες σας πειραματικά. Χωριστείτε σε ζευγάρια, εκ των οποίων ο/η ένας/μία χρωματίζει με $n=3$ διαφορετικά χρώματα $N=10$ κυκλικούς τομείς του τροχού και εκτελεί έναν μεγάλο αριθμό δοκιμών και ο/η άλλος/η μαντεύει το συνολικό μέγεθος των τομέων κάθε χρώματος, βάσει των αποτελεσμάτων.



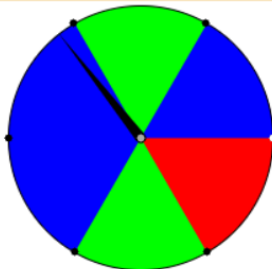
Διδακτική διαχείριση: Είναι αναμενόμενο οι μαθητές να μην εμπιστεύονται το αποτέλεσμα της προσομοίωσης, αν ζητήσουμε εξ' αρχής το αποτέλεσμα πολλών δοκιμών. Για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τον τροχό και να αποκτήσουν εμπιστοσύνη στο αποτέλεσμα της προσομοίωσης κάνουμε τις 5 πρώτες δοκιμές τη μία μετά την άλλη, βλέποντας το αποτέλεσμα κάθε δοκιμής. Στόχος της μαθηματικής δραστηριότητας που θα προκληθεί ως αποτέλεσμα της εμπλοκής των παιδιών με το έργο, και με παρόμοια με αυτό, είναι να είναι σε θέση να εκτιμήσουν τη μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων. Π.χ. αν έχουμε 2 ίσους τομείς και στρίψουμε 1000 φορές τον τροχό, είναι φυσιολογικό να μην εμφανιστεί ακριβώς 500 φορές το κάθε χρώμα. Παρόλα αυτά, θα πρέπει να αναγνωρίσουν ότι η σχετική συχνότητα κάθε χρώματος μετά από πολλές δοκιμές θα

είναι ένας αριθμός κοντά στο $1/2$. Για το επόμενο σύνολο ερωτημάτων, οι μαθητές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν τον απλό προσθετικό νόμο που αντιστοιχεί σε περιεχόμενο της Β' Γυμνασίου για να υπολογίσουν την πιθανότητα κάθε χρώματος. Είναι σημαντικό να συζητηθεί ότι, ακόμα και αν δεν μπορούσαν να υπολογίσουν την πιθανότητα κάθε χρώματος (γιατί π.χ. δεν βλέπουν τον δίσκο), θα μπορούσαν με τη βοήθεια του νόμου των μεγάλων αριθμών να βρουν προσεγγιστικά αυτές τις πιθανότητες, στρίβοντας πολλές φορές τον τροχό και καταγράφοντας τη σχετική συχνότητα κάθε χρώματος. Το τελευταίο μέρος του έργου είναι ένα παιχνίδι που επιβεβαιώνει πειραματικά την προηγούμενη παρατήρηση: γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα εμφάνισης ενός χρώματος είναι της μορφής $m/10$, όπου ο m το πλήθος των τομέων που έχουμε βάψει με αυτό το χρώμα, είναι εύκολο να βρούμε ποιος είναι ο αριθμός m υπολογίζοντας τη σχετική συχνότητα κάθε χρώματος μετά από πολλές επαναλήψεις.

