Πρακτικά
10ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών

Μαθηματική Εκπαίδευση και Πολιτειότητα

17-19 Μαΐου 2024

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Αλεξανδρούπολη

Περιεχόμενα

MATHEMATICS EDUCATION FOR CITIZENSHIP: POTENTIALS AND REALITIES 9

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑ: ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ 29

ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΕΛΙΞΕΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΕ ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΔΙΕΘΝΕΣ ΕΠΙΠΕΔΟ 51

Η ΑΝΑΔΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΗ, ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑ 74

Η ΕΜΦΥΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΓΥΝΑΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ 83

Η ΕΝΝΟΙΑ PEREZHIVANIE ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 94

Η ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΤΗΣ ΑΙΣΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΝΗΚΕΙΝ - ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ 105

Ο ΘΕΣΜΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ . 116

ΔΡΑΣΕΙΣ ΣΥΝ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΣΤΙΣΜΟΥ, ΣΥΝ-ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 126

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΜΠΛΟΚΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΕΝΑ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΘΕΜΑ 136

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑ 147

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΛΙΜΑΤΙΚΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ 147

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΦΥΛΑΚΗ: ΚΟΙΝΟΙ ΧΩΡΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΜΕ ΝΕΑΡΟΥΣ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ 158

ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΨΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΑΝΑΓΚΕΣ: Η ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ 168

Η ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΤΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑΣ 177

ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΟΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΟ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 188

ΜΟΙΡΑΖΩ: ΜΕΤΑΞΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝ 198

Η ΑΝΑΔΥΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ Β' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ 209

“ΚΑΠΟΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕ ΞΕΠΕΡΝΟΥΝ”: ΑΦΗΓΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΓΙΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΔΙΚΑΙΟΣΥΝΗΣ 219

ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ: ΟΙ ΠΟΡΟΙ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥΣ 229

ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗΣ ΑΥΤΟΑΝΤΙΛΗΨΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥΣ 240

ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΝΤΑΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΙΔΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΜΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΠΟΝΟΥ 251

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΕΝΕΡΓΟΥ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΟΥ ΣΥΝΑΝΤΟΥΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΡΟΚΛΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 261

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΣΕ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ/ΟΥΣ ΝΗΠΙΑΓΩΓΟΥΣ 272

ΑΠΟΨΕΙΣ ΕΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΤΥΠΟΥ LAKATOS 282

ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ 293

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ (4 ΕΩΣ 6 ΕΤΩΝ) ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ 304

Η ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΟΙΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ 315

ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: ΤΙ ΠΥΡΟΔΟΤΕΙ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ 325

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΘΕΑΤΡΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΘΑΡΡΥΝΣΗ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ 336

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ 347

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ 357

ΚΟΙΝΩΝΙΟΓΛΩΣΣΙΚΕΣ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ 368

ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 378

«ΤΟ ΤΕΣΤ ΜΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΣΕ ΑΓΧΟΣ ΚΑΙ ΑΥΤΟΓΝΩΣΙΑ»: ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ 399

ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΜΕ ΑΝΑΤΡΕΠΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ 410

ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ 421

ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΙΣΘΗΣΗ ΔΟΜΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΠΤΙΚΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ 432

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΙ ΑΤΥΠΗ ΓΝΩΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΑΣΙΕΣ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ 443

MATH IS EVERYWHERE/ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΟΥ 454

Ο ΑΝΤΙΚΤΥΠΟΣ ΤΗΣ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΙΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΗΜΙ-ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 465

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΠΟΥ ΣΥΜΒΑΛΟΥΝ ΣΤΗ ΓΝΩΣΗ, ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ TIMSS 2019 475

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΥΝΤΟΜΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΠΡΩΙΜΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ: ΜΙΑ ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ 486

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ - ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΣΕ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ 498

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ... 509

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ..... 519

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΟ ΜΑΣΤΟΡΕΜΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ..... 530

Η ΔΤΜ ΣΤΗΝ ΕΠΟΧΗ ΤΩΝ ΑΣΑΦΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ: ΨΗΦΙΑΚΟΙ ΠΟΡΟΙ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ540

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑΣ 550

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΕΣΩ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΟΡΕΥΤΙΚΩΝ ΑΝΙΜΑΤΙΟΝ 562

ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ..... 572

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΡΓΕΙΑΣ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΣΗΣ ΧΑΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ 583

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ 594

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ. 607

ΑΤΥΠΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ/ΤΡΙΩΝ 6-8 ΕΤΩΝ ΣΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ..... 618

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΡΓΩΝ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ..... 629

Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ DELEUZE ΣΤΗΝ ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΒΙΩΜΕΝΗΣ ΕΜΠΕΙΡΙΑΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ..... 639

Η ΤΡΟΧΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ 650

ΕΜΠΕΙΡΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ..... 662

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΜΕ ΥΛΙΚΟ ΤΟΥ ΑΛΛΟΥ 672

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΜΟΥΣΟΥΛΜΑΝΙΚΗ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΘΡΑΚΗΣ680

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΟΙΧΤΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΛΛΙΕΡΓΕΙΑ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΟΙ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ..... 688

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΙΑΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 698

ΑΜΦΙΣΗΜΙΕΣ ΣΤΟΝ ΠΡΟΦΟΡΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ..... 707

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΝΤΑΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΟΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ..... 715

ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ 725

Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΦΟΙΤΗΤΩΝ - ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΝΑ ΣΥΝΤΟΝΙΖΟΥΝ ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΠΟΣΟΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ 733

«ΟΤΑΝ Η ΓΡΑΜΜΗ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ» ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΙ ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΘΕΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ..... 743

ΠΡΩΙΜΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΡΩΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΜΕ ΝΟΗΤΙΚΗ ΑΝΑΠΗΡΙΑ: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΔΡΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΓΟΝΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΝΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ..... 754

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ..... 765

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΗ ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ..... 774

ΤΑ ΑΦΗΓΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΕΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ 784

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ Ε΄ ΤΑΞΗΣ 794

ΤΥΠΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗ..... 803

ΥΠΑΡΧΕΙ Η ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ; 812

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΦΑΝΤΑΣΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΚΡΙΤΙΚΗ 820

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ 827

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΤΡΑΠΕΖΙΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΔΙΚΗ ΔΙΑΠΑΙΔΑΓΩΓΗΣΗ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 836

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ 846

ΜΠΟΡΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΙΚΑΝΟΙ ΛΥΤΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ; 855

Ο ΧΡΟΝΟΣ ΣΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΚΟ ΣΥΓΚΕΙΜΕΝΟ..... 865

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΩΣ ΖΩΣΑ ΕΜΠΕΙΡΙΑ: ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΔΡΑΜΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ..... 869

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΟ LESSON STUDY ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ..... 871

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ..... 873

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ 883

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ (Α)ΣΥΝΕΧΕΙΕΣ ΣΤΟΝ ΥΒΡΙΔΙΚΟ ΧΩΡΟ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ..... 894

ΕΝΙΣΧΥΟΝΤΑΣ ΤΗ ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ 896

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΟΡΙΟΥ ΜΕΣΩ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 900

ΤΟ ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ: ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ 904

Η ΣΤΑΘΕΡΑ Π ΚΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ: ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΗΣ ΠΛΑΤΦΟΡΜΑΣ NUCLINO 908

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ: ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 912

ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. ΜΙΑ ΚΑΙΝΟΤΟΜΟΣ ΔΡΑΣΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ 916

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ Β' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΤΑΞΗ 926

«ΜΑΘΑΙΝΩ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΙΖΩ ΜΕ ΑΥΤΗΝ» 926

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ Β' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΤΑΞΗ 930

ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ 934

Ο ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΟΧΑΙΩΝ ΑΤΥΧΗΜΑΤΩΝ 939

Η ΓΙΑΓΙΑ, Ο ΚΟΥΜΠΑΡΑΣ ΚΑΙ Ο ΣΟΦΟΣ ΙΝΔΟΣ 942

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΣΤ΄ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΕΣΤΡΑΜΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ 946

Η ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΟ ΜΕΛΛΟΝ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ STEM/STEAM/STEAME ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ – ΑΛΛΑΓΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 953

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ/ΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ 957

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ: ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΙΑΣ 'ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ' ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 962

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ STEM ΣΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 967

Η ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ 'ΜΕΤΡΑΕΙ': ΕΡΕΥΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΜΠΕΙΡΙΩΝ ΓΙΑ ΝΕΟΥΣ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΥΣ/ΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ (ACTINPRISON) 968

Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ STEAM ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΔΙΚΑΙΟΣΥΝΗ ΚΑΙ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΉ ΣΤΑ ΚΟΙΝΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ 970

ΠΡΟΩΘΗΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ 972

ΑΝΑ-ΒΙΩΝΟΝΤΑΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕΣΩ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΑΦΗΓΗΣΗΣ (RE-EXPERIENCING MATHEMATICS THROUGH DIGITAL STORYTELLING· REMEDIATE) 974

Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΟΦΘΑΛΜΙΚΗΣ ΙΧΝΗΛΑΤΗΣΗΣ (EYE-TRACKING) ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΑΙΤΙΩΔΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ ΤΑΧΕΙΑΣ ΑΥΤΟΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΚΑΤΟΝΟΜΑΣΙΑΣ (RAPID AUTOMATIZED NAMING, RAN) ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΥΧΕΡΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΔΥΣΛΕΞΙΑ 977

TEACH4INTEGRATION 981

Κεντρική Ομιλία 1

MATHEMATICS EDUCATION FOR CITIZENSHIP: POTENTIALS AND REALITIES

David Kollosche,

University of Klagenfurt, Austria; david.kollosche@aau.at

Preliminary abstract: I will depart from a somewhat elaborated understanding of citizenship to discuss which education is needed for citizenship. Based on this framework, I will ask which roles education in mathematics can play for citizenship, but also which special challenges the use of mathematics in our societies poses. Arriving at an idea of what mathematics education for citizenship might entail, I will ask in how far mathematics education does or could fulfil theses expectations.

INTRODUCTION

Is mathematics education helpful, maybe even necessary, but perhaps also an obstacle to citizenship? While we may all have an experience and a research study on this topic to share, this article will attempt to provide a more structured answer. We will first develop an understanding of citizenship, mathematics, and mathematics education, before we look for possible, maybe even necessary, connections and frictions. We will attempt to do that from a theoretical discussion of what could be, but we will end with some reflections grounded in empiricism to challenge our findings.

CITIZENSHIP

Leydet's (2023) entry on "Citizenship" in the *Standford Encyclopedia of Philosophy* defines the citizen as "a member of a political community who enjoys the rights and assumes the duties of membership" (p. 1). *Citizenship* then is the status of an individual that arises from being a member of such a community. Such a definition gives rise to several questions: What might such a "political community" be? Who can be a citizen there? What rights does the citizen enjoy? What are the duties of a citizen, and how is the fulfilment of those duties ensured?

Already the first two questions are not easy to answer. Citizenship is sometimes confused with nationality although there is a legal difference. States can define who has the rights and duties of a citizen, irrespective of nationality. Until only half a century ago, there were European countries that did not accept their female nationals as full citizens. Usually, minors are not considered full citizens. Immigrants are usually not awarded full citizenship, at least not before they acquire the nationality of the country

they live in. For our purposes in education, we can simplify this discussion by assuming that every student will eventually become a citizen, either in the country of the school or elsewhere.

When it comes to the rights and duties of citizens, it will be helpful to distinguish between three dimensions of citizenship: legal status, political agency, and identity (Carens, 2000; Kymlicka & Norman, 2000): Each citizen has rights that are protected by law. The right to elect the legislative institution of a state is shared by all liberal democracies, but there may be more rights, for example the right to organise petitions or the right to demand certain information from state institutions. Laws can also define duties of citizenship, such as an obligation to vote, jury duty, and military service.

Political agency arises from the rights of citizens to participate in political decision making. However, most, if not all, of the duties of a citizen in the political realm are not legal but idealistic in nature. If there is no legal obligation to vote, then a citizen can choose not to vote. Even if there is a legal obligation to vote, this does not mean that citizens base their votes on well-informed decisions. The expectation that citizens educate themselves about political questions in order to come to well-informed decisions at the poll cannot be realised legally but stays an ideal in liberal democracies.

Identity is a third dimension because membership in a political community can be a source for defining who one is. In fact, shared aspects of such identities (such as a shared language, a shared space on the map, a shared history) can be regarded as a usual (although not the only possible) psychological foundation of an understanding of citizenship as togetherness (Carens, 2000).

Civic education can then be understood as the aspect of education that affects people's abilities to perform their rights and duties as citizens or prospective citizens. Such education often takes place in schools but is also facilitated elsewhere, for example, in families, religions, and mass media. Different to the context in schools, where civic education might be a social obligation in a limited period of one's life, such education can also be understood as an enduring individual project to educate oneself to become more valuable for one's community, as expressed in the Ancient Greek term *paideia*.

Civic education can be an explicit goal or an implicit effect of social intercourse. Crittenden and Levine (2024) stress that "civic education need

not be intentional or deliberate; institutions and communities transmit values and norms without meaning to" (p. 1). Also, civic education does not necessarily facilitate the achievement of the ideals of citizenship; just as well, it can hinder them. Crittenden and Levine (2024) underline that "sometimes people are civically educated in ways that disempower them or impart harmful values and goals" (p. 1).

It is important to realise that the concept of citizenship is inseparably connected to political ideologies. Early ideas of citizenship developed as scholars contemplated on new relationships between the state and its subjects at the transition from monarchies to democracies. Today, scholarship distinguishes competing conceptualisations of citizenship, some more conservative and others more progressive (Leydet, 2023). These conceptualisations provide different answers to basic questions in the field, such as (Crittenden & Levine, 2024): "What responsibilities does a citizen […] have?", "What is the relationship between a good regime and good citizenship?", "Who may decide what constitutes good citizenship?", and "What means of civic education are ethically appropriate?" (pp. 3–4). However, Crittenden and Levine conclude that "these questions are rarely treated together as part of comprehensive theories of civic education" and that "some of these questions have never been much explored by professional philosophers" (p. 4).

As a consequence, we will not be able to base our following discussions on a comprehensive theory of civic education. However, we can take up the thoughts developed above in order to pose questions on connections between mathematics education and citizenship:

1. In how far does a citizen need education in mathematics to pursue the legal rights and duties of citizenship?
2. In how far does a citizen need education in mathematics to live to up the ideals of political agency?
3. In how far does education in mathematics contribute to the identity dimension of citizenship?
4. In how far do the goals of mathematics education align to or contradict the goals of civic education?
5. In how far does the practice of mathematics education align to or stand in conflict with the goals of civic education?

I will not say much about the first and the third question, as I consider the other questions to have more impact. We will pursue the remaining questions after some elaborations on mathematics and its education.

MATHEMATICS AND ITS EDUCATION

There is no consensus on what mathematics is (Hacking, 2014), but we may depart from an agreement on vital features of what we call "mathematics". Krishnan (2009) lists the following characteristics of academic disciplines:

> 1) disciplines have a particular object of research […];
> 2) disciplines have a body of accumulated specialist knowledge referring to their object of research, which is specific to them and not generally shared with another discipline;
> 3) disciplines have theories and concepts that can organise the accumulated specialist knowledge effectively;
> 4) disciplines use specific terminologies or a specific technical language adjusted to their research object;
> 5) disciplines have developed specific research methods according to their specific research requirements; and maybe most crucially
> 6) disciplines must have some institutional manifestation in the form of subjects taught at universities or colleges, respective academic departments and professional associations connected to it. (p. 9)

While some of these characteristics are obviously fulfilled, for example, the fourth and the last one, already the first characteristic poses problems for mathematics. It does not seem helpful to characterise mathematics by saying that it is used in economy, engineering, and in medicine. It is, however, helpful to conclude that similar mathematics is used in many domains. But what, then, is its "particular object of research"? Would it be fair to say that mathematics deals with abstract concepts? I think not, for every discipline has its own concepts and abstraction is relative: From a specific perspective, even "table" could an abstract concept, but "proton" and "metaphor" clearly are abstract concepts.

A solution could be to look at the third and fifth point first: How is mathematical knowledge organised and how do mathematicians legitimise this knowledge? An interesting observation is that mathematical theories

usually do not refer to domains where they may be applied, even though they may arise from such domains. Methodically, such theories have to follow a strict deductive architecture, even though there may be a more or less implicit possibility to validate the usefulness of such a theory in a domain of its applications. This characterisation does not propose that there are any limitations concerning the objects of mathematics other than their suitability to become objects in a deductive theory.

If this is so, then the interplay between mathematical knowledge and its domains of application becomes all the more difficult to explain. On the one hand, it becomes a question why mathematics can be successfully applied at all. Wigner's (1960) article on "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", although somewhat naïve from a philosophical point of view, has expressed the amazement of mathematicians and natural scientists alike. A part of this effectiveness can be explained by the fact that mathematics is not as effective as we think, because many applications, however prominent, turn out not to work well (see, e.g., Cartwright, 1983). We may add that it is not possible to apply any mathematics to any domain; only very specific applications turn out to be useful. In the end, their usefulness is an empirical criterion based in the domain of application, so, in a sense, mathematics turns out to be empirical after all.

If we look more closely on applications of mathematics, we can observe that the question is not if mathematics fits or does not fit to the domain. Instead, the question is how the perception of the domain had to be altered in order to allow for an application of mathematics. In order to express it with quadratic equations, physicists began to conceive of free fall in a vacuum long before anyone could actually produce such a vacuum. Consequently, mathematics is not only used to describe objects which exist independently from mathematics. Rather, the application of mathematics always reformats our understanding of such objects. Skovsmose (1994) has called this the *formatting power* of mathematics in the sense that mathematics formats our understanding of the real. This has become all the more clear through a new research focus in mathematics education on *normative modelling* (e.g., Pohlkamp & Heitzer, 2021).

The main goal of *mathematics education* is often conceived as getting students to learn mathematical concepts and procedures. Biesta (2009) speaks of a "learnification" of our conception of education (p. 38). If this were the main function of mathematics education, it would be an extremely

ineffective enterprise. Studies from different countries show that people can hardly use mathematical concepts and apply mathematical procedures beyond basic arithmetic operations, once they have left school (Department for Business, Innovation and Skills, 2012; Maaß & Schlöglmann, 2000). Increasingly, mathematical qualification is defined in connection to the ability to apply mathematics to reality (e.g., National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Elsewhere, I discuss other functions of mathematics education that have been addressed in the research literature (Kollosche, 2018). Some of them are frequently addressed as explicit goals of mathematics education in policy documents, others are not. Among them are the function to *integrate* students into the social relations and practices in society (such as being a problem solver) and the function to *legitimise* social institutions and power relations (such as the persuasive power of mathematics).

QUALIFICATION IN MATHEMATICS EDUCATION FOR CITIZENSHIP

It is uncontested that some knowledge of and skills in mathematics are necessary to perform the political agency of citizenship. This becomes most obvious when information is required to take part in direct democracy, in elections of representatives, or, more generally, in political discussions. While the concept of *mathematical literacy* might well describe the ability to found judgement in real-world contexts on mathematical knowledge and skills (Niss & Jablonka, 2020), scholarship on mathematical literacy has not always explicated its importance for citizenship. An exception would be Skovsmose's (1994) interpretation of "mathemacy", about which he writes:

> Could mathemacy also be used for the purpose of empowerment? Could mathemacy help people to reorganise their views about social institutions, traditions and possibilities in political actions? […] Mathemacy, as a radical construct, has to be rooted in the spirit of critique and the project of possibility that enables people to participate in the understanding and transformation of their society and, therefore, mathemacy becomes a precondition for social and cultural emancipation. (pp. 26–27)

Here, Skovsmose talks about the help of mathematics in envisioning and realising political changes. A different perspective is to acknowledge that mathematics is required to understand the discourses on which political decisions are based. Skovsmose (1994) addresses this question when he states:

> The ground for decisions taken by the authorities may be inaccessible to people other than the technicians and the people in charge. Technological development may erode part of the non-formal conditions for democracy, leaving behind only an algorithm for election. That erosion is a real threat to democracy in a highly technological society. But is it possible to secure a critical citizenship in a highly technological society? To find a positive answer to this question is equivalent to conceiving democratic life as possible, in the future as well as the present. (pp. 39–40)

Skovsmose's (1994) solution is to demand reflective knowing in mathematics (pp. 97–114), which I described elsewhere to comprise "recovering the modelled situation in its complexity, addressing problems and uncertainties in the transitions from situations to real models and mathematics models and back, and identifying in which way the mathematical model is formatting reality" (Kollosche & Meyerhöfer, 2021, p. 403). I am afraid that there is hardly any research on such processes of reflection in mathematics education (an exception being Plunger, 2021), although research on normative modelling is certainly informative in this respect (e.g., Pohlkamp & Heitzer, 2021).

When Meyerhöfer and I analysed the mathematics used in the political discourses on the COVID-19 pandemic, we had to conclude that such reflexion for the purpose of allowing political agency is not always possible (Kollosche & Meyerhöfer, 2021). We analysed mathematics that was used in the political discourses in Germany, including the quantification of lethality, the counting of casualties, the reproduction number R, and the model of an exponential growth of infection numbers. In most cases, "we faced ideal concepts, which are easy to define and possible to understand as mathematical laypersons but utterly impractical or even impossible to actually determine" (p. 412). In the end, such concepts had to be redefined mathematically in ways that "cannot be understood by mathematical laypersons to an extent that would allow for the evaluation of such expert knowledge" (p. 414). We concluded "that critical reflection of mathematics cannot be the sole solution to the problem it stood up against", that is agency in political discourses (p. 415).

However, the idea that qualification in mathematics should allow for political agency is not uncontested. In Austria, for example, the focus of secondary level education in mathematics is slowly moving from reflecting on the use of mathematics towards preparing learners for university studies in mathematics (which is pursued by a very few school graduates only).

This aligns well with a general consent that mathematics should be unpolitical, which impedes any attempts of teaching and learning to apply mathematics to applications of socio-political relevance.

Eventually, while it was clear that students cannot master all the mathematical knowledge and skills needed to understand the complete variety of political discourses, even the hope that mathematics education could lay a foundation upon which further self-study might allow to understand the mathematics behind selected political discourses, became compromised. Still, what one might hope for is that mathematics education equips learners with a basic understanding of mathematics together with a mathematical habitus of thought, skills of self-learning and critical reflection, and confidence in their own mathematical abilities. This insight does not only put the importance of qualification into perspective, it also shifts our focus on aspects of mathematics education that may eventually turn out to be problematic in our contemporary practice.

INTEGRATION THROUGH MATHEMATICS EDUCATION FOR CITIZENSHIP

The integration function of education refers to the preparation of "adolescents to successfully integrate into the social relations and practices in society" (Kollosche, 2018, p. 293). In his history of the political economy of mathematics education, Neander (1974) points out how the political goals of mathematics education matched the desired habitus of workers at a given time in Modern Germany. For example, problem solving in mathematics education can be understood as an educational answer to new demands on workers in the knowledge society (Dahl, 2014). Skovsmose (2005) suggests that such practices are not isolated from the rest of society but in fact functional:

> Could it be that 'normal' students in fact learn 'something', although not strictly speaking mathematics (and certainly not mathematical creativity), and that this 'something' serves an important social function? If we look back again at the 10,000 commandments [that is exercises that students have to solve during their school careers], what do they look like? Certainly, not like any of those tasks with which applied mathematics occupies itself, tasks in which creativity is needed to construct a model of a selected piece of reality. Nor do they look like anything a working mathematician is doing. However, they might have some similarities with those routine tasks, which are found everywhere in production and administration. An accountant has to do sums day after day. A laboratory assistant has to do a series of routine tasks in a careful

> way. [...] All such jobs do not invite creative ways of using numbers and figures. Instead things have to be handled carefully and correctly in a pre-described way. Could it be that the school mathematics tradition is a well functioning preparation for a majority of students who come to serve in such job-functions? (pp. 11–12)

If we accept that mathematics education serves such an integration function of schooling, then what would citizenship require from it? Connecting to the last paragraph of our thoughts on qualification, we can say that citizenship requires students to learn to look at socio-politically relevant issues from a mathematical perspective, to acquire needed mathematical knowledge and skills themselves, and to reflect on the usage of mathematics in applications. We may first discuss how these aspects are represented in mathematics education research before we turn our focus on school practice.

What does it mean to look at issues from a mathematical perspective? We may say that this involves, among other things, the ability to think in deductively organised structures and to apply such structures to situations in reality.

Learning to think in deductively organised knowledge structures is often addressed under the terms of mathematical reasoning and proof, which constitutes an extensive field of research in mathematics education (see, e.g., Harel & Weber, 2020). Historically, education in mathematical reasoning had long been reserved for elitist circles, and only set out to become a universal standard for mathematics education with the new math movement in the 1960s and 1970s (Kilpatrick, 2012). However, despite numerous proofs that developing skills in mathematical reasoning is possible already in primary school (e.g., Smit et al., 2023), many countries have developed classroom cultures with very limited activities in mathematical reasoning. To give an example, there are schoolbooks sanctioned by the ministry of education for use in grammar schools in Austria which introduce nearly all of the new mathematical knowledge without any validation of why it holds true. Apart from this lack if implementation, it is unclear in how far mathematical reasoning can help to perform citizenship. For example, the naïve view that a politician's argument can be judged on the basis of its deductive logic, is often misled, as discourse, also in academia, uses different styles of reasoning (Crombie, 1994). Also, the desired education in mathematical reasoning usually does not include reflections upon the epistemic limits and drawbacks of this form of reasoning, thus not allowing for the development of what

Skovsmose called “reflective knowing”. As I have argued elsewhere, it might be worthwhile to position mathematical reasoning within a framework of styles of reasoning in order to locate its place in our attempts to reach objectivity, be it in academia or in socio-political discourses (Kollosche, 2021).

As with mathematical reasoning and proof, a lot of research has been done in the last three decades on mathematical modelling for the classroom (for an overview, see, e.g., Kaiser, 2020). However, it is curious that the modelling processes pursued in such research strongly focus on the production of mathematical models rather than on their evaluation (K. Lengnink, personal communication, Oct. 2022). Thus, this research focusses on preparing students to become appliers of mathematics in complex situations rather than on preparing them to question applications of mathematics in the sense of the reflexion proposed by Skovsmose (1994). It fits to that diagnosis that there is hardly any interest in the structural processes of mathematising real-world problems or interpreting and validating mathematical solutions in this research field, as I have noted elsewhere (Kollosche, 2021). Put into practise, the effect of such an education in mathematical modelling might be that some students become useful appliers of mathematics, which might qualify a few for specific professional tasks, whereas a majority would still not be able to reflect on socio-politically relevant applications of mathematics.

The remaining question would be in how far students learn to acquire needed mathematical knowledge and skills by themselves. Individuals need to know where they can get information, how to distinguish good sources from bad ones, how to deal with problems during their learning processes, where to get support if they need it. All this differs from classroom situations as the learning situation is not pre-designed by the teacher or other educators and as there are no teachers or other students for interaction. Consequently, such a situation of self-learning is difficult to simulate in the classroom, and I do not know of any research project in mathematics education that would study the conditions of learning for life-long learning in mathematics. We might benefit, however, from attempts to lay a lot of agency for their learning of mathematics in the hands of the students, for example, by providing them with the learning goals and necessary materials for two school years and trusting them to organise their learning themselves during that period of time (Karner, 2019).

Eventually, although it appears convincing that integration into specific mathematical practices would be a precondition for political agency as a citizen, it remains unclear how to achieve this. Corresponding research in mathematics education often does not have an explicit focus on civic education and pursues goals that are not necessarily in line with civic education. Apart from that, the impact of these research tradition to the mathematics classroom appears very limited. Consequently, more questions are open than answered. But even if more scholars in mathematics education research would shift their focus on the contribution of mathematics education to integrate students into the role of a critical citizen, this would not mean that such a contribution of mathematics education is possible: On the one hand, it may prove impossible or impractical to get students to acquire the required knowledge and skills. On the other hand, even if the students acquired them, the knowledge and skills might prove insufficient, either because we over-estimated their importance, or because we overlooked other crucial mathematical aspects of citizenship.

LEGITIMISATION THROUGH MATHEMATICS EDUCATION FOR CITIZENSHIP

Even if students were integrated into mathematical practices and qualified in mathematics to an extend sufficient to understand, use, and question the use of mathematics in socio-political discourses, this does not imply that they would use these abilities. Another component is motivational and circles around the question of who has the ability, the right and the obligation to use and check mathematics in these situations. In sociology, school is shown to have the function to legitimise institutions, people and practices in such ways (Kollosche, 2018). Here, we will see the clearest contradictions between school reality and the requirements of civic education.

Scholars from different countries have reported that, in the public, mathematics is usually conceived of as a discipline that can be applied anywhere and that will always lead to unambiguous answers, if it is handled correctly (Borba & Skovsmose, 1997; Davis & Hersh, 1980; Porter, 1996; Ullmann, 2008). While mathematics may be close to this ideal of objectivity when it comes to what is called “pure” mathematics, it is evident to anybody who has seriously applied mathematics that the application of mathematics to real-world problems is far from objective. By this I mean that many application problems do not have an unambiguous answer, and usually different mathematisations can be

conceived and found legitimate. We may still try to regain objectivity by seeking a more detailed definition of our original problem (as the scientist does by controlling the variables of experiments), but this cannot totally prevent ambiguity. Meyerhöfer (2013) presented the mathematical modelling of an initiative in transportation planning, which had been repeated and altered until the outcomes matched the political interests of the city government, as a nice example for discussion in the classroom.

When we ask ourselves where this conception of an infallible mathematics comes from, we have to look at the discipline of mathematics first. Indeed, for centuries, mathematics had been praised by academia for its infallibility, and mathematicians might have enjoyed and identified with this prestigious role of mathematics (Davis & Hersh, 1980, 1986). Today, we have to question not only the objectivity of applications of mathematics, but that of "pure" mathematics as well. Yet, it is questionable in how far contemporary experts in mathematics have a well-informed understanding of the limited objectivity of mathematics. Courses in the philosophy of mathematics do usually not constitute a part of university studies in mathematics, and contemporary statements of mathematicians often leave a rather un-informed impression. In his dissertation, Ullmann (2008) discusses applications of mathematics to engineering, to quantitative research, and to politics, and shows how the myth of infallibility has been reproduced there. Also, the persistence of this myth explains why mathematics is used to present fake-news in a more factual light (Hauge, 2019).

Returning to education, we also have evidence that such an understanding of mathematics is reproduced in schools. Dowling (1998) gave us empirical evidence through his analysis of English mathematics textbooks. Ullmann (2008) made a similar point in his analysis of German textbooks. Already in 1979, Keitel speculated about the conception that students can develop of the role of mathematics in reality on the basis of their experiences in the classroom:

> They learn from an early age that all problems – at least all those they get to know in applying arithmetic – can be solved with its help and without ambiguity. In the case of problems that cannot be solved, it is not mathematics that fails, but the student; an incorrect solution only means that you have miscalculated. This is how the argumentative stringency of calculations of any kind arises, the persuasive power of numbers, regardless of how they are arrived at, which has its effect wherever someone who has usually learnt maths for longer wants to

> convince those who have usually learnt less maths of the logic and necessity of an intention or measure. (p. 257, my translation)

Keitel connects her speculations to the power of the use of mathematics in public debates: Assuming that there must be one and only one mathematical answer to a socio-political problem, we do not face any questions of the applicability of mathematics, of the choice of specific mathematical models, or of the reformatting of the initial real-world problem by such a choice of mathematics. Such a conception of mathematics limits our political agency and stands in conflict with the idea of citizenship.

Yet, even if students gained the insight that applications of mathematics can be questioned, this does not mean that they themselves would feel ready to do so. Different studies show that many students find mathematics to be too difficult for them to handle (e.g., Kislenko et al., 2007; Kollosche, 2017). Students' confidence into their mathematical ability appears to decrease during their school career (Di Martino & Zan, 2011). The same appears to be true for the students' willingness to question applications in mathematics. For example, think of Baruk's (1985) famous study using absurd problems such as the age-of-the-captain problem ("On a boat there are 26 sheep and 6 goats. How old is the captain?"), where Baruk shows that students learned in school to provide mathematical answers despite their reluctance to do so in earlier school years! It seems fair to say that many students learn that mathematics is too difficult to understand for them. This experience is amplified by the central role that mathematics plays in education, for example in its assessment and gatekeeper function (Biesta, 2009).

In summary, we can see that contemporary mathematics education seems to contradict the goals of civic education: Neither does it present mathematics as a discipline whose applications can be biased and should be questioned, nor does it equip learners with an identity of competent applicants and critiques of mathematics. However, there is no structural necessity to make this experience when learning mathematics, as alternative organisations of mathematics education show (e.g., Andersson et al., 2015; Steflitsch, 2023). Conceptualisations of mathematics education such as Skovsmose's (1994) concept of Critical Mathematics Education aim at rethinking mathematics education as a contribution to civic education. Examples from implementing such philosophies (e.g., Gutstein, 2003), although not uncontested (e.g., Brantlinger, 2011), provide ideas of how this can be achieved.

CONCLUSION

In the beginning of this paper, we learnt that democracy requires its citizens to assume an active role in obtaining it. Citizenship, among other things, requires citizens to develop political agency. As socio-political discourses in Modernity are highly formatted by mathematics, education in mathematics plays a crucial role in education or citizenship.

However, the practice of mathematics appears to contradict these goals of civic education. Mathematics education is highly focussed on learning mathematical knowledge and techniques. Foci on mathematical thinking, including mathematical reasoning and mathematical modelling, are less prominent in the mathematics classroom; and where they are, they are often not directed at developing citizenship. Further, mathematics education facilitates an understanding of mathematics and of one's mathematical potential that hinders political agency rather than supporting it. In addition, mathematics education reinforces the popular myth that mathematics can be applied anywhere and yields unambiguous answers, without reflection on the consequences of such applications.

Mathematics education research appears as a part of the problem. It adopts the assumption that mathematics education is mainly about acquiring mathematical knowledge and techniques. When mathematics education research turns to aspects of mathematical thinking, its goals appear to be one-sided: Scholarship on mathematical reasoning sets out to foster skills that are required in mathematics and other sciences, rather than clarifying and studying how such competences contribute to political agency. The same is true for scholarship on mathematical modelling, which tries to educate learners to become virtuous appliers of mathematics rather than to become critical readers of applications of mathematics. Conceptualisations of mathematics education which focus on establishing a different understanding of the socio-political role of mathematics and of the capabilities of students play a marginalised role in the sense that they have not entered the mainstream of mathematics education scholarship.

Critics are right in pointing out that alternative conceptualisations of mathematics education do not align well with the socio-political circumstances in which mathematics education takes place today (Brantlinger, 2011). This does not only imply that scholarship in mathematics education will have to find good arguments to campaign for changes in the socio-political organisation of mathematics education. It also implies that scholarship in mathematics education will have to find

ways to think holistically about the goals of mathematics education. The result could be a robust theory of the goals of mathematics education, in which Critical Mathematics Education would constitute only a part, but which would reserve a central place for education for citizenship. Note that, among the 216 entries in Lerman's (2020) *Encyclopedia of Mathematics Education*, there is no single entry on the aims and goals of mathematics education! The fact that there is no discourse on such a teleology of mathematics education in our scholarship apart from a few, hardly recognised examples (e.g., Ernest, 2000; Heymann, 1996/2003), means that those defining the goals of mathematics education – be they practitioners, mathematicians, politicians, or others – have to do so on academically shaky grounds and shows severe shortcomings of contemporary scholarship in mathematics education.

REFERENCES

Andersson, A., Valero, P., & Meaney, T. (2015). "I am [not always] a maths hater": Shifting students' identity narratives in context. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(2), 143–161. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9617-z

Baruk, S. (1985). *L'Âge du capitaine: De l'erreur en mathématiques* [The age of the captain: On errors in mathematics]. *Science ouverte*. Éditions du Seuil.

Biesta, G. (2009). Good education in an age of measurement: On the need to reconnect with the question of purpose in education. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, *21*(1), 33–46. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9064-9

Borba, M. C., & Skovsmose, O. (1997). The ideology of certainty in mathematics education. *for the learning of mathematics*, *17*(3), 17–23.

Brantlinger, A. (2011). Rethinking critical mathematics: A comparative analysis of critical, reform, and traditional geometry instructional texts. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 395–411. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9331-4

Carens, J. H. (2000). *Culture, citizenship, and community: A contextual exploration of justice as evenhandedness*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/0198297688.001.0001

Cartwright, N. (1983). *How the laws of physics lie*. Clarendon.

Crittenden, J., & Levine, P. (2024). Civic education. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2024th ed.). https://plato.stanford.edu/entries/civic-education

Crombie, A. C. (1994). *Styles of scientific thinking in the European tradition: The history of argument and explanation especially in the mathematical and biomedical sciences and arts*. Duckworth.

Dahl, J. (2014). *The problem-solving citizen*. Malmö högskola.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Birkhäuser.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1986). *Descartes' dream: The world according to mathematics*. Harvester.

Department for Business, Innovation and Skills. (2012). *The 2011 skills for life survey: A survey of literacy, numceracy and ICT levels in England*. https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/36000/12-p168-2011-skills-for-life-survey.pdf

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM Mathematics Education*, *43*(4), 471–482. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6

Dowling, P. (1998). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths / pedagogic texts*. Falmer.

Ernest, P. (2000). Why teach mathematics? In S. Bramall & J. White (Eds.), *Why learn maths?* (pp. 1–14). University of London.

Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, Latino school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 37–73.

Hacking, I. (2014). *Why is there philosophy of mathematics at all?* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781107279346

Harel, G., & Weber, K. (2020). Deductive reasoning in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 183–190). Springer.

Hauge, K. H. (2019). Approaching fake news in mathematics education. In J. Subramanian (Ed.), *Proceedings of the Tenth International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 486–495). MES10.

Heymann, H. W. (2003). *Why teach mathematics? A focus on general education*. Kluwer. (Original work published 1996)

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 553–561). Springer.

Karner, A. (2019). *Flexibilität im Mathematikunterricht: Ausgewählte Analysen eines mathematischen Kursmodells an einer Neuen Mittelschule in der 5. und 6. Schulstufe* [Flexibility in mathematics instruction: Selected analyses of a mathematical course model at a New Secondary School in the 5th and 6th grade] [Doctoral dissertation]. Universität Graz, Graz, Austria. https://unipub.uni-graz.at/obvugrhs/content/titleinfo/4596143

Keitel, C. (1979). Sachrechnen [Arithmetic word problems]. In D. Volk (Ed.), *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht* (pp. 249–264). Fink.

Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education*, *44*(4), 563–571. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0393-2

Kislenko, K., Grevholm, B., & Lepik, M. (2007). Mathematics is important but boring: Students' beliefs and attitudes towards mathematics. In C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Måsøval, & F. Rønning (Eds.), *Relating practice and research in mathematics education: Proceedings of the Fourth Nordic Conference on Mathematics Education* (pp. 349–360). Tapir.

Kollosche, D. (2017). A socio-critical analysis of students' perceptions of mathematics. In H. Straehler-Pohl, N. Bohlmann, & A. Pais (Eds.), *The disorder of mathematics education: Challenging the socio-political dimensions of research* (pp. 173–189). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-34006-7_11

Kollosche, D. (2018). Social functions of mathematics education: A framework for socio-political studies. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(3), 287–303. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9818-3

Kollosche, D. (2021). Styles of reasoning for mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 471–486. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10046-z

Kollosche, D., & Meyerhöfer, W. (2021). COVID-19, mathematics education, and the evaluation of expert knowledge. *Educational*

Studies in Mathematics, *108*(1-2), 401–417. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10097-2

Krishnan, A. (2009). *What are academic disciplines? Some observations on the disciplinarity vs. interdisciplinarity debate*. National Centre for Research Methods. http://eprints.ncrm.ac.uk/783/1/what_are_academic_disciplines.pdf

Kymlicka, W., & Norman, W. (2000). Citizenship in culturally diverse societies: Issues, contexts, concepts. In W. Kymlicka & W. Norman (Eds.), *Citizenship in diverse societies* (pp. 1–42). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/019829770X.003.0001

Lerman, S. (Ed.). (2020). *Encyclopedia of mathematics education*. Springer.

Leydet, D. (2023). Citizenship. In E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (2023rd ed.). https://plato.stanford.edu/archives/fall2023/entries/citizenship

Maaß, J., & Schlöglmann, W. (2000). Erwachsene und Mathematik [Adults and mathematics]. *mathematica didactica*, *23*(2), 95–106.

Meyerhöfer, W. (2013). Modellierung der Wirtschaftlichkeit von Verkehrprojekten [Modelling the economic efficiency of transport projects]. *Der Mathematikunterricht*(4), 19–31.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. http://www.gbv.de/dms/bowker/toc/9780873534802.pdf

Neander, J. (1974). *Mathematik und Ideologie: Zur politischen Ökonomie des Mathematikunterrichts* [Mathematics and ideology: On the political economy of mathematics education]. Raith.

Niss, M., & Jablonka, E. (2020). Mathematical literacy. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 548–553). Springer.

Plunger, C. (2021). Students dealing with tasks aiming at model- and context-oriented reflections: An explorative investigation. In D. Kollosche (Ed.), *Exploring new ways to connect: Proceedings of the Eleventh International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 3, pp. 787–798). Tredition. https://doi.org/10.5281/zenodo.5416122

Pohlkamp, S., & Heitzer, J. (2021). Normative modelling as a paradigm of the formatting power of mathematics: Educational value and learning environments. In D. Kollosche (Ed.), *Exploring new ways to*

connect: Proceedings of the Eleventh International Mathematics Education and Society Conference (Vol. 3, pp. 799–808). Tredition. https://doi.org/10.5281/zenodo.5416165

Porter, T. M. (1996). *Trust in numbers: The pursuit of objectivity in science and public life*. Princeton University Press.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3556-8

Skovsmose, O. (2005). *Travelling through education: Uncertainty, mathematics, responsibility*. Sense. https://doi.org/10.1163/9789087903626

Smit, R., Dober, H., Hess, K., Bachmann, P., & Birri, T. (2023). Supporting primary students' mathematical reasoning practice: The effects of formative feedback and the mediating role of self-efficacy. *Research in Mathematics Education*, *25*(3), 277–300. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2062780

Steflitsch, D. (2023). Experiencing Critical Mathematics Education: Changes in students' perspectives on the relevance of mathematics. *Prometeica: Revista de Filosofía y Ciencias,* (27), 252–262. https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15291

Ullmann, P. (2008). *Mathematik, Moderne, Ideologie: Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik* [Mathematics, modernity, ideology: A critical study on the legitimacy and praxis of modern mathematics]. UVK.

Wigner, E. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, *13*(1), 1–14. https://doi.org/10.1002/cpa.3160130102

Στρογγυλό Τραπέζι

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑ: ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Συντονίστριες: Μαρία Καλδρυμίδου[1], Χαρούλα Σταθοπούλου[2]

[1]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, mkaldrim@uoi.gr

[2]Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, hastath@sed.uth.gr

Συμμετέχοντες/ουσες: Χρόνης Κυνηγός[1], Χαράλαμπος Λεμονίδης[2], Χρίστος Μηλιώνης[3], Κωνσταντίνος Στουραΐτης[4], Χρυσαυγή Τριανταφύλλου[5]

[1]Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, kynigos@ppp.uoa.gr

[2]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, xlemon@uowm.gr

[3]ΜΔΕ Διδακτικής Μαθηματικών και ΜΔΕ Εκπαίδευσης Ενηλίκων, Milionis1@gmail.com

[4]Εκπαιδευτικός Δρ, stouraitisk@gmail.com

[5]Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, chrtriantaf@math.uoa.gr

Περίληψη: *Το Στρογγυλό Τραπέζι πραγματεύεται το ρόλο της μαθηματικής εκπαίδευσης για την ανάπτυξη κριτικής σκέψης, δημοκρατικής συνείδησης και εν τέλει ενεργού πολιτειότητας με διαφορετικές εστιάσεις/προτάσεις/θεωρήσεις από τους συμμετέχοντες. Κατ' αρχάς προτείνεται η υιοθέτηση μιας μετασχηματιστικής λειτουργίας της Μαθηματικής εκπαίδευσης ως μέσον για την αντιμετώπιση πολύπλοκων και ασαφών προβλημάτων που χαρακτηρίζουν τις σύγχρονες κοινωνίες. Μια άλλη εστίαση αφορά στη μαθηματική συλλογιστική και στον τρόπο, μέσα από κατάλληλες πρακτικές, μπορεί να αναπτυχθεί αυτή στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Στη συνέχεια το ενδιαφέρον μεταφέρεται στους εκπαιδευτικούς και στον εν δυνάμει ρόλο τους στην ανάπτυξη δημοκρατικής συνείδησης και πολιτειότητας, μέσα από απελευθερωτικές πρακτικές διδασκαλίας καθώς και την ανάγκη για κατάλληλη επαγγελματική ανάπτυξη που μπορεί να στηρίξει αυτές τις πρακτικές δίνοντας έμφαση σε επιλογές οραματικού χαρακτήρα. Τέλος τονίζεται η ανάγκη για ενσωμάτωση περιβαλλοντικών*

θεμάτων στη μαθηματική εκπαίδευση με τις συνθετικές εργασίες να προτείνονται ως εργαλείο ευαισθητοποίησης των μαθητών.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματική εκπαίδευση, πολιτειότητα, κριτική σκέψη, επίλυση προβλήματος και επιχειρηματολογία, αυτονομία

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Το θέμα του συνεδρίου μας υπογραμμίζει την επείγουσα ανάγκη προώθησης της ενεργού πολιτειότητας και μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης. Σύμφωνα με αυτό, η συζήτηση στο στρογγυλό τραπέζι με θέμα "Μαθηματική εκπαίδευση και πολιτειότητα: γνωστικές και κοινωνικοπολιτικές διαστάσεις" επιχειρεί να εμβαθύνει στην περίπλοκη σχέση μεταξύ της μαθηματικής εκπαίδευσης (ΜΕ) και της ανάπτυξης της ιδιότητας του πολίτη, τόσο ως προς τη γνωστική όσο και ως προς την κοινωνικοπολιτική διάσταση.

Το τοπίο των σύγχρονων προκλήσεων περιλαμβάνει μια σειρά από σύνθετα ζητήματα που αφορούν σε κοινωνικούς, ανθρωπιστικούς, περιβαλλοντικούς, οικονομικούς και τεχνολογικούς τομείς. Η αντιμετώπιση αυτών των προκλήσεων απαιτεί όχι μόνο μια βαθιά κατανόηση για τη φύση και τις συνέπειές τους αλλά και την ικανότητα κριτικής ανάλυσης δεδομένων και λήψης τεκμηριωμένων αποφάσεων. Τα μαθηματικά, ως θεμελιώδης επιστήμη που παρέχει εργαλεία και μοντέλα για την επίλυση προβλημάτων, είναι αναπόσπαστο κομμάτι για την αποτελεσματική αντιμετώπιση αυτών των προκλήσεων.

Τα μαθηματικά, πέρα από το γεγονός ότι προσφέρουν εργαλεία σε άλλες επιστήμες, διαθέτουν εγγενή χαρακτηριστικά που ευνοούν την ενίσχυση της ενεργού συμμετοχής του πολίτη εμπλέκοντας κοινωνικοπολιτικές και γνωστικές διαστάσεις. Η επιστημολογική δομή των μαθηματικών, που χαρακτηρίζεται από λογικό συλλογισμό, επιχειρηματολογία, αποδεικτική διαδικασία και επίλυση προβλημάτων, εξοπλίζει τα άτομα με δεξιότητες κριτικής σκέψης παρέχοντάς τους εργαλεία για να εξετάζουν, να αναλύουν και να επιλύουν προβλήματα, τα οποία συνδέονται με αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες.

Η ανάπτυξη τέτοιων δεξιοτήτων είναι σημαντική για την τεκμηριωμένη λήψη αποφάσεων και την ενεργό συμμετοχή του πολίτη, δίνοντάς του τη δυνατότητα να αξιολογεί τα διαθέσιμα στοιχεία, να προβάλλει λογικά επιχειρήματα και να συμβάλλει στο δημόσιο διάλογο ως μια δημοκρατική έκφραση. Επιπλέον μια μαθηματική εκπαίδευση, που στοχεύει και στην ανάπτυξη της πολιτειότητας, εν δυνάμει προωθεί την ανάπτυξη κριτικής στάσης σε θέματα προκαταλήψεων και στερεοτύπων,

διαπολιτισμικής κατανόησης και συμπερίληψης και εν γένει ευαισθητοποίησης των μαθητών σε θέματα κοινωνικής δικαιοσύνης.

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι η μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να παίξει κεντρικό ρόλο στην καλλιέργεια της ενεργού συμμετοχής του πολίτη, όπως αποτυπώνεται και στη διεθνή βιβλιογραφία, όπου έχουν εμφανιστεί κριτικές γύρω από τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών και τη σχέση τους με την καλλιέργεια της πολιτειότητας (π.χ. Geiger, V., Gal, I., & Graven, M. 2023, Maass et al., 2019).

Η συζήτηση σ' αυτό το πάνελ θα διερευνήσει τη σύνδεση της μαθηματικής εκπαίδευσης με την ανάπτυξη της πολιτειότητας στο ελληνικό πλαίσιο. Επιδιώκει να αποτυπώσει την τρέχουσα κατάσταση όσον αφορά στο βαθμό στον οποίο η μαθηματική εκπαίδευση προετοιμάζει τον αυριανό ενεργό πολίτη, ενώ παράλληλα εξετάζει τις απαραίτητες αξίες, δεξιότητες και περιεχόμενο που απαιτούνται για την καλλιέργεια ενημερωμένων και υπεύθυνων πολιτών.

Ειδικότερα τα θέματα που πραγματεύεται αυτό το Στρογγυλό Τραπέζι οργανώνονται γύρω από τρεις βασικούς άξονες:

Πρόγραμμα Σπουδών. Το περιεχόμενο και η οργάνωση του περιεχομένου που πραγματεύονται τα Αναλυτικά Προγράμματα, τα σχολικά εγχειρίδια και το πρόγραμμα Σπουδών στα Μαθηματικά και η συμβολή του (θετική ή αρνητική) στην ανάπτυξη της πολιτειότητας.

Διδακτική διαχείριση. Η διδακτική διαχείριση του μαθηματικού περιεχομένου και η διαπραγμάτευση των Μαθηματικών στην Τάξη των Μαθηματικών σε σχέση με την ανάπτυξη ενός ενεργού πολίτη.

Εκπαίδευση και επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών. Διαμόρφωση κατάλληλων αρχών και περιεχομένου ώστε να υποστηριχτεί η συμβολή τους στην ολοκληρωμένη μαθηματική γνώση των μαθητών και τη σύνδεση και υποστήριξής της ανάπτυξης της πολιτειότητάς τους.

Στο Στρογγυλό Τραπέζι συμμετέχουν:

Χρόνης Κυνηγός, Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Χρίστος Μηλιώνης, Μαθηματικός, τ. συντονιστής Εκπαίδευσης

Κωνσταντίνος Στουραΐτης, Εκπαιδευτικός, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου, Επίκουρη Καθηγήτρια, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προβλέπεται η ακόλουθη δομή:

- Εισαγωγή, 5’ (από τις συντονίστριες)
- Αρχικές τοποθετήσεις, 5΄ από κάθε συμμετέχοντα (σύνολο 25΄)
- Ερωτήσεις και τοποθετήσεις από τους σύνεδρους 45΄
- Δευτερολογίες από κάθε συμμετέχοντα 2΄(σύνολο 10΄)
- Κλείσιμο, 5’ (από τις συντονίστριες)

Οι συμμετέχοντες στο πάνελ θα αναδείξουν διαφορετικές διαστάσεις της σύνδεσης της πολιτειότητας με τη μαθηματική εκπαίδευση.

Ο Χρόνης Κυνηγός αναδεικνύει την ανάγκη για μετασχηματιστική λειτουργία της ΜΕ ώστε η μαθηματική σκέψη και ο ορθολογισμός να αποτελέσουν εργαλεία για την αντιμετώπιση πολύπλοκων και ασαφών προβλημάτων που συχνά αποτελούν και προκλήσεις της σύγχρονης κοινωνίας. Αναδεικνύει την ανάγκη για την ενσωμάτωση της μαθηματικής σκέψης σε καταστάσεις που απαιτούν ‘καινοτόμο’ ορθολογισμό, όπως η αντιμετώπιση των προκλήσεων της σύγχρονης κοινωνίας. Τέλος, επισημαίνει τη σημασία του ρόλου της επιχειρηματολογίας για την καλλιέργεια της λογικής στο πλαίσιο του μετασχηματισμού της εκπαίδευσης.

Ο Χαράλαμπος Λεμονίδης, με αφορμή τον προσανατολισμό που αποτυπώνεται στα νέα εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης εστιάζει στη σημασία του μαθηματικού συλλογισμού στη διδασκαλία των μαθηματικών σ’ αυτή τη βαθμίδα. Συνδέει τη μαθηματική συλλογιστική με τους όρους της εικασίας, της γενίκευσης, της διερεύνησης, της τεκμηρίωσης της αλήθειας, των επιχειρημάτων και της αξιολόγησής τους ενώ επιπλέον αναφέρεται στα χαρακτηριστικά των έργων που ανταποκρίνονται στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής, όπως η προσβασιμότητα για όλους τους μαθητές, η διαπραγμάτευση και αιτιολόγηση των μαθηματικών εννοιών, και η ευκαιρία για καλλιέργεια μεταγνωστικής σκέψης.

Ο Χρίστος Μηλιώνης διερευνά το ρόλο των μαθηματικών στην ανάπτυξη δημοκρατικής συνείδησης και πολιτειότητας, παρατηρώντας ότι η μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να λειτουργήσει τόσο ως εργαλείο απελευθέρωσης και ενδυνάμωσης όσο και ως μέσο υποταγής, προτείνοντας εναλλακτικές πρακτικές που ενισχύουν τον απελευθερωτικό χαρακτήρα της. Αφού αρχικά υποστηρίζει πως οι κυριαρχικές πρακτικές του εκπαιδευτικού συνιστούν εμπόδια για την ανάπτυξη πολιτειότητας, στη συνέχεια υπερασπίζεται ένα μοντέλο διδασκαλίας που χαρακτηρίζεται από απελευθερωτικές και χειραφετικές πρακτικές. Αυτού του τύπου οι πρακτικές υπαγορεύουν συμμετοχικές δραστηριότητες που σέβονται την αυτονομία και την ανεξαρτησία της σκέψης των μαθητών

καθιστώντας έτσι την τάξη εργαστήριο δημοκρατίας και εν δυνάμει χώρο για ανάπτυξη της πολιτειότητας μέσω της (μαθηματικής) εκπαίδευσης.

Ο Κώστας Στουραΐτης στο κείμενό του αναδεικνύει τον κρίσιμο ρόλο των εκπαιδευτικών μαθηματικών για την ανάπτυξη της ενεργού πολιτειότητας. Ταξινομεί τις αποφάσεις και τις επιλογές των εκπαιδευτικών σε τρεις βασικές κατηγορίες. Αποφάσεις που αφορούν στη: διδακτική διαδικασία, στο σχεδιασμό δράσεων και σε μακροπρόθεσμες οραματικές επιλογές. Επισημαίνει πόσο κρίσιμη είναι, για τη συγκρότηση ενεργών και κριτικών πολιτών, η υιοθέτηση της οραματικής θεώρησης και την ανάγκη για συμβατή/αντίστοιχη επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών όπως υπαγορεύεται από κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις. Σ' αυτό το πλαίσιο αναφέρεται σε αποφάσεις που θα συνδέουν την ενεργό πολιτειότητα με την καθημερινή διδακτική πρακτική, προτείνοντας μορφές επαγγελματικής ανάπτυξης που φέρνουν στο επίκεντρο τη συλλογική επεξεργασία των προβλημάτων της διδασκαλίας και μάθησης από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς.

Η Χρυσαυγή Τριανταφύλλου αρχικά αναφέρεται στο ζήτημα της παγκόσμιας περιβαλλοντικής κρίσης, ως ένα καίριο ζήτημα τις εποχής μας, που υπαγορεύει την ενσωμάτωση περιβαλλοντικών θεμάτων στα εκπαιδευτικά προγράμματα, παρατηρώντας ότι οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ενσωμάτωση τους καθώς στερούνται τόσο πρόσβασης σε κατάλληλα εργαλεία όσο και κατάλληλης προετοιμασίας. Στη συνέχεια εστιάζει στο νέο πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά υποστηρίζοντας πως προωθεί συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων πεδίων γνώσης, προωθώντας έτσι την κριτική σκέψη, καθώς και την επίγνωση για το ρόλο των μαθηματικών στην κατανόηση και αντιμετώπιση κοινωνικών και περιβαλλοντικών ζητημάτων. Ως ένα βασικό εργαλείο προτείνονται οι συνθετικές εργασίες, οι οποίες διαμορφώνουν ένα πλαίσιο το οποίο συμβάλλει στην ευαισθητοποίηση των μαθητών για περιβαλλοντικά ζητήματα και την ανάπτυξη δεξιοτήτων που απαιτούνται για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.

2. ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ/ΟΥΣΩΝ

2.1 Ο Ρόλος της ΔτΜ στην υποστήριξη του Αυριανού Πολίτη να Διαχειρίζεται τα Φαύλα Ασαφή Ζητήματα, Χρόνης Κυνηγός

Διαχρονικά στη ΔτΜ αναδυόμενος κεντρικός στόχος είναι ο μετασχηματισμός του μοντέλου διδακτικής από τη μνημειακή προσέγγιση περί των μαθηματικών ως αντικείμενο στην καλλιέργεια της εμπλοκής των

μαθητών με το μαθηματικό συλλογισμό και τη μαθηματικοποίηση του κόσμου (Chevallard, 2012). Επιδιώξεις της ΔτΜ είναι η καλλιέργεια της νοηματοδότησης και του μαθηματικού συλλογισμού, η ανάπτυξη δεξιοτήτων και ικανοτήτων μαθηματικοποίησης του κόσμου, μιας προδιάθεσης να χρησιμοποιούνται μαθηματικές έννοιες και ορθολογισμός σε κάθε ευκαιρία. Στη σύγχρονη κοινωνία και την καθημερινότητά μας όμως παρεισφρύει όλο και περισσότερο η ενασχόληση και η εμπλοκή σε προσωπικό επίπεδο όχι με καθαρά, δυνητικά επιλύσιμα, μαθηματικά προβλήματα, αλλά με πολύ σύνθετα ζητήματα και προβλήματα που μας περιβάλλουν: κλιματική κρίση, βιωσιμότητα, βιώσιμες πόλεις, πανδημίες, ατομική διατροφή που να συνδυάζει την υγεία και την ευεξία. Αυτού του είδους τα ζητήματα δεν εμπεριέχουν μια μοναδική λύση μέσα τους και δεν μπορούμε να βρούμε έναν έξυπνο τρόπο να τα αντιμετωπίσουμε και να απαλλαγούμε τελικά από αυτά. Έχουν ονομαστεί και φαύλα, αποδίδοντας τον όρο wicked problems (Brown et al, 2010).

Ο κάθε πολίτης αισθάνεται εκτεθειμένος σε φαύλα προβλήματα, παγκόσμια, αμφιλεγόμενα, πολύπλοκα, αξιακά βεβαρημένα κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα, όπως η πανδημία και η κλιματική αλλαγή. Η κοινωνία μας είναι γεμάτη από ατομικό και κοινό άγχος, άρνηση και αδράνεια, που τελικά οδηγεί σε εκθετική αύξηση του κινδύνου για συνέπειες σε ευρύτερη έκταση. Εντείνεται η ρητορική για εκπαιδευτικό μετασχηματισμό με στόχο να παρέχει στους μαθητές εμπειρία ώστε να αντιμετωπίσουν τέτοια ζητήματα συμμετοχικά και έχοντας αποκτήσει γνώσεις (European Commission 2020). Η εισήγηση αυτή έχει στόχο να τεθούν προς συζήτηση θέματα παιδαγωγικού σχεδιασμού για την καλλιέργεια του ορθολογισμού και της μαθηματικής σκέψης ως μέσο αντιμετώπισης τέτοιων ζητημάτων.

Υπάρχει ρόλος για εμάς ως κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης να συμβάλουμε σε αυτό το ρεύμα αλλαγής ή είναι καλύτερα να μείνουμε στην άκρη με την ελπίδα ότι ο απομονωμένος τομέας των μαθηματικών και η ομορφιά τους θα παραμείνει και θα γίνει σεβαστός όπως είχε καθιερωθεί στην εκπαίδευση τον προηγούμενο αιώνα; Με άλλα λόγια, υπάρχει ρόλος για τη μαθηματική σκέψη και τον ορθολογισμό στη μετα-κανονική επιστήμη;

Μέχρι σήμερα, ο μετασχηματισμός της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν έχει ασχοληθεί σχεδόν καθόλου με τον ρόλο των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης στη μετα-κανονική επιστήμη. Η διαψευσιμότητα (fallibility) στα μαθηματικά έχει γίνει αντιληπτή στο πλαίσιο της διαδικασίας αναζήτησης της αλήθειας, της βεβαιότητας, σε ένα κανονικό επιστημονικό περιβάλλον (Lakatos, 1976). Στη μετα-κανονική επιστήμη, ωστόσο, το ζήτημα δεν είναι η διαδικασία παραγωγής της μαθηματικής αλήθειας, αλλά θα μπορούσε ενδεχομένως να είναι ο ρόλος που μπορεί να

διαδραματίσει μια τέτοια αλήθεια σε, ας πούμε, ασαφή προβλήματα (Riling, 2020).
Ανοίγονται έτσι πολλά ζητήματα ταυτόχρονα: Μπορούν τα μαθηματικά ως κανονική επιστήμη να θεωρηθούν ένα εργαλείο, μια δεξιότητα και μια ικανότητα που μπορεί να αξιοποιηθεί σε καταστάσεις που γίνονται καλύτερα κατανοητές μέσω της μετα-κανονικής επιστήμης, όπως τα άτομα και οι συλλογικότητες που αντιμετωπίζουν ασαφή προβλήματα; Πώς μπορεί ο σχεδιασμός ψηφιακών μέσων για την εκπαίδευση σε ασαφή προβλήματα να ενσωματώσει ζητήματα προς συζήτηση της μετασχηματιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως αυτά που αναφέρθηκαν στην πρώτη ενότητα; Τι είδους δεξιότητες, ικανότητες και διαθέσεις μπορούν να καλλιεργηθούν με τη βοήθεια του μαθηματικού συλλογισμού; Μπορεί να καλλιεργηθεί ο μαθηματικός συλλογισμός στο πλαίσιο της λήψης ατομικών αποφάσεων, όταν κάποιος καλείται να είναι δημιουργικός και να υιοθετεί, τόσο σε προσωπικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο, μια ενεργή στάση απέναντι στα ασαφή προβλήματα;
Πρέπει να κατανοήσουμε βαθύτερα το εύρος των ιδεών που μπορεί να είναι χρήσιμες στην εκπαίδευση για τα ασαφή προβλήματα, αλλά το ενδιαφέρον ερώτημα είναι κυρίως τι είδους ορθολογισμός μπορεί να αναπτυχθεί όταν χρησιμοποιείται ο μαθηματικός λογισμός και, ειδικότερα, πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτός ο ορθολογισμός όταν προσπαθούμε να κατανοήσουμε και να αντιμετωπίσουμε ασαφή προβλήματα; Υπάρχουν πολλά ακόμη να μάθουμε για το πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αιτολόγηση σε τέτοιες καταστάσεις και πώς και πότε μπορεί να είναι χρήσιμες μαθηματικές ιδέες και έννοιες. Εισηγούμαι επομένως ότι έχει σημασία να αναλογιστούμε τον ρόλο της μαθηματικής λογικής για τα ασαφή προβλήματα και να αναπτύξουμε μια επιχειρηματολογία για την καλλιέργεια αυτής της λογικής στο πλαίσιο του μετασχηματισμού της εκπαίδευσης.

2.2 Νέα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, Χαράλαμπος Λεμονίδης

Στα υποψήφια νέα εγχειρίδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της ομάδας των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής δίνεται έμφαση στο μαθηματικό συλλογισμό. Στη σύντομη αυτή εισήγηση θα γίνει προσπάθεια να προσδιοριστεί η έννοια και η σημασία του μαθηματικού συλλογισμού στα μαθηματικά και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Θα προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά των έργων για την ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής και θα παρουσιαστούν παραδείγματα από τις δραστηριότητες με τίτλο ‘Συλλογίζομαι’.

Σύμφωνα με τον Μπαμπινιώτη (2010) για τη λέξη συλλογίζομαι (συν + λογίζομαι) από την αρχαιότητα αποδίδεται η σημασία 'υπολογίζω προσεκτικά τα δεδομένα, συμπεραίνω από εκτίμηση των στοιχείων - στοχάζομαι'. Η συλλογιστική είναι η ικανότητα σκέψης, κατανόησης και σχηματισμού απόψεων ή κρίσεων σύμφωνα με κάποια δεδομένα γεγονότα. Είναι η διαδικασία παραγωγής συμπερασμάτων από ένα σύνολο πληροφοριών. Για παράδειγμα, από την πληροφορία ότι ο Έκτορας είναι σκύλος, είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι έχει τέσσερα πόδια. Παρόμοια με δεδομένες τις πληροφορίες ότι είναι ένας διψήφιος αριθμός που έχει ίδια ψηφία και είναι μικρότερος του 30, είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι θα είναι ο αριθμός 11 ή 22.

Μαθηματικά και συλλογιστική, η μαθηματική συλλογιστική

Μπορούμε να πούμε ότι η συλλογιστική είναι το θεμέλιο των μαθηματικών. Τα μαθηματικά βεβαίως σήμερα περιλαμβάνουν ένα μεγάλο αριθμό μεθόδων, διαδικασιών και πρακτικών στις οποίες η συλλογιστική είναι ένα από τα πολλά εργαλεία. Για να προσδιορίσουμε καλύτερα τη σχέση των μαθηματικών με τη συλλογιστική μπορούμε να θέσουμε τα εξής ερωτήματα: Μπορεί κάποιος να κάνει μαθηματικά χωρίς τη συλλογιστική; Βεβαίως και μπορεί να κάνει χρησιμοποιώντας κανόνες και μεθόδους που έχει κατακτήσει ως συνήθεια. Από την άλλη μπορούν οι άνθρωποι να συλλογιστούν χωρίς να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά; Επίσης μπορούν κάλλιστα να αναπτύξουν τη συλλογιστική στα πλαίσια πολλών περιοχών και επιστημονικών πεδίων τα οποία δεν έχουν σχέση με τα μαθηματικά (Steen, 1999).

Στα μαθηματικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συλλογιστική μπορεί να προκύψει από τη σύνδεση της επίλυσης προβλήματος και επικοινωνίας αλλά και από άλλες καταστάσεις όπως η δημιουργία προβλήματος, ανακάλυψης μιας κανονικότητας κτλ.

Αποδίδονται πολλές σημασίες και θεωρητικές αντιλήψεις στον όρο μαθηματική συλλογιστική. Μια χαρακτηριστική απόδοση του όρου δίνεται από τους Lannin, Ellis, & Elliot, (2011) "μια εξελικτική διαδικασία της εικασίας, της γενίκευσης, της διερεύνησης του γιατί και της ανάπτυξης και αξιολόγησης των επιχειρημάτων" (p. 10).

Η μαθηματική συλλογιστική λοιπόν, συνδέεται στενά με τους όρους της εικασίας, της γενίκευσης, της διερεύνησης, της τεκμηρίωσης της αλήθειας, των επιχειρημάτων και της αξιολόγησής τους. Αυτές οι λειτουργίες επιτυγχάνονται μέσα από το διάλογο και τη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης των μαθηματικών. Η μαθηματική συλλογιστική είναι μια αναπτυσσόμενη διαδικασία όπως αναφέρουν παραπάνω οι Lannin et al. (2011) η οποία θα πρέπει να διδάσκεται και να καλλιεργείται από την πρώτη σχολική ηλικία.

Κατά τη διάρκεια της μάθησης των μαθηματικών στο χρόνο η μαθηματική συλλογιστική αναπτύσσεται και επηρεάζεται από κρίσιμα πεδία όπως η διατύπωση ορισμών, οι εμπειρικές αποδείξεις και οι μαθηματικές αποδείξεις.

Γιατί είναι σημαντική η συλλογιστική στη διδασκαλία/μάθηση των μαθηματικών;

Γνωρίζουμε ότι η διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μπορεί να πραγματοποιηθούν σε διαφορετικά περιβάλλοντα και καταστάσεις όπως για παράδειγμα τα δύο άκρα ενός εκκρεμούς, όπου στη μια άκρη βρίσκεται ένα φτωχό και φορμαλιστικό περιβάλλον όπου δίνεται έμφαση στη διαδικασία και τους κανόνες και απαιτείται από το μαθητή να εφαρμόζει τις μαθηματικές έννοιες χωρίς ουσιαστική συμμετοχή στη μάθηση έως την άλλη άκρη όπου έχουμε ένα πιο πλούσιο και ουσιαστικό περιβάλλον μάθησης όπου δίνεται έμφαση στην κατανόηση και απαιτείται ουσιαστική συμμετοχή και διαπραγμάτευση της γνώσης με τους άλλους από την πλευρά του μαθητή. Σε αυτό το δεύτερο περιβάλλον μάθησης βρίσκει εφαρμογή η συλλογιστική διαδικασία στα μαθηματικά. Εδώ έχουμε πλούσιες μαθηματικές καταστάσεις οι οποίες κινούν το ενδιαφέρον του μαθητή και έχουν σημασία για αυτόν. Οι καταστάσεις αυτές στοχεύουν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και όχι στην απλή εφαρμογή των διαδικασιών. Η μαθηματική συλλογιστική συνδέεται άμεσα με τη διαπραγμάτευση και την επικοινωνία του νοήματος των μαθηματικών. Μέσα από αυτήν την διαπραγμάτευση και την επικοινωνία με τους άλλους των μαθηματικών νοημάτων, επιτυγχάνεται η καλύτερη κατανόησή τους.

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των έργων στα οποία αναπτύσσεται η μαθηματική συλλογιστική;

Τα έργα που στοχεύουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής θα πρέπει να έχουν κάποια από τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά:

Πρώτον, να είναι τέτοια ώστε να δίνουν πρόσβαση σε όλους τους μαθητές για να μπορούν να εκφράσουν τη γνώμη τους και να συμμετέχουν στη διαπραγμάτευση του νοήματος. Να είναι επίσης έργα ανοιχτά που να επιδέχονται πολλές λύσεις.

Δεύτερον, να προκαλούν τη διαπραγμάτευση και την αιτιολόγηση των μαθηματικών εννοιών μεταξύ των ατόμων. Μέσα σε ένα περιβάλλον διαπραγμάτευσης και αιτιολόγησής αναπτύσσεται ο λόγος και η συλλογιστική (Ribeiro, Aguiar, Trevisan, & Elias, 2021).

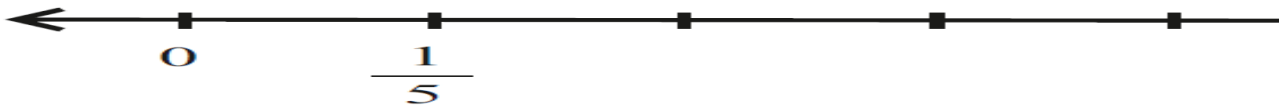
Τρίτον, να δίνουν την ευκαιρία για μεταγνωστική σκέψη στους μαθητές. Να σκέφτονται, δηλαδή και να εκφράζουν τι κάνουν και γιατί το κάνουν (Resnick, 1987).

Κάποια παραδείγματα

Α' τάξη: Με τα παρακάτω ψηφία μπορείς να σχηματίσεις αριθμούς μεγαλύτερους του 10 και μικρότερους του 50; Πόσους αριθμούς μπορείς να βρεις;

Στ' τάξη: Υπολογίζω τη διαίρεση και την ερμηνεύω με τη βοήθεια της αριθμογραμμής

$$2 : \frac{2}{5} =$$



2.3 Αντιλήψεις και διδακτικές πρακτικές στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, Χρίστος Μηλιώνης

Από τη γέννησή τους, τα μαθηματικά βοηθούν την καλύτερη κατανόηση του φυσικού κόσμου και λειτουργούν ως ισχυρό εργαλείο χειραφέτησης και απελευθέρωσης της σκέψης των πολιτών από παραδοσιακές και εξ αποκαλύψεως αλήθειες, δόγματα και προκαταλήψεις. Η λειτουργία αυτή των μαθηματικών εδραιώθηκε με την εισαγωγή της απόδειξης ως κύριου προαπαιτούμενου γιά την αποδοχή της ορθότητας του μαθηματικού λόγου. Έκτοτε, τα μαθηματικά μαζί με την ορθολογική φιλοσοφία μετέχουν καθοριστικά στη διαμόρφωση και την εξέλιξη της δημοκρατίας και της δημοκρατικής σκέψης. Συνεπώς, η ανάπτυξη της δημοκρατικής σκέψης των πολιτών και η λειτουργία της δημοκρατίας συσχετίζονται άμεσα και επηρεάζονται από την ποιότητα και την επάρκεια της παρεχόμενης από το εκπαιδευτικό σύστημα μαθηματικής εκπαίδευσης. Θα εστιάσουμε στις γνωστικές και κοινωνικοπολιτικές διαστάσεις των αντιλήψεων που επικρατούν και των διδακτικών πρακτικών που ακολουθούνται στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης και επηρεάζουν την πολιτειότητα και τη δημοκρατική συνείδηση.

Μαθηματική εκπαίδευση και ανάπτυξη δημοκρατικής συνείδησης

Πολλαπλές σχέσεις συνδέουν τη δημοκρατική συνείδηση των πολιτών με τη λειτουργία των πολιτικών θεσμών και του εκπαιδευτικού συστήματος. Τα μαθηματικά και η μαθηματική παιδεία βοηθούν την ενίσχυση της γνωστικής αυτονομίας και την ανάπτυξη της κριτικής και δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Επιτρέπουν την αμφισβήτηση και την απόρριψη λόγων και θέσεων που δε στηρίζονται σε ορθολογικές αποδείξεις, αλλά εμφανίζονται ως θεοκρατικές, ή επιβάλλονται από ισχυρότερες δυνάμεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την απελευθερωτική λειτουργία των μαθηματικών, τα οποία αποτελούν ένα ισχυρό όπλο αντίστασης των πολιτών κατά της επιβολής πολιτικών χειραγώγησης και ελέγχου.

Από την άλλη πλευρά, τα μαθηματικά και η μαθηματική εκπαίδευση αποτελούν προνομιακό πεδίο για την επιβολή πολιτικών ελέγχου, χειραγώγησης, διαφοροποίησης και ταξινόμησης των πολιτών και είναι δυνατό να αξιοποιηθούν για την άσκηση εξουσίας πάνω στους άλλους και ως εργαλείο υποταγής και των πολιτών. Όπως σημειώνει η P. Valero (Valero, 2017), οι μαθηματικές επιδόσεις και η ικανότητα στα μαθηματικά έχουν γίνει αποτελεσματικοί μηχανισμοί που διέπουν την ανθρώπινη συμπεριφορά και ενσωματώνονται στη λειτουργία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αναπόφευκτα μπαίνουν σε λειτουργία οι μηχανισμοί διαφοροποίησης και ταξινόμησης των ατόμων και τελικά η μαθηματική εκπαίδευση χειρίζεται την ένταξη ή τον αποκλεισμό.

Η πολιτειότητα βιώνεται στην πράξη

Ο στόχος της ενεργούς πολιτειότητας δε μπορεί να επιτευχθεί μέσα από ένα μάθημα ή ένα πρόγραμμα θεωρητικής κατάρτισης που θα προσέφερε στους μαθητές τις σχετικές γνώσεις, αλλά προκύπτει ως αποτέλεσμα βιωμάτων που προέρχονται από εμπειρίες της πραγματικής ζωής και όχι θεωρητικής κατάρτισης και γνώσης. Τέτοιες εμπειρίες και βιώματα μπορούν να αποκτηθούν και κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η απαίτηση για ολοκλήρωση της διδασκαλίας και της μάθησης στο σχολικό χώρο και χρόνο

Προκειμένου να επωφελούνται από την μαθηματική εκπαίδευση όλοι οι μαθητές ισότιμα, χωρίς κοινωνικές, πολιτισμικές ή άλλες διακρίσεις, είναι αναγκαία *η ολοκλήρωση της διδασκαλίας και της μάθησης μέσα στο σχολικό χώρο και χρόνο*. Διαφορετικά, μέρος της εκπαιδευτικής διαδικασίας μεταφέρεται εκτός του σχολείου με συνέπεια την εμφάνιση σοβαρών διακρίσεων, ανισοτήτων και αποκλεισμών μεταξύ των μαθητών, ανάλογα με την κοινωνικοπολιτισμική τους προέλευση.

Επικοινωνιακές αντιλήψεις και διδακτικές πρακτικές

Οι επικοινωνιακές αντιλήψεις που επικρατούν και οι διδακτικές πρακτικές που ακολουθούνται στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης επηρεάζουν καθοριστικά τη διαμόρφωση της δημοκρατικής συνείδησης και της ενεργής πολιτειότητας των μαθητών.

Η **αντίληψη της αυθεντίας** κατά την οποία διαμορφώνονται συνθήκες κάτω από τις οποίες τα άτομα εγκαταλείπουν τη γνωστική τους αυτονομία. Κατά τη διδακτική διαδικασία, η αντίληψη της αυθεντίας εκφράζεται μέσα από την απολυτότητα του "διδακτικού" λόγου και εστιάζει το ενδιαφέρον της στην πιστή μετάδοση και πρόσληψη του μηνύματος. Ο διδακτικός λόγος γίνεται "απόλυτος" και "αιώνιος" και ο ρόλος της επικοινωνιακής διεργασίας κατά τη διδασκαλία υποβαθμίζεται σε ρόλο απλού εργαλείου-μέσου στα χέρια του εκπαιδευτικού.

Η **διαδικαστική αντίληψη μετάδοσης πληροφοριών** εκφράζεται μέσα από την ουδετερότητα της στάσης των μετεχόντων και εστιάζει το ενδιαφέρον της στη διαδικασία μεταφοράς και στη μορφή του διδακτικού λόγου, θέτοντας σε δεύτερη μοίρα την ουσιαστική ενασχόληση με το περιεχόμενό του. Οι διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζονται ρίχνουν το βάρος τους στην πρόσβαση σε μεγάλο πλήθος ασκήσεων και στην εκμάθηση τεχνικών επίλυσης, ενώ υποβαθμίζεται η ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Η **αντίληψη της επικοινωνιακής ικανότητας,** κατά την οποία τα άτομα διατηρούν τη γνωστική τους αυτονομία και εφευρίσκουν τις δικές τους γνωστικές κατασκευές βιώνοντας τις συνεχείς διαδικασίες αποδόμησης και επαναδόμησής τους. Κατά την διδακτική διαδικασία, καθηγητής και μαθητής γίνονται συνδημιουργοί της γνώσης που την καθορίζουν και την παράγουν. Η επικοινωνία στη σχολική τάξη δεν εξυπηρετεί τη "μεταφορά" γνώσεων από το δάσκαλο στο μαθητή, αλλά επιτρέπει τη γνωστική επεξεργασία και κατασκευή των εννοιών.

Τελικά, ανάλογα με τις επικοινωνιακές αντιλήψεις και διδακτικές πρακτικές που ακολουθούνται στη σχολική τάξη διαμορφώνονται οι αντίστοιχες συνειδήσεις πολιτειότητας με κύρια χαρακτηριστικά:

-*Υπακοή και υποταγή σε αυθεντίες*

-*Προσαρμογή σε καθιερωμένη και επιβαλόμενη διαδικασία*

-*Ενεργοποίηση, αυτόνομη σκέψη και δημιουργία/ "κατασκευή" νοήματος*

Τελικά συμπεράσματα

Η κυριαρχία της αυθεντίας του εκπαιδευτικού, η απολυτότητα του διδακτικού λόγου, η ανάδειξη του ατομικισμού και του ανταγωνισμού κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, η υιοθέτηση αντιλήψεων που οδηγούν στην υποταγή και τη χειραγώγηση μέσα από ένα κλειστό και στατικό μοντέλο διδασκαλίας, διαμορφώνουν συνθήκες οι οποίες είναι δυσμενείς για την επίτευξη του στόχου της εκπαίδευσης στην πολιτειότητα.

Αντιθέτως, η υιοθέτηση ενός ανοιχτού και δυναμικού μοντέλου διδασκαλίας και η επιλογή επικοινωνιακών αντιλήψεων και πρακτικών που θα υπηρετούν τις ανάγκες απελευθέρωσης και χειραφέτησης των μαθητών, ευνοούν την εκπαίδευση στην πολιτειότητα.

Απαιτείται επίσης προσεκτική διαχείριση και αντιμετώπιση καθιερωμένων στερεοτυπικών αντιλήψεων που αναφέρονται στη φύση των μαθηματικών

και τη διδασκαλία τους, καθώς και στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν τα μαθηματικά (π.χ. τα μαθηματικά είναι απροσπέλαστα για τους πολλούς, τις γυναίκες, αυτούς που δεν έχουν ταλέντο και δε διαθέτουν υψηλό δείκτη ευφυίας κ.λ.π).

Όταν στη διδακτική πράξη κυριαρχούν οι αρχές της δημοκρατικής λειτουργίας, περιλαμβάνονται συμμετοχικές δραστηριότητες και επιδιώκεται η συνεργατική και διερευνητική μάθηση με σεβασμό στην αυτονομία και ανεξαρτησία της σκέψης των μαθητών, η σχολική τάξη λειτουργεί ως εργαστήριο δημοκρατίας και επιτυγχάνεται η σύζευξη της πολιτειότητας με την εκπαίδευση.

2.4 Μαθηματική εκπαίδευση και πολιτειότητα: σκέψεις για τον ρόλο των εκπαιδευτικών και την επαγγελματική ανάπτυξη, Δρ. Κώστας Στουραΐτης, εκπαιδευτικός

Αν σήμερα, στο τοπίο των σύγχρονων προκλήσεων, θεωρούμε επείγουσα την ανάγκη προώθησης της ενεργού πολιτειότητας και μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης, θα πρέπει να αναγνωρίσουμε τον κεντρικό ρόλο των εκπαιδευτικών σε αυτό. Οι οπτικές των εκπαιδευτικών για το τι είναι τα μαθηματικά και σε ποιους απευθυνόμαστε με τη διδασκαλία τους, καθώς και οι αποφάσεις τους σχετικά με τι και πώς πρέπει να διαπραγματευτεί στην τάξη των μαθηματικών, έχουν καθοριστική σημασία στην καλλιέργεια της ενεργού συμμετοχής του πολίτη.

Γενικά, θα μπορούσαμε να διακρίνουμε τις αποφάσεις και τις επιλογές των εκπαιδευτικών σε τρεις μεγάλες κατηγορίες με κριτήριο τον χρονικό ορίζοντα των γεγονότων που επηρεάζουν. Στην πρώτη έχουμε τις αποφάσεις που παίρνουν μέσα στην εξέλιξη της διδακτικής διαδικασίας (on the moment decision making), όταν, για παράδειγμα, ένα συμβάν στην τάξη δημιουργεί δύο ή περισσότερες εναλλακτικές για τη συνέχιση της διδασκαλίας και της μάθησης. Στη δεύτερη περιλαμβάνονται οι αποφάσεις σχεδιασμού δράσεων (action based decision making), όταν, για παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν ή δημιουργούν το έργο που θα δώσουν στα παιδιά την επόμενη μέρα, τις ερωτήσεις που θα τους κάνουν, πώς θα οργανώσουν την εργασία των παιδιών στην τάξη κ.λπ. Και, στην τρίτη κατηγορία έχουμε τις επιλογές μακροπρόθεσμου, οραματικού χαρακτήρα (future oriented envisioning) οι οποίες σχετίζονται με το πώς θα ήθελε ο εκπαιδευτικός να συλλογίζονται και να δρουν οι μαθητές και οι μαθήτριές του ως αποτέλεσμα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών.

Η αναγνώριση από τους εκπαιδευτικούς του ρόλου της μαθηματικής εκπαίδευσης στην ανάπτυξη της ενεργού πολιτειότητας, σημαίνει την υιοθέτηση από αυτούς των αντίστοιχων επιλογών οραματικού χαρακτήρα.

Κάνοντας μια προβολή στο μέλλον, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να φανταστούν τους σημερινούς μαθητές τους να είναι κριτικά σκεπτόμενοι ενεργοί πολίτες, οι οποίοι παίρνουν τεκμηριωμένες αποφάσεις και συμβάλλουν στην αντιμετώπιση των τοπικών και οικουμενικών προβλημάτων.

Για να διευκρινίσουμε τις επιλογές οραματικού χαρακτήρα, ας δούμε δύο παραδείγματα. Στο πρώτο, αρκετά χρόνια πριν, μια εκπαιδευτικός αναφερόμενη στη χρήση μοντέλων για την εισαγωγή στις πράξεις με αρνητικούς ακεραίους λέει ότι θέλει να πείσει τα παιδιά. Δεν θέλει να τους τα μαθαίνει «τελείως φορμαλιστικά, ότι αυτό είναι και τελείωσε», γιατί τότε «το μάθημα των μαθηματικών παίρνει κι άλλο νόημα, ότι θα κάνεις ότι σου λένε. Δεν είναι σωστό». Εδώ υπονοείται μια οραματικού χαρακτήρα θέαση των παιδιών ως κριτικά σκεπτόμενων που στηρίζεται σε μια επιστημολογικής φύσης κατανόηση των μαθηματικών που απορρίπτει την διδασκαλία τους ως άσκηση στην πειθαρχία χωρίς απόδοση νοήματος (Στουραΐτης, 2017). Το δεύτερο παράδειγμα έρχεται από εργασία που παρουσιάστηκε σε αυτό το συνέδριο. Μία εκπαιδευτικός τροποποίησε διδακτικό υλικό που είχε δημιουργήσει άλλος εκπαιδευτικός έχοντας -όπως λέει- στο μυαλό της την καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων όπως την αυτόνομη επιλογή ρυθμού μάθησης και την αξιολόγηση της πληροφορίας και της γνώσης από τα παιδιά. Χωρίς να το λέει, φαίνεται να φαντάζεται τους μαθητές της ως αυτόνομα μανθάνοντα υποκείμενα που ρυθμίζουν τα σχετικά με τη μάθησή τους.

Επιστρέφοντας στο θέμα της συμβολής στην ενεργό πολιτειότητα, ας σκεφτούμε ένα παράδειγμα με αφορμή την εισαγωγή των στοχαστικών μαθηματικών με τα καινούργια Προγράμματα Σπουδών. Μια επιλογή οραματικού χαρακτήρα θα ήταν η θέαση της διδασκαλίας αυτού του πεδίου ως ευκαιρίας οι μαθητές να καλλιεργήσουν μια κριτική κατανόηση και στάση απέναντι στον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα συγκεκριμένα εργαλεία (π.χ. της Στατιστικής) στην ερμηνεία κοινωνικών και οικονομικών φαινομένων. Με δεδομένη αυτή την επιλογή, θα μπορούσαν να ληφθούν οι κατάλληλες αποφάσεις για τη δράση, όπως για παράδειγμα η επιλογή ενός συγκεκριμένου έργου που αναφέρεται στην ανισότητα στους μισθούς γυναικών και ανδρών στην Ευρωπαϊκή Ένωση.

Θα μπορούσε να πει κάποιος ότι αρκεί η ανάθεση των επιλογών και των αποφάσεων τέτοιου είδους σε άλλους (π.χ. στα ΠΣ, στα σχολικά βιβλία, στους θεσμικούς φορείς κ.λπ.). Και οι εκπαιδευτικοί ας αναλάβουν να υλοποιούν, να «εκτελούν» αυτές τις αποφάσεις. Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι κάτι τέτοιο δεν έχει σχέση με την πραγματικότητα. Αντίθετα, όπως προκύπτει από την έρευνά μας (Στουραΐτης, 2017), όταν οι εκπαιδευτικοί υιοθετούσαν επιλογές οραματικού χαρακτήρα και οι αποφάσεις για τη δράση ήταν συνεπείς προς αυτές τις επιλογές, τότε μόνο φαινόταν να

ανοίγονται δυνατότητες σταθεροποίησης και μεγαλύτερης συστημικής επίδρασης των αποφάσεων στη διδασκαλία.

Από πού έρχονται όμως οι αποφάσεις; Γιατί ένας ή μία εκπαιδευτικός να αποφασίσει έτσι ή αλλιώς; Για τις αποφάσεις στιγμής, στο πλαίσιο μιας γνωστικής προσέγγισης που εστίαζε στο άτομο, ο Schoenfeld (2011) χρησιμοποίησε την έννοια του «προσανατολισμού» που περιλαμβάνει τις προδιαθέσεις, τις πεποιθήσεις, τις αξίες και τις προτιμήσεις και προσδιορίζει τους στόχους του εκπαιδευτικού. Πώς δημιουργείται όμως ο «προσανατολισμός»; Σε κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις, οι επιλογές και αποφάσεις των εκπαιδευτικών σε μεγάλο βαθμό προσδιορίζονται από δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται ή έχουν εμπλακεί οι ίδιοι και από κοινότητες στις οποίες συμμετέχουν ή συμμετείχαν (Potari & Stouraitis, 2019). Ακόμα κι αν φαίνονται ατομικές, οι αποφάσεις λαμβάνονται στο πλαίσιο κοινοτήτων και κατά την επιτέλεση δραστηριοτήτων και υπηρετούν συγκεκριμένα συμφέροντα. Σε τέτοια συλλογικά πλαίσια τα άτομα μπορεί να δημιουργούν μεγαλύτερο ορίζοντα εναλλακτικών επιλογών και να εντάσσουν τις αποφάσεις τους σε ένα ευρύτερο πλαίσιο τεκμηρίωσης. Ως παράδειγμα αναφέρουμε την περίπτωση μιας εκπαιδευτικού για την οποία αφενός η συμμετοχή της σε πανεπιστημιακά σεμινάρια και αφετέρου οι πειραματικές διδασκαλίες που είχε κάνει για τους Γεωμετρικούς Μετασχηματισμούς της έδωσαν την άνεση να αποφασίζει και να υλοποιεί έναν γόνιμο και πρωτότυπο συνδυασμό με την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Αναδεικνύεται λοιπόν το κοινωνικό και ιστορικό πλαίσιο των αποφάσεων. Αυτό το πρίσμα διαμορφώνει τον τρόπο που μπορούμε να δούμε την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών. Πολύ περισσότερο αν θέλουμε να εστιάσουμε στην υιοθέτηση μιας επιλογής οραματικού χαρακτήρα, όπως είναι η προσδοκία η μαθηματική εκπαίδευση να προετοιμάζει τον αυριανό ενεργό, ενημερωμένο, κριτικά σκεπτόμενο και υπεύθυνο πολίτη. Αρκετές προσεγγίσεις επαγγελματικής ανάπτυξης που έρχονται από την έρευνα θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν σε αυτή την κατεύθυνση. Ωστόσο, αναφερόμενοι σε αποφάσεις που θα συνδέουν την ενεργό πολιτειότητα με την καθημερινή διδακτική πρακτική, σκεφτόμαστε μορφές επαγγελματικής ανάπτυξης που φέρνουν στο επίκεντρο τη συλλογική επεξεργασία των προβλημάτων της διδασκαλίας και μάθησης από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Μορφές όπως η μελέτη μαθήματος (lesson study), οι ομάδες μελέτης, οι κοινότητες μάθησης και άλλες συνεργατικές μορφές επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Potari & Stouraitis, 2019, Brown & Herbst, 2023) φαίνεται να μπορούν να υποστηρίξουν αφενός την συλλογική υιοθέτηση επιλογών σχετικών με την πολιτειότητα στην μαθηματική εκπαίδευση και αφετέρου μια παραγωγική εφαρμογή αυτών των επιλογών στην διδασκαλία.

2.5 Περιβαλλοντικής φύσης θέματα στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Χρυσαυγή Τριανταφύλλου

Όπως όλοι γνωρίζουμε, η κοινωνία μας αντιμετωπίζει σοβαρές παγκόσμιες προκλήσεις. Μια από αυτές τις προκλήσεις αποτελεί η παγκόσμια περιβαλλοντική κρίση. Τα εκπαιδευτικά μας συστήματα έχουν την υποχρέωση να εφοδιάζουν τους μελλοντικούς πολίτες όχι μόνο με επιστημονικές γνώσεις αλλά και με ηθικές, πολιτισμικές και οικολογικές ευαισθησίες (Barwell, 2022; Hauge & Barwell, 2022; Maass et al., 2023). Πολλοί ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών παραδέχθηκαν ότι η παγκόσμια περιβαλλοντική κρίση αποτελεί μια πρόκληση για τη Μαθηματική εκπαίδευση και θέτουν ένα κεντρικό ερώτημα στην εκπαιδευτική και ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών: «Ποιος είναι ο ρόλος της μαθηματικής εκπαίδευσης στην παγκόσμια περιβαλλοντική κρίση;» (Boylan & Coles, 2017, σελ. 2).

Έρευνες σε εκπαιδευτικούς αναφέρουν ότι, ενώ θεωρούν σημαντικό να εντάξουν στη διδασκαλία τους περιβαλλοντικής φύσης θέματα, οι ίδιοι είναι αρκετά διστακτικοί. Κάποιοι από τους ανασταλτικούς παράγοντες αποτελούν η έλλειψη κατάλληλων έργων στα σχολικά κείμενα αλλά και οι πιθανές προκλήσεις που ενδεχομένως να συναντήσουν στη διδασκαλία τους λόγω της αβεβαιότητας που εμπεριέχεται σε τέτοιου είδους ζητήματα (Abtahi et al., 2017; Barwell, Boylan & Coles, 2022; Helliwell & Ng, 2022). Συνεπώς, είναι ανάγκη τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών να υποστηρίζουν τους εκπαιδευτικούς παρέχοντάς τους κατάλληλες πηγές καθώς και προτάσεις διδακτικής διαχείρισης θεμάτων που σχετίζονται με πτυχές της παγκόσμιας περιβαλλοντικής κρίσης.

Η παρούσα εισήγηση θα προσπαθήσει να απαντήσει στο ερώτημα: «*Με ποιο τρόπο το νέο Προγράμματα Σπουδών στα Μαθηματικά (ΠΣΜ) συμβάλει στην ενημέρωση και ευαισθητοποίηση των μαθητών και μαθητριών σε περιβαλλοντικής φύσης θέματα;»*

Η συμβολή του νέου ΠΣΜ σε θέματα που αφορούν την παγκόσμια περιβαλλοντική κρίση πραγματοποιείται με δύο τρόπους: α) Μέσω των γενικών στόχων, προοπτικών και αξιών του αντικειμένου της μάθησης των Μαθηματικών, β) Με τις προτεινόμενες Συνθετικές εργασίες.

Γενικοί στόχοι, προοπτικές και αξίες που υποστηρίζει το νέο ΠΣΜ

Το νέο ΠΣΜ φιλοδοξεί οι μαθητές να: αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης. Να χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους. Να αναπτύσσουν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και

οικονομικές σχέσεις. Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση. Να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά.

Συνθετικές εργασίες

Οι Συνθετικές εργασίες που προτείνονται στο νέο ΠΣΜ δίνουν έμφαση στην ανάδειξη των συνδέσεων των μαθηματικών με άλλες επιστήμες και γνωστικές περιοχές. Μέσα από τις Συνθετικές εργασίες τα παιδιά διερευνούν με τη βοήθεια των μαθηματικών κοινωνικά, περιβαλλοντικά, και πολιτισμικά θέματα. Στο νέο ΠΣΜ τέσσερες Συνθετικές εργασίες που διαπερνούν όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Δημοτικό, Γυμνάσιο, Λύκειο) αφορούν πτυχές της παγκόσμιας περιβαλλοντικής κρίσης. Οι εργασίες αυτές είναι οι εξής:

1) *Ανακυκλώνουμε υλικά* (Β΄ Δημοτικού). Σε αυτή την εργασία τα παιδιά συζητούν για αντικείμενα καθημερινής χρήσης από υλικά που ανακυκλώνονται και κάνουν μια μικρή έρευνα στο οικογενειακό τους περιβάλλον.

2) *Νερό, το πιο πολύτιμο αγαθό* (Γ΄ Δημοτικού). Σε αυτή την εργασία τα παιδιά συζητούν για τις ανάγκες μιας οικογένειας σε νερό, για τη διαχείρισή του και υπολογίζουν την ποσότητα του νερού που είναι απαραίτητη για ένα άτομο και μία οικογένεια σε μία εβδομάδα.

3) *Αιολική ενέργεια – Σχεδιάζουμε έναν ανεμόμυλο;* (Α΄ Γυμνασίου). Στο πλαίσιο της κατασκευής μοντέλου φτερωτής ανεμόμυλου οι μαθητές διερευνούν θέματα συμμετρίας και στροφής κατά γωνία θ. Επίσης, διερευνούν τη σκοπιμότητα της χρήσης ανεμογεννητριών για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας μέσα από αντιπαράθεση απόψεων και μετά από τη μελέτη κατάλληλης βιβλιογραφίας και ενημερωτικού υλικού.

4) *Η ιστορία της λίμνης Κάρλα* (Α΄ Λυκείου). Οι μαθητές μελετούν και συζητούν τις περιβαλλοντικές και κοινωνικές διαστάσεις της αποξήρανσης και της ανασύστασης μιας λίμνης στον Ελληνικό χώρο. Αναλύουν και συγκρίνουν μαθηματικές αναπαραστάσεις που σχετίζονται με αυτές τις αλλαγές.

Η διδασκαλία περιβαλλοντικής φύσης θεμάτων στη σχολική τάξη των μαθηματικών έχει πολλαπλούς στόχους (Barwell, 2022; Barwell et al., 2022; Maass et al., 2023). Ένας κεντρικός στόχος είναι να ενημερώσει και να ευαισθητοποιήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες, ως αυριανούς ενεργούς πολίτες, σε θέματα που σχετίζονται με την παγκόσμια περιβαλλοντική κρίση. Παράλληλα, τα παιδιά εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων που στηρίζονται σε αυθεντικά δεδομένα, με υψηλό βαθμό αβεβαιότητας όσον αφορά τη λύση τους, αναπτύσσοντας πρακτικές κριτικής μοντελοποίησης (critical modelling). Ταυτόχρονα, τα παιδιά

καλούνται να διαπραγματευθούν θέματα που αφορούν τις δικές τους αξίες σε σχέση με τις αξίες των συμμαθητών και συμμαθητριών τους.

3. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στις εισηγήσεις που προηγήθηκαν αναδεικνύεται η σημασία και ο ρόλος τόσο της ικανότητας συλλογισμού, της ανάπτυξης επιχειρηματολογίας, της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, της διερεύνησης και της αυτονομίας στην εξέταση και ανάλυση των δεδομένων διαφόρων καταστάσεων. Τα χαρακτηριστικά αυτά αποτελούν βασικά στοιχεία τόσο των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης, όσο και της πολιτειότητας (Publications Office of European Union, 2019). Οι ομοιότητες αυτές ενισχύουν τη θέση που διατυπώθηκε στην αρχή, ότι η μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να παίξει κεντρικό ρόλο στην καλλιέργεια της ενεργού πολιτειότητας. Ταυτόχρονα εγείρουν και το ζήτημα του ρόλου που μπορεί να παίξει η ενσωμάτωση της ιδέας της ανάπτυξης της πολιτειότητας στην διαμόρφωση μιας ουσιαστικής και αποτελεσματικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Η αποφυγή των στερεοτύπων και παρανοήσεων από τους μαθητές, η ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης αντί της έμφασης στην στείρα εκμάθηση διαδικασιών, η διερεύνηση προβλημάτων που δίνουν νόημα στα μαθηματικά είναι κύρια ζητούμενα της μαθηματικής εκπαίδευσης και των ζητημάτων που απασχολούν την έρευνα και τη θεωρία της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ταυτόχρονα αναδείχθηκε, πέρα από το περιεχόμενο που πραγματεύονται τα σχολικά μαθηματικά, η σημασία της οργάνωσης και του τρόπου που γίνεται η διαπραγμάτευση αυτών στην τάξη των μαθηματικών. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε αυτήν τη θεώρηση είναι σημαντικός: οι πρακτικές που ακολουθεί, οι αποφάσεις που παίρνει, οι επιλογές που κάνει, ο «χώρος» που αφήνει στους μαθητές για διερεύνηση, πειραματισμό, συζήτηση, συνεργασία και έλεγχο αποτελούν σημαντικούς παράγοντες που διαμορφώνουν την κουλτούρα της τάξης των μαθηματικών και κατ' επέκταση τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και τη μαθηματική γνώση τους. Ο μετασχηματισμός αυτός της μαθηματικής εκπαίδευσης και η υιοθέτηση του από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές δεν είναι αυτονόητος και αποτελεί μια διαχρονική πρόκληση για την έρευνα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abtahi, Y., Gøtze, P., Steffensen, L., Barwell, R., & Hauge, K. H. (2017). Teaching climate change in mathematics classrooms: An ethical responsibility. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 32*, 1–18. https://hvlopen.brage.unit.no/hvlopen-xmlui/handle/11250/2993623

Barwell, R. (2022). In dialogue with planet earth: Nature, mathematics, and education. In *Mathematics and Its Connections to the Arts and Sciences (MACAS) 15 Years of Interdisciplinary Mathematics Education* (pp. 109-120). Cham: Springer International Publishing.

Barwell, R., Boylan, M., & Coles, A. (2022). Mathematics education and the living world: A dialogic response to a global crisis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 68,101013. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101013

Boylan, M., & Coles, A. (2017). Is another mathematics education possible? An introduction to a Special Issue on "Mathematics Education and the living world: Responses to Ecological Crisis." *Philosophy of Mathematics Education Journal, 32*.

Brown, V. A., Harris, J. A., & Russell, J. Y. (Eds.). (2010). *Tackling wicked problems through the transdisciplinary imagination*. Earthscan.

Brown, A.M., & Herbst, P.G. (2023). On designing better structures for feedback in practice-based professional development: Using "failure" to innovate. *Journal of Mathematics Teacher Education 26*(5), 581–605 https://doi.org/10.1007/s10857-023-09588-1

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique [Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach]. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Birkhauser.

European Commission. (2020). *Digital education action plan (2021–2027): Resetting education and training for the digital age*. https://education.ec.europa.eu/focus-topics/digital/education-action-plan

Geiger, V., Gal, I., & Graven, M. (2023). The connections between citizenship education and mathematics education. *ZDM, 55*(5), 923-940.

Hauge, K. H., & Barwell, R. (2022). Education for post-normal times. In R. Herheim, T. Werler, & K. H. Hauge (Eds.), *Lived democracy in education: Young citizens' democratic lives in kindergarten, school and higher education* (pp. 65–76). Routledge.

Helliwell, T. & Ng, O. (2022). Imagining possibilities: innovating mathematics (teacher) education for sustainable futures. *Research in Mathematics Education. (24)*2, 128-149. https://10.1080/14794802.2022.2079553

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM, 51,* 869-884. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5

Maass, K., Zehetmeier, S., Weihberger, A., & Flößer, K. (2023). Analysing mathematical modelling tasks in light of citizenship education using the COVID-19 pandemic as a case study. *ZDM*, *55*(1), 133-145. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01440-9

Μπαμπινιώτης, Γ. (2010). *Ετυμολογικό λεξικό της νέας ελληνικής γλώσσας*. Κέντρο λεξικολογίας.

Potari, D., & Stouraitis, K. (2019). Teacher Decision Making: Developments in Research and Theory. In Potari, D. & Chapman, O. (Eds) *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1. Knowledge, Beliefs, and Identity in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 303-325). Leiden, The Netherlands: Brill Sense.

Publications Office of European Union. (2019). Key Competences for Lifelong Learning. https://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2018_eu_key_competences.pdf

Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think.* Washington, D.C.: National Research Council.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L., & Elias, H. R. (2021). How Teachers Deal with Students' Mathematical Reasoning When Promoting Whole-Class Discussion During the Teaching of Algebra. In *Mathematical Reasoning of Children and Adults* (pp. 239-264). Springer, Cham.

Riling, M. (2020). Recognizing mathematics students as creative: Mathematical creativity as community-based and possibility-expanding. *Journal of Humanistic Mathematics*, *10*(2), 6–39.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think: a theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Routledge

Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning? In L. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K – 12*, (pp. 270-285). VA: Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Στουραΐτης, Κ., (2017). Συνεργασία εκπαιδευτικών για την εφαρμογή ενός νέου προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά στο Γυμνάσιο: αντιθέσεις και διδακτικές αποφάσεις. Διδακτορική Διατριβή. http://hdl.handle.net/10442/hedi/42414

Treffers, A. (2008). Grade 1 (and 2). Calculation up to 20. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 43–60). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Valero, P. (2017). Ένταξη και Αποκλεισμός στη Μαθηματική Εκπαίδευση και 'Κατασκευή' του Σύγχρονου Πολίτη. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (10), 9–26. https://doi.org/10.12681/enedim.15204

Maass, K., Zehetmeier, S., Weihberger, A., & Flößer, K. (2023). Analysing mathematical modelling tasks in light of citizenship education using the COVID-19 pandemic as a case study. *ZDM*, *55*(1), 133-145. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01440-9

Συμπόσιο

Τίτλος Συμποσίου:

ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΕΛΙΞΕΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΕ ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΔΙΕΘΝΕΣ ΕΠΙΠΕΔΟ

Συντονιστές: Θεοδόσης Ζαχαριάδης[1], **Μαριάννα Τζεκάκη**[2]

[1]Μαθηματικό/ΕΚΠΑ, tzaharia@math.uoa.gr

[2]ΤΕΠΑΕ/ΑΠΘ, tzekaki@auth.gr

Συμμετέχοντες: Δήμητρα Πίττα-Πανταζή[1], **Δέσποινα Πόταρη**[2], **Γιώργος Ψυχάρης**[3], **Κωνσταντίνος Χρήστου**[4]

[1]Πανεπιστήμιο Κύπρου, dpitta@ucy.ac.cy

[2]ΕΚΠΑ, dpotari@math.uoa.gr

[3]ΕΚΠΑ, gpsych@math.uoa.gr

[3]Α.Π.Θ., kchristou@auth.gr

Περίληψη: *Το συμπόσιο φιλοδοξεί να παρουσιάσει μια κριτική αποτίμηση των εξελίξεων στο ερευνητικό πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης σε εθνικό και διεθνές επίπεδο, με την πιθανή επίδραση αυτών των εξελίξεων στην εκπαιδευτική πολιτική και πράξη. Από το εύρος των σχετικών θεμάτων θα παρουσιαστούν αναγκαστικά μόνο συγκεκριμένα ζητήματα που αφορούν την έρευνα: στα προγράμματα σπουδών, στους μαθητές και τη μάθηση, στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και στην χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία.*

Λέξεις κλειδιά: *έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση, προγράμματα σπουδών, μάθηση των Μαθηματικών, εκπαίδευση εκπαιδευτικών, χρήση ψηφιακών πόρων*

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η Διδακτική των Μαθηματικών αποτελεί μια επιστημονική περιοχή σχετικά νέα συγκριτικά με άλλες πολύ παλαιότερες επιστήμες, ωστόσο τα τελευταία 30 χρόνια παρουσιάζει μια αλματώδη ανάπτυξη. Σε αυτή την πορεία ανάπτυξης είναι φυσικό να έχει αλλάξει ο ερευνητικός της προσανατολισμός στα θέματα αιχμής που απασχολούν την ερευνητική

κοινότητα και αντίστοιχα οι εφαρμοζόμενες ερευνητικές μεθοδολογίες (Hanna & Sidoli, 2002). Μεγάλο ρόλο στην ανάπτυξη αυτή έπαιξαν οι διεθνείς ανταλλαγές που ενισχύθηκαν μέσα από τα πολυάριθμα συνέδρια που οργανώνονται σε εθνικό και διεθνές επίπεδο αλλά και τα επιστημονικά περιοδικά που η ψηφιακή τους παρουσίαση έδωσε εντυπωσιακή ώθηση. Αναφορικά με την εξέλιξη της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση έχουν πραγματοποιηθεί ενδιαφέρουσες μελέτες που εξετάζουν τις τάσεις και τις μεταβολές του προσανατολισμού των ερευνών στη Διδακτική των Μαθηματικών αλλά και των αξόνων πάνω στους οποίους μελετώνται οι σχετικές εξελίξεις (e.g. Niss, 2004; Inglis & Foster, 2018; Gokce, & Guner, 2021; Yig, 2022).

Στο παρόν συνέδριο, που συμπίπτει και με τα 30 χρόνια της συγκρότησης της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ, κρίνεται σημαντική μια καταγραφή των σχετικών εξελίξεων που δίνουν μια εικόνα της πορείας της επιστήμης όσο και της κοινότητας μέσα σε αυτή. Όπως είναι φανερό, το μεγάλο εύρος των θεμάτων της έρευνας στη Μαθηματική Εκπαίδευση υποχρεώνει, για την μελέτη του θέματος, τον περιορισμό σε κάποιες κρίσιμες θεματικές περιοχές που σχετίζονται με τα προγράμματα σπουδών, τους μαθητές και τη μάθηση, την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και τη χρήση των τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Μετά από μία αρχική γενική παρουσίαση των ερευνητικών εξελίξεων σε διεθνές και εθνικό επίπεδο που ακολουθεί, οι προσκεκλημένοι ομιλητές θα παρουσιάσουν τα σχετικά θέματα.

1.2 ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΕ ΔΙΕΘΝΕΣ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η έρευνα στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών έχει μια ιστορία αρκετών δεκαετιών στις αναζητήσεις διαφορετικών επιστημονικών χώρων, όπως για παράδειγμα τα ίδια τα Μαθηματικά ή η Ψυχολογία για την οποία αποτέλεσε ιδιαίτερος χώρος. Ωστόσο, οι πρώτες διακριτές εργασίες στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών εκκινούν στη δεκαετία του 60 και προς το τέλος της κάνουν και την εμφάνιση τους τα πρώτα ειδικά ερευνητικά περιοδικά, όπως το Educational Studies of Mathematics (ESM) το 1968, το International Journal on Mathematics Education (Zentralblatt for Didaktik der Mathematik, ZDM) το 1969 και το Journal of Research in Mathematics Education (JRME) το 1970, παράλληλα με τα πρώτα συνέδρια, όπως το International Congress on Mathematics Education που πραγματοποιήθηκε στη Λυών το 1969, το Special Interest Group for Research in Mathematics Education εντός της American Educational Research Association στις ΗΠΑ, το 1971 και μεταγενέστερα το International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME) to 1977.

Οι μελετητές που ασχολήθηκαν με την καταγραφή των ερευνητικών εξελίξεων στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών κυρίως μέσα από βιβλιογραφικές αναλύσεις των δημοσιευμένων στα περιοδικά άρθρων ή των πρακτικών συνεδρίων, αναζητούν αρχικά τρόπους με βάση τους οποίους θα καταγραφούν οι σχετικές αυτές οι εξελίξεις. Αναφέρονται διαφορετικές προτάσεις για θεματικούς άξονες όπως για παράδειγμα οι θεωρίες μάθησης, οι διδακτικές θεωρίες, οι πιο σύγχρονες κοινωνικοπολιτκές θεωρίες ή η ανάπτυξη των εκπαιδευτικών (Inglis & Foster, 2018). Αντίστοιχα, άλλοι ερευνητές εξετάζουν τα φαινόμενα που μελετώνται, τις κύριες ερευνητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται, τα σχετικά ευρήματα και τις προκλήσεις (Niss, 2004) ή κυρίαρχες λέξεις κλειδιά (Gokce & Guner, 2021). Σημαντικές είναι οι μελέτες που εξετάζουν την επιστημολογική εξέλιξη της ίδιας της επιστήμης στο σύντομο αυτό χρονικό διάστημα καταγράφοντας θεωρητικές αναλύσεις όπως για παράδειγμα το «ερευνητικό πρόγραμμα» του Lakatos (1978, στο Inglis & Foster, 2018), κάτι που ξεφεύγει όμως από τις ανάγκες της παρούσης παρουσίασης.

Τα στοιχεία που παρουσιάζουμε στο παρόν κείμενο επικεντρώνονται κυρίως σε θεματικές περιοχές, με αναφορές σε σχετικές μεθοδολογίες όπου είναι δυνατό, με στόχο να δοθεί μια γενικότερη εικόνα της εξέλιξης των ζωνών ενδιαφέροντος της επιστημονικής κοινότητας.

Οι μελέτες των δεκαετιών 60 - 70 αρχικά ξεκινούν από προγράμματα σπουδών και τρόπους διδασκαλίας μαθηματικών αντικειμένων, αριθμών ή και γεωμετρίας (που γενικά εκπίπτουν τη δεκαετία του 80), παράλληλα με συζητήσεις για τους στόχους αλλά και τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά. Μετά τη δεκαετία του 80 μελετώνται τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών σε ένα ευρύ πεδίο μαθηματικών εννοιών, τα γνωστικά σχήματα, οι τεχνικές επίλυσης προβλήματος και οι συναισθηματικοί παράγοντες που επιδρούν στη μάθηση των μαθητών. Μετά τη δεκαετία του 90 υπάρχει μια στροφή στις μελέτες μέσα στην τάξη, στη γλώσσα κι επικοινωνία των συμμετεχόντων, αλλά και την επίδραση κοινωνικών, πολιτισμικών και γλωσσικών παραγόντων. Αφορά μια «κοινωνική στροφή» όπως την ονόμασε ο Lerman (2000), ο οποίος με τη σχετική περιγραφή του φαινομένου βοήθησε και τον σχηματισμό του (Inglis & Foster, 2018). Μέχρι το 2000 πολλαπλασιάζονται οι έρευνες που εμπλέκουν τα Μαθηματικά της καθημερινής ζωής αλλά και έρευνες για αξιολογήσεις στην μαθηματική εκπαίδευση (Niss, 2004). Το διάστημα αυτό αυξάνονται και οι έρευνες σχετικά με την αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Gutiérrez & Boero, 2006).

Μετά το 2000 επιτείνονται θεωρητικές συζητήσεις όπως ανθρωπολογικές, γνωστικές, σχετικές με τις καταστάσεις/περιστάσεις (situative) κ.ά. με

κοινωνιολογικές προοπτικές κι αργότερα με την ενσώματη γνώση και επικοινωνία (Schoenfeld, 2016). Μεταγενέστερα παρατηρείται μια σταθερή στροφή στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών. Έτσι πολλές σημαντικές έννοιες που σχετίζονται με την εκπαίδευση και τη γνώση των εκπαιδευτικών εμφανίζονται συχνά στις μελέτες, μαζί με τα πιστεύω των εκπαιδευτικών, την παιδαγωγική γνώση, την παρατήρηση των εκπαιδευτικών (teacher noticing) κ.ά. να εμφανίζονται συχνά στις μελέτες (Yig, 2022). Μετά το 2010, τα άρθρα διερευνούν συγκεκριμένα θέματα και εμφανίζουν όλους τους εμπλεκόμενους φορείς στη μαθηματική εκπαίδευση (Gokce, & Guner, 2021). Παράλληλα εντείνεται η μελέτη των μαθητών με διαφορετικές ταυτότητες, όπως την ταυτότητα του φύλου ή τις μαθησιακές ιδιαιτερότητες, τις διαφορετικότητες με βάση τη γλώσσα, την κουλτούρα την εθνικότητα κλπ. Αντίστοιχα οι έρευνες στις τεχνολογίες δίνουν έμφαση στους ψηφιακούς πόρους αλλά και τους μετασχηματισμούς στους οποίους οδηγούνται τα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω οι Gokce και Guner (2021) μέσα από την μελέτη των δημοσιευμένων άρθρων στο Educational Studies in Mathematics καταγράφουν την εξέλιξη των ερευνών σε τέσσερις βασικές συστάδες: τη θεμελίωση, την εφαρμογή, την σύνδεση και την αξιολόγηση με τις αντίστοιχες κυρίαρχες λέξεις-κλειδιά να εμφανίζονται σε κάθε εποχή.

Στις μεθοδολογίες αρχικά κυριαρχούν οι ποσοτικές επισκοπήσεις, τα τεστ, τα πειράματα, οι μελέτες περιπτώσεων όπως κι οι ιστορικές ή φιλοσοφικές προσεγγίσεις με κοινωνιολογικές διαστάσεις. Μεταγενέστερα, η ερευνητική μεθοδολογία αξιοποιεί ποιοτικές προσεγγίσεις, παρατήρηση, εθνογραφικές μελέτες, συνεντεύξεις, συνεντεύξεις με βάση έργα, έρευνες σχεδιασμού κ.ά., αλλά περαιτέρω χρησιμοποιούνται μεικτές μέθοδοι και πολυμεταβλητές τεχνικές (Niss, 2004).

Νεότερες έρευνες που επικεντρώνονται περισσότερο στο διάστημα 2017 - 2021 (Yig, 2022) εντοπίζουν έναν ισχυρό ερευνητικό προσανατολισμό στους εκπαιδευτικούς, την εκπαίδευση και την ανάπτυξη τους (Shin, 2020), σε κάποιες μαθηματικές ικανότητες (επίλυση και κατασκευή προβλήματος, μοντελοποίηση) και κάποια ζητήματα ισότητας. Γενικά επισημαίνεται ότι παραμένει ο σημαντικός ρόλος των εκπαιδευτικών ιδιαίτερα σε ειδικές συνθήκες όπως ήταν η πανδημία (Bakker et al, 2021).

1.3 ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΕ ΕΘΝΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η έρευνα στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών στην Ελλάδα ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του1980 από ερευνητές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης στα νεοσύστατα τότε τμήματα προσχολικής και δημοτικής εκπαίδευσης που είχαν λάβει τα διδακτορικά τους διπλώματα από

ευρωπαϊκά πανεπιστήμια, καθώς και από ένα μικρό αριθμό ερευνητών που εργάζονταν σε Τμήματα Μαθηματικών. Σταδιακά η ελληνική κοινότητα των ερευνητών της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αυξήθηκε αριθμητικά και διευρύνθηκε με ερευνητές και εκτός του ακαδημαϊκού χώρου. Σε αυτό συνετέλεσαν η δημιουργία μεταπτυχιακών προγραμμάτων σπουδών σε ελληνικά πανεπιστήμια, καθώς και η εκπόνηση σημαντικού αριθμού διδακτορικών σε αυτό το αντικείμενο στην Ελλάδα και στο εξωτερικό από Έλληνες φοιτητές. Η αριθμητική αύξηση και η διεύρυνση της κοινότητας είχαν ως αποτέλεσμα την δημιουργία της ΕΝΕΔΙΜ, η οποία με τα συνέδρια της και την έκδοση ερευνητικού περιοδικού έδωσε νέα ώθηση στην έρευνα της Μαθηματική Εκπαίδευση σε εθνικό επίπεδο.

Η έρευνα στην Μαθηματική Εκπαίδευση στην χώρα μας τα πρώτα χρόνια είχε περιορισμένη θεματολογία εστιάζοντας κυρίως σε θέματα διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών που αφορούσαν σε δυσκολίες των μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Αριθμητική, στην Άλγεβρα. Όμως από το τέλος της δεκαετίας του ’90 και ιδιαίτερα μετά την δημιουργία της ΕΝΕΔΙΜ η έρευνα αυτή διευρύνθηκε σημαντικά. Τα συνέδρια της ΕΝΕΔΙΜ έδωσαν την δυνατότητα όχι μόνο στους ακαδημαϊκούς αλλά και σε νέους ερευνητές να παρουσιάσουν την ερευνητική τους δουλειά. Τα συνέδρια αυτά είχαν συγκεκριμένο θέμα και θεματικές ενότητές αλλά αυτό δεν ήταν απαγορευτικό για την παρουσίαση ευρύτερων μελετών. Η θεματολογία των συνεδρίων της ΕΝΕΔΙΜ περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα θεμάτων σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες, από την προσχολική μέχρι και την τριτοβάθμια και μας δίνει μια καλή εικόνα της έρευνας στην Μαθηματική Εκπαίδευση σε εθνικό επίπεδο. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα θέματα και οι θεματικές ενότητες των 10 συνεδρίων.

1ο Συνέδριο με Θέμα: *Η Διδακτική των Μαθηματικών ως πεδίο έρευνας στην κοινωνία της γνώσης.*
Θεματικές ενότητες: Σχεδιασμός και ανάλυση διδακτικών καταστάσεων- Έκφραση μαθηματικής σκέψης: Ψυχολογικές και κοινωνικές προσεγγίσεις-Μαθηματικά με εργαλεία ψηφιακής τεχνολογίας - Εκπαίδευση εκπαιδευτικών.

2ο Συνέδριο με Θέμα: *Τυπικά και άτυπα Μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Θεματικές ενότητες*: Η μάθηση των μαθηματικών εντός και εκτός σχολείου: σε αναζήτηση σχέσεων και δεσμών - Διδακτικές προσεγγίσεις και δραστηριότητες στην τάξη των μαθηματικών: αξιοποιώντας τις εμπειρίες όλων των παιδιών - Ο ρόλος των πολιτισμικών τεχνουργημάτων και εργαλείων στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών εντός και εκτός σχολείου - Η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για μια κοινωνικο-πολιτισμική οπτική της μαθηματικής εκπαίδευσης - Το άτομο, η κοινωνία,

ο πολιτισμός: αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

3ο Συνέδριο με Θέμα: *Μαθηματική εκπαίδευση και οικογενειακές πρακτικές. Θεματικές ενότητες:* Οικογένεια και μαθηματική εκπαίδευση - Μαθηματική δραστηριότητα - Διδακτικό υλικό για τα Μαθηματικά - Αξιοποίηση των ΤΠΕ στη μαθηματική εκπαίδευση.

4ο Συνέδριο με Θέμα: *Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης μαθηματικής δραστηριότητας.*
Θεματικές ενότητες: Θεωρητικά πλαίσια και μέθοδοι έρευνας της τάξης και της μαθηματικής δραστηριότητας - Διερεύνηση των χαρακτηριστικών της τάξης και της μαθηματικής δραστηριότητας - Διερεύνηση καινοτόμων διδακτικών προσεγγίσεων ως προς το περιεχόμενο, την οργάνωση και τη διαχείριση της μαθηματικής γνώσης στην τάξη - Διερεύνηση ζητημάτων σχετικών με τη εκπαίδευση και το ρόλο των εκπαιδευτικών στην ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη - Ερευνητικές ή θεωρητικές εργασίες στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών που δεν εντάσσονται στις παραπάνω ενότητες.

5ο Συνέδριο με Θέμα: *Τα Μαθηματικά στο σχολείο και στην καθημερινή ζωή*.
Θεματικές ενότητες: Μαθηματικός γραμματισμός ή αριθμητισμός και διδασκαλία των μαθηματικών. Προγράμματα σπουδών και εκπαίδευση ενηλίκων - Επίλυση προβλήματος. Μοντελοποίηση. Μαθηματικοποίηση. Νοεροί υπολογισμοί - Επιρροή των κοινωνικών, πολιτισμικών, πολιτικών και οικονομικών παραγόντων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Δημοκρατία και Μαθηματικά - Μαθηματικά για όλους. Ειδικές κατηγορίες ατόμων στη μάθηση των μαθηματικών - Χρήση σύγχρονων και καινοτόμων μεθόδων για τη διδασκαλία των μαθηματικών όπως: ΤΠΕ, λογοστεχνία, Ιστορία των μαθηματικών κ.α. - Ερευνητικές ή θεωρητικές εργασίες στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών που δεν εντάσσονται στις παραπάνω ενότητες.

6ο Συνέδριο με Θέμα: *Μαθηματικά με διάκριση και χωρίς διακρίσεις*. *Θεματικές ενότητες:* Δημιουργικότητα στη Μαθηματική Εκπαίδευση - Ίσες ευκαιρίες στη Μαθηματική Εκπαίδευση - Επαγγελματική ανάπτυξη «δημιουργικών» εκπαιδευτικών - Πολυμορφία στη μαθηματική εκπαίδευση: κοινωνικές και πολιτισμικές προκλήσεις

7ο Συνέδριο με Θέμα: *Μαθηματική γνώση και διδακτικές πρακτικές. Θεματικές ενότητες:* Η μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη - Εργαλεία διαμεσολάβησης της μαθηματικής γνώσης στη διδασκαλία -

Κοινωνικο-πολιτισμικές, πολιτικές και θεσμικές διαστάσεις της μάθησης και της διδασκαλίας - Η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία και η ανάπτυξή της.

8ο Συνέδριο με Θέμα*: Σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών*.
Θεματικές ενότητες: Χρήση των ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία των μαθηματικών και ο ρόλος τους στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης - Σύγχρονες κοινωνικο-πολιτισμικές και θεσμικές διαστάσεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών - Σύγχρονες προσεγγίσεις στην ανάπτυξη των μαθηματικής σκέψης των μαθητών - Γνώση εκπαιδευτικών και πρακτικές εκπαιδευτικών στη σχολική τάξη

9ο Συνέδριο με Θέμα: *Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις.*
Θεματικές ενότητες: Η μαθηματική εκπαίδευση και η θέση της στη σύγχρονη – εκπαίδευση Κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης - Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών - Αναπτυξιακές και γνωστικές προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών και η επίδραση τους στη Μαθηματική Εκπαίδευση - Εμπειρικές και θεωρητικές μελέτες στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που δεν κατατάσσονται στους παραπάνω άξονες.

10ο Συνέδριο με Θέμα: *Μαθηματική εκπαίδευση και πολιτειότητα: ορατές και αθέατες όψεις/συνιστώσες μιας πολύπλοκης σχέσης.*
Θεματικές ενότητες: Μαθηματική εκπαίδευση: πολιτισμικές και πολιτικές παράμετροι - Γνωστικές παράμετροι της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών - Αξιολόγηση των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών - Ψηφιακές τεχνολογίες και μαθηματική εκπαίδευση στον 21ο αιώνα - Προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά: σύγχρονες προσεγγίσεις - Επαγγελματική ανάπτυξη και μαθηματική εκπαίδευση: διδάσκοντας μαθηματικά για τον μελλοντικό ενεργό πολίτη - Εμπειρικές και θεωρητικές μελέτες στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που δεν κατατάσσονται στις παραπάνω ενότητες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ahl, L. M., Helenius, O., Aguilar, M. S., Jankvist, U. T., Misfeldt, M., & Prytz, J. (2023). Implementation research in mathematics education: A systematic mapping review. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education, 3*(2). https://doi.org/135–199. 10.1163/26670127-bja10015

Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), 1-24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Gokce, S., & Guner, P. (2021). Forty years of mathematics education: 1980-2019. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(3), 514-539. https://doi.org/10.46328/ijemst.1361

Gutiérrez, A., & Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 347–366. Rotterdam: Sense.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2002). The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 123-156. https://doi.org/10.1023/A:1021162617070

Huang, C., Yang, C., Wang, S., Wu, W., Su, J., & Liang, C. (2020). Evolution of topics in education research: A systematic review using bibliometric analysis. *Educational Review*, *72*(3), 281-297. https://doi.org/10.1080/00131911.2019.1566212

Hannula, M.S, (2009). International trends in mathematics education research. In M. Lepik (Ed.) *Teaching mathematics: retrospectives and perspectives, Proceedings of the 10th International Conference* (pp.11-16), Tallinn University, May 14-16.

Inglis, M., & Foster, C. (2018). Five decades of mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(4), 462-500. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.4.0462

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport, CT: Ablex.

Shin, D. (2020). A comparative study of domestic and international research trends of mathematics education through topic modeling. *The Mathematical Education*, *59*(1), 63-80. https://doi.org/10.7468/mathedu.2020.59.1.63

2. Εισηγήσεις συμμετεχόντων/ουσών

2.1 Κριτική αποτίμηση της έρευνας για τα Προγράμματα Σπουδών στα Μαθηματικά και επιδράσεις στην εκπαιδευτική πολιτική και πράξη

Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

dpitta@ucy.ac.cy

Σε αυτή την παρουσίαση γίνεται μια ανασκόπηση της έρευνας στον τομέα των προγραμμάτων σπουδών στον διεθνή χώρο, στην Ελλάδα και στην Κύπρο. Η γενική διαπίστωση είναι ότι το θέμα δεν έτυχε εκτενούς διερεύνησης. Φαίνεται να υπάρχουν αρκετές θεωρητικές, μεθοδολογικές και πρακτικές προκλήσεις στη διεξαγωγή ερευνών στα προγράμματα σπουδών. Τέλος, παρουσιάζονται εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες στον τομέα των προγραμμάτων σπουδών στην εκπαίδευση.

Εισαγωγή

Σε αυτή την παρουσίαση υιοθετούμε τον ορισμό του Niss (2016) για τα "Προγράμματα Σπουδών", που περιλαμβάνει (α) τους στόχους, (β) το περιεχόμενο, (γ) τα υλικά, (δ) τους τρόπους διδασκαλίας, (ε) τις δραστηριότητες των μαθητών και (στ') την αξιολόγηση μαθητών.

Το φάσμα των ερευνητικών θεμάτων που αναφέρονται στα αναλυτικά προγράμματα είναι αρκετά ευρύ (Shimizu &Vithal, 2022). Οι έρευνες αναφέρονται σε τέσσερις διαφορετικές πτυχές των προγραμμάτων σπουδών, τη διαδικασία ανάπτυξης των προγραμμάτων σπουδών, το περιεχόμενό, την εφαρμογή και την αξιολόγησή τους.

Σκοπός της παρουσίασης είναι να προσφέρει μια ανασκόπηση των εξελίξεων της έρευνας στα προγράμματα σπουδών και των βασικών θεμάτων που είχαν αυτές οι έρευνες σε διεθνές και τοπικό επίπεδο. Παρουσιάζονται, επίσης, οι προκλήσεις που φαίνεται να προκύπτουν στη διεξαγωγή αυτών των ερευνών. Τέλος, παρουσιάζονται πιθανές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα στον τομέα αυτό και συζητείται η συνεισφορά αυτών των ερευνών στην εκπαίδευση.

Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας

Το περιεχόμενο των προγραμμάτων σπουδών φαίνεται να επηρεάστηκε διαχρονικά από τις εξελίξεις στις επιστήμες των μαθηματικών, της ψυχολογίας, της κοινωνιολογίας και της τεχνολογίας. Επηρεάστηκε, επίσης, από άλλους παράγοντες, όπως η παγκοσμιοποίηση, η διεθνοποίηση, τα πολιτικά και πολιτισμικά κινήματα, τα αποτελέσματα διεθνών ερευνών (TIMSS και PISA), και τις συζητήσεις για την ανάπτυξη ικανοτήτων για τον 21ο αιώνα. Γενικά, τα προγράμματα σπουδών δημιουργούν σε πολλές χώρες προβληματισμούς, όπως: Γιατί διδάσκουμε μαθηματικά; Τι διδάσκουμε; Πότε το διδάσκουμε; Πώς διδάσκουμε; Πού θέλουμε να πάμε; Πόσο αποτελεσματικό είναι ένα πρόγραμμα σπουδών; Για ποιους είναι κατάλληλο και υπό ποιες συνθήκες (Huntley, 2009). Αυτοί οι προβληματισμοί οδήγησαν σε μια σειρά μεταρρυθμίσεων στα προγράμματα σπουδών στον διεθνή χώρο αλλά και στην Ελλάδα και στην Κύπρο. Ωστόσο, η μέτρηση του τι κάνει κάποια προγράμματα καλύτερα από άλλα είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί, γιατί είναι σχεδόν αδύνατο να ληφθούν υπόψη όλες οι πιθανές παράμετροι (Usiskin, 1998-1999).

Οι Shimizu και Vithal (2022) κατηγοριοποίησαν τα θέματα με τα οποία καταπιάστηκαν οι διεθνείς έρευνες, αναφέροντας ενδεικτικά: (α) οι παράγοντες που συμβάλλουν ή όχι στη διαμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών, όπως τα σχολικά εγχειρίδια, οι νέες τεχνολογίες (β) η συνοχή και τη συνάφεια των προγραμμάτων σπουδών εντός των μαθηματικών αλλά και με άλλα θέματα, (γ) η εφαρμογή προγραμμάτων σπουδών εντός διαφορετικών πλαισίων και παραδόσεων, (δ) η παγκοσμιοποίηση και διεθνοποίηση και οι επιπτώσεις τους στις μεταρρυθμίσεις των προγραμμάτων σπουδών και (ε) οι διαδικασίες σχεδιασμού, ανάπτυξης, και αλλαγών των προγραμμάτων σπουδών. Στον ελληνικό χώρο οι ερευνητές ασχολήθηκαν με θέματα που εμπίπτουν σε αυτές τις κατηγορίες.

Προκλήσεις και νέες κατευθύνσεις στην έρευνα

Οι προκλήσεις στην έρευνα στα προγράμματα σπουδών είναι θεωρητικές, μεθοδολογικές, αλλά και πρακτικές. Θεωρητικά δεν έχουν αναπτυχθεί επαρκώς θεωρητικά πλαίσια που να εξετάζουν τα προγράμματα σπουδών. Μεθοδολογικά οι προσεγγίσεις στον τομέα της διδακτικής των μαθηματικών δεν παρέχουν τις απαραίτητες αποδείξεις σχετικά με την αποτελεσματικότητα των προγραμμάτων σπουδών σε μεγάλους πληθυσμούς. Οπότε δύσκολα επηρεάζουν αυτούς που αποφασίζουν την εκπαιδευτική πολιτική. Πρακτικά οι προκλήσεις άπτονται της μακροχρόνιας φύσης και μεγάλου μεγέθους έρευνες που συχνά πρέπει να διεξαχθούν, για να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα. Πρόκληση αποτελεί και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων αυτών των ερευνών, γιατί εξαρτάται από τον θεωρητικό φακό και τη μεθοδολογία που χρησιμοποιούνται.

Δύο από τις κατευθύνσεις που φαίνεται να παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι: (α) η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τα ψηφιακά προγράμματα σπουδών και ποια είναι η αποτελεσματικότητά τους (Leung, et al. 2023), (β) η εξέταση της σχέσης μεταξύ των προγραμμάτων σπουδών και της κλιματική αλλαγή, της φτώχειας, και των κρίσεων σε θέματα υγείας (Roux et al., 2022).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέχρι σήμερα δεν φαίνεται τα προγράμματα σπουδών να βασίζονται σε ισχυρά εμπειρικά δεδομένα ή να οικοδομήθηκαν με βάση τα αποτελέσματα ερευνών (Vithal & Shimizu, 2022). Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τους Sykes et al. (2009), η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται να επηρεάζεται περισσότερο από τις γενικότερες εκπαιδευτικές πολιτικές, τους κανόνες και κανονισμούς που καθορίζει η πολιτεία και σε μικρότερο βαθμό από τα αποτελέσματα των ερευνών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Huntley, M. A. (2009). Brief report: Measuring curriculum implementation. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(4), 355–362. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.4.0355

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Bokhove, C., Nagari-Haddif, G., & Yerushalmy, M. (2023). Digital curriculum resources in digital mathematics curriculum: Design features and implementation. In: Pepin, B., Gueudet, G., Choppin, J. (Eds), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_58-1

le Roux, K., Brown, J., Coles, A., Helliwell, T., & Ng O. L. (2022) Editorial for a special issue on innovating the mathematics curriculum in precarious times. *Research in Mathematics Education, 24*(2), 117–127. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2090422

Niss, M. (2016). Mathematical standards and curricula under the influence of digital affordances: Different notions, meanings and roles in different parts of the world. In M. Bates & Z. Usiskin (Eds.), *Digital curricula in school mathematics* (pp. 239–250). Information Age Publishing.

Shimizu, Y., & Vithal, R. (2023). Introduction mathematics curriculum reforms around the world, new ICMI study series. In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds), *Introduction Mathematics Curriculum Reforms Around the World* (pp. 3–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_1

Sykes, G., Schneider, B., & Ford, T. (2009). Introduction. In G. Sykes, B. Schneider, D. N. Plank, & T. G. Ford (Eds.), *Handbook of Education Policy Research* (pp. 1–14). Routledge and AERA.

Usiskin, Z. (1998–1999, Winter). Which curriculum is best? *UCSMP Newsletter*, 24, 3–10. Retrieved from https://d75gtjwn62jkj.cloudfront.net/24.pdf

Vithal, R., & Shimizu, Y. (2023) Key messages and lessons from mathematics curriculum reforms around the world. In Y. Shimizu & R Vithal (Eds), *Introduction Mathematics Curriculum Reforms Around the World* (pp. 551–564). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_1

2.2 Τι (δεν) αλλάζει στην έρευνα που εστιάζει στη μάθηση των Μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες;

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου
kchristou@auth.gr

Στα τέλη της δεκαετίας του 80’, μελετητές της μαθηματικής εκπαίδευσης παρατήρησαν πως το πλαίσιο στο οποίο ενεργοποιείται η μαθηματική γνώση (π.χ., εντός ή εκτός τάξης) επηρεάζει σημαντικά τη μάθηση των μαθηματικών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να θιχθούν κάποιες βασικές παραδοχές του κυρίαρχου τις προηγούμενες δεκαετίες ερευνητικού προγράμματος της γνωστικής ψυχολογίας και του κονστρουκτιβισμού όπως τον έχει προσεγγίσει ο Piaget με το έργο του για την ανάπτυξη του παιδιού που έβλεπε το υποκείμενο της μάθησης εξατομικευμένο και το περιβάλλον στο οποίο συμβαίνει η μάθησή του μάλλον ως ένα εργαστηριακό περιβάλλον που προσφέρει στο υποκείμενο ερεθίσματα να επεξεργαστεί, προβλήματα να επιλύσει, έργα να ολοκληρώσει, κτλ. Οι παρατηρήσεις αυτές ερμηνεύτηκαν στη βάση της θεωρητικής προσέγγισης του Vygotsky, ωθώντας τη δεκαετία του '90 μέρος των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης να κάνουν μια *κοινωνική στροφή* (Lerman, 2000), αναδεικνύοντας μέσα από την έρευνά τους παράγοντες κοινωνικο-πολιτισμικής φύσης που επιδρούν στη μάθηση των μαθηματικών και προσεγγίζοντας το περιβάλλον του μαθητή ως ένα κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον, πλούσιο σε πολιτισμικά εργαλεία που οι μαθητές, ως νέα μέλη της κοινότητας, καλούνται να οικειοποιηθούν.

Ως αποτέλεσμα, το κυρίαρχο παράδειγμα του κονστρουκτιβισμού, που δέχονταν ότι η γνώση δεν λαμβάνεται παθητικά αλλά κατασκευάζεται ενεργά από το υποκείμενο της μάθησης στη βάση της προϋπάρχουσας γνώσης του, δεν άλλαξε αλλά εμπλουτίστηκε, λαμβάνοντας υπόψιν όλο και περισσότερους παράγοντες που επιδρούν στη μάθηση των μαθηματικών (π.χ. πώς η κουλτούρα των μαθητών, οι σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα σε μαθητές ή μαθητές με εκπαιδευτικούς, κτλ., επιδρούν στη μάθηση). Τις τελευταίες δεκαετίες, αυτός ο εμπλουτισμός ενισχύεται, κάνοντας όλο και πιο ορατή την πολυπλοκότητα του φαινομένου της μάθησης των μαθηματικών ως ένα κοινωνικό, πολιτικό, γνωστικό και συναισθηματικό φαινόμενο. Στη σύντομη παρέμβασή μου θα παρουσιάσω μόνο κάποιες από τις νέες τάσεις που γίνονται ορατές στο *πώς* (με ποιες μεθοδολογίες) και στο *πού* (σε ποιους μαθητές) εστιάζεται τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας που διερευνά το ζήτημα της μάθησης των μαθηματικών.

Όσον αφορά στο *πώς*, επιλέγω να αναφερθώ στην αύξηση της χρήσης νευροαπεικονιστικών μεθόδων στη μελέτης της λειτουργίας του εγκεφάλου κατά την ενασχόληση με μαθηματικά έργα. Ενώ τέτοιες μελέτες γίνονται ήδη από τα μέσα του 20ου αιώνα, οι μεγάλες εξελίξεις στις τεχνικές νευροαπεικόνισης που σημειώθηκαν τις δύο τελευταίες δεκαετίες (βλ. fMRI, EEG, PET), έδωσαν στους ερευνητές νέα ερευνητικά εργαλεία για την κατανόηση των διαδικασιών της μαθηματικής νόησης και

μάθησης (Dehaene, 2011). Έστω κι αν στην πλειοψηφία τους αυτές οι μελέτες δεν γίνονται από αμιγώς ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, επηρεάζουν πια σημαντικά την έρευνα σε αυτό το πεδίο, παρέχοντας χρήσιμες πληροφορίες για τις υποκείμενες γνωστικές διεργασίες που εμπλέκονται στη μάθηση των μαθηματικών. Έτσι, μια σύγχρονη θεωρία για τη μάθηση των μαθηματικών, αλλά και οι σύγχρονες προτεινόμενες διδακτικές μέθοδοι δεν θα μπορούσαν να αγνοήσουν τα ευρήματα που έρχονται από αυτή τη βιβλιογραφία.

Όσον αφορά στο *πού* εστιάζουν οι σύγχρονες τάσεις στη μελέτη της μάθησης των μαθηματικών, επιλέγω να αναδείξω το αυξημένο ενδιαφέρον της κοινότητας από το 2000 και μετά στην πρώιμη ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης (Clements & Sarama, 2021). Προς επίρρωση αυτού μπορούμε να δούμε τις νέες ομάδες εργασίας σε συνέδρια της κοινότητας (π.χ., CERME), τη συχνότητα δημοσιευμένων εργασιών με τέτοια εστίαση, την συμπερίληψη κριτηρίων για την πρώιμη μαθηματική γνώση στα νέα πρότυπα του NCTM το 2000, κ.α. Ένας σημαντικός λόγος για αυτή την τάση είναι ότι η έρευνα έχει δείξει ότι η μαθηματική γνώση των παιδιών όταν ξεκινούν το σχολείο, όχι μόνο είναι πολύ σημαντική για τη σχέση με τα μαθηματικά και την επίδοση σε αυτά μακροπρόθεσμα, αλλά προβλέπει και την επίδοση σε άλλα βασικά πεδία της σχολικής γνώσης (Clements & Sarama, 2021).

Επίσης, τα τελευταία χρόνια ο φακός της έρευνας που εστιάζει στην ανάδειξη της ποικιλομορφίας των υποκειμένων που συμμετέχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία και των πλαισίων στα οποία αυτή συμβαίνει, γίνεται όλο και πιο ευαίσθητος κάνοντας ορατό το εύρος της ετερότητας στη μαθητική κοινότητα. Έτσι, αναδεικνύονται οι τρόποι με τους οποίους εμπλέκονται με τη μάθηση των μαθηματικών μαθητές και μαθήτριες με διαφορετικές ταυτότητες από τις κυρίαρχες (στη βάση της αναπηρίας, της ταυτότητας φύλου, της γλώσσας, της κουλτούρας, της εθνικότητας, της κοινωνικής τάξης, κοκ). Οι έρευνες αυτές αναδεικνύουν τα διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία που διαθέτουν τέτοιες υποκειμενικότητες και τους τρόπους που αυτά κατασκευάζονται μέσα από τη συμμετοχή τους σε πολιτισμικές πρακτικές των κοινοτήτων τους, καθώς και τις κοινωνικές αναπαραστάσεις που διαθέτουν, όπως οι εικόνες και οι αντιλήψεις τους για τη μαθηματική γνώση και τη μαθησιακή διαδικασία (Abreu, et. al., 2014). Τη τελευταία, μάλιστα, δεκαετία με ενδιαφέρον παρακολουθούμε μια νέα στροφή, κοινονικο-πολιτική αυτή τη φορά, που θέτει στο επίκεντρο ζητήματα εξουσίας, ισότητας και κοινωνικής δικαιοσύνης στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, με στόχο την ανάδειξη αλλά και την αντιμετώπιση των ανισοτήτων, της περιθωριοποίησης και του αποκλεισμού από τη μαθηματική εκπαίδευση συγκεκριμένων κομματιών της μαθητικής κοινότητας (Gutiérrez, 2013). Τα παραπάνω εμπλουτίζουν

την κατανόησή μας για το πώς προσεγγίζεται η μάθηση των Μαθηματικών, προσφέροντάς νέα εργαλεία για παιδαγωγική εφαρμογή στη σχολική τάξη αλλά και έξω από αυτή.

Κλείνοντας, θα υποστηρίξω πως ίσως η πιο θεμελιώδης αλλαγή στον τρόπο που προσεγγίζουμε τη μάθηση των μαθηματικών έρχεται από την έρευνα που εστιάζει στο ρόλο των συναισθηματικών παραγόντων στη μάθηση (Hannula, 2012). Κάτω από τον όρο αυτό καλύπτεται ένα ευρύ πεδίο παραγόντων, όπως οι στάσεις, οι πεποιθήσεις, τα κίνητρα και τα συναισθήματα που σχετίζονται με τα μαθηματικά και την μάθησή τους. Απαντώντας στην πρόκληση για δια βίου μάθηση των μαθηματικών η έρευνα αυτή αναδεικνύει την αναγκαιότητα ανάπτυξης δεξιοτήτων αυτό-ρύθμισης (Robson, et al. 2020), καλώντας μας να μετατοπίσουμε το ενδιαφέρον μας από την εστίαση στην μελέτη του τρόπου που οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά στον τρόπο που οι μαθητές *μαθαίνουν να μαθαίνουν μαθηματικά.*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D. H., & Sarama, J. (2020). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. Routledge.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press: USA.

De Abreu, G., Gorgorió, N., & Boistrup, L. B. (2018). Diversity in mathematics education. Developing research in mathematics education, 211-222.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. Journal for research in mathematics education, 44(1), 37-68.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. Research in Mathematics Education, 14(2), 137-161.

Lerman S (2000) The social turn in mathematics education research. In: Boaler J (ed) Multiple perspectives on mathematics teaching and learning. Ablex, Westport, pp 19–44

Robson, D. A., Allen, M. S., & Howard, S. J. (2020). Self-regulation in childhood as a predictor of future outcomes: A meta-analytic review. Psychological bulletin, 146(4), 324.

2.3 Η εξέλιξη της έρευνας στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών

Δέσποινα Πόταρη

dpotari@math.uoa.gr

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών τα τελευταία 30 χρόνια εστιάζει στον εκπαιδευτικό και στην εκπαίδευση του. Στην παρέμβαση μου θα παρουσιάσω την εξέλιξη της έρευνας στην περιοχή αυτή ως προς τη θεματική της, τη θεωρητική και μεθοδολογική της οπτική. Τα παραπάνω ζητήματα τα εντοπίζω μέσα από ανασκόπηση άρθρων που έχουν δημοσιευτεί στο περιοδικό Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE) στο οποίο ήμουν μέλος της ομάδας έκδοσης τα τελευταία 11 χρόνια. Τέλος εμπόδια καθώς και συμπεριληπτικές δράσεις στην έρευνα θα συζητηθούν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη της σχολικής τάξης των μαθηματικών με εστίαση στον εκπαιδευτικό και στις διδακτικές δράσεις του είναι ένα κεντρικό ζήτημα τις τελευταίες δεκαετίες. Οι δράσεις συνδέονται κυρίως με την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του συλλογισμού των μαθητών μέσα από την εμπλοκή τους σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα (Henningsen & Stein, 1997). Κοινωνικοπολιτισμικές θεωρήσεις επιτρέπουν την εστίαση στην αλληλεπίδραση και επικοινωνία στην τάξη αναδεικνύοντας τη σημασία της κουλτούρας που αναπτύσσεται στην τάξη καθώς και τον ρόλο θεσμικών και κοινωνικών παραγόντων στη διαμόρφωση της διδασκαλίας. (Lerman, 2013). Έννοιες όπως «συμπεριληπτική διδασκαλία», «φιλόδοξη διδασκαλία» περιγράφουν τη διδασκαλία που δημιουργεί μαθηματικές προκλήσεις για όλους τους μαθητές της τάξης (Civil et al., 2019). Οι έρευνες αυτές μας οδηγούν στη συνειδητοποίηση της πολυπλοκότητας της διδασκαλίας των μαθηματικών καθώς και στην αναγκαιότητα στήριξης του εκπαιδευτικού ώστε να μπορεί να ανταποκριθεί στις συνεχώς αυξανόμενες απαιτήσεις. Το 1998 ιδρύεται το διεθνές περιοδικό Journal of Mathematics Teacher Education. Τα δημοσιευμένα άρθρα στο περιοδικό αυτό καλύπτουν ένα εύρος θεματικών και υιοθετούν θεωρητικές και μεθοδολογικές οπτικές που βάζουν την διδακτική πρακτική και την πρακτική της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών στο επίκεντρο. Μέσα από ταξινόμηση των άρθρων που έχουν δημοσιευτεί από το 2021 έως σήμερα θα παρουσιάσω αρχικά τα επικρατέστερα ερευνητικά θέματα και στη συνέχεια θα αναφερθώ σε ανοικτά ερωτήματα που φαίνεται να απασχολούν τους ερευνητές.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα επικρατέστερα θέματα έρευνας και η συχνότητα τους από την ανάλυση 100 άρθρων.

Θέματα έρευνας	**Συχνότητα**
Γνώση του εκπαιδευτικού	17
Διδακτικές πρακτικές στην τάξη	13

Παρατήρηση της διδασκαλίας	12
Πεποιθήσεις/ Ταυτότητα του εκπαιδευτικού	9
Συνεργασία εκπαιδευτικών	9
Υποστηρικτές εκπαιδευτικών	5
Μαθηματική εκπαίδευση μελλοντικών εκπαιδευτικών	5

Πίνακας 1: Επικρατέστερα Θέματα έρευνας την περίοδο 2021-σήμερα στο περιοδικό JMTE

Η γνώση του εκπαιδευτικού παραμένει ένα κεντρικό θέμα μελέτης στο πεδίο και κυρίως αφορά μελλοντικούς εκπαιδευτικούς ενώ αναφέρεται σε μαθηματικές πρακτικές και έννοιες. Θεωρητικές έννοιες όπως η γνώση του περιεχομένου και η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου χρησιμοποιούνται και μεθοδολογικές προσεγγίσεις ποιοτικής αλλά και ποσοτικής έρευνας υιοθετούνται. Η ανάλυση των διδακτικών πρακτικών αφορά τόσο στο σχεδιασμό της διδασκαλίας καθώς και στην σχολική τάξη. Βασικό θέμα μελέτης είναι οι δράσεις του εκπαιδευτικού που στηρίζονται στη σκέψη των μαθητών, οι διδακτικές αποφάσεις, η ανάλυση του λόγου και οι δομές εξουσίας. Η μεθοδολογία που υιοθετείται στην θεματική αυτή είναι κυρίως ποιοτική ενώ οι θεωρητικές οπτικές εμπεριέχουν γνωστικές και κοινωνικοπολιτισμικές θεωρήσεις. Η παρατήρηση της διδασκαλίας αφορά κυρίως στους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς και συνδέεται με πρακτικές που υποστηρίζονται κατά την εκπαίδευση τους. Παρατηρείται επίσης μετάβαση από τη σκέψη των μαθητών σε ζητήματα ισότητας στην τάξη. Οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις είναι κυρίως ποιοτικές. Οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών αφορούν μαθηματικές έννοιες καθώς και παιδαγωγικές προσεγγίσεις ενώ το θέμα της διδακτικής και μαθηματικής ταυτότητας κυρίως των μελλοντικών εκπαιδευτικών αρχίζει να ερευνάται. Στην θεματική αυτή υπάρχουν γνωστικές στην περίπτωση των πεποιθήσεων και κοινωνικές και κοινωνικοπολιτισμικές θεωρήσεις στην περίπτωση της ταυτότητας ενώ οι μεθοδολογίες που υιοθετούνται είναι ποσοτικές και ποιοτικές. Η συνεργασία εκπαιδευτικών και η δημιουργία κοινοτήτων δια ζώσης αλλά και εξ αποστάσεως αποτελεί μια περιοχή ερευνητικού ενδιαφέροντος όπου κοινωνικοπολιτισμικές θεωρήσεις και ποιοτικές μεθοδολογίες επικρατούν. Η μελέτη μαθήματος είναι μια μορφή συνεργασίας που επικρατεί ενώ αυξανόμενο ενδιαφέρον υπάρχει στο ρόλο του εκπαιδευτή των εκπαιδευτικών, στον μέντορα και στον εκπαιδευτικό της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που εξειδικεύεται στα μαθηματικά και στη διδασκαλία τους. Μια άλλη ερευνητική θεματική είναι η μαθηματική εκπαίδευση που χρειάζεται ο μελλοντικός εκπαιδευτικός της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ερωτήματα προς διερεύνηση στην περιοχή αυτή είναι αν τα μαθήματα μαθηματικών είναι καλύτερο να διδάσκονται από ερευνητές μαθηματικούς ή ερευνητές της

διδακτικής των μαθηματικών, αν η μαθηματική εκπαίδευση επηρεάζει τη διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη ή αν η οργάνωση μαθημάτων σε προχωρημένα μαθηματικά θέματα μέσα σε κοινότητες διερεύνησης βοηθά στην ουσιαστική εμπλοκή των μελλοντικών εκπαιδευτικών με μαθηματικές και διδακτικές πρακτικές. Τέλος θεματικές που εμφανίζονται αλλά όχι τόσο συχνά αφορούν στη χρήση ψηφιακών εργαλείων, στη μεγάλη κλίμακας εκπαίδευση εκπαιδευτικών, στη σύνδεση προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών με την ποιότητα της διδασκαλίας στην σχολική τάξη, στην εκπαίδευση STEM, και στη συμπεριληπτική εκπαίδευση εκπαιδευτικών.

ΕΜΠΟΔΙΑ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Εμπόδια και αντιθέσεις που αντιμετωπίζει το ερευνητικό πεδίο έχουν συζητηθεί. Ο Llinares (2021) αναφέρει δύο βασικές αντιθέσεις που υπάρχουν στην έρευνα. Η πρώτη αφορά στη διάσταση ανάμεσα σε παιδαγωγικές και μαθηματικές εστιάσεις και πώς αυτές συνδυάζονται στη διαμόρφωση ερευνητικών ερωτημάτων. Η δεύτερη αφορά στο κατά πόσο η χρήση αναλυτικών πλαισίων που έχουν αναπτυχθεί σε άλλες έρευνες παράγουν νέα γνώση στο πεδίο. Η αποφυγή στην εστίαση στις ελλείψεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί ως προς τη γνώση και τις διδακτικές πρακτικές καθώς και η αναγνώριση σχέσεων ανάμεσα στις ευρύτερες κοινωνικές δομές και στο τοπικό πλαίσιο που δρα ο εκπαιδευτικός είναι θέματα που απασχολούν την έρευνα στο πεδίο (Superfine, 2019; 2021). Η σύνδεση επίσης ανάμεσα στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών και στη διδασκαλία στην τάξη είναι ένα βασικό ζήτημα στην έρευνα αλλά η δυναμική οπτική αυτής της σχέσης από ότι η εστίαση στο αποτέλεσμα είναι ένα ζητούμενο (Potari, 2020; Skott, 2020). Τέλος ένα σημαντικό θέμα είναι αν η έρευνα που δημοσιεύεται αντιπροσωπεύει τη διεθνή έρευνα ή την έρευνα που αναπτύσσεται σε συγκεκριμένες χώρες. Στην προσπάθεια πιο ισότιμης εκπροσώπησης των χωρών ορίστηκε μια εθελοντική επιτροπή στο JMTE από μέλη της συντακτικής επιτροπής του που αναλαμβάνει δράσεις ενημέρωσης και υποστήριξης των ερευνητών από χώρες που δεν εκπροσωπούνται ιδιαίτερα στη δημοσιευμένη έρευνα. Στο σύντομο άρθρο που είναι αποτέλεσμα της δουλειάς αυτής της επιτροπής παρουσιάζεται η πολύ χαμηλή εκπροσώπησή χωρών κυρίως από Αφρική, Νότια Αμερική και Ασία καθώς και οι υποστηρικτικές δράσεις (Scheiner et al., 2024, υπό έκδοση).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Civil, M., Hunter, R., & Crespo, S. (2019). Mathematics teachers committed to equity: A review of teaching practices. *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1*, 243-273.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for research in mathematics education*, *28*(5), 524-549.

Lerman, S. (Ed.). (2013). *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (Vol. 14). Springer Science & Business Media.

Llinares, S. (2021). Tensions and strengths in the research on mathematics teacher education and mathematics teacher practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 529-531.

Potari, D. (2020). Means for linking mathematics teaching to mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(3), 233-235.

Scheiner, T, Brodie, K., Planas, N., Darragh, L., Halai, A., Potari, D., Santos, M., Walkoe, J. (2024). Addressing Equity, Diversity and Inclusion in Academic Publishing: Key Initiatives from JMTE. Editorial Note to be published in the *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Skott, J. (2019). Understanding mathematics teaching and learning "in their full complexity". *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(5), 427-431.

Superfine, A. C. (2019). Balancing tensions in supporting teacher professional learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(6), 541-543.

Superfine, A. C. (2021). An asset-based perspective on prospective teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(4), 331-333.

2.4 Πεδία μετασχηματισμού της Διδακτικής των Μαθηματικών μέσω της αξιοποίησης ψηφιακών πόρων

Γιώργος Ψυχάρης

gpsych@math.uoa.gr

Την τελευταία δεκαετία η συζήτηση σχετικά με τον ρόλο των ψηφιακών τεχνολογιών στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών οργανώνεται με άξονα την έννοια των ψηφιακών πόρων (ΨΠ) (digital resources). Τύποι ΨΠ θεωρούνται ψηφιακοί πόροι του προγράμματος σπουδών που σχεδιάζονται και/ή αξιοποιούνται για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (όπως e-textbooks, ψηφιακά περιβάλλοντα όπως δυναμικής γεωμετρίας), ψηφιακοί κοινωνικοί πόροι (όπως διαδικτυακές συζητήσεις), ψηφιακοί γνωστικοί πόροι (έννοιες και τεχνικές από το διαδίκτυο) και γενικοί ψηφιακοί πόροι (π.χ. Wikipedia, YouTube) (Pepin et al., 2024b). Βρισκόμαστε σε μια χρονική στιγμή όπου η πληθώρα

των διαθέσιμων ΨΠ και η ευκολία πρόσβασης συνυπάρχει με ερωτήματα και διλήμματα σχετικά με την ποιότητα και τη χρήση τους στο πλαίσιο της διδασκαλίας. Είναι λοιπόν σημαντικό να κατηγοριοποιηθούν και να συζητηθούν τα πεδία μετασχηματισμού των εκπαιδευτικών περιβαλλόντων που επέφερε η αξιοποίηση των ΨΠ στο δίπολο έρευνα-πρακτική. Ανατρέχοντας στη πρόσφατη έκδοση του διεθνούς εγχειριδίου για τους ΨΠ στη μαθηματική εκπαίδευση (Pepin et al., 2024a), η παρούσα παρέμβαση εστιάζεται στην παρουσίαση κύριων πεδίων μετασχηματισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης σε επίπεδο (α) θεωρίας, (β) μαθηματικής δραστηριότητας, και (γ) σχεδιασμού του εκπαιδευτικού.

Μετασχηματισμοί σε επίπεδο θεωρίας

Ένας πρώτος μετασχηματισμός αφορά τη σύνθεση θεωριών (networking) για τη μελέτη φαινομένων στο πεδίο της διδακτικής μαθηματικών. Παρότι η συγκεκριμένη πρακτική είναι συνήθης στη διδακτική μαθηματικών, αυτό που άλλαξε από τις αρχές του 21ου αιώνα και μετά είναι ότι τέθηκε ως αντικείμενο της έρευνας η σύνθεση των θεωριών καθαυτή. Η έρευνα με ΨΠ συντέλεσε στην εμπέδωση αυτής της αλλαγής. Για παράδειγμα, αναφέρουμε το πρόγραμμα ReMath στο πλαίσιο του οποίου μέσω της συνεργασίας Ευρωπαϊκών ερευνητικών ομάδων μελετήθηκε ο ρόλος και η σύνθεση διαφορετικών θεωρητικών πλαισίων στο επίπεδο του σχεδιασμού ψηφιακών εργαλείων για τη διδακτική των μαθηματικών και της διδακτικής αξιοποίησής τους (Artigue et al., 2009). Ένας δεύτερος μετασχηματισμός αφορά τη σταδιακή μετάβαση της ερευνητικής εστίασης από τους/τις μαθητές/τριες στους/στις εκπαιδευτικούς και τις πρακτικές τους με έμφαση στη μελέτη της χρήσης των ΨΠ. Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός σε επίπεδο θεωρίας εκφράστηκε μέσα από επεκτάσεις της εργαλειακής θεωρίας (instrumental approach) (Vérillon & Rabardel, 1995) που εστιάζεται στη μετάβαση από το τεχνούργημα στο εργαλείο μέσω της εργαλειακής δημιουργίας (instrumental genesis). Οι επεκτάσεις αυτές περιλαμβάνουν θεωρητικά δομήματα όπως (α) η εργαλειακή ενορχήστρωση (instrumental orchestration, Trouche 2004), που εστιάζει στις διδακτικές προσαρμογές που είναι αναγκαίες για τη υποστήριξη της εργαλειακής δημιουργίας στην τάξη, και (β) η διπλή εργαλειακή δημιουργία (double instrumental genesis, Haspekian 2011), που διακρίνει τη δημιουργία εργαλείου σε προσωπικό επίπεδο (ατομική χρήση) και τη δημιουργία εργαλείου σε επαγγελματικό επίπεδο (διδακτική χρήση). Η κύρια επέκταση, ωστόσο, αφορά την ανάπτυξη της θεωρίας διδακτικής τεκμηρίωσης (documentational apporach to didactics, Gueudet & Trouche 2009) που αναδεικνύει τον κεντρικό ρόλο των αλληλεπιδράσεων του εκπαιδευτικού με πόρους (resources), ιδιαίτερα ΨΠ, στη μελέτη του σχεδιασμού του εντός και εκτός τάξης, αλλά και της επαγγελματικής του εξέλιξης (Trouche et al., 2019).

Μετασχηματισμοί σε επίπεδο μαθηματικής δραστηριότητας

Μια δεύτερη κατηγορία μετασχηματισμών αφορά το πώς η εισαγωγή των ψηφιακών πόρων διαμεσολαβεί αλλαγές στο μαθηματικό περιεχόμενο και τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας, οδηγώντας σε νέες μορφές περιεχομένου και νέους τρόπους αλληλεπίδρασης με αυτό. Μια ομάδα ερευνών αξιοποίησε την έννοια των ψηφιακών πόρων ως αντικειμένων για σκέψη (objects to think with) (Papert, 1980) προκειμένου να περιγράψει την αξιοποίηση της υπολογιστικής σκέψης στη διδακτική μαθηματικών εστιάζοντας στην αξιοποίηση γλωσσών προγραμματισμού (π.χ. Logo, Scratch), μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων ΨΠ που εμπλέκουν τους μαθητές σε δημιουργική εργασία (Noss & Hoyles, 1996; Broley et al. 2023). Για παράδειγμα, στις έρευνες αυτές οι μαθητές/τριες νοηματοδοτούν με νέους τρόπους τον μαθηματικό συμβολισμό (π.χ. την έννοια της μεταβλητής) καθώς δημιουργούν γεωμετρικές κατασκευές με κώδικα και εμπλέκονται σε μαθηματική δραστηριότητα που βασίζεται σε υπολογιστικές και όχι αυστηρά συμβολικές διαδικασίες. Στην ίδια κατηγορία μετασχηματισμών ανήκουν και έρευνες σχετικά με ΨΠ που βασίζονται σε δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα. Στην περιοχή της γεωμετρίας, η αξιοποίηση ψηφιακών πόρων δυναμικής γεωμετρίας επιτρέπει την εστίαση των μαθητών/τριών στις αναλλοίωτες ιδιότητες (invariant properties) μέσω συρσίματος των γεωμετρικών αντικειμένων, παρατήρησης του τι μεταβάλλεται και τι παραμένει σταθερό και της ανάπτυξης εικασιών (Leung et al., 2023). Με αυτό τον τρόπο, η ανάπτυξη εικασιών ήρθε στο προσκήνιο ως συστατικό στοιχείο της απόδειξης (Mariotti, 2012). Στην περιοχή των συναρτήσεων, η αξιοποίηση ψηφιακών πόρων με διασυνδεόμενες αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης (Casyopée, DynaGraphs) ευνόησε τη σταδιακή μετακίνηση της εστίασης της έρευνας από τη συνάρτηση ως διαδικασία-αντικείμενο στη συνάρτηση ως συμμεταβολή (Lagrange 2014, Baccaglink-Frank et al. 2023).

