



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Αξιολόγηση όψεων της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των
μαθητών μέσω της Επίλυσης Προβλημάτων**

της Ελευθερίας Ασμίνη (369)

Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Παπαδόπουλος Ιωάννης

Θεσσαλονίκη

Νοέμβριος 2017

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Πρώτο από όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Ιωάννη Παπαδόπουλο, που με εμπιστεύτηκε και συνεργάστηκε μαζί μου για την πραγματοποίηση αυτής της εργασίας, προσφέροντάς μου πολύτιμη βοήθεια με τις γνώσεις και τις άμεσες ανατροφοδοτήσεις του. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω το προσωπικό του Σχολείου με το οποίο συνεργάστηκα, για την εθελοντική παραχώρηση ενός τμήματός του. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου, που με υπομονή και κουράγιο πρόσφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράσταση για την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	4
Abstract	4
Εισαγωγή.....	5
Σημαντικότητα της Έρευνας.....	6
Σκοπός της έρευνας.....	7
Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό Πλαίσιο	8
1.1. Η έννοια της Δημιουργικότητας.....	8
1.2. Τι είναι η Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη;.....	13
1.3. Κυριότερες Προσεγγίσεις στη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη	18
1.4. Επιμέρους στοιχεία της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης	23
1.5. Αξιολόγηση της Δημιουργικότητας.....	26
1.6. Ανασκόπηση Εμπειρικών Ερευνών	30
Κεφάλαιο 2: Μεθοδολογία Έρευνας.....	41
2.1. Ερευνητική Στρατηγική	41
2.2. Δείγμα- Δειγματοληψία	41
2.3. Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας/ Συλλογή Δεδομένων	41
2.4. Εργαλείο	42
2.5. Ανάλυση Δεδομένων.....	45
2.6. Αξιολόγηση «Πρότυπου» Μαθητή.....	50
Κεφάλαιο 3: Αποτελέσματα	76
Συγκεντρωτικός πίνακας Αποτελεσμάτων	91
Κεφάλαιο 4: Συζήτηση – Συμπεράσματα.....	92
Βιβλιογραφικές Αναφορές	104
Παράρτημα.....	116

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η αξιολόγηση της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης (ΔΜΣ) των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η ΔΜΣ των μαθητών εξετάζεται υπό το πρίσμα των τεσσάρων γνωστικών πτυχών: *ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία και επεξεργασία*. Ωστόσο, η παρούσα έρευνα υιοθετεί τη «*Συνθετική προσέγγιση*», η οποία λαμβάνει υπόψη πολλές επιμέρους συνιστώσες της ΔΜΣ και προσεγγίζει ξεχωριστά την κάθε μια από αυτές. Στα πλαίσια της έρευνας αναπτύχθηκε ένα τεστ, αποτελούμενο από πέντε ανοιχτά προβλήματα και ταυτόχρονα τροποποιήθηκε μια σχάρα αξιολόγησης της ΔΜΣ που αρχικά χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια ενός σχετικού ευρωπαϊκού έργου. Η έρευνα αξιολογεί τη ΔΜΣ 20 μαθητών της Στ' Δημοτικού, μέσα από μια «*συνθετική προσέγγιση*» που λαμβάνει υπόψη ταυτόχρονα τόσο τις επιμέρους συνιστώσες όσο και τις τέσσερις βασικές γνωστικές πτυχές της ΔΜΣ των μαθητών, αναδεικνύοντας τις πολλές, διαφορετικές, πρωτότυπες και επεξεργασμένες απαντήσεις τους. Τα αποτελέσματα αυτά εγείρουν σημαντικές εκπαιδευτικές προεκτάσεις και αναδεικνύουν την αναγκαιότητα για ανάπτυξη παρόμοιων εργαλείων αξιολόγησης, τα οποία θα προσεγγίζουν ολιστικά τη ΔΜΣ των μαθητών.

Abstract

The aim of this research is to evaluate primary school students' Creative Mathematical Thinking (CMT). According to the literature, students' CMT is examined in the light of the four cognitive aspects: *fluency, flexibility, originality and elaboration*. However, the current study adopts the "*Componential Approach*", that takes account of many partial aspects of CMT and examines each one separately. A collection of five open-ended tasks was developed accompanied with an evaluation grid which is a modified version of the grid used in the context of a European project aiming to evaluate CMT. This synthetic approach is used to evaluate the CMT of 20 grade-6 students in a public elementary school and the findings highlight their many, different, original and elaborated responses through the lenses of the four main cognitive aspects of CMT. These findings raise significant educational implications and highlight the need for development of similar assessment tools that will approach holistically the students' CMT.

Εισαγωγή

«Ο καλύτερος τρόπος να έχεις μια καλή ιδέα είναι να έχεις πολλές ιδέες».

Linus Pauling

Ο όρος «δημιουργικότητα» χρησιμοποιείται με διάφορους τρόπους: αναφέρεται σε ένα σύνολο διαδικασιών (π.χ. «δημιουργικές» διαδικασίες σκέψης), σε ένα σύνολο προσωπικών χαρακτηριστικών των ανθρώπων (π.χ., η «δημιουργική» προσωπικότητα), και στα αποτελέσματα (π.χ. ένα «δημιουργικό» προϊόν). Επιπλέον, μπορεί να συναντηθεί ως «δημιουργικότητα» που προέρχεται από διακεκριμένους ανθρώπους στον τομέα δράσης τους ή από ανθρώπους που βιώνουν μια «δημιουργική στιγμή» στην καθημερινότητά τους. Έτσι, η δημιουργικότητα μπορεί να αφορά είτε ένα συγκεκριμένο τομέα (π.χ. Φυσικές Επιστήμες) ή γενικά όλους τους τομείς δράσης του ανθρώπου.

Ένας τομέας στον οποίο μπορεί να ανθίσει και να εντοπιστεί η δημιουργική σκέψη, είναι αυτός των Μαθηματικών. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα διακεκριμένων μαθηματικών οι οποίοι χρησιμοποιώντας τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη τους έχουν συνδράμει στην «αναβάθμιση» του τομέα τους. Δεν είναι λιγότερα, όμως, τα παραδείγματα όπου η μαθηματική δημιουργικότητα συναντάται στους μικρούς μαθητές της τάξης, οι οποίοι παίρνοντας ρίσκα και κάνοντας γόνιμους συνδυασμούς σκέψης, εκδηλώνουν αξιοζήλευτες δημιουργικές εκφάνσεις του εαυτού τους. Έτσι, ένας μαθητής ο οποίος είναι ικανός να απαντήσει σε ένα πρόβλημα με πολλούς, διαφορετικούς και πρωτότυπους τρόπους, θεωρείται πως εκδηλώνει τη δημιουργική πλευρά του εαυτού του.

Ωστόσο, παρά το αυξανόμενο ενδιαφέρον για την προώθηση της δημιουργικότητας σε όλους τους τομείς και σε όλα τα άτομα και τις ομάδες, εξακολουθεί να παραμένει μια αόριστη έννοια που είναι δύσκολο να τη συλλάβει κανείς καθολικά. Η πολυπλοκότητα της έννοιας, μάλιστα, έρχεται στην επιφάνεια, όταν επιχειρεί κανείς να την αξιολογήσει και να τη μετρήσει. Αυτό οφείλεται κυρίως στην πληθώρα των ορισμών και των θεωρητικών προσεγγίσεων που υπάρχουν μέχρι σήμερα, για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας, τοποθετώντας την έννοια υπό το πρίσμα μιας υποκειμενικής οπτικής. Η παραπάνω θέση ισχύει τόσο για τη

δημιουργικότητα γενικότερα, όσο και τη δημιουργικότητα που αφορά τον τομέα των Μαθηματικών.

Η αναπτυξιακή προοπτική της μαθηματικής δημιουργικότητας τονίζει τη σημασία των εργαλείων που επιτρέπουν την αξιολόγηση και την ανάπτυξή της. Η σημασία αυτών των εργαλείων απορρέει από το επιχείρημα ότι η δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά παραγνωρίζεται και αμελείται επειδή δεν αξιολογείται επίσημα στα σχολεία με διαδεδομένα εργαλεία αξιολόγησης.

Η παρούσα εργασία στοχεύει να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση της φύσης της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης (ΔΜΣ) των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και στην αξιολόγησή της. Αυτό πραγματοποιείται μέσα από μια πολυπρισματική θεώρηση της έννοιας και μέσα από την ανάπτυξη και τη χρήση των ανάλογων εργαλείων για την αξιολόγηση της ΔΜΣ των μαθητών σε πραγματικές συνθήκες. Υποστηρίζεται ότι τα θέματα που σχετίζονται με την αξιολόγηση δεν είναι ασήμαντα για τους εκπαιδευτικούς που επιδιώκουν να αναπτύξουν τη μαθηματική δημιουργικότητα στους μαθητές τους, αλλά, αντιθέτως είναι καθοριστικής σημασίας και η ύπαρξή τους κρίνεται απαραίτητη.

Η εργασία αποτελείται από τέσσερα κύρια μέρη. Ακόλουθο της εισαγωγής, είναι το θεωρητικό μέρος το οποίο εξετάζει τους ορισμούς της δημιουργικότητας καθώς και τις διάφορες προσεγγίσεις στην αξιολόγησή της. Στη Μεθοδολογία παρουσιάζονται η μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθείται στην αξιολόγηση της ΔΜΣ παρουσιάζοντας αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο έγινε η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Στο τρίτο τμήμα παρουσιάζονται τα Αποτελέσματα της έρευνας και, τέλος, γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων αναδεικνύοντας τη συνεισφορά της παρούσας μελέτης στο χώρο.

Σημαντικότητα της Έρευνας

Αδιαμφισβήτητα, η αξιολόγηση της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών στα πλαίσια του σχολείου συνιστά ένα σημαντικό κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μέσα από έγκυρα και αξιόπιστα εργαλεία τα οποία αξιοποιούν τις κατάλληλες δραστηριότητες, οι εκπαιδευτικοί είναι σε θέση να έχουν μια καλύτερη

εικόνα του δημιουργικού δυναμικού της τάξης τους και των μαθητών τους. Έτσι, με τη βοήθεια αυτών των εργαλείων, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εντοπίσουν το επίπεδο και τις δυνατότητες της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών τους και, παράλληλα, να τις ενισχύσουν παρεμβαίνοντας κατάλληλα.

Η ανάπτυξη τέτοιων εργαλείων αποτελεί, επομένως, ένα σημαντικό όπλο στα χέρια των εκπαιδευτικών. Ωστόσο, όπως κάθε όπλο έτσι και κάθε τέτοιο εργαλείο αποκτά αξία στα χέρια του χρήστη- εκπαιδευτικού, μόνο όταν γνωρίζει πώς να το χρησιμοποιήσει. Από τη μία, η ανάγκη ανάδειξης του ζητήματος της μαθηματικής δημιουργικότητας στην εκπαιδευτική κοινότητα (το οποίο πολλές φορές παραγνωρίζεται) και από την άλλη, η ανάγκη ανάπτυξης εύχρηστων και αποτελεσματικών εργαλείων που αξιολογούν τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη των μαθητών, οδήγησε στην γέννηση της παρούσας μελέτης.

Σκοπός της έρευνας

Έχοντας ως γνώμονα τα παραπάνω, κύριο **σκοπό της έρευνας** αποτελεί η αξιολόγηση της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου. Επιμέρους στόχος της είναι να προτείνει ένα **πακέτο αξιολόγησης** (2 εργαλεία αξιολόγησης) ως ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών και των ερευνητών που επιθυμούν να αξιολογήσουν τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη των μαθητών στα πλαίσια της σχολικής τάξης.

Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό Πλαίσιο

1.1. Η έννοια της Δημιουργικότητας

Η δημιουργικότητα θεωρείται ως η «ραχοκοκαλιά» των δεξιοτήτων που χρειάζεται να έχει κανείς στα νέα επαγγέλματα καθώς και μια ικανότητα ζωτικής σημασίας στο πλαίσιο της δια βίου μάθησης (EC, 2008). Επιπλέον, η δημιουργικότητα έχει περιγραφεί ως η πιο σημαντική οικονομική πηγή του 21^{ου} αιώνα (Florida, 2002). Σύμφωνα, πάλι, με τους Van Harpen και Sriraman (2013) είναι ένας ευρέως χρησιμοποιούμενος όρος, μείζονος σημασίας για την εκπαίδευση.

Πριν επιχειρηθεί η διασαφήνιση του όρου «δημιουργικότητα», διευκρινίζεται ότι δεν είναι έννοια, όπως πολλοί νομίζουν, αποκλειστικά συνώνυμη της «γενικής» ευφυΐας. Άλλωστε, είναι συχνό το φαινόμενο ατόμων με χαμηλό δείκτη ευφυΐας που διακρίνονται για τη δημιουργική τους σκέψη και, αντίστροφα, ατόμων με υψηλό Δ.Ε. που υστερούν σε αυτό τον τομέα. Η δημιουργικότητα, σε γενικότερο πλαίσιο, είναι η ικανότητα που έχουν τα άτομα να παράγουν νέες ιδέες, σκέψεις και αντικείμενα (Φιλίππου και Χρίστου, 1995).

Αυτό που περιπλέκει την εικόνα της δημιουργικότητας είναι η έλλειψη ενός κοινώς αποδεκτού ορισμού (Mann, 2006). Σε μια βιβλιογραφική επισκόπηση που έκανε ο Treffinger (1996), εντόπισε πάνω από 100 διαφορετικούς ορισμούς, πράγμα που δείχνει τις πολλές διαστάσεις της έννοιας.

Ο Mason (2000) θεωρεί πως η δημιουργικότητα μπορεί να προκύψει σε μια στιγμή ενόρασης (*moment of insight*) κατά την οποία γίνεται σύνδεση μεταξύ ιδεών που προηγουμένως ήταν ασύνδετες, δηλαδή σε μια δημιουργική στιγμή (*creative moment*). Ακόμα, η δημιουργικότητα αφορά τόσο το άτομο σαν μονάδα όσο και την κοινωνία ολόκληρη, καθώς ενισχύει την ανθρώπινη πρόοδο σε όλα τα επίπεδα και σε όλες τις εκφάνσεις της ιστορίας (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013).

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφερθεί το είδος της σκέψης που χρησιμοποιείται από τους ανθρώπους όταν είναι δημιουργικοί. Πρώτος ο Guilford (1959) έκανε λόγο για τη διάκριση της συγκλίνουσας (*convergent*) από την αποκλίνουσα (*divergent*) σκέψη. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον ίδιο η συγκλίνουσα σκέψη βασίζεται στην ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να συγκρίνει, να συνθέτει και να

ταξινομεί παραστάσεις και έννοιες, έχοντας ως συνέπεια μια και μοναδική σωστή λύση σε ένα πρόβλημα. Αντιθέτως, η αποκλίνουσα σκέψη βασίζεται στη φαντασία και σύμφωνα με αυτήν, το πρόβλημα εξετάζεται από πολλές οπτικές γωνίες, ενώ λαμβάνουν χώρα ενορατικές και συνθετικές ενέργειες της σκέψης που οδηγούν στη γένεση πολλαπλών πιθανών λύσεων. Συνεπώς, η δημιουργικότητα προϋποθέτει την ύπαρξη και καλλιέργεια της αποκλίνουσας σκέψης του ανθρώπου (Guilford, 1959).

Επιπροσθέτως, ένας δημιουργικός άνθρωπος χαρακτηρίζεται από ορισμένες γνωστικές δεξιότητες όπως είναι, μεταξύ άλλων, η μεταφορική σκέψη (*metaphorical thinking*), η ευελιξία, η ικανότητα λήψης αποφάσεων, η ανεξάρτητη κριτική ικανότητα, η ικανότητα λογικών συλλογισμών, η αναγνώριση και εύρεση προβλήματος, η περιέργεια, η προθυμία για ανάληψη ρίσκου, η αφοσίωση στην εργασία, η ανοχή στη διαφορετικότητα, η εκτίμηση της πρωτοτυπίας, το ευρύ πεδίο ενδιαφερόντων, η διαίσθηση και η παραγωγική χρήση των αισθημάτων και εμπειριών της παιδικής του ηλικίας (Lilly, 2004).

Η περισσότερη βιβλιογραφία σχετικά με τη δημιουργικότητα προέρχεται από τον τομέα της Ψυχολογίας (Askew, 2013). Μέχρι στιγμής, υπάρχει ένα μεγάλο εύρος θεωρητικών προσεγγίσεων που προσπαθούν να ερμηνεύσουν τη δημιουργικότητα. Μόνο στον τομέα της Ψυχολογίας, έχουν αναπτυχθεί πολλά παραδείγματα· ο Sternberg (2003) αναγνώρισε τουλάχιστον οκτώ θεωρητικά πλαίσια σύμφωνα με τα οποία ερμηνεύεται η δημιουργικότητα, όπως είναι οι: «μυστικιστικές» προσεγγίσεις οι ψυχοδυναμικές, οι γνωστικές, οι ψυχομετρικές, οι πραγματιστικές, οι κοινωνικές-προσωπικότητας, οι εξελικτικές και τα μοντέλα συρροής (*confluence models*) της δημιουργικότητας.

Επιπλέον, τις τελευταίες δεκαετίες, έχει πραγματοποιηθεί αρκετή δουλειά καθοριστικής σημασίας για την επέκταση του όρου «δημιουργικότητα» πέρα από τις τέχνες και τους ιδιοφυείς ανθρώπους, όπου ήταν επικεντρωμένο το ενδιαφέρον. Ως αποτέλεσμα αυτών των προσπαθειών, η δημιουργικότητα έχει γίνει λιγότερο «μυστικιστική» και περισσότερο συνδεδεμένη με τη μάθηση ως διαδικασία καθώς, επίσης, συνδέεται και με τα αποτελέσματά της (Mc William & Dawson, 2008). Άλλωστε, η δημιουργικότητα είναι ένα χαρακτηριστικό που συναντάμε όχι μόνο στους καλλιτέχνες και τους επιστήμονες, αλλά αποτελεί μέρος της καθημερινής μας ζωής. Για παράδειγμα, κατά τη λύση πρακτικών προβλημάτων, ένας τεχνίτης που

κάνει μαστορέματα ή ένας βοσκός που μετρά το γάλα με καρδάρες διαφορετικής χωρητικότητας, χρησιμοποιεί τη δημιουργική του σκέψη (Κόσυβας, 2012).

Όσον αφορά την εκπαίδευση, η ανάπτυξη της δημιουργικότητας μπορεί να επιτευχθεί με την άσκηση και την απελευθέρωση των δυνάμεων του παιδιού. Ο Fisher (1990) διαπιστώνει ότι στην ηλικία των 3-4 ετών παρατηρείται συχνά μια καταστροφική για τη μάθηση και ιδιαίτερα για τη δημιουργική σκέψη μεταστροφή: το παιδί απογοητευμένο από τις συχνά επαναλαμβανόμενες αποτυχίες και απορρίψεις, σταματά να μαντεύει, να εφευρίσκει, να συγκρίνει και να μετασχηματίζει πληροφορίες και εμπειρίες. Αντιθέτως, αρχίζει να υποβάλλει απλώς ερωτήσεις και να αποδέχεται τις απαντήσεις που του δίνουν οι γονείς και οι δάσκαλοί του, παύοντας να χρησιμοποιεί τη φαντασία του και αρχίζοντας να βασίζεται στην αυθεντία καθώς δεν ερευνά και δεν διακινδυνεύει μια ‘παράτολμη’ απάντηση.

- Τα 4p της Δημιουργικότητας (*person, process, product, press*)

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους προσλαμβάνει κανείς την έννοια της δημιουργικότητας κι ένας από αυτούς απαντάται στο μοντέλο ‘Four P- *person, process, product, press*’ (Rhodes, 1961). Το συγκεκριμένο μοντέλο προσεγγίζει την έννοια της δημιουργικότητας μέσα από τέσσερις διαφορετικές οπτικές: τη δημιουργική διαδικασία (*process*), το δημιουργικό προϊόν (*product*), τη δημιουργική προσωπικότητα (*person*) και τις επιρροές από το περιβάλλον (*press*).

Όσον αφορά τη δημιουργικότητα ως «διαδικασία» της σκέψης (*process approach*), ο Hadamard (1945) αναφέρεται στη δημιουργική διαδικασία των μαθηματικών χρησιμοποιώντας το μοντέλο Gestalt των τεσσάρων σταδίων: προετοιμασία (*preparation*), επώαση (*incubation*), επιφοίτηση (απόδοση στα ελληνικά ή κατ’ άλλους «φωτισμός», «έμπνευση») (*illumination*) και επιβεβαίωση (*verification*). Ο Liljedahl (2013) επιβεβαιώνει και επεκτείνει τη δουλειά του Hadamard προσθέτοντας την αποκαλούμενη ‘AHA! *experience*’. Στο σχολικό περιβάλλον, κατά τους Liljedahl & Sriraman (2006), οι μαθητές βιώνουν ασυνήθιστες (*unusual, novel*) και ενορατικές (*insightful*) λύσεις σε κάποιο πρόβλημα, πράγμα που τους κάνει να νιώθουν πως ανακάλυψαν κάτι σπουδαίο. Αυτή θεωρείται μια σημαντική και δημιουργική στιγμή για το μαθητή. Σε αυτό το πλαίσιο οι δυο ερευνητές ξεκάθαρα τονίζουν ότι οι λύσεις αυτές είναι καινοτόμες και ασυνήθιστες για το συγκεκριμένο μαθητή, όχι, όμως, και για το σύνολο. Μπορεί κάτι να είναι

τετριμμένο για τους υπόλοιπους, η στιγμή της ανακάλυψης, όμως, είναι μοναδική για τον συγκεκριμένο μαθητή που την έκανε.

Η προσέγγιση με βάση το «προϊόν» (*product approach*) εστιάζει στα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις δημιουργικές διαδικασίες. Θεμελιώνεται στην υπόθεση ότι για να αναγνωριστεί μια διαδικασία ή δραστηριότητα ως δημιουργική, θα πρέπει να συνοδεύεται από κάποιο δημιουργικό αποτέλεσμα. Ο ορισμός που ταιριάζει περισσότερο σε αυτή την κατεύθυνση είναι των Sternberg & Lubart (1999), οι οποίοι αναφέρουν πως η δημιουργικότητα είναι η ικανότητα του να παράγει κάποιος μη αναμενόμενες, πρωτότυπες, κατάλληλες και χρήσιμες λύσεις. Βέβαια, οι Liljedahl & Sriraman (2006) αναφέρουν πως η δημιουργική διαδικασία και το δημιουργικό προϊόν είναι έννοιες μη διαχωρίσιμες.

Η τρίτη διάσταση του συγκεκριμένου μοντέλου έχει τις ρίζες της στην Ψυχολογία και αφορά την «προσωπικότητα» που εμπλέκεται στη δημιουργική διαδικασία, η οποία, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Έτσι, έχουν βρεθεί διάφορα γενικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με μια δημιουργική προσωπικότητα: το εγγενές κίνητρο, το εύρος ενδιαφερόντων, η δεκτικότητα στις νέες εμπειρίες, η αυτονομία κ.ά. (Barron, 1995). Επιπλέον, αναγνωρίζεται πως σε κάθε τομέα, όπως είναι οι Τέχνες ή οι Φ.Ε., υπάρχουν συγκεκριμένα και ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας που ασχολείται με αυτόν (Feist, 2004).

Η τέταρτη διάσταση αφορά το «περιβάλλον» του ατόμου που εμπλέκεται στη δημιουργική διαδικασία. Σύμφωνα με τους Kozbelt, Beghetto & Runco (2010) το περιβάλλον συχνά επηρεάζει την έκφραση της δημιουργικής προσωπικότητας. Οι παράγοντες πίεσης (*press factors*) αναφέρονται σε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των προσωπικοτήτων και του περιβάλλοντος στο οποίο δρουν. Υπάρχουν, φυσικά, ατομικές διαφορές όσον αφορά τις προτιμήσεις των ανθρώπων, αλλά σε γενικότερο πλαίσιο η δημιουργικότητα τείνει να ευδοκιμεί σε περιβάλλοντα όπου υπάρχουν ευκαιρίες για εξερεύνηση και για ανεξάρτητη δουλειά καθώς κι εκεί όπου ενθαρρύνονται οι πρωτότυπες λύσεις (Amabile, 1990).

- Το μοντέλο ‘Four- c’

Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης της δημιουργικότητας αφορά το επίπεδο της δημιουργικής έκφρασης. Πλέον, οι πιο πρόσφατοι και ευρέως χρησιμοποιούμενοι ορισμοί της δημιουργικότητας εντάσσονται κάτω από το μοντέλο που έχουν δημιουργήσει οι Kaufman & Beghetto (2009). Σύμφωνα με αυτό το θεωρητικό μοντέλο, υπάρχουν δύο ευρέα επίπεδα έκφρασης της δημιουργικότητας: το πρώτο εστιάζει στη δημιουργικότητα η οποία αφορά τους ιδιοφυείς και διακεκριμένους ανθρώπους (*eminent creativity*), που η αξία του έργου τους έχει παντοτινή διάρκεια και βρίσκεται στο πλαίσιο της *Big- C* δημιουργικότητας. Το δεύτερο αφορά τη δημιουργικότητα που συναντάται στην καθημερινότητα (*everyday creativity*), σε δραστηριότητες που μπορεί να καταπιαστεί ο μέσος άνθρωπος και βρίσκεται στο πλαίσιο της *little-c* δημιουργικότητας. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές θεωρούν πως είναι προτιμότερο να γίνεται η εξής διάκριση, παρά να ενοποιούνται όλες οι έρευνες της δημιουργικότητας, χωρίς να αναγνωρίζονται οι διαφορές.

Παρολαυτά, ο Beghetto (2007), υποστηρίζει πως ο διαχωρισμός Big-C/little-c έχει εμποδίσει τις μελέτες που ερευνούν τα ενδοατομικά (*intrapersonal*) και αναπτυξιακά χαρακτηριστικά της φύσης της δημιουργικότητας. Με σκοπό να ξεπεραστεί αυτός ο περιορισμός, δημιουργήθηκε μια νέα κατηγορία, η λεγόμενη *mini-c creativity*. Για να γίνει πιο κατανοητό, η *mini-c* δημιουργικότητα αφορά τους μαθητές που βιώνουν την εμπειρία μιας δημιουργικής στιγμής (*creative insight*) κατά τη μαθησιακή διαδικασία και ενέχει το προσωπικό στοιχείο κάθε ατόμου στην ερμηνεία μιας έννοιας, ενός γεγονότος. Ακόμα, αυτή η κατηγορία αναγνωρίζει την εν δυνάμει δημιουργικότητα που έχει κάθε μαθητής και η οποία μπορεί να εκδηλωθεί την κατάλληλη στιγμή. Έτσι, καθίσταται δυνατή η αξιολόγηση της δημιουργικότητας των μαθητών εντός αλλά και εκτός της σχολικής τάξης, η οποία χαρακτηρίζει το μυαλό ενός αρχάριου (π.χ. δεκτικότητα σε νέες εμπειρίες, επιθυμία για εξερεύνηση του άγνωστου) και η οποία μπορεί να παράγει αργότερα αναγνωρίσιμα και αξιομνημόνευτα δημιουργήματα (Kaufman & Beghetto, 2009). Γίνεται αντιληπτό, πώς αυτή η αλλαγή, από τη Big- C δημιουργικότητα στη *mini-c*, επιτρέπει στους δασκάλους να δεχθούν ότι ακόμα και οι μικροί μαθητές μπορεί να είναι δημιουργικοί (Askew, 2013).

Τέλος, υπάρχει και η Pro- c δημιουργικότητα που αφορά τους επαγγελματίες, τα δημιουργήματα των οποίων δεν έχουν φθάσει στο επίπεδο των διακεκριμένων έργων

που έχουν δημιουργήσει οι προσωπικότητες της Big- C δημιουργικότητας. Οι προικισμένοι και χαρισματικοί άνθρωποι που ανήκουν στην κατηγορία της Big- C δημιουργικότητας, παράγουν νέες ιδέες που αλλάζουν το χάρτη σε μια περιοχή, π.χ. ο Mozart στη Μουσική, ο Leonardo Da Vinci στη Ζωγραφική, ο Einstein στη Φυσική κ.λπ. Στην κατηγορία Pro- C υπάρχουν διακεκριμένοι επαγγελματίες, η συμβολή των οποίων, όμως, δε μπορούμε να πούμε πως έχει αλλάξει τα δεδομένα στον τομέα όπου δραστηριοποιούνται. Έτσι, ένας πολύ καλός μυθιστοριογράφος μπορεί να είναι πολύ καλός επαγγελματίας, αλλά όχι στο επίπεδο της Agatha Christie, τα έργα της οποίας αποτελούν τομή στο αστυνομικό μυθιστόρημα (Kaufman & Beghetto, 2009).

Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να αναφερθεί και η περίπτωση της middle- c δημιουργικότητας, η οποία ανήκει στο πλαίσιο εμπλουτισμού του παραπάνω μοντέλου. Σύμφωνα με τον Moran (2010), αυτή η κατηγορία, την οποία ονόμασε ο ίδιος έτσι, αφορά τη «συλλογική δημιουργικότητα» που λαμβάνει χώρα σε συνεργατικά περιβάλλοντα μάθησης (*peer- group communities*). Σε αυτή την περίπτωση, η δημιουργικότητα λαμβάνει χώρα μόνο μέσα από την αλληλεπίδραση ατόμων σε μικρές ομάδες, οι οποίες μέσα από τη συνεργασία και τον πειραματισμό καταλήγουν σε δημιουργικά προϊόντα. Συνεπώς, η δημιουργικότητα θεωρείται ως μια δεξιότητα που μπορεί να αναπτυχθεί μέσα από την αλληλεπίδραση των μελών μιας κοινότητας (Kaufman & Beghetto, 2009).

1.2. Τι είναι η Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη;

Τα σχολικά Μαθηματικά χαρακτηρίζονται από δύο συμπληρωματικούς στόχους: από τη μία, την εκμάθηση διαδικασιών και την εφαρμογή αλγορίθμων κατά την επίλυση συνηθισμένων προβλημάτων (*routine problems*) και από την άλλη, την εκμάθηση εννοιών και την εφαρμογή δημιουργικών στρατηγικών κατά την επίλυση μη - τυπικών προβλημάτων (*non-routine problems*). Καταφέροντας το πρώτο, οι μαθητές μπορούν και λύνουν πολλά προβλήματα με αλγοριθμική επάρκεια και σε σύντομο χρόνο. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει την ανεπτυγμένη μαθηματική σκέψη, κάτι που υποστηρίζεται ότι μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την προώθηση της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης (ΔΜΣ) (Ervynck, 1991).

Στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι εκπαιδευτικές ατζέντες τείνουν να δίνουν έμφαση στις δημιουργικές δραστηριότητες, τα τελευταία, μόλις, χρόνια. Αναλυτικά Προγράμματα διαφόρων χωρών ανά τον κόσμο (για παράδειγμα στη Σκωτία, τη Φιλανδία, την Ιαπωνία, τη Σιγκαπούρη και την Αυστραλία) κάνουν λόγο για την αναγκαιότητα χρήσης δημιουργικών δραστηριοτήτων. Η επίκληση για την ανάπτυξη της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης δεν είναι κάτι νέο, αλλά η ενσωμάτωσή της στα Αναλυτικά Προγράμματα είναι ζήτημα των τελευταίων, μόνο, χρόνων (Askew, 2013).

Στον τομέα της έρευνας, η δημιουργικότητα αποτέλεσε για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα ένα πεδίο που δε του δινόταν μεγάλη προσοχή. Σύμφωνα με τους Sternberg και Lubart (1999), το διάστημα μεταξύ 1975 και 1994 μόνο το 5% των άρθρων σχετίζονταν με τη δημιουργικότητα. Η ανάγκη για εμπειρική έρευνα γύρω από το θέμα οδήγησε στην ίδρυση του περιοδικού *‘Creativity Research Journal’*. Ειδικότερα, στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενδιαφέρον για τη δημιουργικότητα εκδηλώθηκε κυρίως από τότε που ο Haylock (1987) επισήμανε πως πρέπει να δοθεί περισσότερη προσοχή στη δημιουργικότητα εντός της μαθηματικής σχολικής τάξης και όταν, ακολούθως ο Silver (1997) υποστήριξε ότι η Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη εδράζει στη διαδοχική μετάβαση (interplay) από την επίλυση προβλήματος (*problem solving*) στη δημιουργία προβλήματος (*problem posing*).

Παρολαυτά, λίγα έχουν γίνει σχετικά με τη δημιουργικότητα στη μαθηματική εκπαίδευση. Ευτυχώς, τα τελευταία χρόνια η μαθηματική κοινότητα έχει δώσει περισσότερη προσοχή στο θέμα, αλλά, η έλλειψη ενός κοινώς αποδεκτού ορισμού μεταξύ των ερευνητών (Mann, 2006) και η εκπαιδευτική πραγματικότητα, η οποία συστηματικά παραμελεί την ικανότητα δημιουργικής επίλυσης προβλήματος, δεν μπορούν παρά να αποτελούν κατασταλτικούς παράγοντες στο χώρο (Sriraman, 2005).

Κατά συνέπεια, όπως και στην περίπτωση του ορισμού της δημιουργικότητας γενικότερα, έτσι και στην περίπτωση της μαθηματικής δημιουργικότητας, είναι εξαιρετικά δύσκολο να διατυπωθεί ένας κοινώς αποδεκτός ορισμός (Haylock, 1987· Liljedahl & Sriraman, 2006· Mann, 2006· Sriraman, 2005). Ωστόσο, στα πλαίσια αυτής της εργασίας, κρίνεται γόνιμο να αναφερθούν ενδεικτικοί ορισμοί της, για καλύτερη κατανόηση της έννοιας. Έτσι, ένας ερευνητής που κατ'εξοχήν μελέτησε τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη, ο Sriraman (2005), δίνει δυο ορισμούς της

μαθηματικής δημιουργικότητας: έναν στο επαγγελματικό επίπεδο και έναν στο σχολικό. Σε επαγγελματικό επίπεδο ορίζεται ως «η ικανότητα να παράγεται πρωτότυπη δουλειά, η οποία επεκτείνει σε αξιοσημείωτο βαθμό, τα όρια της μαθηματικής γνώσης ή ανοίγει τον ορίζοντα νέων ερωτημάτων προς τους άλλους μαθηματικούς» (Sriraman, 2005, σ.23). Ακολούθως, σε σχολικό επίπεδο, η μαθηματική δημιουργικότητα ορίζεται ως «α) η διαδικασία, που έχει ως αποτέλεσμα ασυνήθιστες (καινοτόμες) και/ή ενορατικές λύσεις ή ιδέες σε ένα δοσμένο μαθηματικό πρόβλημα ή σε ένα ανάλογο πρόβλημα β) η δημιουργία νέων ερωτημάτων και/ή η δημιουργία των πιθανοτήτων που επιτρέπουν ένα παλιό πρόβλημα να αντιμετωπιστεί από μια νέα οπτική γωνία» (Sriraman, 2005, σ.24).

Ο Haylock (1987), ορίζοντας τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη κάνει λόγο για την ικανότητα υπέρβασης της εμμονής της σκέψης σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο ή με κάποιον αλγόριθμο (*overcoming fixation, content universe or algorithmic*) και την ικανότητα αποκλίνουσας σκέψης (*divergent thinking*). Σύμφωνα με τον ίδιο μια προσέγγιση της μελέτης της μαθηματικής δημιουργικότητας στους μαθητές είναι καλύτερο να μη βασίζεται σε έναν και μοναδικό ορισμό της δημιουργικότητας. Αντίθετα, κύριο μέλημα του δασκάλου είναι να σκεφθεί όλες τις ιδέες και τις όψεις που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα και να επιλέξει εκείνες τις ιδέες που θεωρεί πως είναι εστιασμένες στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο.

Επιπρόσθετα, ο Ervynck (1991) συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την προχωρημένη μαθηματική σκέψη (*Advanced Mathematical Thinking*), που συνδυάζει τη μαθηματική κατανόηση, τη διαίσθηση και τη διορατικότητα. Από την άλλη, ο Krutetskii (1976) χαρακτήρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ανεξαρτησία και πρωτοτυπία. Επιπλέον, προσδιόρισε την «ευελιξία των νοητικών διαδικασιών» ως σημαντική συνιστώσα της ΔΜΣ των μαθητών. Η ευελιξία αυτή αναφέρεται κυρίως στην υπέρβαση των στερεοποιήσεων, που μερικές φορές λειτουργούν ως «αυτοπεριορισμοί» και εμμονή σε έναν αλγόριθμο.

Στο σχολικό περιβάλλον, τα θεμέλια της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης αναπτύσσονται κατά τα πρώτα σχολικά χρόνια. Ο ρόλος των κοινωνικών και περιβαλλοντικών παραγόντων είναι ανεκτίμητης αξίας στην ανάπτυξη του

δημιουργικού χαρακτήρα (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Έτσι, οι συζητήσεις στην τάξη προσφέρουν το κατάλληλο πεδίο ανάπτυξης των δεξιοτήτων Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών. Κι αυτό, γιατί οι δάσκαλοι μπορούν να υποστηρίξουν τη σκέψη των μαθητών, ενθαρρύνοντάς τους και επιβραβεύοντάς τους όταν δίνουν καινοτόμες απαντήσεις, μοναδικές ιδέες και δημιουργικές συνδέσεις μεταξύ των εννοιών (Sternberg & Grigorenko, 2004). Δυστυχώς, στις περισσότερες τάξεις οι καινοτόμες ιδέες δεν είναι καλοδεχούμενες από τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι συχνά τις απορρίπτουν (Beghetto, 2007). Έτσι, προκειμένου ο μαθητής να μη νιώθει φόβο για να εκφράσει τις δημιουργικές του σκέψεις, ο εκπαιδευτικός οφείλει να καλλιεργήσει το κατάλληλο περιβάλλον στη σχολική τάξη, στο οποίο ο μαθητής θα νιώθει ασφαλής παίρνοντας ρίσκα (Tighe, Picariello & Amabile, 2003).

- *Γενική ή Ειδική Δημιουργικότητα;*

Ένας άλλος τρόπος για να μιλήσει κανείς για τη δημιουργικότητα είναι εστιάζοντας στη διάκριση μεταξύ της δημιουργικότητας σε μια γενική περιοχή και της δημιουργικότητας εντός συγκεκριμένης περιοχής (*domain- general and domain specific*) (Kaufman & Beghetto, 2009). Η γενική δημιουργικότητα συνδέεται με τη μεταφορά μεθόδων και ιδεών που εφαρμόζονται εντός ενός πεδίου επίλυσης προβλημάτων, σε ένα άλλο πεδίο προκειμένου να εφαρμοστούν για την επίλυση προβλημάτων σε αυτό. Η ειδική δημιουργικότητα αναπτύσσεται στο πλαίσιο μιας περιορισμένης περιοχής λαμβάνοντας υπόψη την ειδική φύση της π.χ. στον τομέα των Μαθηματικών (Piirto, 1999).