Η χρήση της ψηφιακής προσομοίωσης δίνει την ευκαιρία στα παιδιά να πειραματιστούν με μεγάλο πλήθος εκτελέσεων του πειράματος, να αλλάξουν τις συνθήκες (χρώματα, πλήθος χρωμάτων, πλήθος τομέων, θέση τομέων, κτλ). Αυτή η ευκαιρία είναι απαραίτητο να αξιοποιηθεί στην τάξη, στο εργαστήριο η/υ ή με όποιο μέσο είναι διαθέσιμο, στο πλαίσιο της μαθησιακής διαδικασίας και του σχολείου. Το ιδανικό θα ήταν να μπορεί κάθε παιδί, ή καλύτερα ομάδα παιδιών, να χρησιμοποιήσει την προσομοίωση, να τη χειριστεί και να καταγράψει τα αποτελέσματά της, να συζητήσει για αυτά και να τα παρουσιάσει στην ολομέλεια της τάξης. Δηλαδή, να στηρίξει τα συμπεράσματα της διερεύνησης που η ίδια έκανε και να τα ανταλλάξει με τις υπόλοιπες ομάδες. Στη συνέχεια θα ακολουθήσει συζήτηση επί των συμπερασμάτων και σύνδεση με τις σχετικές έννοιες της θεωρίας Πιθανοτήτων. Αν δεν υπάρχει η δυνατότητα χρήσης συσκευών (π.χ. τάμπλετ), ώστε τα παιδιά να κάνουν πειραματισμό και διερεύνηση σε μικρές ομάδες, είναι χρήσιμο να τους δοθεί η δυνατότητα να κάνουν πειραματισμούς ακόμα και σε κοινόχρηστο υπολογιστή ή υπολογιστές, η μια ομάδα μετά την άλλη ή όποτε το ζητούν, βάσει της διερεύνησης και των ερωτημάτων που θέτουν. Σε κάθε περίπτωση, η χρήση της προσομοίωσης προτείνεται έντονα να γίνει από τα παιδιά, ως μέρος της διερεύνησής τους. Στη συνέχεια, κατά τη συζήτηση των συμπερασμάτων τους είναι αναμενόμενο να κάνουν αναφορές σε αυτή την προσομοίωση και να θέλουν να επιδείξουν την εκτέλεση ενός συγκεκριμένου πειράματος ή των αποτελεσμάτων του σε ολομέλεια. Ακόμα είναι αναμενόμενο μετά τη συζήτηση να θέλουν να ξαναεκτελέσουν την προσομοίωση για άλλο πλήθος δοκιμών ή με άλλους όρους.

Στη μαθηματική δραστηριότητα που περιγράφεται παραπάνω είναι ορατά τα στάδια του κύκλου ερωτήματος πιθανοτήτων. Π.χ. στο ερώτημα β):

Στάδια κύκλου ερωτήματος πιθανοτήτων	Παράδειγμα (υποθετικής ομάδας παιδιών)
A. Διατύπωση του ερωτήματος	«Ποια είναι η πιθανότητα να πετύχουμε το κάθε χρώμα; Με ποιον τρόπο μπορούμε να την εκτιμήσουμε;»
B. Σχεδιασμός μιας διερεύνησης	«Ας φτιάξουμε έναν τροχό, π.χ.

	 Ας τον στρίψουμε 100 φορές.»												
Γ. Διατύπωση εικασιών για το αποτέλεσμα	«Περιμένουμε το μπλε να εμφανίζεται περισσότερες φορές από το πράσινο και από το κόκκινο.»												
Δ. Εκτέλεση πειράματος τύχης, συλλογή δεδομένων	«Το στρίβουμε 100 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.» <table><tr><td>Blue</td><td>1071</td><td>51.00%</td><td>50.01%</td></tr><tr><td>Green</td><td>680</td><td>32.38%</td><td>33.34%</td></tr><tr><td>Red</td><td>349</td><td>16.62%</td><td>16.67%</td></tr></table>	Blue	1071	51.00%	50.01%	Green	680	32.38%	33.34%	Red	349	16.62%	16.67%
Blue	1071	51.00%	50.01%										
Green	680	32.38%	33.34%										
Red	349	16.62%	16.67%										
Ε. Διερεύνηση, ανάλυση, συμπεράσματα	«Πράγματι συνέβη αυτό που περιμέναμε. Επίσης το πράσινο εμφανίζεται περισσότερες φορές από το κόκκινο, σχεδόν διπλάσιες. Άρα σαν να είναι δύο φορές πιθανότερο το πράσινο. Μήπως υπάρχει κάποια σχέση και το πλήθος εμφανίσεων του μπλε και την αντίστοιχη πιθανότητα;»												
ΣΤ. Αύξηση δείγματος	«Ας το στρίψουμε 1000 φορές».												
Ζ. Επικοινωνία αποτελεσμάτων	...												