Μετασχηματισμοί σε επίπεδο σχεδιασμού του εκπαιδευτικού

Μια τρίτη κατηγορία μετασχηματισμών σχετίζεται με την οπτική των εκπαιδευτικών ως σχεδιαστών της διδασκαλίας (teachers as designers) η οποία διευρύνθηκε τα τελευταία χρόνια στη μαθηματική εκπαίδευση ιδιαίτερα αναφορικά με τον σχεδιασμό και τη χρήση ΨΠ (π.χ. Pepin et al., 2017). Μια πρόσφατη επισκόπηση της έρευνας στην περιοχή αυτή (Potari & Psycharis, 2023) αναδεικνύει μια σειρά από κρίσιμους μετασχηματισμούς στα παρακάτω πεδία.

(α) *Σχεδιασμός ΨΠ για την ενίσχυση και την αξιολόγηση της μάθησης των μαθηματικών. Το κύριο ερώτημα σχετικά με τη μάθηση είναι με ποιους τρόπους οι ΨΠ μπορούν να προσφέρουν πλούσιες μαθηματικές εμπειρίες*

στους μαθητές. Η τρέχουσα έρευνα προσφέρει αποτελέσματα, όπως προδιαγραφές για νέους μηχανισμούς ανατροφοδότησης, κοινόχρηστους μαθησιακούς χώρους, σχεδιασμό έργων και διασυνδεσιμότητα (Leung et al., 2023), νέες τεχνικές τεχνητής νοημοσύνης (Lagrange et al., 2023) και πλατφόρμες αξιολόγησης της υψηλού επιπέδου μαθηματικής σκέψης (Olsher et al., 2023).

(β) Σχεδιασμός ΨΠ για την υποστήριξη του διδακτικού σχεδιασμού των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας στην τάξη. Το κύριο ερώτημα αφορά το πώς ο σχεδιασμός των ΨΠ θα μπορούσε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν το σκεπτικό σχεδιασμού τους και να τους αξιολογήσουν σε σχέση με τις εκάστοτε διδακτικές τους ανάγκες. Μερικές αρχές που αναδεικνύει η τρέχουσα έρευνα είναι: η εγγύτητα του ΨΠ με την πραγματικότητα της σχολικής τάξης και η αξιολόγηση της βιωσιμότητάς μέσα από την αξιοποίησή του σε πραγματικές συνθήκες (Višňovská et al., 2023), και η παροχή δομημένης υποστήριξης προς τους εκπαιδευτικούς προκειμένου να αναγνωρίσουν την εκπαιδευτική αξία ενός ΨΠ (Mariotti et al., 2023).

(γ) Σχεδιασμός ΨΠ για την υποστήριξη της συνεργασίας. Ο σχεδιασμός ΨΠ σε συνεργατικά πλαίσια αποτελεί μια ακόμα περιοχή με έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον. Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα αφορούν τη διαδικασία ή το αποτέλεσμα του συλλογικού σχεδιασμού ΨΠ σε διάφορες κοινότητες. Όσον αφορά τη διαδικασία, οι ΨΠ διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη συνεργασία, ενώ τα σύνορα που αναδύονται σε αυτό το πλαίσιο και ο χειρισμός τους έχουν αντίκτυπο στα αποτελέσματα της συνεργασίας (Essonnier et al., 2023). Σε σχέση με τα αποτελέσματα του συλλογικού σχεδιασμού, η τρέχουσα έρευνα δείχνει ότι υπάρχουν μαθησιακά οφέλη για τους συμμετέχοντες όσον αφορά τον σχεδιασμό και τις διδακτικές πρακτικές (Taranto et al., 2023).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue M. et al. (2009). *Integrated theoretical framework*. Version C. Deliverable 18. //cti.remath.gr.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., & Lisarelli, G. (2023). Exploiting the Potential of Dynamic Asymmetry in Dragging to Foster Students' Understanding of Functions and Their Cartesian Graphs. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_14-1

Broley, L., Buteau, C., Modeste, S., Rafalska, M., & Stephens, M. (2023). Computational Thinking and Mathematics. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics*

Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_12-1

Essonnier, N., Barquero, B., Papadopoulos, I., Trgalova, J., & Kynigos, C. (2023). Communities of Interest as a Context for Creativity in the Process of Designing Digital Media for Mathematical Learning. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_40-1

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199–218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8

Haspekian, M. (2011). The co-construction of a mathematical and a didactical instrument. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 2298–2307). Poland: University of Rzeszów.

Lagrange, J.-B. (2014). New representational infrastructures: broadening the focus on functions. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *33*(3), 179-192. https://doi.org/10.1093/teamat/hru018

Lagrange, J.-B., Richard, P. R., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_37-1

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Bokhove, C., Nagari-Haddif, G., & Yerushalmy, M. (2023). Digital Curriculum Resources in Digital Mathematics Curriculum: Design Features and Implementation. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_58-1

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163–185. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

Mariotti, M. A., Trgalová, J., Maracci, M., & Højsted, I. H. (2023). Resources Promoting Digital Tools Integration: Design Principles. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_38-1

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures with computers*. New York: Kluwer Academic Press. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8

Olsher, S., Chazan, D., Drijvers, P., Sangwin, C., & Yerushalmy, M. (2023). Digital Assessment and the "Machine". In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_44-1

Papert, S. (1980). *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas*. N. Y.: Basic Books.

Pepin, B., Gueudet, G., & Choppin, J. (Eds.) (2024a). *Handbook of digital resources in mathematics education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6

Pepin, B., Gueudet, G., & Choppin, J. (2024b). Transformation of Mathematics Education Environments by Digital Resources. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_1-1

Potari, D., & Psycharis, G. (2023). Introduction to How Digital Resources Alter Design Landscape. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_35-1

Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM - Mathematics Education*, 49(5), 799–812. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0870-8

Taranto, E., Aldon, G., Robutti, O., & Cusi, A. (2023). Design of Resources for and by Mathematics Teachers: The Process of Internalization in MOOCs. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_41-1

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281–307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Trouche, L., Gueudet, G. & Pepin, B. (Eds.) (2019). *The 'resource' approach to mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20393-1

Vérillon P, & Rabardel P (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77–101. https://doi.org/10.1007/BF03172796

Višňovská, J., Cortina, J. L., & Eckert, A. (2023). Resource Design for Re-Sourcing Teaching. In: B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin, (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_39-1

3. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας τα παραπάνω παρατηρούμε ότι συνολικά, αλλά και κατά θεματική περιοχή, η έρευνα αλλάζει προσανατολισμό και μεθοδολογίες από τα επικεντρωμένα σε στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης και προγράμματα σπουδών, προς πιο κοινωνιοκεντρικά αλλά και θέματα που αφορούν το ρόλο του εκπαιδευτικού. Τα προγράμματα σπουδών είναι περισσότερο τεκμηριωμένα σε ευρήματα και εξελίσσονται διαρκώς, η μάθηση αναδεικνύει τις ταυτότητες μέσα σε κοινωνικά σύνολα, οι έρευνες στους εκπαιδευτικούς αναδεικνύουν τη σημασία του ρόλους τους αλλά και τις ελλείψεις σε γνώσεις και πρακτικές, ενώ οι τεχνολογικές πηγές εμπλουτίζουν τις μαθηματικές εμπειρίες, υποστηρίζουν το διδακτικό σχεδιασμό και ενθαρρύνουν τις συνεργασίες μέσα κι έξω από την τάξη. Από τα μέχρι σήμερα δεδομένα διαφαίνεται ότι η τεχνητή νοημοσύνη θα έχει στο μέλλον σημαντικές επιδράσεις τόσο σε ερευνητικό όσο και σε διδακτικό επίπεδο.

Η ΑΝΑΔΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΗ, ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑ

Φραγκίσκος Καλαβάσης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kalabas@aegean.gr

Η Διδακτική των Μαθηματικών συνιστά ένα πεδίο των ανθρωπιστικών επιστημών με προέλευση και προορισμό τα Μαθηματικά. Ανακατασκευάζει την κυρίαρχη εικόνα των Μαθηματικών, συνδέοντάς την λειτουργικά με τις νοητικές διεργασίες και τις κοινωνικοπολιτισμικές συνθήκες γένεσης και διάχυσης της μαθηματικής γνώσης. Η ακαδημαϊκή κατοχύρωση της Διδακτικής των Μαθηματικών, είχε και έχει ακόμη δυο ταυτόχρονες

προϋποθέσεις, που η μία διεισδύει μέσα στην άλλη. Τη διακριτή επιστημολογική υπόσταση του πεδίου και ταυτόχρονα την επιστημολογική ικανότητα σύνδεσης και συνεξέλιξης με τα πεδία των Μαθηματικών, των Επιστημών της Εκπαίδευσης και των εκπαιδευτικών εφαρμογών της Ψηφιακής Τεχνολογίας. Η ικανοποίηση των δυο προϋποθέσεων σημάδεψε ατομικές και συλλογικές προσπάθειες που συνέκλιναν στην ίδρυση της Ενεδιμ με τον θεσμικό λόγο της ΔτΜ στην Ελλάδα και την Κύπρο.

Το πεδίο της Διδακτικής Μαθηματικών (ΔτΜ) έρχεται τη δεκαετία του'70 να ανατρέψει ισχυρές παραδοχές σχετικά με τη μάθηση των Μαθηματικών και να κλονίσει ισχυρές βεβαιότητες σχετικά με τη διδασκαλία τους. Παραδοχές και βεβαιότητες που πηγάζουν σε αντιλήψεις περί ατομικών ικανοτήτων μάθησης -έμφυτων ή επίκτητων-, σε παιδαγωγικές θεωρίες περί γενικής διδακτικής, σε απόψεις για την αξία ή χρησιμότητα των Μαθηματικών. Από τον τρόπο που οι τρεις αυτές οπτικές συμπλέκονται στα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία, παγιώνεται μια συγκεκριμένη εικόνα των Μαθηματικών από την οποία απορρέουν εκπαιδευτικές βεβαιότητες και οικογενειακές παραδοχές και οδηγούν όχι μόνο σε ευρεία σχολική αποτυχία, αλλά και στην αποδοχή της ως φυσιολογικής.

Η ανάπτυξη επομένως της ΔτΜ είχε και έχει να αντιμετωπίσει και να διαχειριστεί μια ιδιόμορφη διαπλοκή πεποιθήσεων και πρακτικών που συγκροτούν το τοπίο μιας μαθηματικής εκπαίδευση που αυτό-επιβεβαιώνεται από την αποτυχία της. Η πορεία της ΔτΜ και των ερευνητών και ερευνητριών της σε αυτό το δύσβατο τοπίο, σημαδεύτηκε σε όλες της τις χώρες από έντονες αντιπαραθέσεις και δύσκολες συνεργασίες, καθώς το μονοπάτι ιδεών και πρακτικών της ΔτΜ που μπορεί να βελτιώσει τη μαθηματική εκπαίδευση, μετασχηματίζει εξ αντικειμένου το συνολικό τοπίο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία μπορεί πλέον να προσεγγίζεται από όλους και όλες, χωρίς ματαιώσεις και αποκλεισμούς.

Ένας πρόσθετος παράγοντας, που δυσκόλεψε ιδιαίτερα τα πρώτα χρόνια την ανάπτυξη της ΔτΜ και τις σχέσεις με την ιεραρχία του εκπαιδευτικού συστήματος ήταν το φαινόμενο να υιοθετείται η ορολογία της ΔτΜ από παραδοσιακές ακαδημαϊκές δομές και επίσημες εκπαιδευτικές αρχές, οι οποίες όμως προσέδιδαν στη νέα ορολογία το παλιό περιεχόμενο. Παραλλαγές αυτού του φαινομένου -που συναντούμε και σήμερα- είχαν προηγηθεί της ΔτΜ κατά μια δεκαετία, με τις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις των *μοντέρνων* και των *νέων* μαθηματικών.

Έχει σημασία να αντιληφθούμε αυτές τις δυσκολίες μέσα στο διεθνές εκπαιδευτικό και επιστημολογικό πλαίσιο από το οποίο αναδύεται η ΔτΜ, ώστε να μπορέσουμε να διακρίνουμε τις ελληνικές ιδιαιτερότητες αυτής της πορείας.

Η Διδακτική των Μαθηματικών συνιστά ένα διακριτό πεδίο έρευνας και δράσης που μελετάει την φαινομενολογία της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών σε περιγράψιμες εκπαιδευτικές συνθήκες και σε αλληλεπίδραση με τη διάχυση και την αναπαράσταση της μαθηματικής γνώσης στο ευρύτερο επιστημονικό, τεχνολογικό και κοινωνικό περιβάλλον. Η αναγκαιότητα αυτής της σύνθετης ερευνητικής κατεύθυνσης διαδέχθηκε την αναγκαιότητα αναπροσαρμογής του περιεχομένου της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναπτύχθηκε τη δεκαετία του ΄60 με στόχο τη σύνδεσή της με την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης, που οδήγησε στις μεταρρυθμίσεις των *μοντέρνων* μαθηματικών με την έμφαση στη θεωρία συνόλων και στις δομές, και των *νέων* μαθηματικών με την έμφαση στις εφαρμογές των μαθηματικών για την οργάνωση και ανάπτυξη της κοινωνικής ζωής.

Η υιοθέτηση της δίπτυχης αυτής μεταρρύθμισης από τον ΟΟΣΑ για την ταχεία διεθνή εξάπλωσή της, οδήγησε σε τυποποίηση των περιεχομένων, των μεθόδων και του εκπαιδευτικού υλικού και έφερε σε δομική κρίση τα εθνικά εκπαιδευτικά συστήματα, τις εκπαιδευτικές κοινότητες και τις οικογένειες. Η «αναγκαστική» εφαρμογή της μεταρρύθμισης ανεξαρτήτως τοπικών συνθηκών και οργανωσιακής ετοιμότητας οδήγησε στο ανακλαστικό σύνδρομο της υιοθέτησης της ορολογίας της με επιφανειακή υλοποίηση των μεθόδων της.

Η αποτυχία της συγκεκριμένης μεταρρύθμισης επέτεινε τα φαινόμενα της μαζικής σχολικής αποτυχίας στα μαθηματικά και ενέτεινε, αφενός τις εκδοχές και εκφράσεις μαθηματικοφοβίας στον μαθητικό και ενήλικο πληθυσμό, αφετέρου την αμυντική προσφυγή στην ασκησιολογία και στον εξεταστικοκεντρικό προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Σε αυτό το αμήχανο και ταραγμένο έδαφος της μαθηματικής εκπαίδευσης άρχισαν να συγκροτούνται τοπικές εκπαιδευτικές πρωτοβουλίες και διεθνείς ερευνητικές επιτροπές, προσδιορίζοντας το πεδίο της ΔτΜ, αρχικά ως πεδίο σύγκλισης ανάμεσα σε θεωρητικές προσεγγίσεις που συνδέουν τη μάθηση και την οικοδόμηση νοητικών δομών με τα στάδια της νοητικής εξέλιξης και αυτά με την επιστημολογία των εμποδίων και της αλλαγής παραδείγματος.

Κατά τη δεκαετία του ’80 και ’90 κατάφεραν να επικοινωνούν οι γαλλόφωνες, αγγλόφωνες, ιταλόφωνες και γερμανόφωνες βιβλιογραφίες και οι σχολές της *Διδακτικής των Μαθηματικών* και της *Μαθηματικής Εκπαίδευσης*, οπότε αναπτύχθηκε μια ερευνητική κουλτούρα στην οποία συνυπάρχουν, αλληλεπιδρούν και αλληλοσυμπληρώνονται χωρίς να αλληλοαποκλείονται, μελέτες και μεθοδολογίες με έμφαση στη μαθηματική συγκρότηση, στη μαθησιακή διεργασία, στην ψηφιακή αναπαράσταση και την τεχνολογία, στην ιστορική διάσταση, στη σημειογραφία, στην κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση, στην διεπιστημονική προσέγγιση, σε

προσεγγίσεις ειδικής αγωγής και ζητήματα διακρίσεων και αποκλεισμών, στην συμπεριληπτική εκπαίδευση.
Σε αυτό το κλίμα η ΔτΜ διεύρυνε το πεδίο έρευνας των περιγράψιμων εκπαιδευτικών συνθηκών συμπεριλαμβάνοντας επιπλέον τόσο τα περιβάλλοντα και τις εκδοχές της σκιώδους εκπαίδευσης – φροντιστήρια και ιδιαίτερα μαθήματα που γνωρίζουν διεθνώς ραγδαία ανάπτυξη- όσο και τις τεχνολογικές ή διεπιστημονικές εφαρμογές που αναπτύσσονται πειραματικά και τα τελευταία χρόνια με τα εμπορικά πακέτα του ρεύματος Stem.
Επιχειρώντας μια συνοπτική αναδρομή στην πορεία συγκρότησης της ερευνητικής κοινότητας της ΔτΜ στην Ελλάδα έως την ίδρυση της Ενεδιμ, θα περιοριστώ να αναλύσω συνοπτικά δυο ζητήματα που κατά τη γνώμη μου αμφισβήτησαν θεμελιωδώς την εικόνα των Μαθηματικών που είχε παγιωθεί, τόσο στην μαθηματική κοινότητα, όσο και στη ευρύτερη εκπαιδευτική κοινότητα σε όλες τις βαθμίδες.
Πρόκειται για **ζητήματα** που σημάδεψαν και συνεχίζουν να σημαδεύουν τις σχέσεις, συνθέσεις και αντιθέσεις της ΔτΜ -και των ανθρώπων που αφιερώθηκαν ερευνητικά σε αυτό το πεδίο- με τις παραδοσιακές ακαδημαϊκές κοινότητες, με τις επιστημονικές ενώσεις των Μαθηματικών, των Επιστημών της Εκπαίδευσης και του πεδίου των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας -και τους ανθρώπους που αφιερώνονται σε αυτά τα πεδία και ενδιαφέρονται για την μαθηματική εκπαίδευση.
Το πρώτο έγκειται στο ότι η μάθηση των Μαθηματικών ξεκινάει από τις πολύ μικρές ηλικίες, κατά συνέπεια χρειάζεται έρευνα και σχεδιασμός εκπαιδευτικού υλικού και διδακτικών παρεμβάσεων από την προσχολική και την πρώτη σχολική εκπαίδευση. Ένα μέρος κατά συνέπεια της σχολικής αποτυχίας στο γυμνάσιο και λύκειο συνδέεται με ασυνέχειες κατά τις μεταβάσεις στα στάδια οικοδόμησης λογικομαθηματικών εννοιών και συλλογισμών σε ηλικίες 3-8 ετών.
Αυτή η θεώρηση γκρεμίζει την παγιωμένη πεποίθηση ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών ξεκινάει στο Γυμνάσιο, ένα στερεότυπο που συνδυάζεται με τη δομή του εκπαιδευτικού συστήματος και την κατάρτιση των εκπαιδευτικών. Ανατρέπονται επομένως οι αντιλήψεις του τύπου «στο Νηπιαγωγείο γίνονται μόνο παιχνίδια» ή «στο Δημοτικό τα παιδιά μαθαίνουν να κάνουν λογαριασμούς», που προσδιόριζαν επί δεκαετίες στάσεις, προσδοκίες και επαγγελματικές πρακτικές. Τίθεται τώρα με νέους όρους το ζήτημα της ευθύνης της μαθηματικής και της εκπαιδευτικής κοινότητας για την μαθηματική εκπαίδευση σε βαθμίδες που δεν υπηρετούν απόφοιτοι Τμημάτων Μαθηματικών.
Το δεύτερο ζήτημα αφορά την ερμηνεία και διαχείριση του λάθους. Για τη ΔτΜ η διατύπωση μιας λανθασμένης απάντησης ή λύσης από μαθητές και μαθήτριες ενδέχεται να είναι ένδειξη μιας εναλλακτικής κατανόησης της εκφώνησης, ή ενός εναλλακτικού συλλογισμού ή της επιλογής ενός τρόπου

υπολογισμού που ίσως είχε καλά αποτελέσματα σε κάποιες περιπτώσεις, αλλά τώρα είναι ασύμβατος με τη συγκεκριμένη κατάσταση προβληματισμού. Αυτή η παραδοχή απονομιμοποιεί τη διδακτική πρακτική που επιδιώκει την αποφυγή του λάθους και έχει αποθαρρύνει μεγάλο αριθμό μαθητών και μαθητριών να διατυπώνουν τη σκέψη τους. Η ΔτΜ ενθαρρύνει και αξιοποιεί τη διατύπωση κάθε μαθητικής απάντησης και θέτει σε προτεραιότητα το σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων που οδηγούν στην έκφραση εναλλακτικών λύσεων ή στρατηγικών, την ανταλλαγή επιχειρημάτων και τον πειραματισμό.

Τα ζητήματα αυτά οδήγησαν σε κάτι πρωτόγνωρο για τις μαθηματικές και εκπαιδευτικές κοινότητες. Η έρευνα για τη βελτίωση της μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών επεκτείνεται πλέον πέραν του μαθητικού πληθυσμού και στρέφεται στο πεδίο των εκπαιδευτικών και της εικόνας τους για τα Μαθηματικά, των πεποιθήσεων, των στάσεων και των πρακτικών τους.

Το περιεχόμενο των επιμορφωτικών προγραμμάτων δεν στοχεύει πλέον αποκλειστικά στην συμπληρωματική κατάρτιση σε νέες περιοχές των Μαθηματικών που αντιστοιχούν σε νέα κεφάλαια του αναλυτικού προγράμματος, ούτε των Παιδαγωγικών που αντιστοιχούν σε νέες παιδαγωγικές μεθόδους. Εστιάζει κυρίως στην ερμηνεία της σχολικής αποτυχίας στα μαθηματικά, στον αναστοχασμό και τον ανατρεπτικό ανασχεδιασμό των διδακτικών πρακτικών, δηλαδή στην αμφισβήτηση της ως τώρα εκπαιδευτικής αποτελεσματικότητας.

Η διπλή ανατροπή (ηλικίες παιδιών, διδακτικές πρακτικές) κλόνισε την παγιωμένη εικόνα για τα Μαθηματικών και την επαγγελματική επάρκεια των εκπαιδευτικών και δημιούργησε επιφυλακτικότητα ή και εχθρότητα έναντι της Διδακτικής των Μαθηματικών, που εκφραζόταν με έντονες αντιπαραθέσεις στα συνέδρια της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και σε επιμορφωτικές πρωτοβουλίες για εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Έπρεπε να διανυθεί αρκετός δρόμος ωσότου μπορέσει να κατανοηθεί ότι η προσέγγιση της ΔτΜ για τη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης αφορά όλες τις βαθμίδες, ότι δεν έχει αποκλειστική προϋπόθεση το πτυχίο των Μαθηματικών και ότι αντίστροφα, όσες και όσοι αποφοιτούν από Τμήματα Μαθηματικών δεν είναι επαγγελματικά επαρκείς για την εκπαίδευση εάν δεν έχουν σπουδάσει μαθήματα ΔτΜ. Εδώ εδράζει και η δυσανεξία πολλών Τμημάτων να ιδρύσουν τομείς ΔτΜ και να στελεχώσουν αντίστοιχες θέσεις ΔΕΠ.

Στο ξεκίνημα αυτού του δύσβατου, αλλά απελευθερωτικού για την καλλιέργεια και μάθηση των Μαθηματικών, δρόμου βρέθηκε ένας μικρός αλλά σημαντικός αριθμός -νέων, τότε- ερευνητριών και ερευνητών που στα χρόνια μετά την Μεταπολίτευση εντάχθηκε στα νεοσύστατα μεταπτυχιακά προγράμματα ΔτΜ κυρίως στη Γαλλία, στη Γερμανία, στο Ηνωμένο Βασίλειο και στις ΗΠΑ και επιστρέφοντας άρχισε να κάνει αισθητή την

παρουσία του στις αναζητήσεις και συνεργασίες στο πλαίσιο και στις παρυφές της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Τα συνέδρια της ΕΜΕ, κάποιες ειδικές εκδόσεις και στη συνέχεια ο Ευκλείδης Γ' ήταν οι χώροι ανάπτυξης των πρώτων ιδεών της ΔτΜ.

Παράλληλα, η δυναμική αυτή ομάδα άρχισε να αναπτύσσει πολλαπλές δράσεις με ημερίδες και συνέδρια, περιοδικά και εκδόσεις, αρθρογραφία και μεταφράσεις, ερευνητικές ανακοινώσεις και διεθνείς συνεργασίες, ενώ πολλά μέλη της εντάχθηκαν λειτουργικά σε διεθνείς επιτροπές (όπως C.I.E.A.M., I.C.M.E., P.M.E., C.E.R.M.E.) και φιλοξένησαν στη Ρόδο και στη Θεσσαλονίκη αντίστοιχα διεθνή συνέδρια που ενίσχυσαν την αυτοπεποίθηση και την εξωστρέφεια της ελληνικής ερευνητικής κοινότητας.

Ημερίδες και συνέδρια πραγματοποιήθηκαν με λιγότερο ή περισσότερο συστηματικό τρόπο σε αρκετές πόλεις, όπου κατάφερναν να συγκροτηθούν ερευνητικοί πυρήνες ΔτΜ -η καθεμιά με τις ιδιαιτερότητές της-, όπως στη Θεσσαλονίκη και στην Κρήτη, στη Ρόδο και στην Αθήνα, στον Βόλο και στα Γιάννενα, στην Πάτρα και την Αλεξανδρούπολη, αργότερα και στην Λευκωσία με την ίδρυση και ισχυρή στελέχωση του Πανεπιστημίου Κύπρου.

Σε αυτό το πλαίσιο μπόρεσαν να οργανωθούν συναντήσεις εργασίας και ανταλλαγής απόψεων με άλλες κοινότητες που ενδιαφέρονταν για τη μαθηματική εκπαίδευση. Σε πρώτη φάση διαμορφώθηκαν **δυο χαρακτηριστικές συνθέσεις.**

Η μία προσέγγισε τη ΔτΜ περισσότερο επιστημολογικά, σε συνδυασμό με πτυχές της Ιστορίας και της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών και προέκυψε σε μεγάλο βαθμό από τις διεθνείς συναντήσεις της Ρόδου με τη συνεργασία του Τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ και τη συστηματική συμμετοχή σημαντικών διεθνών ερευνητών και ερευνητριών κυρίως από τη Γαλλία και την Πολωνία.

Η δεύτερη σύνθεση προσέγγισε τη ΔτΜ μαζί με τις Τ.Π.Ε. και την Εκπαίδευση των Εκπαιδευτικών στις Φυσικές Επιστήμες και προέκυψε σε μεγάλο βαθμό από τα *Συνέδρια Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην εκπαίδευση*.

Σε μια ευρύτερη δημοσίευση οφείλουμε να αναφέρουμε όλες τις Ημερίδες, Διημερίδες, βιβλία και περιοδικές εκδόσεις που συστηματοποίησαν αυτές τις συνθέσεις της ΔτΜ, όπως και τα ονόματα Καθηγητών από τα Τμήματα Μαθηματικών, Πληροφορικής και Παιδαγωγικών που συνέβαλαν στις συζητήσεις και ανέλαβαν προσωπικές πρωτοβουλίες για την ανάπτυξη της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα ως διακριτού ακαδημαϊκού γνωστικού πεδίου και για στελέχωση των πρώτων θέσεων ΔΕΠ.

Σε ότι αφορά το επίσημο εκπαιδευτικό σύστημα και τις αντίστοιχες συνδικαλιστικές ενώσεις (Ο.Λ.Μ.Ε., Δ.Ο.Ε.), οι κίνδυνοι της σχολικής διαρροής από την αποτυχία στα μαθηματικά, τα φαινόμενα μαθηματικού

αναλφαβητισμού και οι διεθνείς κατευθύνσεις στην εκπαίδευση οδήγησαν στην ευκαιριακή αναζήτηση επικοινωνίας και συνεργασίας με τις κοινότητες της Διδακτικής Μαθηματικών και πρόσφατα με την Ενεδιμ.

Μέσα από τις δύσκολες αυτές συνθέσεις, εντός των οποίων δεν έλειπαν οι αντιπαραθέσεις ανάμεσα σε επιστημονικές πεποιθήσεις και σε ερευνητικές προσεγγίσεις, οδηγηθήκαμε **στην πρωτοβουλία για την ίδρυση της Ενεδιμ** και τη θεσμική αποδοχή της ΔτΜ με τη διπλή ανατροπή που έφερε στην εικόνα των Μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης (ηλικιακή διεύρυνση, συμπερίληψη εκπαιδευτικού προσωπικού στις έρευνες) καθώς και την απομάκρυνση των φαινομένων επιφανειακής μόνο υιοθέτησης της ορολογίας των ΔτΜ.

Ασφαλώς η συντεχνιακή επιφυλακτικότητα και οι αντίστοιχες πρακτικές συνεχίζονται και θα χρειαστεί αρκετός χρόνος και ενδυνάμωση της κοινότητας της Ενεδιμ στον ακαδημαϊκό και τον εκπαιδευτικό χώρο για να απαλειφθούν, ώστε να αλλάξει το τοπίο και η δυναμική της μαθηματικής εκπαίδευσης στη χώρα μας και διεθνώς.

Ερευνητικές Εργασίες

Θεματική Ενότητα 1: Μαθηματική εκπαίδευση: κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παράμετροι

Η ΕΜΦΥΛΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΓΥΝΑΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ζαφείρα Μπαλαμπανίδου, Χαρούλα Σταθοπούλου

Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΠΤΕΑ

balabazaf@gmail.com, hastath@uth.gr

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας για τα έμφυλα χαρακτηριστικά της Μαθηματικής Εκπαίδευση και αξιοποιεί δεδομένα από ημιδομημένες συνεντεύξεις 14 εκπαιδευτικών των μαθηματικών. Σκοπός της είναι να διερευνήσει τον λόγο τους σχετικά με την ύπαρξη της έμφυλης ανισότητας στους/στις εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά στο Λύκειο. Η ανάλυση του λόγου τους πραγματοποιείται στο πλαίσιο της φουκωϊκής προσέγγισης. Τα ευρήματα επιβεβαιώνουν ότι ο έμφυλος καταμερισμός εργασίας στον ιδιωτικό και δημόσιο χώρο και οι 'μύθοι' για την αρρενωπότητα της μαθηματικής σκέψης αποτελούν τις βασικές αιτίες της ανισότητας των γυναικών και ανδρών που διδάσκουν μαθηματικά στο λύκειο αλλά καθώς έχουν φυσικοποιηθεί δεν αμφισβητούνται από το σύνολο των εκπαιδευτικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εξακολουθεί ακόμη και σήμερα η κοινωνία μας να είναι ανδροκρατούμενη; Η Cameron (2020) αναφέρεται στην ύπαρξη μιας δομικής ανδροκρατίας η οποία, αν και παρουσιάζει διαφορετικά χαρακτηριστικά στην πορεία του χρόνου, εξακολουθεί να διαπερνά το κοινωνικό σύστημα από πάνω έως κάτω. Στο πλαίσιο αυτό, οι άνδρες συστηματικά μονοπωλούν θέσεις εξουσίας, παίρνουν πολιτικές αποφάσεις, έχουν περισσότερα δικαιώματα από τις γυναίκες και φυσικά τα ανδρικά έργα και οι ανδρικές δραστηριότητες έχουν μεγαλύτερο κύρος από τις αντίστοιχες γυναικείες. Ένα παράδειγμα για το τελευταίο χαρακτηριστικό της ανδροκρατούμενης κοινωνίας αποτελεί ο χώρος της επιστήμης και κυρίως ο χώρος στις επιστήμες STEM, όπου οι γυναίκες είναι ιστορικά «αόρατες».

Η ανισότητα των φύλων στις επιστήμες των STEM, παρατηρείται και στο χώρο της εκπαίδευσης, με την υπο- εκπροσώπηση των γυναικών που διδάσκουν τα αντίστοιχα μαθήματα ιδιαίτερα στις τάξεις του Λυκείου, όπου η διδασκαλία έχει μεγαλύτερο κοινωνικό και επιστημονικό κύρος (Κονταράκη, Παγκάκη & Σταματελοπούλου, 2008). Ειδικότερα, οι γυναίκες εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματικά εξακολουθούν και σήμερα να αντιμετωπίζουν συστημικά αόρατα εμπόδια στον εργασιακό

τους χώρο, που τις εμποδίζουν να μετακινηθούν από τη βαθμίδα του Γυμνασίου, σε αυτήν του Λυκείου.

Στο παραπάνω πλαίσιο, η παρούσα εργασία μελετά το λόγο (discourse) 14 εκπαιδευτικών (επτά ανδρών και επτά γυναικών) σχετικά με τα αίτια του μικρότερου αριθμού των γυναικών μαθηματικών σε σχέση με αυτό των ανδρών που παρατηρείται να διδάσκει στα Λύκεια.

ΓΥΝΑΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ο χώρος της εκπαίδευσης παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σχετικά με την έμφυλη διάστασή του όσον αφορά στο εκπαιδευτικό προσωπικό, καθώς αποτελεί έναν από τους πρώτους χώρους που πρόσφερε εργασία στις γυναίκες (Κονταράκη, κ.ά., 2008).

Ιστορικά, ο καταμερισμός εργασίας των φύλων στηρίχθηκε σε επιστημονικά ευρήματα για τις βιολογικές διαφορές τους και περιόρισε τη γυναίκα στον ιδιωτικό χώρο του σπιτιού και στην ενασχόληση της με τη φροντίδα των παιδιών και τις οικιακές εργασίες (Ρεντετζή, 2006). Στο πλαίσιο της θεωρίας της συμπληρωματικότητας, από την εποχή του Διαφωτισμού, οι γυναίκες θεωρήθηκε ότι είναι εφοδιασμένες από τη φύση τους με το μητρικό φίλτρο και το συναίσθημα κι έτσι, ο ιδιωτικός χώρος του σπιτιού θεωρήθηκε ως ο κατάλληλος για αυτές. Αντίθετα, οι άνδρες ταυτίστηκαν με τη λογική, την επιστήμη και τη διοίκηση και κατά συνέπεια με το δημόσιο χώρο. Έτσι, η ανδρική εξουσία νομιμοποιήθηκε και καλλιεργήθηκε η αντίληψη ότι η πατριαρχία αποτελεί φυσικό γεγονός από την ύπαρξη του ανθρώπου (Γκασούκα, 2013).

Ωστόσο, οι γυναίκες δεν μένουν αδρανείς αλλά αντιστέκονται στην ανδρική εξουσία και διεκδικούν θέση στο δημόσιο χώρο. Η εκπαίδευση αποτελεί έναν από τους πρώτους δημόσιους χώρους που πρόσφερε εργασία στις γυναίκες, καθώς η εργασία στο χώρο της ταιριάζει με τον παραδοσιακό ρόλο των γυναικών και τη μητρότητα. Έτσι, αρχικά οι γυναίκες εργάζονται κυρίως στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και στη συνέχεια ανοίγει για αυτές και ο εργασιακός χώρος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Κονταράκη, κ.ά., 2008).

Όμως, παράλληλα με τις θετικές εξελίξεις ως προς τις κατακτήσεις των γυναικών στον δημόσιο χώρο της εργασίας και ειδικότερα σε αυτόν της εκπαίδευσης, παρατηρείται επίσης τόσο μείωση του κύρους του επαγγέλματος της/του εκπαιδευτικού όσο και διαφοροποίηση στον καταμερισμό της εργασίας κατά φύλο, μεταξύ των εκπαιδευτικών. Γίνεται, λοιπόν, φανερό ότι ο εργασιακός χώρος της εκπαίδευσης συνεχίζει να χαρακτηρίζεται από έμφυλη ανισότητα τόσο οριζόντια όσο και κάθετη (Κονταράκη, κ.ά., 2008). Η ανισότητα αυτή αποτυπώνεται στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση με τις γυναίκες να αποτελούν σχεδόν το σύνολο

των εργαζομένων στα νηπιαγωγεία και την πλειοψηφία των εργαζομένων στα δημοτικά σχολεία (ΕΛΣΤΑΤ, 2019). Όπως επισημαίνουν οι Κονταράκη, κ.ά. (2008), ο στερεοτυπικός ρόλος των φύλων χρησιμοποιείται για να στηρίξει την ανισότητα στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση καθώς η νηπιαγωγός και η δασκάλα ταυτίζονται με τη μητέρα και αναλαμβάνουν την ομαλή μετάβαση των παιδιών από την οικογένεια στο σχολείο.

Όσον αφορά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, οι γυναίκες και πάλι υπερτερούν, ωστόσο είναι αισθητά λιγότερες σε σχέση με την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Εδώ, η ανισότητα των φύλων αποτυπώνεται στην κατανομή τους στο Γυμνάσιο και το Λύκειο καθώς και στο γνωστικό αντικείμενο που διδάσκουν. Οι γυναίκες αποτελούν το 68,91% των εκπαιδευτικών στο Γυμνάσιο και το 58,28% των εκπαιδευτικών στο Λύκειο (ΕΛΣΤΑΤ, 2019). Οι Κονταράκη, κ.ά. (2008) αποδίδουν τα παραπάνω κυρίως στον φόρτο εργασίας που έχει η διδασκαλία στο Λύκειο, ο οποίος είναι ασύμβατος με τον κοινωνικό και οικογενειακό ρόλο που έχει κατασκευαστεί για τις γυναίκες. Όσον αφορά στους άνδρες εκπαιδευτικούς, αυτοί επιλέγουν τη διδασκαλία στα Λύκεια καθώς τους προσδίδει κύρος και επιπλέον τη δυνατότητα εύρεσης περισσοτέρων ιδιαίτερων μαθημάτων και κατά συνέπεια αυξημένων οικονομικών απολαβών.

Η ανισότητα των φύλων στην εκπαίδευση γίνεται ορατή και στη διδασκαλία των γνωστικών αντικειμένων, όπου οι γυναίκες υπερτερούν στη διδασκαλία των γλωσσικών γνωστικών αντικειμένων, καταλαμβάνοντας το υψηλό ποσοστό του 89,9% στο σύνολο των φιλολόγων της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αντίθετα, οι άνδρες υπερτερούν στα γνωστικά αντικείμενα των STEM. Η έμφυλη ανισότητα είναι ακόμη μεγαλύτερη στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών, στο οποίο οι άντρες αποτελούν το 58% του συνόλου των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά σε γυμνάσια και λύκεια, με το ποσοστό των ανδρών να φτάνει στο λύκειο το 69,78% (ΕΛΣΤΑΤ, 2019). Έτσι, τίθεται το ερώτημα σχετικά με τους λόγους για τους οποίους οι γυναίκες μαθηματικοί δεν διεκδικούν θέσεις στα λύκεια της χώρας.

Ο αποκλεισμός των γυναικών από τα μαθηματικά έχει μια μακρά ιστορική πορεία που ξεκινά από την εποχή του Διαφωτισμού, κατά την οποία η ορθολογική σκέψη θεωρήθηκε ανδρικό χαρακτηριστικό. Έτσι, το έμφυλο σώμα συνδέθηκε με την ευφυΐα και το φύλο λειτούργησε παραγωγικά ως προς τον ορθολογισμό και τα μαθηματικά (Walkerdine, 2013). Όπως επισημαίνει η Ρεντετζή (2006), η βαθιά πεποίθηση για την εγγενή αρρενωπότητα της μαθηματικής σκέψης οδήγησε σε έναν διπολικό διαχωρισμό μεταξύ του ανδρικού και του γυναικείου μυαλού. Ακόμα και

σήμερα, παρόλο που στη διάρκεια της ιστορικής πορείας οι σχέσεις των δυο φύλων δεν έμειναν σταθερές, η Χρονάκη (2013, σ. 20) τονίζει ότι η βαθιά πίστη για την έμφυλη διάσταση της ορθολογικής και αφαιρετικής σκέψης καθορίζει τη σχέση φύλου και μαθηματικής επιστήμης αφού κατατάσσει τις γυναίκες ως «*λιγότερο άξιες καθώς δεν διαθέτουν το απαιτούμενο ταλέντο και πάθος για τα Μαθηματικά ή για τα τεχνήματα στα οποία τα Μαθηματικά εφαρμόζονται*».

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, θεωρήθηκε σημαντικό να ερευνηθούν οι αιτίες στις οποίες αποδίδουν οι μαθηματικοί της έρευνάς μας τη χαμηλή εκπροσώπηση των γυναικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στα Λύκεια.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε ένα τμήμα των ερευνητικών δεδομένων μιας μεγαλύτερης έρευνας που βρίσκεται σε εξέλιξη αναφορικά με τα έμφυλα χαρακτηριστικά της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Στην έρευνα συμμετέχουν 14 εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματικά σε σχολεία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης μιας επαρχιακής πόλης. Η συλλογή των ερευνητικών δεδομένων έγινε με ημιδομημένες συνεντεύξεις στους 14 εκπαιδευτικούς (7 γυναίκες και 7 άνδρες, ηλικίας 42-60 ετών). Από αυτούς οι 1η, 4η, 7η και ο 1ος, 3ος και 5ος εκπαιδευτικός διδάσκουν στο λύκειο και οι 2η, 3η, 5η, 6η και ο 2ος, 4ος, 6ος και 7ος εκπαιδευτικός διδάσκουν στο γυμνάσιο. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε ένα τμήμα του ερευνητικού υλικού των ημιδομημένων συνεντεύξεων, το οποίο αφορά στο πώς οι εκπαιδευτικοί της έρευνας κατασκευάζουν στον λόγο τους τις αιτίες του μικρού αριθμού των γυναικών μαθηματικών στα λύκεια της χώρας.

Η έρευνα έχει στοιχεία κριτικής εθνογραφικής έρευνας και το πραγματολογικό υλικό της αναλύεται στο πλαίσιο της μεταδομιστικής φουκωικής προσέγγισης, η οποία μας δίνει τη δυνατότητα χρήσης μιας εναλλακτικής γλώσσας, για να αμφισβητηθούν οι φυσιοκρατικές αντιλήψεις και να κατανοηθεί η σχεσιακή και παραγωγική έννοια της εξουσίας, στη σχέση των φύλων. Επιπλέον, μας παρέχει τα εργαλεία για να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική εκπαίδευση δημιουργεί αποκλεισμούς και καθιστά άλλους περισσότερο κι άλλους λιγότερο σημαντικούς για το μάθημα των Μαθηματικών (Walshaw, 2016).

Η ανάλυση του λόγου που εκφέρουν οι εκπαιδευτικοί στηρίχθηκε στη μέθοδο που προτείνει η Willig (2013) για την αξιοποίηση της φουκωικής προσέγγισης. Στο πλαίσιο αυτής της μεθόδου, αρχικά εντοπίσαμε τις λεκτικές κατασκευές του έμφυλου λόγου (discursive constructions) των εκπαιδευτικών, και στη συνέχεια συζητήσαμε τις θέσεις (positions) υποκειμένων που κατασκευάζουν οι λόγοι (discourses), ποιον

εξυπηρετούν, ποιες δυνατότητες για δράση προσφέρουν ή αφαιρούν από τα υποκείμενα καθώς και τι δυνατότητες ύπαρξης προσφέρουν (Willig, 2013).

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Οι εκπαιδευτικοί της έρευνας κατασκευάζουν στον λόγο τους μια έμφυλη πραγματικότητα στην οποία ως αιτίες του μικρού αριθμού των γυναικών που διδάσκουν μαθηματικά στα λύκεια της χώρας θεωρούνται:

Α) Ο κοινωνικός και οικογενειακός ρόλος των γυναικών:

> […] οπότε η γυναίκα έχει μεγάλα παιδιά, μπορεί να είναι και γιαγιά. Έχει προβλήματα και μπορεί να τα αντιμετωπίσει πολύ πιο εύκολα στο γυμνάσιο παρά στο λύκειο. (3ος Ε)

> Πιστεύω ότι οι περισσότερες γυναίκες κυνηγάν το γυμνάσιο ως λίγο πιο εύκολο. Σου λέει "δε θα 'χω τόση πολλή δουλειά στο σπίτι, να φροντίζω και το σπίτι". […] το λύκειο όπως και να το κάνεις απαιτεί χρόνο μελέτης! […] Και πάντα προετοιμασία […] κι επειδή έχουν το φόρτο του νοικοκυριού λειτουργεί ανασταλτικά. (4ος Ε)

> [..] απ' την οικογένεια έχουν προβλήματα, δε θέλουν να μπλέξουν με τράπεζα θεμάτων, με πανελλαδικές, με διορθώσεις, με βαθμολογικά, με όλα αυτά. Θεωρούν κάπως πιο εύκολο το γυμνάσιο, πηγαίνουν σε μια τάξη, διδάσκουν 10 και 15 χρόνια το ίδιο μάθημα, χωρίς να έχουν πολλά αντικείμενα, θεωρούν πιο εύκολη τη δουλειά του γυμνασίου. Ε φυσικά υπάρχουν και περιπτώσεις που κάποιες κοπέλες θέλουν λύκειο, τους ενδιαφέρει η επιστήμη. (5ος Ε)

> Γιατί είναι δεσμευμένες και με άλλους ρόλους. Δηλαδή εδώ έχουμε συναδέλφους που κανονίζουν το πρόγραμμα γιατί πρέπει να ταΐσουν το εγγόνι! […] Και φυσικά τις βολεύει το γυμνάσιο γιατί θα κερδίσει μισή ή μια ώρα και τη μία ώρα θα κάνει τα φασολάκια. (6ος Ε)

> Λογικό δεν είναι; Όταν η γυναίκα κάνει οικογένεια, ας πούμε και 'γω όταν τελείωσα φυσικά ήθελα να ήμουν σε ένα λύκειο, αλλά τώρα το σκέφτομαι. Πιο πολλές απαιτήσεις. Θέλει χρόνο. (4η Ε)

> Είναι η ευκολία, το λύκειο ξέρουμε πάντα ότι έχει δουλειά περισσότερη, διάβασμα περισσότερο, προετοιμασία. Επομένως, μια γυναίκα αφού ξέρουμε ότι έχει την οικογένεια. (5η Ε)

Γιατί πιστεύω ότι θέλουν να έχουν περισσότερο ελεύθερο χρόνο για το σπίτι. Γιατί το Λύκειο, θέλει και μια προετοιμασία στο σπίτι. Κάθε χρόνο, κάθε μέρα, κάτι θέλει να ετοιμάσεις. (6η Ε)

Β) Η γυναικεία φύση της μητρότητας ταιριάζει περισσότερο με τη διδασκαλία των μικρότερων παιδιών του γυμνασίου:

Πιο κοντά είναι τα παιδάκια, τα μικρά σε μας. Να τα μάθουμε πώς να γράφουν, πώς να έχουν τα τετράδια καθαρά... Σα δασκάλες δηλαδή.» (3η Ε)

Οι άνδρες δεν μπορούνε, δεν έχουν υπομονή. Θα μαλώσουν, θα φωνάξουν… Αυτά θέλουν λίγο περισσότερη τρυφερότητα. (6η Ε)

Είναι ο μητρικός ρόλος στο γυμνάσιο. […] Για μένα το γυμνάσιο είναι τιμωρία, όχι γιατί υποτιμώ τα μαθηματικά του γυμνασίου, αλλά γιατί δεν έχω υπομονή με τα μικρά παιδιά. (3ος Ε)

Γ)Το αρνητικό ανδροκρατούμενο εργασιακό περιβάλλον:

Εξακολουθούμε να είμαστε λίγες οι γυναίκες. Εγώ όταν άρχισα να δουλεύω, δεν υπήρχε άλλη γυναίκα μαθηματικός. Όλο άνδρες ήτανε. Οι συνομήλικοι, ιδιαιτεράδες, ας το πω έτσι, θέλουνε να βγούνε μπροστά, γιατί θέλουν να πάρουν λεφτά. […] Επίσης αν είσαι γυναίκα θεωρούν ότι δεν είσαι εύστροφη. Μια φορά στην επιτροπή πανελλήνιων ένα ερώτημα δεν μπορούσε να το λύσει ένας άνδρας μαθηματικός και το έλυσα εγώ που είμαι γυναίκα, όπως όταν έβαλαν την τράπεζα θεμάτων. Εγώ αντιλαμβάνομαι γρήγορα, και αυτό το πράγμα δεν μπορούν να το διαχειριστούν επειδή είμαι γυναίκα. (1η Ε)

Για τους μαθηματικούς το βλέπω, αν και υπάρχει γενικότερα ανταγωνισμός ανάμεσα στους μαθηματικούς. […] εκδηλώνουνε την ανώτερη θέση που έχουν στο μυαλό τους, όταν προσπαθούν να πάρουν κάποια καλά τμήματα. Ας πούμε, αυτό δεν είναι μια τέτοια εκδήλωση της υπεροχής που θεωρούν ότι έχουν σε σχέση με εμάς τις γυναίκες; […] Δεν υπάρχει συνεργασία, όχι. Ενώ αντίθετα, κάποιες φορές που ήταν γυναίκες στο σχολείο μπορώ να πω ότι είχαμε εξαιρετική συνεργασία. (4η Ε)

Σίγουρα ήταν αποτρεπτικό το εργασιακό περιβάλλον. Δε θεωρούταν αποδεκτό να πάει γυναίκα μαθηματικός σε λύκειο. Ήταν δύσκολο να επιβιώσει. Θέλει μεγάλα κότσια να μπεις σε

ένα λύκειο με δέκα συναδέλφους και να προτείνεις ας πούμε θέμα εξετάσεων. Σε καπέλωναν! Κατευθείαν! Δεν σε άκουγαν, πως να το πω; […] Δεν μπορούν οι άνδρες να αποδεχτούν ότι η γυναίκα μαθαίνει το ίδιο, μπορεί να συνδυάσει τη δουλειά με την οικογένεια της, τα καταφέρνει. Τα τελευταία χρόνια άρχισαν λίγο καλύτερα να με αποδέχονται οι συνάδελφοι. Θέλω να πιστεύω ότι με αποδέχτηκαν με την αξία μου (γελάει), όπως και τα παιδιά! (7η Ε).

Δ) Η απουσία οργανικών θέσεων στα λύκεια:

Και να θέλουμε δεν μπορούμε να πάμε. Εγώ ας πούμε, δεν έχω μόρια για να πάω. (3η Ε)

Μπορεί να έχει πιο πολλές θέσεις αλλά πάντα υπάρχει η δυνατότητα να διαλέξεις; Ας πούμε όταν διορίστηκα εγώ δεν υπήρχε θέση σε γυμνάσιο. (4η Ε)

Επιπλέον δύο άνδρες και μία γυναίκας εκπαιδευτικός που και οι τρεις διδάσκουν σε γυμνάσια ανέφεραν ότι δεν έχουν παρατηρήσει ότι στα λύκεια της πόλης διδάσκουν μαθηματικά κυρίως άνδρες:

Ναι ε; Στα λύκεια συγκεκριμένα; Όχι στα γυμνάσια; (παύση) Άμα βάλουμε την ηλικία ως μεταβλητή οι άντρες παλιά ήταν περισσότεροι Μπορεί να εξηγείται έτσι. Αλλιώς, δεν ξέρω που να το αποδώσω. (2ος Ε).

Άντρες είναι, ε; Δεν το είχα σκεφτεί καμιά φορά. Τώρα που το λες, μπράβο! Είδες, καλά κάνεις κι εμένα το μυαλό μου ανοίγει. (7ος Ε).

Όχι, δεν το σκέφτηκα η αλήθεια είναι, γιατί στους χώρους που βρίσκομαι εγώ συνήθως είμαστε περισσότερο γυναίκες πάντα. […] Ε... ναι, η αλήθεια είναι ότι ... ισχύει αυτό που λες. (παύση) Δε μπορώ να το εξηγήσω. (2η Ε).

Ενώ ο 1ος εκπαιδευτικός αποδίδει την αναλογία γυναικών και ανδρών μαθηματικών στην απουσία διορισμών τα τελευταία χρόνια:

Οι τελευταίοι διορισμοί έγιναν το 2011. Εκείνες τις εποχές και μετά οι περισσότεροι που πήγαιναν καθηγητές στις θετικές επιστήμες ήταν άντρες, μαθηματικοί, φυσικοί και γυναίκες φιλολογικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρχει αυτή η κατανομή αντρών και γυναικών μέσα στους συλλόγους.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Αν και στην εκπαίδευση δεν υπάρχουν θεσμικά εμπόδια για τις γυναίκες, ωστόσο σε άτυπο πραγματικό επίπεδο η εξέλιξη των γυναικών μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση της χώρας συναντά αόρατα εμπόδια. Οι 8 από τους 14 εκπαιδευτικούς της έρευνας μας θέτουν ως σημαντικό εμπόδιο για τη μετάβαση των γυναικών μαθηματικών στο λύκειο τον καταμερισμό εργασίας στο σπίτι και τη δυσκολία των γυναικών να συνδυάσουν τις οικογενειακές υποχρεώσεις τους με τις απαιτήσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών στο λύκειο. Η Kwan (2021) τονίζει ότι οι εργαζόμενες μητέρες συνεχίζουν να βιώνουν την «ποινή της μητρότητας», να έχουν την φροντίδα του σπιτιού και των ηλικιωμένων με συνέπεια να κυριαρχεί η αντίληψη ότι η εργασία τους είναι δευτερεύουσας σημασίας σε σχέση με αυτή των ανδρών. Στο πλαίσιο αυτό οι γυναίκες που διδάσκουν μαθηματικά παρέχουν την ίδια εργασία με τους άνδρες συναδέλφους τους και ταυτόχρονα εξακολουθούν να προσφέρουν απλήρωτη εργασία στο σπίτι με τις οικιακές δουλείες και τη φροντίδα των οικείων προσώπων τους, και αυτό περιορίζει τη δράση τους για επαγγελματική εξέλιξη. Παρόλο που οι γυναίκες συνεχώς αντιστέκονται στην εξουσία των ανδρών και διεκδικούν θέσεις στο χώρο εργασίας, εξακολουθούν ακόμη να παραμένουν υποκείμενα πολλαπλών εκμεταλλεύσεων στον ιδιωτικό χώρο του (Γκασούκα, 2013). Έτσι, επισημαίνει η Γκασούκα (2013), το χάσμα εξουσίας μεταξύ των φύλων αποτελεί σήμερα την πραγματική αιτία που οι γυναίκες τοποθετούνται σε συγκεκριμένες θέσεις (της μητέρας, της νοικοκυράς, του φροντιστή κ.τ.λ.), με συνέπεια να εγκλωβίζονται σε υποκειμενικότητες που περιορίζουν τη δράση τους εξυπηρετώντας την υπάρχουσα κατάσταση. Επιπλέον, όσον αφορά στις γυναίκες μαθηματικούς παρατηρούμε ότι ο μητρικός ρόλος καθώς και η υπομονή και η τρυφερότητα που ιστορικά έχουν κατασκευαστεί ως γυναικεία χαρακτηριστικά, τις καθιστούν στον λόγο των εκπαιδευτικών ($3^{ος}$, $3^{η}$, $6^{η}$) ικανές κυρίως για τη διδασκαλία στο γυμνάσιο. Αντίθετα, οι άνδρες μαθηματικοί που δεν διαθέτουν υπομονή και τρυφερότητα είναι κατάλληλοι για τη διδασκαλία στα μεγαλύτερα παιδιά του λυκείου. Επομένως, φαίνεται καθαρά ότι τα ιστορικά κατασκευασμένα βιολογικά χαρακτηριστικά των φύλων εξακολουθούν να αποτελούν το βασικό πλαίσιο κατασκευής μιας πραγματικότητας, τόσο στον ιδιωτικό χώρο του σπιτιού όσο και στον δημόσιο εργασιακό χώρο. Γι' αυτό επισημαίνει η Kwan (2021) μπορεί να υπάρχουν αλλαγές στην ιστορική πορεία της διαμάχης των φύλων όμως είναι αργές. Ακόμη και σήμερα, η πατριαρχία βασισμένη στα βιολογικά χαρακτηριστικά

εξακολουθεί να θεωρείται φυσικό οικουμενικό φαινόμενο. Το παραπάνω φαίνεται και στον λόγο των τεσσάρων (3ος, 4ος,5ος, 6ος) ανδρών μαθηματικών, οι οποίοι θεωρούν ως φυσική κατάσταση τον καταμερισμό εργασίας στον χώρο του σπιτιού και την προτεραιότητα που δίνουν οι γυναίκες σε αυτό σε σχέση με την επαγγελματική εξέλιξη τους. Όμως, και τρεις γυναίκες μαθηματικοί (4η, 5η, και 6η) που διδάσκουν στο γυμνάσιο εκφέρουν τον ίδιο λόγο κατασκευάζοντας για τον εαυτό τους υποκειμενικότητες που δεν τους επιτρέπουν να δράσουν και να εξελιχθούν επαγγελματικά. Όπως επισημαίνει και σε ένα άλλο σημείο του λόγου της η 6η εκπαιδευτικός: «Εγώ είμαι παντρεμένη, ο άνδρας μου είναι ελεύθερος να κάνει ότι θέλει. Εγώ πρέπει να καθαρίσω το σπίτι, πρέπει να μαγειρέψω, να ψωνίσω.» Όσον αφορά στις τρεις γυναίκες μαθηματικούς της έρευνας μας, που διδάσκουν σε λύκειο, αυτές θεωρούν ως βασική αιτία που κρατά τις γυναίκες μαθηματικούς μακριά από τη διδασκαλία στο λύκειο το εχθρικό εργασιακό περιβάλλον. Ο λόγος των γυναικών αυτών κατασκευάζει μια πραγματικότητα στην οποία η μάχη μεταξύ των φύλων συνεχίζεται στη διδασκαλία των μαθηματικών στο λύκειο καθώς η υποτίμηση των γυναικών και οι διακρίσεις εξακολουθούν να υπάρχουν, παρά τις σοβαρές αλλαγές που έχουν συντελεστεί στη σύγχρονη κοινωνία (Δημητρίου, 2001). Οι άνδρες μαθηματικοί των λυκείων αξιοποιώντας τη γνώση και τα καθεστώτα αλήθειας για την αρρενωπότητα της μαθηματικής σκέψης διεκδικούν την εξουσία στο χώρο του λυκείου με στόχο την εκμετάλλευση των πόρων που αυτό προσφέρει. Καθώς οι άνδρες δεν αποδέχονται την ευφυία και την ευστροφία των γυναικών στα μαθηματικά (1η & 7η Ε) και τις κατασκευάζουν χωρίς πάθος για την επιστήμη των μαθηματικών (5ος Ε) περιορίζουν το πεδίο δράσης των γυναικών στο λύκειο, όπως για παράδειγμα τη συμμετοχή τους στα θέματα εξετάσεων, στις λυκειακές επιτροπές, στην τράπεζα θεμάτων, στη διδασκαλία τμημάτων με υψηλή επίδοση. Στο πλαίσιο αυτό όμως, όπως φαίνεται στο λόγο της 1ης και 7ης εκπαιδευτικού, οι γυναίκες αντιστέκονται, εργάζονται σκληρά και αποδεικνύουν τις μαθηματικές τους ικανότητες διεκδικώντας και αυτές χώρο και εξουσία στο λύκειο.

Σημαντικό εύρημα αποτελεί και η μη αναγνώριση της έμφυλης ανισότητας των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά στο λύκειο από τον 2ο, τον 7ο καθώς και την 2η εκπαιδευτικό. Οι Blair, Miller, Ong & Zastavker (2017) επισημαίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί αυτοί διαμορφώνουν θέσεις ‘τύφλωσης φύλου’ (gender blindness). Επιπλέον και ο λόγος της 3ης και 4ης εκπαιδευτικού για την μην ύπαρξη οργανικών θέσεων μπορεί να ερμηνευτεί επίσης ως θέση τύφλωσης. Η θέση αυτή όσον αφορά στους άνδρες μαθηματικούς τους βοηθά να διατηρούν την εξουσία και να μην

αναπτύσσουν δράση προς μια κατεύθυνση κοινωνικής δικαιοσύνης. Όσον, δε, αφορά στις γυναίκες μαθηματικούς, τις εγκλωβίζει σε υποκειμενικότητες που περιορίζουν τη δράση τους για επαγγελματική ανάπτυξη.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως φαίνεται από τα ευρήματα της έρευνας, απέχουμε ακόμη πολύ από την επίτευξη της ισότητας μεταξύ των γυναικών και ανδρών μαθηματικών στον χώρο εργασίας του σχολείου. Ο λόγος για τον καταμερισμό εργασίας στο χώρο του σπιτιού καθώς και για την αρρενωπότητα της μαθηματικής σκέψης διαμορφώνουν υποκειμενικότητες που περιορίζουν τη δράση των γυναικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ωστόσο, επισημαίνει ο Δημητρίου (2001) είναι σημαντική η αποδόμηση των λόγων που κατασκευάζουν τον καταμερισμό εργασίας των φύλων ως παγκόσμιο και φυσικό φαινόμενο καθώς είναι αποτέλεσμα των σχέσεων εξουσίας που ιστορικά διαποτίζουν τη σχέση τους. Επιπλέον, είναι σημαντικό να αποδομηθούν και οι λόγοι για την κατωτερότητα των γυναικών στα μαθηματικά (Walkerdine, 2013), καθώς έτσι θα οδηγηθούμε προς μια άλλη αφήγηση που θα αποτελέσει την κινητήρια δύναμη για την αλλαγή και την κοινωνική δικαιοσύνη στη μαθηματική εκπαίδευση είτε αυτή αφορά στις/στους εκπαιδευτικούς είτε αφορά στα παιδιά (Walshaw, 2016). Αν και έχει σημειωθεί μεγάλη πρόοδος, απέχουμε πολύ από την ισότητα των φύλων στην μαθηματική εκπαίδευση με αποτέλεσμα να διαιωνίζονται τα πατριαρχικά κοινωνικά πρότυπα και τα εδραιωμένα στερεότυπα της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blair, E., Miller, R., Ong, M. & Zastavker, V. (2017). Undergraduate STEM Instructors' Teacher Identities and Discourses on Student Gender Expression and Equity. *Journal of Engineering Education*, 106(1), 14-43. DOI 10.1002/jee.20157

Cameron, D. (2020). *Φεμινισμός* (μτφ. Φ. Δήμτσας.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Δημητρίου, Σ. (2001). Καταγωγή και Διαπραγμάτευση της Ασυμμετρίας των φύλων. Στο Σ. Δημητρίου (Επιμ.), *Ανθρωπολογία των φύλων* (σσ.42-70). Αθήνα: Σαββάλας.

Κανταράκη, Μ., Παγκάκη, Μ. & Σταματελοπούλου, Ε. (2008). *Κατά φύλο Επαγγελματικός Διαχωρισμός (Κάθετος και Οριζόντιος): Διακρίσεις και Ανισότητες κατά των Γυναικών στην Εκπαίδευση*. Αθήνα: Κ.Ε.Θ.Ι..

Γκασούκα, Μ. (2013). *Κοινωνιολογικές Προσεγγίσεις του Φύλου*. Αθήνα: Διάδραση.

ΕΛΣΤΑΤ (2019). Διδακτικό Προσωπικό των Δημοσιών Ενιαίων Λυκείων, κατά Κλάδο, Φύλο, Περιφέρεια και Νομό. Προσπελάστηκε στις 10 Ιανουαρίου 2024 από https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SED23/2019

Kwan, S. (2021). *Feminist Visions of the Future of Women's Work*. Toronto: OCAD University.

Perez, C. (2019). *Αόρατες Γυναίκες* (μτφ. Κ. Γουλέτη & Β. Μήσιου). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Ρεντετζή, Μ. (2006). Εισαγωγή στην Ελληνική Έκδοση. Στο L. Schiebinger, *Ο Νους δεν Έχει Φύλο; Οι Γυναίκες στις απαρχές της Νεωτερικής Επιστήμης* (σσ. 19-56). Αθήνα: κάτοπτρο.

Walkerdine, V. (2013). *Αποκλείοντας τα Κορίτσια:Κορίτσια και μαθηματικά* (Ι. Φ. Βλαχόπουλος μτφρ.). Αθήνα: Gutenberg. (Πρωτότυπη έκδοση 1998).

Walshaw, M. (2016). Michel Foucault. In E. Freitas & M. Walsaw (eds), *Alternative Theoritical Frameworks for Mathematics Education Research* (pp. 39-64). Springer International Publishing Switzerland.

Willig, C. (2013). *Introducing Qualitative Research in Psychology*. New York: Open University Press.

Χρονάκη, Α. (2013). Εισαγωγή της Επιμελήτριας. Αποκλείοντας τα Κορίτσια: Μύθοι, Σκιές και Πραγματικότητες για τη σχέση φύλου και μαθηματικών. Στο Α. Χρονάκη (Επιμ.), *Αποκλείοντας τα Κορίτσια: Κορίτσια και Μαθηματικά* (σσ. 13-43). Αθήνα: Gutenberg.

Η ΕΝΝΟΙΑ PEREZHIVANIE ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αγγελική Μάλη[1], Paul Hernandez Martinez[2], Μαρίνος Αναστασάκης[3], Ειρήνη Κούβελα[4] και Stephanie Treffert-Thomas[5]

[1]University of Crete, Greece; a.mali@uoc.gr

[2]Swinburne University of Technology, Australia; phernandezmartinez@swin.edu.au

[3]University of Crete, Greece; m.anastasakis@uoc.gr

[4]University of Applied Sciences Wiener Neustadt, Austria; eirini.kouvela@fhwn.ac.at

[5]Loughborough University, UK; s.thomas@lboro.ac.uk

Perezhivanie είναι η έννοια του Vygotsky που διερευνά την αλληλεπίδραση μεταξύ της νόησης και του συναισθήματος ενός ατόμου κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης του μέσα σε ένα δεδομένο περιβάλλον. Η έννοια αυτή έμεινε ανολοκλήρωτη από τον Vygotsky και μεταγενέστεροι μελετητές συνέβαλαν στην ανάπτυξή της. Πρόσφατα, υπήρξε αυξημένη προσοχή από ερευνητές που ενδιαφέρονται για την εκπαίδευση της πρώιμης παιδικής ηλικίας, ενώ η εφαρμογή της στη Διδακτική των Μαθηματικών παραμένει περιορισμένη. Η παρούσα εργασία προτείνει την υιοθέτηση της perezhivanie ως συνεκτικού πλαισίου για την εξέταση της ανάπτυξης ενός ατόμου και μελετά πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην έρευνα για τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Στην εμπειρική εκπαιδευτική έρευνα, η perezhivanie έχει χρησιμοποιηθεί ως αναλυτική προσέγγιση για την εξέταση της διασύνδεσης του συναισθήματος και της νόησης (π.χ. Fleer & Hammer, 2013) ή της αλληλεπίδρασης μεταξύ του ατόμου και του περιβάλλοντος (π.χ. Chen, 2015). Πρόσφατα, η έννοια αυτή συγκέντρωσε αυξημένη προσοχή από ερευνητές και ερευνήτριες που διερευνούν θέματα όπως το συναίσθημα, τα κίνητρα και η υποκειμενικότητα.

Ο όρος perezhivanie, που προέρχεται από τις ρωσικές λέξεις "zhivat" (ζει) και "pere" (μεταφέρει κάτι πάνω από κάτι), χαρακτηρίζει μια ακολουθία προσωπικά σημαντικών και συναισθηματικά φορτισμένων εμπειριών. Διερευνά τον τρόπο με τον οποίο το άτομο κινείται διαμέσου και ξεπερνά αυτές τις εμπειρίες, διαμορφώνοντας το άτομο το οποίο γίνεται. Παρά τη σπάνια χρήση της έννοιας στην ερευνητική βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών ή των Φυσικών Επιστημών, η έννοια perezhivanie είναι μια σημαντική έννοια με αξιοσημείωτη έμφαση στην έρευνα για την εκπαίδευση της πρώιμης παιδικής ηλικίας. Δίνει έμφαση στη διασύνδεση

ατόμου-περιβάλλοντος και γνώσης-συναισθήματος ως βασικών παραγόντων για την εξήγηση της ανάπτυξης ενός ατόμου, μια πτυχή που συχνά παραβλέπεται στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Παραδοσιακά, ορισμένες θεωρητικές προσεγγίσεις στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν υιοθετήσει μια νοητική γνωστική οπτική, εστιάζοντας σε πτυχές όπως η χρήση του αλφαριθμητικού συμβολισμού στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Άλλες προσεγγίσεις έχουν εξετάσει τα συναισθήματα από ατομική σκοπιά, παραμελώντας την επίδραση του κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου σε αυτά τα συναισθήματα και, κατά συνέπεια, στις γνωστικές διαδικασίες των ατόμων. Τέτοιες προσεγγίσεις αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν την εγγενή σχέση μεταξύ νόησης και συναισθήματος. Σε απάντηση, ευθυγραμμιζόμαστε με την άποψη του Radford (2014) ότι η μελέτη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και των μαθητριών θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μια εξελισσόμενη διαλεκτική διαδικασία που διαμορφώνεται από πολιτισμικά και ιστορικά συγκροτημένες μορφές γνώσης. Αυτό περιλαμβάνει ενσώματες μορφές σκέψης, συναισθηματικές εμπειρίες και ηθική δέσμευση, μεταξύ άλλων παραγόντων.

Ως εκ τούτου, υποστηρίζουμε ότι η perezhivanie χρησιμεύει ως πολύτιμο ερευνητικό εργαλείο για την ολοκληρωμένη εξέταση της ατομικής ανάπτυξης. Ωστόσο, η εννοιολόγηση και η διερεύνηση της perezhivanie παραμένουν σίγουρα ένα "ανοιχτό ερευνητικό πρόβλημα", όπως σημειώνει ο Radford (2014, σ. 275). Κατά συνέπεια, η παρούσα εργασία επιδιώκει να συμβάλει στην προώθηση της κατανόησης και της αξιοποίησης της perezhivanie στο πλαίσιο της έρευνας για τη Διδακτική των Μαθηματικών. Η διερεύνησή μας περιλαμβάνει την εξέταση της έννοιας στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών και των συναφών πεδίων.

Για να ξεκινήσουμε αυτή τη διερεύνηση, παρέχουμε μια επισκόπηση του περιβαλλοντικού προβλήματος όπως το εννοιολόγησε ο Vygotsky (1934/1994) και μια διευκρίνιση της έννοιας perezhivanie όπως διατυπώθηκε αρχικά από τον ίδιο και επεκτάθηκε αργότερα από άλλους μελετητές. Στη συνέχεια, διερευνούμε τις συνδέσεις της perezhivanie με άλλες έννοιες στη βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ενώ οι έννοιες αυτές φαίνεται να χρησιμοποιούνται για τη διερεύνηση παρόμοιων ζητημάτων με αυτά που αντιμετωπίζει η perezhivanie, εξετάζουμε με ποιους τρόπους η perezhivanie προσφέρει μια βαθιά και λεπτομερή κατανόηση της ατομικής ανάπτυξης που δεν αποτυπώνεται από κάποιες άλλες έννοιες στη βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών. Επίσης, προτείνουμε την προστιθέμενη αξία της perezhivanie σε τέσσερις βασικούς τομείς μελέτης στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Η ΕΝΝΟΙΑ PEREZHIVANIE

Τα Perezhivaniya αναφέρονται σε γεγονότα, επεισόδια, δραστηριότητες, περιστατικά ή εμπειρίες στα οποία τα άτομα συμμετέχουν ενεργά. Αυτά τα συμβάντα στη ζωή ενός ατόμου παίζουν καθοριστικό ρόλο στην απάντηση του ερωτήματος "Ποιος είμαι;", αποκαλύπτοντας το παρελθόν του και διαμορφώνοντας το άτομο που είναι τώρα—αναδεικνύοντας τις εμπειρίες που έχει βιώσει και τον τρόπο με τον οποίο αυτές το έχουν διαμορφώσει. Στο πλαίσιο της μάθησης, μία perezhivanie εμπειρία συμβάλλει στη διαδικασία μάθησης όταν οι μαθητές και οι μαθήτριες διακρίνουν νόημα στο περιβάλλον τους, αξιολογώντας την εμπειρία ως σημαντική (Kim, 2021). Στην ουσία, η εμπειρία προσφέρει "αυτό που είναι διαθέσιμο στο άτομο για να κάνει κάτι" (van Lier, 2004, σ. 90), με αποτέλεσμα η εμπειρία να αποκτά αναπτυξιακό νόημα. Κατά συνέπεια, τα perezhivaniya αντιπροσωπεύουν προσωπικά σημαντικές πτυχές για τα άτομα, παρόμοιες με τα κεφάλαια της αυτοβιογραφίας τους—γεγονότα που αλλάζουν τη ζωή τους και είναι συναισθηματικά φορτισμένα.

Ως ερευνητικό εργαλείο, τα perezhivaniya χρησιμεύουν ως μονάδες της συνείδησης ή της προσωπικότητας στο σύνολό της. Περιλαμβάνουν διάφορες πτυχές όπως η διάνοια, το συναίσθημα, η μνήμη και η προσοχή. Κάθε perezhivanie είναι μια ολοκληρωμένη εμπειρία με τη δική της ιστορία, αρχή και εξέλιξη προς την ολοκλήρωσή της (Dewey, 1939). Τα perezhivaniya διαθέτουν διττή φύση, καθώς είναι υποκειμενικά και αντικειμενικά, προσωπικά και περιβαλλοντικά. Για παράδειγμα, η απώλεια μιας θέσης εργασίας μπορεί να έχει διαφορετικό νόημα για έναν νέο άνθρωπο σε σύγκριση με κάποιον για τον οποίο η θέση εργασίας αποτελεί ολόκληρη τη σταδιοδρομία του. Μια perezhivanie λειτουργεί ως πρίσμα μέσα από το οποίο το άτομο ερμηνεύει τις επιπτώσεις του περιβάλλοντός του. Ο Vygotsky (1934/1994, σ. 342) παρατήρησε ότι "στο perezhivanie, έχουμε πάντα να κάνουμε με μια αδιαίρετη ενότητα προσωπικών χαρακτηριστικών και καταστασιακών χαρακτηριστικών".

Αυτές οι εμπειρίες είναι μετασχηματιστικές υπό την έννοια ότι θέτουν προκλήσεις, απαιτώντας από τα άτομα να τις ξεπεράσουν, να επιβιώσουν από αυτές ή να συνεχίσουν να ζουν (überleben). Τα perezhivaniya δεν περιορίζονται σε οδυνηρά περιστατικά—υπάρχουν και θετικά perezhivaniya, όπως ένα επιτυχημένο ρίσκο που οδηγεί σε μια νέα φάση ζωής (Kotik-Friedgut, 2007).

Η επιτυχής διαχείριση μιας perezhivanie συνεπάγεται την αλλαγή της κοινωνικής κατάστασης, είτε με τη μετατροπή του αντικειμένου της δραστηριότητας, είτε του υποκειμένου, είτε και των δύο. Σύμφωνα με τον Blunden (2016), η ανάπτυξη προκύπτει από μια διαδικασία κάθαρσης. Στην αρχαία Ελλάδα, η κάθαρση αναφερόταν στην εμπειρία των θεατών

κατά τη διάρκεια μιας παράστασης, όπου εξωτερικεύονταν τα συναισθήματα με το να συμπάσχουν με τους ερμηνευτές που υποδύονταν συναισθηματικές εμπειρίες, με αποτέλεσμα ένα αποτέλεσμα "κάθαρσης". Ο Blunden σημειώνει ότι ο Φρόιντ (1914) γνώριζε την perezhivanie και χρησιμοποίησε την ψυχανάλυση για να βοηθήσει τους ασθενείς να θυμηθούν και να ξαναζήσουν συναισθηματικές εμπειρίες. Η ψυχαναλυτική διαδικασία περιλαμβάνει την επεξεργασία, το ξεπέρασμα, την επιβίωση, την υπέρβαση ή τον υποβιβασμό της εμπειρίας κατά Χέγκελ. Αυτή η διαδικασία απαιτεί συχνά τη βοήθεια ενός άλλου ατόμου, όπως ενός δασκάλου ή θεραπευτή, ικανού να αντικειμενοποιήσει και να αντανακλά τα συναισθήματα του ατόμου, να το καθοδηγήσει και να χρησιμοποιήσει πολιτισμικούς πόρους για να το βοηθήσει να προσαρμοστεί στη νέα του κατάσταση.

Η έννοια της perezhivanie συμβάλλει επίσης σε μια κατανόηση λιγότερο δραματικών εμπειριών. Οι προαναφερθείσες αρχές εφαρμόζονται σε μικρές χαρές και αμηχανίες που κολλάνε στο μυαλό του ατόμου, διαμορφώνοντας την ανάπτυξή του με την πρόκληση των συναισθηματικών του αντιδράσεων και της σύνδεσης με τα κίνητρά του, ακόμη και χωρίς να φτάνουν το μέγεθος των τραυμάτων που αλλάζουν τη ζωή του ατόμου.

PEREZHIVANIE ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρά τις δυνατότητές της, η έννοια perezhivanie εμφανίζεται σπάνια στην έρευνα για τη Διδακτική των Μαθηματικών. Σε αυτή την ενότητα, στοχεύουμε στην κατανόηση της έννοιας της perezhivanie εξετάζοντας κριτικά, από ένα σύνολο σχετικών εννοιών, τις έννοιες των βασικών αξιομνημόνευτων γεγονότων (Key Memorable Events - KMEs) και των εννοιών κατωφλίου (Threshold Concepts), οι οποίες προσπαθούν να διαφωτίσουν ανάλογα φαινόμενα στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Τα Βασικά Αξιομνημόνευτα Γεγονότα (Key Memorable Events - KMEs) αναφέρονται σε περιστατικά στην τάξη που συνοδεύονται από έντονα θετικά ή αρνητικά συναισθήματα και αποτυπώνονται ως σημαντικά στη μνήμη των μαθητών και των μαθητριών λόγω των επιπτώσεών τους στη μάθηση (Marmur & Koichu, 2018). Τα KMEs μπορούν να χρησιμεύσουν ως θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση συναισθηματικών στιγμών και την απόκτηση γνώσεων κατα τη μαθησιακή διαδικασία. Επιτρέπουν την ανάκληση συναισθηματικά φορτισμένων γεγονότων που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα άτομα. Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να διερευνηθεί ο ρόλος του συναισθήματος στις εμπειρίες των μαθητών και των μαθητριών κατά τη διάρκεια της μάθησης των μαθηματικών, αναδεικνύοντας έναν παραλληλισμό με την έννοια της perezhivanie. Ωστόσο, η διάκριση έγκειται στις συνέπειες αυτών των εμπειριών για την ατομική ανάπτυξη. Ενώ τα KMEs παρέχουν ένα εργαλείο για την απαρίθμηση και κατηγοριοποίηση αξιομνημόνευτων γεγονότων που μένουν στη μνήμη ενός ατόμου και μπορεί να επηρεάσουν τη μάθησή του, η perezhivanie προσφέρει μια πιο λεπτομερή διαδικασία. Η perezhivanie εξετάζει διάφορες πτυχές με στόχο να παρέχει μια βαθύτερη κατανόηση της κατάστασης και του αντίκτυπού της στη μαθησιακή πορεία και τη συνολική ανάπτυξη του ατόμου.

Η αξιοποίηση των KMEs ως αναλυτικού εργαλείου για την έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών απαιτεί ειδικές μεθόδους, όπως η προσέγγιση της συνέντευξης διεγερμένης ανάκλησης (stimulated recall interview). Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει την καθοδήγηση των μαθητών και των μαθητριών στην ανάκληση των εμπειριών τους από ένα συγκεκριμένο μάθημα, προτρέποντάς τους να μοιραστούν ιδέες σχετικά με τις διαδικασίες σκέψης τους. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή έχει αντιμετωπίσει κριτική σχετικά με την ικανότητά της να προσεγγίσει με ακρίβεια τη σημασία κάθε γεγονότος στη μάθηση των μαθητών και των μαθητριών.

Αντί να βασίζεται στους μαθητές/τριες να ανακαλέσουν στη μνήμη τους ό,τι ήταν ευδιάκριτα σημαντικό για αυτούς, η μέθοδος της διεγερμένης ανάκλησης τους υπενθυμίζει συγκεκριμένα γεγονότα (π.χ. που διαδραματίστηκαν στην τάξη), οδηγώντας τους σε σχολιασμό.

Ο ισχυρισμός μας είναι ότι μια εμπειρία αποκτά σημασία για ένα άτομο (όχι απαραίτητα για τους άλλους) και επηρεάζει τα αποτελέσματα όταν περιλαμβάνει την υπέρβαση μιας δύσκολης κατάστασης, με αποτέλεσμα μία διαδικασία κάθαρσης. Παρά την ικανότητα των KMEs να εντοπίζουν και να κατηγοριοποιούν συναισθηματικά φορτισμένα γεγονότα κατά τη μάθηση των μαθηματικών, δεν υπάρχει σαφής κατανόηση του κατά πόσο οι μαθητές και οι μαθήτριες αναλαμβάνουν δράση με βάση αυτά τα γεγονότα. Σε μια πρόσφατη μελέτη των Marmur και Koichu (2018), όπου χρησιμοποιήθηκαν KMEs για τον εντοπισμό αξιομνημόνευτων περιστατικών κατά τη διάρκεια προπτυχιακών μαθηματικών φροντιστηρίων, οι περισσότεροι φοιτητές και οι περισσότερες φοιτήτριες αναφέρθηκαν σε γεγονότα που επηρέασαν το κίνητρό τους για την εκμάθηση μαθηματικών (π.χ. "Ήταν όμορφο. Μου άνοιξε τα μάτια."), αλλά δεν επηρέασαν την εμπλοκή τους με τα μαθηματικά. Τα γεγονότα που αναφέρθηκαν δεν υποδεικνύουν σαφώς αν οι φοιτητές ή οι φοιτήτριες άλλαξαν τις μαθησιακές τους προσεγγίσεις ή αν τα γεγονότα αυτά επηρέασαν την ταυτότητά τους ως μαθητών ή μαθητριών των μαθηματικών—στοιχεία ζωτικής σημασίας για την perezhivanie.

Σε αντίθεση με τα KMEs που εστιάζουν σε συναισθηματικές πτυχές της μάθησης, οι threshold έννοιες είναι ζωτικής σημασίας για την κατάκτηση ενός συγκεκριμένου τομέα γνώσης. Οι Meyer και Land (2006) τις όρισαν ως πύλες που ανοίγουν νέους και προηγουμένως απρόσιτους τρόπους κατανόησης ενός θέματος. Περιέγραψαν πέντε χαρακτηριστικά για τον προσδιορισμό των threshold εννοιών: (1) είναι μετασχηματιστικές, προκαλώντας μια αλλαγή στην αντίληψη ενός ατόμου για ένα θέμα, (2) είναι μη αναστρέψιμες, υποδηλώνοντας μια διαρκή αλλαγή στην αντίληψη, (3) είναι ενοποιητικές, επιτρέποντας συνδέσεις μεταξύ προηγουμένως άσχετων εννοιών, (4) είναι οριοθετημένες, ευρισκόμενες συχνά στα εννοιολογικά σύνορα μεταξύ επιστημονικών πεδίων και (5) είναι προβληματικές, αποτελώντας εγγενή πρόκληση για την κατανόηση.

Στην ερευνητική βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών, οι Breen και O'Shea (2016) πρότειναν ότι τα όρια, οι συναρτήσεις, τα σύμπλοκα και οι ομάδες πηλίκου διαθέτουν αυτά τα χαρακτηριστικά και μπορούν να θεωρηθούν threshold έννοιες στην μαθηματική ανάλυση και

στη θεωρία ομάδων. Υποστήριξαν ότι οι συμβατικές προσεγγίσεις διδασκαλίας και τα προγράμματα σπουδών στα προπτυχιακά μαθηματικά οδηγούν συχνά στην απομνημόνευση του περιεχομένου και των διαδικασιών, με αποτέλεσμα την επιφανειακή ή απομνημονευμένη μάθηση. Για να αντιμετωπίσουν αυτά τα ζητήματα, οι Breen και O'Shea πρότειναν μια στροφή από ένα πρόγραμμα σπουδών που είναι δομημένο γύρω από τη γραμμική διδασκαλία του περιεχομένου και των μαθηματικών δομών σε ένα πρόγραμμα που επικεντρώνεται στις threshold έννοιες. Αυτή η προσέγγιση, με αναδρομικό σχεδιασμό, επιτρέπει στους μαθητές και στις μαθήτριες να επανέρχονται και να ενισχύουν τις threshold έννοιες καθ' όλη τη διάρκεια του μαθήματος, προωθώντας τη βαθύτερη κατανόηση του αντικειμένου.

Οι threshold έννοιες παρέχουν ένα μέσο για τον προσδιορισμό κομβικών θεμάτων που χρησιμεύουν ως πύλες, αντιπροσωπεύοντας κρίσιμα σημεία στη μαθηματική ανάπτυξη ενός μαθητή ή μιας μαθήτριας. Ενώ οι έννοιες αυτές συνδέονται με τις γνωστικές πτυχές της μάθησης των μαθηματικών, περιλαμβάνοντας όσα πρέπει να μάθει κανείς ή καμία για να κατακτήσει ένα συγκεκριμένο θέμα, ο μετασχηματιστικός και προκλητικός χαρακτήρας τους συνεπάγεται ότι η κατανόηση μιας threshold έννοιας από έναν μαθητή ή μια μαθήτρια μπορεί να οδηγήσει σε συναισθηματικά φορτισμένες καταστάσεις. Αυτή η συναισθηματική πτυχή δεν αναγνωρίζεται ούτε λαμβάνεται υπόψη από τις threshold έννοιες. Από την άποψη αυτή, η perezhivanie προσφέρει μια πιο ολοκληρωμένη προοπτική, αποτυπώνοντας την αλληλεπίδραση μεταξύ γνωστικών και συναισθηματικών φαινομένων κατά τη διάρκεια της διαδρομής ενός μαθητή ή μιας μαθήτριας για την κατάκτηση μιας threshold έννοιας.

Συνοψίζοντας, τα ΚΜΕ χρησιμεύουν ως πολύτιμο εργαλείο για την ταξινόμηση συναισθηματικά φορτισμένων στιγμών και την εξήγηση διαφόρων φαινομένων σε περιβάλλοντα μάθησης μαθηματικών. Ενισχύουν το σχεδιασμό μαθημάτων αναλύοντας τις συναισθηματικές αντιδράσεις των μαθητών και των μαθητριών σε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις. Ωστόσο, τα ΚΜΕs δεν επαρκούν για να παρέχουν μια ολοκληρωμένη κατανόηση της επιρροής που ασκούν οι συναισθηματικά φορτισμένες καταστάσεις στη μετέπειτα μάθηση και εμπλοκή των μαθητών και των μαθητριών με το μαθηματικό περιεχόμενο. Από την άλλη πλευρά, η επιλογή μιας threshold έννοιας ως πλαίσιο μπορεί να είναι πολύτιμη (1) για τη διερεύνηση της μαθηματικής ανάπτυξης ενός ατόμου, και (2) για να εισάγει την perezhivanie ως εργαλείο ανάλυσης της εμπλοκής των μαθητών και των μαθητριών με μία threshold έννοια. Σε

αντίθεση με τα KMEs, η perezhivanie προσδιορίζει τις σημαντικές εμπειρίες ενός ατόμου σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον, λαμβάνοντας υπόψη τον συνεχή αναστοχασμό σχετικά με αυτές τις εμπειρίες που χαρακτηρίζουν την ανάπτυξη του ατόμου και το αποτέλεσμα της ανάπτυξης αυτής—το ποιος ή ποια έγινε το άτομο μετά από τις εμπειρίες.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΗΣ PEREZHIVANIE ΣΕ ΤΟΜΕΙΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αντλώντας στοιχεία από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, επισημαίνουμε τέσσερις τομείς έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών, όπου η perezhivanie θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως πολύτιμο ερευνητικό εργαλείο. Ενώ η πλειονότητα των εμπειρικών ερευνών που χρησιμοποιούν την perezhivanie έχει επικεντρωθεί στην πρώιμη παιδική ηλικία (early years education), η δική μας εστίαση είναι στη μελέτη μεγαλύτερων ηλικιακά μαθητών και μαθητριών.

Ο πρώτος τομέας έρευνας αφορά στη διερεύνηση των εκπαιδευτικών μεταβάσεων, όπως η μετάβαση στα μαθηματικά πανεπιστημιακού επιπέδου, και τον εντοπισμό των μαθητών και των μαθητριών που μπορεί να κινδυνεύουν να εγκαταλείψουν το πανεπιστήμιο. Η μετάβαση στο πανεπιστήμιο είναι συχνά μια ιδιαίτερα συναισθηματική εμπειρία για πολλούς μαθητές και μαθήτριες, όπου οι εμπειρίες του παρελθόντος διαπλέκονται με τις κοινωνικές σχέσεις και τις υλικές πτυχές του νέου περιβάλλοντος. Εξετάζοντας το πρίσμα μέσα από το οποίο τα άτομα ερμηνεύουν τα μεταβατικά γεγονότα, οι ερευνητές και οι ερευνήτριες μπορούν να κατανοήσουν τις καταστάσεις που διευκολύνουν ή εμποδίζουν μια επιτυχή μετάβαση. Αυτή η διερεύνηση μπορεί να περιλαμβάνει την τεκμηρίωση ενός αποθετηρίου εμπειριών perezhivaniya που συλλέγονται από διαχρονικά (longitudinal) δεδομένα ή διαπολιτισμικές συγκρίσεις. Ο καθαρτικός χαρακτήρας αυτών των εμπειριών είναι εμφανής, δεδομένου ότι η μετάβαση στο πανεπιστήμιο αποτελεί καθοριστικό γεγονός στη ζωή των φοιτητών και των φοιτητριών , το οποίο θεωρείται από ορισμένους και ορισμένες ως "ιεροτελεστία μετάβασης" ή ως ευκαιρία για προσωπική μεταμόρφωση, διαμορφώνοντας έτσι την ατομική ανάπτυξη.

Ο δεύτερος τομέας που προτείνουμε αφορά στη μελέτη της μαθηματικής ανθεκτικότητας (mathematical resilience). Η έρευνα έχει συνδέσει την ανθεκτικότητα με τις γνωστικές και συναισθηματικές ικανότητες των ατόμων να διαχειρίζονται τα εμπόδια και τις δύσκολες καταστάσεις κατά τη μαθησιακή διαδικασία, μετατρέποντάς τες σε υποστηρικτικές εμπειρίες (Hutauruk & Priatna, 2017). Η Perezhivanie προσφέρει έναν ισχυρό φακό

για τη διερεύνηση της ανθεκτικότητας ως σχεσιακής δυναμικής μεταξύ του ατόμου και του περιβάλλοντός του. Η έρευνα σχετικά με τα perezhivaniya των ανθεκτικών μαθητών και μαθητριών—που αντανακλά τις βιωμένες εμπειρίες της υπέρβασης των δύσκολων καταστάσεων—μπορεί να ρίξει φως σε πρακτικές που προάγουν τις διαθέσεις που επιτρέπουν στα άτομα να κινηθούν στο περιβάλλον τους με επωφελείς τρόπους (βλ. Hernandez-Martinez & Williams, 2013).

Ένας τρίτος κεντρικός τομέας έρευνας περιλαμβάνει τη διερεύνηση των αποφάσεων που αλλάζουν τη ζωή και σχετίζονται με τη μαθηματική εκπαίδευση, ιδίως τις επιλογές που κάνουν οι γυναίκες ή άλλες υποεκπροσωπούμενες ομάδες που ακολουθούν σταδιοδρομία με μαθηματικές απαιτήσεις. Η perezhivanie χρησιμεύει ως πολύτιμο εργαλείο για την κατανόηση αυτών των αποφάσεων, όπου οι αντικειμενικές συνθήκες φιλτράρονται μέσα από το φακό των έμφυλων ή φυλετικών υποκειμενικοτήτων. Η αξιοποίηση της perezhivanie για την ερμηνεία αυτών των επιλογών παρέχει μια ολοκληρωμένη προοπτική για την πορεία ζωής των ατόμων αυτών των ομάδων.

Ένας τελευταίος τομέας ενδιαφέροντος επικεντρώνεται στη μελέτη της διαδρομής και της σταδιοδρομίας των ατόμων που γίνονται επαγγελματίες μαθηματικοί. Μία μελέτη αυτού του τύπου, χρησιμοποιώντας την perezhivanie ως ερευνητικό εργαλείο, επιδιώκει να εντοπίσει τα γεγονότα που πυροδότησαν το ενδιαφέρον ενός ατόμου για τα μαθηματικά και τους παράγοντες του πλαισίου που του επέτρεψαν να διατηρήσει ή να καλλιεργήσει τη μαθηματική του ταυτότητα. Παραδόξως, υπάρχει περιορισμένη έρευνα σχετικά με τις αφηγήσεις για το πως είναι ή γίνεται κάποιος ή κάποια μαθηματικός ή τις διαφορετικές διαδρομές προς το να γίνει μαθηματικός. Οι στερεοτυπικές απόψεις για τους μαθηματικούς ως "ιδιοφυΐες" ή "εκκεντρικούς" επιμένουν μεταξύ των μαθητών, των μαθητριών και της κοινωνίας γενικότερα, αποθαρρύνοντας πολλούς και πολλές από το να ακολουθήσουν μια σταδιοδρομία στα μαθηματικά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα εργασία περιέγραψε την έννοια της perezhivanie, όπως αρχικά σχεδιάστηκε από τον Vygotsky και στη συνέχεια επεκτάθηκε από διάφορους μελετητές. Κάναμε συγκρίσεις μεταξύ αυτής της έννοιας και άλλων στη βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών, που μοιράζονται ομοιότητες με την perezhivanie. Επιπλέον, διευκρινίσαμε τον τρόπο με τον οποίο η perezhivanie μπορεί να εφαρμοστεί στην έρευνα για τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Σε αυτήν την εργασία, υποστηρίζουμε ότι η perezhivanie είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της νόησης, του συναισθήματος και των προσωπικών και περιβαλλοντικών παραγόντων με τρόπο που άλλα θεωρητικά πλαίσια μπορεί να μην προσφέρουν. Σημαντικά, η προσέγγιση αυτή επιτρέπει στους ερευνητές και στις ερευνήτριες να εξετάσουν πως αυτά τα στοιχεία διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη ενός ατόμου, παρέχοντας ευρήματα που μπορούν να συμβάλουν στη βελτίωση της κατανόησης τόσο στην έρευνα όσο και στην πρακτική της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η perezhivanie έχει σπάνια αξιοποιηθεί για τη διερεύνηση εμπειριών που έχουν σημασία για το άτομο, ωστόσο είναι καιρός να ρίξει φως, ως συνεκτικό πλαίσιο, στην πορεία του ατόμου για την μαθηματική του ανάπτυξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blunden, A. (2016). Translating Perezhivanie into English. *Mind, Culture, and Activity*, *23*(4), 274-283. https://doi.org/10.1080/10749039.2016.1186193

Breen, S., & O'Shea, A. (2016). Threshold concepts and undergraduate mathematics teaching. *PRIMUS*, *26*(9), 837–847. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1191573

Chen, F. (2015). Parents' perezhivanie supports children's development of emotion regulation: a holistic view. *Early Child Development and Care*, *185*(6), 851-867. https://doi.org/g726

Dewey, J. (1939). Having an experience. In J. J. McDermott (Ed.), *The philosophy of John Dewey* (pp. 554–573). University of Chicago Press.

Fleer, M., & Hammer, M. (2013). 'Perezhivanie' in group settings: A cultural-historical reading of emotion regulation. *Australasian Journal of Early Childhood*, *38*(3), 127–134. https://doi.org/10.1177/183693911303800316

Freud, L. (1914). Remembering, repeating and working-through (Further recommendations on the technique of psycho-analysis II). *The standard edition of the complete psychological works of Sigmund Freud* (Vol. XII, pp. 145–156). The Hogarth Press.

Hernandez-Martinez, P., & Williams, J. (2013). "Against the odds": resilience in mathematics students in transition. *British Educational Research Journal*, *39*(1), 45-59. https://doi.org/10.1080/01411926.2011.623153

Hutauruk, A. J. B., & Priatna, N. (2017). Mathematical resilience of mathematics education students. *Journal of Physics: Conference Series*, *895*, 012067. https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012067

Kim, T.-Y. (2021). Perezhivaniya in L2 learning and motivation from a sociocultural perspective: A qualitative analysis of retrospective L2 learning essays. *Learning, Culture and Social Interaction*, *30*, 100521. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2021.100521

Kotik-Friedgut, B. (2007). Email to xmca listserv. https://lchc.ucsd.edu/MCA/Mail/xmcamail.2007_12.dir/0013.html

Marmur, O., & Koichu, B. (2018). Which key memorable events are experienced by students during calculus tutorials? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 347–354). PME.

Meyer, J., & Land, R. (2006). *Overcoming barriers to student understanding: Threshold concepts and troublesome knowledge*. Routledge.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

van Lier, L. (2004). *The ecology and semiotics of language learning: A sociocultural perspective*. Kluwer Academic.

Vygotsky, L. S. (1994). The problem of the environment. In R. van der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 347–348). Blackwell. (Original work published 1934).

Η ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΤΗΣ ΑΙΣΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΝΗΚΕΙΝ - ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Φακούδης Ευάγγελος , Φακούδης Δημοσθένης

Γυμνάσιο Σουφλίου, ΕΠΑΛ Μυκόνου

fakoudis@sch.gr, fakudis@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε μία έρευνα δράση για την εγκαθίδρυση μιας κοινότητας μάθησης σε ένα πολυπολιτισμικό τμήμα της Β΄ Γυμνασίου, μελετάται η ανάπτυξη της συμμετοχής ενός μαθητή ΑμεΑ. Ένας μαθητής που δημιουργούσε πολλά προβλήματα μέσα στην τάξη, αρχίζει να εμπλέκεται με πιο προκλητικά μαθηματικά, αρχίζει να νιώθει μέλος της κοινότητας καθώς δέχεται βοήθεια και υποστήριξη από την ομάδα και τον εκπαιδευτικό, αλλάζει η ταυτότητά του ως μαθητής των μαθηματικών καθώς ευθυγραμμίζεται με την κοινότητα, αλλάζει τις πρακτικές του. Η εργασία αναδεικνύει τη συμπεριληπτική δύναμη της αίσθησης του 'ανήκειν' και πώς αλληλεπιδρούν οι κοινωνικο-πολιτισμικές συνιστώσες της μάθησης: η κοινότητα, η πρακτική, το νόημα και η ταυτότητα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μία μετατόπιση της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση από την οπτική της μάθησης ως «απόκτηση», στη μάθηση ως «συμμετοχή». Οι συμμετοχικές οπτικές θεωρούν την μάθηση ως αλλαγή του τρόπου διαμεσολαβούμενης συμμετοχής σε κοινωνικές και πολιτισμικά αναπτυγμένες πρακτικές (Skott, 2017). Είναι μια τροχιά συμμετοχής στις πρακτικές του λόγου και της σκέψης κι αυτό υπερβαίνει την αναγνώριση ότι οι κοινωνικές πρακτικές προσφέρουν απλώς το πλαίσιο (κοινωνικο-εποικοδομητική θεώρηση), η συμμετοχή σε κοινωνικές πρακτικές είναι αυτό που συγκροτεί τη μάθησή τους (Σακονίδης, 2007).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην κοινωνικοπολιτισμική οπτική της 'πλαισιοθετημένης' μάθησης, οι Lave & Wenger (1991) υποστήριξαν ότι η μάθηση είναι μια διαδικασία 'νόμιμης περιφερειακής συμμετοχής' (Legitimate Peripheral Participation) μέσα σε κοινότητες πρακτικής. Ο Wenger, το 1998 εστίασε περισσότερο στις Κοινότητες Πρακτικής, δημιουργώντας ουσιαστικά μία νέα κοινωνική θεωρία μάθησης στο πλαίσιο των κοινωνικο-πολιτισμικών θεωρήσεων.

Η ταυτότητα στη θεωρία των ΚΠ

Οι Lave & Wenger (1991) υποστήριξαν πειστικά ότι η μάθηση είναι μια κοινωνική πρακτική μέσω της οποίας γνωρίζουμε ποιοι είμαστε. Η ταυτότητα δεν είναι σταθερή αλλά δυναμική και εγκατεστημένη (situated), είναι μία ρευστή δομή, που διαμορφώνεται και αναδιαμορφώνεται από το κοινωνικό πλαίσιο (Nasir, 2002).

Ο Wenger διακρίνει τρεις πτυχές ανάπτυξης ταυτότητας σε μία ΚΠ: (α) εμπλοκή (engagement) για την ενεργή συμμετοχή σε δραστηριότητες, ατομικές ή από κοινού εργασίες, συνομιλίες, χρήση και παραγωγή αντικειμένων, (β) φαντασία (imagination) για τη δημιουργία εικόνων στον χρόνο και τον χώρο που είναι απαραίτητες για την ερμηνεία της συμμετοχής μας στον κοινωνικό κόσμο (Wenger 1998, σ. 176) ή με άλλα λόγια μέσω της φαντασίας αναγνωρίζουμε τη δική μας εμπειρία ως αντανάκλαση ευρύτερων προτύπων, συνδέσεων και διαμορφώσεων και βλέπουμε τις δικές μας πρακτικές ως συνεχείς ιστορίες που ξεκινούν από το παρελθόν και φτάνουν στο μέλλον, (γ) ευθυγράμμιση (alignment) με το πλαίσιο της κοινότητας, όχι με την έννοια της συμμόρφωσης ή της παθητικής συγκατάθεσης αλλά ως μία αμφίδρομη διαδικασία συντονισμού οπτικών, ενεργειών και πλαισίων, ώστε η δράση να έχει τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Η ταυτότητα για τον Wenger είναι μια τροχιά, είναι ένας άξονας πολλαπλής συμμετοχής και έχει πολλαπλά επίπεδα. Ως τροχιές, οι ταυτότητές μας ενσωματώνουν το παρελθόν και το μέλλον στην ίδια τη διαδικασία διαπραγμάτευσης του παρόντος και ο Wenger αναφέρει τέσσερις τύπους τροχιών ταυτοτήτων: εισερχόμενες, εσωτερικές, οριακές και εξερχόμενες.

Η ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΠ

Ο Wenger (1998) προσδιορίζει τέσσερις συνιστώσες (components) της μάθησης: το νόημα (meaning), την πρακτική (practice), την κοινότητα (community) και την ταυτότητα (identity) (σχήμα 1). Αυτές οι συνιστώσες ορίζονται ως εξής:

1. Για τη μάθηση ως ‘ανήκειν’, εννοούμε τις αλλαγές στη συμμετοχή μας στον κοινωνικό χώρο που ορίζεται το εγχείρημά μας και αναγνωρίζεται ως ικανότητα.

2. Για τη μάθηση ως ‘πράττειν’, εννοούμε τις αλλαγές στη χρήση κοινών ιστορικών και κοινωνικών πόρων, πλαισίων και προοπτικών (perspective) που υποστηρίζουν την αμοιβαία εμπλοκή στη δράση.

3. Για τη μάθηση ως ‘νοηματοδότηση’, εννοούμε τις αλλαγές στην αίσθηση του πόσο σημαντικό είναι αυτό που βιώνουμε.

4. Για τη μάθηση ως ‘γίγνεσθαι’, εννοούμε το πώς η μάθηση αλλάζει το ποιοι είμαστε.

Η συμμετοχή στη θεωρία των ΚΠ

Για τον Wenger η μη συμμετοχή δεν θεωρείται ως απλή απουσία συμμετοχής. Η συμμετοχή και η μη συμμετοχή ορίζουν το ένα το άλλο και έχουν διαφορετικά αποτελέσματα στην ταυτότητά μας. Οι εμπειρίες της μη συμμετοχής είναι αναπόφευκτο μέρος της ζωής, αλλά αποκτούν διαφορετικό είδος σημασίας όταν η συμμετοχή και η μη συμμετοχή αλληλεπιδρούν για να ορίσουν το ένα το άλλο (Jansen, 2008). Ο Wenger εκτός από την πλήρη συμμετοχή και την πλήρη μη συμμετοχή, διακρίνει άλλες δύο περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ συμμετοχής και μη συμμετοχής: (α) σε περίπτωση περιφερειακότητας (peripherality) υπάρχει ένα ποσοστό μη συμμετοχής και συμμετοχή που είναι λιγότερη από πλήρης, (β) σε περίπτωση περιθωριοποίησης (marginality) κυριαρχεί η μη συμμετοχή. Έτσι, αναδύεται ένα φάσμα μορφών συμμετοχής με τέσσερις κύριες μορφές: (1) πλήρης συμμετοχή, (2) περιφερειακή συμμετοχή, (3) περιθωριακή συμμετοχή, (4) πλήρης μη συμμετοχή (Wenger, 1998, σελ.164-167). Με βάση τον Ewing (2017) που εξειδικεύει για το σχολείο στο μάθημα των μαθηματικών και με βάση τις παρατηρήσεις από τις έρευνές μας, περιγράφουμε αυτές τις τέσσερις μορφές για το μάθημα των μαθηματικών:

(Α) Πλήρης συμμετοχή: Ένας μαθητής έχει πλήρη συμμετοχή όταν έχει ενεργή εμπλοκή μέσα στην τάξη σε όλες τις εκφάνσεις της, είτε όταν δουλεύει ατομικά στο σχολείο ή στο σπίτι, είτε μέσα στις μαθητικές ομάδες, είτε στην ολομέλεια της τάξης. Εκφράζει τις ιδέες του, γνωρίζει τις νόρμες της τάξης, ξέρει δηλαδή πώς να είναι μέλος της κοινότητας των μαθηματικών αυτής της τάξης, ευθυγραμμίζεται με την κοινότητα, έχει σημαντικές συνεισφορές στον κοινωνικό κόσμο της τάξης, εξετάζει κριτικά τις μαθηματικές ιδέες που προσφέρονται (κάποιες φορές και από τον εκπαιδευτικό).

(Β) Περιφερειακή συμμετοχή: Ένας μαθητής έχει περιφερειακή συμμετοχή όταν έχει συμμετοχή αλλά είναι μερική. Έχει πρόσβαση στις πρακτικές και στους πόρους της μαθηματικής κοινότητας της τάξης και βρίσκεται σε μία διαδικασία μάθησης ‘πώς να είναι μαθητής των μαθηματικών’ αυτής της τάξης (ως προς τους κανόνες, τις πρακτικές, τη χρήση των πόρων).

(Γ) Περιθωριακή συμμετοχή: Ένας μαθητής έχει περιθωριακή συμμετοχή όταν η μη συμμετοχή κυριαρχεί της συμμετοχής. Πολλές φορές δεν κατανοεί τι συμβαίνει μέσα στην τάξη ως προς τα μαθηματικά, δεν έχει πρόσβαση (ή έχει περιορισμένη πρόσβαση) στις πρακτικές και στους πόρους της κοινότητας, δεν μπορεί να διαπραγματευτεί το νόημα, αποσυνδέεται συχνά από τη μαθησιακή διαδικασία της τάξης, τις περισσότερες φορές δεν εκφράζει τις απορίες του ή τις ιδέες του ή τις απόψεις του στην ομάδα ή στην τάξη (και όταν το κάνει αυτό σε μία παραδοσιακή τάξη, δεν λαμβάνεται σοβαρά υπόψη), δεν ξέρει (ή δεν τον ενδιαφέρει πια) πώς να είναι μαθητής των μαθηματικών αυτής της τάξης.

(Δ) Πλήρης μη συμμετοχή: Ένας μαθητής θεωρείται ότι έχει μηδενική συμμετοχή όταν είναι συνεχώς αποσυνδεδεμένος με την κοινότητα της τάξης και αδιαφορεί για ότι συμβαίνει στην κοινότητα σχετικά με τα μαθηματικά.

ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ – ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Σε μία Έρευνα Δράση (στο εξής ΕΔ) με στόχο την εγκαθίδρυση μιας κοινότητας μάθησης σε μία πολυπολιτισμική τάξη της Β΄ Γυμνασίου στην περιοχή της Θράκης (με 9 πλειονοτικούς και 10 μειονοτικούς μαθητές), εξετάστηκε κατά πόσον η προσπάθεια εγκαθίδρυσης μιας κοινότητας μάθησης ενίσχυσε τη συμμετοχή των μαθητών. Η ΕΔ είχε διάρκεια 6 μήνες και τα ερευνητικά εργαλεία ήταν το ημερολόγιο του εκπαιδευτικού, ερωτηματολόγια/δοκίμια, σημειώσεις πεδίου, ημιδομημένες συνεντεύξεις, γραπτές δοκιμασίες και συνεντεύξεις πάνω σ' αυτές και 39 απομαγνητοσκοπημένες διδασκαλίες.

Η ΕΔ είχε 3 φάσεις (Φακούδης & Φακούδης, 2023). Στην **1η φάση** (από 1η έως 14η διδακτική ώρα) ο εκπαιδευτικός αφού οργάνωσε την τάξη σε ανομοιογενείς ομάδες, προσπάθησε να μετατοπίσει τις πρακτικές του σε πρακτικές που καταγράφει η έρευνα ότι συντελούν στη συμμετοχικότητα και την ισότητα μέσα στην τάξη. Στο τέλος της 1ης φάσης πολλοί μαθητές (ακόμα και μειονοτικοί που είχαν πρόβλημα στην ελληνική γλώσσα) άρχισαν να μιλούν, να λένε ιδέες και στρατηγικές και να αισθάνονται ότι κι αυτοί μπορούν να έχουν σημαντικές ιδέες.

Στη **2η φάση** (από την 15η έως την 28η δ.ω.) αφού αναγνωρίστηκε ότι υπήρχαν μαθητές με μειωμένη συμμετοχή, αποφασίστηκε από τη συνέλευση της τάξης οι μαθητές σε κάθε ομάδα να ορίσουν έναν μαθητή 'εκπρόσωπο', ο οποίος θα έλεγε τα συμπεράσματα της ομαδικής εργασίας στην ολομέλεια της τάξης. Αυτό άλλαξε ριζικά την τάξη. Έπαιρναν τον

λόγο μαθητές που δεν μιλούσαν ποτέ και επειδή τις περισσότερες φορές ήταν σωστά αυτά που έλεγαν, το χαίρονταν ιδιαίτερα.

Στην **3η φάση** (από την 29η έως την 44η δ.ω.) συζητήθηκε η αδυναμία κάποιων παιδιών που μπορεί να έδιναν σωστές απαντήσεις σε κάτι που δεν ήταν ιδέα δική τους (κάτι που ήταν αναμενόμενο και επιθυμητό) αλλά δεν είχαν κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες και δεν επέμεναν ώστε να τις κατανοήσουν. Αποφασίστηκε από τη συνέλευση της τάξης να τεθεί ένας νέος κανόνας: «ρωτώ ό,τι δεν καταλαβαίνω και όσες φορές χρειαστεί». Οι μαθητές οικειοποιήθηκαν σε μεγάλο βαθμό το νέο κανόνα της τάξης και αυξήθηκε η έκφραση αποριών και η συμμετοχή τους.

Συνολικά, στο γράφημα 1 αποτυπώνεται η εκτίμηση για τη συμμετοχή των μαθητών σε κάθε φάση της έρευνας δράσης.

Συνοπτική παρουσίαση των μελών της Α΄ Ομάδας

Η Α΄ ομάδα αποτελείται από τον Εφέ, τον Ανάργυρο (1η δυάδα), την Αθηνά και τον Μαχμούτ (2η δυάδα). Ο Εφέ και ο Μαχμούτ είχαν τη χαμηλότερη συμμετοχή μέχρι τότε. Στη συνέχεια θα περιγραφούν κάποια βασικά χαρακτηριστικά της συμμετοχής των παιδιών της 2ης δυάδας.

Αθηνά: Η Αθηνά είναι μία πλειονοτική μαθήτρια από οικογένεια μέσου μορφωτικού επιπέδου, από ένα επαρχιακό χωριό. Φαινόταν ότι είχε κενά από το δημοτικό αλλά είχε καλή επίδοση στην Α΄ Γυμνασίου και ενδιαφερόταν. Πριν την ΕΔ (στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου) δεν έπαιρνε συχνά τον λόγο μέσα στην τάξη αλλά φαινόταν ότι προσπαθούσε. Η επίδοσή της στις γραπτές δοκιμασίες είχε αρχίσει να ανεβαίνει αλλά παρέμενε διστακτική να εκφράσει τις ιδέες της στην ολομέλεια της τάξης.

Μαχμούτ: Ο Μαχμούτ είναι ένας μειονοτικός μαθητής, ΑμεΑ, από ένα επαρχιακό χωριό μέσης απόστασης από την κωμόπολη του Γυμνασίου, με δυσκολίες στην ελληνική γλώσσα. Είχε υιοθετήσει μια αρνητική στάση για τα μαθήματα και η γενικότερη συμπεριφορά του μέσα στην τάξη έκανε τους/τις εκπαιδευτικούς να δυσανασχετούν.

Το ερευνητικό ερώτημα που θέτουμε εδώ, είναι «η έρευνα δράση μετατόπισε και σε ποιο βαθμό τη συμμετοχή του Μαχμούτ;». Για την ανάλυσή του αξιοποιούμε ένα μέρος των ερευνητικών εργαλείων που περιγράφονται παραπάνω και αφορούν τον Μαχμούτ.

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ – Η ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΤΟΥ ΜΑΧΜΟΥΤ

Α΄ Γυμνασίου: Ο Μαχμούτ έχει δυσκολία με την ελληνική γλώσσα. Στην αρχή προσπαθούσε να συμμετάσχει έχοντας πολλά κενά από τις γνώσεις του δημοτικού και δυσκολία έκφρασης, κατανόησης της γλώσσας και ορολογίας. Στη συνέχεια και όσο αυξάνονταν οι απαιτήσεις, άρχισε να μιλάει χωρίς να το σκέφτεται, αρκεί να έπαιρνε το λόγο. Στην αρχή της Α΄ Γυμνασίου η εκτίμηση είναι ότι έχει περιθωριακή συμμετοχή (Γ) και στο τέλος της Α΄ Γυμνασίου η ταυτότητά του ως μαθητής των μαθηματικών έχει εξερχόμενη τροχιά (Γ-).

Στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου: Στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου (Σεπτέμβριος-Νοέμβριος) ο Μαχμούτ ενοχλεί πολλές φορές, διακόπτει συνεχώς και μιλάει για άσχετα θέματα. Ποτέ δεν φαίνεται συνδεδεμένος με αυτό που συζητά η κοινότητα της τάξης και έχει δημιουργηθεί μια αρνητική διάθεση απέναντί του από τα άλλα παιδιά. Γι' αυτό δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή ώστε στην ομάδα που θα τοποθετηθεί, να έχει αποδοχή και βοήθεια. Η επιλογή της Αθηνάς ως δυάδα και του Εφέ στην τετράδα ήταν ιδιαίτερα καθοριστική. Η Αθηνά επιλέχθηκε γιατί είναι πολύ βοηθητική, ήπια και δεν αποσπάται η προσοχή της, ενώ ο Εφέ είναι κι αυτός ήπιος και επίσης δεν θέλει να αποσπάται η προσοχή του από το μάθημα. Δεν ίσχυε το ίδιο για τον Ανάργυρο που εύκολα ξεφεύγει η προσοχή του, αλλά επειδή και ο Ανάργυρος και η Αθηνά επέλεξαν τον Μαχμούτ ως έναν μαθητή που θα ήθελαν να είναι μαζί (έγινε κοινωνιόγραμμα για να χωριστούν σε ομάδες), θεωρήσαμε ότι αυτό ήταν πιο σημαντικό (να είναι δηλαδή με άτομα που τον θέλουν) και στην ανησυχία μας μήπως η συνύπαρξη με τον Ανάργυρο δημιουργήσει προβλήματα, ελπίζαμε ότι η Αθηνά και ο Εφέ θα τα καταφέρουν να τους ελέγχουν. Πριν την ΕΔ ο Μαχμούτ έχει πλήρη μη συμμετοχή (Δ).

1η φάση (1η έως 14η δ.ω.): Στην 1η φάση επιχειρήθηκε να αλλάξει η κουλτούρα της τάξης, παρωθώντας τους μαθητές να αρχίσουν να λένε ιδέες, να αναπτύσσουν στρατηγικές. Υπάρχουν 36 αποτυπωμένες καταγραφές για τον Μαχμούτ σε αυτή τη φάση (Μ2-4 έως Μ2-39) εκ των οποίων οι 16 μόνο είναι συνεισφορές ή προσπάθεια συνεισφοράς στη συζήτηση. Οι υπόλοιπες 20 αφορούν το ότι μιλάει με άλλους, ενοχλεί, διακόπτει, δεν προσέχει, αδιαφορεί, δεν συνεργάζεται, μιλά χωρίς να έχει πάρει το λόγο, φέρεται με αγένεια. Από τη μία υπάρχει μια μείωση των προβλημάτων που δημιουργεί όσο εξελίσσεται η ΕΔ (13 από την 1η έως την 7η δ.ω. και 7 από την 8η έως την 14η), από την άλλη φαίνεται ότι υπάρχουν αρκετές φορές που θέλει να συμμετέχει κι αυτό το κάνει ακόμα κι αν χρειαστεί να δώσει μια οποιαδήποτε απάντηση αρκεί να πάρει το

λόγο, ενώ υπάρχουν φορές που φαίνεται ότι παρακολουθεί και είναι συνδεδεμένος με αυτό που διαπραγματεύεται μέσα στην τάξη. Την 1η ώρα της ΕΔ που θα έπρεπε οι μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές για να μετρήσουν το εμβαδόν της παλάμης τους σε ένα τετραγωνικό πλέγμα, δεν συνεργάζεται, ενοχλεί αρχικά αλλά στη συνέχεια μετράει ένα-ένα τα τετράγωνα του πλέγματος, εφαρμόζει δηλαδή μια αδύναμη στρατηγική αλλά είναι η πρώτη φορά που εμπλέκεται. Εκτιμάται ότι η συμμετοχή του είναι στα πρώτα βήματα μιας περιθωριακής συμμετοχής (Γ).

2η φάση (15η έως 28η δ.ω.): Στη 2η φάση ορίζεται εκπρόσωπος της υποομάδας και της ομάδας του. Υπάρχουν 20 αποτυπωμένες καταγραφές για τον Μαχμούτ σε αυτή τη φάση εκ των οποίων οι 4 μόνο είναι προβληματικές (σε δύο από αυτές μιλάει, σε μία δεν παρακολουθεί και σε μία άλλη δεν συνεργάζεται και τραγουδάει) και είναι κυρίως στα πρώτα μαθήματα της 2ης φάσης. Είναι πολλές οι φορές που είναι συνδεδεμένος με αυτό που συμβαίνει στα μαθηματικά μέσα στην ομάδα και μέσα στην τάξη, δίνει μάλιστα και σωστές απαντήσεις που πολλές φορές είναι σκέψεις της ομάδας κι αυτό είναι ένα πολύ θετικό πρώτο βήμα. Κάποια παραδείγματα:

- *20η διδασκαλία*: μεταφέρει σωστά τη συζήτηση που διαμείφθηκε στην ομάδα, που σημαίνει ότι ενεργοποιείται σε επίπεδο συμμετοχής στην ομάδα (Μ2-54). Πιο αναλυτικά:

  (τους ζητήθηκε να υπολογίσουν τον αριθμό που πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του και δίνει 3452 χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή, χωρίς όμως το πλήκτρο της ρίζας, είπε ένας μαθητής ότι είναι πάνω από 20)
  Κ: Συνεχίζουμε. Λέγε Μαχμούτ. Τι κάνατε εσείς;
  *Μαχμούτ: 30*30, 40*40, 50*50 μετά 60*60 και είδαμε ότι είναι ανάμεσα στο 55 …*

- *22η διδασκαλία*: …., προτείνει τον 31 ως τετραγωνική ρίζα του 841 που δεν είναι σωστό αλλά πράγματι το 31^2 τελειώνει σε 1 και είναι πολύ κοντά στο 841 (Μ2-57).
- *28η διδασκαλία*: απαντά ότι το $\sqrt{50}/2$ είναι 15, σκεπτόμενος ότι η $\sqrt{50}$ είναι πάνω από 7 και μετά πολλαπλασίασε με το 2 αντί να διαιρέσει (Μ2-60).

Στο ερωτηματολόγιο της 9ης δράσης (οι μαθητές αποφάσισαν στα πλαίσια της διαμορφωτικής αξιολόγησης να αυτοαξιολογούνται και να ετεροαξιολογούνται από την ομάδα) οι τρεις μαθητές της ομάδας λένε ότι αναπτύχθηκε η συμμετοχή του Μαχμούτ. Είναι εμφανές ότι κάνει ‘ανοίγματα’ συμμετοχής, αλλά δεν έχει αποποιηθεί πλήρως την κουλτούρα της μη συμμετοχής. Φαίνεται ότι η ταυτότητά του ως μαθητής των

μαθηματικών έχει μπει σε μία εισερχόμενη τροχιά και με βάση την ποιότητα των συνεισφορών παραμένει σε μια περιθωριακή συμμετοχή με εισερχόμενη όμως τροχιά (Γ+).

3η φάση (29η έως 44η δ.ω.): Στη 3η φάση έχει αποφασιστεί να ρωτάνε οι μαθητές ότι δεν καταλαβαίνουν και όσες φορές χρειαστεί. Υπάρχουν 21 αποτυπωμένες καταγραφές για τον Μαχμούτ σε αυτή τη φάση (Μ2-61 έως Μ2-81) εκ των οποίων οι 2 μόνο είναι προβληματικές και όχι σημαντικές. Έχουν σχεδόν εξαφανιστεί τα προβλήματα συμπεριφοράς, ζητάει το λόγο, δεν μιλάει απλά για να πει κάτι, ακούει προσεκτικά, συμμετέχει, ρωτάει, αναρωτιέται για πολύ ενδιαφέροντα σημεία (που σπάνια ρωτούν μαθητές, όπως Μ2-69 και Μ2-78), απαντάει σωστά (Μ2-65, Μ2-80), κάνει πολύ καλή εκτίμηση σε ένα ιδιαίτερο πρόβλημα (Μ2-74). Η ποιότητα των συνεισφορών του γίνεται ολοένα και υψηλότερη. Κάποια παραδείγματα συνεισφορών:

- *30η διδασκαλία*: … Για να βρει την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν ξέρει μία γωνία και την προσκείμενη κάθετη πλευρά αρχικά λέει ότι θα χρησιμοποιήσουμε ημίτονο αλλά στη συνέχεια βρίσκει ότι πρέπει να πάρουμε συνημίτονο ενώ στη συνέχεια ενδιαφέρεται και ρωτά πως βρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών (Μ2-65). Συγκεκριμένα:

  Κ: Μαχμούτ πες την άλλη άσκηση. Η γωνία είναι 68ο
  Μαχμούτ: Ημίτονο είναι .
  Κ: Περίμενε. Η πλευρά 1 τι είναι;
  Μαχμούτ: Προσκείμενη κάθετη
  Κ: Και το χ τι είναι;
  Μαχμούτ: Υποτείνουσα.
  Κ: Και ποιος τριγωνομετρικός αριθμός εμπλέκει την προσκείμενη κάθετη με την υποτείνουσα;
  Μαχμούτ: Συνημίτονο.
  Κ: Μπράβο. Άρα συν68ο=1/χ ή (λέει η Ασιά το συν68ο) 0,37=1/χ
  Μαχμούτ: Αυτό πως το βρίσκουμε;
  Κ: Υπάρχει πίνακας πίσω στο βιβλίο. Θα σου δείξει η Αθηνά. Άρα …

- *39η διδασκαλία*: … Αναρωτιέται αν μπορούμε να βρούμε δύο αγνώστους σε μία εξίσωση, χωρίς να γνωρίζουμε τον έναν από αυτούς, που είναι μία υψηλού επιπέδου μαθηματική σκέψη, προσπαθεί δηλαδή να επεκτείνει τον ορίζοντα της μαθηματικής του γνώσης (Μ2-78).

Η συμμετοχή του Μαχμούτ είναι μεγαλύτερη από τη μη συμμετοχή, έτσι εκτιμούμε ότι είναι στα πρώτα βήματα μιας περιφερειακής συμμετοχής (Β).

Τι λένε άλλοι για τη συμμετοχή του Μαχμούτ

Οι συμμαθητές του στην ομάδα, λένε στην τελική συνέντευξη (τέλος της Β΄ Γυμνασίου) για τον Μαχμούτ:

> *Κ: Για τον Μαχμούτ, παρατήρησες κάποια αλλαγή;*
> *Εφέ: Ναι κύριε, σταμάτησε να ενοχλεί, άρχισε τώρα να λέει μάθημα.*
> *Ανάργυρος: Ναι, ενδιαφέρθηκε λίγο, αν δεν σταματούσαμε λόγω κορονοϊού θα συνέχιζε διαφορετικά.*
> *Αθηνά: Ο Μαχμούτ γενικά, και πέρσι, δεν συμμετείχε καθόλου. Φέτος έμαθε αρκετά… Ήταν ενεργός πάρα πολύ. Ρωτούσε δηλαδή τις απορίες που είχε σε μένα. Και εγώ προσπαθούσα να τα εξηγήσω όσο πιο απλά γινότανε.*

Ο ίδιος λέει ότι αυτό που του άρεσε περισσότερο στην ΕΔ ήταν: «*Στην ομάδα που βοήθαγαν εμένα*». Η Αθηνά στην ίδια ερώτηση, λέει: «*Εκεί που βοηθούσα τα παιδιά στην ομάδα μου. Τον Μαχμούτ που τον βοήθησα και συμμετείχε λίγο περισσότερο. Γιατί μου αρέσει να βοηθάω .. Ναι περισσότερο αυτό μου άρεσε*».

Η κ. Ελευθερία, που κάνει παράλληλη στήριξη σε ένα μαθητή και παρακολούθησε όλη την ΕΔ μέσα στην τάξη, λέει για τον Μαχμούτ: «*Ενώ στην αρχή έκανε φασαρία, μιλούσε, ήθελε να φύγει πιο νωρίς, μετά καθόταν, παρακολουθούσε, έκανε ερωτήσεις. Του άρεσε το περιβάλλον; Του άρεσε που ήταν στην ομάδα; Ο τρόπος διδασκαλίας; Δεν ξέρω. Στα μαθηματικά συμβαίνει μόνο αυτό. Στα άλλα μαθήματα γίνεται χαμός*».

Συνοψίζοντας με όρους των ΚΠ η μάθηση του Μαχμούτ, ξεκίνησε μέσα από μαθηματικά που τράβηξαν την προσοχή του και δεν είχαν προαπαιτούμενες γνώσεις (μάθηση ως 'νοηματοδότηση'). Ακολούθησαν αξιοσημείωτες μετατοπίσεις της μάθησής του στις τέσσερις συνιστώσες της μάθησης, για παράδειγμα η υποστήριξη και το ενδιαφέρον που δέχτηκε από την ομάδα του, τον εκπαιδευτικό και το γεγονός ότι η άποψή του ακούγεται με σεβασμό, τον έκανε να αισθανθεί μέλος αυτής της κοινότητας κι αλλάζει τη συμμετοχή του (μάθηση ως 'ανήκειν'). Η διάθεσή του να γίνει 'ορατός' μέσα στην τάξη μέσα από ενοχλητική συμπεριφορά μετασχηματίζεται σημαντικά λέγοντας κάτι στα μαθηματικά χωρίς να το σκεφτεί ιδιαίτερα, αρκεί να πάρει τον λόγο (μάθηση ως 'πράττειν'). Η ευθυγράμμιση με την κοινότητα (κυρίως στη 2η φάση) μέσα από τη λογοδοσία στην ομάδα και στην ολομέλεια της τάξης (μάθηση ως

‘γίγνεσθαι’ μέσω της ευθυγράμμισης) τον βοήθησε να έχει πρόσβαση στους πόρους της κοινότητας και να συνεισφέρει. Η σημαντικότερη αλλαγή για τον Μαχμούτ, όπως λέει ο ίδιος και συμφωνεί με τα ερευνητικά μας δεδομένα, αυτό που του άρεσε περισσότερο στην ΕΔ, ήταν η βοήθεια και η υποστήριξη που έλαβε και τον έκανε να αισθάνεται ότι είναι κι αυτός μέλος της κοινότητας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάπτυξη της συμμετοχής του Μαχμούτ συμφωνεί με τη μελέτη του Empson (2003) στην οποία η διδασκαλία της εκπαιδευτικού ανέπτυξε τη συμμετοχή δύο μαθητών στις συζητήσεις στην τάξη σε ένα ασφαλές περιβάλλον που τους αντιμετώπιζε ως ικανούς. Η μελέτη περίπτωσης, μας έκανε ορατή την βαθιά αλληλεπίδραση των κοινωνικο-πολιτισμικών συνιστωσών της μάθησης. Η μάθηση μέσα από τη μία συνιστώσα έδινε τη σκυτάλη της στη μάθηση μέσα από άλλη συνιστώσα ενώ στη συγκεκριμένη περίπτωση αναδεικνύεται ιδιαίτερα η μεγάλη συμπεριληπτική δύναμη της αίσθησης του ‘ανήκειν’ που έδωσε τη μεγαλύτερη ώθηση στη συμμετοχή του.

Η εγκαθίδρυση μιας κοινότητας μάθησης στην οποία κυριαρχεί η συνεργασία, η υποστήριξη, η εμψύχωση, η δυνατότητα ανάπτυξης ιδεών και διαφορετικών στρατηγικών μέσα σε ένα πλούσιο αλληλεπιδραστικό περιβάλλον στην ομάδα και στην ολομέλεια της τάξης, η εμπλοκή με κατάλληλα μαθηματικά έργα, μπορεί (δυνητικά) να ενεργοποιήσει όλους τους μαθητές, ως έτσι είναι βαθιά συμπεριληπτική, και μπορεί να αναπτύξει τη μαθησιακή τους ταυτότητα.

Αναδεικνύεται ως επιτακτική η ανάγκη για την επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού ώστε να εστιάζει όχι μόνο στη μάθηση ‘ως πράττειν’ αλλά στη συγκρότηση κοινότητας μάθησης, στην ενδυνάμωση του νοήματός της και στην ανάπτυξη της ταυτότητας του μαθητή ως ‘μαθητή των μαθηματικών’.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Empson, S. B. (2003). Low-performing students and teaching fractions for under-standing: An interactional analysis. *Journal for research in mathematics education*, *34*(4), 305-343.

Ewing, B. (2017). Theorizing participation, engagement and community for primary and secondary mathematics classrooms. Creative Education, 8(6), 788-812.

Jansen, A. (2008). An investigation of relationships between seventh-grade students' beliefs and their participation during mathematics

discussions in two classrooms. Mathematical Thinking and Learning, 10(1), 68-100.
Lave, J. and E. Wenger. (1991). Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation. Cambridge: Cambridge University Press
Nasir, N. I. S. (2002). Identity, goals, and learning: Mathematics in cultural practice. Mathematical thinking and learning, 4(2-3), 213-247.
Skott, J. (2017). Patterns of participation: A participatory Account of Learning to Teach. In Dealing with conceptualisations of learning (pp. 133-143). Brill
Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning, meaning, and identity. Cambridge: Cambridge University Press.
Σακονίδης Χ. (2007). Διδάσκοντας Μαθηματικά στο Γυμνάσιο: Προτάσεις για την αξιοποίηση του διδακτικού υλικού. *Πρόγραμμα Εκπαίδευσης Μουσουλμανοπαίδων*. ΕΚΠΑ. http://repository.edulll.gr/edulll/handle/10795/739 (ανακτ. 30-01-2024)
Φακούδης, Ε., Φακούδης Δ., (2023). Η ανάπτυξη της συμμετοχής των μαθητών σε μία έρευνα δράση για την εγκαθίδρυση μιας κοινότητας μάθησης. Στο «*Σύγχρονες προσεγγίσεις και εφαρμογές των μαθηματικών στην Εκπαίδευση και τις Επιστήμες*». Πρακτικά 38ου Πανελληνίου συνεδρίου της ΕΜΕ (813-822). Σέρρες: ΕΜΕ.

Ο ΘΕΣΜΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Γεωργία Πετροπούλου, Χαρά Παπακανδεράκη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

gpetrop@math.uoa.gr, xara.ppk@gmail.com

Η εργασία διερευνά τυπικούς και άτυπους θεσμούς που δημιουργούν συνθήκες και παράγουν περιορισμούς για τη διδασκαλία των μαθηματικών, ακόμα και στο αυτόνομο πλαίσιο του πανεπιστημίου, σύμφωνα με τις απόψεις μίας ομάδας πανεπιστημιακών διδασκόντων. Από την ανάλυση προκύπτει ότι η επικρατούσα κουλτούρα και τα μέσα του σύγχρονου πολιτισμού, οι θεσμικές αποφάσεις και ασυνέχειες, η παράδοση και η λειτουργία ενός μαθηματικού τμήματος, οι έμψυχοι και άψυχοι πόροι του, είναι τέτοιοι τυπικοί και άτυποι θεσμοί που φαίνεται να διαμορφώνουν τη διδασκαλία ιεραρχικά. Ζήτημα παραμένει το πώς η διδασκαλία θα μπορούσε να επηρεάσει τα ανώτερα αυτής θεσμικά επίπεδα που τη συν-διαμορφώνουν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία στηρίζεται στην εξής παραδοχή: όταν εκπαιδευτικός και μαθητές συναντιούνται γύρω από ένα μαθηματικό αντικείμενο που πρόκειται να διδαχθεί σε μία τάξη, αυτό που θα συμβεί, καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από συνθήκες που υπερβαίνουν αυτές που μπορούν να ανιχνευθούν εκείνη τη στιγμή στην τάξη (Bosch & Gascón, 2014). Σύμφωνα με τον Chevallard (2002) υπάρχει μια ιεραρχία θεσμικών ρυθμίσεων που αλληλεπιδρούν και συν-διαμορφώνουν αυτό που θα συμβεί. Σε αυτή την ιεραρχία, υποστηρίζει ο Chevallard, θα πρέπει οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών να στρέψουν τον ερευνητικό τους φακό, ώστε να κατανοήσουν βαθύτερα τον επιστημονικό και τον πολιτικό της ρόλο. Οι Brown & Clarke (2013) αναδεικνύουν τον θεσμικό παράγοντα ως τόσο ισχυρό που μπορεί να διαμορφώνει τα μαθηματικά, τη μαθηματική εκπαίδευση, ακόμα και την έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση.

Στο πανεπιστήμιο, οι Winsløw et al. (2014) δηλώνουν ότι οι διδάσκοντες, παρά τους βαθμούς ελευθερίας τους, περιορίζονται από θεσμικούς παράγοντες που είναι πέρα από τον έλεγχο του κάθε διδάσκοντα ως ατόμου, και ότι αυτοί οι παράγοντες χαρακτηρίζουν τις διδακτικές πρακτικές σε αυτό το πλαίσιο. Η αυξημένη αυτονομία των πανεπιστημιακών ιδρυμάτων δεν τα κάνει να λειτουργούν ανεξάρτητα από την υπόλοιπη κοινωνία. Οι μαθηματικές και διδακτικές πρακτικές που αναπτύσσονται σε αυτά, υπόκεινται στις επικρατούσες συνθήκες και σε περιορισμούς τόσο εσωτερικούς, όσο και εξωτερικούς του κάθε ιδρύματος. Είναι σημαντική η συστηματική κατανόηση αυτών των

περιορισμών επειδή αποτελεί προϋπόθεση για την ανίχνευση των συνθηκών που είναι απαραίτητες για την αλλαγή του διδακτικού παραδείγματος, αν το ζητούμενο είναι να προσφέρονται στους φοιτητές πιο αυθεντικές μαθηματικές και μαθησιακές εμπειρίες. Και πράγματι, στα μαθηματικά τμήματα, οι εκκλήσεις για αλλαγές πυκνώνουν, με τα ίδια τα τμήματα να αναλαμβάνουν δράσεις για τη βελτίωση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθημάτων που προσφέρουν (Reinholz et al., 2020).

Σε κάθε περίπτωση, η επίδραση του θεσμικού πλαισίου στη διαμόρφωση του διδακτικού περιβάλλοντος και κατά συνέπεια των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών ή των φοιτητών είναι ερευνητικά διαπιστωμένη. Ωστόσο, η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση αντιμετωπίζει αυτόν τον παράγοντα περισσότερο ως φόντο για τα ζητήματα που μελετά, παρά ως κεντρικό ζήτημα μελέτης (Wondem et al., 2023). Σε αυτό το κενό προσπαθεί να συνεισφέρει η παρούσα εργασία. Εδώ, οι θεσμικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών είναι κεντρικό ζήτημα μελέτης. Η εστίαση είναι στο πλαίσιο του πανεπιστημίου. Το πλαίσιο αυτό έχει τη δυνατότητα να αναδείξει την ισχύ της θεσμικής επιρροής, λόγω της αυτονομίας του σε σχέση με τις προηγούμενες βαθμίδες εκπαίδευσης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην επίδραση του θεσμικού πλαισίου στη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο. Η ανθρωπολογική θεωρία της διδακτικής (ATD) προσφέρει μία φιλόδοξη θεωρητική οπτική της ανθρώπινης (και ως εκ τούτου, της διδακτικής) δραστηριότητας, αναδεικνύοντας τη σημασία του ευρύτερου πλαισίου, σε σχέση με το άμεσο πλαίσιο στο οποίο η δραστηριότητα αυτή συμβαίνει (λεπτομέρειες στο Bosch & Gascón, 2014). Το πλαίσιο της ATD προτείνει ένα ιεραρχικό μοντέλο θεσμικών επιπέδων για μία συστηματική ταξινόμηση των συνθηκών και των περιορισμών που συν-διαμορφώνουν τη διδακτική πράξη (Πίνακας 1, λεπτομέρειες στο Chevallard, 2002). Στην ATD, μία συνθήκη είναι περιορισμός για ένα φυσικό πρόσωπο ή για έναν οργανισμό όταν δεν μπορεί να τροποποιηθεί από το πρόσωπο ή τον οργανισμό, τουλάχιστον βραχυπρόθεσμα. Η παροχή ενός τέτοιου λεπτομερούς μοντέλου θεσμικών επιπέδων, είναι σημαντική συνεισφορά της ATD (Artigue & Winsløw, 2010). Η κλίμακα των επιπέδων αποτυπώνεται στον Πίνακα 1 (μαζί με απλά παραδείγματα).

Πολιτισμός	π.χ. «δυτική κουλτούρα»
Κοινωνία	πολιτεία, υπουργείο, περιοχή
Σχολή	π.χ. πανεπιστημιακό τμήμα
Παιδαγωγική	διδακτικές αρχές για το μάθημα

Μάθημα	π.χ. απειροστικός Λογισμός
Κλάδος	π.χ. ακολουθίες
Τομέας	π.χ. σύγκλιση ακολουθιών
Θέμα	π.χ. σύγκλιση βασικών ακολουθιών
Αντικείμενο	π.χ. η ακολουθία α^{ν}, $\alpha \in R$

Πίνακας 1: Κλίμακα των επιπέδων που συν-διαμορφώνουν τη διδακτική πράξη

Τα τέσσερα πρώτα επίπεδα του μοντέλου αναφέρονται σε περιορισμούς που προέρχονται από τον τρόπο που ο σύγχρονος πολιτισμός και οι κοινωνίες που έχουμε δημιουργήσει, δια μέσου των εκπαιδευτικών ιδρυμάτων και των συγκεκριμένων παιδαγωγικών συνθηκών που επικρατούν σε αυτά, οργανώνουν τη διδασκαλία και τη μάθηση των γνωστικών αντικειμένων (Cuenca et al., 2022). Τα επίπεδα αυτά διαμορφώνονται έξω από τον κόσμο του εκπαιδευτικού και δημιουργούν συνθήκες που επηρεάζουν τη διδασκαλία και τη μάθηση του αντικειμένου, αλλά είναι εκτός του ελέγχου του εκπαιδευτικού με την έννοια ότι δεν μπορεί να παρέμβει σε αυτές. Κάποιες από τις συνθήκες που δημιουργούνται μπορούν να τροποποιηθούν από θεσμούς όπως είναι οι αρχές ενός εκπαιδευτικού ιδρύματος, ή η πολιτεία. Με άλλα λόγια, η κυρίαρχη αντίληψη για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους προτείνεται από τους πολιτισμούς μας, μέσα από τις κοινωνίες και τα εκπαιδευτικά μας ιδρύματα, θεσμούς που είναι πέρα από τον έλεγχο του εκπαιδευτικού. Όμως, η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών σπάνια εστιάζει σε αυτά τα επίπεδα (Bosch & Gascón, 2014), οπότε είναι πολύ δύσκολο να αμφισβητήσει τεκμηριωμένα την αντίληψη για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους που αυτά τα επίπεδα προωθούν. Η παρούσα εργασία εστιάζει στα επίπεδα αυτά. Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο, εστιάζει στα επίπεδα του Πίνακα 1 που προηγούνται του επιπέδου του μαθήματος. Σε αυτό το πλαίσιο:

- Ο *πολιτισμός*, μία πολιτισμικά ομοιογενής ομάδα κοινωνιών (Artigue & Winsløw, 2010), δημιουργεί συνθήκες και περιορισμούς μέσα από τον τρόπο που βλέπει την εκπαίδευση και που αποδίδει αξία στον ρόλο και τη λειτουργία της (π.χ. προωθεί την εικόνα).

- Η *κοινωνία* δημιουργεί συνθήκες και περιορισμούς καθώς αποδίδει κύρος και λειτουργίες στα γνωστικά αντικείμενα και τη μελέτη τους (Bosch & Gascón, 2014), για παράδειγμα, μέσα από αποφάσεις της πολιτείας όπως αυτές που αφορούν το πλαίσιο λειτουργίας των

πανεπιστημίων, τη διαδικασία επιλογής των φοιτητών που θα εισαχθούν σε ένα τμήμα, καθώς και τον αριθμό τους.

- Η *σχολή* (π.χ. το μαθηματικό τμήμα) δημιουργεί, με τον τρόπο που λειτουργεί, συνθήκες και περιορισμούς για τη διδασκαλία όλων των μαθημάτων (Barquero et al., 2013), για παράδειγμα καθορίζοντας το ωρολόγιο πρόγραμμα των μαθημάτων, τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης μεταξύ τους, τον τρόπο κατανομής των φοιτητών σε αυτά, ποια μαθήματα είναι υποχρεωτικά, σε ποια κατεύθυνση ανήκουν τα μαθήματα (π.χ. εφαρμοσμένα), ποια μαθήματα είναι προαπαιτούμενα για άλλα μαθήματα.

- Η *παιδαγωγική* δημιουργεί συνθήκες και περιορισμούς για τη διδασκαλία και τη μάθηση ενός συγκεκριμένου μαθήματος (Cuenca et al., 2022) καθορίζοντας, για παράδειγμα, τη χρονική κατανομή του περιεχομένου του μαθήματος, το αν θα πραγματοποιηθούν ενδιάμεσες εξετάσεις, τα θέματα των τελικών εξετάσεων.

Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι το να γνωρίζουμε τι είδους συνθήκες και περιορισμοί και σε ποια θεσμικά επίπεδα, τα οποία δεν ελέγχονται από τον εκπαιδευτικό, επιδρούν στο οικοσύστημα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να προσεγγίσουμε αυτό ακριβώς το πρόβλημα. Εξετάζουμε τι είδους συνθήκες και περιορισμοί και σε ποια θεσμικά επίπεδα, τα οποία δεν ελέγχονται από τον εκπαιδευτικό, επιδρούν στη διδασκαλία, σύμφωνα με τις απόψεις που εκφράζει μία ομάδα διδασκόντων απειροστικού λογισμού σε δύο ελληνικά μαθηματικά τμήματα, όπως περιγράφουμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να διερευνήσει θεσμικούς περιορισμούς που μπορούν να επηρεάσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών σε πανεπιστημιακά μαθηματικά τμήματα. Τα δεδομένα που αξιοποιούνται εδώ προέρχονται από τα δεδομένα μίας ευρύτερης μελέτης της διδασκαλίας των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο και συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια των ακαδημαϊκών ετών 2011-12 και 2012-13 (τα έτη δηλώνονται ως Ε1 και Ε2). Στην ευρύτερη μελέτη ο θεσμικός παράγοντας και η επίδραση του στη διδασκαλία λειτούργησε περισσότερο ως φόντο παρά ως κεντρικό ζήτημα μελέτης, όπως λειτουργεί στην παρούσα εργασία. Τα δεδομένα που αξιοποιήθηκαν εδώ είναι 5 ομαδικές συζητήσεις (δηλώνονται ως Σ1-Σ5), που υπερέβαιναν σε διάρκεια τις δύο ώρες η κάθε μία, μεταξύ πέντε διδασκόντων του Απειροστικού Λογισμού (δηλώνονται ως Δ1 – Δ5) και 2 ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών (μία εξ αυτών είναι η πρώτη εκ των συγγραφέων). Οι διδάσκοντες δίδασκαν σε δύο ελληνικά μαθηματικά τμήματα το προπτυχιακό μάθημα του απειροστικού λογισμού. Όλες οι ομαδικές συζητήσεις ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν πλήρως.

Επειδή ο ερευνητικός φακός στρέφεται σε βιωμένες εμπειρίες των συμμετεχόντων η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων ήταν η θεματική ανάλυση (Braun & Clarke, 2006). Όλες οι απομαγνωτοφωνήσεις υπεβλήθηκαν σε θεματική έρευνα των θεσμικών περιορισμών που εξέφραζαν οι συμμετέχοντες. Τις εξετάσαμε προσεκτικά ως εξωτερικοί παρατηρητές, δηλαδή χωρίς να υποθέτουμε ότι οτιδήποτε δηλωνόταν ότι συμβαίνει στον χώρο του πανεπιστημίου είναι κανονικό ή απαραίτητο. Επικεντρωθήκαμε στα θέματα στα οποία είτε συμφωνούσαν όλοι ρητά είτε δεν υπήρχαν εκπεφρασμένες αντιρρήσεις. Κατά τη διάρκεια της κωδικοποίησης εξετάσαμε, ανεξάρτητα και επανειλημμένα μέχρι να έρθουμε σε συμφωνία, τις απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις και εντοπίσαμε περιορισμούς που αφορούσαν άμεσα τον θεσμικό παράγοντα. Στη θεματική ανάλυση, καθοδηγούμενοι από τη θεωρία της ATD, εργαστήκαμε για να αναγνωρίσουμε ποια θεσμικά επίπεδα, από τα τέσσερα πρώτα επίπεδα του Πίνακα 1, θα μπορούσαν να παράγουν αυτούς τους περιορισμούς. Επεκτείναμε την κατηγοριοποίηση και την εξέταση των περιορισμών που ανιχνεύσαμε, προσέχοντας να μην περιορίσουμε την ανάλυση σε αυτά τα τέσσερα προκαθορισμένα θεσμικά επίπεδα. Σε όλη τη διαδικασία κρατήσαμε αναλυτικές σημειώσεις, σχόλια, προβληματισμούς και ιδέες για να ενισχύσουμε και να εμπλουτίσουμε την ερμηνευτική διαδικασία. Όπως η ανάλυση εξελισσόταν, οι καταγεγραμμένες κατηγορίες θεσμικών παραγόντων βελτιώθηκαν και αναπτύχθηκαν, οδηγώντας σε ένα σύνολο υποκατηγοριών, που αποτυπώνονται συνοπτικά στον Πίνακα 2 που ακολουθεί στην επόμενη ενότητα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την εργασία προσπαθήσαμε να ανιχνεύσουμε συνθήκες και περιορισμούς για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο που προέρχονται από θεσμικά επίπεδα τα οποία δεν ελέγχονται από τον εκπαιδευτικό. Οι συζητήσεις με τους συμμετέχοντες ήταν διαφωτιστικές. Αναδείχθηκαν περιορισμοί όπως ο χρόνος που απαιτεί η ενεργή ερευνητική δραστηριότητα, το φτωχό μαθηματικό υπόβαθρο των νεοεισερχόμενων φοιτητών, οι προσωπικές φιλοδοξίες τους, ζητήματα που αναδεικνύονται και από άλλες σχετικές έρευνες (π.χ. Winsløw et al., 2014). Σε αυτή την έρευνα η ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε επιπλέον τυπικούς και άτυπους θεσμούς – τις κατηγορίες και τις υποκατηγορίες του Πίνακα 2 – που φαίνεται να παράγουν τέτοιες συνθήκες και περιορισμούς και τις οποίες εξηγούμε, με παραδείγματα από τα δεδομένα, αμέσως παρακάτω.

Κατηγορίες	**Υποκατηγορίες**
Πολιτισμός	Επικρατούσα κουλτούρα

	Σύγχρονα μέσα
Κοινωνία	Θεσμικές αποφάσεις
	Θεσμικές ασυνέχειες
Σχολή (τμήμα)	Παράδοση
	Λειτουργία
Παιδαγωγική	Έμψυχοι πόροι
	Άψυχοι πόροι

Πίνακας 2: Κατηγορίες και υποκατηγορίες των θεσμικών περιορισμών που εντοπίστηκαν

Σε επίπεδο πολιτισμού

Η επικρατούσα κουλτούρα για την αξία της γνώσης και η κουλτούρα του να μπαίνουν υψηλές βαθμολογίες που δεν ανταποκρίνονται στη γνώση διαμορφώνουν πρακτικές και «πολιτικές αποφάσεις», σύμφωνα με τον Δ1, που δεν συμβάλλουν στη μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Αυτή η κουλτούρα παράγει περιορισμούς ακόμα και στο τι θα διδαχθεί, σύμφωνα τους συμμετέχοντες:

> Δ1: Δεν μπορείς να τους κάνεις "πολυτέλειες" όπως για παράδειγμα τη δομή του R. Δηλαδή αυτή τη στιγμή η πτώση των γνώσεων στο Λύκειο επιδρά σε εμάς. … Τους είπα ότι "η απόφαση να παίρνετε όλοι 18, 19, 20 και να νομίζετε ότι ξέρετε μαθηματικά είναι πολιτική απόφαση, δεν είναι απόφαση των μαθηματικών". (Ε1, Σ1)

Τα σύγχρονα μέσα που επικρατούν και επιβάλλονται από τον πολιτισμό μας δημιουργούν επίσης νέες συνθήκες για την παραδοσιακή διδασκαλία στο πανεπιστήμιο. Αρκετές φορές συζητήθηκε, για παράδειγμα, το θέμα της χρήσης αναπαραστάσεων, στη σύγχρονη εποχή της εικόνας, καθώς και της αξιοποίησης της τεχνολογίας για την υποστήριξη της κατανόησης μίας έννοιας όπως, για παράδειγμα, της έννοιας του ορίου.

Σε επίπεδο κοινωνίας

Οι θεσμικές αποφάσεις που αφορούν την παρακολούθηση και τη συμμετοχή των φοιτητών στις εξετάσεις φαίνεται να προβληματίζουν τους διδάσκοντες και να δημιουργούν περιορισμούς στη διδασκαλία τους με κυριότερο την έλλειψη ανατροφοδότησης σε αυτή. Το θεσμικό αυτό πλαίσιο φαίνεται να μη δίνει περιθώρια αυτενέργειας στους διδάσκοντες:

> Δ1: Θα περάσουν το μάθημα αλλά δεν είναι αυτό. Η δουλειά που έχει γίνει σ' αυτό το μάθημα και η προσπάθεια, δεν ανταποκρίνεται σ'

αυτά που γράφουνε. Ο λόγος είναι απλός. Εμείς διδάξαμε συνολικά κάτω από 200, και έχουν έρθει 630. … Κάποια στιγμή πρέπει να δούμε τι επιτυχία έχουν αυτοί που παρακολούθησαν.

Δ3: Όχι δεν μπορούμε να ξέρουμε [τι επιτυχία έχουν αυτοί που παρακολούθησαν], γιατί θα λένε ότι υπάρχει υπόνοια ότι ευνοούνται οι παρόντες.

Οι θεσμικές ασυνέχειες μεταξύ σχολείου και πανεπιστημίου (π.χ. σχολικά προγράμματα σπουδών με έμφαση στις διαδικασίες, καθοδηγούμενος τρόπος διδασκαλίας και μάθησης στο σχολείο) δημιουργούν ένα εκπαιδευτικό σύστημα στο οποίο «τα παιδιά δεν έχουν μάθει να σκέφτονται», κάτι που φαίνεται να αποτελεί «σοβαρό πρόβλημα» για την πορεία των σπουδών τους στο πανεπιστήμιο:

Δ4: Αυτή η έλλειψη που τα παιδιά δεν έχουν μάθει να σκέφτονται στην ηλικία της εφηβείας, εκεί στο Γυμνάσιο και το Λύκειο, μήπως δημιουργεί κάποιο σοβαρό πρόβλημα;

Δ5: Πολύ ουσιαστικό ερώτημα! Είναι αργά όταν έρχεσαι εδώ.

Δ4: Αυτό σημαίνει όμως ότι το παιδαγωγικό σύστημα καταστρέφει ανθρώπους αυτή τη στιγμή.

Σε επίπεδο σχολής

Η παράδοση του εκπαιδευτικού ιδρύματος (εδώ του μαθηματικού τμήματος) φαίνεται ότι επηρεάζει τη διδακτική «τακτική» που ακολουθούν οι διδάσκοντες και, συγκεκριμένα για τον απειροστικό, καθορίζει το πού θα δοθεί έμφαση κατά τη διδασκαλία:

Δ1: Με ρωτάνε πότε θα κάνουμε ασκήσεις και τους λέω ότι πρέπει να κάνουμε τη θεωρία πάνω στην οποία βασιζόμαστε, πρέπει να βρούμε τις ιδιότητες που πληρούν οι πραγματικοί και να τις αποδείξουμε για να είμαστε σίγουροι ότι πατάμε σε θεμέλια. … Γιατί το τμήμα είναι ιδιαίτερα… στηρίζεται πάνω σ' αυτό. Η δομή του, το προσωπικό του, η παράδοσή του, όλα του. (Ε1, Σ1)

Η λειτουργία του τμήματος παράγει εύλογα συνθήκες και περιορισμούς για τη διδασκαλία των μαθημάτων σε αυτό. Ζητήματα που αναφέρθηκαν ήταν η έλλειψη προσωπικού, οι παρωχημένες υποδομές σε συνδυασμό με τον μεγάλο αριθμό φοιτητών που σε κάποια μαθήματα περιορίζουν τις δυνατότητες της διδασκαλίας (π.χ. τη χρήση τεχνολογίας), καθώς και η απουσία πλαισίου που θα προωθεί τη δημιουργία κουλτούρας συνεργασίας για τη διδασκαλία των μαθημάτων μεταξύ των διδασκόντων. Σε αυτούς τους απολογισμούς, παράλληλα με το πρόβλημα της έλλειψης φροντίδας για τις ανάγκες του τμήματος από τη μεριά της πολιτείας, αναδείχθηκε και το ζήτημα της αυτενέργειας των ίδιων των διδασκόντων για τη λειτουργία του τμήματος:

Δ1: Αυτή τη στιγμή, αυτό το μαθηματικό τμήμα εδώ, όπως είναι, είναι πιο γερασμένο από παλιά, δεν έχουμε καινούριο προσωπικό. Αν όλοι εμείς που είμαστε εδώ στο τμήμα, δεν κάνουμε ακόμα μια μικρή προσπάθεια δεν θα δουλέψει ετούτο το τμήμα. (Ε2, Σ2)

Σε επίπεδο παιδαγωγικής

Οι έμψυχοι πόροι για τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου μαθήματος, όπως ο απειροστικός, καθορίζουν την επικρατούσα παιδαγωγική. Έμψυχοι πόροι μπορεί να είναι οι διδάσκοντες του μαθήματος, ο σύμβουλος καθηγητής για κάθε φοιτητή, το βοηθητικό προσωπικό που συνδράμει τη διδασκαλία του μαθήματος (π.χ. την ψηφιακή υποστήριξη). Οι έμψυχοι πόροι (ή η απουσία τους) δημιουργούν συνθήκες, αλλά και περιορισμούς για τη διδασκαλία. Ο βασικότερος περιορισμός που επισημάνθηκε είναι η δυσχέρεια στη συνεργασία μεταξύ των διδασκόντων:

Δ1: Δεν θεωρώ πάντως ότι κάνουμε το καλύτερο για τους Απειροστικούς, παρ' όλες τις προσπάθειές μας. Δηλαδή πρέπει να πω ότι δεν υπάρχει η τέλεια συνεργασία μεταξύ των διδασκόντων. (Ε1, Σ1)

Οι άψυχοι πόροι που επηρεάζουν τη διδασκαλία του συγκεκριμένου μαθήματος μπορεί να είναι το διδακτικό υλικό για το μάθημα (π.χ. τα συγγράμματα), οι χώροι που διεξάγεται η διδασκαλία του (π.χ. τα αμφιθέατρα), οι δομές που αξιοποιούνται (π.χ. ηλεκτρονική τάξη). Οι περιορισμοί που αναδείχθηκαν κατέδειξαν κυρίως το παρωχημένο, για τη σύγχρονη ψηφιακή εποχή, διδακτικό υλικό, αλλά και την αυτενέργεια των διδασκόντων επί αυτού:

Δ1: Στις αποδείξεις που κάνω στο αμφιθέατρο μου αρέσει να βάζω το δικό μου στίγμα. Ποτέ δεν έχω καταλάβει γιατί ένα βιβλίο μαθηματικών πρέπει να το πάρω και να το κάνω ακριβώς όπως το λέει ο «κάποιος», από τη στιγμή που αυτός ο «κάποιος» το έγραψε εδώ και 25 χρόνια. (Ε2, Σ1)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σε αυτή την εργασία, αναλύοντας τις απόψεις μίας ομάδας πανεπιστημιακών διδασκόντων, ανιχνεύουμε τυπικούς και άτυπους θεσμούς που διαμορφώνουν συνθήκες και περιορισμούς για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο. Τα αποτελέσματα συγκεκριμενοποιούν, σε αυτό το πλαίσιο, τα ιεραρχικά θεσμικά επίπεδα των συνθηκών και των περιορισμών που συν-διαμορφώνουν τη διδακτική πράξη, όπως αυτά προτείνονται από τη βιβλιογραφία (Artigue & Winsløw 2010, Bosch & Gascón 2014, Barquero et al. 2013, Cuenca et al., 2022).

Διαπιστώσαμε ότι, σε επίπεδο πολιτισμού, η επικρατούσα κουλτούρα σε προηγούμενες βαθμίδες εκπαίδευσης, φάνηκε να δημιουργεί πιέσεις στο τι είναι εφικτό να διδαχθεί. Επίσης, τα σύγχρονα μέσα του πολιτισμού μας,

όπως είναι τα ψηφιακά μέσα, φάνηκε να δημιουργούν νέες, προκλήσεις για την παραδοσιακή διδασκαλία στο πανεπιστήμιο, ακόμα και πριν την περίοδο της πανδημίας ή τη ραγδαία ανάπτυξη της τεχνητής νοημοσύνης. Σε επίπεδο κοινωνίας, οι θεσμικές αποφάσεις και θεσμικές ασυνέχειες μεταξύ σχολείου και πανεπιστημίου φάνηκαν να αντανακλώνται στη διδασκαλία. Σε επίπεδο σχολής, η παράδοση του τμήματος εμφανίζεται να επηρεάζει τις διδακτικές προσεγγίσεις των μελών του και η λειτουργία του να δημιουργεί πρακτικά ζητήματα που απαιτούν αυτενέργεια. Σε επίπεδο παιδαγωγικής, οι έμψυχοι και άψυχοι πόροι επέβαλαν περιορισμούς. Συνολικά, βρέθηκε ότι συγκεκριμένες, ιεραρχημένες, συστημικές δυνάμεις συν-διαμορφώνουν τη διδασκαλία θέτοντας περιορισμούς, γεγονός που μας οδηγεί να θέσουμε δύο βασικά, για εμάς, ζητήματα.

Το πρώτο ζήτημα αφορά τα περιθώρια αυτονομίας που μπορεί να έχει ένας πανεπιστημιακός δάσκαλος μέσα σε αυτό το συνονθύλευμα των πολυεπίπεδων θεσμικών περιορισμών, προκειμένου να βελτιώσει τις μαθησιακές εμπειρίες των φοιτητών του. Είδαμε ευκαιρίες αυτενέργειας των συμμετεχόντων στα διάφορα θεσμικά επίπεδα, παρά τα θεσμικά εμπόδια. Ζήτημα παραμένει η ισορροπία μεταξύ αυτενέργειας και θεσμικής υποστήριξης προς το εκπαιδευτικό έργο που θα εξασφαλίζει την προαγωγή της διδασκαλίας και της μάθησης σε αυτό το πλαίσιο. Το δεύτερο ζήτημα αφορά τα περιθώρια αντίστροφης θεσμικής επίδρασης από το επίπεδο της διδασκαλίας του Μαθήματος προς τα ανώτερα θεσμικά επίπεδα του Πίνακα 1. Είδαμε πώς ο πολιτισμός μεταφράζεται από την κοινωνία σε αξίες και εκφράζεται με τις αποφάσεις της πολιτείας οι οποίες διαμορφώνουν τη λειτουργία του ιδρύματος και την επικρατούσα παιδαγωγική του μαθήματος. Το ζήτημα είναι πώς θα μπορούσε η διδασκαλία του συγκεκριμένου μαθήματος να επηρεάσει τόσο το τμήμα εσωτερικά όσο και τα ανώτερα του τμήματος θεσμικά επίπεδα.

Κλείνοντας, σημειώνουμε ότι η παρούσα εργασία αποτελεί μία αρχική πρόταση για τη διερεύνηση των θεσμικών παραγόντων που επηρεάζουν τη διδασκαλία, πέρα από τον έλεγχο του εκπαιδευτικού. Το ζήτημα του τι διαμορφώνει τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο, αλλά και σε κάθε πλαίσιο, είναι πολύπλοκο και πολυπαραγοντικό. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας, αν και μη γενικεύσιμα, επιτρέπουν να υποστηρίξουμε ότι ο θεσμικός παράγοντας έχει ευθύνη για τη διαμόρφωση της διδασκαλίας, ακόμα και στο αυτόνομο πλαίσιο του πανεπιστημίου. Αυτή η ευθύνη πρέπει να διερευνηθεί περαιτέρω και πιο συστηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M., & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: a viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Récherches en Didactiques des Mathématiques*, *30*(1), 47-82.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Récherches en Didactiques des Mathématiques*, *33*(3), 307–338.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67–83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_5

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brown,T. and Clarke, D. (2013). Institutional contexts for research in mathematics education. In Third International Handbook of Mathematics Education. Springer International Handbooks of Education. Springer, pp. 459-484. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_15

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In J. L. Dorier (Ed.), *Actes de la 11e école de didactique des mathématiques*, pp 1–22. La Pensée Sauvage.