Η δημιουργικότητα εκλαμβάνεται από τους περισσότερους ως ευφυΐα, δηλαδή ως μια γενική ικανότητα η οποία επηρεάζει σχεδόν όλους τους τομείς (Baer, 2010). Τελευταία, αυτή η άποψη έχει αμφισβητηθεί. Παρόλο που υπάρχουν ορισμένες γενικές δεξιότητες που απαιτούνται σε όλους τους τομείς της δημιουργικής διαδικασίας, τις περισσότερες φορές υπάρχουν συγκεκριμένες αναγκαίες δεξιότητες που αφορούν μια περιοχή χωρίς να είναι απαραίτητες για κάποιες άλλες. Ο Feist (2004) έγραψε: «*το δημιουργικό ταλέντο αφορά στην ουσία ένα συγκεκριμένο τομέα*» (σ. 57). Από την άλλη, μελέτη των Milgram & Livne (2005), η οποία ερευνούσε τη δομή της μαθηματικής δημιουργικότητας, έδειξε πως αυτή είναι ταυτόχρονα και γενική και ειδική (*both domain-general & domain-specific*). Σύμφωνα με τον Baer (2010) η απάντηση στο συγκεκριμένο ζήτημα βρίσκεται στο ιεραρχικό μοντέλο το

οποίο λαμβάνει υπόψη τόσο τη γενική όσο και την ειδική δημιουργικότητα. Συγκεκριμένα αναφέρει πως τα βασικά χαρακτηριστικά αυτού του μοντέλου ορίζουν πως «τα ταλέντα οι γνώσεις, οι δεξιότητες, τα κίνητρα και τα χαρακτηριστικά που προσδίδουν δημιουργική δραστηριότητα α) ποικίλλουν ανάλογα το είδος του έργου που κάποιος επιτελεί, β) είναι παρόμοια μεταξύ σχετικών πεδίων, και γ) γίνονται όλο και πιο ανόμοια καθώς κάποιος ασχολείται με διαφορετικά πεδία ή τομείς ενδιαφέροντος» (σ. 338).

Η αναφορά στις διαφορετικές περιοχές (*domains*), διακρίνει τα Μαθηματικά από τη Λογοτεχνία, αλλά και μέσα στα ίδια τα Μαθηματικά μπορεί να γίνει αυτή η διάκριση θεωρώντας την Άλγεβρα, τη Γεωμετρία, τη Θεωρία Αριθμών διαφορετικές περιοχές. Στην τελευταία περίπτωση, η γενική μαθηματική δημιουργικότητα σχετίζεται με την εφαρμογή μοτίβων επίλυσης προβλήματος, που είναι ήδη γνωστά ή που εφαρμόζονται σε έναν μαθηματικό τομέα, για να λυθούν προβλήματα σε έναν άλλο μαθηματικό τομέα. Υπό το πρίσμα αυτό, η συγκεκριμένη (ειδική) μαθηματική δημιουργικότητα, αναφέρεται στη δημιουργικότητα, όπως αυτή εφαρμόζεται προκειμένου να αντιμετωπιστούν προβλήματα σε μια συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή (π.χ. άλγεβρα) λαμβάνοντας υπόψη αποκλειστικά τη λογική παραγωγική φύση της συγκεκριμένης περιοχής (Hong & Milgram, 2010).

- *Απόλυτη ή Σχετική Δημιουργικότητα;*

Μια ακόμα διάκριση που εντοπίζεται στη βιβλιογραφία, είναι αυτή μεταξύ της απόλυτης (*absolute*) και της σχετικής (*relative*) δημιουργικότητας (Lev- Zamir & Leikin, 2011). Σύμφωνα με τους Lev- Zamir & Leikin (2011) η δημιουργικότητα εντός σχολικού πλαισίου εκλαμβάνεται ως «σχετική δημιουργικότητα» καθώς συνεκτιμάται το γνωστικό υπόβαθρο του κάθε μαθητή όπως και το επίπεδο των συμμαθητών του. Σε αυτή την περίπτωση, αναφερόμαστε σε ένα πρόσωπο που παράγει κάτι καινούριο ή καινοτόμο τουλάχιστον για τον εαυτό του. Από την άλλη, η απόλυτη δημιουργικότητα είναι συνδεδεμένη με εξαιρετικά ιστορικά μαθηματικά έργα και επιτεύγματα. Τέτοια παραδείγματα μπορούν να θεωρηθούν οι βραβευμένοι με Όσκαρ σε διάφορους τομείς και οι αποδέκτες του βραβείου Abel στα Μαθηματικά (Leikin & Pitta- Pantazi, 2013). Η φιλοσοφία αυτής της διάκρισης βρίσκεται σε συμφωνία με το διαχωρισμό των επιπέδων της δημιουργικής έκφρασης (Big- C, Pro- c/ little- c, mini-c).

1.3. Κυριότερες Προσεγγίσεις στη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη

Μεταξύ των ποικίλων προσεγγίσεων γύρω από τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη, οι περισσότερες εξέχουσες και αξιοσημείωτες είναι οι παρακάτω:

1. *Η προσέγγιση των χαρισματικών*
2. *Η προσέγγιση της επίλυσης/δημιουργίας προβλήματος*
3. *Η προσέγγιση του τεχνο- μαθηματικού αλφαριθμητισμού*

1. *Η προσέγγιση των χαρισματικών*

Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη οπτική, οι δημιουργικές πράξεις εκλαμβάνονται ως πνευματικά επιτεύγματα ασυνήθιστων ανθρώπων, οι οποίοι χρησιμοποιούν πολύ γρήγορα και χωρίς κόπο τις εξαιρετικές συλλογιστικές τους ικανότητες (MC Squared, 2015). Από τη μία, εάν κάποιος ερευνήσει τα κοινά χαρακτηριστικά αυτών των ανθρώπων, θα φτάσει σε ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις. Στο βιβλίο του “*Creating Minds*”, ο Gardner (1993) ανέλυσε το έργο μεγάλων σπουδαίων δημιουργικών προσωπικοτήτων όπως ο Sigmund Freud, ο Albert Einstein, ο Pablo Picasso κ.ά. διαπιστώνοντας πως υπάρχουν συγκεκριμένα μοτίβα που διέπουν αυτές τις προσωπικότητες. Από την άλλη, υιοθετώντας την άποψη η οποία υποστηρίζει πως η δημιουργικότητα αφορά αποκλειστικά τα άτομα τέτοιου βεληνεκούς, αυτομάτως δημιουργείται η εντύπωση ότι αυτή δεν μπορεί να καλλιεργηθεί με τη διδασκαλία, καθώς δε θεωρείται ένα είδος συνεχούς και συνειδητής πορείας που επιδέχεται βελτίωση (Papadopoulos, Barquero, Richter, Daskolia, Barajas, & Kynigos, 2015).

Το γεγονός αυτό προβληματίζει τους ανθρώπους στο χώρο της εκπαίδευσης καθώς θέτει εν αμφιβόλω την περίπτωση της δημιουργικότητας μέσα στην τάξη. Αποτελεί, τελικά, η δημιουργικότητα χαρακτηριστικό γνώρισμα μόνο των χαρισματικών ή κάθε μαθητής είναι ικανός να σκέφτεται και να παράγει δημιουργικά; Ο Cropley (2001) διαβεβαιώνει ότι «η καθημερινή δημιουργικότητα και η εν δυνάμει δημιουργικότητα οφείλουν να προσελκύουν το ενδιαφέρον μας καθώς ο σκοπός δεν είναι η επεξήγηση του τι έκανε σπουδαίο κάποιον διάσημο, αλλά η ενασχόληση με ‘μη

αναγνωρίσιμα' άτομα τα οποία μπορούν να συνειδητοποιήσουν τις δυνατότητές τους με τη δική μας ενθάρρυνση» (σ.53).

Επιπλέον, επικρατεί η τάση πως ο δείκτης γενικής ευφυΐας δείχνει και το βαθμό δημιουργικότητας του ατόμου. Παρολαυτά, η συσχέτιση IQ και δημιουργικότητας, σε ομάδες δημιουργικών ατόμων, κυμαίνεται από χαμηλή μέχρι μέτρια καθώς η γενική ευφυΐα είναι αναγκαίος αλλά όχι επαρκής όρος για την εκδήλωση δημιουργικής συμπεριφοράς (Fuchs- Beauchamp, Karnes, & Johnson, 1993). Το γεγονός αυτό έχει μεγάλη σημασία για την παιδαγωγική πράξη καθώς οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί προτιμούν τους μαθητές με υψηλή νοημοσύνη παρά εκείνους με υψηλή δημιουργικότητα. Οι δεύτεροι δείχνουν πολλές φορές προτίμηση σε δραστηριότητες που διαταράσσουν την τάξη στη σχολική αίθουσα, διότι δεν συνάδουν με τα πρότυπα συμπεριφοράς, που ορίζει τόσο το σχολικό περιβάλλον όσο και η κοινωνία γενικότερα (Καψάλης, 1996).

Ο Sriraman (2005) παρουσιάζει ένα μοντέλο που περιλαμβάνει τη χρήση πέντε αρχών για την μεγιστοποίηση της δημιουργικότητας μεταξύ των χαρισματικών μαθητών: Την *‘Αρχή Gestalt’ (the Gestalt Principle)*, η οποία μιλά για τέσσερις χρονικές περιόδους κατά την επίλυση ενός προβλήματος: την προετοιμασία (*preparation*), την περίοδο της επώασης (*incubation*), την επιφώιση (*illumination*) και την επιβεβαίωση (*verification*)· την *‘Αρχή της Αισθητικής’ (the Aesthetic Principle)*, η οποία μιλά για την ικανότητα των μαθητών να εκτιμούν την ομορφιά μια απλής λύσης σε ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα· την *‘Ακαδημαϊκή Αρχή’ (The Scholarly Principle)* όπου οι δάσκαλοι στο εκπαιδευτικό σύστημα K-12 οφείλουν να στηρίζουν τις δημιουργικές τάσεις των μαθητών και τέλος, η *‘Αρχή της Αβεβαιότητας’ (The Uncertainty Principle)* σύμφωνα με την οποία τα Μαθηματικά σε επαγγελματικό επίπεδο κυριαρχούνται από την αβεβαιότητα και την αμφιβολία γι’ αυτό είναι ανάγκη οι δάσκαλοι να υποστηρίζουν τους μαθητές τους όταν βιώνουν αγανάκτηση κατά την επίλυση ενός δύσκολου προβλήματος.

2. Η προσέγγιση της επίλυσης/δημιουργίας προβλήματος

Σύμφωνα με τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα (ΔΕΠΠΣ, 2003) η επίλυση και η δημιουργία προβλήματος αποτελούν έναν από τους βασικούς πυλώνες της σύγχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης. Σχετικό χωρίο εντός του ΔΕΠΠΣ (2003) που διαπραγματεύεται τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, αναφέρει: *«Οι μαθητές εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες»* (σ. 250).

Όσον αφορά τη σύνδεση της δημιουργικότητας και την επίλυση/δημιουργία προβλήματος, κυρίαρχη προσέγγιση θεωρείται αυτή του Silver (1997) που υπέδειξε ότι η Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη αναγνωρίζεται μέσω της επίλυσης και δημιουργίας προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, ο Silver υποστηρίζει ότι η Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη δεν έχει να κάνει μονομερώς με τη δημιουργία ή την επίλυση προβλήματος αλλά με τη διαδοχική μετάβαση (*interplay*) από τη μία διαδικασία στην άλλη. Ακολουθώντας τη σκέψη του Torrance (1974), ο Silver (1997) πιστεύει ότι η εναλλαγή ανάμεσα στην επίλυση και δημιουργία προβλήματος υποστηρίζει τη ΔΜΣ καθώς τέτοιες δραστηριότητες έχουν δημιουργικά χαρακτηριστικά (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία). Για το λόγο αυτό υποστηρίζει ότι θα πρέπει αν ενσωματωθούν στη διδακτική πράξη προκειμένου να προωθηθεί μια δημιουργική προδιάθεση απέναντι στα Μαθηματικά.

Σύμφωνα πάλι με τον Silver (1997), οι μαθηματικοί πέρα από το να λύνουν μαθηματικά προβλήματα που έχουν τεθεί από άλλους, συνηθίζουν να δημιουργούν δικά τους προβλήματα βασισμένα στην εμπειρία και τα ενδιαφέροντά τους, πράγμα που είναι δυνατό να συμβεί και στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών. Άλλωστε, οι σύγχρονες τάσεις στην εκπαίδευση υποστηρίζουν τη διερευνητική προσέγγιση στη μάθηση, η οποία ορίζει τη μετατόπιση της ευθύνης για τη δημιουργία και την επίλυση

προβλημάτων από το δάσκαλο στο μαθητή ή καλύτερα το διαμερισμό της ευθύνης ανάμεσα στους δύο.

Την ικανότητα δημιουργίας ενός ή πολλών μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές έχουν μελετήσει σε βάθος πολλοί ερευνητές (Balka, 1974· Getzels and Jackson, 1962· Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman, 2011· Van Harpen & Sriraman, 2013). Στο πλαίσιο των δημιουργικών δραστηριοτήτων - τα οποία περιλαμβάνουν κυρίως τα ασθενώς δομημένα προβλήματα (*ill-structured*) και τα ανοιχτά προβλήματα (*open-ended*) - σύμφωνα με τους Lev-Zamir & Leikin (2011), οι μαθητές ενθαρρύνονται είτε να δημιουργούν δικά τους προβλήματα είτε να επεκτείνουν ένα ήδη υπάρχον πρόβλημα σε νέα προβλήματα και νέες ερωτήσεις. Επιπροσθέτως, ο Jensen (1973) κάνοντας λόγο για τη δημιουργικότητα, μεταξύ άλλων, αναφέρει ότι είναι η ικανότητα να δημιουργεί κάποιος πολλαπλές, διαφορετικές και εφαρμόσιμες (κατάλληλες) ερωτήσεις όταν παρουσιάζεται μια μαθηματική κατάσταση σε γραπτή μορφή, σε διάγραμμα ή γραφική παράσταση. Με άλλα λόγια, μια δραστηριότητα δημιουργίας προβλήματος είναι μια δραστηριότητα η οποία καλεί τους μαθητές να σχηματίσουν, βασιζόμενοι σε δοσμένες συνθήκες, ένα μαθηματικό πρόβλημα (ή προβλήματα) το/τα οποίο/α δεν είναι γνωστά τουλάχιστον στους δημιουργούς (Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenny, 1996). Μια διδακτική προσέγγιση που ενθαρρύνει την ανάπτυξη της ευέλικτης σκέψης (*flexibility*) των μαθητών είναι η μέθοδος «τι θα γινόταν αν δεν...;» (*what-if-not?*) (Brown & Walter, 1983, στο Silver, 1997). Αυτή η εκπαιδευτική προσέγγιση έχει ενσωματωθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και, σύμφωνα με τον Silver (1997) είναι πολύ πιθανό να αναπτύξει τη δημιουργική ευελιξία στους μαθητές, καθώς και να προωθήσει μια γενικότερη δημιουργική διάθεση στη μαθηματική δραστηριότητα.

Σύμφωνα με τους Torp & Sage (2002) κάποια χαρακτηριστικά που θα πρέπει να έχουν τα προβλήματα ώστε να μπορούν να υποστηρίξουν μια τέτοια δημιουργική διαδικασία δημιουργίας και επίλυσης προβλήματος, είναι τα παρακάτω:

- Η «προβληματική κατάσταση» εξυπηρετεί ως ο οργανωτής και το πλαίσιο της μάθησης.
- Κυρίαρχο ρόλο παίζουν τα ασθενώς δομημένα και ανοιχτά προβλήματα.
- Οι διαδικασίες συχνά αλλάζουν κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της επίλυσης κάθε φορά που προστίθεται νέα πληροφορία.

- Υπάρχει δυσκολία κατά την επίλυση καθώς δεν υπάρχουν συγκεκριμένοι τύποι που η εφαρμογή τους θα δώσει τη λύση.
- Αναπτύσσεται η ευελιξία καθώς οι λύσεις και οι προσεγγίσεις είναι παραπάνω από μια.
- Οι μαθητές βρίσκονται στο κέντρο αυτής της προσέγγισης καθώς θεωρούνται ενεργοί λύτες και μαθητευόμενοι και οι δάσκαλοι βρίσκονται στο πλευρό τους ως καθοδηγητές σε γνωστικό και μεταγνωστικό επίπεδο.

3. Η προσέγγιση του τεχνο-μαθηματικού αλφαριθμητισμού

Ένας ακόμη τρόπος προσέγγισης, μελέτης και ενίσχυσης της μαθηματικής δημιουργικότητας αποτελεί η προσέγγιση του Τεχνο-Μαθηματικού αλφαριθμητισμού (*Techno Mathematical Literacies, TmL*). Το συγκεκριμένο όρο εισήγαγαν οι Hoyles & Noss (2003), σύμφωνα με τους οποίους τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται ευρέως και εκτός της σχολική τάξης, στην πραγματική ζωή και πιο συγκεκριμένα στους σύγχρονους τεχνολογικούς χώρους εργασίας.

Σε αυτούς τους χώρους πραγματοποιείται μια ριζοσπαστική αλλαγή στις μαθηματικές δεξιότητες που απαιτούνται από τους εργαζόμενους. Πιο συγκεκριμένα, ο εργαζόμενος καλείται να έχει ανεπτυγμένο ένα νέο είδος μαθηματικής γνώσης, η οποία διαμορφώνεται από αυτό καθαυτό το σύστημα που διέπει την εργασία του. Έτσι, άνθρωποι με διαφορετικό μαθηματικό υπόβαθρο και διαφορετικού είδους τεχνογνωσία συνεργάζονται στον ίδιο εργασιακό χώρο με αποτέλεσμα οι γνώσεις και τα αντικείμενα να διαπερνούν τα στενά σύνορα της κάθε ομάδας κατά την επικοινωνία της με κάποια άλλη (*boundary objects και boundary crossing*). Σε αυτό το πέρασμα είναι που εντοπίζει η έρευνα την εμφάνιση της δημιουργικής σκέψης. Επομένως, η δημιουργικότητα εξετάζεται σε πλαίσια πέραν των καθορισμένων ορίων του σχολείου καθώς εκτείνεται στις μαθηματικές δεξιότητες που καλείται να έχει ο σύγχρονος εργαζόμενος ώστε να προσαρμόζεται στις διάφορες και διαφορετικές κοινότητες (Hoyles & Noss, 2003).

1.4. Επιμέρους στοιχεία της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης

Η έννοια της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης είναι πολυδιάστατη και γι' αυτό, προκειμένου να αξιολογηθεί, θα γίνει μια προσπάθεια να αναφερθούμε σε επιμέρους στοιχεία της που την αναδεικνύουν. Μια, λοιπόν, δεξιότητα που χαρακτηρίζεται ως ένδειξη ΔΜΣ είναι η ικανότητα του μαθητή να γενικεύει μαθηματικές καταστάσεις. Οι Lev-Zamir & Leikin (2011) βρήκαν ότι οι μαθητές σε δημιουργικά πλαίσια, ωθούνται πιο εύκολα στη γενίκευση μαθηματικών ιδεών, πηγαίνοντας από μια συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση σε μια πιο γενική, ανεβάζοντας το επίπεδο της μαθηματικής τους σκέψης. Επιπλέον, οι Brandau and Dossey (1979 στο Haylock 1987) στην έρευνά τους παρατήρησαν τη συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων, αξιολογώντας τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη τους. Μέτρησαν την ευχέρεια από το πλήθος των απαντήσεων, την πρωτοτυπία από τη σπανιότητα των απαντήσεων, την ευελιξία από τις διαφορετικές προσεγγίσεις επίλυσης και την οργάνωση από τον αριθμό των περιπτώσεων εξειδίκευσης, γενίκευσης και εικασιών. Στη συνέχεια υπολογίστηκε η τελική βαθμολογία της ΔΜΣ των μαθητών, βρίσκοντας ότι όλες αυτές οι μεταβλητές είναι εξαιρετικά σημαντικές και συσχετίζονται μεταξύ τους θετικά.

Μια ακόμη όψη της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης είναι η ικανότητα σύνδεσης διαφορετικών μαθηματικών περιοχών και εννοιών. Ο Treffinger (2003) δίνει έμφαση στην ικανότητα εντοπισμού συνδέσεων και ομοιοτήτων μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών ως ένδειξη ΔΜΣ. Ακόμη, αναφέρεται στην ικανότητα ανάλυσης, σύνθεσης και λογικών συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών θεωρώντας τις ως γνωστικές λειτουργίες άμεσα συνδεδεμένες με τη δημιουργική σκέψη.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Tammadge (1979 στο Haylock, 1987), η δημιουργική σκέψη διέπεται από την ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων μεταξύ ιδεών που μέχρι στιγμής ήταν ασύνδετες. Άλλωστε, ο Vygotsky (1930/1984 στο Lev-Zamir & Leikin, 2011) παλαιότερα ανέφερε πως η δημιουργικότητα («φαντασία» κατά τους όρους του Vygotsky) είναι ένας από τους βασικούς μηχανισμούς που επιτρέπει την ανάπτυξη της νέας γνώσης. Ένα παιδί ενεργοποιεί τη φαντασία του όταν συνδέει παλαιότερες γνώσεις με νέες, δημιουργώντας ένα δίκτυο σχέσεων.

Τέλος, και ο Romey (1979) αναφέρει πως η ΔΜΣ εκδηλώνεται με την ικανότητα συνδυασμού και σύνδεσης διάφορων μαθηματικών ιδεών, τεχνικών ή προσεγγίσεων, που ενδεχομένως να ανήκουν και σε διαφορετικό τομέα, συνδεδεμένες με έναν καινούριο τρόπο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν ένας μαθητής συνδέει μια έννοια που έχει μάθει εντός ενός συγκεκριμένου μαθηματικού πλαισίου, με γνώσεις που έχει αποκομίσει από μια άλλη μαθηματική περιοχή, τότε μπορούμε να πούμε ότι συνδέει δυο διαφορετικές μαθηματικές έννοιες/περιοχές. Στην έρευνα των Lev-Zamir & Leikin (2011) όπου διάφοροι εκπαιδευτικοί ερωτήθηκαν σχετικά με το τι θεωρούν δημιουργικό κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, η εκπαιδευτικός Gili (σ.27) αναφέρει, μεταξύ άλλων: *«Υπήρξε πολύ δημιουργικότητα και σκέψη [10-1]. Δεν είχα ιδέα πού θα πήγαινε [10-2]. . . Ήταν συναρπαστικό κατά τη γνώμη μου. . . Αυτή η δραστηριότητα επιτρέπει τη σύνδεση πολλών αντικειμένων [10-3] _ αριθμητικών λειτουργιών, κλασμάτων, ταυτοτήτων. . . νομίζουν ότι δημιουργούν [10-4]»* αποκαλύπτοντας το πόσο δημιουργικό θεωρεί ίδια τη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών.

Το 2000, το NCTM (Εθνικό Συμβούλιο των Καθηγητών των Μαθηματικών) εξέδωσε το Πρόγραμμα Σπουδών και την Αξιολόγηση των Προτύπων (Standards) για τα Σχολικά Μαθηματικά. Ταυτόχρονα έθεσε και τέσσερα Κριτήρια Διαδικασίας, τα οποία συνιστούν τη μαθηματική διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές αφομοιώνουν τη μαθηματική γνώση, συμπεριλαμβάνοντας την ικανότητα των μαθητών για αναπαράσταση. Σύμφωνα με αυτό το Κριτήριο οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να επιλέξουν ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις όπως και να εφαρμόσουν πολλαπλές μαθηματικές αναπαραστάσεις κατά την επίλυση προβλημάτων (Van de Walle, 2001). Στο συγκεκριμένο πλαίσιο αναφέρεται και η επόμενη όψη της ΔΜΣ των μαθητών. Συγκεκριμένα, έχει επισημανθεί ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων από τους μαθητές συνιστά μια δημιουργική πράξη εκ μέρους τους. Οι Hwang, Chen, Dung & Yang (2007), σε πολλά σημεία στην έρευνά τους, συνδέουν άμεσα τη ΔΜΣ με την ικανότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Παρόμοιους ισχυρισμούς βρίσκει κανείς και στη δουλειά των Silver και Stein (1996).

Άλλη μια ένδειξη της ΔΜΣ είναι η ικανότητα σύνδεσης μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών περιοχών με τα Μαθηματικά. Οι Perry- Smith και Shalley (2003) υποστηρίζουν ότι οι άνθρωποι που έχουν πρόσβαση σε πληροφορίες από διαφορετικές επιστήμες και τις οποίες χρησιμοποιούν στο έργο τους, έχουν την τάση να είναι πιο δημιουργικοί καθώς έχουν στο δυναμικό τους περισσότερες εναλλακτικές και στρατηγικές. Έτσι, η προσκόλληση σε έναν και μόνο τομέα μπορεί να είναι καταστροφική για τη δημιουργική σκέψη. Για παράδειγμα, ένας αρχιτέκτονας με πολλές συνδέσεις με το επάγγελμα του γραφίστα, η οποία είναι μια σχετική αλλά διαφορετική περιοχή, είναι πιθανό να είναι περισσότερο δημιουργικός από έναν αρχιτέκτονα ο οποίος περιορίζεται μόνο στη δική του περιοχή. Δεν είναι μόνο ότι το πρόσωπο με εξωτερικές συνδέσεις θα εφαρμόσει γνωστές ιδέες από άλλους τομείς σε νέους τομείς αλλά ότι αυτές οι ιδέες θα επεκτείνουν, επίσης, τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι ίδιοι για τα προβλήματα (Perry-Smith, & Shalley, 2003).

Συνεχίζοντας στο πλαίσιο των δημιουργικών συνδέσεων που μπορεί να κάνει ένας μαθητής κατά την ενασχόλησή του με τα Μαθηματικά, ακολουθεί μια ακόμη όψη της ΔΜΣ των μαθητών: η ικανότητά τους να συνδέουν τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή. Σύμφωνα με τον Sriraman (2005) η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων που έχουν εμφανή αποτελέσματα στον πραγματικό κόσμο είναι ένα από τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής δημιουργικότητας. Θεωρεί πως είναι ζωτικής σημασίας οι σχολικές τάξεις να υιοθετήσουν μια τέτοια κουλτούρα ώστε οι μαθητές να βλέπουν τη χρησιμότητα αυτής της επιστήμης στη ζωή τους, με άμεση συνέπεια την καλλιέργεια της μαθηματικής τους δημιουργικότητας.

Στο πνεύμα αυτό, ο Balka (1974), αξιολογώντας τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη, ζήτησε από τους μαθητές να δημιουργήσουν μαθηματικά προβλήματα, τα οποία προκειμένου να απαντηθούν έπρεπε οι ίδιοι να αντλήσουν πληροφορίες από την καθημερινή ζωή. Ανάλογους ισχυρισμούς συναντάμε και στη δουλειά του Bonotto (2013), ο οποίος αξιοποίησε διάφορα μέσα και εργαλεία από την καθημερινή ζωή (π.χ. φυλλάδια από σούπερ μάρκετ) φτιάχνοντας τις κατάλληλες συνθήκες ώστε οι μαθητές να εκδηλώσουν τη ΔΜΣ τους. Σκοπός του ήταν να ελέγξει την ικανότητα δημιουργίας προβλημάτων από τους μαθητές, τα οποία προϋποθέτουν την ικανότητα σύνδεσης των Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή. Αυτή η ικανότητα των

μαθητών σχετίζεται με αυτό που ο Engynck (1991) αποκαλεί στάδιο δημιουργίας (*creative stage*) και το οποίο περιλαμβάνει τη λήψη αποφάσεων όπως π.χ. το πώς μπορεί να εκφρασθεί μια πραγματική κατάσταση της καθημερινής ζωής με μαθηματικούς όρους.

Μία τελευταία όψη της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης αποτελεί η παρουσία απρόσμενων λύσεων από τους μαθητές κατά την επίλυση και δημιουργία προβλήματος. Ο Ghiselin (1952 όπως αναφέρεται στο Haylock, 1987) μελετώντας τη φύση των γνωστικών διαδικασιών που συμβάλλουν στη δημιουργική σκέψη, αναφέρεται στο μετασχηματισμό της πληροφορίας από το μυαλό του λύτη προκειμένου να βρει νέες και απρόσμενες λύσεις ή απαντήσεις σε μια μαθηματική κατάσταση. Επίσης, ο Lindström (2006) δημιουργώντας μια ρουμπρίκα αξιολόγησης της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, και το χαρακτηριστικό της επινοητικότητας. Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης πτυχής αναφέρει τη δράση του μαθητή κατά την οποία δημιουργεί προβλήματα ή αναδιαμορφώνει τα προβλήματα που θέτει ο δάσκαλος, κάνει πειραματισμούς, είναι πρόθυμος να αναλάβει ρίσκα και συχνά βρίσκει απρόβλεπτες λύσεις.

1.5. Αξιολόγηση της Δημιουργικότητας

Αδιαμφισβήτητα, ο τρόπος αντικειμενικής εκτίμησης της δημιουργικότητας εμφανίζει κάποιες δυσχέρειες λόγω της πολυπλοκότητας που παρουσιάζει η ίδια η έννοια της δημιουργικότητας. Έτσι, οι διάφοροι ερευνητές, κατά καιρούς, προσπάθησαν να προσδιορίσουν κάποιο εργαλείο με σκοπό να αναγνωριστεί ένα δημιουργικό άτομο ή ένα δημιουργικό έργο, χωρίς να υπάρχει καθολική παραδοχή σχετικά με αυτό.

Αρχικά, η ανάγκη για αξιολόγηση της δημιουργικότητας οδήγησε στην ανάπτυξη των λεγόμενων «**ψυχομετρικών προσεγγίσεων**» (*psychometric approaches*) οι οποίες επικεντρώνονται κυρίως στην ιδέα της αποκλίνουσας σκέψης. Ο Guilford (1959) εισήγαγε ψυχομετρικά εργαλεία που αξιολογούν την αποκλίνουσα σκέψη (*divergent thinking*) ως βασικό στοιχείο δημιουργικότητας. Για παράδειγμα, ο εξεταζόμενος καλείται να καταγράψει όσες περισσότερες ενδιαφέρουσες και ασυνήθιστες χρήσεις ενός τούβλου μπορούσε να σκεφτεί στο τεστ *‘Unusual Uses*

Test' (Guilford, Christensen, Merrifield, & Wilson, 1960). Ακολούθως, ο Torrance (1974) ήταν μεταξύ των βασικών συντελεστών αυτής της προσέγγισης. Στη δεκαετία του 60 'και 70' καθιέρωσε τη «μέτρηση» της δημιουργικότητας με βάση τέσσερα κριτήρια: την ευχέρεια, την ευελιξία, την επεξεργασία και την πρωτοτυπία, ασκώντας μεγάλη επιρροή στις μετέπειτα έρευνες.

Πιο συγκεκριμένα, οι ψυχομετρικές προσεγγίσεις για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας θεωρούν τη δημιουργικότητα ως ένα γενικευμένο, αντικειμενικό και μετρήσιμο φαινόμενο δίνοντας έμφαση στην επίδοση του ατόμου και στο αποτέλεσμα των νοητικών του διεργασιών. Τα τεστ που χρησιμοποιούνται είναι απόλυτα σταθμισμένα και τυποποιημένα, προσφέροντας άμεσα αποτελέσματα μέσα σε λίγο χρόνο για τις επιδόσεις των εξεταζόμενων (MC Squared, 2015).

Παρόλα αυτά, γίνεται αρκετή συζήτηση γύρω από την αξιολόγηση με τεστ τέτοιου τύπου, σχετικά με το εάν μετρούν πραγματικά σημαντικές πτυχές της εννοιολογικής κατασκευής (Sternberg & O' Hara, 1999). Έτσι, ύστερα από την κριτική των ψυχομετρικών τεστ, η αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας γίνεται περισσότερο αναλυτική, καθώς δίνεται περισσότερη έμφαση σε γνωστικά χαρακτηριστικά τα οποία έως τότε παραγνωρίζονταν.

Το κενό των προηγούμενων προσεγγίσεων ήρθαν να καλύψουν οι «**γνωστικές προσεγγίσεις**» (*cognitive approaches*) που διαμορφώθηκαν για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας. Οι συγκεκριμένες προσεγγίσεις εστιάζουν στην ανάλυση των γνωστικών διαδικασιών που σχετίζονται με τους δημιουργικούς συλλογισμούς (*creative reasoning*) (Sternberg & Davidson, 1995). Αυτές οι προσεγγίσεις μελετούν τις νοητικές διεργασίες οι οποίες υποβόσκουν κατά τη δημιουργική διαδικασία, περιλαμβάνοντας τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, την κατασκευή νοητικών συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών αντικειμένων, την παροχή εξηγήσεων και αιτιολογήσεων, την ανάπτυξη κριτικής σκέψης, τη λήψη αποφάσεων και τη μεταγνώση που πραγματοποιούν τα άτομα με βάση τις υπάρχουσες γνώσεις τους (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013).

Στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος, χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της προσέγγισης αποτελούν τα τέσσερα στάδια του Wallas (1926): προετοιμασία (*preparation*), επώαση (*incubation*), επιφοίτηση (*illumination*), επαλήθευση

(*verification*) (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013· Lin & Lien, 2013). Ένα από τα αντιπροσωπευτικά προβλήματα αυτής της προσέγγισης αποτελούν τα προβλήματα διορατικότητας (*insight problems*) (π.χ. *the candle problem*, Duncker, 1945), όπου οι λύτες ενώ στην αρχή της επίλυσης συχνά συναντούν εμπόδια, κατά την πορεία της επίλυσης έρχονται σε μια ξαφνική ‘‘Aha!’’ λύση (Liljedahl, 2013).

Επιπλέον, έχει υποστηριχθεί πως η δημιουργικότητα αποτελεί μια «εγκαθιδρυμένη» (*situated*) δραστηριότητα, όπου η αποτίμησή της καθορίζεται και συζητιέται στη βάση όλων των εμπλεκόμενων παραγόντων. Έτσι, αναδείχθηκε η ανάγκη για νέους τύπους αξιολόγησης οι οποίες λαμβάνουν υπόψη το περιβαλλοντικό κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο εξελίσσεται η μάθηση (Amabile, 1996). Η συγκεκριμένη φιλοσοφία αφορά τις επόμενες προσεγγίσεις αξιολόγησης της δημιουργικότητας, τις «κοινωνικοπολιτισμικές» (*social-personality approaches*), οι οποίες εστιάζουν σε κοινωνικές και προσωπικές διαστάσεις, δίνοντας έμφαση τόσο σε συναισθηματικούς παράγοντες, όσο και σε κοινωνικοπολιτισμικά χαρακτηριστικά ως πηγές δημιουργικότητας (Sternberg and Lubart, 1999).

Οι ερευνητές αυτής της προσέγγισης μελετούν διαστάσεις της προσωπικότητας του δημιουργικού ατόμου, όπως η δεκτικότητα (*openness*) η σχολαστικότητα (*conscientiousness*), η εξωστρέφεια (*extroversion*), ο νευρωτισμός (*neuroticism*), η αυτό-εικόνα (*self- concept*), το άγχος (*anxiety*) και ο βαθμός που το άτομο τείνει να παίρνει ρίσκα (*risk taking*) (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Επιπλέον, σύμφωνα με τον Sawyer (1995), μια δημιουργική διαδικασία από κοινωνικής σκοπιάς μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεργατική υπόθεση, όπου η δημιουργικότητα προκύπτει από σύνθετες διεργασίες αλληλεπίδρασης. Οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις φαίνεται να είναι αλληλένδετες καθώς σύμφωνα με τον Sternberg (2006) η δημιουργικότητα εξαρτάται από έξι διακριτές αλλά αλληλοσχετιζόμενες πηγές: διανοητικές ικανότητες, γνώση, γνωστικά στυλ σκέψης, προσωπικότητα, κίνητρο και περιβάλλον.

Έτσι, οι τελευταίες προσεγγίσεις συνοψίζονται σε μια ενιαία κατηγορία με το όνομα «συνθετικές προσεγγίσεις» (*componential approaches*). Η συγκεκριμένη προσέγγιση αναγνωρίζει τις πολλαπλές συνιστώσες στη φύση της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης, οι οποίες καθίστανται δυνατές από τις αλληλένδετες

γνωστικές διαδικασίες (λήψης αποφάσεων, μεταγνώσεων και κριτικής σκέψης) και εκφράζονται τόσο σε προσωπικό όσο και σε κοινωνικό πλαίσιο. Προσφέρουν μια πιο ολιστική, δυναμική και εγκαθιδρυμένη εννοιολόγηση της δημιουργικότητας. Προσδιορίζουν το ρόλο του πλαισίου στη διαμόρφωση τόσο της δημιουργικής δραστηριότητας όσο και του δημιουργικού προϊόντος, λαμβάνοντάς το υπόψη στη μέτρηση. Τέλος, δεν αξιολογούν τη δημιουργικότητα ως μια γενική ικανότητα αλλά μάλλον ως μια εγκαθιδρυμένη δραστηριότητα η οποία αφορά έναν συγκεκριμένο τομέα (πχ. τα Μαθηματικά) και η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε ατομικά είτε σε ομάδες (ή και στα δύο). Οι κρίσεις για το αν κάτι είναι δημιουργικό προέρχεται από όλους του εμπλεκόμενους (εκπαιδευτικούς/ερευνητές, μαθητές) ακόμα και από το δημιουργό τους (Hennessey, & Amabile, 1999). Η αξιολόγηση της δημιουργικότητας που προκύπτει από τις συνθετικές προσεγγίσεις έχει περισσότερο διαμορφωτικό παρά αθροιστικό χαρακτήρα (Spencer, Lucas, & Claxton, 2012). Αυτές οι προσεγγίσεις ενδείκνυνται για τη χρησιμοποίησή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία καθώς εμπλέκουν όλους τους φορείς της εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένων των φοιτητών, των μαθητών και των εκπαιδευτικών σε «παιδαγωγικά πλούσιες» μορφές αξιολόγησης της δημιουργικότητας (Barquero, Papadopoulos, Barajas, & Kynigos, 2016).

Ωστόσο, παρόλο που θεωρητικά και ερευνητικά έχουν τεθεί τα θεμέλια για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας, εντός του σχολικού πλαισίου υπάρχουν ακόμα αρκετοί περιορισμοί. Αν και πολλά Αναλυτικά Προγράμματα ανά τον κόσμο κάνουν σαφή λόγο για την ενσωμάτωση της δημιουργικότητας στη διδακτική πράξη, τα Προγράμματα που τελικά εφαρμόζονται εστιάζουν την αξιολόγησή τους σε αποτελέσματα που είναι περισσότερο εύκολο να αξιολογηθούν αν και δεν είναι τόσο σημαντικά από εκπαιδευτικής άποψης. Γι' αυτό, φαίνεται, πως η προσοχή εστιάζεται στην αξιολόγηση του μιμητικού συλλογισμού των παιδιών (*imitative reasoning*), παρά στην αποτίμηση του δημιουργικού συλλογισμού (*creative reasoning*) (Askew, 2013). Το πρώτο, σύμφωνα με τον Boesen (2006) περιλαμβάνει την ανάκληση πληροφοριών και αλγορίθμων ενώ το δεύτερο ενέχει στοιχεία δημιουργικότητας, όπως την καινοτομία και την ευελιξία.