4.3. Στατιστική και Πιθανότητες

Γ' Γυμνασίου: Ποσοστό νεογέννητων αγοριών και κοριτσιών					
ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)	
Πεδίο	Στοχαστικά Μαθηματικά	Ειδικά	Βασικές δράσεις (υπολογισμός, διαδικασίες	Προτεινόμενα χαρακτηριστικά	Πολιτισμικά ευαισθητοποιημένη διδασκαλία

Ενότητα	Στατιστική και Πιθανότητες		εκτέλεσης) Μετασχηματιστικές δράσεις (οργάνωση, αναπαράσταση) Δράσεις οικοδόμησης έννοιας (ομαδοποίηση) Επίλυση Προβλήματος/ (εξήγηση)	κά της διδακτικής προσέγγισης	(πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους)
Μεγάλες Ιδέες	Μεταβολή/ μεταβλητότητα				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	οπτικοποίηση, δημιουργία συνδέσεων	Γενικά	Μαθηματική επικοινωνία, μαθηματικά ως μέρος της πολιτειότητας, πληροφόρηση για την κατανόηση του κόσμου	Προτεινόμενοι πόροι	Common Online Data Analysis Platform (CODAP)
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές	Ερμηνεία καταστάσεων, Μαθηματικός γραμματισμός, απόδοση αξιών στους άλλους και στα επιχειρήματά τους, λήψη αποφάσεων με διάλογο	Συγκεκριμένο	Επιστημονικό, κοινωνικό.		

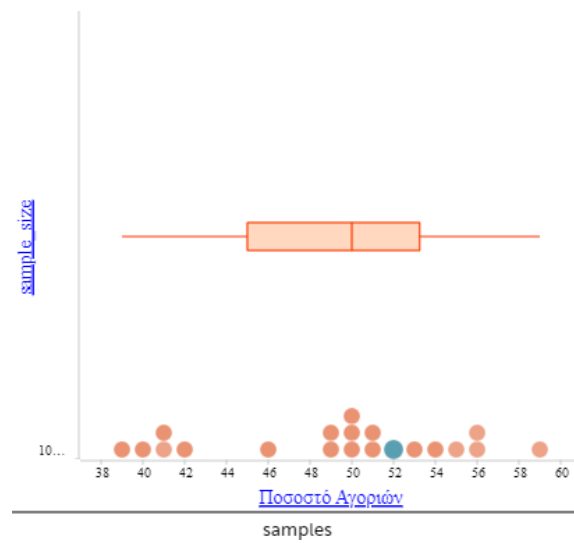
α) Στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε πριν τη γέννηση κάποιο στοιχείο για το φύλο του παιδιού που πρόκειται να γεννηθεί , ποια είναι η πιθανότητα το νεογέννητο παιδί να είναι αγόρι ή κορίτσι;

β) Χρησιμοποιώντας προσομοίωση γεννήσεων, με τη βοήθεια της ψηφιακής εφαρμογής [Common Online Data Analysis Platform \(CODAP\)](#), να καταγράψετε τον αριθμό των αγοριών σε 20 σε διαφορετικά σύνολα (δείγματα) των 100 γεννήσεων το καθένα. Τι παρατηρείτε;

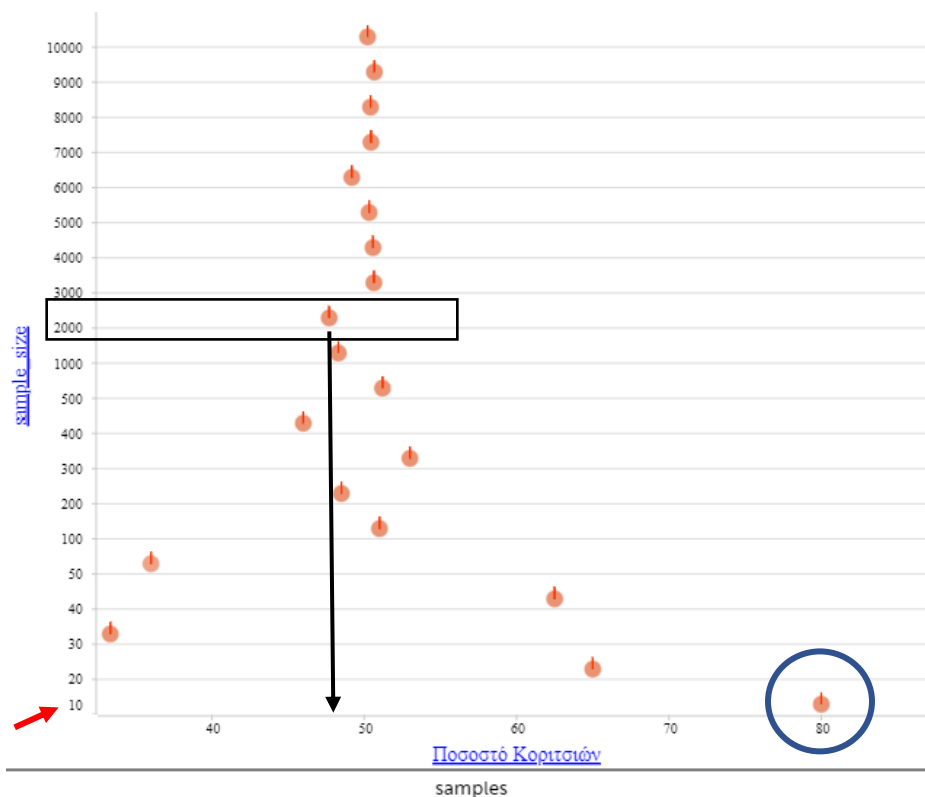
γ) Με την ίδια προσομοίωση γεννήσεων, να καταγράψετε τη συχνότητα γεννήσεων κοριτσιών σε 10, 50, 100, 200,..., κτλ., γεννήσεις. Τι παρατηρείτε σχετικά με την απάντηση στο α);