Cuenca, L., Barquero, B., & Florensa, I. (2022). Mathematics curriculum reforms in undergraduate engineering: An institutional analysis. In M. Trigueros, B. Barquero, R. Hochmuth, & J. Peters (Eds.) *Proceedings of the 4th Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 365–374). University of Hannover and INDRUM.

Reinholz, D. L., Rasmussen, C., & Nardi, E. (2020). Time for (research on) change in mathematics departments. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(2), 147–158. https://doi.org/10.1007/s40753- 020-00116-7

Winsløw, C., Barquero, B., de Vleeschouwer, M., & Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics: From dual vector spaces to questioning the world. Research in Mathematics Education, 16, 95–111. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918345

Wondem, D. T., Tesfamicael, S. A., & Getahun, D. A. (2023). Institutional Setting and Its Influence on the Teaching of Mathematics: Implications to Implementing Reform Vision in Mathematics Education in Ethiopian Schools. *Education Sciences*, *13*(2), 114. https://doi.org/10.3390/educsci13020114

ΔΡΑΣΕΙΣ ΣΥΝ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΣΤΙΣΜΟΥ, ΣΥΝ-ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αγγελική Δίκαρου & Χρυσαυγή Τριανταφύλλου

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

angeliki_ad@hotmail.com & chrtriantaf@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα μελετά τις δράσεις συνδιδασκαλίας μιας εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής με εκπαιδευτικούς γενικής αγωγής, κατά την Παράλληλη Στήριξη σε μαθητές ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στα μαθηματικά. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε γενικό Γυμνάσιο, τα ερευνητικά δεδομένα συλλέχθηκαν από το ερευνητικό ημερολόγιο της εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής και πραγματοποιήθηκε ποιοτική ανάλυση κατά την οποία αναδείχθηκαν δράσεις συνδιδασκαλίας. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν δράσεις συνδιδασκαλίας στη μορφή του συν-προγραμματισμού όπως συζητήσεις σε θέματα οργάνωσης της ύλης και δράσεις συν-εκπαίδευσης και συν-αξιολόγησης όπως ο διαμοιρασμός και η εναλλαγή ρόλων ευθύνης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συμπερίληψη (inclusion) σημαίνει ότι όλοι οι μαθητές, ανεξάρτητα από τις ικανότητες ή τις αδυναμίες τους, έχουν ίσες ευκαιρίες μάθησης αλλά και αξιολόγησης (Bagger, Roos & Engvall, 2020; Civil, Hunder & Crespo, 2010). Τα τελευταία χρόνια μαθητές με διαγνωσμένες ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες όπως μαθητές με Διαταραχή Αυτιστικού Φάσματος (ΔΑΦ) ή με Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής-Υπερκινητικότητα (ΔΕΠΥ), εντάσσονται στο πλαίσιο της γενικής εκπαίδευσης. Στις συμπεριληπτικές τάξεις συναντάμε μαθητές με και χωρίς διαγνωσμένες ανάγκες, όπου απαιτούνται ισχυρές στρατηγικές δέσμευσης για να διασφαλιστεί ότι όλοι οι μαθητές θα επιτύχουν το μέγιστο δυνατό των ικανοτήτων τους (Dowker, 2004).

Το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα θέτει τις βάσεις για την εκπαιδευτική συμπερίληψη παρέχοντας προγράμματα όπως είναι το μοντέλο της Παράλληλης Στήριξης, που ορίζεται θεσμικά ως ‘συνεκπαίδευση-συνδιδασκαλία’ (Νόμος 3699, άρθρο 6 ΦΕΚ). Το μοντέλο της Παράλληλης Στήριξης αποτελεί ένα συμπεριληπτικό μοντέλο συν-διδασκαλίας, με συν-διδασκάλους έναν εκπαιδευτικό γενικής αγωγής και έναν εκπαιδευτικό με εξειδικευμένες γνώσεις στην ειδική αγωγή. Ο εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής έχει ως κύριο στόχο την ομαλή ένταξη των μαθητών με δυσκολίες σε τάξεις φοίτησης του γενικού σχολείου καθώς και την εξέλιξή τους με βάση τις εκπαιδευτικές τους ανάγκες (Friend & Cook, 2013). Η υλοποίηση αυτού του μοντέλου στην πράξη, στον

ελληνικό και διεθνή χώρο, υιοθετεί πρακτικές όπως ‘ένας διδάσκει, ένας βοηθάει’ όπου οι εκπαιδευτικοί δεν εναλλάσσουν ρόλους και ευθύνες (Mavropalias & Anastasiou, 2016).

Στην παρούσα εργασία μελετάμε συγκεκριμένες δράσεις συνδιδασκαλίας μιας εκπαιδευτικού Ειδικής Αγωγής στα μαθηματικά (ΕκΕ.Α) με δύο Εκπαιδευτικούς της Τάξης (ΕκΤ) μέσα στο πλαίσιο της Παράλληλης Στήριξης. Οι δράσεις αυτές, παρότι δεν είναι κυρίαρχες στις καθημερινές πρακτικές των τριών εκπαιδευτικών, αναδεικνύουν τρόπους εναλλαγής ρόλων και ευθυνών ανάμεσά τους. Το ερευνητικό ερώτημα που κατευθύνει την παρούσα μελέτη είναι: «Ποιες είναι οι δράσεις συνδιδασκαλίας στο πλαίσιο της Παράλληλης Στήριξης που αναδεικνύουν εναλλαγή ρόλων και ευθυνών μεταξύ των συν-διδασκάλων;» Η βιβλιογραφική ανασκόπηση των Garderen et al. (2009) υποστηρίζει ότι ελάχιστες έρευνες έχουν μελετήσει θέματα συνδιδασκαλίας εκπαιδευτικών ειδικής και γενικής αγωγής στην τάξη των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Συνδιδασκαλία στο πλαίσιο της συμπερίληψης

Η συνδιδασκαλία στο πλαίσιο της συμπερίληψης ορίζεται ως η συνεργασία δύο εκπαιδευτικών με διαφορετικούς τομείς εξειδίκευσης και διδακτικούς ρόλους στην ίδια σχολική τάξη, με σκοπό τη διδασκαλία σε μαθητές με ή χωρίς διαγνωσμένες ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες (Friend & Cook, 2013). Στη βιβλιογραφία συναντάμε διαφορετικά μοντέλα συνδιδασκαλίας που αφορούν τον διαμοιρασμό ευθυνών και ρόλων των συν-διδασκάλων. Για παράδειγμα, η *παράλληλη συνδιδασκαλία* στην οποία γίνεται διαμοιρασμός ευθυνών και προγραμματισμού, η *ομαδική συνδιδασκαλία* όπου οι εκπαιδευτικοί αναλαμβάνουν από κοινού την ευθύνη και την παροχή διδασκαλίας στην τάξη και το τυπικό μοντέλο συνδιδασκαλίας *Ένας διδάσκει, Ένας βοηθά*. Σε αυτό το μοντέλο ο εκπαιδευτικός γενικής αγωγής καθοδηγεί τη μεγαλύτερη ομάδα ενώ ο εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής παρέχει ξεχωριστή υποστήριξη σε μια μικρότερη ομάδα μαθητών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, ενώ μπορεί να περιφέρεται σε όλη την τάξη (Friend & Cook, 2013; Murawski, 2009).

Στην Ελλάδα συγκεκριμένα, η εφαρμογή της Παράλληλης Στήριξης φαίνεται πως προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό το μοντέλο *Ένας διδάσκει, Ένας βοηθά*. Το μοντέλο που εφαρμόζεται, χαρακτηρίζεται από ‘στατικότητα’, καθώς οι εκπαιδευτικοί δεν εναλλάσσουν ρόλους και ευθύνες. Συνήθως, ο εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής κάθεται αποκλειστικά δίπλα σε έναν μαθητή ή μικρή ομάδα μαθητών, χωρίς να κινείται σε όλη την τάξη προσφέροντας βοήθεια, ενώ ο εκπαιδευτικός γενικής αγωγής

αναλαμβάνει την οργάνωση και τη διδασκαλία του μαθήματος σε όλη την τάξη (Mavropalias & Anastasiou, 2016).

Αποτελεσματικό μοντέλο συνδιδασκαλίας έχουμε όταν οι συν-διδάσκαλοι συν-οργανώνουν (co-plan) το μάθημα, αναλαμβάνουν τη διδακτική διαχείριση σε διαφορετικές συνιστώσες/μέρη του ίδιου μαθήματος (co-instruct) και μοιράζονται διαδικασίες αξιολόγησης για όλους τους μαθητές (co-assess) (Murawski, 2009; Murawski & Lochner, 2011). Συγκεκριμένα, κατά τον *συν-προγραμματισμό* οι συν-διδάσκαλοι σχεδιάζουν από κοινού ένα τυπικό σχέδιο μαθήματος λαμβάνοντας υπόψιν τους μαθητές ευθύνης τους. Ο εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής εφαρμόζει διαφοροποιήσεις και προσαρμογές και υποστηρίζει θετικές συμπεριφορές με αποτέλεσμα να ευνοεί την πρόσβαση περισσότερων μαθητών στο πρόγραμμα σπουδών. Καθημερινές διδακτικές πρακτικές που ακολουθούν οι συν-διδάσκαλοι όπως η ποικιλία προσεγγίσεων συνδιδασκαλίας με σκοπό την ενεργή εμπλοκή των μαθητών ευθύνης τους συνθέτουν την *συν-εκπαίδευση*. Τέλος, η συλλογή και ο διαμοιρασμός πληροφοριών αξιολόγησης για τις εξατομικευμένες ανάγκες των μαθητών συνθέτουν την *συν-αξιολόγηση.*

Κατά τη συν-διδασκαλία οι μαθητές επωφελούνται τόσο από το θετικό κλίμα της συνεργασίας των εκπαιδευτικών στην τάξη όσο και από τα προσωπικά επικοινωνιακά χαρακτηριστικά του κάθε εκπαιδευτικού. Ωστόσο η έρευνα έχει δείξει πως όταν σε δύο εκπαιδευτικούς ανατίθεται συνδιδασκαλία στην ίδια τάξη δημιουργούνται προκλήσεις. Κατά τον συν-προγραμματισμό, απαιτείται αρκετός χρόνος για τον σχεδιασμό μαθήματος αλλά και κατά την συν-εκπαίδευση συχνά οι ρόλοι δεν είναι σαφώς καθορισμένοι ούτε για τους ίδιους ούτε για τους μαθητές (Carty & Farrell, 2018). Επίσης, δημιουργούνται εντάσεις που σχετίζονται με την εγκυρότητα της διαδικασίας της αξιολόγησης (Δίκαρου & Τριανταφύλλου, 2022).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το Ελληνικό θεσμικό πλαίσιο

Το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, βάσει της ισχύουσας νομοθεσίας (Νόμος 3699, άρθρο 6 ΦΕΚ 199/Α'/2-10-2008), θεσμοθετεί μορφές διδασκαλίας, όπως είναι η «Παράλληλη Στήριξη-Συνεκπαίδευση» για μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες (ΔΑΦ, ΔΕΠΥ κ.α.). Σε αυτές τις περιπτώσεις εκπαιδευτικοί ειδικής αγωγής, υλοποιούν προγράμματα συνδιδασκαλίας και εξατομικευμένα εκπαιδευτικά προγράμματα, κατά την παρακολούθηση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών σε σχολικές τάξεις του γενικού σχολείου εκπαίδευσης.

Πλαίσιο Έρευνας

Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης και έχει ως στόχο τη διερεύνηση θεμάτων συνδιδασκαλίας σε τάξεις συμπερίληψης. Πραγματοποιήθηκε σε ένα γενικό Γυμνάσιο, το σχολικό έτος 2023-24 κατά τη διάρκεια του πρώτου τετραμήνου. Τα ερευνητικά δεδομένα αφορούν στη συνεργασία μίας εκπαιδευτικού μαθηματικών ειδικής αγωγής ΕκΕ.Α με δύο εκπαιδευτικούς μαθηματικών γενικής αγωγής ΕκΤ1 και ΕκΤ2. Η ΕκΤ1 έχει προϋπηρεσία ως εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής. Η ΕκΕ.Α και ερευνήτρια, έχει αναλάβει τον ρόλο της Παράλληλης Στήριξης για δύο μαθητές Μ1 και Μ2 που έχουν διαγνωστεί με Διαταραχή Αυτιστικού Φάσματος (ΔΑΦ) και φοιτούν στη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου αντίστοιχα. Οι εκπαιδευτικοί της τάξης (Εκ.Τ1 και Εκ.Τ2) ήταν ενημερωμένες για το θέμα μελέτης της ερευνήτριας και οι συζητήσεις ήταν άτυπες και ως επί το πλείστον μη μαγνητοφωνημένες.

Ερευνητικά δεδομένα

Τα ερευνητικά δεδομένα διατηρούνται ως καταγραφές σε μορφή *ερευνητικού ημερολογίου*. Στο πλαίσιο αυτό υπήρχε συστηματική αποτύπωση των δράσεων της ερευνήτριας σε καθημερινό επίπεδο. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνονται ημέρα, ώρα και αντικείμενο διδασκαλίας, σύντομοι ενδεικτικοί διάλογοι που έχει η ερευνήτρια με τους μαθητές ευθύνης, σύντομες συζητήσεις με τον εκπαιδευτικό της τάξης ως προς την καθημερινή διαχείριση της τάξης, σύντομες αναφορές/ενημερώσεις για την πορεία και εξέλιξη των μαθητών, ενημέρωση για το καθημερινό διάβασμα και για δυσκολίες που εντοπίζει στους μαθητές αλλά και συζητήσεις για αξιολογικά εργαλεία που αξιοποιούνται και ποιος ήταν ο ρόλος της (π.χ. πόσο βοήθησε και με ποιο τρόπο;).

Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Η ποιοτική ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε 3 στάδια. Κατά το 1ο στάδιο έγινε η επιλογή κατάλληλων αποσπασμάτων από το ερευνητικό ημερολόγιο όπου προκύπτουν δράσεις και πτυχές της συνδιδασκαλίας, οι οποίες αναδεικνύουν σχέσεις αλληλεπίδρασης ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς ειδικής και γενικής αγωγής. Κατά το 2ο στάδιο τα αποσπάσματα αναλύθηκαν και κωδικοποιήθηκαν ως προς τις δράσεις συνδιδασκαλίας που εμφανίστηκαν σύμφωνα τη θεμελιωμένη θεωρία ανάλυσης (Grounded theory) (Charmaz, 2006). Στο 3^{ο} στάδιο οι δράσεις αυτές ταξινομήθηκαν και εντάχθηκαν σε τρεις ευρύτερες διαστάσεις της συνδιδασκαλίας όπως ορίζονται στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, στις διαστάσεις του συν-προγραμματισμού, της συν-εκπαίδευσης και της συν-αξιολόγηση των Murawski και Lochner (2011).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Α. Δράσεις συν-προγραμματισμού

Οι δράσεις συν-προγραμματισμού κατά τη συνδιδασκαλία αφορούν α) συζητήσεις σε θέματα οργάνωσης της ύλης, β) υιοθέτηση από την ΕκΤ διδακτικού εργαλείου που πρότεινε η ΕκΕ.Α και γ) συζητήσεις για τον ρυθμό της διδασκαλίας που ακολουθεί η ΕκΤ.

Συζητήσεις σε θέματα οργάνωσης της ύλης

Στο παρακάτω απόσπασμα η ΕκΤ1 ενημερώνει την ΕκΕ.Α για τον τρόπο διαχείρισης της ύλης που σκοπεύει να ακολουθήσει στην άλγεβρα και γεωμετρία της Β΄ Γυμνασίου.

> Συζητάμε για την πορεία της ύλης όπου η ΕκΤ1 με ρωτάει πως πιστεύω ότι πρέπει να διαχειριστεί το επόμενο κομμάτι της ύλης που σχετίζεται με τη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος και των ριζών. Συμφωνούμε πως το ιδανικό είναι να διδάσκονται παράλληλα, εφόσον και στο βιβλίο οι ασκήσεις των δύο κεφαλαίων αλληλεπικαλύπτονται. Η ΕκΤ1 μου αναφέρει «θα αφιερώσω πρώτα δύο διδακτικές ώρες στις ρίζες για να εξηγήσω την έννοια και μετά θα μπω στο Πυθαγόρειο θεώρημα» (Ερευνητικό ημερολόγιο, Β' Γυμνασίου, συζήτηση με την ΕκΤ1, 15/12/23).

Υιοθέτηση από την ΕκΤ διδακτικού εργαλείου που πρότεινε η ΕκΕ.Α

Η ΕκΤ1 αξιοποίησε ένα έτοιμο φυλλάδιο θεωρίας που είχε σχεδιάσει η ΕκΕ.Α σε περασμένα σχολικά έτη και στη συνέχεια το μοίρασε σε όλη την τάξη.

> Η ΕκΤ1 με ρώτησε αν μπορούσε να δώσει το φυλλάδιο θεωρίας στο κεφάλαιο των εξισώσεων που της είχα στείλει. Της εξήγησα πως ακριβώς γι' αυτόν τον λόγο της το έστειλα [...] και ότι το είχα σχεδιάσει ως φυλλάδιο θεωρίας για επανάληψη διαγωνίσματος με ερωτήσεις και απαντήσεις. Η ΕκΤ1 μου είπε «..αυτό που μου άρεσε είναι πως έχεις δομήσει τη θεωρία με ερωτήσεις και απαντήσεις και εγώ κάπως έτσι θα το σχεδίαζα. Νομίζω ότι θα βοηθήσει να τα έχουν έτσι συγκεντρωμένα για το διαγώνισμα. (Ερευνητικό ημερολόγιο, Β' Γυμνασίου, συζήτηση με την ΕκΤ1, 21/11/23)

Το ενδιαφέρον στο παραπάνω αποσπάσματα είναι πως η ΕκΤ1 αιτιολογεί στην ΕκΕ.Α τις διδακτικές επιλογές της. Στο επόμενο απόσπασμα παρουσιάζεται η ΕκΤ2 που αξιοποίησε την μεθοδολογία που της πρότεινε η ΕκΕ.Α και στη συνέχεια δημιούργησε ένα φυλλάδιο το οποίο και έδωσε σε όλη την τάξη.

> Έκανα σε χαρτί στην ΕκΤ2, ένα σχεδιάγραμμα μεθοδολογίας με βήματα και περιπτώσεις για την παραγοντοποίηση που συνήθως ακολουθώ. Το πέρασε σε ψηφιακή μορφή και το έδωσε ως φυλλάδιο προς όλη την τάξη

αναφέροντας πως το δημιουργήσαμε συνεργατικά με την ΕκΕ.Α (Ερευνητικό ημερολόγιο, Γ' Γυμνασίου, ΕκΤ2, σημειώσεις πεδίου, 11/12/23).

Συζητήσεις για τον ρυθμό της διδασκαλίας που ακολουθεί ο ΕκΤ

Στα πλαίσια της διαμορφωτικής αξιολόγησης (αξιολόγηση για τη μάθηση) η ΕκΕ.Α μετά το τέλος της διδακτικής ώρας ενημέρωσε την ΕκΤ1 πως ο μαθητής Μ1 δυσκολεύτηκε με τα προβλήματα εξισώσεων που έγιναν στην τάξη και πως η ίδια αντιμετώπισε δυσκολία στο να συμβαδίσει με τον ρυθμό του μαθήματος. Τελικά, συμφώνησαν ότι η πιθανή αλλαγή στο ρυθμό διδασκαλίας δεν θα ωφελήσει το σύνολο των μαθητών της τάξης.

> Αναφέρω στην ΕκΤ1 πως ο Μ1 ζορίστηκε αρκετά και φάνηκε πως δεν μπορούσε να καταλάβει τα προβλήματα με τις εξισώσεις. Η ΕκΤ1 σχολίασε πως αναγνωρίζει τις δυσκολίες όμως έστω και ένα πρόβλημα να καταλάβει είναι αρκετό, ενώ με ρωτάει «Πιστεύεις πως έχει νόημα να πηγαίνω με πιο αργό ρυθμό; Και ύστερα πιο καλοί μαθητές.. δε θα βαρεθούνε;». Συμφωνήσαμε πως δεν θα ωφελήσει την πλειοψηφία της τάξης αν μειωθεί ο ρυθμός της παράδοσης (Ερευνητικό ημερολόγιο, Β' Γυμνασίου, συζήτηση με την ΕκΤ1, 14/11/23).

Β. Δράσεις συν-εκπαίδευσης

Οι δράσεις συν-εκπαίδευσης κατά τη συνδιδασκαλία αφορούν α) διαφοροποίηση διδακτικής διαχείρισης του ίδιου έργου από την ΕκΕ.Α, β) ανάθεση της υποστήριξης μαθητών πέραν των μαθητών ευθύνης στην ΕκΕ.Α και γ) διαμοιρασμό διδακτικών ρόλων.

Διαφοροποίηση διδακτικής διαχείρισης του ίδιου έργου από την ΕκΕ.Α

Στο παρακάτω απόσπασμα όταν η ΕκΤ1 έλυνε ένα πρόβλημα του σχολικού βιβλίου στο κεφάλαιο των εμβαδών της γεωμετρίας, ο μαθητής δυσκολευόταν να το κατανοήσει. Οπότε η ΕκΕ.Α εφάρμοσε μια άλλη διδακτική προσέγγιση από την ΕκΤ. Συγκεκριμένα, χρησιμοποίησε την τεχνική της χρωματικής κωδικοποίησης (colour-coding) για να το αναπαραστήσει με μεγαλύτερη ευκρίνεια (Tay & Kee, 2019).

> Όσο η ΕκΤ1 έλυνε ένα πρόβλημα του σχολικού βιβλίου στον πίνακα με την υπόλοιπη τάξη, εγώ και ο Μ1 δουλεύαμε μαζί το πρόβλημα από το θρανίο μας στο τετράδιό του. Μετέφερα το σχήμα στο τετράδιό του Μ1 χρησιμοποιώντας διαφορετικά χρώματα (πορτοκαλί για τον οριζόντιο και μωβ για τον κατακόρυφο δρόμο). Μέσα από την επικάλυψη των δύο χρωμάτων φάνηκε να αντιλαμβάνεται ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου που βρίσκεται στο σταυροδρόμι υπολογίζεται 2 φορές. (Ερευνητικό ημερολόγιο, Β' Γυμνασίου, ΕκΤ1, σημειώσεις πεδίου, 1/12/23).

Στο παραπάνω απόσπασμα η κάθε εκπαιδευτικός διαχειρίζεται το ίδιο έργο με διαφορετικό τρόπο. Ειδικότερα η ΕκΕ.Α λόγω της εξειδίκευσής της

εφαρμόζει πρακτικές που προτείνει η βιβλιογραφία για τους μαθητές ευθύνης της.

Ανάθεση της υποστήριξης μαθητών πέραν των μαθητών ευθύνης στην ΕκΕ.Α

Η ΕκΤ1 κατά τη διάρκεια του μαθήματος ζήτησε από την ΕκΕ.Α να εξηγήσει μια έννοια που φαίνεται πως δυσκόλευε παραπάνω μια μαθήτρια της τάξης, η οποία καθόταν σε κοντινό θρανίο με τον Μ1 και την ΕκΕ.Α.

> Ενώ η ΕκΤ1 αφιέρωσε χρόνο σε όλη την τάξη για να εξηγήσει πως βρίσκουμε το ΕΚΠ αριθμών, μια μαθήτρια συνέχισε να δυσκολεύεται και στις επόμενες ασκήσεις. Η ΕκΤ1 μου ζήτησε να της το εξηγήσω εγώ, προκειμένου να εξοικονομήσει χρόνο στο μάθημα για τις επόμενες ασκήσεις (Ερευνητικό ημερολόγιο, Β' Γυμνασίου, ΕκΤ1, σημειώσεις πεδίου, 1/11/23).

Διαμοιρασμός διδακτικών ρόλων

Η ΕκΤ2 ζήτησε από την ΕκΕ.Α να επιβλέψει και να βοηθήσει όπου χρειαστεί μαθητές της τάξης που έλυναν ασκήσεις στον πίνακα, όσο εκείνη θα περνούσε από κάθε μαθητή για έλεγχο τετραδίων.

> Όσο η ΕκΤ2 έκανε τον έλεγχο τετραδίων σε όλη την τάξη, ζήτησε από τρείς μαθητές να σηκωθούν στον πίνακα και να λύσουν ασκήσεις παραγοντοποίησης (κοινός παράγοντας). Μου ζήτησε να είμαι μαζί τους στον πίνακα προκειμένου να ελέγξω ότι λύνουν σωστά τις ασκήσεις και αν τυχόν υπάρχουν απορίες να τις εξηγήσω (Ερευνητικό ημερολόγιο, Γ' Γυμνασίου, ΕκΤ2, σημειώσεις πεδίου, 28/11/23).

Γ. Δράσεις συν-αξιολόγησης

Οι δράσεις συν-αξιολόγησης αφορούν α) δράσεις αλληλοενημέρωσης των δυο εκπαιδευτικών κατά την αξιολόγηση των μαθητών και β) εναλλαγή ρόλων ανάμεσα στην ΕκΕ.Α και τις ΕκΤ κατά τη διάρκεια των τεστ και διαγωνισμάτων.

Δράσεις αλληλοενημέρωσης των δυο εκπαιδευτικών κατά την αξιολόγηση των μαθητών

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα που σχετίζονται με θέματα αθροιστικής αξιολόγησης (τεστ, διαγωνίσματα). Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος τετραμήνου στις αξιοσημείωτες ταυτότητες που σχεδίασε και υλοποίησε η ΕκΤ2, η ΕκΕ.Α παρείχε βοήθεια με κατάλληλες ερωτήσεις στον Μ2. Για τις συγκεκριμένες ενέργειες της ΕκΕ.Α ενημερώθηκε και η ΕκΤ2, προκειμένου να έχει διευρυμένη αντίληψη των γνώσεων και της προετοιμασίας του μαθητή κατά τη διόρθωση του γραπτού του.

> Κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος διαπίστωσα πως ο Μ2 δυσκολεύεται με την απόδειξη $(\alpha - \beta)^2$. Τον βοήθησα να ξεκινήσει την απόδειξη λέγοντάς

του «Μπορείς να μου πεις τον ορισμό της δύναμης για το α^2; [ο Μ2 απαντάει σωστά] [...];» Μετά το τέλος της διδακτικής ώρας ανέφερα στην ΕκΤ2 τις διαφοροποιήσεις και τις προσαρμογές που παρείχα στον Μ2, δίνοντάς της και μια εικόνα για το διάβασμα του μαθητή. Στη συνέχεια μου ανέφερε πως και η ίδια παρείχε αντίστοιχη βοήθεια σε πολλούς μαθητές (χωρίς διάγνωση) που επίσης δυσκολεύτηκαν. (Ερευνητικό ημερολόγιο, Γ' Γυμνασίου, ΕκΤ2, σημειώσεις πεδίου, 20/11/23).

Μέσα από την αλληλοενημέρωση των εκπαιδευτικών γίνεται αναφορά στη βοήθεια που παρείχαν και οι δύο εκπαιδευτικοί στο σύνολο της τάξης και γίνεται μια συζήτηση για την πορεία και το επίπεδο όλων των μαθητών σε σχέση με το αξιολογικό εργαλείο που δόθηκε.

Εναλλαγή ρόλων ανάμεσα στην ΕκΕ.Α και τις ΕκΤ κατά τη διάρκεια των τεστ και διαγωνισμάτων

Κατά τη διάρκεια του επαναληπτικού διαγωνίσματος με τον Μ1 η ΕκΤ1 ήρθε στο θρανίο και ανέλαβε τον ρόλο της ΕκΕ.Α.

Η ΕκΤ1 ήρθε όρθια δίπλα στο θρανίο που ο Μ1 καθόταν με την ΕκΕ.Α και άρχισε να κάνει η ίδια ερωτήσεις στον Μ1. Του απλοποιούσε κάποιες εκφωνήσεις ή νούμερα, προσπαθώντας να τον βοηθήσει και παράλληλα να τον εξετάσει ως προς την κατανόηση και το διάβασμά του. Επιπλέον, του κύκλωσε κάποιες ασκήσεις και του είπε πως αν δυσκολεύεται μπορεί να ασχοληθεί μόνο με αυτές (Ερευνητικό ημερολόγιο, Β' Γυμνασίου, ΕκΤ1, σημειώσεις πεδίου, 27/11/23).

Κατά τη διάρκεια του τεστ στην ισότητα τριγώνων, όσο η ΕκΕ.Α ήταν σε θρανία άλλων μαθητών η ΕκΤ2 πήγε δίπλα απ' το θρανίο του Μ2.

Αρκετοί μαθητές που δυσκολεύτηκαν στο τεστ στην ισότητα τριγώνων, σήκωναν χέρι και ζητούσαν διαρκώς τη βοήθεια τόσο τη δική μου όσο και της ΕκΤ2. Όσο βρισκόμουν σε θρανίο άλλου μαθητή που ζήτησε τη βοήθειά μου, η ΕκΤ2 πήγε κοντά στο θρανίο του Μ2 όπου και του παρείχε βοήθεια (Ερευνητικό ημερολόγιο, Γ' Γυμνασίου, ΕκΤ2, σημειώσεις πεδίου, 11/1/24).

Από τα παραπάνω χαρακτηριστικά αποσπάσματα παρατηρούμε ότι ο διαμοιρασμός ευθυνών αξιολόγησης από τους εκπαιδευτικούς ειδικής και γενικής αγωγής, διαμορφώνει μια πληρέστερη εικόνα των δυνατοτήτων και των αναγκών όλων των μαθητών (Ravet, 2013).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία συστηματική μελέτη πτυχών της συνδιδασκαλίας, με βάση τις τρεις κύριες διαστάσεις της, τον προγραμματισμό της διδασκαλίας, τη διδακτική διαχείριση στην τάξη και την αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών (Murawski & Lochner, 2011). Συγκεκριμένα, μελετά δράσεις της συνδιδασκαλίας μίας εκπαιδευτικού Ειδικής Αγωγής με δύο εκπαιδευτικούς της τάξης, στο πλαίσιο της

Παράλληλης Στήριξης στο μάθημα των μαθηματικών. Στις δράσεις συν-προγραμματισμού εντοπίστηκαν η κοινή διαχείριση της ύλης και του ρυθμού διδασκαλίας, καθώς και η εφαρμογή διδακτικών εργαλείων στην ολομέλεια της τάξης που προτείνει ο εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής. Κατά τη συν-εκπαίδευση, ο εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής υποστηρίζει τόσο τους μαθητές ευθύνης όσο και μαθητές της υπόλοιπης τάξης ενώ εμφανίζεται και ο διαμοιρασμός εκπαιδευτικών ρόλων αλλά και η διαφοροποίηση διδακτικής διαχείρισης του ίδιου έργου. Αντίστοιχα, στην συν-αξιολόγηση βλέπουμε δράσεις αλληλοενημέρωσης και εναλλαγή ρόλων των δύο εκπαιδευτικών. Ενώ η έρευνα έχει αναδείξει δράσεις σε επίπεδο σχεδιασμού του μαθήματος και διδακτικής διαχείρισης (Carty & Farrell, 2018), δεν υπάρχουν πλούσιες αναφορές δράσεων συν-αξιολόγησης σε συμπεριληπτικές τάξεις μαθηματικών. Επιπλέον, *η συνεργασία* ενός εκπαιδευτικού γενικής εκπαίδευσης, με εμπειρία στις αξιολογικές πρακτικές όλης της τάξης και ενός εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής, με γνώσεις στις εξατομικευμένες αξιολογήσεις, φαίνεται πως ωφελεί ιδιαίτερα τους μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες (Ravet, 2013).

Τα ευρήματα αναδεικνύουν τη δυνατότητα ανάπτυξης ενός λιγότερο στατικού (Mavropalias & Anastasiou, 2016) και περισσότερο δυναμικού μοντέλου συνδιδασκαλίας στην τάξη των Μαθηματικών όπου οι εκπαιδευτικοί εναλλάσσουν ρόλους σχετικά με τους μαθητές ευθύνης τους. Μέσα από δράσεις όπως, θέματα οργάνωσης της ύλης, επιλογή και χρήση διδακτικών εργαλείων και ρυθμός διδασκαλίας, βλέπουμε ότι η ΕκΕ.Α ασκεί επιρροή σε διδακτικές αποφάσεις που αφορούν όλη την τάξη και όχι αποκλειστικά τους μαθητές ευθύνης της. Σε αυτό συμβάλλει θετικά το γεγονός ότι η εκπαιδευτικός ειδικής αγωγής έχει την ειδικότητα του καθηγητή μαθηματικών (Murawski & Lochner, 2011). Παρότι οι δράσεις συν-διδασκαλίας που παρουσιάστηκαν δεν εμφανίζονται με συστηματικό και οργανωμένο τρόπο στις συγκεκριμένες τάξεις ούτε και σε όλα τα τμήματα Παράλληλης Στήριξης, θα μπορούσαν αν αποκτήσουν μια πιο συστηματική μορφή να υποστηρίξουν την ενίσχυση των μαθηματικών επιδόσεων όλων των μαθητών (Bagger et al., 2020).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bagger, A., Roos, H., & Engvall, M. (2020). Directions of intentionalities in special needs education in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(1), 41-63. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09945-4

Carty, A., & Marie Farrell, A. (2018). Co-teaching in a mainstream post-primary mathematics classroom: an evaluation of models of co-teaching from the perspective

of the teachers. *Support for learning, 33*(2), 101-121. https://doi.org/10.1111/1467-9604.12198

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory. A practical guide through qualitative analysis*. London: Sage.

Civil, M., Hunter, R., & Crespo, S. (2019). Mathematics teachers committed to equity: A review of teaching practices. International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1, 243-273. https://doi.org/10.1163/9789004418875_010

Dowker, A. (2004). *What works for children with mathematical difficulties?* (Vol. 554). Nottingham: DfES Publications.

Friend, M., & Cook, L. (2013). *Interactions: Collaboration skills for school professionals (7th ed.).* Boston: Allyn and Bacon.

Garderen, D. V., Scheuermann, A., Jackson, C., & Hampton, D. (2009). Supporting the collaboration of special educators and general educators to teach students who struggle with mathematics: An overview of the research. *Psychology in the Schools, 46*(1), 56-78.

Mavropalias, T. & Anastasiou, D. (2016). What Does the Greek Model of Parallel Support Have to Say about Co-teaching? *Teaching and Teacher Education*, 60, 224-233. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.08.014

Murawski, W. W. (2009). *Collaborative teaching in secondary schools: Making the co-teaching marriage work!* Thousand Oaks, CA: Corwin.

Murawski, W. W., & Lochner, W. W. (2011). Observing co-teaching: What to ask for, look for, and listen for. *Intervention in School and Clinic, 46*(3), 174-183. https://doi.org/10.1177/1053451210378165

Ravet, J. (2013). Delving deeper into the black box: formative assessment, inclusion and learners on the autism spectrum. *International Journal of Inclusive Education, 17*(9), 948-964. https://doi.org/10.1080/13603116.2012.719552

Tay, H.Y. & Kee K.N.N. (2019). Effective questioning and feedback for learners with autism in an inclusive classroom, *Cogent Education (6)*1, 1634920. https://doi.org/10.1080/2331186X.2019.1634920.

Δίκαρου, Α. & Τριανταφύλλου Χ. (2022). Η αξιολόγηση της επίδοσης μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά: Συνεργασία εκπαιδευτικού της τάξης και εκπαιδευτικού ειδικής αγωγής. Στο Χ. Σταθοπούλου, Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Β. Χρυσικού (Επιμ.), *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 617-625). ΕΝΕΔΙΜ. Βόλος.

Νόμος 3699. (2008). *Ειδική αγωγή και εκπαίδευση ατόμων με αναπηρία ή με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες*. ΦΕΚ 199/Τ.Α΄/02-10-2008.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΜΠΛΟΚΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΕΝΑ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΘΕΜΑ

Μπογιατζή Αικατερίνη, Πόταρη Δέσποινα

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

kbogiatz@math.uoa.gr , dpotari@math.uoa.gr

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε την εμπλοκή μαθητών Α΄ Γυμνασίου με το κοινωνικοεπιστημονικό θέμα των τροχαίων ατυχημάτων στους δρόμους μιας μικρής πόλης και την ανάπτυξη και εξέλιξη των επιχειρημάτων τους. Τα επιχειρήματα κατηγοριοποιήθηκαν σε 4 επίπεδα ανάλογα με την δομή τους χρησιμοποιώντας στην ανάλυσή τους το απλό σχήμα του Toulmin. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν την δυσκολία ανάπτυξης υψηλού επιπέδου επιχειρημάτων με εγγυήσεις που στηρίζονται στα δεδομένα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο κόσμος σήμερα αντιμετωπίζει ένα πλήθος προκλήσεων όπως η οικονομική κατάρρευση, η φτώχεια, η εξάντληση πόρων, η κλιματική αλλαγή, η πόλωση πλούτου, ο ακραίος εθνικισμός και η μετανάστευση. Ως αποτέλεσμα, όλο και περισσότεροι μελετητές υποστηρίζουν την εισαγωγή αυτών των ζητημάτων στις σχολικές τάξεις. Ήδη βλέπουμε σε πολλά προγράμματα σπουδών «στροφή» προς αυτήν την κατεύθυνση: *«τα μαθηματικά στοχεύουν να εξασφαλίσουν ότι οι μαθητές είναι σίγουροι, δημιουργικοί χρήστες και επικοινωνούντες των μαθηματικών, ικανοί να διερευνούν, αναπαριστούν και ερμηνεύουν καταστάσεις στην προσωπική και επαγγελματική τους ζωή ως ενεργοί πολίτες»* (ACARA, 2012). Όλες αυτές οι αλλαγές επιβάλλουν την επανεξέταση του τρόπου που «διδάσκουμε» τα μαθηματικά, πρέπει να δούμε τους μαθητές μας σαν τους επόμενους ενεργούς πολίτες που θέλουμε να μπορούν να ενεργούν με «μαθηματικό» τρόπο , να μπορούν να κρίνουν δεδομένα και πληροφορίες και να λαμβάνουν «επιστημονικά ενημερωμένες» αποφάσεις. Πρέπει να δεχτούμε τις αλλαγές αυτές και να παραδεχτούμε ότι: *«Η τυπική σχολική πρακτική, που έχει τις ρίζες της σε παραδόσεις αιώνων, δεν μπορεί να προετοιμάσει επαρκώς τους μαθητές για τις μαθηματικές ανάγκες του 21ου αιώνα»* (Σακονίδης και συν., 2019, σελ 756). Παίρνοντας υπ' όψιν τις κοινωνικές, πολιτικές και ηθικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι ερευνητές τις τελευταίες δύο δεκαετίες έχουν αρχίσει να εισάγουν τον όρο «Κριτική Εκπαίδευση» (Frankenstein, 2009; Skovsmose, 1994). Αυτοί οι ερευνητές επιδιώκουν να δημιουργήσουν αίθουσες μαθηματικών όπου οι μαθητές μαθαίνουν πώς να κατανοούν το

κοινωνικό, πολιτισμικό και πολιτικό πλαίσιο της κοινωνίας καθώς και πώς μπορεί να αλλάξει αυτό το πλαίσιο (Weiland, 2019). Σύμφωνα με τους Shimada και Baba (2012) τα κοινωνικά ανοιχτά προβλήματα αναδεικνύονται ως ένας ελκυστικός και εύλογος τρόπος παροχής στους μαθητές της δυνατότητας χειρισμού και ερμηνείας δεδομένων για την εξέλιξη της επιχειρηματολογίας και της λήψης αποφάσεων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κοινωνικοεπιστημονικά θέματα

Τα κοινωνικά προβλήματα που σχετίζονται με την εφαρμογή της επιστήμης και της τεχνολογίας στην καθημερινή ζωή αποτελούν κεντρικό θέμα συζήτησης στις σύγχρονες κοινωνίες. Τα κοινωνικοεπιστημονικά θέματα (ΚΕΘ) είναι κοινωνικά θέματα με εννοιολογικούς ή/και διαδικαστικούς συνδέσμους με την επιστήμη, είναι προβλήματα ανοιχτού τύπου χωρίς διαυγείς λύσεις. Στην πραγματικότητα, τείνουν να έχουν πολλές πιθανές λύσεις. Τα ΚΕΘ μπορούν να έχουν παγκόσμιο χαρακτήρα, όπως η κλιματική αλλαγή και η χρήση γενετικών τεχνολογιών ή τοπικών, όπως η αντιμετώπιση μιας γειτονικής περιβαλλοντικής κρίσης ή τον προσδιορισμό της θέσης ενός νέου σταθμού ηλεκτροπαραγωγής. Σύμφωνα με τους Patronis et al. (1999) οι μαθητές είναι ικανοί να αναπτύξουν επιχειρήματα και να καταλήξουν σε αποφάσεις όταν εμπλέκονται πραγματικά σε μια κατάσταση που έχουν να αντιμετωπίσουν. Επομένως, προτείνεται η εμπλοκή των μαθητών στο διάλογο και την επιχειρηματολογία για επιστημονικά θέματα που αφορούν την ζωή τους και την κοινωνία μέσα στην οποία ζουν (Dawson & Venville, 2009). Οι οδικές μετακινήσεις στη σύγχρονη εποχή αποτελούν ένα σημαντικό μέρος της ανθρώπινης ζωής όμως αποτελεί ταυτόχρονα και το πιο οδυνηρό τίμημα για τον άνθρωπο καθώς ο αριθμός των τροχαίων ατυχημάτων συνεχώς αυξάνει. Μελετάμε το θέμα των τροχαίων ατυχημάτων ως ένα πολυσύνθετο πρόβλημα που η κατανόησή του παίζει σημαντικό ρόλο ως παγκόσμιο αλλά και ως τοπικό ζήτημα που η αντιμετώπισή του αποτελεί επιτακτική ανάγκη.

Επιχειρηματολογία

Η επιχειρηματολογία, δηλαδή η ικανότητα διατύπωσης και διαπραγμάτευσης επιχειρημάτων, αποτελεί ένα αποτελεσματικό εργαλείο στη συζήτηση θεμάτων ΚΕΘ (Zohar & Nemet, 2002; Jimenez-Aleixandre & Erduran, 2007). Στην παρούσα εργασία μελετάται η συμβολή της διερεύνησης και ενασχόλησης των μαθητών με ένα ΚΕΘ, που αφορά τα τροχαία ατυχήματα σε μια μικρή πόλη με στόχο την διαδικασία ανάπτυξης επιχειρηματολογίας. Οι περισσότερες έρευνες που εξέτασαν το επίπεδο

επιχειρηματολογίας μαθητών έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η ικανότητα επιχειρηματολογίας κυμαίνεται γενικά σε χαμηλά επίπεδα, με την πλειονότητα των επιχειρημάτων να αποτελείται κυρίως από έναν ισχυρισμό με λίγα δεδομένα και κάποιες φορές και εγγυήσεις (Zohar & Nemet, 2002; Dawson & Venville, 2009). Οι Newton et al. (1999) επισημαίνουν ότι προκειμένου να έχουν οι μαθητές τη δυνατότητα να στηρίξουν τις επιλογές τους σε τεκμηριωμένες αποφάσεις και να προετοιμαστούν ως μελλοντικά μέλη μιας δημοκρατικής κοινωνίας, χρειάζονται συνεχή και συστηματική υποστήριξη στην ανάπτυξη των απαραίτητων δεξιοτήτων επιχειρηματολογίας. Στην μελέτη τους οι Osborne et al, (2004) επισημαίνουν ότι η βελτίωση της επιχειρηματολογίας των μαθητών είναι δυνατή εάν εξετάζεται ρητά και διδάσκεται. Λόγω της αύξησης του ενδιαφέροντος για την επιχειρηματολογία στην εκπαίδευση έχουν προταθεί διάφορα εργαλεία για την αξιολόγηση της ικανότητας επιχειρηματολογίας των μαθητών. Στις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στον τομέα της εκπαίδευσης φαίνεται ότι το επικρατέστερο μοντέλο είναι αυτό του Toulmin (1958). Τα συστατικά μέρη από τα οποία αποτελείται ένα πλήρες επιχείρημα σύμφωνα με το μοντέλο του Toulmin είναι: i. Ισχυρισμός (claim): Αποτελεί το συμπέρασμα ή την άποψη που θέλει να αποδείξει αυτός που συμμετέχει στην συζήτηση. ii. Δεδομένα (data): Αποτελούν τα στοιχεία ή τις παρατηρήσεις που επικαλούνται οι συμμετέχοντες στη συζήτηση ώστε να υποστηρίξουν τις απόψεις τους. iii. Εγγυήσεις (warrants): Αποτελούν τις αιτιολογήσεις που επικαλούνται οι συμμετέχοντες προκειμένου να δικαιολογήσουν τη μετάβαση από τα δεδομένα στον ισχυρισμό. Τα κοινωνικοεπιστημονικά θέματα αποτελούν ένα πλαίσιο που προσφέρει άφθονες ευκαιρίες διατύπωσης επιχειρημάτων από τους μαθητές και για αυτό χρησιμοποιείται τα τελευταία χρόνια για την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας (Zohar & Nemet, 2002; Dawson & Venville, 2009).

Για την μελέτη του ζητήματος των τροχαίων ατυχημάτων προκύπτει το εξής ερευνητικό ερώτημα: Ποια είναι η δομή της επιχειρηματολογίας που οδηγεί στην λήψη αποφάσεων τους μαθητές της Α Γυμνασίου, κατά την εμπλοκή τους σε ένα ΚΕΘ σχετικά με τα τροχαία ατυχήματα;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο της έρευνας - Συμμετέχοντες

Η παρούσα έρευνα έλαβε χώρα τους μήνες Απρίλιο , Μάιο και Ιούνιο του σχολικού έτους 2020-21, σε ένα Πρότυπο Γυμνάσιο της Αττικής. Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα ήταν οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, 4 τμήματα περίπου 25 μαθητών το καθένα και χωρίστηκαν σε ομάδες των 4-5 ατόμων. Η ερευνήτρια συζήτησε με τον εκπαιδευτικό τον σχεδιασμό της δραστηριότητας, τον στόχο και τα αναμενόμενα αποτελέσματα και την προσαρμογή της ώστε

να δοθεί στους μαθητές, καθώς είμαστε την περίοδο που τα σχολεία στην Ελλάδα είναι κλειστά λόγω των μέτρων περιορισμού της εξάπλωσης του COVID-19 και γίνεται τηλεκπαίδευση. Ο εκπαιδευτικός ακολουθεί το πιλοτικό αναλυτικό πρόγραμμα του 2021, που συμπεριλαμβάνει ενότητα στοχαστικών μαθηματικών, με εισαγωγή στις έννοιες της Στατιστικής. Η δραστηριότητα εντάσσεται στην ενότητα της διαχείρισης και της διαδικασίας εξαγωγής συμπερασμάτων μέσω της μελέτης δεδομένων.

Το Πρόβλημα με τα τροχαία ατυχήματα

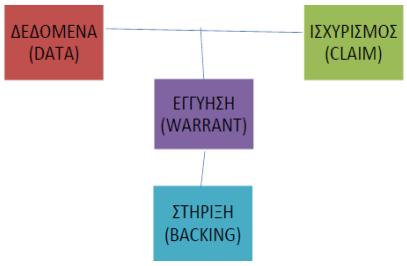
Φανταστείτε ότι ζείτε σε μια μικρή πόλη. Σε αυτήν την πόλη, οι αριθμοί των ανθρώπων που τραυματίστηκαν ή σκοτώθηκαν από ατυχήματα στο δρόμο έχουν αυξηθεί τα τελευταία τέσσερα χρόνια. Η δουλειά σας είναι να διερευνήσετε τι θα μπορούσε να γίνει για αυτήν την κατάσταση. Έχετε προϋπολογισμό 100.000 £ για να δαπανήσετε για τη μείωση των θανάτων και των σοβαρών τραυματισμών στο δρόμο. Πρέπει να σχεδιάσετε τον πιο αποτελεσματικό τρόπο δαπανών των χρημάτων και να φτιάξετε μία πρόταση που θα την παρουσιάσετε στο δημοτικό συμβούλιο της πόλης. (Assessing the Case Studies (bowlandmaths.org.uk))

Διδακτικά Εργαλεία: Δόθηκε στους μαθητές πρόσβαση στο λογισμικό https://www.bowlandmaths.org.uk/materials/projects/online/reducing_road_accidents/content/software/index.html το οποίο αποτελεί μια βάση δεδομένων με τις πληροφορίες για όλα τα ατυχήματα που έχουν συμβεί σε μια πόλη. Περιλαμβάνει τον χάρτη της πόλης, στον οποίο είναι σημειωμένα όλα τα σημεία που έχουν συμβεί τα ατυχήματα. Πατώντας πάνω σε ένα ατύχημα δίνει πληροφορίες, με μορφή αναφοράς της τροχαίας. Επίσης, ο εκπαιδευτικός έδωσε την ιστοσελίδα https://www.trafficchoices.co.uk/ όπου οι μαθητές μπορούν να βρουν προτεινόμενους τρόπους αντιμετώπισης των ατυχημάτων.

Ερευνητικά δεδομένα και η ανάλυσή τους

Αρχικά, συλλέχθηκαν όλα τα αρχεία κάθε ομάδας από την ψηφιακή τάξη (e-class) και οι εργασίες αριθμήθηκαν με αύξοντα αριθμό από το 1 έως το 22. Μελετήθηκε ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές διαχειρίστηκαν τα δεδομένα που τους δόθηκαν από το σενάριο και τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποίησαν - *φωτογραφίες, αναφορές της τροχαίας, ο χάρτης της πόλης, κυκλικά διαγράμματα, ραβδογράμματα* και *πίνακες* - για να τα μελετήσουν και να τα παρουσιάσουν. Επίσης, τα δεδομένα εμπλουτίζονται με νέα στοιχεία από το λογισμικό τα οποία απαντούν στα ερωτήματα: ποια *Άτομα* εμπλέκονται στα ατυχήματα , σε ποια *Τοποθεσία* συμβαίνουν τα περισσότερα ατυχήματα , ποια *Χρονική στιγμή* και ποια είναι η *Κύρια Αιτία* των ατυχημάτων. Έπειτα, αναλύσαμε την πολυπλοκότητα και την δομή κάθε επιχειρήματος που χρησιμοποιεί κάθε ομάδα μαθητών, με βάση

το σχήμα που είναι βασισμένο στο πρότυπο επιχειρηματολογίας του Toulmin (1958). Η ανάλυση βασίζεται στα γραπτά κείμενα των μαθητών καθώς δεν υπήρξε η ευκαιρία συζήτησης των εργασιών στην ολομέλεια και παρακολούθησης από την ερευνήτρια με δια ζώσης παρουσία στην σχολική τάξη.



σχήμα 1. Το αναλυτικό σχήμα Toulmin (1958)

Το αναλυτικό μας σχήμα αποτελείται από τα Επίπεδα 1-4 που διαφοροποιούνται με βάση το εάν περιλάμβαναν τα μέρη ενός επιχειρήματος όπως περιγράφονται από τον Toulmin (1958). Ιδιαίτερη σημασία σε αυτό το σχήμα δώσαμε στην παρουσία ή όχι εγγυήσεων για την υποστήριξη των χαρακτηριστικών ενός επιχειρήματος. Ο Πίνακας 1 παρακάτω παρέχει μια συνοπτική περιγραφή και παραδείγματα για καθένα από τα τέσσερα επίπεδα.

Πίνακας 1. Τα επίπεδα επιχειρηματολογίας

Επίπεδο	Περιγραφή	Παράδειγμα
Επίπεδο 1	Ισχυρισμός μόνο	«να βάλουμε φανάρια» (Ισχυρισμός) «Ο οδηγός του αυτοκινήτου που έκανε όπισθεν , δεν έλεγξε αν ερχόταν κάποιο άλλο αμάξι» (Ισχυρισμός)
Επίπεδο 2	Ισχυρισμός και Δεδομένα ή Εγγύηση	«Αιτία του ατυχήματος είναι η έλλειψη πεζοδρομίου σε δρόμο διπλής κυκλοφορίας (Ισχυρισμός) γιατί ο πεζός περπατούσε στον δρόμο και χτυπήθηκε από αυτοκίνητο (δεδομένα)»
Επίπεδο 3	Ισχυρισμός , Δεδομένα και Εγγύηση	«Οι κυριότεροι λόγοι των ατυχημάτων σύμφωνα με τις αναφορές της αστυνομίας (εγγύηση), ήταν η αυξημένη ταχύτητα των αυτοκινήτων (Ισχυρισμός) και παρατηρήθηκαν σε τοποθεσίες συχνής διέλευσης πεζών ή σε εξόδους από πάρκινγκ κατά τις ώρες αιχμής (δεδομένα).»
Επίπεδο 4	Ισχυρισμός , Δεδομένα, Εγγύηση και Στήριξη	«Στο πέμπτο ατύχημα υπάρχει ο κυκλικός κόμβος ο οποίος είναι πολύ επικίνδυνος (ισχυρισμός), καθώς όμως δεν υπάρχει σήμανση(εγγύηση) για το ότι υπάρχει κυκλικός κόμβος τα οχήματα δεν προσέχουν και δημιουργούνται ατυχήματα (στήριξη) . Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε Mini roundabout (ισχυρισμός) , ώστε οι οδηγοί να είναι πιο επιφυλακτικοί και πιο προσεκτικοί με τα άλλα οχήματα και κυρίως με τα ποδήλατα (στήριξη) , καθώς με αυτό το μέσω συνέβη ατύχημα. (Κόστος: £10,000)» *Ισχυρισμός (claim), Δεδομένα (data), Εγγύηση (warrant), Στήριξη (backing)*

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Μέσω της εμπλοκής με αυτό το σενάριο οι μαθητές αναπτύσσουν: αριθμητικές ικανότητες-υπολογισμούς, τρόπους χειρισμού δεδομένων και ταυτόχρονα ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και ανάπτυξης κοινωνικών δεξιοτήτων. Οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά για να αναλύσουν μια σύνθετη κατάσταση, ερμηνεύσαν δεδομένα που παρουσιάζονται με διάφορους τρόπους και προσπαθήσαν να παρουσιάσουν την σκέψη τους με διάφορους τρόπους και διαφορετικές αναπαραστάσεις (πίνακες, διαγράμματα, εικόνες, κείμενο κλπ). Το σενάριο υλοποιήθηκε σε 3 φάσεις (εξοικείωση με το πρόβλημα, διερεύνηση στο λογισμικό και τελική παρουσίαση λύσεων). Εμείς παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της τελικής φάσης όπου οι μαθητές έχουν ενσωματώσει όλα τα προηγούμενα στοιχεία και απαντούν στο ζητούμενο της εργασίας τους. Για την 3η φάση έχουμε απαντήσεις σε 16/22 εργασίες και θα εστιάσουμε στις τελικές αποφάσεις των μαθητών. Το σύνολο των επιχειρημάτων που βρίσκουμε σε αυτήν την φάση είναι 80.

Επίπεδο 1- Ισχυρισμός μόνο (29/80) : Τα επιχειρήματα σε αυτό το στάδιο έχουν να κάνουν με το τι αποφάσεις παίρνουν οι μαθητές για να λύσουν το πρόβλημα των ατυχημάτων στην πόλη. Στο επίπεδο 1 κατηγοριοποιήσαμε αρκετά επιχειρήματα καθώς οι μαθητές προτείνουν μέτρα χωρίς να στηρίζουν σε κάποιο δεδομένο την επιλογή τους.

«Για αρχή παρατηρήσαμε ότι πολλά ατυχήματα και ειδικά με πεζούς έχουν γίνει στο εμπορικό κέντρο της πόλης καθώς και έξω από τα σχολεία πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (INFANT SCHOOL – JUNIOR SCHOOL)(δεδομένα)»

«Όσον αφορά το κέντρο της πόλης θα προτείναμε να τοποθετηθούν 2 PELICAN CROSSING ένα στη βόρεια και ένα στη νότια πλευρά του εμπορικού κέντρου της πόλης. Το κόστος για το καθένα είναι 18.000€ και το συνολικό κόστος είναι 36.000€ (ισχυρισμός)»

«Θα μπορούσαμε να βάλουμε ένα φανάρι στην κεντρική οδό». (ισχυρισμός)

Επίπεδο 2- Ισχυρισμός και Δεδομένα ή Εγγύηση (34/80): Στο επίπεδο αυτό τα μέτρα που προτείνουν οι μαθητές είναι πιο στοχευμένα σε κάποια σημεία της πόλης ή παρουσιάζουν κάποιον λόγο για τον οποίο πιστεύουν ότι θα βοηθήσουν στη μείωση των ατυχημάτων.

«Μέτρο: φανάρια. Ατυχήματα που αφορά: 5. Αποτελεσματικότητα 60%. (εγγύηση) Προβλεπόμενη μείωση των ατυχημάτων τα επόμενα τέσσερα χρόνια: 3 (ισχυρισμός)»

«Συνολική μείωση για τα επόμενα τέσσερα χρόνια είναι 23 ατυχήματα (ισχυρισμός). Άρα σε αυτά τα χρόνια αντί για 70, θα υπάρχουν 47 ατυχήματα (εγγύηση). Συνολικά θα έχουμε μειώσει το 33% (δηλαδή η αποτελεσματικότητα) των ατυχημάτων στα τέσσερα επόμενα έτη (εγγύηση)».

«Χρησιμοποιήσαμε Speed humps (9000) (ισχυρισμός) ώστε οι οδηγοί να μην τρέχουν (εγγύηση) και να μην υπάρχουν ατυχήματα »

Επίπεδο 3- Ισχυρισμός , Δεδομένα και Εγγύηση (16/80): Καταφέραμε σε αυτήν την φάση να μελετήσουμε επιχειρήματα που περιέχουν και τα 3 στοιχεία του μοντέλου του Toulmin δεδομένα-εγγύηση-ισχυρισμός. Δεν αποτελούν την πλειοψηφία των επιχειρημάτων , δείχνουν όμως ότι μπορούν οι μαθητές να βρουν μέσα στα δεδομένα που μελέτησαν τις εγγυήσεις που χρειάστηκαν για να επιλέξουν το μέτρο που προτείνουν.

«Επικεντρωθήκαμε στα σημεία της πόλης που έγιναν τα περισσότερα ατυχήματα (δεδομένα) με σκοπό να βοηθήσουμε τους περισσότερους ανθρώπους (εγγύηση). Έτσι, αποφασίσαμε να τοποθετήσουμε φανάρια στην διασταύρωση των δρόμων High Road Shopping Precinct, Bridge Street, Town Street και ένα Pelican Crossing στο σημείο που ενώνεται ο πεζόδρομος με την γέφυρα στον δρόμο Bridge Street (ισχυρισμός)»

«Σημειώθηκαν 4 ατυχήματα ώρες 8:30 το πρωί και 15:30 το μεσημέρι περίπου(δεδομένα) (ώρες όπου τα παιδιά πηγαίνουν και φεύγουν από το σχολείο(εγγύηση)). Στα άτομα που έγινε το ατύχημα ήταν ανήλικα (από 5 έως 8 ετών)(δεδομένα). Η καλύτερη λύση ήταν ένας σχολικός τροχονόμος ο οποίος κοστίζει 5.000 το χρόνο (ισχυρισμός). Οπότε αν υπολογίσουμε πως θα τον χρειαστούμε για 4 χρόνια τότε θα πληρώσουμε (5.000$•4) 20.000$.»

«Επειδή πολλά ατυχήματα με αυτοκίνητα έχουν συμβεί και στο κέντρο της πόλης στη διασταύρωση της TOWN STREET με την BRIDGE STREET (δεδομένα) θα προτείναμε εκεί να τοποθετηθεί ένα TRAFFIC ISLAND AND PEDESTRIAN REFUGE (ισχυρισμός) ,ώστε να ανακόπτει την ταχύτητα των αυτοκινήτων(εγγύηση) , το κόστος του οποίου είναι 3.000€»

Επίπεδο 4 -Ισχυρισμός , Δεδομένα, Εγγύηση και Στήριξη (1/80): Στην τελική φάση της εργασίας βλέπουμε την συνολική εικόνα της δουλειάς των μαθητών, δεν κατάφεραν όλες οι εργασίες να έχουν επιχειρήματα επιπέδου 4. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά το μοναδικό που κατατάχθηκε

στο επίπεδο αυτό ως υποδειγματικό επειδή αναδεικνύει όλα τα στάδια στην δομή του επιχειρήματος και δείχνει την πορεία της μελέτης των δεδομένων και την ανάλυση των στοιχείων που είχαν.

δεδομένα	*Οκτώ (8) από τα σοβαρά ατυχήματα με πεζούς, δηλαδή το 38%, εντοπίζονται στον δρόμο που οδηγεί στο νηπιαγωγείο, τις ώρες και ημέρες που αυτό λειτουργεί, δηλαδή από Δευτέρα έως Παρασκευή 7 το πρωί με 5 το απόγευμα. Τις υπόλοιπες ημέρες και ώρες δεν έχουν αναφερθεί ατυχήματα με πεζούς.*
δεδομένα	*Στον ίδιο δρόμο έχουν επίσης συμβεί 2 ακόμα σοβαρά ατυχήματα, ένα με ποδηλάτη και ένα με αυτοκίνητο.*
δεδομένα	*Επίσης στον δρόμο που διασχίζει το δημοτικό σχολείο έχουν συμβεί άλλα 5 ατυχήματα με πεζούς και μάλιστα το ένα θανατηφόρο.*
Ισχυρισμός - απόφαση	*Για να δώσω λύση στο πρόβλημα προτείνω να ξοδέψουμε 10000 ευρώ και να διορίσουμε δύο σχολικούς τροχονόμους,*
εγγύηση	*οι οποίες θα καθορίζουν την κυκλοφορία των οχημάτων και των πεζών τις ώρες που τα νήπια και οι μαθητές δημοτικού και οι γονείς τους πηγαίνουν ή φεύγουν από τα σχολεία.*
Ισχυρισμός - απόφαση	*Επίσης προτείνω να ξοδέψουμε 6000 ευρώ επιπλέον και να τοποθετήσουμε 6 σαμαράκια μείωσης ταχύτητας, δύο από κάθε πλευρά εισόδου του νηπιαγωγείου και 2 στον δρόμο του δημοτικού. Το κάθε σαμαράκι κοστίζει 1000 ευρώ (6 x 1000€).*
Στήριξη	*Με αυτόν τον τρόπο οι οδηγοί θα έχουν χαμηλή ταχύτητα όταν περνούν μπροστά από τα σχολεία και επίσης οι σχολικοί τροχονόμοι θα προστατεύουν τους πεζούς και τα νήπια που διασχίζουν τον δρόμο.*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην προσπάθειά μας να απαντήσουμε το ερευνητικό ερώτημα για την δομή και την πολυπλοκότητα των επιχειρημάτων των μαθητών φαίνεται ότι οι μαθητές, αν και καταφέρνουν να παρουσιάζουν τα δεδομένα που παρέχει το σχεδιασμένο σενάριο με πολλαπλές αναπαραστάσεις, στην εξαγωγή συμπερασμάτων δυσκολεύτηκαν αρκετά με αποτέλεσμα να έχουμε περισσότερα χαμηλού επιπέδου επιχειρήματα. Μέσα από την ανάλυση των γραπτών απαντήσεων των μαθητών διαπιστώσαμε πως η πλειοψηφία των μαθητών παρήγαγε φτωχά επιχειρήματα (επίπεδο 1 και 2). Επίσης σε λίγες περιπτώσεις εντοπίσαμε επιχειρήματα με αναφορές στο βαθμό βεβαιότητας του ισχυρισμού (εγγύηση) και σε εξαιρετικά λιγότερες ακόμη περιπτώσεις παρατηρήθηκαν όλα τα χαρακτηριστικά του επιχειρήματος , δεδομένα και εγγυήσεις καθώς και στήριξη (επίπεδο 4). Αρκετοί μαθητές πιστεύουν ότι οι απόψεις τους ή οι προσωπικές τους

θεωρίες είναι ορθές έστω και αν δεν υποστηρίζονται από δεδομένα (von Aufschnaiter et al., 2008), έτσι λοιπόν στην περίπτωση της έρευνάς μας βλέπουμε ότι αρκετοί μαθητές αρκούνται σε κάποια γενικά μέτρα πρόληψης ή μείωσης των ατυχημάτων , χωρίς να στηρίζονται σε κάποια δεδομένα, χωρίς να έχουν καταλήξει σε κάποια υπόθεση για την αιτία των ατυχημάτων, χωρίς κάποια αιτιολόγηση. Τα ευρήματά μας είναι παρόμοια με εκείνα της έρευνας των Dawson & Venville (2009), όπου και εκεί έχουμε πλειοψηφία επιχειρημάτων επιπέδου 2, ακολουθούν τα επιπέδου 1 και έπειτα εκείνα του επιπέδου 3 και τέλος του επιπέδου 4. Η άποψη των ίδιων ερευνητών είναι ότι η ποιότητα των επιχειρημάτων εξαρτάται από ένα σώμα κατάλληλης γνώσης που μπορεί να διαμορφώσει τα δεδομένα, τις εγγυήσεις και τους ισχυρισμούς. Στα ΚΕΘ σε σχέση με άλλα επιστημονικά θέματα η διαφορά είναι ότι οι μαθητές μπορούν να φέρουν γνώση κατευθείαν από την εμπειρία ζωής τους και τις ηθικές αξίες τους εκτός από την γνώση που προκύπτει από τα δεδομένα και την ανάλυση. Η ένταξη ΚΕΘ στην τάξη των μαθηματικών μπορεί να εμπλέξει ενεργά τους μαθητές σε διαδικασίες λήψης αποφάσεων και διερεύνησης, παρέχοντας ευκαιρίες για επιχειρηματολογία. Το συγκεκριμένο πρόβλημα έδωσε την ευκαιρία της διερεύνησης μιας κατάστασης πολύ κοντά στην πραγματικότητα με δυνατότητα διαχείρισης και ερμηνείας δεδομένων. Ο στόχος που είχε οριστεί από τον εκπαιδευτικό είναι: *« Να καταλάβουν ότι ακόμα και με μια πολύ μικρή επεξεργασία των δεδομένων σε ένα πρόβλημα, μια ανάλυση σε ένα πρώτο επίπεδο…μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα και να πάρουμε αποφάσεις που να βασίζονται σε αυτά».* Ωστόσο η εισαγωγή τέτοιων θεμάτων στην τάξη αποτελεί πρόκληση για τον εκπαιδευτικό, τόσο ο σχεδιασμός όσο και η υλοποίησή τους. Για αυτό τον λόγο απαιτείται περαιτέρω έρευνα γύρω από το θέμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority [ACARA] (2012). Australian curriculum: mathematics. http://www.australiancurriculum.edu.au/mathematics/Curriculum/F-10.

Dawson, V., & Venville, G. J. (2009). High-school Students' Informal Reasoning and Argumentation about Biotechnology: An indicator of scientific literacy. *International Journal of Science Education*, *31*(11), 1421-1445. https://doi.org/10.1080/09500690801992870

Frankenstein, M. (2009). Developing a critical mathematical numeracy through real real-life word problems. In *Words and worlds* (pp. 111-130). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789087909383_008

Jimenez-Aleixandre, M. P., & Erduran, S. (2007). Argumentation in science education: An overview. *Argumentation in science education*, 3-27. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6670-2_1

Newton, P., Driver, R., & Osborne, J. (1999). The place of argumentation in the pedagogy of school science. *International Journal of science education*, *21*(5), 553-576. https://doi.org/10.1080/095006999290570

Osborne, J., Erduran, S., & Simon, S. (2004). Enhancing the quality of argumentation in school science. *Journal of research in science teaching*, *41*(10), 994-1020. https://doi.org/10.1002/tea.20035

Patronis, T., Potari, D., & Spiliotopoulou, V. (1999). Students' argumentation in decision making on a socio-scientific issue: Implications for teaching. *International Journal of Science Education*, *21*(7), 745–754. https://doi.org/10.1080/095006999290408

Σακονίδης, Χ., Τζεκάκη, Μ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2019). *Αναλυτικά προγράμματα στα Μαθηματικά: Προβληματισμοί για το σήμερα, προσανατολισμοί για το αύριο*. Πρακτικά του 2019 Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (755-757) (ΕΝΕΔΙΜ). http://cyprusconferences.org/enedim8/

Shimada, I., & Baba, T. (2012, July). Emergence of students' values in the process of solving the socially open-ended problem. In *Proc. 36th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.75-82). https://www.academia.edu/download/30744903/pme36_taipeh_volume4.pdf#page=85

Skovsmose, O. (1994). Towards a critical mathematics education. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 35-57. https://doi.org/10.1007/BF01284527

Toulmin, S. (1958). The Uses of Argument Cambridge University Press. *Cambridge, UK*.

Von Aufschnaiter, C., Erduran, S., Osborne, J., & Simon, S. (2008). Arguing to learn and learning to argue: Case studies of how students' argumentation relates to their scientific knowledge. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, *45*(1), 101-131. https://doi.org/10.1002/tea.20213

Weiland, T. (2019). Critical mathematics education and statistics education: Possibilities for transforming the school mathematics curriculum. In *Topics and trends in current statistics education research* (pp. 391-411). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03472-6_18

Zohar, A., & Nemet, F. (2002). Fostering students' knowledge and argumentation skills through dilemmas in human genetics. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National*

Association for Research in Science Teaching, *39*(1), 35-62. https://doi.org/10.1002/tea.10008

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑ

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΚΛΙΜΑΤΙΚΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ

Αναστασιάδης Νικόλαος

6ο Γυμνάσιο Καλαμαριάς

nickana2008@gmail.com

Η παρούσα μελέτη[1] εξετάζει κατά πόσο μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης (ΜΕ) μπορεί να αναπτυχθεί η ιδιότητα του ενεργού πολίτη με την αξιοποίηση κατάλληλα διαμορφωμένων δραστηριοτήτων όταν το πλαίσιο αφορά στην κλιματική αλλαγή. Τα δεδομένα που παρουσιάζονται και αναλύονται προέρχονται από συνεντεύξεις που ακολούθησαν μια διδακτική παρέμβαση στη Γ΄ Γυμνασίου, εστιασμένη στην ανάπτυξη διαφόρων τύπων γνώσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη πολιτειότητας – και μέσω της διδασκαλίας των μαθηματικών – έχει αναδειχτεί ως ένα σημαντικό ζήτημα στην εκπαίδευση, καθώς βοηθάει τους μαθητές και τις μαθήτριες στη διαμόρφωση κριτικής σκέψης και τους/τις καθιστά ενημερωμένους και ενεργούς πολίτες που μπορούν να κατανοούν τον κόσμο γύρω τους και να απαντάνε σε σύγχρονα και συχνά πολύπλοκα προβλήματα (Boaler, 2015; Skovsmose, 2005). Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα —τοπικής και παγκόσμιας εμβέλειας— είναι αυτό της κλιματικής αλλαγής, με τα μαθηματικά να προβάλλουν ως ένα κρίσιμο εργαλείο για την επικοινωνία πληροφοριών και προβλέψεων τόσο στο λόγο των πολιτικών όσο και των επιστημόνων. Μεγάλο μέρος της έρευνας τονίζει την ηθική διάσταση ζητημάτων που αφορούν στην κλιματική αλλαγή (π.χ. Abtahi κ.ά., 2017). Επιπλέον τέτοια πλαίσια όπως αυτό της κλιματικής αλλαγής συμβάλλουν στο να μη διδάσκονται τα μαθηματικά αποπλαισιωμένα—ως στείρα γνώση—αλλά να υπηρετούν το μήνυμα ότι τα μαθηματικά σχετίζονται με την κατανόηση και ερμηνεία του κόσμου (Simmt, 2001). Η ποιοτική έρευνα που παρουσιάζεται εδώ, εξετάζει αφενός κατά πόσο η κλιματική αλλαγή μπορεί να αποτελέσει ένα κατάλληλο πλαίσιο για τη διδασκαλία των μαθηματικών στη Β/θμια εκπαίδευση, στο ελληνικό πλαίσιο, για την ανάπτυξη πολιτειότητας και αφετέρου πως ένα τέτοιο πλαίσιο δίνει νόημα στα μαθηματικά. Πριν την παρουσίαση του εμπειρικού μέρους αναπτύσσεται σύντομα ένα θεωρητικό πλαίσιο.

1. Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑΣ

Η πολιτειότητα ως μη νομική έννοια, περιλαμβάνει διάφορες προσεγγίσεις. Σύμφωνα με τους Westheimer & Kahne (2004) υπάρχει ο **προσωπικά υπεύθυνος πολίτης** που θεωρεί ότι, για την επίλυση κοινωνικών προβλημάτων και τη βελτίωση της κοινωνίας, οι πολίτες πρέπει να έχουν καλό χαρακτήρα, να είναι έντιμα, υπεύθυνα και νομοταγή μέλη της κοινότητας. Υπάρχει ο **συμμετοχικός πολίτης,** που ενστερνίζεται την άποψη ότι για την επίλυση των κοινωνικών προβλημάτων και τη βελτίωση της κοινωνίας, οι πολίτες πρέπει να συμμετέχουν ενεργά και να αναλαμβάνουν ηγετικές θέσεις μέσα στα καθιερωμένα συστήματα και τις κοινοτικές δομές. Τέλος, υπάρχει **ο προσανατολισμένος στη δικαιοσύνη πολίτης** που πιστεύει ότι για την επίλυση των κοινωνικών προβλημάτων και τη βελτίωση της κοινωνίας, οι πολίτες πρέπει να αμφισβητούν, να συζητούν και να αλλάζουν τα καθιερωμένα συστήματα και δομές που αναπαράγουν πρότυπα αδικίας με την πάροδο του χρόνου. Μέσω της εστίασης στην κλιματική αλλαγή, λόγω και του επείγοντα χαρακτήρα της, απαντάμε σε μια από τις διαστάσεις της πολιτειότητας, του περιβαλλοντικά ενεργού πολίτη.

2. ΚΛΙΜΑΤΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑΣ

Στην παρούσα εργασία υιοθετούμε το θεωρητικό πλαίσιο των Barwell & Hauge (2021) που συνθέτει ιδέες από την Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση με μια θεωρητικοποίηση της φύσης της επιστήμης και του ρόλου της στην κοινωνία, στο πλαίσιο των σύνθετων περιβαλλοντικών προβλημάτων. Για αυτή τη θεωρητικοποίηση παίρνει ιδέες από τη φιλοσοφία της μετακανονικής επιστήμης που ανέπτυξαν οι Funtowicz & Ravetz (1993) το οποίο ειδικά αναφέρεται σε προβλήματα, όπως αυτό της κλιματικής αλλαγής, προβλήματα με υψηλό βαθμό αβεβαιότητας, συγκρούσεων και υψηλό επίπεδο επειγόντων κινδύνων. Η κλιματική αλλαγή επηρεάζει την ανθρωπότητα και έτσι πέρα από την επιστημονική κοινότητα, οι πολίτες οφείλουν να εμπλέκονται στις πολιτικές συζητήσεις και τη δράση γύρω από τα προτεινόμενα μέτρα, πολλά από τα οποία έχουν άμεση επίπτωση στη ζωή τους. Με το δεδομένο του σημαντικού ρόλου που παίζουν τα μαθηματικά στην κλιματική επιστήμη, ο Skovsmose (1994) αναφερόμενος στο είδος της μαθηματικής εκπαίδευσης που μπορεί να προετοιμάσει τους πολίτες να συμμετέχουν σε αυτή τη διαδικασία, μιλάει για τη μορφοποιητική δύναμη των μαθηματικών στην τεχνολογική μας κοινωνία και την υλοποιημένη αφαίρεση. Τα μαθηματικά μέσα από τη μοντελοποίηση διάφορων δραστηριοτήτων δεν περιγράφουν μόνο αλλά και επιβάλλουν τρόπο λειτουργίας της κοινωνίας. Τα μαθηματικά μοντέλα

για την κλιματική αλλαγή για παράδειγμα μπορούν να θεωρηθούν μια υλοποιημένη αφαίρεση με την έννοια ότι επηρεάζουν τις κυβερνητικές πολιτικές (Barwell, 2013). Επιπλέον, σύμφωνα με τον ίδιο, τα μαθηματικά εμπλέκονται στην περιγραφή, την πρόβλεψη και την επικοινωνία της κλιματικής αλλαγής. Οι μαθητές/τριες χρειάζονται ευκαιρίες για να αναπτύξουν μια, σύμφωνα με τον Skovsmose (1994), αναστοχαστική γνώση των μαθηματικών για το ρόλο τους στη δημιουργία αλλά και στην κατανόηση της κλιματικής αλλαγής. Οι Barwell & Hauge (2021) προτείνουν τις παρακάτω τρεις ομάδες αρχών: **Μορφές αυθεντικότητας**: σχετικά προβλήματα, πραγματικά δεδομένα, τις ιδέες και τις αξίες των μαθητών, σε συζητήσεις στην τάξη. **Μορφές συμμετοχής**: στα μαθηματικά, στις αίθουσες διδασκαλίας, στην κοινότητα, στο δημόσιο διάλογο. **Αναστοχασμός, πάνω και σχετικά με τα Μαθηματικά:** για το πως τα Μαθηματικά είναι χρήσιμα, για τα όρια των μαθηματικών, για τις αξίες των μαθηματικών, για την αβεβαιότητα.

3. ΚΡΙΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΚΛΙΜΑΤΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ

Οι αρχές της Κριτικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ΚΜΕ) δίνουν τον θεωρητικό φακό μέσα από τον οποίο έχει γίνει η συγκεκριμένη μελέτη. Η ΚΜΕ δίνει έμφαση, μεταξύ άλλων, στις κοινωνικές και πολιτικές πλευρές της μάθησης των μαθηματικών, τη χρήση και τη λειτουργία των μαθηματικών στην πράξη, τονίζοντας την ανάγκη για μια κουλτούρα στην τάξη που να λειτουργεί ως ένα δημοκρατικό φόρουμ για την πραγμάτευση ιδεών και κυρίως την ανάπτυξη της ενεργούς πολιτειότητας (Skovsmose & Borba, 2006). Οι ίδιοι προτείνουν μια διαφορετική μεθοδολογική αντίληψη, θα λέγαμε οραματική, η οποία αποτυπώνεται στην πρόταση να μελετάμε τη ΜΕ όχι μόνο με αυτό που βλέπουμε αλλά και με το τι θα μπορούσαμε ή θα έπρεπε να δούμε. Τέλος από την ΚΜΕ προβάλλεται η ανάγκη για αναστοχασμό και για «ηθική απαίτηση» που σχετίζεται με την κριτική αντίληψη των μαθηματικών (Skovsmose, 2011). Μια τέτοια αντίληψη για τα μαθηματικά υπαγορεύει διαφορετικές πρακτικές στην τάξη, με τους εκπαιδευτικούς να αναζητούν ιδέες και πλαίσια για να πλαισιώσουν μαθηματικές ιδέες και ταυτόχρονα να καλλιεργούν άλλες δεξιότητες στους/ις μαθητές/τριες που θα τους κάνουν εν δυνάμει ενεργούς πολίτες. Το παγκόσμιο θέμα της κλιματικής αλλαγής προσφέρεται, καθώς μέσα από την οπτική της ΚΜΕ μπορεί να στοχεύσει στην κριτική πολιτειότητα, ενώ και τα ίδια τα μαθηματικά εμπλουτίζονται, καθώς μπορεί να αποτελούν ένα όχημα για να αναπτυχθεί νέα μαθηματική γνώση σε μια πλαισιωμένη κατάσταση, όπου το πλαίσιο που παρουσιάζεται είναι

ένα σενάριο της πραγματικής ζωής (Savard, 2018). Η κλιματική αλλαγή ανήκει στα λεγόμενα κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα. Τέτοια πλαίσια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μάθηση επιστημονικού περιεχομένου και έχουν συνδεθεί με τη μαθηματική μοντελοποίηση (Maass κ.ά., 2019). Επιπλέον, η ανάπτυξη πολιτειότητας περνάει μέσα από δύο άξονες. Την ανάπτυξη γνώσης και μια διδακτική πρακτική που την ευνοεί. Η γνώση που αναπτύσσεται στην τάξη των μαθηματικών είναι σύμφωνα με τον Skovsmose (1994), τριών ειδών, η μαθηματική, η τεχνολογική και η αναστοχαστική.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ-ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στόχος της έρευνας: να συνδεθεί η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών με κοινωνικά, ηθικά και πολιτικά ζητήματα στην κατεύθυνση της ενεργούς πολιτειότητας και να διερευνηθεί ο ρόλος μαθηματικών εννοιών στην κατανόηση διαστάσεων της κλιματικής αλλαγής και ο ρόλος της κλιματικής αλλαγής ως πλαίσιο που εμπλουτίζει τη διδασκαλία των μαθηματικών δίνοντας νόημα σε έννοιες και διαδικασίες.

Μεθοδολογική προσέγγιση. Επιλέχθηκε **ποιοτική προσέγγιση (**και πιο συγκεκριμένα μελέτη περίπτωσης) ώστε να αναδειχθεί η εμπειρία των συμμετεχόντων και να αναδειχθεί νέα γνώση (Ίσαρη & Πουρκός, 2015). Για την ανάλυση και ερμηνεία των ευρημάτων αξιοποιήθηκε η θεματική ανάλυση [2] – διαδικασία που υπαγορεύει και προϋποθέτει έναν ενεργητικό και δημιουργικό ρόλο του ερευνητή, μέσα από μια διαλογική σχέση με τα δεδομένα του (Tsiolis, 2015).

Ερευνητικά ερωτήματα: Πως επιδρά το πλαίσιο της κλιματικής αλλαγής στην ανάπτυξη μαθηματικής, τεχνολογικής και αναστοχαστικής γνώσης παράλληλα με την ανάπτυξη πολιτειότητας;

Το πλαίσιο της έρευνας: Χώρος, χρόνος, συμμετέχοντες/ουσες: Η έρευνα διεξήχθη σε Γυμνάσιο ενός δήμου της Θεσσαλονίκης, το Μάιο του 2023. Οι συμμετέχοντες/ουσες ήταν 6 μαθητές και μαθήτριες της Γ΄ Γυμνασίου που ανήκαν σε τμήμα 26 ατόμων και επιλέχτηκαν με βάση τη διαθεσιμότητά τους και την επίδοσή τους στα μαθηματικά (2 με υψηλή επίδοση, 2 με μέτρια και 2 με χαμηλή). Αφιερώθηκαν 11 διδακτικές ώρες, σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας του Υπουργείου Παιδείας.

Εργαλεία. Τα εργαλεία συλλογής δεδομένων ήταν, ατομικές 10λεπτες, ημιδομημένες συνεντεύξεις, συνεντεύξεις σε ομάδες εστίασης για περαιτέρω εμβάθυνση, (συμμετοχική) παρατήρηση κατά τη διάρκεια της

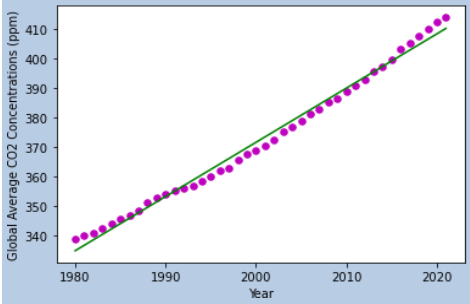
παρέμβασης, άτυπες συζητήσεις, ερωτηματολόγια, κατ' οίκον εργασίες. Εδώ, θα περιοριστούμε στην ανάλυση των ατομικών συνεντεύξεων.

Διαδικασία: Σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε παρέμβαση που περιλάμβανε διδασκαλία σε τμήμα της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου η οποία κάλυψε τις παραγράφους που αφορούν τις έννοιες της γραμμικής εξίσωσης, του γραμμικού συστήματος και την αλγεβρική επίλυση συστήματος, μια και παράλληλα με την έρευνα έπρεπε να ακολουθηθεί το αναλυτικό πρόγραμμα. Με βάση το ΔΕΠΠΣ του 2003 οι μαθητές/τριες καλούνται να μάθουν να παριστάνουν γραφικά μια γραμμική εξίσωση και να λύνουν ένα γραμμικό σύστημα, τόσο γραφικά, όσο και αλγεβρικά με τις μεθόδους της αντικατάστασης και των αντίθετων συντελεστών με στόχο και την επίλυση προβλημάτων. Υπήρχε η δυνατότητα να διδαχθούν οι παράγραφοι με την αξιοποίηση του πλαισίου της κλιματικής αλλαγής, μια που τα μοντέλα περιγραφής και πρόβλεψης που χρησιμοποιούνται για την ανάδειξη συγκεκριμένων πλευρών της κλιματικής αλλαγής, αλλά και της παραγωγής, εξοικονόμησης και χρήσης ενέργειας, περιλαμβάνουν εξισώσεις ευθείας που προκύπτουν με γραμμική παλινδρόμηση από τα δεδομένα. Η απλή αυτή, στην κατανόησή της, μορφή μοντελοποίησης συνάδει με το επίπεδο γνώσεων που απαιτείται για το Γυμνάσιο. Σε ό,τι αφορά την γραφική ή αλγεβρική επίλυση συστημάτων, αξιοποιήθηκαν προβλήματα με πλαίσιο την παραγωγή, την κατανάλωση και το κόστος της ενέργειας, όπου αναδεικνύεται η σημασία αλλά και τα προβλήματα των ΑΠΕ, η εξοικονόμηση μέσω χρήσης λαμπτήρων LED αλλά και προβλήματα με αναφορά στη μόλυνση του περιβάλλοντος. Η σύγκριση μεθόδων παραγωγής και κατανάλωσης ενέργειας για τη βελτιστοποίηση του περιβαλλοντικού αποτυπώματος, μέσω επίλυσης γραμμικών συστημάτων, είχε σκοπό να αναδείξει τη σημασία των συγκεκριμένων μαθηματικών τεχνικών. Η διδασκαλία οργανώθηκε γύρω από τέσσερα φύλλα εργασίας με το μαθηματικό περιεχόμενο που περιγράφηκε. Στόχος της διδακτικής παρέμβασης ήταν, τόσο η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών αλλά και η ανάπτυξη προβληματισμού και ευαισθητοποίησης για την κλιματική αλλαγή ως μια έκφραση ανάπτυξης πολιτειότητας.

Ακολουθεί, ως παράδειγμα, μία άσκηση από το 1ο φύλλο εργασίας που χρησιμοποιήθηκε για να διδαχθεί η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ και η λύση της, να εξηγηθεί η γραφική αναπαράσταση των άπειρων λύσεων της, που παίρνει τη μορφή ευθείας, και να δειχθεί ότι αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της και το αντίστροφο. Εργαζόμενοι επάνω στο φύλλο εργασίας οι μαθητές και οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν την εξίσωση ευθείας για να υπολογίσουν τιμές

του y για συγκεκριμένες τιμές του x, αλλά και διερεύνησαν πως, γνωρίζοντας την τιμή του y μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του x (σελ. 122-123 του σχολικού βιβλίου). Συζήτησαν την φυσική σημασία που είχαν τα σημεία της ευθείας των οποίων οι συντεταγμένες αποτελούνται από τη χρονιά και την αντίστοιχη συγκέντρωση CO_2. Προβληματίστηκαν για το ρόλο της καύσης ορυκτών καυσίμων στην ενίσχυση του φαινομένου. Αναδείχθηκε η σημασία της σύνδεσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο γιατί τα ελλείματα στη μαθηματική γνώση και ο πρωτόγνωρος για τους/τις μαθητές/τριες τρόπος ήταν πηγή δυσκολιών. Με βάση την άσκηση ήρθαν σε επαφή με την μοντελοποίηση ως μία προσέγγιση της πραγματικότητας.

Η ευθεία που βλέπουμε στο σχήμα, είναι ένα μοντέλο για την περιγραφή και πρόβλεψη του ετήσιου παγκόσμιου μέσου όρου συγκέντρωσης CO2 σε μέρη στο εκατομμύριο (ppm) ανά έτος από το 1980 έως το 2020. Οι κουκίδες αντιπροσωπεύουν τις πραγματικές τιμές που έχουν μετρηθεί. **α)** Αν η ευθεία έχει εξίσωση 1,83x-y= 3291,4 τότε μπορείτε να ελέγξετε αν τα σημεία (1990, 350,3) και (2000, 368,6) είναι σημεία της ευθείας; Ποιο είναι το φυσικό νόημα αυτών των αριθμών; **β)** Μπορείτε να υπολογίσετε πόση ήταν η συγκέντρωση του CO_2 το 1980 και πόση το 2020; Βρείτε τις τιμές, πρώτα από τα πραγματικά δεδομένα και έπειτα από την εξίσωση της ευθείας. **γ)** Μπορείτε να προβλέψετε πόση θα είναι η συγκέντρωση του CO_2 το 2050; **δ)** Με βάση τα πραγματικά δεδομένα, ποια χρονιά ξεπεράστηκε το όριο των 400 ppm για πρώτη φορά στην ιστορία της ανθρωπότητας; Το προέβλεψε αυτό το παρακάτω μοντέλο πρόβλεψης; Τι μας λέει αυτό για τα μοντέλα πρόβλεψης;



Ετήσιος παγκόσμιος μέσος όρος συγκέντρωσης CO_2 σε ppm

Πηγή δεδομένων: National Oceanic and Atmospheric Administration

Η συνέντευξη δομήθηκε σε τρεις άξονες. Ο πρώτος αφορούσε στην κατανόηση από τους μαθητές/τριες της κλιματικής αλλαγής και τους τρόπους δράσης για την αντιμετώπισή της. Ο **δεύτερος άξονας** ζητούσε να περιγράψουν την εμπειρία από τη διαφορετική προσέγγιση, σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών Ειδικότερα ένα ερώτημα αφορούσε στην ανάπτυξη τεχνολογικής γνώσης μέσα από τη χρήση κατάλληλου λογισμικού. Τέλος ο **τρίτος άξονας** αφορούσε στην κατανόηση από τους μαθητές/τριες του ρόλου και της λειτουργίας των μαθηματικών σε ό,τι αφορά στην κλιματική αλλαγή αλλά και την κατανόηση του κόσμου μας.

ΕΥΡΗΜΑΤΑ

Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν και στη συνέχεια σχηματίστηκαν κώδικες που οδήγησαν σε υποθεματικές και εντέλει θεματικές. Για παράδειγμα οι κώδικες: «Τα μαθηματικά παρόντα στην κοινωνική οργάνωση» και «Χρήσιμη η σύνδεση κλιματικής αλλαγής και μαθηματικών» έδωσαν την υποθεματική «Διαμορφωτικός ρόλος των μαθηματικών», υποκατηγορία που εντάσσεται στη θεματική «Ανάπτυξη αναστοχαστικής γνώσης».

Θεματικές	**Υποθεματικές**
Ανάπτυξη Μαθηματικής Γνώσης	
Ανάπτυξη Τεχνολογικής Γνώσης	
Ανάπτυξη Αναστοχαστικής Γνώσης	Αντιμετώπιση κλιματικής αλλαγής
	Διαμορφωτικός ρόλος των μαθηματικών
Διδακτική πρακτική	

Στην παρούσα μελέτη εστιάζουμε μόνο στη διάσταση της ανάπτυξης αναστοχαστικής γνώσης που αφορά: **α)** στην αντιμετώπιση της κλιματικής αλλαγής και **β)** στην κατανόηση του διαμορφωτικού ρόλου των μαθηματικών όσον αφορά στην κλιματική αλλαγή και τις συνέπειες στην κοινωνία.

Οι μαθητές/τριες, θεώρησαν ότι από τη μια βελτιώθηκε η κατανόησή τους σε ό,τι αφορά την κλιματική αλλαγή και από την άλλη ενισχύθηκε η επιθυμία τους να μάθουν περισσότερα γι' αυτό. Διαπίστωσαν τη δυνατότητα να γίνονται προβλέψεις οι οποίες μπορούν να καθοδηγούν τις κοινωνίες στη λήψη έγκαιρων και κατάλληλων μέτρων.

Μαρία: Προφανώς [αναφορά στην πρόβλεψη μέσω μαθηματικών μοντέλων] αντιλαμβάνεσαι καλύτερα την κατάσταση, μπορείς να βρεις καλύτερες μεθόδους να το αντιμετωπίσεις συνειδητοποιείς την σοβαρότητα για μια σε εξέλιξη κατάσταση.

Νικολέττα: Βρήκα [νόημα], γιατί έτσι μου κίνησε πιο πολύ το ενδιαφέρον για να μάθω πιο πολλά πράγματα για την κλιματική αλλαγή που δεν ήξερα, οπότε ναι, βοήθησε αρκετά πιστεύω.

Επίσης προβληματίστηκαν για το είδος της δράσης που πρέπει να αναπτυχθεί για να αντιμετωπιστεί η κλιματική αλλαγή. Η στάση του ευαισθητοποιημένου καταναλωτή αλλά και οι διαδηλώσεις θεωρήθηκαν σημαντικοί αλλά ανεπαρκείς τρόποι δράσης. Προτάθηκαν ακόμη, η δημιουργία οργανώσεων υπεράσπισης του περιβάλλοντος, οι ενημερωτικές καμπάνιες, η αξιοποίηση των ΜΜΕ, όπως βέβαια και η παρέμβαση των κυβερνήσεων με την ανάλογη νομοθεσία.

Μαρία: Πιστεύω ότι πρέπει να κινητοποιηθούμε, εντάξει οι διαδηλώσεις είναι ένα μέτρο που μπορούν να επηρεάσουν τις αποφάσεις, τώρα μπορούν [οι πολίτες] να δημιουργήσουν οργανώσεις που να παίρνουνε πρωτοβουλίες και να περιορίσουν σε κάποιο βαθμό τη ρύπανση.

Ιφιγένεια: Οι διαδηλώσεις, ξέρω εγώ, βοηθάνε, αλλά δεν νομίζω ότι επηρεάζουν ιδιαίτερα, πάλι θα κάνουνε αυτό που θέλουνε.

Ελένη: Σίγουρα θα βοηθήσει [η προσωπική στάση], αλλά πρέπει να γίνουν ακόμα περισσότερα, οι κυβερνήσεις να πάρουνε μέτρα, κι εμείς ως καταναλωτές να προσπαθούμε να κάνουμε το καλύτερο δυνατό για το περιβάλλον. Θα μπορούσαν να απευθύνονται στην κυβέρνηση [οι διαδηλωτές].

Αναγνώρισαν τη σημασία των μαθηματικών στον κόσμο, ειδικότερα για την κατανόηση και δράση ενάντια στην κλιματική αλλαγή:

Ιφιγένεια: Με βοήθησαν [οι παρεμβάσεις] να καταλάβω κάποια πράγματα που δεν ήξερα για την κλιματική αλλαγή. Και για τα μαθηματικά κατάλαβα κάπως πως συνδέονται. Ήτανε ωραία, εντάξει.

Ελένη: Ναι. Τα μαθηματικά είναι αναπόσπαστο κομμάτι της κοινωνίας της σημερινής και του μέλλοντος.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην έρευνα εξετάστηκε κατά πόσο η κλιματική αλλαγή μπορεί να αποτελέσει ένα πλαίσιο για την καλλιέργεια πολιτειότητας ενώ αναπτύσσεται μια αμφίδρομη σχέση: τα μαθηματικά ως εργαλείο για την κατανόηση θεμάτων για την κλιματική αλλαγή και η κλιματική αλλαγή ως μέσο που δίνει νόημα σε μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Τα μαθηματικά αποτέλεσαν το μέσο που έφερε σε επαφή τους μαθητές και τις μαθήτριες με την κλιματική αλλαγή και η κλιματική αλλαγή τους/τις οδήγησε να αναρωτηθούν ποια πρέπει να είναι η στάση τους ως ενεργοί πολίτες που επηρεάζονται καταλυτικά από το φαινόμενο, κατανοώντας παράλληλα τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Η δυνατότητα

περιγραφής και προβλέψεων που μας δίνουν τα μαθηματικά τους/τις οδήγησαν από τη μία να εκτιμήσουν το ρόλο των μαθηματικών ως γνωστικό εργαλείο και από την άλλη να κινητοποιηθούν στο μέτρο του δυνατού, από την αποκάλυψη μπροστά στα μάτια τους ενός ζοφερού παρόντος και μέλλοντος. Το γεγονός ωστόσο της μη ανάπτυξης αντίστοιχων με το Fridays For Future (FFF), κινημάτων νεολαίας στην Ελλάδα και της συζήτησης που προκαλούν, δυσχέραινε τη συζήτηση για τις αιτίες και συνακόλουθα τις προτάσεις αντιμετώπισης της κλιματικής αλλαγής. Στην παρέμβαση που έγινε ήταν εφικτό να τεθεί έμμεσα το ερώτημα των αιτιών, να προσδιοριστεί ότι η απάντηση δε περιορίζεται στην ατομική στάση του περιβαλλοντικά ευαισθητοποιημένου καταναλωτή για να συμφωνήσουν με τον Melo (2022) και να προταθούν διάφορες μορφές δράσης των πολιτών όπως διαδηλώσεις, περιβαλλοντικές οργανώσεις, καμπάνιες ενημέρωσης, αξιοποίηση ΜΜΕ.

Σε ό,τι αφορά στο ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά για την κατανόηση του κόσμου μας και την κλιματική αλλαγή ειδικότερα, οι απαντήσεις που δόθηκαν αναδεικνύουν τη σημασία τους στην περιγραφή, την πρόβλεψη και την επικοινωνία της κλιματικής αλλαγής για να συμφωνήσουν με τον Barwell (2013).

Συμπερασματικά, φαίνεται να έχει ενδιαφέρον η προσπάθεια ανάπτυξης της ιδιότητας του πολίτη σε μαθητές και μαθήτριες του Γυμνασίου, μέσα από καλά σχεδιασμένες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις στην τάξη των μαθηματικών και πλαίσια που παράγουν νόημα και τα οποία τους/τις κινητοποιούν. Ο ρυθμός και τα βήματα ανάπτυξης της πολιτειότητας καθορίζονται σε σημαντικό βαθμό από το ευρύτερο πλαίσιο που υπάρχει εκτός τάξης, τροφοδοτεί την αντίστοιχη συζήτηση και πρακτική, και επηρεάζει τους/ις μαθητές/τριες και εν γένει την εκπαιδευτική πρακτική. Αυτή η προσπάθεια απαιτεί και αντίστοιχες εκπαιδευτικές πολιτικές που θα διευρύνουν τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης κάτι που ευελπιστούμε θα υποστηριχτεί από τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα σπουδών.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Είναι μέρος ευρύτερης μελέτης στο πλαίσιο διπλωματικής εργασίας με τίτλο “Μαθηματική εκπαίδευση και ανάπτυξη πολιτειότητας. Η περίπτωση της κλιματικής αλλαγής.”

2. Αυτή η προσέγγιση περιλαμβάνει τα εξής βήματα: Εξοικείωση με τα δεδομένα, παραγωγή αρχικών κωδίκων, αναζήτηση για θεματικές, αναθεώρηση θεματικών, ορισμός θεματικών. Τα δεδομένα μεταφράζονται και συζητιόνται σύμφωνα με τις βιβλιογραφικές αναφορές και τα ερωτήματα της έρευνας (Braun & Clarke, 2012).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2015). Ποιοτική Μεθοδολογία Έρευνας Εφαρμογές Στην Ψυχολογία Και Στην Εκπαίδευση. Στο *Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών*. http://hdl.handle.net/11419/5826

Abtahi, Y., Gøtze, P., Steffensen, L., & ... (2017). Teaching climate change in mathematics classrooms: An ethical responsibility. *... of Mathematics ...*, 1–18. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome32/Abtahietal-submitted.docx

Barwell, R. (2013). The mathematical formatting of climate change: critical mathematics education and post-normal science. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 1–16. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.756633

Barwell, R., & Hauge, K. H. (2021). A Critical Mathematics Education for Climate Change. Στο *Applying Critical Mathematics Education* (σσ. 166–184). BRILL. https://doi.org/10.1163/9789004465800_008

Boaler, J. (2015). *What's Math Got to Do with It?: How Teachers and Parents Can Transform Mathematics Learning and Inspire Success*. Penguin Publishing Group.

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. *APA handbook of research methods in psychology, Vol 2: Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological.*, *2*, 57–71. https://doi.org/10.1037/13620-004

Funtowicz, S. O., & Ravetz, J. R. (1993). Science for the post-normal age. *Futures*, *25*(7), 739–755. https://doi.org/10.1016/0016-3287(93)90022-L

Maass, K., Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2019). Promoting active citizenship in mathematics teaching. *ZDM*, *51*(6), 991–1003. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01048-6

Melo, C. (2022). Citizenship and social transformation New discourses and action against climate change. *Metode Science Studies Journal*, *2022*(12), 137–141. https://doi.org/10.7203/metode.12.18958

Savard, A. (2018). *Teaching Mathematics and Developing Citizenship: How to Use Contexts to Enhance Problem-Based Learning*. 317–324. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92390-1_30

Simmt, E. (2001). Citizenship education in the context of school mathematics. *Canadian Social Studies Journal*, *35*(3).

Skovsmose, O. (1994). Towards a Critical Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 35–57. http://www.jstor.org/stable/3482665

Skovsmose, O. (2005). *Travelling Through Education*. BRILL. https://doi.org/10.1163/9789087903626

Skovsmose, O. (2011). *An invitation to Critical Mathematics Education* (τ. 1, Τεύχος 1). Sense Publishers,.

Skovsmose, O., & Borba, M. (2006). Research Methodology and Critical Mathematics Education. Στο *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education* (τ. 2, Τεύχος April 2006, σσ. 207–226). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-7914-1_17

Tsiolis, G. (2015). Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων : διλήμματα , δυνατότητες , διαδικασίες . *Ερευνητική Μεθοδολογία στις Κοινωνικές Επιστήμες και στην Εκπαίδευση. Συμβολή στην επιστημολογική θεωρία και την ερευνητική πράξη*, *May*, 473–498.

Westheimer, J., & Kahne, J. (2004). What Kind of Citizen? The Politics of Educating for Democracy. *American Educational Research Journal*, *41*(2), 237–269. https://doi.org/10.3102/00028312041002237

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΦΥΛΑΚΗ: ΚΟΙΝΟΙ ΧΩΡΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΜΕ ΝΕΑΡΟΥΣ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ

Ιωάννης Φόβος, Βασιλική Χρυσικού, Χαρούλα Σταθοπούλου

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ifovos@uth.gr, vchrysikou@gmail.com, hastath@uth.gr

Η παρούσα εργασία βασίστηκε σε εν εξελίξει έρευνα σε σωφρονιστικά καταστήματα νέων στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος ACTinPRISON [1]. Αφορά στην ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού σε νεαρούς κρατούμενους σε χώρους ισότιμης συμμετοχής με μελλοντικούς εκπαιδευτικούς και στοχεύει τόσο στην ενδυνάμωση και την ομαλή επανένταξη των πρώτων, όσο και την προετοιμασία των δεύτερων για τη διαχείριση της ετερότητας σε πραγματικές συνθήκες. Η επιλογή διαλογικής μεθοδολογικής προσέγγισης (Κριτική Επικοινωνιακή Μεθοδολογία-ΚΕΜ) φαίνεται να ανταποκρίνεται στην υλοποίηση των παραπάνω στόχων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία προσπαθεί να συμβάλει στη συζήτηση για τη μαθηματική εκπαίδευση (ΜΕ) σε σωφρονιστικά καταστήματα. Παρότι η έρευνα έχει αναδείξει τα οφέλη από την εκπαίδευση (π.χ. Πέτσας, 2019), ταυτόχρονα ασκείται κριτική στον τρόπο που υλοποιείται (Φόβος, 2023; Farley et al., 2016) με αποτέλεσμα να μην πραγματώνονται οι στόχοι της. Προσπαθώντας να απαντήσουμε σε αυτόν τον προβληματισμό, δημιουργήσαμε κοινούς χώρους ισότιμης συμμετοχής με νεαρούς κρατούμενους και μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, εντός σωφρονιστικού καταστήματος, διερευνώντας εάν αυτό το πλαίσιο είναι κατάλληλο αφενός για την ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού και αφετέρου για την ενδυνάμωση των νεαρών κρατουμένων και ταυτόχρονα την προετοιμασία των μελλοντικών εκπαιδευτικών για τη διαχείριση της ετερότητας.

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΦΥΛΑΚΗΣ

Ο έγκλειστος πληθυσμός χαρακτηρίζεται, εκτός από τον φυσικό αποκλεισμό του από την κοινωνία, και από τα διαφορετικά πολιτισμικά και γλωσσικά περιβάλλοντα (World Health Organization, 2014). Ο εγκλεισμός και η κράτηση συντελούν στον στιγματισμό, στην περιθωριοποίηση, και απανθρωποποίηση (dehumanization) του ατόμου και συχνά την αποδοχή των αρνητικών αξιών της κουλτούρας της φυλακής για την επιβίωσή του (Enggist et al., 2014). Ο πληθυσμός των μαθητών στα σχολεία των φυλακών, και ιδιαίτερα οι νεαροί κρατούμενοι, συχνά παρουσιάζουν σχολική άρνηση, κακή απόδοση, ακαδημαϊκή ανεπάρκεια

και αποτυχία, οδηγώντας σε χαμηλή αυτοεκτίμηση (Hirschfield, 2014). Κοινά εμπόδια στη συμμετοχή είναι η έλλειψη κινήτρων, καθώς και οι προηγούμενες αρνητικές εκπαιδευτικές εμπειρίες (Liebling, 2011). Παρά τη διαφοροποίηση, όσον αφορά στο θεσμό του εγκλεισμού, υπάρχουν κοινά χαρακτηριστικά, όπως η απουσία νοήματος, η δυσκολία διαμόρφωσης ταυτότητας, η έμφαση στις καταπιεστικές (και πειθαρχικές) τάσεις και πρακτικές που διαμορφώνονται γύρω από λόγους (discourses) ελέγχου και πειθαρχίας, με αποτέλεσμα συχνά μια απογοητευτική και περιορισμένη εκπαίδευση. Έτσι το σχολείο σε καταστημάτα κράτησης καλείται να συνδυάσει δύο διαφορετικούς λόγους και αντίστοιχες πρακτικές: πειθαρχικό σύστημα, εκπαίδευση/κατάρτιση (Blazich, 2007).

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ/ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΙΣ ΦΥΛΑΚΕΣ

Η στρατηγική για την Ευρώπη 2020 δίνει έμφαση στην εκπαίδευση της ευάλωτης ομάδας των κρατουμένων, ως μέσο για τη δημιουργία προϋποθέσεων κοινωνικής ένταξης, ανάπτυξης πολιτειότητας και προσωπικής ανάπτυξης (EC, 2010, σελ. 1). Σύμφωνα με την υπάρχουσα εκπαιδευτική πολιτική για τη (μαθηματική) εκπαίδευση των νεαρών κρατουμένων στη φυλακή, ακολουθούνται προγράμματα σπουδών τυπικής εκπαίδευσης, χρησιμοποιούνται σχολικά εγχειρίδια και εκπαιδευτικό υλικό, αναντίστοιχα με την ηλικία και τα ενδιαφέροντά τους, ενώ δεν αξιοποιούνται οι πόροι γνώσης τους. Επιπλέον δεν διασφαλίζεται η κατάλληλη προετοιμασία των εκπαιδευτικών (Φόβος, 2023). Εστιάζοντας στη ΜΕ, φαίνεται να είναι ιδιαίτερα σημαντικός ο ρόλος της, καθώς επιτρέπει στα άτομα να αντιλαμβάνονται τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά, να αλληλεπιδρούν, να χειρίζονται και να ανακαλούν γνώσεις που είναι απαραίτητες για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων—διαστάσεις χειραφέτησης και κοινωνικού μετασχηματισμού (D' Ambrosio & D' Ambrosio, 2013). Μέσα από αυτό το πρίσμα βλέπουμε την ανάπτυξη πρακτικών μαθηματικού γραμματισμού σε νεαρούς ενήλικες σε σωφρονιστικά ιδρύματα στην Ελλάδα.

Οι ιδέες της Πολιτισμικά Ανταποκρινόμενης Διδασκαλίας (ΠΑΔ) σε συνδυασμό με αυτές της Ανδραγωγικής έδωσαν το θεωρητικό πλαίσιο για την έρευνα. Η ΠΑΔ εστιάζει στην εκπαίδευση μαθητών από περιθωριοποιημένες ομάδες, οι οποίες θυματοποιούνται μέσω της χαμηλής τους επίδοσης και αξιοποιεί τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά, τις εμπειρίες και εν γένει τα πλαίσια αναφοράς των πολιτισμικά διαφορετικών μαθητών, για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία (Gay, 2018). Η Ανδραγωγική, αντλεί από την εκπαίδευση ενηλίκων και ορίζεται ως η «τέχνη» και η επιστήμη της διδασκαλίας σε ενήλικες, με τον εκπαιδευτικό να διευκολύνει τη διαδικασία μάθησης (Knowles et al., 2012).

ΚΟΙΝΟΙ ΧΥΡΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕ

Το τυπικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών με τα αντίστοιχα εγχειρίδια και πρακτικές μεταφέρονται απευθείας από το δημόσιο σχολείο στο σχολείο της φυλακής, δίνοντας τον ρόλο ενός δημόσιου χώρου, όπου αναμένεται από τους μαθητές-κρατούμενους να εξασκηθούν σε διαδικαστικά καθήκοντα που απέχουν πολύ από τη βιωμένη πραγματικότητά τους και παραβλέπουν την ηλικία και τα βιώματά τους. Επίσης, αγνοείται το ευρύ φάσμα της προηγούμενης σχολικής φοίτησης, καθώς και το ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο της σχολικής εμπειρίας (τα σχολεία έξω από τη φυλακή συχνά βιώνονται ως «φυλακές», ενώ το σχολείο της φυλακής είναι ένας χώρος «ελευθερίας»). Επιπλέον, στους κρατούμενους αποδίδονται συχνά ελλείψεις, οι οποίες διαμορφώνουν την εκπαίδευση στη φυλακή ως μια διαδικασία αποκατάστασης, χωρίς μια μακροπρόθεσμη στρατηγική και τους προετοιμάζει συνήθως για τον δημόσιο χώρο με τη γνώση, την πειθαρχία των μαθηματικών και την παραδοχή ότι τα μαθηματικά μαθαίνονται κυρίως στο σχολείο. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη μεγάλη ποικιλία άτυπων μαθηματικών γνώσεων και εννοιολογικής κατανόησης που φέρουν οι νεαροί κρατούμενοι ως πόρους ταυτότητας (Hogg & Volman, 2020).

Σε αντίθεση με την προσέγγιση του σχολείου ως δημόσιο χώρο, στην έρευνά μας δημιουργήσαμε «κοινούς χώρους» ισότιμης συμμετοχής με νεαρούς κρατούμενους και μελλοντικούς εκπαιδευτικούς (Stathopoulou et al., 2024). Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί προετοιμάστηκαν ώστε να είναι σε θέση να μετακινηθούν από τους δημόσιους χώρους στους «κοινούς χώρους», οι οποίοι παράγονται από κοινή δράση, αποτελούν χώρους συλλογικής γνώσης και κοινά αποδεκτών κανόνων. Οι από κοινού δημιουργούμενοι «κοινοί χώροι» απαιτούν, επίσης, το να μοιράζεται κάποιος τον εαυτό του και την εμπειρία της ζωής του σε μια κοινή δράση.

Σε αυτούς τους χώρους είναι συμβατή και η αντι-ελλειματική προσέγγιση (anti-deficit) (Adiredja et al., 2020), την οποία και υιοθετήσαμε εστιάζοντας αντί στα ελλείματα των μαθητών στη συμπλήρωση γνώσεων τις οποίες ήδη έχουν κατακτήσει ως νεαροί ενήλικες, ως μια έκφραση αναγνώρισης, βασική διάσταση της ενδυνάμωσης.

Η ΕΡΕΥΝΑ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μέρος της έρευνας που πραγματοποιείται στο πλαίσιο του ACTinPRISON (https://actinprison.sed.uth.gr), στην οποία δημιουργήθηκε ένας κοινός εκπαιδευτικός χώρος (Helfenbein, 2021) μέσω του συμμετοχικού σχεδιασμού (Schubotz, 2020) ενός διεπιστημονικού προγράμματος σπουδών κριτικών γραμματισμών από τους ερευνητές, τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς και τους νεαρούς κρατούμενους με διττό στόχο: την

ενδυνάμωση και χειραφέτηση των νεαρών κρατουμένων και την προετοιμασία των μελλοντικών εκπαιδευτικών μέσω της in-situ εμπειρίας για τη διαχείριση της διαφορετικότητας. Ο στόχος σε αυτή την εργασία είναι η διερεύνηση του κατά πόσο και με ποιον τρόπο οι κοινοί χώροι μπορούν να υποστηρίξουν τον μαθηματικό γραμματισμό, ενδυναμώνοντας και χειραφετώντας τους νεαρούς κρατούμενους και να προετοιμάσουν τους εκπαιδευτικούς για τη διαχείριση της διαφορετικότητας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εννοιολογικό πλαίσιο. Για την επίτευξη του στόχου επιλέχθηκε η ΚΕΜ (Gómez et al., 2011), η οποία αντλεί από την ιδέα του Habermas σχετικά με την ικανότητα επικοινωνίας όλων των ανθρώπων, ανεξαρτήτως υποβάθρου (ακαδημαϊκό κλπ.) και τη συμβολή τους στην αλληλεπίδραση.

Χώρος, χρόνος, συμμετέχοντες. Η συνολική διάρκεια του ACTinPRISON είναι 2,5 χρόνια και η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος δράσεων που πραγματοποιούνται σε ένα γυμνάσιο μέσα σε Ειδικό Αγροτικό Σωφρονιστικό Κατάστημα Νέων (Ε.Α.Κ.Κ.Ν.). Οι συμμετέχοντες μαθητές-κρατούμενοι είναι περίπου 25 (αριθμός που μεταβάλλεται διαρκώς), ηλικίας 18-23 ετών, αλλοδαποί με προσφυγικό ή μεταναστευτικό υπόβαθρο αλλά και Έλληνες Ρομά και μη Ρομά. Παρατηρείται ποικιλία στα προφίλ τους όσον αφορά τη σχολική εμπειρία και εμπειρίες ζωής. Ανταποκρίνονται οριακά στις απαιτήσεις των σχολικών μαθηματικών και οι περισσότεροι έχουν αρνητικές σχολικές εμπειρίες —όπως προέκυψε από την ανάλυση αναγκών—και ιδιαίτερα όσον αφορά στα σχολικά μαθηματικά, καθιστώντας τα κίνητρά τους για εκπαίδευση «εύθραυστα» (Ahl et al., 2017). Οι νεαροί ενήλικες παρακολουθούν το επίσημο πρόγραμμα σπουδών, σχεδιασμένο για τις ηλικιακές ομάδες των μαθητών της έξω κοινότητας, με συνέπεια να επιδεικνύουν ένα μειούμενο ενδιαφέρον στην εκπαίδευση/ μαθηματική εκπαίδευση, παρόλη την αρχική τους προθυμία να εγγραφούν στις σχολικές δομές. Επίσης, η ευμετάβλητη ψυχολογική τους κατάσταση — συχνά συνδεδεμένη με δικαστικές εκκρεμότητες— επηρεάζουν τη συγκέντρωση και την επίδοσή τους. Ωστόσο, η κράτηση τους έδωσε τη δυνατότητα να βιώσουν ξανά μια σχολική εμπειρία —μακριά από εξωτερικές αρνητικές επιρροές— γεγονός που δεν θα συνέβαινε αν δεν ήταν στη φυλακή, όπως οι ίδιοι ομολογούν «*δεν είχα πάει ποτέ στο σχολείο πριν τη φυλακή, ταξίδευα με τον παππού μου όλη την Ελλάδα αλλά δεν μπορούσα να διαβάζω ούτε τις πινακίδες*». Ως προς τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, παρακολούθησαν την επιμόρφωση περισσότεροι από 30, αλλά σε κάθε συνάντηση συμμετέχουν μέχρι 8-10, ανάλογα με τον διαθέσιμο χώρο στη φυλακή, αλλά και τη δική τους διαθεσιμότητα.

Τεχνικές συλλογής δεδομένων. Για τη συλλογή των δεδομένων αξιοποιήθηκαν: η μαγνητοφώνηση, οι σημειώσεις πεδίου, η συλλογή εγγράφων (π.χ. φύλλα εργασίας, τεχνουργήματα μαθητών, κ.λπ.).

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Για να υποστηρίξουμε τη δράση στη φυλακή, προετοιμάστηκαν, κατάλληλα, οι δύο ομάδες συμμετεχόντων, πριν τη συνάντησή τους. Πιο συγκεκριμένα, χαρτογραφήθηκαν οι εκπαιδευτικές ανάγκες (ανάλυση αναγκών) των νεαρών κρατουμένων. Παράλληλα, διερευνήθηκαν οι ανάγκες επιμόρφωσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών, μέσω συνεντεύξεων σε δυο ομάδες εστίασης, τις οποίες λάβαμε υπόψη για τη διαμόρφωση του υλικού επιμόρφωσης. Η επιμόρφωση περιλάμβανε τις ενότητες: α) ο θεσμός της φυλακής, β) εκπαιδευτική πολιτική στην εκπαίδευση φυλακών και το σχολείο στις φυλακές, γ) διαπολιτισμική επικοινωνία, δ) από την τυπική παιδαγωγική στην εκπαίδευση ενηλίκων: θεωρίες και πρακτικές, ε) προγράμματα σπουδών, στ) γλωσσικός γραμματισμός, ζ) μαθηματικός (π.χ., εθνομαθηματικές ιδέες) και ψηφιακός γραμματισμός, η) η τέχνη στις φυλακές. Με το πέρας της επιμόρφωσης, συμπληρώθηκε ερωτηματολόγιο και μια ακόμα ομάδα εστίασης από τους φοιτητές/τριες από όπου αναδείχθηκαν αλλαγές στις αντιλήψεις τους για το χώρο της φυλακής: *«Νομίζω ότι αναθεώρησα πολλά για τους ανθρώπους που διαμένουν εκεί αλλά και για τις καταστάσεις που μπορούν τους οδηγήσουν εκεί»*. Επίσης, φάνηκε να αναπτύσσεται ενσυναίσθηση και ευαισθητοποίηση για τη ζωή στη φυλακή και τους νεαρούς κρατούμενους: «*…ίσως κάποια μέρα καταφέρουμε να αλλάξουμε κάτι, να δημιουργήσουμε καλύτερες συνθήκες διαβίωσης και να δώσουμε όχι ελπίδα αλλά αληθινή υποστήριξη στους φυλακισμένους ώστε στο μέλλον να επανενταχθούν στην κοινωνία*». Στη συνέχεια οργανώθηκαν οι επισκέψεις της ερευνητικής ομάδας και της ομάδας των μελλοντικών εκπαιδευτικών σε εβδομαδιαία βάση για 2-3 διδακτικές ώρες.

ΕΥΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν, αναδύθηκαν μέσα από την εμπειρία, την καθημερινότητα και την αλληλεπίδραση των νεαρών κρατούμενων και των μελλοντικών εκπαιδευτικών με στόχο να συναντήσουν τις ανάγκες, τις επιθυμίες και τις ιδιαιτερότητές τους. Στη συνέχεια επιλέγεται και παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό παράδειγμα δραστηριότητας που αναδύθηκε με αφορμή τις συνθήκες διαβίωσης κατά τη θερινή περίοδο σε θαλάμους και κελιά με πολλά άτομα. Οι νεαροί κρατούμενοι είχαν αναφερθεί σε προηγούμενη συνάντηση στον περιορισμένο χώρο διαβίωσης που έχουν και με αφορμή αυτό τους ζητήθηκε να σκεφτούν τρόπο να υπολογίσουν τις διαστάσεις του θαλάμου τους δίχως τη χρήση μέτρου, αντί να αρκεστούν στην αναφορά για τη

στενότητα του χώρου, εξηγώντας ότι το σχόλιο «είναι πολύ μικρός» δε δίνει επαρκή πληροφορία:

Ε1 (Ερευνητής): Επειδή δεν ξέρουμε πώς είναι οι θάλαμοι και τα κελιά σας, μπορείτε να μας πείτε πώς θα περιγράφατε πόσο μεγάλοι είναι;

Μ1 (Μαθητής/Νεαρός Κρατούμενος): Θα μετρούσαμε γύρω-γύρω.

Φ1 (Φοιτητής/Μελλοντικός Εκπαιδευτικός): Πώς θα μετρούσατε;

Μ1: Με ένα μέτρο.

Φ1: Έχετε όμως μέτρο;

Μ1: Όχι.

Ε2: Όταν πάτε μέσα στους θαλάμους σας, βρείτε ένα τρόπο να μετρήσετε και την επόμενη φορά να μας πείτε τι βρήκατε.

Στην επόμενη συνάντηση οι νεαροί κρατούμενοι συζητούν τους τρόπους που σκέφτηκαν για τη μέτρηση του θαλάμου και στη συνέχεια αλληλεπιδρούν με τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς σε μικρο-ομάδες για να υπολογίσουν το εμβαδόν της αίθουσας που βρίσκονται, με τις ίδιες στρατηγικές που χρησιμοποίησαν στο θάλαμο. Οι ομάδες χρησιμοποίησαν διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού του εμβαδού και κυρίως αυθαίρετες μονάδες, όπως για παράδειγμα η χρήση βημάτων:

Μ2: Πρέπει να είναι περίπου 8 βήματα η μία *(πλευρά)* και 5-6 η άλλη.

Φ1: Να σηκωθούμε;

Μ2: *(Σηκώνονται και η Φ1 μετράει τα βήματα του Μ2.)* 8 και 6.

Φ1: Ναι, και το ένα βήμα πόσο το υπολογίζεις;

Μ2: περίπου ένα μέτρο;

Φ1: Σωστά. Άρα το εμβαδόν πόσο θα είναι; Τι θα κάνουμε με τα νούμερα, που είπες;

Μ2: 8 επί 6 *(ισούται με)* 48.

Μια άλλη ομάδα χρησιμοποιεί ως μονάδα τα πλακάκια στο πάτωμα για να υπολογίσει το εμβαδόν της, όπως φαίνεται στον παρακάτω διάλογο:

Μ3: 26 πλακάκια αυτή *(δείχνει την πλευρά)* και 20 πλακάκια αυτή *(η πλευρά)*.

Φ2: Μέτρησες τα πλακάκια. Τι θα κάνουμε μετά;

Μ3: Το ένα πλακάκι πρέπει να είναι 30. Θα κάνουμε 30 με το 26 και 30 με το 20. *(Κάνουν τους υπολογισμούς 30x26=780 και 30x20=600.)*

Φ2: Και τώρα;

Μ1: Αυτό *(δείχνει το 780)* είναι περίπου 8.

Φ2: Τι είναι τα 8;

Μ1: Μέτρα. 8 μέτρα αυτό και 6 μέτρα αυτό. Κάνει 48 μέτρα.

Ένας άλλος μαθητής, ο Μ4, υπολογίζει αρχικά προσεγγιστικά τις αποστάσεις με το «μάτι» και καταλήγει ότι οι διαστάσεις της αίθουσας

είναι οκτώ μέτρα και επτά μέτρα. Στη συνέχεια, συζητιούνται οι τρόποι μέτρησης των διαστάσεων της αίθουσας στην ολομέλεια.

Ε1 (Ερευνητής): Υπάρχει ένας τρόπος που θα λέγαμε ότι είναι καλύτερος;

Μ3: Τα πλακάκια. *(γελάει)*

Φ1: Αν πούμε σε κάποιον που βρίσκεται εκτός πόσα πλακάκια είναι ή πόσα βήματα είμαστε σίγουροι ότι θα καταλάβει;

Μ3: Όχι, γιατί δεν θα ξέρει πόσο μεγάλο είναι το πλακάκι… αλλά ούτε και το βήμα μου!

Ε1: Τι μπορούμε να κάνουμε ώστε να συνεννοηθούμε με τους έξω;

Μ3 και Μ4 *(ταυτόχρονα)*: Να πάρουμε ένα χάρακα και να το μετρήσουμε ή ένα μέτρο.

Μ3: Ναι, θα μετρήσω το ένα *(πλακάκι)*.

(Ο μαθητής Μ3 γράφει στον πίνακα: 30x20=600 και 30x26=780.)

Φ2: Αυτό σημαίνει 6 μέτρα και 8 μέτρα περίπου.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί η δυσκολία που αντιμετώπισε μια μικρο-ομάδα στον υπολογισμό του εμβαδού συγχέοντας τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού:

Φ3: Πόσο είναι το εμβαδό;

Μ4: 28.

Φ3: Τι είναι το 28, πώς το βρήκες;

Μ4: 8 και 8 και 6 και 6… *(ισούται με)* 28.

Φ3: να σε ρωτήσω κάτι αυτό που μέτρησες δείχνει πόσα μέτρα ταινία χρειαζόμαστε για το γύρω-γύρω ή πόσα μέτρα χαλί χρειαζόμαστε για να καλύψουμε όλο το χώρο

Μ4: μμμ νομίζω το γύρω γύρω

Μ5: (*παρεμβαίνει)* Λάθος. Δεν κάνουμε συν. Επί πρέπει να κάνουμε: 8x6=48.

Φ3: Το 48 τι είναι;

Μ5: Τετραγωνικά.

Ε1: Τετραγωνικά μέτρα δηλαδή. Με την απάντηση που έδωσε *(ο Μ4)* τι βρίσκουμε;

Μ5: Πόσο είναι το «γύρω – γύρω». Εμείς θέλουμε να βρούμε πόσο χώρο έχει η τάξη.

Στη συνέχεια η φοιτήτρια σχεδιάζει ορθογώνιο με διαστάσεις 2Χ3 και βοηθάει τον μαθητή να κατανοήσει την έννοια του εμβαδού και πώς διαφοροποιείται από το μήκος.

Η δυσκολία κατανόησης του εμβαδού και η σύγχυση με τη μέτρηση του μήκους αποτυπώνεται επίσης σε πολλές έρευνες (π.χ., Sisman & Aksu, 2016). Οι φοιτητές στις ομάδες τους –μικτές ομάδες– βοήθησαν για να γίνουν κατανοητές οι έννοιες, χρησιμοποιώντας κατάλληλες πρακτικές,

συμπεριλαμβάνοντας, και κατάλληλες γλωσσικές πρακτικές, ώστε να είναι κατανοητό από όλους και συνέβαλαν στη συνειδητοποίηση της ανάγκης τυπικών μονάδων μέτρησης για την επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων. Οι περισσότεροι, μέσα από την αλληλεπίδραση, πρότειναν ότι πρέπει να δώσουν το εμβαδόν ως απάντηση, εκτός από τον Μ4, ο οποίος δεν είχε φοιτήσει σε σχολείο στη χώρα του. Ωστόσο και αυτός με την υποστήριξη του μελλοντικού εκπαιδευτικού της ομάδας του κατανόησε τις έννοιες και τις μονάδες μέτρησης, αρχικά με τη χρήση αυθαίρετων (τα πλακίδια του πατώματος) και στη συνέχεια κατάφεραν όλοι να μετακινηθούν στις τυπικές μονάδες μέσα από ένα πλαίσιο που είχε νόημα για αυτούς. Όπως παρατηρεί ο Clements (1999), για να γίνει κατανοητή η μέτρηση θα πρέπει να αφορά την επίτευξη ενός στόχου, και να μην είναι μόνο αυτοσκοπός. Καταφέρνοντας το μαθησιακό στόχο ο Μ4 σχολίασε: «*τώρα το κατάλαβα αυτό και σκέφτομαι ότι μπορώ να καταφέρω πολλά πράματα αφού κατάφερα αυτό*».

Στο παραπάνω ενδεικτικό απόσπασμα αναδεικνύεται η εμπλοκή των νεαρών κρατούμενων και των μελλοντικών εκπαιδευτικών σε μια αυθεντική δραστηριότητα. Σε ένα πλαίσιο αποδοχής, αναγνώρισης, και εμπιστοσύνης, οι νεαροί κρατούμενοι αξιοποίησαν τις εμπειρίες τους για την ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού μέσα σε μια διαδικασία που φαίνεται να λειτουργεί ενδυναμωτικά όπως αποτυπώθηκε και στα λόγια ενθουσιασμού του Μ4 (βλ. και O' Donnell, 2015). Σε αυτόν τον κοινό χώρο ισότιμης αλληλεπίδρασης οι φοιτητές διευκόλυναν τους νεαρούς κρατούμενους και ως προς τις κατάλληλες γλωσσικές επιλογές ώστε να μοιραστούν γνώση, με την παρατήρηση ότι υπήρξαν περιπτώσεις (σε άλλες δραστηριότητες) που οι νεαροί κρατούμενοι είχαν καλύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, που φέρουν από τα σχολικά τους βιώματα της χώρας τους και ήταν ευπρόσδεκτο να είναι αυτοί που βοηθάνε τους/τις μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Η ισότιμη αλληλεπίδραση και η επαφή με την ετερότητα σε πραγματικό πλαίσιο φαίνεται να επηρεάζουν τους/τις εκπαιδευτικούς ως προς το ρόλο τους και να έχουν ορίσει νέους προσανατολισμούς (π.χ. μελλοντική απασχόληση στις φυλακές ή/και σχετικές μεταπτυχιακές σπουδές) ενώ συνειδητοποιούν ότι έχουν περισσότερα κοινά από ότι θεωρούσαν, καθώς και το ρόλο των συνθηκών που οδηγούν κάποιον στη φυλακή: *«φοβόμουν ότι θα είναι πολύ διαφορετικοί, αλλά δεν είναι, έχουμε πολλά κοινά πέρα από την ηλικία»*, *«τώρα κατάλαβα πόσο τυχερός είμαι με τον τρόπο που μεγάλωσα, αν ήμουν στη θέση τους δεν ξέρω κι εγώ τι θα είχα κάνει»*.

Εν κατακλείδι, παρά τις όποιες διαφορές και αρχικές επιφυλάξεις, δημιουργήθηκαν «δίαυλοι» επικοινωνίας, που αποτέλεσαν το κλειδί για τη συνεργασία —και στο εσωτερικό της ομάδας των νεαρών κρατουμένων με αποτέλεσμα την αλληλοβοήθεια— στη λειτουργία της ομάδας, στους

κοινούς χώρους, όπου κυριάρχησε η ασφάλεια και η ισοτιμία. Η εμπειρία αυτή φαίνεται να συμβάλει σε μια αναθεώρηση των πιθανών στερεοτύπων που ενυπάρχουν στους/τις εκπαιδευτικούς για τους περιθωριοποιημένους πληθυσμούς, ενισχύοντας ταυτόχρονα την προσωπική και επαγγελματική τους ταυτότητα.

ΕΝ ΚΑΤΑΚΛΕΙΔΙ

Στην εργασία αυτή, αφού συνοπτικά παρουσιάσαμε το πλαίσιο της φυλακής και της εκπαίδευση εντός αυτής, προσπαθήσαμε να μοιραστούμε την εμπειρία ενός περιστατικού μαθησιακής εμπειρίας, που αφορούσε σε ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, στον κοινό χώρο μελλοντικών εκπαιδευτικών και νεαρών κρατουμένων. Φαίνεται ότι η δημιουργία τέτοιων χώρων, με αδιαπραγμάτευτη την αναγνώριση και την αποδοχή, και επιλογή δραστηριοτήτων για την ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού, που εκκινούν από τα ενδιαφέροντα και την εμπειρία των νεαρών κρατουμένων αντί για ένα ασύμβατο ΠΣ των Μαθηματικών συμβάλλουν στην ενεργό συμμετοχή και ενδυνάμωσή τους, με την ανάγκη για αναθεώρηση της (μαθηματικής) εκπαίδευση στη φυλακή να αναδύεται.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1.

ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ. Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας & Καινοτομίας

Το ερευνητικό έργο υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ.) στο πλαίσιο της Δράσης «2η Προκήρυξη ερευνητικών έργων ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ. για την ενίσχυση των μελών ΔΕΠ και Ερευνητών/τριών» (Αριθμός Έργου: 4164).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ahl, L. M., Aguilar, M. S., & Jankvist, U. T. (2017). Distance mathematics education as a means for tackling impulse control disorder: The case of a young convict. *For the learning of mathematics*, *37*(3), 27-32.

Adiredja, A. P., Bélanger-Rioux, R., & Zandieh, M. (2020). Everyday examples about basis from students: An anti-deficit approach in the classroom. *PRIMUS*, *30*(5), 520-538.

Blazich, G. S. (2007). La educaci n en contextos de encierro. *Revista Iberoamericana de Educaci*, *44*, 53-60.

Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School science and Mathematics*, *99*(1), 5-11.

D' Ambrosio, U., & D' Ambrosio, B. S. (2013). The role of ethnomathematics in curricular leadership in mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *4*, 19-25.

Enggist, S., Møller, L., Galea, G., & Udesen, C. (2014). *Prisons and health.* World Health Organization. Regional Office for Europe.

Farley, H., & Pike, A. (2016). Engaging prisoners in education: Reducing risk and recidivism. *Advancing Corrections: Journal of the International Corrections and Prisons Association*, *1*, 65-73.

Φόβος, Ι. (2023). *Διδασκαλία των μαθηματικών σε νεαρούς κρατούμενους: μια κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση* (Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής).

Gay, G. (2018). *Culturally responsive teaching: Theory, research, and practice*. New York: Teachers College Press.

Gómez, A., Puigvert, L., & Flecha, R. (2011). Critical communicative methodology: Informing real social transformation through research. *Qualitative Inquiry*, *17*(3), 235-245.

Hirschfield, P. J. (2014). Effective and promising practices in transitional planning and school reentry. *Journal of Correctional Education (1974)*, *65*(2), 84-96.

Helfenbein, R. J. (2021). *Critical geographies of education: Space, place, and curriculum inquiry.* New York: Routledge.

Hogg, L., & Volman, M. (2020). A synthesis of funds of identity research: Purposes, tools, pedagogical approaches, and outcomes. *Review of Educational Research*, *90*(6), 862-895.

Knowles, M. S., Holton, E. F. & Swanson, R. A. (2012). *The adult learner: The definitive classic in adult education and human resource development.* London: Routledge Taylor & Francis Group.

Liebling, A. (2011). Distinctions and distinctiveness in the work of prison officers: Legitimacy and authority revisited. *European Journal of Criminology*, *8*(6), 484-499.

O' Donnell, A. (2015). Curriculum as conversation: Vulnerability, violence, and pedagogy in prison. *Educational Theory*, *65*(4), 475-490.

Πέτσας, Ι. (2019). *Χαρακτηριστικά και αξίες των κρατούμενων στα Ειδικά Καταστήματα Κράτησης Νέων και η άσκηση του δικαιώματος τους στην εκπαίδευση.* Αθήνα: Τόπος.

Schubotz, D. (2020). *Participatory research: Why and how to involve people in research.* SAGE Publications.

Sisman, G., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 1293-1319.

Stathopoulou, C., Appelbaum, P., Fovos, I., & Chrysikou, V. (2024). Common spaces matter: curricular experiences through mathematics with young prisoners and prospective teachers. *ZDM–Mathematics Education*, 1-15.

World Health Organization (2014). *Prisons and Health.* Ανακτήθηκε από http://www.euro.who.int/__data/assets/pdf_file/0005/249188/Prisons-and-Health.pdf

ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΨΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΑΝΑΓΚΕΣ: Η ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Τριανταφύλλου Χρυσαυγή, Βασιλοπούλου Μαρία

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
chrtriantafillou@gmail.com, vasilopouloumath@gmail.com

Η παρούσα εργασία αναλύει τις δράσεις μιας εκπαιδευτικού όταν προσπαθεί να συμπεριλάβει και να αξιοποιήσει ταυτόχρονα τη μαθηματική συνεισφορά δύο μαθητριών με διαφορετικές μαθησιακές ανάγκες. Συγκεκριμένα, η μία μαθήτρια -σύμφωνα με την εκπαιδευτικό- δυσκολεύεται πολύ στα μαθηματικά (ΠΔυ) ενώ η άλλη τα κατανοεί με μεγάλη ευκολία (ΠΕυ). Χρησιμοποιείται το θεωρητικό σχήμα TRC (Teacher Response Coding) κωδικοποίησης της ανταπόκρισης της εκπαιδευτικού στις απαντήσεις των δύο μαθητριών. Τα αποτελέσματα υποστηρίζουν ότι η επιλογή ενός έργου με υψηλή μαθηματική πρόκληση αλλά χωρίς ανάγκη προ απαιτούμενών γνώσεων καθώς και το είδος των δράσεων ανταπόκρισης της εκπαιδευτικού υποστήριξε τη θετική συνεισφορά των μαθητριών στη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συμπερίληψη συνδέεται άμεσα με ίσες ευκαιρίες για θετική συνεισφορά και ποιοτική συμμετοχή του κάθε μαθητή στις μαθηματικές πρακτικές και δραστηριότητες της τάξης (Ainscow, 2016). Αλλά πόσες τέτοιες ευκαιρίες δίνονται στους μαθητές και πώς αξιοποιείται διδακτικά η συμμετοχή τους σε συζητήσεις στην ολομέλεια της τάξης; Όπως υποστηρίζει η Selling (2016), παρότι οι μαθητές χρειάζονται ευκαιρίες να συμμετέχουν σε μαθηματικές πρακτικές, φαίνεται ότι η απλή παροχή τέτοιων ευκαιριών μπορεί να μην είναι επαρκής για την υποστήριξη όλων των μαθητών. Ο τρόπος εμπλοκής των μαθητών φαίνεται να επηρεάζεται από την επιλογή του μαθηματικού έργου, (Sullivan et al., 2003), τις ευκαιρίες συνεισφοράς που του παρέχει ο εκπαιδευτικός (Bishop et al., 2016) καθώς επίσης και την αίσθηση του ανήκειν που έχουν οι μαθητές στην κοινότητα της τάξης (Rose & Shevlin, 2017). Ταυτόχρονα, φαίνεται πως και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί θέλοντας να συμπεριλάβουν όλους τους μαθητές στο μάθημά τους, συναντούν πολλές προκλήσεις όπως η επιλογή κατάλληλων έργων, οι προσωπικές τους αντιλήψεις για την μαθηματική ικανότητα των μαθητών, καθώς και οι θεσμικοί κανόνες που επιβάλλει το εκπαιδευτικό

σύστημα, όπως ο περιορισμένος διδακτικός χρόνος σε συνάρτηση με την εκτεταμένη διδακτέα ύλη (Vasilopoulou & Triantafillou, 2023).

Οι τρόποι ανταπόκρισης των εκπαιδευτικών στις απαντήσεις των μαθητών έχουν μελετηθεί ως προς συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τους. Για παράδειγμα, το αν ενθαρρύνουν ή όχι τη συζήτηση ανάμεσα στους μαθητές (Stein et al., 2008), αν υιοθετούν ή απορρίπτουν τις ιδέες των μαθητών ή αν υποστηρίζουν ή όχι το μαθηματικό περιεχόμενο της συνεισφοράς τους (Bishop et al., 2016; Lineback, 2015). Πρόσφατες μελέτες δείχνουν πως ο συνδυασμός πολλών διαφορετικών τύπων διδακτικών ενεργειών, είναι κρίσιμος για την ανάπτυξη ευκαιριών αξιοποίησης της συνεισφοράς των μαθητών στη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης (Ellis et al., 2019; Stein et al., 2008). Παρόλα αυτά, η μελέτη των δράσεων των εκπαιδευτικών στην προσπάθειά τους να υποστηρίξουν πρακτικές συμπερίληψης με ίσες ευκαιρίες για θετική συνεισφορά όλων των μαθητών, παραμένει ένα ανοικτό ερευνητικό θέμα.

Η παρούσα έρευνα μελετά τις δράσεις των εκπαιδευτικών, όταν προσπαθούν να συμπεριλάβουν ταυτόχρονα τους μαθητές που δυσκολεύονται πολύ στα μαθηματικά (ΠΔυ) και αυτούς που τα κατανοούν πολύ εύκολα (ΠΕυ). Αναλύουμε τους τρόπους που μια εκπαιδευτικός ενεργοποιεί τη συμμετοχή δύο μαθητριών, της Δανάης (ΠΔυ) και της Ευτυχίας (ΠΕυ) και πώς στη συνέχεια αξιοποιεί τη μαθηματική συνεισφορά τους κατά τη διάρκεια της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που κατευθύνουν την παρούσα μελέτη είναι ΕΕ1: Με ποιο τρόπο η εκπαιδευτικός εμπλέκει τις δύο μαθήτριες στη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης; ΕΕ2: Ποιες δράσεις της εκπαιδευτικού υποστηρίζουν τις δύο μαθήτριες να έχουν θετική συνεισφορά στην εξέλιξη της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η αξιοποίηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας θα πρέπει να υποστηρίζεται από τον εκπαιδευτικό με στόχο η μαθηματική συνεισφορά των μαθητών να είναι στο προσκήνιο (Herbert, & Williams, 2023). Ταυτόχρονα, οι μαθητές να εμπλέκονται στην παραγωγή μαθηματικού νοήματος και αιτιολόγησης (Ellis et al., 2019; Van Zoest et al., 2022). Στην παρούσα εργασία, αξιοποιείται το θεωρητικό σχήμα κωδικοποίησης της ανταπόκρισης των εκπαιδευτικών (Teacher Response Coding - TRC) των Van Zoest et al. (2022). Το σχήμα TRC αναφέρει τις εξής διαστάσεις ανταπόκρισης των εκπαιδευτικών στη συνεισφορά του μαθητή: *δημιουργία χώρου για συνεισφορά* (allow), *παροχή ευκαιριών για*

αυτό-αξιολόγηση ή κατανόηση (check-in), για *αποσαφήνιση* (clarify), για *διόρθωση* (correct), για *αξιολόγηση της μαθηματικής ορθότητας* (evaluate), και *αιτιολόγησης* (justify), για *αναδιατύπωση* (repeat) και επικύρωση (validate). Ταυτόχρονα, οι Van Zoest et al. (2022) προτείνουν κωδικοποιήσεις σχετικά με την *ακριβή αναφορά* του εκπαιδευτικού *στην ιδέα* του μαθητή, καθώς και την *ακριβή αναφορά στο μαθηματικό περιεχόμενο* της ιδέας του μαθητή. Στην περίπτωση που έχουμε ακριβή αναφορά στην ιδέα και το μαθηματικό περιεχόμενο της σκέψης του μαθητή, η δράση του εκπαιδευτικού κατηγοριοποιείται ως *κεντρική,* ενώ σε άλλες περιπτώσεις κατηγοριοποιείται ως *περιφερειακή* ή *αρνητική.* Η κωδικοποίηση του τρόπου αναφοράς και της αξιοποίησης των ιδεών του μαθητή είναι πολύ σημαντική. Υποστηρίζει τον εντοπισμό και την ανάδειξη των περιπτώσεων στις οποίες ο εκπαιδευτικός α) δίνει αξία και σέβεται τη συνεισφορά του μαθητή (Bishop et al., 2016) ή/και β) τον υποστηρίζει στην ανάπτυξη της μαθηματικής του κατανόησης διότι όταν γίνεται ακριβή αναφορά στην ιδέα και στο μαθηματικό περιεχόμενο της απόκρισης του μαθητή, τότε ο μαθητής αναγνωρίζει τη συνεισφορά του στην ανταπόκριση του εκπαιδευτικού (Van Zoest et al., 2022).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος διδακτορικής διατριβής η οποία διερευνά θέματα συμπερίληψης στην τάξη των Μαθηματικών σχετικά με μαθητές που βρίσκονται στα άκρα του τυπικού μαθητικού πληθυσμού ως προς τις προκλήσεις που συναντούν στην τάξη των μαθηματικών. Εστιάζει στις δράσεις συμπερίληψης των εκπαιδευτικών αλλά και στον τρόπο που τις αντιλαμβάνονται οι μαθητές. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε αποκλειστικά στις δράσεις των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα, μελετάμε τις δράσεις μιας εκπαιδευτικού Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκει μαθηματικά σε ένα Δημόσιο σχολείο πάνω από 10 χρόνια. Η εκπαιδευτικός συμμετείχε εθελοντικά στην έρευνα μαζί με άλλους 7 εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Όλοι, δήλωσαν πως ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για την συμπερίληψη των μαθητών που δυσκολεύονται στην κατανόηση των μαθηματικών (ΠΔυ) αλλά ταυτόχρονα και αυτούς που τα κατανοούν πολύ εύκολα σε σχέση με τους συμμαθητές τους (ΠΕυ). Η τάξη στην οποία αναφερόμαστε στην παρούσα εργασία, είναι η Α΄ Λυκείου στην οποία σύμφωνα με την εκπαιδευτικό, εκείνη την ημέρα είχε 7 μαθητές περίπτωσης ΠΕυ και 6 μαθητές περίπτωσης ΠΔυ. Στην εργασία μας επικεντρωνόμαστε σε ένα επεισόδιο στο οποίο η εκπαιδευτικός εμπλέκει τις μαθήτριες Δανάη (ΠΔυ) και Ευτυχία (ΠΕυ) (ψευδώνυμα). Σε αυτό το

επεισόδιο, το ζητούμενο είναι η εύρεση του επόμενου όρου μιας ακολουθίας στο τρίγωνο του Pascal.

Σύντομη περιγραφή μαθήματος

Η διδακτική ενότητα αφορά την εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας. Η εκπαιδευτικός ξεκινά με καταιγισμό ιδεών για την έννοια της 'ακολουθίας' και συνεχίζει με την ακολουθία Fibonacci. Τελευταίο και κυριότερο μέρος του μαθήματος είναι η αναγνώριση αναδρομικών και γενικών τύπων ακολουθιών στο τρίγωνο του Pascal. Η εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να αναλύσουν στοιχεία του τριγώνου ανακαλύπτοντας ακολουθίες με στόχο να καταλήξουν στους τύπους που τις περιγράφουν.

Ερευνητικά εργαλεία και ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Τα ερευνητικά εργαλεία είναι δύο συνεντεύξεις με την εκπαιδευτικό, πριν και μετά τη διδασκαλία, η μαγνητοφώνηση της διδασκαλίας και οι σημειώσεις πεδίου. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκαν σύντομες συνεντεύξεις με την εκπαιδευτικό πριν και μετά το μάθημα σχετικά με τους στόχους του μαθήματος, τους μαθητές-στόχους (δηλαδή εκείνους που εκείνη θεωρεί πως είναι ΠΕυ ή ΠΔυ) και τους τρόπους που θα προσπαθήσει (ή προσπάθησε) να τους συμπεριλάβει. Η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων ακολούθησε τα εξής στάδια: 1ο στάδιο: Απομαγνητοφώνηση μαθήματος. 2ο στάδιο: Εντοπισμός επεισοδίων που αφορούν την αξιοποίηση της συνεισφοράς των μαθητών περίπτωσης. Ως επεισόδιο ορίζουμε τον διάλογο ο οποίος ξεκινά όταν η εκπαιδευτικός απευθύνεται σε μαθητή περίπτωσης ΠΕυ ή/και ΠΔυ και τελειώνει όταν σταματά να χρησιμοποιεί τη μαθηματική συνεισφορά του στη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Στο συγκεκριμένο μάθημα αναγνωρίσαμε 10 επεισόδια. 3ο στάδιο: Ανάλυση δράσεων της εκπαιδευτικού σύμφωνα με το θεωρητικό σχήμα TCR (van Zoest et al., 2022) σε κάθε επεισόδιο. 4ο στάδιο: Επιλογή επεισοδίων στα οποία αναγνωρίζουμε ένα θετικό αποτέλεσμα στην προσπάθεια της εκπαιδευτικού να αξιοποιήσει διδακτικά τη συνεισφορά των μαθητών περίπτωσης. 5ο στάδιο: Παρουσίαση ενός χαρακτηριστικού επεισοδίου στο οποίο η εκπαιδευτικός αξιοποιεί τη συνεισφορά δύο μαθητριών, της Δανάης (ΠΔυ) και της Ευτυχίας (ΠΕυ), και η οποία οδηγεί σε ένα θετικό αποτέλεσμα και για τις δύο μαθήτριες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

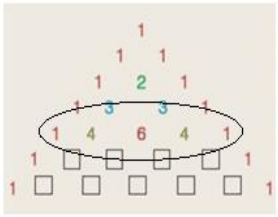
Η εκπαιδευτικός (Εκ.), για να εισάγει τους μαθητές στην έννοια της ακολουθίας επέλεξε ένα μαθηματικό έργο με υψηλή μαθηματική πρόκληση: την αναζήτηση διαφορετικών τύπων ακολουθίας στο τρίγωνο του Pascal. Αιτιολόγησε την επιλογή της ως εξής:

Εκ. Οι μαθητές συνήθως έρχονται προετοιμασμένοι από το φροντιστήριο. Αλλά στο σημερινό μάθημα θα ζοριστούνε. Εκεί τους ξεκινούν με το σχολικό: «να τος ο τύπος, να το πρόβλημα, αυτό είναι το α_1, αυτό είναι το α_v, παρ' το και λύσε το». Σήμερα θα ξεκινήσουν όλοι από την ίδια βάση μιας και αυτά που θα τους ζητηθούν θα είναι για όλους καινούργια.

Περιγραφή εισαγωγής Επεισοδίου

Αρκετοί μαθητές θυμούνται το τρίγωνο του Pascal αφού το έχουν διδαχθεί στην Γ΄ Γυμνασίου και η ίδια εκπαιδευτικός το έχει διδάξει στην αρχή της χρονιάς, αξιοποιώντας ιδιότητές του σε μάθημα επανάληψης στις ταυτότητες. Στο συγκεκριμένο μάθημα, στόχος είναι η αναζήτηση διαφορετικών τύπων ακολουθίας.

Η εκπαιδευτικός ζητά λοιπόν από ένα μαθητή να αναφέρει την επόμενη σειρά του τριγώνου [1, 4, 6, 4, 1] (Εικόνα 1). Εκείνος δεν μπορεί να ανταποκριθεί και η εκπαιδευτικός απευθύνεται στη Δανάη που είναι μαθήτρια περίπτωσης ΠΔυ. Στο επεισόδιο συμμετέχει και η Ευτυχία, μαθήτρια περίπτωσης ΠΕυ, και η εκπαιδευτικός (Εκ.). Σε αυτό το επεισόδιο ζητείται από τη Δανάη να κάνει μια αριθμητική γενίκευση βρίσκοντας τους τρεις όρους της ακολουθίας της 5^{ης} σειράς του τριγώνου (Εικόνα 1).



1^{ο} μέρος επεισοδίου (Πίνακας 1)

Η εκπαιδευτικός επιτρέπει να εμπλακεί η Δανάη (μαθήτρια περίπτωσης ΠΔυ) μιας και έχει προσφερθεί να συμμετέχει (σειρά 2). Η απάντηση της Δανάης θα μπορούσε να είναι σωστή σε μία άλλη ακολουθία, στη συγκεκριμένη όμως έχει κάνει λάθος (σειρά 3) και δείχνει ότι δεν έχει κατανοήσει τον τρόπο ανάπτυξης της σειράς. Η εκπαιδευτικός δίνει την ευκαιρία στη μαθήτρια να αιτιολογήσει την απάντησή της, χωρίς να σχολιάσει (σειρά 4). Η Δανάη ξεκινά να εξηγήσει τι σκέφτηκε (σειρά 5), η εκπαιδευτικός όμως τη διακόπτει και περιγράφει εκείνη τον πιθανό τρόπο σκέψης της μαθήτριας (σειρά 6), κάτι που η ίδια επιβεβαιώνει με ένα νεύμα. Η εκπαιδευτικός τότε, εστιάζει στον 3^{ο} αριθμό λέγοντας με σαφήνεια ότι είναι λάθος και της δίνει 2^{η} ευκαιρία να τον διορθώσει (σειρά 7). Τότε η Δανάη απαντά κάπως αόριστα αλλά όχι απαραίτητα λανθασμένα (κάνουμε πρόσθεση;) και η εκπαιδευτικός της δίνει την ευκαιρία να κατανοήσει και ύστερα να δικαιολογήσει την απάντησή της (σειρές 9 και 11). Τελικά, αξιολογεί ως λανθασμένη την απάντηση της Δανάης, χωρίς αυτή τη φορά και προς το παρόν, να της δώσει άλλη ευκαιρία (σειρά 13).

Πίνακας 1: Οι δράσεις ανταπόκρισης της εκπαιδευτικού στο 1^{ο} μέρος του επεισοδίου

Σειρά	Συζήτηση	Ανάλυση της Δράσης της Εκπαιδευτικού
1	[Η Δανάη σηκώνει το χέρι της]	
2	Εκ. Έλα Δανάη	Εμπλέκει (allow) τη μαθήτρια ΠΔυ
3	Δανάη: 1, 4, 4, 4, 1	

4	Εκ.	πώς το βρήκες Δανάη;	Ευκαιρία αιτιολόγησης (justify)
5	Δανάη: δεν ξέρω, σκέφτηκα ότι…		
6	Εκ.	ότι κάθε σειρά αφού εδώ είναι το 2, εδώ θα είναι γεμάτο 3, εδώ θα είναι γεμάτο 4…. ναι. Αλλά αυτό δεν είναι πολύ σωστό εδώ πέρα. Αυτό το 4ρι δεν είναι σωστό.	Αξιολόγηση της απάντησης (evaluate)
7	Εκ.	Μήπως μπορείς να σκεφτείς Δανάη κάτι άλλο;	Ευκαιρία για διόρθωση (correct)
8	Δανάη: κάνουμε πρόσθεση;		
9	Εκ.	δεν ξέρω, εσύ ό,τι θέλεις κάνεις.	Ευκαιρία κατανόησης της απάντησης της (evaluate)
10	Δανάη: 5;		
11	Εκ.	5. Τι πρόσθεσες όμως και βρήκες εδώ 5;	Ευκαιρία για αιτιολόγηση (justify)
12	Δανάη: 2 με 3;		
13	Εκ.	το σωστό είναι να προσθέσεις και τη μονάδα εδώ πέρα	Διόρθωση και αξιολόγηση (correct)

2ο μέρος επεισοδίου (Πίνακας 2)

Η Ευτυχία (ΠΕυ) κάνει προσπάθεια να συμμετέχει στη συζήτηση λέγοντας μία ιδέα για το πώς μπορεί η συμμαθήτριά της να βρίσκει τους αριθμούς που πρέπει να προσθέσει κάθε φορά (σειρά 14). Η εκπαιδευτικός επιτρέπει στην Ευτυχία να εμπλακεί στη συζήτηση (σειρά 15). Η Ευτυχία εξηγεί το συλλογισμό της ώστε να καταλήξει στη ζητούμενη σειρά του τριγώνου (σειρά 16).

Στη συνέχεια η εκπαιδευτικός, δίνει ξανά ευκαιρία στη Δανάη, να συμμετέχει (σειρά 17). Εκείνη όμως δεν μπορεί ακόμη να ανταποκριθεί. (σειρά 18). Της δίνει 4η φορά την ευκαιρία να συμμετέχει ρωτώντας την αν θέλει να της επαναλάβει η Ευτυχία το συλλογισμό της (σειρά 19). Η Δανάη ανταποκρίνεται θετικά (σειρά 20) κι έτσι η εκπαιδευτικός δίνει ξανά την ευκαιρία στην Ευτυχία να συμμετέχει και να επαναλάβει την προηγούμενη απάντησή της (σειρά 21). Η Ευτυχία ανταποκρίνεται (σειρά 22) οπότε η εκπαιδευτικός ζητά από τη Δανάη να πει την επόμενη σειρά (σειρά 23), δηλαδή να επεκτείνει το συλλογισμό της Ευτυχίας αναφέροντας την επόμενη σειρά. Εκείνη το κάνει επιτυχημένα αυτή τη φορά (σειρά 24). Η εκπαιδευτικός αποδέχεται και μάλιστα επευφημεί την απάντηση.

Το επεισόδιο λήγει αφού στη συνέχεια απευθύνεται στην ολομέλεια της τάξης αξιοποιώντας την απάντηση της Δανάης σχετικά με τις ιδιότητες του τριγώνου του Pascal (σειρά 26).

Πίνακας 2: Οι δράσεις ανταπόκρισης της εκπαιδευτικού στο 2ο μέρος του επεισοδίου

Σειρά	Συζήτηση		Ανάλυση της Δράσης της Εκπαιδευτικού
14	Ευτυχία: τρίγωνο (αναφέρεται σε κάποιον μνημονικό κανόνα)		
15	Εκ.	Για πες Ευτυχία.	Εμπλέκει τη μαθήτρια (allow)
16	Ευτυχία: στην αρχή πρόσθεσα…έβαλα το 1, μετά έβαλα το 1 και 3 που κάνει 4, 3+3 που κάνει 6, 3+1 που κάνει 4 και πάλι το 1.		
17	Εκ.	κατάλαβες τι λέει Δανάη; Μπορείς να μου πεις την επόμενη σειρά;	Δίνει την ευκαιρία στην Δανάη να συμμετέχει και πάλι (check-in)
18	Η Δανάη δεν αποκρίνεται		
19	Εκ.	θες να στο ξαναπεί;	Δίνει την ευκαιρία στην Δανάη να συμμετέχει και πάλι και να κατανοήσει (check-in)
20	Δανάη: ναι		
21	Εκ.	ξαναπές το Ευτυχία	Ζητάει επανάληψη από την μαθήτρια ΠΕυ (repeat)
22	Ευτυχία: ναι. Μετά 1+3 που κάνει 4, 3+3 που κάνει 6, 3+1 που κάνει 4 και βάζω στο τέλος το 1.		
23	Εκ.	άρα πες μου την επόμενη σειρά σου.	Ευκαιρία εμπλοκής της Δανάης (check-in)
24	Δανάη: 1+4 μας κάνει 5, 4+6 δέκα, 6+4 πάλι 10, και 1.		
25	Εκ.	και 1. Ωραία.	Αποδέχεται και επαινεί την απάντηση (evaluate, validate)
26	Εκ.	Λοιπόν αυτό το τρίγωνο του Pascal έχει…	

Στις ανταποκριτές δράσεις της εκπαιδευτικού δεν σημειώσαμε ποτέ απλή απόρριψη λανθασμένης απάντησης αφού όταν έγινε (σειρά 13), έγινε μετά από 4 ευκαιρίες να εκμαιεύσει σωστή απάντηση δίνοντάς στη Δανάη χρόνο να το σκεφτεί και να απαντήσει. Όταν τελικά απέρριψε την απάντηση της μαθήτριας, την διόρθωσε και μετά την παρέμβαση της μαθήτριας περίπτωσης ΠΕυ, η οποία προσφέρθηκε να εμπλακεί, έδωσε άλλες 3 ευκαιρίες συμμετοχής και κατανόησης, πετυχαίνοντας τελικά τη συμπερίληψη της μαθήτριας στη μαθηματική εκπαιδευτική διαδικασία (Roos, 2023). Είναι αξιοσημείωτο πως κάθε ανταπόκρισή της γίνεται με ακριβή αναφορά στην ιδέα του μαθητή και στον πυρήνα του μαθηματικού

περιεχομένου της απάντησής του. Επικεντρώνεται στην κύρια ιδέα της συνεισφοράς τους, ώστε να γίνεται αναγνωρίσιμη από τις μαθήτριες που συμμετέχουν στη συζήτηση (van Zoest et al., 2022). Για παράδειγμα, στη σειρά 11 η εκπαιδευτικός αναφέρεται στην ιδέα της μαθήτριας για πρόσθεση χωρίς να εμπλουτίζει, ή να αλλάζει θέμα ή να οδηγεί τη συζήτηση σε άλλο μαθηματικό αντικείμενο. Εμβαθύνει δίνοντας την ευκαιρία για αιτιολόγηση, πιθανόν με στόχο την αυτοαξιολόγηση «Τι πρόσθεσες όμως και βρήκες εδώ 5;» χωρίς να αλλάξει καθόλου το νόημα, τη φράση και την ιδέα της. Εντοπίσαμε μόνο μία περίπτωση στην οποία κάνει περιφερειακή σύνδεση στην ιδέα του μαθητή αλλά και στην αυστηρά μαθηματική ιδέα όταν δίνει την ευκαιρία να κατανοήσει η Δανάη την απάντησή της (σειρά 9). Ταυτόχρονα, οι ερωτήσεις/απαντήσεις της εκπαιδευτικού είναι υψηλής μαθηματικής πρόκλησης αφού δεν είναι ποτέ καθοδηγητικές. Πχ. «Μήπως μπορείς να σκεφτείς Δανάη κάτι άλλο;» (σειρά 7) ή «δεν ξέρω, εσύ ό,τι θέλεις κάνεις» (σειρά 9).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι δράσεις της εκπαιδευτικού που οδήγησαν στην θετική αξιοποίηση της συνεισφοράς των δύο μαθητριών περίπτωσης και οδήγησε στη δημιουργία αριθμητικής γενίκευσης από την Δανάη (μαθήτρια που σύμφωνα με την εκπαιδευτικό δυσκολεύεται πολύ στα μαθηματικά), είναι οι εξής: α) Η *επιλογή ενός μαθηματικού έργου με υψηλή μαθηματική πρόκληση* και χωρίς προ-απαιτούμενες γνώσεις αποτέλεσε μια πρόκληση για τη μαθήτρια περίπτωσης ΠΕυ αφού με ιδιαίτερο ζήλο προσπαθεί να συμμετάσχει στη συζήτηση (σηκώνει χέρι, παρεμβαίνει, επαναλαμβάνει). Ταυτόχρονα, η μαθήτρια περίπτωσης ΠΔυ προσπαθεί αυθόρμητα (σηκώνει χέρι), επίμονα και τελικά καταφέρνει να κατανοήσει και να βρει τον σωστό όρο της ακολουθίας. Η επιλογή αυτή ευθυγραμμίζεται και με άλλους ερευνητές όπως οι Sullivan et al. (2003) και η Boaler (2008). β) Οι *επίμονες ευκαιρίες* της εκπαιδευτικού με στόχο την εμπλοκή της Δανάης, σε συνδυασμό με τις *ευκαιρίες αιτιολόγησης, αυτό-αξιολόγησης και διόρθωσης των απαντήσεών της,* μαρτυρούν πως εκτιμά τη συνεισφορά της μαθήτριας περίπτωσης ΠΔυ (Δανάη). Ταυτόχρονα, δείχνει ότι πιστεύει στη μαθηματική ικανότητα της Δανάης να συνεισφέρει στη συζήτηση που αφορά την αναγνώριση του επόμενου όρου μιας ακολουθίας στο τρίγωνο Pascal. Στο ίδιο επεισόδιο, η εκπαιδευτικός εμπλέκει τη μαθήτρια περίπτωσης ΠΕυ (Ευτυχία) με τρόπο που φανερώνει την πεποίθησή της πως η *επεξήγηση και η αιτιολόγηση* είναι δύο σημαντικές επικοινωνιακές πρακτικές κατά την μαθηματική συζήτηση, μέσω των οποίων οι μαθήτριες διαμορφώνουν *κοινές ερμηνείες και κοινές κατανοήσεις* (Spangler &

Wanko, 2017). γ) Η εκπαιδευτικός αναφέρεται πάντα στην *ακριβή ιδέα των μαθητριών περίπτωσης και στο μαθηματικό της περιεχόμενο,* αξιοποιώντας τες και κτίζοντας πάνω στις ιδέες τους (Bishop et al., 2016). Αυτό επιτρέπει στις μαθήτριες περίπτωσης να έχουν μια ποιοτική συμμετοχή, να αναλαμβάνουν διαφορετικούς ρόλους (η Ευτυχία βοηθά την Δανάη) και τελικά επηρεάζει θετικά τον τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται με την ανάπτυξη μαθηματικών πρακτικών (Selling, 2016) όπως η αριθμητική γενίκευση ενός μοτίβου ακολουθίας στο τρίγωνο του Pascal. Οι παραπάνω ανταποκριτικές δράσεις της εκπαιδευτικού φαίνεται να υποστηρίζουν την αίσθηση του ανήκειν των μαθητών και να δημιουργούν ένα ασφαλές συμπεριληπτικό περιβάλλον το οποίο ευεργετεί την ακαδημαϊκή απόδοση των μαθητών αλλά και τη συμμετοχή τους στο κοινωνικό πλαίσιο της τάξης (Bishop et al., 2016; Rose & Shevlin, 2017). Το συγκεκριμένο επεισόδιο είναι ένα παράδειγμα διδασκαλίας η οποία παρέχει σε όλους τους μαθητές ίσες ευκαιρίες να μάθουν και να νιώσουν ενδυναμωμένοι στα μαθηματικά δημιουργώντας στιγμές συμπερίληψης και ισότητας (Moments of inclusion and equity) (Roos & Bagger, 2024, σελ. 1). Τα συγκεκριμένα ερευνητικά αποτελέσματα μπορούν να υποστηρίξουν την έρευνα στη μελέτη των δράσεων των εκπαιδευτικών στην προσπάθειά τους να εφαρμόσουν πρακτικές συμπερίληψης για όλους τους μαθητές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainscow, M. (2016). Diversity and equity: A global education challenge. *New Zealand Journal of Educational Studies, 51,* 143-155. https://doi.org/10.1007/s40841-016-0056-x

Bishop, J., Hardison, H., & Przybyla-Kuchek, J. (2016). Profiles of responsiveness in middle grades mathematics classrooms. In M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, &J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics education* (pp.1173–1180). The University of Arizona.