Ειδικότερα, στη μαθηματική εκπαίδευση, οι δάσκαλοι φαίνεται να αποφεύγουν τόσο τη χρήση δημιουργικών προβλημάτων όσο και την προσπάθεια

αξιολόγησης της δημιουργικής σκέψης. Μια εξήγηση είναι ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη γνώση άρα και την αυτοπεποίθηση σε θέματα που αφορούν την αξιολόγηση της δημιουργικότητας των μαθητών τους (NACCCE, 1999). Σύμφωνα με την έρευνα του Boesen (2006), η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών έχουν την άποψη ότι μόνο ένα μικρό τμήμα των μαθητών είναι ικανοί να ασχοληθούν με τέτοιου είδους προβλήματα. Ακόμα, ισχυρός ανασταλτικός παράγοντας, κατά τον Boesen (2006) είναι και η άποψη των εκπαιδευτικών για τη φύση των τεστ δημιουργικότητας που υπάρχουν, τα οποία είτε δεν έχουν προσπαθήσει οι ίδιοι να καταλάβουν είτε δεν έχουν την κατάλληλη κατάρτιση ώστε να τα χρησιμοποιήσουν και να εισαχθούν στη λογική τους.

Για τους παραπάνω λόγους είναι σημαντικό να γίνει μια αλλαγή στην κουλτούρα των εκπαιδευτικών σχετικά με την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, έτσι ώστε να επιτρέπεται στους ίδιους να αναπτύσσουν τα δικά τους έργα αξιολόγησης, σύμφωνα με τις ανάγκες, το επίπεδο και την εξέλιξη των μαθητών τους (Askew, 2013).

1.6. Ανασκόπηση Εμπειρικών Ερευνών

Όπως ήδη έχει γίνει αντιληπτό, όσον αφορά την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας στην εκπαίδευση δεν έχουν προσδιοριστεί καθολικά η φύση και οι προϋποθέσεις της. Έτσι, η αξιολόγησή της ΔΜΣ θέτει μια σειρά ερωτήσεων, οι οποίες αφορούν τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η μαθηματική δημιουργικότητα, τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της ΔΜΣ που αξιολογούνται και μετρώνται, τα μέσα και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση και, τέλος, το πώς μπορεί να επιτευχθεί κάποια συνοχή στην αξιολόγησή της, δεδομένου ότι οι κρίσεις σχετικά με τη ΔΜΣ έχουν συχνά υποκειμενικό χαρακτήρα.

Πολλοί ερευνητές έχουν κατά καιρούς προσπαθήσει να αξιολογήσουν τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη των μαθητών χρησιμοποιώντας διάφορα εργαλεία, βασιζόμενοι στις δικές τους αντιλήψεις για το τι συνιστά δημιουργικότητα. Ειδικότερα, στη μαθηματική εκπαίδευση τα τελευταία χρόνια έχει αυξηθεί ο αριθμός των εμπειρικών ερευνών που αξιολογούν και μετρούν τη δημιουργική σκέψη των

μαθητών. Σημειώνεται, ότι οι περισσότερες έρευνες κινούνται γύρω από τη δεύτερη προσέγγιση (βλ. παραπάνω) της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης, δηλαδή εξετάζουν τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη στο πλαίσιο της επίλυσης και δημιουργίας προβλήματος.

Επιπροσθέτως, σε προηγούμενο κεφάλαιο επισημάνθηκε ότι οι μελέτες της ΔΜΣ εστιάζουν σε τέσσερις διαστάσεις: στη δημιουργική διαδικασία (*process*), στο δημιουργικό προϊόν (*product*), στη δημιουργική προσωπικότητα (*personality*) και στους περιβαλλοντικούς παράγοντες που επηρεάζουν το δημιουργό (*press*). Ωστόσο, οι περισσότερες έρευνες στο συγκεκριμένο ερευνητικό πεδίο ακολουθούν σύμφωνα με τον Dunn (1975) τους ακόλουθους δύο τύπους: (α) χρησιμοποιώντας «διαγνωστικά» τεστ με τα οποία «μετريούνται» οι γνωστικές πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας {εστιάζοντας στην αξιολόγηση της διαδικασίας (*process*) της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης}, και (β) χρησιμοποιώντας κριτήρια αξιολόγησης για την αξιολόγηση του τελικού προϊόντος αυτών των διεργασιών {με έμφαση στην αξιολόγηση του προϊόντος (*product*) της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης}.

Έρευνες που αξιολογούν τη δημιουργική διαδικασία

Η αξιολόγηση της δημιουργικής διαδικασίας κινείται γύρω από τρεις κατηγορίες μελετών: (α) τις ψυχομετρικές ποσοτικοποιήσεις των επιδόσεων των ατόμων κατά τη δημιουργία ιδεών (β) τις πειραματικές μελέτες των γνωστικών διεργασιών που διενεργούνται κατά τη δημιουργία νέων ιδεών και (γ) τον προσδιορισμό και τη χαρτογράφηση των σταδίων της συμμετοχής ενός ατόμου στη δημιουργική εργασία (MC Squared, 2015).

Η **πρώτη πτυχή** είναι μακροχρόνια στο συγκεκριμένο τομέα έρευνας και στόχος της είναι η ποσοτικοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας. Τα μέτρα αξιολόγησης βασίζονται στα κριτήρια της ευχέρειας (ποσότητα των ιδεών), της ευελιξίας (ποικιλία προοπτικών που παρουσιάζονται στις ιδέες), της πρωτοτυπίας και της επεξεργασίας ιδεών (η σκέψη ‘πηγαίνει ένα βήμα παραπέρα’). Πολλά τεστ αποκλίνουσας σκέψης που ανήκουν στις ψυχομετρικές προσεγγίσεις έχουν αναπτυχθεί και εφαρμόζονται σε αυτό το πεδίο έρευνας, προκειμένου να παρέχουν ένα μετρήσιμο μέγεθος για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας ως μια διαδικασία

σκέψης. Έτσι, μέχρι στιγμής, σχεδόν όλα τα τεστ αξιολόγησης της ΔΜΣ ακολουθούν το σκεπτικό της συγκεκριμένης παράδοσης καθώς έχουν σχεδιαστεί για να αξιολογούν τις ακόλουθες τέσσερις γνωστικές πτυχές (κριτήρια) μιας δημιουργικής διαδικασίας (El-Demerdash & Kortenkamp, in Press, Cohen, 1972): την ευχέρεια (*fluency*), την ευελιξία (*flexibility*), την πρωτοτυπία (*originality*) και την επεξεργασία (*elaboration*).

Οι Getzels και Jackson (1962) ανέπτυξαν ένα τέτοιο πακέτο με τεστ που αξιολογούν τη ΔΜΣ των μαθητών με τον τίτλο *'Four creativity measures: word associations, unusual uses, hidden shapes, make-up problems'*. Οι ίδιοι βαθμολογούν τα προβλήματα ανάλογα με την πολυπλοκότητα των διαδικασιών που θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές για να επιτευχθεί μια λύση (δηλ. τον αριθμό και τον τύπο των αριθμητικών πράξεων που χρησιμοποιήθηκαν) και αξιοποίησαν τα αποτελέσματα ως μέτρο της ΔΜΣ. Άλλες δραστηριότητες που χρησιμοποίησαν οι Getzels και Jackson αξιολογούν την ευχέρεια και την πρωτοτυπία των απαντήσεων σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων ή και πολλαπλών προσεγγίσεων. Επιπλέον, στόχος των ερευνητών είναι να μελετήσουν τη σχέση μεταξύ της ΔΜΣ και της νοημοσύνης (IQ) των μαθητών, χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο τεστ σε ένα πολύ μεγάλο δείγμα μαθητών από την Έκτη τάξη μέχρι και το Λύκειο. Τέσσερα από τα πέντε τεστ δημιουργικότητας συσχετίστηκαν σημαντικά με το IQ για τα κορίτσια, και τα πέντε από αυτά τα τεστ συσχετίστηκαν σημαντικά με το IQ για τα αγόρια. Έτσι, τα αποτελέσματα του Getzels-Jackson έδειξαν ότι η δημιουργικότητα και η ευφυΐα ταυτίζονται.

Στην ίδια πτυχή έρευνας οι Kwon, Park και Park (2006) μελέτησαν τη σχέση μεταξύ μαθηματικής δημιουργικότητας και επίλυσης προβλημάτων. Οι συγκεκριμένοι μιλούν για τη μαθηματική δημιουργικότητα με όρους δημιουργίας νέων γνώσεων και ικανότητας ευέλικτης επίλυσης προβλημάτων. Σκοπός της μελέτης τους είναι να αναπτύξουν ένα παρεμβατικό πρόγραμμα που θα βοηθά στην καλλιέργεια της αποκλίνουσας σκέψης στα Μαθηματικά μέσω ανοικτών προβλημάτων. Οι συμμετέχοντες ήταν 398 μαθητές της 7^{ης} τάξης που φοιτούσαν σε σχολεία Μέσης Εκπαίδευσης στη Σεούλ. Χρησιμοποιήθηκαν pre και post tests και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές των ομάδων παρέμβασης είχαν καλύτερη απόδοση συνολικά σε κάθε γνωστική πτυχή αποκλίνουσας σκέψης, οι οποίες

περιλαμβάνουν την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία, απ' ότι οι υπόλοιποι μαθητές που δε δέχθηκαν κάποια παρέμβαση. Οι Kwon et al (2006) προτείνουν πως το συγκεκριμένο πρόγραμμα μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των δασκάλων ενισχύοντας τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη των μαθητών και προτείνουν ότι οι ανοιχτού τύπου προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών προσφέρουν το κατάλληλο έδαφος για τη διερεύνηση των προοπτικών και των δυνατοτήτων βελτίωσης της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Οι Lee, Hwang και Seo (2003) ανέπτυξαν, επίσης, ένα τεστ, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη δημιουργική επίλυση μαθηματικού προβλήματος για χαρισματικούς και μη μαθητές. Αυτό το εργαλείο-τεστ μετρά, επίσης, τρεις κατηγορίες της ΔΜΣ: την ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία σε 462 μαθητές Γυμνασίου. Ύστερα από την ανάλυση ερωτημάτων (*item analysis*) οι Lee et al., διαπίστωσαν ότι το εργαλείο τους είναι χρήσιμο για την αξιολόγηση της ικανότητας επίλυσης δημιουργικών προβλημάτων στο μαθηματικά.

Κλείνοντας τη συγκεκριμένη πτυχή έρευνας, οι Klavir & HersHKovitz (2008), προτείνουν ένα εργαλείο αξιολόγησης της ΔΜΣ των μαθητών μέσω ανοιχτών προβλημάτων, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Το εργαλείο χορηγήθηκε σε 164 μαθητές της Πέμπτης τάξης. Το συγκεκριμένο εργαλείο μέσα από τα δεδομένα που συλλέγει κάνει διάκριση στα διάφορα είδη μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, στα επίπεδα πολυπλοκότητας της μαθηματικής τους σκέψης και στα επίπεδα της Δημιουργικής Μαθηματικής τους Σκέψης όσον αφορά τις βασικές γνωστικές πτυχές (ευχέρεια, ευελιξία και επεξεργασία). Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας, γίνεται εμφανές ότι υπάρχουν σημαντικές ατομικές διαφορές μεταξύ των μαθητών. Οι Klavir & HersHKovitz (2008) προτείνουν ότι η ανάλυση των διαφορών μπορεί να οδηγήσει τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων και τον τρόπο σκέψης τους στην τάξη. Αυτό γίνεται με την εξέταση και τη σύγκριση των βαθμολογιών των διαφόρων μαθητών σε κάθε πτυχή (*fluency, flexibility, elaboration*). Μια τέτοια σύγκριση μπορεί να χρησιμεύσει ως διδακτικό εργαλείο για την ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών που δεν πέτυχαν υψηλά επίπεδα και να ενθαρρύνει εκείνους που πέτυχαν σε μία πτυχή να προχωρήσουν περαιτέρω στην απόδοσή τους. Ακόμα, η ανάλυσή τους προχωρά και στο επίπεδο της τάξης,

αξιολογώντας την συνολική εικόνα της τάξης σχετικά με τη Δημιουργική Μαθηματική τους Σκέψη, δηλαδή εντοπίζει τα «δυνατά» και τα αδύναμα» σημεία της τάξης ως δυναμικό σύνολο.

Η δεύτερη πτυχή της έρευνας της ΔΜΣ ως διαδικασία ξεφεύγει από την ψυχομετρική παράδοση και επιδιώκει να εντοπίσει τις ατομικές διαφορές της δημιουργικής σκέψης των ατόμων και βασίζεται στην πειραματική παράδοση της γνωσιακής ψυχολογικής έρευνας. Οι ερευνητές αυτής της κατηγορίας επικεντρώνονται στο πώς ορισμένες νοητικές γνωστικές διαδικασίες (ή συνδυασμοί αυτών) χρησιμοποιούνται από άτομα όταν εμπλέκονται σε δημιουργικές δραστηριότητες. Αυτές οι διαδικασίες μπορούν να παράγουν κάποιου είδους δημιουργική εκδήλωση είτε αυτή αναγνωρίζεται ως αξιοσημείωτη συμβολή σε κάποιο πεδίο (*Big C* - δημιουργικότητα), είτε είναι στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής του ατόμου (*little c* - δημιουργικότητα) (Papadopoulos et al., 2015).

Για παράδειγμα, οι ερευνητές σε αυτή την πτυχή υποστηρίζουν ότι νέες ιδέες μπορεί να προκύψουν από την επέκταση των ορίων μιας ήδη υπάρχουσας έννοιας (εννοιολογική επέκταση) (Ward, Smith, & Vaid, 1997). Επιπρόσθετα, η σύνθεση προηγούμενων διαφορετικών εννοιών και ιδεών μπορεί να οδηγήσει σε νέες δομές γνώσης αντιπροσωπεύοντας υψηλότερους βαθμούς δημιουργικότητας (Wilkenfeld, 1995). Έτσι, εδώ οι ερευνητές ενδιαφέρονται να μελετήσουν πώς τα «δημιουργικά προϊόντα» με τη μορφή εννοιών και ιδεών, προκύπτουν από την εφαρμογή διανοητικών διαδικασιών και μηχανισμών.

Οι Goldschmidt & Tatsa (2005) διερεύνησαν με πειραματικές μεθόδους τις συνθήκες, δηλαδή το πότε και πώς προκύπτουν οι δημιουργικές ιδέες, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως «καλές» και οδηγούν σε ένα «καλό» προϊόν. Σε αυτή την έρευνα τεκμηριώνεται το γεγονός ότι οι ιδέες που μοιράζονται μπορούν και συνδέονται με άλλες ιδέες δημιουργώντας ένα πλούσιο δίκτυο δημιουργικών ιδεών. Η συγκεκριμένη μελέτη παρέχει εμπειρικές αποδείξεις, σχετικά με τον μηχανισμό που είναι υπεύθυνος για την κατασκευή των «καλών ιδεών» και προτείνει ότι ο αριθμός και η πυκνότητα των συνδέσεων που δημιουργούνται μεταξύ των ιδεών είναι ενδεικτικές της δημιουργικότητας της διαδικασίας και του τελικού προϊόντος.

Τέλος, η **τρίτη πτυχή** της έρευνας γύρω από τη διαδικασία της δημιουργικής σκέψης, επιχειρεί να εφαρμόσει μια περισσότερο συστηματική προσέγγιση στη μελέτη της. Ενώ το μοντέλο της γνωσιακής ψυχολογίας απευθύνεται στη δημιουργική διαδικασία σε μικρο-επίπεδο, προσπαθώντας να περιγράψει και να εξηγήσει πώς συγκεκριμένες γνωσιακές διαδικασίες επιτρέπουν το σχηματισμό δομών γνώσης, οι επιστήμονες που εργάζονται στο τρίτο σκέλος της έρευνας, δίνουν έμφαση στη χαρτογράφηση των σταδίων ή μιας εξελικτικής πορείας, μέσω της οποίας ένα άτομο εμπλέκεται στη δημιουργική εργασία που οδηγεί στην παραγωγή κάποιου είδους δημιουργικού προϊόντος. Επομένως, η δημιουργική διαδικασία απευθύνεται σε μακρο-επίπεδο και ο στόχος είναι να εντοπιστούν οι ομάδες διαδικασιών, αποφάσεων ή κινήσεων (και σε ποια σειρά ή γύρους επαναλήψεων) που οδηγούν στην υλοποίηση ενός δημιουργικού προϊόντος, είτε πρόκειται για μια ιδέα είτε για οποιαδήποτε άλλη κατασκευή που παράγεται στην πορεία προς το τελικό αποτέλεσμα ή για το ίδιο το τελικό αποτέλεσμα (MC Squared, 2015).

Έχουν προταθεί πολλά μοντέλα δημιουργικών διαδικασιών, παλαιότερο από τα οποία είναι αυτό του Wallas (1926). Το συγκεκριμένο μοντέλο, στο οποίο έχει ήδη γίνει αναφορά, επηρεάζεται από την ψυχολογία Gestalt και περιγράφει τη δημιουργική διαδικασία ως την πορεία καθορισμένων σταδίων: την προετοιμασία (*preparation*), την επώαση (*incubation*), την επιφοίτηση (απόδοση στα ελληνικά ή κατ' άλλους «φωτισμός», «έμπνευση») (*illumination*) και την επιβεβαίωση (*verification*). Κατά τη διάρκεια του σταδίου της προετοιμασίας, ένας μαθητής πρέπει να συνειδητοποιήσει το πρόβλημα και να συγκεντρώσει σχετικές πληροφορίες από την προηγούμενη εμπειρία του. Κατά τη διάρκεια του σταδίου της επώασης, ο μαθητής εξετάζει όλες τις πιθανές λύσεις. Ένα μεγάλο μέρος της δημιουργικής διαδικασίας παραμένει σε αυτή την 'γκρίζα' περιοχή καθώς σπουδαίο ρόλο παίζει το ασυνείδητο πριν από οποιαδήποτε Aha! στιγμή. Κατά τη φάση φωτισμού, μια καινοτόμος ιδέα μπορεί ξαφνικά να έρθει στο άτομο και κατά τη διάρκεια του σταδίου της επαλήθευσης, η λύση εκτελείται και επαληθεύεται. Η μελέτη αυτών των σταδίων αποτελεί κεντρικό ζήτημα για τη δημιουργικότητα έρευνα.

Ο Liljedahl (2013) ακολουθεί μια τέτοια γνωστική προσέγγιση στην αξιολόγηση της ΔΜΣ, προσπαθώντας να κατανοήσει τις διανοητικές αναπαραστάσεις και διαδικασίες που υποβόσκουν κατά τη δημιουργική σκέψη. Το ενδιαφέρον του

εστιάζεται σε μια προσπάθεια να διερευνήσει τη φάση του φωτισμού (*illumination*) τόσο σε επαγγελματίες μαθηματικούς όσο και σε εν δυνάμει εκπαιδευτικούς. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι, εάν και η συγκεκριμένη φάση (*illumination*) εκδηλώθηκε διαφορετικά στους δύο πληθυσμούς, αυτό που ξεχωρίζει το φωτισμό από τις άλλες μαθηματικές εμπειρίες είναι οι συναισθηματικές πτυχές (*affective aspects*) της εμπειρίας. Δηλαδή, αυτό που κάνει την ‘*AHA! Experience*’ εξέχουσα μεταξύ των άλλων, είναι τα συναισθήματα που βιώνει κάποιος κατά την εμπειρία μια απρόοπτης ιδέας ή λύσης. Για τους διδάσκοντες των μαθηματικών αυτή η εμπειρία τους γεμίζει με θετικά συναισθήματα προκαλώντας αλλαγές στις πεποιθήσεις και τις στάσεις τους, όπως και για τους επαγγελματίες μαθηματικούς. Παρόλο, όμως, που η εμπειρία για τους δεύτερους δεν είναι απόλυτα συναισθηματική, κατά τη διάρκεια αυτών των φωτεινών αναλαμπών υπήρχαν εξίσου συναισθηματικές διαστάσεις και γι’ αυτούς.

Τα μοντέλα σταδίων μπορούν να αποτελέσουν ένα χρήσιμο πλαίσιο για την περιγραφή της εξέλιξης της δημιουργικής διαδικασίας στο σύνολό της. Ωστόσο, μια ισχυρή κριτική για αυτούς είναι ότι υποστηρίζουν την παραδοχή ότι όλα τα άτομα ακολουθούν την ίδια «πορεία» της δημιουργικής διαδικασίας, περνούν από τα ίδια στάδια και με την ίδια σειρά (Gruber, 1988). Η δημιουργική συμπεριφορά δεν μπορεί να ακολουθεί ένα κανονιστικό πρότυπο ανάπτυξης καθώς υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν τη δημιουργική διαδικασία, όπως είναι κοινωνικοί, πολιτιστικοί, περιβαλλοντικοί όπως και η ιδιαιτερότητα του κάθε τομέα αναφοράς.

Έρευνες που αξιολογούν το Δημιουργικό Προϊόν

Οι έρευνες που αξιολογούν τα δημιουργικά μαθηματικά προϊόντα βασίζονται κυρίως στην ποσοτικοποίηση των δεδομένων καθώς πιστεύεται ότι αυτά μπορούν να μετρηθούν. Τα δημιουργικά προϊόντα μπορούν επίσης συχνά να εξεταστούν και να κριθούν άμεσα, έτσι η αξιοπιστία μεταξύ των κριτών μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί. Τα μειονεκτήματα σχετικά με αυτές τις έρευνες είναι ότι λίγα μπορούν να ειπωθούν για τη δημιουργική διαδικασία που δημιούργησε το δημιουργικό προϊόν (Runco, 1996).

Η προσέγγιση του δημιουργικού προϊόντος επικεντρώνεται στα αποτελέσματα των δημιουργικών διαδικασιών (Sternberg & Lubart, 1999), τα οποία

σχετίζονται κυρίως με τη δημιουργία κάποιων πρωτότυπων (*original or new*), και χρήσιμων (*valuable and useful, and/or elaborate and feasible*) προϊόντων (Chamberlin & Moon, 2005). Όπως αναφέρει ο Mayer (1999, σ. 449) πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν αυτή την ιδέα. Οι Gruber και Wallace (1989) έχουν δηλώσει ότι με τη δημιουργική εργασία εννοούμε το δημιουργικό προϊόν το οποίο πρέπει να είναι νέο και να έχει αξία σύμφωνα με μερικά εξωτερικά κριτήρια. Η Martindale (1999) επίσης, αναφέρει ότι δημιουργική ιδέα είναι αυτή που χαρακτηρίζεται ως πρωτότυπη αλλά και ταυτόχρονα κατάλληλη στο πλαίσιο της κατάστασης που αναπτύσσεται.

Η σημαντικότητα των παραγόμενων προϊόντων έχει αναγνωρισθεί εδώ και δεκαετίες (Besemer & Treffinger, 1981). Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι περισσότερες μετρήσεις της δημιουργικότητας προϊόντος μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στους ακόλουθους τρεις βασικούς άξονες: έμμεσες μετρήσεις (*Indirect measures*), καθολικές μετρήσεις (*Global judgment*) και μετρήσεις στη βάση κριτηρίων (*Criterion-based measures*) (Besemer, & O' Quin, 1999).

Οι έμμεσες μετρήσεις (*Indirect measures*), επικεντρώνονται στις δημιουργικές επιπτώσεις ενός προϊόντος. Οι περισσότερες μετρήσεις αυτού του είδους ονομάζονται επίσης «δείκτες» (Kwan & Soverall, 2007).

Συνολική/ Καθολική αξιολόγηση (*Global judgment*) εφαρμόζονται όταν οι άνθρωποι καλούνται να αξιολογήσουν την «δημιουργικότητα» των προϊόντων με ένα γενικότερο ή / και ολιστικό τρόπο, χωρίς να βασίζονται σε συγκεκριμένα κριτήρια. Μετρήσεις αυτού του είδους έχουν χαρακτηριστεί ότι προσφέρουν ένα «αποτελεσματικό δείκτη αισθητικής αξίας». Παρόλα αυτά, ενδείκνυνται λιγότερο για ποσοτικές μετρήσεις (Getzels & Csikszentmihalyi, 1976).

Η πλέον διαδεδομένη μεταξύ των μετρήσεων της δημιουργικότητας που επικεντρώνονται στο προϊόν είναι η τρίτη κατηγορία, οι αποκαλούμενες **μετρήσεις με βάση ένα κριτήριο** (*Criterion-based measures*). Η ουσία αυτής της προσέγγισης συνοψίζεται στα λόγια των Cropley, Kaufman & Cropley (2011, σελ. 17), τα οποία αναφέρουν: «η δημιουργικότητα δεν αφορά αποκλειστικά μια καλή ή κακή ποιότητα ενός προϊόντος – ωστόσο υπάρχουν επίπεδα και είδη δημιουργικότητας. Η δημιουργικότητα δεν είναι κάτι που τα προϊόντα είτε έχουν είτε δεν έχουν. Τα

διαφορετικά προϊόντα μπορούν να έχουν δημιουργικότητα σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό, ή μπορούν να εμφανίζουν διαφορετικά είδη». Έτσι, η δημιουργικότητα ενός προϊόντος μπορεί να εκτιμηθεί με βάση μια σειρά κριτηρίων, πάνω στα οποία έχουν συμφωνήσει εμπειρογνώμονες στον τομέα ή από τους ίδιους τους δημιουργούς.

Κάποια από τα βασικά μοντέλα που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία σχετικά με αυτόν τον άξονα:

1. Το Λειτουργικό Μοντέλο (*Functional Model of Creativity*): Το συγκεκριμένο αναπτύχθηκε από τους Cropley, & Cropley (2005) και υποστηρίζει ότι τα νέα προϊόντα πρέπει να εξυπηρετούν κάποιο χρήσιμο κοινωνικό σκοπό. Οι συγγραφείς εντοπίζουν και αξιολογούν πέντε διαστάσεις στη δημιουργικότητα των προϊόντων: τη σχετικότητα και αποτελεσματικότητα (*relevance and effectiveness*), τον προβληματισμό (*problematization*), την πρόωση (*propulsion*), την κομψότητα (*elegance*) και τη γένεση (*genesis*).
2. Η Κλίμακα Διαβάθμισης (*Rating Scales Approach*): Η συγκεκριμένη αναφέρεται σε παρατηρήσιμα χαρακτηριστικά των προϊόντων ως «δείκτες» της δημιουργικότητας. Αυτοί προτείνουν την χρήση κλιμάκων αξιολόγησης που χρησιμοποιούνται ως μέσα μέτρησης κριτηρίων και οι οποίες περιλαμβάνουν μικρότερες μονάδες, όπως όψεις, χαρακτηριστικά ή δείκτες του δημιουργικού προϊόντος (Cropley Kaufman, & Cropley, 2011)

Στο πλαίσιο των Μαθηματικών, μια κλίμακα μέτρησης με βάση ένα κριτήριο χρησιμοποίησαν οι Chamberlin & Moon, (2005, σελ. 38) υποστηρίζοντας ότι η δημιουργικότητα ενός μαθητή προσδιορίζεται από την «*ασυνήθιστη ικανότητα να παράγει νέες και χρήσιμες λύσεις σε προσομοιωμένα ή πραγματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας τη μαθηματική μοντελοποίηση*». Οι ερευνητές χρησιμοποιούν Δραστηριότητες Μοντελοποίησης (MEAs) σε μαθητές Δημοτικής και Μέσης Εκπαίδευσης όπου οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν νέες και χρήσιμες λύσεις σε προσομοιωμένα ή πραγματικά μαθηματικά προβλήματα. Έτσι, στα πλαίσια αυτής της έρευνας σχεδιάστηκε ένας «Οδηγός Αξιολόγησης» των δημιουργικών προϊόντων, με σκοπό να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να αξιολογούν τα προϊόντα που δίνονται/δίνουν ως απαντήσεις στις συγκεκριμένες δραστηριότητες

(MEAs) με βάση τη χρηστικότητα τους (*How useful is the product?*). Τελικός σκοπός της έρευνας είναι να προτείνει το συγκεκριμένο εργαλείο αξιολόγησης των δημιουργικών μαθητών, τη χρηστικότητα του οποίου επιβεβαιώνουν στα αποτελέσματά τους.

Έρευνες που αξιολογούν και τα δύο

Και οι δύο παραπάνω προσεγγίσεις βρίσκονται στο πλαίσιο της ψυχομετρικής παράδοσης (*psychometric approach*) που ορίζει και μετρά τη δημιουργικότητα και κανένας από αυτούς δεν προσπάθησε να υιοθετήσει μια διαφορετική άποψη. Ωστόσο, οι Liljedahl και Sriraman (2006) δηλώνουν ότι η δημιουργική διαδικασία και το δημιουργικό προϊόν είναι δύο έννοιες αδιαχώριστες οι οποίες δεν αναγνωρίζονται η μία μακριά από την άλλη. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργικότητα θεωρείται η διασύνδεση μεταξύ των διαδικασιών και των προϊόντων της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης. Έτσι, τα τελικά προϊόντα συνδέονται στενά με τις ιδέες και τα δημιουργικά προϊόντα σε οποιοδήποτε τομέα ενσωματώνοντας τις λεγόμενες «καλές ιδέες». Αν και κάθε ιδέα ή κάθε καλή ιδέα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αυτόματα ως «δημιουργική», κάθε δημιουργική έκβαση μπορεί ασφαλώς να ανιχνευθεί πίσω από τις καλές ιδέες που την γέννησαν (MC Squared, 2015).

Η αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας κατ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να γίνει κάτω από το πρίσμα της «συνθετικής προσέγγισης» (*componential approach*) η οποία αναφέρθηκε προηγουμένως. Η συγκεκριμένη προσέγγιση υποδηλώνει ότι δεν είναι υπαρκτή η διχοτόμηση μεταξύ των διαδικασιών και των προϊόντων της μαθηματικής σκέψης, τονίζοντας την αναζήτηση για την αναγνώριση των πολλών συστατικών που κατασκευάζουν τη φύση της ΔΜΣ.

Το έργο της Amabile (1983, 1990, 1996) έχει επιδράσει στην ανάπτυξη της συνθετικής προσέγγισης. Κατά την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας πολλαπλά συστατικά, η Amabile ανέπτυξε την τεχνική συναινετικής αξιολόγησης (*Consensual Assessment Technique CAT*), η οποία περιλαμβάνει την τεχνογνωσία των ειδικών του τομέα γύρω από τα κριτήρια που προκύπτουν από τη συναίνεση των κριτών της δημιουργικότητας, στους οποίους

μπορεί να περιλαμβάνεται και ο δημιουργός. Οι κριτές μπορούν να αξιολογήσουν τόσο τις δημιουργικές διαδικασίες όσο και τα προϊόντα σε μια κλίμακα πέντε σημείων, από καθόλου δημιουργική έως πολύ δημιουργική. Έχουν αναπτυχθεί αρκετές εκδόσεις του CAT, μερικές από τις οποίες έχουν αναγνωριστεί επισήμως. Αναγνωρίζεται δε ότι πολύ λίγες έρευνες έχουν γίνει σύμφωνα με τη συγκεκριμένη προσέγγιση.

Κεφάλαιο 2: Μεθοδολογία Έρευνας

2.1. Ερευνητική Στρατηγική

Στη συγκεκριμένη έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο φυσικό χώρο των μαθητών γίνεται προσπάθεια να προσεγγιστούν ολιστικά και ποιοτικά οι όψεις της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των παιδιών. Παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά οι διαδικασίες και οι μέθοδοι συλλογής και ανάλυσης δεδομένων.

2.2. Δείγμα- Δειγματοληψία

Στη συγκεκριμένη έρευνα το δείγμα διαμορφώνουν 20 μαθητές και μαθήτριες (1 τμήμα) της Στ' τάξης Δημοτικού ενός Δημοτικού Σχολείου στη Λάρισα. Η επιλογή του πληθυσμού (Στ' Δημοτικού) δεν είναι τυχαία αλλά προέκυψε βάσει κάποιων χαρακτηριστικών που καθιστούν τη συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα κατάλληλη για έρευνα. Έτσι, λάβαμε υπόψη ότι οι περισσότερες έρευνες για το ζήτημα απευθύνονται σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ενώ σε έρευνες των μαθητών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης το ενδιαφέρον εστιάζεται γύρω από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Η στρατηγική δειγματοληψίας που ακολουθήθηκε είναι η *δειγματοληψία ευκολίας*. Η επιλογή αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι η συγκεκριμένη έρευνα ακολουθεί ποιοτικές μεθόδους ανάλυσης δεδομένων και το δείγμα δεν χρειάζεται να είναι αριθμητικά μεγάλο - αφορά σε διψήφιο ή ακόμη και μονοψήφιο αριθμό (Charmaz, 2006).

2.3. Περιγραφή Ερευνητικής Διαδικασίας/ Συλλογή Δεδομένων

Η έρευνα διήρκησε συνολικά 3 εβδομάδες τους μήνες Απρίλιο-Μάιο του 2017. Συνολικά πραγματοποιήθηκαν έξι επισκέψεις στο ίδιο τμήμα. Αρχικά, στην πρώτη επίσκεψη έγινε η πιλοτική εφαρμογή του τεστ στην οποία συμμετείχαν 4 μαθητές/τριες, οι οποίοι ανήκουν και στο δείγμα της κυρίως έρευνας. Κατά τη διάρκεια της πιλοτικής εφαρμογής κρατήθηκαν σημειώσεις από την ερευνήτρια στο πεδίο δράσης των συμμετεχόντων. Πολύτιμα στοιχεία συγκεντρώθηκαν από ετούτη τη διαδικασία, αξιοποιώντας τα στην κυρίως έρευνα και βελτιώνοντας το ερευνητικό

εργαλείο. Σημειώνεται ότι δεν δόθηκαν περαιτέρω διευκρινίσεις στα προβλήματα πέραν των εκφωνήσεων.

Στις υπόλοιπες πέντε επισκέψεις δόθηκαν τα πέντε προβλήματα του τεστ, ένα τεστ ανά επίσκεψη, στην αίθουσα των μαθητών. Η διάρκεια επίλυσης του κάθε προβλήματος ήταν μία διδακτική ώρα, οπότε συνολικά η έρευνα διήρκησε 5 διδακτικές ώρες. Σημειώνεται, επίσης, ότι κάθε μαθητής έδωσε τις απαντήσεις του ανώνυμα χρησιμοποιώντας μια κωδική ονομασία που ο ίδιος επέλεξε.

2.4. Εργαλείο

α) Τεστ

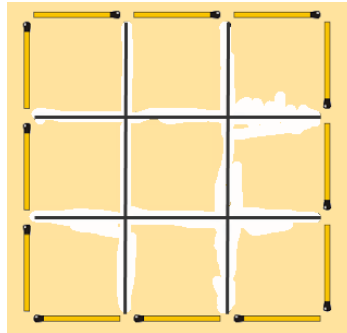
Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας σχεδιάστηκε ένα «Τεστ» επίλυσης και δημιουργίας ανοιχτών προβλημάτων (βλ. *Παράρτημα*). Τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν προκύπτουν από προηγούμενες εμπειρικές έρευνες στο χώρο μελέτης της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης και τροποποιήθηκαν όπου κρίθηκε απαραίτητο.

Περιγραφή του τεστ

Τα ανοιχτά προβλήματα που περιλαμβάνονται στο τεστ είναι συνολικά πέντε: ένα αριθμητικό πρόβλημα, ένα γεωμετρικό, και τρία μικτά/συνδυαστικά προβλήματα (συνδυάζουν τόσο την Αριθμητική όσο και τη Γεωμετρία).

Το **πρώτο πρόβλημα** αποτελεί ένα γεωμετρικό πρόβλημα επίλυσης προβλήματος το οποίο χρησιμοποιήθηκε από τον Pehkonen (1992). Οι μαθητές έχοντας στη διάθεσή τους 12 ίσα σπίρτα καλούνται να βρουν όσο το δυνατόν περισσότερα σχήματα μπορούν με την ίδια περίμετρο (χρησιμοποιώντας αυτά τα σπίρτα) αλλά χωρίς να δεσμεύονται ότι τα σχήματα που θα βρουν πρέπει να έχουν το ίδιο εμβαδόν. Επιπλέον, το παρόν πρόβλημα ζητά από τους μαθητές να βρουν το εμβαδόν του κάθε σχήματος που έχουν φτιάξει, να δηλώσουν εάν είναι σίγουροι πως έχουν βρει όλα τα σχήματα καθώς και να εντοπίσουν ποιο σχήμα από όλα όσα έχουν φτιάξει έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Στο τελευταίο αυτό σημείο, οι μαθητές καλούνται να επινοήσουν έναν κανόνα με σκοπό να αναδείξουν στοιχεία γενίκευσης,

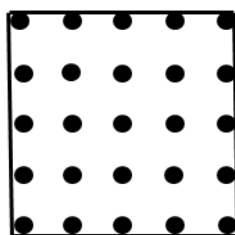
χαρακτηριστικό που αποτελεί, όπως προαναφέρθηκε, στοιχείο δημιουργικής σκέψης. Στο φύλλο εργασίας των μαθητών δίνεται το παρακάτω παράδειγμα καθώς και ο τρόπος χωρισμού του σε τετραγωνικές μονάδες:



Το **δεύτερο πρόβλημα** είναι ένα μικτό πρόβλημα (Αριθμητικής και Γεωμετρίας) (χωρίς παραπομπή). Παρουσιάζεται στους μαθητές ο παρακάτω ρόμβος σχηματισμένος από διατεταγμένους κύκλους. Οι μαθητές καλούνται να βρουν το πλήθος των κύκλων με όσο δυνατόν περισσότερους και διαφορετικούς τρόπους μπορούν:



Το **τρίτο πρόβλημα** είναι επίσης, μικτό (Αριθμητικής και Γεωμετρίας) (χωρίς παραπομπή). Οι μαθητές καλούνται να χωρίσουν το παρακάτω τετράγωνο σε δύο ίσα μέρη με όσους περισσότερους και διαφορετικούς τρόπους μπορούν.