Διδακτική διαχείριση: Σκοπός του έργου είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν τη μεταβλητότητα ενός χαρακτηριστικού (ποσοστό γεννήσεων αγοριών) σε διαφορετικά δείγματα ίσου πλήθους (ερώτημα β)) και να νοηματοδοτήσουν, μέσα από προσομοίωση τον νόμο των μεγάλων αριθμών, στο ερώτημα γ). Το έργο έχει νόημα να υλοποιηθεί στο

εργαστήριο η/υ, όπου οι μαθητές θα μπορέσουν να εργαστούν σε ομάδες με έναν η/υ η κάθε μια και να «τρέξουν» οι ίδιοι τις προσομοιώσεις.



Σχήμα 9: Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του β). Κάθε βούλα αντιστοιχεί στο ποσοστό των αγριών σε ένα σύνολο 100 γεννήσεων. Π.χ. η βούλα που έχει διαφορετικό χρώμα από τις υπόλοιπες αντιστοιχεί σε 100 γεννήσεις, που τα 52 νεογέννητα ήταν αγόρια. Το θηκόγραμμα αντιστοιχεί στο σύνολο που αποτελείται τα 20 ποσοστά γεννήσεων αγριών, ένα για κάθε δείγμα και δεν είναι απαραίτητο να αξιοποιηθεί.



Σχήμα 10: Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του γ). Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνεται το πλήθος των γεννήσεων. Σε κάθε γραμμή, με την αντίστοιχη βούλα σημειώνεται το ποσοστό των γεννήσεων που το νεογέννητο ήταν κορίτσι. Για παράδειγμα, η βούλα μέσα στον κύκλο αντιστοιχεί σε ένα σύνολο 10 γεννήσεων (κατακόρυφος άξονας, κόκκινο βέλος) που το 80%, δηλαδή οι 8 αντιστοιχούν σε κορίτσια. Η βούλα μέσα στο ορθογώνιο αντιστοιχεί σε ένα σύνολο 2.000 γεννήσεων, που οι γεννήσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε κορίτσια λίγο λιγότερες από το 50% των συνολικών.

Η διαδικτυακή ψηφιακή εφαρμογή (μετά από κατάλληλη προετοιμασία της από τον εκπαιδευτικό) δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να τρέξουν την προσομοίωση παίρνοντας τα αποτελέσματα για διαφορετικά δείγματα γεννήσεων. Έτσι, στο β) θα ζητήσουν από την εφαρμογή 20 δείγματα των 100 γεννήσεων το καθένα και θα πάρουν ένα αποτέλεσμα σαν αυτό στην Σχήμα 10. Από αυτό αναμένεται να αναγνωρίσουν τη μεταβλητότητα του χαρακτηριστικού «γεννήσεις αγοριών» σε κάθε δείγμα. Μάλιστα αυτή η διαπίστωση θα γίνει από κάθε ομάδα παιδιών, που σημαίνει ότι θα υπάρχουν πραγματικά πολλές προσομοιώσεις των 100 γεννήσεων. Δηλαδή αν έχουμε 8 ομάδες παιδιών στην τάξη, τότε η προσομοίωση θα τρέξει για $20 \times 8 = 160$ δείγματα των 100 γεννήσεων το καθένα και είναι σκόπιμο κάθε ομάδα να τεκμηριώσει τις απόψεις της με βάσει τα αποτελέσματά της, αλλά και να συζητήσει τα αποτελέσματα των άλλων ομάδων.