Boaler, J. (2008). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach. *British Educational Research Journal, 34*(2), 167–194. https://doi.org/10.1080/01411920701532145

Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2019). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 31,* 107-132. https://doi.org/:10.1007/s13394-018-0246-6

Herbert, S., & Williams, G. (2023). Eliciting mathematical reasoning during early primary problem solving. *Mathematics Education Research Journal, 35*(1), 77-103. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00376-9

Lineback, J. E. (2015). Their direction: An indicator of how teachers respond to student thinking. *Journal of the Learning Sciences, 24*(3), 419–460. https://doi.org/10.1080/10508406.2014.930707

Roos, H. (2023). Students' voices of inclusion in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 113*(2), 229-249. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10213-4

Roos, H., & Bagger, A. (2024). Ethical dilemmas and professional judgment as a pathway to inclusion and equity in mathematics teaching. *ZDM–Mathematics Education*, 1-12. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01540-0

Rose, R., & Shevlin, M. (2017). A sense of belonging: Childrens' views of acceptance in "inclusive" mainstream schools. *International Journal of Whole Schooling, 13*(1), 65–80.

Selling, S. K. (2016). Making mathematical practices explicit in urban middle and high school mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(5), 505–551. https://doi.org/10.5951/jrese matheduc.47.5.0505

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning, 10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Spangler, D. A., & Wanko, J. J. (eds.). (2017). Enhancing classroom practice with research behind Principles to actions. *National Council of Teachers of Mathematics.*

Sullivan, P., Zevenbergen, R., & Mousley, J. (2003). The contexts of mathematics tasks and the context of the classroom: Are we including all students? *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 107–121. https://doi.org/10.1007/BF03217373

Van Zoest, L. R., Peterson, B. E., Rougée, A. O., Stockero, S. L., Leatham, K. R., & Freeburn, B. (2022). Conceptualizing important facets of teacher responses to student mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(10), 2583-2608. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1895341

Vasilopoulou, M. & Triantafillou, C. (2023). Tensions in teachers' attempts to apply inclusive mathematics education for students with diverse learning needs. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13),* Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest. Budapest, Hungary. ⟨hal-04409477⟩

Η ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΤΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΕΙΟΤΗΤΑΣ

Μαγαλιού Σταματή

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, *matamagaliou@gmail.com*,

Με τη θεωρητική οπτική της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, η τάξη προσεγγίζεται ως δυναμικό πλαίσιο λειτουργίας της δημοκρατικής και κριτικής πολιτειότητας του παιδιού/μελλοντικού πολίτη. Η παρούσα μελέτη

εστιάζει στο ρόλο του/της εκπαιδευτικού και τις συνέπειες των διδακτικών πρακτικών στην προοπτική της μαθηματικής ενδυνάμωσης/χειραφέτησης των παιδιών. Η ανάλυση των απαντήσεων στις ερωτήσεις μιας συνέντευξης και των διδακτικών πρακτικών δύο έμπειρων εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα έδειξε ότι η διαμαθητική επικοινωνία και η συνεργατική οικοδόμηση των εννοιών ως δημοκρατική διάσταση της μάθησης δεν υποστηρίζονται στην τάξη των μαθηματικών, συντηρώντας ένα χαμηλό επιστημολογικό πλαίσιο ενδυνάμωσης/χειραφέτησης των παιδιών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η στροφή της μαθηματικής έρευνας στις κοινωνικοπολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης εντάσσει τη μαθηματική σκέψη, τη διδασκαλία και τη μάθηση στις ευρύτερες ιστορικές, κοινωνικές, πολιτισμικές, οικονομικές και πολιτικές αναγνώσεις. Η εκπαιδευτική διαδικασία αποτελεί βαθιά πολιτική πράξη, τα μαθηματικά αντικείμενα και οι εκφράσεις τους δυναμικές πολιτισμικές κατασκευές, ενώ η έρευνα εστιάζει στους τρόπους με τους οποίους η διδασκαλία και το πλαίσιο μάθησης μπορεί να αποτελούν όχημα χειραφέτησης, συνδέοντας το σχολείο με την κριτική πολιτειότητα. Το αίτημα για δημοκρατική συγκρότηση των μαθηματικών εννοιών (Ernest, 2002· Skovsmose & Valero, 2008), θέτει στον πυρήνα της εκπαίδευσης το σεβασμό της σκέψης των παιδιών, το διάλογο και τη διαπραγμάτευση των ιδεών, την καλλιέργεια κουλτούρας κριτικής εμπλοκής στην κατασκευή/ επαναδιατύπωση της γνώσης, τη συμμετοχή χωρίς εμπόδια, πρακτικές που ενισχύουν την αυτονομία και την εμπιστοσύνη στις δικές τους δυνάμεις για την παραγωγή της γνώσης. Επιδιώκεται τα παιδιά να αναπτύξουν κρίσιμες δημοκρατικές ικανότητες, να είναι σε θέση να εντοπίζουν μαθηματικές καταστάσεις και να αναγνωρίζουν τη «διαμορφωτική δύναμη» (formatting power) των μαθηματικών που ορίζει και συγκροτεί κοινωνικά φαινόμενα. Αν τα μαθηματικά παραμένουν «σιωπηρά», ως ποσοτικοί δείκτες, λειτουργούν ως πηγή εξουσίας. Για τους Skovsmose και Valero (2008) η δημοκρατία γίνεται αντιληπτή ως μια συλλογική/πολιτική δράση με στόχο τον κοινωνικό μετασχηματισμό, ενώ διέρχεται μέσω της καθημερινής εμπειρίας. Θέτουν ερωτήματα που αναδεικνύουν την πολιτική διάσταση της μαθηματικής εκπαίδευσης με τις δημοκρατικές μορφές αλληλεπίδρασης και λειτουργίας της τάξης: Πώς αναγνωρίζονται οι δημοκρατικές αξίες στις διδακτικές πρακτικές με τα πρότυπα επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης που τις διέπουν; Ποιες μορφές αλληλεπίδρασης δημιουργούν δυνατότητες κριτικής και διαμόρφωσης πολιτικού κριτηρίου τόσο ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο όσο και ως προς τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης; Πώς διαπερνά τη διδασκαλία των μαθηματικών η διασύνδεση της μικρο-κοινωνίας της τάξης με την ευρύτερη κοινωνία (μακρο-κοινωνία); Σ’ αυτό το πλαίσιο, οι

παιδαγωγικές πρακτικές δίνουν σιωπηρά μηνύματα σχετικά με τις δομές εξουσίας και τους ρόλους που επιτελούνται, στο σχολείο και στην ευρύτερη κοινωνία. Μια αυταρχική διάρθρωση της τάξης, όπου ο/η εκπαιδευτικός λειτουργεί ως αυθεντία και οι μαθητ(ρι)ές σε ρόλο υπάκουων και παθητικών δεκτών, διδάσκει ότι η κοινωνία λειτουργεί με το αντίστοιχο μοντέλο. Οι ιεραρχικές δομές ενισχύουν μια «κουλτούρα μειονεκτήματος», «φυσικοποίησης» της σχολικής αποτυχίας και «παιδαγωγική της διαφοράς», που κατηγοριοποιούν και εμποδίζουν την πρόσβαση κι ενδυνάμωση. Αντίθετα, σε μια δημοκρατική τάξη, τα παιδιά συμμετέχουν ενεργά στην κατασκευή των εννοιών, χωρίς αντιλήψεις ανωτερότητας (non-elitist) και αποκλεισμούς (Gerofsky, 2009), ενθαρρύνεται η προσωπική οικειοποίηση της γνώσης, η ανάπτυξη δημοκρατικής κουλτούρας και ανεξάρτητης σκέψης, τότε η νεολαία προετοιμάζεται για να ζήσει σε ένα πιο συμμετοχικό, «ακτιβιστικό» (activist) πολιτικό σύστημα, στο οποίο οι φωνές και οι ιδέες τους λαμβάνονται σοβαρά υπόψη. Κρίσιμη προϋπόθεση αποτελεί η επαγγελματική-επιστημονική χειραφέτηση των εκπαιδευτικών ως δημόσιοι διανοούμενοι και πολύτιμοι κοινωνικοί πόροι, ως αυτόνομοι πράκτορες/φορείς, που αναστοχάζονται και μετασχηματίζουν τις πρακτικές και την εργασία τους με στόχο την παιδαγωγική, κοινωνική και πολιτική χειραφέτησή τους σε συνάρτηση με την κοινωνική δικαιοσύνη και την εκπαίδευση κριτικά ενεργών πολιτών.

Επιστημολογική ενδυνάμωση/χειραφέτηση του Paul Ernest: Ο Ernest (2002) διακρίνει τρεις τομείς μαθηματικής ενδυνάμωσης, που συνάπτονται και αλληλοσυμπληρώνονται: τη μαθηματική ενδυνάμωση (empowerment) που αναφέρεται στην καλή γνώση και το χειρισμό της μαθηματικής γλώσσας στο πεδίο των σχολικών μαθηματικών (πολιτισμική διάσταση), την κοινωνική ενδυνάμωση που αναφέρεται στη χρήση των μαθηματικών ως εργαλείο κριτικής (ενδιαφέροντα/βιώματα παιδιών) και την επιστημολογική ενδυνάμωση (μαθηματική και κοινωνική), που συνιστά την εμπιστοσύνη στη χρήση των μαθηματικών, την αίσθηση αυτονομίας, την επικύρωση της γνώσης από τα παιδιά, την αμφισβήτηση του ρόλου του εκπαιδευτικού ως φορέα εξουσίας. Η μελέτη επικεντρώνεται σε δύο συμπληρωματικούς παράγοντες: αναγνώριση-σεβασμός στη σκέψη του παιδιού και μετατόπιση από την ατομική-ανταγωνιστική εργασία στη συλλογική δόμηση της γνώσης.

Προσανατολισμοί ακρόασης του Brent Davis: Ο Davis (2013) μελετώντας την ακρόαση ως παράγοντα κατανόησης, ερμηνείας των διδακτικών πρακτικών και μετασχηματισμού της διδασκαλίας στην κατεύθυνση της μαθηματικής ενδυνάμωσης και της δημοκρατικής συγκρότησης των εννοιών, διακρίνει τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς ακρόασης που οι εκπαιδευτικοί υιοθετούν στην τάξη: τον «αξιολογητικό» (evaluative

orientation), τον «ερμηνευτικό/επεξηγηματικό» (interpretive orientation) και τον «ερμηνευτικό/μετασχηματιστικό» (hermeneutic orientation). Στην αξιολογητική ακρόαση ο εκπαιδευτικός εστιάζει στη «διάγνωση» και διόρθωση του «λάθους» σε μια διαδικασία απόκτησης προκαθορισμένων και καθολικών αληθειών. Προσεγγίζει την εργασία των μαθητ(ρι)ών με βάση τις υποκειμενικές του προσδοκίες, ενώ κυριαρχούν οι διαδικασίες απομνημόνευσης και αναπαραγωγής, οι οποίες λειτουργούν αποξενωτικά και αλλοτριωτικά για την εννοιολογική κατανόηση. Στον δεύτερο προσανατολισμό, η ακρόαση αποτελεί ζωτικό στοιχείο της διδακτικής πράξης ενώ γίνεται συνειδητή και σκόπιμη για την κατανόηση του υποκειμενικού νοήματος που κατασκευάζει το παιδί. Στους δύο πρώτους προσανατολισμούς οι ρόλοι εκπαιδευτικού και παιδιού παραμένουν διακριτοί και ασυμβίβαστα διαχωρισμένοι μεταξύ τους ενώ η συγκρότηση των εννοιών αποτελεί αυτόνομη, απομονωμένη και μοναχική διαδικασία. Ο «ερμηνευτικός/μετασχηματιστικός» προσανατολισμός συνιστά την ιδανικότερη μορφή ακρόασης. Ο εκπαιδευτικός προσανατολίζεται στις ιδέες των παιδιών, που καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη του μαθήματος. Οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις υποδηλώνουν μια διαλεκτική διαδικασία, όπου «τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως πεδίο αναζήτησης, παρά ως ένα δεδομένο αντικείμενο μάθησης» και η εργασία των παιδιών «ανάλογη με αυτήν που ακολουθείται στην κοινότητα των επαγγελματιών μαθηματικών» (Σακονίδης, 2017). Το θεωρητικό πλαίσιο συνδυαστικά έδωσε τη δυνατότητα διερεύνησης, αποτύπωσης κι ερμηνείας των διδακτικών πρακτικών, των μορφών αλληλεπίδρασης και λειτουργίας της τάξης. Σχετικές έρευνες υλοποιήθηκαν κυρίως, στη δευτεροβάθμια μαθηματική εκπαίδευση (Mhlolo & Schafer, 2012), με την μορφή projects στην κατεύθυνση του κριτικού μαθηματικού γραμματισμού και του αναστοχασμού/πολιτικής επίγνωσης των διδακτικών πρακτικών.

Η ΜΕΛΕΤΗ

Στόχος της εμπειρικής μελέτης είναι: -**η διερεύνηση των διδακτικών πρακτικών** στο Δημοτικό Σχολείο ως προς τη διαχείριση συγκρότησης των εννοιών και των συνεισφορών των παιδιών σε συνάρτηση με τις σχέσεις εξουσίας (μικροπλαίσιο), -ποιον προσανατολισμό ακρόασης **διαμορφώνουν** και -**πώς επιδρούν** στην επιστημολογική ενδυνάμωση/χειραφέτηση των μαθητ(ρι)ών/εν δυνάμει μελλοντικών ενεργών, δημοκρατικών και κριτικών πολιτών (μακροπλαίσιο). Υιοθετήθηκε η μελέτη περίπτωσης και αξιοποιήθηκαν ως ερευνητικά εργαλεία η μη συμμετοχική παρατήρηση, οι «περιγραφικές» σημειώσεις πεδίου, η ηχογράφηση διδασκαλίας (δύο διδακτικά δίωρα για κάθε εκπαιδευτικό) και η ημιδομημένη συνέντευξη. Συμμετείχαν τέσσερις εκπαιδευτικοί με πολυετή διδακτική εμπειρία, επιμορφώσεις/μεταπτυχιακές σπουδές και συμμετοχή σε τρέχοντα

επιμορφωτικά προγράμματα. Η επιλογή έγινε στη βάση της σκόπιμης δειγματοληψίας, στο πλαίσιο πολύχρονης συνεργασίας, ανταλλαγής παιδαγωγικών πρακτικών και εκπαιδευτικών εμπειριών και κριτήριο να διδάσκουν στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού καθώς παρουσιάζονται ευδιάκριτα διαδικασίες της μαθηματικής επιστήμης. Από τη μελέτη των απομαγνητοφωνημένων διδασκαλιών διαμορφώθηκαν οι ερωτήσεις μιας ημι-δομημένης συνέντευξης που στόχευαν στην κατανόηση των πρακτικών και τη διερεύνηση των σχετικών αντιλήψεων των εκπαιδευτικών. Ο σχεδιασμός της ερευνητικής διαδικασίας πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις, την αρχική και την κύρια, ενώ τα δεδομένα αναλύθηκαν, οργανώθηκαν και κωδικοποιήθηκαν σε άξονες με επικέντρωση στα κοινά χαρακτηριστικά, αξιοποιώντας τις τεχνικές της θεμελιωμένης θεωρίας και της θεματικής ανάλυσης περιεχομένου. Οι διδακτικές πρακτικές που εντοπίστηκαν δομήθηκαν σε δίκτυο τριών αξόνων με βάση τους προσανατολισμούς ακρόασης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των δεδομένων των τεσσάρων εκπαιδευτικών (δύο άντρες και δύο γυναίκες) που συμμετείχαν, προκύπτει ότι οι διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν οι τρεις εκπαιδευτικοί από τους τέσσερις συμμετέχοντες, κατά κύριο λόγο συγκεντρώνουν τα χαρακτηριστικά του αξιολογητικού προσανατολισμού. Λόγω περιορισμένου χώρου επιλέγεται, η εστίαση στα δεδομένα δύο εκπαιδευτικών, της Σοφίας, μιας από τους τρεις εκπαιδευτικούς με συγκλίνουσες πρακτικές διαχείρισης της τάξης και της Ευγενίας, που διέφερε των υπολοίπων με ενδεικτική αναφορά σε επεισόδια και απαντήσεις.

Διαχείριση της μάθησης: Η διδακτική προσέγγιση της Σοφίας χαρακτηρίζεται από ατομική αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού–παιδιού και σχεδόν μεταξύ των παιδιών. Ευθυγραμμίζεται αυστηρά στην δομημένη παρουσίαση και στο πρότυπο ορθότητας του σχολικού βιβλίου, σε βάρος μιας πιο ανοιχτής και διερευνητικής διαδικασίας. Η ακρόασή της εστιάζει στον έλεγχο και την ορθότητα συγκεκριμένων απαντήσεων, σύμφωνες με έναν προσωπικό μεθοδολογικό σχεδιασμό ενώ σπάνια παρακολουθεί τη διαδρομή της σκέψης και το νόημα που οικοδομεί το παιδί, σκιαγραφώντας ένα πλαίσιο μάθησης στο οποίο σπάνια αναδύονται δημοκρατικές πτυχές συγκρότησης των εννοιών. Στην τάξη δεν ενθαρρύνεται η διαμαθητική επικοινωνία/αλληλεπίδραση ενώ απουσιάζουν συνεργατικές πρακτικές που υποστηρίζουν τρόπους αλληλεπίδρασης και συλλογικής δόμησης του νοήματος (Επεισόδιο 1),

Επεισόδιο 1	Συνέντευξη
«Μκ1. Είναι 106/200», «Εκ. 106 είναι σωστό, βάζουμε,	«η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης είναι υπόθεση του μαθητή και

μετράμε 100 + 100, 200; Δηλαδή έχεις δει ποτέ κανένα κλάσμα τέτοιο;», «Μκ1....όχι», «Εκ. Τι μόνο υπολογίζεις Μκ1 μου; Μόνο το ένα πλέγμα υπολογίζεις», «Μκ1. Αααααα….», «Εκ. Άρα;», «Μκ1. Εκατοστά (11.37)	του δασκάλου» [….] «Για αυτό τους καθοδηγώ περισσότερο εγώ με ερωτήσεις κατευθύνοντας εγώ τη γνώση για αυτό προτιμώ να αλληλεπιδρώ ατομικά. Η αλληλεπίδραση με το μαθητή εμένα μου δίνει την αίσθηση της σιγουριάς για το τι γνώση μπορεί να πάρει ο μαθητής» (5.10)

Διαχείριση της συνεισφοράς των παιδιών: Κυρίαρχη πρακτική της εκπαιδευτικού είναι να αλληλεπιδρά, κυρίως, με τα παιδιά που προθυμοποιούνται, διαγράφοντας ένα είδος κοινωνικομαθηματικής νόρμας κριτηρίων εμπλοκής στη δραστηριότητα που επηρεάζει τη σχέση των παιδιών με τα μαθηματικά. Οι πιο κυριαρχικοί μαθητές έχουν κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία ενώ για τα σιωπηλά παιδιά επιφυλάσσεται ο ρόλος της προσοχής και της απομνημόνευσης. Το «λάθος» θεωρείται μη επιτρεπτό ενώ συχνά τονίζεται η ατομική ευθύνη των παιδιών σε ό,τι έχουν διδαχθεί, αντιλήψεις και πρακτικές που αποθαρρύνουν και αποδυναμώνουν ένα πλαίσιο ουσιαστικής συμμετοχής όλων των παιδιών. Η διαφωνία, τα ερωτήματα και προβληματισμοί των παιδιών αντιμετωπίζονται είτε ως προσωπικό μαθησιακό εμπόδιο είτε ως μη αναμενόμενες συνεισφορές που δεν επιδρούν στην προκαθορισμένη τροχιά του μαθήματος καθώς διαχειρίζονται άμεσα από την εκπαιδευτικό και δε γίνονται αντικείμενο συλλογικής επεξεργασίας κι ενεργούς κατασκευής της μαθηματικής γνώσης (Επεισόδιο 2).

Επεισόδιο 2	Συνέντευξη
«Μκ11. Έχω μια απορία…..εδώ πάνω.14/5 έχει διαφορά 9 …. Η διαφορά μεταξύ 5 και 14 είναι 9, όταν τα πολλαπλασιάσουμε η διαφορά τους μεγαλώνει», «Εκ. Μεγαλώνει;», «Μ13. Όχι, δε μεγαλώνει…», «Μ14. Ναι, κυρία, είναι 9 και θα γίνει 18», «Εκ. Περιμένετε λίγο. Μεγαλώνει, διπλασιάζεται και αυτή. Διπλασιάζεται. Το 14 γίνεται 28 το 5 γίνεται 10 διπλασιάζεται και η διαφορά τους 9 και 9 γίνεται 18. Αν το τριπλασιάσεις θα τριπλασιαστεί και η διαφορά τους. Ωραία. Συνεχίζουμε. (57.80)	«ως συγκεντρωτική, προτιμάω να τα δείχνω εγώ για να είμαι σίγουρη το πώς τα ακούει το παιδί» (16.53) «Ναι, σε κάποιες περιπτώσεις κάποιες απροσδόκητες ερωτήσεις είναι χωρίς νόημα για μένα, χωρίς σημασία, κάτι που θεωρείται αυτονόητο» (1.13.31)

Ελάχιστα συνδέει τη δραστηριότητα με βιώματα των παιδιών, ώστε να προωθήσει την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης και την ικανότητά τους να κρίνουν και να ερμηνεύουν τον κόσμο. Δεν αναγνωρίζεται ο εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης, πρακτική που δεν

ενθαρρύνει την ανεξάρτητη σκέψη, την πολλαπλότητα των ιδεών και υπονοεί ότι τα μαθηματικά δε βασίζονται στον προσωπικό τρόπο κατασκευής αλλά αποτελεί γνώση που δημιουργείται έξω από την τάξη και επαναλαμβάνεται στο περιβάλλον της τάξης, ανεξάρτητες από την εμπειρία και πρακτική της ζωής. (Επεισόδιο 3)

Επεισόδιο 3	Συνέντευξη
«Μα2. Κυρία, εγώ δεν το 'κανα έτσι;», «Εκ. Πώς το 'κανες;», «Μα2. 1 και 6/100», «Εκ. Ναι, αλλά σου λέει (*το βιβλίο*) κλάσμα δεν σου λέει μικτό; Επειδή λέει κλάσμα και δεν λέει μικτό αριθμό, επειδή λέει κλάσμα, πρέπει να το γράψουμε 106 /100.» (12.67)	«επιμένω σε αυτή την απάντηση, που το βιβλίο απαιτεί, ναι, γιατί υπάρχει άλλη άσκηση που ζητάει αυτό που μου έχει γράψει ο μαθητής» (34.56)…«αν η άσκηση ζητάει δεκαδικό κλάσμα πρέπει να απαντηθεί με αυτό τον τρόπο, ο μικτός αριθμός δεν είναι απάντηση, είναι λανθασμένη για μένα απάντηση.» (32.13)

Διαφοροποίηση παρουσιάζουν οι διδακτικές πρακτικές της δεύτερης εκπαιδευτικού. Εντοπίζονται χαρακτηριστικά, κυρίως, από τον ερμηνευτικό/επεξηγηματικό προσανατολισμό που τροφοδοτούνται με στοιχεία από τους δύο άλλους προσανατολισμούς ακρόασης.

Διαχείριση της μάθησης: Η διδακτική προσέγγιση χαρακτηρίζεται από ατομική αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού-παιδιού με στοιχεία παρωθητικού διαλόγου και καθοδηγούμενης διερεύνησης. Σκόπιμα και ενεργά προσεγγίζει το σκεπτικό των μαθητ(ρι)ών της ως πόρο γνώσης, αξιοποιώντας αναδυόμενες γνώσεις, ιδέες και την εμπειρία τους. Επιτρέπει στα παιδιά να ολοκληρώνουν τη σκέψη τους, επεξεργάζεται τις απαντήσεις μαζί τους, τα ενθαρρύνει να δώσουν περισσότερες εξηγήσεις με το δικό τους υποκειμενικό τρόπο χωρίς να επιμένει σε ορολογία ή μαθηματικούς όρους. Διαχειρίζεται το βιβλίο με ευελιξία σχεδιάζοντας ή τροποποιώντας τις δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου ενώ σε μεγάλο βαθμό η πορεία της διδασκαλίας καθορίζεται από την ανταπόκριση των παιδιών και διαμορφώνεται από τις συνεισφορές τους. Η εκπαιδευτικός διατηρεί ανοιχτή διαπραγματευτική προσέγγιση, καλλιεργώντας κουλτούρα σεβασμού των απόψεων και ενισχύοντας την αίσθηση της προσωπικής δημιουργίας (Επεισόδιο 4),

Επεισόδιο 4	Συνέντευξη
«Μα19. Για παράδειγμα έχουμε 1/3 και …..», «Εκ. Άμα θες να κάνεις παράδειγμα έλα να το κάνεις στον πίνακα. Νιώθεις ότι θα σε βοηθήσει σ' αυτό που λες, ε; ωραία. Θα κάνεις το παράδειγμα αλλά ταυτόχρονα, θα μας λες και τι κάνεις» (1.86) […] «Εκ. Ποιον θέλεις; Ας πούμε ¾ και 2/5; Όχι; Ό,τι θέλεις εσύ	«…το κάνω συνειδητά ….. γιατί θέλω ο ίδιος ο μαθητής να καταλάβει τι σκέφτεται και πώς έφτασε εκεί, […] πολλές φορές αυτό βοηθάει τους άλλους μαθητές […] δηλ. μου δίνουν ακόμη έναν

βάλε», «Μα1. ναι», «Εκ. Τι έχεις να προσθέσεις;», «Μα1. Αυτά τα δύο», «Εκ. Ωραία. Προχώρα. Λέγε μας και τι κάνεις.», «Μα1. Α, βρίσκω το ΕΚΠ του 4 και του 5 και είναι το 20» «Εκ. Ωραία.», «Μα1. Μετά ξαναγράφω τα κλάσματα και τα πολλαπλασιάζω για να βρω το ΕΚΠ, δηλ. το 4 το πολλαπλασιάζω με το 5 για να μου βγει 20 και το 5 το πολλαπλασιάζω με το 4» (3.80)	τρόπο προσέγγισης της γνώσης που μπορεί τα άλλα παιδιά να το καταλάβουν καλύτερα [….] είναι και ηλικιακά πιο κοντά και μπορεί πραγματικά ο συμμαθητής τους να τους βοηθήσει πιο ουσιαστικά από μένα» (29.24)

Ενθαρρύνει διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης και αναπαράστασης της έννοιας θεωρώντας ότι λειτουργεί μεταγνωστικά για το ίδιο το παιδί και υποστηρικτικά στην εννοιολογική κατανόηση των υπόλοιπων. Αλληλεπιδρά ως ισότιμο μέλος και διαμεσολαβεί ως συνερευνητής στην κατασκευή των εννοιών, κυρίως στη δεύτερη διδασκαλία, υποστηρίζοντας ότι αυτό εξαρτάται από ένα συνδυασμό παραγόντων. Αξιοποίησε τη συνεργατική πρακτική μία φορά στις διδασκαλίες της δίνοντας ώθηση σε πρακτικές ενεργούς συμμετοχής, συλλογικής δράσης και αυτοδιαχείρισης των μαθητ(ρι)ών (Επεισόδιο 5),

Επεισόδιο 5	Συνέντευξη
«Εκ. Θα σας μοιράσω αυτά εδώ, οπότε ένα παιδί από κάθε ομάδα να ‘ρθει να το πάρει. (40.28)», «…..*Αναστάτωση (Τα παιδιά χωρίζονται μεταξύ τους σε 5 μεικτές ομάδες)»,* «Μα11. Κυρία δεν καταλαβαίνω τι πρέπει να κάνουμε;», «Εκ. Να ρωτήσετε την ομάδα σας. Αυτήν την ερώτηση που θα επιλέξετε πρέπει να την κάνετε σε όλους τους συμμαθητές σας».	«στην ομαδική, νομίζω ότι ενδυναμώνεται πάρα πολύ το παιδί και συμμετέχουν ισότιμα, όπως τα άλλα μέλη της ομάδας του, όχι απλώς συμμετέχει, αλλά όταν εργάζεται. Στην ομαδική εργασία καταρχάς δεν ολοκληρώσανε την άσκηση. Είχανε φτάσει σε ένα σημείο κάτι είχανε αφήσει απέξω […] Δουλέψανε; Δουλέψαν. Καταλάβανε; Όχι, όσα η Μκ2 π.χ., όμως καταλάβανε την έρευνα, ότι ρωτάμε, ότι καταγράφουμε τις απαντήσεις τους, ότι κάνουμε το ιστόγραμμα. […] τη λογική την κατάλαβαν; Την καταλάβαν» (1.15.09)

Συνδέει συνειδητά τη δραστηριότητα με βιωματικές καταστάσεις των παιδιών, ενισχύοντας την εννοιολογική κατανόηση και την κριτική τους σκέψη. Συμμετέχει σε κριτικούς προβληματισμούς στην τάξη σχετικά με το περιεχόμενο/μέθοδο της σχολικής γνώσης, προσδίδοντας μια διαλεκτική δυναμική στη διαχείριση του διδακτικού αντικειμένου και αξιοποιώντας τα μαθηματικά ως εργαλείο ανίχνευσης και κριτικής αντιφατικών καταστάσεων στο πλαίσιο της «κοινωνικής ενδυνάμωσης. Είναι δεκτική στην αμφισβήτηση του ρόλου εξουσίας και το συζητάει με τα παιδιά.

Διαχείριση της συνεισφοράς των παιδιών: Εμπλέκει στη δραστηριότητα τα παιδιά με δυσκολίες διαφοροποιώντας και προσαρμόζοντας τη

διδασκαλία, δίνοντας μηνύματα σεβασμού των συνεισφορών και της συμμετοχής όλων. Δεν αγνοεί μη αναμενόμενες/απροσδόκητες συνεισφορές, επιτρέποντας περιθώρια απόκλισης από τους διδακτικούς της σχεδιασμούς. Αντίστοιχα, το «λάθος» και οι παρανοήσεις, η διαφωνία και αμφισβήτηση στην τάξη είναι καλοδεχούμενες και δεν αγνοούνται, αλλά αποτελούν ευκαιρία για συλλογική διαπραγμάτευση (Επεισόδιο 6).

Επεισόδιο 6	Συνέντευξη
«Μα6. Πώς γίνεται να ξεκουράζονται 4 ώρες την εβδομάδα;», «Εκ. Τι, σου φαίνεται λίγο;», «Μα6. Πάρα πολύ («λίγο»), «Μα6. Όλη την εβδομάδα;», «Εκ. διάβασε την ερώτηση.», «Μα6. (Διαβάζει) «ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού τις καθημερινές ημέρες της εβδομάδας» κάθε μέρα από 4 ώρες;», «Εκ. εγώ νομίζω ότι είναι συνολικά αλλά δεν ξέρω κιόλας», …. «Πόσες ώρες την εβδομάδα ή πόσες ώρες την ημέρα εσύ ξεκουράζεσαι, Μα19;», «Μα19. Δεν ξέρω.», [….] «Μα12. Δεν μπορούμε να κάνουμε έρευνα για κάθε μέρα;», «Εκ. Τι να είναι κάθε μέρα (το δεδομένο της έρευνας του βιβλίου);», «Μα12. 4 ώρες την εβδομάδα …. 1 ώρα κάθε μέρα;», «Εκ. Εγώ θεωρώ ότι αυτή η έρευνα, αν θέλετε την προσωπική μου άποψη, μάλλον δεν έχει γίνει στ’ αληθινά….».(39.27)	«αγωνία μου είναι να αποκτήσουν νόημα τα μαθηματικά για τα παιδιά. Πολύ συχνά δέχομαι την ερώτηση αυτή, γιατί το μαθαίνουμε κυρία; [….] Θα ‘θελα πάρα πολύ να τους πείσω και να τους κινητοποιήσω. Γι’ αυτό όπου νομίζω ότι μπορεί να κολλήσει η εμπειρία τους άρα να αποκτήσει κι ένα νόημα για αυτούς η μάθηση την αξιοποιώ. (1.21.89)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην πλειοψηφία τους οι διδακτικές πρακτικές που υιοθετεί η Σοφία αποτυπώνουν πιο παραδοσιακές προσεγγίσεις διδασκαλίας με επίκεντρο τον/την εκπαιδευτικό, ενώ οι δομές εξουσίας γίνονται εμφανείς σε κάθε πτυχή της διδασκαλίας. Για τα παιδιά επιφυλάσσεται η παθητική λήψη και η ικανότητα επανάληψης της γνώσης από τους επιστημολογικούς τους φορείς, εκπαιδευτικό και βιβλίο, εδραιώνοντας και φυσικοποιώντας αυτές τις διδακτικές πρακτικές στην επεξεργασία των εννοιών (Mhlolo & Schafer, 2012). Αξιοποιούνται κυρίως οι πρόθυμοι/ες μαθητ(ρι)ές (Σακονίδης, 2017), θέτοντας περιορισμούς στην πρόσβαση του μαθηματικού νοήματος για τους πιο σιωπηλούς/ές παρά ένα ενδυναμωτικό πλαίσιο ισότητας και ουσιαστικής συμμετοχής όλων των μαθητών. Απουσιάζει η σύνδεση της μαθηματικής δραστηριότητας με τις εμπειρίες και τη ζωή των μαθητών ελαχιστοποιώντας έτσι, τις ευκαιρίες αξιοποίησης των μαθηματικών ως εργαλείο κριτικής των κοινωνικών χρήσεων για την «κοινωνική ενδυνάμωση» των μαθητών. Στην τάξη συντηρείται ένα

πλαίσιο μάθησης λιγότερο δημοκρατικό, επομένως και, λιγότερο χειραφετητικό που συγκροτεί αντίστοιχα και την επιστημολογική ταυτότητα του «εν δυνάμει» μελλοντικού πολίτη(Ernest, 2002 Davis, 2013).

Μικρή, αλλά σημαντική μετατόπιση, αποτυπώνουν οι διδακτικές πρακτικές της Ευγενίας που εναρμονίζονται, κυρίως, με τον δεύτερο προσανατολισμό ακρόασης. Η προσωπική διαδρομή κατανόησης των παιδιών υποστηρίζεται ενεργά και σκόπιμα ενώ παρέχονται ευκαιρίες μιας πιο συμμετοχικής και κριτικής εμπλοκής τους στη συγκρότηση της γνώσης δημοκρατική διάσταση της μάθησης. Διαχειρίζεται τα μαθηματικά ως μια δυναμικά εξελισσόμενη κατασκευή ενώ τα αξιοποιεί ως εργαλείο κριτικής στο πλαίσιο της «κοινωνικής ενδυνάμωσης» ως μελλοντικών πολιτών. Στη διδασκαλία της συνυφαίνονται, επίσης, χαρακτηριστικά των τριών προσανατολισμών σε μια μορφή «σύνθετης ακρόασης», συναρτώμενα με την ανταπόκριση των παιδιών και τη θεματολογία του αντικειμένου. Η ακρόασή της συνιστά μια δυναμική και αναστοχαστική πορεία από τον πρώτο στον τρίτο προσανατολισμό στην προοπτική μετασχηματισμού (Davis, 2013) των πρακτικών σε πιο συμμετοχικές και κατασκευαστικές κατευθύνσεις.

Καταλήγοντας, στην πλειονότητά τους οι διδακτικές πρακτικές των συμμετεχόντων αποτυπώνουν ένα συνδυασμό παραδοσιακών μορφών διδασκαλίας και στοιχείων της επιστημολογίας του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού, αποσυνδεδεμένες από το νόημα που οικοδομεί το παιδί και τις κοινωνικοπολιτικές-πολιτισμικές διαμεσολαβήσεις. Αφενός, ο συγκεντρωτικός χαρακτήρας του εκπαιδευτικού συστήματος, διαχρονικά, καλλιεργεί εξαρτητικές πρακτικές, λιγότερη επαγγελματική/παιδαγωγική αυτονομία (Σακονίδης, 2017), αποξένωση από τις παιδαγωγικές αξίες/στόχους και αφετέρου με τους πρόσφατους νόμους, νεοφιλελεύθερης κατεύθυνσης -αξιολόγηση, ανταγωνισμό και ιδιωτικοποίηση της δημόσιας εκπαίδευσης- διαρθρώνεται μια ριζικά ασύμβατη σχέση προς το δημοκρατικό σχολείο και τη μάθηση. Οι εκπαιδευτικοί της μελέτης αναγνωρίζουν αντιφάσεις και ασυνέπειες τόσο στο αναλυτικό πρόγραμμα όσο και στις διδακτικές τους πρακτικές ενώ οι προβληματισμοί που αναδύθηκαν αποτέλεσαν αισιόδοξη οπτική, για μελλοντική έρευνα, στην κατεύθυνση αναστοχασμού των πρακτικών, δημοκρατικής συγκρότησης της γνώσης και λειτουργίας του σχολείου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Davis, B. (2013). *Teaching mathematics: Toward a sound alternative*. Routledge.

Ernest, P. (2002). Empowerment in mathematics education. *Philosophy of mathematics education journal*, *15*(1), 1-16.

Gerofsky, S. (2010). Performance mathematics and democracy. *Educational Insights*, *13*(1), 1-12.

Mhlolo, M. K., & Schafer, M. (2012). Towards empowering learners in a democratic mathematics classroom: To what extent are teachers' listening orientations conducive to and respectful of learners' thinking? *Pythagoras*, *33*(2), 1-9.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2008). Democratic Access to Powerful Mathematical Ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2 ed., pp. 415-438). Routledge.

Σακονίδης, Χ. (2017). Η μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών της μουσουλμανικής μειονότητας στη Θράκη: κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παράμετροι. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (10), 27-54.

ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΟΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΣΥΓΚΡΟΥΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΟ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Σαλαμανάκη Ασημούλα

2ο Γυμνάσιο Ορεστιάδας

asimoulasal@gmail.com

Στο Επικοινωνιογνωστικό Θεωρητικό Πλαίσιο για τη μάθηση, οι επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις κατά την εξέλιξη του μαθηματικού λόγου των μαθητών θεωρούνται ευκαιρίες για μάθηση. Καθώς μια μαθήτρια Γυμνασίου αντιμετωπίζει μαθηματικά έργα σχετικά με την έννοια της συνάρτησης και μετακινεί τη σκέψη της στο φάσμα των ρουτινών, η εργασία διερευνά την ύπαρξη επικοινωνιογνωστικών συγκρούσεων και αναζητά τα χαρακτηριστικά των έργων που τις προκαλούν. Η ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις από τη διαφοροποιημένη χρήση των οπτικών διαμεσολαβητών ή από λόγους διαφορετικών μαθηματικών πεδίων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο ερευνητικό πλαίσιο της μελέτης του λόγου (discourse), το Επικοινωνιογνωστικό Θεωρητικό Πλαίσιο (Sfard, 2008) θεωρεί τη μάθηση των μαθηματικών ως αλλαγή του μαθηματικού λόγου του ατόμου. Αναλύοντας την επικοινωνιακή δραστηριότητα του μαθητή κατά τη συμμετοχή του στον μαθηματικό λόγο, το ΕΘΠ επισημαίνει ότι η συνάντηση του μαθητή με λόγους που δεν μοιράζονται τους ίδιους κανόνες μπορεί να τον φέρει εν μέσω συγκρουσιακών καταστάσεων (Sfard, 2008), τις οποίες το ΕΘΠ όχι μόνο δεν τις θεωρεί εμπόδιο αλλά πύλη για τον νέο λόγο (Cobb, 2009).

Η αναγνώριση και η εξέταση αυτών των συγκρούσεων μπορεί να παρέχει πληροφορίες για τον τρόπο σκέψης των μαθητών, γνώση που μπορεί να είναι ευεργετική για τη διδασκαλία (Thoma & Nardi, 2018). Έρευνες (Nachlieli, 2022; Thoma, 2018) αναζήτησαν εκδηλώσεις επικοινωνιογνωστικών συγκρούσεων στον λόγο εκπαιδευτικών ή μαθητών που έχουν ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ενώ άλλες (Roberts, 2016; Clark, 2014) ανέλυσαν τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τις εξισώσεις και τις συναρτήσεις. Με στόχο τη βελτίωση των διδακτικών πρακτικών για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης, ενός κομβικού μαθηματικού αντικειμένου για τη μαθησιακή πορεία του μαθητή στα

μαθηματικά, η εργασία διερευνά επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου κατά την εξέλιξη των ρουτινών τους καθώς εμπλέκονται με σχετικά μαθηματικά έργα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Συνενώνοντας την επικοινωνία με τη γνώση υπό τον όρο commognition (cmg) και λαμβάνοντας τη σκέψη ως εξατομίκευση της διαπροσωπικής επικοινωνίας, το Επικοινωνιογνωστικό Θεωρητικό Πλαίσιο (Sfard, 2008) εστιάζει στον μαθηματικό λόγο (discourse). Τον θεωρεί ως έναν τύπο επικοινωνίας που διακρίνεται από τα τέσσερα χαρακτηριστικά του: χρήση λέξεων (π.χ. αριθμός, μεταβλητή), οπτικοί διαμεσολαβητές (π.χ. σύμβολα, γραφική παράσταση), αφηγήσεις (εκφράσεις για μαθηματικά αντικείμενα, σχέσεις, διεργασίες με αυτά) και ρουτίνες (πρότυπα ενεργειών για οποιαδήποτε πτυχή του μαθηματικού λόγου).

Οι ρουτίνες λόγου (discursive), διακρίνονται σε τελετουργίες (rituals) και εξερευνήσεις (explorations). Οι τελετουργίες αιτιολογούν τον τρόπο για να συμβεί κάτι αλλά δεν απαντούν στο ‘πότε’ και το ‘γιατί’. Επειδή ουσιαστικά αποτελούν στάδιο μίμησης, το ΕΘΠ τις χαρακτηρίζει κοινωνικά προσανατολισμένες, αφού έτσι το άτομο επιδιώκει δημιουργία και διατήρηση δεσμού με τους άλλους. Οι εξερευνήσεις συμπληρώνουν την απάντηση στο ‘πότε’ και το ‘γιατί’ να συμβεί κάτι. Στοχεύουν στην παραγωγή ή τεκμηρίωση επικυρωμένων αφηγήσεων (Sfard, 2008) και θεωρούνται η πιο εξελιγμένη μορφή ρουτίνας, κατά την οποία ο μαθητής είναι κύριος της μαθηματικής του δραστηριότητας και αποφασίζει πότε και πώς να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά για τις δικές του ανάγκες (Roberts, 2016). Συγκριτικά στοιχεία των ρουτινών παρέχουν τη δυνατότητα αναγνώρισης του είδους τους. Για παράδειγμα, σε αντίθεση με την εξερεύνηση, ο μαθητής δρώντας τελετουργικά δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσει τις υπορουτίνες και συνεπώς για οποιαδήποτε διόρθωση επαναλαμβάνει συνολικά τη διαδικασία. Οι τελετουργίες και οι εξερευνήσεις θεωρούνται οι ακραίες περιπτώσεις ενός ευρέως φάσματος δυνατοτήτων. Τη διαδρομή του μαθητή από την τελετουργία στην εξερεύνηση αποδίδει ο όρος αποτελετουργοποίηση (deritualization) (Lavie κ.α., 2018) και γίνεται αντιληπτή από την εξέλιξη των ρουτινών του.

Στο ΕΘΠ η μάθηση των μαθηματικών νοείται ως αλλαγή του μαθηματικού λόγου του ατόμου (Sfard, 2008) με στόχο το άτομο να γίνει κεντρικός συμμετέχων στον μαθηματικό λόγο (Nachlieli κ.α, 2022). Στη διαδρομή ανάπτυξης του μαθηματικού λόγου του ατόμου, οι τροποποιήσεις στα commognitive χαρακτηριστικά του λόγου του υποδεικνύουν τον εκάστοτε στόχο του ατόμου (μίμηση ή παραγωγή αφηγήσεων) και συνακόλουθα τον τύπο συμμετοχής του στον συγκεκριμένο λόγο, τελετουργικό ή εξερευνητικό (Roberts, 2016).

Διακρίνονται δύο τύποι μάθησης, σε επίπεδο αντικειμένου και σε μετα-επίπεδο. Η μάθηση σε επίπεδο αντικειμένου αναφέρεται στην επέκταση του λεξιλογίου, την κατασκευή νέων ρουτινών και την παραγωγή νέων επικυρωμένων αφηγήσεων. Η μετα-επιπέδου μάθηση αναφέρεται στην τροποποίηση των μετα-κανόνων. Ο νεοεισερχόμενος στον λόγο διαπιστώνει ότι στα ίδια έργα λόγου οι συμμετέχοντες ενεργούν διαφορετικά και προσπαθεί να αντιληφθεί τη νέα αντιμετώπιση. Η μετά-επιπέδου μάθηση συνδέεται άμεσα με την εξέλιξη της συμμετοχής (scaffolding) του ατόμου και για αυτό αποτελεί την κύρια μέριμνα του commognition (Cobb, 2009).

Κατά τη συνάντηση του τρέχοντος λόγου με τον νέο, ο νεοεισερχόμενος βρίσκεται εν μέσω καταστάσεων που διαφορετικοί συνομιλητές ενεργούν σύμφωνα με διαφορετικούς κανόνες και υποστηρίζουν αντικρουόμενες αφηγήσεις. Τις συγκρουσιακές καταστάσεις που εμφανίζονται σε μια «συνάντηση μεταξύ συνομιλητών που χρησιμοποιούν τα ίδια μαθηματικά σημαίνοντα (λέξεις ή γραπτά σύμβολα) με διαφορετικούς τρόπους ή εκτελούν τις ίδιες μαθηματικές εργασίες σύμφωνα με διαφορετικούς κανόνες» (Sfard, 2008, σ. 161) το ΕΘΠ τις ονομάζει επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις (commognitive conflicts). Θεωρούνται αληθινές ευκαιρίες για την εξέλιξη των μετα-κανόνων και την αμοιβαία σταδιακή προσαρμογή των τρόπων λόγου των συνομιλητών (Nardi κ.α., 2014) και η επίλυση τους ενισχύει τη μάθηση. Ωστόσο, η επικοινωνιογνωστική σύγκρουση ορίζεται ως μια κατάσταση που προκύπτει κατά την επικοινωνία με ασύγκριτους λόγους, δηλαδή λόγους που δεν μοιράζονται ένα καλά καθορισμένο σύνολο κανόνων, περιλαμβάνοντας έτσι τη δυνατότητα για ενδοπροσωπικές επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις (Kontorovich, 2021). Δηλαδή, η σύγκρουση είναι πιθανό να συμβεί μέσα στο ίδιο το άτομο, μεταξύ δύο μερικώς αλληλοεπικαλυπτόμενων λόγων στους οποίους το άτομο είναι ενσωματωμένο (Sfard, 2008).

Η ΜΕΛΕΤΗ

Η παρούσα εργασία συνδέεται στενά με ευρύτερη μελέτη του μαθηματικού λόγου μαθητών της Β΄ τάξης του Γυμνασίου για την έννοια της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, αναλύθηκε ο μαθηματικός λόγος τριών μαθητριών της Β΄ Γυμνασίου κατά τη διάρκεια της εμπλοκής τους με μαθηματικά έργα σχετικά με την έννοια της συνάρτησης με κύριο στόχο τη σκιαγράφηση των χαρακτηριστικών του, δηλαδή χρήση λέξεων, οπτικοί διαμεσολαβητές, ρουτίνες και αφηγήσεις. Στα δεδομένα καταγράφηκαν αξιοσημείωτες στιγμιαίες μετακινήσεις στη σκέψη των μαθητριών, στιγμές που αρχικά έδιναν την εντύπωση ότι οι μαθήτριες θα δράσουν μη τελετουργικά αλλά η συνέχεια αποδεικνύονταν διαφορετική. Ωστόσο, η διερεύνηση αυτών των περιστατικών ξέφευγε από τον σκοπό της μελέτης. Η ανάλυσή τους θεωρήθηκε ως επόμενο στάδιο ανάλυσης των ευρύτερων

προφορικών διατυπώσεων των μαθητριών και για αυτό επιλέχθηκε να αποτελέσει το αντικείμενο νέας μελέτης. Για μια τέτοια ανάδειξη, θεωρήθηκε προσφορότερη η μελέτη περίπτωσης μίας μαθήτριας, της Χαράς, της οποίας οι ρουτίνες έτειναν με ελαφρώς μεγαλύτερη συχνότητα προς τις τελετουργίες, αλλά κυρίως, επειδή διέθετε αυθορμητισμό στην προφορική έκφραση των σκέψεών της, γεγονός που ενισχύει τη δυνατότητα ερμηνείας των μετακινήσεων της σκέψης της.

Το ερευνητικό ερώτημα της εργασίας είναι: Κατά την εμπλοκή των μαθητών του Γυμνασίου με μαθηματικά έργα για την έννοια της συνάρτησης, ανιχνεύονται στη σκέψη τους επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις και αν ναι, από ποια χαρακτηριστικά των μαθηματικών έργων προκαλούνται;

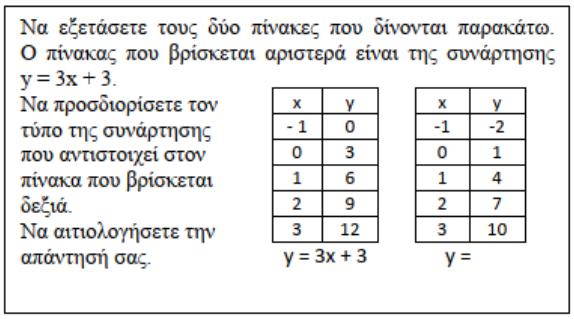
Το ερευνητικό εργαλείο αποτέλεσαν μαθηματικά έργα που αντλήθηκαν από αντίστοιχες έρευνες (Clark, 2014) ή από το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2014) ή σχεδιάστηκαν σύμφωνα με προτάσεις του ΝΠΣ. Επιλέχθηκαν με γνώμονα την απαίτηση αντίληψης της συνάρτησης ως αντικείμενο και ταυτόχρονα να μην παρέχουν όλα εμφανή οικειότητα με τη διδασκαλία στην τάξη της μαθήτριας, όπως συμπλήρωση πίνακα τιμών κατά την κατακόρυφη μετατόπιση μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης. Τα δεδομένα προέκυψαν από την προφορική έκφραση των σκέψεων της μαθήτριας, καθώς προσπαθούσε να αντιμετωπίσει τα έργα αυτά σε εξωσχολική συνάντηση ‘ένας προς έναν’ με τη συγγραφέα. Οι διάλογοι της συνάντησης μαγνητοφωνήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν για να αναλυθούν. Τα δεδομένα εμπλουτίστηκαν από σημειώσεις πεδίου και το μαθησιακό προφίλ της μαθήτριας, το οποίο σχηματίστηκε από τη συγγραφέα υπό τον ρόλο της ως εκπαιδευτικός της μαθήτριας. Συνδυασμός της λογικής των τεχνικών της Ανάλυσης Περιεχομένου και Ανάλυσης Λόγου αξιοποιήθηκαν για την ανάλυση των δεδομένων. Επιπλέον, κατά την ανάλυση των δεδομένων στην ευρύτερη μελέτη πραγματοποιήθηκαν ενδελεχείς συζητήσεις με δεύτερο ερευνητή προκειμένου να μειωθεί ο βαθμός υποκειμενικότητας στην ερμηνεία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για τη σύνδεση με την ευρύτερη μελέτη, αναφέρεται ότι κατά την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα αναγνωριστικά στοιχεία για το είδος των ρουτινών που παρέχει το ΕΘΠ. Για να μην αγνοηθεί το φάσμα δυνατοτήτων μεταξύ των ακραίων περιπτώσεων της τελετουργίας και της εξερεύνησης, γνωστικές διεργασίες της μαθήτριας που έφεραν χαρακτηριστικά εξερευνητικής σκέψης ονομάστηκαν ‘προς εξερεύνηση’. Στα αποτελέσματα για τις ρουτίνες στον μαθηματικό λόγο της Χαράς ανιχνεύθηκαν δεκατρείς ‘τελετουργίες’, έντεκα ρουτίνες ‘προς εξερεύνηση’ και μία ‘εξερεύνηση’.

Για την παρούσα εργασία, η κάθε μία από τις τελετουργίες και τις ‘προς εξερεύνηση’ ρουτίνες, αναλύθηκε στο ευρύτερο πλαίσιο του διαλόγου που διαμείφθηκε, προκειμένου να διαφανεί η μετακίνηση της σκέψης της μαθήτριας. Παρατίθενται δύο χαρακτηριστικά αποσπάσματα, μαζί με τα έργα για τα οποία διαμείφθηκαν, τα οποία επιλέχθηκαν μεταξύ των ομοίων τους επειδή η έκταση των διαλόγων θεωρήθηκε ευνοϊκότερη για την αποτύπωση του συλλογισμού της μαθήτριας. Το καθένα από αυτά συνοδεύεται από τον συλλογισμό της ερμηνείας που δόθηκε.

Απόσπασμα 1


Να εξετάσετε τους δύο πίνακες που δίνονται παρακάτω. Ο πίνακας που βρίσκεται αριστερά είναι της συνάρτησης y = 3x + 3.
Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης που αντιστοιχεί στον πίνακα που βρίσκεται δεξιά.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

x	y
- 1	0
0	3
1	6
2	9
3	12

y = 3x + 3

x	y
-1	-2
0	1
1	4
2	7
3	10

y =

1 Ε: *Ο πρώτος πίνακας τιμών είναι της ψ=3χ+3, μου δίνουν τον δεύτερο πίνακα συμπληρωμένο και με ρωτάνε ποιας συνάρτησης είναι.*

2 Χ: *Εεε … ψ=… αχ … πρέπει να είναι ψ=αχ+β;…*

3 Ε: *Πού εστιάζεις; Πού ακριβώς κοιτάς;*

4 Χ: *Στον δεύτερο πίνακα.*

5 Ε: *Δηλαδή προσπαθείς να μαντέψεις; Πώς από εκείνο το χ πήγαμε σε εκείνο το ψ;*

6 Χ: *Ναι… ψ=χ+3;*

7 Ε: *Δοκίμασέ το. Αν βάλεις όπου χ το -1 βγάζει -2;*

8 Χ: *Ναι, το δοκίμασα, αλλά μετά δεν ταιριάζει με τα υπόλοιπα … Μήπως δεν έχει λύση…*

9 Ε: *Όμως σου έδωσε κι έναν πρώτο πίνακα. Μάλλον τον έδωσε για κάποιο λόγο. Μήπως θέλει να παρατηρήσεις πράγματα;*

10 Χ: *… έχει να κάνει με το συν 2. Η στήλη του ψ στον πρώτο με τη στήλη του ψ στον δεύτερο.*

11 Ε: *Πώς λοιπόν μπορεί να σε βοηθήσει η παρατήρηση που έκανες;*

12 Χ: *… θα αντικαταστήσει το β; Δηλαδή ψ = αχ + β και θα αντικαταστήσει το β και θα γίνει +2; … ψ=-χ+2 … όχι… νομίζω ότι το +2 που βρήκαμε θα είναι η κλίση; Αλλιώς…*

13 Ε: *Τι σημαίνει η κλίση όμως;*

14 Χ: *Η κλίση είναι ο αριθμός που … δεν μπορώ να το εξηγήσω… ε… το αποτέλεσμα, όχι, η απόσταση των αριθμών.*

15 Ε: *Ποιων αριθμών; Των χ ή των ψ;*

16 Χ: *Των ψ.*

17 Ε: *Εδώ από -2 γίνεται 1, από 1 γίνεται 4, μετά 7. Αυτό δεν εννοείς απόσταση;*

18 Χ: *Ναι. Δεν είναι 2. Α, είναι συν 3. Άρα θα γίνει ψ=… μα μήπως είναι το ίδιο με πριν; Ψ=3χ+ … -1; ..όχι. Μήπως +1; Ναι, αυτό είναι! Ναι!*

19 Ε: *Αυτό είναι. Πάντως θα ήθελα να επιστρέψουμε λίγο σε εκείνη την ωραία παρατήρηση που έκανες και δεν την εκμεταλλεύτηκες. Κοιτώντας τους δύο πίνακες είπες ότι είναι +2. Για να πας από τον πρώτο στον δεύτερο ή ανάποδα;*

20 Χ: *Από τον δεύτερο στον πρώτο. Για να πάω από τον πρώτο στον δεύτερο είναι … αφαιρείς 2. Άρα ψ=… 3χ… +1.*

Ενώ η μαθήτρια είναι εξοικειωμένη από τη διδασκαλία με τη συμπλήρωση πίνακα τιμών από δοθέντα τύπο συνάρτησης, τώρα, ούσα αντιμέτωπη με ένα μη οικείο έργο, επιχειρεί να μαντέψει τον τύπο για τον δεύτερο πίνακα τιμών [2]-[8]. Το τμήμα αυτό κατηγοριοποιήθηκε ως τελετουργία. Η προτροπή [9] ανακατευθύνει τη σκέψη της μαθήτριας, με αποτέλεσμα να διακρίνεται εμφανώς πιο αντικειμενοποιημένη σκέψη [10]. Αδυνατώντας να διαχειριστεί τη στιγμιαία τροπή της σκέψης της, η μαθήτρια επιστρέφει σε τελετουργικές ενέργειες [12]-[18] και επιλύει με δοκιμές το πρόβλημα που της τέθηκε. Ωστόσο, η υπενθύμιση της συνομιλήτριας [19] επαναδρομολογεί τη σκέψη της Χαράς σε πιο εξερευνητικό λόγο [20].

Στο σχήμα που σας δίνεται φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y_1 = 2x - 4$ και $y_2 = x^2 - 4x + 5$.
Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

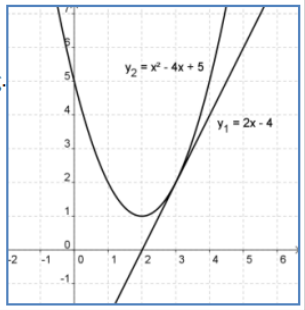
α) Να λύσετε την εξίσωση $2x - 4 = 4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x - 4 = -4$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 4x + 5 = 1$.

δ) Για ποια τιμή του x ισχύει $x^2 - 4x + 5 = 2x - 4$;

ε) Για ποιες τιμές του x ισχύει $2x - 4 > 0$;



Απόσπασμα 2

1 Χ: *Πάλι σκέφτηκα ότι θα έχει να κάνει με το αν θα είναι συνάρτηση ή όχι.*

2 Ε: *Όμως εδώ στην αρχή λέει ότι δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων… Οπότε μάλλον δε θα έχει να κάνει με αυτό.*

3 Χ: *Άρα είναι συνάρτηση.*

4 Ε: *Και μάλιστα εδώ είναι όλα έτοιμα, δίνονται οι τύποι, οι γραφικές παραστάσεις… Θέλουμε τώρα να απαντήσουμε κάποια ερωτήματα. Πάμε στο (α).*

5 Χ: *Να λύσετε την εξίσωση 2χ-4=4. Εξίσωση… ωραία. Εεε… πρέπει να κάνω πράξεις; Πειράζει αν το σκεφτώ με το μυαλό;…εεε … - 4 όχι… πρέπει το χ να είναι ένας αριθμός επί 2 μείον τέσσερα.*

6 Ε: *Και να βγάζει 4.*

7 Χ: *Ναι, και να βγάζει 4. Άρα … το 4.*

8 Ε: *Ωραία. Διάβασε το (β).*

9 Χ: *Να λύσετε την εξίσωση 2χ-4= -4. Το μηδέν.*

10 Ε: *Ωραία. Πήγαινε στο (γ).*

11 Χ: *Να λύσετε την εξίσωση χ στη δευτέρα…*

12 Ε: *Φυσικά μπορείς και πάλι να βάλεις μπρος το μυαλό σου, να δοκιμάσεις διάφορες τιμές και να δεις πότε όλο αυτό θα βγάλει 1. Μήπως να φερθούμε πιο έξυπνα; Αυτά είναι ερωτήματα μιας άσκησης στην οποία μας έδωσε δύο συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις τους. Γιατί άραγε μας τις έδωσε;*

13 Χ: *Αααα… ίδια είναι και η δεύτερη.*

14 Ε: *Τι εννοείς;*

15 Χ: *Η y_2.*

16 Ε: *Άρα τι είναι τελικά σαν να σε ρωτάει;*

17 Χ: *Άρα μπορώ να βρω τα σημεία. Είμαστε στην y_2 και θέλουμε να βρούμε τα σημεία … μμμ … μπερδεύω γιατί είναι καμπύλη.*

18 Ε: *Γιατί όλες οι συναρτήσεις είναι ευθείες;*

19 Χ: *Όχι.*

20 Ε: *Όποια και να ήταν τι θα έκανες για να βρεις την απάντηση;*

21 Χ: Πίνακα τιμών;

22 Ε: *Σε τι θα σου είναι χρήσιμος;*

23 Χ: *Για να κάνω τη γραφική παράσταση… αλλά είναι έτοιμη… Άρα … θέλω όταν το ψ είναι 1… να τραβήξω γραμμές; …όμως … α, είναι 2! Πήγα στον άξονα ψ τράβηξα διακεκομμένη μέχρι να συναντήσω την καμπύλη.*

Από τα δεδομένα της ευρύτερης μελέτης προέκυπτε ότι η Χαρά ήταν ικανοποιητικά εξοικειωμένη με την επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων, την κατασκευή πίνακα τιμών, τη χάραξη γραφικής παράστασης και τη χρήση της στην εύρεση τιμών της συνάρτησης. Σε αυτό το έργο, η διατύπωση περιείχε και τη λέξη εξίσωση. Παρότι η μαθήτρια παρατήρησε την ύπαρξη της γραφικής παράστασης της y_1, αδυνατώντας να την αξιοποιήσει, αρχίζει να τείνει εμφανώς σε τελετουργική δράση [1]. Όταν συνειδητοποιεί την ύπαρξη της λέξης εξίσωση, λειτουργεί σαν να παραγκωνίζει το συγκείμενο του έργου και η σκέψη της κινείται αποκλειστικά στον λόγο των εξισώσεων [5]-[9]. Φτάνοντας στη δευτεροβάθμια εξίσωση, η σιωπή της ακολουθείται από την επισήμανση της συνομιλήτριας ότι υπάρχουν κι άλλα δεδομένα στο έργο [12]. Αυτό φαίνεται ότι επαναφέρει τη σκέψη της και στον λόγο των συναρτήσεων. Στην προσπάθειά της να συνταιριάξει τους δυο λόγους και τους οπτικούς διαμεσολαβητές, διατυπώνει εξερευνητικού χαρακτήρα σκέψη [17].

Ωστόσο, η συγκρουσιακή κατάσταση που βιώνει την επιστρέφει σε τελετουργικές σκέψεις [18]-[21]. Με ερώτηση της συνομιλήτριας [22], φαίνεται ότι η Χαρά ξαναβρίσκει το νήμα της εξερευνητικής σκέψης της και οδηγείται στη λύση [23].

Όμοια αναλύθηκαν τα δεκατρία περιστατικά τελετουργικής δράσης της Χαράς. Στα έντεκα από αυτά ανιχνεύθηκαν ενδείξεις επικοινωνιογνωστικής σύγκρουσης, η οποία φαίνεται να προκλήθηκε από την απαίτηση διαφορετικής χρήσης των αναπαραστάσεων της συνάρτησης, δηλαδή των οπτικών διαμεσολαβητών, ή από την επικάλυψη λόγων διαφορετικών μαθηματικών ενοτήτων που είχε διδαχθεί η μαθήτρια, όπως συναρτήσεις και εξισώσεις.

Σε δύο περιστατικά δεν ανιχνεύθηκαν ενδείξεις cmg σύγκρουσης. Ήταν σε έργα που η μαθήτρια ήταν ικανοποιητικά εξοικειωμένη μέσω της σχολικής διδασκαλίας, αλλά, όπως διαφάνηκε και ερμηνεύθηκε, δεν είχε φτάσει σε ικανοποιητικό επίπεδο κατανόησης. Αναφέρεται για παράδειγμα ότι στο ένα από αυτά η μαθήτρια καλούνταν να αποφανθεί αν τρεις γραφικές παραστάσεις που της δόθηκαν αναπαριστούν συνάρτηση. Η μαθήτρια αμέσως ανακάλεσε τον τρόπο για να αποφανθεί αν μια γραφική παράσταση αναπαριστά συνάρτηση, αλλά στη σκέψη της το ‘πώς’ δεν ήταν συνδεδεμένο με το ‘γιατί’.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Η εργασία στόχευε στην ανάλυση του μαθηματικού λόγου μαθητών Γυμνασίου για την έννοια της συνάρτησης υπό το πρίσμα της αναζήτησης επικοινωνιογνωστικών συγκρούσεων και των χαρακτηριστικών των μαθηματικών έργων που τις προκαλούν. Αξιοσημείωτες ενδείξεις επικοινωνιογνωστικών συγκρούσεων ανιχνεύθηκαν σε εκείνες τις στιγμές που οι νοητικές διεργασίες των μαθητών Γυμνασίου μετακινούνται στο φάσμα των ρουτινών τους. Αναδείχθηκαν δύο χαρακτηριστικά των μαθηματικών έργων που αποτελούν πηγή πρόκλησης cmg συγκρούσεων. Το πρώτο είναι η διαφορετική χρήση των οπτικών διαμεσολαβητών, οι οποίοι για την έννοια της συνάρτησης είναι κυρίως οι αναπαραστάσεις της. Το συμπέρασμα αυτό συγκλίνει με αντίστοιχα των Kontorovich (2021) και Gavilán-Izquierdo (2022). Σε συμφωνία με συμπέρασμα των Thoma & Nardi (2018), το δεύτερο χαρακτηριστικό των μαθηματικών έργων που αναδείχθηκε να επιφέρει cmg συγκρούσεις στους μαθητές είναι η αλληλοεπικάλυψη λόγων διαφορετικών μαθηματικών ενοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, η ύπαρξη λέξεων που παραπέμπουν σε διαφορετική μαθηματική ενότητα, όπως η λέξη εξίσωση στη διατύπωση μαθηματικού έργου για την έννοια της συνάρτησης, φαίνεται να οδηγούν τους μαθητές Γυμνασίου στον λόγο των εξισώσεων και να τους προκαλούν δυσχέρεια στην κίνηση εντός των αλληλοεπικαλυπτόμενων τμημάτων των δύο λόγων. Συνοψίζοντας, η απαίτηση διαφορετικής χρήσης των οπτικών

διαμεσολαβητών και η απαιτούμενη μετάβαση μεταξύ λόγων διαφορετικών μαθηματικών ενοτήτων είναι χαρακτηριστικά των μαθηματικών έργων που προκαλούν επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις στους μαθητές Γυμνασίου κατά τη μάθηση της έννοιας της συνάρτησης.

Από τα αποτελέσματα διαφάνηκε ότι παροτρύνσεις από τον έμπειρο συνομιλητή λειτουργούν ευεργετικά για την επαναδρομολόγηση της σκέψης των μαθητών προς πιο εξερευνητικό λόγο και συνακόλουθα ευεργετικά για τη μάθηση των μαθητών. Τη σημασία της ρητής διαχείρισης των επικοινωνιογνωστικών συγκρούσεων για την προώθηση της μάθησης αναδεικνύουν οι Thoma και Nardi (2018), επισημαίνοντας τη χρησιμότητα της σαφούς και συστηματικής παρουσίασης των διαφορών μεταξύ των λόγων από τον εκπαιδευτικό και την παροχή διευκόλυνσης ευέλικτων κινήσεων μεταξύ αυτών. Επιπρόσθετα, ευεργετική για τη μάθηση των μαθητών και για τις διδακτικές πρακτικές αναδεικνύεται έμμεσα η χρησιμότητα διδακτικής αξιοποίησης καλά μελετημένων έργων, τα οποία φέρνουν στο προσκήνιο επικοινωνιογνωστικές συγκρούσεις και δημιουργούν στους μαθητές την ανάγκη για αλλαγή του μαθηματικού λόγου τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clark, R. (2014). Exploring and describing the growth points of learners as they encounter functions in equation form (Doctoral dissertation). University of the Witwatersrand, Faculty of Science, School of Science Education.

Cobb, P. (2009). Learning as the evolution of discourse: Accounting for cultural, group and individual development. Human Development, 52, 205–210. doi:10.1159/000213893

Gavilán-Izquierdo, J. M., Gallego-Sánchez, I., González, A., & Puertas, M. L. (2022). A New Tool for the Teaching of Graph Theory: Identification of Commognitive Conflicts. Mathematics Teaching Research Journal, 14(2), 186-212.

Jayakody, G. (2015). Commognitive conflicts in the discourse of continuous functions. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene & M. Zandieh (Eds.), Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 611–619).

Kontorovich, I. (2021). Pre-university students square-root from squared things: A commognitive account of apparent conflicts within learners' mathematical discourses. The Journal of Mathematical Behavior, 64, Article 100910.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2018). Routines we live by: From ritual to exploration. Educational Studies in Mathematics, 101(2), 153-176.

Nachlieli, T., & Heyd-Metzuyanim, E. (2022). Commognitive conflicts as a learning mechanism towards explorative pedagogical discourse. Journal of Mathematics Teacher Education, 25(3), 347-369.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. Research in Mathematics Education, 16(2), 182-198.

Roberts, A. (2016). A study of Grade 8 and 9 learner thinking about linear equations, from a commognitive perspective (Doctoral dissertation). University of Cape Town.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York, NY: Cambridge University Press.

Thoma, A., & Nardi, E. (2018). Transition from school to university mathematics: Manifestations of unresolved commognitive conflict in first year students' examination scripts. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4, 161-180.

ΜΟΙΡΑΖΩ: ΜΕΤΑΞΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝ

Λαζαρίδου Ειρήνη[1] & Χρονάκη Άννα[1,2]

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας[1], Malmö University[2]

eilazari@uth.gr, chronaki@uth.gr

Το αναλυτικό πρόγραμμα της προσχολικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα προτείνει τη γνωριμία των παιδιών με διαδικασίες μοιρασιάς εστιάζοντας στην ίση κατανομή αντικειμένων σε ποικίλα πλαίσια. Αυτόνομες μαρξιστικές και αντικαπιταλιστικές προσεγγίσεις των θεωριών των κοινών υποστηρίζουν την στροφή μιας κοινότητας προς την μοιρασιά ως βασικό στοιχείο για το διαμοιρασμό πόρων αλλά κύρια για την ανάπτυξη σχέσεων αλληλεγγύης μεταξύ των μελών της. Στην παρούσα μελέτη διερευνάται πώς η έννοια μοιράζω μπορεί να αποτελεί ταυτόχρονα έναυσμα για την ενεργή εμπλοκή των παιδιών σε δράσεις που αφορούν τα κοινά αλλά και παράγοντα για την δημιουργία συνθηκών δημιουργικής σύμπραξης και κριτικής αμφισβήτησης μιας γενικευμένης χρήσης της έννοιας στην πράξη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα έρευνα επιλέγεται η χρήση του *μοιράζω* έναντι της *διαίρεσης* καθώς το μοιράζω εμπλέκει το μεταξύ ποιων, το τι μένει στον κάθε ληφθέντα, δημιουργώντας μια σύνδεση με το επίπεδο των αλληλεπιδράσεων και σχέσεων, ενώ η διαίρεση εστιάζει περισσότερο στην ίδια τη δράση. Ειδικότερα, το ρήμα *μοιράζω* προέρχεται από το αρχαίο *μοιράω* (μέλλ. μοιράσω) και σημαίνει μοιράζομαι με άλλους ή αλλιώς λαμβάνω το μερίδιό μου, λαμβάνω την τύχη μου. Η έννοια του μοιράζω σημειώνεται ως συνώνυμη με αυτή του *διαιρώ* δηλώνοντας δράσεις όπως: χωρίζω σε μέρη, διανέμω, διακρίνω (Liddell Scott Κωνσταντίδη, 2011, σελ. 178, 580). Η *μοιρασιά* [sharing ή dealing] αποτελεί μία πρωτοαριθμητική έννοια που συνδέεται με την κυκλική διανομή διακριτών και όμοιων αντικειμένων ώστε το αποτέλεσμα να είναι ο επιμερισμός ίδιου αριθμού αντικειμένων σε κάθε κύκλο διανομής που στηρίζεται στην αντιστοίχιση ένα προς ένα (Ζαχάρος, 2007). Έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση δείχνουν ότι τα παιδιά ήδη στις μικρές ηλικίες, επιτυγχάνουν τη συσχέτιση και σύγκριση ποσοτήτων τις οποίες μπορούν να ενώνουν ή να μοιράζουν. Παρόλο που συχνά η μοιρασιά ταυτίζεται με τη διαίρεση, καθώς έχουν δομικές ομοιότητες, αφορούν τη δημιουργία μερισμάτων (πόροι, αντικείμενα προς κοινή χρήση) που εξαρτάται από ένα διαιρέτη (από τον αριθμό όσων θα λάβουν μέρος του πόρου) (Hamamouche, Chermyak & Cordes, 2020), μελέτες έχουν σημειώσει διαφορές. Διακρίνοντας δύο τύπους διαίρεσης, τη *μερική διαίρεση* [partitive division]

όπου το σχήμα δράσης περιλαμβάνει τη μοιρασιά ενός συνόλου σε ίσα υποσύνολα και την *ποσοτική διαίρεση* [quotitive division] όπου ο αριθμός μερισμάτων είναι γνωστός και αναζητείται ο αριθμός των υποσυνόλων σταθερής ποσότητας ο οποίος προσδιορίζεται με βάση την αρχική ποσότητα, παρατηρούμε ότι η μοιρασιά ακολουθεί το πρώτο σχήμα (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985).

Στο πρόγραμμα σπουδών για το νηπιαγωγείο στην Ελλάδα (βλ. Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το Νηπιαγωγείο 2002, 2011 και 2014, στα οποία στηρίχθηκε η υπό μελέτη εμπειρική έρευνα) στον άξονα που αφορά τα μαθηματικά σημειώνονται ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες χειρισμού ποσοτήτων μέσα από προτεινόμενες δράσεις ένωσης και δημιουργίας συλλογών ή συνόλων αντικειμένων, σύγκρισης και μοιρασιάς. Όμως, παρόλο που τα παιδιά καλούνται από μικρή ηλικία να κατακτήσουν την έννοια του αριθμού και των πράξεων σπάνια προβληματοποιούνται για τις διασυνδέσεις αυτών με τη ζωή τους, πόσο μάλλον με κριτικές προσεγγίσεις κοινωνικο-πολιτικών ζητημάτων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μοιρασιά Ι: Στα αναλυτικά προγράμματα της προσχολικής εκπαίδευσης

Στο πρόγραμμα σπουδών του νηπιαγωγείου από το 2002 έως το 2014 χρησιμοποιείται ο όρος μοιρασιά συνδέοντάς το με δράσεις ομαδοποίησης και κατανομής (βλ. Πρόγραμμα Σπουδών 2011, *μοιράζουν αντικείμενα σε δυάδες και τριάδες: οργανώνουν παιχνίδια σε ομάδες και μοιράζουν κάποιο υλικό*, σελ. 168). Το 2011 προστίθεται η χρήση του όρου *διαίρεση* στον τίτλο ενότητας παρόλο που στην παράλληλη ανάλυση χρησιμοποιείται η μοιρασιά (σελ. 168, 2ο Μέρος Μαθησιακές Περιοχές), κάτι που βλέπουμε να επαναλαμβάνεται και στο πρόγραμμα του 2014 (σελ.144). Στον οδηγό ανάπτυξης του 2002 παρόλο που δε τίθενται ξεκάθαροι στόχοι για τη μοιρασιά ή τη διαίρεση στον άξονα «Παιδί και Μαθηματικά: Πρόγραμμα σχεδιασμού και ανάπτυξης δραστηριοτήτων μαθηματικών» (υποστηρικτικό υλικό για τον διδάσκοντα, κεφάλαιο VII, σελ. 592) σημειώνεται *να «εκτελούν» απλές μαθηματικές πράξεις*, επεξηγώντας στο περιεχόμενο/ενδεικτικές διαθεματικές δραστηριότητες το χειρισμό ποσοτήτων, την ένωση ποσοτήτων, τη δημιουργία ποσοτήτων, το να βγάζουν ή να βάζουν μέρος των ποσοτήτων, την σύγκριση και το μοίρασμα ποσοτήτων (σελ. 598).

Στα επόμενα προγράμματα, του 2011 και 2014, η χρήση του μοιράζω εμπλουτίζεται τόσο με συγκεκριμένα παραδείγματα δράσεων στη θεματική ενότητα «Αριθμοί και πράξεις» (σελ. 168) όσο και σε τομείς εκτός μαθηματικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, στο πρόγραμμα σπουδών του 2011 στον τομέα προσωπικής και κοινωνικής ανάπτυξης σχετίζεται με την αυτοεκτίμηση μέσα από διαδικασίες όπου τα παιδιά

λαμβάνουν ενεργό ρόλο στο μοίρασμα των υλικών, αλλά και στον τομέα των φυσικών επιστημών (σελ. 97). Στο πρόγραμμα του 2014 προστίθεται ο *διαμοιρασμός πολιτισμικών στοιχείων* (σελ. 12) Παρατηρούμε πως σταδιακά οι προτεινόμενες διαδικασίες μοιρασιάς εμπλουτίζονται επιστημονικά και κοινωνικά.

Μοιρασιά ΙΙ: Στην έρευνα για τα μαθηματικά στις μικρές ηλικίες

Η μοιρασιά για τη μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί μία έννοια που χαρτογραφεί τη χρήση συγκεκριμένων αναπαραστάσεων από τα μικρά παιδιά και της τελικής απόκτησης κανόνων που υπερβαίνουν αυτές τις αρχικές αναπαραστάσεις και δομούν την πράξη της ποσοτικής διαίρεσης. Παρόλο η μοιρασιά συνόλων αριθμών είναι μια φυσική και σχετικά συχνή δραστηριότητα στην καθημερινή ζωή των παιδιών, καθώς ακόμη και τα παιδιά προσχολικής ηλικίας συχνά μοιράζονται σύνολα και το κάνουν με εμφανή επιτυχία (Desforges & Desforges, 1980. Frydman & Bryant, 1988), ο τρόπος που προσεγγίζεται γίνεται με επίκεντρο την επίσημη διδασκαλία των μαθηματικών και τις σχέσεις μεταξύ διαιρέτη, διαιρετέου και πηλίκου (Correa, Nunes, & Bryant, 1998). Έτσι, ενώ τα παιδιά μικρών ηλικιών επιλύουν αριθμητικά προβλήματα με αντικείμενα μέσα σε πλαίσια ιστορίας πολύ πριν διδαχθούν τις μαθηματικές πράξεις δεν συνειδητοποιούν ότι η επανάληψη των δράσεων τους σε δεδομένα σύνολα θα επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα. Η χρήση αντικειμένων και η οπτική αναπαράσταση των ποσοτήτων φαίνεται πως τα βοηθά σε αυτή τη δυσκολία, όπως και η χρήση απόλυτων ποσοτήτων, διακριτών και μετρήσιμων στοιχείων, ή όταν τα μέρη είναι χωρικά διαχωρισμένα (Ching & Kong, 2022). Τα παιδιά φαίνεται να επαναλαμβάνουν το σχήμα δράσης της μοιρασιάς έως ότου δεν υπάρχει δυνατότητα συνέχισης, χωρίς απαραίτητα να έχουν κατακτήσει την έννοια του αριθμού ως ποσότητα (Davis & Pepper, 1992). Τα μοντέλα σύγκρισης, η αναγνώριση δύο διακριτών συνόλων και η μεταξύ τους διαφορά, αποτελούν επόμενα βήματα στη διαδικασία μοιρασιάς που εμπλέκουν την έννοια του ίσου. Δράσεις δηλαδή που συνδέουν την καθημερινή ζωή των παιδιών με τη χρήση του σχήματος *ένα-για-σένα* και *ένα-για-μένα*, την καταμέτρηση των αντικειμένων με την κατανόηση ότι όσο μεγαλύτερος ο αριθμός του διαιρέτη τόσο μικρότερο το μέρος που θα λάβει κάθε παραλήπτης και αντίστροφα.

Τα παιδιά όμως, ήδη από την ηλικία των πέντε ετών, δε μοιράζουν τυχαία ούτε στηρίζονται μονάχα στην κατανόηση συγκεκριμένων δομών μοιρασιάς (Ching & Kong, 2022). Τα προβλήματα μοιρασιάς στα πλαίσια κοινωνικών σεναρίων και η δράση των παιδιών στην πορεία επίλυσης φαίνεται πώς ενισχύουν την εμπλοκή των παιδιών, καθώς παρατηρείται δυσκολία στην λεκτική επίλυση των ίδιων προβλημάτων (Hamamouche, Chermyak & Cordes, 2020). Άλλα σημεία που επηρεάζουν την επίλυση

προβλημάτων μοιρασιάς είναι το ζήτημα του δικαίου, όπως η βοήθεια σε άλλα πλαίσια (Kenward & Dahl, 2011), η προσπάθεια (Baumard et al., 2012; Jara-Ettinger et al., 2016; Kanngiesser & Warneken, 2012, όπ. αναφ. Ching & Kong, 2022, σελ.229), ή προηγούμενες μοιρασιές (Warneken & Tomasello, 2013, όπ. αναφ. Ching & Kong, 2022, σελ.229). Αντίθετα ο ανταγωνισμός συσχετίζεται με τα μοιραζόμενα υλικά και κατά πόσο αυτά αφορούν τα παιδιά (Davis & Hunting, 1990).

Παρόλο που προσεγγίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης στρέφονται εδώ και χρόνια στη δημιουργία συνδέσεων με την πραγματική ζωή των παιδιών (βλ. ρεαλιστικά μαθηματικά) και σημαντικών ερωτημάτων που αφορούν την κοινωνική δικαιοσύνη, τις έννοιες της δημοκρατίας και της ενεργής συμμετοχής, ζητήματα ισότητας, διαφοράς και ετερότητας, ιεραρχιών, καταπίεσης και βίας, περιβαλλοντικά ζητήματα (βλ. κριτική μαθηματική εκπαίδευση, μαθηματική εκπαίδευση για την κοινωνική δικαιοσύνη) η δράση της μοιρασιάς συνεχίζει να μελετάται ως μία προετοιμασία για πιο αφαιρετικά μαθηματικά προβλήματα. Πώς θα μπορούσε όμως το *μοιράζω* να αποτελέσει αφορμή για ανάγνωση και ανάδειξη περιπτώσεων κοινωνικής αδικίας και αναζήτηση διαφόρων τρόπων διαχείρισής τους;

Μοιρασιά ΙΙΙ: Στο πλαίσιο θεωριών για τα κοινά

Τα κοινά λαμβάνουν διαφορετικούς ορισμούς στο πέρασμά τους τα τελευταία πενήντα περίπου χρόνια, από τα βιο-φυσικά κοινά (νερό, αέρας, διαφορετικά οικοσυστήματα, κ.α.), τα πολιτισμικά (γλώσσα, σύμβολα, τεχνουργήματα, έθιμα, κ.α.), τα κοινωνικά (εκπαίδευση, υγεία, πολιτικά συστήματα, κ.α.) και τα κοινά της γνώσης (ιθαγενής, επιστημονική, τεχνολογική γνώση, κ.α.) όπου είναι σύνηθες να συσχετίζονται συχνά με υλικούς και άυλους πόρους. Όμως κάτι τέτοιο είναι τουλάχιστον παραπλανητικό καθώς αφορούν την ατομική και συλλογική δράση στο πλαίσιο κοινής δραστηριότητας και εκφράζουν σχέσεις (Linebaugh, 2008) μεταξύ ανθρώπων και μεταξύ ανθρώπων και του κόσμου που ανήκουν (Gibson-Graham, Cameron & Healy, 2016). Οι σχέσεις, που αποτελούν κι ένα από τα τρία στοιχεία της τριμερούς δομής των κοινών (1. *κοινοί πόροι* [commons pooled resources)], 2. *κοινότητες* [community] και 3. *σχέσεις* [commoning]), αφορούν τις ίδιες τις δράσεις εντός των οποίων δημιουργούν και διαμοιράζουν τα κοινά.

Το *μοίρασμα* [sharing], που τονίζεται ιδιαίτερα από τους μετα-μαρξιστές και αυτόνομους μαρξιστές θεωρητικούς, παρόλο που αποτελεί κεντρική έννοια δε γίνεται κατανοητή ως μία εύκολη προοπτική, καθώς συνοδεύεται από αγώνες και διαπραγματεύσεις της *κοινότητας των κοινωνών* [commoners], αλλά και σε μια σειρά κανόνων από την ίδια την κοινότητα (Caffentzis, 2008). Συγκεκριμένα οι κοινοί κανόνες και κώδικες στο μοίρασμα ακολουθούν όρια και δικαιώματα σύμφωνα με το πολιτισμικό υπόβαθρο της κοινότητας, το είδος ή το βάρος των σχέσεων σε σχέση με

την κοινότητα. Μελετώντας την πορεία της έννοιας μοιράζω σε διαφορετικές χρονικότητες και πολιτισμούς σημειώνεται η σύνδεση της έννοιας με το εμπόριο, την κοινωνικότητα και την απόλαυση, τη διασκέδαση και τις εμπειρίες. Οι διασταυρώσεις των σχέσεων μπορούν τελικά να οδηγήσουν σε ατομικιστική μοιρασιά, αλλά και σε ποικίλες επιλογές ανάλογα με τις σχέσεις, τις ανάγκες ή τις ικανότητες (Graeber, 2011). Αν ορίσουμε εξ αρχής τα κοινά ως δράσεις συλλογικής εμπειρίας και σχέσεων, η έννοια του μοιράζω αποκτά αντίστοιχη νοηματοδότηση. Λαμβάνοντας υπόψη ότι καταστάσεις που αφορούν τα μαθηματικά και την πραγματική ζωή φαίνεται να παροτρύνουν τα παιδιά στην επίλυσή τους το άνοιγμα των παραπάνω προσεγγίσεων ως προς την έννοια της μοιρασιάς μπορεί να αποτελέσει ένα πλούσιο πεδίο για πειραματισμούς στην τάξη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αντλώντας από την παραπάνω θεωρητική συζήτηση το βασικό ερευνητικό ερώτημα είναι το εξής: *Πώς μια σειρά παιδαγωγικών και διδακτικών πειραματισμών στο νηπιαγωγείο γύρω από την έννοια του μοιράζω μπορούν να συνδράμουν στην κατανόηση και διερεύνηση από τα παιδιά προβληματισμών που αφορούν τα κοινά, προβληματοποιώντας την ίδια την πράξη της μοιρασιάς εν γένει;*

Η μεθοδολογία της σχεδίασης στηρίζεται στην συν-διαμόρφωση των δράσεων μαζί με τα παιδιά. Η μεθοδολογία εφαρμογής εκτείνεται στην *συμμετοχική/συνεργατική εθνογραφία* [participatory/ collaborative ethnography] καθώς βασική μέθοδος συλλογής δεδομένων αποτελεί η επιτόπια παρατήρηση και η ανοιχτού τύπου συζήτηση με τα παιδιά. Στοιχεία υπάρχουν ακόμη από τη μεθοδολογία της *παιδαγωγικής καταγραφής* [pedagogic documentation] εμπλέκοντας ταυτόχρονα τα παιδιά στην ερευνητική διαδικασία. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω συμμετοχικής παρατήρησης, προσωπικών σημειώσεων (σημειώσεις πεδίου και προσωπικό ημερολόγιο ερευνήτριας), φωτογραφικό υλικό, ηχογραφήσεις και βιντεοσκοπήσεις επεισοδίων, τεχνουργήματα των παιδιών. Οι πολλαπλοί μέθοδοι συλλογής βοήθησαν στη δημιουργία αλληλοσυμπληρούμενων δεδομένων και στην εμβάθυνση στην πορεία της διαδικασίας λαμβάνοντας υπόψη όσα συνέβησαν παράλληλα στην τάξη.

Η διάρκεια της έρευνας ήταν δύο μήνες, με την υλοποίηση των παιδαγωγικών πειραματισμών να διαρθρώνεται σε περίπου τρεις ώρες δράσεων μαζί με τα παιδιά καθημερινά σε πραγματικές σχολικές συνθήκες. Η «εμπλεκόμενη» ερευνήτρια αποτελεί την βασική εκπαιδευτικό της υπό μελέτης προσχολικής τάξης. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δημόσιο νηπιαγωγείο μεγάλου αστικού κέντρου στην Ελλάδα, την άνοιξη του 2022. Η ομάδα αποτελούνταν από δεκαέξι παιδιά (4-6 ετών), οκτώ αγόρια και οκτώ κορίτσια, ηλικίας τεσσάρων με

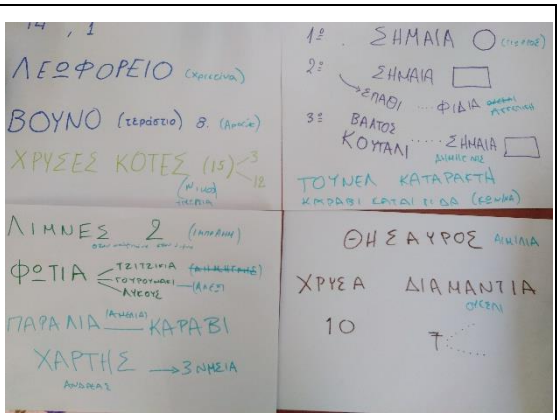
έξι ετών με διαφορετικά κοινωνικο- οικονομικά και οικογενειακά υπόβαθρα.

Η υπό μελέτη σχολική τάξη εξασκούσε από την αρχή του σχολικού έτους την ενεργή συμμετοχή των παιδιών στη λήψη αποφάσεων, στην επιλογή των θεματικών, των δράσεων και την εξέλιξη του καθημερινού προγράμματος. Έτσι, τα παιδιά ενεπλάκησαν ενεργά και στην διαμόρφωσή των επιμέρους δράσεων της ερευνητικής παρέμβασης. Οι δράσεις ωστόσο ακολούθησαν μία βασική δομή που ξεκινούσε από τη γνωριμία με την ιδέα των κοινών και τη συσχέτισή τους με τη μοιρασιά. Επίσης, το σύνολο της παρέμβασης στηρίχθηκε στην εναλλαγή δράσεων μοιρασιάς για τα κοινά της τάξης μας και του πλανήτη (ανθρωπογενή και φυσικά), ενώ χρησιμοποιήθηκαν και φαντασιακά πλαίσια, όπως παιδικά βιβλία, θεατρικό παιχνίδι, δραματοποίηση.

Η ανάλυση των δεδομένων αντλεί από την ερμηνευτική φαινομενολογική και την αφηγηματική ανάλυση. Η αρχική οργάνωση των δεδομένων οδήγησε στις εξής τέσσερις κατηγορίες: 1. υλοποίηση των δράσεων και πώς αυτές προέκυψαν μέσα από την αλληλεπίδραση με τα παιδιά 2. συμμετοχή των παιδιών κατά τη διάρκεια των δράσεων 3. τεχνουργήματα και άλλα έργα των παιδιών 4. η εμπειρία της εμπλεκόμενης ερευνήτριας. Η αναζήτηση των *κρίσιμων γεγονότων* [critical events] αλλά και των *κρίσιμων αλυσίδων γεγονότων* [critical event chains] ανέδειξε επεισόδια μοιρασιάς σε διαφορετικές δράσεις.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Τα παιδιά υλοποιούσαν πρωτόλειες δράσεις μοιρασιάς πριν από την έναρξη της μελέτης. Αντίστοιχα, χρησιμοποιούσαν ήδη το *κοινό*, ή *από κοινού* για *αυτό που μοιραζόμαστε*. Αντίστοιχα, το σύνολο των παιδιών υποστήριζε το μοίρασμα των παγκόσμιων κοινών αγαθών *για όλους* με ίση κατανομή. Παρόλο που ακολουθούσαν άτυπους κανόνες μοιρασιάς, την οποία συνέδεαν συνήθως με την ίση κατανομή, οι κανόνες αυτοί δεν ήταν πάντα κοινοί ή αποδεκτοί από την ομάδα ή διαμορφώνονταν ανάλογα με τις σχέσεις των εμπλεκόμενων παιδιών και τη συνθήκη. Για παράδειγμα, κατά τη δημιουργία δικής μας ιστορίας σε πλαίσια θεατρικού παιχνιδιού τα παιδιά μπορούσαν να αναγνωρίσουν τα κρίσιμα σημεία μοιρασιάς χωρίς αυτό να σημαίνει ότι έβρισκαν τρόπο ή συμφωνούσαν σε αυτόν.

	
Καταγραφή των σημείων μοιρασιάς στην ιστορία από τα παιδιά.	Καταγραφή των σημείων μοιρασιάς από την εκπαιδευτικό μέσα από συζήτηση με τα παιδιά.

Πίνακας 1: Τι μοιραζόμαστε σε ένα φανταστικό ταξίδι;

Οι δυσκολίες της ομάδας γύρω από τη μοιρασιά, που εκφραζόντουσαν και εκτός του πλαισίου της έρευνας, οδήγησαν στη δημιουργία του επιτραπέζιου παιχνιδιού «Μοίρασέ το!» (εμπνευσμένο από το παιχνίδι «Μπορείς να μοιράσεις δίκαια;», βλ. Σκουμπουρδή, 2015), όπου οι παίκτες/τριες δοκίμαζαν το μοίρασμα διαφορετικών υλικών και αντικειμένων της τάξης. Παρόλο που τα παιδιά είχαν δοκιμάσει διαφορετικούς τρόπους επίλυσης της μοιρασιάς ανάλογα με το υλικό (π.χ. τουβλάκια, κουμπιά, τετράγωνα χαρτιά, κυκλικά χαρτιά, κορδέλες) και τον αριθμό των μερών που έπρεπε να κατανέμουν, η επεξήγηση για το πώς μοιράζω τα δυσκόλευε. Σκεφτήκαμε να καταγράψουμε τα βασικά βήματα που χρησιμοποιούσαμε. Οι καταγραφές, συμβολικές και εικονικές, αφορούσαν τρία βασικά βήματα όπως αποτυπώνονται στον Πίνακα 2.

Συμβολική και εικονική αποτύπωση της ένα-προς-ένα κατανομής.	Συμβολική αποτύπωση για την ισότητα στα μέρη που κόβονται.	Εικονική αποτύπωση για το υπόλοιπο της διαίρεσης το οποίο φαίνεται στην άκρη.

Πίνακας 2: Καταγραφές των παιδιών για τα βήματα μοιρασιάς

Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού τα παιδιά μοίραζαν ένα υλικό σε αριθμό παιδιών που άλλαζε. Χρειαζόταν να κατανοήσουν αν το υλικό μπορούσε να μοιραστεί ως έχει ή έπρεπε να κοπεί σε μέρη. Ο Στέφαν αναλαμβάνει να μοιράσει μια λωρίδα χαρτί σε τέσσερα παιδιά, ξεκινάει να το κόβει προσπαθώντας τα μέρη να είναι περίπου ίσα στο μέγεθος. Περισσεύει ένα μέρος της λωρίδας. Η παιδαγωγός τον ρωτάει τι θα κάνει με το υπόλοιπο. Η επιλογή του βήματος «να το αφήσω στην άκρη» ήταν η πρώτη σκέψη του, με παρότρυνση της παιδαγωγού επιλέγει να το κόψει κι αυτό σε τέσσερα κομμάτια, από τα οποία προκύπτει νέο-μικρό υπόλοιπο του χαρτιού που κόβεται εκ νέου. Ο Στέφαν βρήκε την πιο γρήγορη λύση, ξεκίνησε απευθείας να ετοιμάζει τέσσερα μέρη χωρίς να λάβει υπόψη το μέγεθος των μερών για να χρησιμοποιήσει όλη την ποσότητα.

Σε ένα όμως αντίστοιχο παράδειγμα που χρειαζόταν ο επιμερισμός του ίδιου υλικού τα παιδιά ακολούθησαν μία διαφορετική επίλυση. Πιο αναλυτικά, στο πλαίσιο θεατρικού παιχνιδιού στηριζόμενο στο τραγούδι «Επτά ποτάμια», το κάθε παιδί χρειάστηκε να μοιράσει μία χρωματιστή κορδέλα-ποτάμι για όλα τα παιδιά της τάξης ώστε το κάθε ένα να δημιουργήσει τα δικά του χρωματιστά ποτάμια. Στο τέλος κάθε παιδί χρειαζόταν να καταλήξει με 7 κομμάτια κορδέλας, ένα από κάθε χρώμα. Η μοιρασιά γινόταν ταυτόχρονα από όλα τα παιδιά. Τα παιδιά ξεκίνησαν να κόβουν τις κορδέλες σε μεγάλα μέρη, με αποτέλεσμα τα τελευταία μέρη να είναι μικρά. Παρόλο που οι κορδέλες είχαν άνισα μεγέθη μεταξύ τους η δράση κρίθηκε ως επιτυχής στην συλλογή και των επτά χρωμάτων και στην μοιρασιά κορδέλας-ποταμιών από όλα τα παιδιά. Διευρύνοντας το ίδιο ζήτημα συζητήσαμε αν και πώς μοιράζονται τα αληθινά ποτάμια. Τα παιδιά ανέφεραν την ανάγκη των ανθρώπων για νερό (Κατερίνα: *να πάρουμε ποτήρια για να πίνουμε*), τη χρήση του ως μέσο διασκέδασης (Στέφαν: *να κολυμπάμε και να παίζουμε*), την πρόσβαση σε καθαρό νερό στο σπίτι μας (Άνταμ: *να βάλουμε σωλήνες για το σπίτι μας*). Τα παιδιά εξήγησαν ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν ανάγκη πρόσβασης σε νερό, ενώ ορισμένα συνέδεσαν την έλλειψη πρόσβασης με τη φτώχεια. Παρόλο την τη δυσκολία κατανόησης του μεγέθους του παγκόσμιου όγκου νερού και του πληθυσμού των ανθρώπων τα παιδιά ήταν σε θέση να κρίνουν την άνιση κατανομή μέσα από τη χρήση γραφημάτων ως άδικη.

Αντίστοιχα επεξεργαστήκαμε το ζήτημα της στέγασης, του επισιτισμού, της εκπαίδευσης και διαχείρισης του φυσικού περιβάλλοντος. Οι ποικίλες οπτικές αναπαραστάσεις (εικόνες, γραφήματα, αφίσες) και η παράλληλη εξάσκηση με υλικά που γνώριζαν βοήθησαν τα παιδιά να συμμετέχουν σε μία συζήτηση που συνήθως τα αποκλείει λόγω ηλικίας: Πώς μοιράζονται τα κοινά αγαθά του πλανήτη; Η συμμετοχή αυτή δεν ήταν μόνο μέσω προφορικού λόγου και απαντήσεων σε ερωτήσεις αλλά κυρίως μέσα από ενσώματες εμπειρίες και ενεργητικές δράσεις δημιουργίας και σύμπραξης

(ζωγραφιές, κατασκευές, ποιήματα, ιδέες, ερωτήματα, ιστορίες, εφημερίδα της τάξης, podcast, αφίσες).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όπως αναφέρεται και στην εισαγωγή η μοιρασιά ως έννοια επικεντρώνεται στις σχέσεις και στην αλληλεπίδραση των συμμετεχόντων/ουσών. Αντλώντας από το επίσημο πρόγραμμα σπουδών του νηπιαγωγείου, έρευνες μαθηματικής εκπαίδευσης και τις θεωρίες των κοινών εντοπίσαμε διαφορετικές εστιάσεις και ανοίγματα του μοιράζω. Στην εμπειρική μελέτη παρατηρήθηκε πως η ομάδα των παιδιών προσχολικής ηλικίας μέσα από την εμπλοκή σε δράσεις μοιρασιάς άρχισε να δημιουργεί μια σειρά κανόνων και αναπαραστάσεων αυτών, οι οποίοι μετακινούνται σύμφωνα με τα πλαίσια και τις συνθήκες (όπως αναφέρθηκε, αυστηροί κανόνες στο επιτραπέζιο παιχνίδι, πιο ανοιχτοί σε μια ομαδική κατασκευή, κανόνες δικαίου σε παγκόσμια πλαίσια). Όπως σημειώνεται κι από άλλες μελέτες, το υλικό που μοιράζεται (Davis & Hunting, 1990) και οι σχέσεις μεταξύ των ατόμων (Ching & Kong, 2022) φάνηκε να επηρεάζουν τη διαδικασία της μοιρασιάς. Η μετάβαση των δράσεων στο πλαίσιο των κοινών μας βοήθησε να αναγάγουμε τα ερωτήματα της τάξης που αφορούν την μοιρασιά σε μεγαλύτερη κλίμακα δημιουργώντας ένα πέρασμα από το τοπικό στο παγκόσμιο. Ξεκινώντας από ερωτήματα όπως τι μοιράζεται και πώς γίνεται η ίση μοιρασιά φτάσαμε σε προβληματισμούς για το ποιες/οι δεν συμμετέχουν στη μοιρασιά; και τι σημαίνει μια άνιση μοιρασιά των κοινών στην πραγματική ζωή; Τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν μπορούν να προσφέρουν μία εικόνα για το πώς θα μπορούσε η μαθηματική εκπαίδευση να εμπλέξει από τις μικρές ηλικίες τα παιδιά σε δράσεις μοιρασιάς επεκτείνοντας και αξιοποιώντας τις παιδαγωγικές διαδικασίες για μια πολύπλευρα κατανόηση της πράξης της διαίρεσης εν γένει.

Ευχαριστίες: Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε την κ. Δ. Δεσλή για την ανταπόκριση σχετικά με βιβλιογραφία στο θέμα μοιρασιά στις μικρές ηλικίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Caffentzis, G. (2008). Autonomous Universities and the Making of the Knowledge Commons. *The Commoner*. Ανακτήθηκε στις 21/03/2016 από http://www.commoner.org.uk/?p=66.

Ching, B., & Kong, K. (2022). Development of children's informal understanding of division through sharing: Contributions of reasoning demands and problem situations. *Early Childhood Research Quaterly, 59*, 228–242. doi: 10.1016/j.ecresq.2021.12.013

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology, 90*(2), 321-329. doi: 10.1037/0022-0663.90.2.321

Davis, G., & Hunting, R., P. (1990). Spontaneous partitioning: pre-schoolers and discrete items. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 367-374.

Davis, G., & Pepper, K. (1992). Mathematical problem solving by pre-school children. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 397-415.

Desforges, A., & Desforges, C. (1980). Number-based strategies of sharing in young children. *Educational Studies, 6*, 97-109.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 3-17.

Frydman, O., & Bryant, P. E. (1988). Sharing and understanding of the number equivalence by young children. *Cognitive Development, 3*, 323-329.

Gibson, K., Cameron, J., & Healy, S. (2016). Commoning as a postcapitalist politics. In A., Amin & P., Howell (Eds.) *Releasing the Commons: Rethinking the Futures of the Commons*. Routledge.

Graeber, D. (2011). *Debt: The First 5,000 years*. Melville House.

Hamamouche, K., Chernyak, N., & Cordes, S. (2020). Sharing scenarios facilitate division performance in preschoolers. *Cognitive Development, 56*, Article 100954. doi: 10.1016/j.cogdev.2020.100954

Kenward, B., & Dahl, M. (2011). Preschoolers distribute scarce resources according to the moral valence of recipients' previous actions. *Developmental Psychology, 47*(4), 1054–1064. doi: 10.1037/a0023869

Liddel, H., G., Scott, R., & Κωνσταντινίδης, Α. (2011). *Μέγα Λεξικόν της Ελληνικής Γλώσσας*. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών Εργαστήριο Υπολογιστικών Μαθηματικών, Μαθηματικού Λογισμικού και Ψηφιακής Τυπογραφίας. Ανακτήθηκε από https://myria.math.aegean.gr/lds/web/ στις 27-12-2023

Linebaugh, P. (2008). *The Magna Carta Manifesto. Liberties and Commons for All*. University of California Press.

Ζαχάρος, Κ. (2007). *Οι Μαθηματικές Έννοιες στην Προσχολική Εκπαίδευση και η Διδασκαλία τους*. Μεταίχμιο.

Σκουμπουρδή, Χ. (2015). Το παιχνίδι στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-860

Η ΑΝΑΔΥΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ Β' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ

Σαπλαμίδου Σταυρούλα, Σακονίδης Χαράλαμπος

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

ssaplami@eled.duth.gr , xsakonid@eled.duth.gr

Παρόλο που ο άτυπος συμπερασματολογικός συλλογισμός έχει διερευνηθεί εκτεταμένα στο πεδίο της Στατιστικής Εκπαίδευσης, η κοινωνική ανάδυση της αβεβαιότητας ως πτυχής αυτού φαίνεται πως δεν έχει λάβει την απαιτούμενη προσοχή. Η παρούσα εργασία εστιάζει στις συλλογιστικές πτυχές μαθητών Β' Δημοτικού που σχετίζονται με την αβεβαιότητα και στην κοινωνική αξιολόγηση αυτών, στο πλαίσιο των συζητήσεων εντός ομάδας. Προκειμένου να φωτιστούν κοινωνικά χαρακτηριστικά του συλλογισμού, αξιοποιείται ο «συναγωγισμός» ως θεωρία υποβάθρου. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν την αλληλεπίδραση γνωστικών και κοινωνικοπολιτισμικών πτυχών συλλογισμού, καθώς οι μαθητές μετακινούνται από την απόλυτη βεβαιότητα στην αβεβαιότητα για τα συμπεράσματά τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η ενασχόληση με τη στατιστική συμπερασματολογία φαίνεται πως μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές, ως πολίτες του αύριο, να αναπτύξουν δεξιότητες που αφορούν την κριτική διαχείριση των πληροφοριών και τον σχηματισμό και την αξιολόγηση συμπερασμάτων (Wild, Pfannkuch, Regan & Horton, 2011). Προκειμένου να ασκηθούν στις δεξιότητες αυτές μαθητές σχολικής ηλικίας, ο όρος *άτυπη συμπερασματολογία* χρησιμοποιείται τόσο για το αποτέλεσμα όσο και για τη συλλογιστική διαδικασία δημιουργίας ή ελέγχου πιθανοτικών γενικεύσεων από δεδομένα (Makar & Rubin, 2009), απουσία τυπικών στατιστικών μεθόδων.

Η συλλογιστική διαδικασία που οδηγεί στην εκφορά μιας άτυπης συμπερασματολογίας καλείται *άτυπος συμπερασματολογικός συλλογισμός* (Α.Σ.Σ.). Ο Zieffler κ.ά. (2008) ορίζουν τον Α.Σ.Σ. ως τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την άτυπη στατιστική τους γνώση για να σχηματίσουν συμπεράσματα που αφορούν άγνωστους πληθυσμούς. Θεωρούν πως περιλαμβάνει: α) διατύπωση κρίσεων που αφορούν πληθυσμούς βάσει δεδομένων που χρησιμοποιούνται ως ενδείξεις, β) εντοπισμό και ενσωμάτωση άτυπης στατιστικής γνώσης στο βαθμό που αυτή είναι διαθέσιμη και γ) αναφορές στην έννοια της αβεβαιότητας. Οι Ben-Zvi, Gil & Apel (2007) διευρύνουν τον ανωτέρω ορισμό συνδυάζοντας γνωστικές πτυχές συλλογισμού, κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές που υπάρχουν σε μια σχολική τάξη, αλλά και ατομικές

πρακτικές. Η προσέγγισή τους αναπτύχθηκε βάσει μιας μακροχρόνιας έρευνας με μαθητές Δ'-ΣΤ' Δημοτικού, οι οποίοι έρχονταν σε επαφή με στατιστικές έννοιες μέσω διερευνητικής εργασίας στην τάξη. Οι γνωστικές πτυχές συλλογισμού περιλαμβάνουν θεμελιώδη στοιχεία μιας συμπερασματολογίας, όπως ανίχνευση μοτίβων, συνειδητοποίηση της μεταβλητότητας και της αναγκαιότητας των δεδομένων. Οι κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές αναφέρονται σε άρρητους κανόνες που χαρακτηρίζουν συγκεκριμένες καταστάσεις, το περιβάλλον εντός του οποίου οι μαθητές δρουν αλλά και τις προσωπικές τους εμπειρίες. Σαφέστατα, δεν αναμένεται μαθητές πρώτων τάξεων Δημοτικού να αναφερθούν ρητά σε γνωστικές πτυχές του Α.Σ.Σ. καθώς σχηματίζουν γενικεύσεις. Έτσι, υιοθετείται η προσέγγιση της Makar (2018), η οποία κάνει λόγο για στατιστικές δομές-πλαίσια. Αυτές γίνονται αντιληπτές ως απεικόνιση ανάμεσα σε ένα πλέγμα στατιστικών δομών και οντότητες πλαισίου που τις αντικαθιστούν. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορεί να μην αναφερθούν ρητά στην έννοια του δείγματος, αλλά μια οντότητα από το πλαίσιο, όπως ένα κείμενο που είναι γραμμένο σε οποιοδήποτε βιβλίο, μπορεί να αντικαταστήσει για εκείνους την έννοια του δείγματος.

Χρήσιμη κατά τη διερεύνηση του Α.Σ.Σ. μπορεί να φανεί η θεωρία του Συναγωγισμού, καθώς ταιριάζει με τη στατιστική συμπερασματολογία (Nilsson, Schindler & Bakker, 2018) και διερευνά δυναμικές ανάμεσα σε συλλογιστικές πτυχές. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, ο συλλογισμός εξωτερικεύεται μέσω δεσμεύσεων, δηλαδή ισχυρισμών με προτασιακή μορφή, τους οποίους τα άτομα θεωρούν αληθείς. Ο συλλογισμός αποτελεί μια *κοινωνική διαδικασία εξωτερικευμένων γλωσσικών κινήσεων*, η οποία περιγράφεται με όρους *κοινωνικής αξιολόγησης* (Noorloos κ.ά., 2017). Αρχικά, αποτελεί κοινωνική διαδικασία, διότι οι μαθητές δοκιμάζουν τις δεσμεύσεις τους αλληλεπιδρώντας με άλλα άτομα (συμμαθητές, δασκάλους). Έτσι, επεκτείνουν ή τροποποιούν την κατανόηση των λέξεων που χρησιμοποιούν, διότι το κύρος των ισχυρισμών τους αναπτύσσεται στο πλαίσιο του πώς αυτοί αξιολογούνται από άλλους. Η ύπαρξη «γλωσσικών κινήσεων» στο συλλογισμό παραπέμπει στο *παιχνίδι ζήτησης και παροχής λόγων*. Ο συλλογισμός των μαθητών εξωτερικεύεται μέσω των ισχυρισμών που ανταλλάσουν στο παιχνίδι αυτό, ενώ οι ισχυρισμοί που εκφέρουν αποτελούν κινήσεις στο παιχνίδι, διότι αποσκοπούν στην απόδοση εγκυρότητας στα λεγόμενά τους. Η κοινωνική αξιολόγηση επέρχεται μέσω της διαδικασίας του *δεοντολογικού scorekeeping*, όπου οι μαθητές αξιολογούν αμοιβαία ο ένας τον άλλον για τη λογική, την ορθότητα και την καταλληλότητα των δεσμεύσεών τους (Derry, 2017).

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην πτυχή του Α.Σ.Σ. που σχετίζεται με την αβεβαιότητα για γενικεύσεις βάσει ενός γνωστού δείγματος. Στη περίπτωση των μαθητών πρώτων τάξεων Δημοτικού η αβεβαιότητα δεν

ποσοτικοποιείται μέσω τυπικών διαδικασιών. Χρησιμοποιείται η «γλώσσα των πιθανοτήτων», δηλαδή οποιαδήποτε γλώσσα κατάλληλη για το επίπεδο των μαθητών, η οποία δηλώνει αβεβαιότητα για μια υπόθεση ή ένα συμπέρασμα (Makar & Rubin 2009). Παρόλο που η υιοθέτηση πιθανοτικού λεξιλογίου αποτελεί σημαντική υποστήριξη για τον αναπτυσσόμενο στατιστικό συλλογισμό, τέτοιου είδους ζητήματα δεν έχουν ερευνηθεί επαρκώς (Makar & Rubin, 2014). Όσες έρευνες αφορούν μαθητές Δημοτικού συγκλίνουν στο ότι οι μεγαλύτεροι σε ηλικία μαθητές (Δ'-ΣΤ' Δημοτικού) παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευχέρεια στη χρήση του πιθανοτικού λεξιλογίου από τους μικρότερους (Kazak & Leavy, 2018). Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, θεωρούμε σημαντική τη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο το πιθανοτικό λεξιλόγιο αναδύεται κοινωνικά σε μια σχολική τάξη. Υιοθετούμε μια κοινωνική οπτική καθώς ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του ’80, ο συλλογισμός, άρα και πτυχές αυτού, εκλαμβάνονται ως προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας και όχι ως αντικείμενο στον νου του μαθητή.

Η ΜΕΛΕΤΗ

Η παρούσα εργασία διερευνά τα εξής ερωτήματα: Ποιες γνωστικές και κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές του Α.Σ.Σ. οδηγούν στην συνειδητοποίηση της αβεβαιότητας; Με ποιο τρόπο οι πτυχές αυτές αξιολογούνται κοινωνικά εντός του παιχνιδιού ζήτησης και παροχής λόγων;

Κατά τον μεθοδολογικό σχεδιασμό ακολουθήθηκαν πρακτικές που ταιριάζουν σε ένα πείραμα σχεδιασμού. Αυτό γιατί ένα μαθηματικό περιεχόμενο (η άτυπη συμπερασματολογία), μελετάται εντός μιας «οικολογίας μάθησης» (Cobb κ.ά., 2003), δηλαδή εντός ενός αλληλεπιδραστικού συστήματος που περιλαμβάνει πολλά στοιχεία γνωστικού και κοινωνικοπολιτισμικού χαρακτήρα. Η έρευνα στην οποία εντάσσεται η μελέτη που παρουσιάζεται εδώ πραγματοποιήθηκε το τρίτο τρίμηνο του σχολικού έτους 2022-2023. Οι συμμετέχοντες ήταν 20 μαθητές δευτέρας τάξης ενός Δημοτικού σχολείου της περιφέρειας Αττικής. Η ερευνήτρια ήταν και η εκπαιδευτικός της τάξης και κατά την διάρκεια των συζητήσεων των μαθητών υιοθέτησε τον ρόλο του ενεργού παρατηρητή. Τα δεδομένα της παρούσας εργασίας αφορούν στις συζητήσεις μιας ομάδας πέντε μαθητών, που επιλέχθηκε εξαιτίας της ευχέρειας που παρουσίασαν να επικοινωνούν προφορικά τις ιδέες τους.

Το αντικείμενο της συζήτησης των μαθητών ήταν ένα ερώτημα εμπνευσμένο από το παραμύθι «Η Μάρθα μιλάει» της Susan Meaddaugh. Η Μάρθα είναι ένας σκύλος που διαθέτει ανθρώπινη ομιλία, από τότε που έφαγε μια σούπα με τα γράμματα της αλφαβήτου. Όμως, η εταιρεία που φτιάχνει το φαγητό της αναγκάζεται να μειώσει τα γράμματα της σούπας για οικονομικούς λόγους. Ζητείται, λοιπόν, από τους μαθητές να αποφασίσουν, ως διευθυντές της εταιρείας, ποια γράμματα θα αποκλείσουν ώστε να κάνουν οικονομία, χωρίς όμως να επηρεαστεί δραματικά η ομιλία της Μάρθας. Οι μαθητές επεξεργάστηκαν το συγκεκριμένο ερώτημα σε διαφορετικές φάσεις, απαντώντας: χωρίς διαθέσιμα δεδομένα (Φ.1.) , μετά από την σύγκριση δειγματικών

κατανομών μεγέθους 10 γραμμάτων (Φ.2.), αφού εξέτασαν δειγματικές κατανομές μεγέθους δείγματος 50 (Φ.3.). Σε κάθε φάση οι μαθητές λάμβαναν την απόφασή τους και έπειτα σχολίαζαν τη βεβαιότητά τους γι' αυτή. Μελετώντας το πώς αναπτύσσεται ο Α.Σ.Σ. μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στη βιβλιογραφία, αναγνωρίσαμε στρατηγικές που ευνόησαν την ανάπτυξη αυτή, προκειμένου να ενσωματωθούν στον ερευνητικό σχεδιασμό. Συγκεκριμένα, υιοθετήθηκαν αρχές από τη διερευνητική μάθηση και τα ασθενώς δομημένα προβλήματα (Wells & Makar, 2015). Από τη στατιστική εκπαίδευση ενσωματώθηκαν πρακτικές όπως τα αυξανόμενα δείγματα (Ben-Zvi κ.ά., 2012), η σύγκριση κατανομών (Bakker & Gravemeijer, 2004) και η διατύπωση εικασιών (ερωτήσεις «τι θα γινόταν αν…»)(Ben-Zvi κ.ά., 2012). Τέλος, ο λόγος και η οργάνωση της τάξης στηρίχθηκαν σε ρουτίνες που ευνοούν τη διαπραγμάτευση στατιστικών νοημάτων (Garfield & Ben-Zvi, 2009) αλλά και την εργασία σε ομάδες.

Ανάλυση δεδομένων

Προκειμένου να εντοπίσουμε τις πτυχές του Α.Σ.Σ. υιοθετήσαμε τεχνικές θεματικής ανάλυσης. Απομαγνητοφωνήσαμε τις συζητήσεις των ομάδων και εντοπίσαμε αποσπάσματα που απευθύνονται σε κάθε ερευνητικό ερώτημα. Έπειτα ανιχνεύσαμε τις δεσμεύσεις (Noorloos κ.ά., 2017) των μαθητών στα συγκεκριμένα αποσπάσματα. Έχοντας προσδιορίσει τις δεσμεύσεις, προχωρήσαμε στην κωδικοποίηση των γνωστικών και κοινωνικοπολιτισμικών πτυχών του Α.Σ.Σ. με οδηγό το πλαίσιο των Ben-Zvi κ.ά. (2007). Δεδομένου πως ενδιαφερόμαστε για τον συλλογισμό μαθητών Β' Δημοτικού, οι οποίοι σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα δεν έχουν αποκτήσει στατιστικές εμπειρίες, αναμορφώσαμε το πλαίσιο των Ben-Zvi κ.ά. (2007) βάσει των δεδομένων που συλλέχθηκαν, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1. Σε κάθε πτυχή συλλογισμού αντιστοιχείται ένας κωδικός που εμφανίζεται σε αγκύλες.

Γνωστικές πτυχές	Κοινωνικο-πολιτισμικές πτυχές
Συλλογισμός για την κατανομή Μερική [Γ1] ή ολική [Γ2] ανίχνευση μοτίβου, μεμονωμένες περιπτώσεις [Γ3] ή ολική αντίληψη των δεδομένων [Γ3]	*Πλαίσιο διδασκαλίας* Σχεδιασμός μαθησιακού περιβάλλοντος [Κ1], σκοπός και χρησιμότητα [Κ2]
Συλλογισμός για το σήμα Μέτρα κεντρικής τάσης [Γ5]	*Κουλτούρα και ιστορία* προσωπικές πεποιθήσεις [Κ3], προηγούμενη γνώση σχετικά με το πλαίσιο του προβλήματος [Κ4], τα μαθηματικά [Κ5] ή γνώση γενικού περιεχομένου [Κ6]

Συλλογισμός για τη δειγματοληψία

σπουδαιότητα και ρόλος μεγέθους δείγματος [Γ6], δειγματική μεταβλητότητα [Γ7], μεροληψία-αντιπροσωπευτικότητα [Γ8].

Συλλογισμός για τη μεταβλητότητα

Αναγνώριση και ερμηνεία μεταβλητότητας στα δεδομένα [Γ9]

Συλλογισμός για την αβεβαιότητα Αναγνώριση και συνειδητοποίηση αβεβαιότητας συμπερασμάτων/προβλέψεων [Γ10]

Ντετερμινιστική οπτική Βεβαιότητα συμπερασμάτων / προβλέψεων [Γ12]

Κοινωνικο-στατιστικές νόρμες

συζήτησης στην τάξη [Κ7], σχολικής ζωής [Κ8] μαθηματικές [Κ9] ή αναδυόμενες στατιστικές νόρμες [Κ10]

Κριτική διάθεση Σκεπτικισμός απέναντι στα συμπεράσματα και τις συναγωγές [Κ11].

Πίνακας 1. Κωδικοποίηση πτυχών Α.Σ.Σ.

Για την ανάλυση της κοινωνικής αξιολόγησης των δεσμεύσεων εφαρμόσαμε ανοιχτή κωδικοποίηση στον απομαγνητοφωνημένο διάλογο, χρησιμοποιώντας ως μονάδα ανάλυσης το «δεοντολογικό scorekeeping». Αναζητήσαμε δεσμεύσεις που επικύρωναν, ασκούσαν κριτική ή απέρριπταν άλλες δεσμεύσεις που εκφράστηκαν σε μια συγκεκριμένη συζήτηση. Αν ένας μαθητής εξέφραζε έναν ισχυρισμό και ένας άλλος μαθητής δεχόταν αυτόν τον ισχυρισμό ρητά ή σχημάτιζε έναν ισχυρισμό στη βάση του προηγούμενου, υποθέταμε πως οι πτυχές συλλογισμού που εμπεριέχονταν στους ισχυρισμούς συνδέονταν επιβεβαιωτικά. Αντίθετα, αν κάποιος μαθητής εξέφραζε έναν ισχυρισμό και ένας άλλος τον απέκλειε ρητά ή εξέφραζε έναν ισχυρισμό προκειμένου να ασκήσει κριτική στον πρώτο, θεωρήσαμε πως οι ισχυρισμοί συνδέονται απορριπτικά.

Αποτελέσματα

Παραθέτουμε τη συζήτηση των μαθητών σχετικά με την βεβαιότητα για τις αποφάσεις τους. Σε αγκύλες εμφανίζονται οι πτυχές του Α.Σ.Σ. όπως κωδικοποιούνται στον Πίνακα 1 και έπειτα η σειρά του διαλόγου στην οποία εντοπίζονται. Αφού αποφάσισαν ποια γράμματα θα απέκλειαν χωρίς διαθέσιμα δεδομένα, οι μαθητές ανέπτυξαν τον παρακάτω διάλογο.

1 Γρηγόρης: Εγώ πιστεύω πως τα γράμματά μας είναι τα σωστά.

2 Φρόσω: Ναι είμαστε απόλυτα σίγουροι, είμαστε 100% σίγουροι, γιατί το συζητήσαμε κάθε γράμμα από 20 φορές!

Οι μαθητές εμφανίζονται βέβαιοι για την απόφασή τους σε αυτή τη φάση, στηριζόμενοι κυρίως στην κοινωνικοπολιτισμική πτυχή των νορμών συζήτησης εντός ομάδας [Γ12, Κ7], [2]. Θεωρούν πως αφού η απόφαση ήταν προϊόν εκτεταμένης συζήτησης εντός ομάδας, αυτή θα είναι απαραίτητα σωστή. Αφού αποφάσισαν ποια γράμματα θα απέκλειαν βάσει των κατανομών μεγέθους δείγματος 10 γραμμάτων, οι μαθητές συζήτησαν τα ακόλουθα:

3 Φρόσω: Είμαι 90 % σίγουρη πως είναι τα σωστά. Εμείς τα βγάλαμε γιατί είδαμε στα διαγράμματα πως δεν εμφανίζονται πολλές φορές. Τώρα σε άλλα κείμενα δεν ξέρουμε πόσες φορές θα εμφανιζόταν, αναλόγως τα κείμενα βασικά.

4 Γρηγόρης: Εγώ πιστεύω πως τα ίδια θα ήταν λίγες φορές, γιατί αυτά που είπαμε δεν τα χρησιμοποιούμε πολύ. Είμαι 100% σίγουρος. Δε θα άλλαζα απόφαση για τα 50 γράμματα.

5 Φοίβος: Ναι, ούτε εγώ... τόση ώρα τα συζητούσαμε, αυτά είναι τα σωστά, τα σκεφτήκαμε όλα...

6 Αριάδνη: Κι εγώ συμφωνώ...

7 Φρόσω: Ναι δε λέω πως όσα είπαμε είναι λάθος... αλλά δεν ξέρω αν αυτά είναι γενικά... Αφού το λέτε όλοι όμως ας πούμε 100%.

Σχετικά με το ποσοστό βεβαιότητας για την απόφαση, η Φρόσω δεν εμφανίζεται απολύτως σίγουρη λόγω πτυχών που σχετίζονται με τη δειγματική μεταβλητότητα [Γ10, Γ7], [3]. Ο Γρηγόρης διαφωνεί με αυτή τη δέσμευση, και δηλώνει απολύτως σίγουρος για τις πεποιθήσεις του [Γ12, Κ3], [4]. Ο Φοίβος συμφωνεί και συμπληρώνει πως η απόφαση αποτελεί προϊόν συζήτησης, επομένως είναι απαραίτητα ορθή [Γ12, Κ7], [5], ενώ σύμφωνη με την βεβαιότητα βρίσκεται και η Αριάδνη [6]. Η Φρόσω, ακολουθώντας τις νόρμες συζήτησης περί σεβασμού της γνώμης της πλειοψηφίας, υποχωρεί και η ομάδα δηλώνει απολύτως βέβαιη για τις αποφάσεις της [Γ12, Κ7], [7].

Οι μαθητές εξετάζοντας τις κατανομές 50 γραμμάτων συζήτησαν τα εξής:

8 Φρόσω : Στα 100 γράμματα θα αλλάζαμε την απόφασή μας, γιατί... επειδή θα μετρήσει πιο πολλά γράμματα, θα εμφανιστούνε πιο πολλές φορές τα γράμματα, γι αυτό θα αλλάζαμε τη γνώμη μας... Δηλαδή κάποια γράμματα που εδώ δεν έχουν εμφανιστεί καθόλου, μπορεί στα 100 γράμματα να εμφανιζόντουσαν και 11 φορές. Γι αυτό είμαι 90 % σίγουρη πως αυτά είναι τα σωστά.

9 Γρηγόρης: Κι εγώ συμφωνώ, θα είναι άλλα γράμματα περισσότερες φορές και άλλα λιγότερες... όπως αλλάξανε και σήμερα.

10 Γιάννος: Ναι κι εγώ θα την άλλαζα γιατί είχα βγάλει πολύ λάθος γράμματα την προηγούμενη φορά.

11 Φοίβος: Κι εγώ το ίδιο.. Ήταν λάθος τα γράμματά μου την προηγούμενη φορά και μπορεί να είναι λάθος κι αυτά που είπαμε σήμερα.

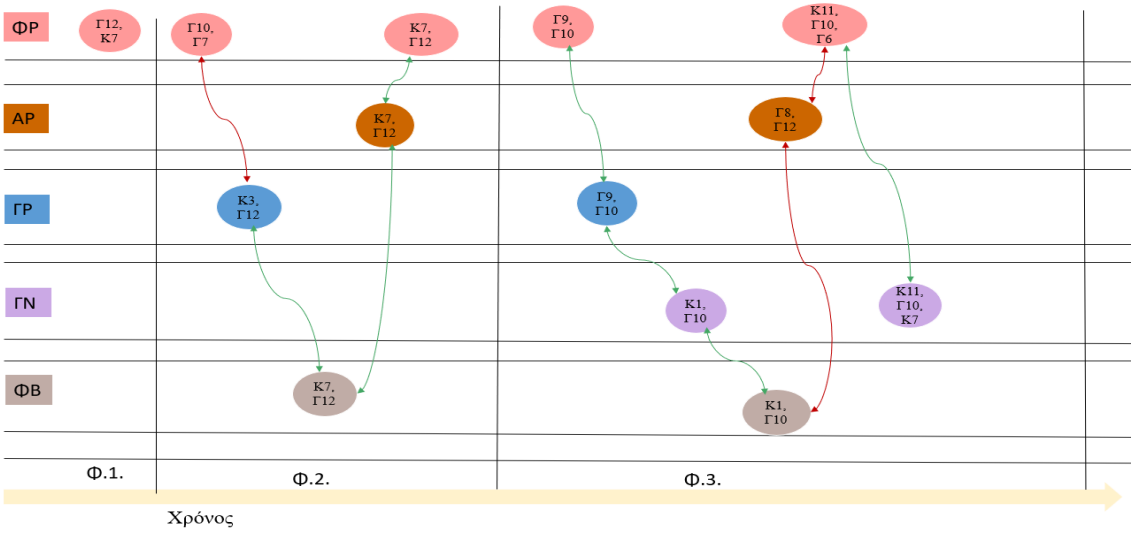
12 Αριάδνη: Εγώ δε θα άλλαζα την απόφασή μας στα 100 γράμματα, γιατί πιστεύω ότι αυτά τα γράμματα είναι καλά, γιατί δεν εμφανίζονται τόσες πολλές φορές εδώ. Δηλαδή και στα 100 γράμματα το δ το ζ και το ω θα είναι μέχρι το 1, το 2 και το 3, όχι παραπάνω.

13 Φρόσω: Ναι αλλά μετράμε 100 γράμματα, πολλά γράμματα.. δεν ξέρω αν θα μείνουν τόσο λίγες οι φορές.

14 Γιάννος: Κι εγώ λέω να πούμε πως θα την αλλάζαμε...Αριάδνη, το λέμε και οι περισσότεροι.

15 Αριάδνη: Ναι, έχεις δίκιο... ας πούμε ότι θα την αλλάζαμε.

Στο σημείο αυτό, η Φρόσω προτείνει την υιοθέτηση της αβεβαιότητας λόγω της μεταβλητότητας στα δεδομένα [Γ10, Γ9], [8]. Η δέσμευση αυτή γίνεται δεκτή από τον Γρηγόρη, ο οποίος αναφέρεται επίσης στη μεταβλητότητα [Γ10, Γ9],[9], ενώ ο Γιάννος και ο Φοίβος φαίνονται αβέβαιοι λόγω του σχεδιασμού του μαθησιακού περιβάλλοντος, μέσα από τον οποίο απορρίφθηκαν οι προηγούμενες αποφάσεις τους [Γ10, Κ1], [10,11]. Μόνο η Αριάδνη εμφανίζεται βέβαιη εστιάζοντας στην αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος [Γ12, Γ8], [12]. Η Φρόσω ασκεί κριτική στη δέσμευση αυτή, βασιζόμενη στην αύξηση του μεγέθους δείγματος που θα προκαλέσει αλλαγές στις συχνότητες των γραμμάτων [Γ10, Γ6], [13], ενώ ο Φοίβος συμπληρώνει επικαλούμενος τις νόρμες συζήτησης και συγκεκριμένα την πλειοψηφία της ομάδας που υποστηρίζει την αβεβαιότητα [Γ10, Κ7], [14]. Έτσι, η Αριάδνη αποδέχεται την κριτική [Γ10, Κ7], [15].



Σχήμα 1. Αλληλεπιδράσεις και κοινωνική αξιολόγηση δεσμεύσεων

Έχοντας περιγράψει τις γνωστικές και κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές που ενσωμάτωσαν στον συλλογισμό τους οι μαθητές, στο Σχήμα 1 συνοψίζουμε σχηματικά την κοινωνική αξιολόγηση των πτυχών αυτών.Οι συντομογραφίες στον κάθετο άξονα αντιπροσωπεύουν το όνομα κάθε μαθητή, ενώ οι συλλογιστικές πτυχές που κάθε μαθητής χρησιμοποίησε ακολουθούν τους κωδικούς που αναγράφονται κατά την παρουσίαση του πλαισίου των Ben-Zvi κ.ά. (2007). Το πράσινο βέλος δηλώνει επιβεβαιωτική σύνδεση ανάμεσα στις πτυχές συλλογισμού, ενώ το κόκκινο βέλος απορριπτική.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία επιχειρήσαμε να προσδιορίσουμε τις πτυχές του Α.Σ.Σ. που σχετίζονται με την ανάδυση της αβεβαιότητας και εξετάσαμε την κοινωνική αξιολόγηση αυτών στα πλαίσια ομαδικών συζητήσεων. Τα ευρήματά μας φαίνεται να υποστηρίζουν την θέση των Schindler & Seidouvy (2019) για την ύπαρξη συνέργειας ανάμεσα σε στατιστικό περιεχόμενο και κοινωνικές πρακτικές, καθώς οι μαθητές επιχειρούν να συνάγουν συμπεράσματα από δείγματα, αφού τόσο γνωστικές όσο και κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές συνδέθηκαν με την υιοθέτηση της αβεβαιότητας.

Η υιοθέτηση της αβεβαιότητας για τα εκφερόμενα συμπεράσματα δεν ήταν αυτονόητη για τους μαθητές της έρευνάς μας, καθώς στις αρχικές φάσεις της δραστηριότητας εμφανίζονταν απολύτως βέβαιοι για τις αποφάσεις τους. Η τάση αυτή έχει επισημανθεί και από συναφείς έρευνες σε μαθητές Δημοτικού σχολείου (Ben-Zvi κ.ά., 2012). Η γνωστική πτυχή της βεβαιότητας για τα συναχθέντα συμπεράσματα συνδέθηκε επιβεβαιωτικά με την κοινωνικοπολιτισμική πτυχή των νορμών συζήτησης εντός ομάδας αλλά και με τη γνωστική πτυχή της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος. Η υιοθέτηση αυτής της ντετερμινιστικής οπτικής ενδεχομένως να οφείλεται σε απουσία συνειδητοποίησης της μεταβλητότητας και της αβεβαιότητας (Makar & Rubin, 2014). Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές που ενδέχεται να ωθούν τους μαθητές σε έναν ντετερμινιστικό τρόπο σκέψης και αυτές είναι οι νόρμες συζήτησης εντός ομάδας. Η πτυχή του διδακτικού σχεδιασμού και συγκεκριμένα η στρατηγική των αυξανόμενων δειγμάτων φάνηκε να συνδέεται επιβεβαιωτικά με την γνωστική πτυχή της αβεβαιότητας, καθώς οι μαθητές είχαν την τάση να μειώνουν τη βεβαιότητά τους βλέποντας τη διάψευση των αποφάσεών τους από δείγματα μεγαλύτερου μεγέθους, τάση που έχει επίσης παρατηρηθεί στο πεδίο (Ben-Zvi κ.ά., 2012). Οι γνωστικές πτυχές της μεταβλητότητας και της δειγματικής μεταβλητότητας συνδέθηκαν επίσης επιβεβαιωτικά με την πτυχή της αβεβαιότητας για τα συναχθέντα συμπεράσματα. Έχει επισημανθεί πως η σύνδεση των συγκεκριμένων πτυχών κρίνεται ζωτικής σημασίας για να οδηγηθούν οι μαθητές στην εκφορά μιας στατιστικής συμπερασματολογίας (Arnold κ.ά., 2018).

Η βεβαιότητα συνδέθηκε απορριπτικά με τη μεταβλητότητα, όπως αναμενόταν, αλλά και με κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές που αναφέρονται στο διδακτικό σχεδιασμό. Ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός πως οι νόρμες συζήτησης συνδέθηκαν απορριπτικά αλλά και επιβεβαιωτικά με την

βεβαιότητα, σε διαφορετικές φάσεις της δραστηριότητας. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο ότι οι μαθητές επιστράτευαν τις νόρμες συζήτησης σε περιπτώσεις που ήθελαν να καταλήξουν σε ένα συμβιβασμό για την τελική τους απόφαση. Οι γνωστικές πτυχές της μεταβλητότητας αξιοποιήθηκαν και στα πλαίσια του δεοντολογικού scorekeeping, προκειμένου να ασκηθεί κριτική σε προτάσεις που αντλούσαν απόλυτη βεβαιότητα από τα δεδομένα του διαθέσιμου δείγματος. Βέβαια, αξίζει να επισημάνουμε πως η διερεύνηση του Α.Σ.Σ. σε μία συγκεκριμένη σχολική τάξη, εντός μιας δεδομένης κουλτούρας και με μαθητές που διαθέτουν υψηλές δεξιότητες επικοινωνίας με θέτει περιορισμούς στη γενικευσιμότητα των ευρημάτων μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arnold, P., Confrey, J., Jones, R. S., Lee, H. S., & Pfannkuch, M. (2018). Statistics learning trajectories. In *International handbook of research in statistics education* (pp. 295-326). Springer, Cham.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. (2004). Learning to reason about distribution. In *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Springer Netherlands.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM*, *44*(7), 913-925.

Ben-Zvi, D., Gil, E., & Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Young students reason and argue about some wider universe. In D. Pratt & J. Ainley (Eds.), *Reasoning about informal inferential statistical reasoning: A collection of current research studies. Proceedings of the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-5).* Warwick, UK: University of Warwick.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9-13.

Derry, J. (2017). An introduction to Inferentialism in mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, *29*, 403-418.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77.

Kazak, S., & Leavy, A. M. (2018). *Emergent reasoning about uncertainty in primary school children with a focus on subjective probability.* Statistics in early childhood and primary education (pp. 37–54). Springer.

Makar, K. (2018). Theorising Links Between Context and Structure to Introduce Powerful Statistical Ideas in the Early Years. In: Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., Paparistodemou, E. (eds) *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development.* Springer, Singapore

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.

Makar, K., & Rubin, A. (2014). Informal statistical inference revisited. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014)* (Vol. 9, pp. 1–6). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Nilsson, P., Schindler, M., & Bakker, A. (2018). The nature and use of theories in statistics education. *International handbook of research in statistics education*, 359-386.

Noorloos, R., Taylor, S. D., Bakker, A., & Derry, J. (2017). Inferentialism as an alternative to socioconstructivism in mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, *29*(4), 437-453.

Schindler, M., & Seidouvy, A. (2019). Informal inferential reasoning and the social: understanding students' informal inferences through an inferentialist epistemology. In *Topics and trends in current statistics education research* (pp. 153-171).

Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M., & Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, *174*(2), 247–295.

Wells, J., & Makar, K. (2015). Inferring to a model: Using inquiry-based argumentation to challenge young children's expectations of equally likely outcomes. *Reasoning about uncertainty: Learning and teaching informal inferential reasoning*, 1-28.

Zieffler, A., Garfield, J., DelMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40–58.

“ΚΑΠΟΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕ ΞΕΠΕΡΝΟΥΝ”: ΑΦΗΓΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΓΙΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΔΙΚΑΙΟΣΥΝΗΣ

Παπαγεωργίου Ναυσικά-Ελένη

nafsika.papag@gmail.com

Οι πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν αποτελέσει αντικείμενο έντονου ερευνητικού ενδιαφέροντος τα τελευταία χρόνια, καθώς σχετίζονται με την αναπαραγωγή και όξυνση των κοινωνικών ανισοτήτων. Για μια προσπάθεια εκδημοκρατισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι απαραίτητη η ενεργός συμβολή του εκπαιδευτικού. Το εμπειρικό μέρος της εργασίας αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης που εστιάζει στις πεποιθήσεις ενός εκπαιδευτικού μαθηματικών της Β’ βάθμιας σχετικά με τις πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης και πραγματοποιείται μια προσπάθεια σύνδεσής τους με την αφηγηματική διάσταση της ταυτότητας του.

Λέξεις Κλειδιά: μαθηματική εκπαίδευση, ισχύς μαθηματικών, σχέσεις εξουσίας, κοινωνική δικαιοσύνη, ταυτότητα, αφηγηματική προσέγγιση.

Η μαθηματική εκπαίδευση ως θεσμοφύλακας της κοινωνικής διαστρωμάτωσης

Τα μαθηματικά συνιστούν ένα βασικό συστατικό της σύγχρονης κοινωνίας, παίζοντας κεντρικό ρόλο σε πληθώρα κοινωνικών και επιστημονικών δραστηριοτήτων και αποτελούν πηγή συμβολικής ισχύος, πράγμα που κωδικοποιείται ως διαπλαστική ισχύς (formative power) των μαθηματικών (Skovsmose, 2012; Skovsmose & Valero, 2008). Κατ’ επέκταση, η πρόσβαση στη μαθηματική εκπαίδευση και ο μαθηματικός εγγραμματισμός αποτελούν βασική προϋπόθεση για την ενεργό συμμετοχή ενός ανθρώπου στην κοινωνία των πολιτών και σχετίζονται με ζητήματα κοινωνικής δικαιοσύνης (Ernest, 2002). Η σύνδεση των μαθηματικών με τις κοινωνικές διακρίσεις μπορεί να συμπυκνωθεί σε δύο παράδοξα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Το πρώτο είναι αυτό της συμπερίληψης (paradox of inclusion) και αναφέρεται στο γεγονός ότι το τρέχον μοντέλο παγκοσμιοποίησης της κοινωνικής οργάνωσης αφενός αφορά στην καθολική πρόσβαση στα Μαθηματικά και αφετέρου συμβάλλει στον αποκλεισμό συγκεκριμένων κοινωνικών ομάδων ~~μερίδων~~. Το δεύτερο περιγράφεται ως το παράδοξο του ενεργού πολίτη (paradox of citizenship) και σχετίζεται με την προσπάθεια της

Μαθηματικής Εκπαίδευσης για καλλιέργεια ενεργών πολιτών που θα συμμετέχουν κριτικά στην κοινωνία, ενώ ταυτόχρονα προωθεί στους μαθητές χαρακτηριστικά που διασφαλίζουν την προσαρμογή και τον συμβιβασμό τους στην επικρατούσα κοινωνική τάξη πραγμάτων (Skovsmose & Valero, 2008).

Τα παραπάνω παράδοξα κωδικοποιούνται στο ρόλο «θεσμοφύλακα» (gatekeeper) της κοινωνικής διαστρωμάτωσης της μαθηματικής εκπαίδευσης και υποδηλώνουν την πολιτική της διάσταση. Πιο συγκεκριμένα, η Μαθηματική Εκπαίδευση λειτουργεί ως φίλτρο επιλογής για την ανώτατη εκπαίδευση και τα υψηλότερα αμειβόμενα επαγγέλματα, αλλά ταυτόχρονα καθορίζει και τους όρους πρόσβασης στην κοινωνία των πολιτών (Jurdak et. al., 2016; Noyes, 2007). Στην ίδια κατευθυνση βρίσκεται ένας μηχανισμός ιδεολογικής αναπλαισίωσης των σχολικών μαθηματικών, ο μύθος της αναφοράς (myth of reference), σύμφωνα με τον οποίο διαχωρίζεται σαφώς το «μαθηματικό» από το «μη μαθηματικό», σε αντιστοιχία με την κυρίαρχη κοινωνική αντίθεση διανόησης και χειρωναξίας που θέτει τα μαθηματικά ως ανώτερο διανοητικό εγχείρημα και ενισχύει τον ακαδημαϊκό ελιτισμό σε σχέση με αυτά (Ernest et. al. 2016; Dowling, 2002).

Εστιάζοντας στην τάξη των μαθηματικών, παρατηρείται αναντιστοιχία ανάμεσα στο αυστηρά πλαισιωμένο περιεχόμενο παρουσίασης των μαθηματικών και τη συνεχώς εξελισσόμενη μαθηματική επιστήμη.

Η διδακτική ύλη ξεδιπλώνεται γύρω από την επανάληψη βασικών εννοιών, τυποποιημένων κανόνων και τον αυτοματισμό τεχνικών ασκήσεων όπου ο συλλογισμός, η επίλυση προβλημάτων και οι διαδικασίες εφαρμογής της τεχνολογίας απέχουν. Τα μαθηματικά παρουσιάζονται ασύνδετα με την καθημερινή ζωή και τους προβληματισμούς της καθώς αποφεύγονται απαραίτητα στοιχεία για την ανάπτυξη δημοκρατικής κουλτούρας, όπως η επεξεργασία κοινωνικών προβλημάτων που ενισχύουν την κριτική σκέψη, τον ουσιαστικό διάλογο, τη διαπραγμάτευση και τελικά την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στην εκπαιδευτική δραστηριότητα (Maass et. al., 2019; Ernest et. al. 2016; Noyes, 2007). Επομένως, κυριαρχεί μια περίπτωση διδασκαλίας («Classroom absolutism») που επικυρώνει τον υπάρχον συσχετισμό δυνάμεων διασφαλίζοντας ότι οι ικανότητες κατανέμονται με τέτοιο τρόπο ώστε να συντηρείται η κοινωνική και οικονομική δομή του συστήματος και τελικά η αναπαραγωγή ~~όξυνση και η διαιώνιση~~ των κοινωνικών ανισοτήτων (Σκορδούλης & Κατσιαμπούρα, 2020; Skovsmose, 2012; Aguilar & Zavaleta, 2012).

Μαθηματική Εκπαίδευση και Κοινωνική Δικαιοσύνη

Η υψηλή και αυξανόμενη κοινωνική ανισότητα αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά παγκόσμια ζητήματα και είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ~~την~~ υπάρχουσα κοινωνική δομή (Jurdak et al. 2016). Η κοινωνικοπολιτική στροφή στην μαθηματική εκπαίδευση (Gutiérrez, 2013) σηματοδοτεί την εστίαση των ερευνητικών φακών σε ζητήματα που άπτονται της πολιτικής, της εξουσίας και της ταυτότητας, καθώς η «ισχύς» των μαθηματικών έχει διπλό χαρακτήρα. Αφενός αποκτά τη μορφή της «συμβολικής βίας» που αναπαράγει, οξύνει και διαιωνίζει τις κοινωνικές ανισότητες. Αφετέρου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί προς όφελος των πολιτών και να αποτελέσει πηγή σημαντικών κοινωνικών βημάτων (Skovsmose, 2012). Η προσέγγιση της ισονομίας με την έννοια της δικαιοσύνης μέσα από τη Μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί κρίσιμη διαδικασία εκδημοκρατισμού της (Aguilar & Zavaleta, 2012).

Για κάθε προσπάθεια για κοινωνική αλλαγή είναι αναγκαία η κατανόηση των ειδικών όρων ενσωμάτωσης των επιμέρους παραγόντων στο σύστημα (Ernest et. al. 2016). Εν προκειμένω, τα παρακάτω σημεία αναδεικνύονται ως κομβικά για τη δική μας ανάλυση. Πρώτον, η ενδυνάμωση (empowerment) την οποία επιτρέπει η γνώση και κατανόηση των μαθηματικών μπορεί να αξιοποιηθεί για την κριτική ανάλυση του κόσμου και έτσι να αποτελέσει σημαντική πηγή για την κριτική και συμμετοχή στην κοινωνία των πολιτών (Gutiérrez, 2013; Noyes, 2007; Ernest, 2002;). Δεύτερον, η δημιουργία πολιτών που ενεργούν με την αίσθηση δικαιοσύνης λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες διαφόρων κοινωνικών ομάδων πρέπει να αποτελεί βασικό στόχο για τη συγκρότηση των δημοκρατικών κοινωνιών (Maass et al., 2019).

Στην παραπάνω κατεύθυνση είναι θεμελιώδης η παρουσία και η δημιουργική δράση των εκπαιδευτικών. Αρχικά με την επίγνωση του ρόλου που επιτελούν τα μαθηματικά και συνολικότερα οι επιστήμες στην κοινωνική και τεχνολογική δραστηριότητα και έπειτα με τη δημιουργία συνθηκών διαβουλευτικής αλληλεπίδρασης και ενός ευρύτερου κλίματος διαλόγου και διαπραγμάτευσης στη διδακτική πράξη, με σκοπό την ανάπτυξη των δημοκρατικών αξιών της ανεκτικότητας και της συνεργασίας (Σκορδούλης & Κατσιαμπούρα, 2020; Aguilar & Zavaleta, 2012). Κάνοντας αυτή την παραδοχή η παρούσα μελέτη έχει σκοπό την διερεύνηση των συνδέσεων της κοινωνικής δικαιοσύνης και της μαθηματικής εκπαίδευσης υπό την οπτική το εκπαιδευτικού.

Σε αυτό το σημείο, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας της ταυτότητας, ενός «εργαλείου για τη μελέτη της ανθρώπινης συμπεριφοράς» με ιδιαίτερο το υποκειμενικό στοιχείο, λόγω της αόριστης φύσης της. Εστιάζοντας στην κοινωνική της θεώρηση, η ταυτότητα περιγράφεται ως αυτοαντίληψη των ατόμων για τη θέση τους και τον κοινωνικό τους ρόλο, καθώς και το σύνολο της δραστηριότητάς τους. Συχνά η αντίληψη αυτή περιλαμβάνει και αντιφατικά στοιχεία που αποτυπώνονται στη δράση και τις αφηγήσεις των ατόμων (Darragh, 2016; Gutiérrez, 2013; Sfard & Prusak, 2005). Κατά τους Sfard και Prusak (2005) η ταυτότητα αποτελεί τον «χαμένο κρίκο» στη σύνθετη διαλεκτική σχέση μεταξύ της μάθησης και του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου, καθώς επιτρέπει την εστίαση στο επίπεδο των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των υποκειμένων ή την από-εστίαση για την εξέταση του ευρύτερου κοινωνικο-πολιτικού πλαισίου σαν ρυθμιζόμενος φακός.

Βασικοί παράγοντες διαμόρφωσης της επαγγελματικής ταυτότητας των εκπαιδευτικών αποτελούν το κοινωνικοπολιτισμικό και μορφωτικό τους υπόβαθρο, τα ερεθίσματα, τα κίνητρα, οι προσωπικοί τους στόχοι, τα βιώματα στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, καθώς και η επιρροή των "σημαντικών άλλων". Φυσικά, τα χαρακτηριστικά και ο βαθμός επιρροής κάθε παράγοντα στην ταυτότητα του εκπαιδευτικού βασίζεται την προσωπική και επαγγελματική συγκρότηση του κάθε ενός ξεχωριστά (Flores & Day, 2006). Συνολικά, η επαγγελματική ταυτότητα των εκπαιδευτικών ενσωματώνει διαφορετικά, εν πολλοίς αντικρουόμενα στοιχεία, καθώς οι δυσκολίες της σχολικής πραγματικότητας, όπως η έλλειψη υποστήριξης και καθοδήγησης και η δυσκολία στη διαχείριση της τάξης, διαμορφώνουν ιδιοσυγκρασιακές στρατηγικές αντιμετώπισης της πολυπλοκότητας της διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, η επαγγελματική ταυτότητα του εκπαιδευτικού (ανα)διαμορφώνεται, καθώς αντιλαμβάνεται όλο και περισσότερες πλευρές του ρόλου του στη σχολική πραγματικότητα, ακόμα και αν ο ρόλος αυτός αντικρούει ορισμένες απόψεις του (Jurdak et. al., 2016). Έτσι, σταδιακά οι εκπαιδευτικοί τείνουν να υιοθετούν μια «στρατηγική συμμόρφωσης»: υποχωρούν από ορισμένες πεποιθήσεις και αξίες τους και ταυτόχρονα, συμμορφώνονται και υιοθετούν τους κανόνες και τις αξίες του σχολείου. Ο μετασχηματισμός που περιγράφεται καταλήγει συχνά και στην υποχώρηση του αρχικού τους ενθουσιασμού (Flores & Day, 2006).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η διερεύνηση των πολιτικών διαστάσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει πολιτικό και ιδεολογικό χαρακτήρα, στο βαθμό που σχετίζεται με

βασικές αρχές ισονομίας (Jurdak et. al., 2016). Αναγνωρίζοντας τη σημασία του εκπαιδευτικού για μια πιο δημοκρατική εκπαίδευση, η παρούσα μελέτη εστιάζει στην αφηγηματική διάσταση της ταυτότητας του (narrative identity) με σκοπό την αποτύπωση των συνδέσεων της κοινωνικής δικαιοσύνης και της μαθηματικής εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης διαμορφώνονται ως εξής:

1. Πώς τοποθετείται ο εκπαιδευτικός σχετικά με τις πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης.
2. Πώς συνδέονται οι τοποθετήσεις του με την αφηγηματική διάσταση της ταυτότητας του ως δασκάλου των μαθηματικών.

Η αφηγηματική προσέγγιση που επιλέχθηκε για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας επιτρέπει τη μελέτη της διαλεκτικής σχέσης των αφηγήσεων των υποκειμένων με τις πρακτικές τους και του τρόπου που αυτές ρέουν μεταξύ του κοινωνικού και του ατομικού επιπέδου (Darragh,2016; Sfard & Prusak, 2005), με την ανάλυση των δεδομένων να οδηγεί σε συμπεράσματα με έντονο το υποκειμενικό στοιχείο. Στη μελέτη συμμετέχει ένας εκπαιδευτικός 60 ετών με υψηλό μορφωτικό επίπεδο ο οποίος εργάζεται τα τελευταία 21 χρόνια σε δημόσιο Γυμνάσιο σε μικρή κωμόπολη σε ακριτική περιοχή της επικράτειας, από όπου κατάγεται.

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε δύο αφηγηματικές ημιδομημένες διαδικτυακές συνεντεύξεις διάρκειας μιας ώρας με ερωτήσεις ανοικτού τύπου σχετικά με δύο θέματα: (1) τα βιογραφικά στοιχεία και ~~η~~ την ανάπτυξη της σχέσης τους με τα μαθηματικά (2) ~~οι~~ τις κοινωνικοπολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Σε σχέση με την ανάλυση των δεδομένων υιοθετήθηκε η επαγωγική μέθοδος θεματικής ανάλυσης, καθώς πραγματοποιήθηκε μερική αναφορά θεμάτων και στη συνέχεια γενική καταγραφή τους με βάση τα βιβλιογραφικά δεδομένα (Τσιώλης 2018). Εξετάστηκαν τα βασικά μοτίβα που επαναλαμβάνονταν ως προς την ποιότητα και τη σημασία τους για την έρευνα, τα οποία τελικά και οργανώθηκαν σε θέματα βάσει των θεωρητικών κατηγοριών, ιδεών και πορισμάτων που αντλήθηκαν κατά την βιβλιογραφική επισκόπηση.

Πίνακας 1. Η Κωδικοποίηση των απαντήσεων.

Κεντρικά Θέματα	**Υποενότητες**
Θ1: Ταυτότητα ως δάσκαλος των μαθηματικών	Κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο ως μαθητής (Flores & Day, 2006)
	Κίνητρα - επιδιώξεις - νοηματοδοτήσεις (Flores & Day, 2006)
	Σημαντικοί άλλοι και κρίσιμα συμβάντα (Flores & Day, 2006)

(τι κάνει και νοηματοδοτήσεις)	Επαγγελματική ανάπτυξη (Flores & Day, 2006) Τρόπος δράσης ως δάσκαλος των μαθηματικών (Jurdak et. al., 2016; Skovsmose, 2012)
Θ2: Τοποθετήσεις σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση	Τα μαθηματικά ως επιστήμη (Skovsmose, 2012; Skovsmose & Valero, 2008) Μαθηματική εκπαίδευση ως θεσμοφύλακας (Jurdak et. al., 2016) Μαθηματική εκπαίδευση για τη συμμετοχή στην κοινωνία των πολιτών (Maass et. al., 2019) Τα σχολικά μαθηματικά (Ernest et. al. 2016; Noyes, 2007) Ο ρόλος του εκπαιδευτικού (Aguilar & Zavaleta, 2012)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ταυτότητα ως δάσκαλος των μαθηματικών

Ο εκπαιδευτικός προέρχεται από εργατική οικογένεια με χαμηλό οικονομικό και τυπικό μορφωτικό υπόβαθρο που όμως έδινε αξία στη μόρφωση και ιδιαίτερα στα μαθηματικά. Η υπερηφάνεια της οικογένειας του μοιάζει να είχε ιδιαίτερη σημασία για εκείνον.

> «Η γιαγιά μου ας πούμε όταν πλέον τα κατάφερνα καλά στο λύκειο, έλεγε "καλέ αυτός μαθηματικός θα γίνει!" Το άκουγα εγώ και μου άρεσε αυτό…όσο περισσότερο διάβαζα, τόσο πιο πολύ έπαιρνα καλύτερους βαθμούς και τόσο πιο πολύ έκανε περήφανη και την οικογένεια»

Μοιάζει να πρωταγωνιστεί ο μεγάλος θαυμασμός και η ταύτιση με τον πατέρα του, καθώς μιλά με θαυμασμό για τη μαθηματική του σκέψη.

> «ήταν πολύ καλός στα μαθηματικά και πραγματικά ήταν δηλαδή. Είχε αυτή τη μαθηματική σκέψη που έχουν οι οικοδόμοι... Ίσως και αυτό να με να με βοήθησε στο ότι, τέλος πάντων "εμείς" είμαστε καλοί στα μαθηματικά.»

Επίσης, συσχετίζει το γεγονός ότι εργαζόταν από μικρός στις οικοδομές με τον πατέρα του με τη μαθητική διαμόρφωσή του και στην απόφαση του να μπει στο πανεπιστήμιο.

> «από πολύ μικρός δούλευα στις οικοδομές, αυτό με βοήθησε στο να καταλάβω πόσο δύσκολα βγαίνει το ψωμί…ο πατέρας μου ήταν από την εξορία και είχε φυματιώδη σπονδυλίτιδα, παρόλα αυτά δούλευε οικοδόμος γιατί έπρεπε να ζήσουμε...ήξερα ότι του φέρνει πολύ πόνο, οπότε έπρεπε να τελειώνω για να μπορέσει να σταματήσει να δουλεύει, να σταματήσει να πονάει»

Ως δάσκαλος των μαθηματικών αναφέρει ότι του δίνει ευχαρίστηση η δουλειά του και φροντίζει να εξελίσσει τη διδασκαλία του συμμετέχοντας σε πολλές κοινότητες και επιμορφώσεις, όμως, εκφράζει δυσαρέσκεια απέναντι στις συνθήκες και εντός και εκτός της εκπαίδευσης.

> «αν είναι το θέμα της εκπαίδευσης είμαι πολύ ευχαριστημένος. Όχι από τις απολαβές μου βέβαια ή από τις συνθήκες μέσα στα σχολεία, αλλά τέλος πάντων από αυτό που κάνω. Είμαι ενεργός εκπαιδευτικός, συμμετέχω σε σεμινάρια σαν επιμορφωτής, κάνω διάφορα πραγματάκια ερευνητικά, συμμετέχω σε διάφορες συνδικαλιστικές πολιτικές παρατάξεις…Εεε και ως

πολίτης τώρα, να πω αν είμαι ευχαριστημένος, [γέλιο].. ε οκ, δεν είμαι. Ναι, δηλαδή ε εε.. όσον αφορά αν είμαι ενεργός, θεωρώ ότι είμαι ενεργός πολίτης»

Συνολικά, ο εκπαιδευτικός μοιάζει να έχει ιδιαίτερη ιδεολογική ευαισθησία σχετικά με τον τρόπο που διδάσκεται το μάθημα των μαθηματικών και προσπαθεί για την ύπαρξη θετικού κλίματος στην τάξη και δίνει διαφορετικά ερεθίσματα στους μαθητές του σε σχέση με την πεπατημένη, αλλά αναφέρει ότι η πράξη τον γειώνει καθώς αναγνωρίζει ότι δεν μπορεί να προβεί στις αλλαγές που θα ήθελε καθώς δεν μπορεί να αλλάξει το σύστημα.

«τη διδασκαλία μου μπορώ να την αλλάξω, αλλά υπάρχουν κάποια πράγματα τα οποία με ξεπερνούν. Δεν μπορώ να αλλάξω το σύστημα…Δηλαδή τόση δουλειά έχω ρίξει άπειρη δουλειά, γιατί με ενδιέφερε…το κίνητρο ήταν αυτό, να έχω προσωπική σχέση με το να αλλάξω το σχολείο μου, να αλλάξω τα παιδιά μου, να αλλάξω εγώ, να βγαίνουν όσο το δυνατόν λιγότερο δυστυχισμένα παιδιά.»

Τοποθετήσεις σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση

Σε σχέση με τα μαθηματικά, ο εκπαιδευτικός ~~Βασίλης~~ αναφέρει ότι *«είναι μια ανθρώπινη κατασκευή…είναι μια επιστήμη στην οποία στηρίζεται η τεχνολογική εξέλιξη»* και επισημαίνει τη σύνδεση τους με κοινωνικο-πολιτικούς παράγοντες και τη δημιουργία ενεργών πολιτών ~~με κριτική σκέψη~~.

«είναι ένα μάθημα το οποίο έχει ιδιαίτερη βαρύνουσα σημασία στην κοινωνία…μπορούν να βοηθήσουν έναν μαθητή στο να σκέφτεται κριτικά, να μάθει να αιτιολογεί, να αποδεικνύει, να συλλογάται…θα τον βοηθήσει να κατανοήσει την πολυπλοκότητα της σημερινής κοινωνίας.»

Σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση εξηγεί ότι ~~η~~ έχει έναν ταξινομητικό χαρακτήρα.

«τα μαθηματικά παίζουν έναν μεγάλο ρόλο στο να καταλάβει ο μαθητής ότι «κοίταξε φίλε μέχρι εδώ, δεν σε παίρνει για παραπάνω, μην κάνεις όνειρα» και το αποδέχεται, αποδέχεται δηλαδή ότι δεν είναι για πολλά. Αυτοί οι οποίοι θα πάνε στο πανεπιστήμιο είναι πολύ συγκεκριμένοι, «δεν είναι για σένα το πανεπιστήμιο, εσύ δεν είσαι έξυπνος». Τα μαθηματικά παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε αυτό, στο να ταξινομήσουν σε αυτούς και στους άλλους.»

Εστιάζοντας στα σχολικά μαθηματικά, ο εκπαιδευτικός παρατηρεί μια αρνητική στάση από τους μαθητές για τα μαθηματικά, πράγμα που αποδίδει σε μεγάλο βαθμό στον τρόπο που διδάσκεται το μάθημα.

«η πλειοψηφία δεν τους αρέσουν τα μαθηματικά γιατί είναι ένα σύνολο τεχνικών, διαδικασιών, ξένα προς τη ζωή τους, τα ενδιαφέροντά τους...είναι πολύ πειθαρχημένα, δεν είναι δημιουργικά, δεν συνδέονται με τη ζωή, δεν συνδέονται με τα ενδιαφέροντα, δεν έχουν μέσα φαντασία, δεν έχουν κοινωνική αλληλεπίδραση…αρχίζουν και τα μισούν πλέον, γιατί θεωρούν ότι είναι αυτό το μάθημα που τους χαρακτηρίζει ως μη ικανούς, ως μη έξυπνους.»

Φαίνεται ιδιαίτερα ευαισθητοποιημένος σε σχέση με τον ρόλο του ως εκπαιδευτικός για την ισότιμη συμμετοχή των μαθητών στο σχολείο.

«το θεωρώ υποχρέωσή μου ως εκπαιδευτικό να βοηθήσω όλους τους μαθητές, να μη βάζουμε εμπόδια στην πρόοδο των μαθητών.»