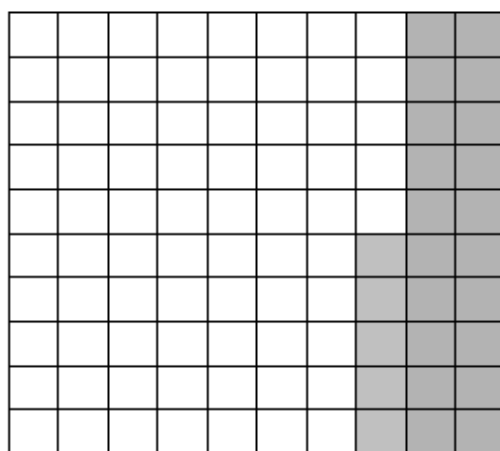
Εντός του τετραγώνου είναι σχεδιασμένα σημεία τα οποία ισαπέχουν και βοηθούν στο χωρισμό του σχήματος από τους μαθητές. Το πρόβλημα είναι ελαφρώς τροποποιημένο από την πρώτη του εκδοχή (χωρισμός σε τέσσερα ίσα μέρη) καθώς εκείνο κρίθηκε αρκετά απαιτητικό για τους μαθητές της Στ' τάξης.

Το **τέταρτο πρόβλημα** του τεστ είναι ένα αριθμητικό πρόβλημα δανεισμένο από τη διδακτορική διατριβή του Haylock (1984). Το πρόβλημα καλεί τους μαθητές να βρουν όσους περισσότερους και διαφορετικούς αριθμούς μπορούν ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω αριθμητική παράσταση:

$$\left(\boxed{A} + \boxed{B} \right) \times \boxed{\Gamma} = 9$$

Η αριθμητική παράσταση παρουσιάζεται στο φύλλο εργασίας των μαθητών, όπως, επίσης, και ένας πίνακας στον οποίο μπορούν να τοποθετήσουν τους πολλούς και διαφορετικούς αριθμούς που βρήκαν.

Το **πέμπτο** και τελευταίο πρόβλημα του τεστ ανήκει στην κατηγορία δημιουργίας προβλήματος. Το πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε από τον Park (2004) στη διδακτορική του διατριβή και παρουσιάζει το παρακάτω διάγραμμα χωρισμένο σε 100 ίσα τετράγωνα, εκ των οποίων τα 25 είναι χρωματισμένα:



Το πρόβλημα τροποποιήθηκε για τις ανάγκες της έρευνας. Έτσι, στην εκφώνηση του αναφέρεται ότι το παρόν σχέδιο δημιουργήθηκε από έναν υποθετικό μαθητή με σκοπό να απαντήσει σε κάποιο πρόβλημα και οι μαθητές καλούνται να υποθέσουν ποιο μπορεί να είναι το πρόβλημα αυτό, φτιάχνοντας όσο περισσότερα και διαφορετικά προβλήματα μπορούν. Στην αρχική του εκδοχή ζητούσε από τους μαθητές να σκεφτούν τις πληροφορίες που δίνει το συγκεκριμένο διάγραμμα και να δημιουργήσουν όσο το δυνατόν περισσότερες ερωτήσεις που να το αφορούν.

b) Πλέγμα Αξιολόγησης (Evaluation Grid)

Το παρόν πλέγμα (βλ. Παράρτημα) δεν συνιστά εργαλείο έρευνας αλλά εργαλείο ανάλυσης και αφορά τη φάση της ανάλυσης των δεδομένων. Συγκεκριμένα, εφόσον συμπληρώθηκαν τα τεστ με το πέρας των πέντε επισκέψεων και έγινε η ανάλυση των αποτελεσμάτων (όπως περιγράφεται παρακάτω), προέκυψαν οι βαθμολογίες των μαθητών στις εννέα συνιστώσες της Δημιουργικής Μαθηματικής τους Σκέψης. Οι βαθμολογίες αυτές μεταφέρθηκαν σε αυτό το εργαλείο, το οποίο είναι ένα «Πλέγμα Αξιολόγησης» (Evaluation Grid).

Συγκεκριμένα, αυτό το πλέγμα περιλαμβάνει εννέα συνιστώσες της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης (βλ. Παράρτημα) οι οποίες βαθμολογούνται με βάση την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία που έδειξαν οι μαθητές σε κάθε μια από αυτές. Επιπλέον, στο συγκεκριμένο πλέγμα διατίθεται χώρος όπου μπορεί ο ερευνητής- εκπαιδευτικός να γράψει σχόλια και παρατηρήσεις. Σημειώνεται ότι το πλέγμα αυτό είναι μια πιο σύντομη εκδοχή αντίστοιχου πλέγματος που δημιουργήθηκε για τις ανάγκες του ευρωπαϊκού έργου Mathematical Creativity Squared (MC Squared, 2015) το οποίο περιελάμβανε 17 συνιστώσες της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης, από τις οποίες εννέα επιλέχθηκαν για τις ανάγκες της παρούσης έρευνας.

2.5. Ανάλυση Δεδομένων

Τα δεδομένα αποτέλεσαν τα φύλλα με τις απαντήσεις και τις εξηγήσεις των μαθητών. Όλα τα δεδομένα επεξεργάστηκαν στη βάση της ανάλυσης περιεχομένου πράγμα που σημαίνει ότι ακολουθήθηκαν ορισμένα βήματα (Mayring, 2014). Αρχικά,

έγινε η οργάνωση των δεδομένων σε πακέτα δεδομένων του κάθε μαθητή, δηλαδή προέκυψαν 20 τέτοια πακέτα με όλες τις απαντήσεις των μαθητών ανά πρόβλημα.

Στη συνέχεια, έγιναν αρκετές αναγνώσεις των δεδομένων με σκοπό να υπάρξει μια συνολική εικόνα των απαντήσεων. Σε αυτή τη φάση άρχισαν να δημιουργούνται και οι πρώτες κατηγορίες. Σημειώνεται ότι οι κατηγορίες στις οποίες ταξινομήθηκαν οι απαντήσεις σε αυτή την πρώτη φάση υπήρχαν ήδη. Οι κατηγορίες αυτές αφορούν τις εννέα συνιστώσες της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης που έχουν αναγνωριστεί από τη βιβλιογραφία: *πολλαπλές λύσεις, πολλαπλές στρατηγικές, σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών, διεπιστημονικότητα, πολλαπλές αναπαραστάσεις, σύνδεση με την καθημερινή ζωή, γενίκευση, απρόσμενες λύσεις, δημιουργία προβλήματος*. Ωστόσο, δεν συναντήθηκαν και οι εννέα όψεις σε καθένα από τα πέντε προβλήματα, επομένως, σημειώθηκαν οι συγκεκριμένες όψεις που εμφανίστηκαν και αφορούν το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκαν περισσότερες και πιο λεπτομερείς αναγνώσεις των δεδομένων. Από τις αναγνώσεις αυτές προέκυψαν οι περαιτέρω υποκατηγορίες περιεχομένου των αρχικών γενικών κατηγοριών, οι οποίες δεν είναι τόσο ευρείες όσο οι αρχικές και αφορούν εκφάνσεις των συνιστωσών της ΔΜΣ (π.χ. γενική κατηγορία: πολλαπλές στρατηγικές, υποκατηγορία: βρίσκω έναν κανόνα). Αυτή η διαδικασία προέκυψε εντοπίζοντας στοιχεία που είτε επαναλαμβάνονταν σε αρκετές απαντήσεις είτε ήταν μοναδικά αλλά άμεσα συνδεδεμένα με τους ερευνητικούς σκοπούς. Οι απαντήσεις κάθε υποκατηγορίας παρουσιάζουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους και διαφοροποιούνται από τις απαντήσεις των άλλων υποκατηγοριών, διαχωρίζοντας τις μεταξύ τους. Κατά την εξέλιξη της διαδικασίας, οι ονομασίες των υποκατηγοριών προέκυψαν από χαρακτηριστικές λέξεις (σύμβολα)-κλειδιά που εντοπίζονται στις απαντήσεις. Ακόμη, κρατήθηκαν σημειώσεις σχετικά με τις υποκατηγορίες που εντοπίστηκαν σε κάθε απάντηση ώστε στο τέλος να προκύψουν οι τελικές υποκατηγορίες.

Εν τέλει σχηματίστηκαν οι τελικές υποκατηγορίες και όλες οι απαντήσεις ταξινομήθηκαν αναλόγως. Επισημαίνεται ότι οι τελικές υποκατηγορίες σε αυτή τη φάση είναι διαφορετικές από πρόβλημα σε πρόβλημα καθώς διαφοροποιείται το μαθηματικό περιεχόμενο και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές

ανάλογα το πρόβλημα. Ταυτόχρονα αναπτύσσεται ο ορισμός για κάθε κατηγορία, καθορίζοντας τα στοιχεία που πρέπει να έχει κάθε απάντηση για να ανήκει σε αυτήν.

Στη συνέχεια, όλες οι κατηγορίες τοποθετήθηκαν υπό το πρίσμα των πτυχών: ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία και επεξεργασία. Πιο αναλυτικά, οι απαντήσεις κάθε κατηγορίας με τις αντίστοιχες υποκατηγορίες της αφού αξιολογήθηκαν ποιοτικά (κρίσεις και εκτιμήσεις), ποσοτικοποιήθηκαν (ορίστηκε Scoring System) και μετρήθηκαν με βάση τις τέσσερις αυτές γνωστικές πτυχές. Επιπρόσθετα, λόγω του ότι χρησιμοποιείται η κλίμακα Likert (1-4), έγινε κανονικοποίηση των μετρήσεων με βάση τις 4 βαθμολογίες Likert οι οποίες και καταγράφηκαν στο «Πλέγμα Αξιολόγησης» (*Evaluation Grid*). Στη συνέχεια (σ. 50) ακολουθεί ένα παράδειγμα αξιολόγησης όπου φαίνεται αναλυτικότερα η παραπάνω διαδικασία. Σημειώνεται ότι οι λανθασμένες ή μη ολοκληρωμένες απαντήσεις δεν αξιολογήθηκαν. Τέλος, για λόγους εγκυρότητας, οι κατηγορίες και υποκατηγορίες που προέκυψαν, όπως και η βαθμολογία αυτών, ελέγχθηκαν από έναν εξωτερικό ερευνητή, ειδικό στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών.

ο *Στατιστική Επεξεργασία Δεδομένων*

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα ποιοτικά δεδομένα που αφορούν τις κατηγορίες (συνιστώσες της ΔΜΣ) και υποκατηγορίες (εκφάνσεις αυτών των συνιστωσών) που προέκυψαν βαθμολογήθηκαν με βάση τις τέσσερις γνωστικές πτυχές (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία, επεξεργασία), δηλαδή μετατράπηκαν σε ποσοτικά και στη συνέχεια κανονικοποιήθηκαν στην κλίμακα Likert (1—4), η οποία μεταφράζεται ως εξής:

- 1 βαθμός για τις απαντήσεις που φανερώνουν σε πολύ μικρό βαθμό (**πολύ λίγο**) τη συνιστώσα που αξιολογείται
- 2 βαθμοί για τις απαντήσεις που φανερώνουν σε μικρό βαθμό (**λίγο**) τη συνιστώσα που αξιολογείται
- 3 βαθμοί για τις απαντήσεις που φανερώνουν σε πολύ μεγάλο βαθμό (**πολύ**) τη συνιστώσα που αξιολογείται
- 4 βαθμοί για τις απαντήσεις που φανερώνουν σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό (**πάρα πολύ**) τη συνιστώσα που αξιολογείται

Στη συνέχεια, οι βαθμολογίες αυτές περάστηκαν σε στατιστικά φύλλα δεδομένων (*excel*). Αρχικά, δημιουργήθηκε ένα αρχείο με τις βαθμολογίες όλων των μαθητών με σκοπό να βρεθεί η συλλογική Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη, δηλαδή το δυναμικό της τάξης στη μαθηματική δημιουργικότητα. Στη συνέχεια, δημιουργήθηκαν εννέα στατιστικά φύλλα, καθένα από τα οποία αφορούσε μια από τις αρχικές κατηγορίες (συνιστώσες της ΔΜΣ). Έτσι περάστηκαν οι βαθμολογίες από όλους τους μαθητές μαζί στο ίδιο στατιστικό φύλλο για την κάθε συνιστώσα.

Έπειτα, εφόσον περάστηκαν τα στατιστικά δεδομένα, βρέθηκε η διάμεσος και το Ενδο- Τεταρτημοριακό Εύρος *Inter-Quartile Range (IQR)* των γνωστικών πτυχών (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία, επεξεργασία) συνολικά σε όλες τις συνιστώσες μαζί και σε κάθε συνιστώσα ξεχωριστά, αφορώντας το «μέσο» επίπεδο της ΔΜΣ της τάξης. Και τα δύο μέτρα υπολογίστηκαν για τα δεδομένα που συλλέχθηκαν για κάθε συνιστώσα.

ο **Γιατί διάμεσος και όχι μέση τιμή;**

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως η κλίμακα Likert συνήθως συλλέγει τακτικά δεδομένα (*ordinal data*), δηλαδή δεδομένα που παρουσιάζουν μια διάταξη, ιεράρχηση. Οι κλίμακες Likert εμπίπτουν στη μέτρηση με μια κλίμακα ιεράρχησης (*ordinal level of measurement*). Οι κατηγορίες απόκρισης έχουν βαθμό ταξινόμησης (*have a rank order*) αλλά τα διαστήματα μεταξύ των τιμών (*intervals between values*) δεν μπορούν να θεωρηθούν ίσα. Η κλίμακα Likert σε μια τυπική ερώτηση μπορεί ζητήσει από τον ερωτώμενο εάν συμφωνεί απόλυτα - συμφωνεί -είναι αβέβαιος- διαφωνεί ή διαφωνεί έντονα. Οι αποκρίσεις μπορούν να κωδικοποιηθούν π.χ. 1-2-3-4-5, αλλά αυτό παραμένει απλά μια κωδικοποίηση (Mogey, 1999). Εάν χρησιμοποιήσουμε αυτά τα δεδομένα για να βρούμε τη μέση τιμή (αριθμητική μέση τιμή), αυτό σημαίνει ότι κάνουμε δύο υποθέσεις:

Υπόθεση 1: η ψυχολογική απόσταση μεταξύ της «απόλυτης συμφωνίας» και της «συμφωνίας» είναι η ίδια με αυτή μεταξύ της «συμφωνίας» και της «αβεβαιότητας».

Υπόθεση 2: Το βάρος της «απόλυτης συμφωνίας» είναι τρεις φορές το βάρος της «διαφωνίας»

Έτσι, δεν έχει νόημα να προσθέσουμε μια απάντηση συμφωνίας (κωδικοποιημένη ως 2) με μια απάντηση αβεβαιότητας (κωδικοποιημένη ως 3) για να πάρουμε μια απάντηση 2,5.

Σύμφωνα με τον Jamieson (2004) οι αριθμητικοί χειρισμοί που απαιτούνται για τον υπολογισμό του μέσου όρου (και τυπικής απόκλισης) είναι ακατάλληλοι για τακτικά δεδομένα. Σε αυτές τις περιπτώσεις προτείνεται να χρησιμοποιείται η διάμεσος (*median*) ως μέτρο της κεντρικής τάσης όπως και το Ενδο- Τεταρτημοριακό Εύρος Inter-Quartile Range (IQR). Πιο αναλυτικά, η διάμεσος αποτελεί μέτρο της κεντρικής τάσης κατά προσέγγιση, δηλαδή τι θα σκεφτόταν ο «μέσος» μαθητής της τάξης ή ποια θα ήταν η πιο πιθανή απάντηση σε αυτό που ζητείται. Από την άλλη, το Ενδο- Τεταρτημοριακό Εύρος (IQR) δείχνει εάν οι απαντήσεις είναι συγκεντρωμένες κοντά στην πιο πιθανή απάντηση ή είναι διασκορπισμένες σε μεγάλο εύρος απαντήσεων. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των τεταρτημορίων αποτελεί μέτρο διασποράς (είτε οι αποκρίσεις συγκεντρώνονται ή διασκορπίζονται σε ολόκληρο το φάσμα των πιθανών απαντήσεων), ενώ ένα σχετικά μικρό τεταρτημόριο αποτελεί ένδειξη συναίνεσης. Έτσι, ένα σχετικά μικρό IQR είναι δείκτης ομοφωνίας των απαντήσεων ενώ αντιθέτως, μεγαλύτερα IQRs δείχνουν πόλωση των απαντήσεων. Επιπρόσθετα, το Ενδο- Τεταρτημοριακό Εύρος (IQR) με βαθμό 1 ή και λιγότερο στις απαντήσεις θεωρείται ως κατάλληλος δείκτης ομοφωνίας για μια κλίμακα 4-5 μονάδων.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα αξιολόγησης των απαντήσεων ενός μαθητή χρησιμοποιώντας το ερευνητικό εργαλείο, το «Τεστ» (σ.123) και το εργαλείο ανάλυσης, το «Πλέγμα Αξιολόγησης» (σ.50).

N/A = Not Available
 1=καθόλου
 2=λίγο
 3=πολύ
 4=πάρα πολύ

2.6. Αξιολόγηση «Πρότυπου» Μαθητή

Συνιστώσες ΔΜΣ (Affordances)	Fluency					Flexibility					Originality					Elaboration					Comments
	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	
(1) Ο μαθητής αναζητεί και βρίσκει πολλαπλές λύσεις.					X					X					X	X					Ο Χ.Κ. επέδειξε το μεγαλύτερο αριθμό απαντήσεων, το μεγαλύτερο αριθμό διαφορετικών απαντήσεων καθώς και τις πιο πρωτότυπες απαντήσεις.
(2) Ο μαθητής αναζητεί και βρίσκει πολλαπλές στρατηγικές.					X	X									X				X		Ο Χ.Κ. επέδειξε το μεγαλύτερο αριθμό στρατηγικών καθώς και την πιο πρωτότυπη στρατηγική. Η ικανότητά του να επεξεργάζεται μαθηματικές καταστάσεις βαθμολογείται με 3. Δεν παρατηρείται ευελιξία (flexibility) σε κανένα μαθητή (N/A).
(3) Ο μαθητής δημιουργεί σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών (δηλαδή σύνδεση ή συνύπαρξη εννοιών ή προσεγγίσεων που διδάσκονται παραδοσιακά χωριστά μεταξύ τους στο ΑΠ).					X					X					X	X					Ο Χ.Κ. επέδειξε το μεγαλύτερο αριθμό απαντήσεων στις οποίες έκανε σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών εννοιών, το μεγαλύτερο αριθμό διαφορετικών συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών ενώ οι πρωτότυπες συνδέσεις που έκανε ήταν πάρα πολλές (=4 στην κλίμακα Likert).
(4) Ο μαθητής δημιουργεί σύνδεση/σεις μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών περιοχών εκτός των Μαθηματικών με τα Μαθηματικά (διεπιστημονικότητα).	X					X					X					X					Σε αυτό το πρόβλημα δεν εντοπίζεται κάποια σύνδεση των μαθηματικών με άλλες επιστημονικές περιοχές. (Δίνεται σχετικό παράδειγμα από άλλο πρόβλημα στο τέλος της ενότητας)

	N/ A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	Comments
(5) Ο μαθητής δημιουργεί σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών.	X					X					X					X					Σε αυτό το πρόβλημα δεν παρουσιάζεται από τους μαθητές κάποια έννοια με διαφορετικές αναπαραστάσεις. (Δίνεται σχετικό παράδειγμα από άλλο πρόβλημα στο τέλος της ενότητας)
(6) Ο μαθητής δημιουργεί σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή.	X					X					X					X					Σε αυτό το πρόβλημα δεν εντοπίζεται κάποια σύνδεση με την καθημερινή ζωή. (Δίνεται σχετικό παράδειγμα από άλλο πρόβλημα στο τέλος της ενότητας)
(7) Ο μαθητής γενικεύει μαθηματικά φαινόμενα (δηλαδή, πηγαίνει από το συγκεκριμένο στο γενικό).	X					X					X					X					Σε αυτό το πρόβλημα δεν εντοπίζεται κάποιου είδους γενίκευση μαθηματικών φαινομένων. (Δίνεται σχετικό παράδειγμα από άλλο πρόβλημα στο τέλος της ενότητας)
(8) Ο μαθητής επιδεικνύει απρόσμενες λύσεις.					X	X								X		X					Ο Χ.Κ. επέδειξε το μεγαλύτερο αριθμό απρόσμενων απαντήσεων, ενώ μεταξύ αυτών, οι πρωτότυπες λύσεις ήταν πολλές (=3 στην κλίμακα Likert). Σε αυτή την πτυχή δεν εμφανίστηκαν διαφορετικές κατηγορίες απρόσμενων λύσεων (<i>flexibility</i>).
(9) Ο μαθητής δημιουργεί προβλήματα ή δημιουργεί ερωτήσεις (δηλαδή, αναζητεί, δημιουργεί ή διατυπώνει μαθηματικά προβλήματα που συνδέονται με τις έννοιες και το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου).	X					X					X					X					Σε αυτό το πρόβλημα δε εντοπίστηκε η δημιουργία προβλήματος ή ερωτημάτων. (Δίνεται σχετικό παράδειγμα από άλλο πρόβλημα στο τέλος της ενότητας)

N/A = Not Available

1=καθόλου

2=λίγο

3=πολύ

4=πάρα πολύ

Για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας των μαθητών, χρησιμοποιείται το παραπάνω πλέγμα σε κάθε ένα πρόβλημα ξεχωριστά για κάθε ένα μαθητή. Όπως διαφαίνεται, υπάρχουν εννέα όψεις της δημιουργικότητας που εντοπίζονται και αξιολογούνται στα πέντε προβλήματα του τεστ. Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος αξιολόγησης της δημιουργικότητας των μαθητών σε αυτά τα προβλήματα, ακολουθεί παρακάτω αναλυτικά ένα παράδειγμα αξιολόγησης μαθητή, του Χ.Κ., που απαντά στο 4^ο πρόβλημα (βλ. Παράρτημα Α). Σημειώνεται ότι ο συγκεκριμένος μαθητής αποτελεί ένα «φανταστικό/ιδανικό» πρότυπο μαθητή, οι λύσεις του οποίου αποτελούν συλλογή από επιλεγμένες απαντήσεις μαθητών του δείγματος της έρευνας. Υπόψη έχουν ληφθεί όχι μόνο οι απαντήσεις/λύσεις που δόθηκαν από τους μαθητές αλλά και αυτές που υπάρχουν αλλά δεν έχουν εντοπιστεί από αυτούς. Αυτό είναι απαραίτητο να γίνει για να «αξιολογείται» ο κάθε μαθητής μέσα στο συνολικό πλαίσιο διαχείρισης της συγκεκριμένη δραστηριότητας.

Στη Δραστηριότητα που εξετάζουμε, οι μαθητές καλούνται να βρουν όσο γίνεται περισσότερους συνδυασμούς για τους αριθμούς Α,Β,Γ προκειμένου να ικανοποιηθεί η σχέση $(A+B) \times \Gamma = 9$. Στην εκφώνηση δεν δίνεται κανένας περιορισμός για το είδος των αριθμών που μπορεί να χρησιμοποιηθούν. Στο παρόν πρόβλημα οι συνιστώσες της δημιουργικότητας που εντοπίζονται είναι οι παρακάτω:

- 1) *Η ύπαρξη πολλαπλών λύσεων.*
- 2) *Η χρήση πολλαπλών στρατηγικών.*
- 3) *Η σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών.*
- 8) *Η ύπαρξη απρόσμενων λύσεων.*

Για κάθε μια από αυτές τις συνιστώσες/όψεις, ο μαθητής αξιολογείται για το πόσες πολλές απαντήσεις έδωσε (*fluency*), και για το πόσο πρωτότυπες είναι (*originality*). Επιπλέον, σε αρκετές από αυτές τις συνιστώσες ο μαθητής αξιολογείται για το πόσο διαφορετικές είναι μεταξύ τους οι απαντήσεις που έδωσε, δηλαδή εάν ανήκουν σε διαφορετική κατηγορία (*flexibility*). Σε ορισμένα σημεία, τέλος, διαφαίνεται η ικανότητα του μαθητή να επεξεργάζεται, να συνδυάζει και να προσαρμόζει μαθηματικές καταστάσεις (*elaboration*) οπότε και αξιολογείται γι' αυτό.

Αξιολόγηση μαθητή

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος αξιολόγησης των μαθητών στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή της αξιολόγησης που αφορά τις απαντήσεις ενός «ιδανικού/φανταστικού» μαθητή (κωδική ονομασία Χ.Κ.).

1. Η ύπαρξη πολλαπλών λύσεων

Ως προς την πρώτη επιμέρους συνιστώσα της δημιουργικότητας (πολλαπλές λύσεις), ο τρόπος αξιολόγησης έχει ως εξής:

Για την **Ευχέρεια** (*Fluency*):

Σχετικά με την ευχέρεια του μαθητή, αυτό που μετρείται είναι το πλήθος των απαντήσεων (*πόσες;*) που έδωσε ο κάθε μαθητής ξεχωριστά. Έτσι, για κάθε σωστή απάντηση ο μαθητής βαθμολογείται με 1 βαθμό, οπότε και ο αριθμός των απαντήσεών του ταυτίζεται με τη βαθμολογία του:

Αριθμός Απαντήσεων/Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
0-9	1 (πολύ λίγο)
10-29	2 (λίγο)
30-49	3 (πολύ)
50+	4 (πάρα πολύ)
High=88	

Από την καταγραφή των απαντήσεων προέκυψε ότι ο Χ.Κ. έδωσε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις (=88) συγκριτικά με τους υπόλοιπους. Έτσι, βαθμολογείται με 4. Σημειώνεται ότι ο τρόπος χωρισμού των διαστημάτων είναι υποκειμενικός και βασίζεται στη σύγκριση με τις απαντήσεις των υπόλοιπων μαθητών. Συγκεκριμένα, πάρθηκε ως μέγιστος (*high*) ο αριθμός των περισσότερων απαντήσεων (88). Ωστόσο, αν το διάστημα 0-88 χωριζόταν σε τέσσερα ίσα μέρη,

αυτό θα είχε ως συνέπεια ένας μαθητής με 20 απαντήσεις να βαθμολογηθεί με 1 (πολύ λίγο) στην κλίμακα Likert, οπότε και κρίθηκε ως πιο δόκιμος ο προτεινόμενος χωρισμός των διαστημάτων.

Για την **Ευελιξία (Flexibility)**:

Όπως προαναφέρθηκε, η ευελιξία (*flexibility*) αφορά τις **διαφορετικές** λύσεις/στρατηγικές (*πόσες τέτοιες;*), που μπορούν να διακριθούν μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών. Με άλλα λόγια, αξιολογείται το κατά πόσο ένας μαθητής είναι ευέλικτος στην προσέγγιση του προβλήματος δίνοντας **διαφορετικές** απαντήσεις ή κάνοντας χρήση **διαφορετικών** στρατηγικών. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, οι πιθανές λύσεις μπορεί να προκύψουν με τη χρήση τεσσάρων διαφορετικών προσεγγίσεων που σχετίζονται όλες με το είδος των εμπλεκόμενων αριθμών και είναι:

- 1) Χρήση φυσικών αριθμών, π.χ. $(8+1) \times 1$
- 2) Χρήση δεκαδικών αριθμών, π.χ. $(4,5+4,5) \times 1$
- 3) Χρήση μηδενός (0), π.χ. $(0+3) \times 3$
- 4) Χρήση κλασμάτων, π.χ. $(6/2+6) \times 1$

Εδώ θα μπορούσε να προστεθεί και πέμπτη προσέγγιση, αυτή της χρήσης αρνητικών αριθμών, όμως δεν υπολογίζεται στην περίπτωσή μας λόγω του ότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν γνωρίζουν τους αρνητικούς αριθμούς. Για κάθε κατηγορία απαντήσεων που εμφανίζει ο μαθητής, βαθμολογείται με 1 βαθμό, οπότε και η βαθμολογία του ταυτίζεται με τον αριθμό των κατηγοριών που έκανε χρήση ο κάθε μαθητής. Έτσι, το μέγιστο που θα μπορούσε να βαθμολογηθεί ένας μαθητής είναι ίσο με 4 βαθμούς και σύμφωνα με την κλίμακα Likert, η τελική βαθμολογία έχει ως εξής:

Αριθμός Απαντήσεων/Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
0-1	1 (πολύ λίγο)
2	2 (λίγο)
3	3 (πολύ)
4	4 (πάρα πολύ)
<i>High=4</i>	

Ο Χ.Κ. εμφάνισε όλες τις κατηγορίες, πράγμα που αντιστοιχεί σε 4 βαθμούς οπότε στην κλίμακα Likert βαθμολογήθηκε με 4. Όπως και στην ευχέρεια (*fluency*), έτσι κι εδώ, για τον τρόπο χωρισμού των διαστημάτων ισχύουν όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Για την **Πρωτοτυπία** (*Originality*):

Σε αυτό το πεδίο, αναγνωρίζεται η πρωτοτυπία (*πόσο σπάνιες;*) των απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές. Κατά συνέπεια, καταγράφεται η συχνότητα που εμφανίζεται η κάθε κατηγορία λύσεων και βαθμολογείται αναλόγως η αντίστοιχη κατηγορία. Πιο συγκριμένα, η πρώτη κατηγορία απαντήσεων (Φυσικοί αριθμοί) εντοπίστηκε στο σύνολο των μαθητών (20/20), η δεύτερη κατηγορία (Δεκαδικοί αριθμοί) συναντήθηκε, επίσης, στο σύνολο των μαθητών, την τρίτη κατηγορία (Χρήση 0) εμφάνισαν 17/20 μαθητές ενώ η τέταρτη κατηγορία (Κλάσματα) έκανε την εμφάνισή της μόνο σε ένα μαθητή (1/20).

Εδώ ο μαθητής αξιολογείται σύμφωνα με το γκρουπ μαθητών στο οποίο ανήκει. Εάν, για παράδειγμα, έχει χρησιμοποιήσει μόνο τη μια από τις δύο κατηγορίες όπου ο αριθμός των μαθητών είναι 20, δηλαδή είτε την πρώτη κατηγορία (Φυσικοί αριθμοί) είτε τη δεύτερη (Δεκαδικοί αριθμοί), τότε ο μαθητής βαθμολογείται με 1 στην κλίμακα Likert. Ο μαθητής που έχει χρησιμοποιήσει και τις δύο κατηγορίες των 20 μαθητών (Φυσικοί και Δεκαδικοί) τότε βαθμολογείται με 2. Όποιος μαθητής έδωσε απάντηση που ανήκει στην τρίτη κατηγορία, η οποία

εμφανίστηκε στους 17 μαθητές, βαθμολογείται με 3 ενώ ο μοναδικός μαθητής που χρησιμοποίησε κλάσματα βαθμολογείται με 4 στην κλίμακα Likert.

Κατηγορία Απαντήσεων	Βαθμολογία Likert
Καμία, Φυσικοί ή Δεκαδικοί	1 (πολύ λίγο)
Φυσικοί & Δεκαδικοί	2 (λίγο)
Χρήση 0	3 (πολύ)
Κλάσματα	4 (πάρα πολύ)
Σπανιότερη κατηγορία= Κλάσματα	

Ο Χ.Κ. ήταν ο μοναδικός που χρησιμοποίησε κλάσματα (τέταρτη κατηγορία) στις λύσεις του οπότε και βαθμολογείται με 4 στην κλίμακα Likert.

2. Η χρήση πολλαπλών στρατηγικών

Ως προς τη δεύτερη συνιστώσα της δημιουργικότητας των μαθητών (πολλαπλές στρατηγικές) του Evaluation Grid, ο τρόπος αξιολόγησης έχει ως εξής:

Για την **Ευχέρεια (Fluency)**:

Σε αυτό το σημείο αξιολογείται ο αριθμός των στρατηγικών που χρησιμοποίησε ένας μαθητής για να προσεγγίσει τη λύση του προβλήματος. Η λύση της συγκεκριμένης Δραστηριότητας μπορεί να προσεγγιστεί μέσα από τις εξής στρατηγικές:

- 1) Αύξηση του όρου Α και μείωση του όρου Β (και αντίστροφα) κατά ίσα ποσά ώστε να διατηρείται το $A+B$ σταθερό με δεδομένο ότι διατηρείται σταθερό το Γ, (συντομογραφία $A \uparrow B \downarrow$)

Παράδειγμα: $(0,20+8,80) \times 1$

$(0,30+8,70) \times 1$

$$(0,40+8,60) \times 1 \text{ κ.ο.κ.}$$

- 2) Αντιστροφή των όρων A και B (αντιμεταθετική) και διατήρηση του όρου Γ , (συντομογραφία $A \leftrightarrow B$)

Παράδειγμα: $(4,25+0,25) \times 2$

$$(0,25+4,25) \times 2$$

- 3) Αλλαγή του Γ , οπότε αυτή η αλλαγή προσδιορίζει κάθε φορά το άθροισμα $A+B$, (συντομογραφία $\Gamma \rightarrow$)

Παράδειγμα: $\Gamma=1$

$$\Gamma=8$$

$$\Gamma=3 \text{ κ.ά.}$$

- 4) Χρήση αρνητικών δυνάμεων του 10

Παράδειγμα: $(5,3+3,7) \times 1$

$$(90+0) \times 0,1$$

$$(600+300) \times 0,01$$

$$(8.999+1) \times 0,001$$

$$(610.000 + 290.000) \times 0,00001$$

Για κάθε μία διαφορετική στρατηγική που εμφανίζει ο μαθητής, βαθμολογείται με 1 βαθμό, οπότε και η βαθμολογία του ταυτίζεται με τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποίησε. Έτσι, η μέγιστη βαθμολογία που μπορεί να πάρει ένας μαθητής είναι ίση με 4 βαθμούς, πράγμα που μεταφράζεται στην κλίμακα Likert ως εξής:

Αριθμός Απαντήσεων/Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
0-1	1 (πολύ λίγο)
Μέχρι 2	2 (λίγο)
Μέχρι 3	3 (πολύ)
Μέχρι 4	4 (πάρα πολύ)
<i>High=4</i>	

Ο Χ.Κ προκειμένου να λύσει το πρόβλημα χρησιμοποίησε και τις τέσσερις στρατηγικές οπότε και η βαθμολογία του αντιστοιχεί με 4 στην κλίμακα Likert.

Σχετικά με την ευελιξία (*flexibility*), δεν εντοπίζεται κάποια διαφοροποίηση στον τρόπο που χρησιμοποιούν οι μαθητές την κάθε στρατηγική οπότε και δεν αξιολογείται (N/A= Not Available).

Για την **Πρωτοτυπία** (*Originality*):

Σε αυτό το σημείο αναγνωρίζεται η πιο πρωτότυπη στρατηγική μεταξύ των άλλων (με όρους σπανιότητας στην επιλογή και χρήση). Για τη βαθμολόγηση ακολουθείται η ίδια πορεία με προηγουμένως (βλ. *πολλαπλές λύσεις- originality*), δηλαδή η βαθμολογία προκύπτει από τη μέτρηση του πλήθους των μαθητών που χρησιμοποίησε την κάθε στρατηγική.

Συνεπώς, ο μαθητής που δεν χρησιμοποίησε καμία στρατηγική ή χρησιμοποίησε την τρίτη στρατηγική ($\curvearrowright$) η οποία εμφανίστηκε στους 19/20 μαθητές, βαθμολογείται με 1 στην κλίμακα Likert. Όποιος μαθητής χρησιμοποίησε την πρώτη στρατηγική ($A \uparrow B \downarrow$) η οποία χρησιμοποιήθηκε από τους 12/20 μαθητές, βαθμολογείται με 2, όποιος χρησιμοποίησε τη δεύτερη στρατηγική ($A \leftrightarrow B$) που εμφανίστηκε στους 10/20 μαθητές βαθμολογείται με 3, ενώ για τη χρήση της τέταρτης στρατηγικής (αρνητικές δυνάμεις του 10) ο ένας και μοναδικός μαθητής που την εμφάνισε, βαθμολογείται με 4.

Η βαθμολογία έχει ως εξής:

Στρατηγική	Βαθμολογία Likert
Καμία ή ($\curvearrowright$)	1 (πολύ λίγο)
($A \uparrow B \downarrow$)	2 (λίγο)
($A \leftrightarrow B$)	3 (πολύ)
Υποδιαίρεσεις του 10	4 (πάρα πολύ)
Σπανιότερη Στρατηγική= Υποδιαίρεσεις του 10	

Ο Χ.Κ. χρησιμοποίησε μεταξύ άλλων και την 4^η στρατηγική οπότε και βαθμολογήθηκε με 4 στην κλίμακα Likert.

Για την **Επεξεργασία (Elaboration)**:

Σε αυτό το πρόβλημα ζητείται από τους μαθητές να δώσουν όσες περισσότερες λύσεις μπορούν. Η απάντηση είναι ότι οι λύσεις είναι άπειρες. Η ικανότητα επεξεργασίας αναφέρεται στο γεγονός ότι οι μαθητές μπορούν να προχωρήσουν τη σκέψη τους ένα βήμα παραπέρα. Αυτή η περίπτωση αναφέρεται στο γεγονός ότι οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν πως το σταθερό άθροισμα $A+B$ εξασφαλίζει άπειρες λύσεις. Ως ιδανική περίπτωση απάντησης θεωρείται, οι μαθητές να διαπιστώσουν λεκτικά την απειρία των λύσεων, πράγμα που, όμως, δεν πραγματοποιήθηκε από κανένα μαθητή. Παρολαυτά, ορισμένοι μαθητές προσέγγισαν τη συγκεκριμένη σκέψη, δίνοντας διάφορα τέτοια αριθμητικά παραδείγματα.

Έτσι, οι μαθητές που δεν έδωσαν καθόλου παραδείγματα ή έδωσαν απλά παραδείγματα (έχουν 1-2 περιπτώσεις φυσικών ή/και δεκαδικών που δίνουν την εντύπωση τυχαίας εργασίας) με σταθερό το $A+B$ βαθμολογούνται με 1 (πολύ λίγο), όσοι έχουν δώσει παραδείγματα με σταθερά αθροίσματα μόνο με ένα είδος αριθμών (μόνο φυσικοί ή δεκαδικοί) παίρνουν 2 (λίγο), όσοι διατηρούν σταθερό το άθροισμα κάνοντας χρήση ταυτόχρονα περισσοτέρων του ενός ειδών αριθμών (και φυσικών και δεκαδικών πχ $1+8, 2+7, \dots, 4,5+4,5, \dots, 3,6+5,4$) βαθμολογούνται με 3 (πολύ) και όσοι διατυπώνουν λεκτικά την απειρία βαθμολογούνται με 4 (πάρα πολύ).

Αριθμός Απαντήσεων/ Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
Κανένα ή Απλά παραδείγματα	1 (σχεδόν καθόλου)
Παραδείγματα με 1 είδος αριθμών	2 (λίγο)
Παραδείγματα με συνδυασμό παραπάνω του 1 είδους αριθμών	3 (πολύ)
Λεκτική διατύπωση απειρίας	4 (πάρα πολύ)
Πιο επεξεργασμένη στρατηγική = Λεκτική διατύπωση απειρίας	

Ο Χ.Κ. βαθμολογείται με 3 (πολύ) καθώς διατηρεί σταθερό το άθροισμα $A+B$ κάνοντας χρήση ταυτόχρονα περισσοτέρων του ενός ειδών αριθμών (και φυσικών και δεκαδικών).