Στο γ) οι μαθητές θα τρέξουν αρχικά την προσομοίωση για 10 γεννήσεις και στη συνέχεια για 20, 30, 40, 50,...,100, 1.000,... Το πλήθος των προσομοιώσεων και ο ρυθμός αύξησης του μεγέθους των δειγμάτων μπορεί να είναι και δική τους επιλογή. Εδώ θα αναγνωρίσουν ότι όταν αυξάνεται το πλήθος των γεννήσεων (ειδικά για μεγάλα πλήθη), το ποσοστό των γεννήσεων των κοριτσιών (άρα και τον αγοριών) είναι πιο κοντά στο 50%. Αυτό το συμπέρασμα χρειάζεται να συζητηθεί στην ολομέλεια και οι μαθητές να

επιχειρηματολογήσουν, αξιοποιώντας στοιχεία από τα αποτελέσματα της προσομοίωσής τους.

5. Ενδεικτικό Παράδειγμα εξέλιξης των ΠΜΑ σε όλες τις βαθμίδες

5.1. Στατιστική

Στην ενότητα αυτή δίνεται ένα παράδειγμα για την εξέλιξη των ΠΜΑ στην υποενότητα «διατύπωση ερωτημάτων», της ενότητας «διαχείριση δεδομένων», που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία όλων των τάξεων τα ΠΜΑ.

Οι μαθητές συζητούν για τους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες και πραγματοποιούν μια έρευνα με αφορμή ερωτήματα όπως:

- **Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα:** Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των μαθητών της τάξης τους; (Α΄ Δημοτικού)
- **Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά δεδομένα:** Πόσες μπάλες ομαδικών αθλημάτων (π.χ. μπάσκετ, ποδοσφαίρου κλπ.) έχουν στο σπίτι τους; (Β΄ Δημοτικού)
- **Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά ή κατηγορικά δεδομένα:** Πόσες χώρες κέρδισαν χάλκινα, ασημένια, χρυσά μετάλλια στους τελευταίους Ολυμπιακούς αγώνες; (Γ΄ Δημοτικού)
- **Ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους:** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των κοριτσιών και των αγοριών της τάξης τους; (Δ΄ Δημοτικού)
- **Ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται:** Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της τάξης τους σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (Ε΄ Δημοτικού)
- **Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων:** Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της Γ΄ Δημοτικού και της ΣΤ΄ Δημοτικού σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (ΣΤ΄ Δημοτικού)
- **Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους:** Ποιες ήταν οι επιδόσεις των μαθητών της τάξης τους στο αγώνισμα του μήκους; (Α΄ Γυμνασίου)
- **Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα:** Πόσες χώρες έλαβαν μέρος στους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες (1896-σήμερα) και πόσες κέρδισαν μετάλλια; (Β΄ Γυμνασίου)
- **Ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους:** Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων; (Γ΄ Γυμνασίου)
- **Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού:** Ποιες είναι οι επιδόσεις των

εφήβων αγοριών και κοριτσιών αθλητών/τριών στο αγώνισμα του μήκους; (Α' Λυκείου)
Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού: Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων στο μήκος και στο πλάτος; (Α' Λυκείου)
 — **Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:** Ποιο είναι το αγαπημένο αθλητικό αγώνισμα των αγοριών και κοριτσιών; (Β' Λυκείου)

5.2. Πιθανότητες

Δίνουμε παρακάτω ένα παράδειγμα που αναδεικνύει την εξέλιξη των ΠΜΑ στις διάφορες βαθμίδες και τάξεις στην υποενότητα «Πιθανότητες ενδεχομένων» της ενότητας «Πειράματα τύχης και πιθανότητες».

Οι μαθητές πειραματίζονται με έναν κύβο ο οποίος έχει τρεις κόκκινες, δύο κίτρινες και μία πράσινη έδρα. Μπορούμε π.χ. να βάψουμε κόκκινες τις έδρες ενός ζαριού με ένδειξη 1-3, κίτρινες τις έδρες με ένδειξη 4-5 και πράσινη την έδρα με ένδειξη 6.