Τέλος, εκφράζει δυσαρέσκεια αντιλαμβανόμενος ένα κλίμα αποδοχής των κοινωνικών ανισοτήτων τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην κοινωνία καθώς και τις αντιφάσεις που συμπυκνώνει ο ρόλος του εκπαιδευτικού.

«Πρέπει να έχεις πολύ μεγάλο κουράγιο για να επιβιώσεις σε αυτήν την καθημερινότητα και την πραγματικότητα. Έρχεσαι σε καθημερινές αντιθέσεις με συναδέλφους, με το διευθυντή του σχολείου, με τους γονείς και χίλια δυο άλλα πράγματα… Δηλαδή οι αλλαγές είναι αδρανειακά ανεπιθύμητες... Αφού το σύστημα μία χαρά κυλάει, την ησυχία μας έχουμε, τι τα θες τώρα αυτά τα περίεργα; Αλλά υπάρχουν και εξαιρέσεις.»

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση του λόγου του εκπαιδευτικού προκύπτουν οι παρακάτω συνδέσεις με τη βιβλιογραφία κατά ερευνητικό ερώτημα.

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που αφορά το πώς τοποθετείται ο εκπαιδευτικός σχετικά με τις πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης προκύπτει ότι έχει ιδιαίτερη ιδεολογική ευαισθησία και συνεκτικές τοποθετήσεις. Αντιμετωπίζει τα μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση ως μέρος της κοινωνικής δομής (Jurdak et. al., 2016) επισημαίνοντας τη σημασία τους για την εξέλιξη των κοινωνιών (formative power) και τη δημιουργία ενεργών πολιτών (Ernest, 2002; Skovsmose & Valero, 2008).

Εξηγεί τον ταξινομητικό χαρακτήρα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Jurdak et. al., 2016; Noyes, 2007) αναφέροντας την αποστροφή των μαθητών λόγω της σύνδεσής της με την εξυπνάδα, πράγμα που σύμφωνα με τον μύθο της αναφοράς ~~τα~~ ανυψώνει τα μαθηματικά ως ανώτερο διανοητικό εγχείρημα και έχει συνέπεια στη νομιμοποίηση τους ως θεσμοφύλακα της κοινωνικής διαστρωμάτωσης (Dowling, 2002). Επίσης, παρατηρεί ότι τα σχολικά μαθηματικά διδάσκονται ως τεχνικές διαδικασίες, ξένες προς τα ενδιαφέροντα των μαθητών (Maass et. al., 2019; Ernest et. al. 2016; Skovsmose, 2012; Noyes, 2007).

Ενδιαφέρον σημείο φαίνεται να αποτελούν οι αντιφάσεις σχετικά με τις πεποιθήσεις του και το τι συμβαίνει ή το τι καλείται να κάνει στην πραγματικότητα, κάτι το οποίο είναι σύνηθες στο επάγγελμα του εκπαιδευτικού (Flores & Day, 2006). Συνολικά, έχει μια αρνητική στάση απέναντι στους τρόπους λειτουργίας της μαθηματικής εκπαίδευσης και του εκπαιδευτικού συστήματος εξηγώντας ότι λειτουργεί ώστε να αυτο-διαιωνίζεται (Jurdak et al. 2016).

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα εστιάζει στις συνδέσεις των παραπάνω τοποθετήσεων με την αφηγηματική διάσταση της ταυτότητας του εκπαιδευτικού, για την οποία είναι κομβικής σημασίας τα στοιχεία του περιβάλλοντος στο οποίο συγκροτήθηκε (Gutiérrez, 2013; Sfard & Prusak, 2005). Όπως αναφέρει και ο ίδιος, οι αφηγήσεις των «σημαντικών άλλων» για τα μαθηματικά, το παιχνίδι στη γειτονιά και τα βιώματα του από την εργασία με τον πατέρα του τον ευαισθητοποίησαν ιδιαίτερα, πράγμα που αποτυπώνεται και στις τοποθετήσεις του για τις πολιτικές συνιστώσες της μαθηματικής εκπαίδευσης που έχουν σε πολλά σημεία μια προσωπική/ιδιοσυγκρασιακή χροιά (Flores & Day 2006).

Σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών παρατηρείται ιδεολογική ευαισθησία σχετικά με το ρόλο του ως εκπαιδευτικού. ~~και~~ Ο εκπαιδευτικός τονίζει την προσπάθεια για συμπερίληψη των μαθητών, μέσω της καλλιέργειας θετικού κλίματος στην τάξη και της πολύπλευρης προσέγγισης των μαθηματικών, όμως παραδέχεται τις δυσκολίες και τους περιορισμούς που αντιμετωπίζει στην πράξη (Flores & Day, 2006; Sfard & Prusak, 2005).

Συμπερασματικά, ο εκπαιδευτικός τοποθετείται με συνεκτικό τρόπο ως προς τις πολιτικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αναγνωρίζει τα μαθηματικά ως ανθρώπινη κατασκευή με ιδιαίτερη σημασία για την τεχνολογική εξέλιξη των κοινωνιών και τη μαθηματική εκπαίδευση ως μέρος της κοινωνικής δομής, υπογραμμίζοντας αφενός τον ταξινομητικό της χαρακτήρα και αφετέρου τη σημασία της για την ενεργό συμμετοχή στην κοινωνία των πολιτών. Μέσα από τα λεγόμενά του φαίνεται να συνδέονται τα παραπάνω με την ιδεολογία του και την πολιτική του συγκρότηση που μοιάζει να είναι στα αριστερά του πολιτικού φάσματος καθώς αναφέρει ότι είναι ενεργός ως πολίτης, συμμετέχοντας στα κοινά και σε συνδικαλιστικές δράσεις.

Ο εκπαιδευτικός εμφανίζεται ιδιαίτερα ευαισθητοποιημένος σχετικά με τον ρόλο του ως εκπαιδευτικός στην όσο το δυνατόν ισότιμη συμμετοχή των μαθητών στη μαθηματική εκπαίδευση και καταβάλλει προσπάθεια για την εξέλιξη της διδασκαλίας του και την ανάπτυξη δημοκρατικού κλίματος στην τάξη, επισημαίνοντας σε διάφορα σημεία τις αντιφάσεις που βιώνει ανάμεσα στις πεποιθήσεις και τις πρακτικές που ακολουθεί.

Τέλος, όλα τα παραπάνω στοιχεία φαίνεται να διαπερνώνται από τα βιώματα και τις νοηματοδοτήσεις που αφηγείται ο εκπαιδευτικός για το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο μεγάλωσε, όπου υπήρχε η αξία της μόρφωσης, ο θαυμασμός για την ενασχόληση με τα μαθηματικά και το

ταξικό στοιχείο που διαμόρφωσαν τη στροφή του εκπαιδευτικού προς την ενασχόληση με τη μαθηματική εκπαίδευση και την ευαισθητοποίησή του σχετικά με τις κοινωνικοπολιτικές συνιστώσες της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aguilar, M. S., & Zavaleta, J. G. M. (2012). On the links between mathematics education and democracy: A literature review. *pythagoras*, *33*(2), 1-15.

Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 19-33.

Dowling, P. (2002). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths/pedagogic texts*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (2002). Empowerment in mathematics education. *Philosophy of mathematics education journal*, *15*(1), 1-16.

Ernest, P., Skovsmose, O., Paul van Bendegem, J., Bicudo, M., Miarka, R., Kvasz, L., & Moeller, R. (2016). *The philosophy of mathematics education.* Springer Nature.

Flores, M. A., & Day, C. (2006). Contexts which shape and reshape new teachers' identities: A multi-perspective study. *Teaching and teacher education*, *22*(2), 219-232.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 37-68.

Jurdak, M., Vithal, R., De Freitas, E., Gates, P., & Kollosche, D. (2016). *Social and political dimensions of mathematics education. Current thinking*. Springer Nature.

Maass, K., Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2019). Promoting active citizenship in mathematics teaching. *ZDM*, *51*(6), 991-1003.

Noyes, A. (2007). Mathematics counts… for what? Rethinking the mathematics curriculum in England. *Philosophy of Mathematics Education*, *21*, 1-17.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational researcher*, *34*(4), 14-22.

Σκορδούλης, Κ., & Κατσιαμπούρα, Γ. (2020). Πολιτισμικές και κριτικές εκπαιδευτικές προσεγγίσεις των φυσικών επιστημών. *Παιδαγωγική επιθεώρηση*, *68*.

Skovsmose, O. (2012). Symbolic power, robotting, and surveilling. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 119-132.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2008). 17 Democratic access to powerful mathematical ideas. *Handbook of international research in mathematics education*, 415.

Τσιώλης, Γ. (2018). Θεματική ανάλυση ποιοτικών δεδομένων. Στο: Γ. Ζαϊμάκης (Επιμ.). *Ερευνητικές διαδρομές στις Κοινωνικές Επιστήμες. Θεωρητικές-Μεθοδολογικές Συμβολές και Μελέτες Περίπτωσης*, 97-125.

ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ: ΟΙ ΠΟΡΟΙ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥΣ

Κούρτη Στυλιανή-Κυριακή

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

stellakour@gmail.com

Η μελέτη εστιάζει στην αλληλεπίδραση της στιγμιαίας λήψης αποφάσεων των εκπαιδευτικών μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και των συναισθημάτων που αναπτύσσουν, μέσω των πόρων που συντελούν σε αυτή. Δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τρεις βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες από τέσσερεις εκπαιδευτικούς, εφτά επιμορφωτικές συναντήσεις, και τέσσερεις, ημιδομημένες συνεντεύξεις με κάθε εκπαιδευτικό. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν ότι τα οι στιγμιαίες αποφάσεις των εκπαιδευτικών δεν διαμορφώνονται μόνο από τα συναισθήματά τους, αλλά και από άλλους πόρους με τις εξής διαστάσεις: κοινωνική-χωρική, ηθική-ιδεολογική, προβλεπτική-χρονική, συστημική-αναπτυξιακή και πειθαρχική υποχρέωση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διερεύνηση των συναισθηματικών διαστάσεων της διδασκαλίας έχει αποκτήσει τελευταία μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Πιο πρόσφατες προσεγγίσεις προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν την πολυπλοκότητα που υπάρχει μεταξύ των συναισθημάτων του εκπαιδευτικού και της διδασκαλίας συμπεριλαμβάνοντας τη σχέση τους με άλλες πτυχές, όπως οι υιοθετούμενες διδακτικές προσεγγίσεις (π.χ. Lake, 2019). Οι Roth και Radford (2011) βασίστηκαν στο πλαίσιο της Θεωρίας της Δραστηριότητας και υποστήριξαν ότι το συναίσθημα (η αισθαντική αποτιμητική αντανάκλαση της δραστηριότητας στο υποκείμενο που ενεργεί) αναπαράγεται συνεχώς και μετασχηματίζεται παράλληλα με τα γνωστικά και υλικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τα χέρια και τα μυαλά των υποκειμένων. Οι Shuman και Scherer (2014) θεώρησαν τα συναισθήματα ως επεισόδια που έχουν πολλαπλά συστατικά: (1) το υποκειμενικό αίσθημα (όπου το άτομο βιώνει τα συναισθήματα και αναγνωρίζει αυτό που βιώνεται εκείνη τη στιγμή), (2) το στοιχείο κίνησης (η επικοινωνιακή λειτουργία του τρόπου με τον οποίο εκφράζουμε αυτό που βιώνουμε μέσω εκφράσεων του προσώπου, χειρονομιών, κ.λπ.), (3) το φυσιολογικό συστατικό (που αφορά στις χημικές αντιδράσεις που βιώνει το σώμα μας, π.χ. ροή αίματος κ.λπ.), (4) το συστατικό τάσης για δράση (όπου ακριβώς μετά την αναγνώριση ενός συναισθήματος, το σώμα προχωρά στη δράση), και (5) το συστατικό εκτίμησης (το άτομο μπορεί να διακρίνει τις καταστάσεις/ενέργειες/περιβάλλοντα/άτομα που προκαλούν το

συναίσθημα και να εκτιμήσει πώς αυτά τα ερεθίσματα επηρεάζουν την ευημερία του).

Η λήψη αποφάσεων στην εκπαίδευση των μαθηματικών συνδέεται συχνά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών (Koolos et al., 2021), αλλά σπάνια συνδέεται με άλλες πτυχές του θυμικού, όπως τα συναισθήματα. Ο Schwarz (2000) έθεσε το ζήτημα της μη συστηματικής μελέτης των συναισθημάτων και της λήψης αποφάσεων, που μέχρι σήμερα δεν έχει ακόμη μελετηθεί στην έρευνα για την εκπαίδευση των μαθηματικών. Ο Engeström (2001, 2015) ανέπτυξε ένα τετραδιάστατο μοντέλο πόρων που συντελούν στην λήψη αποφάσεων και την επέκταση του αντικειμένου της δραστηριότητας, που περιλαμβάνει τις εξής διαστάσεις: (1) κοινωνική-χωρική, (2) προβλεπτική-χρονική, (3) ηθική-ιδεολογική διάσταση, και (4) συστημική-αναπτυξιακή. Οι Herbst και Chazan (2012) επεκτείνοντας τις ερωτήσεις τους σχετικά με το «τι θα δικαιολογούσε την δράση ενός εκπαιδευτικού», κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι στιγμιαίες δράσεις των εκπαιδευτικών βασίζονται σε πόρους που δεν περιορίζονται στη γνώση και τη βούληση μεμονωμένων εκπαιδευτικών, κατηγοριοποιώντας τέσσερεις ομάδες υποχρεώσεων των εκπαιδευτικών: (1) πειθαρχική υποχρέωση, (2) ατομική υποχρέωση, (3) διαπροσωπική υποχρέωση, και (4) θεσμική (σχολική) υποχρέωση. Στην μελέτη μας, οι διαστάσεις των πόρων δεν περιορίζονται μόνο στη συλλογιστική του υποκειμένου, αλλά διαμορφώνονται μέσα στο κοινωνικό, πολιτιστικό και ιστορικό πλαίσιο στο οποίο εκτυλίσσεται η διδασκαλία. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε τις τέσσερις διαστάσεις επέκτασης του αντικειμένου του Engeström (2001, 2015) σε συνδυασμό με το πλαίσιο των υποχρεώσεων των εκπαιδευτικών των Herbst και Chazan (2012). Η ατομική υποχρέωση φαίνεται να είναι ενσωματωμένη στην ηθικο-ιδεολογική διάσταση, η διαπροσωπική και θεσμική υποχρέωση φαίνεται να είναι ενσωματωμένη στην κοινωνικο-χωρική διάσταση, ενώ η πειθαρχική υποχρέωση δεν ενσωματώνεται σε καμία από τις διαστάσεις του Engeström. Έτσι, στη μελέτη μας η λέξη «πόροι» αναφέρεται στις τέσσερις διαστάσεις του Engeström, προσθέτοντας ως διάσταση αυτή της «ευθύνης του εκπαιδευτικού για τα μαθηματικά», αυτό που οι Herbst και Chazan (2012) αποκαλούν «πειθαρχική υποχρέωση».

Στη μελέτη μελετάται η αλληλεπίδραση μεταξύ της στιγμιαίας λήψης αποφάσεων του εκπαιδευτικού και των συναισθημάτων του, η οποία μπορεί να συλληφθεί, μέσω των πόρων, ως η στιγμή που τα συναισθήματα και η βούληση είναι αμφότερα αναπόσπαστες και αμοιβαία συστατικές στιγμές της ίδιας ενότητας (Roth & Radford, 2011). Οι πόροι φαίνεται να

συνδέονται με την πτυχή της εκτίμησης των συναισθημάτων του εκπαιδευτικού, όπου η τελευταία μας πληροφορεί για το πώς τα ερεθίσματα επηρεάζουν την ευημερία του υποκειμένου. Αυτοί οι πόροι δεν μας ενημερώνουν από μόνες τους για τις αποφάσεις του εκπαιδευτικού, αλλά για τη λήψη των αποφάσεών τους και η ενσωμάτωση τους στο πλαίσιο της διδακτικής δραστηριότητας στοχεύει να αποτελέσει φακό για τη σε βάθος μελέτη αυτής της αλληλεπίδρασης με διαλεκτικό τρόπο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί πολλαπλή μελέτη περίπτωσης, τεσσάρων εκπαιδευτικών μαθηματικών. Το μελετώμενο φαινόμενο είναι η αλληλεπίδραση της στιγμιαίας λήψης αποφάσεων και των συναισθημάτων των εκπαιδευτικών κατά την διαχείριση ζωτικών στιγμών διδασκαλίας[1] (ΖΣΔ), ενώ στην παρούσα εργασία εμβαθύνουμε στους πόρους που συντελούν σε αυτή την αλληλεπίδραση. Τα ερευνητικά δεδομένα αποτελούνται κυρίως από (1) τρεις βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες καθενός από τους τέσσερεις εκπαιδευτικούς (1-2 διδακτικές ώρες η κάθε μια), και (2) τέσσερις ημιδομημένες συνεντεύξεις με κάθε εκπαιδευτικό· η πρώτη συνέντευξη είχε ως στόχο την σκιαγράφηση του εκπαιδευτικού προφίλ κάθε εκπαιδευτικού και σε κάθε μία από τις άλλες τρεις συνεντεύξεις βίντεο-ανάκλησης, στο πρώτο μέρος της, αναπαρήγαμε τα βίντεο-αποσπάσματα και συζητούσαμε τις στιγμές που επέλεξαν οι εκπαιδευτικοί, ενώ στο δεύτερο, αναπαρήγαμε τα βίντεο-αποσπάσματα με τις στιγμές που επέλεξε η ερευνήτρια, και δεν είχαν αναπαραχθεί από τον εκπαιδευτικό. Στο πρώτο στάδιο της ανάλυσης των δεδομένων (1) αναγνωρίστηκαν οι ΖΣΔ σε κάθε διδασκαλία, (2) οι δράσεις του εκπαιδευτικού, (3) το στοιχείο κίνησης των συναισθημάτων του εκπαιδευτικού και στη συνέχεια της τάσης για δράση και (4) η ανταπόκριση των μαθητών (βλ. Kourti & Potari, 2023). Έπειτα, από τις συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς, προσπαθήσαμε να επαληθεύσουμε και να χαρακτηρίσουμε τα συναισθήματα του εκπαιδευτικού (υποκειμενικό αίσθημα -χρησιμοποιώντας το πλαίσιο χαρακτηρισμού συναισθημάτων του Plutchik (2001)- και εκτίμηση[2]) και να επισημάνουμε τους πόρους που επηρεάζουν τα συναισθήματα των εκπαιδευτικών και την στιγμιαία λήψη αποφάσεων, με βάση τον «τοπικό» λόγο των εκπαιδευτικών, συνθέτοντας και επεκτείνοντας το τετραδιάστατο πλαίσιο

[1] μια περίπτωση σε ένα μάθημα στην τάξη όπου μια διακοπή στη ροή του μαθήματος παρέχει στον εκπαιδευτικό την ευκαιρία να τροποποιήσει τη διδασκαλία προκειμένου να επεκτείνει ή να αλλάξει τη φύση της μαθηματικής κατανόησης των μαθητών» (Stockero & Van Zoest, 2013, σελ. 127).

[2] Στην ενότητα των αποτελεσμάτων, το στοιχείο εκτίμησης, υπογραμμίζεται με διακεκομμένη γραμμή στα αποσπάσματα των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών

του Engeström (2001) για την στιγμιαία λήψη αποφάσεων του εκπαιδευτικού με το πλαίσιο των Herbst and Chazan (2012) που αφορά τους πόρους της λήψης αποφάσεων των εκπαιδευτικών. Προσθέσαμε την ανταπόκριση των μαθητών και αναλύσαμε τα δεδομένα από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών, χρησιμοποιώντας μεθόδους θεμελιωμένης θεωρίας και ανοιχτή κωδικοποίηση (βλ. Πίνακα 1). Για την κωδικοποίηση στηριχθήκαμε στις διαστάσεις των πόρων όπως αυτές ορίστηκαν για την παρούσα μελέτη στο θεωρητικό της πλαίσιο, ενώ οι υποκατηγορίες των πόρων προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων μας, χρησιμοποιώντας μεθόδους θεμελιωμένης θεωρίας και ανοιχτή κωδικοποίηση.

Πίνακας 2: Οι διαστάσεις και οι υπο-διαστάσεις των πόρων

	Σε τι αναφέρεται	**Υπο-διαστάσεις**
Κοινωνική-Χωρική (ΚΧ)	κοινότητες που επηρεάζουν τις αποφάσεις, μαθητές, και τις διαπροσωπικές και θεσμικές υποχρεώσεις	‣ ομάδα εκπαιδευτικών ‣ απαντήσεις μαθητών διαθέσιμος χρόνος, αντίκτυπος δουλειάς συναδέλφων
Ηθική-ιδεολογική (ΗΙ)	η αποφασιστική εστίαση κάθε εκπαιδευτικού στη συμμετοχή και την κατανόηση των μαθητών και στην ατομική υποχρέωση	‣ εμπλοκή μαθητών ‣ κατανόηση μαθητών αίσθημα των μαθητών ‣ συνεισφορά εκπαιδευτικού στην γνώση των μαθητών ‣ επίπεδο διευκόλυνσης των μαθητών ‣ προετοιμασία του εκπαιδευτικού για να διαχειριστεί τις απαντήσεις των μαθητών
Προβλεπτική-χρονική (ΠΧ)	χρονικά κατανεμημένα βήματα των αποφάσεων	‣ διατήρηση του αρχικού πλάνου σχεδιασμού ‣ προσδοκίες για τους μαθητές τους.

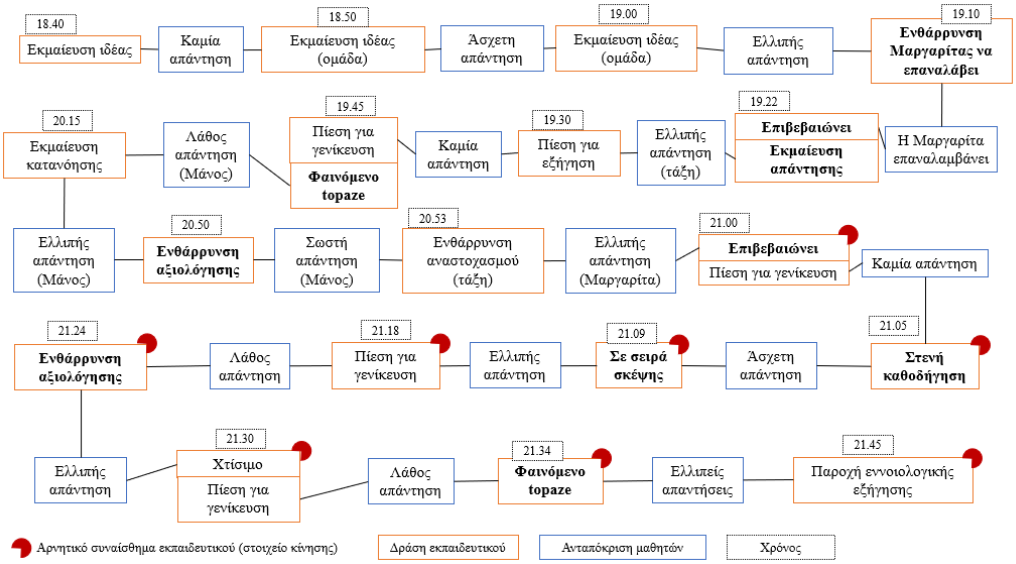
Συστημική-αναπτυξιακή (ΣΑ)	στις δυνατότητες για αποφάσεις που βασίζονται στη δράση για να διαμορφώσουν το μέλλον της ευρύτερης δραστηριότητας	‣ αποφάσεις που είναι διαφορετικές σε σχέση με τις συνήθεις αποφάσεις του ή αποφάσεις που επιφέρουν αλλαγή στον τρόπο επιτέλεσης της δραστηριότητας.
Πειθαρχική υποχρέωση (ΠΥ)	Υποχρέωση στην επιστήμη των μαθηματικών	‣ σημασία της μαθηματικής γνώσης ‣ κατάλληλη τοποθέτηση ‣ μαθηματική ευφράδεια των μαθητών

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα επιχειρούμε να εμβαθύνουμε στον τρόπο που δρουν οι πόροι στην αλληλεπίδραση της στιγμιαίας λήψης αποφάσεων των εκπαιδευτικών και στα συναισθήματα που αναπτύσσουν, συζητώντας δύο ΖΣΔ που εμφανίστηκαν στις διδασκαλίες των εκπαιδευτικών μας.

7η ΖΣΔ του Γρηγόρη: Μαθηματικό Λάθος

Η έβδομη ΖΣΔ συνέβη μεταξύ των λεπτών 18.40-21.45 της δεύτερης διδασκαλίας του Γρηγόρη. Ζητήθηκε από τους μαθητές να παραγοντοποιήσουν τριώνυμα και να βρουν τις ρίζες αυτών, όπου αυτό ήταν δυνατό. Ενώ όλη η τάξη συζητούσε τα ευρήματά της για το τριώνυμο $x^2 + 4$, Ο Γρηγόρης στόχευε οι μαθητές να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου προϋποθέτει την ύπαρξη των ριζών του (βλ., Διάγραμμα 1). Σύμφωνα με την τρίτη συνέντευξη, στην αρχή της έβδομης ΖΣΔ ο Γρηγόρης αισθάνεται οργή (θυμός και έκπληξη) και άγχος.



Διάγραμμα 1: Η διαχείριση της 7ης ΖΣΔ του Γρηγόρη, χρονολογικά.

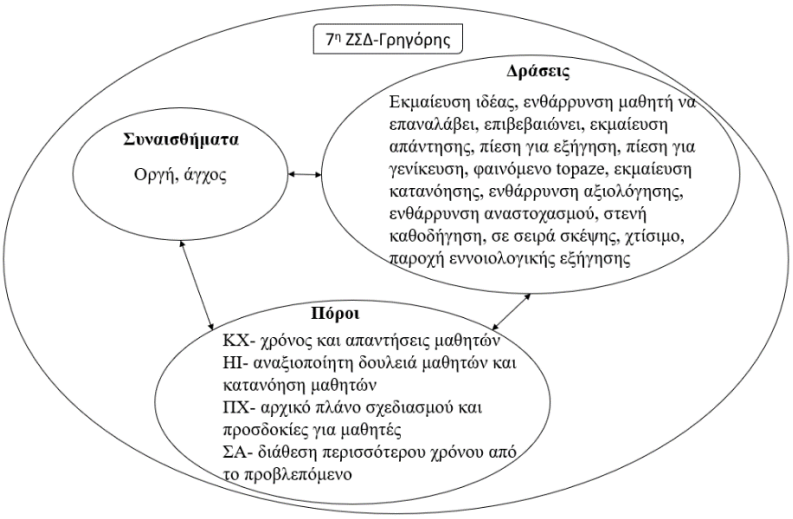
Γ: Ακόμη και από τους δυνατούς μαθητές, περίμενα κάποιος να το πει (ΠΧ-προσδοκίες για μαθητές). Δεν ήθελα να το πω εγώ, γιατί όπως προανέφερες και εσύ (ερευνήτρια) είχαν ήδη βρει ότι χρειαζόντουσαν <*Έκπληξη*>. Φοβόμουν πως η δουλειά που είχαν ήδη κάνει θα πήγαινε στράφι <*Άγχος*> (ΗΙ-αναξιοποίητη δουλειά μαθητών).

Αργότερα στην συνέντευξη ανέφερε πως:

Γ: Ξόδεψα τόσο χρόνο να τους ρωτάω συνέχεια (ΣΑ-διάθεση περισσότερου χρόνου από το προβλεπόμενο) γιατί περίμενα να μου το πουν (ΠΧ- προσδοκίες για μαθητές). Το έβρισκα λίγο περίεργο που δεν μου το έλεγαν <*Έκπληξη*>. Δεν ήθελα… Εκείνη την ώρα έλεγα στον εαυτό μου «δεν είναι δυνατόν αυτό που συμβαίνει, είναι απίστευτο!» <*Θυμός*>. Και τι άλλο να έκανα; Παρόλη την προσπάθεια, φυσικά, μπορεί να μην είχαν καταλάβει ακριβώς το ζητούμενο (ΗΙ- κατανόηση μαθητών, ΚΧ-απαντήσεις μαθητών).

Χρησιμοποίησε πολλές φορές κλειστή καθοδήγηση γιατί «ήμασταν σε αυτό το ερώτημα πόση ώρα και έπρεπε να προχωρήσω. Ο χρόνος πίεζε, και είχαμε ακόμα να κάνουμε πολλά στο φύλλο εργασίας.» <*Άγχος*> (ΠΧ- αρχικό πλάνο σχεδιασμού και ΚΧ-χρόνος). Στο τέλος έδωσε μόνος του την απάντηση γιατί σκέφτηκε πως «οι μαθητές δεν θα το έβρισκαν τελικά μόνοι τους, οπότε…» (ΗΙ- κατανόηση μαθητών).

Ο Γρηγόρης νιώθοντας οργή και άγχος, και επηρεασμένος από τις διαστάσεις ΚΧ, ΗΙ, ΠΧ, και ΣΑ, αρχικά αποφασίζει να αφιερώσει περισσότερο χρόνο από τον συνηθισμένο στους μαθητές ώστε να σκεφτούν, και τελικά αποφασίζει να δώσει ο ίδιος την απάντηση (βλ., Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Η αλληλεπίδραση των συναισθημάτων, της στιγμιαίας λήψης αποφάσεων και των πόρων του Γρηγόρη κατά την διαχείριση της 7ης ΖΣΔ

2η ΖΣΔ του Αχιλλέα: Μαθηματική σύγχυση

Η δεύτερη ΖΣΔ διαδραματίστηκε κατά τα λεπτά 16.56-22.09 της πρώτης διδασκαλίας του Αχιλλέα. Ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, και εκείνοι φαίνεται να μην μπορούν να την σχεδιάσουν (βλ., Διάγραμμα 2). Όπως ανέφερε στην δεύτερη συνέντευξη, βίωσε χαρά, άγχος και γλυκόπικρα.

Α: Εδώ φαίνεται η *χαρά* μου νομίζω. Δεν μπορείς να φανταστείς πόσο χαίρομαι που βλέπω αυτά τα παιδιά να δουλεύουν έτσι (ΗΙ-εμπλοκή μαθητών). Γιατί είναι πολύ αδύναμοι μαθητές, και δεν περίμενα να ασχοληθούν με τέτοιο ζήλο (ΠΧ-προσδοκίες για μαθητές). Κάνουν ολόκληρη συζήτηση μεταξύ τους και αυτό με έκανε βλέποντάς τους να πλημμυρίζω χαρά (ΗΙ-εμπλοκή μαθητών).

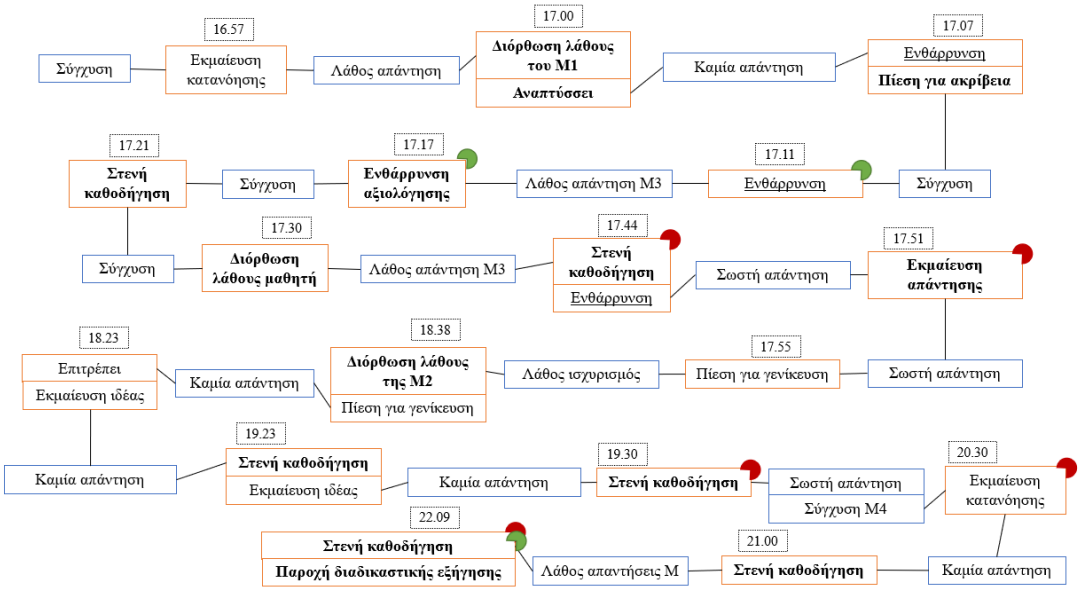
Ε: Είδα ότι τους εμψυχώνατε πολύ.

Α: Μα βέβαια είναι δυνατόν να μην τους εμψυχώνω; Εδώ βλέπεις παιδιά με πολύ λίγες γνώσεις, να θέλουν να το παλέψουν αλλά να φοβούνται. Πάντα προσπαθώ να τους κάνω να νιώσουν καλά με τον εαυτό τους, ειδικά αυτούς τους μαθητές, ώστε να νιώσουν ικανοί να προσπαθήσουν. Και ας κάνουν λάθη (ΗΙ-αίσθημα μαθητών, ΣΑ-ενθάρρυνση μαθητών).

Στην συνέχεια αισθάνθηκε άγχος καθώς:

Α: Είχα *αγχωθεί* για λίγο, για το αν θα το καταφέρουν τελικά. Γιατί βοηθούσα πάρα πολύ, και τώρα που ξαναείδα το βίντεο πιθανόν να μην έπρεπε. Ήθελα πολύ να τα καταφέρουν (ΠΧ), για να νιώσουν

ικανοί οι ίδιοι. Είναι πολύ σημαντικό αυτό για τους μαθητές (ΗΙ- αίσθημα μαθητών).

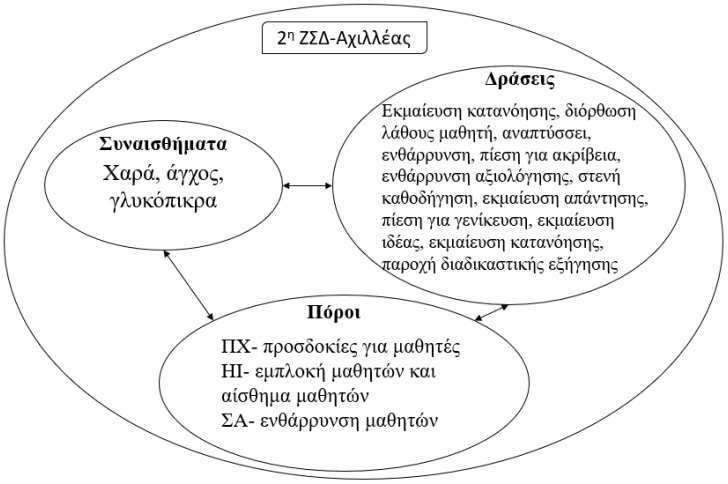


Διάγραμμα 2: Η διαχείριση της 2ης ΖΣΔ του Αχιλλέα, χρονολογικά.

Στο τέλος του επεισοδίου, ο Αχιλλέας υπαγόρευε στους μαθητές τι να γράψουν και τους εξηγούσε παράλληλα, νιώθοντας γλυκόπικρα (χαρά και λύπη):

> Α: Εκεί στεναχωρήθηκα πολύ <*λύπη*> που έπρεπε να υπαγορεύω, γιατί δεν ήθελα να νιώθουν άχρηστοι. Έκαναν τεράστια προσπάθεια (ΗΙ-αίσθημα μαθητών). Από την άλλη *χάρηκα* που ακόμα και έτσι μου δόθηκε η ευκαιρία να τους προσφέρω κάτι. Να τους εξηγήσω δηλαδή, ώστε να μπορέσουν να πάνε παρακάτω (ΗΙ, ΠΧ).

Ο Αχιλλέας νιώθοντας χαρά, γλυκόπικρα και άγχος, και επηρεασμένος από τις διαστάσεις ΠΧ, ΗΙ και ΣΑ, αποφασίζει αρχικά να ενθαρρύνει τους μαθητές, ενώ στο τέλος αποφάσισε να δώσει ο ίδιος, υπαγορεύοντας, την απάντηση, ώστε να προχωρήσουν οι μαθητές (βλ., Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Η αλληλεπίδραση των συναισθημάτων, της στιγμιαίας λήψης αποφάσεων και των πόρων του Αχιλλέα κατά την διαχείριση της 2ης ΖΣΔ

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα για την μελέτη των συναισθημάτων των εκπαιδευτικών χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο των Shuman και Scherer (2014), στο οποίο τα συναισθήματα μελετώνται με βάση τα συστατικά τους (το στοιχείο κίνησης, το υποκειμενικό αίσθημα, η τάση για δράση και η εκτίμηση). Το μοντέλο της Frenzel (2014) υπονοεί ότι η συναισθηματική απόκριση (τάση για δράση) ενός ατόμου εξαρτάται από την εκτίμησή του/της για την κατάσταση. Από την άλλη, σύμφωνα με τους Herbst και Chazan (2012) οι δράσεις των εκπαιδευτικών μπορούν να εξηγηθούν ορθολογικά δημιουργώντας αναφορές που αποτυπώνουν, από αυτό που αντιλαμβάνονται και εκτιμούν στις αφηγήσεις για τη δράση τους, μέσω των πόρων. Σημαντικό εύρημα της έρευνάς μας, με βάση την ανάλυση των δεδομένων μας, είναι ότι το στοιχείο εκτίμησης των συναισθημάτων σχετίζεται άμεσα με τους πόρους που επιδρούν στην λήψη αποφάσεων των εκπαιδευτικών.

Οι απαντήσεις των μαθητών, που αποτελούν πτυχή της κοινωνικής-χωρικής διάστασης των πόρων, παίζουν σημαντικό ρόλο για την διαμόρφωση των συναισθημάτων και των αποφάσεων των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί που μελετήθηκαν ανέπτυξαν κυρίως αρνητικά συναισθήματα όταν οι απαντήσεις των μαθητών ήταν λάθος/ελλιπείς, ενώ οι δράσεις τους ήταν ποικίλες. Υπάρχουν ενδείξεις ότι αρνητικά συναισθήματα, όπως ο θυμός, πυροδοτούνται όταν οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται ότι οι μαθητές αποτυγχάνουν ως συνέπεια παραγόντων που εξαρτώνται από τους μαθητές (Martínez-Sierra et al., 2022). Μια άλλη πτυχή της κοινωνικής-χωρικής διάστασης αποτελεί η αντίληψη του

εκπαιδευτικού για τον διαθέσιμο χρόνο για την διδασκαλία. Όπως αναφέρει η Assude (2005), υπάρχουν διάφορες κατηγορίες χρόνων για μια διδασκαλία, και οι εκπαιδευτικοί συχνά λαμβάνουν αποφάσεις με βάση τις σχέσεις κόστους διαφορετικών ειδών χρόνου κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Από τα δεδομένα μας φάνηκε πως ο διαθέσιμος χρόνος που αντιλαμβανόταν πως έχει κάθε εκπαιδευτικός επίδρασε σημαντικά στην λήψη αποφάσεων και τα συναισθήματά τους.

Μια άλλη πτυχή που ανιχνεύθηκε στα δεδομένα μας είναι το αίσθημα των μαθητών, της ηθικής-ιδεολογικής διάστασης, που φαίνεται από τα δεδομένα μας, να σχετίζεται με συναισθηματικές δράσεις των εκπαιδευτικών (βλ., 2η ΖΣΔ του Αχιλλέα). Αυτές οι δράσεις μπορεί να αποτελούν μια προσπάθεια αυτό-ρύθμισης των συναισθημάτων του εκπαιδευτικού, καθώς σύμφωνα με τους Uzuntiryaki-Kondakci et al. (2021), οι εκπαιδευτικοί τείνουν να ρυθμίζουν τα συναισθήματά τους όχι μόνο για λειτουργικούς σκοπούς αλλά και για ηδονικούς λόγους - να μειώσουν τα αρνητικά συναισθήματά τους. Σχετικά με την μετάδοση των συναισθημάτων των εκπαιδευτικών, σύμφωνα με τους Frenzel et al. (2021), μόλις οι εκπαιδευτικοί βιώσουν ή/και εκφράσουν συναισθήματα, αυτά τα συναισθήματα μπορούν να επηρεάσουν τους μαθητές με τουλάχιστον τρεις τρόπους: μπορούν να μεταδοθούν απευθείας από τους εκπαιδευτικούς στους μαθητές, τα συναισθήματα του εκπαιδευτικού είναι κρίσιμα για τη διαμόρφωση της ποιότητας των σχέσεων εκπαιδευτικού-μαθητή, ενώ μεταφέρουν σημαντικά κοινωνικά μηνύματα με πιθανές επιπτώσεις στις πεποιθήσεις των μαθητών. Το τελευταίο πιθανόν να σχετίζεται με την συστημική-αναπτυξιακή διάσταση των πόρων λήψης αποφάσεων των εκπαιδευτικών, καθώς όπως φάνηκε από την 2η ΖΣΔ του Αχιλλέα, εκείνος αποφάσισε να ενθαρρύνει τους μαθητές, ώστε να χτίσουν γενικά μια θετική στάσης εμπλοκής με τα μαθηματικά.

Τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας αποτελούν μια πρώτη προσπάθεια για τη μελέτη της αλληλεπίδρασης των συναισθημάτων και της λήψης αποφάσεων των εκπαιδευτικών, μέσω των πόρων, εντός του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου της τάξης. Θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθούν αντίστοιχα εκπαιδευτικοί μαθηματικών, για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, ώστε να εντοπιστούν πιθανές αλλαγές στην δημιουργία συναισθημάτων ή στην διαδικασία λήψης αποφάσεων, καθώς και η ταυτόχρονη μελέτη εκπαιδευτικών και μαθητών με αντίστοιχο τρόπο, πιθανόν να έδινε νέες κατευθύνσεις για το πλαίσιο των αλληλεπιδράσεών τους, τις ανάγκες των μαθητών και την ποιότητα της διδασκαλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Assude, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study: Integration of Cabri in primary school mathematics teaching. *Educational studies in mathematics, 59*, 183-203.

Engeström, Y. (2001). Making expansive decisions: An activity-theoretical study of practitioners building collaborative medical care for children. *Decision making: Social and creative dimensions*, 281-301.

Engeström, Y. (2015). *Learning by expanding*. Cambridge University Press.

Frenzel, A. C. (2014). Teacher emotions. In *International handbook of emotions in education* (pp. 494-519). Routledge.

Frenzel, A. C., Daniels, L., & Burić, I. (2021). Teacher emotions in the classroom and their implications for students. *Educational Psychologist*, *56*(4), 250-264.

Herbst, P., & Chazan, D. (2012). On the instructional triangle and sources of justification for actions in mathematics teaching. *ZDM*, *44*, 601-612.

Kooloos, C., Oolbekkink-Marchand, H., van Boven, S., Kaenders, R., & Heckman, G. (2022). Building on student mathematical thinking in whole-class discourse: exploring teachers' in-the-moment decision-making, interpretation, and underlying conceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *25*(4), 453-477.

Kourti, S.K., & Potari, D. (2023). In-the-moment teacher decision making and emotions. In *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 211-218). PME 46.*

Lake, E. (2019). 'Playing it safe'or 'throwing caution to the wind': Risk-taking and emotions in a mathematics classroom. *Lumat: International Journal of Math, Science and Technology Education*, *7*(2), 50-64.

Martínez-Sierra, G., Arellano-García, Y., & Hernández-Moreno, A. (2022). Which situations trigger emotions of secondary school mathematics teachers? *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(3), 575-595.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning* (Vol. 2). Springer science & business media.

Schwarz, N. (2000). Emotion, cognition, and decision making. *Cognition & Emotion*, *14*(4), 433-440.

Shuman, V., & Scherer, K. R. (2014). Concepts and structures of emotions. *International handbook of emotions in education*, 23-45.

Uzuntiryaki-Kondakci, E., Kirbulut, Z. D., Oktay, O., & Sarici, E. (2021). A qualitative examination of science teachers' emotions, emotion regulation goals and strategies. *Research in Science Education*, 1-25.

ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗΣ ΑΥΤΟΑΝΤΙΛΗΨΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥΣ

Κωνσταντίνα Κουτσογιάννη

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

kon.na.kouts@gmail.com

Η παρούσα μελέτη εξετάζει τις δράσεις και τις αλληλεπιδράσεις δύο μαθητριών κατά τη συνεργατική επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Η ανάλυση τοποθετεί κεντρικά την αυτοαντίληψη των δύο μαθητριών σχετικά με τις μαθηματικές τους δυνατότητες, καθώς την συσχετίζει τόσο με την ατομική πορεία επίλυσης του προβλήματος της καθεμίας, όσο και με τη διάδραση τους κατά την δραστηριότητα. Στόχος της μελέτης είναι να φωτίσουμε κατά πόσο η συνεργασία των δύο μαθητριών ενθαρρύνει την ενεργή συμμετοχή και την ανάπτυξη των δικών τους ιδεών και λύσεων, ενδυναμώνοντάς τες και αντανακλώντας τις συμπεριληπτικές αξίες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αποτελεί κοινό τόπο ότι η σύγχρονη τάση στην μαθηματική εκπαίδευση βρίσκει το θεωρητικό της καταφύγιο στη συμπερίληψη. Σύμφωνα με τους Civil et al. (2019), «η συμπερίληψη συνιστά τις ισότιμες ευκαιρίες των μαθητών να συμμετέχουν και να μαθαίνουν στη μαθηματική τάξη». Επιπλέον, πρόσφατες έρευνες αναδεικνύουν τη συνεργασία κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ως πρακτική που δύναται να προωθήσει την συμπερίληψη των μαθητών (Florian & Black-Hawkins, 2010). Άλλωστε, στις σύγχρονες θεωρήσεις έχει επέλθει μια μετατόπιση από θέσεις οι οποίες υποστήριζαν πως η μάθηση είναι μια καθαρά ατομική διαδικασία προς θέσεις οι οποίες αναδεικνύουν τη μάθηση ως διαδικασία που εκτυλίσσεται μέσα σε ένα ορισμένο κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο (Radford, 2008), είναι, συνεπώς, προϊόν κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Παράλληλα, η συνεργατική επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος εμφανίζεται σε μία διαλεκτική σχέση με την αυτοαντίληψη των μαθητών όσον αφορά τις μαθηματικές τους ικανότητες (César & Santos, 2006).

Η παρούσα μελέτη στοχεύει να αναδείξει τις δράσεις και τις αλληλεπιδράσεις δύο μαθητριών κατά τη συνεργατική επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Η ανάλυση, που επιχειρείται, συνεκτιμά και την αυτοαντίληψη των δύο μαθητριών σχετικά με τις μαθηματικές τους δυνατότητες, καθώς την συσχετίζει τόσο με την ατομική πορεία επίλυσης

του προβλήματος της καθεμίας, όσο και με τη διάδραση τους κατά την δραστηριότητα.

Ειδικότερα, τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

ΕΕ1: Ποιες δράσεις ανέπτυξαν οι δύο μαθήτριες κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος σε σχέση με την αυτοαντίληψή τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες;

ΕΕ2: Τι είδους αλληλεπιδράσεις πραγματοποιήθηκαν κατά τη συνεργασία τους στην επίλυση του προβλήματος;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τους Arvaja et al. (2007), η συνεργασία (collaboration) ορίζεται ως η διαδικασία από κοινού δράσης για την κατασκευή της συλλογικής γνώσης, στην οποία δεν αρκεί οι συμμετέχοντες να μοιράζουν την γνώση τους, αλλά η γνώση να βασίζεται στις ιδέες και τις σκέψεις όλων. Η κύρια ιδέα της συνεργασίας είναι ότι οι μαθητές κατασκευάζουν κοινές γνώσεις, διαπραγματεύονται κοινές έννοιες και επιχειρηματολογούν. Επίσης, αναπτύσσουν αμοιβαία εξήγηση και συλλογιστική, καθώς χτίζουν νέες συνεργατικές γνώσεις και δημιουργούν κάτι που υπερβαίνει αυτό που μπορεί να πετύχει ο καθένας μόνος του (Hämäläinen, 2008).

Στον αντίποδα, οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι αντιλήψεις και τα συναισθήματα των μαθητών σχετικά με τη συμμετοχή τους σε μαθηματικές δραστηριότητες μπορούν να διαμορφώσουν τον τρόπο με τον οποίο βλέπουν τους εαυτούς τους ως μαθητές που κάνουν μαθηματικά και αντίστροφα. Στη μελέτη της Mulryan (1994), συγκρίνονται οι πεποιθήσεις ατόμων με υψηλές επιδόσεις και με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι και οι δύο ομάδες επικεντρώνονται στην κοινωνική διάσταση της συνεργασίας. Ο Weibel (2010) συγκρίνοντας τις οπτικές δύο μαθητών γυμνασίου, δείχνει ότι και οι δύο βλέπουν τη συνεργασία ως μεταφορά γνώσης από ικανούς μαθητές σε συνομηλίκους που δυσκολεύονται. Στην εργασία των Vasilopoulou και Triantafillou (2022), οι συμμετέχοντες μαθητές που, κατά τα λεγόμενά τους είναι καλοί στα μαθηματικά φαίνεται να τοποθετούνται σιωπηρά ως *ενορχηστρωτές* της δραστηριότητας από τους συμμαθητές τους, καθώς αυτοπροσδιορίζονται ως βοηθοί, ενώ οι συμμετέχοντες που παραδέχθηκαν ότι δυσκολεύονται στα μαθηματικά φαίνεται σιωπηρά να τοποθετούνται ως *ακόλουθοι* της δραστηριότητας, καθώς βλέπουν τους εαυτούς τους ως δέκτες βοήθειας. Σε κάθε περίπτωση, όμως, υπογραμμίζεται ο κρίσιμος ρόλος των αυτοαντιλήψεων των μαθητών σχετικά με τις μαθηματικές ικανότητές τους και πώς αντανακλώνται αυτές στις συνεργατικές δραστηριότητες.

Επιπλέον, στα πλαίσια της συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων, η βιβλιογραφία τοποθετεί κεντρικά και την διαβαθμισμένη πολυπλοκότητα που διέπει το εκάστοτε μαθηματικό έργο (tiered activity), όπου οι μαθητές που συμμετέχουν εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων με διαφορετικά επίπεδα πολυπλοκότητας. Τα μαθηματικά έργα δύνανται, έτσι, να διατηρούν την ίδια εστίαση ως προς τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του μαθήματος, αλλά και να παρέχουν ποικίλες διαδρομές πρόσβασης και διαχείρισης της πληροφορίας (Pierce & Adams, 2005).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα υποκείμενα της μελέτης είναι δύο μαθήτριες της Α΄ Γυμνασίου, που συνεργάστηκαν για να επιλύσουν ένα ανοιχτό μαθηματικό πρόβλημα διαβαθμισμένης πολυπλοκότητας. Οι μαθήτριες, που φοιτούν στο ίδιο σχολείο, επιλέχθηκαν, με βάση την αυτοαντίληψη για τις ικανότητές τους στα μαθηματικά και την ετερότητα που παρουσιάζουν στα πλαίσια αυτής. Η εκπαιδευτικός προσπάθησε να ενθαρρύνει τις μαθήτριες να επικοινωνούν μεταξύ τους και να εφαρμόσουν τις ιδέες τους, χωρίς να έχει καθοδηγητικό ρόλο.

Τα δεδομένα της έρευνας είναι: α) η μαγνητοφώνηση ιας δίωρης διδασκαλίας όπου οι μαθήτριες κλήθηκαν να λύσουν το παραπάνω πρόβλημα, β) δύο ατομικές συνεντεύξεις, η πρώτη πριν την διδακτική παρέμβαση, όπου οι μαθήτριες έδωσαν κάποια στοιχεία για την αυτοαντίληψη τους σε σχέση με τις μαθηματικές τους ικανότητες και η δεύτερη μετά την επίλυση του προβλήματος, γ) σημειώσεις πεδίου, δ) τα φύλλα εργασίας των μαθητριών.

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία (grounded theory), η οποία συνίσταται στην ανακάλυψη θεωρίας από δεδομένα που συλλέχθηκαν από την έρευνα (Charmaz, 2006). Καταγράφηκαν οι δράσεις των μαθητριών σε ατομικό επίπεδο και η συσχέτισή τους με την αυτοαντίληψη των μαθηματικών ικανοτήτων τους (ΕΕ1). Στη συνέχεια, εντοπίσαμε τις αλληλεπιδράσεις των δύο μαθητριών στα πλαίσια της συνεργασίας τους, πάλι σε συνάρτηση με την αυτοαντίληψή τους, καθώς και με τις ανατροφοδοτήσεις που

Δράσεις

Απλοποίηση Προβλήματος (Δ1)

Αλγεβρική Τυποποίηση (Δ2)

Ανάπτυξη Εικασιών (Δ3)

grounded ανάλυση, προέκυψαν οι κωδικοί, όπως καταγράφονται στον θεματικό χάρτη.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ακολουθώντας το χρονοδιάγραμμα της έρευνας, σε πρώτη φάση, οι δύο μαθήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις σχετικά με τις μαθηματικές τους ικανότητες και την παρουσία τους στη μαθηματική τάξη. Η Μ1 είναι μια μαθήτρια που δηλώνει ότι είναι πολύ καλή στα μαθηματικά και έχει διακρίσεις σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.

> Μ1: Το έχω με τα μαθηματικά από πάντα, τα καταλαβαίνω και μου αρέσει να λύνω δύσκολες ασκήσεις… Στην τάξη είμαι η πρώτη που σηκώνω χέρι και γενικά, συμμετέχω πολύ στο μάθημα, γιατί μου είναι πολύ εύκολο.

Από την άλλη, η Μ2 είναι μια μαθήτρια που αντιμετωπίζει τα μαθηματικά με άγχος, ενώ τη δυσκολεύουν τα προβλήματα.

> Μ2: Με τις πράξεις είμαι καλή, αλλά τα προβλήματα με δυσκολεύουν πολύ. Δεν καταλαβαίνω τι ζητάνε και τι πρέπει να κάνω. Σκεφτείτε ότι μια μέρα πριν το διαγώνισμα είχα δει στον ύπνο μου ότι με κυνηγάει ένα πρόβλημα να το λύσω… Στην τάξη δε σηκώνω συχνά το χέρι μου, όχι γιατί δεν ξέρω την απάντηση, κάποιες φορές την ξέρω, αλλά γιατί φοβάμαι ότι θα κάνω λάθος ή ότι θα φανεί ότι κάτι δεν έχω καταλάβει.

Περνώντας, τώρα, στην επίλυση του προβλήματος, θα ακολουθήσουμε τον θεματικό χάρτη και τους κωδικούς που αναδύθηκαν από τα δεδομένα μας. Ξεκινώντας τη δραστηριότητα, οι δύο μαθήτριες δούλευαν απόλυτα συγχρονισμένα και σε κάθε βήμα συζητούσαν και συμφωνούσαν για το πως θα συνεχίσουν την τροχιά επίλυσης. Ήδη, οι πρώτες συζητήσεις τους υπογραμμίζουν τη δυναμική που αναπτύσσεται μεταξύ τους.

> Μ1: Λέει τη διαφορά της ροζ επιφάνειας και της ανοιχτόχρωμης κίτρινης. Άρα μιλάει για αυτές.
>
> Μ2: Άρα αυτές που δεν επικαλύπτονται;
>
> Μ1: Ναι ρε αυτό εννοεί
>
> Μ2: Δηλαδή αυτό το ροζ και αυτό το κίτρινο χωρίς το πορτοκαλί;
>
> Μ1: Ναι ακριβώς. Και θέλουμε να βρούμε πόσο είναι αυτές.
>
> Μ2: Κάτσε, λέει, τη διαφορά. Τι εννοεί;
>
> Μ1: Α ναι, εντάξει. Θες λίγο να τα σκιτσάρουμε για να τα βλέπουμε καλύτερα;

Βλέπουμε τη Μ1 να διευθύνει τη συζήτηση, να αναλαμβάνει πρωτοβουλία για το πως θα κινηθούν (κωδικός Α1) ενώ η Μ2 ακολουθεί, ζητώντας

ανατροφοδότηση και επαλήθευση από την Μ1 (κωδικός Α2). Ενώ, λοιπόν, οι δράσεις τους στο πρώτο μέρος της δραστηριότητας βρίσκονται σε άμεση αλληλεξάρτηση, η υψηλή αυτοπεποίθηση της Μ1 διαφαίνεται αμέσως, αφού καθοδηγεί σε ένα βαθμό τη ροή του προβλήματος. Όπως μάς λέει στη δεύτερη συνέντευξη που έλαβε χώρα μετά την παρέμβαση, «συχνά βοηθάω τους συμμαθητές μου στα μαθηματικά, μου αρέσει πολύ και βοηθά και μένα αφού έτσι τα μαθαίνω καλύτερα». Από την άλλη, η Μ2 έχει, αρχικά, πιο παθητική στάση, δείχνει αβέβαιη και αναζητά επιβεβαίωση από τη Μ1.

Λίγο αργότερα, όμως, ενώ ήδη έχουν υπολογίσει τα εμβαδά των τεσσάρων τετραγώνων και έχουν αποφασίσει να προσθέσουν τις επιφάνειες ίδιου χρώματος μεταξύ τους, η Μ2 αρχίζει να αναλαμβάνει μεγαλύτερη δράση.

Μ2: Άρα το εμβαδόν αυτού του τετραγώνου και αυτού (δείχνει τα ροζ τετράγωνα) είναι 170. Να πω τα κίτρινα, τώρα που το κατάλαβα. Αν και ρε συ τι να τα κάνουμε αυτά; Αφού δεν τα θέλουμε ολόκληρα, τα θέλουμε χωρίς αυτά (δείχνει τις επικαλύψεις).

Μ1: Δεν ξέρω ακόμα, αλλά θα δούμε. Ας κάνουμε το ίδιο για το κίτρινο και βλέπουμε.

Μ2: Ωραία, Ε2+Ε4=106. Αυτή είναι η κίτρινη επιφάνεια με τις επικαλύψεις.

Η Μ2, λοιπόν, αν και αρκετά διστακτική, λαμβάνει την επιβεβαίωση της Μ1 και προχωρά τη δραστηριότητα. Όπως η ίδια μάς λέει στη συνέντευξη που ακολούθησε της επίλυσης:

Μ2: Εντάξει, το πρόβλημα ήταν δύσκολο και στην αρχή δεν ήξερα τι να κάνω. Η Μ1 με βοήθησε πολύ και κυρίως, ένιωσα άνετα να το λέω όταν δεν καταλαβαίνω. Στην τάξη ντρέπομαι να πω ότι κάτι δεν κατάλαβα αλλά χθες (εννοεί την επίλυση προβλήματος) ένιωσα άνετα να ρωτήσω για να καταλάβω γιατί σκεφτόμουν ότι δε θα γυρίσουν να με κοιτάξουν είκοσι παιδιά. Απλά θα μου εξηγούσε η Μ1 και θα προχωρούσαμε. Και από ένα σημείο και μετά, το έπιασα το πρόβλημα και μπορούσα κι εγώ να λέω τι να κάνουμε και να προχωράω μόνη μου.

Η Μ2 τοποθετεί στις προτεραιότητές της την ‘ασφάλεια’ στην αλληλεπίδραση κατά τη συνεργασία, ώστε να αναζητήσει ανατροφοδότηση (κωδικός Α2) ή ακόμα και να αναλάβει πρωτοβουλίες για την εξέλιξη της δραστηριότητας (κωδικός Α1). Εκκινά, φυσικά, από την παραδοχή ότι υπάρχει διαφορά στο επίπεδο κατανόησης, δηλαδή δείχνει να είναι πάντα σε πρώτο πλάνο, στο μυαλό της, η αυτοαντίληψή της ως μια μαθήτρια που θα δυσκολευτεί να λύσει το πρόβλημα, αλλά στα πλαίσια της συνεργασίας της με τη Μ1, εμποτίζεται αυτή η πεποίθηση της

με θετική χροιά, εφόσον την οδηγεί στο να αναζητήσει επαλήθευση για να νιώσει ‘ασφαλής’ και να προχωρήσει. Επίσης, στα λόγια της εντοπίζουμε το πως αυτή η, κατά τα λεγόμενα της, θετική αλληλεπίδραση με τη Μ1, έχει θετικό αντίκτυπο και στην αυτονομία της. Δηλαδή, αντιλαμβάνεται ότι η αλληλεπίδρασή τους έχει ως συνέπεια το κατά πόσο θα αναπτύξει τις δικές της ιδέες και, τελικά, θα προβεί σε ατομικές δράσεις.

Αυτός ο συγχρονισμός που εντοπίζουμε στο πρώτο μέρος της επίλυσης, όπου υπολογίζουν τα εμβαδά συμπεριλαμβανομένου των επικαλύψεων, στο δεύτερο μέρος διαφοροποιείται. Συγκεκριμένα, ενώ προσπαθούν να αποφασίσουν πως θα κινηθούν ώστε να υπολογίσουν τα εμβαδά των σχημάτων χωρίς τις επικαλύψεις, εκτυλίσσεται ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Να ρωτήσω εγώ, το Ε1 (το πρώτο τετράγωνο) και το Ροζ1(το τετράγωνο χωρίς την επικάλυψη), όπως τα έχετε ονομάσει, τι διαφορά έχουν; Είναι το ίδιο πράγμα;

Μ2: Η επικάλυψη.

Μ1: Δηλαδή να πούμε 121-αυτό, ας πούμε x και αυτό θα είναι το Ροζ1.

Μ2: Δεν κατάλαβα. Πάλι δεν τα ξέρουμε τα δύο όμως. Πώς θα βρούμε το x αν δεν ξέρουμε το Ροζ1. Είναι πολλά αυτά που δεν ξέρουμε, θα μπερδευτούμε.

Μ1: Ναι αλλά αν το κάνουμε σε μεγάλη παράσταση μπορεί και να βγουν. Να μην τα πούμε x όμως γιατί δεν είναι ίδια. Ας πούμε Πορτ1, Πορτ2,…, πάμε με χρώματα.

Μ2: Εγώ δεν κατάλαβα. Σαν εξίσωση με πολλούς αγνώστους;

Μ1: Όχι, ουσιαστικά να πάμε στην επιφάνεια Κ1 και να πούμε ότι αυτή θα είναι όλο το τετράγωνο, δηλαδή 81 και μετά να αφαιρέσουμε το Πορτ1 και το Πορτ2. (γράφει Κ1=81-Πορτ1-Πορτ2). Και όλα αυτά να τα βάλουμε σε μια μεγάλη πράξη.

Μ2: Α κατάλαβα. Δηλαδή το Ροζ2 θα είναι 49-Πορτ2-Πορτ3;

Βλέπουμε, λοιπόν και πάλι, τις δύο μαθήτριες να διατηρούν τις ίδιες δυναμικές, όπου η Μ1 προτείνει ιδέες, επεξηγεί και επιχειρηματολογεί (κωδικός Α3), για να υποστηρίξει τις απόψεις της. Ωστόσο, η Μ2 δείχνει να προβάλει αντίσταση στην πρόταση της Μ1, αφού της φαίνεται πολύ σύνθετη και αντ’ αυτού προτείνει τη δική της ιδέα, παρεκκλίνοντας για πρώτη φορά από την αρχή της δραστηριότητας από την καθοδήγηση της Μ1.

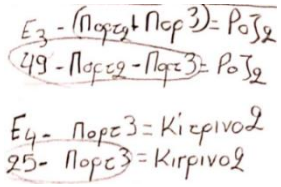
Μ2: Οκ αλλά και πάλι είναι πολλά αυτά που δεν ξέρουμε. (κοιτάει την επικάλυψη των δύο πρώτων τετραγώνων). Ας πούμε το πορτ1 μπορεί να είναι… αφού αυτό (δείχνει το πρώτο τετράγωνο) είναι 121 και αυτό (δείχνει το δεύτερο τετράγωνο) είναι 81, η

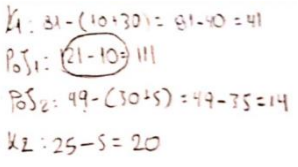
επικάλυψη φαίνεται πολύ μικρότερη, δε θα είναι για παράδειγμα… δεν ξέρω… 10;

Μ1: Αυτό το λες εσύ, δεν υπάρχει στο πρόβλημα.

Μ2: Ναι γιατί προσπαθώ να βγάλω άκρη. Λέω να κάνουμε μαντεψιές για τα πορτοκαλί. Ας πούμε το Πορτ2 να είναι ένα 50άρι.

Το παραπάνω απόσπασμα αποτελεί και το πιο κρίσιμο σημείο, που ουσιαστικά, άλλαξε και καθόρισε τη ροή της δραστηριότητας. Η Μ2 αναπτύσσει και μοιράζεται με τη Μ1 τις εικασίες της (κωδικός Δ3) σχετικά με τα εμβαδά των επικαλύψεων. Είναι η πρώτη φορά που αναπτύσσει ανεξάρτητα ατομική δράση και επιχειρεί να προσαρμόσει την πολυπλοκότητα του προβλήματος σε επίπεδα που θεωρεί αυτή διαχειρίσιμα. Απλοποιεί το πρόβλημα (κωδικός Δ1), ενώ η Μ1 δείχνει να διαφωνεί και προτείνει την αλγεβρική τυποποίηση του προβλήματος (κωδικός Δ2). Τελικά, αποφασίζουν να εργαστούν η καθεμία με το δικό της τρόπο στα φύλλα εργασίας τους, παράλληλα, ανατροφοδώντας και προσπαθώντας να διαψεύσουν ή να επαληθεύσουν η μία την άλλη. Ενώ, λοιπόν, δε σταματούν να αλληλεπιδρούν και να συνεργάζονται, εργάζονται ταυτόχρονα με δύο διαφορετικούς τρόπους στο ίδιο πρόβλημα συζητώντας και συγκρίνοντας τα φύλλα εργασίας τους.





Ενώ η καθεμία αναπτύσσει τη δράση της, η αλληλεπίδραση συνεχίζεται, αφού η Μ1 προτείνει εμβαδά για τις επικαλύψεις που η Μ2 μαντεύει και η Μ2 ζητά από τη Μ1 να τής εξηγήσει τις μεταβλητές που έχει χρησιμοποιήσει για τις επικαλύψεις. Σύντομα, εστιάζουν την προσοχή τους στο φύλλο εργασίας της Μ2 αφού έχοντας υπολογίσει τα εμβαδά των ροζ και κίτρινων επιφανειών είναι εύκολο να υπολογίσουν τη ζητούμενη διαφορά των εμβαδών των δύο σχημάτων.

Σε αυτό το σημείο, πριν προχωρήσουν στην ολοκλήρωση του αλγεβρικού τρόπου της Μ1, η εκπαιδευτικός διακόπτει τη ροή για να θέσει ένα κρίσιμο ερώτημα.

Ε: Τι πιστεύετε; Η Μ1 θα βγάλει διαφορετικό αποτέλεσμα από τη Μ2; Ή αν αλλάζαμε τα υποθετικά εμβαδά θα βρίσκαμε πάλι 64;

Μ2: Λογικά άλλο θα βγει. Δεν ξέρω, αφού πήρα τυχαία νούμερα, άλλο θα είναι το σωστό.

Μ1: Εγώ νιώθω ότι θα είναι το ίδιο. Αυτή είναι η παγίδα, αλλά αν κάνουμε αυτό με τις μεταβλητές θα μάθουμε.

Σε αυτό το σημείο, βλέπουμε τις δύο μαθήτριες να διαφωνούν και πάλι αναπτύσσοντας εικασίες (κωδικός Δ3). Επίσης, εντοπίζουμε ότι η εικασία της Μ2 εφορμάται από την αρχική υπόθεση ότι η λύση της είναι λάθος, γεγονός που ,όταν αναφέρθηκε στη συνέντευξη που ακολούθησε, η Μ2 είπε «δεν περιμένω να είναι σωστό το αποτέλεσμά μου, δηλαδή και στην τάξη, αν ακούσω από κάποιον συμμαθητή μου ότι έβγαλε διαφορετικό αποτέλεσμα από μένα σε ένα τεστ, θα πιστέψω ότι έκανα κάποιο λάθος». Αντίθετα, η Μ1 δείχνει να πιστεύει ότι το αποτέλεσμα θα είναι σωστό και το χαρακτηρίζει ως παγίδα. Αντλώντας από τη συνέντευξη, «συχνά στα μαθηματικά γίνεται αυτό που δεν περιμένεις, γι' αυτό περίμενα να βγει ίδιο, γιατί συχνά με διαφορετικούς τρόπους παίρνεις το ίδιο αποτέλεσμα και αυτό μου αρέσει πολύ».

Προχωρώντας στο φύλλο εργασίας της Μ1, εργάστηκαν συνεργατικά, αντιπαραβάλλοντας τους δύο τρόπους όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

Μ1: Το 121- Πορτ1 που έχω βάλει εγώ εδώ είναι το 121-110 που έχεις εσύ εδώ

Μ2: Και το 49-Πορτ2-Πορτ3 είναι το δικό μου 14

Διαγράφουν τελικά τα εμβαδά των επικαλύψεων και τελικά καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, κάνοντας μαζί τις πράξεις, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

Έτσι, συνειδητοποιούν, με την βοήθεια και της εκπαιδευτικού, ότι τελικά τα εμβαδά των επικαλύψεων ήταν ανεξάρτητα του αποτελέσματος. Συγκεκριμένα, η Μ1, ενθουσιασμένη, λέει «αφού διέγραψα όλα τα πορτοκαλί δεν έπαιξαν ρόλο, δεν επηρέασαν το αποτέλεσμα» με τη Μ2 να συμπληρώνει ότι «οι διαγραφές όταν έβαλα τα νούμερα, έγιναν εσωτερικά και δεν το πήραμε χαμπάρι, άρα τελικά δεν έπαιξαν ρόλο τα νούμερα που μάντεψα», επιχειρηματολογώντας και γεφυρώνοντας τις δύο τροχιές επίλυσης που επέλεξαν (κωδικός Α3) και καταλήγοντας στο ίδιο κοινό συμπέρασμα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, μελετήσαμε τις δράσεις και τις αλληλεπιδράσεις δύο μαθητριών της Α' Γυμνασίου κατά τη συνεργατική επίλυση ενός προβλήματος. Ως συνάρτηση αυτών των δράσεων και των αλληλεπιδράσεων αναλύσαμε τη διαφορετική αυτοαντίληψη που έχουν οι δύο μαθήτριες και πως αυτή αντανακλάται στη συνεργασία τους. Σε μεγάλο βαθμό, είδαμε ότι η μαθήτρια που έχει υψηλή αυτοπεποίθηση στα μαθηματικά, αναλάμβανε περισσότερες πρωτοβουλίες,

επιχειρηματολογούσε εκτενέστερα, ενώ η αδύναμη, κατά τα λεγόμενά της, μαθήτρια αναζητούσε συχνά ανατροφοδότηση και επαλήθευση, εμφανίζοντας, λοιπόν, τη δυναμική *ενορχηστρωτή* και *ακόλουθου* της δραστηριότητας (Triantafillou & Vasilopoulou, 2022). Ωστόσο, η ετερότητα της αυτοαντίληψης παρήγε θετικές αλληλεπιδράσεις, και δημιούργησε ένα κλίμα ασφάλειας και εμπιστοσύνης ώστε, τελικά, να προτείνει και να αναπτύξει η καθεμία τη δική της δράση, προσαρμοσμένη στο επίπεδο πολυπλοκότητας που θεωρούσε διαχειρίσιμο. Έτσι, λοιπόν, οι μαθήτριες συγχρονίστηκαν, επαληθεύοντας η μία την άλλη, προβαίνοντας σε εικασίες και συγκρίνοντας την εργασία τους, για να καταλήξουν στο ίδιο συμπέρασμα.

Σε αυτό το σημείο, κρίνεται σημαντικό να υπογραμμίσουμε ότι με τη συνεργασία τους, δημιούργησαν, τελικά, κάτι που υπερβαίνει αυτό που μπορεί να πετύχει η καθεμία μόνη της (Hämäläinen, 2008). Σε γνωστικό επίπεδο, η Μ2 δέχτηκε σε πολλά σημεία τη βοήθεια της Μ1, ενώ και για τη Μ1 ίσως, τελικά, να μην ήταν απόλυτα σαφές ότι η διαφορά των εμβαδών ήταν ανεξάρτητη των επικαλύψεων, αν δεν έβλεπε την παράλληλη λύση της Μ2 ή αν εργαζόταν ατομικά. Σε κοινωνικό επίπεδο, είδαμε τις δύο μαθήτριες να αφομοιώνουν ιδέες και να συμμετέχουν ενεργά σε όλη τη ροή της επίλυσης του προβλήματος, να εργάζονται αυτόνομα και παράλληλα συνεργατικά, όχι παρά, αλλά, ίσως, εξαιτίας της ανομοιογένειας στην αυτοαντίληψη των μαθηματικών ικανοτήτων τους. Κοιτώντας, λοιπόν, από τη συμπεριληπτική οπτική, έχοντας ορίσει τη συμπερίληψη ως την ισότιμη συμμετοχή στην εκπαιδευτική διαδικασία (Civil et al., 2019), βλέπουμε ότι η συνεργασία των δύο μαθητριών προσεγγίζει αυτή την ιδέα, τόσο στη διδακτική διαχείριση, τη δημιουργία ομάδων που κάνουν τους μαθητές να νιώθουν ασφαλείς να διατυπώνουν τις ιδέες τους, όσο και στην επιλογή του μαθηματικού έργου αν και οι σχετικά παγιωμένες δυναμικές και αλληλεπιδράσεις που παρατηρήσαμε ενέχουν προκλήσεις. Άλλωστε, η διαχείριση θεμάτων ισότητας και συμπερίληψης των μαθητών στις τάξεις των μαθηματικών είναι ένα σύνθετο ζήτημα, αλλά είναι, εξίσου, κρίσιμο να στοχαζόμαστε και να ερευνούμε πάνω σε αυτό, αναζητώντας μεθόδους και πρακτικές που μπορούν να ενδυναμώσουν τους μαθητές και να καταλάβουν τον ισότιμο χώρο που τους αναλογεί στην εκπαιδευτική διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arvaja, M., Salovaara, H., Häkkinen, P., & Järvelä, S. (2007). Combining individual and group-level perspectives for studying collaborative knowledge construction in context. *Learning and Instruction,* 17(4), 448-459.

César, M., & Santos, N. (2006). From exclusion to inclusion: Collaborative work contributions to more inclusive learning settings. *European journal of psychology of education*, 21(3), 333-346.

Charmaz, K. (2006). Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis. London: Sage.

Civil, M., Hunter, R., & Crespo, S. (2019). Mathematics teachers committed to equity: A review of teaching practices. *International Handbook of Mathematics Teacher Education,* Vol.1, 243-273.

Florian, L., & Black-Hawkins, K. (2011). Exploring inclusive pedagogy. *British educational research journal*, 37(5), 813-828.

Hämäläinen, R. (2008). Designing and investigating pedagogical scripts to facilitate computer-supported collaborative learning. *Tutkimuksia/Koulutuksen tutkimuslaitos*, (24).

Mulryan, C. M. (1994). Perceptions of intermediate students' cooperative small-group work in mathematics. The Journal of Educational Research, 87(5), 280-291.

Pierce, R. L., & Adams, C. M. (2005). Using tiered lessons in mathematics. *Mathematics teaching in the middle school*, 11(3), 144-149.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Vasilopoulou, M., & Triantafillou, C. (2022, February). Inclusion and peer-collaboration in mathematics classrooms: The case of students' perspectives. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12) (No. 19).

Weibel, C. (2010). High school students' perspectives on collaboration in their mathematics class. *Proceedings of the 26th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus: Ohio.

ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΝΤΑΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΙΔΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΜΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΠΟΝΟΥ

Βασιλική Χρυσικού

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

vchrysikou@gmail.com

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος μια ευρύτερης έρευνας-δράσης για τη διδασκαλία μαθηματικών σε μαθητές με αναπηρία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στόχος της εργασίας είναι να μελετηθεί με ποιον τρόπο μπορεί να λειτουργήσει η συνεργασία ενός μαθηματικού και ενός γεωπόνου για την εκπαίδευση τριών μαθητών με νοητική αναπηρία σε ειδικό σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί ωφελήθηκαν σε επίπεδο επαγγελματικής ανάπτυξης και οι μαθητές σε μαθησιακό επίπεδο ενισχύοντας και την αυτονομία τους, ταυτόχρονα. Παράλληλα, εντοπίστηκαν προκλήσεις, όπως δομικά ζητήματα, ενώ αναδείχθηκαν ορισμένοι βασικοί παράγοντες επιτυχίας της συνεργασίας, όπως η εμπιστοσύνη.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τα τελευταία χρόνια η δημιουργία συνεργατικών πρακτικών βρίσκεται στο επίκεντρο των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης με τους Jaworski et al. (2017, σελ. 263) να αναφέρουν ότι *«η συνεργασία περιλαμβάνει δασκάλους μαθηματικών που συμμετέχουν σε κοινή δραστηριότητα, κοινό σκοπό, κριτικό διάλογο και διερεύνηση, αμοιβαία υποστήριξη· απαντώντας σε ζητήματα που αποτελούν πρόκληση για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και για αναστοχασμό σχετικά με τον ρόλο τους στο σχολείο και την κοινωνία»*. Η σημασία της συνεργασίας για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών επισημαίνεται και από τις Forte και Flores (2014), οι οποίες τονίζουν τους περιορισμούς τέτοιων εγχειρημάτων αλλά και τον ρόλο των συνεργασιών που αποτελούν και έκφραση άτυπων μορφών επαγγελματικής ανάπτυξης.

Οι Friend και Cook (2014) αναφέρονται στη συνεργασία των εκπαιδευτικών δίνοντας έμφαση στην ισότιμη και εθελοντική συμμετοχή τους «*στην κοινή λήψη αποφάσεων για την επίτευξη ενός κοινού στόχου*» (σελ. 8). Οι εκπαιδευτικοί που συνεργάζονται αποτελεσματικά μοιράζονται την ευθύνη λήψης αποφάσεων, αλλά και την ευθύνη των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, για να είναι επιτυχής η συνεργασία χρειάζεται να πληρούνται και άλλες προϋποθέσεις, όπως είναι ο χρόνος προγραμματισμού, η κοινή προσπάθεια, και η υποστήριξη από τη σχολική διοίκηση (Friend & Cook, 2014; Gallagher, Malone, & Ladner, 2009).

Η ανάγκη για συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών είναι ακόμα εντονότερη όταν η αναφορά μας είναι οι μαθητές [1] με αναπηρία καθώς οι εκπαιδευτικοί για να ανταποκριθούν στις συνεχώς μεταβαλλόμενες ανάγκες τους είναι απαραίτητο να περάσουν τα «σύνορα» του δικού τους επιστημονικού κλάδου και να συνεργαστούν με εκπαιδευτικούς από άλλους τομείς αναπτύσσοντας νέες προσεγγίσεις στη διδασκαλία (Hernandez, 2013). Η πολυπλοκότητα των αναγκών των μαθητών με αναπηρία, σε συνδυασμό με την πολυπλοκότητα της εκπαιδευτικής πραγματικότητας και τις αποφάσεις που καλείται να λάβει ο εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης, δεν αφήνει περιθώρια μονομερούς προσέγγισης της εκπαίδευσης των μαθητών με αναπηρία αλλά η συνεργασία κρίνεται απαραίτητη (Στρογγυλός, 2011).

Η συνεργασία διαφορετικών ειδικοτήτων οδηγεί στη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων για τους μαθητές με αναπηρία, ενισχύοντας παράλληλα την αυτονομία και κατ' επέκταση την κοινωνική ένταξή τους ως ισότιμα μέλη της κοινωνίας (Στρογγυλός & Ξανθάκου, 2007). Παρόλο που η συνεργασία έχει σημαντικά οφέλη, η εφαρμογή συνεργατικών πρακτικών στη δευτεροβάθμια ειδική εκπαίδευση συνδέεται και με αρκετές προκλήσεις (Friend & Cook, 2014). Από τη μια πλευρά υπάρχουν πολλά διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα που φαίνονται ασύνδετα μεταξύ τους οδηγώντας στην απόκτηση μεμονωμένων γνώσεων και δεξιοτήτων από τους μαθητές με αναπηρία, οι εκπαιδευτικοί είναι εξειδικευμένοι σε ένα γνωστικό αντικείμενο χωρίς εμπειρία και κουλτούρα συνεργασίας. Από την άλλη πλευρά, το σχολείο παρέχει περιορισμένες ευκαιρίες διεπιστημονικής συνεργασίας καθώς υπάρχουν δομικές δυσκολίες, όπως είναι οι χωροταξικοί περιορισμοί ή η οργάνωση του ωρολογίου προγράμματος, με αποτέλεσμα οι μαθητές με αναπηρία να αλλάζουν εκπαιδευτικό κάθε ώρα και έτσι να καλούνται να προσαρμοστούν στις διαφορετικές προσεγγίσεις και προσδοκίες των εκπαιδευτικών (Conderman, Hedin, & Bresnahan, 2013).

Οι παραπάνω προβληματισμοί έχουν υπαγορεύσει την παρούσα εργασία, στην οποία διερευνάται με ποιον τρόπο μπορεί να λειτουργήσει η συνεργατική διδασκαλία ενός μαθηματικού και ενός γεωπόνου για την εκπαίδευση μαθητών με νοητική αναπηρία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, εντοπίζοντας τα οφέλη, τις δυσκολίες/προκλήσεις και τους βασικούς παράγοντες επιτυχίας της συνεργασίας.

Η ΕΡΕΥΝΑ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας-δράσης, στην οποία διερευνώνται οι κοινωνικο-πολιτισμικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών σε μαθητές με νοητική αναπηρία στη δευτεροβάθμια ειδική εκπαίδευση. Η έρευνα-δράση

αποτελείται από τρεις αλλεπάλληλους κύκλους με τον καθένα να ακολουθεί τις εξής φάσεις: σχεδιασμός, δράση/υλοποίηση του σχεδιασμού, παρατήρηση των αποτελεσμάτων της δράσης, και αναστοχασμός. Ο προηγούμενος τροφοδοτεί τον επόμενο κύκλο με στόχο τη συνεχή βελτίωση της κατανόησης της εκπαιδευτικής πράξης (Carr & Kemmis, 2004). Σε αυτή την εργασία παρουσιάζονται δεδομένα του τρίτου κύκλου της έρευνας-δράσης, στα οποία αποτυπώνεται η συνεργασία δύο εκπαιδευτικών ως παράγοντας που επηρεάζει τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών ώστε να αποφεύγεται η αποσπασματική παρουσίαση γνώσεων/ δεξιοτήτων αυτόνομων γνωστικών αντικειμένων.

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα είναι τρεις μαθητές με νοητική αναπηρία, η Κατερίνα (16 ετών), ο Βαγγέλης (24 ετών) και η Αναστασία (29 ετών) [2], που φοιτούν στο ίδιο τμήμα ενός Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. (Εργαστήριο Ειδικής Επαγγελματικής Εκπαίδευσης και Κατάρτισης) της Ελλάδας. Όσον αφορά στο επίπεδο κατανόησης μαθηματικών εννοιών, οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν, να ονομάσουν και να γράψουν έναν αριθμό μέχρι το δέκα, αλλά δυσκολεύονται να συγκρίνουν δύο αριθμούς στο συμβολικό επίπεδο (δηλ. χωρίς τη χρήση αντικειμένων ή εικόνων). Και οι τρεις μαθητές δυσκολεύονται να διατηρήσουν την ένα-προς-ένα αντιστοιχία κατά την καταμέτρηση μέχρι δέκα αντικειμένων, ενώ γνωρίζουν ότι ο τελευταίος αριθμός που ανέφεραν αναπαριστά το πλήθος του συνόλου των αντικειμένων. Επιπλέον, μπορούν να κάνουν νοερά προσθέσεις με αριθμούς μέχρι το δύο (δηλ. τις πράξεις 1+1, 2+1), ενώ για μεγαλύτερους αριθμούς στηρίζονται στην απαρίθμηση με χρήση αντικειμένων.

Τα ερευνητικά εργαλεία που αξιοποιούνται είναι η παρατήρηση, η συνέντευξη, και το ερευνητικό ημερολόγιο της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού (μαθηματικός), όπου καταγράφονται σημειώσεις πεδίου, σκέψεις, επεξηγήσεις και ερμηνείες. Τα δεδομένα της παρατήρησης, του ερευνητικού ημερολογίου και των συνεντεύξεων με τον γεωπόνο και τους συμμετέχοντες μαθητές, αναλύονται χρησιμοποιώντας τεχνικές της θεματικής ανάλυσης περιεχομένου (Braun & Clarke, 2006).

Σχεδιασμός της δράσης

Από τον αναστοχασμό του δεύτερου κύκλου αναδείχθηκε η ανάγκη να διευρυνθεί η εστίαση της εκπαίδευσης των μαθητών από τα στενά όρια της τάξης των μαθηματικών στο σχολικό πλαίσιο μέσω της συνεργασίας με το εργαστήριο γεωπονίας, που αποτελεί την ειδικότητα επαγγελματικής κατάρτισης των τριών μαθητών [3]. Παρά την προϋπάρχουσα κουλτούρα συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών –συνεργατικό κλίμα για παράδειγμα κατά τη διάρκεια κοινών σχολικών δράσεων/ εκδηλώσεων– απουσιάζει η κουλτούρα συνεργασίας στο πλαίσιο της διδασκαλίας καθώς κάθε εκπαιδευτικός εργάζεται αυτόνομα στην αίθουσά του, με εξαίρεση ορισμένες συνδιδασκαλίες που επιβάλλονται μεταξύ των εργαστηριακών

ειδικοτήτων. Έτσι, στόχος του τρίτου κύκλου της έρευνας-δράσης, στον οποίο εστιάζει η εργασία, είναι η ανάπτυξη διεπιστημονικής συνεργασίας στο πλαίσιο των μαθημάτων των μαθηματικών και της γεωπονίας.

Δράση

Η μαθηματικός και ο γεωπόνος συνεργάστηκαν με την έννοια του όρου που αποδίδεται από τους Friend και Cook (2014). Αρχικά συζητήθηκαν οι λεπτομέρειες που αφορούν στη συνεργασία, τους διδακτικούς στόχους και το πλαίσιο της συνδιδασκαλίας, με ορισμένες δομικές δυσκολίες –χωροταξικοί περιορισμοί και περιορισμοί του ωρολογίου προγράμματος– να αποτελούν εμπόδια. Από κοινού, αποφασίστηκε ο χρόνος συνεργατικής διδασκαλίας, τροποποιήθηκε το ωρολόγιο πρόγραμμα της σχολικής μονάδας και ενημερώθηκαν οι άμεσα εμπλεκόμενοι εκπαιδευτικοί για τις απαραίτητες αλλαγές. Βασικός διδακτικός στόχος, τον οποίο, επίσης, από κοινού αποφάσισαν οι δύο εκπαιδευτικοί, ήταν η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και η ανάπτυξη δεξιοτήτων για την αρμονική συμβίωση ανθρώπου-φύσης μέσα από δραστηριότητες που συμβάλλουν στην ενίσχυση της αυτονομίας και της κοινωνικής ένταξης των μαθητών [4]. Η βασισμένη στην κοινότητα διδασκαλία (community-based instruction) και η βιωματική προσέγγιση σε αυθεντικά περιβάλλοντα μάθησης αποτέλεσαν βασικές επιλογές των δύο εκπαιδευτικών, στις οποίες στήριξαν τις δράσεις που πραγματοποίησαν.

Οι κοινές εκπαιδευτικές δράσεις υλοποιήθηκαν σε χρονικό διάστημα επτά εβδομάδων και είχαν συνολική διάρκεια είκοσι διδακτικών ωρών. Στο πλαίσιο της συνεργασίας πραγματοποιήθηκαν αρκετές επισκέψεις σε εξωτερικούς χώρους συναφείς με το εργαστήριο της γεωπονίας, οι οποίοι αποτελούν και μελλοντικούς χώρους επαγγελματικής κατάρτισης και εργασίας των μαθητών, ενισχύοντας παράλληλα την αυτόνομη πραγματοποίηση χρηματικών συναλλαγών σε διαφορετικά κοινωνικά πλαίσια καθώς και την κοινωνική ένταξη των μαθητών.

Οι δράσεις που σχεδιάστηκαν πλαισιώθηκαν από πραγματικά σενάρια που έχουν νόημα για τους μαθητές. Για παράδειγμα, η πρώτη κοινή δράση είχε ως αφορμή τη γιορτή της μητέρας, στο πλαίσιο της οποίας οι μαθητές επισκέφτηκαν ένα θερμοκήπιο για να αγοράσουν ένα δώρο για τις μητέρες τους. Στη συνέχεια, επισκέφθηκαν ένα κοντινό σούπερ μάρκετ, για να αγοράσουν γλάστρα ώστε να μεταφυτεύσουν το φυτό που είχαν ήδη προμηθευτεί. Κατά τη διάρκεια των χρηματικών συναλλαγών οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη στρατηγική του ένα-ευρώ-παραπάνω (next-dollar ή one-more-than strategy), αξιοποιώντας τα νομίσματα 2€, 1€, 1€, 1€, 1€, και 1€ που τους είχαν δοθεί πριν την επίσκεψη. Με την επιστροφή τους στο σχολείο, οι μαθητές μεταφύτευσαν οι ίδιοι το φυτό τους στο θερμοκήπιο του σχολείου. Κατά τη διάρκεια της μεταφύτευσης, παράλληλα, μαθησιακός στόχος ήταν η σύνδεση της διαδικασίας με

βασικές χρονικές έννοιες, όπως «πότε ποτίζω», «τι ώρα», κ.ά., καθώς και βασικές αριθμητικές έννοιες όπως «πόσο νερό ρίχνουμε», κ.ά.

Αποτελέσματα της δράσης

Ενδυνάμωση μέσω συνεργασίας. Οι δύο εκπαιδευτικοί έχοντας τις ίδιες πεποιθήσεις σχετικά με την αξία της συνεργατικής διδασκαλίας τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς, αναγνώρισαν ότι η αυτόνομη διδακτική προσέγγιση του καθενός μπορεί να ενδυναμωθεί μέσω της συνεργατικής διδασκαλίας:

> Εννοείται ότι οι συνεργασίες είναι αποδοτικότερες. […] Να συνεργαστούμε γιατί είναι ανάγκη, όχι «θα το κάνουμε απλά για να γίνει». (Γεωπόνος)
>
> Δεν αρκεί να κάνουμε μαθηματικά στην τάξη, πώς θα τα συνδέσουν τα παιδιά με όσα κάνουν στα μαθήματα της γεωπονίας; (Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός)
>
> Θα έπρεπε να είναι καθεστώς στα σχολεία, τουλάχιστον … να μπορεί ο ένας εκπαιδευτικός να πηγαίνει και να παρακολουθεί το μάθημα του αλλουνού. […] Κουβεντιάζεις και λες «έχω αυτό το θέμα στο συγκεκριμένο τμήμα, πώς το αντιμετωπίζεις εσύ;». […] Εάν σου πει ότι έκανα εκείνο και δούλεψε, δεν πρέπει να πας να το δεις; (Γεωπόνος)

Αλλαγή πρακτικής. Στο πλαίσιο της συνεργασίας οι δύο εκπαιδευτικοί άλλαξαν τις εκπαιδευτικές τους πρακτικές δημιουργώντας από κοινού μαθησιακά πλαίσια όπου οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναπτύξουν τις απαραίτητες δεξιότητες για να επιλύσουν ένα πραγματικό πρόβλημα καθημερινής ζωής και ταυτόχρονα να ενισχύσουν την αυτονομία και την κοινωνική τους ένταξη. Μέσω των δράσεων ενισχύθηκε η ενεργητική συμμετοχή και αυτενέργεια των μαθητών βοηθώντας παράλληλα την κατάκτηση των μαθησιακών στόχων σε ικανοποιητικό βαθμό. Πιο συγκεκριμένα, στην επίσκεψη που πραγματοποιήθηκε στην αρχή της δράσης στο θερμοκήπιο οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να υλοποιήσουν όλα τα βήματα αγοράς των λουλουδιών αυτόνομα (Εικόνες 1-2). Αντίθετα, στην επίσκεψη που υλοποιήθηκε στο ίδιο θερμοκήπιο στο τέλος του τρίτου κύκλου και οι τρεις μαθητές κατάφεραν να αγοράσουν τα μυρωδικά που επέλεξαν πραγματοποιώντας οι ίδιοι τη χρηματική συναλλαγή.

Εικόνες 1 – 2: Αγορά λουλουδιών από το θερμοκήπιο

Αλλαγή στάσης μαθητών ως προς τα μαθηματικά. Οι μαθητές έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό για τις δράσεις που πραγματοποιήθηκαν, αναλαμβάνοντας ενεργό ρόλο και ζητώντας από τις μητέρες τους να υλοποιήσουν αρκετές από τις δράσεις στο οικογενειακό πλαίσιο. Επιπλέον, από τα παρακάτω αποσπάσματα φαίνεται να άλλαξε η στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, για τα οποία τα αρχικά τους συναισθήματα ήταν αδιάφορα έως αρνητικά:

> *(Το αγαπημένο μου μάθημα είναι)* τα μαθηματικά. […] Μ' άρεσαν όλα που κάναμε έξω *(ενν. τις επισκέψεις στην κοινότητα)*. […] *(Η δουλειά που θέλω να κάνω είναι)* τα μαθηματικά. […] Γιατί μου αρέσει. (Αναστασία)

> *(Όταν σκέφτομαι τα μαθηματικά)* είμαι πολύ χαρούμενος. (Βαγγέλης)

> *(Όταν σκέφτομαι τα μαθηματικά)* είναι πολύ ωραία! (Κατερίνα)

Αλλαγή πρακτικής της σχολικής μονάδας. Η συνεργασία που αναπτύχθηκε και οι δράσεις που πραγματοποιήθηκαν επηρέασαν τις συνήθεις πρακτικές της σχολικής μονάδας επιτρέποντας στους μαθητές να αναλάβουν ενεργό ρόλο σε συνεργατικές δράσεις που πραγματοποιήθηκαν εντός και εκτός της σχολικής μονάδας:

> Έχουμε πάει (*στο παρελθόν)* σε καταστήματα με φυτά. Σε επίπεδο, όμως, γεωπονικό. Να δούμε τα φυτά ή να δούμε τα φακελάκια με τα σποράκια, και συνήθως με τα μεγαλύτερα παιδιά. […] Σε σούπερ μάρκετ έχουμε πάει κυρίως στο επίπεδο της κοινωνικής αγωγής … κοινωνικοποίησης, όχι σε επίπεδο *(χρηματικής)* συναλλαγής. […] *(Εάν αγοράζαμε κάτι)* εμείς *(οι εκπαιδευτικοί)* πληρώναμε. (Γεωπόνος)

> Οι μαθητές μας ζητούν συνεχώς να κάνουμε δράσεις μαζί με τον κ. Γιώργο. […] Αναφέρουν με ανυπομονησία «αύριο είναι Τρίτη». (Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός)

Ευαισθητοποίηση της κοινότητας. Οι δραστηριότητες που υλοποιήθηκαν συνέβαλαν και στην ευαισθητοποίηση των πολιτών για το δικαίωμα των μαθητών με αναπηρία να συμμετέχουν σε κοινωνικές δραστηριότητες, περιορίζοντας, όμως, ορισμένες φορές την ενεργή συμμετοχή και αυτονομία των μαθητών στην προσπάθειά τους να βοηθήσουν:

> Το ευχάριστο είναι ότι ανταποκρίθηκαν… οι πολίτες... Με όποιον ήρθαμε σε επαφή… έδειξε κατανόηση. Βέβαια, οι άνθρωποι έχουν μία αίσθηση ότι 'πρέπει να βοηθήσουν' και… εμπλέκονται με αυτόν τον τρόπο. Οι περισσότεροι καταλάβανε, όμως, ότι δεν χρειάζεται να του πάρεις από το χέρι τα χρήματα, θα σ' τα δώσει μόνος του. (Γεωπόνος)

Προκλήσεις του εγχειρήματος. Κατά τη διάρκεια της διεπιστημονικής συνεργασίας της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού με τον γεωπόνο

αντιμετωπίστηκαν διάφορες δυσκολίες ή προκλήσεις, όπως είναι η εύρεση κοινού ελεύθερου χρόνου για τον προγραμματισμό των δράσεων:

> Δεν μπορούσα να φανταστώ ότι ο προγραμματισμός χρειάζεται τόσο χρόνο. (Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός)
>
> Θέλει προεργασία, και σοβαρή προεργασία. (Γεωπόνος)
>
> Οι απογευματινές συναντήσεις δυσκόλεψαν τον Γιώργο *(γεωπόνος)* λόγω των οικογενειακών του υποχρεώσεων. (Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός)

Μια άλλη πρόκληση, πρόκληση που αντιμετωπίστηκε, αποτελεί η οργάνωση ενός σχολείου δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε τομείς ή αντικείμενα με βάση το ωρολόγιο πρόγραμμα. Δεν αρκεί δηλαδή η επιθυμία των δύο εκπαιδευτικών για συνεργατική διδασκαλία, αλλά χρειάζονται και άλλοι παράγοντες να συμβάλλουν στην ενίσχυση της διεπιστημονικής συνεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, ορισμένοι εκπαιδευτικοί και ο διευθυντής της σχολικής μονάδας παρείχαν τη δυνατότητα τροποποίησης του ωρολογίου προγράμματος της σχολικής μονάδας κατά τη διάρκεια του τρίτου κύκλου της έρευνας-δράσης:

> Δεν είναι εφικτό να πραγματοποιήσουμε εκπαιδευτική δράση στην κοινότητα δύο εκπαιδευτικοί με δύο τμήματα. […] Το πρώτο που θα εξετάσουμε είναι εάν μπορούμε να έχουμε στο πρόγραμμα και οι δύο εκπαιδευτικοί το ίδιο τμήμα για συγκεκριμένες ώρες. (Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός)
>
> Ευτυχώς που μας βοήθησαν κι αλλάξαμε το πρόγραμμα της Τρίτης αλλιώς δεν θα μπορούσαμε να έχουμε κοινό χρόνο να πραγματοποιήσουμε τις δράσεις. (Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε με ποιον τρόπο μπορεί να λειτουργήσει η συνεργατική διδασκαλία ενός μαθηματικού και ενός γεωπόνου για την εκπαίδευση μαθητών με νοητική αναπηρία σε ειδικό σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ώστε οι μαθητές να ενδυναμωθούν και να αναλάβουν ενεργό ρόλο σε πραγματικά πλαίσια ενισχύοντας παράλληλα την κοινωνική τους ένταξη. Από την ανάλυση των δεδομένων αναδείχθηκαν τόσο οι προκλήσεις του εγχειρήματος όσο και τα οφέλη για τους μαθητές πέρα από τα οφέλη αυτής καθαυτής της συνεργασίας. Η διεπιστημονική συνεργασία εκτιμήθηκε θετικά από όλους τους άμεσα εμπλεκόμενους, με τους μαθητές να επιζητούν να υλοποιηθούν ακόμη περισσότερες συνεργατικές δράσεις στο σχολικό και το οικογενειακό τους περιβάλλον. Τα οφέλη ήταν σημαντικά σε μαθησιακό επίπεδο για τους μαθητές ενισχύοντας παράλληλα την αυτονομία και την ενεργή συμμετοχή τους σε κοινωνικές δραστηριότητες βελτιώνοντας έτσι τη λειτουργικότητά

τους στο παρόν και το μέλλον, καθώς η παροχή εκπαιδευτικών ευκαιριών σε πραγματικές συνθήκες συνδέεται άμεσα με την προετοιμασία μετάβασης στην ενήλικη ζωή, την κοινωνική ένταξη, και την αυτόνομη διαβίωση των μαθητών με νοητική αναπηρία (Σταυρούση, 2007).

Όσον αφορά στις προκλήσεις που εντοπίστηκαν, αυτές εκτείνονται και στα τρία επίπεδα, στο μικρο-επίπεδο (η αλλαγή στην κουλτούρα του εκπαιδευτικού), στο μεσο-επίπεδο (η κουλτούρα του σχολείου) και στο μακρο-επίπεδο (η εκπαιδευτική πολιτική). Στο μικρο-επίπεδο εντοπίζεται η αλλαγή στην κουλτούρα των εκπαιδευτικών, οι οποίοι αποφάσισαν να διακόψουν τη μεμονωμένη δράση και την ανεξαρτησία που είχαν κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας, και αντ' αυτού να καλλιεργήσουν μια διεπιστημονική συνεργασία που συνέβαλε στην επαγγελματική τους ανάπτυξη (Forte & Flores, 2014). Σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της συνεργασίας κατείχαν οι πεποιθήσεις των δύο εκπαιδευτικών και η κοινή οπτική θεώρηση τόσο της αξίας της συνεργασίας όσο και των πλεονεκτημάτων για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές. Συγκεκριμένα, και οι δύο εκπαιδευτικοί ήταν ανοιχτοί σε μια διαφορετική άποψη όταν αυτή δίνεται με σεβασμό, εκτίμηση, και διάθεση να βοηθήσει τον άλλον. Για μια αποτελεσματική συνεργασία, όπως αναφέρουν οι Wiggins και Damore (2006), οι συμμετέχοντες χρειάζεται να έχουν θετική στάση και κοινή φιλοσοφία, καθώς και να εμπιστεύονται και να σέβονται ο ένας τον άλλον. Από την άλλη πλευρά, το μεγαλύτερο εμπόδιο αποτέλεσε η έλλειψη κοινού ελεύθερου χρόνου καθώς για μια πετυχημένη συνεργασία εκτός από τον κοινό χρόνο για την εκπαιδευτική διαδικασία, οι συμμετέχοντες χρειάζεται να αφιερώσουν (κοινό) χρόνο για τον σχεδιασμό, την αλληλεπίδραση, τον αναστοχασμό, και την αξιολόγηση (Gallagher, Malone, & Ladner, 2009; Wiggins & Damore, 2006).

Στο μεσο-επίπεδο εντοπίζεται η κουλτούρα της σχολικής μονάδας και η αλλαγή που καλείται να συμβεί για να υποστηριχθεί η νέα συνθήκη της συνεργασίας. Η συνεργασία δεν θα μπορούσε να είχε επιτευχθεί εάν ο διευθυντής και ορισμένοι εκπαιδευτικοί της σχολικής μονάδας δεν τη διευκόλυναν τροποποιώντας το ωρολόγιο πρόγραμμα δύο μήνες πριν το τέλος της σχολικής χρονιάς. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Hernandez (2013), το πλαίσιο και οι συνθήκες λειτουργίας του παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην προσπάθεια της συνεργασίας. Κατά τη διάρκεια της συνεργασίας, οι δύο εκπαιδευτικοί και οι μαθητές μετέφεραν στους εκπαιδευτικούς του σχολείου τις θετικές εμπειρίες τους ενθαρρύνοντας τη δημιουργία συνεργατικών δράσεων στο σχολικό περιβάλλον. Σύμφωνα με τους Friend και Cook (2014), η κουλτούρα συνεργασίας επιτυγχάνεται σχεδιάζοντας με τέτοιον τρόπο τις σχολικές δραστηριότητες ώστε οι εκπαιδευτικοί να βιώνουν τη συνεργασία αλληλεπιδρώντας με βάση τις εμπειρίες τους. Μετά την ολοκλήρωση των δράσεων, το σύνολο των

εκπαιδευτικών της σχολικής μονάδας αφού συζήτησαν τις προοπτικές και τα οφέλη μιας συνεργατικής προσέγγισης της διδασκαλίας, αποφάσισαν για το επόμενο σχολικό έτος την καλλιέργεια διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης και την ανάπτυξη μιας κουλτούρας συνεργασίας. Όπως, άλλωστε, περιγράφει χαρακτηριστικά ο Fullan (2007, σελ. 154) *«για να μπορέσει να γίνει οποιαδήποτε αλλαγή, όλοι χρειάζεται να εμπλακούν»*.

Διευρύνοντας τον φακό εστίασης και καταλήγοντας στο μακρο-επίπεδο δίνουμε έμφαση στον τρόπο που είναι οργανωμένη η δευτεροβάθμια εκπαίδευση και πώς αυτό διαμορφώνει τις συνθήκες για την καλλιέργεια συνεργασίας στο σχολικό πλαίσιο. Έτσι, στο ωρολόγιο πρόγραμμα της σχολικής μονάδας προκαθορίζονται οι ώρες διδασκαλίας κάθε γνωστικού αντικειμένου και τμήματος από έναν συγκεκριμένο εκπαιδευτικό δίχως να ενθαρρύνεται με αυτόν τον τρόπο η ανάπτυξη μιας κουλτούρας συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών. Παράλληλα, ο διαχωρισμός που υπάρχει σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα και δυσκολεύει την επίτευξη συνεργασιών, αποτυπώνει ταυτόχρονα την εκπαιδευτική πολιτική της χώρας (Conderman et al., 2013).

Εν κατακλείδι, από τη συγκεκριμένη εργασία φάνηκε ότι η ανάπτυξη συνεργατικών πρακτικών σε ένα τέτοιο πλαίσιο μπορεί να έχει οφέλη τόσο για τους μαθητές ενισχύοντας την αυτονομία τους, όσο και για την προσωπική επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών. Οποιαδήποτε αλλαγή, βέβαια, έρχεται αντιμέτωπη με πολλαπλές προκλήσεις, είτε αυτές αφορούν στο μακρο-, στο μεσο- ή μικρο-επίπεδο. Σε κάθε περίπτωση κεντρικό ρόλο έχει ο εκπαιδευτικός που καλείται να απαντήσει στο εξής βασικό ερώτημα: *«Θέλω να κάνω την αλλαγή;»*. Η θετική απάντηση αποτελεί κίνητρο για την πραγματοποίηση της αλλαγής, ενώ ορισμένοι βασικοί παράγοντες, όπως το κλίμα εμπιστοσύνης μεταξύ των συμμετεχόντων ή η υποστήριξη της σχολικής μονάδας, είναι βασικοί συντελεστές επιτυχίας.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Για την αποφυγή των διπλών τύπων ο/η μαθητής/τρια, στην εργασία «ο μαθητής» αναφέρεται και στα δύο γένη.
2. Για τη συμμετοχή τους στην έρευνα έχει δοθεί γραπτή συγκατάθεση από τους γονείς/κηδεμόνες τους. Στο κείμενο χρησιμοποιούνται ψευδώνυμα για τη διαφύλαξη των προσωπικών δεδομένων τους.
3. Στο ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ των Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. αναφέρεται ότι *«στο πλαίσιο της διαθεματικότητας για κάθε θεωρητικό μάθημα των ΕΕΕΕΚ, μπορεί να εξεταστεί η δυνατότητα συνεργασίας με το μάθημα των εργαστηρίων»* (ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, 2004: 303).
4. Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ των Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. *«πρώτιστος στόχος και σκοπός της διδασκαλίας της διδασκαλίας των Μαθηματικών στα Ε.Ε.Ε.Ε.Κ είναι η κοινωνική προσαρμογή - ένταξη και η αυτονομία του μαθητή κατά το μέγιστο βαθμό των δυνατοτήτων και ικανοτήτων του»* (ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, 2004: 91). Αντίστοιχα, *«σκοπός της διδασκαλίας του εργαστηρίου της Κηπουρικής είναι η κοινωνικοποίηση του ατόμου, η ανάπτυξη δεξιοτήτων και ικανοτήτων του μαθητή με σκοπό να γνωρίσει την αρμονική σχέση ανθρώπου – φύσης καθώς και τις αλληλεπιδράσεις στο οικοσύστημα»* (ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, 2004: 289).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Carr, W., & Kemmis, S. (2004). *Becoming critical: Education, knowledge and action research*. Taylor & Francis e-Library.

Conderman, G., Hedin, L., & Bresnahan, V. (2013). *Strategy instruction for middle and secondary students with mild disabilities.* Thousand Oaks, CA: Corwin.

ΥΠΕΠΘ-ΠΙ (2004). *ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ Εργαστηρίων Ειδικής Επαγγελματικής Εκπαίδευσης και Κατάρτισης (ΕΕΕΕΚ).* Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ.

Forte, A. M., & Flores, M. A. (2014). Teacher collaboration and professional development in the workplace: a study of Portuguese teachers. *European Journal of Teacher Education, 37*(1), 91-105.

Friend, M., & Cook, L. (2014). *Interactions: Collaboration skills for school professionals* (7th ed.). USA: Pearson.

Fullan, M. (2007). *The new meaning of educational change* (4th ed.). New York, NY: Teachers College Press.

Gallagher, P. A, Malone, D. M., & Ladner, J. R. (2009). Social-psychological support personnel: Attitudes and perceptions of teamwork supporting children with disabilities. *Journal of Social Work in Disability & Rehabilitation, 8*(1), 1-20.

Hernandez, S. J. (2013). Collaboration in special education: It' s history, evolution, and critical factors necessary for successful implementation. *US-China Education Review B, 3*(6), 480-498.

Jaworski, B., et al. (2017). Mathematics teachers working and learning through collaboration. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp.261-276). ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Σταυρούση, Π. (2007). Εκπαίδευση και νοητική καθυστέρηση: Πρακτικές και προκλήσεις. Στα Πρακτικά του *1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ειδικής Αγωγής της Εταιρείας Ειδικής Παιδαγωγικής Ελλάδος «Η ειδική αγωγή στην κοινωνία της γνώσης»* (σσ. 72-86). Αθήνα: Γρηγόρης.

Στρογγυλός, Β. (2011). Αποτελεσματικές πρακτικές στην εκπαίδευση των παιδιών με νοητική καθυστέρηση. Στο Σ. Παντελιάδου & Β. Αργυρόπουλος (Επιμ.), *Ειδική αγωγή: Από την έρευνα στη διδακτική πράξη* (σσ. 253-299). Αθήνα: Πεδίο.

Στρογγυλός, Β., & Ξανθάκου, Γ. (2007). Σε ένα σχολείο ίσο για παιδιά άνισα: Ένταξη και διεπιστημονική συνεργασία. Στα *Πρακτικά του 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.) «Σχολείο ίσο για παιδιά άνισα»*. Αθήνα. ISSN: 1790-8674.

Wiggins, K. C., & Damore, S. J. (2006). "Survivors" or "friends": A framework for assessing effective collaboration. *Teaching Exceptional Children, 38*(5), 49-56.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΕΝΕΡΓΟΥ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΟΥ ΣΥΝΑΝΤΟΥΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΡΟΚΛΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βασιλοπούλου Μαρία, Τριανταφύλλου Χρυσαυγή

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
vasilopouloumath@gmail.com, chrtriantaf@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία μελετά αυτό-αναφορές μαθητών που συναντούν άκρως αντίθετα επίπεδα πρόκλησης στα Μαθηματικά (πολύ εύκολα-ΠΕυ ή πολύ δύσκολα-ΠΔυ) περιγράφουν περιπτώσεις ενεργού συμμετοχής τους στην τάξη των Μαθηματικών. Στην έρευνα συμμετείχαν 141 μαθητές Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, 80 μαθητές περίπτωσης ΠΕυ και 61 μαθητές περίπτωσης ΠΔυ. Οι παράγοντες ενεργού συμμετοχής που αναδείχθηκαν από τις αυτό-αναφορές των μαθητών ταξινομούνται στις εξής διαστάσεις: α) διδακτική, β) η κοινωνική, γ) η γνωστική και δ) η διάσταση της μη-συμμετοχής. Ομοιότητες και διαφορές αναγνωρίστηκαν στις δύο ομάδες των μαθητών περίπτωσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συμπερίληψη σημαίνει ότι όλοι οι μαθητές, ανεξάρτητα από τις ικανότητες ή τις αδυναμίες τους, έχουν ίσες ευκαιρίες για μάθηση και συμμετοχή στη σχολική κοινότητα (Civil, Hunter & Crespo, 2019). Η ενθάρρυνση της συμμετοχής κάθε μαθητή συνδέεται με την συμπερίληψη και την αποδοχή του ως μέλος της εκπαιδευτικής κοινότητας (Gutiérrez, 2013). Ταυτόχρονα, η εξιστόρηση από τους ίδιους τους μαθητές περιπτώσεων ενεργού συμμετοχής τους στην τάξη των Μαθηματικών, μας δίνει μια εικόνα της σχέσης τους με τα Μαθηματικά αλλά και της ταυτότητας που έχουν κτίσει με το συγκεκριμένο αντικείμενο (Κορτέση-Δαφέρμου & Σακονίδης, 2019). Παρότι η σπουδαιότητα της εξιστόρησης περιπτώσεων ενεργού συμμετοχής μαθητών έχει αναδειχθεί ως σημαντική, ελάχιστες έρευνες μελετούν αυτό-αναφορές των μαθητών σχετικά με τη συμμετοχή τους στο μάθημα (Roos, 2023). Ποιες είναι οι περιπτώσεις λοιπόν που ένας μαθητής ή μια μαθήτρια σε μια ελληνική τάξη των Μαθηματικών θεωρεί πως συμμετείχε ενεργά στο μάθημα των Μαθηματικών;

Η παρούσα μελέτη εστιάζει ταυτόχρονα σε μαθητές που αυτό-προσδιορίζονται στα άκρα του τυπικού μαθητικού πληθυσμού ως προς τις προκλήσεις που συναντούν στην τάξη των Μαθηματικών. Στο ένα άκρο είναι οι μαθητές που δηλώνουν οι ίδιοι ότι ‘δυσκολεύονται πολύ στα Μαθηματικά’ (ΠΔυ), ενώ στο άλλο άκρο οι μαθητές που δηλώνουν οι ίδιοι ότι ‘κατανοούν τα Μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο πολύ εύκολα’ (ΠΕυ). Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, και οι δύο ομάδες μαθητών περίπτωσης συχνά νιώθουν ότι αποκλείονται της εκπαιδευτικής

διαδικασίας (Roos, 2019). Συνεπώς, η διερεύνηση παραγόντων που σύμφωνα με τους ίδιους τους μαθητές επηρεάζουν την ενεργή συμμετοχή τους μπορεί να υποστηρίξει τους εκπαιδευτικούς στην ανάπτυξη κατάλληλων πρακτικών συμπερίληψης για τις συγκεκριμένες ομάδες μαθητών περίπτωσης αλλά και όλων των μαθητών γενικότερα (Civil & Planas, 2004).

Τα ερευνητικά ερωτήματα που κατευθύνουν την παρούσα μελέτη είναι τα εξής: ΕΕ1: Ποιοι παράγοντες ενεργού συμμετοχής των συμμετεχόντων αναγνωρίστηκαν στις αυτό-αναφορές των μαθητών; ΕΕ2: Ποιοι είναι οι κυρίαρχοι παράγοντες που επηρεάζουν την ενεργή συμμετοχή στο σύνολο των συμμετεχόντων αλλά και στις δύο ομάδες μαθητών περίπτωσης (ΠΕυ και ΠΔυ) ξεχωριστά; ΕΕ3: Ποιες διαφορές αναγνωρίστηκαν ανάμεσα στις ομάδες των μαθητών περίπτωσης;

ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ

Οι έννοιες της συμμετοχής και της συμπερίληψης συνδέονται άμεσα στην ερευνητική βιβλιογραφία. Το 1994 η Διακήρυξη της Salamanca ανέφερε ότι η συμπερίληψη και η συμμετοχή είναι απαραίτητες διαδικασίες για την ανθρώπινη αξιοπρέπεια. Η Roos (2023) συνδέει άμεσα τις έννοιες της συμπερίληψης και της συμμετοχής ορίζοντας τη συμπερίληψη ως *διαδικασίες συμμετοχής* (processes of participation) (σελ. 231) στη σχολική τάξη των Μαθηματικών. Επίσης, η Messiou (2019) επεκτείνει τη σύνδεση αυτή προσθέτοντας και τις *φωνές* (σελ. 769) των ίδιων των μαθητών. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια αναφέρει ότι η συμπερίληψη και η συμμετοχή πρέπει να συνδεθεί τις απόψεις και τις προτάσεις των ίδιων των μαθητών για τη διδασκαλία.

Ενώ υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον στις *φωνές* των μαθητών (π.χ. Hajisoteriou, Karousiou & Angelides, 2021) ελάχιστες έρευνες αναφέρονται στις τάξεις των Μαθηματικών και ειδικά σε επίπεδο Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Οι έρευνες που μελετούν τους παράγοντες που επηρεάζουν τη συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών αναγνωρίζουν *διδακτικές, κοινωνικές*, (μετά)γνωστικές καθώς και *συναισθηματικές* διαστάσεις. Συγκεκριμένα, η Roos (2023) ανέλυσε τις αφηγήσεις τριών μαθητών με ειδικές μαθησιακές ανάγκες σε μια Σουηδική τάξη των Μαθηματικών. Οι παράγοντες συμμετοχής που αναγνώρισε ήταν *διδακτικής* φύσης όπως η οργάνωση του μαθήματος, η αξιολόγηση και το είδος του μαθηματικού έργου και *κοινωνικής* φύσης όπως η συμμετοχή τους σε μικρές ομάδες αλλά και η σημασία της αναγνώρισης της αξίας τους ως μαθητές με ειδικές μαθησιακές ανάγκες. Οι Hill και Seah (2023) μελέτησαν διαστάσεις του *μοντέλου ευημερίας* (well-being) 258 μικρών μαθητών στην Κίνα. Στην έρευνά τους αναδείχθηκαν ως κυρίαρχες η *γνωστική* και η *συναισθηματική* διάσταση

καθώς επίσης και η *θετική αποδοχή* τους από τον εκπαιδευτικό της τάξης. Ταυτόχρονα, ελάχιστες έρευνες συγκρίνουν τις 'ιστορίες συμμετοχής' μαθητών με διαφορετικές επιδόσεις στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, οι Kleve και Penne (2016) συνέκριναν τις 'ιστορίες συμμετοχής' (σελ.42) μαθητών με καλές και όχι ιδιαίτερα καλές επιδόσεις στα αντικείμενα των Μαθηματικών και της Γλώσσας. Οι ερευνητές αναγνώρισαν έντονες διαφορές γνωστικής και μεταγνωστικής φύσης ανάμεσα στις δυο ομάδες των μαθητών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το ελληνικό θεσμικό πλαίσιο και το πλαίσιο της έρευνας

Η παροχή ίσων ευκαιριών μάθησης και συμμετοχής χωρίς διαχωρισμούς προβλέπεται από το ελληνικό θεσμικό πλαίσιο (ΦΕΚ 303/Β/13-3-2003).
Η παρούσα εργασία είναι μέρος διδακτορικής διατριβής η οποία διερευνά θέματα συμπερίληψης στην τάξη των Μαθηματικών. Εστιάζει στις δράσεις συμπερίληψης των εκπαιδευτικών αλλά και στον τρόπο που τις αντιλαμβάνονται οι μαθητές. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε αποκλειστικά στις αυτό-αναφορές μαθητών σχετικά με τη συμμετοχή τους στο μάθημα των Μαθηματικών. Οι μαθητές που εθελοντικά συμμετείχαν στην έρευνα, είναι μαθητές σε Δημόσια σχολεία Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης της Αττικής (12 Γυμνάσια και 3 Λύκεια).

Τα ερευνητικά εργαλεία

Τα ερευνητικά εργαλεία ήταν δύο ειδών: α) *Ερωτηματολόγια* ανοιχτού τύπου σε 135 μαθητές τα οποία δόθηκαν από τους εκπαιδευτικούς που συμμετέχουν στην έρευνα, αφιερώνοντας μια διδακτική ώρα ώστε να τα συμπληρώσουν με προσοχή. β) *Ημιδομημένες Συνεντεύξεις* σε 45 μαθητές που αφορούσαν γενικά θέματα όπως «περίγραψε ένα ιδανικό μάθημα Μαθηματικών» αλλά και σε ερωτήσεις που καλούσαν τους μαθητές να αναφέρουν συγκεκριμένες περιπτώσεις ενεργού συμμετοχής τους στο μάθημα. Η διάρκειά τους κυμαινόταν από 10 λεπτά μέχρι 1 ώρα ανάλογα με τη διαθεσιμότητα των μαθητών. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν στις τάξεις των σχολείων των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών, μετά από το μάθημα των Μαθηματικών καθώς και σε εξωσχολικές τάξεις όπως η MENSA και Κέντρα Μελέτης. Στη συγκεκριμένη έρευνα αναλύουμε τις απαντήσεις των μαθητών που αφορούν θέματα ενεργού συμμετοχής τους στο μάθημα όπως: α) Περίγραψε μία περίπτωση που συμμετείχες ενεργά στο μάθημα του σχολείου (στα ερωτηματολόγια) και β) Μπορείς να μου περιγράψεις μια περίπτωση που ένιωσες ότι συμμετείχες ενεργά στο μάθημα; ή Είσαι ευχαριστημένος/η με τη συμμετοχή σου σήμερα στο μάθημα; Γιατί; (στις συνεντεύξεις).

Οι συμμετέχοντες

Εντοπίσαμε τους μαθητές περίπτωσης που μας ενδιαφέρουν μέσω της ερώτησης: «*Αισθάνεσαι ότι καταλαβαίνεις τα Μαθηματικά του σχολείου α)*

πολύ εύκολα, β) ούτε πολύ εύκολα – ούτε πολύ δύσκολα, γ) πολύ δύσκολα». Στο εξής για τους μαθητές που απάντησαν α) 'πολύ εύκολα' θα χρησιμοποιούμε την ονομασία 'ΠΕυ' ενώ για τους μαθητές που κύκλωσαν το γ) 'πολύ δύσκολα' χρησιμοποιούμε την ονομασία 'ΠΔυ'. Τα δεδομένα που αναλύονται παρακάτω είναι από 141 μαθητές. Ογδόντα μαθητές ΠΕυ (63 ερωτηματολόγια και 17 συνεντεύξεις) και 61 μαθητές ΠΔυ (56 ερωτηματολόγια και 5 συνεντεύξεις).

Ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε σε 6 φάσεις: 1η φάση. Συλλογή όλων των ερευνητικών δεδομένων (ερωτηματολόγια) και απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων. 2η φάση: Διαχωρισμός δεδομένων που προκύπτουν από μαθητές που απάντησαν ότι καταλαβαίνουν τα Μαθηματικά του σχολείου «πολύ εύκολα (ΠΕυ)» ή «πολύ δύσκολα (ΠΔυ)». 3η φάση: Ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των συμμετεχόντων σύμφωνα με τη θεμελιωμένη θεωρία (Grounded theory) (Charmaz, 2006). Σε αυτή τη φάση κωδικοποιηθήκαν οι αυτό-αναφορές των συμμετεχόντων εστιάζοντας αποκλειστικά στις δηλώσεις τους. Για παράδειγμα, η δήλωση «συμμετείχα ενεργά στο μάθημα γιατί βοήθησα τους συμμαθητές μου» (ΠΕυ, συνέντευξη), κωδικοποιήθηκε ως «αλληλεπίδραση με συμμαθητές». 4η φάση: Σε αυτή τη φάση έγινε σύνδεση των επιμέρους κωδικών σε ευρύτερες κατηγορίες λαμβάνοντας υπόψη και διαστάσεις συμμετοχής που αναγνωρίζονται και στη βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, ο κωδικός «αλληλεπίδραση με συμμαθητές» αποτέλεσε μέρος της ευρύτερης κατηγορίας «κοινωνική διάσταση». Με αυτό τον τρόπο αναγνωρίστηκαν 4 κεντρικές διαστάσεις. 5η φάση: Πραγματοποιήθηκε ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των συμμετεχόντων ανά κωδικό και ανά διάσταση. Επισημαίνουμε ότι υπήρξαν μαθητές που στις απαντήσεις τους αναγνωρίστηκαν περισσότεροι από μια διαστάσεις ενεργού συμμετοχής. 6η φάση: Απαντήσαμε στα ερευνητικά ερωτήματα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι παράγοντες ενεργού συμμετοχής των μαθητών

Οι παράγοντες ενεργού συμμετοχής που ανέφεραν οι συμμετέχοντες μαθητές κωδικοποιούνται σε τέσσερεις άξονες: α) Η *διδακτική διάσταση* με υπό-διαστάσεις το είδος του μαθηματικού έργου και την εισαγωγή νέας μαθηματικής έννοιας. β) Την *κοινωνική διάσταση*, με υπό-διαστάσεις την αλληλεπίδραση με τον εκπαιδευτικό, με τους συμμαθητές αλλά και την αναγνώριση της αξίας από την κοινότητα της τάξης. γ) Τη *γνωστική διάσταση* με υπό-διαστάσεις την κατανόηση του θέματος και των διαδικασιών και της ικανότητας συγκέντρωσης και τέλος, δ) την *διάσταση της μη-συμμετοχής*. Παρακάτω παρουσιάζονται οι παράγοντες που επηρεάζουν την ενεργή συμμετοχή στις αυτό-αναφορές των

συμμετεχόντων και χαρακτηριστικά παραδείγματα από τις απαντήσεις των μαθητών περίπτωσης. Οι παράγοντες που επηρεάζουν την ενεργή συμμετοχή καθώς και ποσοτικά στοιχεία ανά διάσταση παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 1.

α) Διδακτική διάσταση. Κυρίαρχος παράγοντας σε αυτή τη διάσταση αναδείχθηκε το *είδος του μαθηματικού έργου.* Χαρακτηριστικά παραδείγματα απαντήσεων των μαθητών που εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία είναι: «μου άρεσε γιατί είχε σχήματα και αριθμούς μαζί» (ΠΔυ, ερωτηματολόγια), ή «νιώθω ότι συμμετέχω όταν λύνω πολλές ασκήσεις» (ΠΕυ, συνέντευξη). Η αντιμετώπιση έργων με *μαθηματική πρόκληση*, φαίνεται να είναι ένα στοιχείο που ενεργοποιεί αρκετούς από τους συμμετέχοντες μαθητές: «θυμάμαι που έλυνα κάτι δύσκολο» (ΠΔυ, συνέντευξη) ή «παρακολουθώ σχεδόν πάντα με ενδιαφέρον…μου τραβούν την προσοχή ασκήσεις με απαιτητική σκέψη» (ΠΕυ, ερωτηματολόγιο). Τέλος, φαίνεται πως όταν το μαθηματικό έργο είναι κοντά στα ενδιαφέροντά τους, οι μαθητές δήλωναν ότι συμμετέχουν ενεργά: «μου άρεσε γενικά η δραστηριότητα, για αυτό και την είπα ενδιαφέρουσα, και για αυτό είπα ότι συμμετείχα περισσότερο» (ΠΕυ, συνέντευξη) ή «Πυθαγόρειο Θεώρημα και αντίστροφο Πυθαγορείου. Ο τρόπος που λύνονται οι ασκήσεις και μου φάνηκαν εύκολα και ενδιαφέροντα» (ΠΔυ, ερωτηματολόγιο). Ένας άλλος παράγοντας είναι η εισαγωγή *νέων μαθηματικών εννοιών.* Αναγνωρίστηκε αποκλειστικά από μαθητές της ομάδας ΠΕυ. Χαρακτηριστική απάντηση μαθητή: «όταν κάναμε εξισώσεις πρώτη φορά» (ΠΕυ, συνέντευξη).

β) Κοινωνική Διάσταση. Δεύτερη κυρίαρχη διάσταση στο σύνολο των μαθητών αναδείχθηκε η κοινωνική, στην οποία εντοπίσαμε τρεις παράγοντες συμμετοχής. Η *αλληλεπίδραση με εκπαιδευτικό* φαίνεται να δίνει το αίσθημα της συμμετοχής, όπως για παράδειγμα όταν ο τρόπος διδασκαλίας γίνεται «δημιουργικά», σε «αλληλεπίδραση με τους μαθητές». Μάλιστα, όταν σηκώνουν το χέρι τους στο μάθημα ζητώντας τον λόγο, φαίνεται πως αυτό αποτελεί στοιχείο συμμετοχής και των δύο περιπτώσεων μαθητών. Για παράδειγμα «ότι σήκωνα πολύ το χέρι μου, για να πω πράγματα» (ΠΕυ, συνέντευξη) ή «είχα σηκώσει το χέρι μου με επέλεξε και απάντησα» (ΠΔυ, συνέντευξη). Επίσης, όταν βοηθούν στην παράδοση του μαθήματος συμπληρώνοντας, διορθώνοντας ή παρουσιάζοντας μια εργασία, φαίνεται να ενισχύει σημαντικά το αίσθημα της συμμετοχής τους: «βοηθάω στην παράδοση για να ανέβει το επίπεδο της τάξης» (ΠΕυ, συνεντεύξεις), «ένιωσα σαν βοηθός δασκάλου» (ΠΔυ, συνέντευξη). Η *Αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές* είναι ένα ακόμα στοιχείο που φαίνεται πως ενεργοποιεί ταυτόχρονα τους μαθητές των περιπτώσεων που μελετάμε. Κάποιοι ανέφεραν: «συνεργάστηκα πολύ καλά με τους συμμαθητές μου οπότε ναι…συμμετείχα» (ΠΕυ,

συνεντεύξεις) ή «το ότι βοηθάω τους συμμαθητές μου με κάνει να νιώθω ενεργή» (ΠΕυ, συνέντευξη) ή «διόρθωσα τους συμμαθητές μου» (ΠΔυ, συνεντεύξεις). Τέλος, η *αναγνώριση της αξίας από τα μέλη της κοινότητας (Being Valued)* κατά τη διάρκεια του μαθήματος δίνει την αίσθηση της συμμετοχής, ιδιαίτερα όταν του δίνεται ο λόγος περισσότερο συγκριτικά με τους υπόλοιπους: «σήκωνε εμένα συνέχεια» (ΠΕυ, συνέντευξη) ή αν είναι «ο μόνος που έχω λύσει σωστά μία άσκηση» (ΠΔυ, συνέντευξη).

γ) Η γνωστική διάσταση. Αρκετοί μαθητές συσχετίζουν τη συμμετοχή τους με θέματα *κατανόησης μαθηματικών εννοιών ή διαδικασιών* που παρουσιάζονται στην τάξη: «ήμουν καλός, μου φάνηκαν εύκολα» (ΠΕυ, ερωτηματολόγια). Αξίζει να σημειωθεί το παράδειγμα της μαθήτριας ΠΔυ η οποία ανέφερε στην συνέντευξη πως όταν σχεδιάζει τα γεωμετρικά σχήματα και τα στοιχεία του προβλήματος, νιώθει να συμμετέχει στο μάθημα των Μαθηματικών: «υποθέτω ότι βοηθάει λίγο το γεγονός ότι ζωγράφιζα, άρα είχα μια θέση για τα πάντα στο μυαλό μου». Ταυτόχρονα, οι συμμετέχοντες ανέδειξαν το στοιχείο της της *ικανότητας συγκέντρωσης* ως ικανό για να νιώσουν πως συμμετέχουν ενεργά: «συμμετείχα γιατί πρόσεχα» (ΠΔυ, ερωτηματολόγια), «δεν κατάφερα να συγκεντρωθώ στο τέλος του μαθήματος και η συμμετοχή μου έπεσε» (ΠΕυ, συνέντευξη).

δ) Δήλωση Μη-συμμετοχής. Δεν θα μπορούσαμε να παραβλέψουμε τους μαθητές που δήλωσαν με ρητό και σαφή τρόπο πως δεν συμμετείχαν ποτέ στο μάθημα των Μαθηματικών του σχολείου: «Απλά δεν μου αρέσουν, δεν με ενδιαφέρουν. Δεν θα ασχοληθώ ποτέ με τα Μαθηματικά» (ΠΔυ, ερωτηματολόγια) ή «Ούτε όταν σηκώνομαι στον πίνακα δεν νιώθω να είμαι ενεργή. Και γίνεται απίστευτα βαρετό το μάθημα» (ΠΕυ, συνεντεύξεις). Τέλος, υπήρξαν κάποιοι μαθητές που ενώ ανταποκρίθηκαν στα υπόλοιπα ερωτήματα του ερωτηματολογίου, στη συγκεκριμένη ερώτηση που αφορά τη συμμετοχή τους στο μάθημα, δεν έδωσαν καμία απάντηση, οπότε τους κατατάσσουμε στην κατηγορία της *μη τοποθέτησης*.

Κυρίαρχοι παράγοντες στο σύνολο των μαθητών περίπτωσης

Ο κυρίαρχος παράγοντας ενεργού συμμετοχής είναι το είδος του μαθηματικού έργου που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί, μιας και 46 στους 141 μαθητές (32%) αναφέρονται σε αυτό. Η κρισιμότητα του μαθηματικού έργου, έχει αναδειχθεί από την έρευνα και ιδιαίτερα η σημασία του στην υποστήριξη της ανάπτυξης μεθόδων και μαθηματικού συλλογισμού (Bos et al., 2020) αλλά και σε θέματα συμπερίληψης (Boaler, 2015). Ακολουθούν η κατανόηση του μαθηματικού θέματος και η αλληλεπίδραση με τον εκπαιδευτικό της τάξης, μιας και 27 (19%) και 25 (17,7%) μαθητές αντίστοιχα αναφέρονται σε αυτούς τους παράγοντες. Τέλος, τοποθετήθηκαν αρνητικά 18 μαθητές από τους 141 (12%).

Παράγοντες ενεργού συμμετοχής		ΠΕυ (N= 80)	ΠΔυ (N=61)	Σύνολο (N=141)
Διδακτική διάσταση	Το είδος του μαθηματικού έργου	38 (47,5%)	8 (13,1%)	46 (32,6%)
	Εισαγωγή νέας μαθηματικής έννοιας	5 (6,3%)	0 (0,0%)	5 (3,5%)
Κοινωνική διάσταση	Αλληλεπίδραση με εκπαιδευτικό	16 (20,0%)	9 (14,8%)	25 (17,7%)
	Αλληλεπίδραση με συμμαθητές	6 (7,5%)	2 (3,3%)	8 (5,7%)
	Αναγνώριση της αξίας από την κοινότητα (Being valued)	3 (3,75%)	2 (3,3%)	5 (3,5%)
Γνωστική διάσταση	Κατανόηση του μαθηματικού θέματος	9 (11,3%)	18 (29,5%)	27 (19,1%)
	Ικανότητα συγκέντρωσης	4 (5,0%)	2 (3,3%)	6 (4,3%)
Διάσταση μη-συμμετοχής	Αρνητική τοποθέτηση	1 (1,3%)	17 (27,9%)	18 (12,8%)
	Μη τοποθέτηση	4 (5%)	6 (9,8%)	10 (7,1%)

Πίνακας 1: Ποσοτική ανάλυση των διαστάσεων ενεργού συμμετοχής ανά ομάδα μαθητών περίπτωσης και συνολικά.

Κυρίαρχοι παράγοντες σε κάθε ομάδα μαθητών περίπτωσης

Ο παράγοντας που κυριαρχεί στην περίπτωση μαθητών ΠΕυ είναι το είδος του μαθηματικού έργου που επιλέγει να διδάξει ο εκπαιδευτικός αφού αναγνωρίστηκε σε 38 από τις 80 απαντήσεις τους (47,5%). Οι ερευνητές συστήνουν προγράμματα σπουδών εμπλουτισμένα με μαθηματικές προκλήσεις για ταλαντούχους μαθητές αντί αλγοριθμικής φύσης έργων ή αριθμητικές δεξιότητες που έχουν ήδη κατακτήσει (Gallagher et al., 1997). Από την άλλη, 18 από τους 61 (29,5%) μαθητές περίπτωσης ΠΔυ ανέδειξαν πρώτο τον παράγοντα της κατανόησης του μαθηματικού θέματος. Η μαθηματική κατανόηση έχει συνδεθεί από τους Hill και Seah (2023) με θετικά συναισθήματα. Ταυτόχρονα, 17 από τους 61 (28%) μαθητές ανέδειξαν τον παράγοντα της αρνητικής τοποθέτησης. Η έρευνα έχει αναδείξει την άνιση συμμετοχή ή ακόμα και την απουσία συμμετοχής ιδιαίτερα των μαθητών που δυσκολεύονται πολύ σε σχέση με τους συμμαθητές τους στα Μαθηματικά (Secher Schmidt, 2016).

Διαφορές ανάμεσα στις ομάδες μαθητών περίπτωσης

Αντιπαραβάλλοντας τους παράγοντες συμμετοχής για την κάθε περίπτωση μαθητών σημειώσαμε έντονες διαφορές. Ο παράγοντας είδος μαθηματικού έργου φαίνεται να επηρεάζει θετικά τη συμμετοχή του 47% των μαθητών περίπτωσης ΠΕυ και μόνο το 13,1% των μαθητών περίπτωσης ΠΔυ. Μεγάλη διαφορά παρουσιάστηκε στους μαθητές περίπτωσης που δήλωσαν ρητά πως δεν συμμετέχουν στο μάθημα αφού σχεδόν το 28% των μαθητών περίπτωσης ΠΔυ δήλωσαν μη-συμμετοχή σε αντίθεση με το 1,3% των μαθητών περίπτωσης ΠΕυ. Ο παράγοντας 'κατανόηση' φαίνεται να επηρεάζει περισσότερο τους μαθητές περίπτωσης ΠΔυ (29,5%) σε σχέση με τους μαθητές περίπτωσης ΠΕυ (11,3%). Τέλος, δεν αναδείχθηκαν μεγάλες διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών περίπτωσης στους παράγοντες της κοινωνικής διάστασης, καθώς και στους παράγοντες της ικανότητας συγκέντρωσης και αναγνώριση της αξίας από τα μέλη της κοινότητας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία μελετά τις αυτό-αναφορές ενεργού συμμετοχής μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που συναντούν άκρως αντίθετα επίπεδα. Οι διαστάσεις ενεργού συμμετοχής που αναγνωρίστηκαν ευθυγραμμίζονται σε μεγάλο βαθμό με αντίστοιχες έρευνες (Hill & Seah, 2023; Roos, 2023). Επιπλέον, η διάσταση της μη-συμμετοχής ή αυτό-αποκλεισμού (self-exclusion) μαθητών από τις μαθηματικές δραστηριότητες έχει ήδη αναγνωριστεί και σε άλλες έρευνες (π.χ. Civil & Planas, 2004; Kollosche, 2019).

Οι διαφορές που αναγνωρίστηκαν από την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων όμως, διαφωτίζουν τους κύριους παράγοντες συμμετοχής των συγκεκριμένων ομάδων μαθητών (ΠΕυ-ΠΔυ) στην ελληνική τάξη των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα, στους μαθητές της ομάδας ΠΕυ κυριαρχεί το είδος του μαθηματικού έργου ως παράγοντας συμμετοχής, ενώ στους μαθητές ΠΔυ η κατανόηση του μαθηματικού θέματος. Από την άλλη πλευρά, αναγνωρίζουμε ότι η κοινωνική διάσταση (αλληλεπιδράσεις στην τάξη) φαίνεται να είναι κοινός παράγοντας ενεργού συμμετοχής και για τις δύο ομάδες μαθητών. Το ότι περίπου συνολικά ένας στους τέσσερις μαθητές (28%) δηλώνουν με κάποιο τρόπο τη μη-συμμετοχή τους στο μάθημα των Μαθηματικών, παραμένει ένα δυνατό μήνυμα υπενθύμισης για την ανάγκη περαιτέρω διερεύνησης του τι σημαίνει να συμμετέχει κανείς στις τάξεις των Μαθηματικών (Hinestroza, 2022).

Παρότι τα αποτελέσματα αυτά δεν είναι γενικεύσιμα φωτίζουν θέματα συμμετοχής της σύγχρονης μαθηματικής τάξης μέσα από την οπτική των ίδιων των μαθητών. Όπως υποστηρίζει και η Messiou (2019) οι φωνές των μαθητών μπορεί να αποτελέσουν καταλυτικό ρόλο στην προώθηση της συμπερίληψης στη σχολική τάξη γενικά και των Μαθηματικών ειδικότερα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainscow, M. (2020). Promoting inclusion and equity in education: Lessons from international experiences. Nordic Journal of Studies in Educational Policy, 6(1), 7–16. https://doi.org/10.1080/20020317.2020.1729587

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1080/14794802.2016.1237374

Bos, R., Doorman, M., & Piroi, M. (2020). Emergent models in a reinvention activity for learning the slope of a curve. *The Journal of Mathematical Behavior, 59*, 100773. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100773

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory. A practical guide through qualitative analysis*. Sage.

Civil, M., & Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the learning of mathematics*, *24*(1), 7-12.

Civil, M., Hunter, R., & Crespo, S. (2019). Mathematics teachers committed to equity. *International handbook of mathematics teacher education: Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development*, 1, 243-274. https://doi.org/10.1163/9789004418875_010

Gallagher, J., Harradine, C. C., & Coleman, M. R. (1997). Challenge or boredom? Gifted students' views on their schooling. *Roeper Review*, *19(*3), 132-136.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(1), 37–68. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.44.1.0037

Hajisoteriou, C., Karousiou C., & Angelides P. (2021) Children's voices on marginalisation and inclusion: lessons to be learned from two decades of research in Cyprus, International Journal of Inclusive Education, https://doi.org/10.1080/13603116.2021.2008534

Hill, J. L., & Seah, W. T. (2023). Student values and wellbeing in mathematics education: perspectives of Chinese primary students. *ZDM*, *55*(2), 385-398. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01418-7

Hinestroza, J. M. (2022). (Re) Learning what it means to participate: Bringing student and teacher perspectives into dialogue. *The Elementary School Journal*, *122*(4), 616-641. https://doi.org/10.1086/719465

Kleve, B., & Penne, S. (2016). Learning subjects in school: Being outsiders or insiders in the disciplinary discourses of mathematics and Language 1. *International Journal of Educational Research, 78*, 41–49. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.05.014

Kollosche, D. (2019). Reasons for auto-exclusion: Why students reject mathematics. *Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany*, 449-465. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0_26

Messiou, K. (2019). The missing voices: Students as a catalyst for promoting inclusive education. *International Journal of Inclusive Education*, *23*(7-8), 768-781. https://doi.org/ 10.1080/13603116.2019.1623326

Roos, H. (2019). Challenges at the border of normality: Students in special educational needs in an inclusive mathematics classroom. In Subramanian, J. (ed.), *Proceedings of the tenth international mathematics education and society conference: Mathematics Education and Society*, Hyderabad, India, (pp. 928-940). Hyderabad: Mathematics Education and Society.

Roos, H. (2023). Students' voices of inclusion in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 113*(2), 229-249. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10213-4

Secher Schmidt, M. C. (2016). Dyscalculia ≠ maths difficulties: An analysis of conflicting positions at a time that calls for inclusive practices. *European Journal of Special Needs Education, 31*(3), 407–421. https://doi.org/10.1080/08856257.2016.1163016

UNESCO (1994). *The Salamanca Statement and Framework for Action on Special Needs Education.* Paris: UNESCO.

Κορτέση – Δαφέρμου, Χ., Σακονίδης Χ. (2019). Αναδυόμενες ταυτότητες μάθησης μαθηματικών: εξιστορήσεις μαθητών και εκπαιδευτικών. Στο πλαίσιο μιας μακροχρόνιας μελέτης. *8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (714-723). Λευκωσία, Κύπρος, 2019.

Θεματική ενότητα 2: Γνωστικές παράμετροι της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΣΕ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ/ΟΥΣ ΝΗΠΙΑΓΩΓΟΥΣ

Μαρία Καλδρυμίδου

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

mkaldrim@uoi.gr

Στην παρούσα εργασία διερευνώνται τα κριτήρια με τα οποία μελλοντικοί εκπαιδευτικοί (νηπιαγωγοί) επιλέγουν το υλικό που θα έδιναν στα παιδιά για να κατασκευάσουν ένα τετράγωνο. Οι απαντήσεις τους, σε μία εργαστηριακή άσκηση όπου για 4 διαφορετικούς συνδυασμούς από καλαμάκια έπρεπε να δηλώσουν αν θα το χρησιμοποιήσουν ή όχι και γιατί, ανέδειξαν ότι ρόλο στην θετική ή αρνητική επιλογή παίζουν: η εκτίμησή τους για το επίπεδο δυσκολίας, η ύπαρξη ή όχι μόνο του αναγκαίου για την κατασκευή πλήθους από τα υλικά, η ύπαρξη ή μη χρώματος ως βοηθητικό στοιχείο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης στα πρώιμα χρόνια αναγνωρίζεται ως σημαντικό μέρος της Μαθηματικής εκπαίδευσης (Tsamir et al. 2014). Η Μαθηματική Γνώση Περιεχομένου (ΜΓΠ) (Shulman, 1986) των εκπαιδευτικών παίζει σημαντικό ρόλο στην οργάνωση του κατάλληλου διδακτικού περιβάλλοντος για την ανάδειξη του μαθηματικού νοήματος και την ανάπτυξη της μαθηματικής, και κατ' επέκταση της γεωμετρικής, γνώσης των παιδιών.

Το είδος και η ποικιλία των δραστηριοτήτων, τα μέσα και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται συμβάλλουν καθοριστικά στη διαμόρφωση τόσο της μαθηματικής εννοιολογικής γνώσης, καθώς αποτελούν τα συστατικά του εννοιολογικού πεδίου (Vergnaud, 2009). Εξίσου σημαντικός είναι ο τρόπος διαπραγμάτευσης του μαθηματικού περιεχομένου, ο τρόπος ελέγχου και αξιολόγησης καθώς και ο ρόλος του εκπαιδευτικού που διαμορφώνουν το τρέχον διδακτικό συμβόλαιο και τη διδακτική κατάσταση (Brousseau, 1989).

Στην εργασία αυτή επιχειρείται η διερεύνηση των κριτηρίων με τα οποία οι μελλοντικοί νηπιαγωγοί επιλέγουν υλικό και κατ' επέκταση το είδος της δραστηριότητας που αυτό διαμορφώνει σε ένα έργο κατασκευής τετραγώνου με καλαμάκια.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Ωστόσο, η ΜΓΠ των (μελλοντικών) εκπαιδευτικών φαίνεται να μην κατάλληλη για τη διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών (Ginsburg et al. 2006) και στη βιβλιογραφία τονίζεται η ανάγκη να δοθεί έμφαση στην ανάπτυξη της γνώσης τους για τα τρισδιάστατα και δισδιάστατα σχήματα (Jones & Tzekaki, 2016). Η αναγνώριση των κρίσιμων χαρακτηριστικών για κάθε γεωμετρικό σχήμα αποτελεί βασικό στοιχεία της μαθηματικής γνώσης των εκπαιδευτικών (Tsamir et al. 2014). Οι Clements and Samara (2011) αναφέρουν ότι πολλοί εκπαιδευτικοί κατηγοριοποιούν κυρίως τα γεωμετρικά σχήματα με βάση την ομοιότητά τους με τα προτοτυπικά σχήματα και λίγοι αναφέρονται στις ιδιότητές τους. Οι Fujita & Jones (2006) βρήκαν ότι πολλοί μελλοντικοί εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης μπορούσαν να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο αλλά ελάχιστοι ήταν αυτοί που μπορούσαν να δώσουν έναν ορισμό για αυτό, δηλαδή να αναφερθούν στις ιδιότητες και τα κρίσιμα χαρακτηριστικά του τετραγώνου.

Η γνώση και η αναγνώριση των κρίσιμων και μη κρίσιμων χαρακτηριστικών συμβάλλει στο σχεδιασμό και υιοθέτηση έργων και δραστηριοτήτων που θα βοηθήσουν τα παιδιά να τα διαφοροποιήσουν και να επικεντρωθούν σε αυτά (Tsamir et al. 2014).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Οι κατασκευές των γεωμετρικών σχημάτων, με τη βοήθεια διάφορων μέσων, αποτελούν σημαντική ομάδα δραστηριοτήτων και προτείνονται στις μικρές ηλικίες για να επιτρέψουν στα παιδιά να περάσουν από μια ολιστική αντίληψη σε μία αντίληψη των μερών των σχημάτων και των ιδιοτήτων (Τζεκάκη, 2010, Samara & Clements, 2009).

Πολλοί εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η χρήση εμπράγματου εκπαιδευτικού υλικού, *το οποίο πρέπει να είναι σαφές, μη διφορούμενο, χρωματιστό και αισθητικά ωραίο* (Nührenbörger & Steinbring, 2008, σελ.169), αρκεί για την ανάδειξη της μαθηματικής γνώσης. Όμως το εμπράγματο υλικό δεν αποτελεί πραγμάτωση μιας μαθηματικής κατάστασης, αλλά προσφέρεται για την αναπαράσταση καταστάσεων. Η επεξεργασία των καταστάσεων αυτών, η δράση των παιδιών πάνω στο υλικό, θα οδηγήσει στη διασύνδεση των αντικειμένων με τις μαθηματικές έννοιες, στην ανακάλυψη σχέσεων και ιδιοτήτων, στην αιτιολόγηση, σε γενικότερες μαθηματικές ιδέες, με λίγα λόγια στην ανάδειξη του μαθηματικού νοήματος (Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 2013, Καλδρυμίδου, 2016).

Τα καλαμάκια και τα ξυλάκια αποτελούν ένα υλικό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και επιτρέπει την ανάδειξη βασικών χαρακτηριστικών των σχημάτων

(πλήθος πλευρών, σχέσεις μεταξύ αυτών όπως η ισότητα/ανισότητα μήκους, η παραλληλία ή η καθετότητα, …). Η αποτελεσματικότητα όμως της χρήση τους εξαρτάται από το έργο στο οποίο θα χρησιμοποιηθούν. Ποιο θα είναι το πλήθος τους, ποια θα είναι τα μήκη τους; Τι επιλογές θα χρειαστεί να κάνουν και τι αποφάσεις θα χρειαστεί να πάρουν τα παιδιά; Αυτά αποτελούν τα στοιχεία που θα καθορίσουν το μαθηματικό περιεχόμενο που θα ενεργοποιηθεί και το μαθηματικό νόημα που θα αναδειχθεί. Ταυτόχρονα η επιλογή του υλικού που θα δοθεί στα παιδιά από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς δίνει ενδείξεις για τη δική τους μαθηματική γνώση αλλά τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Το έργο που αναλύεται εδώ προέρχεται από τις εργαστηριακές ασκήσεις στο μάθημα της Διδακτικής των Μαθηματικών κατά το ακαδημαϊκό έτος 2022-23 και αφορούσε στην κατασκευή ενός τετραγώνου. Η εργαστηριακή άσκηση που δόθηκε είχε ως εξής:

Για κάθε ένα από τα παρακάτω υλικά να επιλέξετε αν θα το δίνατε ή όχι στα παιδιά για να κάνετε μία δραστηριότητα κατασκευής τετραγώνου, η οποία θα επέτρεπε να αναδειχθούν τα βασικά χαρακτηριστικά του τετραγώνου.

Στη συνέχεια να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

	Υλικό	Ν / Ο
1	4 πράσινα καλαμάκια μήκους 7 εκατοστών	
2	5 πράσινα καλαμάκια μήκους 7 εκατοστών	
3	4 πράσινα καλαμάκια μήκους 7 εκατοστών και 2 κόκκινα καλαμάκια μήκους 9 εκατοστών	
4	4 πράσινα καλαμάκια μήκους 7 εκατοστών και 2 πράσινα καλαμάκια μήκους 9 εκατοστών	

Αιτιολόγηση
1.
2.
3.
4.

Εικόνα 1: Το έργο που δόθηκε

Στις εργαστηριακές ασκήσεις συμμετείχαν 141 φοιτήτριες και φοιτητές του Στ’ εξαμήνου του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών.

Η μεγάλη διαφοροποίηση των απαντήσεων μας έδωσε το ερέθισμα να τις αναλύσουμε συστηματικά ως προς φύση των κριτηρίων που χρησιμοποιήθηκαν. Οι αιτιολογήσεις κατηγοριοποιήθηκαν αρχικά με βάση το αντικείμενο αναφοράς (τα παιδιά ή το γεωμετρικό αντικείμενο). Ως προς τις αναφορές στα παιδιά, η χρήση λέξεων που παραπέμπουν στο εύκολο ή δύσκολο της δραστηριότητας διαφοροποιήθηκε από την

αναφορά «θα μπερδευτούν» τα παιδιά. Αυτό έγινε γιατί το πρώτο δεν αποκλείει την επιτυχία, ενώ το δεύτερο παραπέμπει μάλλον στην πιθανότητα να μην τα καταφέρουν.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών ως προς την επιλογή ή όχι κάθε υλικού και στη συνέχεια ως προς την αιτιολόγηση που δίνουν. Όπως ήδη αναφέρθηκε ζητήθηκε να απαντήσουν για κάθε ένα υλικό ξεχωριστά αν θα το έδιναν στα παιδιά και γιατί. Για κάθε μία περίπτωση υλικού χρησιμοποιείται η αντίστοιχη συντόμευση: **4 π**ράσινα καλαμάκια μήκους **7** εκ. (**4π7**), **5 π**ράσινα καλαμάκια μήκους **7** εκ. (**5π7**), **4 π**ράσινα καλαμάκια μήκους **7** εκ. και **2 κ**όκκινα καλαμάκια μήκους **9** εκ. (**4π7-2κ9**), **4 π**ράσινα καλαμάκια μήκους **7** εκ. και **2 π**ράσινα καλαμάκια μήκους **9** εκ. (**4π7-2π9**).

ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Ως προς την επιλογή των υλικών η δημοφιλέστερη επιλογή αποτελεί η περίπτωση 4π7, ενώ η περίπτωση 4π7-2π7 επιλέγεται από τα λιγότερα άτομα.

	4π7	**5π7**	**4π7-2κ9**	**4π7-2π9**
Ναι	132	42	51	33
Όχι	9	99	90	108

Πίνακας 1: Κατανομή για την επιλογή ή όχι κάθε υλικού

Αναλύοντας συνδυαστικά τα αποτελέσματα αυτά διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν σταθερά προφίλ επιλογής. Πιο συγκεκριμένα, από τα 132 άτομα που επιλέγουν τα 4 καλαμάκια 7 εκατοστών:

59 άτομα επιλέγουν μόνο αυτήν την περίπτωση και απορρίπτουν όλα τα άλλα υλικά, 22 άτομα επιλέγουν και την περίπτωση από τα 4 πράσινα καλαμάκια 7 εκατοστών και τα 2 κόκκινα 9 εκατοστών (4π7-2κ9) και 18 άτομα επιλέγουν και τα πέντε καλαμάκια 7 εκατοστών (5π7).

Η αιτιολόγηση που δίνουν τα άτομα αυτά για την επιλογή τους αναφέρεται είτε στον διευκολυντικό ρόλο του χρώματος για την περίπτωση 4π7-2κ9, είτε στο ίδιο μήκος που έχουν τα καλαμάκια για την περίπτωση 5π7.

ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Στην παράγραφο αυτή επιχειρείται μία όσο το δυνατόν αναλυτική παρουσίαση των αιτιολογήσεων, οι οποίες δίνουν ενδείξεις για τα κριτήρια που οδηγούν τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς στις διδακτικές επιλογές τους.

Η περίπτωση των 4π7

Όπως ήδη αναφέραμε το υλικό αυτό, όπου δίνονται μόνο ίσα μεταξύ τους καλαμάκια και τόσα όσα χρειάζονται για το σχηματισμό ενός τετραγώνου, επιλέχθηκε από τη μεγάλη πλειοψηφία (132/141) των μελλοντικών εκπαιδευτικών. Γιατί όμως επιλέγεται ή δεν επιλέγεται;

Επιλέγεται ή δεν επιλέγεται γιατί είναι εύκολο:

> Δεν θα περισσέψουν και δεν θα μπερδευτούν.
>
> Δεν θα έδινα γιατί είναι πολύ εύκολο. Απλά θα τα ενώσουν.

Επιλέγεται ή δεν επιλέγεται γιατί κατασκευάζεται σωστό σχήμα:

> Με 4 ίσα καλαμάκια κατασκευάζεις ένα τετράγωνο.
>
> Θα σχηματιζόταν ένα τέλειο τετράγωνο.

Τα συνολικά αποτελέσματα έχουν ως εξής:

	Ναι, είναι εύκολο	Σωστό σχήμα	Σωστό σχήμα λόγω μήκους	Όχι, γιατί βοηθά	Χωρίς αιτιολόγηση
N	39	37	52	9	4

Πίνακας 2: Κατανομή αιτιολογήσεων για τα 4π7

Με βάση τις αιτιολογήσεις που δίνουν οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί, διαπιστώνεται ότι για τη μεγάλη πλειοψηφία (89/141) ο λόγος τους αναφέρεται στο γεωμετρικό αντικείμενο. Για 39 άτομα το σημαντικό είναι ότι είναι εύκολο για τα νήπια, ενώ αυτό ακριβώς αποτελεί το λόγο απόρριψης του για εκείνα τα άτομα που (9) δεν το επιλέγουν.

> Όχι, καθώς με αυτόν τον τρόπο θα τους δοθεί έτοιμη η απάντηση χωρίς να χρειαστεί να επεξεργαστούν τις ιδιότητες του τετραγώνου.

Η περίπτωση των 5π7

Στην περίπτωση που το προτεινόμενο υλικό περιλαμβάνει καλαμάκια ίδιου χρώματος και μήκους, αλλά περισσότερα από όσα χρειάζονται για ένα τετράγωνο, η πλειοψηφία (99/141) των μελλοντικών εκπαιδευτικών δεν το επιλέγει. Οι λόγοι της επιλογής ή απόρριψης είναι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δύο ειδών: είτε αιτιολογούν με αναφορά στα παιδιά (δύσκολο ή θα μπερδευτούν επειδή είναι πολλά), είτε αναφέρονται στο γεωμετρικό σχήμα:

> Το σχήμα δεν θα είναι τετράγωνο, αφού τα καλαμάκια είναι 5.
>
> Με 5 καλαμάκια θα σχηματίσουν πεντάγωνο.

Από την άλλη περίπου το 30% των μελλοντικών εκπαιδευτικών θα επέλεγε τα 5 καλαμάκια ίδιου μήκους για την κατασκευή τετραγώνου από τα παιδιά. Ο κύριος λόγος για αυτήν την επιλογή είναι το ίδιο μήκος, που θα

επέτρεπε να δοθεί έμφαση και να αναδειχθεί ως βασικό χαρακτηριστικό του τετραγώνου οι 4 πλευρές.

Ναι, διότι τα παιδιά θα καταλάβουν ότι το τετράγωνο αποτελείται από 4 πλευρές και όχι από 5.

Τα συνολικά αποτελέσματα έχουν ως εξής:

	Όχι, δύσκολο	Όχι, θα μπερδευτούν	Όχι σωστό σχήμα	Ναι Ίδιο μήκος τετράγωνο	Χωρίς ή λάθος αιτιολόγηση
N	9	28	60	40	4 (3 – 1)

Πίνακας 3: Κατανομή αιτιολογήσεων για τα 5π7

Φαίνεται λοιπόν, ότι το να δίνεται το υλικό που είναι απαραίτητο και μόνο αυτό αποτελεί ένα κριτήριο αρνητικής επιλογής. Το κριτήριο αυτό παραπέμπει στην προηγούμενη εμπειρία των ατόμων: ένα κλασσικό χαρακτηριστικό των ασκήσεων και προβλημάτων των σχολικών μαθηματικών είναι ότι στην εκφώνησή τους δίνονται όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για την επίλυσή τους και μόνο αυτά. Όπως αναφέρει και μία φοιτήτρια, η οποία, αντιθέτως θα επέλεγε το υλικό αυτό:

Θα τα έδινα για να μάθουν ότι δεν χρειάζεται να χρησιμοποιούν όλα τα υλικά παρά μόνο αυτά που χρειάζονται

Η περίπτωση των 4π7-2κ9

Το υλικό που περιλαμβάνει 4 καλαμάκια ίδιου χρώματος και μήκους και δύο καλαμάκια διαφορετικού μήκους και χρώματος, απορρίπτεται από το μεγαλύτερο ποσοστό των ατόμων (περίπου 64%), αλλά ταυτόχρονα αποτελεί τη δεύτερη, σε συχνότητα, θετική επιλογή (51/141).

Οι λόγοι της απόρριψης είναι και στην περίπτωση αυτή κυρίως δύο ειδών: Είτε αναφέρονται στο γεωμετρικό σχήμα, είτε αιτιολογούν με αναφορά στα παιδιά (δύσκολο ή θα μπερδευτούν επειδή είναι πολλά).

Δεν είναι ίσα τα καλαμάκια. /Το τετράγωνο πρέπει να έχει ίσο μήκος πλευρών

Είναι πολλά και το χρώμα δυσκολεύει τα παιδιά.

Θα έβγαινε παραλληλόγραμμο.

Ωστόσο η σχετικά μεγαλύτερη θετική επιλογή (29/42) οφείλεται κυρίως στο διευκολυντικό ρόλο που παίζει η διαφορά χρώματος.

Τα παιδιά θα καταφέρουν να το φτιάξουν με τη βοήθεια των χρωμάτων.

Διότι τα παιδιά θα ξεχωρίσουν τα καλαμάκια από το χρώμα και θα χρησιμοποιήσουν τα 4 ίδια.

Τα συνολικά αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Γιατί	N
Όχι, Δύσκολο	9
Όχι, θα μπερδευτούν	23
Όχι σωστό σχήμα	46
Ναι, τετράγωνο με τα 4, χωρίς αναφορά στο χρώμα ή στο μήκος	14
Ναι, το χρώμα βοηθά	29
Όχι, το χρώμα βοηθά	13
Χωρίς ή λάθος αιτιολόγηση	7

Πίνακας 4: Κατανομή αιτιολογήσεων για τα 4π7-2κ9

Βλέπουμε λοιπόν ότι, και στην περίπτωση αυτή, για την επιλογή ή την απόρριψη του υλικού γίνεται επίκληση σε τρία ζητήματα: (α) να μην δυσκολευτούν, (β) ότι πρέπει να χρησιμοποιούνται όλα τα υλικά που δίνονται, και (γ) ότι το διαφορετικό χρώμα μπορεί να καθοδηγήσει τα παιδιά στην πραγματοποίηση του έργου.

Η περίπτωση των 4π7-2π9

Στην περίπτωση που το προτεινόμενο υλικό περιλαμβάνει 6 καλαμάκια ίδιου χρώματος αλλά τα 2 με διαφορετικό μήκος έχουμε το μεγαλύτερο ποσοστό απόρριψης (76.6%). Οι λόγοι μη επιλογής αυτού του υλικού είναι του ίδιου τύπου με τις προηγούμενες περιπτώσεις, όπως φαίνεται και στα παραδείγματα που ακολουθούν.

> Όχι, γιατί μας δίνει περισσότερες πλευρές από όσες χρειάζεται το σχήμα
>
> Είναι λάθος επιλογή καθώς με 6 συνολικά καλαμάκια ίδιου χρώματος τα παιδιά θα φτιάξουν πολύγωνο και όχι τετράγωνο
>
> Όχι, γιατί θα μπερδέψει τα παιδιά αφού είναι 6 και όχι 4

Τα συνολικά αποτελέσματα έχουν ως εξής:

	Όχι, δύσκολο	Όχι, θα μπερδευτούν	Όχι σωστό σχήμα	Ναι Σχηματίζεται τετράγωνο	Χωρίς ή λάθος αιτιολόγηση
N	18	42	48	24	9(5 – 4)

Πίνακας 5: Κατανομή αιτιολογήσεων για τα 4π7-2π9

Σχετικά με τα 33 άτομα που απάντησαν θετικά στην επιλογή του υλικού, μόνο τα 24 δίνουν «σωστές» αιτιολογήσεις.

> Θα τα έδινα γιατί πρέπει να καταλάβουν τη διαφορά στα 2 μεγάλα καλαμάκια και να μην τα χρησιμοποιήσουν.

Ναι διότι δίνοντας παραπάνω υλικό ίδιου χρώματος θα πρέπει να αντιληφθούν ποια καλαμάκια έχουν ίδιο μήκος για να τα χρησιμοποιήσουν.