Παράδειγμα: $A+B = 9 \rightarrow \Gamma=1$ και $A+B=9 \rightarrow \Gamma=1$

$$(7,90+1,10) \times 1 \quad (5+4) \times 1$$

$$(7,80+1,20) \times 1 \quad (6+3) \times 1$$

$$(7,70+1,30) \times 1 \quad (7+2) \times 1$$

$$(4,5+4,5) \times 1 \quad (8+1) \times 1$$

κ.ο.κ.

3. Η σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών

Όσον αφορά την τρίτη συνιστώσα της δημιουργικότητας των μαθητών (σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών), η αξιολόγηση έχει ως εξής:

Για την **Ευχέρεια (Fluency)**:

Καταρχήν, εντοπίστηκαν όλες οι περιπτώσεις σύνδεσης μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών εννοιών. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ανήκει εξ ολοκλήρου στη σφαίρα της αριθμητικής και έτσι αναζητήθηκαν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών όψεων της αριθμητικής στις απαντήσεις των μαθητών. Οι συνδέσεις που εντοπίστηκαν είναι οι εξής:

- 1) Σύνδεση φυσικών με δεκαδικούς αριθμούς.

Παράδειγμα: $(0,5 + 4) \times 2$

- 2) Σύνδεση φυσικών αριθμών με αρνητικές δυνάμεις του 10.

Παράδειγμα: $(90+0) \times \mathbf{0,1}$

$$(600+300) \times \mathbf{0,01}$$

$$(8.999+1) \times \mathbf{0,001}$$

$$(610.000 + 290.000) \times \mathbf{0,00001}$$

- 3) Σύνδεση φυσικών αριθμών με κλάσματα.

Παράδειγμα: $(6/2+6) \times 1, (5/3+4/3) \times 3$

- 4) Σύνδεση δεκαδικών αριθμών με κλάσματα.

Παράδειγμα: $(1,5 + 3/2) \times 3$

Στην ευχέρεια το ενδιαφέρον εστιάζεται στο πλήθος των συνδέσεων που έκανε ο μαθητής μεταξύ αυτών των διαφορετικών όψεων της αριθμητικής. Για κάθε τέτοια σύνδεση ο μαθητής βαθμολογείται με 1 βαθμό (διαφορετικές απαντήσεις που κάνουν χρήση της ίδιας σύνδεσης μετριοούνται ξεχωριστά). Συνεπώς, ο αριθμός των απαντήσεων αυτού του είδους ταυτίζεται με τη βαθμολογία του μαθητή:

Αριθμός Απαντήσεων/Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
0-9	1 (πολύ λίγο)
10-29	2 (λίγο)
30-49	3 (πολύ)
50+	4 (πάρα πολύ)
High=74	

Ο Χ.Κ. έδωσε τις περισσότερες απαντήσεις (74), αποτελώντας το μέγιστο βαθμό (*high*) σύμφωνα με τον οποίο χωρίστηκαν τα διαστήματα. Και πάλι για τον προσδιορισμό των διαστημάτων ισχύουν όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Για την **Ευελιξία** (*Flexibility*):

Εδώ αξιολογείται το κατά πόσο ο μαθητής είναι ικανός να δώσει διαφορετικές συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών που έκανε, οι οποίες είναι τέσσερις και αναφέρθηκαν πιο πάνω. Για κάθε είδος διαφορετικής σύνδεσης που εμφανίζει ο μαθητής, βαθμολογείται με 1 βαθμό:

Αριθμός Απαντήσεων/Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
0-1	1 (πολύ λίγο)
Μέχρι 2	2 (λίγο)
Μέχρι 3	3 (πολύ)
Μέχρι 4	4 (πάρα πολύ)
<i>High=4</i>	

Ο Χ.Κ ήταν ο μοναδικός που εμφάνισε και τα τέσσερα είδη συνδέσεων οπότε και βαθμολογήθηκε με 4 στην κλίμακα Likert.

Για την **Πρωτοτυπία** (*Originality*):

Εδώ βαθμολογείται το πιο πρωτότυπο είδος σύνδεσης μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών εννοιών. Ακολουθείται η ίδια πορεία βαθμολόγησης όπως πραγματοποιήθηκε στην προηγούμενη όψη στο πεδίο της πρωτοτυπίας, δηλαδή με βάση τη συχνότητα εμφάνισης της κάθε σύνδεσης.

Ο μαθητής που δεν πραγματοποίησε καμία σύνδεση ή έκανε το πρώτο είδος σύνδεσης (Ακέραιοι με Δεκαδικούς) το οποίο εμφάνισαν οι 20/20 μαθητές, βαθμολογείται με 1 στην κλίμακα Likert. Ο μαθητής που εμφάνισε μόνο το δεύτερο ή τρίτο ή τέταρτο είδος σύνδεσης (Φυσικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 ή Φυσικοί με Κλάσματα ή Δεκαδικοί με Κλάσματα) βαθμολογείται με 2 καθώς εμφανίστηκε μόνο σε έναν μαθητή (1/20). Ο μαθητής που εμφάνισε δύο σπάνια είδη συνδέσεων μεταξύ της δεύτερης, τρίτης και τέταρτης σύνδεσης (Φυσικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 & Φυσικοί με Κλάσματα ή Δεκαδικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 & Δεκαδικοί με Κλάσματα ή Φυσικοί με Κλάσματα & Δεκαδικοί με Κλάσματα) βαθμολογείται με 3, ενώ ο μαθητής που εμφάνισε και τα τρία πιο σπάνια είδη συνδέσεων (Φυσικοί με

Αρνητικές Δυνάμεις του 10 & Φυσικοί με Κλάσματα & Δεκαδικοί με Κλάσματα)
βαθμολογείται με 4 στην κλίμακα Likert.

Είδος Σύνδεσης	Βαθμολογία Likert
Καμία ή Φυσικοί με Δεκαδικούς	1 (πολύ λίγο)
Φυσικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 ή Φυσικοί με Κλάσματα ή Δεκαδικοί με Κλάσματα	2 (λίγο)
Φυσικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 & Φυσικοί με Κλάσματα ή Φυσικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 & Δεκαδικοί με Κλάσματα ή Φυσικοί με Κλάσματα & Δεκαδικοί με Κλάσματα	3 (πολύ)
Φυσικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 & Φυσικοί με Κλάσματα & Δεκαδικοί με Κλάσματα	4 (πάρα πολύ)
<i>Σπανιότερη Σύνδεση= εμφάνιση και των τριών σπάνιων συνδέσεων</i>	

Ο Χ.Κ. βαθμολογήθηκε με 4 καθώς εμφάνισε και τις τρεις σπάνιες συνδέσεις:
Φυσικοί με Αρνητικές Δυνάμεις του 10 **&** Φυσικοί με Κλάσματα **&** Δεκαδικοί με
Κλάσματα.

8. Η ύπαρξη απρόσμενων λύσεων.

Η όγδοη συνιστώσα της δημιουργικότητας (απρόσμενες λύσεις) εντοπίστηκε, επίσης, στις απαντήσεις των παιδιών για τη παρούσα Δραστηριότητα. Με τον όρο «απρόσμενες λύσεις» εννοούμε τις λύσεις που έδωσε ένας μαθητής και τις οποίες δεν ανέμενε να συναντήσει ένας δάσκαλος ή ένας ερευνητής από μαθητές της ηλικίας που απευθύνεται. Για παράδειγμα, σε αυτό το πρόβλημα όσον αφορά τους όρους Α και Β η ερευνήτρια περίμενε πως οι μαθητές είναι πιθανό να χρησιμοποιήσουν φυσικούς αριθμούς, δεκαδικούς αριθμούς με ένα δεκαδικό ψηφίο καθώς και να χρησιμοποιήσουν το 0 σε έναν από τους όρους της παράστασης. Επίσης, για τον όρο

Γ η ερευνήτρια ανέμενε ότι οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν αποκλειστικά φυσικούς αριθμούς.

Η βαθμολογία της συγκεκριμένης όψης είχε ως εξής:

Για την **Ευχέρεια** (*Fluency*):

Όσον αφορά την ευχέρεια στη συγκεκριμένη όψη της δημιουργικότητας, μετρήθηκαν όλες οι απρόσμενες απαντήσεις που έδωσε κάθε μαθητής στην παρούσα Δραστηριότητα. Κάθε απρόσμενη απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 βαθμό οπότε και η βαθμολογία του κάθε μαθητή ταυτίζεται με τον αριθμό των απρόσμενων απαντήσεων που έδωσε:

Αριθμός Απαντήσεων/Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
0-3	1 (Πολύ λίγο)
4-6	2 (λίγο)
7-9	3 (πολύ)
10-12	4 (πάρα πολύ)
<i>High</i> = 12	

Ο Χ.Κ. έδωσε τις περισσότερες απρόσμενες λύσεις (12) συγκριτικά με τους υπόλοιπους, αποτελώντας το μέγιστο βαθμό (*high*) σύμφωνα με τον οποίο χωρίστηκαν τα διαστήματα, οπότε και βαθμολογήθηκε με 4 στην κλίμακα Likert.

Για την **Ευελξία** (*flexibility*):

Σε αυτό το σημείο αξιολογείται το κατά πόσο οι απρόσμενες λύσεις των μαθητών ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων. Ακολουθούν οι διαφορετικές κατηγορίες:

1^η κατηγορία: Χρήση κλασμάτων

Η χρήση κλασμάτων θεωρείται ως απρόσμενη λύση διότι παρά την έμφαση που δίνεται στα Αναλυτικά Προγράμματα, οι ρητοί αριθμοί αποτελούν έννοια που δύσκολα κατανοούν οι μαθητές. (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σημητρά - Κωνσταντίνου, & Χριστοδουλίδου, 2006· Van de Walle, 2001).

2^η κατηγορία: Χρήση δεκαδικών αριθμών στο Γ

Οι μαθητές γνωρίζοντας το αποτέλεσμα της παράστασης ($=9$) είναι πιθανό να δυσκολεύονται στην εύρεση δύο αριθμών (φυσικού πολλαπλασιαζόμενου με δεκαδικό και δεκαδικού πολλαπλασιαζόμενου με δεκαδικό) εκ των οποίων ο ένας να είναι μεγαλύτερος του αποτελέσματος π.χ. $(90+0) \times 0,1 = 9$ (Graeber και Campbell, 1993). Πολλοί μαθητές θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός οδηγεί σε ‘αύξηση,’ πράγμα, όμως, που δεν ισχύει απαραίτητα πάντα στους δεκαδικούς αριθμούς. Γι αυτό οι μαθητές δεν αναμένεται να χρησιμοποιήσουν δεκαδικό αριθμό στον Γ όρο της παράστασης.

3^η κατηγορία: Χρήση δεκαδικών αριθμών με περισσότερα από ένα δεκαδικά ψηφία

Οι πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς οι οποίοι έχουν παραπάνω από ένα δεκαδικά ψηφία, φαίνεται να δυσκολεύουν τους μαθητές (Van de Walle, 2001). Επομένως, αναμένεται οι μαθητές σε περίπτωση που χρησιμοποιήσουν δεκαδικούς, αυτοί να αποτελούνται από ένα δεκαδικό ψηφίο.

Για κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες που χρησιμοποίησε ένα μαθητής, βαθμολογήθηκε με 1 βαθμό. Ο μαθητής που δε δίνει κανένα παράδειγμα ή δίνει μόνο ένα παράδειγμα από μόνο μια κατηγορία βαθμολογείται με 1 (πολύ λίγο), ο μαθητής που δίνει περισσότερα παραδείγματα από μια μόνο κατηγορία βαθμολογείται με 2 (λίγο), ο μαθητής που δίνει παραδείγματα από δύο κατηγορίες παίρνει 3 (πολύ) ενώ ο μαθητής που δίνει παραδείγματα και από τις τρεις κατηγορίες βαθμολογείται με 4 στην κλίμακα Likert:

Αριθμός Απαντήσεων/Βαθμολογία	Βαθμολογία Likert
Κανένα ή 1 παράδειγμα από μια μόνο κατηγορία	1 (πολύ λίγο)
Περισσότερο από ένα παραδείγματα από μια μόνο κατηγορία	2 (λίγο)
2 κατηγορίες	3 (πολύ)
3 κατηγορίες	4 (πάρα πολύ)
<i>High</i> = 3 κατηγορίες	

Ο Χ.Κ ήταν ο μοναδικός που εμφάνισε και τις τρεις κατηγορίες, οπότε ήταν και ο πιο ευέλικτος μαθητής σε αυτή την όψη της δημιουργικότητας, με βαθμό 4 στην κλίμακα Likert.

Για την **Πρωτοτυπία** (*Originality*):

Εδώ, συγκρίνονται όλες οι απρόσμενες λύσεις των μαθητών μεταξύ τους και προκύπτουν οι πιο πρωτότυπες (με όρους σπανιότητας στην συχνότητα εμφάνισης) απαντήσεις. Η πιο σπάνια από τις πρωτότυπες λύσεις που εμφανίστηκαν αποτελεί η χρήση δεκαδικών αριθμών στο Γ όρο της παράστασης, καθώς και η χρήση κλασμάτων σε οποιονδήποτε από τους όρους. Οι παραπάνω κατηγορίες χρησιμοποιήθηκαν μόνο από ένα μαθητή και μάλιστα τον ίδιο. Η χρήση δεκαδικών αριθμών με περισσότερα από ένα δεκαδικά ψηφία έγινε από 11/20 μαθητές. Έτσι, προκύπτουν οι τέσσερις πιο σπάνιες κατηγορίες απρόσμενων απαντήσεων:

Κατηγορία	Βαθμολογία Likert
Καμία	1 (πολύ λίγο)
Χρήση δεκαδικών με περισσότερο από ένα δεκαδικά ψηφία	2 (λίγο)
Χρήση κλασμάτων ή Χρήση δεκαδικών αριθμών στο Γ	3 (πολύ)
Χρήση κλασμάτων & Χρήση δεκαδικών αριθμών στο Γ	4 (πάρα πολύ)
<i>High= συνδυασμός των δύο πιο σπάνιων κατηγοριών</i>	

Ο Χ.Κ. ήταν ο μοναδικός που χρησιμοποίησε δεκαδικούς αριθμούς στο Γ και κλάσματα, οπότε και βαθμολογήθηκε με 4 στην κλίμακα Likert.

Όπως προαναφέρθηκε, υπάρχουν εννέα όψεις της δημιουργικότητας που εντοπίστηκαν και αξιολογήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα. Στο παραπάνω πρόβλημα, εμφανίζονται οι **τέσσερις** από τις εννέα, οι οποίες υπάρχουν, επίσης, και στα πέντε προβλήματα ανεξαιρέτως. Ωστόσο, για να υπάρχει μια ολοκληρωμένη εικόνα της αξιολόγησης, κρίνεται απαραίτητο να σχολιασθούν και οι υπόλοιπες όψεις της ΔΜΣ, οι οποίες εμφανίστηκαν στα υπόλοιπα τέσσερα προβλήματα του τεστ. Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι πραγματικές απαντήσεις των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Σημειώνεται ότι δε συμπεριλαμβάνεται ο τρόπος βαθμολογίας των απαντήσεων στις παρακάτω όψεις, καθώς ακολουθείται η ίδια πορεία όπως προηγουμένως.

Οι υπόλοιπες όψεις που δε σχολιάστηκαν είναι οι εξής:

- 4) *Ο μαθητής δημιουργεί σύνδεση/σεις μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών περιοχών εκτός των Μαθηματικών με τα Μαθηματικά (διεπιστημονικότητα).*

- 5) Ο μαθητής δημιουργεί σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών (πολλαπλές αναπαραστάσεις).
- 6) Ο μαθητής δημιουργεί σύνδεση με την καθημερινή ζωή.
- 7) Ο μαθητής γενικεύει μαθηματικά φαινόμενα (δηλαδή, πηγαίνει από το συγκεκριμένο στο γενικό) (γενίκευση).
- 9) Ο μαθητής δημιουργεί προβλήματα ή ερωτήσεις (δηλαδή, αναζητεί, δημιουργεί ή διατυπώνει μαθηματικά προβλήματα που συνδέονται με τις έννοιες και το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου) (δημιουργία προβλήματος).

Όσον αφορά την τέταρτη όψη της δημιουργικότητας (διεπιστημονικότητα), εντοπίζονται σημεία κατά την επίλυση των προβλημάτων όπου οι μαθητές συνδέουν τα Μαθηματικά με άλλες επιστήμες ή άλλα σχολικά μαθήματα, τα οποία δε χρησιμοποιούν κατεξοχήν τα Μαθηματικά.

Τέτοιου είδους σύνδεση εντοπίστηκε κυρίως στο πέμπτο πρόβλημα όπου ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν όσο το δυνατόν περισσότερα προβλήματα τα οποία για να λυθούν χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο διάγραμμα που τους δίνεται (βλ. Παράρτημα). Σε αυτό το πρόβλημα, εντοπίστηκαν ορισμένα προβλήματα όπου οι μαθητές έκαναν σύνδεση των Μαθηματικών με άλλες επιστήμες.

Παράδειγμα 1: Σύνδεση των Μαθηματικών με τη Γεωγραφία:

«Μια χώρα 4.000 τ.χ. στο $\frac{2}{4}$ είναι πλούσια σε κοιτάσματα πετρελαίου, στο $\frac{1}{4}$ πλούσια σε χρυσό και στο $\frac{1}{4}$ είναι πλούσια σε διαμάντια. Πόσα χρήματα έχει αν ανά 50 χιλιόμετρα πετρέλαιο παίρνει 900 ευρώ, ανά 100 χιλιόμετρα χρυσό παίρνει 1000 ευρώ και ανά 20 χιλιόμετρα διαμάντια παίρνει 1.100 ευρώ;»

Μια χώρα 4.000 τ.χ. στο $\frac{2}{4}$ είναι πλούσια σε κοιτάσματα πετρελαίου, στο $\frac{1}{4}$ πλούσια σε χρυσό και στο $\frac{1}{4}$ πλούσια σε διαμάντια. Πόσα χρήματα έχει αν ανά 50 χιλιόμετρα πετρέλαιο παίρνει 900 ευρώ, ανά 100 χιλιόμετρα χρυσό παίρνει 1000 ευρώ και ανά 20 χιλιόμετρα διαμάντια παίρνει 1100 ευρώ;

Πόσα χρήματα έχει αν ανά 50 χιλιόμετρα πετρέλαιο παίρνει 900 ευρώ, ανά 100 χιλιόμετρα χρυσό παίρνει 1000 ευρώ και ανά 20 χιλιόμετρα διαμάντια παίρνει 1100 ευρώ;

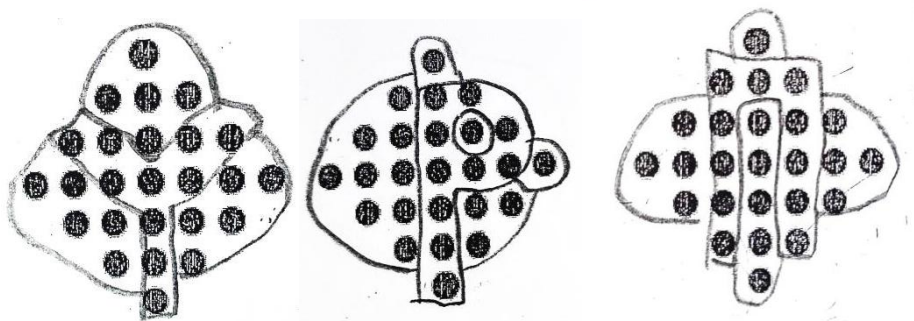
Παράδειγμα 2: Σύνδεση των Μαθηματικών με τη Φυσική (το πρόβλημα αφορά την επιστήμη της Βιολογίας αλλά στο Δημοτικό το ανθρώπινο σώμα διδάσκεται στα πλαίσια της Φυσικής):

«Το 75% του ανθρώπου είναι νερό. Πόσο στα 4 είναι οι υπόλοιπες ουσίες του σώματος;»

α) Το 75% του ανθρώπου είναι νερό. Πόσο στα 4 είναι οι υπόλοιπες ουσίες του σώματος;

Επιπλέον, σύνδεση των Μαθηματικών με άλλες επιστήμες παρατηρήθηκε και στο δεύτερο πρόβλημα όπου οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν τους διατεταγμένους κύκλους με όσο δυνατόν περισσότερους τρόπους μπορούν.

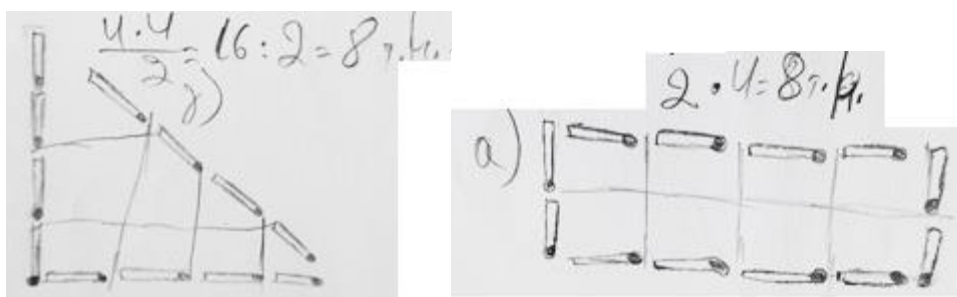
Παράδειγμα: Σύνδεση των Μαθηματικών με τη Γλώσσα. Ο μαθητής χρησιμοποιεί τα γράμματα του αλφαβήτου ώστε να δημιουργήσει σχηματισμούς οι οποίοι τον διευκολύνουν στην καταμέτρηση



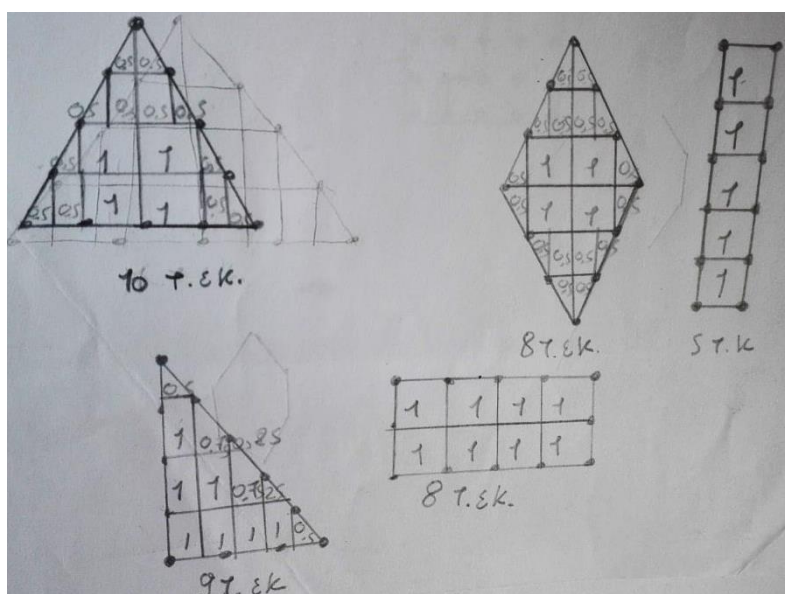
Η **πέμπτη όψη (πολλαπλές αναπαραστάσεις)** της δημιουργικότητας των μαθητών που εντοπίζεται κατά την επίλυση των προβλημάτων αφορά τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας μαθηματικής έννοιας. Με άλλα λόγια, όταν ο μαθητής κατέχει μια έννοια και είναι ικανός να την αποτυπώσει με περισσότερους από έναν τρόπους π.χ. χρησιμοποιώντας σύμβολα (αριθμούς, γράμματα), σχήματα (τετράγωνα, τρίγωνα κ.ά.), πίνακες, διαγράμματα, αριθμογραμμή κτλ τότε αυτό αναγνωρίζεται ως ένδειξη δημιουργικής μαθηματικής σκέψης.

Στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές καλούνται να βρουν το εμβαδόν κάθε σχήματος που κατασκευάζουν. Έτσι, ορισμένοι μαθητές εκφράζουν το εμβαδόν ενός σχήματος με πολλούς τρόπους: α) με επικάλυψη (χωρίζουν το σχήμα σε τετραγωνικές μονάδες) β) εκφράζουν το εμβαδόν με έναν αριθμό π.χ. 5 τ.μ. γ) γράφουν τον τύπο του εμβαδού του σχήματος π.χ. για να βρουν το Ε του ορθογωνίου γράφουν $\beta \times \upsilon = 5 \times 1 = 5$ τ.μ. δ) χωρίζουν το σχήμα σε υποσχήματα (π.χ. για να βρουν το εμβαδόν του ρόμβου, χωρίζουν το ρόμβο σε δύο τρίγωνα, βρίσκουν το εμβαδόν των τριγώνων και ύστερα τα προσθέτουν.

Παραδείγματα 1,2 : Αναπαράσταση του εμβαδού με επικάλυψη και με χρήση τύπου.



Παραδείγματα 3,4,5,6,7: Αναπαράσταση του εμβαδού με επικάλυψη αλλά και με χρήση αριθμητικών συμβόλων (1 για το ολόκληρο τετράγωνο, 0.5 για το μισό τετράγωνο. Χρήση της ισοδύναμης αναπαράστασης του εμβαδού του αρχικού σχήματος μέσα από τη σύνθεση των εμβαδών επιμέρους σχημάτων με βάση την αρχή διατήρησης του εμβαδού).



Ακόμα, στο πέμπτο πρόβλημα όπου οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν όσο το δυνατό περισσότερα προβλήματα, εντοπίζονται περιπτώσεις πολλαπλής αναπαράστασης μιας έννοιας.

Παράδειγμα 1: Ο μαθητής Κ.Κ. αναπαριστά τον αριθμό 0,25 με διαφορετικούς τρόπους

1^η αναπαράσταση: 25 % - ποσοστό

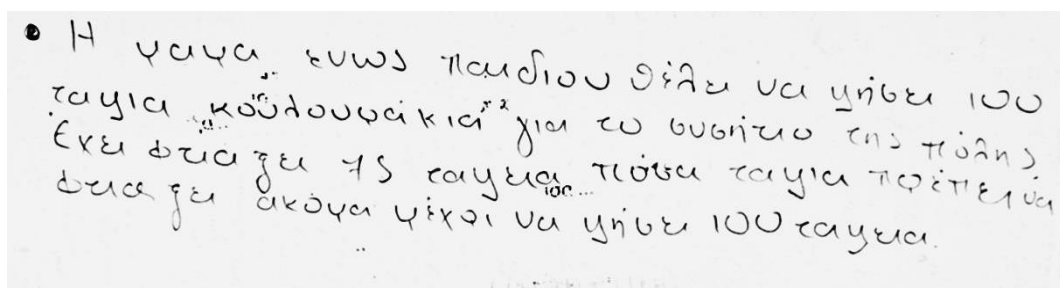
2^η αναπαράσταση: $\frac{1}{4}$ - κλάσμα (μέρος όλου)

3^η αναπαράσταση: 25 από τα 100 - μέρος συνόλου, λόγος

Αναφορικά με την **έκτη όψη της ΔΜΣ (σύνδεση Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή)**, αυτή συναντάται κατά κόρον στο πέμπτο πρόβλημα, όπου ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν προβλήματα στη βάση του διαγράμματος που τους δίνεται.

Παράδειγμα 1:

«Η μαμά ενός παιδιού θέλει να ψήσει 100 ταψιά κουλουράκια για το συσσίτιο της πόλης. Έχει φτιάξει 75 ταψιά. Πόσα ταψιά πρέπει να φτιάξει ακόμα μέχρι να ψήσει 100 ταψιά;»



Παραδείγματα 2&3:

«Η οικογένεια του Δημήτρη θα πηγαίνουν μια εκδρομή στην Αθήνα από Λάρισα. Στο αμάξι έβαλαν το 100% της βενζίνης. Για να φτάσουν στην Αθήνα από τη Λάρισα θέλουν το 25% της βενζίνης. Άραγε πόση βενζίνη τους μένει;»

«Η Άννα έχει 1 € δηλαδή 100 μονόλεπτα και πήγε σε ένα περίπτερο και πήρε ένα σακουλάκι πατατάκια που έκαναν 75 λ. Πόσα ρέστα θα πάρει;»

2. Η οικογένεια του Δημήτρη θά ηύχταν μία ευδρόμη στην Αθήνα από Λάρσα. Στο αγάξι έδωσαν τὸ 100% τῆς δυνάμει. Γιὰ να ψάσουν στην Αθήνα από την Λάρσα θέλουν τὸ 85% τῆς δυνάμει. Άραγε πόση δυνάμει θά τὸν μινε;

3. Η Άννα έχει 1€ δηλαδή 100 μονάδες καὶ πῆξε σὲ ἕνα γεμάτο καὶ γῆρε ἕνα σουβλάκι πατάματα πού πῆκε 75λ. Πότα ρέσα θα πῆρε;

Η ἑβδόμη ὄψη τῆς ΔΜΣ αφορά τὴ γενίκευση τῶν μαθηματικῶν φαινομένων. Το πρόβλημα που μπορεί να δώσει ενδείξεις πρὸς τὴν κατεύθυνση αὐτή εἶναι τὸ πρῶτο, ὅπου ζητεῖται ἀπὸ τοὺς μαθητὲς να σκεφθοῦν ἕναν κανόνα σχετικὰ με τὴν περίπτωση τοῦ σχήματος το ὁποῖο θα ἔχει τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδόν. Σημειώνεται ὅτι ο κανόνας ο ὁποῖος ἰσχύει εἶναι ο ἐξής:

Απὸ ὅλα τα πολύγωνα με τὴν ἴδια περίμετρο καὶ ἴδιο ἀριθμὸ πλευρῶν, τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδόν παρουσιάζει τὸ κανονικὸ πολύγωνο (αὐτὸ που οἱ πλευρὲς καὶ οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες). Φυσικά, στὴν ηλικία τῶν 12 ἐτῶν, δεν ἀναμένεται ἕνας μαθητὴς να διατυπώσει τὸν παραπάνω κανόνα. Ωστόσο, ἀξιολογούνται οἱ προσεγγίσεις τῶν μαθητῶν σε αὐτὸ τὸν κανόνα (πχ τὸ να ἐντοπίσει ἕνας μαθητὴς κάτι ἀνάλογο για τα τετράπλευρα ἢ ἀκόμη, πιο συγκεκριμένα, ὅτι ἀπ' ὅλα τα ὀρθογώνια τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδόν ἔχει τὸ τετράγωνο, κ.λπ).

Παράδειγμα 1 (πλησιάζει πρὸς τὴν ἐννοια τοῦ κανονικοῦ τετραπλεύρου)

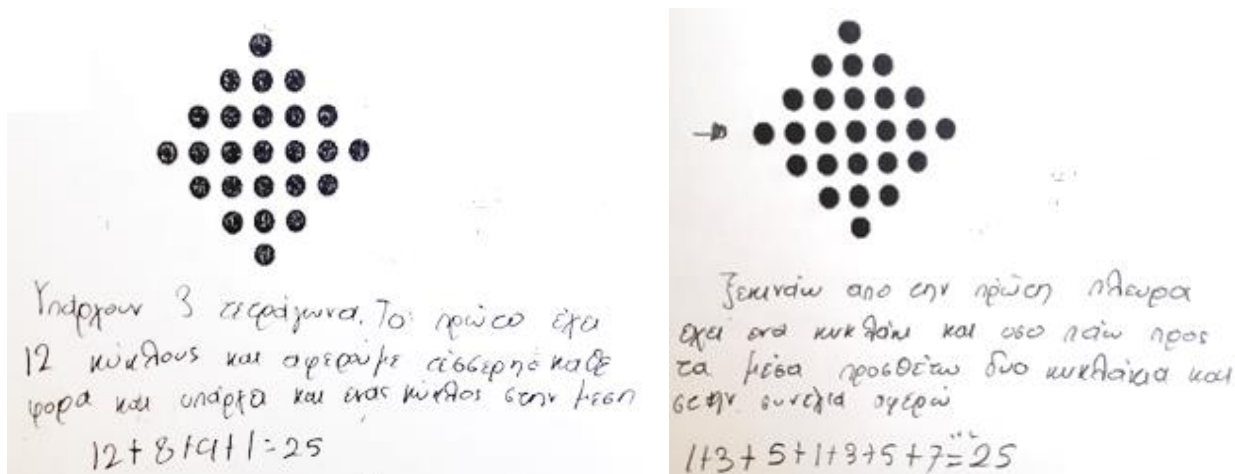
«Ὅσο μεγαλύτερες εἶναι καὶ οἱ δύο πλευρὲς τόσο μεγαλύτερο ἐμβαδόν ἔχει τὸ σχῆμα ἐνῶ αν ἡ μια πλευρά εἶναι πολὺ μικρή καὶ ἡ ἄλλη πολὺ μεγάλη τὸ σχῆμα ἔχει μικρὸ ἐμβαδόν».

Ὅσο μεγαλύτερες εἶναι καὶ οἱ δύο πλευρὲς τόσο μεγαλύτερο ἐμβαδόν ἔχει τὸ σχῆμα ἐνῶ αν ἡ μια πλευρά εἶναι μικρή καὶ ἡ ἄλλη πολὺ μεγάλη τὸ σχῆμα ἔχει μικρὸ ἐμβαδόν

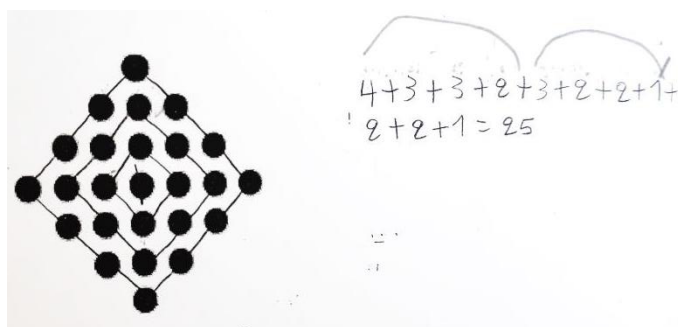
Επιπροσθέτως, στὸ δεύτερο πρόβλημα (βλ. Παράρτημα) ἐντοπίζονται στοιχεῖα γενίκευσης ὅπου ὀρισμένοι μαθητὲς αν καὶ ἐντοπίζουν μια κανονικότητα στὸν τρόπο

διάταξης των τελειών δεν προχωρούν στη γενίκευση του τρόπου υπολογισμού του πλήθους τους. Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1 & 2:



Παράδειγμα 3:



Η ένατη και τελευταία όψη της δημιουργικότητας (δημιουργία προβλήματος) αφορά την ικανότητα του μαθητή να δημιουργεί ή να διατυπώνει μαθηματικά προβλήματα με αφορμή τη δοσμένη κατάσταση. Η συγκεκριμένη όψη κάνει την εμφάνισή της αποκλειστικά στο τελευταίο πρόβλημα εφόσον η φύση του αφορά τη δημιουργία προβλήματος. Εδώ, ο μαθητής αξιολογείται για το πόσο πολλά προβλήματα δημιούργησε, για τα διαφορετικά είδη προβλημάτων αλλά και για την πρωτοτυπία τους με βάση το μαθηματικό περιεχόμενό τους. Οι κατηγορίες που προέκυψαν είναι οι εξής:

1. Φυσικοί
2. Δεκαδικοί
3. Γεωμετρία
4. Κλάσματα
5. Ποσοστά/αναλογίες
6. Στατιστική

Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα από τις διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων που εντοπίστηκαν.

Παραδείγματα 1,2 & 3: Προβλήματα μαθητή με την κωδική ονομασία Χ.Χ.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΟΗ Σπυριδούλα στο τεστ των Μαθηματικών πήρε $5/10$, ενώ η φίλη της η Μαρία πήρε $10/10$ και ένα άλλος συμμαθητής της πήρε κι αυτός $10/10$. Μπορείς να φτιάξεις ένα σχήμα και χρωματίσεις με διαφορετικό χρώμα τον βαθμό του κάθε παιδιού;

ΠΟΣΟΣΤΑ-ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ότι $25/100$ ενός οικοπέδου είναι πορτοκαλίς. Πόσο της 100 είναι οι μπλεές; Μπορείς να εκβάσεις σε αυτό το τετράγωνο τις πορτοκαλίς και τις μπλεές;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μπορείς να σχεδιάσεις μέσα σε αυτό το τετράγωνο ένα σχήμα που να έχει περίμετρο 26 εκ. και ένα άλλο σχήμα που να έχει περίμετρο 36 εκ.;

Παράδειγμα 4: Πρόβλημα μαθητή με την κωδική ονομασία 14 Μ.Γ.

«Ένας ανθοπώλης έχει 75 γλάστρες με γαρύφαλα. Μία κυρία θέλει να αγοράσει 100 γλάστρες με γαρύφαλα. Πόσες γλάστρες πρέπει να παραγγείλει ώστε να μπορέσει να τις πουλήσει στην κυρία;»

ΦΥΣΙΚΟΙ

• Ένας ανθοπώλης έχει 75 γλάστρες με γαρύφαλα για κυρία θέλει να αγοράσει 100 γλάστρες με γαρύφαλα. Πόσες γλάστρες πρέπει να παραγγείλει ώστε να μπορέσει να τις πουλήσει στην κυρία;

Παράδειγμα 5: Πρόβλημα μαθητή με την κωδική ονομασία Φ.Ε.

«Ο κύριος Σταυρός έχει ένα οικόπεδο 100 στρέμματα. Θέλει να βάλει μια μικρή βρυσούλα στη μέση που να έχει πλάτος περίπου 3,7 εκατοστά και μήκος πάλι 3,7 εκατοστά. Να το σχεδιάσεις στο παραπάνω τετράγωνο».

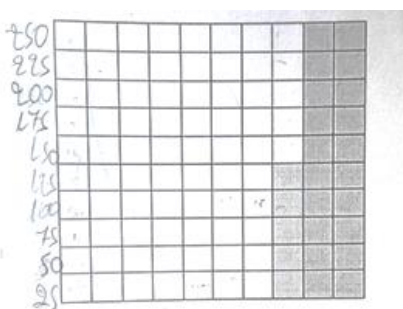
ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ

Ο κύριος Σταυρός έχει ένα οικόπεδο 100 στρέμματα. Θέλει να βάλει μια μικρή βρυσούλα στη μέση που να έχει πλάτος περίπου 3,7 εκατοστά και μήκος πάλι 3,7 εκατοστά. Να το σχεδιάσεις στο παραπάνω τετράγωνο.

Παράδειγμα 6: Πρόβλημα του μαθητή Τεο

«Υπάρχουν 3 αμάξια. Το πρώτο τρέχει μέχρι 250. Το δεύτερο επίσης 250 και το τρίτο με 125. Χρωμάτισε στο παραπάνω ραβδόγραμμα τα αντίστοιχα κουτάκια για κάθε αμάξι».