- **Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, αδύνατο:** Στην Α' Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιθανό αλλά όχι βέβαιο, ενώ το να φέρουν μπλε είναι αδύνατο.
- **Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους:** Στη Β' Δημοτικού μπορούν να απαντήσουν ότι το να φέρουν κόκκινο είναι πιο πιθανό από το να φέρουν πράσινο.
- **Συγκρίνουν τις πιθανότητες εμφάνισης ενδεχομένων πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές:** Στη Γ' Δημοτικού οι μαθητές επιβεβαιώνουν με πειράματα ότι η κόκκινη έδρα εμφανίζεται πιο συχνά, αν επαναλάβουμε το ρίξιμο του κύβου αρκετές φορές.
- **Εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ενδεχόμενο έως βέβαιο ενδεχόμενο:** Στη Δ' Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να τοποθετήσουν σε μια κλίμακα με εύρος από το αδύνατο ως το βέβαιο τις πιθανότητες να έρθει κόκκινο, κίτρινο ή πράσινο.
- **Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων) / (πλήθος δυνατών περιπτώσεων) και την αναπαριστούν σε κλίμακα από 0 έως 1:** Στην Ε' Δημοτικού οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν ότι η πιθανότητα να φέρουν κίτρινο είναι $2/6=1/3$.
- **Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα και τη συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης:** Στη ΣΤ' Δημοτικού οι μαθητές διαπιστώνουν ότι αν ρίξουν πολλές φορές έναν τέτοιο κύβο οι σχετικές συχνότητες εμφάνισης της κόκκινης, κίτρινης και πράσινης έδρας είναι συγκρίσιμες με το $3/6$, $2/6$ και $1/6$ αντίστοιχα.
- **Χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό των Πιθανοτήτων για να υπολογίσουν την πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου:** Στην Α' Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν δύο φορές κίτρινο αν ρίξουν δύο τέτοιους

κύβους (4 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά) αλλά και την πιθανότητα να φέρουν ίδιο χρώμα (14 από τα 36 αποτελέσματα είναι ευνοϊκά).

- **Χρησιμοποιούν τον απλό προσθετικό νόμο για να υπολογίσουν την πιθανότητα σύνθετων ενδεχομένων:** Στη Β' Γυμνασίου μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα τα δυο ζάρια να φέρουν το ίδιο χρώμα προσθέτοντας τις πιθανότητες να φέρουν δύο κόκκινες, δύο κίτρινες και δύο πράσινες ενδείξεις ($9/36+4/36+1/36$).
- **Αναγνωρίζουν μέσα από προσομοιώσεις με χρήση λογισμικού και εκτελώντας π.τ., ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών):** Στη Γ' Γυμνασίου οι μαθητές μπορούν είτε να εκτελέσουν είτε να προσομοιώσουν με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων έναν μεγάλο αριθμό τέτοιων πειραμάτων και να δουν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης 2 εδρών ίδιου χρώματος πλησιάζει μετά από πολλές επαναλήψεις το $14/36$.
- **Περιγράφουν πειράματα τύχης και με μη ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα:** Στην Α' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν το παραπάνω πείραμα σε έναν απλούστερο δειγματικό χώρο με 9 εκβάσεις (το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου {κόκκινο, κίτρινο, πράσινο} με τον εαυτό του), να αποδώσουν πιθανότητα σε αυτές τις εκβάσεις και να υπολογίσουν π.χ. την πιθανότητα τουλάχιστον μια έδρα να είναι κόκκινη χρησιμοποιώντας λογισμό πιθανοτήτων και όχι απαρίθμηση.
- **Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων:** Στη Β' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν στο ερώτημα ποια είναι η πιθανότητα να φέρουν 4 διαφορετικά αποτελέσματα αν ρίξουν 4 φορές ένα ζάρι.
- **Αναγνωρίζουν τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές Bernoulli, διακριτή ομοιόμορφη και διωνυμική και υπολογίζουν τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας αυτών:** Στη Γ' Λυκείου οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν την πιθανότητα να φέρουν τουλάχιστον 5 φορές άρτια ένδειξη, αν ρίξουν 10 φορές ένα σύνηθες ζάρι, και να αναγνωρίσουν την αντιστοιχία αυτού του προβλήματος με το να απαντήσουν σωστά σε τουλάχιστον 5 από 10 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 2 πιθανές απαντήσεις (Σωστό/Λάθος).