Από τα 9 άτομα που επέλεξαν το υλικό τα 5 δεν αιτιολογούν, αλλά τα άλλα 4 προτείνουν τη δυνατότητα χρήσης όλου του υλικού:

Ναι, γιατί με τα δύο μεγάλα μπορούν να κάνουν μία σκεπή

Ναι, γιατί μπορούν να σπάσουν στη μέση τα 2 μεγάλα και να κάνουν και ένα δεύτερο τετράγωνο με πλευρές 4.5 εκατοστά

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι αρχικά κανείς/καμία δεν έχει αναφερθεί στις ορθές γωνίες ως χαρακτηριστικό του τετραγώνου. Όταν αναφέρονται σε χαρακτηριστικά του σχήματος επικαλούνται το πλήθος των πλευρών ή/και το μήκος τους.

Η συντριπτική πλειοψηφία (81/141) των μελλοντικών εκπαιδευτικών επιλέγει μόνο τις περιπτώσεις εκείνες όπου είτε δίνεται μόνο το υλικό που είναι αναγκαίο για την κατασκευή (59) ή, αν υπάρχει επιπλέον υλικό, να είναι διαφορετικού χρώματος ώστε να γίνεται εύκολα αντιληπτό από τα παιδιά ποια καλαμάκια πρέπει να χρησιμοποιήσουν (22). Ενώ μόνο 13 άτομα απορρίπτουν τη διαμεσολάβηση του χρώματος στην δυνατότητα καθοδήγησης των παιδιών.

Οι λόγοι για τους οποίους οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί απορρίπτουν υλικό με περισσότερα αντικείμενα, ίδιου χρώματος και/ή διαφορετικού μήκους από όσα είναι αναγκαία για την κατασκευή ενός τετραγώνου αναδεικνύουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η μία προσέγγιση αναφέρεται στην εκτίμηση των εκπαιδευτικών ότι τα παιδιά θα δυσκολευτούν ή θα μπερδευτούν από αυτά τα χαρακτηριστικά του υλικού. Ενώ η άλλη αναφέρεται στο ότι με τα αντικείμενα αυτά δεν κατασκευάζεται τετράγωνο, αλλά άλλο σχήμα. Αυτοί οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί φαίνεται να θεωρούν ότι πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα αντικείμενα που δίνονται στα παιδιά.

Τέλος, μια μικρή ομάδα μελλοντικών εκπαιδευτικών (μέχρι 40, ανάλογα με το έργο) επιλέγουν το υλικό εκείνο που θα επιτρέψει στα παιδιά να πειραματιστούν και να αναδειχθούν έτσι βασικά χαρακτηριστικά του τετραγώνου. Και ακόμα πιο λίγοι είναι εκείνοι που απορρίπτουν την ευκολία (9) και τη διευκόλυνση του χρώματος (13).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η αξιολόγηση υλικού για την πραγμάτωση και διαπραγμάτευση του τετραγώνου, διαμέσου της επιλογής ή μη συγκεκριμένου υλικού και της αιτιολόγησης της απόφασης, έφερε στην επιφάνεια αρκετά στοιχεία για τη Μαθηματική Γνώση Περιεχομένου (ΜΓΠ) και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΠΓΚ) των μελλοντικών εκπαιδευτικών.

Η απουσία αναφοράς από όλους τους συμμετέχοντες στην ορθή γωνία, ως βασικό χαρακτηριστικό του τετραγώνου, θα μπορούσε ενδεχομένως να συνδεθεί με την ΜΓΠ και να ερμηνευθεί με τη υπερίσχυση της στερεοτυπικής εικόνας του τετραγώνου (οριζόντιες και κάθετες πλευρές).

Ως προς το πλήθος των αιτιολογήσεων που συνδέονται με τη χρήση όλου του υλικού που δίνεται για την κατασκευή είναι δύσκολο να συνδεθεί είτε με τη ΜΓΠ, είτε με την ΠΓΚ. Από πού προέρχεται;

Όπως ήδη αναφέρθηκε, ένα κλασσικό χαρακτηριστικό των ασκήσεων και προβλημάτων των σχολικών μαθηματικών είναι ότι στην εκφώνησή τους δίνονται όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για την επίλυσή τους και μόνο αυτά. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι η συσσωρευμένη αυτή εμπειρία διαμόρφωσε την αντίληψη ότι και τα έργα (δράσεις ή δραστηριότητες) που δίνονται στα παιδιά πρέπει να ικανοποιούν αυτή συνθήκη. Μπορεί, λοιπόν, να ερμηνευθεί ως μία «μετα-μαθηματική» αντίληψη, μια αντίληψη για τα μαθηματικά έργα, που είναι ένα αποτέλεσμα του συνήθους διδακτικού συμβολαίου (Brousseau, 1997). ¨Η ακόμα να ερμηνευθεί ως ένα θεώρημα εν δράσει (Vergnaud, 2009). Το οποίο στη συνέχεια μετασχηματίστηκε σε θεώρημα εν δράσει για τη διδασκαλία των Μαθηματικών: Δίνουμε μόνο ότι είναι αναγκαίο για την πραγμάτωση της δράσης και μόνο αυτό.

Τέλος, ως προς την αποφυγή του *δύσκολου*, του *πολύπλοκου* που θα *μπερδέψει*, τη χρήση άλλων διευκολυντικών στοιχείων όπως π.χ. το χρώμα που δημιουργούν φαινόμενα Topaze (Brousseau, 1997), μάλλον οφείλεται σε μία γενικότερη Παιδαγωγική Γνώση. Ο φόβος για το δύσκολο, η αποφυγή του λάθους (Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 2013), η αποφυγή γνωστικής πρόκλησης (Kaldrimidou, 2002) αποτελούν κάποια φαινόμενα που δρουν αρνητικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και γνώσης. Η αντιμετώπισή τους, απαραίτητη και για την ανάπτυξη της πολιτειότητας (που είναι και το κεντρικό θέμα του συνεδρίου), είναι θέμα όχι μόνο του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών, αλλά και της διεπιστημονικής σύμπραξης στο πλαίσιο της εκπαίδευσης μελλοντικών εκπαιδευτικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage editions.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133–148.

Ginsburg, H. P., Kaplan, R. G., Cannon, J., Cordero, M. I., Eisenband, J. G., Galanter, M., et al. (2006). Helping early childhood educators to teach mathematics. In M. Zaslow & I. Martinez-Beck (Eds.), *Critical issues in early childhood professional developmen*t (pp. 171–202). Baltimore: Paul H. Brookes.

Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of PME-30*). Vol. 3, (pp. 129–136). Prague, Czech Republic.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-149). Rotterdam: Sense.

Kaldrimidou, M. (2002), Teachers' role in the management of mathematical knowledge: an analysis of a problem-solving process, in A. Cockburn, E. Nardi (Eds), *Proceedings of PME-26.* Vol. 3, (pp.169-176)., Norwich: UEA

Καλδρυμίδου, Μ. (2016). Το εκπαιδευτικό υλικό για τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση των Εκπαιδευτικών και στην εκπαίδευση των παιδιών: ,το Μ. Σκουμιός & Χ. Σκουμπουρδή (Επιμ.). *Πρακτικά 2ου Πανελληνίου Συνεδρίου «Το εκπαιδευτικό υλικό στα Μαθηματικά και το εκπαιδευτικό υλικό στις Φυσικές Επιστήμες: μοναχικές πορείες ή αλληλεπιδράσεις;»*, (σελ. 104-117).

Kaldrimidou, M., Sakonidis, C., & Tzekaki, M. (2013). Teachers' reflecting on the nature of the mathematical knowledge under construction in the classroom. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds), *Proceedings of PME-37*. Vol. 4 (pp. 305- 312). Kiel: Germany: PME.

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds), *International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Vol.2 (pp. 157-181). Rotterdam: Sense Publishers

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Τζεκάκη, Μ. (2010), *Μαθηματική Εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, *52*(2), 83-94.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM, 47*, 497-509.

ΑΠΟΨΕΙΣ ΕΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΤΥΠΟΥ LAKATOS

Δημήτριος Δεσλής, Ανδρέας Στυλιανίδης, Mateja Jamnik

University of Cambridge, UK

dd544@cam.ac.uk, as899@cam.ac.uk, mj201@cam.ac.uk

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των απόψεων των δασκάλων αναφορικά με την ενασχόληση της σχολικής τάξης με τη μαθηματική απόδειξη στο πλαίσιο διερεύνησης τύπου Lakatos (ΔτL). Με τη χρήση ενός ερωτηματολογίου βασισμένο σε επεισόδια από μια σχολική τάξη σε μορφή κόμικς συλλέξαμε δεδομένα από 331 εν ενεργεία και μελλοντικούς δασκάλους αναφορικά με τις προσδοκίες τους από την ενασχόληση με τη ΔτL, καθώς και την αξία και το κόστος που εκτιμούν πως έχει για τους ίδιους και για τους μαθητές. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως υπάρχουν λίγες διαφορές μεταξύ μελλοντικών και εν ενεργεία δασκάλων, οι οποίοι συνολικά βλέπουν θετικά την ενσωμάτωση της ΔτL στο μάθημά τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μαθηματική απόδειξη κατείχε ανέκαθεν έναν κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά, ενώ τις τελευταίες δεκαετίες αναγνωρίζεται ολοένα και περισσότερο ως σημαντικό συστατικό των σχολικών μαθηματικών. (Stylianides et al., 2023). Ωστόσο, η ενασχόληση με δραστηριότητες απόδειξης είναι σπάνια στην τάξη και ακόμη σπανιότερη είναι η ενασχόληση με αυθεντικές δραστηριότητες απόδειξης που βοηθούν τους μαθητές να γνωρίσουν σημαντικές πτυχές της φύσης και των πρακτικών της επιστημονικής μαθηματικής δραστηριότητας (Stylianides et al., 2022). Σε αυτό το πλαίσιο, η σχέση της δημιουργίας και επεξεργασίας εικασιών με τη διαδικασία κατασκευής αποδείξεων συχνά υποτιμάται (Aaron & Herbst, 2019). Σε αυτήν ακριβώς τη δυναμική σχέση, καθώς και στον κομβικό ρόλο που κατέχει σε αυτή η εξέταση παραδειγμάτων εστιάζει η θεωρία του Imre Lakatos (1976). Αν και η θεώρησή του ανήκει στο πεδίο της φιλοσοφίας, πρόσφατες έρευνες (π.χ., Komatsu & Jones, 2022) δείχνουν ότι η ενασχόληση της σχολικής τάξης με πρακτικές που κατέχουν κεντρική θέση στη θεώρηση του Lakatos, όπως η ανταλλαγή μαθηματικών επιχειρημάτων με σκοπό την κατασκευή και τροποποίηση εικασιών (Stylianides et al., 2022), μπορούν να προσφέρουν στους μαθητές ευκαιρίες για ουσιαστική κατανόηση της φύσης και της σημασίας της μαθηματικής διερεύνησης, ήδη από το δημοτικό σχολείο (π.χ., Reid, 2002). Ωστόσο, οι έρευνες σχετικά με την ενσωμάτωση στοιχείων από τη θεωρία του Lakatos στα σχολικά μαθηματικά εστιάζουν κυρίως στους

μαθητές με αποτέλεσμα να γνωρίζουμε ελάχιστα για τις απόψεις των εκπαιδευτικών ή για το κατά πόσο θα ήταν πρόθυμοι να ενσωματώσουν σχετικές δραστηριότητες στη διδασκαλία τους.

Προηγούμενες έρευνες στον τομέα της εκπαίδευσης εκπαιδευτικών (π.χ. Zambak & Magiera, 2020) έχουν δώσει ευκαιρίες σε μελλοντικούς δασκάλους να εκτιμήσουν πτυχές της απόδειξης που κατέχουν κεντρική θέση στη θεώρηση του Lakatos. Ταυτόχρονα, υπάρχουν ενδείξεις ότι μελλοντικοί δάσκαλοι που ανέπτυξαν θετικές στάσεις απέναντι στην απόδειξη μέσω προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών, αντιμετώπισαν δυσκολίες κατά τις προσπάθειές τους να σχεδιάσουν και να διδάξουν οι ίδιοι σχετικά μαθήματα (Stylianides et al., 2013). Παρόμοιες δυσκολίες έχουν παρατηρηθεί και σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας (Buchbinder & McCrone, 2020). Δεδομένων των δυσκολιών που συνδέονται με την αξιοποίηση στην τάξη των γνώσεων και δεξιοτήτων που αναπτύσσουν οι δάσκαλοι μέσω προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών, τόσο στον τομέα της απόδειξης όσο και ευρύτερα (Orland-Barak & Wang, 2021), είναι πιθανό οι απόψεις των μελλοντικών δασκάλων σχετικά με την ενασχόληση με την απόδειξη στο δημοτικό σχολείο να διαφέρουν από εκείνες των εν ενεργεία συναδέλφων τους, οι οποίοι έχουν βιώσει την πραγματικότητα της σχολικής τάξης για αρκετό καιρό και ενδεχομένως έχουν προσαρμοστεί σε αυτή.

Σε αυτό το πλαίσιο, η παρούσα έρευνα εστιάζει στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα: (ΕΕ1) *Ποιες είναι οι απόψεις των δασκάλων σχετικά με την ενσωμάτωση δραστηριοτήτων απόδειξης βασισμένες σε πτυχές της θεωρίας του Lakatos στην τάξη των μαθηματικών;* (ΕΕ2) *Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις απόψεις των μελλοντικών και των εν ενεργεία δασκάλων;*

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η Διερεύνηση τύπου Lakatos (ΔτL)

Με βάση τη θεωρία του Lakatos (1976) και λαμβάνοντας υπόψη πρόσφατες μελέτες σχετικά με την ενσωμάτωσή της στην τάξη (π.χ., Komatsu & Jones, 2022), αναπτύξαμε το θεωρητικό μοντέλο «Διερεύνηση τύπου Lakatos (ΔτL)/ Lakatos-style Investigation (LsI)» (στο εξής *ΔτL*) που περιγράφει πώς μια σχολική τάξη μπορεί να ασχοληθεί με μια δραστηριότητα μαθηματικής απόδειξης ακολουθώντας μια προσέγγιση βασισμένη στην προσέγγιση του Lakatos. Η ΔτL βασίζεται σε τέσσερις φάσεις διαμόρφωσης και τροποποίησης εικασιών μέσω της διερεύνησης παραδειγμάτων: Στους λύτες δίνεται ένα πρόβλημα απόδειξης και αυτοί διατυπώνουν μια εικασία (Φάση 1: *Διατύπωση*). Έπειτα, εξετάζουν διάφορες περιπτώσεις. Κατά τη διάρκεια αυτής της διερεύνησης ενδέχεται να ανακαλύψουν υποστηρικτικά παραδείγματα, τα οποία υποδεικνύουν ότι η εικασία μπορεί να είναι αληθής (Φάση 2: *Επικύρωση*). Ωστόσο,

ενδέχεται επίσης να προκύψουν αντιπαραδείγματα, τα οποία καταδεικνύουν ότι η εικασία δεν είναι αληθής (Φάση 3: *Αναίρεση*). Αναλογιζόμενοι τα χαρακτηριστικά των υποστηρικτικών παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων που εξέτασαν, οι λύτες μπορούν να τροποποιήσουν την αρχική εικασία είτε περιορίζοντας το πεδίο εφαρμογής της, ώστε να μην επηρεάζεται πλέον από τα αντιπαραδείγματα, είτε επεκτείνοντάς το, ώστε τα αντιπαραδείγματα να μετατραπούν σε υποστηρικτικά παραδείγματα (Φάση 4: *Τροποποίηση*). Στη συνέχεια, αρχίζει ένας νέος κύκλος διερεύνησης με σκοπό την περαιτέρω διερεύνηση και βελτίωση της εικασίας.

Αξία-Κόστος-Προσδοκία (ΑΚΠ)

Λαμβάνοντας υπόψη θεωρητικές προσεγγίσεις προηγούμενων ερευνών στους τομείς της εκπαιδευτικής ψυχολογίας (π.χ. Eccles & Wigfield, 2002) και της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. Weber et al., 2020) αναφορικά με τις απόψεις που σχετίζονται με τα κίνητρα αναφορικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση, διαμορφώσαμε το θεωρητικό μοντέλο «Αξία-Κόστος-Προσδοκία (ΑΚΠ)/ Value-Cost-Expectancy (VCE)» (στο εξής *ΑΚΠ*). Σύμφωνα με αυτό, η ύπαρξη ή όχι επαρκούς κινήτρου για την ενασχόληση με τη ΔτL είναι συνάρτηση τριών παραγόντων, καθένας από τους οποίους προκύπτει από τη σύνθεση τριών συνιστωσών απόψεων (βλ. Εικόνα 1). Πρώτος παράγοντας είναι η αντιλαμβανόμενη Αξία, με συνιστώσες απόψεις τη *σημαντικότητα*, τη *χρησιμότητα* και το *ενδιαφέρον* που βλέπει κάποιος στη ΔτL. Δεύτερος παράγοντας είναι το αντιλαμβανόμενο Κόστος, με συνιστώσες απόψεις *χρόνο*, την *προσπάθεια* και το *συναισθηματικό κόστος* που θεωρεί πως απαιτούνται για την ενασχόληση με τη ΔτL. Τρίτος παράγοντας είναι η Προσδοκία του, αναφορικά με την *ευκολία* του εγχειρήματος, την *πιθανότητα επιτυχίας* και τη σχετική *ικανότητα* των εμπλεκόμενων μερών. Μεγάλη αντιλαμβανόμενη Αξία και Προσδοκία συνδέονται με μεγαλύτερο κίνητρο για ενασχόληση με τη δραστηριότητα, ενώ μεγάλο αντιλαμβανόμενο Κόστος συνδέεται με μικρότερο σχετικό κίνητρο (Eccles & Wigfield, 2002; Weber et al., 2020).

Επιπροσθέτως, υποθέτουμε πως σημαντικές για την ύπαρξη κινήτρου ή μη των εκπαιδευτικών για την εμπλοκή τους με τη ΔτL είναι οι απόψεις που έχουν αναφορικά με την Αξία, το Κόστος και την Προσδοκία τόσο για τους εαυτούς τους όσο και για τους μαθητές. Για παράδειγμα, θεωρούμε πως εξετάζουν την προσπάθεια που απαιτείται αφενός από τους ίδιους ως εκπαιδευτικούς και αφετέρου από τους μαθητές. Για να αποτυπώσουμε αυτή τη διττή φύση των συνιστωσών απόψεων, διακρίνουμε δύο διαστάσεις (Δ: Δάσκαλος και Μ: Μαθητές) σε καθεμία από αυτές (βλ. Εικόνα 1). Έτσι, λάβαμε υπόψη μας συνολικά 18 συνιστώσες απόψεις.

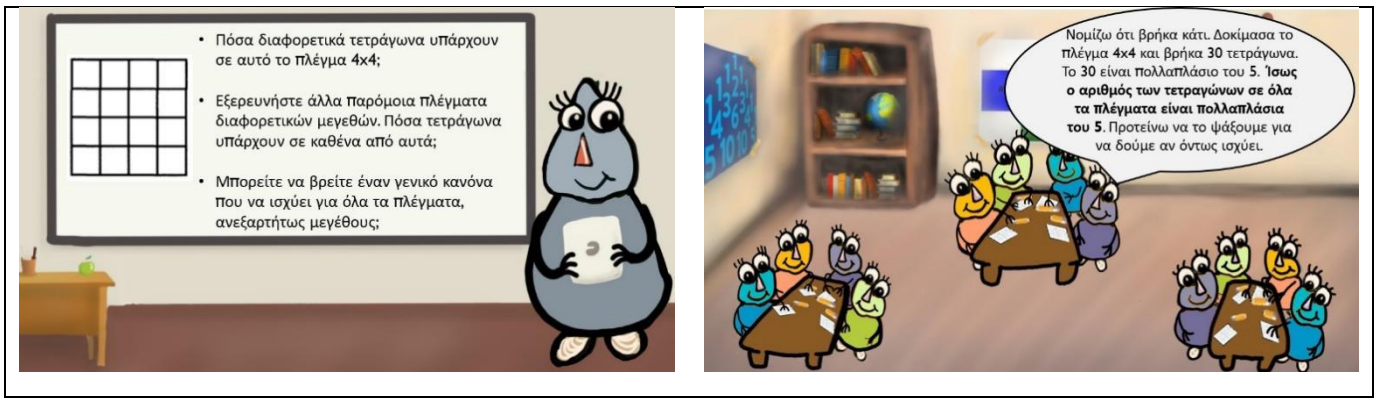
Εικόνα 1: Θεωρητικό μοντέλο ΑΚΠ- Οι απόψεις των εκπαιδευτικών που σχετίζονται με την προθυμία τους για ενασχόληση με τη ΔτL στην τάξη

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Το συνολικό δείγμα της έρευνας ήταν 331 συμμετέχοντες που επιλέχθηκαν με ευκαιριακή δειγματοληψία (84,89% γυναίκες). Οι 149 συμμετέχοντες ήταν εν ενεργεία δάσκαλοι πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και οι υπόλοιποι 182 ήταν μελλοντικοί δάσκαλοι-φοιτητές ΠΤΔΕ, που στη συντριπτική τους πλειοψηφία (95.77%) είχαν παρακολουθήσει μαθήματα διδακτικής μαθηματικών κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Στο δείγμα υπήρχε εκπροσώπηση όλων των ΠΤΔΕ της Ελλάδας καθώς και περισσότερων από εκατό σχολεία από όλες τις γεωγραφικές περιφέρειες.

Συλλογή Δεδομένων. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη χρήση ενός διαδικτυακού ερωτηματολογίου στην πλατφόρμα Qualtrics, το οποίο βασιζόταν σε πλαισιωμένα επεισόδια από σχολικές τάξεις σε μορφή μιας ιστορίας κόμικς (βλ. Εικόνα 2). Τα επεισόδια (προσαρμοσμένα από Zack, 1997, και Reid, 2002) απεικονίζουν μια σχολική τάξη που συζητά το πρόβλημα «*Μέτρα τα τετράγωνα*» και συγκεκριμένα διερευνά την εικασία «*Ο αριθμός των τετραγώνων σε ένα πλέγμα n επί n είναι πολλαπλάσιο του* 5» (βλ. Εικόνα 2), περνώντας και από τις τέσσερις φάσεις της ΔτL. Κατά τη σχεδίαση των χαρακτήρων επιλέχθηκαν προσεκτικά γενικόμορφα χαρακτηριστικά και χρώματα, τα οποία δεν παραπέμπουν σε συγκεκριμένη εθνικότητα, φύλο κτλ. Αυτό αφενός ελαχιστοποιεί την πιθανότητα οι απαντήσεις των συμμετεχόντων να είναι επηρεασμένες από πιθανές προκαταλήψεις (π.χ. χρώματα που παραπέμπουν σε συγκεκριμένη εθνικότητα, φύλο κ.λπ.) και αφετέρου τους διευκολύνει να φανταστούν τον εαυτό τους και τους μαθητές τους στη θέση των χαρακτήρων του δασκάλου και των μαθητών, αντίστοιχα. Στους συμμετέχοντες παρουσιάστηκαν 16 σύντομα επεισόδια που κάλυπταν ένα μεγάλο εύρος

στρατηγικών συλλογισμού, επιχειρημάτων μαθητών και διδακτικών πρακτικών σχετικά με τη μαθηματική απόδειξη τύπου Lakatos. Τα επεισόδια αυτά συνοδεύονταν από ερωτήσεις που στόχευαν στη διερεύνηση της μαθηματικής γνώσης των δασκάλων, κάτι που δεν αποτελεί αντικείμενο της ανάλυσης στα πλαίσια της παρούσας έρευνας (βλ., Deslis et al., 2023 για περισσότερα). Για τον σχεδιασμό των επεισοδίων και των ερωτήσεων βασιστήκαμε στα ευρήματα μιας προηγούμενης έρευνάς μας με ποιοτικές συνεντεύξεις (Deslis et al., 2021). Μετά το πέρας των επεισοδίων ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να απαντήσουν σε 18 ερωτήσεις τύπου Likert (1: διαφωνώ - 5: συμφωνώ), μία για κάθε επιμέρους συνιστώσα άποψη του ΑΚΠ, βλ. Εικόνα 1). Παραθέτουμε ενδεικτικά δύο από αυτές: *Πιστεύω ότι οι μαθητές θα έβρισκαν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες σαν και αυτή* (Αξία-Ενδιαφέρον [Μ]) / *Πιστεύω ότι θα είχα τις ικανότητες που απαιτούνται για να διδάξω δραστηριότητες σαν και αυτή* (Προσδοκία-Ικανότητα [Δ]).



Εικόνα 2: Αποσπάσματα από τα επεισόδια που μελέτησαν οι δάσκαλοι

Ανάλυση δεδομένων. Με βάση τις απαντήσεις σε αυτές τις 18 ερωτήσεις, υπολογίσαμε ένα σκορ (0-1, συνεχής μεταβλητή) για καθεμιά από τις συνιστώσες της Αξίας, του Κόστους και της Προσδοκίας των δασκάλων για τους μαθητές [Μ] και τους εαυτούς τους [Δ]. Με τη χρήση του στατιστικού πακέτου STATA17, διερευνήσαμε (1) την ύπαρξη διαφορών ανάμεσα στα σκορ που αφορούν στην ίδια άποψη αλλά διαφορετική διάσταση ([Μ]: Μαθητές / [Δ]: Δάσκαλος) με t-tests εξαρτημένων δειγμάτων και (2) την ύπαρξη διαφορών μεταξύ μελλοντικών και εν ενεργεία δασκάλων με t-tests ανεξάρτητων δειγμάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι Πίνακες 1 και 2 παρουσιάζουν συνοπτικά τα αποτελέσματα αναφορικά με τα ερευνητικά ερωτήματα ΕΕ1 και ΕΕ2, αντίστοιχα.

Ευρήματα- απάντηση στο ΕΕ1. Αρχικά, φαίνεται πως οι συμμετέχοντες εκτιμούν ότι η αξία της ΔτL είναι υψηλή τόσο για τους μαθητές όσο και

για τους ίδιους. Ωστόσο, βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη συνιστωσών, καταδεικνύοντας ότι τη θεωρούν περισσότερο σημαντική και χρήσιμη για τους μαθητές, αλλά περισσότερο ενδιαφέρουσα για τους ίδιους.

Επιπλέον, θεωρούν πως η ένταξη της ΔτL στην τάξη των μαθηματικών επιφέρει τόσο στους μαθητές όσο και τους ίδιους υπολογίσιμο Κόστος σε Χρόνο και προσπάθεια αλλά σχετικά χαμηλό Συναισθηματικό Κόστος. Όλες οι συνιστώσες καταδεικνύουν ένα στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερο αντιλαμβανόμενο κόστος για τους μαθητές.

Αναφορικά με τις Προσδοκίες τους, αναμένουν πως το εγχείρημα θα είναι μέσης Ευκολίας τόσο για τους μαθητές όσο και για τους ίδιους. Επιπλέον, τόσο για τους μαθητές όσο και για τους ίδιους η προσδοκώμενη Ικανότητα και Επιτυχία είναι σε μέτρια προς υψηλά επίπεδα. Όλες οι διαφορές βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές, δείχνοντας ότι οι συμμετέχοντες έχουν μεγαλύτερες προσδοκίες από τους ίδιους σε σχέση με τους μαθητές.

	Μαθητές [M]		Δάσκαλος [Δ]		*t*(330)	*p*	*Στατ. Σημ.*
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ			
Αξία:							
Σημαντικό	.82	.21	.76	.25	5.080	.000	*** (M>Δ)
Χρήσιμο	.83	.21	.79	.24	3.416	.000	*** (M>Δ)
Ενδιαφέρον	.72	.24	.79	.24	-6.737	.000	*** (M<Δ)
Κόστος:							
Σε χρόνο	.73	.26	.66	.29	4.230	.000	*** (M>Δ)
Σε προσπάθεια	.70	.27	.60	.30	6.109	.000	*** (M>Δ)
Συναισθηματικό	.44	.26	.40	.32	2.370	.018	* (M>Δ)
Προσδοκία:							
Προσδ. Ευκολία	.45	.28	.57	.30	-6.730	.000	*** (M<Δ)
Προσδ. Ικανότητα	.59	.23	.69	.24	-6.378	.000	*** (M<Δ)
Προσδ. Επιτυχία	.65	.23	.79	.24	-3.322	.001	** (M<Δ)

Πίνακας 1: Οι μέσοι όροι και η τυπικές αποκλίσεις των σκορ του συνόλου του δείγματος και t-test εξαρτημένων δειγμάτων για τη διερεύνηση των διαφορών ανάμεσα στις διαστάσεις [M] και [Δ]

Ευρήματα- απάντηση στο ΕΕ2. Στις συνιστώσες της Αξίας [M] και [Δ], δεν βρέθηκε κάποια στατιστικά σημαντική διαφορά. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι οι μελλοντικοί δάσκαλοι θεωρούν τη ΔτL περισσότερο

σημαντική για τους ίδιους (.79) σε σχέση με τους εν ενεργεία δασκάλους (.73), διαφορά που οριακά δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική (p=.059).

Όσον αφορά το Κόστος που θεωρούν πως έχει η ΔτL για τους μαθητές, οι εν ενεργεία δάσκαλοι έχουν στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερα σκορ στη συνιστώσα Κόστος σε Χρόνο [Μ] (.79) σε σχέση με τους μελλοντικούς δασκάλους (.67) (t(329)=-4.291, p<.001). Επιπλέον, οριακά δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική (t(329)=-1.919, p=.056) η διαφορά στη συνιστώσα Κόστος σε Προσπάθεια [Μ], όπου οι εν ενεργεία (.73) έχουν μεγαλύτερα σκορ από τους μελλοντικούς δασκάλους (.68). Στις υπόλοιπες συνιστώσες του Κόστους [Μ] και [Δ] δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

	Μελλοντικοί (n= 182)		Εν ενεργεία (n= 149)		*t*(329)	*p*	*Στατ. Σημ.*
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ			
Μαθητές- Αξία [Μ]:							
Σημαντικό [Μ]	.83	.19	.80	.24	1.496	.136	
Χρήσιμο [Μ]	.84	.18	.82	.23	1.020	.309	
Ενδιαφέρον [Μ]	.74	.22	.70	.27	1.545	.123	
Μαθητές- Κόστος [Μ]:							
Σε χρόνο [Μ]	.67	.26	.79	.24	-4.291	.000	*** (M<E)
Σε προσπάθεια [Μ]	.68	.27	.73	.27	-1.919	.056	
Συναισθηματικό [Μ]	.46	.27	.41	.25	1.677	.095	
Μαθητές- Προσδοκία [Μ]:							
Προσδ. Ευκολία [Μ]	.49	.26	.40	.29	3.026	.003	** (M>E)
Προσδ. Ικανότητα [Μ]	.63	.20	.54	.24	3.808	.000	*** (M>E)
Προσδ. Επιτυχία [Μ]	.70	.20	.58	.25	4.567	.000	*** (M>E)
Δάσκαλος- Αξία [Δ]:							
Σημαντικό [Δ]	.79	.24	.73	.27	1.894	.059	
Χρήσιμο [Δ]	.80	.23	.79	.25	0.380	.705	
Ενδιαφέρον [Δ]	.80	.24	.79	.25	0.291	.771	
Δάσκαλος- Κόστος [Δ]:							
Σε χρόνο [Δ]	.63	.29	.68	.29	-1.524	.128	
Σε προσπάθεια [Δ]	.60	.30	.61	.28	-0.354	.724	
Συναισθηματικό [Δ]	.43	.33	.37	.31	1.770	.078	

Δάσκαλος- Προσδοκία [Δ]:						
Προσδ. Ευκολία [Δ]	.55	.31	.59	.28	-1.240	.216
Προσδ. Ικανότητα [Δ]	.69	.25	.69	.23	0.281	.779
Προσδ. Επιτυχίας [Δ]	.69	.22	.69	.20	0.130	.897

Πίνακας 2: Οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των σκορ των μελλοντικών και εν ενεργεία δασκάλων και αποτελέσματα των t-test ανεξάρτητων δειγμάτων για τη διερεύνηση των διαφορών ανάμεσά τους

Αναφορικά με την Προσδοκία, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί βρέθηκαν να έχουν στατιστικά σημαντικά υψηλότερες προσδοκίες από τους μαθητές σε σχέση με τους εν ενεργεία και στις τρεις συνιστώσες. Συγκεκριμένα, τα σκορ τους είναι .49 έναντι 40 στην Προσδοκώμενη Ευκολία [M] ($t(329)=3.026$, $p<0.01$), .63 έναντι .54 στην Προσδοκώμενη Ικανότητα [M] ($t(329)=3.808$, $p<.001$) και .70 έναντι .58 στην Προσδοκώμενη Επιτυχία [M] ($t(329)=4.567$, $p<.001$). Αντιθέτως, όσον αφορά στις προσδοκίες τους για τους εαυτούς τους (Προσδοκία [Δ]) δεν βρέθηκε καμία στατιστικά σημαντική διαφορά σε καμία από τις συνιστώσες.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι δάσκαλοι συνολικά βλέπουν μεγάλη αξία στη ΔτL, κάτι που δυνητικά τους εφοδιάζει με ισχυρά κίνητρα για την ενασχόληση με αυτή στην τάξη. Η αντιλαμβανόμενη αξία για τους μαθητές στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στη σημασία (.82) και τη χρησιμότητα (.83) που της αποδίδουν, δείχνοντας πως μπορούν να αντιληφθούν τα οφέλη που μπορεί να έχει η τάξη από την ενασχόληση με αυτή, όπως προκύπτει από σχετικές μελέτες (π.χ., Komatsu & Jones, 2022). Παράλληλα, ιδιαίτερη σημασία έχει ότι οι ίδιοι οι δάσκαλοι βρίσκουν σε αυτή ενδιαφέρον (.79). Δεδομένου ότι οι δραστηριότητες μαθηματικής απόδειξης (Stylianides et al., 2022) και ιδιαίτερα αυτές που στηρίζονται στην ανάπτυξη εικασιών (Aaron & Herbst, 2019) είναι κάτι ξένο για τις περισσότερες τάξεις, δεν αποτελεί έκπληξη ότι οι συμμετέχοντες εκτιμούν ότι μια τέτοια προσπάθεια θα απαιτούσε επένδυση χρόνου και καταβολή προσπάθειας τόσο από τους ίδιους (.66, .60, αντίστοιχα) και ακόμη περισσότερο από τους μαθητές (.73, .70, αντίστοιχα). Για τον ίδιο λόγο θεωρούνται λογικές οι μετριασμένες προσδοκίες που έχουν από τους μαθητές (.45-.65). Ιδιαίτερη σημασία έχει η αισιοδοξία τους αναφορικά τόσο με τον βαθμό στον οποίο θεωρούν τους εαυτούς τους ικανούς να εντάξουν τη ΔτL στο μάθημά τους (.69) όσο και με την πιθανότητα επιτυχίας που θεωρούν πως θα έχουν σε αυτό το εγχείρημα (.79).

Οι σχετικές συγκρίσεις έδειξαν πως οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί είναι πιο αισιόδοξοι από τους εν ενεργεία αναφορικά με τον χρόνο που εκτιμούν πως θα απαιτούσε από τους μαθητές η ενασχόληση με τη ΔτL, καθώς και αναφορικά με τις δυσκολίες που θα αντιμετώπιζαν οι μαθητές, την ικανότητα που θα επιδείκνυαν και την πιθανότητα επιτυχημένης ενασχόλησής τους με αυτή. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι ο ενθουσιασμός των μελλοντικών δασκάλων ενδεχομένως τους οπλίζει με αισιοδοξία, ενώ από την άλλη η μεγαλύτερη διδακτική πείρα των εν ενεργεία δασκάλων τους κάνει να είναι πιο συγκρατημένοι. Σχετικά, αξίζει να σημειωθεί ότι προηγούμενες έρευνες έχουν αναδείξει τη δυσκολία προσαρμογής του τρόπου σκέψης των μαθητών στη λογική σκέψη που απαιτεί η απόδειξη ως μια από τις δυνητικά σημαντικότερες προκλήσεις για τους μελλοντικούς δασκάλους που επιχειρούν να τη διδάξουν (Buchbinder & McCrone, 2020; Stylianides et al., 2013). Σε κάθε περίπτωση, από τη σύγκριση των υπόλοιπων απόψεων προκύπτει ότι οι διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων δεν είναι σημαντικές. Αυτό υποδεικνύει πως για τη σχεδίαση μελλοντικών παρεμβάσεων για την προετοιμασία εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της ΔτL δεν αποτελεί προτεραιότητα η διαφοροποίηση με βάση τη διάκριση σε μελλοντικούς και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Αντιθέτως, θα ήταν περισσότερο ωφέλιμο να ληφθούν υπόψη οι διαφορετικές τάσεις στις απόψεις των δασκάλων αναφορικά με τη ΔτL οι οποίες αφορούν οριζόντια και τις δύο ομάδες (Deslis et al., 2023).

Συνεκτιμώντας όλες τις πτυχές, η υψηλή αντιλαμβανόμενη αξία σε συνδυασμό με το υπολογίσιμο αλλά όχι απαγορευτικό αντιλαμβανόμενο κόστος και τη συγκρατημένη αισιοδοξία που εκφράζεται από τις προσδοκίες τους, υποδεικνύουν ότι οι δάσκαλοι είναι συνολικά θετικά διακείμενοι στην ενασχόληση της τάξης με τη ΔτL (Eccles & Wigfield, 2002). Ωστόσο, δεδομένου ότι η παρούσα έρευνα είναι καθαρά ποσοτική, θεωρούμε τη διεξαγωγή ποιοτικών ερευνών στο κοντινό μέλλον ιδιαίτερα σημαντική για μια πιο ολοκληρωμένη διερεύνηση. Ενώ αναγνωρίζουμε ότι τα αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευθούν, θεωρούμε τα αποτελέσματα ιδιαίτερα ενθαρρυντικά. Η διαφαινόμενη θετική ματιά των δασκάλων απέναντι στη ΔτL σε συνδυασμό με τα οφέλη που δείχνουν μπορεί να έχει για τους μαθητές η ενασχόληση με αυτή, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι είναι σκόπιμο να συνεχιστούν οι προσπάθειες για ένταξη της ΔτL στα σχολικά μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aaron, W. R., & Herbst, P. G. (2019). The teacher's perspective on the separation between conjecturing and proving in high school geometry

classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*, 231–256. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9392-0

Buchbinder, O., & McCrone, S. (2020). Preservice teachers learning to teach proof through classroom implementation: Successes and challenges. *Journal of Mathematical Behavior, 58*, 100779. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100779

Deslis, D., Stylianides, A. J., & Jamnik, M. (2021). Primary school teachers' mathematical knowledge for Lakatos-style proof instruction. In M. Inprasitha, N. Chansgri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 209–217). PME.

Deslis, D., Stylianides, A. J., & Jamnik, M. (2023). Primary school teachers' mathematical knowledge and views about Lakatos-style proving activity: a latent profile analysis. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Eccles, J. S., & Wigfield A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual Review of Psychology, 53*(1), 109–132. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135153

Komatsu, K., & Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 109*(3), 567–591. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

Orland-Barak, L., & Wang, J. (2021). Teacher mentoring in service of preservice teachers' learning to teach: Conceptual bases, characteristics, and challenges for teacher education reform. *Journal of Teacher Education, 72*(1), 86–99. https://doi.org/10.1177/0022487119894230

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5–29. https://doi.org/10.2307/749867

Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K., & Stylianides, G. J. (2022). Teaching and learning authentic mathematics: The case of proving. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 727–761). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2023). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. *ZDM*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*, 1463–1490. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9

Weber, K., Lew, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for individuals' mathematical justifications. *Cognition and Instruction, 38*(1), 27–56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796

Zack, V. (1997). "You have to prove us wrong": Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 291–298). PME.

Zambak, V. S., & Magiera, M. T. (2020). Supporting grades 1–8 pre-service teachers' argumentation skills: Constructing mathematical arguments in situations that facilitate analyzing cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(8), 1196–1223. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1762938

ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Μάρκος Δάλλας

3ο Δημοτικό Σχολείο Νέων Μουδανιών

markosdallas@outlook.com

Η παρούσα εργασία διερευνά τη σχέση ανάμεσα στις μεταγνωστικές στρατηγικές των μαθητών μιας Γ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου και της κατανόησής τους για την μοναδικότητα του αποτελέσματος κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι οι μαθητές που εμφανίζουν τις περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές κατά τη φάση της αξιολόγησης ή/και τη φάση του σχεδίου λύσης έχουν την ικανότητα να προβαίνουν σε διαδικασίες ελέγχου υποστηρίζοντας ότι το αποτέλεσμα είναι μοναδικό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ρόλος της μεταγνώσης, η χρήση μεταγνωστικών στρατηγικών και η ανάπτυξη των μεταγνωστικών λειτουργιών ελέγχου και παρακολούθησης είναι καθοριστικής σημασίας κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Carr et al., 1994· Lucangeli et al., 1998· Mokos & Kafousi, 2013· Δάλλας, 2015). Ο Schoenfeld (1992) επισημάνει ότι η ανάπτυξη των μεταγνωστικών λειτουργιών των μαθητών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι ζωτικής σημασίας κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, βοηθώντας τους μαθητές να έχουν καλύτερες επιδόσεις. «Η μεταγνώση αναφέρεται σε μετα-επίπεδο γνώσης και σε νοητικές ενέργειες που χρησιμοποιούνται για να κατευθύνουν τις γνωστικές διαδικασίες» (Jacobse & Harskamp, 2012, σ. 133). Οι διαδικασίες ελέγχου επιτρέπουν στους μαθητές να αξιολογούν την ορθότητα των αποφάσεων, της λύσης και της απάντησης κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος και να προβαίνουν στις απαραίτητες διορθώσεις εφόσον κάτι τέτοιο είναι αναγκαίο (Τζεκάκη, 2007). Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας καταγράφει έναν σημαντικό αριθμό θεωρητικών και εμπειρικών ερευνών που ασχολούνται με τη μελέτη της μεταγνώσης που ωστόσο φαίνεται να είναι περιορισμένη στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Στη συγκεκριμένη εργασία εξετάζεται το πώς αποτυπώνεται η σχέση ανάμεσα στις μεταγνωστικές στρατηγικές των μαθητών/-τριών της Γ΄ Δημοτικού και της κατανόησής τους για την μοναδικότητα του αποτελέσματος κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος πρόσθεσης αφαίρεσης.

ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Η μεταγνώση βρέθηκε να είναι καθοριστικής σημασίας στην αντιμετώπιση μαθηματικών δραστηριοτήτων (Carr et al., 1994). Οι Carr et al. (1994) μελέτησαν τις μεταγνωστικές στρατηγικές μαθητών της δευτέρας τάξης του δημοτικού σχολείου και συμπέραναν ότι η μεταγνώση βοηθάει τα μικρά παιδιά να έχουν καλύτερες επιδόσεις, όταν και οι μεταγνωστικές απαιτήσεις και οι απαιτήσεις της δραστηριότητας αναπτυχθούν κατάλληλα και εντός των δυνατοτήτων των παιδιών. Διαπίστωσαν ότι η χρήση των εσωτερικών στρατηγικών (μέτρηση με το νου), αλλά όχι των εξωτερικών στρατηγικών (μέτρηση με τα δάχτυλα), σχετίζονταν με τη μεταγνώση και την προσπάθεια καλύτερης επίδοσης. Σε έρευνα τους οι Desoete et al. (2001) μελετώντας την ανάπτυξη της μεταγνώσης σε μαθητές της τρίτης τάξης του δημοτικού βρήκαν ότι όλες οι μορφές της μεταγνωστικής γνώσης είναι αλληλένδετες με όλες τις μεταγνωστικές δεξιότητες. Επίσης, έρευνα των Adagideli και Ader (2013) σε παιδιά ηλικίας 4-6 ετών οδήγησε στη διαπίστωση ότι οι μεταγνωστικές ικανότητες και οι δεξιότητες αυτορρύθμισης εμφανίζονται αρκετά κατά τη διάρκεια επίλυσης των δραστηριοτήτων.

Οι Lucangeli et al. (1998) μελετώντας τις γνωστικές και μεταγνωστικές ικανότητες των μαθητών από τη Γ΄ Δημοτικού έως την Α΄ Γυμνασίου κατά την επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων συμπέραναν ότι η μεταγνωστική ικανότητα της αυτο - αξιολόγησης επέτρεπε την ορθή αξιολόγηση των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται κατά τη φάση της επίλυσης. Ωστόσο, σε έρευνα της η Pettersson (1991) μελετώντας τη μαθηματική επίδοση των μαθητών Γ΄ και Στ΄ Δημοτικού συμπέρανε ότι οι μαθητές συχνά αμελούσαν να ελέγξουν την ορθότητα του αποτελέσματός τους και επικεντρώνονταν περισσότερο στην διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος παρά στο να κατανοήσουν το ίδιο το πρόβλημα. Οι Mokos και Kafousi (2013) που εξέτασαν τις αυθόρμητες μεταγνωστικές λειτουργίες των μαθητών Ε΄ Δημοτικού σε διάφορα είδη μαθηματικών προβλημάτων συμπέραναν ότι οι διαδικασίες ελέγχου και παρακολούθησης καθώς και οι αντίστοιχες μεταγνωστικές στρατηγικές, ιδιαιτέρως στα αυθεντικού τύπου προβλήματα, επέτρεπε στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν δράσεις παρακολούθησης και να επιχειρούν να κατανοήσουν και να αξιολογήσουν τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η έρευνα των Suriyon et al. (2013) σε μαθητές της Α΄ Δημοτικού, συμπεραίνοντας ότι είναι αναγκαίο οι μαθητές να επιχειρούν να βρουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης, ως μια σημαντική μεταγνωστική παράμετρο, που τους βοηθάει στον έλεγχο και την παρακολούθηση των διαδικασιών επίλυσης.

Οι Mohini και Nai (2005) διερεύνησαν τις μεταγνωστικές συμπεριφορές μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συμπεραίνοντας ότι οι μαθητές με υψηλή αυτο-ρύθμιση βρίσκονται συνεχώς σε εγρήγορση και μπορούν να εντοπίζουν και να επανεξετάζουν τα λάθη τους, να εντοπίζουν κάποιες σημαντικές πληροφορίες και να προσαρμόζουν τις δράσεις τους. Οι συγκεκριμένοι μαθητές μπορούν ακόμη να εντοπίζουν μια καινούρια ιδέα κι εάν δεν τα καταφέρουν τότε (επαν)εξετάζουν την πρόοδο τους κατά τις φάσεις επίλυσης του προβλήματος. Τέλος, μελέτη των du Toit και Kotze (2009) συμπέρανε ότι οι μεταγνωστικές στρατηγικές που ανέπτυξαν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ήταν η αξιολόγηση του τρόπου σκέψης και δράσης, ο σχεδιασμός στρατηγικών, η συνειδητή επιλογή και ο προσδιορισμός της δυσκολίας. Αυτό παρέχει ενδείξεις ότι οι μαθητές μπορούν να εντοπίσουν τα προτερήματα, τις αδυναμίες, τα λάθη και τις επιτυχίες τους στα μαθηματικά.

Η ΜΕΛΕΤΗ

Η μελέτη διερευνά τις μεταγνωστικές στρατηγικές των μαθητών/-τριών της Γ΄ Δημοτικού κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος πρόσθεσης αφαίρεσης. Ειδικότερα, στην παρούσα εργασία, η εστίαση έγκειται στο πώς καταγράφεται η σχέση ανάμεσα στις μεταγνωστικές στρατηγικές των μαθητών και της κατανόησής τους για την μοναδικότητα του αποτελέσματος.

Οι συμμετέχοντες που έλαβαν μέρος στην έρευνα είναι 26 μαθητές/-τριες (13 αγόρια, 13 κορίτσια) μιας Γ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου της Ανατολικής Αττικής. Η επιλογή του σχολείου έγινε λόγω προσβασιμότητας. Η Γ΄ Δημοτικού επιλέχθηκε καθώς σε αυτή την ηλικία οι μαθητές έχουν μάθει να διαχειρίζονται προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης παρόμοια με αυτό που επιλέχτηκε.

Το ερευνητικό εργαλείο περιλαμβάνει ένα μαθηματικό πρόβλημα πρόσθεσης αφαίρεσης με τα ερωτήματα των επιμέρους φάσεων. Το πρόβλημα επιλέχθηκε ώστε να περιέχει ρεαλιστικά στοιχεία, να μπορούν οι μαθητές να το λύσουν και να έχει πλοκή και πρόκληση. Μετά την αρχική κατασκευή του εργαλείου ακολούθησε πιλοτική εφαρμογή ώστε να ελεγχθεί η λειτουργικότητά του. Η εκφώνηση του προβλήματος είναι η εξής: *«Σε ένα δημοτικό σχολείο υπάρχουν τρία τμήματα τρίτης τάξης: Το τμήμα Α, το τμήμα Β και το τμήμα Γ. Στο τμήμα Γ υπάρχουν 20 παιδιά, στο τμήμα Β υπάρχουν 6 παιδιά λιγότερα. Στο τμήμα Α υπάρχουν 3 παιδιά περισσότερα από το τμήμα Β. Πόσα είναι όλα τα παιδιά μαζί;».* Οι πέντε φάσεις που περιλαμβάνουν τις αντίστοιχες ερωτήσεις είναι οι εξής: φάση 1: Πρόβλεψη του αποτελέσματος, φάση 2: Σχέδιο λύσης, φάση 3:

Εκτέλεση, φάση 4: Αξιολόγηση της διαδικασίας και φάση 5: Αξιολόγηση του αποτελέσματος (Δάλλας, 2015).

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι η μελέτη περίπτωσης. Για τη διενέργεια της έρευνας πραγματοποιήθηκαν κλινικές συνεντεύξεις με τη μέθοδο της «φωναχτής σκέψης» με κάθε μαθητή/-τρια στην αίθουσα υπολογιστών του σχολείου και διήρκησαν από 30 έως 45 λεπτά, μία διδακτική ώρα. Κατά τη διάρκεια των κλινικών συνεντεύξεων ο ερευνητής παρουσίαζε το ερευνητικό εργαλείο στους μαθητές, οι οποίοι μελετούσαν την εκφώνηση του προβλήματος και επιχειρούσαν να απαντήσουν προφορικά στα ερωτήματα. Ο ερευνητής παρουσίαζε σταδιακά τα ερωτήματα στους συμμετέχοντες και όπου χρειαζόταν παρενέβαινε προκειμένου να δώσει διευκρινήσεις ή να προτρέψει τους μαθητές να εκφράσουν τη σκέψη τους λεκτικά.

Στην πρώτη φάση της ανάλυσης έγινε απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων. Στη δεύτερη φάση πραγματοποιήθηκε κατηγοριοποίηση των επεισοδίων αναλύοντας τα απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα κατά φάση και κατά ερώτημα σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που προέκυψε από τη βιβλιογραφία, Metacognitive Awareness Index (MAI) (Schraw & Dennison, 1994) και από το τροποποιημένο MAI που χρησιμοποίησαν οι Mokos και Kafousi (2013), σε συνδυασμό με ορισμένες τροποποιήσεις και προσθήκες που ανέκυψαν από μια πρώτη παρατήρηση των δεδομένων. Η ανάλυση των δεδομένων στηρίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο των Nelson και Narens (1990), το οποίο περιλαμβάνει δύο επίπεδα, το αντικείμενο-επίπεδο και το μετα-επίπεδο και την αλληλεπίδραση ανάμεσα στον έλεγχο και τις λειτουργίες παρακολούθησης. Ειδικότερα, η ανάλυση των δεδομένων αποτελεί συνδυασμό παραγωγικής ανάλυσης περιεχομένου (Deductive Content Analysis) και θεμελιωμένης θεωρίας (Grounded Theory) (Strauss & Corbin, 1998). Η τελική κατηγοριοποίηση παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

Δ. (Γνωστικές) / Μεταγνωστικές συμπεριφορές	Γ. Μεταγνωστικές στρατηγικές
1. Συνειδητά επικεντρώνει την προσοχή του σε σημαντικές πληροφορίες	1. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ
2. Προσπαθεί να κατακερματίσει τη μελέτη σε μικρότερα βήματα	
3. Επανεκτιμά τις υποθέσεις	2. ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ
4. Σταματά και ξαναδιαβάζει το πρόβλημα	
5. Σταματά και λύνει ξανά το πρόβλημα από την αρχή	

6. Σταματά και λύνει ξανά το πρόβλημα από το σημείο που εντόπισε το λάθος	
7. Διαβάζει προσεκτικά τις οδηγίες πριν ξεκινήσει ένα πρόβλημα	3. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
8. Προσπαθεί να θυμηθεί αν έχει λύσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα	
9. Αναπαριστά το πρόβλημα σχηματικά	
10. Εξηγεί τη χρησιμότητα της στρατηγικής του	4. ΕΠΙΛΥΣΗΣ
11. Επιχειρεί να βρει διαφορετικούς τρόπους για να λύσει το πρόβλημα	
12. Αναρωτιέται αν υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος να λύσει το πρόβλημα	
13. Νιώθει πιο σίγουρος καταγράφοντας τα δεδομένα του προβλήματος	
14. Εκτίμηση του βαθμού δυσκολίας του προβλήματος	5. ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ
15. Εκτίμηση του αποτελέσματος	
16. Ελέγχει την ορθότητα της εκτίμησης άλλων	
17. Υποθέτει λάθη που μπορεί να κάνουν άλλοι	
18. Κατανόησε τι του ζητούσε το πρόβλημα	6. ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ
19. Συχνά (περιοδικά) ανακεφαλαιώνει για να βοηθηθεί να καταλάβει σημαντικές σχέσεις	
20. Αναρωτήθηκε αν η απάντηση έχει νόημα	
21. Σταματά ταχτικά για να ελέγξει την δική του κατανόηση	
22. Ελέγχει την στρατηγική των άλλων και εντοπίζει πιθανά λάθη και τα διορθώνει	
23. Ελέγχει τους υπολογισμούς του αν είναι σωστοί	
24. Ελέγχει τους υπολογισμούς άλλων αν είναι σωστοί και εντοπίζει πιθανά λάθη και τα διορθώνει	
25. Γνωρίζει πόσο καλά τα πήγε	7. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
26. Ανακεφαλαιώνει τι έμαθε αφού τελειώσει	
27. Ρωτά τον εαυτό του αν έχει θεωρήσει όλες τις περιπτώσεις μετά από τη λύση ενός προβλήματος	
28. Πριν παρουσιάσει την τελική λύση του προβλήματος εξακριβώνει την ορθότητά της	

29. Επιβεβαιώνει το βαθμό ορθότητας της λύσης του με αναφορά στη δική του στρατηγική	
30. Επιβεβαιώνει το βαθμό ορθότητας της λύσης του με αναφορά σε άλλες λύσεις	
31. Αποφαίνεται για τη μοναδικότητα του αποτελέσματος με αναφορά στην (ενδεχόμενη) ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών	

Πίνακας 1: Τελική κατηγοριοποίηση

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ενότητα αυτή αποτελείται από τρεις υπο-ενότητες. Στην πρώτη υπο-ενότητα επιχειρείται ομαδοποίηση των αποτελεσμάτων ως προς τις φάσεις επίλυσης που παρατηρούνται οι περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές και παράλληλα σχολιάζεται το είδος των στρατηγικών. Στη δεύτερη υπο-ενότητα γίνεται ομαδοποίηση των αποτελεσμάτων ως προς τις εκφάνσεις κατανόησης της μοναδικότητας του αποτελέσματος των μαθητών. Τέλος, στην τρίτη υπο-ενότητα επιχειρείται ένας συσχετισμός των αποτελεσμάτων των δύο προηγούμενων υπο-ενοτήτων.

Α. Φάσεις επίλυσης του προβλήματος με τις δημοφιλέστερες μεταγνωστικές στρατηγικές

Φάση 4: Αξιολόγηση της Διαδικασίας																		
Ο1	**Γ1**		**Γ2**			**Γ3**	**Γ4**	**Γ5**	**Γ6**						**Γ7**			
	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ6	Δ9	Δ10	Δ17	Δ19	Δ20	Δ21	Δ22	Δ23	Δ24	Δ25	Δ28	Δ29	Δ30
Σ	7	6	16	7	5	1	5	11	8	16	16	16	2	16	9	2	4	2

Φάσεις 2 & 4: Σχέδιο λύσης και Αξιολόγηση της Διαδικασίας									
Ο2	**Γ1**		**Γ2**		**Γ6**				**Γ7**
	Δ1	Δ2	Δ3	Δ6	Δ19	Δ20	Δ21	Δ23	Δ25
Σ	3	2	4	1	2	5	4	1	3

Πίνακας 2: Φάσεις επίλυσης του προβλήματος με τις δημοφιλέστερες μεταγνωστικές στρατηγικές

Από τον Πίνακα 2 προκύπτει ότι οι μαθητές που κατά τη φάση 4, της αξιολόγησης της διαδικασίας, εμφανίζουν τις περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές είναι 16 και αποτελούν την ομάδα 1. Επίσης, οι μαθητές που κατά τις φάσεις 2 και 4 ταυτόχρονα εμφανίζουν τον μεγαλύτερο αριθμών επαναλήψεων των ίδιων μεταγνωστικών συμπεριφορών-στρατηγικών είναι 5 και αποτελούν την ομάδα 2.

Εξετάζοντας συνθετικά τις ομάδες 1 και 2, όπως προκύπτει από τον Πίνακα 2, παρατηρείται ότι οι δημοφιλέστερες μεταγνωστικές

συμπεριφορές που εμφανίζονται συχνότερα και στις δύο ομάδες είναι η Δ3 (επανεκτιμά τις υποθέσεις) – Γ2 (στρατηγική διόρθωσης) και οι Δ20 (αναρωτήθηκε αν η απάντηση έχει νόημα), Δ21 (σταματά τακτικά για να ελέγξει την δική του κατανόηση) – Γ6 (στρατηγικές έλεγχου κατανόησης). Ενώ, οι μισοί και παραπάνω μαθητές και των δύο ομάδων χρησιμοποιούν τη μεταγνωστική συμπεριφορά Δ25(γνωρίζει πόσο καλά τα πήγε) – Γ7(στρατηγική αξιολόγησης). Τέλος, αξίζει να επισημανθεί ότι 11 από τους 16 μαθητές της ομάδας 1 εμφανίζουν τη μεταγνωστική συμπεριφορά Δ17 (υποθέτει λάθη που μπορεί να κάνουν άλλοι) που αντιστοιχεί στη μεταγνωστική στρατηγική Γ5 (εκτίμησης).

Β. Εκφάνσεις της κατανόησης της μοναδικότητας του αποτελέσματος

Εκφάνσεις της κατανόησης της μοναδικότητας του αποτελέσματος		**Σύνολο**
Ομάδα Α	Κατανόηση στη φάση 1 επιβεβαίωση στη φάση 5	16
Ομάδα Β	Αστάθεια στη φάση 1 κατανόηση στη φάση 5	5

Πίνακας 3: Εκφάνσεις της κατανόησης της μοναδικότητας του αποτελέσματος

Όσον αφορά τις εκφάνσεις της κατανόησης της μοναδικότητας του αποτελέσματος από τον Πίνακα 3 φαίνεται να διαμορφώνονται δύο ομάδες που τελικά κατανοούν ότι το αποτέλεσμα είναι μοναδικό. Η ομάδα Α αποτελείται από 16 μαθητές/-τριες που κατά τη φάση 1 είναι σε θέση να κρίνουν ότι το αποτέλεσμα θα είναι μοναδικό κάτι που επιβεβαιώνεται και στη φάση 5 αφού πλέον είναι σίγουροι ότι το αποτέλεσμα του προβλήματος είναι μοναδικό. Η ομάδα Β αποτελείται από 5 μαθητές/-τριες οι οποίοι κατά τη φάση 1 δεν μπορούν να αποφανθούν αν το αποτέλεσμα θα είναι μοναδικό, ωστόσο κατά τη φάση 5 φαίνεται να ισχυρίζονται ότι τελικά το αποτέλεσμα που προέκυψε είναι μοναδικό.

Γ. Συσχετισμός και σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Μεταξύ των ομάδων Ο1-ΟΑ και Ο2-ΟΒ παρατηρείται άμεσος συσχετισμός. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της ομάδας 1 που κατά τη φάση 4 της αξιολόγησης της διαδικασίας του προβλήματος εμφανίζουν τις περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές είναι στην πλειοψηφία τους (13 από τους 16) οι ίδιοι μαθητές που ανήκουν και στην ομάδα Α και κατανοούν την μοναδικότητα του αποτελέσματος. Άρα, λοιπόν, οι συγκεκριμένοι μαθητές είναι σε θέση να συντονίζουν τις μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης επιτρέποντας τους να

αυτορυθμίζονται χρησιμοποιώντας τις απαιτούμενες μεταγνωστικές στρατηγικές. Επίσης, οι μαθητές της ομάδας 2 που κατά τις φάσεις 2 (σχέδιο λύσης) και 4 (αξιολόγησης της διαδικασίας) εμφανίζουν ταυτόχρονα τις περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές είναι στην πλειοψηφία τους (4 από τους 5) οι ίδιοι μαθητές που ανήκουν στην ομάδα Β όπου αρχικά δεν μπορούν να κρίνουν αν το αποτέλεσμα θα είναι μοναδικό αλλά τελικά φαίνεται να το κατανοούν. Οι συγκεκριμένοι μαθητές πιθανότατα επειδή δεν χρησιμοποιούν συστηματικά τις απαιτούμενες στρατηγικές που τους επιτρέπουν να αναπτύξουν λειτουργίες ελέγχου για την παρακολούθηση των διεργασιών τους δεν είναι σε θέση να κρίνουν ότι το αποτέλεσμα θα είναι μοναδικό. Ωστόσο, πιθανολογούμε ότι κατά τις φάσεις 2 & 4 που χρησιμοποιούν κυρίως μεταγνωστικές στρατηγικές ελέγχου κατανόησης ώστε να είναι σε θέση να αναπτύξουν λειτουργίες παρακολούθησης για τον έλεγχο των διεργασιών τους, τελικά στη φάση 5 ισχυρίζονται ότι το αποτέλεσμα είναι μοναδικό. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι κατά τη φάση 2 ζητείται από τους μαθητές να προτείνουν ένα σχέδιο λύσης και να περιγράψουν προφορικά τη λύση του προβλήματος μαρτυρώντας κυρίως την εννοιολογική τους κατανόηση για την επίλυση του προβλήματος. Το στοιχείο αυτό θα μπορούσε να συνδεθεί με το γεγονός ότι τελικά οι μαθητές ισχυρίζονται ότι το αποτέλεσμα είναι μοναδικό.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας που προέκυψαν από τη σχέση των μεταγνωστικών στρατηγικών με τις φάσεις επίλυσης επαληθεύουν αποτελέσματα των Mohini & Nai (2005) και du Toit & Kotze (2009) αφού οι μαθητές που είναι σε θέση αυτο-ρύθμισης έχουν την ικανότητα να εξετάζουν τα λάθη τους, να ελέγχουν την κατανόηση τους και να αξιολογούν τόσο την διαδικασία όσο και να κρίνουν το αποτέλεσμα κατά τις φάσεις 4 και 5. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ η Pettersson (1991) υποστηρίζει ότι οι μαθητές της τρίτης και της έκτης τάξης αμελούσαν να ελέγξουν την ορθότητα του αποτελέσματος και επικεντρώνονταν περισσότερο στην διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος παρά στο να κατανοήσουν το ίδιο το πρόβλημα, δεν προκύπτει κάτι τέτοιο από την παρούσα έρευνα, καθώς το πλαίσιο του προβλήματος μπορεί να παρακινούσε τους μαθητές να ελέγξουν την ορθότητα του αποτελέσματος ενώ λίγοι μαθητές φάνηκε να μην κατανοούν το πρόβλημα και να εστιάζουν μόνο στην εκτέλεση των διαδικασιών. Οι περισσότεροι μάλιστα επιχειρούν να εντοπίσουν και διαφορετικές στρατηγικές επανεξετάζοντας

τα δεδομένα, κάτι που όπως επισημαίνουν και οι Suriyon et al. (2013) αποτελεί ένα είδους ελέγχου και επαλήθευσης της ορθότητας της λύσης.

Επίσης, το πλαίσιο του προβλήματος με τις φάσεις επίλυσης έτσι όπως διαμορφώθηκαν επέτρεψε στους μαθητές να αναπτύξουν τη μεταγνωστική τους γνώση καθώς φάνηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές είχαν την ικανότητα να χρησιμοποιούν γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές κάτι που επιβεβαιώνει αποτελέσματα ερευνών των Carr et al. (1994) και Desoete et al. (2001). Επίσης, αυτό το στοιχείο φαίνεται να επιβεβαιώνει και ευρήματα των Adagideli & Ader (2013) αφού οι δεξιότητες αυτορρύθμισης εμφανίζονται σε αρκετές φάσεις κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος, ωστόσο στην παρούσα έρευνα κυρίαρχη εμφανίζεται στη φάση 4 (αξιολόγηση της διαδικασίας) όπου οι μαθητές εμφανίζουν τις περισσότερες στρατηγικές εκτίμησης, ελέγχου κατανόησης και αξιολόγησης επιτρέποντας τους να αποφανθούν για τη μοναδικότητα του αποτελέσματος. Ειδικά για τον ρόλο της αξιολόγησης, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν σε μεγάλο βαθμό αποτελέσματα ερευνών των Lucangeli et al. (1998) και Mokos & Kafousi (2013). Η αυτο - αξιολόγηση ως μεταγνωστική ικανότητα επαρκεί για την ορθή αξιολόγηση της χρησιμότητας των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται κατά τη φάση της επίλυσης και όσο περισσότερο επιβεβαιώνεται η ορθότητα της λύσης σε σχέση με την αξιολόγηση τόσο περισσότερο φανερώνεται ένα καλό επίπεδο μεταγνωστικών γνώσεων μέσα από τις επιλογές που υιοθετήθηκαν στη φάση επίλυσης. Τέλος, οι στρατηγικές ελέγχου κατανόησης και αξιολόγησης χρησιμοποιούνται κυρίως σε ένα μετα-επίπεδο για την ανάπτυξη μεταγνωστικών λειτουργιών παρακολούθησης συμβάλλοντας στον καλύτερο έλεγχο των διεργασιών, κάτι που υποστηρίζουν και οι Mokos & Kafousi (2013).

Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η κατηγοριοποίηση των μαθητών σε ομάδες ανάλογα με τις φάσεις που εμφανίζονται οι περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές επέτρεψε το συσχετισμό τους με την κατανόηση που έχουν για τη μοναδικότητα του αποτελέσματος καταδεικνύοντας ότι οι μαθητές που εμφάνιζαν τις περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές κατά τη φάση της αξιολόγησης ή/και τη φάση του σχεδίου λύσης είχαν την ικανότητα να προβαίνουν σε διαδικασίες ελέγχου (εκτίμησης, κατανόησης, αξιολόγησης) υποστηρίζοντας ότι το αποτέλεσμα είναι μοναδικό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adagideli, H. F., & Ader, E. (2013). Metacognitive abilities of young children in mathematics activities. In M. A. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 2). Kiel, Germany: PME.

Carr, M., Alexander, J., & Folds-Bennett, T. (1994). Metacognition and mathematics strategy use. *Applied Cognitive Psychology, 8*(6), 583–595. https://doi.org/10.1002/acp.2350080605

Desoete, A., Roeyers, H., & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem Solving in Grade 3. *Journal of Learning Disabilities, 34*(5), 435–449. https://doi.org/10.1177/002221940103400505

du Toit, S., & Kotze, G. (2009). Metacognitive strategies in the teaching and learning of mathematics. *Pythagoras, 0*(70), 57–67. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v0i70.39

Δάλλας, Μ. (2015). Μεταγνωστικές στρατηγικές μαθητών Γ΄ Δημοτικού κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (Επιμ.), *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις* (σσ. 419–428). Θεσσαλονίκη, Ελλάδα: ΕΝΕΔΙΜ.

Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2012). Towards efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition and Learning, 7*, 133–149. https://doi.org/10.1007/s11409-012-9088-x

Lucangeli, D., Tressoldi, E. P., & Cendron, M. (1998). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of mathematical word problems: Validation of a comprehensive model. *Contemporary Educational Psychology, 23*(3), 257–275. https://doi.org/10.1006/ceps.1997.0962

Mohini, M., & Nai, T. T. (2005). The use of metacognitive process in learning mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the Eight International Conference: Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education* (pp. 159–162). Johor Bahru, Malaysia: Universiti Teknologi Malaysia.

Mokos, E., & Kafoussi, S. (2013). Elementary students' spontaneous metacognitive functions in different types of mathematical problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 242–267. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.29

Nelson, T. O., & Narens, L. (1990). Metamemory: A theoretical framework and new findings. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (Vol. 26, pp. 125–173). San Diego, CA: Academic Press.

Pettersson, A. (1991). Pupils' mathematical performance in grades 3 and 6. A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 439–450. https://doi.org/10.1007/BF00367907

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Schraw, G., & Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology*, *19*(4), 460–475. https://doi.org/10.1006/ceps.1994.1033

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory (2nd ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage.

Suriyon, A., Inprasitha, M., & Sangaroon, K. (2013). Students' metacognitive strategies in the mathematics classroom using open approach. *Psychology*, *4*(7), 585–591. http://dx.doi.org/10.4236/psych.2013.47084

Τζεκάκη, Μ. (2007). Πρόγραμμα με δραστηριότητες. *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα. Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία* (σσ. 123–146). Αθήνα: Gutenberg.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ (4 ΕΩΣ 6 ΕΤΩΝ) ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ

Κωνσταντίνα Φραντζεσκάκη, Σόνια Καφούση, Σεβαστή Μαντικού

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

konst.frantz@gmail.com; kafoussi@aegean.gr; sebamantikou@gmail.com

Η παρούσα έρευνα εστιάζει στις άτυπες στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά προσχολικής ηλικίας κατά την εμπλοκή τους με προβλήματα συνδυαστικής. Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 72 παιδιά ηλικίας από 4 έως 6 ετών, τα οποία κλήθηκαν να επιλύσουν προβλήματα με συνδυασμούς χωρίς και με επανάληψη - και με μεταθέσεις. Η συλλογή των στοιχείων έγινε μέσω ατομικών συνεντεύξεων. Η ανάλυση περιεχομένου των απαντήσεων των παιδιών οδήγησε στην καταγραφή μιας ποικιλίας στρατηγικών, όπως η τυχαία επιλογή στοιχείων, η επιλογή ενός σταθερού στοιχείου, η χρήση ενός μοτίβου στην επιλογή στοιχείων, καθώς και η επιλογή ενός διαφορετικού στοιχείου κάθε φορά στην πρώτη θέση. Αυτές οι στρατηγικές εντοπίστηκαν τόσο στα προβλήματα συνδυασμού, όσο και των μεταθέσεων εμπλουτίζοντας τις ήδη υπάρχουσες έρευνες σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η συνδυαστική ορίζεται ως η τέχνη απαρίθμησης όλων των δυνατών τρόπων με τους οποίους πολλά πράγματα μπορούν να συνδυαστούν, να μετατοπιστούν, ή να ενωθούν το ένα με το άλλο, ώστε να γίνει σαφές ότι τίποτα δεν έχει παραλειφθεί στην επίτευξη ενός σκοπού (Bernoulli, 2006).Υπάρχουν τέσσερις τύποι προβλημάτων συνδυαστικής: α) οι συνδυασμοί -κάθε επιλογή κ στοιχείων από τα ν στοιχεία ενός συνόλου χωρίς να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης, β) οι μεταθέσεις - όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν όλα τα στοιχεία ενός συνόλου να μπουν σε σειρά και γ) οι διατάξεις χωρίς επανάληψη και με επανάληψη - όλοι οι δυνατοί τρόποι, που μπορεί να τοποθετηθούν στη σειρά κ από τα ν στοιχεία ενός συνόλου με τη σειρά τοποθέτησης να είναι σημαντική. Η επανάληψη εμπεριέχει τη δυνατότητα κάθε στοιχείο να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές σε μία επιλογή (ενδεικτικά Καλαβάσης & Μούτσιος-Ρέντζος, 2015).

Πολλοί ερευνητές επισημαίνουν ότι η συνδυαστική σκέψη βοηθά στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης (ενδεικτικά Pamungkas & Khaerunnisa, 2020; Silwana et al., 2021). Οι Tsai and Chang (2008) τονίζουν ότι η

εμπλοκή των παιδιών με τη συνδυαστική τα ενθαρρύνει να είναι πιο δημιουργικά, με περισσότερο ενδιαφέρον και αυτοπεποίθηση στην επίλυση προβλήματος. Καθώς η συνδυαστική δεν απαιτεί προϋποθέσεις λογισμού, μπορεί να διδαχθεί νωρίς, ανεξάρτητα από τη γνώση των μαθητών πάνω στο λογισμό (Ammamiarihta et al., 2017).

Οι Piaget & Inhelder ήταν οι πρώτοι ερευνητές που ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη της συνδυαστικής σκέψης των παιδιών (Krekic-Pinter et al., 2015). Οι μελέτες τους περιλάμβαναν τη διερεύνηση των διατάξεων, των μεταθέσεων και των συνδυασμών και αφορούσαν ηλικίες από 6 έως 15 ετών. Σύμφωνα με τα ευρήματα των Piaget & Inhelder (1975, σελ. 163), οι στρατηγικές των παιδιών εμφανίστηκαν σε τρία βασικά βήματα: οι αρχικοί «εμπειρικοί συνδυασμοί», η «αναζήτηση για ένα σύστημα» και η «ανακάλυψη ενός συστήματος». Οι Piaget & Inheler (1951) υποστήριξαν ότι ένα παιδί είναι ικανό για την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής, μόνο στο επίπεδο των τυπικών λειτουργιών (11-15 ετών).

Η English (1991, 1992, 2007) σε μία σειρά μελετών που έχει υλοποιήσει διερεύνησε την ανάπτυξη συνδυαστικής σκέψης παιδιών ηλικίας από 4 έως 12 ετών. Σύμφωνα με την English (1991, 2007) τα παιδιά χρησιμοποιούν τις ακόλουθες στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής: α) την στρατηγική Α στην οποία επιλέγουν τυχαία αντικείμενα, χωρίς να απορρίπτουν εκείνα που έχουν αποδειχθεί ακατάλληλα, β) τη στρατηγική Β όταν επιλέγουν τυχαία αντικείμενα και απορρίπτουν εκείνα που έχουν αποδειχθεί ακατάλληλα (π.χ. Χ1-Υ1, Χ2-Υ2, Χ1-Υ2), γ) τις στρατηγικές Γ και Δ όταν κάνουν χρήση ενός μοτίβου στην επιλογή στοιχείου (π.χ. **Χ1**-Υ1, **Χ2**-Υ2, **Χ3**-Υ3, **Χ1**-Υ3, **Χ2**-Υ1, **Χ3**-Υ3), και δ) τις στρατηγικές Ε και ΣΤ όταν εμφανίζεται ένα πρότυπο οδόμετρου στην επιλογή στοιχείου, όπου τα παιδιά επιλέγουν ένα στοιχείο επανειλημμένα ώστε όλοι οι συνδυασμοί που το εμπεριέχουν να σχηματιστούν (π.χ. **Χ1**-Υ2, **Χ1**-Υ2, **Χ1**-Υ3). Επισημαίνεται ότι στην έρευνα της English (1991) διαπιστώθηκε ότι τα μικρότερα παιδιά ηλικίας 4 έως 6 ετών, συνήθως ακολουθούν τη συμπεριφορά δοκιμής και λάθους, με ένα μικρό αριθμό παιδιών να κάνουν κάποιες προσπάθειες να ακολουθήσουν ένα μοτίβο στην επιλογή στοιχείων, αλλά σπάνια να το συνεχίζουν μέχρι την ολοκλήρωσή του.

Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τη Σιακαλλή (2013), σε παιδιά προσχολικής ηλικίας από 4 έως 5 ετών σε προβλήματα μεταθέσεων, εντοπίστηκαν 4 στρατηγικές. Στην 1η στρατηγική - *Ανίχνευση λύσεων με τυχαίο τρόπο* - τα παιδιά επέλεγαν στοιχεία με τυχαίο τρόπο, κοιτάζοντας το φύλλο καταγραφής για να μην επαναλάβουν την ίδια λύση, στη 2η στρατηγική - *Συνδυασμός σκόπιμης εναλλαγής στοιχείων και τυχαίας τοποθέτησής τους* - τα παιδιά για την εύρεση των τριών πρώτων λύσεων,

τοποθετούσαν διαφορετικό στοιχείο στην πρώτη θέση κι επέλεγαν τυχαία στοιχεία για τη δεύτερη και τρίτη θέση. Για την εύρεση των υπολοίπων λύσεων τα παιδιά επέλεγαν τυχαία τα στοιχεία. Στην 3η στρατηγική - *Ανίχνευση λύσεων ανά μη συνεχόμενα ζεύγη* - τα παιδιά ακολουθούσαν την δεύτερη στρατηγική για τις τρεις πρώτες λύσεις, ενώ για τις υπόλοιπες λύσεις επέστρεφαν σε λύση που είχαν ήδη εντοπίσει τοποθετώντας το ίδιο χρώμα στην πρώτη θέση, αντιστρέφοντας τα στοιχεία που βρίσκονταν στη δεύτερη και τρίτη θέση. Τέλος στην 4η στρατηγική - *Ανίχνευση λύσεων ανά συνεχόμενα ζεύγη* - τα παιδιά εντόπιζαν την πρώτη λύση τοποθετώντας τυχαία τα στοιχεία. Στη δεύτερη λύση τα παιδιά τοποθετούσαν το ίδιο στοιχείο στην πρώτη θέση κι αντιστρέφανε τα στοιχεία της δεύτερης και τρίτης θέσης. Το ίδιο έκαναν και για την εύρεση των υπολοίπων λύσεων, επιλέγοντας ένα νέο στοιχείο στην πρώτη θέση κάθε φορά.

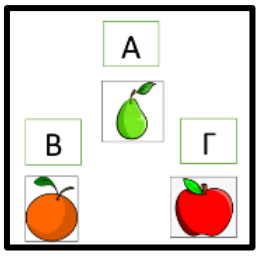
Οι Tatsis & Maj-Tatsis (2023), σε έρευνα που πραγματοποίησαν σε παιδιά ηλικίας 8 ετών, σε πρόβλημα μεταθέσεων, επισήμαναν ότι τα παιδιά ξεκινούσαν από μία διαδικασία δοκιμής και λάθους, σε ένα αναδυόμενο μοτίβο, με απόρριψη των ακατάλληλων στοιχείων, και στη συνέχεια ακολουθούσαν πιο συστηματική στρατηγική, με ένα σταθερό και πλήρες μοτίβο στην επιλογή στοιχείου.

Συνοψίζοντας τις παραπάνω στρατηγικές, εντοπίζονται οι εξής κατηγορίες: α) επιλογή τυχαίων στοιχείων, β) επιλογή στοιχείων βάσει ενός μοτίβου, γ) επιλογή στοιχείων με ένα σταθερό στοιχείο στην πρώτη θέση, δ) επιλογή στοιχείων με ένα διαφορετικό στοιχείο κάθε φορά στην πρώτη θέση, και ε) ανίχνευση λύσεων ανά ζεύγη. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι παραπάνω στρατηγικές αφορούσαν παιδιά που είχαν εντοπίσει όλες τις λύσεις, χωρίς να έχει γίνει αναφορά στις στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από παιδιά που δεν εντόπισαν όλες τις λύσεις. Η παρούσα έρευνα διαφέρει από τις προηγούμενες, καθώς γίνεται μία καταγραφή των στρατηγικών, ανεξάρτητα από τον αριθμό λύσεων που εντοπίστηκαν από τα παιδιά, και επιπλέον μελετά τη σύγκριση των στρατηγικών σε διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων συνδυαστικής (συνδυασμοί, μεταθέσεις). Τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν τα εξής: α)Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά την εμπλοκή τους με προβλήματα συνδυασμού χωρίς και με επανάληψη και με προβλήματα μεταθέσεων; και β)Ποιες ομοιότητες και διαφορές εντοπίζονται στις στρατηγικές των παιδιών που έχουν εντοπίσει τις περισσότερες λύσεις σε σχέση με εκείνων που εντόπισαν τις λιγότερες;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε παιδιά προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών σε δημόσιο νηπιαγωγείο της Ρόδου. Συνολικά έλαβαν μέρος 72 παιδιά, 40 προνήπια (4 έως 5 ετών) και 32 νήπια (5 έως 6 ετών), εκ των οποίων τα 29

ήταν αγόρια και τα 43 κορίτσια. Κάθε πρόβλημα είχε δημιουργηθεί σε ένα ουσιαστικό πλαίσιο για τα παιδιά, με μία ιστορία που παρουσιαζόταν, πλαισιωμένη με εικόνες, όπου ο ήρωας χρειαζόταν τη βοήθειά τους. Σε κάθε παιδί δόθηκαν κάρτες σε στοίβες, τοποθετημένες σε σχήμα τριγώνου (βλ. Εικόνα 1) και τα παιδιά κλήθηκαν να τις τοποθετήσουν σε ένα φύλλο καταγραφής (βλ. Εικόνα 2). Στο φύλλο καταγραφής δινόταν ο αριθμός των δυνατών λύσεων, διότι σύμφωνα με την έρευνα της Σιακαλλή (2013), η γνώση του αριθμού των δυνατών λύσεων μπορεί να παροτρύνει τα παιδιά να εντοπίσουν όλες τις λύσεις. Επιπρόσθετα στο φύλλο καταγραφής υπήρχε μία εικόνα που έδινε ένα παράδειγμα στα παιδιά ως προς τον τρόπο που έπρεπε να τοποθετήσουν τα αντικείμενα. Κάθε παιδί εργάστηκε ατομικά στα προβλήματα συνδυαστικής, για περίπου 10 λεπτά, χωρίς να υπάρξει οποιαδήποτε παρέμβαση κατά τη διάρκεια καταγραφής των λύσεων. Τα παιδιά κατά την διάρκεια του προβλήματος, μετακινούσαν τις κάρτες που είχαν στη διάθεσή τους στο φύλλο καταγραφής, ενώ μπορούσαν να βάλουν και να βγάλουν τα στοιχεία που είχαν τοποθετήσει και να επιλέξουν νέα, αν το έκριναν εκείνα σωστό. Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι απαντήσεις στο φύλλο καταγραφής και ειδικότερα ο τρόπος και η σειρά που επέλεγαν τα στοιχεία για τον εντοπισμό όλων των λύσεων, μέσω κάμερας καταγραφής, που εστίαζε στα χέρια, μετά από τη σύμφωνη γνώμη των γονέων. Τα τρία στοιχεία του προβλήματος, ανεξάρτητα από τη φύση τους, ονομάστηκαν Α, Β και Γ αντίστοιχα (βλ. Εικόνα 1), για να γίνει η κωδικοποίηση των λύσεων. Για παράδειγμα αν ένα παιδί σε μία λύση επέλεγε στην πρώτη θέση αχλάδι και στη δεύτερη πορτοκάλι, σημειωνόταν ως ΑΒ.

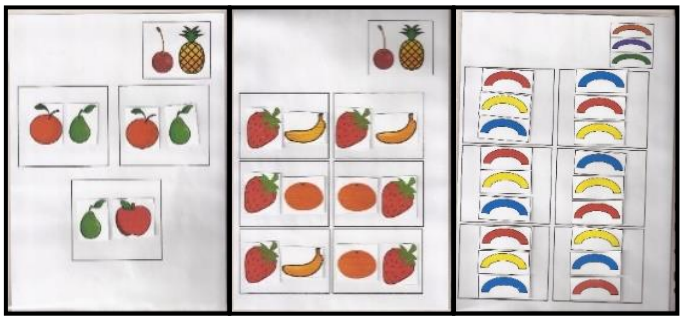


Εικόνα 1. Υλικό και τρόπος κωδικοποίησης των απαντήσεων

Η ανάλυση των δεδομένων στηρίχθηκε στην ανάλυση περιεχομένου (Bryman, 2016). Αρχικά όλες οι απαντήσεις των παιδιών κωδικοποιήθηκαν με βάση τον τρόπο που επέλεγαν τα στοιχεία και τα τοποθετούσαν στο φύλλο καταγραφής. Στη συνέχεια συγκεντρώθηκαν όλες οι απαντήσεις και δημιουργήθηκαν κατηγορίες στρατηγικών (βλ. αποτελέσματα), στις οποίες δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στο στοιχείο που τα παιδιά επέλεγαν πρώτο κάθε φορά στη λύση τους.

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά τα προβλήματα συνδυαστικής, τα οποία κλήθηκαν να επιλύσουν τα παιδιά.

Στο 1ο πρόβλημα που αφορούσε συνδυασμούς χωρίς επανάληψη (3 δυνατές λύσεις), παρουσιάστηκε στα παιδιά ο Ρούλης, ο Φρουτούλης που αγαπούσε πολύ τα φρούτα και του άρεσε να φτιάχνει χυμούς με αυτά και κάθε μέρα προσπαθούσε να φτιάξει έναν διαφορετική χυμό για να δοκιμάσει μία διαφορετική γεύση. Τα παιδιά κλήθηκαν να εντοπίσουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ανά δύο φρούτα, από τα τρία που τους δόθηκαν (αχλάδι, μήλο, πορτοκάλι, βλ. Εικόνα 2-Α). Επισημάνθηκε στα παιδιά, ότι δε μπορούν να υπάρχουν δύο χυμοί που να έχουν μέσα μήλο και πορτοκάλι, καθώς και ότι δε μπορούν να βάλουν δύο ίδια φρούτα μαζί. Στο πλαίσιο του ίδιου προβλήματος, στη συνέχεια, τα παιδιά κλήθηκαν και πάλι να φτιάξουν χυμούς με νέα φρούτα (φράουλα, μπανάνα, μανταρίνι, βλ. Εικόνα 2-Β), επισημαίνοντάς τους ωστόσο ότι μπορούν να βάλουν δύο ίδια φρούτα μαζί (συνδυασμοί με επανάληψη – 6 δυνατές λύσεις).



Εικόνα 2. Παράδειγμα φύλλου απαντήσεων για συνδυασμούς χωρίς επανάληψη (Α-3 δυνατές λύσεις), με επανάληψη (Β-6 δυνατές λύσεις) και για μεταθέσεις (Γ-6 δυνατές λύσεις)

Στο 2ο πρόβλημα των μεταθέσεων (6 δυνατές λύσεις) τα παιδιά κλήθηκαν να βοηθήσουν ένα «διαφορετικό» ουράνιο τόξο (είχε μόνο τρία χρώματα) για να θυμηθεί με τι σειρά είχε τα χαμένα χρώματά του. Τα παιδιά κλήθηκαν να φτιάξουν διαφορετικά ουράνια τόξα, τοποθετώντας σε κάθε κουτί και τα τρία χρώματα που είχαν στη διάθεσή τους (μπλε, κόκκινο, κίτρινο, βλ. Εικόνα 2-Γ). Επισημάνθηκε στα παιδιά ότι δεν πρέπει να υπάρχουν δύο ουράνια τόξα με 3 χρώματα στην ίδια σειρά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1, παρουσιάζονται οι στρατηγικές των παιδιών, που εντόπισαν όλες τις λύσεις, στο πρόβλημα συνδυασμού χωρίς επανάληψη.

Στρατηγικές για 3 λύσεις	**Αριθμός Παιδιών**
ΧΡΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ	
Επιλογή ενός στοιχείου δύο φορές συνεχόμενα στην πρώτη θέση (**ΑΒ**, **ΑΓ**, ΒΓ ή ΒΓ, **ΑΓ**, **ΑΒ**)	23

ΧΡΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ Α, Β, Γ ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΑ	
Επιλογή όλων των στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση (**Β**Γ, **Α**Β, **Γ**Α)	5
ΤΥΧΑΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗ	16
ΣΥΝΟΛΟ	44

Πίνακας 1. Στρατηγικές παιδιών, που εντόπισαν όλες τις λύσεις, στο πρόβλημα συνδυασμού χωρίς επανάληψη

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, τα περισσότερα παιδιά έκαναν χρήση σταθερού στοιχείου δύο φορές συνεχόμενα στην πρώτη θέση για τον εντοπισμό όλων των λύσεων.

Στον Πίνακα 2, παρουσιάζονται οι στρατηγικές των παιδιών, που εντόπισαν από 0 έως 2 συνδυασμούς.

Στρατηγικές από 0 έως 2 λύσεις	**Αριθμός Συνδυασμών**			**Αριθμός Παιδιών**
	2	**1**	**0**	
ΧΡΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ				
Επιλογή ενός στοιχείου τρεις φορές συνεχόμενα στην πρώτη θέση (**Β**Α, **Β**Γ, **Β**Γ)	3	0	0	3
Επιλογή ενός στοιχείου δύο φορές συνεχόμενα στην πρώτη θέση (ΑΒ, **Β**Γ, **Β**Α)	1	0	0	1
ΧΡΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ Α, Β, Γ ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΑ				
Χρήση όλων των στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση (**Γ**Α, **Β**Γ, **Α**Γ)	3	1	9	13
ΤΥΧΑΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗ	9	1	1	11
ΣΥΝΟΛΟ	16	2	10	28

Πίνακας 2. Στρατηγικές παιδιών που εντόπισαν από 0 έως 2 λύσεις στο πρόβλημα συνδυασμού χωρίς επανάληψη

Βάσει των αποτελεσμάτων φαίνεται ότι τα περισσότερα παιδιά τοποθέτησαν όλα τα στοιχεία (Α,Β,Γ) συνεχόμενα στην πρώτη θέση.

Στο πρόβλημα του συνδυασμού με επανάληψη, μόνο 4 παιδιά κατάφεραν να εντοπίσουν και τους 6 συνδυασμούς, επιλέγοντας τα στοιχεία (Α,Β,Γ) συνεχόμενα στην πρώτη θέση, στην τελική τριάδα **(**ΑΒ, ΓΒ, ΑΓ**, ΑΑ, ΒΒ, ΓΓ)**, ενώ ένα παιδί έκανε χρήση μοτίβου, στην επιλογή στοιχείου πρώτης

θέσης **(**ΑΒ, **Γ**Α, **Β**Γ, **Α**Α, **Γ**Γ, **Β**Β**)**. Στον Πίνακα 3, παρουσιάζονται οι στρατηγικές των παιδιών, που εντόπισαν από 2 έως 5 συνδυασμούς, στο πρόβλημα συνδυασμού με επανάληψη.

Στρατηγικές από 2 έως 5 λύσεις	**Αριθμός Συνδυασμών**				**Αριθμός Παιδιών**
	5	**4**	**3**	**2**	
ΧΡΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ					
Χρήση σταθερού στοιχείου 3 φορές συνεχόμενα στην πρώτη θέση κι εναλλαγή δευτερευόντων (ΑΑ, **Β**Β, **Β**Γ, **Β**Α, ΓΑ, ΓΑ)	1	0	0	0	1
Χρήση τουλάχιστον δύο σταθερών στοιχείων κι εναλλαγή δευτερευόντων (ΒΑ, ΓΒ, **Α**Γ, **Α**Α, **Β**Γ, **Β**Β)	1	0	2	0	3
ΧΡΗΣΗ ΜΟΤΙΒΟΥ					
Χρήση μοτίβου (Α,Β,Γ) στην επιλογή στοιχείου πρώτης θέσης (**Γ**Γ, **Α**Α, **Β**Β, **Γ**Γ, **Α**Α, **Β**Β)	0	0	8	0	8
Εντοπισμός ενός μοτίβου με δύο στοιχεία στην πρώτη θέση (**Α**Γ, **Α**Β, **Β**Γ, **Α**Γ, **Α**Β, **Β**Γ)	0	0	2	1	3
Εντοπισμός ενός μοτίβου δύο στοιχείων στην πρώτη θέση εναλλάξ (**Β**Α, **Γ**Α, **Β**Α, **Γ**Β, ΑΒ, ΓΑ)	0	1	7	0	8
ΧΡΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ Α,Β,Γ ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΑ					
Επιλογή όλων των στοιχείων (Α,Β,Γ) στην πρώτη θέση κι επανάληψη αυτών σε τυχαία σειρά **Β**Γ, **Α**Γ, **Γ**Β, **Α**Α, **Γ**Γ, **Β**Β	1	2	9	0	12

Επιλογή στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση στην αρχική τριάδα (**Α**Α , **Β**Γ, **Γ**Α, ΒΑ, ΓΓ ΒΓ)	3	4	6	1	14
Επιλογή στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση στην τελική τριάδα (ΓΑ, ΓΓ, ΑΒ, **Γ**Α, **Β**Β, **Α**Α)	1	1	3	0	5
Επιλογή όλων των στοιχείων στην πρώτη θέση συνεχόμενα σε τυχαία σειρά (ΒΑ, **Γ**Γ, **Β**Β, **Α**Β, ΓΑ, ΑΓ)	0	2	3	0	5
ΤΥΧΑΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗ (ΑΓ, ΒΑ, ΒΓ, ΒΓ, ΓΑ, ΒΓ)	0	0	6	3	9
ΣΥΝΟΛΟ	7	10	46	5	68

Πίνακας 3. Στρατηγικές παιδιών, που εντόπισαν από 2 έως 5 λύσεις, στο πρόβλημα συνδυασμού με επανάληψη

Τα περισσότερα παιδιά έκαναν χρήση των στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα (36 παιδιά) για την εύρεση των λύσεων, ενώ ακολούθησε η χρήση μοτίβου στην επιλογή στοιχείων (19 παιδιά). Μόνο 4 παιδιά, έκαναν χρήση σταθερού στοιχείου. Τα παιδιά, που εντόπισαν τις περισσότερες δυνατές λύσεις, έκαναν χρήση των στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση.

Στο πρόβλημα των μεταθέσεων, τα δύο παιδιά που εντόπισαν όλες τις λύσεις, επέλεγαν όλα τα στοιχεία Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση κι επανέλαβαν αυτά τα στοιχεία σε τυχαία σειρά (π.χ. **Β**ΑΓ, **Γ**ΒΑ, **Α**ΓΒ, **Γ**ΑΒ, **Α**ΒΓ, **Β**ΓΑ). Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται συνοπτικά οι στρατηγικές των παιδιών, που εντόπισαν από 0 έως 5 λύσεις.

Στρατηγικές από 0 έως 5 λύσεις	**Αριθμός συνδυασμών**						**Αριθμός παιδιών**
	5	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	
ΧΡΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ	2	1	1	1	0	0	5
ΧΡΗΣΗ ΜΟΤΙΒΟΥ	1	4	5	2	0	0	12

ΧΡΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ Α,Β,Γ ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΑ	13	12	2	2	1	4	34
ΑΛΛΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ							
Επιλογή ίδιου στοιχείου στην πρώτη θέση και στις 6 λύσεις (**Α**ΓΒ, **Α**ΓΒ, **Α**ΓΒ, **Α**ΓΒ, **Α**ΒΓ, **Α**ΓΒ)	0	0	0	4	9	0	13
ΤΥΧΑΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗ	0	2	3	1	0	0	6
Σύνολο	16	19	11	10	10	4	70

Πίνακας 4. Στρατηγικές παιδιών που εντόπισαν από 0 έως 5 λύσεις στο πρόβλημα μεταθέσεων

Βάσει των αποτελεσμάτων, οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα περισσότερα παιδιά, ήταν η επιλογή όλων των στοιχείων (Α,Β,Γ) στην πρώτη θέση συνεχόμενα (34 παιδιά). Τα παιδιά, που εντόπισαν τις λιγότερες δυνατές λύσεις, επέλεγαν το ίδιο στοιχείο στην πρώτη θέση και στις 6 λύσεις (13 παιδιά).

Συνοπτικά, σε όλα τα προβλήματα συνδυαστικής τα περισσότερα παιδιά έκαναν χρήση των στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση (43,1%, 93 απαντήσεις), ενώ ακολούθησαν οι στρατηγικές με τη χρήση σταθερού στοιχείου (16,7%, 36 απαντήσεις) και τη χρήση μοτίβου (14,8%, 32 απαντήσεις). Επίσης, 19,4% (42 απαντήσεις) συνδέθηκαν με τυχαία επιλογή στοιχείων και 6% (13 απαντήσεις) αφορούσαν άλλες στρατηγικές.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι στρατηγικές που αναδύθηκαν κατά την εμπλοκή των παιδιών με τα προβλήματα συνδυασμού και μεταθέσεων είναι οι εξής: α) η χρήση ενός σταθερού στοιχείου, β) η χρήση ενός μοτίβου στην επιλογή στοιχείων και γ) η επιλογή όλων των στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση. Τα περισσότερα παιδιά επέλεξαν την τρίτη στρατηγική επιλέγοντας τα στοιχεία Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση, και στους δύο τύπους προβλημάτων (συνδυασμοί-μεταθέσεις). Τα παιδιά που εντόπισαν τις περισσότερες και τις λιγότερες λύσεις αντίστοιχα, έκαναν και πάλι χρήση της τρίτης στρατηγικής, επιλέγοντας όλα τα στοιχεία Α,Β,Γ στην πρώτη θέση. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο πρόβλημα συνδυασμού χωρίς επανάληψη, τα παιδιά που εντόπισαν τις περισσότερες λύσεις, έκαναν χρήση ενός σταθερού στοιχείου, ίσως λόγω του μικρού του αριθμού των

δυνατών λύσεων. Επίσης, στο πρόβλημα συνδυασμού με επανάληψη, η χρήση μοτίβου παρατηρήθηκε κυρίως στα παιδιά, που εντόπισαν τις λιγότερες δυνατές λύσεις. Στις παραπάνω στρατηγικές έχει γίνει αναφορά από την English (1991, 2007) και την Σιακαλλή (2013). Πιο συγκεκριμένα, η Σιακαλλή περιγράφει τη στρατηγική όπου τα παιδιά επιλέγουν όλα τα στοιχεία Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση στο πρόβλημα των μεταθέσεων ($2^{η}$ και $3^{η}$ στρατηγική) και η English σημειώνει την επιλογή σταθερού στοιχείου και την χρήση μοτίβου στην επιλογή στοιχείων. Αξίζει να επισημανθεί, ότι βάσει των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας, τα παιδιά προσχολικής ηλικίας 4 έως 6 ετών μπορούν να εφαρμόσουν και τη χρήση μοτίβου κατά την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής. Επιπρόσθετα, αναδείχθηκαν κι άλλες στρατηγικές, όσον αφορά τη χρήση στοιχείων Α,Β,Γ συνεχόμενα στην πρώτη θέση, όπου διαπιστώθηκε ότι η χρήση διαφορετικών στοιχείων δεν αφορά μόνο τις τρεις πρώτες λύσεις. Καθώς η συνδυαστική δεν αποτελεί μέρος των προγραμμάτων σπουδών στις μικρές ηλικίες, θεωρούμε ότι η περαιτέρω διερεύνηση του θέματος μπορεί να οδηγήσει σε συγκεκριμένες προτάσεις για την ένταξή της στο νηπιαγωγείο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ammamiarihta, A., Syahputra, E., & Surya, E. (2017). Development of learning devices oriented problem based learning to increase student's combinatorial thinking in mathematical problem solving ability. *2nd Annual International Seminar on Transformative Education and Educational Leadership (AISTEEL 2017)* (pp. 335-340). Atlantis Press. 10.2991/aisteel-17.2017.71

Bernoulli, J. (2006). *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis*. Translated by Edith Dudley Sylla. Johns Hopkins University Press. Baltimore.

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods*. 5th ed. Oxford.

English, L. D. (1991). Young children's combinatorics strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 451-474.

English, L. D. (1992). Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, *62*, 203-216.

English, L. D. (2007). Children's strategies for solving two-and three-dimensional combinatorial problems. In *Stepping Stones for the 21st Century* (pp.139-158). Brill Sense. Australasian Mathematics Education Research. https://doi.org/10.1163/9789087901509_009

Καλαβάσης, Φ. & Μούτσιος-Ρέντζος, Α. (2015). *Ανάμεσα στο μέρος και στο όλο: Αναστοχαστική Οικοδόμηση Μαθηματικών Εννοιών.* Gutenberg, Αθήνα.

Krekić-Pinter, V., Ivanović, J., Namestovski, Ž., & Major, L. (2015). Strategy and methods for solving combinatorial problems in initial instruction of mathematics. *International Journal of Modern Education Research*, *2*(6), 77-87.

Pamungkas, A. S., & Khaerunnisa, E. (2020). The analysis of student's statistical literacy based on prior knowledge and mathematical self esteem. *Journal for the Mathematics Education and Teaching Practices*, *1*(1), 43–51.

https://dergipark.org.tr/en/pub/jmetp/issue/55820/707759#article_cite

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* (L. Leake, P. Burell, and H. D. Fishbein, Trans.). Routledge & Kegan Paul. (Original work published in 1951).

Σιακαλλή, Μ. Α. (2013). *Ανάπτυξη Νοητικών Δεξιοτήτων Τετράχρονων Παιδιών, Μέσα Από Διαδικασίες Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος.* Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών Τμήμα Επιστημών Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία: Πάτρα

Silwana, A., Subanji, Manyunu, M., & Rashahan, A. A. (2021). Students' Responses Leveling in Solving Mathematical Problem Based on Solo Taxonomy Viewed from Multiple Intelligences. *Indonesian Journal on Learning and Advanced Education (IJOLAE)*, *3*(1), 1–16.https://doi.org/10.23917/ijolae.v3i1.10528

Tatsis, K., & Maj-Tatsis, B. (2023, July). Young children's reasoning in a combinatorics task. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (No. 25). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.

Tsai, Y. L., Chang, C. K. (2008). Using Combinatorial Approach to Improve Students' Learning of the Distributive Law and Multiplicative Identities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(3), 501-531. https://doi.org/10.1007/s10763-008-9135-x.

Η ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΟΙΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Χριστίνα Σαμαρά and Χρυσαυγή Τριανταφύλλου

Η παρούσα έρευνα μελετά την εξέλιξη της αισθητικής διερεύνησης εστιάζοντας κυρίως στον παραγωγικό της ρόλο. Οι συμμετέχοντες ήταν δύο μαθητές της Γ΄ Λυκείου με άριστη επίδοση στα μαθηματικά. Στους μαθητές ζητήθηκε να συσχετίσουν δύο ποιήματα με τρεις γνωστές μαθηματικές αποδείξεις. Τα ερευνητικά δεδομένα ήταν τα φύλλα εργασίας των μαθητών, οι απομαγνητοφωνήσεις της παρέμβασης, καθώς και οι σημειώσεις πεδίου. Η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων συνδέθηκε με τα τρία στάδια του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής, την αναγνωριστική επαφή με το ερέθισμα, την απόκτηση οικειότητας και την αξιοποίηση των γνώριμων εργαλείων. Στο τρίτο στάδιο ο ένας από τους δύο μαθητές ανέπτυξε πρωτότυπες συνδέσεις ανάμεσα στα μαθηματικά και την ποίηση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αισθητική εντοπίζεται στη μαθηματική επιστήμη ήδη ακόμη από τις πρώτες προσπάθειες του ανθρώπου για την οργανωμένη λογική σκέψη και αιτιολόγηση (Reiss, 2008). Ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι τα μαθηματικά αντικείμενα και οι σχέσεις μεταξύ τους περιέχουν την ύψιστη ομορφιά και ότι η αναζήτηση της μαθηματικής αλήθειας ως διαδικασία αποτελεί αισθητική εμπειρία. Ο Descartes στη φιλοσοφία του ως προς τις τέχνες και ιδιαίτερα τη μουσική και τη ζωγραφική είχε την πεποίθηση ότι η ομορφιά εξασφαλίζεται μέσω των μαθηματικών και της αρμονίας (Reiss, 2008). Ανά τις ιστορικές περιόδους και τις κοινωνικές και φιλοσοφικές συνθήκες και ανάγκες διαμορφώθηκαν διαφορετικές αντιλήψεις για την αισθητική στα μαθηματικά. Η παραδοσιακή αντίληψη θεωρούσε ότι η αισθητική αποτελούσε ποιοτικό χαρακτηριστικό του μαθηματικού αντικειμένου και ότι η αξία της ήταν ανεξάρτητη από την ανθρώπινη ύπαρξη και εμπειρία.

Στις σύγχρονες αντιλήψεις, η παραπάνω προσέγγιση άρχισε να διαφοροποιείται και να επικρατεί η οπτική η οποία θεωρεί την αισθητική ως χαρακτηριστικό της δράσης και όχι του μαθηματικού αντικειμένου αυτού κάθε αυτού (Sinclair, 2004; 2008). Η Sinclair (2004) περιγράφει ότι η αισθητική εμπειρία λειτουργεί με παραγωγικό τρόπο στον μαθητή όταν αυτός αισθάνεται ότι τα αντικείμενα ή οι δράσεις που προκύπτουν κατά τη μαθηματική διαδικασία έχουν κάποιο νόημα για τον ίδιο και έτσι ωθείται στην περαιτέρω διερεύνησή τους. Η αισθητική επιδρά παραγωγικά, κυρίως ενστικτωδώς ή υποσυνείδητα κατά τη διαδικασία της διερεύνησης και της ανακάλυψης λύσεων ή ιδεών. Είναι αυτή που καθοδηγεί τις πράξεις

και τις επιλογές των εμπλεκόμενων κατά τη διαδικασία της νοηματοδότησης αντικειμένων ή σχέσεων.

Στην παρούσα έρευνα θα μελετηθεί η εξέλιξη της αισθητικής διερεύνησης κατά τη διαδικασία επίλυσης ανοιχτών μαθηματικών προβλημάτων. Το πρόβλημα αφορά στη δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα σε δύο ποιήματα με τρεις πολύ γνωστές μαθηματικές αποδείξεις. Συγκεκριμένα, μελετάται πώς δύο μαθητές Γ΄ Λυκείου προσπαθούν να συνδέσουν τις μαθηματικές αποδείξεις με τα ποιήματα και πώς αιτιολογούν τις συνδέσεις τους. Η δραστηριότητα αυτή των μαθητών διατηρεί στοιχεία διερεύνησης, μιας δράσης που συνδέεται άμεσα με την αισθητική των μαθηματικών και ειδικά τον παραγωγικό (generative) ρόλο της (Sinclair, 2004). Η εργασία μελετά: Πώς εξελίσσεται η αισθητική διερεύνηση κατά την προσπάθεια των δύο μαθητών να συνδέσουν ποιήματα με μαθηματικές αποδείξεις;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Αντιλήψεις για την αισθητική των μαθηματικών

Σύμφωνα με τους Cupchik και Winston (1996), η αισθητική εμπειρία είναι μια ψυχολογική διαδικασία κατά την οποία η προσοχή είναι επικεντρωμένη σε ένα αντικείμενο, ενώ παράλληλα τα άλλα αντικείμενα, γεγονότα και καθημερινές ανησυχίες αναστέλλονται. Η βασική συνθήκη ώστε ένα αντικείμενο να χαρακτηριστεί αισθητικό είναι η υπέρβαση από το συμβολικό επίπεδο σε ένα νόημα (Marcovic, 2012). Ο Dewey (1934) εντοπίζει την αισθητική στην καθημερινή ανθρώπινη δραστηριότητα, δίνει προσοχή όχι στα αισθητικά κριτήρια αλλά αντιθέτως στην τομή μεταξύ συναισθημάτων και σκέψεων που συμβαίνουν κατά την εμπειρία (Stroud, 2014). Από τη στιγμή που οι αισθητικές ποιότητες είναι υποκειμενικές και συνυφασμένες με το περιεχόμενο, είναι κατά συνέπεια εξελίξιμες και μοιράζονται μέσω της κοινωνικής διάδρασης (Sinclair, 2004). Είναι οι καθιερωμένες πρακτικές σε επίπεδο τάξης αυτές που θα ωθήσουν ή όχι τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις αισθητικές ποιότητες (Sinclair, 2008). Η Sinclair (2004; 2008) υποστηρίζει ότι η αισθητική των μαθηματικών ικανοποιεί τρεις ρόλους στην εκπαίδευση: τον αξιολογητικό (evaluative), τον παραγωγικό (generative) και τον παρακινητικό (motivational).

Ο παραγωγικός ρόλος (generative role) της αισθητικής εντοπίζεται στους τρόπους συλλογισμού που συναντώνται στη διαδικασία διερεύνησης. Ο όρος «generative» που χρησιμοποιεί ο Poincaré (1908/1956) περιγράφει το γεγονός ότι είναι υπεύθυνος για τη γέννηση νέων ιδεών, οι οποίες δε θα μπορούσαν να έχουν προκληθεί μόνο από λογικά βήματα. Η δημιουργική πτυχή της μαθηματικής διερεύνησης πραγματοποιείται όταν τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας συμβαίνει να σκέφτονται ή να δρουν μαθηματικά, χρησιμοποιώντας νέους τρόπους οι οποίοι δεν ήταν

προσβάσιμοι (Riling, 2022). Ερευνητές που μελετούν τον παραγωγικό ρόλο της αισθητικής ορίζουν τρία στάδια διερεύνησης: *την αναγνωριστική επαφή* (getting a feel) με το ερέθισμα, την *απόκτηση οικειότητας* (establishing intimacy) με την νέα κατάσταση και την *απόλαυση* (enjoying the craft) *αξιοποίησης γνώριμων εργαλείων* (mastered tools) (Hanazono, 2018).

Τα ανοικτά προβλήματα και η δημιουργική σκέψη

Σε αντίθεση με τα κλειστά προβλήματα, όπου η αξιολόγηση περιλαμβάνει τη δυαδικότητα της σωστής ή λανθασμένης απάντησης, έρευνες έδειξαν ότι η δημιουργική σκέψη είναι ισχυρά συνδεδεμένη με την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων (Kwon et al., 2006). Ο Pehkonen (1997) ορίζει τα προβλήματα ως ανοιχτά, όταν η αφετηρία τους ή ο στόχος τους δεν είναι σαφώς διατυπωμένος ή έχουν πολλαπλές λύσεις ή πολλαπλές απαντήσεις. Μια ειδική περίπτωση ανοικτών προβλημάτων είναι η δημιουργία συνδέσεων ανάμεσα στα μαθηματικά και τις τέχνες (Schoevers, Leseman & Kroesbergen, 2020). Φαίνεται ότι τα μαθηματικά είναι η γλώσσα στην οποία οι δομές, τα μοτίβα και οι σχέσεις χρησιμοποιούνται για την επικοινωνία αισθητικών φαινομένων (Bjorklund & Ahlskog-Bjorkman, 2017). Οι δραστηριότητες που συνδυάζουν μαθηματικά και τέχνες φαίνεται να εγείρουν θετικά συναισθήματα για τη μάθηση των μαθηματικών τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν τους μαθητές να εμβαθύνουν στο αντικείμενο, να ενισχύσουν την ικανότητά τους στην επίλυση προβλημάτων και να εξελίξουν τη μαθηματική διαίσθηση (Nutov, 2018). Οι συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και τέχνης συνεπάγονται την ενίσχυση της δημιουργικότητας και εντείνουν την αισθητική εμπειρία (Lingke & Chang, 2019).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

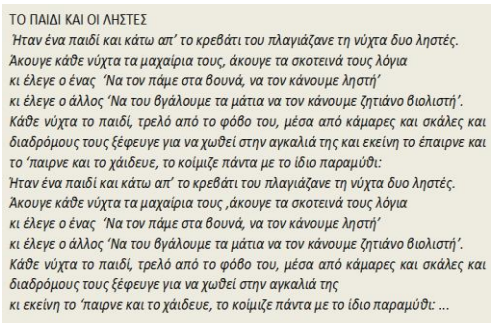
Το πλαίσιο της έρευνας

Μελετήθηκαν οι απαντήσεις δύο μαθητών Γ΄ Λυκείου, θετικής κατεύθυνσης. Η επιλογή των μαθητών έγινε κυρίως με βάση την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Ο λόγος της επιλογής ήταν η ενίσχυση της πιθανότητας να αξιοποιήσουν οι συμμετέχοντες γνωστά μαθηματικά εργαλεία. Τα ερευνητικά δεδομένα ήταν οι *γραπτές απαντήσεις των μαθητών στο φύλλο εργασίας*, καθώς επίσης, *οι ηχογραφήσεις και οι σημειώσεις πεδίου* που καταγράφηκαν από την ερευνήτρια κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Ο χρόνος της δραστηριότητας ήταν δύο ώρες. Η ερευνήτρια ενημέρωσε τους μαθητές ότι οι απαντήσεις δεν είναι σωστές ή λάθος και ότι η ποιότητα των απαντήσεών τους θα αξιολογηθεί ως προς την αιτιολόγηση της σκέψης τους. Δόθηκε επίσης το περιθώριο οι μαθητές να αναζητήσουν στο διαδίκτυο οποιαδήποτε μαθηματική πληροφορία ήταν απαραίτητη.

Το ανοιχτό πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές

Δίνονται στους μαθητές αρχικά δύο ποιήματα: Το *παιδί και οι ληστές* και το ποίημα *ντίλι-ντίλι το καντήλι*. Το πρώτο νοηματικά φαίνεται να διατρέχει μία άπειρη κυκλική πορεία. Το δεύτερο έχει περισσότερο τη μορφή ακολουθίας, η οποία σταθερά εξελίσσεται.

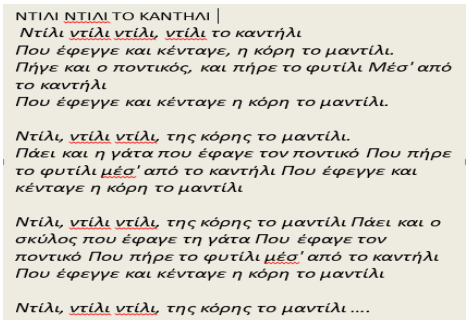
Πίνακας 1: Τα δύο ποιήματα και οι τρεις μαθηματικές αποδείξεις



ΤΟ ΠΑΙΔΙ ΚΑΙ ΟΙ ΛΗΣΤΕΣ

Ήταν ένα παιδί και κάτω απ' το κρεβάτι του πλαγιάζανε τη νύχτα δυο ληστές.
Άκουγε κάθε νύχτα τα μαχαίρια τους, άκουγε τα σκοτεινά τους λόγια
κι έλεγε ο ένας 'Να τον πάμε στα βουνά, να τον κάνουμε ληστή'
κι έλεγε ο άλλος 'Να του βγάλουμε τα μάτια να τον κάνουμε ζητιάνο βιολιστή'.
Κάθε νύχτα το παιδί, τρελό από το φόβο του, μέσα από κάμαρες και σκάλες και διαδρόμους τους ξέφευγε για να χωθεί στην αγκαλιά της και εκείνη το έπαιρνε και το 'παιρνε και το χάιδευε, το κοίμιζε πάντα με το ίδιο παραμύθι:
Ήταν ένα παιδί και κάτω απ' το κρεβάτι του πλαγιάζανε τη νύχτα δυο ληστές.
Άκουγε κάθε νύχτα τα μαχαίρια τους ,άκουγε τα σκοτεινά τους λόγια
κι έλεγε ο ένας 'Να τον πάμε στα βουνά, να τον κάνουμε ληστή'
κι έλεγε ο άλλος 'Να του βγάλουμε τα μάτια να τον κάνουμε ζητιάνο βιολιστή'.
Κάθε νύχτα το παιδί, τρελό από το φόβο του, μέσα από κάμαρες και σκάλες και διαδρόμους τους ξέφευγε για να χωθεί στην αγκαλιά της
κι εκείνη το 'παιρνε και το χάιδευε, το κοίμιζε πάντα με το ίδιο παραμύθι: ...

Ποίημα 1: Το παιδί και οι ληστές



ΝΤΙΛΙ ΝΤΙΛΙ ΤΟ ΚΑΝΤΗΛΙ

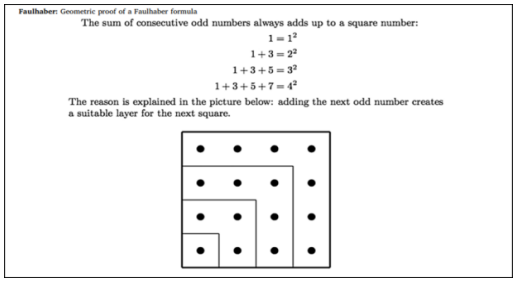
Ντίλι ντίλι ντίλι, ντίλι το καντήλι
Που έφεγγε και κένταγε, η κόρη το μαντίλι.
Πήγε και ο ποντικός, και πήρε το φυτίλι Μέσ' από το καντήλι
Που έφεγγε και κένταγε η κόρη το μαντίλι.

Ντίλι, ντίλι ντίλι, της κόρης το μαντίλι.
Πάει και η γάτα που έφαγε τον ποντικό Που πήρε το φυτίλι μέσ' από το καντήλι Που έφεγγε και κένταγε η κόρη το μαντίλι

Ντίλι, ντίλι ντίλι, της κόρης το μαντίλι Πάει και ο σκύλος που έφαγε τη γάτα Που έφαγε τον ποντικό Που πήρε το φυτίλι μέσ' από το καντήλι Που έφεγγε και κένταγε η κόρη το μαντίλι

Ντίλι, ντίλι ντίλι, της κόρης το μαντίλι ....

Ποίημα 2: Ντίλι... το καντήλι.



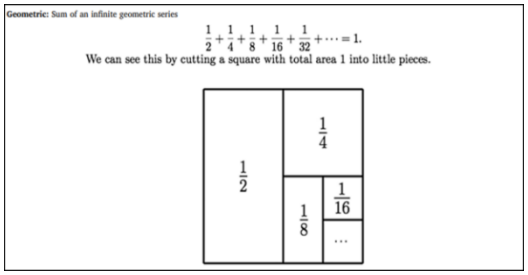
Faulhaber: Geometric proof of a Faulhaber formula

The sum of consecutive odd numbers always adds up to a square number:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

The reason is explained in the picture below: adding the next odd number creates a suitable layer for the next square.

Απόδειξη 1: το άθροισμα των διαδοχικών μονών αριθμών

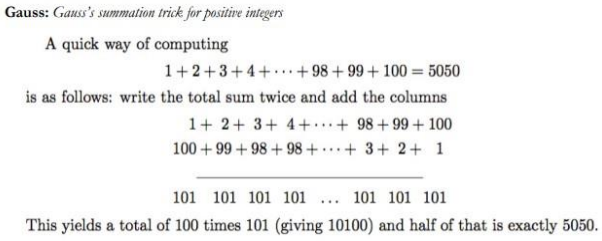


Geometric: Sum of an infinite geometric series

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1.$$

We can see this by cutting a square with total area 1 into little pieces.

Απόδειξη 2: Το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου που συγκλίνει στο 1



Gauss: *Gauss's summation trick for positive integers*

A quick way of computing

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 5050$$

is as follows: write the total sum twice and add the columns

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 \quad 101 \quad 101 \quad 101 \quad \ldots \quad 101 \quad 101 \quad 101 \end{array}$$

This yields a total of 100 times 101 (giving 10100) and half of that is exactly 5050.

Απόδειξη 3: Η απόδειξη του Gauss για το άθροισμα 100 διαδοχικών φυσικών αριθμών

Στη συνέχεια δόθηκαν τρεις μαθηματικές αποδείξεις (Johnson & Steinerberger, 2017). Η πρώτη είναι σχηματική απόδειξη του αθροίσματος διαδοχικών μονών αριθμών, η δεύτερη αποδεικνύει σχηματικά ότι το άθροισμα άπειρων όρων συγκεκριμένης γεωμετρικής προόδου ισούται με 1 και η τρίτη δείχνει μία απόδειξη του Gauss για το άθροισμα 100 διαδοχικών φυσικών αριθμών (Πίνακας 1). Ζητήθηκε από τους μαθητές:

Διαβάστε κάθε ένα από τα δύο ποιήματα. Τι παρατηρείτε στο καθένα; Στη συνέχεια, μελετήστε τις τρεις αποδείξεις που ακολουθούν. Προσπαθήστε να αντιστοιχίσετε κάθε ποίημα με μία απόδειξη. Αιτιολογήστε τις επιλογές σας.

Το παραπάνω έργο στο οποίο κλήθηκαν οι μαθητές να απαντήσουν θεωρείται ανοικτό διότι δε δίνει ενδείξεις για την κατεύθυνση εργασίας των μαθητών. Οι μαθητές έτυχε να έχουν διδαχθεί τις μαθηματικές αποδείξεις, κάτι που δεν είχε προβλεφθεί ερευνητικά.

Ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων

Η ανάλυση ακολούθησε τα παρακάτω βήματα, 1ο βήμα: αναζητήσαμε τα 3 στάδια διερεύνησης, όπως αυτά παρουσιάζονται στον Hanazono (2018), στα ερευνητικά δεδομένα και για τους δύο μαθητές, 2ο βήμα: αναζητήθηκαν αποσπάσματα, ειδικά στα φύλλα εργασίας των συμμετεχόντων, στα οποία να αναγνωρίζουμε συνδέσεις ανάμεσα στα ποιήματα και στα μαθηματικά ανά στάδιο διερεύνησης, 3ο βήμα: οι συνδέσεις αυτές κωδικοποιήθηκαν ανά μαθητή, 4ο βήμα: απαντάμε στο ερευνητικό μας ερώτημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ακολουθούν τα τρία στάδια εξέλιξης του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής, όπως αυτά αναγνωρίστηκαν στη διαδικασία διερεύνησης του προβλήματος από τους δύο μαθητές.

Αναγνωριστική επαφή με το ερέθισμα

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές αποκτούν μία πρώτη αίσθηση της κατάστασης οργανώνοντας και κατηγοριοποιώντας τα δεδομένα. Η επίλυση της δραστηριότητας διήρκησε 2 ώρες. Στα πρώτα 40 - 45 λεπτά οι μαθητές απλώς διάβαζαν επανειλημμένα τα ποιήματα, χωρίς να γράψουν τίποτα στο φύλλο εργασίας [Ερευνήτρια, Σημειώσεις πεδίου]. Όσον αφορά τις μαθηματικές αποδείξεις, οι συμμετέχοντες δεν αφιέρωσαν ιδιαίτερο χρόνο γιατί ήταν ήδη γνωστές σε αυτούς. Συγκεκριμένα, όταν ρωτήθηκε ο Κ.: *θέλεις να σου εξηγήσω κάτι στα μαθηματικά*; Αποκρίθηκε ο Κ.: *όχι, γιατί αυτό μας το κάνανε στην Α΄ Λυκείου.* Συνεπώς, η διερεύνηση σε αυτό το στάδιο αφιερώθηκε αποκλειστικά στην κατανόηση των ποιημάτων, ίσως και των χαρακτηριστικών τους που θα μπορούσαν να συνδεθούν με τα μαθηματικά.

Απόκτηση οικειότητας με το αντικείμενο

Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν συνδέσεις ανάμεσα στα μαθηματικά και τα δύο ποιήματα. Συγκεκριμένα, ο Κ. προσπαθεί να αποκωδικοποιήσει τα δύο ποιήματα *αναζητώντας τα δομικά τους χαρακτηριστικά λαμβάνοντας υπόψιν τα νοήματα που περιγράφονται σε κάθε ποίημα*. Οι αρχικές παρατηρήσεις του Κ. για το ποίημα 1 είναι ότι

αναγνωρίζει α) νοηματικές στροφές στο ποίημα, η πρώτη στροφή περιλαμβάνει τους στίχους 1 με 7 (από «ήταν ένα παιδί» μέχρι «το ίδιο παραμύθι») και τη νοηματική συνέχεια ανάμεσα στις στροφές και β) αναγνωρίζει την επ' άπειρο επανάληψη του νοήματος κάθε στροφής. Τα παραπάνω φαίνονται στο χαρακτηριστικό απόσπασμα 1.

Χαρακτηριστικό απόσπασμα 1

Στο ποίημα 1 παρατηρείται η επανάληψη της ίδιας στροφής [...] Θα μπορούσαμε να πούμε πως η δεύτερη στροφή αποτελεί συνέχεια της πρώτης [...] Δηλαδή υπάρχει μία σύνδεση των δύο στροφών η οποία θα μπορούσε να συνεχιστεί επ' άπειρον χωρίς να τελειώσει ποτέ καθώς η αρχή της στροφής αποτελεί απάντηση στον τελευταίο στίχο». [Φύλλο εργασίας, Κ.]

Στο ποίημα 2 ο Κ. αναγνωρίζει επίσης επαναλήψεις: «*ο συγγραφέας κάθε φορά επιλέγει να επαναλαμβάνει τους προηγούμενους στίχους*», και την απειρία της διαδικασίας: «*θα μπορούσε εδώ η διαδικασία να συνεχιζόταν επ' άπειρον*». Ταυτόχρονα, στο ποίημα 2 παρατηρεί κάποια άλλα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, όπως ότι α) κάθε φορά προστίθεται ένα καινούριο γεγονός *«σε κάθε νέα στροφή παρουσιάζεται και ένα καινούριο γεγονός»*, β) το γεγονός αυτό αποτελεί λογική συνέχεια του προηγούμενου, γ) τα ρήματα που χρησιμοποιεί ο ποιητής συνδέονται με τον θάνατο: *«επιπλέον, σε κάθε νέο στίχο το ρήμα ενέργειας που αναγράφεται σχετίζεται με τον θάνατο*» και δ) την αποδοχή λογικών παραδοχών: «*δεν θα μπορούσαμε να πούμε ότι πάει και ο Σούπερμαν που διαμέλισε τον χασάπη, καθώς δεν αποτελεί λογική κατασκευή*».

Ο Σ. συνδέει τα ποιήματα αναγνωρίζοντας και στα δύο την επανάληψη: «*Διαβάζοντας τα δύο ποιήματα, το πρώτο χαρακτηριστικό που εντοπίζεται και στα δύο είναι η επανάληψη*». Στη συνέχεια, προσπαθεί να αναγνωρίσει διαφορές ανάμεσα στη δομή τους σε επίπεδο νοηματικού περιεχομένου. Στο ποίημα 1 αναγνωρίζει μια *άπειρη επανάληψη* του ίδιου θέματος ενώ στο ποίημα 2 παρατηρεί τη *χρονική παράθεση γεγονότων* από το πιο πρόσφατο στο πιο παλιό. Τα παραπάνω φαίνονται στο χαρακτηριστικό απόσπασμα 2.

Χαρακτηριστικό απόσπασμα 2

Στο πρώτο παρουσιάζεται ένας φαύλος κύκλος. Πρόκειται δηλαδή για μία επαναλαμβανόμενη επ' άπειρον παράθεση μίας ιστορίας, χωρίς ωστόσο να αποδίδεται το τέλος της […] Στο δεύτερο ποίημα παρουσιάζεται μία σειρά γεγονότων από το πιο πρόσφατο στο πιο παλιό, στην οποία όμως κάθε φορά προστίθεται ένα ακόμη πρόσφατο γεγονός στην αφήγηση, γυρνώντας ωστόσο στο ίδιο αρχικό γεγονός». [Φύλλο εργασίας, Σ.]

Συνεπώς, και οι δύο μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν μαθηματικά χαρακτηριστικά στη δομή των δύο ποιημάτων, όπως επαναλήψεις, άπειρες διαδικασίες και χρονική εξέλιξη γεγονότων.

Αξιοποίηση γνώριμων εργαλείων

Το στάδιο αυτό αφορά στην αξιοποίηση συνδέσεων ανάμεσα στη νοηματική δομή των ποιημάτων και στις μαθηματικές αποδείξεις. Στην απάντησή τους στο πρόβλημα, και οι δύο μαθητές αντιστοίχισαν το ίδιο ποίημα με την ίδια μαθηματική απόδειξη, αλλά με διαφορετική αιτιολόγηση.

Συγκεκριμένα, ο Κ. αντιστοίχισε το ποίημα 1 «*το παιδί και οι ληστές» με* την απόδειξη 2 *(άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου).* Για να αιτιολογήσει χρησιμοποιεί επιχειρήματα που στηρίζονται στις διαπιστώσεις του στο προηγούμενο στάδιο διερεύνησης, όπως «*θα αντιστοίχιζα την απόδειξη 2 με το ποίημα 1, καθώς και οι δύο μπορούν να συνεχιστούν ατελείωτα»*. Ταυτόχρονα, αναγνωρίζει το εξής κοινό χαρακτηριστικό της απόδειξης 2 και του ποιήματος 1: αναφέρει ότι όπως στην απόδειξη «*κάθε όρος είναι ο μισός του προηγούμενου (1/2, ¼, 1/8 …) έτσι και στο ποίημα κάθε επόμενη στροφή είναι απάντηση στον τελευταίο στίχο της προηγούμενης»* [Φύλλο εργασίας, Κ.].

Ο Σ., όπως και ο Κ., αντιστοιχίζει επίσης το ίδιο ποίημα με την ίδια απόδειξη παρόλα αυτά αιτιολογεί διαφορετικά την επιλογή του. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζει στο ποίημα και στην απόδειξη *«μικρές πραγματικότητες»* που διατηρούν μια *χωρική διάσταση* και που στη συνέχεια *«φθίνουν»* έχοντας όμως μια *«σταθερή βάση».* Η βάση αυτή είναι το όριο του αθροίσματος που είναι το 1 ενώ στο ποίημα είναι η αρχική πραγματικότητα που περιγράφεται στην πρώτη στροφή. Τα παραπάνω φαίνονται στο χαρακτηριστικό απόσπασμα 3.

Χαρακτηριστικό απόσπασμα 3

Όπως στην απόδειξη, όπου προσθέτουμε συνεχώς μικρότερα (άπειρα) κομμάτια ενός τετραγώνου με εμβαδόν 1 και το άθροισμά τους είναι σταθερό έτσι και στο ποίημα με την επανάληψη της ιστορίας εισχωρούμε σε ολοένα και μικρότερες «πραγματικότητες», η κάθε μία από τις οποίες αποτελεί κάποιο μέρος της αμέσως προηγούμενης, έχοντας όμως σταθερή βάση. Η ομοιότητα ανάμεσα στο ποίημα και την απόδειξη αυτή είναι ότι όσο προχωράμε στη «λούπα» του ποιήματος ο «χώρος» της ιστορίας γίνεται σταδιακά μικρότερος, καθώς εξιστορούνται τα γεγονότα μέσα από την αρχική ιστορία όπως σταδιακά μικρότερα γίνονται και τα κλάσματα που προσθέτουμε στην απόδειξη [Φύλλο εργασίας, Σ.].

Δηλαδή, ο Σ. αναπτύσσει έναν πρωτότυπο και ευρηματικό τρόπο σύνδεσης ανάμεσα στο ποίημα 1 και την απόδειξη 2. Συγκεκριμένα,

αποδομεί το νοηματικό περιεχόμενο του ποιήματος σε «*μικρές πραγματικότητες»* που *«συνέχεια φθίνουν».* Ταυτόχρονα, αναγνωρίζει ανάλογη εξέλιξη στους όρους του αθροίσματος της απόδειξης 2.

Οι δύο μαθητές συνέδεσαν το ποίημα 2 *(ντίλι ντίλι το καντήλι)* με την απόδειξη 1 (*το άθροισμα των συνεχόμενων μονών αριθμών*). Οι αιτιολογήσεις τους ανέφεραν ότι και στα δυο προστίθεται ένα νέο στοιχείο (στίχος ή αριθμός) διατηρώντας πάντα τα προηγούμενα *«όσο προχωράμε στη μαθηματική απόδειξη επαναλαμβάνουμε και προηγούμενους μονούς αριθμούς όπως και στο ποίημα επαναλαμβάνουμε τους παραπάνω στίχους»*. Ο Κ. εστιάζει στην επίτευξη της συνοχής της διαδικασίας, ενώ ο Σ. στη συμπλήρωση της ιστορίας (ποίημα) και του τετραγώνου (απόδειξη). Ο Σ. αναφέρει *«τα γεγονότα συμπληρώνουν την ιστορία, με παρόμοιο τρόπο με τον οποίο συμπληρώνουν οι προστιθέμενοι περιττοί αριθμοί τα επόμενα τετράγωνα στην απόδειξη».*

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το ανοιχτό πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές τους βοήθησε να εμπλακούν με διάφορα στάδια αισθητικής διερεύνησης. Οι μαθητές αναζητώντας συνδέσεις ανάμεσα στα ποιήματα και στις μαθηματικές αποδείξεις ανάπτυξαν στοιχεία αισθητικής διερεύνησης και ιδιαίτερα του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής (Hanazono, 2008; Sinclair, 2004).

Η πορεία διερεύνησης των 2 μαθητών ακολούθησε τα στάδια εξέλιξης του παραγωγικού ρόλου της αισθητικής, όπως αυτά αναφέρονται στη βιβλιογραφία με κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις και με τις απαραίτητες προσαρμογές στο συγκεκριμένο πλαίσιο μελέτης. Συγκεκριμένα, στο πρώτο στάδιο οι μαθητές εστίασαν στο μη οικείο σε αυτούς μέρος του έργου (διάβαζαν και ξαναδιάβαζαν τα δύο ποιήματα) με σκοπό την απόδοση νοήματος (Marcovic, 2012) σε αυτά στο πλαίσιο του έργου που τους είχε ζητηθεί. Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές ανέπτυξαν οικειότητα με τη νοηματική δομή των ποιημάτων αναγνωρίζοντας σε αυτά μοτίβα, επαναλήψεις και άπειρες διαδικασίες. Στο τρίτο στάδιο, οι μαθητές αξιοποίησαν εργαλεία που είχαν αναπτύξει από τα προηγούμενα δύο στάδια διερεύνησης αλλά και από τη μαθηματική τους εκπαίδευση με σκοπό τη σύνδεση ποιημάτων και μαθηματικών αποδείξεων. Συνεπώς, η αισθητική διερεύνηση εξελίσσεται χρονικά και κάθε στάδιο αποτελεί προϋπόθεση για το επόμενο. Παρατηρήθηκε επίσης ότι στο τρίτο στάδιο ο τρόπος σκέψης των δύο μαθητών διαφοροποιήθηκε και ότι αναδείχθηκαν στοιχεία δημιουργικής σκέψης ιδιαίτερα σε έναν από τους δύο μαθητές. Συγκεκριμένα, ο Σ. αποδόμησε τα δεδομένα του ποιήματος και τους έδωσε χώρο-χρονική διάταξη, διακρίνοντας *«μεγαλύτερες»* και *«μικρότερες»* πραγματικότητες στα ποιήματα αντίστοιχες με τους κλασματικούς όρους της απόδειξης. Οι απαντήσεις του Σ. διαθέτουν

πρωτοτυπία, φαντασία και ευρηματικότητα. Τα στοιχεία αυτά συνδέονται με την ανάπτυξη της δημιουργικής και αποκλίνουσας σκέψης (Leikin, 2018). Τέλος, η σύγχρονη αντίληψη της αισθητικής που τη βλέπει να εξελίσσεται μέσα από τη μαθηματική διερεύνηση είναι ένας παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψιν στη διδασκαλία. Όπως αναφέρει η Sinclair (2004) η αναγνώριση της αισθητικής δομής των μαθηματικών μπορεί να προσφέρει βαθύτερη εμπειρία μάθησης σε επιστήμονες μαθηματικούς και μαθητές στη σχολική τάξη των μαθηματικών. Σε αυτή την κατεύθυνση, οι συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και τέχνης μπορούν να υποστηρίξουν τη μαθηματική διερεύνηση, την ανάπτυξη δημιουργικής σκέψης και να εντείνουν την αισθητική εμπειρία των εμπλεκομένων σε τέτοιου είδους δραστηριότητες (Lingke & Chang, 2019).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Björklund, C., & Ahlskog-Björkman, E. (2017). Approaches to teaching in thematic work: early childhood teachers' integration of mathematics and art. *International Journal of Early Years Education*, *25*(2), 98-111.doi: https://doi.org/10.1080/09669760.2017.1287061

Cupchik, G. C., & Winston, A. S. (1996). Confluence and divergence in empirical aesthetics, philosophy, and mainstream psychology. In G. G. Berntson & J. T. Cacioppo (Eds.), *Handbook of perception and cognition: Cognitive ecology* (pp. 61-85). Academic Press.

Dewey, J. (1934). *Art as experience.* New York, NY: Perigree.

Hanazono, H. (2018). The qualitative differences in generative characteristic of the aesthetic sensibility: Analysis of learners' problem solving. *CERME 10*, Dublin, Ireland. hal-01935964.

Johnson, S., & Steinerberger, S. (2017). The aesthetic psychology of mathematics. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3062208.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). *Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach*.Asia Pacific Education Review, 7, 51–61. https://doi.org/10.1007/BF03036784.

Leikin, R. (2018). Openness and Constraints Associated with Creativity-Directed Activities in Mathematics for All Students. In: Amado, N., Carreira, S., Jones, K. (eds) *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving: A focus on technology, creativity and affect*, 387-397. Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_17.

Lingke, K. O. N. G., & Chang, Y. C. (2019). The effect of teachers' savoring on creative behaviors: Mediating effects of creative self-efficacy and aesthetic experience. *International Journal of Educational Methodology*, *5*(3), 325-335. https://doi.org/10.12973/ijem.5.3.325.

Markovic, S. (2012). Components of aesthetic experience: Aesthetic fascination, aesthetic appraisal, and aesthetic emotion. *i-Perception, 3(1),* 1–17. http://dx.doi.org/10.1068/ i0450aap.

Nutov, L. (2018). When Mathematics Meets Art: How Might Art Contribute to the Understanding of Mathematical Concepts? In *Proceedings of Bridges 2018: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture* (pp. 341-346).

Pehkonen, E. (1997). Use of problem fields as a method for educational change. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classrooms (*pp. 73-84). Helsinki, Finland: University of Helsinki, Department of Teacher.

Poincare, H. (1908/1956). Mathematical creation. In J. Newman (Ed.), *The world of mathematics* Vol. 4, (pp. 2041–2050). NewYork: Simon and Schuster.

Reiss, T. J. (2008). Early Modern Philosophy and Changing 'Who - Ness'. *Metascience, 17*(2), 263-267. https://doi 10.1007/s11016-008-9188-z.

Riling, M. (2022). Aesthetic Dimensions of Student Mathematical Creativity. In Lischka, A. E., Dyer, E. B., Jones, R. S., Lovett, J. N., Strayer, J., & Drown, S. *Proceedings of the forty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp. 1869-1877*. Middle Tennessee. State University.

Schoevers, E. M., Leseman, P. P., & Kroesbergen, E. H. (2020). Enriching mathematics education with visual arts: Effects on elementary school students' ability in geometry and visual arts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*, 1613-1634. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10018-z

Sinclair, N. (2004). The roles of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical thinking and learning*, *6*(3), 261-284. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0603_1

Sinclair, N. (2008). Attending to the Aesthetic in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics, 28(*1), 29–35. http://www.jstor.org/stable/40248596.

Stroud, S. R. (2014). The art of experience: Dewey on the aesthetic. In *Practicing Pragmatist Aesthetics* (pp. 33-46). Brill. https://doi.org/10.1163/9789401210812_004

ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: ΤΙ ΠΥΡΟΔΟΤΕΙ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

Γεώργιος Βεντίστας[1] & Ιωάννης Παπαδόπουλος[2]

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, ΑΠΘ

gventist@eled.auth.gr[1] & ypapadop@eled.auth.gr[2]

Στην πιλοτική αυτή έρευνα γίνεται μια προσπάθεια να εντοπιστούν και να κατηγοριοποιηθούν οι αιτίες που πυροδοτούν ενέργειες ελέγχου κατά τη διάρκεια της συνεργατικής επίλυσης προβλήματος στη Γεωμετρία της Β' Λυκείου. Καταγράφεται μια ποικιλία τέτοιων αιτιών που η αφετηρία τους μπορεί να είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών της ομάδας (κοινωνικός πόρος), το ίδιο το άτομο (ατομικός πόρος) ή η κατάσταση πλαίσιο του προβλήματος (περιβαλλοντικός πόρος). Τα ευρήματα δείχνουν ότι τον καθοριστικό ρόλο στην επίλυση παίζουν οι κοινωνικοί πόροι, χωρίς ωστόσο να φαίνεται προς το παρόν η ύπαρξη κάποιου μοτίβου που να συνδέει συγκεκριμένους κοινωνικούς πόρους με συγκεκριμένες ενέργειες ελέγχου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο όρος μεταγνώση, αν και χωρίς σαφή όρια (Schoenfeld, 1985), γίνεται αντιληπτός στην επίλυση προβλήματος ως η διαδικασία κατά την οποία ο λύτης παρακολουθεί, αξιολογεί και τροποποιεί την πορεία επίλυσης. Αυτή η προσέγγιση αναφέρεται στην ατομική επίλυση προβλήματος. Αυτό όμως δημιουργεί περιορισμούς. Για παράδειγμα, σε μια ατομική επίλυση ο λύτης «κολλάει» σε κάποιο σημείο. Αν έχει πρόσβαση μόνο στη δική του σκέψη, διαθέτει πόρους που πιθανόν να μην είναι αρκετοί για την αντιμετώπιση του εμποδίου που συνάντησε. Έτσι, τα τελευταία χρόνια στην έρευνα υπάρχει μια στροφή στη μελέτη της συνεργατικής επίλυσης, όπου ο λύτης έχει πρόσβαση όχι μόνο στη δική του σκέψη (*εσωτερικός πόρος*) αλλά και σε *εξωτερικούς πόρους* που σχετίζονται με την αλληλεπίδρασή του με τους άλλους στην ομάδα (*κοινωνικοί πόροι*), αλλά και με την αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον του προβλήματος στο οποίο εργάζεται (*περιβαλλοντικοί πόροι*) (Kim κ.ά., 2013). Στην εργασία αυτή το ενδιαφέρον μας εστιάζει σε μια πτυχή της μεταγνώσης, αυτήν του ελέγχου κατά τη διάρκεια της συνεργατικής επίλυσης προβλήματος στη Γεωμετρία. Παρόλο που έχει αρχίσει να αναπτύσσεται ένα ενδιαφέρον στο κομμάτι των στρατηγικών που αναπτύσσουν οι λύτες στο θέμα της μεταγνώσης (Smith & Mancy, 2018) και πιο συγκεκριμένα του ελέγχου κατά τη γεωμετρική επίλυση προβλήματος (Papadopoulos & Ventistas, 2023), εν τούτοις το να μείνει κανείς μόνο στο θέμα των στρατηγικών αφήνει αναπάντητο το ερώτημα που εγείρεται και που αποτελεί το ερευνητικό ερώτημα αυτής της εργασίας: Τι είναι αυτό που κάθε φορά

προηγείται και πυροδοτεί την εκτέλεση μεταγνωστικών ενεργειών από τους λύτες;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο βασίζεται η εργασία αυτή έχει ως αφετηρία την έννοια του ελέγχου στην επίλυση προβλήματος, αλλά κυρίως βασίζεται στο πλαίσιο των πολλαπλών επιπέδων μεταγνώσης στο ατομικό και κοινωνικό επίπεδο (Kim κ.ά., 2013). Ο έλεγχος που αφορά την παρακολούθηση και την επακόλουθη ρύθμιση των γνωστικών διαδικασιών σε μια διαδικασία επίλυσης αναφέρεται και ως εκτελεστικός έλεγχος (Schoenfeld, 1985). Ο αναστοχασμός για την πορεία της λύσης που προγραμματίστηκε από το λύτη, η βήμα προς βήμα ενεργή παρακολούθηση, η λήψη απόφασης για τη συνέχιση ή την αλλαγή της πορείας με την κατάλληλη κάθε φορά επιλογή ανάμεσα στις διαθέσιμες που υπάρχουν, άπτονται του ελέγχου (Mamona-Downs & Papadopoulos, 2011). Υπό την έννοια αυτή ο έλεγχος περιλαμβάνει ενέργειες όπως (i) τακτική επιστροφή στην εκφώνηση του κειμένου για έλεγχο είτε της κατανόησης του λύτη είτε της ευθυγράμμισης της πορείας λύσης με το ζητούμενο, (ii) τη συνειδητοποίηση του βαθμού δυσκολίας ενός προβλήματος και τις συνακόλουθες ενέργειες που θα πρέπει να πραγματοποιηθούν (αλλαγή πορείας, διατήρηση της υπάρχουσας πορείας κ.λ.π.), (iii) αξιολόγηση της προόδου σε πραγματικό χρόνο (Schoenfeld, 1985). Ενέργειες ελέγχου μπορούν να εμφανιστούν σε οποιαδήποτε φάση επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος και μπορούν να οδηγήσουν σε αλλαγή στρατηγικής και στόχων (Kluwe & Friedrichsen, 1985).

Η συντριπτική πλειοψηφία των δημοσιευμένων εργασιών αφορούν στην ατομική επίλυσης προβλήματος. Όμως, όπως σχολιάστηκε πιο πάνω, είναι πολλές φορές δύσκολο για λύτες που οι μεταγνωστικές τους δεξιότητες δεν είναι αναπτυγμένες, να παρακολουθούν και να αξιολογούν την προσωπική τους πορεία επίλυσης. Τα τελευταία χρόνια στους ερευνητές του χώρου εμφανίζεται μια διαρκώς αυξανόμενη εστίαση στην κοινωνική φύση της μεταγνώσης (και κατά συνέπεια και του ελέγχου). Οι Smith και Mancy (2018) στην έρευνά τους που επικεντρώνεται στη σχέση μεταξύ του *συνεργατικού λόγου* και του *μεταγνωστικού λόγου* στη συνεργατική επίλυση προβλήματος, δημιούργησαν ένα μεταγνωστικό σχήμα κωδικοποίησης στο οποίο δίνεται περιγραφή πέντε ειδών λόγου που αναπτύσσονται κατά την αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας: ο μεταγνωστικός, ο γνωστικός, του εκπαιδευτικού, ο κοινωνικός, και η κατηγορία «άλλος». Οι Papadopoulos και Ventistas (2023) αξιοποιώντας το μοντέλο των Smith και Mancy (2018) και μελετώντας τη συνεργατική επίλυση μαθητών Β Λυκείου στη Γεωμετρία, προτείνουν ένα μοντέλο κωδικοποίησης των στρατηγικών ελέγχου που εμφανίζονται κατά τη διάρκειά της. Το μοντέλο, αν και είναι ακόμα υπό ανάπτυξη, παρουσιάζει

ένα εύρος γενικών και επιμέρους ενεργειών ελέγχου. Τέτοιες ενέργειες μπορεί να αφορούν: (i) στον έλεγχο του κατά πόσο έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα δεδομένα του προβλήματος, (ii) στην αξιολόγηση μιας στρατηγικής ή προσέγγισης επίλυσης του προβλήματος, (iii) στον έλεγχο του ζητούμενου που μπορεί να οδηγήσει σε έναν επανεστιασμό των λυτών, (iv) στην αξιολόγηση – επαλήθευση ενδιάμεσων και τελικού αποτελέσματος, (v) στην διασφάλιση της σωστής κατανόησης, και (vi) στην έκφραση συμφωνίας ή διαφωνίας (επιχειρηματολογία) με όσα λαμβάνουν χώρα σε κάθε βήμα της επίλυσης.

Το ζητούμενο όμως που δεν έχει ακόμη σε βάθος εξετάσει η έρευνα είναι τι πυροδοτεί αυτές τις ενέργειες ελέγχου. Οι Kim κ.ά., (2013) αναφέρουν ότι τα σημεία αφετηρίας τέτοιων ενεργειών (πόροι) μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε εσωτερικά και εξωτερικά. Οι *εσωτερικοί πόροι* αποτελούν τα *ατομικά εννοιολογικά συστήματα* που περιλαμβάνουν τόσο γνωστικές όσο και μεταγνωστικές συνιστώσες του ατόμου, με λίγα λόγια «τη γνώση μας για τη γνώση μας» (Flavel, 1976), το τι γνωρίζουμε σχετικά με το επίπεδο της γνώσης μας (π.χ. έλεγχος μέλους της ομάδας σε δική του ενέργεια χωρίς την επίδραση της ομάδας). Οι *εξωτερικοί πόροι* διακρίνονται στους *κοινωνικούς πόρους* και στους *περιβαλλοντικούς πόρους*. Στην συνεργατική επίλυση, *κοινωνικός πόρος* μπορεί να είναι ο συμμαθητής ή ο εκπαιδευτικός και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Αν για παράδειγμα κάποιο μέλος της ομάδας κάνει μια πρόταση ή μια δήλωση και ενεργοποιηθεί κάποιο είδος ελέγχου από άλλο μέλος της ομάδας τότε πρόκειται για κοινωνικό πόρο που προκαλεί τον έλεγχο. Οι Koichu κ.ά. (2021), μελετώντας το τελευταίο βήμα του Polya, αυτό της «Ματιάς προς τα πίσω», αναφέρονται στη σπουδαιότητα της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών της ομάδας στη συνεργατική επίλυση (διαλογικές κινήσεις - dialogical moves) και σημειώνουν ότι τα πρωτόκολλα της έρευνας δεν ήταν συλλογές από μονόλογους των λυτών αλλά είχαν διαλεκτική φύση. Ο άλλος πόρος που πυροδοτεί τον έλεγχο είναι η αλληλεπίδραση του λύτη-μέλους της ομάδας με το μαθησιακό περιβάλλον. Το μαθησιακό *περιβάλλον*, ως εξωτερικός πόρος, μπορεί να σημαίνει και αυτό καθαυτό το πρόβλημα (π.χ. ένα οπτικό ερέθισμα από κάποιο σχήμα στην εκφώνηση του προβλήματος). Οι διαφορετικές εννοιολογικές και γνωστικές απαιτήσεις και η πολυπλοκότητα του προβλήματος πυροδοτούν ενέργειες ελέγχου. Η τελευταία εκφράζεται και μέσα από το πλήθος των απαιτούμενων για τη λύση του βημάτων.

Σε αυτό το τοπίο, η παρούσα έρευνα ξεκινά στην ουσία μια πρώτη συζήτηση σχετικά με τα αίτια που πυροδοτούν ενέργειες ελέγχου σε μια συνεργατική επίλυση προβλήματος στην περιοχή της Γεωμετρίας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα έρευνα είναι πιλοτική και αποτελεί τμήμα μιας ευρύτερης έρευνας που έχει σκοπό τη διερεύνηση του ζητήματος του ελέγχου και των αιτιών που τον πυροδοτούν στη συνεργατική επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Συμμετείχαν (βολική δειγματοληψία) 20 μαθητές της Β' Λυκείου γενικής παιδείας (πέντε τετραμελείς ομάδες) που δεν είχαν καμία πρότερη εμπειρία σχετικά με τη μεταγνώση και τη συνεργατική επίλυση. Η σύνθεση της ομάδας βασίστηκε στις προσωπικές επιλογές των παιδιών με κριτήριο τη συνοχή της ομάδας, κάτι που θα ευνοούσε την ποσότητα και ποιότητα των αλληλεπιδράσεων των μελών της ομάδας (Leonard, 2001). Στην έρευνα αυτή παρουσιάζεται η εργασία μίας ομάδας κατά τη διάρκεια μιας από τις συνεδρίες της πιλοτικής όπου οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν το πρόβλημα της Εικόνας 1. Η ομάδα επιλέχθηκε λόγω του ότι παρουσίασε μια ευρεία γκάμα ενεργειών ελέγχου και κατά συνέπεια και αιτιών που τις προκάλεσαν.

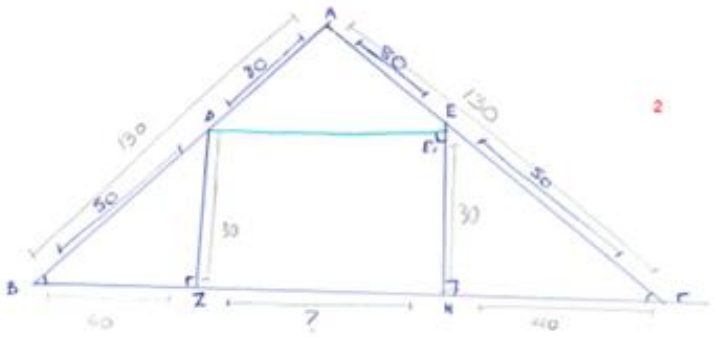
Εικόνα 1: Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές

Το πρόβλημα απαιτεί πολλά στάδια για τη λύση του και έτσι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να κάνουν ελέγχους στα ενδιάμεσα βήματα. Επιπλέον μπορεί να επιλυθεί με πολλαπλούς τρόπους και έτσι ευνοεί την επαλήθευση. Το περιεχόμενό του είναι σύμφωνο με το αναλυτικό πρόγραμμα και η συνεδρία, διάρκειας 45 λεπτών, πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της τυπικής διδασκαλίας σε χρονική συνάφεια με την διδαχθείσα ύλη στη Γεωμετρία. Οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών ηχογραφήθηκαν και μεταγράφηκαν σε πρωτόκολλα για τους σκοπούς της έρευνας. Σε ένα πρώτο στάδιο εφαρμόστηκε επαγωγική θεματική ανάλυση (Mayring, 2014) για τον εντοπισμό στρατηγικών ελέγχου που χρησιμοποιούν οι μαθητές (Papadopoulos & Ventistas, 2023). Στη συνέχεια, με την ίδια

μέθοδο εξετάστηκαν οι αιτίες που πυροδότησαν τις ενέργειες ελέγχου, κατηγοριοποιήθηκαν και συνδέθηκαν με το μοντέλο των Kim κ.ά., (2013). Τα πρωτόκολλα των μαθητών εξετάστηκαν ξεχωριστά από τους δύο ερευνητές. Η εγκυρότητα και αξιοπιστία εξασφαλίστηκε μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων και την επανακωδικοποίησή τους έως ότου υπάρξει συμφωνία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές ξεκίνησαν με τη μεταφορά της προβληματικής κατάστασης στο χαρτί δημιουργώντας ένα σχήμα που να αναπαριστά τα δεδομένα της εκφώνησης (Εικόνα 2).



Εικόνα 2 : Το αρχικό σχήμα των μαθητών

Ο Μ5 εστιάζει στο τρίγωνο ΑΒΓ:

45 Μ5: Παιδιά, στο ΑΒΓ η γωνία Β είναι ίση με τη γωνία Γ.

Πρόκειται για μια ***δήλωση που υποστηρίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος*** *(κοινωνικός πόρος)* και η οποία πυροδοτεί τον έλεγχό της (*έλεγχος επιχειρηματολογίας*) σχετικά με την ορθότητα της εκτίμησης

46 Μ2: Δεν είναι ισοσκελές, δεν μας το λέει.
47 Μ5: Αφού δίνει ΑΒ=ΑΓ=130 μέτρα.
48 Μ2: Α! τότε είναι ισοσκελές

Δεδομένης πια της ισότητας των γωνιών, το ***οπτικό ερέθισμα*** *(περιβαλλοντικός πόρος)* ενός ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει δυο πλευρές τριγώνου και είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά οδηγεί στον *έλεγχο σχετικού προβλήματος*.

56 Μ2: Αν αποδείξουμε ότι αυτό (*σημ. ΔΕ*) είναι…παράλληλο…
57 Μ5: Αυτό που κάναμε πέρυσι…ΔΕ=//(ΒΓ/2).
58 Μ2: Ναι! Ωραία λοιπόν!

Η ύπαρξη δυο αγνώστων τους αποθαρρύνει και έτσι ο Μ4 προτείνει να συγκρίνουν τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΕΗΓ.

65 Μ4: Ας συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΕΗΓ

Η ***πρότασή*** του ***που στηρίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος,****(κοινωνικός πόρος)* πυροδοτεί στην ομάδα τον έλεγχο του κατά πόσο είναι δυνατόν να εφαρμοστεί το θεώρημα που αφορά την ισότητα τριγώνων (*έλεγχος εφαρμογής θεωρήματος*):

66 Μ2: Α!!! Δεν βγαίνει κριτήριο.
67 Μ4: Εννοείς ότι δεν βγαίνουν ίσα?
68 Μ2: Ναι δεν έχουμε κριτήριο. Έχουμε δύο γωνίες και μία πλευρά αλλά δεν ταιριάζουν με το κριτήριο

Ψάχνοντας στοιχεία για τα δυο αυτά τρίγωνα ο Μ1 θυμίζει στους άλλους ότι ήδη γνωρίζουν πως ΗΓ=ΒΖ. Μια ***δήλωση που βασίζεται στα δεδομένα*** *(κοινωνικός πόρος)*.

118 Μ1: Λέει ότι είναι και οι δύο περίπου 40 μέτρα. Το ξέρουμε ότι είναι ίσα.

Η δήλωση αυτή προκαλεί ένα κλασσικό ερώτημα ελέγχου σχετικά με τη *χρησιμότητα* αυτής *της πληροφορίας*.

119 Μ3: Ωραία. Και τώρα πώς θα χρησιμοποιηθεί;

Ο ίδιος προτείνει, αφού γνωρίζουν τις δυο ίσες πλευρές να κινηθούν προς την κατεύθυνση υπολογισμού των δυο άλλων πλευρών, ΒΔ και ΕΓ τις οποίες βλέπει ως μέρη των ΑΒ και ΑΓ και γι' αυτό προτείνει Πυθαγόρειο σε αυτό, ***μια πρόταση που δεν υποστηρίζεται από τα δεδομένα*** *(κοινωνικός πόρος)*.

120 Μ3: Στο ΑΒΓ. Να πούμε $ΑΒ^2$ ……Πυθαγόρειο

Η πρόταση αυτή πυροδοτεί τον *έλεγχο εφαρμογής του* θεωρήματος:

121 Μ5: Πώς θα το κάνουμε το Πυθαγόρειο, αφού δεν είναι ορθογώνιο
122 Μ3: Το παίρνω πίσω.

Τη λύση στο αδιέξοδο δίνει ο Μ1 που προτείνει να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα στα δυο τρίγωνα. Η ***πρότασή*** του αν και ***στηρίζεται από τα δεδομένα*** *(κοινωνικός πόρος)* εγείρει *έλεγχο επιχειρηματολογίας* από την ομάδα:

130 Μ3: Μα δεν ξέρουμε ότι είναι ορθογώνιο
131 Μ1: Να, αυτή είναι ορθή, γιατί λέει «η απόσταση»

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της υποτείνουσας στα δυο τρίγωνα. Το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών υπολογίζεται σε 2100 αντί 2500. Πρόκειται για ένα ενδιάμεσο αριθμητικό αποτέλεσμα, το οποίο δημιουργεί στον Μ2 την ***αίσθηση ενός (πραγματικού ή υποτιθέμενου) λάθους*** *(κοινωνικός πόρος)* και αυτό ενεργοποιεί τον *έλεγχο για τον εντοπισμό του λάθους* και την *επαλήθευση*/διόρθωση του ενδιάμεσου αποτελέσματος.

143 Μ2: 2100?...Το αποτέλεσμα μου φαίνεται λάθος….Λοιπόν, 40^2 = 1200, 30^2 =900

144 Μ3: 40^2 κάνει 1.600

145 Μ2: Ωραία, . άρα 25.000, Άρα ΕΓ=…

146 Μ3: Όχι, 2500…..είναι… Είναι ΕΓ=50

Αφαιρώντας τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΕΓ και ΔΒ από τα μεγαλύτερα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, οδηγούνται στο αποτέλεσμα ότι ΑΔ=ΑΕ=80, δηλαδή ότι το ΑΔΕ είναι ισοσκελές τρίγωνο. Αυτό είναι ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα το οποίο όμως δεν αποτελεί μέρος μια συγκεκριμένης στρατηγικής επίλυσης. Ως συνέπεια, αυτό το ***ενδιάμεσο αποτέλεσμα*** *(ατομικός πόρος)* που ο ίδιος υπολόγισε ενεργοποιεί τον *έλεγχο* από μέρους του *για το πώς μπορεί να συμβάλλει στη λύση του προβλήματος*.

167 Μ2: Ναι ΑΔ=ΑΕ. Τι θα μπορούσαμε να βρούμε από αυτό;

168 Μ2: Το ΔΕ και μετά θα πούμε ότι ΔΕ= ΒΓ/2

Δεδομένου ότι η τρίτη πλευρά αυτού του τριγώνου είναι η ΔΕ, το ενδιαφέρον τους στρέφεται στο τετράπλευρο ΔΕΖΗ. Ο Μ2 θεωρεί ότι πρόκειται για ορθογώνιο (***πρόταση που υποστηρίζεται από τα δεδομένα,*** *κοινωνικός πόρος*) και συμπεραίνει ότι ΔΕ=ΖΗ.

201 Μ2: Το ΔΕΖΗ είναι ορθογώνιο, οπότε ΔΕ=ΖΗ

Η πρότασή του οδηγεί άμεσα σε *έλεγχο εφαρμογής θεωρήματος* και συγκεκριμένα στα κριτήρια ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχουν διδαχθεί.

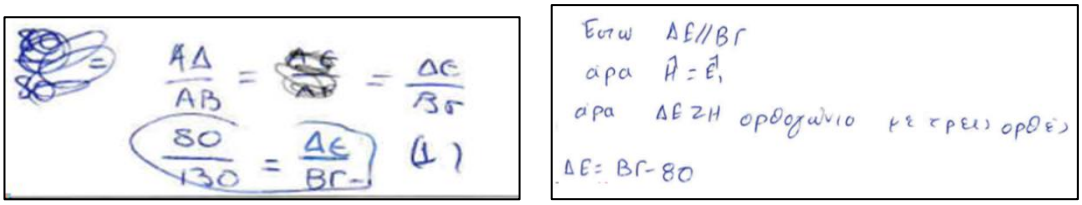
202 Μ3: Νομίζω δεν φτάνει η γωνία…πρέπει να το αποδείξουμε Χρειάζονται 3 ορθές, άρα όλες. Αλλά εμείς έχουμε δύο και πρέπει να βγάλουμε και τρίτη.

Η αδυναμία να προχωρήσουν στη λύση με την προσέγγιση αυτή φέρνει στο προσκήνιο αλλαγή στρατηγικής: ομοιότητα τριγώνων. Και πάλι είναι ο Μ2 που κάνει αυτή την ***πρόταση*** **(*που υποστηρίζεται από τα δεδομένα*)** (*κοινωνικός πόρος*) και για άλλη μια φορά πυροδοτείται ο *έλεγχος εφαρμογής του θεωρήματος*.

272 Μ2: Μήπως να βλέπαμε ομοιότητα τριγώνων στα ΑΔΕ και ΑΒΓ;

273 Μ4: Κάτσε να σκεφτούμε… έχουν κοινή γωνία και έχουμε έναν άγνωστο. Εντάξει, γίνεται με ομοιότητα.

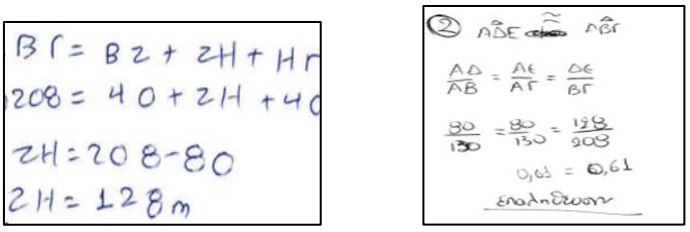
Από την ομοιότητα τριγώνων προέκυψε η αναλογία πλευρών των τριγώνων (Εικόνα 3, αριστερά) και η διαπίστωση ότι το ΔΕΖΗ είναι ορθογώνιο (Εικόνα 3, δεξιά).



Εικόνα 3: Λύση βασισμένη σε ομοιότητα τριγώνων

Ο συνδυασμός των παραπάνω οδήγησε στον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ των βάσεων της γέφυρας, δηλαδή το ΒΓ = 208. Τέλος, με αφαίρεση των γνωστών ευθυγράμμων τμημάτων προκύπτει το ζητούμενο πλάτος του ποταμού (Εικόνα 4, αριστερά).