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ



Υπάρχουν 3 αμάξια. Το πρώτο τρέχει μέχρι 250. Το δεύτερο επίσης 250 και το τρίτο με 125. Χρωμάτισε στο παραπάνω ραβδόγραμμα τα αντίστοιχα κουτάκια για κάθε αμάξι.

Κεφάλαιο 3: Αποτελέσματα

Ακολουθούν τα αποτελέσματα από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στα ανοιχτά προβλήματα που τους τέθηκαν. Παρουσιάζονται οι βαθμολογίες των βασικών κατηγοριών, δηλαδή οι βαθμολογίες στις εννέα συνιστώσες της δημιουργικής σκέψης των μαθητών που εντοπίστηκαν στις απαντήσεις τους. Όπως προαναφέρθηκε, δεν εμφανίστηκαν και οι εννέα σε κάθε ένα από τα πέντε προβλήματα αλλά ένας αριθμός από αυτές. Επιπλέον, κάθε μια από αυτές τις συνιστώσες βαθμολογείται με βάση τις τέσσερις γνωστικές πτυχές: ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία, επεξεργασία. Σημειώνεται, επίσης, ότι σε κάθε μια συνιστώσα μπορεί να εμφανιστούν όλες αυτές οι πτυχές ή κάποιες από αυτές.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τη βαθμολόγηση των απαντήσεων είναι δεδομένα διάταξης ή τακτικά (*ordinal*) και γι' αυτό το λόγο, όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιείται η διάμεσος (*median*) ως μέτρο της κεντρικής τάσης όπως και το Ενδο- Τεταρτημοριακό Εύρος *Inter-Quartile Range* (*IQR*) σε κάθε μια από τις πτυχές. Σε περίπτωση που το *IQR* βγει μηδέν σημαίνει ότι ο ερευνητής ή ο εκπαιδευτικός που αξιολογεί είναι πεπεισμένος για την ένδειξη της διάμεσου. Αν είναι $0 < IQR \leq 1$ (καθώς μπορεί να βγει σε κάποιες περιπτώσεις δεκαδικός) αποτελεί ισχυρή ένδειξη ότι η τιμή της διάμεσου αντικατοπτρίζει μια βεβαιότητα από τη μεριά του εκπαιδευτικού. Ακολούθως, μια διαφορά ($Q3 - Q1$) $1 < IQR \leq 2$ δείχνει μερική βεβαιότητα, αν είναι $2 < IQR \leq 3$ πολύ μικρή βεβαιότητα, ενώ αν $3 < IQR \leq 4$ καθόλου βεβαιότητα.

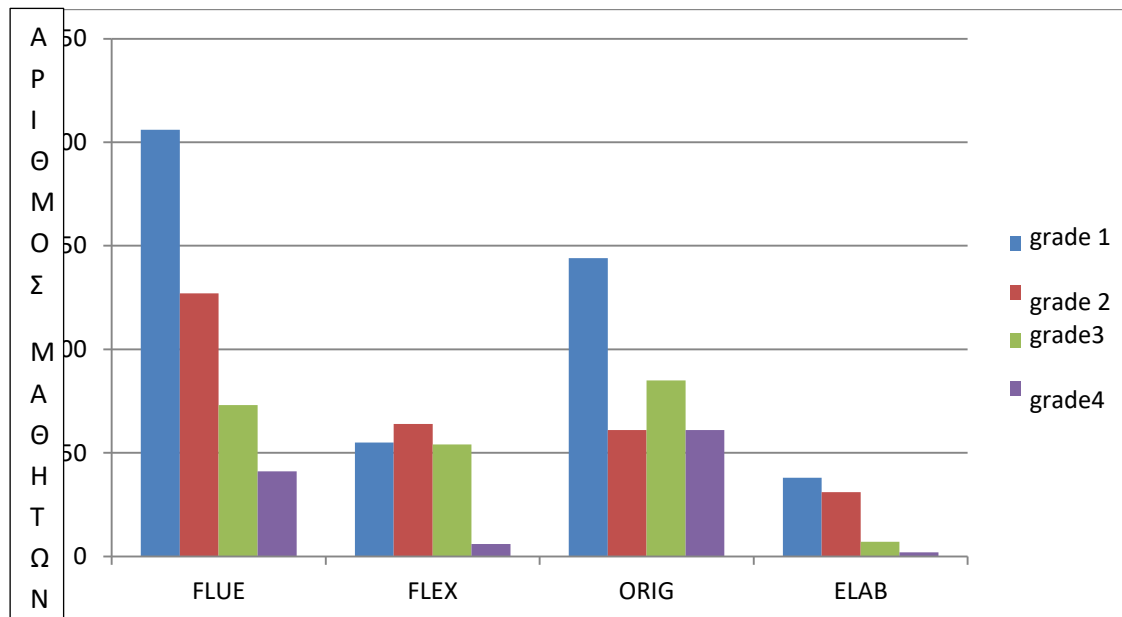
Αρχικά παρουσιάζεται η εικόνα της τάξης συνολικά ως προς το πόσο δημιουργικά σκέφτονται οι μαθητές κατά την επίλυση και δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων. Στη συνέχεια, αναφέρονται οι βαθμολογίες σε κάθε μια από τις συνιστώσες της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών ξεχωριστά.

Δημιουργική Μαθηματική Σκέψης της τάξης συνολικά

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά τη συνολική εικόνα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης που αφορά τη συγκεκριμένη τάξη.

Οι συχνότητες των βαθμών που συλλέγονται για κάθε μια από τις τέσσερις γνωστικές πτυχές της συγκεκριμένης δημιουργικής συνιστώσας, παρουσιάζονται στο

παρακάτω γράφημα (η κλίμακα είναι 1 = πολύ λίγο, 2 = λίγο, 3 = πολύ και 4 = πάρα πολύ):



Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 206 μονάδες, 127 δυάρια, 73 τριάρια και 41 τεσσάρια,
- στην ΕΥΕΛΙΞΙΑ 55 μονάδες, 64 δυάρια, 54 τριάρια και 6 τεσσάρια,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 144 μονάδες, 61 δυάρια, 85 τριάρια και 61 τεσσάρια,
- στην ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ 38 μονάδες, 31 δυάρια, 7 τριάρια και 2 τεσσάρια.

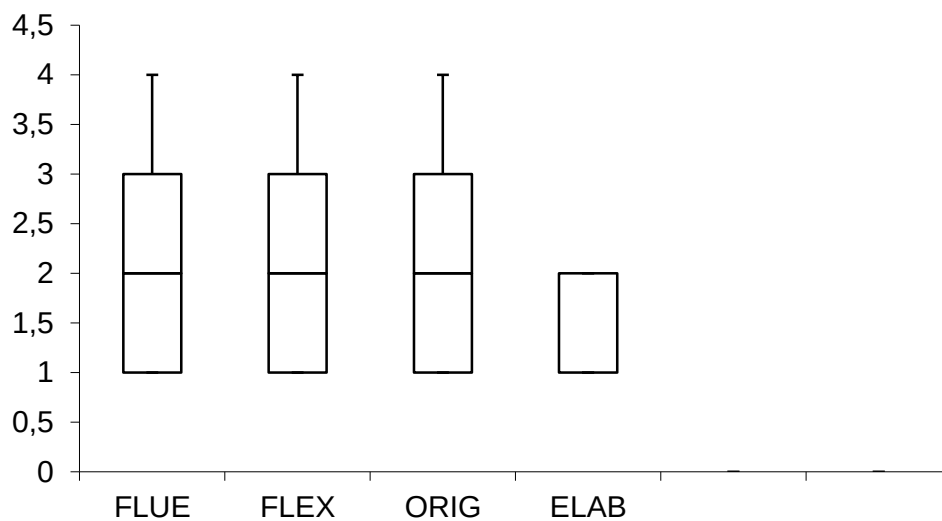
Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

Labels	FLUE	FLEX	ORIG	ELAB
Min	1	1	1	1
Q ₁	1	1	1	1
Median	2	2	2	1
Q ₃	3	3	3	2
Max	4	4	4	4
IQR	2	2	2	1

Από τα παραπάνω φαίνεται να υπάρχει μόνο μερική βεβαιότητα σχετικά με την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία των μαθητών ενώ υπάρχει ισχυρή ένδειξη για την ικανότητα επεξεργασίας των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, το ζευγάρι τιμών που χαρακτηρίζει την ευχέρεια είναι ($Mdn=2$, $IQR=2$), και έτσι μπορούμε να είμαστε μερικώς βέβαιοι ότι η ευχέρεια του μέσου μαθητή της τάξης είναι «λίγη».

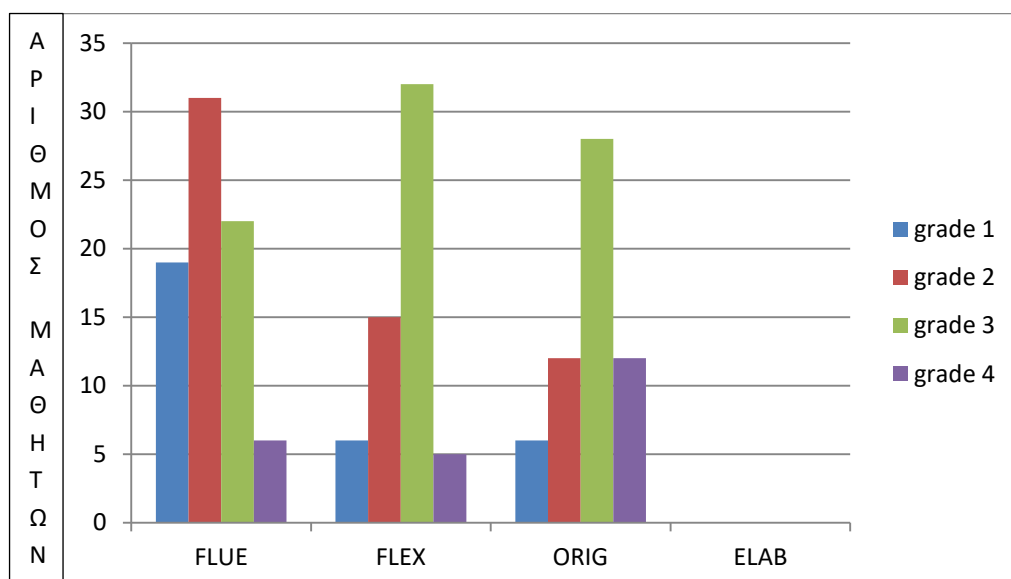
Αντίστοιχα, το ζευγάρι τιμών που χαρακτηρίζει την ευελιξία της τάξης είναι ($Mdn=2$, $IQR=2$), που σημαίνει ότι και πάλι υπάρχει μερική βεβαιότητα ότι ο μέσος μαθητής παρουσιάζει «λίγη» ευελιξία, πράγμα που συμβαίνει και με την πρωτοτυπία ($Mdn=2$, $IQR=2$). Από την άλλη, το ζευγάρι τιμών που χαρακτηρίζει την επεξεργασία είναι ($Mdn=1$, $IQR=1$) κι έτσι, μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι η ικανότητα επεξεργασίας των μαθητών της συγκεκριμένης τάξης είναι «πολύ λίγη».

Ακολουθεί το θηκόγραμμα της παραπάνω κατανομής:



1. Πολλαπλές Λύσεις

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά τις πολλαπλές λύσεις που έδωσαν οι μαθητές στα διάφορα προβλήματα.



Όπως είναι εμφανές από το διάγραμμα η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 19 μονάδες, 31 δυάρια, 22 τριάρια και 6 τεσσάρια,
- στην ΕΥΕΛΙΞΙΑ 6 μονάδες, 15 δυάρια, 32 τριάρια και 5 τεσσάρια,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 6 μονάδες, 12 δυάρια, 28 τριάρια και 12 τεσσάρια.

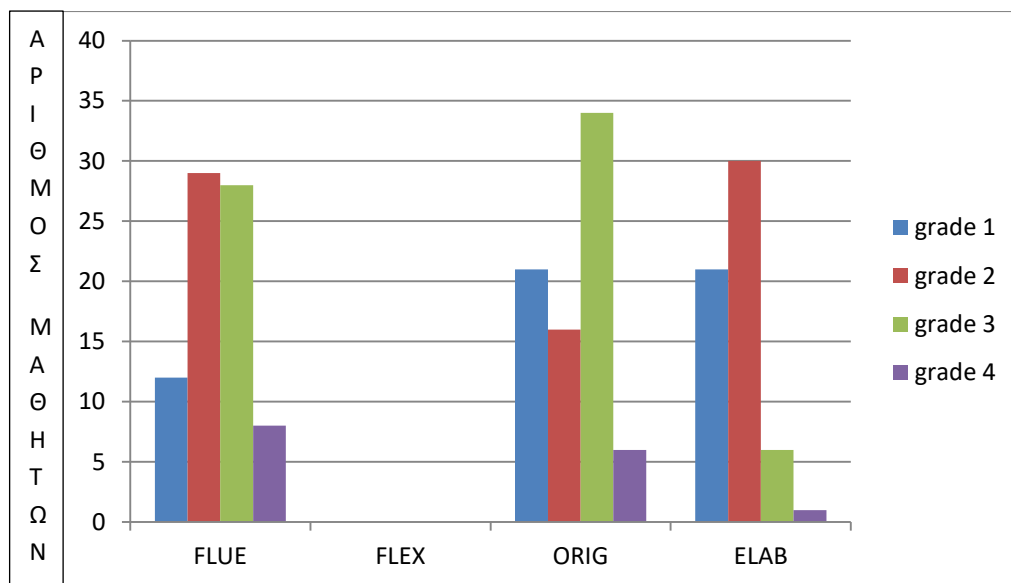
Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

Labels	FLUE	FLEX	ORIG
Min	1	1	1
Q ₁	2	2	2
Median	2	3	3
Q ₃	3	3	3
Max	4	4	4
IQR	1	1	1

Σχετικά, λοιπόν, με τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης φαίνεται να υπάρχει βεβαιότητα όσον αφορά την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία των μαθητών της τάξης. Πιο συγκεκριμένα, το ζευγάρι τιμών που χαρακτηρίζει την ευχέρεια είναι ($Mdn=2$, $IQR=1$), και έτσι είμαστε βέβαιοι ότι η ευχέρεια του «μέσου» μαθητή της τάξης στο να δίνει πολλαπλές λύσεις σε μαθηματικά προβλήματα είναι «λίγη», όμως αυτός παρουσιάζει «πολλή» ευελιξία στις πολλαπλές λύσεις που δίνει ($Mdn=3$, $IQR=1$), ενώ ταυτόχρονα μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι είναι «πολύ» πρωτότυπος στις πολλαπλές του λύσεις ($Mdn=3$, $IQR=1$).

2. Πολλαπλές Στρατηγικές

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά τις πολλαπλές στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές στα διάφορα προβλήματα.



Όπως είναι εμφανές από το διάγραμμα η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 12 μονάδες, 29 δυάρια, 28 τριάρια και 8 τεσσάρια,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 21 μονάδες, 16 δυάρια, 34 τριάρια και 6 τεσσάρια,
- στην ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ 21 μονάδες, 30 δυάρια, 6 τριάρια και 1 τεσσάρι.

Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

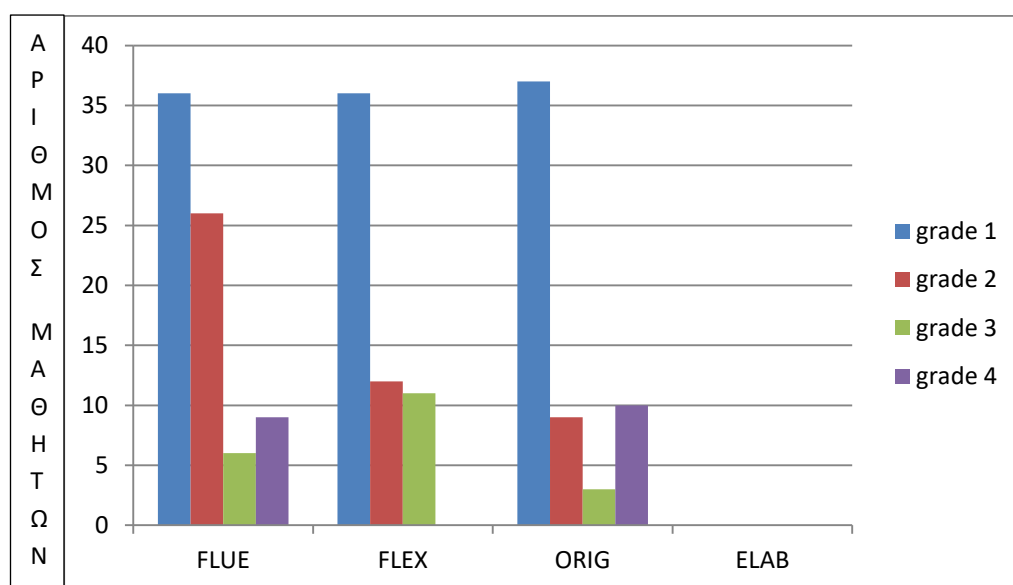
Labels	FLUE	ORIG	ELAB
Min	1	1	1
Q ₁	2	1	1
Median	2	3	2
Q ₃	3	3	2
Max	4	4	4
IQR	1	2	1

Αναφορικά με τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης φαίνεται να υπάρχει βεβαιότητα σχετικά με την ευχέρεια και την ικανότητα επεξεργασίας των μαθητών της τάξης, ενώ υπάρχει μερική βεβαιότητα για την πρωτοτυπία. Υπάρχει ισχυρή ένδειξη ότι η ευχέρεια των μαθητών στη χρήση πολλαπλών στρατηγικών είναι «λίγη» ($Mdn=2$, $IQR=1$), με το ίδιο να συμβαίνει και με την ικανότητα των μαθητών να επεξεργάζονται τις πολλαπλές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν ($Mdn=2$, $IQR=1$). Από την άλλη, το ζευγάρι τιμών της πρωτοτυπίας

είναι ($Mdn=3$, $IQR=2$), μας δείχνει μερική βεβαιότητα για το ότι οι πολλαπλές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές είναι «πολύ» πρωτότυπες.

3. Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών/έννοιών

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές περιοχές/έννοιες.



Όπως είναι εμφανές από το διάγραμμα η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 36 μονάδες, 26 δυάρια, 6 τριάρια και 9 τεσσάρια,
- στην ΕΥΕΛΙΞΙΑ 36 μονάδες, 12 δυάρια, 11 τριάρια και καθόλου τεσσάρια,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 37 μονάδες, 9 δυάρια, 3 τριάρια και 10 τεσσάρια.

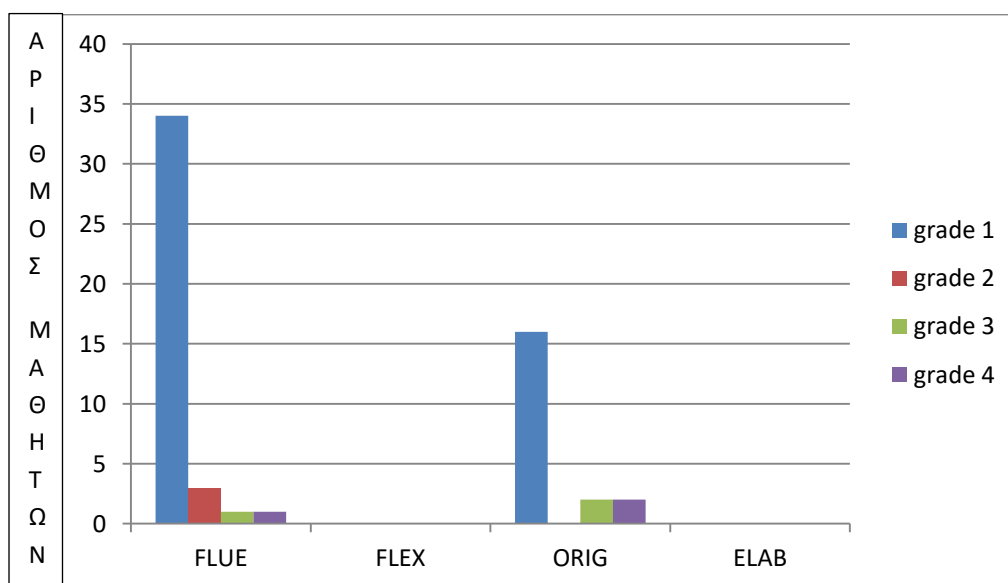
Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

Labels	FLUE	FLEX	ORIG
Min	1	1	1
Q ₁	1	1	1
Median	2	1	1
Q ₃	2	2	2
Max	4	3	4
IQR	1	1	1

Όσον αφορά τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης φαίνεται να υπάρχει ισχυρή ένδειξη σχετικά με την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία των μαθητών της τάξης. Έτσι, είμαστε βέβαιοι πως (α) η ευχέρεια των μαθητών στη σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών είναι «λίγη» ($Mdn=2, IQR=1$), (β) οι μαθητές είναι «πολύ λίγο» ευέλικτοι κατά τη σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών ($Mdn=1, IQR=1$), και τέλος (γ) η πρωτοτυπία των μαθητών στη συγκεκριμένη συνιστώσα είναι «πολύ λίγη» ($Mdn=1, IQR=1$).

4. Διεπιστημονικότητα

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να συνδέουν τα Μαθηματικά με διαφορετικές επιστημονικές περιοχές.



Η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

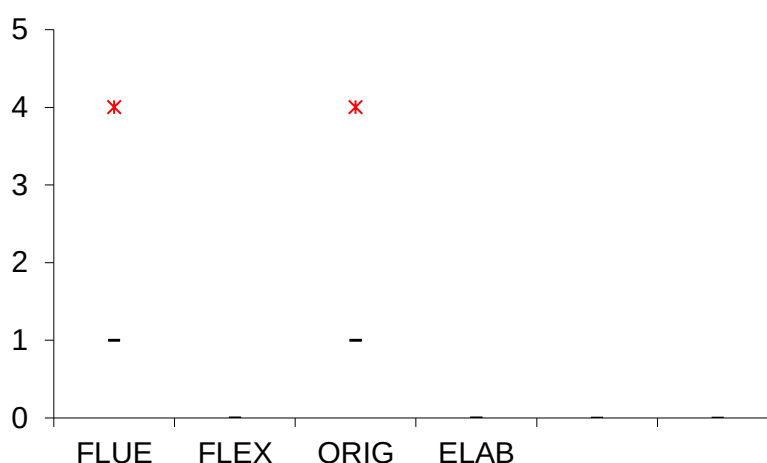
- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 34 μονάδες, 3 δυάρια, 1 τριάρια και 1 τεσσάρι,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 16 μονάδες, 0 δυάρια, 2 τριάρια και 2 τεσσάρια.

Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

Labels	FLUE	ORIG
Min	1	1
Q ₁	1	1
Median	1	1
Q ₃	1	1
Max	4	4
IQR	0	0

Όπως δείχνουν τα στοιχεία του πίνακα, για τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης φαίνεται να υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα σχετικά με την ευχέρεια και την πρωτοτυπία των μαθητών. Έτσι, είμαστε πεπεισμένοι ότι η ευχέρεια του μέσου μαθητή της τάξης στη σύνδεση των Μαθηματικών με άλλες επιστήμες είναι «πολύ λίγη» ($Mdn=1$, $IQR=0$). Αντίστοιχα, υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα ότι η πρωτοτυπία του μέσου μαθητή της συγκεκριμένης τάξης στις διεπιστημονικές συνδέσεις είναι «πολύ λίγη» ($Mdn=1$, $IQR=0$).

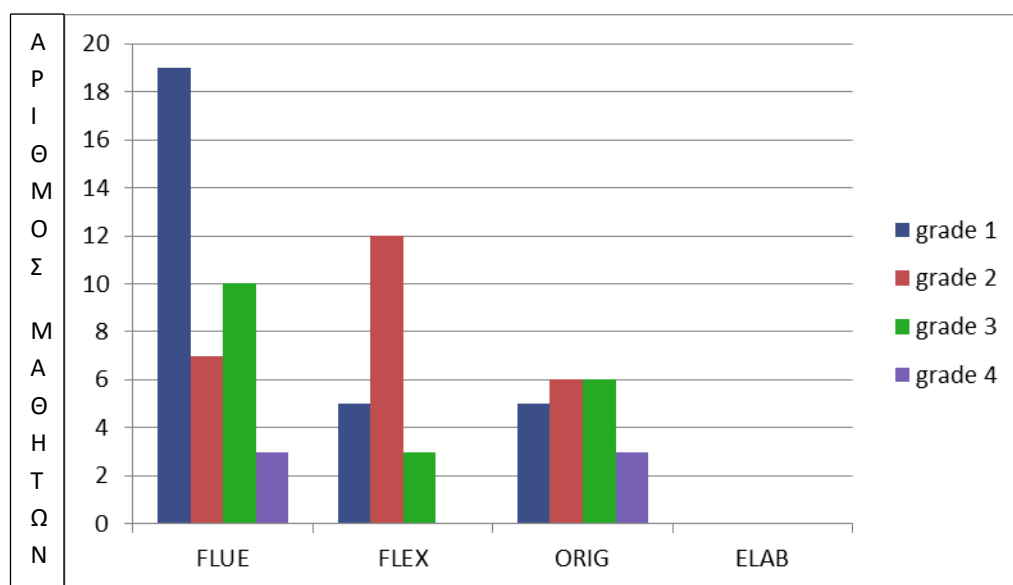
Ακολουθεί το θηκόγραμμα της παραπάνω κατανομής:



Σημειώνεται ότι στο παρόν θηκόγραμμα τόσο η πτυχή της ευχέρειας όσο και αυτή της επεξεργασίας εμφανίζονται ως μια ευθεία γραμμή στο 1, καθώς η διάμεσος (*median*) ταυτίζεται με τον Q1 και τον Q3.

5. Πολλαπλές Αναπαραστάσεις

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να αναπαριστούν την ίδια μαθηματική έννοια με διαφορετικές αναπαραστάσεις.



Η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 19 μονάδες, 7 δυάρια, 10 τριάρια και 3 τεσσάρια,
- στην ΕΥΕΛΙΞΙΑ 5 μονάδες, 12 δυάρια, 3 τριάρια και καθόλου τεσσάρια,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 5 μονάδες, 6 δυάρια, 6 τριάρια και 3 τεσσάρια.

Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

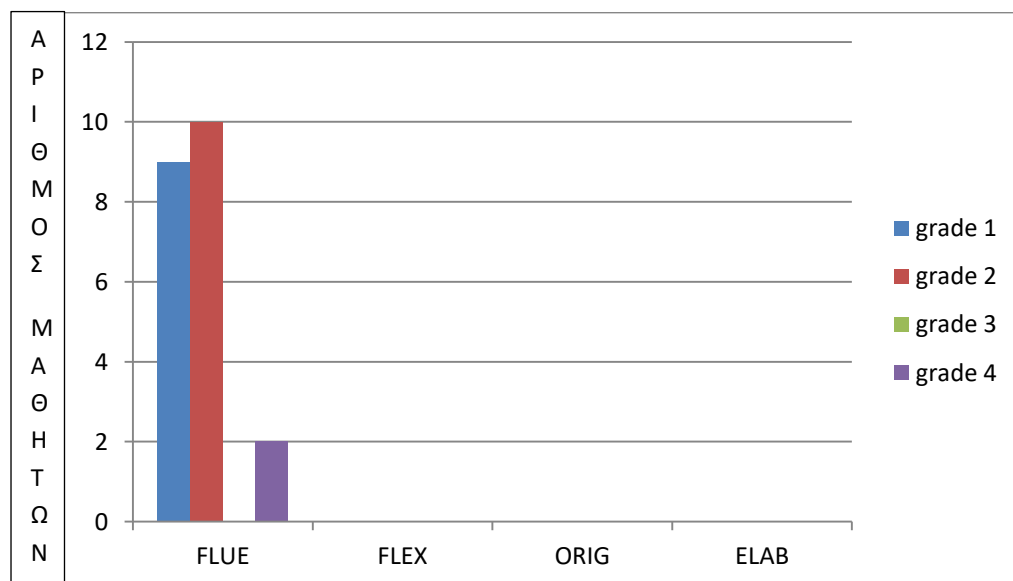
Labels	FLUE	FLEX	ORIG
Min	1	1	1
Q ₁	1	1,75	1,75
Median	2	2	2
Q ₃	3	2	3
Max	4	3	4
IQR	2	0,25	1,25

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι για τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης υπάρχει μερική βεβαιότητα σχετικά με την

ευχέρεια και την πρωτοτυπία των μαθητών, ενώ υπάρχει βεβαιότητα για την ευελιξία. Ο πίνακας λοιπόν μας επιτρέπει να είμαστε μερικώς βέβαιοι ότι η ευχέρεια του μέσου μαθητή της τάξης στις πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι «λίγη» ($Mdn=2$, $IQR=2$). Μερικώς βέβαιοι είμαστε επίσης και για το ότι η πρωτοτυπία του μέσου μαθητή της συγκεκριμένης τάξης στις πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι «λίγη» ($Mdn=2$, $IQR=1,25$). Τέλος, μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι η ευελιξία των μαθητών της συγκεκριμένης τάξης στην παρούσα συνιστώσα είναι «λίγη» ($Mdn=2$, $IQR=0,25$).

6. Σύνδεση με την καθημερινή ζωή

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να συνδέουν τα Μαθηματικά με την καθημερινή ζωή.



Η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- Στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 9 μονάδες, 10 δυάρια, 0 τριάρια και 2 τεσσάρια.

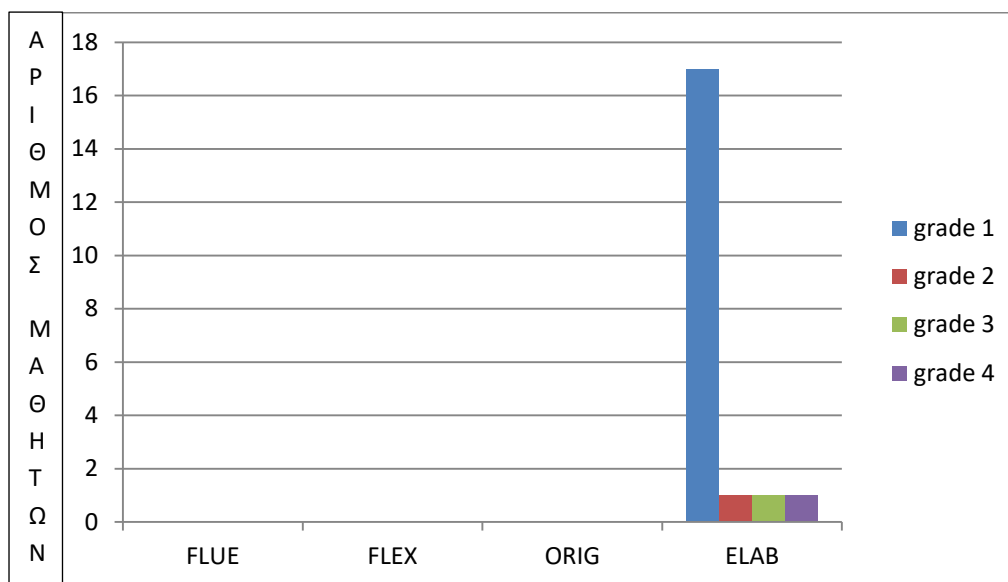
Ο πίνακας κατανομής των τιμών είναι ο εξής:

Labels	FLUE
Min	1
Q ₁	1
Median	2
Q ₃	2
Max	4
IQR	1

Για τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης υπάρχει βεβαιότητα σχετικά με την ευχέρεια των μαθητών της τάξης. Συγκεκριμένα, είμαστε βέβαιοι ότι η ευχέρεια των μαθητών στη σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινή τους ζωή είναι «λίγη» ($Mdn=2$, $IQR=1$).

7. Γενίκευση

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν μαθηματικά προβλήματα.



Η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

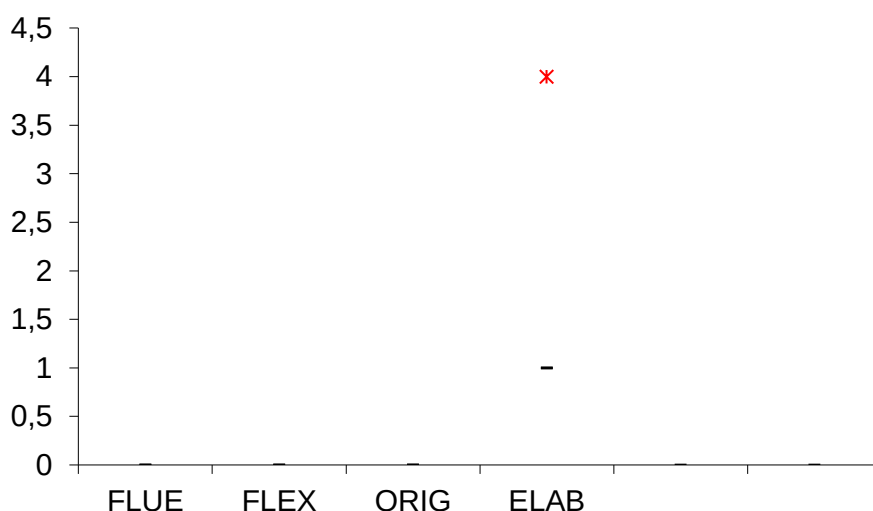
- στην ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ 17 μονάδες, 1 δυάρι, 1 τριάρι και 1 τεσσάρι.

Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

Labels	ELAB
Min	1
Q ₁	1
Median	1
Q ₃	1
Max	4
IQR	0

Όσον αφορά τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης φαίνεται να υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα ότι η ικανότητα του «μέσου» μαθητή της τάξης να επεξεργάζεται μαθηματικές καταστάσεις σε περιπτώσεις γενίκευσης, είναι «πολύ λίγη» ($Mdn=1$, $IQR=0$).

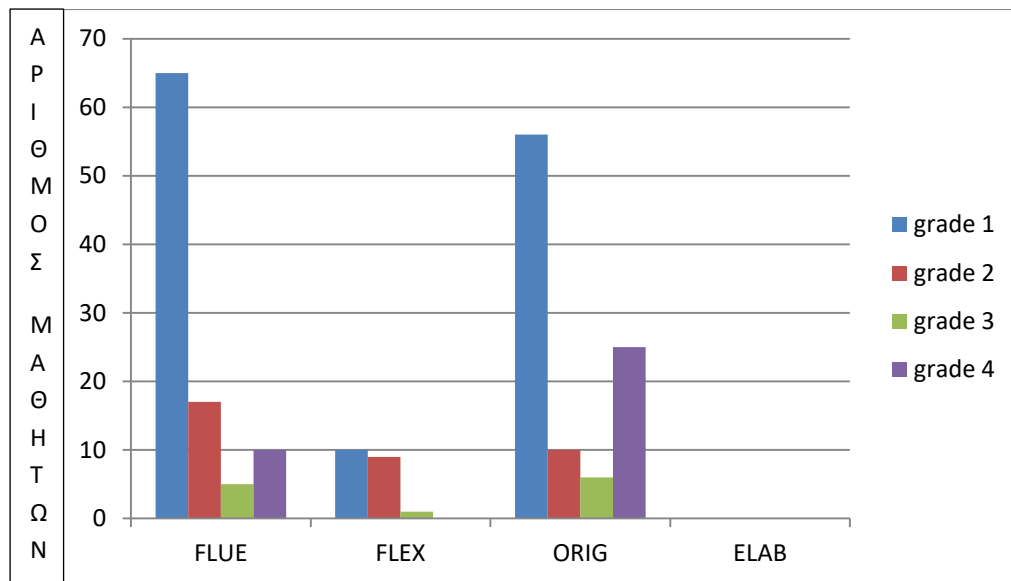
Ακολουθεί το θηκόγραμμα της παραπάνω κατανομής:



Στο θηκόγραμμα παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ευθεία γραμμή στον ένα βαθμό διότι ο Q1, ο Median και ο Q3 ταυτίζονται ($=1$).

8. Απρόσμενες Λύσεις

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά τις απρόσμενες λύσεις που έδωσαν οι μαθητές στα διάφορα προβλήματα.



Η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 65 μονάδες, 17 δυάρια, 5 τριάρια και 10 τεσσάρια,
- στην ΕΥΕΛΙΞΙΑ 10 μονάδες, 9 δυάρια, 1 τριάρια και 0 τεσσάρια,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 56 μονάδες, 10 δυάρια, 6 τριάρια, 25 τεσσάρια.

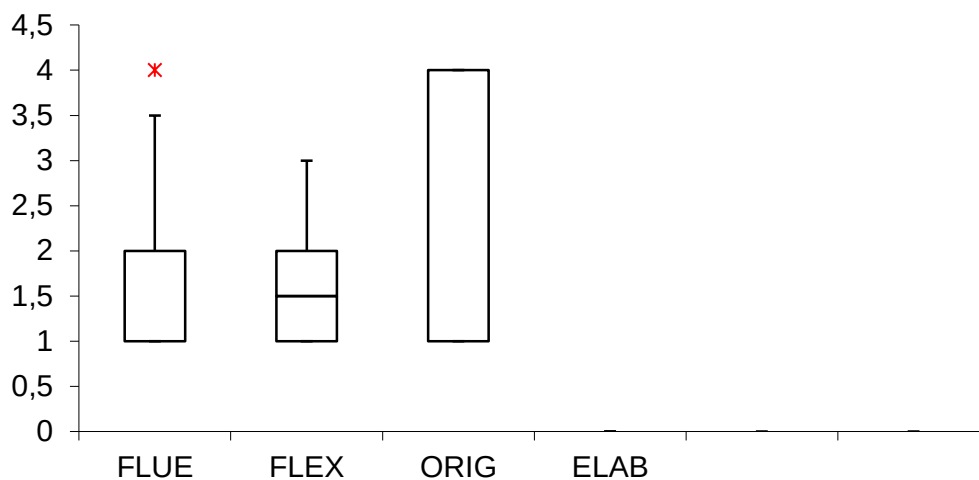
Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

Labels	FLUE	FLEX	ORIG
Min	1	1	1
Q ₁	1	1	1
Median	1	1,5	1
Q ₃	2	2	4
Max	4	3	4
IQR	1	1	3

Ο παραπάνω πίνακας μας πληροφορεί πως για τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης, υπάρχει ισχυρή ένδειξη τόσο σχετικά με την ευχέρεια και όσο και με την ευελιξία των μαθητών, ενώ υπάρχει πολύ μικρή βεβαιότητα για την πρωτοτυπία τους. Μπορούμε λοιπόν να πούμε με βεβαιότητα ότι η ευχέρεια του μέσου μαθητή της τάξης στο να δίνει απρόσμενες λύσεις είναι «πολύ λίγη» ($Mdn=1$, $IQR=1$). Αντίστοιχα, το ζευγάρι τιμών που χαρακτηρίζει την ευελιξία

της τάξης είναι ($Mdn=1,5$, $IQR=1$) Εδώ μας δίνει μια βεβαιότητα για το ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε με ακρίβεια για την εικόνα της ευελιξίας αφού η τιμή 1,5 δεν αντιστοιχεί σε τιμή της κλίμακας Likert που δώσαμε και μας δίνει απλά μια ένδειξη για το ότι αυτή η ικανότητα κυμαίνεται ανάμεσα στο «λίγο» και στο «πολύ». Τέλος για την πρωτοτυπία της τάξης στην παρούσα συνιστώσα μπορούμε να πούμε με πολύ μικρή βεβαιότητα ότι ο «μέσος» μαθητής της τάξης είναι «πολύ λίγο» πρωτότυπος στις απρόσμενες λύσεις που έδωσε ($Mdn=1$, $IQR=3$).