Βιβλιογραφία Ειδικού Μέρους

- Bargagliotti, A., & Franklin, C. (2021). Statistics and data science for teachers. American Statistical Association.
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. (2020). Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report II. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Charlotte, NC: Information Age.
- Bragg, P. & Outhred, I. (2004). A measure of rulers – the importance of units in a measure. In J. Hoines, M. & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 159–166). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Clausen-May, T., Jones, K., McLean, A., Rowlands, S. & Carson, R. (2000). Perspectives on the design of the school geometry curriculum. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 20(1-2), 34-41.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching children mathematics*, 6(8), 482-488.
- Clements, D. H., and Battista, M. T. (1992), Geometry and Spatial Reasoning, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan
- Confrey, J. (1995), How Compatible Are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches, and Social Constructivism?, in L. P. Steffe and J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Diezmann, C. & Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 417-424). PME.
- Drijvers, P. (Ed.). (2010), Secondary Algebra Education. Sense Publishers.
- Duval R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C Mammana & V Villani (eds). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*. Dordrech: Kluwer.
- Duval, R. (2014). Commentary: linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, 46(1), 159–170. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0565-8>
- Erdogan, T., Akkaya, R. & Celebi Akkaya, S. (2009). The Effect of the Van Hiele Model Based Instruction on the Creative Thinking Levels of 6th Grade Primary School Students. *Educational sciences: theory and practice*, 9(1), 181-194.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Scheaffer, R. (2007). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report: A pre-K–12 curriculum framework. American Statistical Association.

Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3–20.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60–72. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003>.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, 74(2), 163-183.

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3).

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3- Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L.Puig & A. Guitierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-20). Valencia: University of Valencia, Spain

Henderson, D. W., Taimina, D., Sinclair, N., Pimm, D. & Higginson, W. (2006). Mathematics and the aesthetic: New approaches to an ancient affinity.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J. & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 115-139.

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109-149). Brill Sense Kilpatrick J, Swafford J & Findell B (eds.) 2001. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J., & Kazak, S. (2011). Conceptual Challenges in Coordinating Theoretical and Data-centered Estimates of Probability. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1–2), 68–86.

Levenson, E., Tirosh, D. & Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry: theory, research, and practical perspectives*. Rotterdam: Sense Publishers.

Linn, M. C. & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 1479-1498.

Lowrie, T., Logan, T. & Hegarty, M. (2019). The influence of spatial visualization training on students' spatial reasoning and mathematics performance. *Journal of Cognition and Development*, 20(5), 729-751.

Markopoulos, C. & Potari, D. (1999). Forming relationships in three-dimensional geometry through dynamic environments. In *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 273-280). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence*, 35(138), 365.

New Zealand Ministry of Education. (2007). *The New Zealand Curriculum*. Wellington: Learning Media Limited.

- Owens, K. & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 83–116). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers
- Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, 19(1), 79-92.
- Pfannkuch, M. (2005). Thinking tools and variation. *Statistics Education Research Journal*, 1(1), 46-52.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1971). *Mental Imagery in the CbiM*. London: Routledge & Kegan Paul
- Polaki, M. V. (2005). Dealing with Compound Events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 191-214). NY, USA: Springer.
- Pratt, D. & Noss, R. (2002). The micro-evolution of mathematical knowledge: The case of randomness. *Journal of the Learning Science*, 11(4), 453-488
- Pratt, D. (2005). How do Teachers Foster Students’ Understanding of Probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 171-190). NY, USA: Springer.
- Reading, C. & Reid, J. (2007). Reasoning about Variation: Student Voice. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2.
- Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Seah, R. & Horne, M. (2018). Perceiving and reasoning about geometric objects in the middle years. In J. Hunter, P. Perger & L. Darragh (Eds.), *Making waves, opening spaces. Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 677–684). Auckland: MERGA
- Seah, R. & Horne, M. (2020). The construction and validation of a geometric reasoning test item to support the development of learning progression. *Mathematics Education Research Journal*, 32(4), 607-628.
- Serow, P. (2008). Investigating a phase approach to using technology as a teaching tool. *Navigating currents and charting directions*, 445-452.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Van de Walle, J., Karp, K.S. & Bay-Williams, J.M. (2010). *Elementary and middle school mathematics teaching developmentally* (7th ed.), Allyn & Bacon.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry*. TAL Project.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic press.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. *Proceedings of the 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education*, 177–184

von Glasersfeld, E. (1990), Environment and Communication, in L. P. Steffe and T. Wood (Eds.), *Transforming Children's Mathematics Education: International Perspectives*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key Ideas in Teaching Mathematics*. Oxford University Press.

Watson, J. (2006). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Τζεκάκη, Μ., Σταγιόπουλος, Π. & Μπαραλός, Γ. (2011). Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Σχέδια διδασκαλίας για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (τεύχος Α', Τεύχος Β').