Παρόλο που δεν θεωρούμε συνηθισμένο οι μαθητές μας να επαληθεύουν τα αποτελέσματά τους, εδώ ο Μ1 παρακινεί την ομάδα να κάνει επαλήθευση του αποτελέσματος που βρέθηκε.



Εικόνα 4: Εύρεση απάντησης και αριθμητική επαλήθευση

Ο πολύ φυσικός τρόπος που το πρότεινε και η απουσία χρονικής παύσης ανάμεσα στην εύρεση του αποτελέσματος και την πρόταση για επαλήθευση επιτρέπουν να θεωρήσουμε ότι είναι μια ***συνήθεια*** *(κοινωνικός πόρος)* που ο ίδιος έχει αναπτύξει.

347 Μ2: Να κάνουμε τώρα και μια επαλήθευση για όλα αυτά

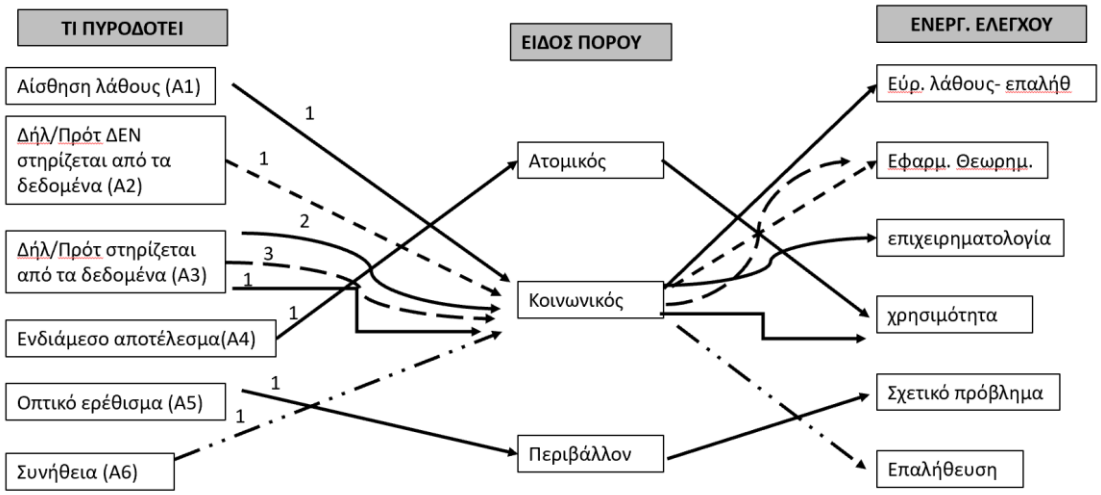
348 Μ1: Να αποφασίσουμε με ποιον τρόπο θα την κάνουμε…ίσως είναι καλύτερα με πυθαγόρειο ή ομοιότητα τριγώνων.

Προτίμησαν την *αριθμητική επαλήθευση* των αποτελεσμάτων τους μέσω της αναλογίας των όμοιων τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ (Εικόνα 4, δεξιά).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έχουν βρεθεί στο συγκεκριμένο πρωτόκολλο έξι αιτίες (πόροι) που πυροδοτούν ενέργειες ελέγχου: (Α1) αίσθηση ενός (πραγματικού ή υποτιθέμενου) λάθους, (Α2) δήλωση/πρόταση που δεν στηρίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος, (Α3) δήλωση/πρόταση που στηρίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος, (Α4) ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα, (Α5) ένα οπτικό ερέθισμα, (Α6) η συνήθεια μιας διαδικασίας. Οι πόροι αυτοί μπορεί να είναι (Κ) κοινωνικοί, (Α) ατομικοί και (Π) περιβαλλοντικοί (Εικόνα 5). εκτενέστερου πρωτοκόλλου, λόγω περιορισμού στην έκταση της

εργασίας) εντοπίστηκε μια ποικιλία πόρων: 11 στιγμιότυπα που αξιοποιούν 6 διαφορετικούς πόρους. Αυτά με τη σειρά τους πυροδοτούν συγκεκριμένες ενέργειες ελέγχου, χωρίς ωστόσο προς το παρόν (και λόγω του περιορισμένου όγκου δεδομένων) να μπορεί κανείς να ισχυριστεί τη σύνδεση μεταξύ συγκεκριμένων πόρων με αντίστοιχες ενέργειες ελέγχου. Όπως φαίνεται και από τα στοιχεία της Εικόνας 5, υπάρχει μια συσσώρευση κοινωνικών πόρων που προέρχεται από τη λειτουργία της ομάδας. Στο συγκεκριμένο πρωτόκολλο (που αποτελεί συνοπτική εκδοχή ενός Τα πλεονεκτήματα αυτής της συνεργατικής επίλυσης γίνονται ορατά μέσω των διαλόγων που αναπτύσσονται στα πλαίσια της ομάδας και που πυροδοτούν τον έλεγχο.



Εικόνα 5: Συγκεντρωτικά τα αίτια, οι ενέργειες ελέγχου και οι πόροι[3]

Η αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας οδηγεί τα μέλη της από τη μια στο να παρακολουθούν και ελέγχουν ο ένας τον άλλον προκειμένου να φτάσουν στην κατάσταση στόχο που θέτει το πρόβλημα (Schoenfeld, 1985), και από την άλλη στο να παρακολουθούν την δική τους ατομική σκέψη. Η φύση της συνεργατικής επίλυσης επέτρεψε, όπως φάνηκε, την πρόταση πολλών ιδεών από τα μέλη, χωρίς όμως να έχουν επίγνωση του ποια ιδέα να κυνηγήσουν ή να απορρίψουν. Συνεπώς, η επιτυχία ή αποτυχία φαίνεται να σχετίζεται με το κατά πόσο οι ιδέες ενός μέλους μπορούν να συνδυαστούν ή να αντιπαρατεθούν με τις ιδέες κάποιου άλλου (Koichu κ.ά., 2021). Πολύ μικρότερο ρόλο στην πυροδότηση του ελέγχου φαίνεται να έχουν οι ατομικοί και περιβαλλοντικοί πόροι (ένα μόνο στιγμιότυπο από το κάθε είδος).

Προς επίρρωσιν των παραπάνω, αξίζει να αναφερθούν τα αριθμητικά δεδομένα που αφορούν την ανάλυση όλου του πρωτοκόλλου της

[3] Οι αριθμοί πάνω από τα βέλη αναφέρονται στη συχνότητα εμφάνισης του συγκεκριμένου πόρου.

συνεδρίας (μιας που στα πλαίσια της εργασίας αυτής και του περιορισμένου αριθμού σελίδων δεν ήταν δυνατόν να παρουσιαστεί πλήρως εδώ): Ο συνολικός αριθμός περιπτώσεων που κάποιοι πόροι πυροδότησαν ενέργειες ελέγχου ήταν 32. Από αυτούς οι κοινωνικοί πόροι ήταν 26, οι ατομικοί 3, και οι περιβαλλοντικοί 3. Δυο λοιπόν φαίνεται να είναι οι ενδείξεις που δίνει η πιλοτική αυτή. Πρώτον, ο καθοριστικός ρόλος των κοινωνικών πόρων, της αλληλεπίδρασης των μελών μεταξύ τους στην γεωμετρική επίλυση προβλήματος, γεγονός που καθιστά το θέμα αυτό ως μια χρήσιμη «προσθήκη στα εννοιολογικά εργαλεία της έρευνας γύρω από τη μάθηση» (Iiskala κ.ά., 2011, σ. 391). Δεύτερον, ότι δεν φαίνεται να υπάρχει μια συσχέτιση ανάμεσα στον συγκεκριμένο πόρο και στην ενέργεια του ελέγχου που αυτός πυροδοτεί. Και οι δυο ενδείξεις όμως είναι πιθανόν να τροποποιηθούν όταν θα έχουμε τη μεγαλύτερη εικόνα που θα προκύψει από την έρευνα μεγάλης κλίμακας που σχεδιάζεται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L.R. Resnick (Ed.), *The Nature of Intelligence*. (pp. 231-236). Lawrence Erbaum.

Kim, Y. R., Park, M. S., Moore, T. J., & Varma, S. (2013). Multiple levels of metacognition and their elicitation through complex problem-solving tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 377–396. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.002

Kluwe, R. H., & Friedrichsen, G. (1985). Mechanisms of control and regulation in problem solving. In J. Kuhl & J. Beckmann (eds.) *Action control: From cognition to behavior* (pp. 183–218). Springer.

Koichu, B., Parasha, R., & Tabach, M. (2021). Who-Is-Right tasks as a means for supporting collective looking-back practices. *ZDM–Mathematics Education, 53*(4), 831-846. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01264-z

Leonard, J. (2001). How group composition influenced the achievement of sixth-grade mathematics students. *Mathematical Thinking and Learning, 3*(2–3),175–200. https://doi.org/10.1080/10986065.2001.9679972

Mamona-Downs, J., & Papadopoulos, I. (2011). Problem solving ancillary to the concept of area. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 10*(1–2), 103–129.

Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Beltz.

Papadopoulos, I., & Ventistas, G. (in press). Collaborative geometry problem solving in secondary education: The issue of control strategies. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.). *Proceedings of the CERME13* (pp. 781-788). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Schoenfeld, H. A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc.

Smith, J. M. & Mancy, R. (2018). Exploring the relationship between metacognitive and collaborative talk during group mathematical problem-solving – what do we mean by collaborative metacognition? *Research in Mathematics Education, 20*(1), 14–36. https://doi.org/10.1080/14794802.2017.1410215

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΘΕΑΤΡΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΘΑΡΡΥΝΣΗ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Σταματία – Ευδοκία Ζέρβα, Ζωή – Βενετία Λιόση, Κωνσταντίνος Μάγγος, Αιμιλία – Ναταλή Μονογυιού

Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

mantwzerva@hotmail.gr, zlio1997@gmail.com, kostasmagos@hotmail.com, emily.mono@hotmail.com

Η παρούσα έρευνα εξετάζει τα στάδια νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές μέσω μιας δραστηριότητας με προσθήκη θεατρικότητας και έμφαση στο παιχνίδι ρόλων. Η παρέμβαση η οποία υλοποιήθηκε εντός τριών διδακτικών ωρών, στο μάθημα της Γεωμετρίας της Γ΄ Γυμνασίου ενός Πρότυπου Σχολείου, συμπεριλάμβανε τη χρήση χειραπτικών εργαλείων από τους μαθητές με στόχο τη δόμηση τεσσάρων διαβαθμισμένων αποδείξεων. Ο σχεδιασμός των ρόλων της διδακτικής παρέμβασης βασίστηκε στα επιμέρους στάδια νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας. Δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τα φύλλα εργασίας, καθώς και οι απομαγνητοφωνήσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης αλλά και της καταληκτικής αναστοχαστικής συζήτησής τους στην ολομέλεια της τάξης. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν θετική συνεισφορά των διδακτικών πρακτικών, με ομοιογενή κατανομή ως προς την εμπλοκή και την τήρηση των ρόλων των μαθητών, καθώς και σχετικά ισομερή δραστηριότητα ως προς τα στάδια της νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας, με μερικές προκλήσεις να εμφανίζονται στη συνολική συμβολή ενός συγκεκριμένου ρόλου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αποδεικτική διαδικασία συνιστά τον πυρήνα της εξέλιξης της Μαθηματικής επιστήμης. Ωστόσο, η έρευνα καταδεικνύει πως όταν οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν μια Μαθηματική δήλωση είτε βασίζονται υπερβολικά σε εμπειρικά δεδομένα ή συγκεκριμένα παραδείγματα (Harel & Sowder, 2007), είτε δεν ξέρουν από πού να ξεκινήσουν μία απόδειξη, καθώς η δήλωση του προβλήματος μπορεί να είναι άγνωστη (Hoyles & Healy, 2000) ή τέλος δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν στρατηγικά την υπάρχουσα γνώση τους (Weber, 2001). Οι Healy και Hoyles (2000) παρατήρησαν ότι οι μαθητές παρουσιάζουν σχετικά χαμηλά επίπεδα επιτυχίας στην κατασκευή αποδείξεων, ειδικά στη Γεωμετρία. Η ίδια έρευνα επίσης ανέδειξε ότι είναι ευκολότερο για τους μαθητές να αναγνωρίσουν ένα έγκυρο επιχείρημα απ’ ότι να το κατασκευάσουν, καθώς και ότι η αντίληψή τους ως προς την απόδειξη και τον ρόλο της συνιστά καίριο παράγοντα για την απόδοσή τους.

Ο Duval (2006) προτείνει ότι, προκειμένου να είναι κάποιος σε θέση να κατασκευάσει μία απόδειξη, είναι απαραίτητο να οργανώσει τις προϋποθέσεις, τα συμπεράσματα και τα θεωρήματα. Στην παρούσα εργασία η δόμηση μιας απόδειξης σε ξεκάθαρους κόμβους (flow chart proofs) αξιοποιήθηκε μέσω της δημιουργίας ενός χειραπτικού εργαλείου καρτών - προτάσεων και ορισμών - που δόθηκε στους μαθητές και που κλήθηκαν να τις διατάξουν βάσει της κατασκευής των αποδείξεών τους. Παράλληλα, σχεδιάστηκαν ρόλοι οι οποίοι αντικατόπτριζαν τα υποστάδια μετάβασης από το τρίτο στο τέταρτο στάδιο κατανόησης Γεωμετρικών εννοιών Van Hiele, όπως αυτά παρουσιάζονται από τους Miyazaki et al. (2017) . Αρχικά, στην παρούσα έρευνα εξετάζεται εάν η τήρηση των ρόλων από τους μαθητές ενθαρρύνει την εμπλοκή τους με την αποδεικτική διαδικασία, καθώς και αν τους οδηγεί να κατακτήσουν όλα τα επιμέρους στάδιά νοηματοδότησής της. Επιπλέον, διερευνάται ο βαθμός συμβολής του κάθε ρόλου συνολικά, ούτως ώστε να παρατηρηθεί εάν οι μαθητές αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες προκλήσεις σε κάποιο συγκεκριμένο στάδιο της νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας και ποιο είναι αυτό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία η ενίσχυση τυπικής διδασκαλίας με δραστηριότητες με στοιχεία θεατρικότητας ενεργοποιεί τις αισθήσεις πιο έντονα, ενισχύοντας έτσι τη μνήμη (Sutton, 2014) και πιο συγκεκριμένα στο παιχνίδι ρόλων η χωρική νοημοσύνη, η κίνηση και τα συναισθήματα αποτελούν έναν συνδυασμό που ενθαρρύνει ιδιαίτερα την ανάπτυξη της σκέψης και της γλώσσας (Ζαφειριάδου, 2009). Αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει τα οφέλη της εισαγωγής θεατρικότητας στη διδασκαλία των Μαθηματικών και ειδικά στον τομέα της Γεωμετρίας (Duatepe & Ubuz, 2009; Sumantri & Widjajanti, 2019). Πιο συγκεκριμένα οι Duatepe και Ubuz (2009) επεσήμαναν ότι η Μαθηματική διδασκαλία με στοιχεία θεατρικότητας φαίνεται να επιδρά σημαντικά στην απόδοση των μαθητών στη Γεωμετρία, προάγοντας τη φαντασία τους με τον αυτοσχεδιασμό μιας έννοιας ή ενός γεγονότος και βοηθώντας τους να βιώσουν όλες τις πτυχές των εννοιών. Χαρακτηριστικά αναφέρουν ότι η διδασκαλία με βάση το δράμα είναι μαθητοκεντρική, ενθαρρύνει την ενεργό εμπλοκή των μαθητών και συνδέεται με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση μάθησης.

Κατά τον σχεδιασμό των ρόλων της παρέμβασης λήφθηκαν υπόψιν τα 9 στάδια μιας δραστηριότητας παιχνιδιού ρόλων, όπως περιγράφονται από τον Prayitno (2017), ενώ ταυτόχρονα οι ρόλοι σχεδιάστηκαν ώστε να παραλληλίζουν τα υποστάδια κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας, τα οποία συμπεριλαμβάνονται ανάμεσα στα στάδια 3 και 4 του πλαισίου Van Hiele, όπως αναφέρονται στο άρθρο των Miyazaki et al. (2017). Σύμφωνα με τη σχετική έρευνα, τα τέσσερα υποστάδια είναι τα εξής: α) Προ-Δομικό: Η απόδειξη γίνεται αντιληπτή ως σύνολο συμβολικών

αντικειμένων κενών νοήματος, β) Μερικώς-Δομικό, Στοιχειακό: Αναγνώριση επιπλέον του νοήματος των στοιχείων της απόδειξης ξεχωριστά, χωρίς δημιουργία συνδέσεων, γ) Μερικώς-Δομικό, Σχεσιακό: Αναγνώριση συνδέσεων με χρήση παραγωγικού και υποθετικού συλλογισμού, δ) Ολιστικό-Δομικό: Ολιστική νοηματοδότηση και δυνατότητα κατασκευής απόδειξης καθώς και επίγνωση της ιεραρχικής δομής θεωρημάτων. Η παρούσα έρευνα, συνθέτοντας τα αποτελέσματα των Miyazaki et al. (2017) για την ανάλυση των επιμέρους υποσταδίων με τους ρόλους της δραστηριότητας και με αξιοποίηση των διαγραμμάτων-ροής ως χειραπτικό εργαλείο, στοχεύει στην εξέταση της ενθάρρυνσης νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές μέσω μίας διδακτικής παρέμβασης με εισαγωγή θεατρικότητας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μαθηματικό έργο και ρόλοι δραστηριότητας

Η διδακτική παρέμβαση απευθύνθηκε σε μαθητές Γ' Γυμνασίου που φοιτούν σε Πρότυπο Πειραματικό Σχολείο. Στους μαθητές δόθηκε το εξής πρωτότυπο Μαθηματικό έργο, βασισμένο στην ύλη της Γεωμετρίας, σε ισότητα τριγώνων και ιδιότητες παραλληλογράμμων:
Βρίσκεστε στον πλανήτη Άρη! Η NASA ενδιαφέρεται να μάθει ποιο σχήμα δημιουργούν οι 4 διαστημικοί σταθμοί στην επιφάνεια του Άρη, ώστε να δώσει τη διαδρομή που θα πρέπει να ακολουθήσει το MaRs roVer στο αρμόδιο τμήμα. Αναθέτει στην ομάδα σας το εξής πρόβλημα: Βρείτε τον σχηματισμό των τεσσάρων διαστημικών σταθμών στον Άρη, αν για τις αποστάσεις μεταξύ των σταθμών AC και BD γνωρίζετε ότι:
BRONZE Οι αποστάσεις τους διχοτομούνται.
SILVER Οι αποστάσεις τους διχοτομούνται κάθετα.
GOLD Οι αποστάσεις τους διχοτομούνται και είναι ίσες.
DIAMOND Οι αποστάσεις τους διχοτομούνται κάθετα και είναι ίσες.

Ορίστηκαν 4 ομάδες των 6 ατόμων. Σε κάθε ομάδα υπήρχε ένας Chief Director, υπεύθυνος για την οργάνωση της ομάδας και τη διαχείριση του χρόνου. Ο ρόλος αυτός στόχευε στη θέσπιση του "Προ-δομικού" επιπέδου. Υπήρχαν επίσης δύο Research Scientists, υπεύθυνοι για την οργάνωση των εργαλείων-καρτών και για τις προτάσεις ιδεών. Ο ρόλος τους σηματοδοτούσε την κατάκτηση του "Στοιχειακού" επιπέδου. Επιπλέον, σε κάθε ομάδα συμμετείχαν δύο Project Engineers, υπεύθυνοι για τον έλεγχο των ιδεών και τη διατύπωση ερωτημάτων. Μέσω αυτού του ρόλου διασφαλιζόταν το πέρασμα από το "Σχεσιακό" επίπεδο. Τέλος, υπήρχε ένας Archives Manager, ο οποίος ήταν υπεύθυνος για την καταγραφή των "πρακτικών" και τη συμπλήρωση της τελικής αναφοράς ώστε να

οδηγηθούν οι μαθητές στο "Ολιστικό-δομικό" επίπεδο κατανόησης των αποδείξεων. Επιλέχθηκε Αγγλική ορολογία για την ονοματοδοσία των ρόλων, καθώς στόχος ήταν η πειστικότητα του θεατρικού πλαισίου της δραστηριότητας με τίτλους που συναντώνται και στην καθημερινή ζωή σε αντίστοιχες θέσεις εργασίας.

Εργαλεία και στάδια διδακτικής παρέμβασης

Στους μαθητές δόθηκε φύλλο εργασίας με τις εκφωνήσεις, με κενές σελίδες "πρακτικών" και με τη σελίδα της "τελικής αναφοράς" για τη διατύπωση των απαντήσεων. Δόθηκε επίσης μία σελίδα αναστοχασμού, όπου κάθε μέλος της ομάδας απάντησε ατομικά στις ερωτήσεις «Τι έμαθες για την αποδεικτική διαδικασία από το ρόλο σου;» και «Τι έμαθες από τη συνεργασία σου με τις υπόλοιπες ειδικότητες;». Επιπλέον, δόθηκαν ως χειραπτικά εργαλεία αριθμημένες κάρτες που περιελάμβαναν σημαντικά σημεία των αποδείξεων (Ορισμούς, θεωρήματα και ιδιότητες). Η αρίθμηση στόχο είχε να δείξει την πορεία προς την απόδειξη και εντάχθηκε στο σενάριο ως οι συντεταγμένες που έπρεπε να δοθούν στο MaRs roVer για να διαγράψει τη σωστή πορεία. Επίσης, δόθηκαν ταυτότητες με τους τίτλους και τις αρμοδιότητες του κάθε ρόλου στους μαθητές, καθώς και ασπροπίνακας και μαρκαδόροι σε όλες τις ομάδες, με στόχο την προσβασιμότητα και τη συμβολή όλων των μελών στην αποδεικτική διαδικασία.

Η διδακτική παρέμβαση διάρκειας 150 λεπτών, χωρίστηκε σε έξι στάδια. Αρχικά, επιλέχθηκαν τυχαία μέσω κληρωτίδας οι ρόλοι των μαθητών και τους δόθηκαν οι οδηγίες τήρησης των αρμοδιοτήτων τους, οι οποίες τους επεξηγήθηκαν. Επίσης, δόθηκαν στους μαθητές οδηγίες καταγραφής στα πρακτικά των τεκμηριώσεων των 4 αποδείξεων με χρήση των καρτών-εργαλείων και συμπλήρωσης των τελικών αναφορών με τις ολοκληρωμένες αποδείξεις (15΄ λεπτά). Έπειτα, εξελίχθηκε η δραστηριότητα (65΄ λεπτά) και στο τρίτο στάδιο οι μαθητές παρουσίασαν τις απαντήσεις τους στην ολομέλεια της τάξης (25΄ λεπτά). Χωρίς να δοθούν οι σωστές απαντήσεις, οι μαθητές κλήθηκαν να παρατηρήσουν τις διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων στα σχήματα, αλλά και στις συντεταγμένες σε περιπτώσεις που προέκυπτε το ίδιο σχήμα. Κατόπιν τριών ημερών υλοποιήθηκαν τα υπόλοιπα τρία στάδια της διδακτικής παρέμβασης, κατά τα οποία αρχικά δόθηκε ένα δεύτερο φύλλο εργασίας σε κάθε ομάδα με την απόδειξη του 3ου έργου (Gold) μιας άλλης ομάδας και ζητήθηκε να σημειωθούν οι σωστοί και οι λανθασμένοι ισχυρισμοί καθώς και να διατυπωθούν επιχειρήματα που έλειπαν ώστε η απόδειξη να

είναι πλήρης (20΄ λεπτά). Ύστερα ακολούθησε η παρουσίαση της σωστής απόδειξης στην τάξη διατυπωμένη από τους μαθητές με παράλληλη επισήμανση σε κάθε κόμβο των λαθών που είχαν εντοπιστεί (15΄ λεπτά). Τέλος, πραγματοποιήθηκε αναστοχαστική συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης ως προς το σύνολο της διδακτικής παρέμβασης (10΄ λεπτά).

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Τα δύο φύλλα εργασίας σε συνδυασμό με τις απομαγνητοφωνήσεις και τις «στενογραφικές» σημειώσεις που κρατήθηκαν από την κάθε ομάδα, αποτέλεσαν τα δεδομένα της δραστηριότητας. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων ως προς την εμπλοκή, την τήρηση ρόλων, των αποδεικτικών επιχειρημάτων και τη συνολική συμβολή βασίστηκε στα απομαγνητοφωνημένα δεδομένα του δεύτερου σταδίου. Αρχικά, για να εξεταστεί ο βαθμός εμπλοκής κάθε μαθητή, καταμετρήθηκαν οι στιχομυθίες του και υπολογίστηκε το ποσοστό ως προς το σύνολο στιχομυθιών της εκάστοτε ομάδας. Αντίστοιχα, για να υπολογιστεί ο βαθμός τήρησης των αρμοδιοτήτων του ρόλου του, καταμετρήθηκαν οι αντιπροσωπευτικές, για τον κάθε ρόλο, στιχομυθίες και υπολογίστηκε το ποσοστό ως προς το σύνολο στιχομυθιών του κάθε μαθητή. Στη συνέχεια, υπολογίστηκε ο μέσος όρος των δύο ποσοστών, καθώς στόχος ήταν να εξεταστεί η ουσιαστική εμπλοκή του κάθε μαθητή λαμβάνοντας υπόψιν την τήρηση του ρόλου και τέλος βάσει αυτών των ποσοστών υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι των ρόλων όλων των ομάδων που παρατίθενται στα αποτελέσματα.

Η κωδικοποίηση των αποδεικτικών επιχειρημάτων για κάθε στάδιο νοηματοδότησης βασίστηκε στους Miyazaki et al. (2017), με τους παρακάτω κωδικούς: α) Προ-δομικό, β) Στοιχειακό, γ) Σχεσιακό-Παραγωγικός συλλογισμός (Αναγνώριση ενδιάμεσων κόμβων απόδειξης: Α→Β και Β→Γ. Άρα Α→Γ), δ) Σχεσιακό-Υποθετικός συλλογισμός (Αναγνώριση σχέσεων άμεσης συνεπαγωγής: Α→Γ) και ε) Προ-ολιστικό (Εμφανίζεται κατανόηση της ολότητας της απόδειξης αλλά δεν παρουσιάζεται ευρύτερη κατανόηση της ιεραρχικής δομής των θεωρημάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία). Σημειώνεται πως ο τελευταίος κωδικός προέκυψε κατά τις απομαγνητοφωνήσεις με άμεση παρατήρηση. Η καταμέτρηση των στιχομυθιών κάθε κωδικού υλοποιήθηκε λαμβάνοντας υπόψιν τον εκάστοτε ρόλο του μαθητή, στοχεύοντας στην εξέταση της σχέσης μεταξύ του ρόλου δραστηριότητας και του σταδίου νοηματοδότησης, ενώ παράλληλα υπολογίστηκαν τα ποσοστά παρουσίας

κάθε κωδικού ως προς το σύνολο επιχειρημάτων, τα οποία παρατίθενται στα αποτελέσματα.

Οι πίνακες ποσοστών εμπλοκής και τήρησης ρόλων καθώς και καταμέτρησης επιχειρημάτων ως προς κάθε ρόλο της κάθε ομάδας ξεχωριστά, στους οποίους βασίστηκαν οι δύο παραπάνω αναλύσεις, χρησιμοποιήθηκαν επίσης για την εξέταση του βαθμού συμβολής. Σε κάθε πίνακα εντοπίστηκαν οι μαθητές με την υψηλότερη και τη χαμηλότερη συμβολή και τέλος υπολογίστηκε ο συνολικός μέσος όρος κάθε ρόλου ως προς την υψηλή ή/και τη χαμηλή συμβολή στην αποδεικτική διαδικασία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εμπλοκή μαθητών & τήρηση ρόλων

Συνολικά οι μαθητές τήρησαν τις αρμοδιότητες των ρόλων τους εναλλάσσοντας σε σημεία και αρμοδιότητες μεταξύ τους. Οι συνολικοί μέσοι όροι της εμπλοκής των μαθητών λαμβάνοντας υπόψιν την τήρηση αρμοδιοτήτων του ρόλου τους, όπως αυτοί επεξηγήθηκαν πώς υπολογίστηκαν στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας, στην παρούσα έρευνα αναδείχθηκαν συνολικά ως εξής: Chief Director 28%, Research Scientist 26%, Project Engineer 23%, Archives Manager 23%.

Στάδια νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας

Συνολικά τα επιχειρήματα όλων των σταδίων νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας υπολογίστηκαν ως 81 επιχειρήματα ανά ομάδα κατά μέσο όρο. Πιο αναλυτικά, στο "Προ-δομικό" επίπεδο, όπως διαφαίνεται στον παρακάτω πίνακα, εμφανίστηκε ισχυρότερη παρουσία του ρόλου Chief Director (22). Ενώ τα επιχειρήματα αυτής κατηγορίας αναδείχθηκαν σε ποσοστό 22%. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα "προ-δομικού" επιχειρήματος, από την παρούσα έρευνα, είναι το εξής: «*Σημειώνουμε στο σχήμα αυτά που ξέρουμε. Να ξεκινήσουμε με αυτά που ξέρουμε πρώτα.*». Στο "Στοιχειακό" επίπεδο, ισχυρότερη παρουσία διέθεταν οι Research Scientists (21), με ποσοστό εμφάνισης αυτής κατηγορίας επιχειρημάτων 26%. Οι στιχομυθίες που κωδικοποιήθηκαν ως "στοιχειακές" ήταν της μορφής: «*Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μία ευθεία γωνία.*».

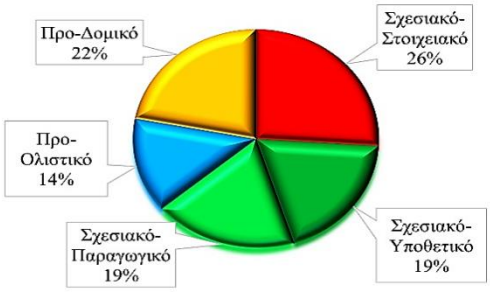
Και στις δύο υποκατηγορίες "Σχεσιακού" επιπέδου οι Project Engineers διέθεταν την ισχυρότερη παρουσία (12,5 και 12). Στην υποκατηγορία του "Παραγωγικού συλλογισμού" κωδικοποιήθηκαν στιχομυθίες όπως: «*Άρα αφού αυτή είναι ίση με αυτή και αυτή είναι ίση με αυτή, αυτά τα δύο βγαίνουν ίσα. Και εφόσον αυτές είναι παραπληρωματικές, θα βγει 90° εδώ και 90° εδώ,*

90° και οι δυο, θα είναι τετράγωνο.». Η υποκατηγορία αυτή εμφανίστηκε με ποσοστό 19% επί του συνόλου των επιχειρημάτων. Αντίστοιχο ποσοστό διέθετε και η υποκατηγορία του "Υποθετικού συλλογισμού" (19%). Επιχειρήματα όπως «*Αν μας έλεγε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα θα έβγαινε τετράγωνο. Δε μας λέει όμως ότι τα τμήματα είναι ίσα οπότε αν δεν είναι ίσα δεν είναι τετράγωνο.*» συγκαταλέγονται σε αυτή την υποκατηγορία. Κατά την κωδικοποίηση εντοπίστηκαν δύο στιχομυθίες οι οποίες ενέπιπταν και στις δύο υποκατηγορίες. Παρατίθεται το αντιπροσωπευτικό απόσπασμα: «*Αυτές εδώ. Έστω μία αν αποδείξουμε ότι είναι 90 το βρήκαμε. Οπότε το χαρακτηριστικό είναι ότι αν είναι ισοσκελές, δεν είναι τετράγωνο. Αν αποδείξουμε ότι αυτή είναι ίση με αυτή, είναι ρόμβος με τη μία.*». Καθώς η υποκατηγορία "Παραγωγικός και υποθετικός συλλογισμός" παρατηρήθηκε μονάχα σε δύο επιχειρήματα δεν υπολογίστηκε στην ποσοστιαία ανάλυση ως ξεχωριστή κατηγορία και τα δύο επιχειρήματα καταμετρήθηκαν και στις δύο επιμέρους υποκατηγορίες.

Κατά την παρούσα έρευνα δεν εμφανίστηκε επιχείρημα "Ολιστικού" επιπέδου, όπως αυτό ορίζεται από τους Miyazaki et al. (2017), καθώς δε διατυπώθηκε από κάποιον μαθητή η επίγνωση της ιεραρχικής δομής θεωρημάτων, ωστόσο εντοπίστηκαν επιχειρήματα στα οποία οι μαθητές παρουσίασαν ολιστική νοηματοδότηση και δυνατότητα κατασκευής απόδειξης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στιχομυθίας αποτελεί το εξής: «*Κατακορυφήν, αυτές ίσες, όλες* $90°$*...είναι ίσα ορθογώνια ισοσκελή, οπότε αυτό είναι* $45°$*... οπότε αφού αυτό είναι ίσο με αυτό και αυτά* $45°$*, οπότε αυτό είναι ορθογώνιο. Είναι* $90.\ 45° + 45° = 90°$*. Το τελειώσαμε!*». Ως εκ τούτου, ορίστηκε η νέα κατηγορία του "Προ-ολιστικού" επιπέδου στην οποία ισχυρότερη παρουσία διέθετε ο ρόλος του Archives Manager (17) και εμφανίστηκε με ποσοστό 14% επί του συνόλου των επιχειρημάτων.

	CD	RS	PE	AM
Προ-Δομικό	22	9,5	6	20
Σχεσιακό-Στοιχειακό	19	21	9	8
Σχεσιακό-Υποθετικό	14	10	12	5
Σχεσιακό-Παραγωγικό	10	10	12,5	8
Προ-Ολιστικό	4	2,5	5,5	17

Εικόνα 1: Πλήθος επιχειρημάτων ανά ρόλο



Εικόνα 2: Ποσοστά επιχειρημάτων

Συμβολή ρόλων στην αποδεικτική διαδικασία

Ακολουθούν τα αποτελέσματα σύμφωνα με τον υπολογισμό της συμβολής των ρόλων στην αποδεικτική διαδικασία, όπως αυτός επεξηγήθηκε στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας. Ο ρόλος του Chief Director παρουσίασε

κατά 50% υψηλή συμβολή, ενώ δε διέθετε σε καμία από τις αναλύσεις χαμηλή συμβολή σε οποιαδήποτε ομάδα. Ο ρόλος των Research Scientists παρουσίασε κατά 26% υψηλή συμβολή και κατά 19% χαμηλή συμβολή, κυρίως στην ανάλυση της εμπλοκής των μαθητών. Ο ρόλος των Project Engineers παρουσίασε κατά 19% υψηλή συμβολή, κυρίως στην ανάλυση της εμπλοκής και χαμηλή συμβολή κατά 38% εξίσου και στις δύο αναλύσεις. Και τέλος, ο ρόλος του Archives Manager παρουσίασε υψηλή συμβολή κατά 25% εξίσου και στις δύο αναλύσεις, ενώ χαμηλή συμβολή κατά 25% επικεντρωμένη αποκλειστικά στην ανάλυση της εμπλοκής.

Αναστοχασμός μαθητών

Κατά την ολοκλήρωση του δεύτερου σταδίου, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε δύο αναστοχαστικές ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, όπως αυτές διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας. Ορισμένες ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών ήταν οι εξής:

- *«Κατάλαβα ότι σε μία τέτοια δραστηριότητα πρέπει η απόδειξη να περνάει από πολλά στάδια.»*
- *«Κατάλαβα πως ο ρόλος μου ήταν αρκετά σημαντικός, καθώς έπρεπε να ελέγξω και να θέσω ερωτήματα τα οποία βοήθησαν στο να λύσουμε καλύτερα τα προβλήματα.»*
- *«Ότι για να γίνει μια δουλειά σωστά θα πρέπει να μοιραστούν ίσα οι ρόλοι σε μία ομάδα.»*

Έπειτα και από το τέταρτο στάδιο, στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να κρίνουν τις αποδείξεις των άλλων ομάδων, αναγνωρίζοντας τα λάθη και αναζητώντας τη συμπλήρωση των κατάλληλων επιχειρημάτων, οι μαθητές ολοκλήρωσαν επιτυχώς τη διατύπωση της ολοκληρωμένης απόδειξης στην ολομέλεια της τάξης. Κατά την καταληκτική συζήτηση του έκτου σταδίου, επεξηγήθηκαν στους μαθητές τα στάδια της αποδεικτικής διαδικασίας και η σύνδεσή τους με τους ρόλους που τους είχαν ανατεθεί στη δραστηριότητα. Ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα των αποκρίσεων των μαθητών, ως προς τις εντυπώσεις τους για τη διδακτική παρέμβαση της παρούσας έρευνας, είναι το ακόλουθο: *«Καταλάβαμε ότι δεν πρέπει να παραλείπουμε βήματα και πρέπει να τα γράφουμε πιο αναλυτικά για να τα καταλαβαίνει και ο άλλος και ότι πρέπει πρώτα να ξεκινήσουμε να αποδεικνύουμε και μετά να καταλήγουμε σε συμπεράσματα γιατί αυτό μπορεί να μας μπερδέψει. Επίσης να καταλαβαίνουμε ποια θεωρήματα χρησιμοποιούμε και να μην τα χρησιμοποιούμε όλα επιπόλαια.»*

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, η εισαγωγή θεατρικότητας ενθάρρυνε την ενεργή εμπλοκή όλων των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία. Δεν παρουσιάστηκε κάποιος ρόλος με ιδιαίτερα ζητήματα ως προς την εμπλοκή του ή την τήρησή του. Η συμμετοχή των ρόλων εμφανίστηκε σχετικώς ισομοιρασμένη, με κάθε ρόλο να κυριαρχεί στον τομέα των επιχειρημάτων του αντίστοιχου σταδίου, βάσει του οποίου είχε σχεδιαστεί (Chief Director-Προ-δομικό, Research Scientists-Στοιχειακό, Project Engineers-Σχεσιακό, Archives Manager-Προ-ολιστικό), επομένως προέκυψε η σχέση μεταξύ των σταδίων νοηματοδότησης και των ανάλογων ρόλων. Οι ρόλοι ωστόσο δεν περιορίστηκαν στη διατύπωση επιχειρημάτων αποκλειστικά του αντίστοιχου σταδίου τους. Συγκριτικά με τους υπόλοιπους ρόλους, εκείνος που παρουσιάστηκε να αντιμετωπίζει ορισμένες προκλήσεις τήρησης των αρμοδιοτήτων του, κρίνοντας από τον βαθμό χαμηλής συμβολής του, ήταν εκείνος του Project Engineer, ο οποίος είχε αναλάβει τον τελικό έλεγχο καθώς και τη διατύπωση νέων ιδεών για την ανακατεύθυνση της ομάδας. Δεδομένης της σχέσης σταδίου-ρόλου, συμπεραίνεται πως οι μαθητές της παρούσας έρευνας αντιμετώπισαν δυσκολίες κυρίως στο "Σχεσιακό" στάδιο νοηματοδότησης της αποδεικτικής διαδικασίας, ένα συμπέρασμα το οποίο συνάδει και με τα αποτελέσματα των Miyazaki et al. (2017). Τέλος, εμφανίστηκαν σχετικώς ισομοιρασμένα όλα τα επιμέρους στάδια νοηματοδότησης, λαμβάνοντας υπόψιν την αντικατάσταση του "Ολιστικού" από το "Προ-ολιστικό" επίπεδο.

Ως προς τους περιορισμούς της παρούσας έρευνας αναφέρονται, ο περιορισμένος αριθμός των συμμετεχόντων μαθητών, καθώς και το γεγονός ότι τα δεδομένα αντλήθηκαν από Πρότυπο Σχολείο. Παρουσιάζει ενδιαφέρον να διερευνηθεί και σε λοιπά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα η νοηματοδότηση της αποδεικτικής διαδικασίας των μαθητών, εστιάζοντας στο "Σχεσιακό" επίπεδο, καθώς στην παρούσα έρευνα αποτέλεσε το μοναδικό επίπεδο με σημαντικά χαμηλή συμβολή στη διατύπωση επιχειρημάτων. Όπως τονίζεται και από τους Miyazaki et al. (2017), η κατανόηση των ειδών συλλογισμού που συμπεριλαμβάνονται στο "Σχεσιακό" επίπεδο είναι καίριας σημασίας για τη νοηματοδότηση και απόδοση των μαθητών στη δημιουργία αποδείξεων. Επομένως, οφείλει να τους προσδίδεται η κατάλληλη έμφαση από τους εκπαιδευτικούς και το πρόγραμμα σπουδών. Επιπλέον, διδακτικές παρεμβάσεις με εισαγωγή θεατρικότητας όπως αυτή που παρατέθηκε στην παρούσα έρευνα,

εμφανίζονται να εμπλέκουν ενεργά τους μαθητές οδηγώντας τους μέσω αναστοχασμού στη νοηματοδότηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Duatepe-Paksu, A. & Ubuz, B. (2009). Effects of Drama-Based Geometry Instruction on Student Achievement, Attitudes, and Thinking Levels. *The Journal of Educational Research.102.272-286. 10.3200/JOER.102.4.272-286.*

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics. 61. 103-131. 10.1007/s10649-006-0400-z.*

Harel, G. & Sowder, L. (2007) Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *In: Lester, F., Ed., Second Handbook of Research on Mathematics Education, Information Age Pub Inc., Greenwich.*

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education. 31.10.2307/749651.*

Miyazaki, M., Fujita, T. & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. Educational Studies in Mathematics. 94.223–239.10.1007/s10649-016-9720-9.

Prayitno P. (2017). The implementation of role playing learning model to increase student learning activities and outcomes. *Classroom Action Research Journal 1 (2) pp 73-81 (State University of Malang)*

Sumantri, C. & Widjajanti, D. (2019). Increasing HOTS and student belief towards mathematics through learning with a roleplaying method. *Journal of Physics: Conference Series. 1320.012049.10.1088/1742-6596/1320/1/012049.*

Sutton, J. and Williamson, K. (2014) Embodied remembering. In L. Shapiro (Ed.) *The Routledge Handbook of Embodied Cognition. 315-325. Abingdon, Oxon: Routledge.*

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48(1), 101–119. http://www.jstor.org/stable/3483117*

Zafeiriadou, N. (2009) Drama in Language Teaching: A Challenge for Creative Development. *Issues. 23. March 2009.*

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σουγάρη Μαρία[1] και Κωνσταντίνος Π. Χρήστου[2]

[1]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, [2]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

[1]mariasougari@gmail.com,[2]kchristou@auth.gr

Περίληψη

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως σύμβολα στην άλγεβρα. Στην παρούσα μελέτη εξετάζεται κατά πόσο οι εν ενεργεία μαθηματικοί Β'βάθμιας εκπαίδευσης μπορούν να ερμηνεύσουν τα συνηθισμένα λάθη των μαθητών με το συγκεκριμένο αλγεβρικό συμβολισμό, αλλά και κατά πόσο μπορούν να επιλύσουν αλγεβρικά έργα με χρήση μεταβλητών. Σε 14 μαθηματικούς δόθηκαν 9 διδακτικά σενάρια, μέσω ατομικών, ημιδομημένων συνεντεύξεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν πτυχές της κοινής γνώσης περιεχομένου *αλλά και της* μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία *στις οποίες οι συμμετέχοντες παρουσίασαν αρκετές ελλείψεις.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Λάθη και παρανοήσεις των μαθητών με τα γράμματα στην άλγεβρα

Από πληθώρα ερευνών (Khalid et al., 2020; Brizuela, 2016; Hodgen et al., 2014; Kuchemann, 1981) έχει προκύψει πως η πλειοψηφία των μαθητών παρουσιάζει δυσκολίες στην κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων στην άλγεβρα. Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι το γράμμα χρησιμοποιείται ποικιλοτρόπως στην άλγεβρα, όπως για να αναπαραστήσει τον άγνωστο αλλά και τον γενικευμένο αριθμό, αλλά και συμμεταβαλλόμενες ποσότητες, είναι κάποιοι από τους λόγους για τους οποίους παρουσιάζονται δυσκολίες (Christou et al., 2022; Brizuela, 2016).

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι σε μία αλγεβρική παράσταση το γράμμα αναπαριστά ένα αντικείμενο ή ένα όνομα και δεν αντιλαμβάνονται τη χρήση των γραμμάτων ως αναπαράσταση αριθμού (για παράδειγμα πλήθος αντικειμένων) (Khalid et al., 2020; Brizuela, 2016). Επίσης, οι μαθητές τείνουν να αγνοούν την ύπαρξη του γράμματος και να κάνουν πράξεις με τις αλγεβρικές παραστάσεις σαν να μην εμφανίζονται γράμματα σε αυτές. Για παράδειγμα, απαντούν ότι 3+4ν=7ν, κάνοντας την πρόσθεση ανάμεσα στους αριθμούς αγνοώντας το γράμμα ν και ότι το 4 είναι συντελεστής της

αλγεβρικής έκφρασης 4ν κι όχι ένας απλός αριθμός όπως το 3 (Khalid et al., 2020; Kuchemann, 1981). Συχνή είναι επίσης η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν το γράμμα *ως γενικευμένο αριθμό*, δηλαδή ότι μπορεί να πάρει πολλαπλές τιμές, μία κάθε φορά, αλλά το αντιλαμβάνονται ως αναπαράσταση του άγνωστου που παίρνει μόνο μια συγκεκριμένη τιμή (Kuchemann, 1981). Για παράδειγμα, στην παράσταση κ+λ=10, όπου τα κ και λ παριστάνουν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, έχουν την τάση να δώσουν συγκεκριμένες τιμές στα κ και λ και ισχυρίζονται ότι 1+9=10, 2+8=10, κτλ.

Επίσης, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το γράμμα *ως μεταβαλλόμενη ποσότητα*, δηλαδή όταν το γράμμα αντιπροσωπεύει, ταυτόχρονα, μία σειρά από αριθμούς, όπως για παράδειγμα στο ερώτημα "*Ποιο είναι μεγαλύτερο; Το 2ν ή το ν+2;*". Σε αυτές τις περιπτώσεις οι μαθητές συνηθίζουν να αντικαθιστούν τα γράμματα με συγκεκριμένους αριθμούς, ώστε να εξάγουν συμπεράσματα από τα αποτελέσματα που προκύπτουν (Brizuela, 2016). Μάλιστα, όταν οι μαθητές επιδίδονται σε αντικατάσταση των γραμμάτων με συγκεκριμένες τιμές έχουν την τάση να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς επηρεαζόμενοι από την *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* (Ni & Zhou, 2005). Έτσι, τείνουν να απαντούν ότι *το 2x είναι πάντα μεγαλύτερο από το x+2*, λόγω της παρανόησης ότι *ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει*, αλλά και της τάσης τους να επιβεβαιώνουν αυτή την πεποίθηση δοκιμάζοντας μόνο φυσικούς αριθμούς (Christou et al., 2022).

Τέλος, μια συχνή δυσκολία των μαθητών είναι στις σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις με αριθμούς και γράμματα, όπου δυσκολεύονται να αποδεχθούν αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν γράμματα ως τελικές απαντήσεις σε αλγεβρικές ασκήσεις (Collis, 1975). Για παράδειγμα, αν $\alpha+\beta=4$, τότε αδυνατούν να δεχτούν ότι $\alpha+\beta+\gamma=4+\gamma$, διότι το αποτέλεσμα δεν είναι ένας αριθμός, αλλά μία παράσταση που περιέχει και γράμμα. Μάλιστα, συχνά αντικαθιστούν στο γ τιμές, ώστε η παράσταση $\alpha+\beta+\gamma$ να ισούται με κάποιον αριθμό. Ενώ οι παραπάνω δυσκολίες από μεριάς μαθητών έχουν γίνει αντικείμενο διεξοδικής μελέτης στη βιβλιογραφία, παρόλα αυτά, δεν έχει εξεταστεί η γνώση των εκπαιδευτικών γύρω από τις συγκεκριμένες δυσκολίες των μαθητών.

Γνώση εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών

Σύμφωνα με τους Ball et al. (2008), ένας εκπαιδευτικός για να ανταπεξέλθει αποτελεσματικά στη διδασκαλία, θα πρέπει να διαθέτει: α) *Γνώση του γνωστικού αντικειμένου*, με υποκατηγορίες τις: *Κοινή γνώση περιεχομένου*, δηλαδή γνώση του υλικού, των όρων και των συμβολισμών που χρησιμοποιούνται, *εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου*, δηλαδή απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις *και γνώση του ορίζοντα περιεχομένου*,

δηλαδή ικανότητα σύνδεσης των μαθηματικών θεμάτων με προχωρημένες μαθηματικές ιδέες και β) *Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου*, με υποκατηγορίες τις: *Γνώση του περιεχομένου και των μαθητών*, δηλαδή γνώση των σκέψεων, των δυσκολιών και των παρανοήσεων των μαθητών, *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας*, δηλαδή σωστή επιλογή παραδειγμάτων για την εισαγωγή μιας έννοιας και *γνώση του περιεχομένου και του αναλυτικού προγράμματος σπουδών*, δηλαδή γνώση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος, και των προτεινόμενων δραστηριοτήτων.

Η παρούσα μελέτη

Πλήθος ερευνητών έχει χρησιμοποιήσει την κατηγοριοποίηση της Ball και των συνεργατών της, όπως αυτή αναλύθηκε παραπάνω, προκειμένου να εξετάσει τις πτυχές της μαθηματικής γνώσης που κατέχουν οι εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για διάφορες μαθηματικές έννοιες, ωστόσο, λίγες από αυτές έχουν εστιάσει στη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα (Kilhamn, 2014). Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη των πτυχών της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία εν ενεργεία μαθηματικών σχετικά με τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών στο συμβολισμό και τις ιδιότητες των γραμμάτων στην Άλγεβρα.

Συγκεκριμένα, ερευνητικά ερωτήματα αποτέλεσαν αν οι Έλληνες εν ενεργεία μαθηματικοί: α) Διαθέτουν την απαραίτητη *κοινή γνώση περιεχομένου* για τη χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές στην άλγεβρα ή υπάρχουν πτυχές αυτής της γνώσης που δεν έχουν κατανοήσει επαρκώς, και β) Διαθέτουν την απαραίτητη *γνώση περιεχομένου και μαθητών* ώστε να μπορούν προβλέψουν και να ερμηνεύουν τα συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές με τις συγκεκριμένες έννοιες, όπως αυτά έχουν αναδειχθεί από τη διεθνή έρευνα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 14 εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (11 γυναίκες) από διάφορες πόλεις της βόρειας Ελλάδας, οι οποίοι εργάζονται τόσο στο δημόσιο, όσο και στον ιδιωτικό τομέα, έχοντας διδακτική εμπειρία από 3 έως 19 χρόνια. Απαραίτητη προϋπόθεση για τη συμμετοχή των εκπαιδευτικών στην έρευνα ήταν να έχουν διδάξει και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου, ώστε να εξασφαλιστεί πως έχουν σαφή εικόνα για το πώς διδάσκεται η χρήση του συγκεκριμένου αλγεβρικού συμβολισμού σε κάθε τάξη. Από τους 14 εκπαιδευτικούς οι 9 είχαν μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών και οι 4 από αυτούς τους τίτλους ήταν στη διδακτική των μαθηματικών.

Ερευνητικό εργαλείο

Στους συμμετέχοντες δόθηκαν εννέα διαφορετικά διδακτικά σενάρια, με υποθετικές καταστάσεις που θα μπορούσαν να έχουν συμβεί σε μια πραγματική τάξη. Η δομή των διδακτικών σεναρίων είχε ως εξής: σε μία υποτιθέμενη τάξη δίνεται στους μαθητές ένα ερώτημα προς απάντηση, το οποίο σχετίζεται με τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα και την ύπαρξη παρανοήσεων γύρω από αυτά. Συγκεκριμένα, δόθηκαν έργα που αφορούσαν τη χρήση του γράμματος ως όνομα αντικειμένου, την κατανόηση αυτού ως γενικευμένου αριθμού, τις τελικές απαντήσεις με σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις με αριθμούς και γράμματα, αλλά και τους μετασχηματισμούς με αλγεβρικές παραστάσεις. Στη συνέχεια, δόθηκαν στους εκπαιδευτικούς συνηθισμένα λάθη των μαθητών που συναντώνται στη βιβλιογραφία (Christou et al., 2022; Kuchemann, 1981; Collis, 1975) για να τα σχολιάσουν. Ένα παράδειγμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 1, ενώ συνοπτικές περιγραφές των έργων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Το ερώτημα «Ποιο είναι μεγαλύτερο, το 2ν ή το ν+2;» τέθηκε σε μια τάξη της Γ' Γυμνασίου. Μια μαθήτρια απάντησε ότι «Το 2ν είναι μεγαλύτερο».

Εικόνα 1: Παράδειγμα διδακτικού σεναρίου στο Έργο 9

Διαδικασία

Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν με εξ αποστάσεως τηλεδιάσκεψη, μιας και η φυσική παρουσία των συμμετεχόντων δεν ήταν δυνατή. Η κάθε συνέντευξη μαγνητοφωνήθηκε για καλύτερη συλλογή των δεδομένων. Τα έργα παρουσιάστηκαν ένα προς ένα στους εκπαιδευτικούς και, αφού τους δόθηκε ο κατάλληλος χρόνος για να τα σκεφτούν, ζητήθηκε πρώτα να τα επιλύσουν οι ίδιοι, και έπειτα να αναφέρουν τα λάθη που αναμένουν από τους μαθητές τους. Για το κάθε έργο τέθηκε η ερώτηση: «Έχετε εντοπίσει κάποιο λάθος που παρατηρείτε ότι συμβαίνει συχνά εδώ; Αν ναι, μπορείτε να αναφέρετε ποιο είναι αυτό;». Στη συνέχεια, αφού δόθηκαν τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να αναλύσουν τον τρόπο με τον οποίο πιθανόν σκέφτηκαν οι μαθητές, απαντώντας στην ερώτηση: «Πώς πιστεύετε ότι σκέφτεται ένας μαθητής και κάνει το συγκεκριμένο λάθος;».

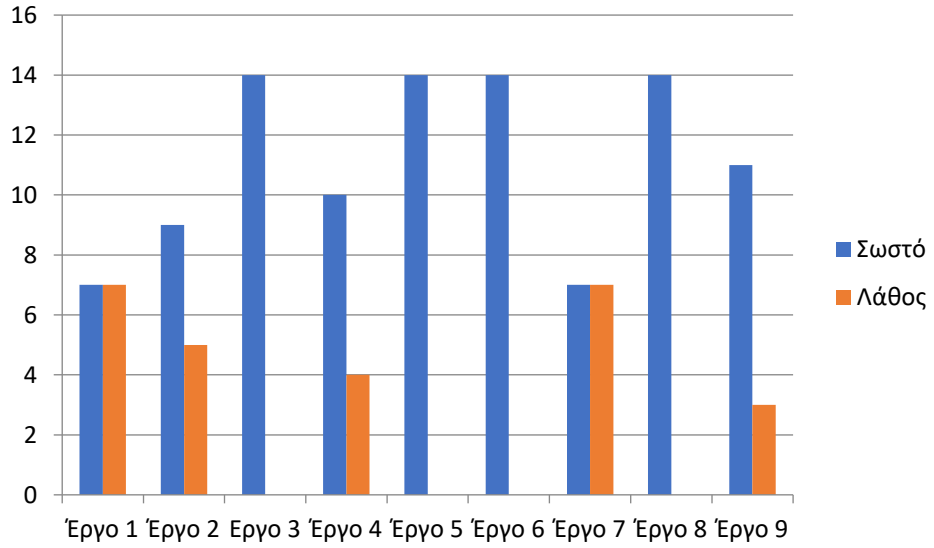
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα ανακοίνωση θα παρουσιαστούν μόνο τα αποτελέσματα που εξέτασαν την *κοινή γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών*, δηλαδή το αν οι συμμετέχοντες μπόρεσαν να επιλύσουν σωστά το κάθε έργο. Επίσης, θα παρουσιαστεί η ερμηνεία των λαθών που τους δόθηκαν, που αποτελεί μία

όψη της *γνώσης περιεχομένου και μαθητών* (Ball et al., 2008). Δε θα παρουσιαστούν τα λάθη που οι ίδιοι προέβλεψαν ότι θα εμφανιστούν μέσα από την εμπειρία τους, ούτε οι ερμηνείες αυτών των λαθών.

Αποτελέσματα ως προς τη γνώση περιεχομένου

Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων βαθμολογήθηκαν ως σωστό ή λάθος. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, το 80% των απαντήσεων των συμμετεχόντων ήταν σωστές. Παρόλα αυτά, ένα αξιοσημείωτο ποσοστό των απαντήσεων, το οποίο ανέρχεται στο 20%, εμφάνισαν αδυναμία ή λάθη επίλυσης. Εξετάζοντας τον κάθε συμμετέχοντα ατομικά προέκυψε ότι μόλις οι 2 από τους 14 ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στο σύνολο των έργων, ενώ οι υπόλοιποι παρουσίασαν δυσκολία στην επίλυση, τουλάχιστον, ενός και το πολύ πέντε έργων.



Διάγραμμα 1: Απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε κάθε έργο

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 1**,** που παρουσιάζει τη συχνότητα των λαθών σε κάθε έργο, τα περισσότερα λάθη έγιναν στο Έργο 1 (*Το ένα μπλε στυλό κοστίζει 50 λεπτά και το ένα κόκκινο στυλό 60 λεπτά. Πήραμε κάποια μπλε και κάποια κόκκινα στυλό και πληρώσαμε 9€ (900 λεπτά). Αν μ είναι το πλήθος των μπλε στυλό που αγοράσαμε και κ το πλήθος των κόκκινων, τι μπορείτε να συμπεράνετε για το μ ή το κ;*) και στο Έργο 7 (*Τι θα μπορούσατε να πείτε για το κ, αν κ+λ=10 και κ<λ;*). Ενδεικτικά, στο Έργο 1, δύο λανθασμένες απαντήσεις ήταν ότι *«δεν μπορούμε να βρούμε πόσο είναι το μ και πόσο είναι το κ. Αφού δεν είναι επαρκείς οι πληροφορίες το πρόβλημα δε λύνεται»* και *«Λείπει κάποιο δεδομένο, σωστά; Το πρόβλημα δεν λύνεται»*. Επίσης, στο Έργο 7 οι ίδιοι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι «*Αυτό δεν έχει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Βρίσκουμε όλα τα ζευγαράκια που σχηματίζουν το 10*» και «*Αυτό δεν είναι δύσκολο. Κάνεις δοκιμές με νούμερα και το βρίσκεις*», αντίστοιχα. Εδώ γίνεται εμφανές ότι

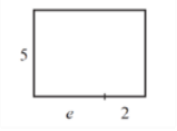
οι συμμετέχοντες ανέμεναν ως απάντηση ένα αριθμητικό αποτέλεσμα και όχι μία αλγεβρική παράσταση με αριθμούς και γράμματα. Τέλος, στο Έργο 9 (*Ποιο είναι μεγαλύτερο, το 2ν ή το ν+2;*), τρεις συμμετέχοντες έδωσαν αρχικά ορθή απάντηση ότι «*Εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει το ν*», ωστόσο, όταν ζητήθηκε να γίνουν πιο συγκεκριμένοι παρατηρήθηκε ότι αντικατέστησαν το ν με φυσικούς αριθμούς, χωρίς να αναφέρουν ότι το 2ν είναι μεγαλύτερο για κάθε ν>2. Για παράδειγμα είπαν ότι *«αν ν=1, τότε το ν+2 είναι μεγαλύτερο, ενώ αν το ν=10, τότε το 2ν είναι μεγαλύτερο*».

Αποτελέσματα γνώσης περιεχομένου και μαθητών

Στην τελευταία φάση των συνεντεύξεων, στους εκπαιδευτικούς δόθηκαν τα πιο συνηθισμένα λάθη μαθητών από τη διεθνή βιβλιογραφία και τους ζητήθηκε να τα ερμηνεύσουν. Έτσι, οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ως «*Ουσιαστική ερμηνεία*» όταν οι συμμετέχοντες διατύπωναν εύλογες εικασίες σχετικά με τον τρόπο σκέψης των μαθητών, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα χαρακτηριστικά του ερωτήματος που είχαν να αντιμετωπίσουν οι υποθετικοί μαθητές και η ερμηνεία συμβαδίζει με αυτή που προτείνεται από τη διεθνή έρευνα στο πεδίο. Στην κατηγορία «*Καμία ερμηνεία/Αδυναμία ερμηνείας*» τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών που δήλωσαν ότι δε γνωρίζουν τους λόγους για τους οποίους συμβαίνει το εκάστοτε λάθος, αλλά και οι απαντήσεις αυτών που απέφυγαν να δώσουν κάποια ερμηνεία. Τέλος, στην κατηγορία «*Μη ουσιαστική ερμηνεία*» τοποθετήθηκαν όλες οι απαντήσεις των συμμετεχόντων που προσπάθησαν να περιγράψουν τα βήματα που ακολούθησε ο μαθητής στην απάντησή του, χωρίς να γίνεται αναφορά στους λόγους που οδήγησαν το μαθητή σε λάθος. Επίσης, στην ίδια κατηγορία ενσωματώθηκαν και οι απαντήσεις της μορφής «*Απάντησε στην τύχη*», «*Δεν το έχει καταλάβει καλά*», «*Δεν εμβαθύνει»*, «*Πανικοβλήθηκε*», κοκ.

Από αυτή την ανάλυση προέκυψε ότι το 51% των ερμηνειών ήταν μη ουσιαστικές, δηλαδή οι εκπαιδευτικοί απέδωσαν τα λάθη σε συναισθηματικούς παράγοντες (π.χ. άγχος, φόβος κτλ.), άγνοια, βιασύνη ή ακόμη και στην τύχη. Μόλις το 35% των ερμηνειών ήταν ουσιαστικές, ενώ το 14% αφορούσαν αδυναμία ερμηνείας των συνηθισμένων λαθών των μαθητών. Παρακάτω, στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται τα ποσοστά των ερμηνειών των συνηθισμένων λαθών των μαθητών, ανά έργο και ανά κατηγορία απάντησης. Από τον Πίνακα 1 γίνεται φανερό ότι κανένας εκπαιδευτικός δεν ερμήνευσε με ουσιαστικό τρόπο όλα τα λάθη που δόθηκαν. Συγκεκριμένα, μόνο δύο από τα εννέα λάθη ερμηνεύτηκαν με ουσιαστικό τρόπο από πάνω από το 50% των συμμετεχόντων και δύο από τα λάθη που δόθηκαν δεν ερμηνεύτηκαν με ουσιαστικό τρόπο από κανέναν εκπαιδευτικό.

Πίνακας 3: Ερμηνείες των συνηθισμένων λαθών, ανά έργο και ανά κατηγορία απάντησης

		Κατηγορίες απαντήσεων %		
Έργα	**Δοσμένα Λάθη**	**Α**	**Β**	**Γ**
Ε1: Το συνολικό κόστος των μπλε και κόκκινων στυλό, όταν το ένα μπλε κοστίζει 50 λεπτά και το ένα κόκκινο 60 λεπτά.	μ+κ=900	21,4	71,4	7,2
Ε2: Τι συμβολίζει η παράσταση 2π+4κ, αν το ένα πεπόνι κοστίζει 2€ και το ένα καρπούζι 4€;	Αγοράσαμε 6 φρούτα, 2 πεπόνια και 4 καρπούζια	42,8	57,2	0
Ε3: Ποια είναι η περίμετρος, όταν η κάθε πλευρά είναι 2cm και το πλήθος των πλευρών είναι ν;	Π=32cm Π=34cm	21,4	57,2	21,4
Ε4: Αν α+β=4, τότε α+β+γ=… ;	α+β+γ=6	14,3	71,4	14,3
	α+β+γ=7	28,6	42,8	28,6
Ε5: Αν το 4 προστεθεί στο 3ν γράφεται ως…	7ν	42,8	57,2	0
Ε6: Ποιο είναι το εμβαδό του σχήματος; 	5e2	0	64,3	35,7
	e+10	0	64,3	35,7
Ε7: Αν κ+λ=10 και κ<λ, τι μπορείτε να πείτε για το κ;	κ=4	42,8	50	7,2
Ε8: Πότε είναι αληθής η ισότητα Α+Β+Γ=Α+Δ+Γ;	Ποτέ	78,6	21,4	0
Ε9: Μεγαλύτερο είναι το 2ν ή το ν+2;	Το 2ν είναι μεγαλύτερο	92,9	7,1	0

Σημείωση: Α: Ουσιαστική ερμηνεία, Β: Μη ουσιαστική ερμηνεία, Γ: Αδυναμία ερμηνείας

Για παράδειγμα, στο Έργο 1, ενώ η σωστή απάντηση ήταν *50μ+60κ=900*, δόθηκε στους συμμετέχοντες να σχολιάσουν το λάθος *μ+κ=900*. Στην πλειοψηφία τους οι συμμετέχοντες έδιναν μη-ουσιαστικές ερμηνείες, όπως «*Ασχολήθηκε επιφανειακά με το πρόβλημα*», «*Πήγε και τα πρόσθεσε. Το "ή" το ερμήνευσε σαν "και", οπότε για αυτό έκανε πρόσθεση. Δυσκολεύονται ουσιαστικά με την ερμηνεία των λέξεων-κλειδιών*», ή «*Δεν*

καταλαβαίνουν τι αντιπροσωπεύει η κάθε μεταβλητή. Δεν δίνουν βάση σε αυτά που διαβάζουν και κάνουν μία βιαστική σύνδεση». Ωστόσο, υπήρξαν τρεις συμμετέχοντες που ερμήνευσαν με ουσιαστικό τρόπο το λάθος που τους δόθηκε αναφέροντας ότι «*Θεώρησε το μ και το κ ως τα μπλε και τα κόκκινα στυλό, αντίστοιχα. Δηλαδή το ένα μπλε και το ένα κόκκινο στυλό. Τα ίδια τα στυλό»*, ή «*Σκέφτηκε ότι το μ είναι το μπλε στυλό και το κ το κόκκινο στυλό. Δεν έχει στο νου της τι αντιπροσωπεύουν αυτές οι μεταβλητές»,* ή «*Πήραμε ένα μπλε και ένα κόκκινο… Θεωρεί ότι το μ αντιπροσωπεύει το μπλε και το κ το κόκκινο στυλό»*.

Ακόμη, στο Έργο 4 (*Αν α+β=4, τότε α+β+γ=…*), όπου ένα από τα δύο λάθη που δόθηκαν ήταν το *α+β+γ=6*, το 71,4% των συμμετεχόντων έδωσε επίσης μη ουσιαστικές ερμηνείες, όπως ότι «*Ήθελε να πάει στο επόμενο πρόβλημα*», «*Δε σκέφτηκε τίποτα, απάντησε τυχαία», «Υπέθεσαν ότι γ=2 ή γ=3, αλλά τυχαία… Καταλαβαίνουν ότι α+β=4, αλλά πάλι κάνουν λάθος… Αφού το γ=-4»*. Στα παραπάνω αναδεικνύεται η δυσκολία των συμμετεχόντων να αναγνωρίσουν ότι οι μαθητές δεν δέχονται ως απάντηση το *4+γ*, αλλά έχουν την τάση να αποδώσουν στο αποτέλεσμα μία συγκεκριμένη τιμή. Βέβαια, υπήρξαν και δύο συμμετέχοντες που ερμήνευσαν το συγκεκριμένο λάθος με ουσιαστικό τρόπο λέγοντας ότι «*Θέλει απλά να βρει μια τιμή στο αποτέλεσμα»* και «*δίνουν συγκεκριμένες τιμές στα γράμματα. Δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι και το 4+γ είναι ένα αποτέλεσμα… Θέλουν να είναι αριθμός».*

Τέλος, στο Έργο 5 (*τι γίνεται αν ν το 4 προστεθεί στο 3ν*) όπου ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να ερμηνεύσουν το λάθος *7ν*, το 57,2% έδωσε μη ουσιαστική ερμηνεία αναφέροντας ότι «*Πρόσθεσε το 4 με το 3 εκτελώντας τις πράξεις από τα αριστερά προς τα δεξιά… Δηλαδή αν ήταν 3ν+4 δεν θα έκανε αυτό το λάθος»* ή «*Το 4 με το 3ν είναι διαφορετικοί αριθμοί και τα πρόσθεσε, ενώ δεν επιτρέπεται… Το συναντάω πολύ συχνά αυτό το λάθος»*. Οι απαντήσεις όπως *«Δε σκέφτηκε ότι οι όροι δεν είναι όμοιοι, άρα δεν μπορούν να προστεθούν»* ταξινομήθηκαν επίσης στις μη ουσιαστικές ερμηνείες, καθώς οι συμμετέχοντες δεν έκαναν ρητή αναφορά στην ύπαρξη του γράμματος που δεν επιτρέπει την πρόσθεση μόνο των αριθμών· άλλωστε οι συγκεκριμένοι όροι μπορούν να προστεθούν, όπως και προστίθενται. Αντιθέτως, υπήρξαν κάποιοι που ερμήνευσαν με ουσιαστικό τρόπο το παραπάνω λάθος σημειώνοντας ότι «*Βλέπει πρόσθεση και γι' αυτό συνδέει τους αριθμούς με τον προφανή τρόπο, αγνοώντας τη μεταβλητή. Δηλαδή δεν σκέφτεται ότι το 4+3ν δεν μπορεί να το προσθέσει»*, ή «*Αγνόησε τελείως το γράμμα και πρόσθεσε το 3 με το 4».*

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να μελετήσει κάποιες βασικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία των εν ενεργεία μαθηματικών

για τις δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών στο συμβολισμό και τις ιδιότητες των γραμμάτων. Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών κατάφερε να επιλύσει σωστά τα μαθηματικά έργα του εργαλείου, το οποίο είναι αναμενόμενο, αν αναλογιστούμε το μαθηματικό τους υπόβαθρο. Ωστόσο, κάποια λάθη και αδυναμίες σωστής λύσης που προέκυψαν από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων δείχνουν σημαντικές ελλείψεις στην κοινή γνώση περιεχομένου για το συμβολισμό και τις ιδιότητες των γραμμάτων ως αλγεβρικά σύμβολα (Ball et al., 2008). Τα περισσότερα λάθη αφορούσαν τη δυσκολία να δεχθούν λύση που περιέχει γράμματα, λόγω της τάσης τους να αναζητούν συγκεκριμένες λύσεις που εκφράζονται μόνο με αριθμητικές τιμές, κάτι που δυσκολεύει πολύ και τους μαθητές (Collis, 1975). Επίσης, κάποιες απαντήσεις των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών φάνηκε να επηρεάστηκαν από το φαινόμενο της *προκατάληψης του φυσικού αριθμού* (Christou et al., 2022), καθώς σε κάποια από τα έργα είχαν την τάση να αντικαθιστούν τα γράμματα με φυσικούς αριθμούς προκειμένου να δώσουν μία συγκεκριμένη απάντηση κι επίσης να βγάζουν γενικά συμπεράσματα στη βάση των δοκιμών τους μόνο με φυσικούς αριθμούς. Ωστόσο, επειδή δεν δόθηκαν πληροφορίες για το σύνολο αναφοράς της κάθε μεταβλητής κι επίσης χρησιμοποιήθηκαν γράμματα που συχνά αναπαριστούν ακεραίους αριθμούς, υπάρχει περίπτωση να ερμήνευσαν τα γράμματα ως φυσικούς αριθμούς με βάση τη συνήθη τους λειτουργία. Σε κάθε περίπτωση, μια διαφορετική διατύπωση των ερωτημάτων από αυτήν της αρχικής μελέτης του Kuchemann (1981) που χρησιμοποιήθηκε εδώ, πιθανώς να έδινε άλλα αποτελέσματα, τα οποία μπορούν να αναδειχθούν από μία μελλοντική έρευνα.

Ως προς την ερμηνεία του τρόπου σκέψης των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς, που αποτελεί πτυχή της *γνώσης περιεχομένου και των μαθητών* (Ball et al., 2008), προέκυψε ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσουν τις παρανοήσεις που βρίσκονται πίσω από τα συνηθισμένα λάθη των μαθητών για τη χρήση των γραμμάτων στην Άλγεβρα, αφού ερμήνευσαν με μη ουσιαστικό τρόπο τα λάθη που τους δόθηκαν. Η μεγαλύτερη δυσκολία παρουσιάστηκε στην ερμηνεία λαθών που κάνουν οι μαθητές που οφείλονται στην τάση να αποδίδουν στα γράμματα ονόματα αντικειμένων, στη δυσκολία να δέχονται λύσεις που περιέχουν γράμματα και στη δυσκολία κατανόησης του γενικευμένου αριθμού, δυσκολίες που έχουν εμφανιστεί και στους ίδιους τους μαθητές (Kuchemann, 1981; Collis, 1975).

Αυτά τα αποτελέσματα υπογραμμίζουν την ανάγκη να γίνει επένδυση σε εκπαιδευτικά προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών που θα ενισχύσουν την κατανόησή τους σε σχέση με τις βασικές έννοιες της άλγεβρας, αλλά και την ανάπτυξη στρατηγικών που

θα εστιάσουν στην κατανόηση των μαθητών για τη χρήση του συμβολισμού της άλγεβρας. Περεταίρω μελέτη της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα είναι χρήσιμη με συλλογή ποιοτικών αλλά και ποσοτικών δεδομένων από ένα μεγαλύτερο και πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα από αυτό της παρούσας μελέτης και με ακόμη περισσότερα έργα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Brizuela, B. M. (2016). Variables in elementary mathematics education. *The Elementary School Journal*, *117*(1), 46-71.

Christou, K. P., Kyrvei, D. I., &Vamvakoussi, X. (2022). Interpreting literal symbols in algebra under the effects of the natural number bias. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-14.

Collis, K. F. (1975). A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics: A Piagetian Viewpoint.

Hodgen, J., Küchemann, D., & Brown, M. (2014). Learning experiences designed to develop algebraic thinking: Lessons from the ICCAMS project in England. In *Learning experiences to promote mathematics learning: Yearbook 2014 Association of Mathematics Educators* (pp. 171-186).

Khalid, M., Yakop, F. H., & Ibrahim, H. (2020). Year 7 students' interpretation of letters and symbols in solving routine algebraic problems. *The Qualitative Report*, *25*(11), 4167-4181.

Kilhamn, C. (2014). When does a variable vary? Identifying mathematical content knowledge for teaching variables. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 83-100.

Küchemann, D. (1981). Cognitive demand of secondary school mathematics items. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 301-316.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *EducationalPsychologist*, *40*(1), 27-52.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Δέσποινα Δεσλή & Αικατερίνη Βασιλά

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.,
ddesli@eled.auth.gr, basilakaterina@yahoo.gr

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε το επίπεδο δημιουργικότητας των παιδιών σε έργα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος που αφορούν γραφικές παραστάσεις. Ζητήθηκε από 98 παιδιά Στ' τάξης να κατασκευάσουν όσα περισσότερα προβλήματα μπορούν αξιοποιώντας πληροφορίες από ένα ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής, ένα κυκλικό διάγραμμα κι ένα ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών. Το χαμηλότερο επίπεδο δημιουργικότητας εμφανίστηκε στο ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής, ενώ το ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών και το κυκλικό διάγραμμα ευνόησαν την ευχέρεια και την πρωτοτυπία των παιδιών, αντίστοιχα. Υψηλές συσχετίσεις βρέθηκαν ανάμεσα στους δείκτες δημιουργικότητας, αναδεικνύοντας τη δυναμική αξιοποίησης των γραφικών παραστάσεων για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος, ως διαδικασία κατασκευής και έκφρασης ενός προβλήματος με νόημα σε μια δοσμένη κατάσταση (Silver, 1997· Stoyanova, & Ellerton, 1996), αποτελεί σημαντική διαδικασία δόμησης μαθηματικής γνώσης (Moses et al., 2014). Η ενσωμάτωσή της στη διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλει σημαντικά στη διασφάλιση υψηλής ποιότητας διδασκαλίας (Bevan, & Capraro, 2021· Cai, & Hwang, 2020), λειτουργώντας ως πολύτιμο εργαλείο μαθησιακής προόδου και ενίσχυσης της συνολικής μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών. Για αυτό άλλωστε στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ι.Ε.Π., 2021), όπως και σε άλλα του εξωτερικού, αναγνωρίζεται η σημασία της κατασκευής προβλήματος, συχνά σε συνδυασμό με την επίλυση προβλήματος, και εντοπίζονται σχετικοί στόχοι ήδη από την Α' τάξη.

Συγκριτικά με την επίλυση προβλήματος, η κατασκευή προβλήματος συνδέεται με υψηλότερες γνωστικά απαιτήσεις (Wang et al., 2022), καθώς προϋποθέτει σκέψη υψηλότερου επιπέδου και βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Bevan, & Capraro, 2021). Προκειμένου ένα άτομο να δημιουργήσει ένα μαθηματικό πρόβλημα σχετικά με μια κατάσταση, χρειάζεται αρχικά να αναγνωρίσει και να κατανοήσει τα δεδομένα και τις

σχέσεις που υπάρχουν σε αυτήν, να επιλέξει τα στοιχεία της κατάστασης που θα χρησιμοποιήσει και, τέλος, να την παρουσιάσει με τη μορφή προβλήματος (Cai, & Hwang, 2023· Zhang et al., 2023).

Σύμφωνα με τους Stoyanova και Ellerton (1996), τρεις είναι οι κύριες κατηγορίες μαθηματικών καταστάσεων για την κατασκευή προβλημάτων: α) οι ελεύθερες καταστάσεις, στις οποίες τα άτομα καλούνται να κατασκευάσουν προβλήματα χωρίς κανέναν περιορισμό (π.χ., «Φτιάξε ένα πρόβλημα για τον φίλο σου»), β) οι ημι-δομημένες καταστάσεις, στις οποίες δίνεται μια 'ανοιχτή' κατάσταση και ζητείται από τα άτομα να γράψουν προβλήματα ώστε να την ολοκληρώσουν (π.χ., προβλήματα που βασίζονται και αντλούν στοιχεία από συγκεκριμένες εικόνες, πίνακες ή γραφήματα), και γ) οι δομημένες καταστάσεις, στις οποίες τα άτομα καλούνται να γράψουν προβλήματα αναδιατυπώνοντας υπάρχοντα προβλήματα ή τροποποιώντας τις πληροφορίες που δίνονται. Στο πλαίσιο του σχολείου, οι δομημένες καταστάσεις αποτελούν τον ευκολότερο και γρηγορότερο τρόπο να αποκτήσει κανείς εξοικείωση με την κατασκευή προβλήματος (Wang et al., 2022) και θεωρούνται πιο προσιτές συγκριτικά με τις ελεύθερες (Silber, & Cai, 2017). Τόσο οι δομημένες όσο και οι ημι-δομημένες καταστάσεις παρέχουν την απαραίτητη γνωστική υποστήριξη στους μαθητές (Ngah et al., 2016· Wang et al., 2022), καθώς επιτρέπουν τη σύνδεση ανάμεσα στις νέες και τις προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους. Σύμφωνα με την Bonotto (2013), οι ημι-δομημένες καταστάσεις, ως λιγότερο δομημένες και πιο ανοιχτές, προάγουν την ευέλικτη σκέψη, βελτιώνουν την ικανότητα επίλυσης προβλήματος και προετοιμάζουν τους μαθητές για τις πραγματικές καταστάσεις που θα συναντήσουν εκτός σχολικού πλαισίου. Ιδιαίτερα μάλιστα όταν ένα άτομο εμπλέκεται στην κατασκευή προβλήματος αξιοποιώντας στοιχεία από ένα γράφημα ή έναν πίνακα, ενεργοποιείται η διαδικασία της 'μετάφρασης' των ποσοτικών πληροφοριών που εμπεριέχονται στο γράφημα ή τον πίνακα (Christou et al., 2005), η οποία προϋποθέτει την κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών σχέσεων. Με άλλα λόγια, το άτομο καλείται να μεταφράσει τις πληροφορίες που του προσφέρονται μέσα από το γράφημα ή τον πίνακα σε ένα επιλύσιμο πρόβλημα. Όπως επισημαίνουν οι Christou et al. (2005), αυτού του είδους η ενέργεια απαιτεί τη σύνθεση δύο σημαντικών δράσεων. Πρώτον, το άτομο πρέπει να αναδιοργανώσει τις παρεχόμενες πληροφορίες από τη μια μορφή στην άλλη και, δεύτερον, να διατυπώσει τις συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των πληροφοριών για να κατασκευάσει ένα επιλύσιμο πρόβλημα με νόημα. Έτσι, οι ημι-δομημένες καταστάσεις επιτρέπουν την αξιοποίηση οπτικών αναπαραστάσεων, ιδιαίτερα σημαντικών για τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή (Kopparla et al., 2018).

Αρκετοί ερευνητές επισημαίνουν ότι η κατασκευή προβλήματος αποτελεί μία εγγενώς δημιουργική διαδικασία και, κατά συνέπεια, προωθεί και συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας (π.χ., Bevan, & Capraro, 2021· Bicer et al., 2020· Silver, 1997). Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά πολύ συχνά μελετάται σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος και συνδέεται με την ευχέρεια (δηλ., την ικανότητα του ατόμου να βρίσκει μεγάλο αριθμό λύσεων σε ένα πρόβλημα), την ευελιξία (δηλ., την ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί και να εναλλάσσει διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης) και την πρωτοτυπία (δηλ., την ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει το πρόβλημα με πρωτότυπο, μοναδικό τρόπο). Πέρα από τις παραπάνω γνωστικές διαστάσεις, συχνά αναγνωρίζονται συναισθηματικές διαστάσεις (Bicer et al., 2020) στη μαθηματική δημιουργικότητα όπως είναι η δημιουργική αυτο-αποτελεσματικότητα που επιτρέπει σε ένα άτομο να μετατρέψει νέες και ευφάνταστες μαθηματικές ιδέες σε πράξη. Όπως επισημαίνει ο Silver (1997), η δημιουργικότητα δυνητικά εκδηλώνεται και σε καταστάσεις κατασκευής προβλήματος, όταν εξετάζεται, για παράδειγμα, πόσο πρωτότυπο είναι ένα πρόβλημα που δημιούργησε κάποιος ή πόσες τροποποιήσεις προσέφερε σε αυτό ή πόσες διαφορετικές προσεγγίσεις παρουσίασε. Υπό αυτό το πρίσμα, η κατασκευή προβλήματος δεν προκαλεί μόνο μαθηματική περιέργεια, αλλά παράλληλα θέτει το υπόβαθρο και διασφαλίζει το περιβάλλον για την έκφραση της μαθηματικής δημιουργικότητας των ατόμων.

Αν και τα τελευταία χρόνια το ερευνητικό ενδιαφέρον είναι έντονο για τις επιδόσεις των ατόμων σε έργα κατασκευής προβλήματος, αναδεικνύοντας ότι τόσο τα παιδιά (Bevan, & Capraro, 2021· Ngah et al., 2016) όσο και οι εκπαιδευτικοί (Leikin, & Elgrably, 2020) είναι σε θέση να κατασκευάζουν επιλύσιμα προβλήματα μέσα από ποικιλία καταστάσεων, αυτή η ικανότητα δεν έχει μελετηθεί αναφορικά με τις προοπτικές που προσφέρουν οι γραφικές παραστάσεις για τη διασύνδεση της κατασκευής μαθηματικού προβλήματος με τη δημιουργικότητα. Με δεδομένο ότι γνωρίζουμε τις απαιτήσεις της ‘μετάφρασης’ που προϋποθέτει η κατασκευή προβλήματος στη βάση των πληροφοριών μιας γραφικής παράστασης (Christou et al., 2005) αλλά και τα περιορισμένα σχετικά ευρήματα για την κατασκευή προβλήματος στις μικρότερες ηλικίες, αναπτύχθηκε το ενδιαφέρον για την εξέταση της δημιουργικότητας σε διαδικασίες κατασκευής προβλήματος σε παιδιά της Στ’ δημοτικού. Σε αυτό το πλαίσιο, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει αφενός το επίπεδο δημιουργικότητας των παιδιών σε έργα κατασκευής προβλήματος, βασισμένου σε στοιχεία που παρουσιάζονται σε γραφικές παραστάσεις, και αφετέρου την επίδραση του είδους της γραφικής παράστασης σε αυτό.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 98 παιδιά (50 κορίτσια) της Στ' τάξης (μ.ο. ηλικίας: 10 χρόνια και 8 μήνες) που φοιτούσαν σε δημοτικά σχολεία της Αθήνας και της Θεσσαλονίκης και κάλυπταν διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Η επιλογή τους έγινε με βάση τη δειγματοληψία ευκολίας.

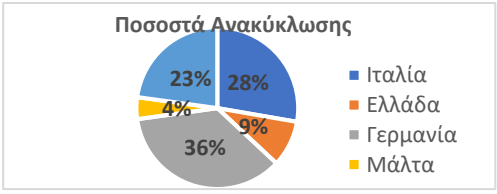
Σχεδιασμός-Εργαλείο μέτρησης. Σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες τρία έργα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος (βλ. Πίνακα 1), της κατηγορίας των ημι-δομημένων καταστάσεων κατασκευής προβλήματος, καθένα από τα οποία αφορούσε σε ένα είδος γραφικής παράστασης (ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής, κυκλικό διάγραμμα και ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών, αντίστοιχα στα Έργα 1, 2 και 3). Συγκεκριμένα, σε κάθε έργο παρουσιάζονταν μία γραφική παράσταση και ένα σενάριο σχετικό με αυτήν και οι συμμετέχοντες καλούνταν να γράψουν όσες περισσότερες διαφορετικές ερωτήσεις μπορούν ώστε, αξιοποιώντας τις πληροφορίες που δίνονται, να κατασκευάσουν προβλήματα που ανταποκρίνονται στα δεδομένα της γραφικής παράστασης. Τα συγκεκριμένα είδη γραφικών παραστάσεων επιλέχθηκαν καθώς η παρουσία τους είναι συχνή στα σχολικά εγχειρίδια και την καθημερινή ζωή. Η ανάπτυξη του εργαλείου βασίστηκε στην προσαρμογή έργων που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (π.χ., Christou et al., 2005), σύμφωνα με τις οποίες η δυνατότητα διατύπωσης πολλών διαφορετικών ερωτήσεων δυνητικά αποτελεί μέτρο αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η εσωτερική αξιοπιστία στα τρία έργα ήταν ικανοποιητική (Cronbach a=.753).

Έργο 1:

Ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής

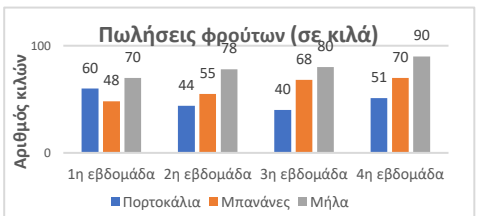
Έργο 2:

Κυκλικό διάγραμμα



'Εργο 3:

Ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών

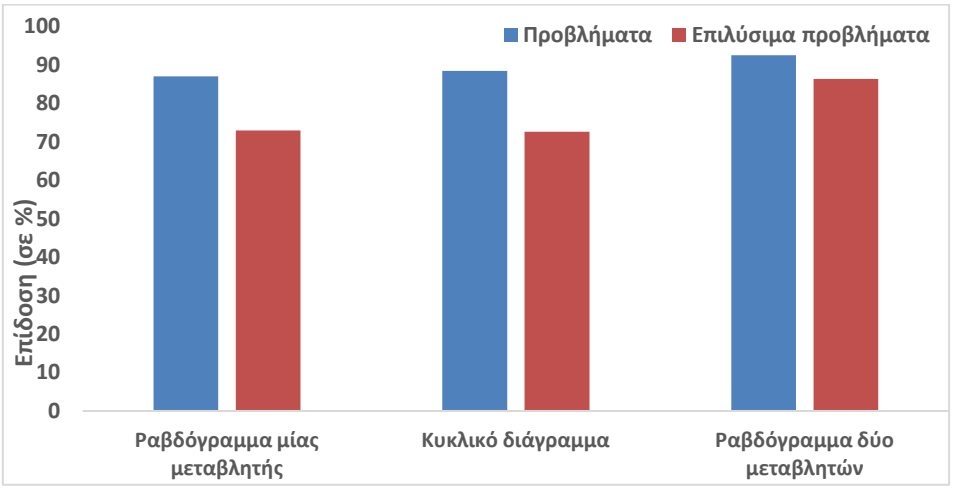


Πίνακας 1: Τα έργα της έρευνας

Διαδικασία. Οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν ατομικά σε ήσυχο χώρο του σχολείου τους σε δύο χρονικές στιγμές σε μία εβδομάδα, διάρκειας μίας σχολικής ώρας η καθεμία, ενώ είχε προηγηθεί ένα παράδειγμα κατασκευής προβλήματος. Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν ανώνυμη και προαιρετική.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος. Από το σύνολο των απαντήσεων που δόθηκαν, περίπου το 90% αυτών αποτελούσαν μαθηματικά προβλήματα. Ωστόσο, μικρότερος ήταν ο αριθμός των επιλύσιμων προβλημάτων που ικανοποιούσαν τις απαιτήσεις των έργων, ο οποίος διέφερε στατιστικά σημαντικά ως προς το είδος της γραφικής παράστασης (Σχήμα 1). Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες δημιούργησαν στατιστικά σημαντικά περισσότερα επιλύσιμα προβλήματα με το ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών σε σχέση με το ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής ($t(97)=-4,301$, $p<.001$) και το κυκλικό διάγραμμα ($t(97)=-2,375$, $p<.01$).



Σχήμα 1: Ποσοστό επιτυχίας στην κατασκευή μαθηματικού προβλήματος ως προς το είδος γραφικής παράστασης

β. Δημιουργικότητα. Τα επιλύσιμα προβλήματα που δημιούργησαν οι συμμετέχοντες κωδικοποιήθηκαν, σύμφωνα με τους δείκτες δημιουργικότητας, ως προς την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία.

Ευχέρεια. Για κάθε συμμετέχοντα υπολογίστηκε η ευχέρειά του («πόσα προβλήματα κατασκεύασε;») σε κάθε έργο ως το πλήθος των επιλύσιμων προβλημάτων που έδωσε σε αυτό. Ο ανώτατος αριθμός επιλύσιμων προβλημάτων που βρέθηκε σε κάθε έργο ήταν οκτώ (8), ενώ ο μικρότερος

ήταν ένα (1). Το 16,3% των παιδιών δεν ήταν σε θέση να δημιουργήσουν κάποιο πρόβλημα στο ραβδόγραμμα και το κυκλικό διάγραμμα, ενώ στο ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών ήταν πολύ λιγότερα αυτά τα παιδιά (8,2%).

Στη συνέχεια, ο βαθμός ευχέρειας κατηγοριοποιήθηκε με βάση μία κλίμακα Likert που σχεδιάστηκε για τις ανάγκες της έρευνας. Ειδικότερα, όταν ο συμμετέχων έδινε 1-2 προβλήματα, βαθμολογούνταν με τον βαθμό 1 (πολύ λίγο). Ο βαθμός 2 (λίγο) δόθηκε όταν υπήρχαν 3-4 προβλήματα. Τα 5-6 προβλήματα βαθμολογήθηκαν με τον βαθμό 3 (πολύ), ενώ τα 7-8 με τον βαθμό 4 (πάρα πολύ). Τα αποτελέσματα (βλ. Πίν. 2) έδειξαν σχετικά υψηλό βαθμό ευχέρειας για το ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών (μ.ο.=2,34, τ.α.=1,20), ο οποίος ήταν στατιστικά σημαντικά υψηλότερος από τους αντίστοιχους βαθμούς ευχέρειας για το κυκλικό διάγραμμα ($t(97)=-2,511$, $p<.01$) και το ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής ($t(97)=-4,059$, $p<.001$).

Βαθμολόγηση βάσει Likert	**Είδος γραφικής παράστασης**		
	Ραβδόγραμμα	**Κυκλικό διάγραμμα**	**Ραβδόγραμμα δύο μεταβλητ**
	Ευχέρεια		
1 (πολύ λίγο)	30,6%	28,3%	12,2%
2 (λίγο)	36,7%	28,3%	26,4%
3 (πολύ)	10,2%	19%	26,5%
4 (πάρα πολύ)	6,1%	8,1%	16,3%
Μέσος Όρος (τ.α.)	1,59 (1,08)	1,73 (1,18)	2,34 (1,20)
	Ευελιξία		
1 (πολύ λίγο)	44,9%	34,7%	22,4%
2 (λίγο)	24,5%	14,3%	34,7%
3 (πολύ)	10,2%	20,4%	16,3%
4 (πάρα πολύ)	4,1%	14,3%	8,2%
Μέσος Όρος (τ.α.)	1,41 (1,02)	1,82 (1,33)	1,93 (1,09)
	Πρωτοτυπία*		
1 (πολύ λίγο)	59,2%	31,8%	25,8%
2 (λίγο)	20%	23,2%	46,7%
3 (πολύ)	12,6%	28,5%	18,7%
4 (πάρα πολύ)	8,2%	16,5%	8,8%

Μέσος Όρος (τ.α.)	1,69 (,98)	2,29 (1,09)	2,05 (,89)

* Για τον δείκτη πρωτοτυπίας υπολογίστηκε ο συνολικός αριθμός των επιλύσιμων προβλημάτων.

Πίνακας 2. Σχετική συχνότητα του επιπέδου δημιουργικότητας των απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς το είδος γραφικής παράστασης

Ευελιξία. Προκειμένου να υπολογιστεί η ευελιξία των συμμετεχόντων («τι είδους προβλήματα κατασκεύασαν;»), προηγήθηκε η ταξινόμηση των επιλύσιμων προβλημάτων τους σε κατηγορίες, ανάλογα με τις γνωστικές αξιώσεις των προβλημάτων. Το σύνολο των διαφορετικών κατηγοριών στις οποίες ανήκαν τα επιλύσιμα προβλήματα που κατασκεύασε κάθε συμμετέχων αποτέλεσε τον βαθμό ευελιξίας του. Η κατηγορία «Μεγαλύτερη/Μικρότερη συχνότητα» εμφανίστηκε τις περισσότερες φορές, με τους συμμετέχοντες να δίνουν συχνά τουλάχιστον ένα πρόβλημα που εμπίπτει σε αυτήν (π.χ., «Πόσες ώρες ασχολούνται οι περισσότεροι με το διαδίκτυο;», «Ποια χώρα έχει το μικρότερο ποσοστό ανακύκλωσης;»). Οι περισσότεροι συμμετέχοντες έδιναν προβλήματα μίας κατηγορίας, ενώ κάποιοι δημιούργησαν επιλύσιμα προβλήματα που ανήκαν σε τέσσερις κατηγορίες (4,1%, 14,3% και 8,2%, για το ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής, το κυκλικό διάγραμμα και το ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών, αντίστοιχα).

Στη συνέχεια, αξιοποιήθηκε μία κλίμακα Likert (από το 1 έως το 4), οι βαθμοί της οποίας αντιστοιχούσαν ακριβώς στον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών (μία έως τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες, αντίστοιχα). Ο βαθμός ευελιξίας των συμμετεχόντων βρέθηκε σχετικά χαμηλός (Πίν. 2), με τον μέσο όρο στο ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής να είναι στατιστικά σημαντικά χαμηλότερο από τον μέσο όρο στο κυκλικό διάγραμμα ($t(97)=-2,990$, $p<.01$) και στο ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών ($t(97)=-2,537$, $p<.01$).

Πρωτοτυπία. Καθώς η πρωτοτυπία συνδέεται με τη συχνότητα εμφάνισης κάθε προβλήματος («πόσο συχνά;»), τα επιλύσιμα προβλήματα που εμφανίζονται λιγότερο συχνά θεωρούνται περισσότερο πρωτότυπα από αυτά που εμφανίζονται πιο συχνά. Ακολουθώντας την κατάταξη των προβλημάτων στη βάση μίας κλίμακας Likert, όπως και στους άλλους δείκτες, βρέθηκε πως περισσότερα από τα μισά επιλύσιμα προβλήματα που δημιούργησαν οι συμμετέχοντες για το ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής (59,2%) ήταν προβλήματα που δόθηκαν από τους περισσότερους συμμετέχοντες και, συνεπώς, πολύ χαμηλής πρωτοτυπίας (Πίν. 2). Το 8,2%, το 16,5% και το 8,8% των επιλύσιμων προβλημάτων για το ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής, το κυκλικό διάγραμμα και το ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών, αντίστοιχα, εμφανίστηκαν μόνο μία φορά και θεωρήθηκαν πολύ πρωτότυπα (π.χ., «Πόσοι είναι αυτοί που ασχολούνται με το διαδίκτυο;», «Ποιος είναι ο μέσος όρος ανακύκλωσης

των τριών μεγαλύτερων σε έκταση χωρών;» «Αν ένα κιλό μήλα κάνει 2 ευρώ, πόσα χρήματα εισέπραξε την 4η εβδομάδα;», για τα Έργα 1, 2 και 3, αντίστοιχα). Στατιστικά σημαντικές διαφορές βρέθηκαν ανάμεσα στον βαθμό πρωτοτυπίας των συμμετεχόντων στο κυκλικό διάγραμμα (μ.ο.=2,29, τ.α.=1,09), που ευνόησε τις πρωτότυπες απαντήσεις, και τα άλλα δύο είδη γραφημάτων ($t(97)$=-8,917, p<.01 και $t(97)$=,894, p<.05, για το ραβδόγραμμα μίας και δύο μεταβλητών, αντίστοιχα).

Στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις βρέθηκαν ανάμεσα στους τρεις δείκτες δημιουργικότητας τόσο για το ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής όσο και για το κυκλικό διάγραμμα. Πιο συγκεκριμένα, όσο πιο πολλά επιλύσιμα προβλήματα οι συμμετέχοντες δημιουργούσαν τόσο μεγαλύτερη ευελιξία (r=.799, p<.01 και r=.878, p<.01, αντίστοιχα) και πρωτοτυπία (r=.423, p<.01 και r=.527, p<.01, αντίστοιχα) παρουσίαζαν. Ωστόσο, στο ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών, αν και η ευελιξία συσχετίστηκε θετικά με την πρωτοτυπία (r=,437, p<.01), καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στην ευχέρεια και την πρωτοτυπία.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία αναδεικνύει δύο κύρια ευρήματα. Πρώτον, τα παιδιά της Στ’ τάξης, αν και τυπικά εξοικειωμένα με την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος λόγω της σχολικής τους εμπειρίας, φάνηκε να διαθέτουν περιορισμένο επίπεδο μαθηματικής δημιουργικότητας, καθώς μέσα από τις απαντήσεις τους παρατηρήθηκαν αρκετά χαμηλά επίπεδα ευχέρειας και ευελιξίας. Πιο συγκεκριμένα, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων ήταν σε θέση να κατασκευάσουν επιλύσιμα προβλήματα που ανταποκρίνονταν στις παρεχόμενες πληροφορίες των γραφικών παραστάσεων. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με προηγούμενα ευρήματα για την ικανότητα μεγάλου μέρους του μαθητικού πληθυσμού, όχι απαραίτητα των προχωρημένων ή χαρισματικών στα μαθηματικά μαθητών, να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα (Ngah et al., 2016· Silver, 1997). Ωστόσο, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές εμφάνισαν πολύ λίγη και λίγη ευχέρεια, αδυνατώντας να παρουσιάσουν μεγάλο αριθμό επιλύσιμων προβλημάτων. Περίπου το 10% των παιδιών ήταν σε θέση να διατυπώσουν επτά με οκτώ προβλήματα για μία γραφική παράσταση. Ιδιαίτερα χαμηλός ήταν επίσης ο βαθμός ευελιξίας, με το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων (περίπου 60%) να κατασκευάζουν προβλήματα που ανήκαν σε μόνο μία ή δύο διαφορετικές κατηγορίες. Περισσότερο αισιόδοξα είναι τα αποτελέσματα για τον βαθμό πρωτοτυπίας των απαντήσεων των παιδιών, ο οποίος εμφανίστηκε περισσότερο αυξημένος από τους άλλους δύο. Επιπρόσθετα, δεδομένου ότι, όπως βρέθηκε στην παρούσα εργασία, οι δείκτες

δημιουργικότητας συσχετίζονται ισχυρά μεταξύ τους, είναι δυνατόν να εκφραστεί και, κατά συνέπεια, να ενισχυθεί η μαθηματική δημιουργικότητα των παιδιών (Bicer et al., 2020), ακόμα και με την αξιοποίηση των γραφικών παραστάσεων.

Δεύτερον, το είδος της γραφικής παράστασης επηρέασε τη δημιουργικότητα των παιδιών στην κατασκευή προβλήματος. Ειδικότερα, μεγαλύτερη ευχέρεια εμφάνισαν τα παιδιά στο ραβδόγραμμα δύο μεταβλητών, στο οποίο κατασκεύασαν τα περισσότερα επιλύσιμα προβλήματα, ενώ στο ραβδόγραμμα μίας μεταβλητής παρουσιάστηκε η πιο περιορισμένη ευελιξία. Το κυκλικό διάγραμμα, τέλος, ευνόησε την πρωτοτυπία των παιδιών, καθώς σε αυτό παρουσίασαν τον μεγαλύτερο αριθμό πρωτότυπων επιλύσιμων προβλημάτων. Το γεγονός ότι τα παιδιά από νωρίς εξοικειώνονται με το κυκλικό διάγραμμα ενδεχομένως τους προσφέρει μεγαλύτερη ασφάλεια και ελευθερία στη διατύπωση πρωτότυπων προβλημάτων σε σχέση με το ραβδόγραμμα. Τα αποτελέσματα αυτά θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς, καθώς η περιγραφή διαφορετικών επιπέδων δημιουργικότητας μπορεί να καθοδηγήσει τη διαμόρφωση διδακτικών προγραμμάτων που θα ευνοήσουν την ανάπτυξη δημιουργικότητας μέσα από την ενίσχυση της ικανότητας για κατασκευή μαθηματικού προβλήματος. Άλλωστε κάτι τέτοιο, όπως προτείνουν οι Wang et al. (2022), είναι αποτελεσματικό να γίνεται με την υλοποίηση παρεμβάσεων μεγάλης διάρκειας στις οποίες τα παιδιά εκτίθενται σε διαφορετικές καταστάσεις κατασκευής προβλήματος. Σε μελλοντικές έρευνες, σημαντική θα ήταν η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η διδασκαλία μπορεί να βελτιώσει τις ικανότητες των μαθητών για κατασκευή προβλήματος.

Η παρούσα εργασία αναδεικνύοντας τη δυνατότητα αξιοποίησης των γραφικών παραστάσεων στην κατασκευή προβλήματος υπογραμμίζει ότι σε καμία περίπτωση η κατασκευή προβλήματος δεν ενισχύει από μόνη της τη δημιουργικότητα των μαθητών. Υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που συμβάλλουν στην καλλιέργειά της, όπως το κλίμα μέσα στη σχολική τάξη και η συνεργατικότητα (Bicer et al., 2020· Cai, & Hwang, 2020). Όπως επισημαίνουν οι Leikin και Elgrably (2020), οι εμπειρίες που τα παιδιά αποκομίζουν από τις καταστάσεις κατασκευής προβλήματος λειτουργούν ενισχυτικά για την ανάπτυξη της δημιουργικότητάς τους, βοηθώντας τους να συνειδητοποιήσουν τις μαθησιακές τους δυνατότητες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bevan, D., & Capraro, M.M. (2021). Posing creative problems: A study of elementary students' mathematics understanding. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(3), em0654.

Bicer, A., Lee, Y., Perihan, C., Capraro, M.M., & Capraro, R.M. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 457-485.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37–55.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391.

Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all* (pp. 115-145). NY: Springer.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM, 37*(3), 149-158.

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2021). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο.* Ι.Ε.Π.

Kopparla, M., Bicer, A., Vela, K., Lee, Y., Bevan, D., Kwon, H., Caldwell, C., Capraro, M.M., & Capraro, R.M. (2018). The effects of problem-posing intervention types on elementary students' problem-solving. *Educational Studies, 45*(6), 708-725.

Leikin, R., & Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research, 102*, 101424.

Moses, B., Bjork, E., & Goldenberg, E.P. (2014). Beyond problem solving: Problem posing. In S.I. Brown, & M.I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and applications* (pp. 178-188). NY: Psychology Press.

Ngah, N., Ismail. Z., Tasir, Z., & Mohamad Said, M.N.H. (2016). Students' ability in free, semi-structured and structured problem posing situations. *Advanced Science Letters, 22*(12), 4205-4208.

Silber, S., & Cai, J. (2017). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(2), 163-184.

Silver, E.A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 29*(3), 75–80.

Stoyanova, E., & Ellerton, N.F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: MERGA.

Zhang, L., Stylianides, A.J., & Stylianides, G.J. (2023). Identifying competent problem posers and their characteristics. *The Journal of Mathematical Behavior, 72*, 101086.

Wang, M., Walkington, C., & Rouse, A. (2022). A meta-analysis on the effects of problem-posing in mathematics education on performance and dispositions. *Investigations in Mathematics Learning, 14*(4), 265-287.

ΚΟΙΝΩΝΙΟΓΛΩΣΣΙΚΕΣ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

Βλάχος Ιωάννης[1], Ζαχαριάδης Θεοδόσιος[1], Σακονίδης Χαράλαμπος[2]

[1]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

[2]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

jvlah@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr, xsakonid@eled.duth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η συσχέτιση της επίσημης μαθηματικής γλώσσας με την καθημερινή φυσική γλώσσα είναι σύνθετη. Στην ελληνική γλώσσα, η λέξη σύνολο έχει πολλαπλές έννοιες. Σε αυτήν την εργασία διερευνάται με ποσοτικές και ποιοτικές μεθόδους η επίδραση της φυσικής γλώσσας των μαθητών των τελευταίων τάξεων των τριών σχολικών βαθμίδων στην νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι διαφορετικές σημασίες του όρου και της χρήσης του στην ελληνική γλώσσα επηρεάζουν πολλούς μαθητές στη νοηματοδότηση τη έννοιας του συνόλου στα Μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του συνόλου είναι θεμελιώδης στα μαθηματικά. Κατά τον Cantor «με τη λέξη ‘σύνολο’ εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας» (Μοσχοβάκης, 1993). Από αυτήν την περιγραφή προέκυψαν παράδοξα, η αντιμετώπιση των οποίων οδήγησε στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων, σύμφωνα με την οποία το σύνολο είναι μια πρωταρχική έννοια, δηλαδή δεν υπάρχει τυπικός ορισμός της. Αντιλαμβανόμαστε αυτή την έννοια διαισθητικά, ως μια συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων. Οι Fischbein και Baltsan (1998) ανέδειξαν έναν αριθμό παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με την έννοια του συνόλου και υποστήριξαν ότι μπορούν όλες να προβλεφθούν αν λάβουμε υπόψη μας το διασθητικό «μοντέλο της συλλογής». Παρόλο που η ιδέα μιας συλλογής αντικειμένων θα μπορούσε να προβλέψει εν μέρει τη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου, θα ήταν ασφαλέστερο να θεωρήσουμε ότι αποτελεί μόνο ένα μέρος της εικόνας που έχουν συγκροτήσει οι μαθητές για την έννοια του συνόλου. Στην Ελληνική γλώσσα η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται για να δηλώσει, εκτός από τη συλλογή, το άθροισμα ή το πλήθος των αντικειμένων μιας συλλογής. Στην παρούσα εργασία διερευνούμε την ενδεχόμενη επίδραση της καθημερινής χρήσης της λέξης ‘σύνολο’, στη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Διαισθητικά το σύνολο το αντιλαμβανόμαστε ως μια συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων. Σύμφωνα με τους Fischbein και Baltsan (1998), στον επιστημονικό και μαθηματικό συλλογισμό, «το μοντέλο είναι μια δομή που βοηθά στην επίλυση ενός προβλήματος και στην κατανόηση και την εξήγηση ενός φαινομένου». Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι περισσότεροι μαθητές αντλούν ιδέες από το διαισθητικό «μοντέλο της συλλογής» όταν καλούνται να εμπλακούν με την έννοια του συνόλου και συμπεραίνουν ότι οι παρανοήσεις των μαθητών που συνδέονται με την έννοια του συνόλου μπορεί να προβλεφθούν εάν λάβουμε υπόψη την υπόρρητη επίδραση του. Οι παρανοήσεις που φάνηκε να είναι ισχυρότερες μεταξύ των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου που συμμετείχαν στην έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998) ήταν η απόρριψη της ύπαρξης συνόλων με ένα ή κανένα στοιχείο (μονοσύνολο και κενό σύνολο) και η σύγχυση της ισότητας δύο συνόλων με την ισοπληθικότητα δύο συνόλων (περισσότεροι από τους μισούς μαθητές). Δύο παρανοήσεις που φάνηκαν σε χαμηλότερο ποσοστό ήταν ότι τα στοχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδότητα (περίπου 1/5 των μαθητών) και ότι τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι επαναλαμβανόμενα αντί για αυστηρά διακεκριμένα (λίγο λιγότεροι από τους μισούς). Τέλος, σε ένα χαμηλό ποσοστό συμμετεχόντων φάνηκε η παρανόηση ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, κάτι που οι ερευνητές αποδίδουν στην συχνή ενασχόληση τους με τα γνωστά σύνολα αριθμών.

Οι Adler και Ronda (2015) όρισαν ως ονοματοδοσία (naming) «τη χρήση λέξεων για αναφορά σε άλλες λέξεις, σύμβολα, εικόνες, διαδικασίες ή σχέσεις» υποστηρίζοντας πως:

> Η εμπλοκή των μαθητών με μαθηματικά αντικείμενα συμβαίνει, μεταξύ άλλων, μέσω του τρόπου ονομασίας τους. Η ονοματοδοσία (naming) εστιάζει την προσοχή των μαθητών με συγκεκριμένους τρόπους. Επομένως, ένα κρίσιμο στοιχείο της ομιλίας στην τάξη των μαθηματικών είναι ο τρόπος με τον οποίο ονομάζονται τα αντικείμενα στα οποία θέλουμε να επικεντρωθούμε (Adler και Ronda, 2015, σελ. 244).

Σε μια συγκεκριμένη γλώσσα, μια λέξη μπορεί να έχει πολλές σημασίες. Σύμφωνα με τον Halliday (1978) ένα γλωσσικό ιδίωμα (register) είναι ένα σύνολο σημασιών που είναι κατάλληλο για μια συγκεκριμένη λειτουργία της γλώσσας, μαζί με τις λέξεις και τις δομές που εκφράζουν αυτές τις σημασίες. Η οικειοποίηση της καθημερινής γλώσσας στο ιδίωμα των μαθηματικών μπορεί να είναι πηγή σύγχυσης για τους μαθητές. Για παράδειγμα, η λέξη «διαφορά» σημαίνει «όχι το ίδιο» στην καθημερινή γλώσσα, αλλά στην αριθμητική σημαίνει «το αποτέλεσμα μιας

αφαίρεσης». Στην τάξη, οι λέξεις που χρησιμοποιούνται στο ιδίωμα των μαθηματικών μπορεί να φέρουν μαζί τους επιπλέον σημασίες οι οποίες να εμποδίζουν την διαδικασία μάθησης του μαθηματικού περιεχομένου, επομένως η προσεκτική ονοματοδοσία μιας μαθηματικής έννοιας είναι ζωτικής σημασίας (Planas et al., 2022).

Στα ελληνικά, η λέξη «σύνολο» (σύνθετη λέξη που αποτελείται από το πρόθεμα συν που σημαίνει με ή μαζί και τη λέξη όλο) μπορεί να σημαίνει (α) «το αποτέλεσμα της συνένωσης στοιχείων ή τμημάτων που μπορούν να αποτελέσουν μία ενότητα», (β) «ο ολικός αριθμός ή η ολική ποσότητα πραγμάτων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία» ή (γ) «(ως επίρρημα) με πρόσθεση ή με υπολογισμό όλων των στοιχείων» (Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη, 1998). Στον δημόσιο λόγο, η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται συχνά με την έννοια του αριθμού. Για παράδειγμα, στην εφημερίδα «Το Βήμα» της 4ης, 1ου το έτος 2022, αναφέρεται: «Ακόμα ένα κρούσμα στον Ολυμπιακό – Δώδεκα στο σύνολο». Επίσης, η εφημερίδα «Ελεύθερος Τύπος» της 15ης, 12ου, το 2021 γράφει: «το σύνολο των ασθενών ηλικίας 4-18 ετών είναι 9.377». Το νόημα της λέξης στην κοινή ελληνική γλώσσα αλλά και η χρήση της λέξης στον δημόσιο λόγο, μπορούν να μας διαφωτίσουν σχετικά με τις προϋπάρχουσες εικόνες των μαθητών για την έννοια του συνόλου.

Επιπλέον στο σχολείο, ακόμη και στο μάθημα των Μαθηματικών, η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται πολλές φορές για να δηλώσει έναν αριθμό. Στην σχολική εκπαίδευση, η έννοια του συνόλου ορίζεται ως μια συλλογή από καλά ορισμένα και διακεκριμένα αντικείμενα, αρχικά στην Γ΄ Γυμνασίου, στο μάθημα των Πιθανοτήτων και στη συνέχεια στη Α΄ Λυκείου στο μάθημα της Άλγεβρας. Ωστόσο, από τις προηγούμενες τάξεις, οι μαθητές έχουν ήδη αρχίσει να σχηματίζουν μια εικόνα αυτής της έννοιας. Για παράδειγμα, στην Α΄ Γυμνασίου μαθαίνουν ότι κύκλος είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση από ένα δεδομένο σημείο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου – Βιβλίο μαθητή, σελ. 188). Στο Δημοτικό Σχολείο η χρήση του όρου ΄σύνολο’ για την αναφορά σε έναν αριθμό (άθροισμα ή πλήθος) είναι σύνηθες φαινόμενο. Για παράδειγμα, στην Α΄Δημοτικού στην σελίδα 102 από το βιβλίο του εκπαιδευτικού αναφέρεται η φράση «προσθέτοντας στο σύνολο των αγοριών, των κοριτσιών και όλων των παιδιών της τάξης τον αριθμό 1», ενώ στο β΄ τεύχος του σχολικού βιβλίου της Β΄ Δημοτικού, στην άσκηση 1 της σελίδας 22 (σχήμα 1), η λέξη ‘σύνολο’ χρησιμοποιείται με διττό τρόπο, αφού μπορεί να ερμηνευθεί ως το συνόλο των προϊόντων τα οποία εξετάζουμε ως προς το κόστος αλλά και ως το άθροισμα των τιμών των προϊόντων. Αυτό συνεχίζεται, εν μέρει και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση αφού, σε σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, στο κεφάλαιο της Στατιστικής, στους πίνακες που περιέχουν συχνότητες ή ποσοστά, το

άθροισμα σημειώνεται ως «σύνολο» (βλέπε π.χ. Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου – Βιβλίο μαθητή, σελ. 95).

Ιδιαίτερα στην Γ΄ Λυκείου στο βιβλίο «Μαθηματικά – Στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής», στην σελίδα 55 αναφέρεται η φράση: «Το πλήθος των τιμών των παρατηρήσεων είναι 37 σε σύνολο 50 παρατηρήσεων». Ενώ ο προαναφερθείς ορισμός του κύκλου πιθανότατα θα ενίσχυε την ιδέα ότι ένα σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων, τα άλλα παραδείγματα προωθούν, ενδεχομένως, την ιδέα ότι ένα σύνολο είναι ένας αριθμός αντικειμένων ή το αποτέλεσμα μιας πράξης.

1. Υπολογίζω το συνολικό ποσό που πλήρωσαν ο Σπύρος και ο πατέρας του.

Σχήμα 1.

Στην παρούσα έρευνα εξετάζουμε την νοηματοδότηση των μαθητών της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια του συνόλου και την επίδραση που έχουν πάνω της τα διαφορετικά γλωσσικά ιδιώματα (καθημερινός λόγος, δημόσιος λόγος, σχολική τάξη, σχολικά εγχειρίδια).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας για τις αντιλήψεις που διαμορφώνουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια του συνόλου κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης. Στο πρώτο στάδιο της έρευνας, σχεδιάστηκε με βάση τη βιβλιογραφία (Fischbein & Baltsan, 1998 Tirosh & Tsamir, 1996, Bagni, 2006) ένα ερωτηματολόγιο το οποίο χορηγήθηκε σε 116 μαθητές της Στ΄ Δημοτικού, 127 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και 154 της Γ΄ Λυκείου από διάφορα σχολεία της Ελλάδας. Δεδομένου ότι όλες οι μεταβλητές μας ήταν κατηγορικές, επιλέξαμε το στατιστικό κριτήριο chi-square για να διαπιστώσουμε εάν οι διαφορές μεταξύ των μαθητών των τριών εκπαιδευτικών βαθμίδων ήταν στατιστικά σημαντικές (p=0,05).

Στη συνέχεια, με βάση τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο, επιλέχθηκαν 5 μαθητές της Στ΄Δημοτικού, 5 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου και 6 μαθητές της Γ΄Λυκείου και ο πρώτος συγγραφέας πραγματοποιήσε ημι-δομημένες, ημι-κλινικές συνεντεύξεις (Elkind, 1964) με στόχο την διερεύνηση της προέλευσης των αντιλήψεων τους. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, οι μαθητές της ΣΤ΄ έλαβαν 4 κάρτες. Κάθε κάρτα περιείχε

μία υποθετική συνομιλία μεταξύ ενός/μίας δασκάλου/δασκάλας και των μαθητών του/της με θέμα την έννοια του συνόλου και την ισότητα συνόλων. Για την ανάλυση των δεδομένων από τις συνεντεύξεις υιοθετήσαμε μια την προσέγγιση της «συμβατικής ανάλυσης περιεχομένου» των Hsieh και Shannon (2005) προκειμένου να προσδιορίσουμε το γλωσσικό ιδίωμα που χρησιμοποιεί ο εκάστοτε μαθητής για να αποδώσει νόημα στη έννοια του συνόλου σε μια δεδομένη στιγμή, αλλά και την 'εικόνα' της έννοιας του συνόλου που κυριαρχεί στην συγκεκριμένη στιγμή. Η συγκεκριμένη προσέγγιση επιλέχτηκε επειδή επικεντρώνεται στα γλωσσικά χαρακτηριστικά της επικοινωνίας, δίνοντας έμφαση στο περιεχόμενο του κειμένου και στο γενικότερο πλαίσιο.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Δύο από τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου, οι οποίες εστίαζαν στην έννοια του συνόλου χρησιμοποιήθηκαν για την χαρτογράφηση των αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του συνόλου στα μαθηματικά: 'πώς αντιλαμβάνεστε την έννοια «σύνολο» στα μαθηματικά;' (ερώτηση 1) και 'ποιο είναι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ»' (ερώτηση 4). Η ανάλυση των απαντήσεων στις δυο αυτές ερωτήσεις ανέδειξε τρεις κατηγορίες αντιλήψεων: (α) ως συλλογή (χρησιμοποιούν λέξεις όπως ομάδα ή κατηγορία αντικειμένων και απαντούν ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ» ειναι το {Θ,Α,Λ,Σ} ή το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}) ή (β) ως *αριθμό* (χρησιμοποιούν λέξεις όπως άθροισμα ή πλήθος και απαντούν ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ» ειναι 4 ή 7) ή (γ) ως *συλλογή και αριθμό* (απαντήσεις που συνδυάζουν τα παραπάνω).

Όπως φαίνεται στον πίνακα 1 περίπου το 1/3 των μαθητών στο τέλος του δημοτικού και στο τέλος του Γυμνασίου φαίνεται να νοηματοδοτεί την έννοια του συνόλου αποκλειστικά ως συλλογή. Ένα μικρότερο ποσοστό φαίνεται να την νοηματοδοτεί ως αριθμό και περίπου οι μισοί μαθητές αυτών των τάξεων έχουν διαμορφώσει μια μικτή αντίληψη. Τα αντίστοιχα ποσοστά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($p>0,01$). Αντίθετα στο τέλος του Λυκείου τα 2/3 των μαθητών εμφανίζονται να νοηματοδοτούν την έννοια αποκλειστικά ως συλλογή, το 1/20 ως αριθμό και περίπου το 1/4 έχει μικτή αντίληψη. Οι διαφορές των ποσοστών των μαθητών του Λυκείου από τα αντίστοιχα των μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου είναι στατιστικά σημαντικές ($p<0,001$).

Στην δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου μας ρωτήσαμε τους μαθητές «πιστεύετε ότι οι παρακάτω ομάδες αποτελούν ένα σύνολο; (α) Οι μαθητές του σχολείου που είναι άνω των 17 ετών. (β) Οι ψηλοί μαθητές μίας

τάξης». Για να χαρακτηριστεί ως σωστή, η απάντηση ενός μαθητή θα πρέπει να είναι «σωστό» στο 2α και «λάθος» στο 2β. Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, η πλειοψηφία των μαθητών όλων των βαθμίδων εμφανίζεται να μην μπορεί να διακρίνει πότε τα στοιχεία ενός συνόλου είναι καλά ορισμένα αφού περίπου το 1/5 των μαθητών απαντά λάθος στην συγκεκριμένη ερώτηση. Τα ποσοστά των απαντήσεων ανα τάξη σχεδόν ταυτίζονται (p=0,103)

Ένα κυρίαρχο στοιχείο της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου από τους μαθητές είναι η ιδέα ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να διέπονται από μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, η αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα (ερώτηση 3) όχι απλώς δεν εκλείπει όσο προχωρούμε από το Δημοτικό προς το Λύκειο, αλλά αντιθέτως γίνεται ισχυρότερη. Οι διαφορές μεταξύ Δημοτικού και Λυκείου είναι στατιστικά σημαντικές (p<0,001) ενώ οι διαφορές μεταξύ Λυκείου και Γυμνασίου (p=0,063 που είναι λίγο μεγαλύτερο από το όριο του 0,05) και Γυμνασίου και Δημοτικού (p=0,121 που είναι πολύ μεγαλύτερο από το όριο του 0,05) δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

Τέλος, στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ποσοστά των μαθητών που στην ερώτηση 4 απάντησαν ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ‘ΘΑΛΑΣΣΑ’ είναι είτε το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} είτε το 7. Υποθέτοντας ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές έχουν την αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου δεν χρειάζεται να είναι διακεκριμένα, βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών, ιδιαίτερα των νεότερων φοιτητών, εμφανίζει την συγκεκριμένη αντίληψη (p<0,001).

Πίνακας 1: Αντιλήψεις μαθητών για την έννοια του συνόλου

Αντιλήψεις για την φύση του συνόλου (ερωτήσεις 1 και 4)			
	Δημοτικό	*Γυμνάσιο*	*Λύκειο*
Συλλογή	34,5%	34,6%	66,9%
Αριθμός	19,8%	13,4%	5,2%
Συλλογή & Αριθμός	44,0%	51,2%	27,9%
Διάκριση καλώς ορισμένων στοιχείων (ερώτηση 2)			
	Δημοτικό	*Γυμνάσιο*	*Λύκειο*
Σωστό	18,2%	18,3%	18,5%
Λάθος	81,8%%	81,7%	81,5%
Απαίτηση για κοινή ιδιότητα στοιχείων (ερώτηση 3)			
	Δημοτικό	*Γυμνάσιο*	*Λύκειο*
Σωστό (όχι)	28,6%	19,8%	11,8%
Λάθος (ναι)	71,4%%	80,2%	88,2%
Αποδοχή της συμπερίληψης μη διακεκριμένων στοιχείων (ερώτηση 4)			
	Δημοτικό	*Γυμνάσιο*	*Λύκειο*

Σωστό (Δεν εμφανίζει την αντίληψη)	21,9%	24,0%	43,5%%
Λάθος (Εμφανίζει την αντίληψη)	78,1%%	76,0%	56,5%

Θέλοντας να διερευνήσουμε περαιτέρω την αλληλεπίδραση μεταξύ της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου και της χρήσης της λέξης στην καθημερινή ζωή αλλά και στο σχολικό πλαίσιο προχωρήσαμε σε κλινικού τύπου συνεντεύξεις με μαθητές που συμμετείχαν στο ποσοτικό μέρος της έρευνας. Στόχος των ημι-δομημένων συνεντεύξεων ήταν η ανίχνευση των πόρων νοηματοδότησης. Στη συνέχεια αναλύονται αποσπάσματα των συνεντεύξεων που αναδεικνύουν τέτοιους πόρους 'δανεισμού' με τρεις μαθητές οι οποίοι επιλέχθηκαν εξαιτίας της επικοινωνιακής τους δεινότητας. Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα απόσπασμα της συζήτησης μας με τον Σπύρο, μαθητή της Στ΄Δημοτικού:

Ερευνητής: Άρα, τι θα έλεγες ότι σημαίνει η λέξη σύνολο;

Σπύρος: Σύνολο είναι το πλήθος όλων των αντικειμένων που έχει.

Ερευνητής: Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ή γενικά;

Σπύρος: Γενικά.

Ερευνητής: Τι θα έλεγες λοιπόν ότι είναι ένα σύνολο γενικά;

Σπύρος: Ένα σύνολο θα έλεγα γενικά ότι είναι όσα αντικείμενα έχει, παραδείγματος χάρην πάνω σε ένα τραπέζι έχει τόσα αντικείμενα και θα έλεγα ότι είναι το πλήθος, πόσα αντικείμενα έχει πάνω στο τραπέζι.

Ερευνητής: ΟΚ, αυτό το έχεις ξανακούσει; Θυμάσαι κάπου στο σχολείο, κάποιο πρόβλημα ή κάποιον δάσκαλο να σχολιάζει τι είναι το σύνολο ή το έτσι το αντιλαμβάνεσαι μόνος σου;

Σπύρος: Νομίζω ότι το θυμάμαι από την Πέμπτη με Τετάρτη Δημοτικού.

Ερευνητής: Μπορείς να μου δώσεις ένα παράδειγμα;

Σπύρος: Θυμάμαι ένα, ότι ο Νίκος έχει 4 μολύβια, η Μαρία έχει 8 μαρκαδόρους και έλεγε π.χ., βρες το σύνολο και έπρεπε να προσθέσουμε πόσα έχει ο Νίκος και πόσα έχει η Μαρία.

Εδώ ο Σπύρος και ο ερευνητής σχολιάζουν ένα υποθετικό σενάριο στο οποίο μία δασκάλα ρώτησε έναν μαθητή της αν τα μολύβια του, οι γόμες του, οι ξύστρες του, τα βιβλία του, τα τετράδια του και το κολατσιό του αποτελούν ένα σύνολο αντικειμένων. Ο Σπύρος φαίνεται να υιοθετεί ένα καθημερινό γλωσσικό ιδίωμα και να αποδίδει στο σύνολο την έννοια του αριθμού. Θεωρεί ότι το σύνολο αναφέρεται στο πλήθος των αντικειμένων, τόσο στο συγκεκριμένο σενάριο όσο και γενικά. Τέλος, δηλώνει πως το συγκεκριμένο νόημα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου, είναι συνεπές με τη χρήση του όρου στην τάξη των μαθηματικών του Δημοτικού.

Η Νεφέλη, μια μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου, αναφερόμενη στην ύπαρξη κενών συνόλων, επιχειρηματολόγησε ως εξής:

> Ξέρεις πώς το σκέφτομαι; Ας πούμε, πες ότι βλέπουμε Eurovision και λένε αυτοί που λένε τις ψήφους ότι η Γερμανία, το σύνολο των ψήφων που πήρε είναι 0. Όπως το λέει δεν ακούγεται σαν πάλι το 0 να είναι κάτι; Δηλαδή, ναι μεν είναι 0 οπότε δεν πήρε τίποτα αλλά... είναι ένα... σύνολο!

Η Νεφέλη επικαλείται το ιδίωμα του δημόσιου λόγου προκειμένου να νοηματοδοτήσει την έννοια του συνόλου και ιδιαίτερα αυτήν του κενού συνόλου. Η μαθήτρια αποδίδει στο σύνολο την έννοια του αριθμού (άθροισμα πόντων) συγχέοντας έτσι την έννοια του κενού συνόλου με τον αριθμό μηδέν. Αυτό φυσικά δεν συμφωνεί με την έννοια του συνόλου όπως αυτή νοείται στο ιδίωμα των σχολικών μαθηματικών, αλλά η ιδέα της αντιστοίχισης του αριθμού 0 με το κενό σύνολο δεν είναι ξένη ως προς το ιδίωμα των μαθηματικών αφού στη θεωρία των Zermelo-Fraenkel, το κενό σύνολο χρησιμοποιείται για την κατασκευή των φυσικών αριθμών ($0=\varnothing$, $1=\{\varnothing\}$, $2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ κλπ.).

Το νόημα του αθροίσματος απέδιδε στο σύνολο και η Αυγή, επίσης μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου, υποστηρίζοντας ότι «το σύνολο είναι το άθροισμα, είναι όταν, είτε αριθμοί είτε οποιαδήποτε μονάδα και μεταβλητή, εκφράζεται ως προς... το σύνολο». Η νοηματοδότηση της Αυγής για την έννοια του συνόλου φαίνεται να συνέβαινε μέσα στο ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών. Το ερώτημα «Μπορείς να σκεφτείς κάπου που να έχεις δει τη λέξη;» πυροδότησε τον παρακάτω διάλογο:

> Αυγή: Σίγουρα και στο σχολείο.
>
> Ερευνητής: Σε κάποιο μάθημα;
>
> Αυγή: Όχι, γενικά, στο σχολείο.
>
> Ερευνητής: Μπορείς να μου δώσεις ένα παράδειγμα;
>
> Αυγή: Όχι τώρα στην Γ΄ Γυμνασίου αλλά σε πιο παλιές τάξεις, ειδικά στο Δημοτικό όταν στα προβλήματα έλεγε ‘αν ξέρετε αυτά... να βρείτε το σύνολο των μαθητών’, ξέρω‘γω, σε κάποιο πρόβλημα.
>
> Ερευνητής: Α, στο Γυμνάσιο δεν την θυμάσαι κάπου τη λέξη;
>
> Αυγή: Όχι ιδιαίτερα, δεν νομίζω ότι το...

Όπως φαίνεται, η Αυγή θυμάται να χρησιμοποιεί την λέξη σύνολο ως αριθμό στην σχολική τάξη των Μαθηματικών Δημοτικού, κάτι το οποίο συμφωνεί και με τις δηλώσεις του Σπύρου, αλλά όχι από το Γυμνάσιο.

Ο Μιχαήλ, μαθητής Γ΄ Λυκείου, είναι ένας από τους συμμετέχοντες που δεν ήταν βέβαιοι αν σύνολο σημαίνει συλλογή ή αριθμό. Όταν του ζητήθηκε να προσδιορίσει το σύνολο των γραμμάτων της λέξης

‘ΘΑΛΑΣΣΑ’ αρχικά απάντησε το σύνολο {Θ,Α,Λ,Σ}. Στη συνέχεια όμως δήλωσε ότι «θα μπορούσε να είναι και το 7, γιατί η λέξη θάλασσα έχει 7 γράμματα, , αλλά θα μπορούσε να είναι και το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} γιατί είναι όλα τα γράμματα. Μετά από ένα σύντομο διάλογο με τον ερευνητή, επέλεξε για την νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου ως μίας συλλογής διακριτών αντικειμένων στηριζόμενος σε ένα παιχνίδι:

Μιχαήλ: Θυμάμαι ας πούμε στο δημοτικό που καμιά φορά παίζαμε κρεμάλα και μαντεύαμε μια λέξη. Μόνο τότε θα μπορούσε να είναι το {Θ,Α,Λ,Σ}.

Ερευνητής: Γιατί, με ποιά έννοια;

Μιχαήλ: Με την έννοια ότι κάθε φορά που λέμε ένα γράμμα συμπληρώνεται σε όλη την λέξη οπότε θα σχηματιζόταν απ’ευθείας η λέξη.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δήλωση του μαθητή ότι «μόνο τότε» θα μπορούσε να αποδώσει στο σύνολο το συγκεκριμένο νόημα. Αποσαφηνίζει, λοιπόν τόσο το ιδίωμα μέσα στο οποίο η έννοια έχει την συγκεκριμένη σημασία και τις συνθήκες που ξυπνούν το συγκεκριμένο κομμάτι της εικόνας του μαθητή για την έννοια του συνόλου.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι το «μοντέλο της συλλογής», το οποίο σύμφωνα με τους Fischbein και Baltsan (1998) προβλέπει τις παρανοήσεις των μαθητών όσον αφορά στην έννοια του συνόλου, δεν είναι αρκετό για να προβλέψει τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σε αυτή την έρευνα σχετικά με την φύση του συνόλου. Υψηλό ποσοστό των μαθητών φάνηκε να αντιλαμβάνεται το σύνολο ως αριθμό και όχι ως συλλογή ή να έχει και τις δύο αντιλήψεις ταυτόχρονα. Όπως φαίνεται από τις συνεντεύξεις, η σημασία της λέξης ‘σύνολο’ στην ελληνική γλώσσα καθώς και η χρήσης της σε σχολικά εγχειρίδια και από εκπαιδευτικούς στη σχολική τάξη, φαίνεται να επηρεάζουν τη νοηματοδότηση των μαθητών για την έννοια του συνόλου στα Μαθηματικά, προκαλώντας τις παραπάνω αντιλήψεις.

Η λέξη ‘σύνολο’ χρησιμοποιείται στον δημόσιο λόγο, αλλά ορισμένες φορές και σε σχολικά εγχειρίδια και από εκπαιδευτικούς, με την έννοια που χρησιμοποιείται η αγγλική λέξη ‘total’. Το γεγονός αυτό φαίνεται ότι επηρεάζει τους Έλληνες μαθητές, οι οποίοι νοηματοδοτούν την έννοια του συνόλου ως αριθμό, κάτι που δεν φαίνεται να συμβαίνει σε μαθητές άλλων χωρών, όπως για παράδειγμα εκείνων που χρησιμοποιείται η αγγλική γλώσσα. Γίνεται λοιπόν εμφανής η επιρροή της ονοματοδοσίας στην απόδοση νοήματος από τους μαθητές (Planas et al., 2022) αλλά και η απαίτηση για ιδιαίτερη προσοχή από τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, όχι μόνο κατά τη διδασκαλία της έννοιας του συνόλου αλλά γενικότερα στη σωστή χρήση της λέξης ‘σύνολο’ στη σχολική τάξη.

Τέλος, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δεν φάνηκε να απαιτεί από τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι καλώς ορισμένα και διακεκριμένα. Κατά τους Fischbein και Baltsan (1998), κάποιοι μαθητές έχουν την παρανόηση ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Το ενδιαφέρον στην παρούσα έρευνα είναι το ιδιαίτερα υψηλό ποσοστό των συμμετεχόντων με αυτήν την αντίληψη αλλά και το γεγονός ότι αυτή εμφανίζεται συχνότερα όσο ανεβαίνουμε τις εκπαιδευτικές βαθμίδες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μοσχοβάκης, Ι. (1993). *Σημειώσεις στη συνολοθεωρία*. Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.

Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη. (1998). *Λεξικό της κοινής νεοελληνικής*. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Adler, J., & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(3), 237-254.

Elkind, D. (1964). Piaget's semi-clinical interview and the study of spontaneous religion. *Journal for the Scientific Study of Religion, 4*(1), 40-47.

Fischbein, E., & Baltsan, M. (1998). The mathematical concept of set and the ‘collection’ model. *Educational Studies in Mathematics, 37*(1), 1-22.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. London: University Park Press.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), 1277-1288.

Planas, N., Alfonso, J. M., & Rave-Agudelo, J. G. (2022). Initiating a project for language-and-learner responsiveness in mathematics content teaching. In Fernández, C., Llinares, S., Gutiérrez, Á. & Planas, N. (Eds.), *Proc. 45th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 315-322). PME.

ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Ελένη Καραγιαννίδου[1], Κωνσταντίνος Π. Χρήστου[2]

[1]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, [2] Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

[1]eskaragiannidou@gmail.com, [2]kchristou@auth.gr

Στην παρούσα μελέτη εξετάστηκε η υπόθεση ότι λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις μπορεί να εμφανίζονται λόγω της παρανόησης του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών εκφράσεων. Επίσης, εξετάστηκε η επίδραση μιας παρέμβασης με λανθασμένα παραδείγματα σε ανατρεπτικό κείμενο στην αντιμετώπιση της παρανόησης. 109 μαθητές Γυμνασίου συμμετείχαν σε προ, μετα- και μεταγενέστερο έλεγχο. Στην πειραματική ομάδα (N=44) παρουσιάστηκαν λανθασμένα παραδείγματα ανισώσεων ενώ στην ομάδα ελέγχου (N=65) ανάλογα ορθά παραδείγματα σε επεξηγηματικό κείμενο. Τα αποτελέσματα υποστήριξαν την κύρια υπόθεση. Λανθασμένα και ορθά παραδείγματα ήταν αποτελεσματικά, αλλά χωρίς μακροπρόθεσμα οφέλη.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η κατανόηση των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων είναι μια βασική δεξιότητα στα μαθηματικά. Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες όταν προσπαθούν να προσδιορίσουν ή να αναγνωρίσουν λύσεις τους, ακόμη και όταν γνωρίζουν πώς να τις επιλύσουν χρησιμοποιώντας αλγορίθμους. Η άκριτη μεταφορά των γνώσεων από την αριθμητική στο αλγεβρικό πλαίσιο και η ανεπαρκής κατανόηση των ρητών και αρνητικών αριθμών καθώς και του συμβολισμού που χρησιμοποιείται στην άλγεβρα μπορούν να ερμηνεύσουν ορισμένες από τις κύριες παρανοήσεις των μαθητών (Kieran, 1992). Στη διαδικασία απόκτησης εννοιολογικής κατανόησης του τι είναι οι εξισώσεις/ανισώσεις και τι σημαίνουν οι λύσεις τους, είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό πως λύσεις των εξισώσεων/ανισώσεων αποτελούν οι αριθμοί που αν αντικαταστήσουν τα γράμματα που εμφανίζονται σε αυτές, οι σχέσεις θα επαληθευθούν. Συνεπώς, οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τις αριθμητικές τιμές που μπορούν να αναπαραστήσουν τα γράμματα επηρεάζουν την κατανόηση των λύσεων των εξισώσεων και των ανισώσεων (Christou & Vosniadou, 2012).

Τα γράμματα ως αλγεβρικά σύμβολα εισάγονται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών ήδη από το δημοτικό σχολείο για την αναπαράσταση αρχικά του *γενικευμένου αριθμού*, δηλαδή οποιουδήποτε

αριθμού ενός συνόλου. Οι μαθητές, λοιπόν, διδάσκονται ήδη από το δημοτικό σχολείο ότι τα γράμματα μπορούν να αναπαραστήσουν οποιονδήποτε αριθμό, φυσικό ή ρητό, θετικό ή αρνητικό (εκτός αν έχει οριστεί ένα περιορισμένο σύνολο από όπου παίρνουν τιμές οι μεταβλητές). Ωστόσο, προηγούμενες έρευνες έχουν προσφέρει εμπειρικά δεδομένα για την τάση των μαθητών να συσχετίζουν τα γράμματα σχεδόν αποκλειστικά με φυσικούς αριθμούς (Christou et al., 2022; Christou & Vosniadou, 2012). Η τάση αυτή έχει ερμηνευθεί ως επιμέρους φαινόμενο που σχετίζεται με την *προκατάληψη του φυσικού αριθμού*, που χαρακτηρίζει την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την αρχική γνώση τους για την έννοια του αριθμού, η οποία έχει οργανωθεί γύρω από την μαθηματική έννοια του φυσικού αριθμού, σε καταστάσεις όπου πρέπει να εφαρμοστούν ιδιότητες των ρητών αριθμών (Christou & Vosniadou, 2012; Ni & Zhou, 2005). Αυτή η τάση οδηγεί πολύ συχνά σε λάθη και χαμηλές επιδόσεις, όπως στην περίπτωση του προσδιορισμού του μεγέθους των ρητών ή της εκτέλεσης πράξεων με ρητούς (Ni & Zhou, 2005). Υπάρχουν ενδείξεις ότι αυτή η προκατάληψη μπορεί επίσης να επηρεάσει την περιοριστική αντίληψη των μαθητών ότι τα γράμματα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, γεγονός που μπορεί επίσης να τους οδηγήσει στο να θεωρούν ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής έκφρασης είναι το πρόσημο των αριθμών που μπορεί μόνο να αναπαραστήσει, δηλαδή την *παρανόηση του φαινόμενου πρόσημου* (ΠΦΠ) (Christou et al., 2022). Με άλλα λόγια, οι μαθητές, που λόγω της προκατάληψης του φυσικού αριθμού θα θεωρούσαν τα γράμματα (π.χ. το y στην έκφραση -4y) μόνο ως φυσικούς αριθμούς, ως αποτέλεσμα θα πίστευαν πως οι αλγεβρικές εκφράσεις που τα περιέχουν θα αναπαριστούσαν μόνο συγκεκριμένα είδη αριθμών (π.χ. θετικούς αριθμούς στην περίπτωση του 4y και αρνητικούς ακέραιους στην περίπτωση του -4y), κάτι που έχει αναδειχθεί και σε προηγούμενες μελέτες (Christou et al., 2022; Christou & Vosniadou, 2012).

Μια ενδεχόμενη ΠΦΠ μπορεί να επηρεάσει τις επιδόσεις των μαθητών σε πολλούς διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς, όπως στην κατανόηση των συναρτήσεων, ή στην εύρεση λύσεων σε εξισώσεις και ανισώσεις (Christou & Vosniadou, 2012) και να αναδείξει έτσι πιθανές αιτίες λαθών των μαθητών που εμφανίζονται καθημερινά στην τάξη των μαθηματικών. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές θα θεωρούν λανθασμένα το 4 ως τη μόνη δυνατή λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2=16$, λόγω της ΠΦΠ που τους εμποδίζει να σκεφτούν ότι το x θα μπορούσε να αναπαραστήσει και τον αρνητικό αριθμό -4. Μια κύρια εστίαση αυτής της μελέτης ήταν η διερεύνηση τέτοιων λαθών σε συγκεκριμένα είδη εξισώσεων και ανισώσεων. Ένας δεύτερος στόχος ήταν να δοκιμαστεί ένας πιθανός

τρόπος παρέμβασης που θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν κάποιες από αυτές τις λανθασμένες αντιλήψεις τους.

Λανθασμένα παραδείγματα και ανατρεπτικά κείμενα

Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι παρανοήσεις όπως η ΠΦΠ είναι βαθιά ριζωμένες στις προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών και συνεπώς είναι δύσκολο να αλλάξουν, ιδίως επειδή οι μαθητές δεν έχουν επίγνωση ότι τις έχουν (Christou et al., 2022; Christou & Vosniadou, 2012). Συχνά προτείνεται στη βιβλιογραφία ότι αν οι μαθητές εκτεθούν σε αντιφάσεις που εμφανίζονται λόγω των λανθασμένων αντιλήψεών τους, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την επίτευξη μιας γνωστικής σύγκρουσης που μπορεί να βοηθήσει να συνειδητοποιήσουν αλλά και να αντιμετωπίσουν κάποιες από τις λανθασμένες αντιλήψεις τους (Mason et al., 2019). Προς αυτή την κατεύθυνση, μια στρατηγική που προτείνεται για την αντιμετώπιση μιας παρανόησης είναι το ανατρεπτικό κείμενο. Τα ανατρεπτικά κείμενα είναι κείμενα που προσπαθούν να αντιμετωπίσουν μια εσφαλμένη αντίληψη που χρήζει διόρθωσης, δηλώνοντας ρητά την ανακρίβειά της και παρέχοντας μια νέα, πιο ακριβή εναλλακτική λύση (Lem et al., 2017; Mason et al., 2019). Η χρήση ανατρεπτικών κειμένων έχει δείξει ότι βοηθά τους μαθητές να ξεπεράσουν παρανοήσεις που οδηγούν σε λανθασμένες απαντήσεις και χαμηλά ποσοστά επίδοσης στις φυσικές επιστήμες (Mason et al., 2019), αλλά πρόσφατες μελέτες έδειξαν ανάλογα αποτελέσματα και στα μαθηματικά (Lem et al., 2017).

Τα τελευταία χρόνια η δημιουργία γνωστικής σύγκρουσης μέσω της χρήσης λανθασμένων παραδειγμάτων έχει επίσης διερευνηθεί ως στρατηγική μάθησης σε διάφορους τομείς της μαθηματικής εκπαίδευσης, με πολύ ελπιδοφόρα αποτελέσματα. Τα λανθασμένα παραδείγματα είναι η παρουσίαση λύσεων σε έργα ή απαντήσεων σε ερωτήσεις που περιλαμβάνουν τουλάχιστον ένα λάθος. Υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι βοηθά τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν και να αντιμετωπίσουν μέρη των παρανοήσεών τους, ειδικά στη λύση εξισώσεων, διορθώνοντας τα σχετικά λάθη (Zhao & Acosta-Tello, 2016). Ενώ κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν πως η χρήση λανθασμένων παραδειγμάτων μπορεί να είναι ακόμη και πιο ωφέλιμη στη διδασκαλία από τη χρήση ορθών παραδειγμάτων (Adams et al., 2014), ή προωθούν τον συνδυασμό και των δυο (Zhao & Acosta-Tello, 2016), κάποιοι εκφράζουν τη δυσπιστία τους γι' αυτή την υπεροχή (Van Peppen et al., 2021). Η παρούσα μελέτη θα μπορούσε να προσφέρει σε αυτή τη συζήτηση διερευνώντας την αποτελεσματικότητα των λανθασμένων παραδειγμάτων όταν χρησιμοποιούνται μέσα σε ανατρεπτικό κείμενο για να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν την ΠΦΠ, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε συγκεκριμένα λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις.

Η παρούσα μελέτη

Ο σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν αρχικά να εξετάσει αν κάποια λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις μπορούν να ερμηνευθούν από την τάση των μαθητών να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών εκφράσεων που εμφανίζονται σε αυτές. Υποθέσαμε πως η ΠΦΠ θα οδηγούσε σε εμφάνιση συγκεκριμένων λαθών όταν οι μαθητές πρέπει να επιχειρηματολογήσουν σχετικά με τις λύσεις εξισώσεων και ανισώσεων. Επιπλέον στόχος της μελέτης ήταν ο έλεγχος της αποτελεσματικότητας μιας διδακτικής παρέμβασης στην αντιμετώπιση των επιπτώσεων της ΠΦΠ. Υποθέσαμε ότι μια παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα σε ανατρεπτικό κείμενο θα είχε τα ίδια ή και καλύτερα αποτελέσματα από μια παρέμβαση με ορθά παραδείγματα σε επεξηγηματικό κείμενο.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν συνολικά 109 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου (14,5 ετών περίπου) ενός δημόσιου Γυμνασίου της βόρειας Ελλάδας (57 κορίτσια). Η Πειραματική Ομάδα (ΠΟ) (44 μαθητές, 23 κορίτσια) έλαβε το ανατρεπτικό κείμενο με τα λανθασμένα παραδείγματα ενώ η Ομάδα Ελέγχου (ΟΕ) (65 μαθητές, 34 κορίτσια) έλαβε το επεξηγηματικό κείμενο με ορθά παραδείγματα.

Υλικά

Στους συμμετέχοντες δόθηκαν τρία παρόμοια τεστ σε τρία επιμέρους στάδια ως προ-έλεγχος, μετά-έλεγχος και μεταγενέστερος έλεγχος των επιδόσεών τους σε έργα εξισώσεων και ανισώσεων. Και τα τρία τεστ είχαν την ίδια δομή: περιλάμβαναν εννέα εξισώσεις (πρώτο μέρος) και εννέα ανισώσεις (δεύτερο μέρος), με σχέσεις που είχαν την ίδια μορφή αλλά χρησιμοποιούσαν διαφορετικούς αριθμούς στις διαφορετικές εκδοχές του τεστ. Οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο εναλλακτικές δοσμένες απαντήσεις εάν κάθε εξίσωση/ανίσωση είχε ή όχι λύσεις, και στη συνέχεια να αιτιολογήσουν εν συντομία την απάντησή τους. Συγκεκριμένα, η ερώτηση ήταν: *«Μπορείτε να βρείτε αριθμούς που να επαληθεύουν την εξίσωση/ανίσωση;»* ενώ οι δύο εναλλακτικές απαντήσεις ήταν: *«α) Ναι, οι λύσεις είναι….»*, και *«β) Όχι, δεν υπάρχουν λύσεις γιατί…»*. Οι ερωτήσεις τέθηκαν με αυτόν τον τρόπο με σκοπό να κατευθύνουν τους μαθητές να συλλογιστούν σχετικά με πιθανές λύσεις των δοσμένων εξισώσεων/ανισώσεων χωρίς απαραίτητα να χρησιμοποιήσουν τον τυπικό αλγόριθμο για την επίλυσή τους. Τα έργα περιλάμβαναν αλγεβρικές εκφράσεις με διαφορετικά φαινομενικά

πρόσημα στα δυο μέλη της σχέσης ή δευτεροβάθμιες εξισώσεις που έχουν θετικές και αρνητικές λύσεις, ώστε συγκεκριμένα λάθη να μπορούν να αναδειχθούν ως αποτέλεσμα της τάσης των μαθητών να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών εκφράσεων που εμφανίζονται.

Στο πρώτο μέρος κάθε τεστ τα έργα αποτελούνταν από: α) τρεις εξισώσεις πρώτου βαθμού που έχουν μόνο μία λύση (π.χ. -x=17)· σε αυτές τις περιπτώσεις αναμένονταν ότι οι μαθητές που έχουν την τάση να δείχνουν ΠΦΠ θα απαντούσαν ότι δεν υπάρχει λύση, επειδή ένας θετικός αριθμός (το 17) δεν θα μπορούσε ποτέ να ισούται με έναν αρνητικό (το -x), β) τρεις δευτεροβάθμιες εξισώσεις που έχουν δύο ακέραιες λύσεις (π.χ., $y^2=25$, με λύσεις: y=± 5)· σε αυτές τις περιπτώσεις οι μαθητές που έχουν την τάση να δείχνουν ΠΦΠ θα απαντούσαν λανθασμένα παρέχοντας μόνο θετικούς αριθμούς ως πιθανές λύσεις και γ) τρεις δευτεροβάθμιες εξισώσεις χωρίς λύση (π.χ., $y^2=-16$)· αυτά τα έργα χρησιμοποιήθηκαν ώστε η εναλλακτική απάντηση *«Όχι δεν υπάρχουν λύσεις γιατί…»* να είναι η σωστή απάντηση.

Το δεύτερο μέρος κάθε τεστ περιελάβανε εννέα ανισώσεις με την ίδια δομή με το πρώτο μέρος. Έξι από τις ανισώσεις είχαν ένας εύρος λύσεων (π.χ. -y>7) ενώ οι τρεις από αυτές δεν είχαν λύση (π.χ. $3x^2<-3$). Αναμέναμε πως λόγω της ΠΦΠ κάποιοι μαθητές θα θεωρούσαν ότι δεν υπάρχουν λύσεις σε περιπτώσεις όπου, για παράδειγμα, ένας θετικός αριθμός εμφανιζόταν να είναι μικρότερος από έναν *αρνητικό* αριθμό που αναπαριστάνονταν από μία φαινομενικά αρνητική αλγεβρική έκφραση (π.χ., όταν 2<-y-2).

Η διδακτική παρέμβαση

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, η ΠΟ διάβασε τέσσερα λανθασμένα παραδείγματα προερχόμενα από την λανθασμένη απάντηση ενός υποθετικού μαθητή σε ανισώσεις με διαφορετικά φαινομενικά πρόσημα σε κάθε πλευρά· η λανθασμένη απάντηση ήταν συνέπεια της ΠΦΠ. Τα λανθασμένα παραδείγματα επεξηγούνταν σε ένα σύντομο κείμενο που ακολουθούσε τις αρχές του ανατρεπτικού κειμένου. Από την άλλη, η ΟΕ διάβασε ένα σύντομο επεξηγηματικό κείμενο που παρουσίαζε αντίστοιχα ορθά λυμένα παραδείγματα, επίσης με ανισώσεις (βλ. Εικόνα 1), τα οποία υπενθύμιζαν στους μαθητές ότι τόσο οι θετικοί όσο και οι αρνητικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν από τα γράμματα που εμφανίζονται στις ανισώσεις. Στην παρέμβαση συμπεριλήφθηκαν μόνο ανισώσεις γιατί αποτελούν πιο δύσκολο αντικείμενο κατανόησης για τους μαθητές (Kieran, 1992). Επιπλέον, η λύση στις ανισώσεις συνήθως είναι είναι ένα σύνολο αριθμών, κάτι που βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν

καλύτερα τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς, που μπορούν να λάβουν ένα εύρος τιμών αντί για μία ή δύο άγνωστες, προς το παρόν, τιμές, γνώση χρήσιμη και για τον τομέα των εξισώσεων.

Διαδικασία

Τα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν είχαν δοκιμαστεί πιλοτικά σε 4 μαθητές της ίδιας ηλικιακής ομάδας και τάξης φοίτησης. Η συμβολή της πιλοτικής έρευνας υπήρξε ουσιαστική στην οριστικοποίηση του κάθε τεστ και στον καθορισμό του χρόνου που απαιτείται για την απάντησή του.

Λανθασμένο παράδειγμα σε ανατρεπτικό κείμενο	**Ορθά λυμένο παράδειγμα σε επεξηγηματικό κείμενο**
Να βρεθούν οι πιθανές λύσεις για την ανίσωση: x + 1 < -x – 1 Ένας μαθητής είπε πως η ανίσωση είναι αδύνατη, επειδή η θετική ποσότητα «x+1» δεν μπορεί ποτέ να είναι πιο μικρή από την αρνητική «-x-1». Η απάντηση που έδωσε ο μαθητής είναι λανθασμένη. Το γράμμα x έχει θετική αξία και το -x αρνητική αξία μόνο όταν στη θέση του βάζουμε θετικούς αριθμούς. Αυτό δεν ισχύει όταν στη θέση του βάζουμε αρνητικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, αν x=-5 τότε: x+1=-5+1=- 4 και -x-1=-(-5)-1 =5–1=4. Έτσι προκύπτει ότι -4<4, άρα η x=-5 είναι μία τιμή που επαληθεύει την ανίσωση.	**Να βρεθούν οι πιθανές λύσεις για την ανίσωση: x + 1 < -x – 1** Θυμόμαστε πως τη θέση του γράμματος *x* μπορεί να πάρει τόσο θετικός όσο και αρνητικός αριθμός. Για παράδειγμα, για *x* = -2 έχουμε: -2+1< -(-2)-1 ή -1<+2-1 ή -1<1 που ισχύει, άρα το -2 είναι τιμή που επαληθεύει την ανίσωση. Αλλά, για *x* = 4 έχουμε: 4+1<- 4-1 ή 5<-5 που δεν ισχύει, άρα το 4 δεν είναι τιμή που επαληθεύει την ανίσωση.

Εικόνα 3. Παράδειγμα λανθασμένου και ορθά λυμένου παραδείγματος

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην μελέτη συμπλήρωσαν τα τεστ στην τάξη τους, παρουσία του καθηγητή μαθηματικών τους και ενός εκ των ερευνητών. Όλοι οι συμμετέχοντες – ανεξαρτήτως ομάδας – είχαν 20’ για να ολοκληρώσουν κάθε τεστ. Ο χρόνος αυτός ήταν επαρκής και τους επέτρεπε να ολοκληρώσουν το κάθε τεστ χωρίς πίεση. Αμέσως μετά τον προέλεγχο πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση. Η διδακτική παρέμβαση διήρκησε περίπου 15’. Κάθε μαθητής έλαβε τα παραδείγματα σε έντυπη μορφή και τα μελέτησε ατομικά. Η ερευνήτρια που ήταν παρούσα στη διαδικασία, έδινε επεξηγήσεις σε τυχών διευκρινιστικές ερωτήσεις, τονίζοντας τα σημαντικά σημεία όσων αναγράφονταν στο

κείμενο που είχαν λάβει οι μαθητές. Μετά την παρέμβαση χορηγήθηκε το τεστ του μετα-ελέγχου κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Ο προέλεγχος πραγματοποιήθηκε πριν από τη διδακτική παρέμβαση και αμέσως μετά ακολούθησε ο μετα-έλεγχος, ενώ ο μεταγενέστερος έλεγχος πραγματοποιήθηκε, κάτω από τις ίδιες συνθήκες, έναν μήνα μετά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος που αφορά την ενδεχόμενη επίδραση της ΠΦΠ στο συλλογισμό για τη λύση εξισώσεων και ανισώσεων, οι απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν ως λανθασμένες (0), μερικώς ορθές (1) ή ορθές (2). Μερικώς ορθές χαρακτηρίστηκαν εκείνες οι απαντήσεις στις οποίες δόθηκε μόνο η μια εκ των δυο λύσεων των δευτεροβάθμιων εξισώσεων (π.χ. στη $x^2+1=5$ δόθηκε μόνο η λύση: $x=2$). Παράλληλα, μερικώς ορθές χαρακτηρίστηκαν οι απαντήσεις με ελλιπείς αιτιολογήσεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι λιγότερο από το ένα τρίτο των απαντήσεων τόσο στις εξισώσεις όσο στις ανισώσεις ήταν σωστές, ενώ περίπου το ένα τρίτο των απαντήσεων των μαθητών ήταν λανθασμένες.

Εστιάζοντας την ανάλυση στα λάθη των μαθητών, οι λανθασμένες απαντήσεις κατατάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες: α) Λάθη παρερμηνείας φαινομενικού προσήμου, όπου οι μαθητές ανέφεραν ρητά το φαινομενικό πρόσημο (ΦΠ) των εκφράσεων στις αιτιολογήσεις τους (π.χ. «οι δύο όροι της εξίσωσης έχουν αντίθετα πρόσημα και δύο αντίθετοι αριθμοί δεν μπορούν να είναι ίσοι»), β) λάθη δοκιμών με ακέραιους αριθμούς, όπου οι μαθητές δοκίμαζαν τιμές για να βρουν πιθανές λύσεις μόνο από το σύνολο των ακέραιων αριθμών (π.χ. «η ανίσωση $2 < -\frac{2}{2x}$ δεν έχει λύσεις, δοκίμασα τιμές όπως: 1, 2...»), γ) άλλα λάθη, που οφείλονταν σε λανθασμένους υπολογισμούς ή όταν δεν ήταν δυνατόν να προσδιοριστεί η αιτία του λάθους. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, περισσότερο από το 80% των εσφαλμένων απαντήσεων στον προέλεγχο ήταν λάθη με ρητή αναφορά στο φαινομενικό πρόσημο ή λάθη δοκιμών με ακέραιους αριθμούς, επομένως λάθη που οφείλονταν στην ΠΦΠ.

Η επίδραση της παρέμβασης

Για την διερεύνηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος που αφορά την επίδραση της συγκεκριμένης παρέμβασης υπολογίστηκαν οι μέσες

επιδόσεις για κάθε μία από τις δύο ομάδες, στις εξισώσεις και στις ανισώσεις, για καθεμία από τις τρεις φάσεις της έρευνας, στη βάση της αρχικής βαθμολόγησης των απαντήσεων (βλ. Πίνακα 2). Ανάλυση Mixed ANOVA με εξαρτημένη μεταβλητή τη μέση επίδοση των μαθητών και τρεις παράγοντες (ομάδα, εξίσωση/ανίσωση, φάση έρευνας) ανέδειξε την επίδραση της φάσης έρευνας ως παράγοντας που επιδρά στις επιδόσεις. Πιο συγκεκριμένα, φάνηκε πως οι μαθητές ανεξαρτήτου ομάδας πέτυχαν υψηλότερες επιδόσεις στη φάση του μετά-ελέγχου συγκριτικά με την φάση του προ-ελέγχου, τόσο στις εξισώσεις [$F(1.836, 196.439) = 15.015$, $p < .001$, $n_p^2 = .123$] (η προσαρμοσμένη δοκιμή Huynh-Feldt αναφέρεται λόγω παραβίασης της σφαιρικότητας) όσο και στις ανισώσεις [$F(2, 214) = 34.973$, $p < .001$, $n_p^2 = .246$] (βλ. Πίνακα 2). Ανάμεσα στις επιδόσεις της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά ούτε στις εξισώσεις [$F(1,107) = .030$, $p = .864$, $n_p^2 = .000$] οτε στις ανισώσεις [$F(1,107) = .509$, $p = .477$, $n_p^2 = .005$].

		Εξισώσεις		Ανισώσεις	
		ΠΟ	ΟΕ	ΠΟ	ΟΕ
ΦΠ(%)	Προ-έλεγχος	44.8	50.0	62.3	62.4
	Μετα-έλεγχος	34.8	32.5	39.3	32.8
	Μεταγενέστερος	40.8	38.8	45.7	38.4
Δοκιμές με ακέραιους (%)	Προ-έλεγχος	41.4	31.4	23.2	17.3
	Μετα-έλεγχος	47.8	38.6	46.7	57.0
	Μεταγενέστερος	41.4	42.5	24.1	32.3
Άλλο (%)	Προ-έλεγχος	13.8	18.6	14.5	20.3
	Μετα-έλεγχος	17.4	28.9	14.0	10.2
	Μεταγενέστερος	17.8	18.7	30.2	29.3

Πίνακας 1. Ποσοστά για κάθε κατηγορία λανθασμένων απαντήσεων

Όσον αφορά τις επιμέρους αλλαγές στις επιδόσεις ανά φάση της έρευνας οι μέσες επιδόσεις των μαθητών της ΠΟ αυξήθηκαν στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο τόσο στα έργα εξισώσεων [$t(43) = 3.109$, $p < .001$] όσο και ανισώσεων [$t(43) = 5.560$, $p < .001$]. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στη μέση επίδοση της ΟΕ στις εξισώσεων [$t(64) = 6.894$, $p < .001$] και στις ανισώσεις [$t(64) = 6.351$, $p < .001$]. Η ΠΟ δεν έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις της στον μεταγενέστερο έλεγχο συγκριτικά με τον προ-έλεγχο στις εξισώσεις [$t(43) = 1.393$, $p = .171$] ή στις ανισώσεις [$t(43) = 1.499$, $p = .141$]. Αντίστοιχα, η ΟΕ σημείωσε στατιστικά σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στον μεταγενέστερο έλεγχο

σε σύγκριση με τον προ-έλεγχο μόνο στις ανισώσεις [$t(64) = 3.281$, $p = .002$] αλλά όχι στις εξισώσεις [$t(64) = 1.658$, $p = .102$] (Βλ. Πίνακας 2).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα ενισχύουν την κύρια υπόθεση της μελέτης ότι η τάση των μαθητών να παρερμηνεύουν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων μπορεί να επηρεάσει το συλλογισμό τους σχετικά με τις λύσεις εξισώσεων και ανισώσεων, ειδικά όταν αλγεβρικές εκφράσεις με διαφορετικά φαινομενικά πρόσημα εμφανίζονται στα δυο μέλη τους. Στον προ-έλεγχο πολλοί μαθητές και των δυο ομάδων απαντούσαν ότι εξισώσεις όπως η $-y-1=y+1$ και η $-x=17$ είναι αδύνατες επειδή τα μέλη τους έχουν αντίθετα πρόσημα και ότι *ένας θετικός αριθμός δεν μπορεί να είναι ίσος με έναν αρνητικό*. Παρόμοιες απαντήσεις εμφανίστηκαν στην περίπτωση ανισώσεων όπως η $-y>7$ όπου οι μαθητές απέρριψαν την πιθανότητα *μια αρνητική τιμή να είναι μεγαλύτερη από μια θετική*. Αυτά τα ευρήματα βρίσκονται σε συμφωνία και επεκτείνουν προηγούμενη έρευνα σχετικά τις αρνητικές επιδράσεις της τάσης των μαθητών να παρερμηνεύουν το φαινόμενο πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων ως το πραγματικό πρόσημο των αριθμών που μπορούν να αναπαραστήσουν (Christou et al, 2022; Christou & Vosniadou, 2012).