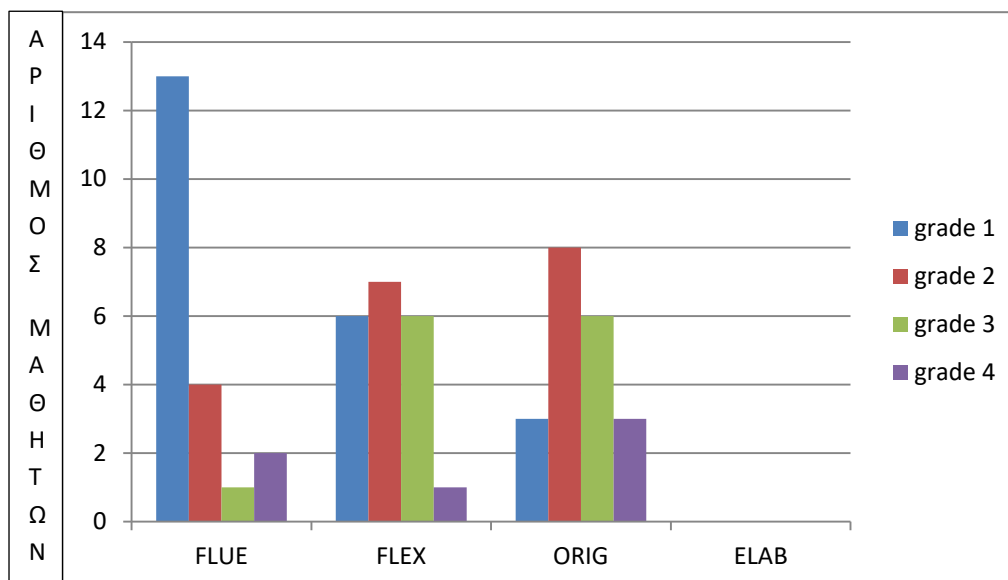
Ακολουθεί το θηκόγραμμα της παραπάνω κατανομής:



Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι στην πτυχή της πρωτοτυπίας εμφανίζονται πολλές μονάδες και αρκετά τεσσάρια, ενώ λιγότερα είναι τα δυάρια και τα τριάρια. Με άλλα λόγια, υπερिशύουν οι ακραίες τιμές, καθώς ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών έχει δώσει είτε πολύ λίγες ή πάρα πολλές πρωτότυπες απρόσμενες λύσεις.

9. Δημιουργία Προβλημάτων

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών της συγκεκριμένης τάξης να δημιουργούν μαθηματικά προβλήματα.



Η συγκεκριμένη τάξη πήρε:

- στην ΕΥΧΕΡΕΙΑ 13 μονάδες, 4 δυάρια, 1 τριάρια και 2 τεσσάρια,
- στην ΕΥΕΛΙΞΙΑ 6 μονάδες, 7 δυάρια, 6 τριάρια και 1 τεσσάρια,
- στην ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ 3 μονάδες, 8 δυάρια, 6 τριάρια, 3 τεσσάρια.

Ακολουθεί ο πίνακας κατανομής των τιμών:

Labels	FLUE	FLEX	ORIG
Min	1	1	1
Q ₁	1	1	2
Median	1	2	2
Q ₃	2	3	3
Max	4	4	4
IQR	1	2	1

Για τη συγκεκριμένη συνιστώσα της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης υπάρχει ισχυρή ένδειξη σχετικά με την ευχέρεια και την πρωτοτυπία ενώ υπάρχει μερική βεβαιότητα σχετικά με την ευελιξία. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει ισχυρή ένδειξη πως ευχέρεια του μέσου μαθητή της τάξης στη δημιουργία προβλημάτων είναι «πολύ λίγη» ($Mdn=1$, $IQR=1$) και πως ο μέσος μαθητής παρουσιάζει «λίγη» ικανότητα στη δημιουργία πρωτότυπων προβλημάτων ($Mdn=2$, $IQR=1$). Ωστόσο, το ζευγάρι τιμών που χαρακτηρίζει την ευελιξία ($Mdn=2$, $IQR=2$), μας δείχνει ότι έχουμε μερική βεβαιότητα (δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα) ότι η τάξη παρουσιάζει «λίγη» ευελιξία στην ικανότητα δημιουργίας προβλημάτων.

Συγκεντρωτικός πίνακας Αποτελεσμάτων

Συνιστώσες της ΔΜΣ	Γνωστικές πτυχές			
	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Επεξεργασία
<i>Πολλαπλές Λύσεις</i>	λίγη	πολύ	πολύ	<i>N/A</i>
<i>Πολλαπλές Στρατηγικές</i>	λίγη	<i>N/A</i>	πολύ (μερική βεβαιότητα)	λίγη
<i>Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών/εννοιών</i>	λίγη	πολύ λίγη	πολύ λίγη	<i>N/A</i>
<i>Διεπιστημονικότητα</i>	πολύ λίγη	<i>N/A</i>	πολύ λίγη	<i>N/A</i>
<i>Πολλαπλές Αναπαραστάσεις</i>	λίγη (μερική βεβαιότητα)	λίγη	λίγη (μερική βεβαιότητα)	<i>N/A</i>
<i>Σύνδεση με την καθημερινή ζωή</i>	λίγη	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>
<i>Γενίκευση</i>	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	πολύ λίγη
<i>Απρόσμενες Λύσεις</i>	πολύ λίγη	πολύ λίγη έως λίγη	πολύ λίγη (πολύ μικρή βεβαιότητα)	<i>N/A</i>
<i>Δημιουργία Προβλημάτων</i>	πολύ λίγη	λίγη (μερική βεβαιότητα)	λίγη	<i>N/A</i>

Συνολικά ΔΜΣ τάξης	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Επεξεργασία
	λίγη (μερική βεβαιότητα)	λίγη (μερική βεβαιότητα)	λίγη (μερική βεβαιότητα)	πολύ λίγη

Κεφάλαιο 4: Συζήτηση – Συμπεράσματα

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκε με τρόπο διεξοδικό η αξιολόγηση της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών ενός τμήματος της Στ' τάξης του Δημοτικού. Σε αυτό το κεφάλαιο επιχειρείται η σύνδεση της διαδικασίας και των ευρημάτων της έρευνας με τη θεωρία του συγκεκριμένου πεδίου, η οποία παρουσιάστηκε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας.

Αρχικά, η δημιουργικότητα, όπως προαναφέρθηκε, είναι μια έννοια η οποία προσδιορίζεται από ένα ζευγάρι αντίθετων προσεγγίσεων και οι οποίες συναντώνται στη βιβλιογραφία κάτω από τις κατηγορίες της 'Big-C' / 'Pro- C' και 'little-c' / 'mini- c' δημιουργικότητας. Η παρούσα μελέτη αποβλέπει στο σχεδιασμό ενός πολυδιάστατου τεστ δημιουργικότητας που λαμβάνει υπόψη τη σχετική φύση της δημιουργικότητας (*relative creativity*) στο πλαίσιο ανάπτυξης της mini- c δημιουργικότητας. Συνεπώς, εξετάζει τη σχετική δημιουργικότητα και αφορά τη δημιουργικότητα που συναντάται στην καθημερινή σχολική ζωή, η οποία αξιολογείται σε σχέση με τις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών και τις επιδόσεις των υπόλοιπων συνομηλίκων σε παρόμοια εκπαιδευτικά πλαίσια. Όπως υποστηρίζουν, άλλωστε, πολλοί ερευνητές, η δημιουργικότητα είναι ένα σύνολο χαρακτηριστικών που μπορεί να αναπτυχθεί στα σχολεία και στους μαθητές και απαιτεί τη διάκριση μεταξύ σχετικής και απόλυτης δημιουργικότητας όπως και της 'Big-C' / 'Pro- C' και 'little-c' / 'mini- c' δημιουργικότητας (Csikszentmihalyi 1988· Leikin, 2009). Έτσι, η φιλοσοφία της παρούσας έρευνας συνάδει με τη θεωρία της μαθηματικής δημιουργικότητας ως μια διάθεση που μπορεί να καλλιεργηθεί περαιτέρω σε ένα μαθηματικό εκπαιδευτικό πλαίσιο επιτρέποντας στους μαθητές να εκτίθενται σε ανοικτά μαθηματικά προβλήματα για να εμπλακούν σε πολλαπλές οδούς σκέψης ή πολλαπλές λύσεις / ερμηνείες του προβλήματος που διαπραγματεύεται.

Επιπρόσθετα, ένα ακόμη ζευγάρι προσεγγίσεων της ΔΜΣ, όπως προαναφέρθηκε, είναι αυτό της διαδικασίας (*process*) (Getzels και Jackson, 1962· Goldschmidt & Tatsa, 2005· Liljedahl, 2013) και του προϊόντος (*product*) (Chamberlin & Moon, 2005· Cropley και Cropley, 2005). Έτσι, ενώ η πλειοψηφία των εμπειρικών ερευνών αξιολογεί τη ΔΜΣ είτε ως διαδικασία ή ως προϊόν, η

παρούσα έρευνα θεωρεί πως η δημιουργική διαδικασία συμβαίνει στο πλαίσιο μιας μαθηματικής δραστηριότητας μέσω της οποίας ένα προϊόν παράγεται. Η συγκεκριμένη προσέγγιση υποδηλώνει ότι δεν είναι υπαρκτή η διχοτόμηση μεταξύ των διαδικασιών και των προϊόντων της μαθηματικής σκέψης, τονίζοντας την αναζήτηση για την αναγνώριση των πολλών συστατικών που κατασκευάζουν τη φύση της ΔΜΣ. Άλλωστε η διαδικασία δημιουργικής (μαθηματικής) σκέψης δεν μπορεί να γίνει κατανοητή χωρίς το δημιουργικό (μαθηματικό) προϊόν, ούτε το προϊόν χωρίς τη διαδικασία. Αυτό συνάδει με την υιοθέτηση μιας συνθετικής προσέγγισης (*componential approach*) κατά την αξιολόγηση της ΔΜΣ, δηλαδή μιας αξιολόγησης κατά την οποία αξιολογούνται στοιχεία της διαδικασίας π.χ. αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να επεξεργάζονται μαθηματικές καταστάσεις (*elaboration*), να συνδέουν διαφορετικές μαθηματικές περιοχές/ έννοιες (Guilford, 1968· Torrance, 1974) αλλά και στοιχεία των δημιουργικών προϊόντων π.χ. μια πρωτότυπη λύση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Επιπλέον, η παρούσα έρευνα προσεγγίζει την Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη των μαθητών μέσω της επίλυσης και δημιουργίας προβλήματος την οποία υποστήριξε αρχικά ο Silver (1997). Πιο συγκεκριμένα, ακολουθεί την άποψη σύμφωνα με την οποία η Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη δεν έχει να κάνει μονομερώς με τη δημιουργία ή την επίλυση προβλήματος αλλά με τη διαδοχική μετάβαση (*interplay*) από τη μία διαδικασία στην άλλη. Άλλωστε στο πλαίσιο των σχολικών Μαθηματικών κυριαρχεί η προσέγγιση της επίλυσης και δημιουργίας προβλήματος, η οποία σύμφωνα με τον Torrance (1974) και ακολούθως τον Silver (1997) προάγει τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη. Από τα αποτελέσματα της έρευνας φάνηκε πως η Δημιουργική Μαθηματική σκέψη αναγνωρίζεται μέσω της επίλυσης και δημιουργίας προβλήματος, όπως υποστήριξαν και οι παραπάνω ερευνητές.

Η παραπάνω προσέγγιση πραγματώνεται μέσα από τη χρήση ανοιχτών προβλημάτων που ζητούν από τους μαθητές τόσο την επίλυση προβλήματος όσο και τη δημιουργία προβλήματος. Στην παρούσα έρευνα έχουν χρησιμοποιηθεί πέντε ανοιχτά προβλήματα (τέσσερα επίλυσης και ένα δημιουργίας προβλήματος). Επιπλέον, όπως στις περισσότερες έρευνες που έχουν αξιολογήσει τη ΔΜΣ των μαθητών (Cohen, 1972· El-Demerdash & Kortenkamp, (n.d.)), έτσι και σε αυτή,

εντοπίστηκαν και αξιολογήθηκαν οι βασικές γνωστικές πτυχές της ΔΜΣ, δηλαδή η ευχέρεια, η ευελιξία, η πρωτοτυπία και, επιπλέον, η επεξεργασία . Όσον αφορά τη γενική εικόνα της συγκεκριμένης τάξης, δηλαδή την εικόνα του «μέσου μαθητή» της τάξης, η εμφάνιση αυτών των πτυχών έχει ως εξής:

<i>Συνολική Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη της τάξης</i>			
Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Επεξεργασία
λίγη (μερική βεβαιότητα)	λίγη (μερική βεβαιότητα)	λίγη (μερική βεβαιότητα)	πολύ λίγη

Ωστόσο, η παραπάνω εικόνα παρόλο που είναι ενδεικτική της ΔΜΣ της τάξης, δεν παρέχει πολύτιμες πληροφορίες ως προς το ποιες επιμέρους όψεις της ΔΜΣ των μαθητών είναι περισσότερο ανεπτυγμένες και σε ποιες υστερούν. Πώς αυτή η όποια βεβαιότητα επιμερίζεται; Παρουσιάζουν οι μαθητές όντως λίγη ευχέρεια ή ευελιξία σε οποιαδήποτε επιμέρους συνιστώσα της ΔΜΣ; Ή το αποτέλεσμα αυτό είναι προϊόν μιας αντίληψης μέσου όρου που αποκρύπτει το γεγονός ότι μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να εμφανίζουν αυξημένη ευχέρεια και σε κάποιες άλλες λιγότερη; Έτσι, για να γίνει πιο κατανοητή και αναλυτική η ΔΜΣ των μαθητών υιοθετήθηκε η «*Συνθετική Προσέγγιση*» (*Componential approach*) όπου πέρα από την αξιολόγηση της ΔΜΣ της τάξης συνολικά στις τέσσερις γνωστικές πτυχές (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία, επεξεργασία της τάξης συνολικά) αξιολογήθηκαν οι επιμέρους συνιστώσες της ΔΜΣ των μαθητών υπό το πρίσμα αυτών των γνωστικών πτυχών.

Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης αναπτύχθηκε το δεύτερο εργαλείο αξιολόγησης (*Πλέγμα Αξιολόγησης*) το οποίο αποτελείται από τις εννέα επιλεγμένες συνιστώσες. Με το συγκεκριμένο εργαλείο, η κάθε μια βασική γνωστική συνιστώσα επιμερίζεται στις επιμέρους συνιστώσες και, έτσι μπορούμε να έχουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα σχετικά με ποιες περιπτώσεις π.χ. η ευελιξία των μαθητών ή του μαθητή είναι ισχυρή και πού όχι. Προφανώς, οι συνιστώσες/όψεις της ΔΜΣ δεν εξαντλούνται σε αυτές τις εννέα. Οι συγκεκριμένες επιλέχθηκαν από τους δημιουργούς του εργαλείου καθώς, όπως υποστηρίζει η Amabile (1983, 1990, 1996),

οι ειδικοί στον τομέα μπορούν να αποφασίσουν μετά από κοινή συναίνεση τα κριτήρια αξιολόγησης της ΔΜΣ, στους οποίους μπορεί να περιλαμβάνεται μάλιστα και ο ίδιος ο δημιουργός. Οι κριτές, επομένως, μπορούν να αξιολογήσουν τόσο τις δημιουργικές διαδικασίες όσο και τα προϊόντα. Με λίγα λόγια, μέσω της ανάλυσης όλων αυτών των συνιστωσών προκύπτει μια πληρέστερη εικόνα του «προφίλ» του δημιουργικού μαθητή. Συνεπώς, Μια άλλη συλλογή ανοικτών δραστηριοτήτων πιθανώς θα έδινε πληροφορίες και για άλλες επιμέρους συνιστώσες.

Συνεπώς:

- Για την Ευχέρεια (*fluency*), ενώ έχουμε αρχικά μια γενική εικόνα («λίγη», με μερική βεβαιότητα) δεν είμαστε σίγουροι εάν αυτό ισχύει για όλες τις συνιστώσες της ΔΜΣ. Το εργαλείο μας επέτρεψε να εντοπίσουμε ότι οι μαθητές την έχουν σε μικρό βαθμό, στην εύρεση πολλαπλών λύσεων, στη χρήση πολλαπλών στρατηγικών, στη σύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών/εννοιών, στις πολλαπλές αναπαραστάσεις (αν και με μερική βεβαιότητα) αλλά ακόμα λιγότερο οι μαθητές εμφανίζουν ευχέρεια στις διεπιστημονικές συνδέσεις και στις απρόσμενες λύσεις. Τα παραπάνω στοιχεία βοηθούν τον εκπαιδευτικό της τάξης να εστιάσει τη διδακτική του πρακτική στην ενίσχυση γενικότερα της ευχέρειας (καθώς είναι «λίγη») και ειδικότερα με τη βοήθεια του εργαλείου να ενισχύσει την ικανότητα διεπιστημονικών συνδέσεων των μαθητών.

Συνιστώσες της ΔΜΣ	Ευχέρεια
Πολλαπλές Λύσεις	λίγη
Πολλαπλές Στρατηγικές	λίγη
Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών/εννοιών	λίγη
Διεπιστημονικότητα	πολύ λίγη
Πολλαπλές Αναπαραστάσεις	λίγη (μερική βεβαιότητα)

<i>Σύνδεση με την καθημερινή ζωή</i>	λίγη
<i>Γενίκευση</i>	N/A
<i>Απρόσμενες Λύσεις</i>	πολύ λίγη
<i>Δημιουργία Προβλημάτων</i>	πολύ λίγη

- Για την Ευελιξία (*Flexibility*), η εικόνα που έχουμε από τη γενική ευελιξία της τάξης είναι ότι αυτή είναι «λίγη» (με μερική βεβαιότητα). Αξιολογώντας τις υπόλοιπες, όμως, συνιστώσες της ΔΜΣ των μαθητών και παρατηρώντας τις βαθμολογίες που έχουν πάρει σε αυτές, μπορεί να καταλάβει κανείς ότι υπάρχουν εμφανείς διαφορές. Για παράδειγμα, οι μαθητές φαίνεται να είναι «πολύ» ευέλικτοι στην εύρεση πολλαπλών λύσεων αλλά να εμφανίζουν «λίγη» ευελιξία κατά τη δημιουργία προβλημάτων. Ακόμα λιγότερη, φαίνεται να είναι η ευελιξία των μαθητών στη σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών περιοχών/εννοιών, ενώ σε πολλές περιπτώσεις (π.χ. πολλαπλές στρατηγικές, διεπιστημονικότητα κ.ά) οι μαθητές δεν επέδειξαν καθόλου ευελιξία. Ο δάσκαλος, έχοντας αυτά τα αποτελέσματα στο χέρι του, είναι σε θέση να ενισχύσει τις όψεις που επέδειξαν λιγότερο ή και καθόλου ευελιξία οι μαθητές του.

<i>Συνιστώσες της ΔΜΣ</i>	<i>Ευελιξία</i>
<i>Πολλαπλές Λύσεις</i>	πολύ
<i>Πολλαπλές Στρατηγικές</i>	N/A
<i>Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών/εννοιών</i>	πολύ λίγη
<i>Διεπιστημονικότητα</i>	N/A
<i>Πολλαπλές Αναπαραστάσεις</i>	λίγη
<i>Σύνδεση με την καθημερινή ζωή</i>	N/A

<i>Γενίκευση</i>	<i>N/A</i>
<i>Απρόσμενες Λύσεις</i>	πολύ λίγη έως λίγη
<i>Δημιουργία Προβλημάτων</i>	λίγη (μερική βεβαιότητα)

- Για την Πρωτοτυπία (Originality), τα αποτελέσματα της γενικής εικόνας που χαρακτηρίζει τη συγκεκριμένη τάξη, δείχνουν πως αυτή είναι, επίσης, «λίγη» (με μερική βεβαιότητα). Σύμφωνα με τη «συνθετική προσέγγιση», αυτό το αποτέλεσμα, όπως και στις προηγούμενες γνωστικές πτυχές, δεν εκλαμβάνεται ως χαρακτηρισμός που αφορά ολιστικά την εικόνα της πρωτοτυπίας της τάξης. Κι αυτό, διότι οι μετρήσεις στις υπόλοιπες όψεις μαρτυρούν παραπάνω πληροφορίες, οι οποίες με μια γενική μέτρηση δεν έρχονται στην επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές φαίνεται να είναι «πολύ» πρωτότυποι στην εύρεση πολλαπλών λύσεων, όπως και στη χρήση πολλών στρατηγικών (αν και υπάρχει μερική βεβαιότητα για το δεύτερο), ενώ παρουσιάζουν «λίγη» πρωτοτυπία ως προς την ικανότητα να αναπαριστούν την ίδια έννοια με πολλούς τρόπους και να δημιουργούν προβλήματα. Τέλος, «πολύ λίγη» πρωτοτυπία εμφανίζουν στις συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών περιοχών/εννοιών, στις διεπιστημονικές τους συνδέσεις και στις απρόσμενες λύσεις τους (με πολύ μικρή βεβαιότητα). Ο δάσκαλος, παρομοίως, γνωρίζει ποιες όψεις της σκέψης των μαθητών οφείλει να καλλιεργήσει, παρεμβαίνοντας διδακτικά με τις κατάλληλες δραστηριότητες.

<i>Συνιστώσες της ΔΜΣ</i>	Πρωτοτυπία
<i>Πολλαπλές Λύσεις</i>	πολύ
<i>Πολλαπλές Στρατηγικές</i>	πολύ (μερική βεβαιότητα)
<i>Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών/εννοιών</i>	πολύ λίγη

<i>Διεπισημονικότητα</i>	πολύ λίγη
<i>Πολλαπλές Αναπαραστάσεις</i>	λίγη (μερική βεβαιότητα)
<i>Σύνδεση με την καθημερινή ζωή</i>	N/A
<i>Γενίκευση</i>	N/A
<i>Απρόσμενες Λύσεις</i>	πολύ λίγη (πολύ μικρή βεβαιότητα)
<i>Δημιουργία Προβλημάτων</i>	λίγη

- Για την Επεξεργασία (Elaboration), τέλος, ο εκπαιδευτικός, πέρα από τη γενική εικόνα της επεξεργασίας της τάξης, η οποία χαρακτηρίζεται ως «πολύ λίγη», χρησιμοποιώντας το παρόν εργαλείο, γνωρίζει πως αυτή η πτυχή εμφανίζεται ελάχιστα στη ΔΜΣ των μαθητών, καθώς μόνο σε δύο συνιστώσες κάνει την εμφάνισή της. Σε αυτή την περίπτωση, ο εκπαιδευτικός γνωρίζει ότι πρέπει να εστιάσει γενικότερα στην ικανότητα των μαθητών να επεξεργάζονται μαθηματικές καταστάσεις, αλλά ειδικότερα στις συνιστώσες που δεν εμφανίζεται καθόλου αυτή η πτυχή.

<i>Συνιστώσες της ΔΜΣ</i>	<i>Επεξεργασία</i>
<i>Πολλαπλές Λύσεις</i>	N/A
<i>Πολλαπλές Στρατηγικές</i>	λίγη
<i>Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών/εννοιών</i>	N/A
<i>Διεπισημονικότητα</i>	N/A
<i>Πολλαπλές Αναπαραστάσεις</i>	N/A
<i>Σύνδεση με την καθημερινή ζωή</i>	N/A
<i>Γενίκευση</i>	πολύ λίγη

<i>Απρόσμενες Λύσεις</i>	<i>N/A</i>
<i>Δημιουργία Προβλημάτων</i>	<i>N/A</i>

Παρατηρώντας τις επιδόσεις των μαθητών στις τέσσερις γνωστικές πτυχές όλων των συνιστωσών συνολικά, ο εκπαιδευτικός μπορεί να καταλάβει σε ποιες από αυτές είναι πιο ανεπτυγμένη η ΔΜΣ και σε ποιες όχι. Για παράδειγμα, φαίνεται ότι η διασύνδεση μαθηματικών περιοχών ή γνωστικών αντικειμένων είναι μια βασική αδυναμία της τάξης σε όλα τα επίπεδα και των τεσσάρων γνωστικών όψεων και επομένως φαίνεται να απαιτείται μια διδακτική παρέμβαση προς την μεριά αυτή. Από την άλλη, φαίνεται οι μαθητές να ανταποκρίνονται απαιτητικά στο κομμάτι των πολλαπλών λύσεων και στρατηγικών, που σημαίνει ότι αυτή η ικανότητα στην επίλυση προβλήματος είναι ανεπτυγμένη.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι τα μικρά σκορ σε όλες τις επιμέρους συνιστώσες π.χ. της ικανότητας διεπιστημονικών συνδέσεων, οφείλουν να χρήζουν προσοχής, καθώς φαίνεται πως ορισμένες ικανότητες των μαθητών είναι ελάχιστα καλλιεργημένες. Κατά συνέπεια, οι εκπαιδευτικοί, αντί να πιστεύουν πως μόνο ένα μικρό τμήμα των μαθητών είναι ικανοί να ασχοληθούν με δημιουργικά προβλήματα (Boesen, 2006), χρησιμοποιώντας το παρόν εργαλείο, έχουν μια πιο ξεκάθαρη εικόνα σχετικά με τις «αδυναμίες» του μαθητή τους και είναι σε θέση να ενισχύουν τη δημιουργικότητά του. Στην περίπτωση της συγκεκριμένης τάξης, ο εκπαιδευτικός, αντί να θεωρεί πως οι μαθητές του δεν μπορούν να καταπιαστούν γενικότερα με δημιουργικά προβλήματα, ύστερα από τις μετρήσεις, γνωρίζει πως μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων που επιτρέπουν τις συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών περιοχών ή τις διεπιστημονικές συνδέσεις, οι μαθητές του μπορούν να αναπτύξουν τις συγκεκριμένες ικανότητες.

Επιπρόσθετα, τα παραπάνω επιμέρους χαρακτηριστικά της ΔΜΣ αποτελούν σημαντικά γνωρίσματα της ΔΜΣ, όπως παρουσιάστηκε και στη βιβλιογραφική ανασκόπηση και ναι μεν έχουν αναγνωριστεί από διάφορους ερευνητές ως σημαντικά στοιχεία, δεν έχουν αξιολογηθεί, όμως, μέχρι στιγμής σε κάποια ερευνητική μελέτη. Η παρούσα μελέτη, λοιπόν, σε αντίθεση με την πλειοψηφία των ερευνών του χώρου, χρησιμοποιεί και προτείνει ένα πολυδιάστατο τεστ αξιολόγησης και κάνει μια

προσπάθεια να ακολουθήσει τη συνθετική προσέγγιση (*comproential approach*) στην αξιολόγηση της ΔΜΣ, έτσι ώστε να υπάρξει μια αναλυτική και πλήρης εικόνα της ΔΜΣ.

Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα προτείνει το παρόν **πακέτο αξιολόγησης** (2 εργαλεία αξιολόγησης) ως ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών και των ερευνητών που επιθυμούν να αξιολογήσουν τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη των μαθητών. Στο παρελθόν, όπως αναφέρθηκε κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, έχουν προταθεί πολλά εργαλεία αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας, όπως αυτό των Kwon et al (2006), των Lee, Hwang και Seo (2003) και πολλών άλλων, τα οποία, όμως, περιορίζονται στη μέτρηση μονάχα των τριών γνωστικών πτυχών: ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία και σπάνια των τεσσάρων, παραγνωρίζοντας την ικανότητα επεξεργασίας όπως και των λοιπών συνιστωσών της ΔΜΣ.

Το δυνατό της σημείο αποτελεί το εργαλείο της (*Πλέγμα Αξιολόγησης, Evaluation Grid*) το οποίο ύστερα από την κατάλληλη τροποποίηση καθίσταται δυνατή η αξιολόγηση της ΔΜΣ των μαθητών. Με αυτό «μετρώνται» μεν οι βασικές γνωστικές πτυχές, που παραδοσιακά η πλειοψηφία των ερευνών μελετά, δίχως, όμως, να παραγνωρίζονται και οι επιμέρους όψεις της ΔΜΣ, οι οποίες παρέχουν πολύ σημαντικές πληροφορίες για το πόσο δημιουργικοί είναι οι μαθητές. Το παρόν, εργαλείο, λοιπόν, θεωρούμε ότι αποτελεί μια σημαντική συνεισφορά στο πεδίο της αξιολόγησης της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών καθώς δίνει μια πιο «ολοκληρωμένη» και αναλυτική εικόνα της. Άλλωστε δεν περιορίζεται στην περιγραφή και αξιολόγηση της ΔΜΣ της τάξης συνολικά, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για κάθε μαθητή ξεχωριστά. Κατά συνέπεια, ο εκπαιδευτικός/ερευνητής μπορεί να έχει την εικόνα τόσο της δυναμικής της τάξης του στις σχετικές όψεις της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης του «μέσου» μαθητή της τάξης, όσο και των χαρακτηριστικών στα οποία υστερεί ή υπερτερεί ο κάθε μαθητής ξεχωριστά. Με τη βοήθεια του εργαλείου, δηλαδή, ο εκπαιδευτικός, θα μπορέσει να παρέμβει τόσο καθολικά όσο και εξατομικευμένα στη διδακτική πράξη.

Επιπλέον, το παρόν εργαλείο ακολουθεί μια ανοιχτού τύπου προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών και προσφέρει το κατάλληλο έδαφος για τη

διερεύνηση των προοπτικών και των δυνατοτήτων βελτίωσης της μαθηματικής δημιουργικότητας. Επιπρόσθετα, στοχεύει στο να είναι πέρα από πολυδιάστατο και πρακτικό ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς ανιχνεύοντας την υπάρχουσα αλλά και τη «δυννητική» δημιουργικότητα των μαθητών. Έτσι, ο εκπαιδευτικός της τάξης γνωρίζοντας τη δυναμική της τάξης τους και τις δημιουργικές πτυχές που υπερτερεί ή υστερεί (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία, επεξεργασία) μπορεί να εστιάσει αναλόγως. Επιπλέον, γνωρίζοντας ποια όψη της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών εμφανίζεται συχνότερα ή ποια δεν είναι επαρκώς καλλιεργημένη (π.χ. χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, σύνδεση με την καθημερινή ζωή) είναι σε θέση να κάνει στοχευμένες παρεμβάσεις και να επιλέξει κατάλληλες δραστηριότητες που θα ενισχύσουν τις επιθυμητές όψεις της ΔΜΣ των μαθητών του. Τέλος, το παρόν εργαλείο είναι δυνατό να εξετάσει τόσο το δυναμικό της τάξης συνολικά βρίσκοντας την τάση του «μέσου» μαθητή, όσο και το ατομικό προφίλ του κάθε μαθητή ξεχωριστά, αναδεικνύοντας τα «δυνατά» και τα «αδύνατα» σημεία της ΔΜΣ του.

Περιορισμοί της έρευνας

- 1) Το παρόν εργαλείο, όπως ήδη έχει αναφερθεί σε διάφορα σημεία της εργασίας, μπορεί να αξιολογήσει τόσο τη Δημιουργική Μαθηματική Σκέψη των μαθητών συνολικά όσο και τη ΔΜΣ των μαθητών ατομικά. Στην παρούσα έρευνα, όμως, λόγω χρονικών περιορισμών το δεύτερο δεν κατέστη δυνατό προχωρώντας μόνο στη σκιαγράφηση του προφίλ της τάξης συνολικά.
- 2) Λόγω του ότι δεν υπάρχουν άλλες έρευνες που να κάνουν τέτοια μέτρηση όπως την παρούσα, με τις επιμέρους συνιστώσες, δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια σύγκριση στα δικά μας ευρήματα με ευρήματα άλλων ερευνών.
- 3) Τέλος, ως ένας ακόμη περιορισμός της έρευνας, μπορεί να θεωρηθεί το μικρό δείγμα των μαθητών (αξιολογούμε μόνο ένα τμήμα μιας έκτης), καθώς θα ήταν αρκετά χρήσιμο το εργαλείο να χρησιμοποιηθεί σε μεγαλύτερο αριθμό παιδιών, έτσι ώστε να διαπιστωθεί καλύτερα η λειτουργία του. Βέβαια, λόγω της ποιοτικής ανάλυσης του περιεχομένου των απαντήσεων, κάτι τέτοιο θα ήταν πέραν των χρονικών ορίων της παρούσης έρευνας.

Επεκτάσεις για περαιτέρω έρευνα

- 1) Θα ήταν γόνιμο, το συγκεκριμένο εργαλείο να χρησιμοποιηθεί σε μελέτες που στοχεύουν στη δημιουργία των προσωπικών προφίλ των μαθητών μιας τάξης, υπηρετώντας τη λογική μιας διαφοροποιημένης διδασκαλίας και αξιολογώντας τις δημιουργικές γνωστικές πτυχές (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία, επεξεργασία) σε κάθε μια από τις παρούσες συνιστώσες που εξετάζονται (χωρίς να υπάρχει περιορισμός στον αριθμό αυτών) του κάθε μαθητή ξεχωριστά.
- 2) Επιπλέον, προτείνεται να γίνει επέκταση της χρήσης του εργαλείου σε ένα γενικευμένο πλαίσιο με μαθητές διαφορετικών ηλικιών, έτσι ώστε να εξεταστεί η δυνατότητα αξιόπιστης χρήσης του.
- 3) Ακόμη, θα ήταν χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί το παρόν εργαλείο στο πλαίσιο μιας έρευνας με παρόμοια προσέγγιση, η οποία θα εξετάζει τη λειτουργία του εργαλείου σε μεγαλύτερο δείγμα αυτή τη φορά. Αυτό θα βοηθούσε στην εξαγωγή πιο γενικευμένων και αξιόπιστων συμπερασμάτων, μιας που τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, λόγω του μικρού αριθμού συμμετεχόντων, δεν μπορούν να γενικευθούν.
- 4) Τέλος, το αρχικό πλέγμα που υιοθετήθηκε στην έρευνα αυτή περιελάμβανε και τη μέτρηση της συναισθηματικής (*affective*) και κοινωνικής (*social*) πλευράς της δημιουργικότητας (στάση απέναντι στα Μαθηματικά, ευχάριστο συναίσθημα από την ενασχόληση μαζί τους, αλληλεπίδραση μελών, επικοινωνία ευρημάτων, κλπ) που όμως δεν αποτέλεσαν μέρος της παρούσης έρευνας. Δεδομένου ότι σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Bergen, 2009· Csikszentmihalyi, 1996) οι δημιουργικές εκφάνσεις των μαθητών ευδοκιμούν σε συνεργατικά και αλληλεπιδραστικά περιβάλλοντα μάθησης καθώς και σε αφηγηματικά πλαίσια τα οποία παρουσιάζονται ως ιστορίες στους μαθητές και διεγείρουν τη φαντασία και τη δημιουργικότητά τους, θα ήταν ενδιαφέρουσα μια έρευνα που να ενσωματώνει τα στοιχεία αυτά.

Ακολουθεί το Παράρτημα το οποίο περιλαμβάνει:

- Στο Παράρτημα Α, το «Τεστ» (*εργαλείο έρευνας*) με τα προβλήματα που συμπεριλήφθηκαν στην έρευνα.
- Στο Παράρτημα Β, το «Πλέγμα Αξιολόγησης» (*εργαλείο ανάλυσης*) με τις εννέα συνιστώσες της Δημιουργικής Μαθηματικής Σκέψης, υπό το πρίσμα των τεσσάρων γνωστικών πτυχών (*fluency, flexibility, originality, elaboration*).
- Στο Παράρτημα Γ, τις απαντήσεις που θα έδινε ο «φανταστικός / ιδανικός» μαθητής (Χ.Κ.) στο 4^ο πρόβλημα του τεστ. Στα διαστήματα γύρω από τις απαντήσεις σημειώνονται διάφορες παρατηρήσεις, όπως: οι στρατηγικές που ακολουθήθηκαν (π.χ. $A \uparrow B \downarrow$) και οι απρόσμενες απαντήσεις που δόθηκαν (Α με μπλε χρώμα). Οι απαντήσεις, όπως και οι πλαϊνές σημειώσεις, συμπληρώθηκαν εκ των υστέρων.

Το Παράρτημα της Κυρίως Εργασίας συμπληρώνει κι ένα «*Πρόσθετο Αρχείο*» με τις απαντήσεις ενός «πραγματικού» μαθητή του δείγματος της παρούσας έρευνας.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ξενόγλωσση

- Amabile, T. M. (1983). *The social psychology of creativity*. New York: Springer-Verlag.
- Amabile, T. M. (1990). Within you, without you: The social psychology of creativity, and beyond. In M. A. Runco and R. S. Albert (Eds.), *Theories of creativity* (pp. 66-91). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Amabile, T. M. (1996). *Creativity in context: Update to the social psychology of creativity*. London, UK: Westfield Press.
- Amabile, T. M., Barsade, S. G., Mueller, J. S., & Staw, B. M. (2005). Affect and creativity at work. *Administrative science quarterly*, 50(3), 367-403.
- Askew, M. (2013). Issues in Teaching for and Assessment of Creativity in Mathematics and Science. In D. Corrigan, R. Gunstone & A. Jones (Eds), *Valuing Assessment in Science Education: Pedagogy, Curriculum, Policy* (pp. 169-182). The Netherlands: Springer.
- Baer, J. (1994). Why You Still Shouldn't Trust Creativity Tests. *Educational leadership*, 51(2), 80-83.
- Baer, J. (2010). Is creativity domain specific? In J.C. Kaufman & R. J. Sternberg (Eds.), *Cambridge Handbook of creativity*. Cambridge University Press.
- Balka, D. S. (1974). The development of an instrument to measure creative ability in mathematics. Ph.D. Thesis, Main St. Durham, NH: University of New Hampshire.
- Barquero, B., Papadopoulos, I., Barajas, M., & Kynigos, C. (2016). Cross- case design in using digital technologies: two communities of interest designing a c- book unit. Paper presented at ICME- 13, Hamburg, Germany.
- Barron, F. (1995). *No rootless flower*. Cresskill, NJ: Hampton Press.

- Beghetto, R. (2007). Does creativity have a place in classroom discussions? Prospective teachers' response preferences. *Thinking Skills and Creativity*, 2(1), 1-9.
- Bergen, D. (2009). Play as the learning medium for future scientists, mathematicians, and engineers. *American Journal of Play*, 1(4), 413-428.
- Besemer, S. P., & O'Quin, K. (1999). Confirming the three-factor creative product analysis matrix model in an American sample. *Creativity Research Journal*, 12, 287-296.
- Besemer, S. P., & Treffinger, D. J. (1981). Analysis of creative products: Review and synthesis. *Journal of Creative Behavior*, 15, 158-178.
- Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact* (Doctoral thesis). Umeå University, Faculty of Science and Technology, Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Sweden.
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational studies in Mathematics*, 83(1), 37 – 55.
- Burghes D., & Robinson D. (2009). *Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning*. Plymouth, UK: CfBT Education Trust, University of Plymouth.
- Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *JSGE The Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 37-47.
- Charmaz, K. (2006). The power of names. *Journal of Contemporary Ethnography*, 35(4), 396-399.
- Cohen, D. (1972). The development of a creativity test. *Research in Science Education*, 2(1), 82-95.
- Cropley, A. J. (2001). *Creativity in education and learning: A guide for teachers and educators*. Sterling, VA: Stylus.

- Cropley, A. J. (2001). *Creativity in education and learning: A guide for teachers and educators*. Sterling, VA: Stylus.
- Cropley, D. H., & Cropley, A. J. (2005). Engineering creativity: A systems concept of functional creativity. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds.), *Creativity across domains: Faces of the muse* (pp. 169-185). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cropley, D. H., Kaufman, J. C., & Cropley, A. J. (2011). Measuring Creativity for Innovation Management. *Journal of Technology Management and Innovation*, 6(3), 13-30.
- Csikszentmihalyi, M. (1988). Society, culture, and person: A systems view of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity* (pp. 325–339). New York: Cambridge University Press.
- Csikszentmihalyi, M. (1996). *Creativity: Flow and the psychology of discovery and invention*. New York: HarperCollins.
- Duncker, K. (1945). On problem solving (L. S. Lees, trans.). *Psychological Monographs*, 58, 1–113.
- Dunn, J. (1975). Test of creativity in mathematics. *International Journal of Mathematics education in Science and Technology*, 6(3), 327-332.
- EC (2008). *Lifelong Learning for Creativity and Innovation. A Background Paper. Slovenian EU Council Presidency*. Ανακτήθηκε από <http://www.sac.smm.lt/images/12%20Vertimas%20SAC%20Creativity%20and%20innovation%20-%20SI%20Presidency%20paper%20anglu%20k.pdf>
- El-Demerdash, M., & Kortenkamp, U. (in press). The Development of an Instrument to Measure Geometric Creativity. *CERMAT*.
- Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In A. M. Thinking, & D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

- Feist, G.J. (2004). The evolved fluid specificity of human creative talent. In R.J. Sternberg, E.L. Grigorenko, & J.L. Singer (Eds.), *Creativity: From potential to realization* (pp. 57–82). Washington, DC: American Psychological Association.
- Fisher, R. (1990). *Teaching Children to Think*. Stanley Thornes.
- Fishkin, A.S. & Johnson, A.S. (1998). Who is creative? Identifying children's creative abilities. *Roeper Review*, 21, 40-46.
- Florida, R. L. (2002). *The rise of the creative class: and how it's transforming work, leisure, community and everyday life*. New York: Basic books.
- Fuchs- Beauchamp, K., Karnes, M., & Johnson, L. (1993). Creativity and intelligence in preschoolers. *Gifted Child Quarterly*, 37(3), 113-117.
- Gardner, H. (1993). *Creating minds*. New York: Basic Books.
- Getzels, J., & Csikszentmihalyi (1976). *The creative vision: A longitudinal study of problem-finding in art*. New York: Wiley-Interscience.
- Getzels, J. W., & Jackson, P. W. (1962). *Creativity and intelligence: Explorations with gifted students*. New York: Wiley.
- Goldschmidt, G., & Tassa, D. (2005). How good are good ideas? Correlates of design creativity. *Design Studies*, 26(6), 593-611.
- Graeber, A. O., & Campbell, P.F. (1993). Misconceptions about Multiplication and Division. *Arithmetic Teacher*, 40(7), 408-411.
- Gruber, H. E. (1988). The evolving systems approach to creative work. *Creativity Research Journal*, 1(1), 27-51.
- Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (Eds.). (1989). *Creative people at work: Twelve cognitive case studies*. New York: Oxford University Press.

- Guilford, J.P. (1959). Traits of Creativity. In H. Anderson (Eds.), *Creativity and Its Cultivation*, (pp. 142-161). New York: Harper & Row.
- Guilford, J. P. (1968). *Intelligence, creativity, and their educational implications*. San Diego, CA: EDITS.
- Guilford, J.P., Christensen, P.R., Merrifield, P.R., and Wilson, R.C. (1960). *Alternative Uses Manual*. Sheridan Supply Co.
- Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications.
- Haylock, D. W. (1984). *Aspects of mathematical creativity in children aged 11 – 12* (Doctoral Dissertation). University of London, London.
- Haylock, D. W. (1987). Mathematical Creativity in Schoolchildren, *The Journal of Creative Behavior*, 21(1), 48-59.
- Hennessey B. A., & Amabile T. M. (1999). Consensual assessment. In M. A. Runco, & S. R. Pritzker (Eds.), *Encyclopedia of Creativity*, (pp. 34–36). New York: Academic Press.
- Hong, E., & Milgram, R. M. (2010). Creative thinking ability: Domain generality and specificity. *Creativity Research Journal*, 22(3), 272-287.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Dung, J.-J., & Yang, Y.-L. (2007). Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System. *Educational Technology & Society*, 10(2), 191-212.

- Jamieson, S. (2004). Likert scales: how to (ab)use them. *Medical Education*, 38(12), 1212–1218.
- Jensen, L. R. (1973). *The Relationships among Mathematical Creativity, Numerical Aptitude and Mathematical Achievement* (Doctoral dissertation). University of Texas, Austin.
- Kaufman, J. C., & Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The four C model of creativity. *Review of General Psychology*, 13, 1–12.
- Klavir, R. & HersHKovitz, S.(2008). Teaching and evaluating ‘open-ended’ problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* 20(5), 23.
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they? In M. Avotîna, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield & E. Velikova (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (pp. 120-125). Latvia: Latvia University.
- Kozbelt, A., Beghetto, R. A., & Runco, M. A. (2010). Theories of creativity. In J. C. Kaufman & R. J. Sternberg (Eds.), *Cambridge handbook of creativity* (pp. 20–47). New York, NY: Cambridge University Press.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, USA: The University of Chicago Press.
- Kwan, J. & Soverall, W. (2007). *Gaining Productivity*. Kingston, Jamaica: Arawak Publications.
- Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pasific Education Review*, 7(1), 51-61.

- Lee, K. S., Hwang, D., & Seo, J. J. (2003). A development of the test for mathematical creative problem solving ability. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 7, 163–189.
- Leikin, R. (2009). Exploring Mathematical Creativity using Multiple Solution Tasks. *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, 129-145.
- Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 159–166.
- Lev-Zamir H., & Leikin R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, 13(1), 17-32.
- Liljedahl, P. (2013). Illumination: An Affective Experience? *The International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 253-265.
- Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musing on mathematical creativity. *For the learning of mathematics*, 26(1), 20-23.
- Lilly, F., & Bramwell-Rejskind, G. (2004). The dynamics of creative teaching. *The Journal of Creative Behavior*, 38 (2), 102-124.
- Lin, W.L., & Lien, Y.W. (2013). The Different Role of Working Memory in Open-Ended Versus Closed-Ended Creative Problem Solving: A Dual-Process Theory Account, *Creativity Research Journal*, 25(1), 85-96.
- Lindström, L. (2006). Creativity: What is it? Can you assess it? Can it be taught? *International Journal of Art and Design Education (JADE)*, 25(1), 53-66.
- Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.

- Martindale, C. (1999). Biological bases of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 137-152). New York: Cambridge University Press.
- Mason, J. (2000). *Creativity in mathematics lessons: briefing paper to the QCA*. London: QCA.
- Mayer, R.E. (1999). Fifty Years of Creativity Research. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of Creativity* (pp. 449-460). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Mayring, Ph. (2014). *Qualitative Content Analysis. Theoretical Foundation, Basic Procedures and Software Solution*, Klagenfurt, Austria. Ανακτήθηκε στις 03.05.2017 από <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0168-ssoar-395173>).
- MC Squared (2015). *Operational definitions and criteria for measuring social creativity in the design of digital educational resources for CMT*. Deliverable D2.2, Mathematical Creativity Squared, FP7- Information and Communication Technologies Grant Agreement no: 610467.
- McWilliam, E., & Dawson, S. (2008). Teaching for creativity: Towards sustainable and replicable pedagogical practice. *Higher Education*, 56(6), 633-643.
- Milgram, R. M., & Livne, N. L. (2005). Creativity as a general and a domain-specific ability: The domain of mathematics as an exemplar. In J. C. Kaufman, & J. Baer (Eds.), *Creativity across domains: Faces of the muse* (pp. 187-204). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mogey, N. (1999, 25/3/1999). *So you want to use a Likert scale?* Heriot-Watt University. Ανακτήθηκε από http://www.icbl.hw.ac.uk/lti/cookbook/info_likert_scale/ στις 05.05.2017.
- Moran, S. (2010). Creativity in school. In K. Littleton, C. Woods, & J. K. Staarman (Eds.), *International handbook of psychology in education* (pp. 319–359). Bingley, UK: Emerald Group Publishing Limited.

- National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE). (1999). *All our futures: Creativity, culture and education*. London: Department for Education and Employment (DfEE).
- National Council for Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, Virginia.
- Papadopoulos, I., Barquero, B., Richter, A., Daskolia, M., Barajas, M., & Kynigos, C. (2015). Representations of creative mathematical thinking in designer communities producing c- book units. In K. Krainer and N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381-2387). Prague.
- Park, H. (2004). *The effects of divergent production activities with math inquiry and think aloud of students with math difficulty* (Doctoral dissertation). Texas A&M University. Texas.
- Pehkonen, E. (1992). Using Problem Fields as a Method of Change. *Mathematics Educator*, 3(1), 3-6.
- Perry-Smith, J. & Shalley, C. (2003). The Social Side of Creativity: A Static and Dynamic Social Network Perspective. *The Academy of Management Review*, 28(1), 89-106.
- Piirto, J. (1999). *Talented children and adults: Their development and education*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *Phi Delta Kappan*, 42(7), 305-310.
- Romey, W. D. (1970). 'What is your creativity quotient?' *School Science and Mathematics*, 70(1), 3-8.
- Runco M. A. (1996). Personal creativity: definition and developmental issues. *New Dir. Child Dev*, 72, 3-30.

- Sawyer, R. K. (1995). Creativity as mediated action: A comparison of improvisational performance and product creativity. *Mind, Culture, and Activity*, 2, 172–191.
- Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *The International Journal of Mathematics Education*, 29(3), 75-80.
- Silver, E., & Stein M. (1996). The Quasar Project: The "Revolution of the Possible" in Mathematics Instructional Reform in Urban Middle Schools, *Urban Education*, 30(4), 476-521.
- Silver, E.A., Mamona-Downs, J., Leung, S., & Kenny, P.A. (1996). Posing Mathematical Problems in a Complex Environment: an exploratory study, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309.
- Spencer, E., Lucas, B., & Claxton, G. (2012). *Progression in Creativity-Developing New Forms of Assessment*. Newcastle, UK: Creativity, Culture and Education, and Centre for Real-World Learning.
- Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics?. *JSGE The Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 20-36.
- Sriraman, B., & Lee, K. (2011). *The elements of giftedness and creativity in mathematics*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Sternberg, R. J. (2003). The development of creativity as a decision-making process. In R. K. Sawyer, V. John-Steiner, S. Moran, R. J. Sternberg, D. H. Feldman, J. Nakamura, & M. Csikszentmihalyi (Eds.), *Creativity and development* (pp. 91–138). New York: Oxford University Press.
- Sternberg, R. J. (2006). The nature of creativity. *Creativity Research Journal*. 18, 87-88.
- Sternberg, R. J., & Davidson, J. E. (Eds.). (1995). *The nature of insight*. London: MIT Press.

- Sternberg, R. J., & Grigorenko, E. L. (2004). Successful intelligence in the classroom. *Theory Into Practice*, 43(4), 274–280.
- Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1999). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93–115). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Sternberg, R. J., & O'Hara, L. A. (1999). Creativity and intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 251–277). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Tighe, E., Picariello, M. L., & Amabile, T.M. (2003). Environmental influences on motivation and creativity in the classroom. In J.C. Houtz (Eds.), *The educational psychology of creativity*. Cresskill, NJ: Hampton Press.
- Torp, L., & Sage, S. (2002). *Problems as Possibilities: Problem-Based Learning for k-16 Education (2nd ed.)*. Alexandria, WA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Torrance, E. P. (1974). *The Torrance Tests of Creative Thinking-Norms-Technical Manual Research Edition-Verbal Tests, Forms A and B- Figural Tests, Forms A and B*. Princeton, NJ: Personnel Press.
- Treffinger, D. J. (1996). *Creativity, creative thinking, and critical thinking: In search of definitions*. Sarasota: Center for Creative Learning.
- Treffinger, D. J. (2003). Assessment and measurement in creativity and creative problem solving. In J. C. Houtz (Ed.), *The educational psychology of creativity* (pp. 59-93). Cresskill, NJ: Hampton Press.
- Van de Walle J. (2001). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική Διδασκαλία*. Εκδόσεις ΤΥΠΩΘΗΤΩ.

- Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and Mathematical Problem Posing: An Analysis of High School Students' Mathematical Problem Posing in China and the United States. *Educational Studies in Mathematics*.
- Wallas, G. (1926). *The art of thought*. Harmondsworth, UK: Penguin Books Ltd.
- Ward, T. B., Smith, S. M. & Vaid, J. (1997). Conceptual structures and processes in creative thought. In T.B. Ward, S. M. Smith, & J. Vaid (Eds.) *Creative thought: An investigation of conceptual structures and processes* (pp. 1-27). Washington, DC: American Psychological Association Books.
- Wilkenfeld, M. J. (1995). *Conceptual combination: does similarity predict emergence?* (Unpublished Master's thesis). Texas: A&M University.

Ελληνόγλωσση

- Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σημητρά - Κωνσταντίνου, Α., & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). *Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα*; Πρακτικά του 9ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, 99-110.
- Καψάλης, Α. (1996). *Παιδαγωγική Ψυχολογία*. Θεσσαλονίκη: Αφοί Κυριακίδη.
- Κόσυβας, Γ. (2012). Η προαγωγή της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. *Πρακτικά του 60 Πανελλήνιου Συνεδρίου του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.)*. Αθήνα.
- ΥΠ.Ε.Π.Θ. - Π.Ι. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Νηπιαγωγείου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδόσεις: ΤΥΠΩΘΗΤΩ.

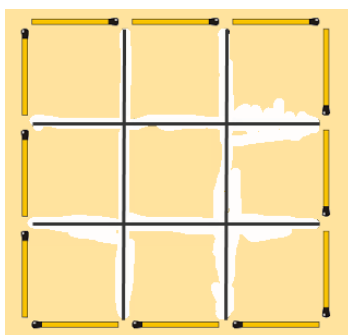
Παράρτημα

Παράρτημα Α (Εργαλείο Έρευνας: «Τεστ»)

ΤΑΞΗ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

- 1) Έχεις 12 σπέρτα. Με αυτά θα μπορούσες να φτιάξεις ένα τετράγωνο με εμβαδόν 9 τ.μ. (τ.μ.= τετραγωνικές μονάδες), όπως αυτό:



Χρησιμοποίησε αυτά τα 12 σπέρτα για να φτιάξεις όσο το δυνατόν περισσότερα και διαφορετικά σχήματα μπορείς. Κάθε φορά να βρίσκεις το εμβαδόν του.

Πώς είσαι σίγουρος ότι τα βρήκες όλα;

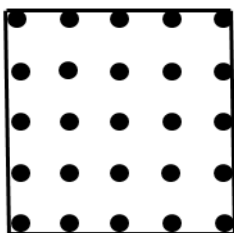
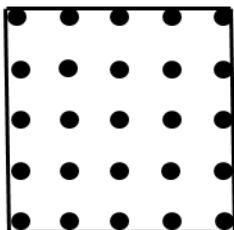
Όλα τα σχήματα που έκανες έχουν την ίδια περίμετρο (12 σπέρτα) αλλά διαφορετικό εμβαδόν. Ποιο από αυτά έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Μπορείς να βγάλεις έναν κανόνα που ισχύει για το σχήμα με το μεγαλύτερο εμβαδόν;

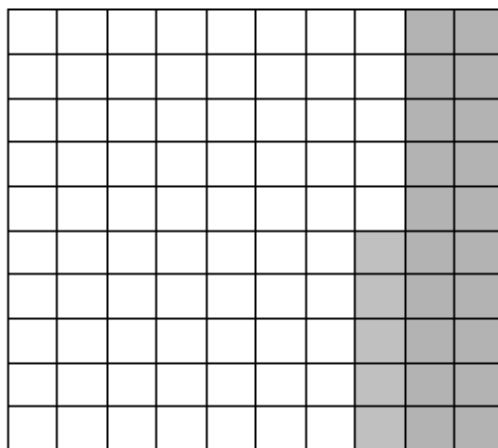
- 2) Πόσοι κύκλοι υπάρχουν στην εικόνα; Προσπάθησε να καταφέρεις να βρεις το πλήθος τους με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους.



3) Χώρισε το τετράγωνο σε δύο ίσα μέρη με όσους περισσότερους και διαφορετικούς τρόπους μπορείς:



- 5) Ένας μαθητής για να απαντήσει σε ένα πρόβλημα που του έβαλαν έκανε το παρακάτω σχέδιο που θα τον βοηθούσε να βρει την απάντηση. Ποιο μπορεί να ήταν το πρόβλημα στο οποίο έπρεπε να απαντήσει; Φτιάξε όσο περισσότερα διαφορετικά προβλήματα μπορείς.



Παράρτημα Β (Εργαλείο Ανάλυσης: «Πλέγμα Αξιολόγησης»)

Στο παρακάτω πλέγμα λαμβάνονται υπόψη τα 4 βασικά κριτήρια που προτείνει η βιβλιογραφία προκειμένου να χαρακτηρίσει τη δημιουργική μαθηματική σκέψη, δηλαδή:

- **Ευχέρεια (Fluency):** Σχετίζεται με το πλήθος των απαντήσεων/λύσεων που δίνουν οι μαθητές ή των διάφορων στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές προκειμένου να λυθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα.
- **Ευελιξία (Flexibility):** Σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να παρέχουν διαφορετικές λύσεις ή να μετέρχονται διαφορετικές στρατηγικές κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος.
- **Πρωτοτυπία/Καινοτομία (Originality):** Σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να δίνουν μοναδικές (πρωτότυπες) απαντήσεις (λύσεις, στρατηγικές, αναπαραστάσεις, κλπ) σε ένα μαθηματικό πρόβλημα.
- **Επεξεργασία (Elaboration):** Σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να περιγράφουν, αντικαθιστούν, συνδυάζουν, προσαρμόζουν, τροποποιούν, μεγεθύνουν, επεκτείνουν τη χρηστικότητα, απαλείφουν ή αναδιατάσσουν μαθηματικές καταστάσεις.

Affordances	Fluency					Flexibility					Originality					Elaboration					Comments
	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	N / A	1	2	3	4	
(1) Ο/Η μαθητής/τρια αναζητεί και βρίσκει πολλαπλές λύσεις.																					
(2) Ο/Η μαθητής/τρια αναζητεί και βρίσκει πολλαπλές στρατηγικές.																					

(3) Ο/Η μαθητής/τρια δημιουργεί σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών/εννοιών (δηλαδή σύνδεση ή συνύπαρξη εννοιών ή προσεγγίσεων που διδάσκονται παραδοσιακά χωριστά μεταξύ τους στο ΑΠ).																			
(4) Ο/Η μαθητής/τρια δημιουργεί σύνδεση/σεις μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών περιοχών εκτός των μαθηματικών με τα μαθηματικά (διεπιστημονικότητα).																			
(5) Ο/Η μαθητής/τρια δημιουργεί σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών.																			
(6) Ο/Η μαθητής/τρια δημιουργεί σύνδεση με την καθημερινή ζωή.																			
(7) Ο/Η μαθητής/τρια γενικεύει μαθηματικά φαινόμενα (δηλαδή, πηγαίνει από το συγκεκριμένο στο γενικό).																			
(8) Ο/Η μαθητής/τρια επιδεικνύει απρόσμενες λύσεις.																			
(9) Ο/Η μαθητής/τρια δημιουργεί προβλήματα ή δημιουργεί ερωτήσεις (δηλαδή, αναζητεί, δημιουργεί ή διατυπώνει μαθηματικά προβλήματα που συνδέονται με τις έννοιες και το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου).																			

Παράρτημα Γ (Απαντήσεις του «Ιδανικού» Μαθητή Χ.Κ.)

Χ.Κ.

A: για ανρόσφενες ζύσεις

Σ 88
+ 3 ΛΑΘΟΣ

- 4) Έχεις τρεις κάρτες που ονομάζονται Α, Β και Γ αντίστοιχα. Αυτές οι κάρτες έχουν στη μια τους πλευρά γραμμένους αριθμούς. Εάν προσθέσεις τον αριθμό της κάρτας Α με τον αριθμό της κάρτας Β και ύστερα πολλαπλασιάσεις την απάντηση με τον αριθμό της κάρτας Γ, το αποτέλεσμα που παίρνεις είναι 9.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

1. χρήση φυσικών
2. χρήση δεκαδικών
3. χρήση 0
4. χρήση κλασμάτων

$$(A + B) \times \Gamma = 9$$

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

1. $A \uparrow B \downarrow$
2. $A \rightleftharpoons B$
3. $\downarrow$
4. Αγν. Δυν. του 10

Ποιοι νομίζεις ότι είναι οι αριθμοί στις κάρτες Α, Β και Γ αντίστοιχα; Γράψε στον παρακάτω πίνακα όσες περισσότερες και

διαφορετικές απαντήσεις μπορείς να δώσεις: $\{ \Sigma \eta \} \rightarrow$ Σύμβολο για στρατηγική $A \rightleftharpoons B$

A	B	Γ
2	1	3
1	2	3
0	3	3
3	0	3
2	2,5	2
0	9	1
9	0	1
1	3,5	2
3,5	1	2
6	3	1
3	6	1
7	2	1
2	7	1
5	4	1
4	5	1

$A \uparrow B \downarrow$ }

A1B1

A	B	Γ
3	1,5	2
8	1	1
1	8	1
4,5	4,5	1
6,5	2,5	1
7,5	1,5	1
8,5	0,5	1
0,5	8,5	1
1,5	7,5	1
2,5	6,5	1
3,5	5,5	1
5,5	3,5	1
4	0,5	2
0,5	4	2
3	3,4	2
1,1	1,1	2
3,4	5,2	1
3,8	0,3	3
2,7	2,7	3
0,3	5,7	1
3,3	5,7	1
6,3	2,4	1
6,6	0,8	9
0,2		

ΛΑΘΟΣ

93

A	B	Г
5,3	3,7	1
90	0	0,1
80	10	0,1
600	300	0,01
8.999	1	0,001
610.000	290.000	0,00001
0,01111	0,07889	100
8,95	0,05	1
1,10	7,9	1
7,9	1,10	1
1,20	7,80	1
7,80	1,20	1
1,30	7,70	1
7,70	1,30	1
1,1	8,9	1
8,9	1,1	1
0,2	8,8	1
8,8	0,2	1
0,3	8,7	1
8,7	0,3	1
0,4	8,6	1
8,6	0,4	1
0,5	8,5	1
8,5	0,5	1

Agnes D. D.

1AΘ0Σ

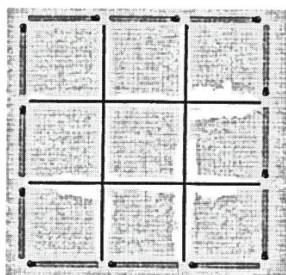
(24)

ΚΚ

ΤΑΞΗ: ΣΤ₂

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27 / 4 / 2017

- 1) Έχεις 12 σπέρτα. Με αυτά θα μπορούσες να φτιάξεις ένα τετράγωνο με εμβαδόν 9 τ.μ. (τ.μ.= τετραγωνικές μονάδες), όπως αυτό:

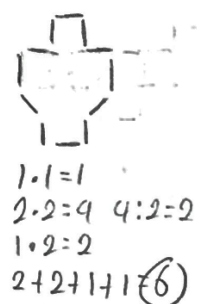
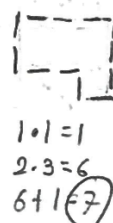
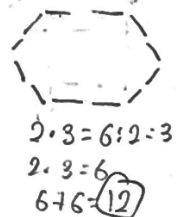
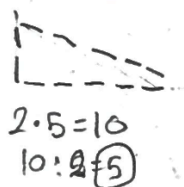
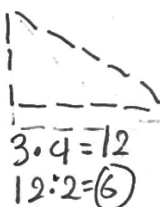
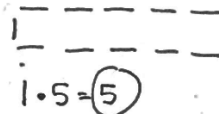
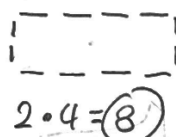
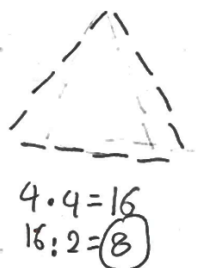


Χρησιμοποίησε αυτά τα 12 σπέρτα για να φτιάξεις όσο το δυνατόν περισσότερα και διαφορετικά σχήματα μπορείς. Κάθε φορά να βρίσκεις το εμβαδόν του.

Πώς είσαι σίγουρος ότι τα βρήκες όλα; Δεν ξέρω.

Όλα τα σχήματα που έκανες έχουν την ίδια περίμετρο (12 σπέρτα) αλλά διαφορετικό εμβαδόν. Ποιο από αυτά έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Μπορείς να βγάλεις έναν κανόνα που ισχύει για το σχήμα με το μεγαλύτερο εμβαδόν;





$$2 \cdot 2 = 4 : 2 = 2$$

$$4 + 2 = \textcircled{6}$$



$$2 \cdot 3 = 6 : 2 = 3$$

$$3 + 3 + 2 = \textcircled{8}$$



$$2 \cdot 2 = 4 : 2 = 2 + 2 = 4$$

$$1 \cdot 2 = 2 : 2 = 1 + 1 = 2$$

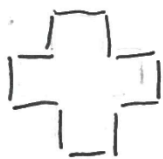
$$4 + 2 = \textcircled{6}$$



$$1 \cdot 1 = 1 : 2 = 0,5 + 0,5 = 1$$

$$2 \cdot 3 = 6 : 2 = 3 + 3 = 6$$

$$6 + 1 = \textcircled{7}$$



$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 4 = \textcircled{4}$$



$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

$$4 + 1 = \textcircled{5}$$



$$1 \cdot 2 = 2$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$3 + 2 = \textcircled{5}$$



$$2 \cdot 2 = 4$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$4 + 2 = \textcircled{6}$$

Πρέπει και οι δύο πλευρές του σχήματος να έχουν όσο μεγαλύτερη περίμετρο μπορούμε.



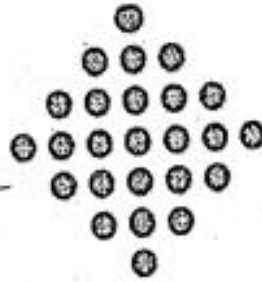
$$1 \cdot 5 = 5$$



$$3 \cdot 3 = 9$$

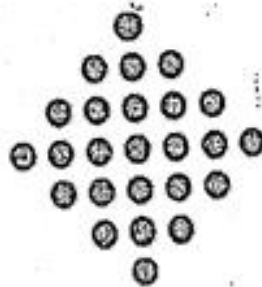
ΚΚ

- 2) Πόσοι κύκλοι υπάρχουν στην εικόνα; Προσπάθησε να καταφέρεις να βρεις το πλήθος τους με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους.



1) Μετράμε τους κύκλους

25



Υπάρχουν 4 σειρές και 3 στήλες

$$4 \cdot 4 = 16 \quad 3 \cdot 3 = 9$$

$$16 + 9 = 25$$

- 2) Πόσοι κύκλοι υπάρχουν στην εικόνα; Προσπάθησε να καταφέρεις να βρεις το πλήθος τους με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους.

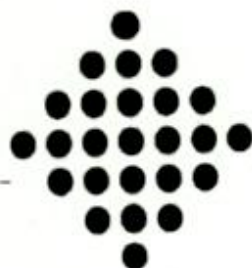


Το χρίσαμε. Υπάρχουν 7 κύκλοι στην μέση
και 9 κύκλοι από στή. μία και στην αριστερή
 $9 + 9 + 7 = 25$



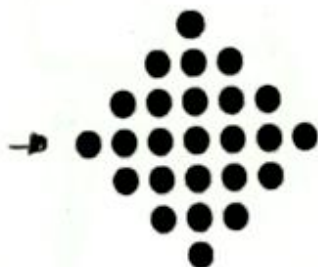
Υπάρχουν 3 σειρές. Το πρώτο έχει
12 κύκλους και αφαιρούμε αβέβαια κάθε
φορά και υπάρχει και ένας κύκλος στην μέση
 $12 + 8 + 4 + 1 = 25$

2) Πόσοι κύκλοι υπάρχουν στην εικόνα; Προσπάθησε να καταφέρεις να βρεις το πλήθος τους με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους.



Υπάρχει στην μέση ένας σταυρός με 13 κυκλάκια
και από γύρω 4 ομάδες

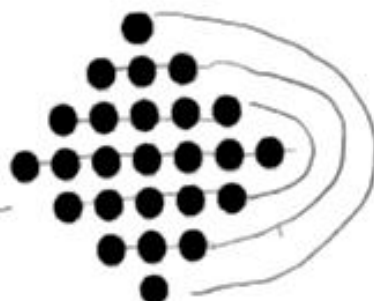
$$4 \cdot 3 = 12 + 13 = 25$$



Ξεκινάω από την πρώτη πλευρά
έχει ένα κυκλάκι και όσο πάω προς
τα μέσα προσθέτω δυο κυκλάκια και
όσων συνεχίζω αγερών

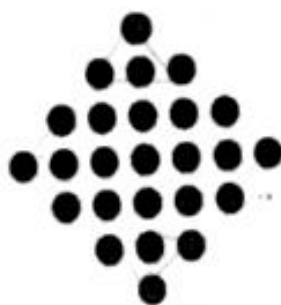
$$1 + 3 + 5 + 1 + 3 + 5 + 2 = 25$$

- 2) Πόσοι κύκλοι υπάρχουν στην εικόνα; Προσπάθησε να καταφέρεις να βρεις το πλήθος τους με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους.



Τα χωρίζω σε γραμμές όπου σε κάθε μία υπάρχουν δυο φορές όσες ίδιες γραμμές και έχει μια γραμμή στην μέση άρα:

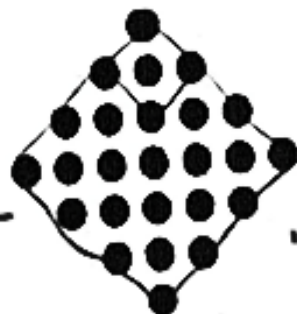
$$1+1+3+3+5+5+7=25$$



Υπάρχουν 4 ηφαίριδες σε άκρες με 4 κύκλους και ένα τετράγωνο στην μέση με 9 κύκλους

$$4 \cdot 4 = 16 + 9 = 25$$

2) Πόσοι κύκλοι υπάρχουν στην εικόνα; Προσπάθησε να καταφέρεις να βρεις το πλήθος τους με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους.

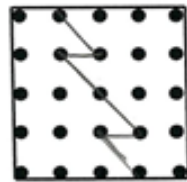
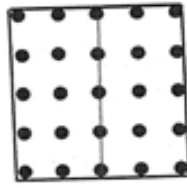


Τα χωρίζω σε $5 + 20 = 25$

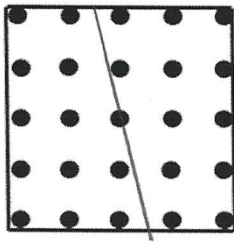
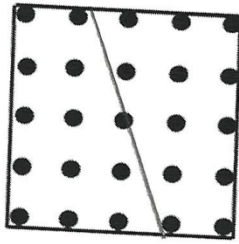


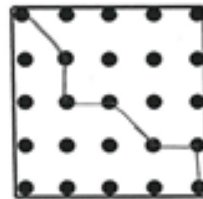
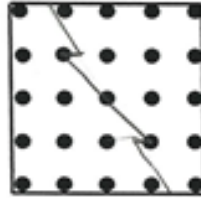
Τα χωρίζω σε $11 + 14 = 25$

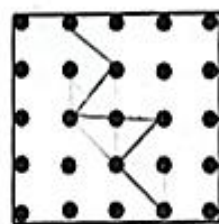
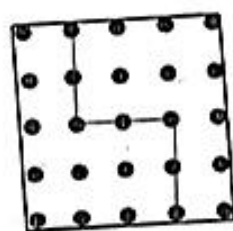
- 3) Χώρισε το τετράγωνο σε δύο ίσα μέρη με όσους περισσότερους και διαφορετικούς τρόπους μπορείς:



\







KK

- 4) Έχεις τρεις κάρτες που ονομάζονται Α, Β και Γ αντίστοιχα. Αυτές οι κάρτες έχουν στη μια τους πλευρά γραμμένους αριθμούς. Εάν προσθέσεις τον αριθμό της κάρτας Α με τον αριθμό της κάρτας Β και ύστερα πολλαπλασιάσεις την απάντηση με τον αριθμό της κάρτας Γ, το αποτέλεσμα που παίρνεις είναι 9.

$$\left(\boxed{A} + \boxed{B} \right) * \boxed{\Gamma} = 9$$

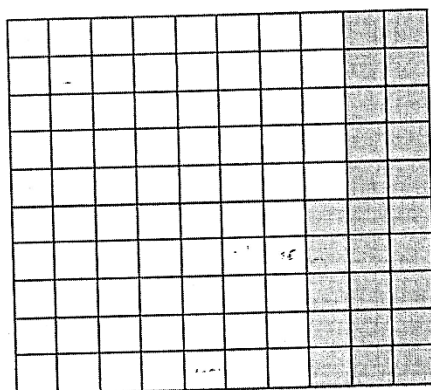
- 1) 0 (X1)
- 2) Δεκαδικοί
- 3) ΑΓ ΒΔ.
- 5) Γ = 1, 2
- 6) Φυσικοί.

Ποιοι νομίζεις ότι είναι οι αριθμοί στις κάρτες Α, Β και Γ αντίστοιχα; Γράψε στον παρακάτω πίνακα όσες περισσότερες και διαφορετικές απαντήσεις μπορείς να δώσεις:

A	B	Γ
4	0,5	2
3	1,5	2
2	2,5	2
1	3,5	2
4,5	0	2
9	0	1
1	8	1
2	7	1
3	6	1
4	5	1
4,1	0,4	2
4,2	0,3	2
3,1	1,4	2
3,2	0,3	2
2,1	2,4	2
2,2	2,3	2
1,1	3,4	2
1,2	3,3	2
1,1	7,9	1
1,2	7,8	1
1,3	7,7	1
1,4	7,6	1

ΚΚ

- 5) Ένας μαθητής για να απαντήσει σε ένα πρόβλημα που του έβαλαν έκανε το παρακάτω σχέδιο που θα τον βοηθούσε να βρει την απάντηση. Ποιο μπορεί να ήταν το πρόβλημα στο οποίο έπρεπε να απαντήσει; Φτιάξε όσο περισσότερα διαφορετικά προβλήματα μπορείς.



- 1) Η Μαρία είχε 100 αυτοκόλλητα και έδωσε τα 25 σε μια φίλη της. Πόσα της έμειναν;
- 2) Σε ένα κατάστημα έκαναν έκπτωση $\frac{1}{4}$. Ποσο σε % έκαναν έκπτωση;
- 3) Το 25% παιδιά σε ένα σχολείο ηγήσαν γαλλικά πόσα παιδιά ηγήσαν γερμανικά;
- 4) Μια δασκάλα χώρισε ένα τετραγωνό σε 100 κομμάτια και ζήτησε από τα παιδιά να χρωματίσουν το $\frac{1}{4}$. Πόσα κομμάτια θα χρωμάτισαν;
- 5) Ένα πουκάμισο κόστισε 100€ και έκαναν έκπτωση 25% πόσο κόστισε μετά την έκπτωση;
- 6) Ο Γιάννης χρωμάτισε σε ένα τετραγωνό που χωρίστηκε σε 100 25 κομμάτια πόσα κομμάτια θα χρωμάτιζε αν το χώριζαν σε 4;
- 7) Τα 25% (αριθμάτα) ενός πουκαμίσκου είναι 50€ πόσο είναι το 100%;

- 8) Σε ένα καλάθι χωράνε 100 καραμέλες και τα παιδιά έφαγαν το $\frac{1}{4}$ πόσες καραμέλες έμειναν;
- 9) Μια ομάδα κορυμβισής αποτελείται από 4 παίκτες και έφυγαν οι 3 πόσο το % παίκτες έμειναν;
- 10) Το 75% του ατρώπου είναι νερό. Πόσο στα 4 είναι οι υπόλοιπες ουσίες του σώματος;
- 11) Σε έναν χώρο υπάρχουν 25 άτομα και ήρθαν άλλα 75. Πόσα άτομα είναι τώρα;
- 12) Στα λιβάδι έχει 100 θουλόδια και μαρέινορεα τα 75 πόσα στα 4 θουλόδια έμειναν;
- 13) Οι παράδες έβγαλαν 100 ψάρια και πούλησαν το $\frac{3}{4}$ πόσο τα 100% ψάρια έμειναν;
- 14) Μια εσέρια έχει κέρδος 6€ στα πούλησε 25% και πληρώνουν 75€ πόσα € είναι το κέρδος
- 15) Ένα σκόπεδο έχει 100 σφρίματα και το 61% χκοίρεται στα 75. Πόσα σφρίματα έμειναν;
- 16) Σε έναν δρόμο χωράνε 100 αυτοκίνητα και ήρθαν 25. Πόσο στα 75 αυτοκίνητα έμειναν να έρθουν για να γεμίσει ο δρόμος.

A

A $\uparrow$ B $\downarrow$

A	B	r
$\frac{3}{2}$	1,5	3
1,5	$\frac{3}{2}$	3
1,4	7,6	1
7,6	1,4	1
1,5	7,5	1
7,5	1,5	1
1,6	7,4	1
7,4	1,6	1
1,7	7,3	1
7,3	1,7	1
1,8	7,2	1
7,2	1,8	1

)

)

)

)

)

)

12