		Προ-έλεγχος		Μετα-έλεγχος		Μεταγενέστερος έλεγχος	
		ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
Εξισώσεις	Πειραματική Ομάδα	.74	.31	.90	.33	.82	.40
	Ομάδα Ελέγχου	.72	.26	.92	.24	.80	.36
Ανισώσεις	Πειραματική Ομάδα	.61	.28	1.02	.42	.71	.44
	Ομάδα Ελέγχου	.58	.25	.90	.32	.77	.37

Πίνακας 2. Μέσες επιδόσεις ανά κατηγορία έργου και φάση έρευνας

Επιπλέον, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μια σύντομη διδακτική παρέμβαση με λανθασμένα παραδείγματα ήταν αποτελεσματική στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στα έργα που τους δόθηκαν, τουλάχιστον βραχυπρόθεσμα. Στατιστικά σημαντικές διαφορές στη μέση επίδοση της πειραματικής ομάδας ανάμεσα στον προ- και τον μετά-έλεγχο, έδειξαν ότι οι μαθητές αυτής της ομάδας κατάφεραν να αντιμετωπίσουν ως έναν βαθμό τις λανθασμένες αντιλήψεις τους για το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών εκφράσεων. Η χαμηλότερη επίδοση της

πειραματικής ομάδας στον μεταγενέστερο έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο δείχνει, ωστόσο, ότι η γνώση που αποκτήθηκε δεν ήταν αρκετή για τις απαραίτητες αλλαγές στη βαθιά δομή της προϋπάρχουσας γνώσης, που υποστηρίζει την ΠΦΠ.

Φάνηκε επίσης ότι και οι δύο παρεμβάσεις (με λανθασμένα και με ορθά λυμένα παραδείγματα) είχαν παρόμοια αποτελέσματα. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με αυτό το μέρος της βιβλιογραφίας που αναφέρει ότι τόσο τα λανθασμένα όσο και τα ορθά λυμένα παραδείγματα είναι αποτελεσματικά στη βελτίωση των παρανοήσεων των μαθητών σε τομείς όπως οι εξισώσεις (Zhao & Acosta-Tello, 2016). Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι μια υπενθύμιση όσον αφορά το πραγματικό εύρος τιμών που μπορεί να πάρει ένα γράμμα στην άλγεβρα, δοσμένη είτε με τη μορφή ενός λανθασμένου ή ορθού παραδείγματος, θα μπορούσε να είναι αρκετή για να βοηθήσει τους μαθητές να βρουν λύσεις σε εξισώσεις και ανισώσεις, χωρίς να επηρεαστούν τόσο από την ΠΦΠ, τουλάχιστον βραχυπρόθεσμα.

Αυτό θα μπορούσε να σημαίνει ότι αν λανθασμένα παραδείγματα σε ανατρεπτικά κείμενα ή και ορθά παραδείγματα σε επεξηγηματικά κείμενα, όπως αυτά που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή τη μελέτη, συμπεριληφθούν στα σχολικά βιβλία ώστε να χρησιμοποιούνται πιο συστηματικά στην τάξη των μαθηματικών, θα μπορούσαν να αποδειχθούν ωφέλιμα ακόμη και πιο μακροπρόθεσμα. Κάτι τέτοιο μένει, ωστόσο, να ελεγχθεί εμπειρικά από μελλοντικές έρευνες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S., & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. *Computers in Human Behavior, 36*(2014), 401-411.

Christou, K. P., Kyrvei, D. I., & Vamvakoussi, X. (2022). Interpreting literal symbols in algebra under the effects of the natural number bias. *Mathematical Thinking and Learning,* 1-14.

Christou, K.P., & Vosniadou, S. (2012) What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 1–27.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). Macmillan.

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). Using refutational text in mathematics education. *ZDM*, *49*(4), 509–518.

Mason, L., Zaccoletti, S., Carretti, B., Scrimin, S., & Diakidoy, I.-A. N. (2019). The Role of Inhibition in Conceptual Learning from Refutation and Standard Expository Texts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(3), 483–501.

Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Van Peppen, L. M., Verkoeijen, P. P. J. L., Heijltjes, A. E. G., Janssen, E. M., & Van Gog, T. (2021). Enhancing students' critical thinking skills: Is comparing correct and erroneous examples beneficial? *Instructional Science*, *49*(6), 747–777.

Zhao, H., & Acosta-Tello, E. (2016). The impact of erroneous examples on students' learning of equation solving. *Journal of Mathematics Education*, *9*(1), 57-68.

ΥΠΟΘΕΤΙΚΟ-ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΕ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗΣ ΖΩΗΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αναστασία Δατσογιάννη[1], Stefan Ufer[2]

Πανεπιστήμιο Κύπρου[1], University of Munich (LMU)[2]

datsogianni.anastasia@ucy.ac.cy[1], ufer@math.lmu.de[2]

Ο υποθετικό-παραγωγικός συλλογισμός (δηλώσεις "αν…τότε") κατέχει κεντρικό ρόλο στα Μαθηματικά ενώ εντοπίζονται ελάχιστα ερευνητικά αποτελέσματα για μαθητές Δημοτικού. 102 μαθητές Β', Δ' και ΣΤ' τάξης Δημοτικών σχολείων της Κύπρου σε ατομική δομημένη συνέντευξη έλυσαν οκτώ δραστηριότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού (τέσσερις λογικές μορφές για καθεμία) σε πλαίσια καθημερινής ζωής και μαθηματικών. Οι μαθητές φάνηκε να εμφανίζουν ικανότητες αυτού του συλλογισμού σε ένα βαθμό. Το πλαίσιο δεν φάνηκε να επιδρά στην επίδοση των παιδιών, σε αντίθεση με τη λογική μορφή. Αποτελέσματα, περιορισμοί και εισηγήσεις αναλύονται στην παρούσα εργασία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο υποθετικό-παραγωγικός συλλογισμός με "αν..τότε" προτάσεις, αποτελεί κύρια συνιστώσα του λογικού συλλογισμού και της ανωτέρου επιπέδου σκέψης (Inglis & Simpson, 2009). Η σημαντικότητα αυτού του είδους συλλογισμού για την μάθηση και την επιτυχία στα μαθηματικά φαίνεται σε πληθώρα ερευνών (Morsanyi & Szücs, 2014· Nunes et al., 2007). Συγκεκριμένα, ο παραγωγικός συλλογισμός συνδέεται άρρηκτα με την ανάπτυξη της κατανόησης αυστηρών αποδείξεων από τους μαθητές (Foltz et al., 1995) και θεωρείται κυρίαρχο είδος συλλογισμού στα θεωρήματα Μαθηματικών. Ακόμη και οι βασικές μαθηματικές έννοιες χαρακτηρίζονται από μια αυστηρή λογική δομή, για παράδειγμα "*Αν το άθροισμα δύο ακεραίων αριθμών είναι περιττός αριθμός, (τότε) το γινόμενο τους είναι άρτιος"*. Οι προτάσεις αυτές εντοπίζονται και στην καθημερινή επικοινωνία (π.χ., "*Αν κάποιος βουτήξει στη θάλασσα, (τότε) θα βραχεί*").

Ο υποθετικό-παραγωγικός συλλογισμός βασίζεται σε μια δήλωση/ένα κανόνα της μορφής «*αν p, τότε q*», το p ονομάζεται "θέση" και το q "ακολουθία". Για να εξαχθεί ένα συμπέρασμα απαιτείται επιπλέον μια προκείμενη πρόταση. Τέσσερις διαφορετικές προκείμενες προτάσεις συνιστούν τις τέσσερις λογικές μορφές του πίνακα 1. Αυτές οι μορφές μπορούν να περιγραφούν ανάλογα με τη διατύπωση της προκείμενης πρότασης (καταφατική: MP και AC και αρνητική: MT και DA) και τον

τύπο του συμπεράσματος (ορισμένο για την MP & MT μορφή και αόριστο για την AC & DA μορφή).

Λογικές μορφές	Προκείμενες προτάσεις	Συμπέρασμα	Είδος ορθού συμπεράσματος
Θέση του λόγου-Modus Ponens (MP)	"*p* αληθές"	"*q* αληθές"	Ορισμένο
Άρση της ακολουθίας-Modus Tollens (MT)	"*q* ψευδές"	"*p* ψευδές"	Ορισμένο
Θέση της ακολουθίας-Affirmation of the Consequent (AC)	"*q* αληθές"	"*p* αληθές ή ψευδές"	Αόριστο
Άρση του λόγου-Denial of the Antecedent, (DA)	"*p* ψευδές"	" *q* αληθές ή ψευδές"	Αόριστο

Πίνακας 1: Περιγραφή υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού (λογικές μορφές, προκείμενες προτάσεις, συμπέρασμα και είδος)

Με βάση την παραπάνω μαθηματική δήλωση, "*Αν το άθροισμα δύο ακεραίων αριθμών είναι περιττός αριθμός* (θέση*"p"*)*, (τότε) το γινόμενο τους είναι άρτιος"* (ακολουθία, "*q"*), μπορεί να αποδειχθεί ότι αποτελεί επαρκή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη να είναι το άθροισμα δύο ακεραίων περιττός αριθμός, για να είναι άρτιο το γινόμενο τους. Για την μορφή MP ("*p* αληθές", δηλαδή το άθροισμα δύο αριθμών είναι περιττός) το συμπέρασμα είναι ορισμένο-βέβαιο ότι το γινόμενο των αριθμών είναι άρτιος (q αληθές). Στην μορφή MT, η προκείμενη πρόταση είναι "*q* ψευδής" (δύο αριθμοί που δεν έχουν άρτιο γινόμενο), το συμπέρασμα είναι ορισμένο-βέβαιο ότι το άθροισμα δεν είναι περιττός ("*p"* ψευδές). Στη μορφή AC, η προκείμενη πρόταση είναι "q αληθής" άρα έχουμε δύο αριθμούς που έχουν άρτιο γινόμενο, το ορθό συμπέρασμα είναι αόριστο ("*p* αληθές ή ψευδές") άρα το άθροισμα είναι περιττός (π.χ., 3+4) ή άρτιος (π.χ., 2+4). Με τον ίδιο τρόπο, στη μορφή DA, η προκείμενη πρόταση "p είναι ψευδής" (δύο αριθμοί που δεν έχουν περιττό άθροισμα), το ορθό συμπέρασμα είναι αόριστο " *q* αληθές ή ψευδές" (το γινόμενο των αριθμών είναι περιττός ή άρτιος).

Υπάρχουν ελάχιστα ερευνητικά στοιχεία σχετικά με τις ικανότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού μαθητών Δημοτικού σε μαθηματικό πλαίσιο. Αν και προηγούμενα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν πραγματικές δυσκολίες με αυτό το είδος συλλογισμού (Küchemann & Hoyles, 2002), μελέτες στον τομέα της ψυχολογίας δείχνουν ότι ακόμη και παιδιά σε μικρές ηλικίες

μπορούν να συλλογιστούν ορθά όταν οι δραστηριότητες αφορούν ένα γνώριμο περιεχόμενο της καθημερινής ζωής (Markovits & Thompson, 2008). Εντοπίζεται λοιπόν στην αναπτυξιακή ψυχολογία, ένα σώμα βιβλιογραφίας που τονίζει πρώιμες ικανότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού σε συγκεκριμένα είδη δραστηριοτήτων που εντάσσουν έννοιες και καταστάσεις της καθημερινής ζωής (Markovits & Thomson, 2008). Αυτό οδηγεί στο ερώτημα εάν και πώς ο υποθετικό-παραγωγικός συλλογισμός με μαθηματικές έννοιες είναι διαφορετικός από τον υποθετικό-παραγωγικό συλλογισμό με έννοιες της καθημερινότητας.

Προηγούμενες μελέτες (Markovits, 2000·Markovits & Thompson, 2008) έχουν δείξει ότι ακόμη και τα παιδιά ηλικίας 6 ή 7 ετών μπορούν να εξάγουν ορθά συμπεράσματα στις λογικές μορφές AC και DA, όταν το περιεχόμενο απλές κατηγορικές προτάσεις (π.χ., "*Αν το ζώο είναι γάτα, τότε έχει πόδια*"). Ο Markovits (2014) σε προτεινόμενο αναπτυξιακό μοντέλο, υποδηλώνει ότι οι μαθητές ηλικίας 7 και 8 ετών διαθέτουν δεξιότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού με κατηγορικές προτάσεις και τα παιδιά ηλικίας 10 έως 12 ετών μπορούν να εξάγουν λογικά συμπεράσματα με γνώριμες προτάσεις αιτιακής φύσεως της καθημερινής ζωής ("*Αν ένα ποτήρι πέσει στο πάτωμα, θα ακουστεί θόρυβος*"). Οι Chao και Cheng (2000) βρήκαν επίσης στοιχεία για την επίδραση του πλαισίου στον υποθετικό-παραγωγικό συλλογισμό σε παιδιά προσχολικής ηλικίας.

Μία από τις επικρατέστερες θεωρίες που έχουν χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού σε μικρά παιδιά είναι η Θεωρία Νοητικών Μοντέλων (Mental Model Theory, MMT). Αυτή υποδηλώνει ότι εξάγονται ορθά συμπεράσματα με την δημιουργία νοητικών μοντέλων για την δοσμένη κατάσταση (Johnson-Laird & Byrne, 2002). Ειδικότερα, στην μορφή MP το άτομο δημιουργεί το μοντέλο 'p και q', στην MT μορφή το μοντέλο' όχι p και όχι q' και στις AC και DA μορφές, δημιουργεί εναλλακτικά μοντέλα του τύπου 'όχι p και q" (καθώς το p δεν είναι αναγκαία συνθήκη για το q). Η θεωρία αυτή φαίνεται να περιγράφει με ακρίβεια τον συλλογισμό μαθητών Δημοτικού σε έννοιες που αφορούν την καθημερινή ζωή (π.χ., Markovits, 2000· Markovits & Thompson, 2008). Αυτό το μοντέλο υιοθετείται και στην παρούσα μελέτη και υποθέτουμε ότι η (μαθηματική) γνώση περιεχομένου θα επηρεάσει τη δημιουργία νοητικών μοντέλων, όταν οι δηλώσεις αφορούν μαθηματικές έννοιες.

Αναφορικά με τις λογικές μορφές, πολλές μελέτες έχουν βρει ότι οι μορφές AC και DA συνήθως δεν κατακτώνται πριν την ηλικία των 11-12 ετών, ενώ ακόμη μόνο το ένα τρίτο περίπου των ενηλίκων έχει βρεθεί να εξάγει ορθά συμπεράσματα σε αυτές τις μορφές (Gauffroy & Barrouillet, 2009, Markovits, 2014· Christophorides et.al., 2016). Επιπλέον, έρευνες

(Janveau-Brennan & Markovits, 1999) έχουν επίσης δείξει ότι η λογική μορφή επηρεάζει έντονα τον υποθετικό-παραγωγικό συλλογισμό. Συνολικά, υποδεικνύεται ότι τα παιδιά ανταποκρίνονται ορθά στη μορφή MP πρώτα, έπειτα στην MT και αργότερα στις μορφές AC και DA. Όσον αφορά την ανάπτυξη του συλλογισμού με καταφατικές και αρνητικές διατυπωμένες προκείμενες προτάσεις (δηλαδή MP και AC έναντι MT και DA λογικές μορφές), εντοπίζονται λιγότερα ευρήματα ερευνών. Οι αρνήσεις όμως στις προκείμενες προτάσεις φαίνεται ότι δημιουργούν συγκεκριμένες δυσκολίες (Schroyens et al., 2001).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σε αυτή τη μελέτη, αντιπαραβάλλεται ο υποθετικό-παραγωγικός συλλογισμός των μαθητών σε δραστηριότητες μαθηματικού περιεχομένου και καθημερινής ζωής. Η μελέτη στηρίζεται στα ακόλουθα ερωτήματα:

(1) Σε ποιο βαθμό διαφέρει η επίδοση των παιδιών Δημοτικού σε δραστηριότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού σε μαθηματικό πλαίσιο και στο πλαίσιο καθημερινής ζωής;

Η κατανόηση των καταστάσεων, στις οποίες ενσωματώσαμε το μαθηματικό περιεχόμενο, δεν απαιτούσε βαθιά μαθηματική γνώση. Έτσι, δεν ορίστηκε συγκεκριμένη υπόθεση για το αν αυτός ο παράγοντας θα είχε κύρια επίδραση στην επίδοση των παιδιών.

(2) Σε ποιο βαθμό διαφέρει η επίδοση των παιδιών Δημοτικού σε δραστηριότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού σε μαθηματικό πλαίσιο και στο πλαίσιο καθημερινής ζωής συγκεκριμένα για τις λογικές μορφές AC και DA;

Ο ρόλος της δημιουργίας εναλλακτικών μοντέλων για τις μορφές AC και DA έχει αποδειχθεί για το πλαίσιο της καθημερινής ζωής. Η δημιουργία εναλλακτικών μοντέλων για τις δραστηριότητες στο μαθηματικό πλαίσιο, απαιτεί καλά συνδεδεμένες μαθηματικές γνώσεις. Έτσι, υποθέσαμε μια αντίστοιχη αλληλεπίδραση του περιεχομένου και του τύπου συμπεράσματος.

Προσεγγίστηκαν περίπου 300 μαθητές και συμμετείχαν συνολικά 102 (μέσος όρος ηλικίας, 10 έτη 1 μήνας) από Β', Δ΄ και ΣΤ΄ τάξεις από δημόσια Δημοτικά σχολεία της Κύπρου. Ελήφθη η γραπτή συγκατάθεση των γονέων και η προφορική συγκατάθεση των παιδιών που συμμετείχαν ενώ όλα τα εργαλεία της έρευνας, εγκρίθηκαν από το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου). Κάθε παιδί συμμετείχε σε μια ατομική δομημένη συνέντευξη διάρκειας 45'- 60΄ σε χώρο του σχολείου με την ερευνήτρια, απαντώντας σε δημογραφικές ερωτήσεις και ακολούθως σε 32 ερωτήσεις υποθετικό-

παραγωγικού συλλογισμού (2 είδη πλαισίου × 4 δραστηριότητες × 4 λογικές μορφές). Προηγήθηκε πιλοτική έρευνα για την καταλληλόλητα των δραστηριοτήτων (Datsogianni et al., 2018). Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκαν δύο πλαίσια (καθημερινής ζωής και μαθηματικών). Κάθε δραστηριότητα του εκάστοτε πλαισίου παρουσιάστηκε ξεχωριστά και οι μαθητές κλήθηκαν να βγάλουν τέσσερα συμπεράσματα με βάση τέσσερις διαφορετικές λογικές μορφές.

Για τη συνέντευξη χρησιμοποιήθηκε ένα online σύστημα συνέντευξης σε tablet και τα παιδιά αναμενόταν να επιλέξουν σε κάθε δραστηριότητα την απάντηση τους αγγίζοντας κάθε φορά την οθόνη στο αντίστοιχο μέρος της εικονικής αναπαράστασης. Το σύστημα συνέντευξης εξασφάλισε την τυχαία ακολουθία των δύο πλαισίων, των δραστηριοτήτων και των λογικών μορφών ανά δραστηριότητα για τον συστηματικό έλεγχο πιθανής επίδρασης της σειράς των ερωτήσεων.

Το μαθηματικό πλαίσιο αφορούσε στις έννοιες του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης- έννοιες που εισάγονται στα πρώτα χρόνια του δημοτικού σχολείου. Συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες βασίστηκαν στις εξής προτάσεις (Datsogianni, et.al, 2020): *"Αν ένα σπίτι των νάνων έχει ακριβώς δύο σειρές των 6 δωματίων η καθεμία, τότε έχει 12 δωμάτια"· "Αν ένα σπίτι των νάνων έχει ακριβώς δύο σειρές των 5 δωματίων, τότε έχει 14 παράθυρα"*."*Αν ένα κουτί περιέχει ακριβώς 4 μπλε διαμάντια και 1 κόκκινο, τότε τα διαμάντια στο κουτί αξίζουν 14 χρυσά νομίσματα".* Ακολουθεί ένα παράδειγμα που ανταποκρίνεται στην ΜΤ μορφή:

(…) *Ο Πέτρος ανακάλυψε ότι "Αν ένα κουτί περιέχει ακριβώς 2 μπλε διαμάντια και 3 κόκκινα διαμάντια, τότε τα διαμάντια στο κουτί αξίζουν 12 χρυσά νομίσματα. Αυτός είναι ο Στέλιος. Τα διαμάντια στο κουτί που βρήκε, δεν αξίζουν 12 χρυσά νομίσματα. Με βάση αυτά που γνωρίζει, τι μπορεί να πει ο Πέτρος με σιγουριά;"*

Το καθημερινό πλαίσιο αφορούσε σε προτάσεις αιτιακής φύσεως (π.χ., "*Άν ένα ποτήρι πέσει στο έδαφος της κουζίνας, τότε θα ακουστεί θόρυβος"· "Αν κάποιος κόψει το δάχτυλο του βαθιά κατά το μαγείρεμα, τότε θα τρέχει αίμα"· "Αν κάποιος βουτήξει σε μια πισίνα, τότε θα βραχεί"· "Αν κάποιος σπάσει το χέρι του, τότε θα πονάει").*

Οι απαντήσεις αποθήκευονταν από το σύστημα συνέντευξης στο tablet (σωστές αναμενόμενες απαντήσεις *για την ΜΡ και ΜΤ μορφή ήταν* τα βέβαια συμπεράσματα- "*Είναι σίγουρο ότι…*" και για τις ΑC και DA τα αόριστα συμπεράσματα- "*Δεν μπορεί να πει κανείς με σιγουριά αν…*". Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν γενικευμένα γραμμικά μικτά μοντέλα (generalized linear mixed models), μια γενίκευση της λογιστικής παλινδρόμησης. Χρησιμοποιήθηκε το πακέτο lme4 στο λογισμικό R. Η τάξη (Β΄, Δ' και ΣΤ') συμπεριλήφθηκε ως παράγοντας μεταξύ των υποκειμένων, ενώ το

πλαίσιο (καθημερινής ζωής και μαθηματικών), η διατύπωση της προκείμενης πρότασης (καταφατική και αρνητική) και το είδος του συμπεράσματος (ορισμένο και αόριστο) ως παράγοντες εντός των υποκειμένων. Χρησιμοποιήθηκαν τα Wald χ2 τεστ για τη σύγκριση μοντέλων κατά την επιλογή του καταλληλότερου μοντέλου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σχετικά με το ερευνητικό ερώτημα (1), οι μαθητές απάντησαν ορθά στο 59,1% των ερωτήσεων στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής και στο 60,2% των ερωτήσεων στο μαθηματικό πλαίσιο. Όπως φαίνεται στον πίνακα 2, η κύρια επίδραση του περιεχομένου δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Η κύρια επίδραση και η επίδραση της αλληλεπίδρασης των παραγόντων της λογικής μορφής (διατύπωση προκείμενης πρότασης, τύπος συμπεράσματος και η αλληλεπίδρασή τους) ήταν στατιστικά σημαντικά (Πίνακας 2).

Σχετικά με το ερευνητικό ερώτημα (2), σε συνάφεια με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών σε πλαίσια καθημερινής ζωής, η ανάλυση σύγκρισης έδειξε, στατιστικά σημαντικά περισσότερες σωστές απαντήσεις στην MP μορφή (88.9% ορθές MP ερωτήσεις) από ότι στην MT μορφή (69.6%, $b = 1.41$, $p < 0.001$). Επίσης, εμφανίστηκαν στατιστικά σημαντικά περισσότερες ορθές απαντήσεις στην MT μορφή σε σχέση με την AC (41.3%, $b = 1.50$, $p < 0.001$) και την DA (48.4%, $b = 1.44$, $p < 0.001$). Η επίδοση των μαθητών στις DA και AC μορφές δε διέφερε στατιστικά σημαντικά ($b = 0.06$, $p = 1.00$). Φαίνεται ότι η κύρια επίδραση του είδους του συμπεράσματος διαμορφώνεται από την μεταβλητή της διατύπωσης της πρότασης (καταφατική/ αρνητική) μόνο στις λογικές μορφές με καθορισμένο συμπέρασμα (χαμηλότερη επίδοση στην μορφή MT-αρνητική διατύπωση σε σχέση με την MP, καταφατική διατύπωση).

Η αλληλεπίδραση του παράγοντα του πλαισίου (καθημερινής ζωής/ μαθηματικών) με τον τύπο του συμπεράσματος (αόριστο/ ορισμένο), καθώς και η τριμερής αλληλεπίδραση του περιεχομένου, του τύπου συμπεράσματος και της διατύπωσης της προκείμενης πρότασης (καταφατική/ αρνητική) ήταν στατιστικά σημαντική. Και στα δύο πλαίσια, εξήχθησαν λιγότερα αόριστα σωστά συμπεράσματα από ό,τι ορισμένα (πλαίσιο καθημερινής ζωής: 36.8% vs. 81.3%, $b = 5.10$, $p < 0.001$, μαθηματικών: 43.8% vs. 76.4%, $b = 3.61$, $p < 0.001$). Αυτή η επίδραση ήταν σημαντικά πιο έντονη για το καθημερινό πλαίσιο από ό,τι για το μαθηματικό (b=1.49, p< 0.01).

Παράγοντες	df	χ^2 (df)	*P*

Πλαίσιο (καθημερινής ζωής vs. μαθηματικών)	1	0.92	0.34	
Διατύπωση προκείμενης πρότασης (καταφατική vs. αρνητική)	1	5.83	0.02	*
Είδος ορθού συμπεράσματος (ορισμένο vs. αόριστο)	1	94.65	<0.001	***
Διατύπωση × Είδος συμπ.	1	39.34	<0.00	***
Πλαίσιο × Διατύπωση	1	1.12	0.29	
Πλαίσιο × Είδος συμπ.	1	9.92	< 0.01	**
Πλαίσιο × Διατύπωση × Είδος συμπ.	1	15.57	<0.001	***

*$p < 0.05$, **$p < 0.01$, ***$p < 0.001$.

Πίνακας 2: χ 2 statistics για τις κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παραγόντων του επιλεγμένου μοντέλου.

Περαιτέρω ανάλυση έδειξε ότι (κατά μέσο όρο για όλες τις τάξεις) δεν εντοπίζονται στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο πλαισίων για τις δύο λογικές μορφές με καταφατική διατύπωση (MP μορφή: 89,0% στο πλαίσιο καθημερινής ζωής σε αντίθεση με 88,8% στο μαθηματικό πλαίσιο, b = 0,21, *p = 1,00*, AC μορφή: 42,0% σε καθημερινό πλαίσιο έναντι 40,3% σε μαθηματικό, b = 0,72, *p = 1,00*). Ωστόσο, υπήρξαν σημαντικά περισσότερα σωστά συμπεράσματα για την MT μορφή στο καθημερινό πλαίσιο παρά στο μαθηματικό (73,7% στο καθημερινό πλαίσιο και 64,1% στο μαθηματικό, b = 0,79, *p = 0,06*) και στατιστικά σημαντικά λιγότερα ορθά συμπεράσματα για την DA μορφή στο καθημερινό πλαίσιο σε σχέση με το μαθηματικό (31,5% στο καθημερινό πλαίσιο έναντι 47,4% στο μαθηματικό, b = −0,79, *p < 0,05*).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Λαμβάνοντας υπόψη τη μέση απόδοση σε όλες τις λογικές μορφές των μαθητών όλων των τάξεων, περισσότερο από το 50% των απαντήσεων των μαθητών ήταν σωστές, κάτι που είναι σημαντικά υψηλότερο από την πιθανότητα τυχαίας απάντησης 33,3%. Αυτό επιβεβαιώνει ότι οι μαθητές του Δημοτικού κατέχουν σε κάποιο βαθμό πρώιμες δεξιότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού (Markovits & Thompson, 2008).

Επιπλέον, σε συμφωνία με προηγούμενες έρευνες (π.χ., Barrouillet & Lecas, 1999), φάνηκε ότι η μορφή MP ήταν ευκολότερη για τους μαθητές από τη μορφή MT, η οποία με τη σειρά της ήταν ευκολότερη από τη μορφή AC και DA συνολικά και στα δύο πλαίσια (Markovits, 2000). Ωστόσο, τα αποτελέσματά δεν συνάδουν με τις υποθέσεις βάσει του μοντέλου MMT. Τα αποτελέσματα δίνουν νέες προοπτικές για το ρόλο της γνώσης σχετικά με τις έννοιες που εμπλέκονται στον υποθετικό-παραγωγικό συλλογισμό, καθώς οι μαθητές φαίνεται να μη χρησιμοποιούν γενικούς, αφηρημένους συλλογιστικούς κανόνες σε αυτή την ηλικία (Chao & Cheng, 2000).

Δε βρέθηκε κύρια επίδραση του πλαισίου, κατά μέσο όρο για όλες τις λογικές μορφές και τις τάξεις. Αυτό δείχνει ότι ο συλλογισμός με μαθηματικό περιεχόμενο δεν προκάλεσε γενικά δυσκολίες. Αξιοσημείωτο ωστόσο το ότι οι δραστηριότητες με μαθηματικό περιεχόμενο δεν αφορούσαν συμβολικές αφηρημένες δηλώσεις, αλλά καταστάσεις που περιλάμβαναν μια μαθηματική δομή. Είχαμε υποθέσει ότι η μαθηματική γνώση δεν ήταν πρωταρχικά απαραίτητη για την αναπαράσταση των συλλογισμών, αλλά για την κατασκευή εναλλακτικών μοντέλων (π.χ., διαφορετικές συλλογές κόκκινων και μπλε πολύτιμων διαμαντιών με την ίδια συνολική αξία). Υπό αυτή την έννοια, η μη σημαντική κύρια επίδραση του περιεχομένου είναι σύμφωνη με τη δομή των δραστηριοτήτων με τη δομή των δραστηριοτήτων υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την εργασία.

Ο συλλογισμός με τις λογικές μορφές που απαιτούν ένα αόριστο συμπέρασμα (AC και DA), αποδείχθηκε ευκολότερος για τα μαθηματικά παρά για το πλαίσιο καθημερινής ζωής, και αυτό το αποτέλεσμα ήταν ιδιαίτερα εμφανές για προκείμενες προτάσεις με αρνητική διατύπωση (μορφή MT vs. DA). Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι σύμφωνο με τις προβλέψεις μας που βασίζονται στο MMT. Η περιγραφικά χαμηλότερη απόδοση στην MT μορφή στα μαθηματικά, σε σύγκριση με το πλαίσιο καθημερινής ζωής μπορεί να οφείλεται σε μια ισχυρότερη τάση για αόριστα συμπεράσματα («*δεν μπορεί να πει κανείς με βεβαιότητα αν... ή όχι...*») στο μαθηματικό περιεχόμενο καθώς η πρόταση δεν αφορά μια συγκεκριμένη κατάσταση (π.χ., αξίζει 15 χρυσά νομίσματα) αλλά μια ένδειξη για το τι δεν ισχύει (π.χ., δεν αξίζει 15 χρυσά νομίσματα). Φαίνεται πιο γνώριμο για τους περισσότερους μαθητές να μπορούν να δημιουργήσουν συγκεκριμένα νοερά μοντέλα για καθημερινές προτάσεις της μορφής MT. Οι δυσκολίες με τη δημιουργία εναλλακτικών λύσεων στο μαθηματικό πλαίσιο μπορεί να μην οδηγούν απαραίτητα σε πιο εσφαλμένες ορισμένες απαντήσεις, αλλά σε περισσότερες αόριστες απαντήσεις. Σύμφωνα με την άποψη ότι η μαθηματική γνώση είναι σημαντική για τον υποθετικό-παραγωγικό συλλογισμό, η γνώση σχετικά με το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων φαινόταν να ρυθμίζει τη συνολική

θετική ανάπτυξη του συλλογισμού AC και DA ανά τις τάξεις όπως βρέθηκε και σε προηγούμενες μελέτες (Janveau-Brennan & Markovits, 1999· Markovits & Barrouillet, 2002). Σε συμφωνία με υπάρχουσες μελέτες (Gauffroy & Barrouillet, 2009· Markovits, 2014), η λογική μορφή αποδείχθηκε βασικός παράγοντας στην περιγραφή της επίδοσης των μαθητών στις δραστηριότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού.

Περιορισμοί και εισηγήσεις

Αναφορικά με τους περιορισμούς αυτής της μελέτης, αρχικά πρόκειται για έρευνα διατομής που δεν επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων για την ατομική ανάπτυξη του υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού μαθητών Δημοτικού. Η έρευνα ακόμα εστίασε στις τάξεις Β' έως την ΣΤ' Δημοτικού που αποτελεί κύρια φάση της ανάπτυξης του υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού αιτιακής φύσεως σε καθημερινό πλαίσιο. Η επίδραση του πλαισίου ίσως προκύπτει νωρίτερα (π.χ., για τον τύπο MP), ή σε μεγαλύτερες ηλικίες (π.χ., για τους τύπους AC & DA). Τέλος, η παρούσα μελέτη δίνει κάποιες σημαντικές ενδείξεις για το ότι οι μαθητές Δημοτικού μπορούν να προσεγγίσουν δραστηριότητες υποθετικό-παραγωγικού συλλογισμού με μαθηματικές έννοιες. Οι δεξιότητες συλλογισμού φαίνεται να προκύπτουν από έναν συνδυασμό γνώσης των γενικών αρχών και μαθηματικής γνώσης και αυτό μπορεί να διερευνηθεί εκτενέστερα σε μελλοντικές έρευνες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Attridge, N., and Inglis, M. (2013). Advanced mathematical study and the development of conditional reasoning skills. *PLoS one* 8:e69399).

Barrouillet, P., and Lecas, J. F. (1999). Mental models in conditional reasoning and working memory. *Think. Reason.* 5, 289–302.

Chao, S. J., and Cheng, P. W. (2000). The emergence of inferential rules: the use of pragmatic reasoning schemas by preschoolers. *Cogn. Dev.* 15, 39–62.

Christoforides, M., Spanoudis, G., and Demetriou, A. (2016). Coping with logical fallacies: a developmental training program for learning to reason. *Child Dev.* 87, 1856–1876.

Datsogianni, A., Sodian, B., Markovits, H., & Ufer, S. (2020). Reasoning with conditionals about everyday and mathematical concepts in primary school. *Frontiers in Psychology*, *11*, 531640.

Datsogianni, A., Ufer, S., and Sodian, B. (2018). "Elementary students 'conditional reasoning skills in mathematical and everyday contexts," in *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, eds E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, and L. Sumpter (Umeå: PME), 331–338.

Foltz, C., Overton, W. F., and Ricco, R. B. (1995). Proof construction: adolescent development from inductive to deductive problem-solving strategies. *J. Exp.* Child Psychol. 59, 179–195.

Gauffroy, C., and Barrouillet, P. (2009). Heuristic and analytic processes in mental models for conditionals: an integrative developmental theory. *Dev. Rev.* 29, 249–282.

Inglis, M., and Simpson, A. (2009). Conditional inference and advanced mathematical study: further evidence. *Educ. Stud. Math.* 72, 185–198.

Janveau-Brennan, G., and Markovits, H. (1999). The development of reasoning with causal conditionals. *Dev. Psychol*. 35:904. d

Johnson-Laird, P. N., and Byrne, R. M. (2002). Conditionals: a theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychol. Rev*. 109:646.

Küchemann, D., and Hoyles, C. (2002). "Students' understanding of a logical implication and its converse," in *Proceedings 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, ed. A. Cockburn (Norwich: PME), 3–241.

Markovits, H. (2000). A mental model analysis of young children's conditional reasoning with meaningful premises. *Think. Reason. 6*, 335–347.

Markovits, H. (2014). "Conditional reasoning and semantic memory retrieval," in *Reasoning as Memory*, eds A. Feeney and V. Thompson (New York, NY: Psychology Press), 67–84.

Markovits, H., and Thompson, V. (2008). Different developmental patterns of simple deductive and probabilistic inferential reasoning. *Mem. Cogn.* 36, 1066– 1078.

Markovits, H., and Barrouillet, P. (2002). The development of conditional reasoning: a mental model account. *Dev. Rev*. 22, 5–36. d

Morsanyi, K., and Szücs, D. (2014). "The link between mathematics and logical reasoning," in *The Routledge International Handbook Of Dyscalculia And Mathematical Learning Difficulties,* ed. S. Chinn (London: Routledge), 101–114.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gardner, A., et al. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *Br. J. Dev. Psychol*. 25, 147–166.

Schroyens, W. J., Schaeken, W., and d'Ydewalle, G. (2001). The processing of negations in conditional reasoning: A meta-analytic case study in mental model and/or mental logic theory. *Think. Reason. 7,* 121–172.

«ΤΟ ΤΕΣΤ ΜΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΣΕ ΑΓΧΟΣ ΚΑΙ ΑΥΤΟΓΝΩΣΙΑ»: ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Θεοδώρα Αυγέρη, Ξένια Βαμβακούση & Κωνσταντίνος Τάτσης

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

t.avgeri@uoi.gr, xvamvak@uoi.gr, ktatsis@uoi.gr

Η παρούσα έρευνα παρουσιάζει τα πρώτα ευρήματα από μία έρευνα σχεδιασμού με στόχο την ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων που απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς. Πενήντα έξι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να απαντήσουν σε 10 έργα για τη διερεύνηση των αρχικών γνώσεών τους, καθώς και την ευαισθητοποίησή τους για τις προκλήσεις που παρουσιάζουν οι πράξεις αυτές. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν εννοιολογικές δυσκολίες με κεντρικές ιδέες για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων και υποδεικνύουν κατευθύνσεις για το σχεδιασμό του εκπαιδευτικού υλικού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα κλάσματα αποτελούν ένα εξαιρετικά απαιτητικό αντικείμενο, όχι μόνο για τους μαθητές, αλλά και για τους μελλοντικούς και τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς (βλ. Olanoff, Lo, & Tobias, 2014, για μια επισκόπηση). Άλλοτε οι εκπαιδευτικοί έχουν επίγνωση των δυσκολιών τους και αισθάνονται άγχος και ανεπάρκεια (Rayner, Pitsolantis, & Osana, 2009) ενώ άλλοτε υπερεκτιμούν την κατανόησή τους για τα κλάσματα (Li & Kulm, 2008). Και στις δύο περιπτώσεις, είναι πολύ πιθανό να υπάρχουν δυσμενείς επιπτώσεις στο διδακτικό τους έργο.

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση κλασμάτων είναι από τις πιο απαιτητικές ενότητες των κλασμάτων, με διαχρονικά τεκμηριωμένες εννοιολογικές δυσκολίες όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς (Ma, 1999; Copur-Gencturk, 2021; Izsák, 2008). Συνήθως οι εκπαιδευτικοί είναι σε θέση να εκτελέσουν τους αλγορίθμους των δύο πράξεων, ωστόσο αντιμετωπίζουν προκλήσεις στην επίλυση και διατύπωση προβλήματος, στην αναπαράσταση και στην εξήγηση όσον αφορά το νόημα των πράξεων αυτών και των αλγορίθμων τους. Με άλλα λόγια, οι εκπαιδευτικοί συνήθως έχουν διαδικαστική γνώση για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων, αλλά αντιμετωπίζουν δυσκολία σε έργα που θεωρούνται τεκμήρια εννοιολογικής γνώσης για τις πράξεις αυτές (Schneider & Rittle-Johnson, 2015).

Η εργασία αυτή παρουσιάζει τα πρώτα ευρήματα από μια έρευνα σχεδιασμού [topic-specific design research study (Gravenmeier & Prediger, 2019)] με στόχο την ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού (π.χ., βιντεοδιαλέξεων, δραστηριοτήτων και κειμένων) για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων για μελλοντικούς και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Στον πρώτο κύκλο αυτής της έρευνας σχεδιάστηκε μια ενότητα μαθημάτων με στόχο την ενσωμάτωσή της σε μάθημα Παιδαγωγικού Τμήματος και την εφαρμογή της με μελλοντικούς/ές εκπαιδευτικούς. Ως πρώτο βήμα για το σχεδιασμό της ενότητας, σχεδιάστηκε ένα δοκίμιο με στόχο α) τη διερεύνηση των αρχικών γνώσεων των μελλοντικών εκπαιδευτικών (στο εξής, ΜΕ) για κεντρικές ιδέες στις οποίες στηρίζεται ο σχεδιασμός της ενότητας, β) την καταγραφή μιας αδρής αυτοαξιολόγησης των ΜΕ για την κατανόησή τους σχετικά με τα κλάσματα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Μια σημαντική πηγή των εννοιολογικών δυσκολιών που προκαλούν ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση κλασμάτων μπορεί να εντοπιστεί στις αλλαγές νοήματος και στις αναπλαισιώσεις που είναι απαραίτητες κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς. Πράγματι, τα κυρίαρχα νοήματα για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών («επαναλαμβανόμενη πρόσθεση» και «δίκαιη μοιρασιά», αντίστοιχα) δεν γενικεύονται στην περίπτωση των κλασμάτων (Fischbein et al., 1985; Tirosh, 2000). Για τη διαίρεση υπάρχει το νόημα της μέτρησης ήδη στο πλαίσιο των φυσικών, αλλά είναι απαραίτητο να αναγνωριστεί ως σημαντικό και να υποστηριχθεί συστηματικά μέσω της διδασκαλίας (Fischbein et al., 1983). Η κατασκευή νοήματος για τον πολλαπλασιασμό που να μεταφέρεται από της φυσικούς στους ρητούς είναι πιο απαιτητική (Simon et al., 2018). Η πιο γνωστή ερμηνεία του πολλαπλασιασμού κλασμάτων είναι αυτή του «μέρος του μέρους» η οποία μεταφέρεται άμεσα σε αριθμητικό πλαίσιο, στην περίπτωση των μη καταχρηστικών κλασμάτων (π.χ. το 3/5 x 4/7 ερμηνεύεται ως «τα τρία πέμπτα του τέσσερα έβδομα»). Αυτό το νόημα, ωστόσο, για να χτιστεί στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών απαιτεί μια άλλη εννοιολόγηση του πολλαπλασιασμού (π.χ. το 3 x 5 =15 να ερμηνευθεί όχι ως «3 φορές το 5 ίσον 15», αλλά ενδεχομένως ως «το τριπλάσιο του 5 είναι το 15» (Thompson & Saldanha, 2003). Μια εναλλακτική είναι το μοντέλο του εμβαδού «ορθογωνίου παραλληλογράμμου» (Greer, 1992; Iszak, 2008), στο οποίο οι παράγοντες του γινομένου αναπαρίστανται ως μήκη των

πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και το γινόμενο ως το εμβαδόν του.

Επιπλέον, κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς, η σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (αντίστροφες πράξεις) αναπλαισιώνεται μετά την εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών που επιτρέπει την αντικατάσταση της διαίρεσης με την αντίστροφη πράξη, αλλά με τον αντίστροφο του διαιρέτη (Κόπτση, Χρήστου, & Βαμβακούση, 2022). Αυτή η «διπλή αντιστροφή» (Li, 2008) είναι σημαντικό να γίνει κατανοητή, γιατί βρίσκεται στη βάση του αλγορίθμου για τη διαίρεση κλασμάτων γνωστού και ως «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων θα πρέπει, όχι μόνο να είναι ενήμεροι/ες για τις αλλαγές που συντελούνται κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς, αλλά και να έχουν στη διάθεσή τους παραγωγικά νοήματα και αναπαραστάσεις που να μπορούν να αξιοποιήσουν στη διδασκαλία τους. Μια σημαντική πηγή υποστήριξης των εκπαιδευτικών, τα σχολικά εγχειρίδια και το συνοδευτικό βιβλίο για τους/τις εκπαιδευτικούς, δεν λειτουργεί απαραίτητα βοηθητικά. Πράγματι, μια κριτική ματιά στα τρέχοντα βιβλία της Ε΄ και της Στ΄ Δημοτικού όσον αφορά τη διαίρεση κλασμάτων (Βαμβακούση, Κόπτση, Χρήστου, & Λεμονίδης, 2022) έδειξε ότι δεν γίνεται ρητή διάκριση ανάμεσα στο νόημα της μέτρησης και αυτό του μερισμού για τη διαίρεση, ενώ στην ενότητα της διαίρεσης κλασμάτων εντοπίστηκαν και παραπλανητικές οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς όπου τα δύο νοήματα συγχέονται. Επιπλέον, ο όρος «αντίστροφες πράξεις» αναφέρεται αδιαφοροποίητα τόσο στο πλαίσιο των φυσικών, όσο και μετά την εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών. Ταυτόχρονα, αναφέρεται ρητά ότι ο αλγόριθμος της διαίρεσης είναι ένας «μηχανιστικός κανόνας» (που δεν χρειάζεται να εξηγηθεί ή να γίνει κατανοητός από τους μαθητές). Τέλος, υπάρχουν μη ακριβείς διατυπώσεις όπως «η τέλεια διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού» και «για να διαιρέσω δύο κλάσματα αντιστρέφω ένα από τα δύο κλάσματα και κάνω πολλαπλασιασμό». Φαίνεται, λοιπόν, ότι υπάρχει ανάγκη για συστηματική υποστήριξη των εν ενεργεία, αλλά και των μελλοντικών εκπαιδευτικών για την κατανόηση των σημαντικών ιδεών που απαιτούνται για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεση κλασμάτων.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 56 φοιτητές/τριες Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης που είχαν εκδηλώσει ενδιαφέρον για ένα μάθημα επιλογής του 7^{ου} εξαμήνου με θέματα που άπτονται της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.

Ερευνητικό εργαλείο

Το δοκίμιο αποτελείται από 10 έργα (Ε1-Ε10). Με την εξαίρεση των Ε1, Ε9, Ε10, όλα τα έργα τοποθετήθηκαν στο πλαίσιο ενός σεναρίου, στο οποίο ένας υποθετικός μαθητής ή εκπαιδευτικός πρότεινε έναν τρόπο επίλυσης ή έκανε μια δήλωση, την οποία οι ΜΕ κλήθηκαν να αξιολογήσουν ως προς την ορθότητα ή/και να σχολιάσουν. Δύο από τα έργα (Ε1, Ε2) εξετάζουν τη διαδικαστική γνώση των ΜΕ για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων, ενώ τα υπόλοιπα εστιάζουν σε πτυχές της εννοιολογικής γνώσης για αυτές τις πράξεις. Πιο συγκεκριμένα: Στα έργα Ε1 και Ε2 ζητήθηκε ο υπολογισμός του αποτελέσματος των πράξεων 2/5 x 7/3 και 2/5 : 7/3, αντίστοιχα, σημειώνοντας τα ενδιάμεσα βήματα.

Στα Ε3 και Ε4 εξετάστηκε μια λιγότερο διαδικαστική πτυχή του κάθε αλγόριθμου. Συγκεκριμένα, στο Ε3 ζητήθηκε η αξιολόγηση του υπολογισμού 3/4 x 5/2 = 3/4 x 10/4 = 30/16. Ως ορθές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες οι ΜΕ δήλωσαν ότι ο τρόπος δεν είναι λανθασμένος, είτε ανέφεραν ότι η μετατροπή του 5/2 σε ισοδύναμο κλάσμα, ομώνυμο του 3/4, είναι περιττή, είτε όχι. Στο Ε4 ζητήθηκε η αξιολόγηση της διατύπωσης «Όταν θέλω να διαιρέσω δύο κλάσματα, αντιστρέφω το ένα και κάνω πολλαπλασιασμό» για τον αλγόριθμο της διαίρεσης. Ως ορθές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αναφέρθηκε ότι έχει σημασία ποιο από τα δύο κλάσματα αντιστρέφεται.

Στα Ε5 και Ε6 οι ΜΕ κλήθηκαν να αξιολογήσουν την επίλυση δύο προβλημάτων που αφορούν τα νοήματα των δύο πράξεων και επιλύονται συχνά λανθασμένα από τα παιδιά. Συγκεκριμένα, στο Ε5 τους ζητήθηκε να αποφανθούν αν το πρόβλημα «Τα 5 κιλά κεράσια κοστίζουν 10 ευρώ. Πόσα κοστίζει το μισό κιλό;» αντικατοπτρίζει την πράξη 5 : 1/2. Στο Ε6 τους ζητήθηκε να αξιολογήσουν την επίλυση με πολλαπλασιασμό (18x2/3) του εξής προβλήματος; «Ένας ξυλουργός μετράει το μήκος μιας σανίδας με ραβδί και βρίσκει ότι είναι ίσο με 18 ραβδιά. Τι θα έβρισκε αν μετρούσε το μήκος της σανίδας με τα 2/3 του ραβδιού;».

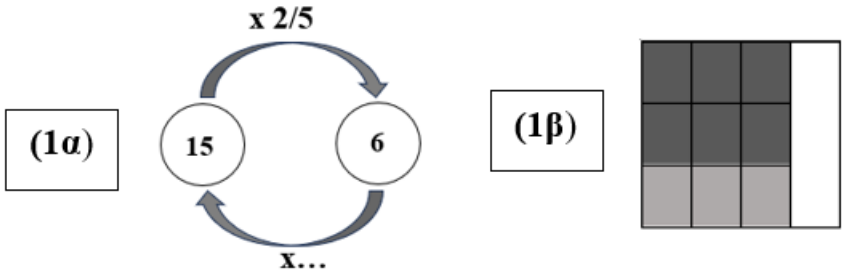
Στο Ε7 οι ΜΕ κλήθηκαν να αξιολογήσουν τη δήλωση ενός υποθετικού εκπαιδευτικού, ο οποίος σύστηνε σε συνάδελφό του να διορθώσει το κυκλικό διάγραμμα της Εικόνας 1α γιατί «κάτι δεν πάει καλά». Το Ε7

εξετάζει αν οι ΜΕ αναγνωρίζουν ότι, με την εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών, ισχύει ότι «όταν ένας αριθμός α πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό β≠0 και το αντίστροφο του β, τότε ο α παραμένει αμετάβλητος»».

Στο Ε8 ζητήθηκε από τους ΜΕ να αποφανθούν η αναπαράσταση της Εικόνας 1β αντικατοπτρίζει το γινόμενο 2/3 x 3/4. Σωστές θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που αναγνώρισαν ότι αυτή είναι πράγματι μια κατάλληλη αναπαράσταση. Επιπρόσθετα, τους ζητήθηκε να αναπαραστήσουν οι ίδιοι/ες αυτή την πράξη.

Στα έργα Ε9 και Ε10, οι ΜΕ κλήθηκαν να διατυπώσουν ένα πρόβλημα που να μπορεί να λυθεί με την πράξη 3/4 x 2/5 και 4 : 2/3, αντίστοιχα. Εξετάστηκε κατά πόσο τα προβλήματα ήταν κατάλληλα ή όχι, και το είδος των προβλημάτων που διατυπώθηκαν.

Στην αρχή του δοκιμίου, ζητήθηκε από τους ΜΕ να αυτοαξιολογηθούν ως προς την κατανόησή τους για τα κλάσματα, σκιαγραφώντας σε ορθογώνια μπάρα, χωρισμένη σε 10 ίσα μέρη, το μέρος της ύλης των κλασμάτων που θεωρούν ότι έχουν κατανοήσει σε βάθος. Τέλος, σε όσες/ους τελείωναν με τη συμπλήρωση του δοκιμίου, ζητήθηκε προφορικά να εκφράσουν την άποψή τους για τη δυσκολία των έργων, αλλά και τα συναισθήματά τους κατά την επίλυση.



Εικόνα 1. Συνοδευτικές εικόνες στο Ε7 (1α) κα στο Ε8 (1β)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η συχνότητα των σωστών, λανθασμένων και κενών απαντήσεων ανά έργο.

Απάντηση	Ε1	Ε2	Ε3	Ε4	Ε5	Ε6	Ε7	Ε8	Ε9	Ε10
Σωστή	44	43	20	33	42	23	27	10	4	4
Λανθασμένη	12	11	35	22	8	18	23	43	20	20
Δ/Α	0	2	1	1	6	15	6	3	32	32
Σύνολο	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56

Πίνακας 1: Συχνότητα των σωστών, λανθασμένων και κενών απαντήσεων ανά έργο

Από τα στοιχεία του Πίνακα 1 φαίνεται ότι τα έργα με τη μεγαλύτερη συχνότητα σωστών απαντήσεων ήταν το Ε1 και το Ε2 που αφορούν την εφαρμογή μεθόδων υπολογισμού. Η πλειοψηφία των ΜΕ, ωστόσο, αξιολόγησε ως λανθασμένο τον υπολογισμό του Ε3, με το σκεπτικό ότι «στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων δεν πρέπει να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα», ενώ ένα μεγάλο μέρος δεν αναγνώρισε ως σημαντική την ανακρίβεια στη διατύπωση του κανόνα για τη διαίρεση στο Ε4.

Η πλειοψηφία των ΜΕ αναγνώρισε ως ακατάλληλο το πρόβλημα του Ε5 για τη δεδομένη πράξη της διαίρεσης, αλλά όχι και την επιλογή του πολλαπλασιασμού ως κατάλληλη πράξη για το Ε6. Σχετικά με το Ε5, δεν μπορεί να αποκλειστεί η πιθανότητα κάποιοι/ες ΜΕ να υπολόγισαν το αποτέλεσμα και βάσει αυτού να οδηγήθηκαν στη σωστή απάντηση.

Στο Ε7, οι ΜΕ που απάντησαν σωστά αναφέρθηκαν, στην πλειοψηφία τους, ρητά στον αντίστροφο του 2/5 που συμπληρώνει σωστά το κυκλικό διάγραμμα. Από αυτούς που απάντησαν λανθασμένα, 8 δήλωσαν είτε ότι η δεύτερη πράξη πρέπει αναγκαστικά να είναι διαίρεση, είτε ότι ο δεύτερος τελεστής πρέπει να είναι ίδιος με τον πρώτο. Τέσσερις δήλωσαν ρητά ότι δεν μπορεί να υπάρξει αριθμός που να συμπληρώσει σωστά το διάγραμμα (π.χ., *Δεν μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό που αν τον πολλαπλασιάσουμε με το 6 θα έχει ως αποτέλεσμα 15*). Τέσσερις υπολόγισαν λανθασμένα το πρώτο γινόμενο (15 x 2/5) και θεώρησαν ότι εκεί εντοπίζεται το σφάλμα. Οι υπόλοιποι/ες είτε δεν εξήγησαν, είτε έδωσαν ασαφείς εξηγήσεις, με εξαίρεση δύο περιπτώσεις. Στη μία διατυπώθηκε ο ισχυρισμός ότι δεν είναι δυνατόν το γινόμενο ενός ακεραίου (15) επί ένα κλάσμα (2/5) να είναι ακέραιος αριθμός (6), ενώ στην άλλη, η αξιολόγηση βασίστηκε σε λανθασμένη ερμηνεία της σχέσης 15x2/5=6 (*Το 15 δεν γίνεται να είναι τα 2/5 του 6. Το αντίστροφο θα πρέπει να ισχύει*).

Μικρό μέρος των ΜΕ αξιολόγησε ως σωστή την αναπαράσταση του Ε8. Η απόκριση της μεγάλης πλειοψηφίας τους στο αίτημα να αναπαραστήσουν το δεδομένο γινόμενο με τον τρόπο της προτίμησής τους, ανέδειξε το ενδεχόμενο η διατύπωση του Ε8 να έχρηζε διευκρίνισης. Πράγματι, 42 ΜΕ υπολόγισαν το αποτέλεσμα της πράξης 2/3x3/4 και το αναπαράστησαν με το μοντέλο του εμβαδού. Τέσσερις από αυτούς έκαναν λάθος στην πράξη (π.χ. 2/3 x 3/4 = 5/12, που προκύπτει με αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών). Οι υπόλοιποι αναπαρέστησαν το «μισό» απεικονίζοντας διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις (1/2, 6/12, 3/6 και 2/4). Σε μία περίπτωση, το γινόμενο αναπαραστάθηκε ως δύο ξεχωριστές αναπαραστάσεις για τα δύο κλάσματα, με το σύμβολο “x” μεταξύ τους.

Η μικρότερη συχνότητα σωστών απαντήσεων παρατηρείται στο Ε9 και το Ε10, στα οποία πάνω από τους/τις μισούς/ές ΜΕ εξέφρασε αδυναμία να

κατασκευάσει ένα πρόβλημα («δεν μπορώ να σκεφτώ», «δεν ξέρω»). Από τα ακατάλληλα προβλήματα που διατυπώθηκαν στο Ε9, 11 είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό: Προσδιορίστηκαν τα δύο κλάσματα ως μέρος μιας ποσότητας, αλλά δεν συνδυάστηκαν πολλαπλασιαστικά. Έτσι, προέκυψαν προβλήματα στα οποία ζητούμενο ήταν το άθροισμα των κλασμάτων (π.χ. *Ο Παύλος αγόρασε 3/4 του κιλού καφέ και η Μαρία του πήρε δώρο αλλά 2/5 του κιλού. Πόσα κιλά καφέ έχει τελικά ο Παύλος;*), η σύγκριση κλασμάτων (π.χ. *Ο Γιάννης έφαγε τα 3/4 μιας πίτσας και η Ελένη τα 2/5. Ποιος έφαγε περισσότερο*;), ενώ σε μία περίπτωση αναπαραστάθηκαν ξεχωριστά τα κλάσματα, χωρίς να υπάρχει ζητούμενο. Στα υπόλοιπα ακατάλληλα προβλήματα συγκαταλέχθηκαν αυτά των οποίων η διατύπωση δεν είχε νόημα (π.χ. *Τα παιδιά έφαγαν τα 3/4 της τούρτας αλλά το καθένα έφαγε τα 2/5 του κομματιού του. Πόσο έφαγε το κάθε παιδί από το κομμάτι του;*), καθώς και αυτά στα οποία το ζητούμενο ήταν τα παιδιά να κατασκευάσουν μια αναπαράσταση για το δεδομένο γινόμενο (πιθανώς με επιρροή από το Ε8). Όσον αφορά τα κατάλληλα προβλήματα που διατυπώθηκαν, σε δύο αξιοποιήθηκε το νόημα του πολλαπλασιασμού κλασμάτων ως «μέρος ενός μέρους» (π.χ. *Η Κωνσταντίνα αγόρασε 3/4 του κιλού μήλα και από αυτά έδωσε τα 2/5 στην φίλη της τη Μαρία. Πόσα κιλά πήρε η Μαρία*;) και σε δύο το μοντέλο του εμβαδού.

Στο Ε10, 12 από τα 20 ακατάλληλα προβλήματα που διατυπώθηκαν, είχαν το εξής κοινό χαρακτηριστικό: Το 2/3 λειτουργούσε ως πολλαπλασιαστής επί μίας ποσότητας, είτε με μέτρο 4 (π.χ. *Τα μήλα που πήρε η Άννα κοστίζουν 4 € το κιλό. Πόσο κοστίζουν τα 2/3 του κιλού;*), είτε με μέτρο κάποιον άλλον αριθμό, μετά την αυθαίρετη εισαγωγή δεδομένων στο πρόβλημα (π.χ. *Τα 4 κιλά πατάτες κοστίζουν 5 €. Πόσο κοστίζουν τα 2/3 του κιλού;*). Σε δύο ακόμα προβλήματα, αντιστράφηκαν οι ρόλοι του 4 και του 2/3, με το 2/3 να λειτουργεί ως διαιρετέος (π.χ. *Τα 2/3 του πληθυσμού ενός χωριού είναι άρρωστοι. Το χωριό διαθέτει 4 χώρους φιλοξενίας. Πόσοι θα μπουν σε κάθε χώρο ώστε να μοιραστούν ισάξια*;). Διατυπώθηκαν επίσης μη επιλύσιμα προβλήματα (π.χ. *Έχω 4 λίτρα γάλα και θέλω να τα μοιράσω σε 2/3 του ποτηριού. Πόσα λίτρα γάλα θα μου μείνουν*;) ή προβλήματα με εντελώς άλλους αριθμούς (π.χ. *Οι 4 σοκολάτες κοστίζουν 12 ευρώ. Πόσο κοστίζουν οι 2 σοκολάτες;*). Από τα κατάλληλα προβλήματα που διατυπώθηκαν στο Ε10, δύο βασίζονταν στο νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση (π.χ. *Ένας φούρναρης μοιράζει 4 κιλά ζύμη σε σκεύη χωρητικότητας ενός κιλού, αλλά εκμεταλλεύεται τα 2/3 της χωρητικότητας. Πόσα σκεύη θα χρειαστεί;*) και δύο ήταν του τύπου «γνωστό μέρος, άγνωστο όλο» (π.χ. *Γνωρίζοντας ότι τα 2/3 του κιλού λεμόνια κοστίζουν 1 €, να βρείτε πόσο κοστίζουν τα 4kg*.)

Εξετάσαμε επίσης την ατομική επίδοση του κάθε ΜΕ, ως άθροισμα των σωστών απαντήσεων σε όλα τα έργα. Στον Πίνακα 2 αντιπαραβάλλεται η

συχνότητα κάθε επίδοσης με το βαθμό αυτο-αξιολόγησης του κάθε ΜΕ. Παρατηρείται ότι α) υπάρχουν ευρείες δι-ατομικές διαφορές ως προς τη συνολική επίδοση που κυμαίνεται από 1 έως 9 (στα 10 έργα), β) περίπου 34% των ΜΕ θεωρεί ότι έχει κατανοήσει τα την ύλη των κλασμάτων σε βαθμό μικρότερο του 50%, το 45% αυτοαξιολογεί την κατανόησή του μεταξύ του 50% - 70%, ενώ το 12% θεωρεί ότι βρίσκεται από 80% και άνω. Επιπλέον, ΜΕ με ίδιο βαθμό αυτοαξιολόγησης έχουν πολύ διαφορετική επίδοση στα έργα του δοκιμίου.

Τέλος, σημειώνουμε ότι 32 από τους ΜΕ σχολίασαν τα έργα ή/και αποτύπωσαν τα συναισθήματά τους κατά την επίλυση. Στην πλειοψηφία τους ανέφεραν ότι δυσκολεύτηκαν και είχαν αμφιβολίες για την ορθότητα της απάντησής σε κάποια έργα (με προεξάρχοντα τα Ε7, Ε8, Ε9) ή και σε όλα. Για κάποιους, αυτό ήταν αναμενόμενο (π.χ. *Μόλις είδα κλάσματα ήξερα ότι όλες μου οι απαντήσεις θα είναι λάθος*).

Αυτο-αξιολόγηση	Συνολική επίδοση (στα 10 έργα)									Σύνολο
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
20%		1	1		2	1	3			8
30%	1	1			2		1			5
40%	1	1	1	2	1					6
50%	1	3	1	1	2	1				9
60%			3	3	3	1	1			11
70%			1	1	1	1	1			5
80%			1	1	2	1	1	1		7
90%						2			1	3
100%					1	1				2
Σύνολο	3	6	8	8	14	8	7	1	1	56

Πίνακας 2: Συχνότητα επίδοσης – Βαθμός αυτοαξιολόγησης κάθε ΜΕ.

Σε πολλές περιπτώσεις, οι ΜΕ απέδωσαν τη δυσκολία στο ότι «δεν θυμούνται», αλλά υπήρξαν περιπτώσεις που αναγνωρίστηκαν βαθύτερες δυσκολίες (π.χ. *Παρατήρησα ότι δεν έχω κατανοήσει πλήρως και σε βάθος τις έννοιες που υπάρχουν στο ερωτηματολόγιο*). Τέλος, αναφέρθηκαν άγχος κατά την επίλυση, ανησυχία για τη διδασκαλία αυτών των θεμάτων, αλλά και ενδιαφέρον να ασχοληθούν περισσότερο με τα συγκεκριμένα θέματα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ/ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από τα αποτελέσματά μας διαφαίνεται ότι οι ΜΕ χρειάζονται πράγματι συστηματική υποστήριξη για την ανάπτυξη της εννοιολογικής τους γνώσης για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων. Σε συμφωνία με την προϋπάρχουσα βιβλιογραφία (π.χ. Olanoff et al., 2014), η πλειοψηφία των ΜΕ που συμμετείχαν στην έρευνα είχε τη διαδικαστική γνώση που απαιτείται για την εκτέλεση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων. Ωστόσο, δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν την ορθότητα ή μη μιας παραλλαγμένης διαδικασίας, καθώς και μια σημαντική ανακρίβεια σε διατύπωση κανόνα. Οι ΜΕ, στη συντριπτική τους πλειοψηφία, δεν φαίνεται να διαθέτουν παραγωγικά νοήματα (Simon et al., 2018; Thompson & Saldanha, 2003; Tirosh, 2001) για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων, όπως φαίνεται από την εξαιρετικά μεγάλη δυσκολία τους να διατυπώσουν αντίστοιχα προβλήματα. Αντίθετα, από την αξιολόγηση επίλυσης προβλημάτων, αλλά και από το έργο για τον αντίστροφο αριθμό (Ε7) φαίνεται ότι συγχέουν τον πολλαπλασιασμό με τη διαίρεση κλασμάτων (Ma, 1999), αλλά και με την πρόσθεση, ερμηνεύουν τη διαίρεση ως «δίκαιη μοιρασιά» και διατηρούν παρανοήσεις παρόμοιες με αυτές των παιδιών (π.χ. ο *πολλαπλασιασμός δεν μπορεί να «μικραίνει» τον αριθμό*) (Fischbein et al., 1985; Tirosh, 2001).

Αντιπαραβάλλοντας την αυτοαξιολόγηση των ΜΕ με την επίδοσή τους και λαμβάνοντας υπόψη και τα σχόλιά τους, σε γενικές γραμμές, φαίνεται ότι οι ΜΕ έχουν επίγνωση για το γεγονός ότι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα κλάσματα, ενώ υπάρχουν ενδείξεις ότι ορισμένοι/ες εξ αυτών υποεκτιμούν ή υπερεκτιμούν το βαθμό κατανόησής τους, σε σχέση με την επίδοσή τους στο δεδομένο δοκίμιο (Li & Kulm, 2008; Rayner, Pitsolantis, & Osana, 2009). Παρά το γεγονός ότι μια πιο ενδελεχής ανάλυση, αλλά και συμπληρωματικά σχετικά δεδομένα είναι απαραίτητα, αξίζει να σημειωθεί ότι για ορισμένους/ες ΜΕ, το συγκεκριμένο δοκίμιο λειτούργησε ως μέσο συνειδητοποίησης ότι υπάρχουν ζητήματα που δεν έχουν κατανοήσει σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων, αλλά δεν πρέπει να αγνοηθεί και ότι από άλλους/άλλες ΜΕ, το πρόβλημα εντοπίστηκε στο ότι είχαν «ξεχάσει» τη σχετική ύλη. Τέλος, δεν πρέπει να αγνοηθεί και το γεγονός ότι η ατομική επίλυση σχετικών έργων φαίνεται να προκάλεσε σε ορισμένους/ες ΜΕ άγχος, ακόμα και απογοήτευση.

Τα ευρήματα αυτά θα αξιοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση του σχεδιασμού της ενότητας για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων και του αντίστοιχου εκπαιδευτικού υλικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., Κόπτση, Ι., Χρήστου, Κ., & Λεμονίδης, Μ. (2022, Μάιος). Διαίρεση κλασμάτων: Μια κριτική ματιά στην οργάνωση του περιεχομένου στα σχολικά εγχειρίδια. Εργασία που παρουσιάστηκε στο *1ο Διεθνές Συνέδριο «Εκπαίδευση στον 21ο αιώνα: Σύγχρονες προκλήσεις και προβληματισμοί»*. ΠΤΔΕ: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics, 107*(3), 525-545.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, S. M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: an introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 33-58). SpringerOpen.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). NCTM.

Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and instruction, 26*(1), 95-143.

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 546-552.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates

Olanoff, D., Lo, J. J., & Tobias, J. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 267-310.

Rayner, V., Pitsolantis, N., & Osana, H. (2009). Mathematics anxiety in preservice teachers: its relationship to their conceptual and procedural knowledge of fractions. *Mathematics Education Research Journal, 21*(3), 60-85.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp.1118-1134). Oxford University Press.

Simon, M. A., Kara, M., Norton, A., & Placa, N. (2018). Fostering construction of a meaning for multiplication that subsumes whole-number and fraction multiplication: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior, 52*, 151-173.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 95–113). National Council of Teachers of Mathematics.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Κόπτση, Ι., Χρήστου, Κ., & Βαμβακούση, Ξ. (2022). Διαίρεση κλασμάτων: Μια εναλλακτική προσέγγιση. Στο Β. Χρυσικού ,Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.), *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (Εν.Ε.Δι.Μ) (σελ. 326-335). Εν.Ε.Δι.Μ.

ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΜΕ ΑΝΑΤΡΕΠΤΙΚΟ ΚΕΙΜΕΝΟ

Σοφία Τίγκα[1], Κωνσταντίνος Π. Χρήστου[2]

[1]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, [2]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

[1]sophiatigka@yahoo.gr, [2]kchristou@auth.gr

Περίληψη

Η παρούσα εργασία μελετά τις παρανοήσεις στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών εξετάζοντας τα λάθη και τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων. 87 μαθητές της Δ' και Ε' Δημοτικού, που αποτέλεσαν τις ομάδες παρέμβασης και ελέγχου, συμπλήρωσαν τεστ τριών επιπέδων πριν, αμέσως μετά και έναν μήνα μετά την παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο στην ομάδα παρέμβασης και ένα απλό κείμενο υπενθύμισης στην ομάδα ελέγχου. Τα αποτελέσματα στον προ-έλεγχο έδειξαν παρανοήσεις στη σύγκριση των δεκαδικών που αφορούν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων και τον ρόλο του μηδενός στο δεκαδικό μέρος. Η διδακτική παρέμβαση με το ανατρεπτικό κείμενο συνέβαλε σημαντικά στην αντιμετώπιση μέρους αυτών των παρανοήσεων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η διεθνής έρευνα έχει δείξει ότι τόσο μαθητές όσο και ενήλικες αντιμετωπίζουν δυσκολίες, όταν πρόκειται να συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς. Τα βασικότερα λάθη σχετίζονται με το «μήκος» των αριθμών. Συχνά θεωρείται εσφαλμένα ότι μεγαλύτερος είναι ο «μακρύτερος» δεκαδικός αριθμός, δηλαδή αυτός που έχει τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία (π.χ. 4,63>4,8) (Steinle & Stacey, 1998). Οι μαθητές επηρεασμένοι από την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς, τείνουν να ερμηνεύουν τους δεκαδικούς σαν δύο μέρη ακέραιων αριθμών, που απλώς χωρίζονται από την υποδιαστολή. Από την άλλη μεριά, συχνά θεωρείται ότι μεγαλύτερος είναι ο «κοντύτερος» δεκαδικός αριθμός, δηλαδή αυτός που έχει τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία (π.χ. 4,3>4,65). Οι μαθητές έχουν την τάση να γενικεύουν εσφαλμένα ότι οποιοσδήποτε αριθμός στα δέκατα είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό στα εκατοστά, επειδή γνωρίζουν ότι το ένα δέκατο είναι μεγαλύτερο από το ένα εκατοστό (Steinle & Stacey, 1998).

Επιπλέον, λάθη παρατηρούνται και στην κατανόηση της αξίας της θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς. Συχνά οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να πιστεύουν ότι η παρουσία του μηδενός αριστερά από έναν

αριθμό δεν επηρεάζει την αξία του αριθμού, ενώ η παρουσία του δεξιά αυξάνει την αξία του (π.χ. 0,07=0,7 και 0,320>0,32) (Durkin & Johnson, 2015).

Για τη μελέτη παρανοήσεων όπως οι παραπάνω, πολλοί ερευνητές έχουν τοποθετηθεί ως προς την αναγκαιότητα μέτρησης μετα-γνωστικών παραγόντων κι όχι μόνο αξιολόγηση της γνώσης μέσω απαντήσεων σε μαθηματικά έργα (Durkin & Johnson, 2015). Ένας τέτοιος παράγοντας αφορά την αυτοαξιολόγηση του ατόμου όσον αφορά την επίδοσή του. Συνήθως τέτοιες μεταγνωστικές κρίσεις έπονται ενός έργου, καθώς είναι πιο εύκολο για κάποιον να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητά του, αφού ολοκληρώσει το έργο. Οι έρευνες που έχουν αξιολογήσει τα επίπεδα βεβαιότητας των μαθητών στη μαθηματική εκπαίδευση είναι σχετικά λίγες, παρά το γεγονός ότι οι μεταγνωστικές στρατηγικές θεωρούνται πολύ σημαντικές στην μαθησιακή διαδικασία (Durkin & Johnson, 2015).

Συγκεκριμένα, στη μελέτη των παρανοήσεων, τα τεστ τριών επιπέδων (3 tier tests), προτείνονται ως καταλληλότερα καθώς ελέγχουν την ύπαρξη ή όχι μιας παρανόησης, σε συνδυασμό με έλεγχο των επιπέδων βεβαιότητας. Πιο αναλυτικά, όσον αφορά τη δομή του ένα τεστ τριών επιπέδων αποτελείται από τρία μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τη σωστή απάντηση ανάμεσα σε δοσμένες εναλλακτικές. Στο δεύτερο μέρος δίνονται διαφορετικοί λόγοι, οι οποίοι εξηγούν γιατί επιλέχθηκε μια απάντηση στο πρώτο μέρος και οι μαθητές καλούνται να επιλέξουν τον λόγο για τον οποίο έδωσαν μια συγκεκριμένη απάντηση. Στο τρίτο μέρος περιλαμβάνονται τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων, όπου οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν πόσο βέβαιοι είναι για την απάντηση που έδωσαν σε κάθε ερώτηση, μέσα από μία συνήθως πεντάβαθμη κλίμακα Likert (από το 1 καθόλου βέβαιος-α έως το 5 απόλυτα βέβαιος-α) (Gurel et al., 2015).

Με βάση τον παραπάνω σχεδιασμό, ως παρανόηση ορίζεται μια λανθασμένη απάντηση που δίνεται με υψηλή βεβαιότητα. Αντίθετα, σωστή ή λανθασμένη απάντηση που δίνεται με χαμηλή βεβαιότητα ερμηνεύεται ως έλλειψη γνώσης (Gurel et al., 2015). Αξιολόγηση των παρανοήσεων των μαθητών με έλεγχο της βεβαιότητας των απαντήσεών τους έχουν χρησιμοποιηθεί για να διερευνηθούν παρανοήσεις στις αριθμητικές πράξεις (Yang & Sianturi, 2019) αλλά και παρανοήσεις σε δεκαδικούς αριθμούς (Durkin & Johnson, 2015). Τα αποτελέσματα της έρευνας όσον αφορά τις παρανοήσεις στους δεκαδικούς, ανέδειξαν ως πιο

κοινές αυτές που σχετίζονται με λάθη σχετικά με την *προκατάληψη του φυσικού αριθμού,* που αφορά την τάση να χρησιμοποιούνται ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε καταστάσεις όπου εμπλέκονται δεκαδικοί αριθμοί κι άρα αυτές οι ιδιότητες δεν ισχύουν (Christou, 2015; Ni & Zhou, 2005).

Ένας λόγος που οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολία στο να αντιμετωπίσουν παρανοήσεις όπως αυτές που εμφανίζονται στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, είναι ότι δεν έχουν επίγνωση των παρανοήσεών τους (Christou & Prokopou, 2020). Ένα είδος κειμένου που φαίνεται ότι μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές σε αυτήν την κατεύθυνση, ως ένα βήμα να αντιμετωπίσουν παρανοήσεις σαν αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι το *ανατρεπτικό κείμενο*. Στην πιο κοινή μορφή του, ένα ανατρεπτικό κείμενο περιγράφει μία παρανόηση και ευθύς αμέσως την διαψεύδει, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα τον λόγο για τον οποίο δεν είναι σωστή (Lem et al., 2017). Η αντιδιαστολή αυτή φαίνεται να βοηθά τον αναγνώστη του κειμένου να αμφισβητήσει την εγκυρότητα της λανθασμένης πεποίθησης που είχε αρχικά και να μπει στη διαδικασία να δεχθεί την πιο ορθή εναλλακτική ιδέα που του προσφέρεται (Guzzetti, 2000). Αντίθετα, ένα κείμενο υπενθύμισης, όπως αυτά που περιέχονται στα σχολικά βιβλία, αναφέρει απλώς τον κανόνα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών, χωρίς να προσπαθεί να διαψεύσει συγκεκριμένες λανθασμένες πεποιθήσεις.

Όσον αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση, είναι λίγες οι έρευνες στις οποίες εξετάζεται η συμβολή του ανατρεπτικού κειμένου στην αντιμετώπιση παρανοήσεων (Lem et al., 2017). Στις έρευνες αυτές η χρήση του ανατρεπτικού κειμένου συνέβαλε μεν στην μείωση των λαθών και στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών αλλά δεν κατάφερε να αντιμετωπίσει πλήρως τις παρανοήσεις. Επίσης οι αλλαγές δεν διατηρήθηκαν σε βάθος χρόνου (Christou & Prokopou, 2020; Lem et al., 2017). Στις προηγούμενες όμως μελέτες δεν είχε ζητηθεί από τους μαθητές να αυτοαξιολογήσουν την αποτελεσματικότητά τους, ώστε να αποκτήσουν μεγαλύτερη επίγνωση των λανθασμένων τους πεποιθήσεων.

Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό να μελετήσει τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές Δημοτικού στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, διερευνώντας τόσο τις απαντήσεις των μαθητών σε συγκεκριμένα έργα όσο και τα επίπεδα βεβαιότητας κάθε απάντησης. Επιπροσθέτως, επιδιώκει να εξετάσει κατά πόσο μια διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών. Τα ερευνητικά ερωτήματα διαμορφώνονται ως εξής: Ποιες παρανοήσεις εμφανίζουν οι

μαθητές στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών; Τι επίδραση έχει μια διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο στην αντιμετώπιση των παρανοήσεων;

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 87 μαθητές (42 κορίτσια) της Δ' και Ε' τάξης του Δημοτικού, με μέσο όρο ηλικίας 10 και 11 ετών αντίστοιχα. Το δείγμα επιλέχθηκε με βολική δειγματοληψία από δύο δημόσια σχολεία της βόρειας Ελλάδας. Η Ομάδα Παρέμβασης (ΟΠ), η οποία έλαβε κατά τη διδακτική παρέμβαση το ανατρεπτικό κείμενο, αποτελούνταν από 42 μαθητές (20 κορίτσια). Η Ομάδα Ελέγχου (ΟΕ), η οποία έλαβε το κείμενο υπενθύμισης αποτελούνταν από 45 μαθητές (22 κορίτσια).

Υλικά

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας, σχεδιάστηκαν τρία παρόμοια τεστ τριών επιπέδων που λειτούργησαν ως προ-, μετά-, και μεταγενέστερος έλεγχος των παρανοήσεων των μαθητών. Κάθε τεστ περιλαμβάνει 8 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, οι οποίες διερευνούν τις πιο κοινές παρανοήσεις που εμφανίζονται στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών, όπως αυτές έχουν αναδειχθεί από τη σχετική βιβλιογραφία, αλλά και τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων. Ένα παράδειγμα μιας ερώτησης ενός από τα τεστ παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.

1) Κύκλωσε τον μεγαλύτερο αριθμό

α) 0,134 ⇩ β) 0,4 ⇩ γ) 0,34 ⇩

Γιατί κύκλωσες το α; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.	**Γιατί κύκλωσες το β; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**	**Γιατί κύκλωσες το γ; Κύκλωσε μία από τις παρακάτω απαντήσεις.**
1. Επειδή το 134 είναι μεγαλύτερο από το 4 και το 34.	1. Επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	1. Επειδή έχει δέκατα και εκατοστά που έχουν την μεγαλύτερη αξία.
2. Επειδή ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος.	2. Επειδή ο αριθμός 4 στα δέκατα, που έχουν την μεγαλύτερη αξία, είναι μεγαλύτερος από το 1 και το 3.	2. Επειδή το 34 με ένα μηδενικό στο τέλος γίνεται 340 και είναι μεγαλύτερο από το 134 και το 4.
3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.	3. Δεν γνωρίζω, το επέλεξα τυχαία.

➢ **Πόσο βέβαιος-α είσαι για την απάντηση που έδωσες στην ερώτηση 1; Κύκλωσε ό,τι σε εκφράζει καλύτερα.**

1. Καθόλου βέβαιος-α 2. Λίγο βέβαιος-α 3. Μέτρια βέβαιος-α 4. Πολύ βέβαιος-α 5. Απόλυτα βέβαιος-α

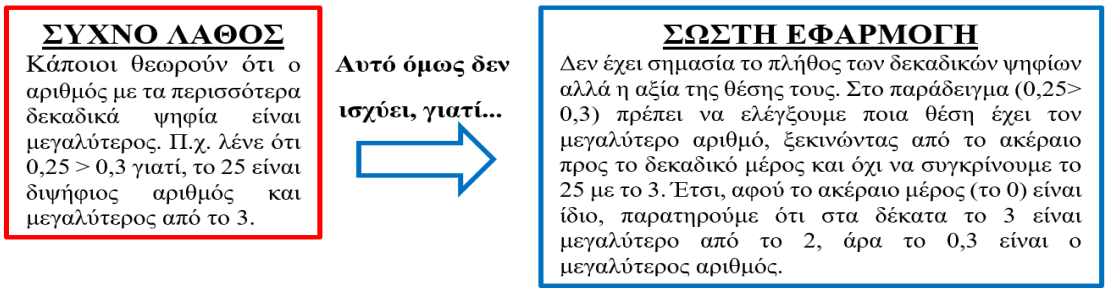
Εικόνα 1. Ενδεικτικό παράδειγμα ερώτησης στο τεστ του προ-ελέγχου

Από τις 8 ερωτήσεις κάθε τεστ, οι 4 αφορούν στην παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων (π.χ. κύκλωσε τον μεγαλύτερο αριθμό: α. 0,134 β. 0,4 γ. 0,34) ενώ οι άλλες 4 στην παρανόηση της αξίας της θέσης του μηδενός (π.χ. κύκλωσε τον μικρότερο αριθμό: α. 1,020 β. 1,200 γ. 1,102). Από τους μαθητές ζητήθηκε να κυκλώσουν μία επιλογή στα δύο

πρώτα μέρη, βλέποντας ταυτόχρονα τις τρεις εναλλακτικές επιλογές. Στο τρίτο μέρος ζητήθηκε να κυκλώσουν πόσο βέβαιοι ήταν για την απάντηση που έδωσαν. Τα έργα έχουν την ίδια δομή και δόθηκαν με ελαφρώς διαφορετικούς αριθμούς στις τρεις φάσεις της μελέτης. Η αξιοπιστία τους κρίνεται καλή (Cronbach's a>0,719) σε όλες τις φάσεις της μελέτης.

Η διδακτική παρέμβαση

Στην ΟΠ δόθηκε να διαβάσουν ένα ανατρεπτικό κείμενο. Το ανατρεπτικό κείμενο περιλαμβάνει τέσσερα επιμέρους μικρά κείμενα σχεδιασμένα με τέτοια μορφή, ώστε να γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές η ταυτόχρονη αντιπαράθεση της παρανόησης, της πρότασης διάψευσης και της αποδεκτής γνώσης, όπως αυτό που παρουσιάζεται στην Εικόνα 2. Για την ΟΕ χρησιμοποιήθηκε ένα απλό κείμενο υπενθύμισης, όπως αυτά που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών.



Εικόνα 2. Ενδεικτικό παράδειγμα ανατρεπτικού κειμένου

Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε μέσα στη σχολική τάξη με την παρουσία του εκπαιδευτικού της τάξης. Στην πρώτη φάση της έρευνας, οι μαθητές συμπλήρωσαν το τεστ του προ-ελέγχου. Μόλις ολοκλήρωσαν, ξεκίνησε η διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης, η οποία διήρκησε περίπου 20' για την ΟΠ και 15' για την ΟΕ. Τόσο το ανατρεπτικό όσο και το κείμενο υπενθύμισης δόθηκαν στους μαθητές σε έντυπη μορφή. Ακολούθησε ο μετα-έλεγχος και περίπου έναν μήνα μετά ο μεταγενέστερος έλεγχος. Έγιναν δεκτές διευκρινιστικές ερωτήσεις οι οποίες και απαντήθηκαν.

Αποτελέσματα

Οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα διάταξης των δεκαδικών αριθμών στο πρώτο μέρος του τεστ βαθμολογήθηκαν ως σωστές ή λάθος. Τα αποτελέσματα για τον προ-έλεγχο έδειξαν ότι περίπου το 40% των απαντήσεων στα έργα σύγκρισης δεκαδικών αριθμών με διαφορετικό πλήθος ψηφίων της ΟΠ και περίπου το 34% της ΟΕ ήταν λανθασμένες. Εστιάζοντας στα λάθη που έκαναν οι μαθητές στον προ-έλεγχο, φαίνεται ότι στην παρανόηση «περισσότερα ψηφία-μεγαλύτερος αριθμός»

οφείλονταν το 38,1% αυτών των λαθών της ΟΠ και το 28,3% της ΟΕ. Στην παρανόηση «λιγότερα ψηφία-μεγαλύτερος αριθμός», οφείλονταν το 8,9% των λανθασμένων απαντήσεων για την ΟΠ και το 13,3% για την ΟΕ. Τέλος, στα έργα που εξέταζαν την παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός, το 63,1% των λανθασμένων απαντήσεων της ΟΠ και το 60,5% της ΟΕ οφείλονταν στην παρανόηση ότι το 0 στο δεκαδικό μέρος δεν έχει αξία. Οι συχνότητες των λανθασμένων απαντήσεων σε βασικές κατηγορίες παρανοήσεων και στις τρεις φάσεις της έρευνας παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 1. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, τα λάθη που οφείλονται στις παρανοήσεις φαίνεται να υποχωρούν στον μετα-έλεγχο και μέρος αυτής της υποχώρησης να διατηρείται και στον μεταγενέστερο έλεγχο.

Κατηγορίες παρανοήσεων	**Προ-έλεγχος**		**Μετά-έλεγχος**		**Μεταγενέστερος-έλεγχος**	
	ΟΠ (N=42)	ΟΕ (N=45)	ΟΠ (N=42)	ΟΕ (N=45)	ΟΠ (N=42)	ΟΕ (N=45)
μεγαλύτερος-περισσότερα δεκ. ψηφία	64	51	28	32	29	35
	38,1%	28,3%	16,6%	17,7%	17,2%	19,4%
μεγαλύτερος-λιγότερα δεκ. ψηφία	15	24	3	19	6	22
	8,9%	13,3%	3,6%	10,5%	4,8%	12,2%
το 0 στο δεκ. μέρος δεν έχει αξία	106	109	63	88	72	112
	63,1%	60,5%	37,5%	48,8%	42,8%	62,2%

Πίνακας 1. Συχνότητα λανθασμένων απαντήσεων ανά κατηγορία και ανά φάση έρευνας

Στη συνέχεια, οι απαντήσεις και στα τρία μέρη κάθε τεστ αξιολογήθηκαν ταυτόχρονα ως εξής: Οι απαντήσεις, στα πρώτα δύο μέρη του τεστ βαθμολογήθηκαν ως σωστές ή λάθος. Στο τρίτο μέρος οι βεβαιότητες σε κάθε απάντηση βαθμολογήθηκαν με βάση μια πεντάβαθμη κλίμακα, με τη βεβαιότητα από 3 και πάνω να θεωρείται *υψηλή* ενώ από 2 και κάτω *χαμηλή* (Durkin & Johnson, 2015). Οι απαντήσεις σε ολόκληρο το τεστ κατηγοριοποιήθηκαν ως *Μαθηματικώς ορθές,* όταν ήταν σωστά τα δύο πρώτα μέρη και υπήρχε υψηλή βεβαιότητα. Εάν τα δύο πρώτα μέρη ήταν σωστά αλλά υπήρχε χαμηλή βεβαιότητα, τότε οι απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν ως *Ελλιπής γνώση*. Οι απαντήσεις

κατηγοριοποιήθηκαν ως *Παρανόηση,* όταν τα δύο πρώτα μέρη ήταν λανθασμένα και υπήρχε υψηλή βεβαιότητα για τις απαντήσεις. Επίσης ως *Παρανόηση* κατηγοριοποιήθηκε και η απάντηση που στο πρώτο μέρος ήταν σωστή αλλά στο δεύτερο ήταν λάθος (λάθος συλλογιστική) κι αυτό γιατί ερμηνεύτηκε ότι η αρχική σωστή απάντηση έγινε τυχαία. Αν τα πρώτα δύο μέρη απαντήθηκαν λανθασμένα αλλά η βεβαιότητα ήταν χαμηλή, τότε η συνολική απάντηση κατηγοριοποιήθηκε ως *Ελλιπής γνώση*.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο Πίνακας 2 παρουσιάζει την κατανομή των απαντήσεων στα έργα που αφορούν την παρανόηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων ανά φάση έρευνας. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 2, τα αυξημένα ποσοστά που εμφανίζονται στην κατηγορία των παρανοήσεων δείχνουν ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων κάνουν λάθη στη διάταξη των δεκαδικών αριθμών βασικά λόγω της παρανόησης που αφορά το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων κι όχι λόγω *ελλιπούς γνώσης*. Επίσης, φαίνεται πως η ΟΠ ωφελείται περισσότερο και για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από την παρέμβαση σε σχέση με την ΟΕ, καθώς μειώνονται οι συχνότητες εμφάνισης της παρανόησης στον μετα-έλεγχο και διατηρούνται σχετικά χαμηλές ακόμα και στον μεταγενέστερο-έλεγχο.

	ΟΠ (N=42)			**ΟΕ (N=45)**		
	Ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Προ-έλεγχος	89	7	72	100	16	64
	53%	4,2%	42,8%	55,4%	8,9%	35,5%
Μετά-έλεγχος	135	4	29	128	-	52
	80,4%	4,7%	17,2%	71,1%		28,8%
Μεταγενέστερος-έλεγχος	133	-	35	120	-	60
	80,6%		20,8%	66,6%		33,3%

Πίνακας 2. Απαντήσεις στα έργα διάταξης με διαφορετικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 3 παρουσιάζει την κατανομή των απαντήσεων στα έργα που αφορούν την παρανόηση της αξίας θέσης του μηδενός ανά φάση έρευνας.

	ΟΠ (N=42)	**ΟΕ (N=45)**

	Ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση	Ορθή γνώση	Ελλιπής γνώση	Παρανόηση
Προ-έλεγχος	61	16	91	70	13	97
	36,3%	9,5%	54,1%	38,8%	7,2%	53,9%
Μετά-έλεγχος	105	-	63	91	4	85
	62,5%		37,5%	50,5%	2,9%	47,2%
Μεταγενέστερος-έλεγχος	95	-	73	67	-	113
	56,5%		43,4%	37,2%		62,7%

Πίνακας 3. Απαντήσεις στα έργα διάταξης με διαφορετική αξία θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς

Όπως και στα έργα που ήλεγχαν την παρανόηση για το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, έτσι κι εδώ (στον Πίνακα 3) φαίνεται πως οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών οφείλονται βασικά στην παρανόηση για την αξία της θέσης του μηδενός στο δεκαδικό μέρος παρά σε *ελλιπή γνώση*. Επίσης, αυτή η παρανόηση φαίνεται να αντιμετωπίζεται καλύτερα από την ΟΠ σε σχέση με την ΟΕ.

Στη συνέχεια, οι Μαθηματικώς ορθές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 2, η Ελλιπής γνώση που οφειλόταν σε σωστές απαντήσεις με χαμηλή βεβαιότητα με 1, ενώ η Ελλιπής γνώση με λανθασμένες απαντήσεις και οι Παρανοήσεις, δηλαδή, λανθασμένες απαντήσεις με υψηλή βεβαιότητα με 0. Στη βάση αυτής της βαθμολόγησης υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι των επιδόσεων σε κάθε φάση που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.

Για να εξεταστεί η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης αρχικά πραγματοποιήθηκε Levene’s test, για να ελεγχθεί η μη διαφοροποίηση των διακυμάνσεων των συμμετεχόντων μεταξύ των δύο ομάδων στη φάση του προ-ελέγχου. Οι διακυμάνσεις μεταξύ των απαντήσεων έδειξαν ότι οι δύο ομάδες δεν είχαν στατιστικά σημαντική διαφορά στις αρχικές τους επιδόσεις ($p>0.05$).

	Προ-έλεγχος		**Μετά-έλεγχος**		**Μεταγενέστερος-έλεγχος**	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
Ομάδα Παρέμβασης	0,8	0,9	1,4	0,8	1,3	0,9

Ομάδα Ελέγχου	0,9	0,9	1,2	0,9	1	0,9

Πίνακας 4. Μέσες επιδόσεις ανά ομάδα και ανά φάση της έρευνας

Σε δεύτερη φάση εφαρμόστηκε Paired samples T-test, το οποίο έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές στις συνολικές επιδόσεις των δύο ομάδων ανά φάση της έρευνας. Συγκεκριμένα, η ομάδα παρέμβασης εμφάνισε στατιστικώς σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(42)=3,78 *p=0,007*, d=0,7. Επίσης στατιστικώς σημαντικά καλύτερες επιδόσεις εμφανίστηκαν και στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(42) =4,725, *p=0,012*, d=0,55, έστω κι αν στον μεταγενέστερο-έλεγχο οι επιδόσεις μειώθηκαν σε σχέση με τον μετα-έλεγχο t(42)=4,647, *p=0,012*, d=0,11. Η ομάδα ελέγχου επίσης εμφάνισε στατιστικώς σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στον μετα-έλεγχο σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(45)=5,871 *p=0,001*, d=0,33. Επίσης, στατιστικώς καλύτερες επιδόσεις εμφανίστηκαν και στον μεταγενέστερο-έλεγχο της ΟΕ σε σχέση με τον προ-έλεγχο t(45)=10,908 *p=0.001*, d=0,11, αλλά οι επιδόσεις στον μεταγενέστερο-έλεγχο ήταν μειωμένες σε σχέση με τον μετα-έλεγχο t(45)=22,416 *p=0.001*, d=0,22. Από τη σύγκριση των μεγεθών επίδρασης που παρουσιάζονται παραπάνω (Cohen's d) φαίνεται πως η επίδραση της παρέμβασης στην ΟΠ είναι από *μέτρια* (d>0,5) ως *υψηλή* (d>0,7), σε αντίθεση με την επίδρασή της στην ΟΕ που είναι χαμηλή.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία εξέτασε τις παρανοήσεις μαθητών Δ' και Ε' Δημοτικού, όταν συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς εξετάζοντας τόσο τις απαντήσεις τους σε έργα διάταξης δεκαδικών αριθμών όσο και τα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεών τους. Με αυτήν τη μεθοδολογία, ήταν δυνατόν να διερευνηθεί αν λάθη των μαθητών στη σύγκριση οφείλονται σε συγκεκριμένες παρανοήσεις για τους δεκαδικούς ή σε έλλειψη γνώσης.

Τα αποτελέσματα της μελέτης επιβεβαίωσαν την ύπαρξη παρανοήσεων σχετικών με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων και της αξίας θέσης του μηδενός στους δεκαδικούς αριθμούς, που διαπιστώθηκε από το μεγάλο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων με υψηλή βεβαιότητα, που έδωσαν οι μαθητές της ομάδας παρέμβασης και της ομάδας ελέγχου. Τα περισσότερα λάθη εμφανίστηκαν λόγω της παρανόησης ότι ο αριθμός με τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος, ενώ λίγο μικρότερο ποσοστό λαθών εμφανίστηκε και λόγω της παρανόησης ότι ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτερος, ενισχύοντας

προηγούμενες μελέτες του πεδίου (Steinle & Stacey, 1998). Επίσης, αρκετά από τα λάθη προέκυψαν λόγω της τάσης των μαθητών να πιστεύουν ότι τα μηδενικά δεν έχουν αξία όταν εμφανίζονται στο δεκαδικό μέρος των δεκαδικών αριθμών και άρα μπορούν να αγνοηθούν, όπως έχει αναδειχθεί και σε προηγούμενες μελέτες (Durkin & Johnson, 2015).

Στην παρούσα μελέτη διερευνήθηκε επίσης κατά πόσο μια διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο στην ομάδα παρέμβασης θα μπορούσε να βοηθήσει τα παιδιά να αντιμετωπίσουν τις βασικές τους παρανοήσεις με τη διάταξη των δεκαδικών αριθμών. Σε αυτήν την κατεύθυνση, στην ομάδα παρέμβασης δόθηκε ένα ανατρεπτικό κείμενο στο οποίο οι παρανοήσεις δηλώνονταν αρχικά ρητά και με χρήση παραδείγματος, αλλά στη συνέχεια ανατρέπονταν. Αντίθετα, στην ομάδα ελέγχου δόθηκε ένα απλό κείμενο υπενθύμισης του κανόνα σύγκρισης των δεκαδικών αριθμών, όπως αυτά που περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Τα αποτελέσματα έδειξαν βελτίωση των επιδόσεων και για τις δύο ομάδες αμέσως μετά την παρέμβαση. Παρ’ όλα αυτά, περίπου έναν μήνα μετά τη διδακτική παρέμβαση, η επίδοση της ομάδας παρέμβασης φάνηκε να διατηρείται στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε υψηλότερα επίπεδα σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, δείχνοντας ότι τα αποτελέσματα του ανατρεπτικού κειμένου διατηρούνται περισσότερο στον χρόνο.

Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν την υπόθεση ότι το ανατρεπτικό κείμενο μπορεί να αποτελέσει ένα αποτελεσματικό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού για την αντιμετώπιση παρανοήσεων που προκαλούν συγκεκριμένα λάθη στη σύγκριση των δεκαδικών αριθμών. Παρ’ όλα αυτά, η μικρή πτώση των επιδόσεων των μαθητών στον μεταγενέστερο-έλεγχο σε σχέση με τον μετα-έλεγχο, δείχνει ότι από μόνο του και σε μία σύντομης διάρκειας διδακτική παρέμβαση, όπως η συγκεκριμένη, δεν είναι αρκετό για την επίτευξη βαθιάς αλλαγής στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών που υποστηρίζουν τις λανθασμένες αντιλήψεις τους για τους δεκαδικούς αριθμούς (Christou & Prokopou, 2020; Lem et al., 2017). Ωστόσο, τα αυξημένα μεγέθη επίδρασης που εμφάνισε η διδακτική παρέμβαση με ανατρεπτικό κείμενο σε σχέση με αυτά του κειμένου υπενθύμισης, ενισχύει την πεποίθησή μας ότι συστηματική χρήση του και πιθανή παρουσία του στα σχολικά βιβλία θα μπορούσε να έχει ακόμα καλύτερα και πιο μακροπρόθεσμα αποτελέσματα στην αντιμετώπιση τέτοιων παρανοήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Christou, K. P., & Prokopou, A. (2020). Using refutational text to address the multiplication makes bigger misconception. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair, 7*(1), 125-140.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21-29.

Guzzetti, B. J. (2000). Learning counter-intuitive science concepts: What have we learned from over a decade of research?. *Reading & Writing Quarterly*, *16*(2), 89-98.

Gurel, D. K., Eryilmaz, A., & McDermott, L. C. (2015). A review and comparison of diagnostic instruments to identify students' misconceptions in science. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(5), 989-1008

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). Using refutational text in mathematics education. *ZDM*, *49*(4), 509-518.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. *Teaching Mathematics in New Times*, 548-555.

Yang, D. C., & Sianturi, I. A. J. (2019). Sixth grade students' performance, misconceptions, and confidence when judging the reasonableness of computational results. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(8), 1519-1540.

ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ

Αποστολίδου Κυριακή

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

kelyapostolidou@gmail.com

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές υποψήφιων εκπαιδευτικών κατά την πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων. Για τον σκοπό αυτό, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν υπολογιστικές εκτιμήσεις, μέσα από δοκιμασίες που διαφοροποιούνταν ως προς το είδος του αριθμού και ως προς το είδος των αριθμητικών πράξεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι συμμετέχοντες έχουν ανεπτυγμένη ικανότητα σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς και ότι είναι σε θέση να αξιοποιήσουν κάποια στρατηγική, προκειμένου να διασφαλίσουν την επιτυχία. Ωστόσο, αυξημένη ήταν και η χρήση των τυπικών αλγορίθμων, χωρίς να οδηγούν πάντα σε επιτυχείς εκτιμήσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η μαθηματική εκπαίδευση έχει ως στόχο την ουσιαστική κατανόηση των εννοιών και των πράξεων. Για αυτό δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στην εννοιολογική τους κατανόηση, αρχικά με διαισθητικό τρόπο, προτού καταφύγουν στην εκμάθηση των τυπικών αλγορίθμων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα διαισθητικής αντίληψης, αποτελούν οι εκτιμήσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται για την πραγματοποίηση γρήγορων προσεγγιστικών υπολογισμών με το μυαλό (Δεσλή, 2021). Αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας των ανθρώπων, καθώς πολύ συχνά έρχονται αντιμέτωποι με καταστάσεις που απαιτούν άμεσα τη λήψη μιας απόφασης. Για παράδειγμα, μια οικογένεια εκτιμά το συνολικό ποσό που χρειάζεται για την κάλυψη των μηνιαίων εξόδων της (υπολογιστική εκτίμηση). Σε κάθε περίπτωση η τελική απάντηση υπολογίζεται νοερά, χωρίς τη χρήση κάποιου εργαλείου μέτρησης, όπως είναι το χαρτί και το μολύβι (van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams, 2017).

Οι εκτιμήσεις συμβάλλουν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, στην κατανόηση του μεγέθους των αριθμών και του νοήματος του αποτελέσματος των πράξεων (Son, Hu, & Lim, 2019). Όπως αναφέρουν οι van de Walle et al. (2017), οι εκτιμήσεις είναι στενά συνδεδεμένες με την αίσθηση του αριθμού, αφού μέσα από τη διαχείριση των αριθμών κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων, τα άτομα κατανοούν τους αριθμούς

διαισθητικά, αναπτύσσοντας την κριτική τους σκέψη. Στη βιβλιογραφία διακρίνονται τρεις τύποι εκτίμησης: η υπολογιστική εκτίμηση, η εκτίμηση μέτρων και η εκτίμηση πλήθους (Hogan, & Brezinski, 2003). Με δεδομένο ότι το αποτέλεσμα των εκτιμήσεων προσεγγίζει το ακριβές αποτέλεσμα, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση εκτίμησης μπορεί να προκύψουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, επομένως είναι αποδεκτό ένα πεδίο τιμών (van de Walle et al., 2017). Σύμφωνα με το παραπάνω χαρακτηριστικό, τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων κρίνονται ως περισσότερο ή λιγότερο επιτυχή.

Η υπολογιστική εκτίμηση ή κατ' εκτίμηση υπολογισμός αναφέρεται στην εύρεση μιας κατά προσέγγιση απάντησης σε ένα αριθμητικό πρόβλημα, η οποία πραγματοποιείται νοερά (Desli, & Lioliou, 2020). Αποτελεί σημαντική δεξιότητα στην καθημερινή ζωή παιδιών και ενήλικων, καθώς απαιτεί λιγότερο χρόνο από τον ακριβή υπολογισμό. Συχνά, ωστόσο, παρατηρείται οι υπολογιστικές εκτιμήσεις να συγχέονται με τους νοερούς υπολογισμούς. Αν και οι δύο συνδέονται με την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, και πραγματοποιούνται νοερά, χωρίς τη χρήση κάποιου εργαλείου μέτρησης (π.χ. η αριθμομηχανή), οι νοεροί υπολογισμοί καταλήγουν σε ακριβές αποτέλεσμα, ενώ οι υπολογιστικές εκτιμήσεις προσεγγίζουν το αποτέλεσμα του ακριβούς υπολογισμού (Δεσλή, & Ανεστάκης, 2014).

Στη βιβλιογραφία οι υπολογιστικές εκτιμήσεις έχουν μελετηθεί περισσότερο σε παιδιά και ενήλικες με τη χρήση έργων παραγωγής εκτιμήσεων και έργων σύγκρισης εκτιμήσεων (Ganor-Stern, 2016), ενώ λίγες είναι οι έρευνες σχετικά με την επίδοση υποψηφίων εκπαιδευτικών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης, οι οποίες παρουσιάζουν αντιφάσεις. Αναλυτικότερα, υπάρχουν έρευνες στις οποίες οι συμμετέχοντες εμφάνισαν σχετικά καλές επιδόσεις (Δεσλή, & Ανεστάκης, 2014· Gunes, 2022), ωστόσο, υπάρχουν και έρευνες όπου οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί εμφάνισαν ανεπαρκώς ανεπτυγμένες δεξιότητες στις υπολογιστικές εκτιμήσεις και αυξημένη τάση για εκτέλεση ακριβών υπολογισμών (Lemonidis, & Kaimakani, 2013· Son et al., 2019).

Όπως επισημαίνουν τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών, οι συμμετέχοντες παρουσιάζουν λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις κυρίως σε έργα εκτίμησης με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα, ενώ όσον αφορά τις πράξεις, οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις φαίνεται να τους δυσκολεύουν περισσότερο, συγκριτικά με τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις (Lemonidis, & Kaimakani, 2013· Son et al., 2019). Ωστόσο, εκτός από το είδος του αριθμού και το είδος των αριθμητικών πράξεων, η ορθότητα των εκτιμήσεων επηρεάζεται, όπως τονίζει η Ganor-Stern (2016) και από το μέγεθος των αριθμών. Στην έρευνα που πραγματοποίησε, αναφέρει ότι οι συμμετέχοντες φάνηκαν περισσότερο εξοικειωμένοι με

μικρότερους αριθμούς, ενώ κατά τη διαχείριση μεγαλύτερων αριθμών, εντόπισε λάθη στους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις που αφορούσαν κυρίως τη θεσιακή αξία των αριθμών. Επιπρόσθετα, εξίσου σημαντικό παράγοντα, σύμφωνα με την Gunes (2022), αποτελεί η επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών, προκειμένου οι λύτες να πραγματοποιήσουν μια επιτυχή εκτίμηση. Σύμφωνα με την έρευνά της, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων χρησιμοποιούσε λανθασμένες στρατηγικές, ενώ η πιο διαδεδομένη ήταν αυτή της στρογγυλοποίησης, επιβεβαιώνοντας αποτελέσματα παλαιότερων ερευνών (Lemonidis, & Kaimakani, 2013· Son et al., 2019). Τέλος, αυξημένη είναι η προτίμηση που δείχνουν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί στους ακριβείς υπολογισμούς, στους οποίους εμφανίζουν και καλύτερες επιδόσεις (Son et al., 2019). Ενδεχομένως, η αδυναμία αίσθησης του αριθμού που αναφέρουν οι Lemonidis και Kaimakani (2013), τους οδηγεί στην εκτέλεση των τυπικών αλγορίθμων με το μυαλό.

Αν και στις περισσότερες έρευνες τονίζεται η συμβολή των εκπαιδευτικών στην κατάκτηση της αίσθησης του αριθμού, η βιβλιογραφία είναι περισσότερο προσανατολισμένη στην ικανότητα παιδιών και ενηλίκων σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης, ενώ η έρευνα σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς είναι περιορισμένη και παρουσιάζει αντιφάσεις. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την ικανότητα υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης με φυσικούς και ρητούς αριθμούς, καθώς και την ορθότητα των εκτιμήσεων αυτών, ανάλογα με τις στρατηγικές που εφαρμόζουν. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζονται είναι: α) Ποια είναι η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών να πραγματοποιούν υπολογιστικές εκτιμήσεις; β) Ποιες είναι οι διαφορές στις επιδόσεις των φοιτητών ως προς το έτος φοίτησής τους; γ) Διαφοροποιείται η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις ως προς το είδος των αριθμών (φυσικοί, δεκαδικοί) που εμπλέκονται; δ) Διαφοροποιείται η ικανότητα των υποψήφιων εκπαιδευτικών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις ως προς την αριθμητική πράξη (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση);

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 60 προπτυχιακοί φοιτητές και φοιτήτριες (78,3%, γυναίκες και 21,7% άνδρες) του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Από το σύνολο των συμμετεχόντων φοιτούσαν στο πρώτο έτος (8,3%), στο δεύτερο έτος (43,3%), στο τρίτο έτος (23,3%), ενώ στο τέταρτο έτος (25%). Η επιλογή του δείγματος έγινε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας.

Σχεδιασμός - Εργαλείο έρευνας. Για τη διερεύνηση του κύριου ερευνητικού ερωτήματος, της παρούσας εργασίας, πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα στην οποία εφαρμόστηκε συγχρονικό σχέδιο έρευνας. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω τεστ που περιείχαν συγκεκριμένες δοκιμασίες, η ανάλυση των οποίων επιτρέπει την υπό προϋποθέσεις εξαγωγή γενικεύσιμων συμπερασμάτων (Brayman, 2017). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν Έργα παραγωγής εκτιμήσεων σύμφωνα με τα οποία παρουσιάζονταν στους συμμετέχοντες ένα αριθμητικό πρόβλημα, στο οποίο τους ζητήθηκε να δώσουν μια εκτίμηση χωρίς να προβούν σε υπολογισμό με ακρίβεια (Ganor-Stern, 2016). Συνολικά σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες δύο Έργα, που περιλάμβαναν 8 δοκιμασίες, ισάριθμα προερχόμενες από αυτά. Καθένα από τα δύο Έργα αφορούσε σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης.

Αναλυτικότερα, και στα δύο Έργα αξιοποιήθηκαν οι τέσσερις αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση) με στόχο να μελετήσουν την ικανότητα των προπτυχιακών φοιτητών και φοιτητριών σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης. Προκειμένου, όμως να μελετηθεί αν η ικανότητα τους διαφοροποιείται ανάλογα με το είδος των αριθμών, το Έργο 1 περιλάμβανε φυσικούς αριθμούς (π.χ. *Πόσο είναι περίπου το αποτέλεσμα της πράξης 43.459 + 6.533;*), ενώ το Έργο 2 περιλάμβανε δεκαδικούς αριθμούς (π.χ. *Πόσο είναι περίπου το αποτέλεσμα της πράξης 9,81 × 4,6;*). Με δεδομένο ότι το σχετικό μέγεθος κατέχει σημαντικό ρόλο τόσο στην επιτυχία των εκτιμήσεων όσο και στην επιλογή συγκεκριμένων στρατηγικών (Δεσλή, 2021), οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν στα Έργα, της παρούσας εργασίας, επιχειρούν να αναδείξουν πιθανές διαφοροποιήσεις στις επιδόσεις των συμμετεχόντων.

Με στόχο να αποφευχθεί η πιθανότητα χαμηλής επίδοσης των συμμετεχόντων στο δεύτερο Έργο, λόγω κόπωσης, ακολουθήθηκαν δύο σειρές παρουσίασης των Έργων. Πιο συγκεκριμένα, στους μισούς συμμετέχοντες τα Έργα παρουσιάστηκαν με τη σειρά αρίθμησής τους (Σειρά Α: Έργο 1 και Έργο 2), ενώ στους άλλους μισούς τα Έργα παρουσιάστηκαν με αντίθετη σειρά (Σειρά Β: Έργο 2 και Έργο 1). Τέλος, από όλους τους συμμετέχοντες, σε κάθε δοκιμασία ζητήθηκε, εκτός από την εκτίμησή τους να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν και πραγματοποίησαν νοερά τις εκτιμήσεις τους. Ο δείκτης αξιοπιστίας cronbachs’s alpha εκτιμήθηκε στο 0,848.

Διαδικασία. Όλοι οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν ατομικά σε έναν ήσυχο χώρο, έτσι ώστε να είναι συγκεντρωμένοι και ελεύθεροι να εκφράσουν τον τρόπο σκέψης τους. Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν εθελοντική και ανώνυμη, ενώ προηγουμένως είχαν ενημερωθεί σχετικά με τον σκοπό διεξαγωγής και τη διαδικασία της παρούσας έρευνας. Καθεμία δοκιμασία παρουσιαζόταν σε καρτέλα με λευκό χαρτί και από τους συμμετέχοντες

ζητούνταν να πραγματοποιήσουν τις εκτιμήσεις τους χωρίς χαρτί και μολύβι. Η διαδικασία διήρκεσε περίπου 10–15 λεπτά για κάθε συμμετέχοντα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

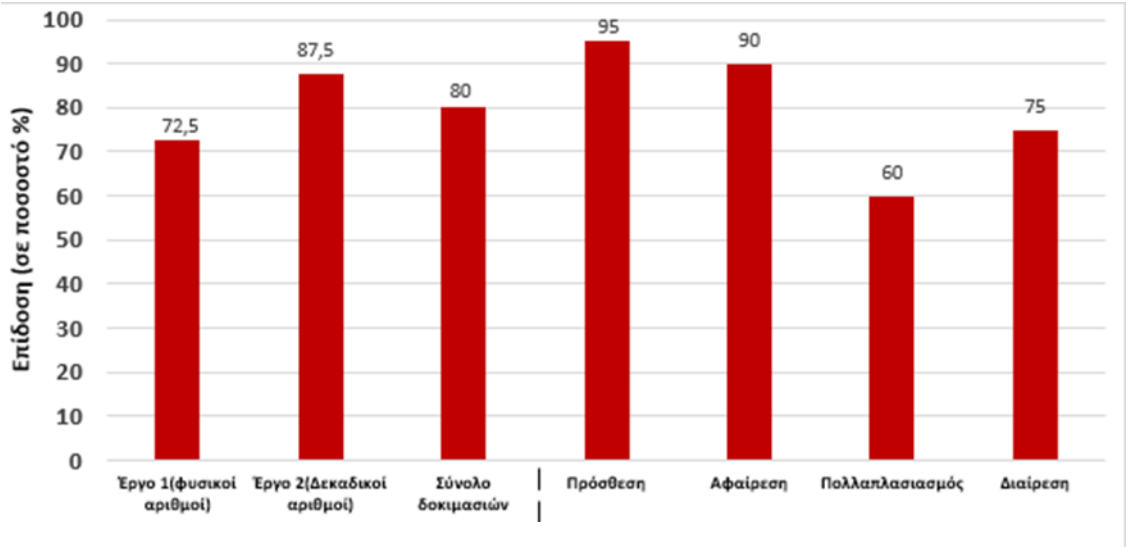
Για τον έλεγχο της επίδοσης των συμμετεχόντων, χρησιμοποιήθηκε ένα ελαστικό κριτήριο, σύμφωνα με το οποίο επιτυχείς θεωρήθηκαν οι εκτιμήσεις που είχαν απόκλιση της τάξης του 20% από την ακριβή απάντηση για κάθε δοκιμασία, ενώ όσες απαντήσεις δεν εντάσσονταν στο παραπάνω εύρος αποδεκτών τιμών, θεωρήθηκαν λανθασμένες (ανακριβείς). Τα δεδομένα αναλύθηκαν με το λογισμικό IBM SPSS Statistics v.29 με την αξιοποίηση τόσο περιγραφικής, όσο και επαγωγικής στατιστικής. Τέλος, πραγματοποιήθηκε έλεγχος Kolmogorov Smirnov, σύμφωνα με τον οποίο το δείγμα δεν ακολουθεί κανονική κατανομή, επομένως για την ανάλυση των δεδομένων αξιοποιήθηκαν μη παραμετρικά τεστ.

α. *Γενική επίδοση*. Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ήταν αρκετά υψηλή, με ποσοστό επιτυχίας κοντά στο 80%, τόσο στους άνδρες όσο και στις γυναίκες, η οποία βρέθηκε ότι δεν επηρεάζεται από το φύλο στο σύνολο των δοκιμασιών ($p=.725$), καθώς και στο κάθε Έργο ξεχωριστά (Έργο 1: $p=.522$ και Έργο 2: $p=.074$). Το υψηλό ποσοστό επιτυχίας των συμμετεχόντων βρέθηκε ότι δεν επηρεάζεται από το έτος σπουδών των συμμετεχόντων, καθώς οι επιδόσεις τους στο σύνολο των δοκιμασιών ($p=.457$) ήταν παρόμοιες.

Στατιστικά σημαντικές, όμως ήταν οι διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων ανάμεσα στα δύο Έργα εκτίμησης ($p<.001$), με τις περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις να παρουσιάζονται στο Έργο 2 (87,5%), δηλαδή στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς. Ακόμη, βρέθηκε ότι εκτός από το είδος του αριθμού, οι επιδόσεις των συμμετεχόντων επηρεάστηκαν και από το είδος των αριθμητικών πράξεων. Αναλυτικότερα, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στην πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ($p<.05$), μεταξύ της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ($p<.001$), καθώς και μεταξύ της πρόσθεσης και της διαίρεσης ($p<.001$), με τις περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις να παρουσιάζονται στην πράξη της πρόσθεσης (95%). Ακόμη, στατιστικά σημαντικές διαφορές βρέθηκαν μεταξύ των επιδόσεων των συμμετεχόντων στην πράξη της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού

(p<.001) και μεταξύ της αφαίρεσης και της διαίρεσης (p<.01), με τις περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις στην πράξη της αφαίρεσης (90%).

Τέλος, από την ανάλυση προέκυψαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις επιδόσεις των συμμετεχόντων μεταξύ της πράξης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (p<.01) με τις περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις να παρουσιάζονται στην πράξη της διαίρεσης (75%). Το σχήμα 1 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 1. Επιδόσεις των συμμετεχόντων ως προς το είδος του αριθμού και το είδος των αριθμητικών πράξεων

β. *Στρατηγικές*. Ο τρόπος σκέψης και η αιτιολόγηση που έδιναν οι συμμετέχοντες για την εκτίμησή τους αναδεικνύουν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν, οι οποίες ταξινομήθηκαν σε τρεις κατηγορίες και περιγράφονται παρακάτω.

1. Τυχαία εκτίμηση. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων, οι οποίοι αδυνατούσαν να πραγματοποιήσουν μια εκτίμηση με αποτέλεσμα να δίνουν ως απάντηση ένα τυχαίο αριθμό (π.χ. «*Δεν γνωρίζω καθόλου το αποτέλεσμα, οπότε θα δώσω ένα τυχαίο αριθμό*»).

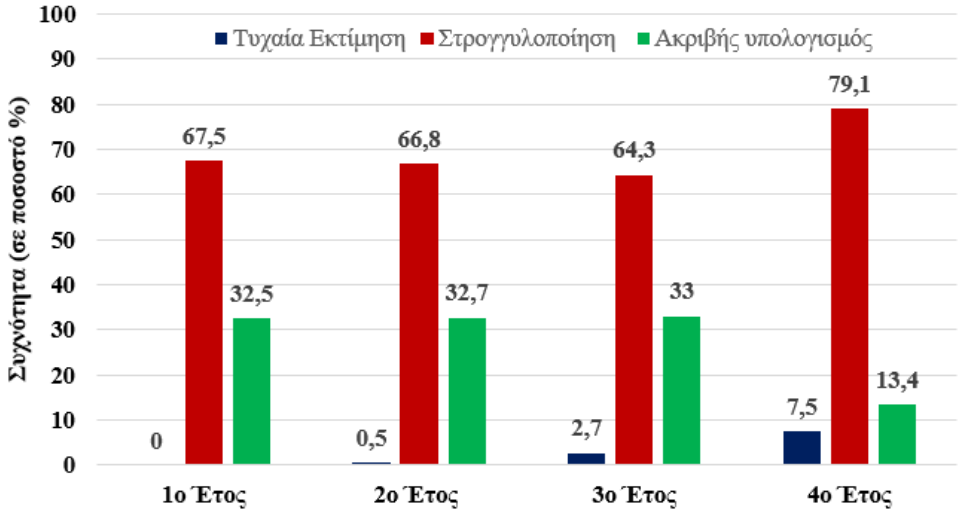
2. Στρογγυλοποίηση. Σε αυτή τη στρατηγική εντάχθηκαν οι απαντήσεις των συμμετεχόντων οι οποίοι στρογγυλοποίησαν τα αριθμητικά δεδομένα που τους δόθηκαν, προκειμένου να είναι διαχειρίσιμα για την εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα, στη 3η δοκιμασία του Έργου 1 (*Πόσο είναι περίπου το αποτέλεσμα της πράξης: 614×103=;*), ένας συμμετέχοντας έδωσε την απάντηση του εκτελώντας το πολλαπλασιασμό αφού πρώτα στρογγυλοποίησε τους εμπλεκόμενους αριθμούς: «*Στρογγυλοποιώ το 103*

σε 100 και εκτελώ την πράξη 614×100 η οποία δίνει αποτέλεσμα περίπου 61.400»

3. Ακριβής υπολογισμός. Στη στρατηγική αυτή, οι συμμετέχοντες πραγματοποίησαν νοερά τον τυπικό αλγόριθμο των πράξεων και κατέληξαν σε ακριβές αποτέλεσμα.

Η πιο διαδεδομένη στρατηγική, την οποία χρησιμοποίησαν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, ανεξάρτητα από το έτος σπουδών τους, ήταν η στρογγυλοποίηση, τόσο στο σύνολο των δοκιμασιών όσο και στο κάθε Έργο ξεχωριστά (βλ. Σχήμα 2). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως, αποτελούν οι διαφορές που εντοπίζονται στη χρήση της στρατηγικής 3 (Ακριβής υπολογισμός), καθώς οι φοιτητές του 4ου έτους φαίνεται να την επιλέγουν λιγότερο (13,4%) συγκριτικά με τους φοιτητές του 1ου (32,5%), του 2ου (32,75%) και του 3ου (33%) έτος σπουδών. Επομένως, μεγάλο ποσοστό των φοιτητών επιλέγει την πραγματοποίηση ακριβών υπολογισμών. Τέλος, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί του 4ου έτους φαίνεται να χρησιμοποιήσαν περισσότερο τη στρατηγική 1 (Τυχαία εκτίμηση) (7,5%), συγκριτικά με τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς του 2ου έτους (0,5%), αφήνοντας την επιτυχία των εκτιμήσεών τους στην τύχη. Το σχήμα 2 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.

Η μόνη συσχέτιση που βρέθηκε στατιστικά σημαντική, ήταν ανάμεσα στη χρήση της στρατηγικής 1 (Τυχαία εκτίμηση) και τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών εκτίμησης (Spearman's rho= -,391, p<.01) αλλά και με τις επιδόσεις τους στο Έργο 1 με τους φυσικούς αριθμούς (Spearman's rho=-,424, p<.01). Δηλαδή, όσο περισσότερο χρησιμοποιούσαν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί αυτή τη στρατηγική τόσο λιγότερες ήταν οι επιτυχείς εκτιμήσεις τους. Όταν εξετάστηκε αν η χρήση των στρατηγικών ευνοεί την πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις, βρέθηκαν αρνητικές συσχετίσεις για τη στρατηγική 1, στην πράξη του πολλαπλασιασμού (Spearman's rho=- ,280, p<.05) και στην πράξη της διαίρεσης (Spearman's rho=-,405, p<.01). Δηλαδή, όσο περισσότερο χρησιμοποιούσαν οι συμμετέχοντες τη συγκεκριμένη στρατηγική σε αυτές τις δύο αριθμητικές πράξεις, τόσο ανεπιτυχείς εκτιμήσεις πραγματοποιούσαν. Ο Πίνακας 1 παρουσιάσει τα στοιχεία αυτά.



Πίνακας 1. Συσχετίσεις της χρήσης στρατηγικών με την επίδοση

Στρατηγικές	Συνολική επίδοση	Έργο 1 (Φυσικούς αριθμοί)	Έργο 2 (Δεκαδικοί αριθμοί)	Δοκιμασίες Πρόσθεσης	Δοκιμασίες Αφαίρεσης	Δοκιμασίες Πολλαπλασιασμού	Δοκιμασίες Διαίρεσης
1	-,391**	-,424**	-,175	-,126	,000	-,280*	-,405**
2	,111	,182	-,008	,144	-,046	,108	,063
3	,042	-,025	,104	-,035	,054	,020	,081

Στατιστική σημαντικότητα: *p<.05, **p<.01

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα είχε σκοπό να διερευνήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές υποψήφιων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε καταστάσεις υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς και τις διαφοροποιήσεις που εντοπίζονται ανάλογα με το είδος των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων. Τρία είναι τα κύρια ευρήματα, όπως προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Πρώτον, η επίδοση των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασίων ήταν αρκετά υψηλή τόσο στους άνδρες (77,87%) όσο και στις γυναίκες (81,12%), ανεξαρτήτως του έτους σπουδών στο οποίο φοιτούσαν. Δηλαδή, οι συμμετέχοντες παρουσίασαν παρόμοιες επιδόσεις, στο σύνολο των δοκιμασιών, σε όλα τα έτη σπουδών. Ωστόσο, παρουσιάστηκαν διαφορές στις επιδόσεις τους στο κάθε Έργο ξεχωριστά, με τις περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις στο Έργο 2 (87,5%), δηλαδή στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με δεκαδικούς αριθμούς, συγκριτικά με τις επιδόσεις τους στο Έργο 1 (72,5%), δηλαδή στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς. Αν και στη βιβλιογραφία αναφέρεται ότι καλύτερες επιδόσεις

παρουσιάζουν τα άτομα σε εκτιμήσεις στις οποίες εμπλέκονται ακέραιοι αριθμοί (Δεσλή, 2021), το παραπάνω εύρημα σχετίζεται με το μέγεθος των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμασίες των δύο Έργων. Πιο συγκεκριμένα, όπως τονίζει και η Ganor-Stern (2016), οι μικρότεροι αριθμοί ευνοούν την επιτυχία στις εκτιμήσεις, συγκριτικά με τους μεγαλύτερους αριθμούς. Επομένως, για τους συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας ήταν ευκολότερη η πραγματοποίηση εκτιμήσεων στο Έργο 2, για αυτό ενδεχομένως παρουσίασαν και καλύτερες επιδόσεις.

Δεύτερον, οι εκτιμήσεις που πραγματοποίησαν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί διαφοροποιήθηκαν ανάλογα με το είδος των αριθμητικών πράξεων. Αναλυτικότερα, σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες ήταν σε θέση να πραγματοποιήσουν επιτυχείς κατ΄ εκτίμηση υπολογισμούς στις δοκιμασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης (95% και 90%, αντίστοιχα), αλλά έξι στους δέκα (60%) στις δοκιμασίες πολλαπλασιασμού και τρεις στους τέσσερις (75%) στις δοκιμασίες τις διαίρεσης. Με άλλα λόγια, οι συμμετέχοντες παρουσιάζουν λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις σε υπολογιστικές εκτιμήσεις που αφορούν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, σε σύγκριση με αυτούς που αφορούν προσθέσεις και αφαιρέσεις. Το εύρημα αυτό, επιβεβαιώνει προηγούμενα ερευνητικά ευρήματα (Lemonidis & Kaimakani, 2013) και αναδεικνύει την επίδραση της αριθμητικής πράξης στην επιτυχία των εκτιμήσεων των ατόμων.

Τρίτον, αναφορικά με τις στρατηγικές που αξιοποίησαν οι συμμετέχοντες, κυρίαρχη ήταν η στρατηγική της στρογγυλοποίησης, εύρημα το οποίο συμφωνεί με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Desli & Lioliou, 2020· Ganor-Stern, 2016· van de Walle et al., 2017). Πιο συγκεκριμένα, σχεδόν τρεις στους τέσσερις συμμετέχοντες προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης και ήταν πιο πιθανό να πραγματοποιήσουν μια επιτυχή εκτίμηση, τόσο στο σύνολο των δοκιμασιών όσο και στο κάθε Έργο ξεχωριστά. Ωστόσο, ένας αρκετά μεγάλος αριθμός συμμετεχόντων κυρίως από τα πρώτα τρία έτη σπουδών (32,5%, 32,7% και 33%, αντίστοιχα), χρησιμοποίησε νοερά τον τυπικό αλγόριθμο, προκειμένου να καταλήξει σε ένα ακριβές αποτέλεσμα, χωρίς απαραίτητα να καταλήγει σε επιτυχείς εκτιμήσεις. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με την έρευνα των Desli και Lioliou (2020), στην οποία αναφέρουν ότι η εφαρμογή του τυπικού αλγόριθμου δεν αποτελεί ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης και επομένως δεν οδηγεί πάντα σε επιτυχείς εκτιμήσεις. Αντίθετα, αναφορικά με τους τεταρτοετής φοιτητές, τη στρατηγική του ακριβούς υπολογισμού επέλεξε περίπου ένα στους δέκα (13,4%), όμως υπήρχε και ένα ποσοστό φοιτητών (7,5%) το οποίο

αδυνατούσε να εφαρμόσει κάποια στρατηγική και επέλεξε να αφήσει την τύχη να κρίνει την επιτυχία των εκτιμήσεών τους. Τέλος, βρέθηκαν σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ των επιδόσεων των υποψήφιων εκπαιδευτικών και τη χρήση της στρατηγικής 1 (Τυχαία εκτίμηση). Όσον αφορά τις επιδόσεις των συμμετεχόντων στο σύνολο των δοκιμασιών, αλλά και στις δοκιμασίες του Έργου 1 (Υπολογιστικές εκτιμήσεις με φυσικούς αριθμούς), η χρήση της στρατηγικής 1 φαίνεται να επιδρά αρνητικά στην επιτυχία των εκτιμήσεων. Η ίδια στρατηγική όταν αξιοποιήθηκε στις δοκιμασίες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, οδήγησε τους συμμετέχοντες στην πραγματοποίηση ανεπιτυχών εκτιμήσεων. Συνεπώς, αν και ο αριθμός των υποψηφίων ανά έτος σπουδών διαφέρει, όταν οι ίδιοι αξιοποιούσαν κάποια στρατηγική και δεν άφηναν την εκτίμησή τους στην τύχη, ανεξάρτητα από το έτος φοίτησής τους, έτειναν να οδηγούνται σε επιτυχείς εκτιμήσεις.

Τα παραπάνω ευρήματα, αποτελούν ενθαρρυντικά δεδομένα αναφορικά με την ικανότητα υποψήφιων εκπαιδευτικών σε καταστάσεις υπολογιστικών εκτιμήσεων με φυσικούς και ρητούς αριθμούς, ωστόσο η ορθότητα των εκτιμήσεων, αυτών, φάνηκε να επηρεάζεται από τις στρατηγικές που αξιοποιήσαν (Gunes, 2022). Περαιτέρω έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα και με μεγαλύτερο αριθμό δοκιμασίων σε κάθε Έργο, αποτελεί επιτακτική ανάγκη, προκειμένου αφενός να αναδειχθεί η σημασία των κατάλληλων στρατηγικών στην επιτυχία των εκτιμήσεων, και αφετέρου να ενισχυθεί η αντιπροσωπευτικότητα των δεδομένων και να επιτραπεί η πιο έγκυρη γενίκευση των αποτελεσμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι κοινωνικής έρευνας*. Αθήνα: Gutenberg.

Δεσλή, Δ. (2021). *Οι εκτιμήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση: Είδη και εφαρμογές τους*. Αθήνα: Gutenberg.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψηφίων εκπαιδευτικών. Στα *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.* Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Desli, D., & Lioliou, A. (2020). Relationship between computational estimation and problem solving. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3). https://doi.org/10.29333/iejme/8435

Ganor-Stern, D. (2016). Solving math problems approximately: A developmental perspective. *PLOS ONE*, *11*(5), e0155515. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0155515

Gunes, G. (2022). Investigation of the computational estimation skills of and strategies employed by pre-service primary school teacher. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3). https://doi.org/10.29333/iejme/12057

Hogan, T. & Brezinski, K. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 259-281.

Lemonidis, C., & Kaimakani, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. MENON: *Journal of Educational Research*, *2b*, 86 – 98.

Son, J.-W., Hu, Q., & Lim, W. (2019). Computational estimation skill of preservice teachers: operation type and teacher view. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(5), 682–706. https://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1532537

van de Walle, J.A., Lovin, L.H., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. (Επιστημονική Επιμέλεια: Τριανταφυλλίδης, Τ.) Αθήνα: Gutenberg.

ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΙΣΘΗΣΗ ΔΟΜΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΠΤΙΚΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Ι. Παπαδόπουλος[1], Κ. Θεοδωράκου[2] & Α. Θωμά[3]

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης[1], Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας[2], University of Southampton[3]

ypapadop@eled.auth.gr[1] annienoiser@gmail.com[2] a.thoma@soton.ac.uk[3]

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε την Επαγγελματική Παρατήρηση ενός έμπειρου εκπαιδευτικού της Δημοτικής Εκπαίδευσης σε μια συλλογή απαντήσεων μαθητών που χρησιμοποιούν περιττές και νοερές παρενθέσεις. Συγκεκριμένα μέσω δομημένης συνέντευξης ζητήθηκε από τον εκπαιδευτικό να παρατηρήσει, ερμηνεύσει και αξιολογήσει τα γραπτά των μαθητών. Η ανάλυση έδειξε ότι ο εκπαιδευτικός παρατήρησε και ερμήνευσε τις περιττές και νοερές παρενθέσεις στις απαντήσεις των μαθητών αναγνωρίζοντας κάποια στοιχεία της αίσθησης της δομής των μαθητών. Οι ερμηνείες και οι αποφάσεις του βασίστηκαν σε διάφορα πλαίσια δείχνοντας μια πιο θετική στάση όσον αφορά την εγκυρότητα χρήσης των περιττών παρενθέσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά το γεγονός ότι η έννοια της δομής σε συνάφεια με τη χρήση παρενθέσεων έχουν ερευνηθεί διεξοδικά τις προηγούμενες δεκαετίες (Linchevski & Livneh, 1999), μόλις πρόσφατα το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει στραφεί σε δυο ανεξερεύνητες όψεις της χρήσης των παρενθέσεων: στις ‘νοερές’ και τις ‘περιττές’ παρενθέσεις (Papadopoulos & Gunnarsson, 2020; Papadopoulos & Thoma, 2023a, 2023b). Στην πρώτη περίπτωση, οι παρενθέσεις δεν είναι παρούσες με φυσικό τρόπο (δεν γράφονται από τους λύτες) αλλά οι παραστάσεις υπολογίζονται σαν να βρίσκονται αυτές με φυσικό τρόπο εκεί. Στη δεύτερη, οι λύτες κάνουν χρήση μεγαλύτερου αριθμού παρενθέσεων από όσες είναι από τεχνικής άποψης απαραίτητες και οι οποίες μπορούν να αφαιρεθούν χωρίς αυτό να επιδρά στο σωστό υπολογισμό της παράστασης. Η χρήση αυτών των παρενθέσεων έχει μελετηθεί κατά μήκος και των τριών βαθμίδων της εκπαίδευσης (Güler et al., 2022; Papadopoulos & Gunnarsson, 2020; Papadopoulos & Thoma, 2023a, 2023b), εξετάζοντας την οπτική της χρήσης ως μέσου έκφρασης της αίσθησης της δομής των μαθητών. Παρ’ όλο λοιπόν που για τους μαθητές φαίνεται να είναι ένα αξιόπιστο και αποτελεσματικό εργαλείο στη συλλογή τους, δεν είναι γνωστό κατά πόσο οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται τη λογική χρήσης αυτών των παρενθέσεων από τους μαθητές, ή στην περίπτωση που την αντιλαμβάνονται πώς την αντιμετωπίζουν. Για το λόγο αυτό, και στα πλαίσια της θεωρίας της Επαγγελματικής Παρατήρησης (Jacobs et al., 2010) η εργασία αυτή προσπαθεί να απαντήσει, μέσω μιας μελέτης περίπτωσης ενός

εκπαιδευτικού πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, στα ερωτήματα: Ποιο μοτίβο υπάρχει (αν υπάρχει) στην παρατήρηση ενός εκπαιδευτικού σε σχέση με τη μαθηματική σκέψη μαθητών που κάνουν χρήση τέτοιων παρενθέσεων; Τι είναι αυτό που καθορίζει τον τρόπο της επαγγελματικής του αντίδρασης στο πλαίσιο δραστηριοτήτων στις οποίες οι μαθητές κάνουν χρήση νοερών και περιττών παρενθέσεων;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας αυτής συνδυάζει στις ιδέες της *αίσθησης της δομής* (Linchevski & Livneh, 1999) που στην παρούσα έρευνα προσεγγίζεται μέσα από τις έννοιες των νοερών και περιττών παρενθέσεων, καθώς και της *Επαγγελματικής Παρατήρησης* της μαθηματικής σκέψης των μαθητών (Jacobs et al., 2010).

Η αίσθηση της δομής αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν όλες τις ισοδύναμες μορφές μιας παράστασης και να τις διακρίνουν από άλλες που δεν σχετίζονται με την εν λόγω παράσταση (Linchevski & Vinner, 1990). Γενικότερα, εάν και η σπουδαιότητα της χρήσης των παρενθέσεων έχει υπογραμμιστεί από ερευνητές (Linchevski & Livneh, 1999) οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολία στο να αντιληφθούν το δομικό τους ρόλο είτε πιστεύοντας ότι το αποτέλεσμα του υπολογισμού μιας παράστασης δεν επηρεάζεται από την παρουσία παρενθέσεων, είτε αγνοώντας την παρουσία τους και υπολογίζοντας τις παραστάσεις από αριστερά προς τα δεξιά (Bannerjee & Subramaniam, 2005). Στα πλαίσια της σύνδεσης της χρήσης των παρενθέσεων με την αίσθηση της δομής, οι Papadopoulos και Gunnarsson (2020) και Papadopoulos και Thoma (2023a) εξέτασαν τον τρόπο υπολογισμού αριθμητικών (ρητών) παραστάσεων από μαθητές Δημοτικού και αλγεβρικών παραστάσεων από μαθητές Λυκείου αντίστοιχα. Η χρήση νοερών παρενθέσεων (που σηματοδοτεί ισοδύναμα την απουσία απαραίτητων γραπτών παρενθέσεων) είχε ως αποτέλεσμα έναν τρόπο εργασίας φαινομενικά λανθασμένο μιας που η παρουσία παρενθέσεων εξασφαλίζει τη διατήρηση της δομής της παράστασης. Παρόλο λοιπόν που οι μαθητές δεν έγραψαν τις απαραίτητες παρενθέσεις που θα διατηρούσαν τη δομή, εν τούτοις φάνηκε να έχουν αναπτυγμένη την αίσθηση της δομής υπολογίζοντας τις παραστάσεις με τον τρόπο που θα επέβαλε η παρουσία παρενθέσεων. Κάποιες φορές η χρήση αυτή υποδηλώνεται και από ένα κενό διάστημα που αφήνουν οι μαθητές στα σημεία που κανονικά θα έπρεπε να υπάρχουν οι παρενθέσεις, κάτι που μπορεί να θεωρηθεί ως μια ισχυρή μορφή αντιληπτικής σκαλωσιάς (Landy & Goldstone, 2010). Στον αντίποδα των νοερών παρενθέσεων είναι η χρήση περιττών παρενθέσεων οι οποίες φαίνεται ότι και πάλι λειτουργούν ως αντιληπτικός μηχανισμός προκειμένου οι μαθητές να αντιληφθούν την εσωτερική δομή της παράστασης και να την εκφράσουν μέσα από τη συγκεκριμένη χρήση

(Papadopoulos & Thoma, 2023b). Έτσι, κάνουν χρήση περιττών (από τεχνικής άποψης) παρενθέσεων προκειμένου: (i) να ομαδοποιήσουν τους όρους της παράστασης που θα συνδυαστούν για συγκεκριμένους υπολογισμούς, (ii) να δείξουν τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων ή για την εφαρμογή γενικά κάποιου κανόνα, και (iii) να οπτικοποιήσουν βήμα -προς -βήμα όλη τη διαδικασία υπολογισμού.

Η Επαγγελματική Παρατήρηση είναι ο δεύτερος πόλος του θεωρητικού πλαισίου της μελέτης αυτής και αφορά στο πώς οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται και αντιμετωπίζουν διάφορες πτυχές της εκπαιδευτικής διαδικασίας προσαρμόζοντας τις διδακτικές τους πρακτικές σε σχέση με τη σκέψη των μαθητών και τις συνολικές δυναμικές της τάξης. Οι Jacobs et al. (2010), θεωρούν την Επαγγελματική Παρατήρηση ως ένα σύνολο τριών συγκεκριμένων αλληλεξαρτώμενων δεξιοτήτων: (i) της *Παρατήρησης* των στρατηγικών των μαθητών, (ii) της *Ερμηνείας* της μαθηματικής κατανόησης των μαθητών, και (iii) της *Απόφασης* για το πώς θα αντιδράσει ο εκπαιδευτικός στη βάση της συγκεκριμένης κατανόησης του μαθητή (Πίνακας 1). Η *Παρατήρηση* των στρατηγικών περιλαμβάνει την ικανότητα των εκπαιδευτικών να παρατηρούν μια συγκεκριμένη όψη μιας διδακτικής κατάστασης: τις μαθηματικές λεπτομέρειες των στρατηγικών που εφαρμόζουν οι μαθητές. Οι Yang et al. (2023) διακρίνουν εδώ τρεις υποπεριπτώσεις: εστίαση (i) στα Αποτελέσματα (έμφαση στο εξαγόμενο), (ii) στην Επιφανειακή Διαδικασία (ο εκπαιδευτικός εντοπίζει κάτι χωρίς καμία άλλη σκέψη πάνω σε αυτό), και (iii) στην Ουσιαστική Διαδικασία (ο εκπαιδευτικός εντοπίζει με ακρίβεια το φαινόμενο). Η *Ερμηνεία* αναφέρεται στο πως ο εκπαιδευτικός ερμηνεύει την κατανόηση του μαθητή όπως αυτή αντανακλάται μέσα από τις στρατηγικές του, κάτι που απαιτεί αναφορά του εκπαιδευτικού στις λεπτομέρειες των συγκεκριμένων στρατηγικών. Διακρίνεται (i) στην Περιγραφική (απλά τι παρατηρεί), (ii) στην Αξιολογική (απλά εστιάζει στο αν είναι έγκυρο ή όχι), και (iii) στην Ερμηνευτική προσέγγιση (ερμηνεύει τις επιλογές του μαθητή, τη λογική που τις διέπει). Τέλος, η *Απόφαση* αναφέρεται στην αντίδραση του εκπαιδευτικού με έμφαση στο κατά πόσο ο εκπαιδευτικός στην πρότασή του κάνει χρήση των όσων έχει μάθει για την κατανόηση του μαθητή. Διακρίνεται (i) στη Γενική Παιδαγωγική (όχι εστιασμένη στο συγκεκριμένο φαινόμενο), (ii) στην Προσαρμοσμένη στη Διαδικασία (εστιασμένη στο συγκεκριμένο φαινόμενο) και (iii) στην Προσαρμοσμένη στο Προϊόν (προσανατολισμένη στο συγκεκριμένο μαθητή). Τέλος, στο θεωρητικό αυτό πλαίσιο, οι Yang et al. (2023) κάνουν μια ακόμη προσθήκη, την Πλαισίωση των Επαγγελματικών Καθηκόντων (Πίνακας 1), που στην ουσία ρίχνει φως στους λόγους για τους οποίους ο εκπαιδευτικός παίρνει τις πιο πάνω *Αποφάσεις*. Η πλαισίωση αυτή, βασισμένη στους Erickson και Herbst (2018), μπορεί να προέρχεται από

την γνώση των Μαθηματικών (*επιστημονική πλαισίωση*), τις απαιτήσεις του Αναλυτικού Προγράμματος (*θεσμική πλαισίωση*), τις ανάγκες του συγκεκριμένου μαθητή (*ατομική πλαισίωση*), και την υποστήριξη στην αλληλεπίδραση της τάξης (*διαπροσωπική πλαισίωση*).

Παρατήρηση	**Ερμηνεία**	**Απόφαση**	**Πλαισίωση**
1. Αποτελέσματα	1. Περιγραφική	1. Γεν. Παιδαγ.	1. Επιστημονική
2. Επιφανειακή	2. Αξιολογική	2. Προσ. Διαδ.	2. Θεσμική
3. Ουσιαστική	3. Ερμηνευτική	3. Προσ. Προϊόν	3. Ατομική
			4. Διαπροσωπική

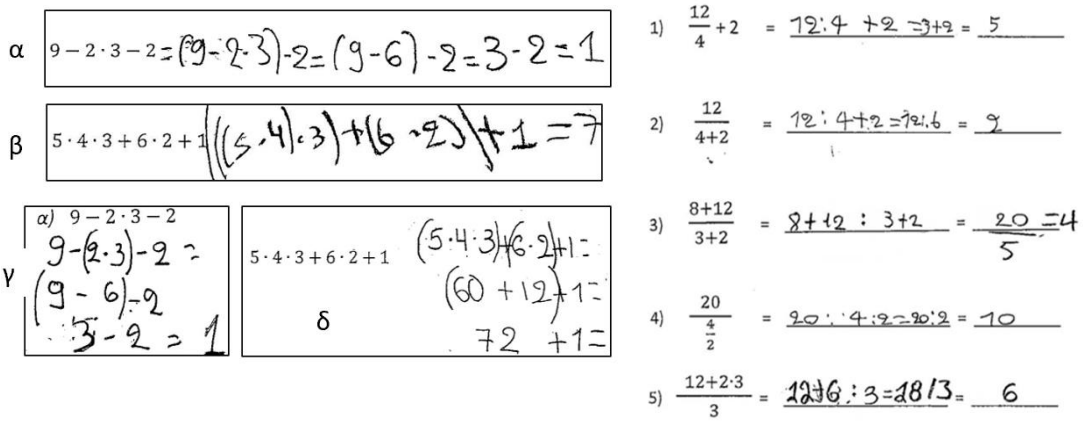
Πίνακας 1: Επαγγελματική Παρατήρηση και Πλαισίωση

Στη βάση αυτού του θεωρητικού πλαισίου, η παρούσα εργασία μελετά την περίπτωση ενός εκπαιδευτικού που έρχεται αντιμέτωπος με γραπτές απαντήσεις μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης καθώς αυτοί υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις κάνοντας όμως χρήση τόσο νοερών όσο και περιττών παρενθέσεων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα έρευνα είναι μια πιλοτική μελέτη, στην οποία συμμετέχει ένας εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης από ένα δημόσιο δημοτικό σχολείο. Ο εκπαιδευτικός έχει πολλά χρόνια υπηρεσίας και είναι κάτοχος δεύτερου πτυχίου στις θετικές επιστήμες. Κλήθηκε να συμμετάσχει σε μια δομημένη συνέντευξη. Το εργαλείο συλλογής δεδομένων περιλάμβανε δυο ομάδες απαντήσεων μαθητών σε κάποιες δραστηριότητες υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων από προγενέστερες έρευνες (Papadopoulos & Gunnarsson, 2020; Papadopoulos & Thoma, 2023). Στη μια γινόταν αξιοποίηση των περιττών και στην άλλη των νοερών παρενθέσεων (Εικόνα 1). Αριστερά στην Εικόνα 1 βρίσκονται απαντήσεις μαθητών που κάνουν χρήση περιττών παρενθέσεων για λόγους ομαδοποίησης (α), οπτικοποίησης βήμα-προς-βήμα όλης της διαδικασίας υπολογισμού (β), και για να δείξουν την εφαρμογή των κανόνων για την προτεραιότητα πράξεων (γ, δ). Δεξια, είναι οι απαντήσεις μαθητών που κάνουν χρήση νοερών παρενθέσεων. Για παράδειγμα, οι δυο πρώτες δραστηριότητες έχουν μεταφερθεί από την ρητή στην οριζόντια μορφή με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όμως υπολογίζονται διαφορετικά. Ο τρόπος γραφής είναι τεχνικά ανορθόδοξος, όμως ο τρόπος υπολογισμού ορθός. Οι απαντήσεις αυτές επιλέχθηκαν από τους ερευνητές ως αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα του φαινομένου της χρήσης αυτών των παρενθέσεων που θα μπορούσαν να προκαλέσουν το σχλιασμό του συμμετέχοντα εκπαιδευτικού. Κάθε ομάδα απαντήσεων των μαθητών συνοδευόταν από τρεις συγκεκριμένες ερωτήσεις, εναρμονισμένες με το θεωρητικό πλαίσιο

της Επαγγελματικής Παρατήρησης (Jacobs et al., 2010) στις οποίες κλήθηκε ο συμμετέχων εκπαιδευτικός να απαντήσει: (α) **Περιγράψτε** το νομίζετε ότι κάνει κάθε παιδί στη λύση του (*Παρατήρηση*), (β) Πώς **ερμηνεύετε** την απάντησή του; (*Ερμηνεία*), και (γ) **Τι θα λέγατε** στο κάθε παιδί σχετικά με την απάντησή του (*Απόφαση*);



Εικόνα 1: Οι δυο ομάδες απαντήσεων (περιττές παρενθέσεις-αριστερά και νοερές παρενθέσεις-δεξιά)

Οι απαντήσεις του εκπαιδευτικού αφού απομαγνητοφωνήθηκαν και μετατράπηκαν σε πρωτόκολλα αποτέλεσαν τα δεδομένα της παρούσας έρευνας τα οποία στη συνέχεια αναλύθηκαν εφαρμόζοντας τόσο a priori θεματική ανάλυση περιεχομένου (στη βάση του έργου των Jacobs et al., 2010, όσο και των Yang et al., 2023), όσο και αναπτυσσόμενη (emerging) θεματική ανάλυση (Haney et al., 2004) προκειμένου να συμπεριληφθούν πιθανές νέες κατηγορίες. Η ανάλυση του πρωτοκόλλου έγινε ξεχωριστά από καθέναν από τους συγγραφείς. Η εγκυρότητα και αξιοπιστία εξασφαλίστηκε μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων και την επανακωδικοποίησή τους έως ότου υπάρξει συμφωνία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση επέτρεψε τόσο την αντιστοίχιση των ευρημάτων με τις τρεις βασικές δεξιότητες των Jacobs et al. (2010), όσο και με την επιμέρους κατηγοριοποίηση των Yang et al. (2023). Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων θα ακολουθήσουμε τις απαντήσεις του εκπαιδευτικού ανά ομάδα δραστηριοτήτων και ανά δραστηριότητα μέσα στην ομάδα, παραθέτοντας αντίστοιχα αποσπάσματα από τη συνέντευξη.

Δραστηριότητες με χρήση περιττών παρενθέσεων (α-δ)

Η δραστηριότητα (α) επιλέχθηκε διότι ο μαθητής φαίνεται να χρησιμοποιεί τις περιττές παρενθέσεις για λόγους ομαδοποίησης, προκειμένου να δηλωθεί μια ιεραρχία στους υπολογισμούς. Ο εκπαιδευτικός εντόπισε την παρουσία των περιττών παρενθέσεων χωρίς άλλη αναφορά πάνω σε αυτό (*Επιφανειακή παρατήρηση*). Στη συνέχεια, η ερμηνεία του ήταν ότι η

χρήση των περιττών παρενθέσεων εξυπηρετούσε την προτεραιότητα των πράξεων που εκτελεί ο λύτης (*Ερμηνευτική προσέγγιση*). Τέλος, στο ερώτημα πώς θα αντιδρούσε στη συγκεκριμένη προσέγγιση, η απόφασή του ήταν *προσανατολισμένη προς το προϊόν* μιας που εστιάζει στο συγκεκριμένο μαθητή:

> Εκπαιδευτικός: Δεν θα το θεωρούσα λάθος, ακόμη και με αυτές τις παρενθέσεις. Απλά τον βοηθούν να αισθάνεται πιο σίγουρος. Θα **του** πρότεινα με βάση την προτεραιότητα των πράξεων να κάνει πρώτα τον πολλαπλασιασμό, οπότε μετά θα είχε μόνο πρόσθεση και αφαίρεση

Στη δραστηριότητα (β) οι περιττές παρενθέσεις υπηρετούν την οπτικοποίηση των βημάτων υπολογισμού. Και πάλι η Παρατήρηση είναι *Επιφανειακή* («*Είναι λίγο υπερβολικός με τις παρενθέσεις που βάζει*»). Προσεγγίζει την λογική του μαθητή με την *ερμηνευτική προσέγγιση* μιας που αποδίδει τη χρήση αυτών των παρενθέσεων από το μαθητή στην πρόθεσή του «*να ξέρω πως πρέπει να σκεφτώ για να βγάλω το σωστό αποτέλεσμα*». Η αντίδρασή του φαίνεται να είναι *προσαρμοσμένη στο προϊόν* και φαίνεται ότι κατανοεί το πραγματικό νόημα της χρήσης τους:

> Εκπαιδευτικός: Το παιδί δείχνει **τη σκέψη του** με αυτόν τον τρόπο. Πρέπει να δείξει τη διαδικασία και γι αυτό βάζει σε παρενθέσεις τις πράξεις.

Στις παραπάνω δυο δραστηριότητες η αντίδραση του εκπαιδευτικού καθορίζεται από την *ατομική πλαισίωση* μιας που εστιάζει στις ανάγκες του συγκεκριμένου μαθητή σε κάθε περίπτωση.

Στη δραστηριότητα (γ) η χρήση των παρενθέσεων γίνεται από το μαθητή για να δείξει την εφαρμογή των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων. Αρχικά, η Παρατήρηση του εκπαιδευτικού εξακολουθεί να παραμένει *επιφανειακή* καθώς περιορίζεται απλά στον εντοπισμό της παρουσίας των παρενθέσεων. Στην εξήγηση ακολουθεί την *ερμηνευτική προσέγγιση* αναγνωρίζοντας ότι η χρήση των περιττών παρενθέσεων εξυπηρετεί την προτεραιότητα των πράξεων.

> Εκπαιδευτικός: Το παιδί χωρίζει τις πράξεις που πρέπει να κάνει με παρενθέσεις. Πρώτα πρέπει να κάνει την αφαίρεση μεταξύ των δυο πρώτων αριθμών (*σημ. εννοεί το 9-6*) και μετά αυτό που θα βρει να το κάνει αφαίρεση με τον επόμενο (*σημ. 3-2*).

Η Απόφαση είναι *προσαρμοσμένη* τη φορά αυτή προς τη *διαδικασία*, μιας που δεν γίνεται αναφορά στο συγκεκριμένο μαθητή, αλλά γενικά στην εγκυρότητα μιας τέτοιας προσέγγισης. Ο εκπαιδευτικός αποφασίζει να δεχθεί την προσέγγιση αυτή ως έγκυρη στη γενική της μορφή: «*Το να βάζεις τέτοιες παρενθέσεις δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα των πράξεων*». Η

απόφαση αυτή όπως και η ερμηνεία που έδωσε προσδιορίστηκαν τόσο από την *θεσμική πλαισίωση* (ο εκπαιδευτικός κάνει αναφορά στο πώς διδάσκεται η προτεραιότητα πράξεων στο δημοτικό και στο γυμνάσιο) αλλά ταυτόχρονα και από έναν άλλο παράγοντα που δεν περιλαμβάνεται στην πλαισίωση των Yang et al. (2023) και που τον αποκαλούμε *Διδακτική πρακτική του άλλου*:

> Εκπαιδευτικός: Κάποιος δάσκαλος μπορεί να τους δίδαξε αυτή τη μέθοδο με τις παρενθέσεις. Είναι θέμα το πώς μπορεί κάθε δάσκαλος να λέει στα παιδιά πώς να γίνονται κάποιες πράξεις με μεγαλύτερη ασφάλεια.

Στη δραστηριότητα (δ), που και σε αυτήν οι περιττές παρενθέσεις υπηρετούν την εφαρμογή των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων, έχουμε μια στροφή στην Παρατήρηση του εκπαιδευτικού που τώρα γίνεται *ουσιαστική*. Ο εκπαιδευτικός κάνει αναφορά ταυτόχρονα με τον εντοπισμό των παρενθέσεων στο πλήθος των αριθμών και των πράξεων που εμπλέκονται και για το ενδεχόμενο να δυσκολευτεί ο μαθητής από αυτήν την συνύπαρξη. Εξηγεί την επιλογή του μαθητή στη βάση της *ερμηνευτικής προσέγγισης* αποδίδοντας τη χρήση των περιττών παρενθέσεων στην προτεραιότητα των πράξεων. Στο ερώτημα της Απόφασης ο εκπαιδευτικός επιλέγει την *προσαρμογή στη διαδικασία* μιας που η απάντησή του δεν απευθύνεται στο συγκεκριμένο μαθητή αλλά εκφράζει μια γενική άποψη για την όλη διαδικασία, επισημαίνοντας ότι δεν βοηθούν πάντα οι περιττές παρενθέσεις, ειδικά σε περιπτώσεις όπου η μοναδική πράξη που εμπλέκεται είναι η πρόσθεση και επομένως η προτεραιότητα των πράξεων δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Εδώ, πρωτίστως η ερμηνεία και κατά συνέπεια -έμμεσα- και η απόφαση προσδιορίζονται από το *διαπροσωπικό πλαίσιο,* αφού ο εκπαιδευτικός αναφέρεται στο τι πρέπει να κάνουν «**τα παιδιά**» στην τάξη γενικά.

Δραστηριότητες με χρήση νοερών παρενθέσεων (1-6)

Όλες οι δραστηριότητες (πλην της πρώτης) της δεύτερης ομάδας κάνουν χρήση των νοερών παρενθέσεων, που τις χρησιμοποιούν οι μαθητές χωρίς όμως να τις γράφουν στο χαρτί. Για μεν τα μέρη της Παρατήρησης και της Ερμηνείας, ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει μια μάλλον σταθερή συμπεριφορά. Όχι όμως και στο κομμάτι της Απόφασης και της Πλαισίωσης. Και στις πέντε απαντήσεις των μαθητών, και για το κομμάτι της Παρατήρησης ο εκπαιδευτικός περιορίζεται στην *επιφανειακή* παρατήρηση εντοπίζοντας την οριζόντια γραφή των παραστάσεων και την ανάγκη για χρήση παρενθέσεων (προκειμένου να διατηρηθεί η δομή της αρχικής παράστασης). Για το μέρος της ερμηνείας τη λογικής του μαθητή ο εκπαιδευτικός κάνει χρήση κυρίως της *ερμηνευτικής* προσέγγισης και λιγότερο της *αξιολογικής*. Ο εκπαιδευτικός ξεκινά με την αξιολογική

προσέγγιση στην πρώτη (που ούτως ή άλλως δεν αφορά στις νοερές παρενθέσεις) αξιολογώντας την εγκυρότητα του αποτελέσματος. Από κει και πέρα όμως η προσέγγισή του είναι ερμηνευτική μιας που εξηγεί πλήρως τον τρόπο εργασίας του μαθητή:

> Εκπαιδευτικός: Θα έπρεπε όταν γράφει οριζόντια τον παρονομαστή να τον βάλει σε παρένθεση. Διότι έτσι όπως όπως το γράφει πρέπει κανείς να κάνει τη διαίρεση 12:4. **Στο μυαλό του βρίσκει το σωστό αποτέλεσμα**. Και κάνει όντως στον παρονομαστή πρώτα την πρόσθεση και μετά τη διαίρεση (*2η δραστηριότητα*).

Εν τούτοις, αν και αντιλαμβάνεται τον τρόπο που λειτουργούν οι νοερές παρενθέσεις, δεν είναι θετικός στην εγκυρότητα της χρήσης τους:

> Εκπαιδευτικός: Νομίζω είναι λίγο επιπόλαιος και δεν γράφει ολοκληρωμένες απαντήσεις (*3η δραστηριότητα*).

Στο κομμάτι της Απόφασης κινείται σε όλη τη γκάμα επιλογών. Έτσι, άλλοτε η απόφασή του είναι *γενική παιδαγωγική* («*Πρέπει να δουλευτεί το θέμα των παρενθέσεων»*), άλλοτε *προσαρμοσμένη* στη *διαδικασία* αλλά απευθύνεται γενικά στο φαινόμενο αυτό («*μπορεί να μπερδευτεί κάποιος και να κάνει πρώτα τη διαίρεση μεταξύ των μεσαίων αριθμών»*). Αναφέρεται εδώ στην περίπτωση της δραστηριότητας 3 που είναι γραμμένη ως $8 + 12 \div 3 + 2$ και όπου όντως, από τεχνικής άποψης, η πράξη που προηγείται είναι η διαίρεση. Τέλος, παίρνει και αποφάσεις *προσαρμοσμένες* στο *προϊόν* («*Θα **του** πρότεινα εφόσον το τελικό αποτέλεσμα είναι σωστό να βάζαμε τον παρονομαστή σε παρένθεση, για να μην δημιουργηθεί πρόβλημα και λάθος εκτίμηση των πράξεων»*). Όσον αφορά στο θέμα της Πλαισίωσης, και εδώ αυτή επηρεάζει τόσο την Απόφαση όσο και την Ερμηνεία. Όσον αφορά την Ερμηνεία, αυτή φαίνεται να επηρεάζεται: (i) από την *επιστημολογική πλαισίωση*: «*Επιβάλλεται να μπει σε παρένθεση για να δείξει την πράξη που προηγείται*», με την έννοια ότι αυτό είναι σωστό από μαθηματικής άποψης. (ii) από την *θεσμική πλαισίωση*: «*Το αποτέλεσμα είναι σωστό αλλά πιστεύω ότι είναι η σωστή σειρά να κάνει πρώτα το σύνθετο κλάσμα απλό*», μιας που αυτός είναι ο τρόπος που προτείνεται από τα σχολικά εγχειρίδια. Στο μέρος της απόφασης συναντούμε σχεδόν όλη την γκάμα παραγόντων πλαισίωσης που την επηρεάζουν. Έτσι, κάποιες φορές είναι η *διδακτική πρακτική του άλλου* («*αν το έχουν διδαχθεί έτσι*») και άλλες η *διαπροσωπική πλαισίωση* όπου η απόφαση παίρνεται σχετικά με το σύνολο της τάξης και όχι το συγκεκριμένο μαθητή («*Θα έλεγα, πριν το γράψετε οριζοντίως, κάντε πρώτα την πράξη στον παρονομαστή και μετά να την γράψετε οριζόντια*»). Η ίδια συμβουλή κάποιες φορές δίνεται στο συγκεκριμένο μαθητή

(*ατομική πλαισίωση*) «*εγώ θα τον συμβούλευα να κάνει πρώτα την πράξη στον παρονομαστή και μετά να το γράψει οριζόντια*».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτήν την εργασία, βασιζόμενοι σε αποτελέσματα ανάλυσης γραπτών απαντήσεων μαθητών (Papadopoulos & Gunnarsson, 2020; Papadopoulos & Thoma, 2023a; 2023b), εξετάζουμε την Επαγγελματική Παρατήρηση ενός έμπειρου εκπαιδευτικού σε σχέση με τη μαθηματική σκέψη μαθητών και συγκεκριμένα με την έννοια της δομής όπως αυτή αναδεικνύεται μέσα από τη χρήση νοερών και περιττών παρενθέσεων.

Όσον αφορά την Παρατήρηση του εκπαιδευτικού, τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τις περιττές παρενθέσεις έδειξαν ότι στα αρχικά παραδείγματα η παρατήρησή του ήταν επιφανειακή αλλά στη συνέχεια γίνεται ουσιαστική αναγνωρίζοντας ότι, σε κάποιες περιπτώσεις, οι περιττές παρενθέσεις δίνουν περισσότερη έμφαση στην εφαρμογή των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων. Όσον αφορά την Απόφαση αρχικά βλέπουμε ότι αυτή *προσαρμόζεται* στο *προϊόν* αλλά στη συνέχεια εστιάζεται στη *διαδικασία*. Οι απαντήσεις του εκπαιδευτικού δείχνουν ότι αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει τη λογική χρήσης των νοερών και περιττών παρενθέσεων, αν και τις περισσότερες φορές επιφανειακά, και δείχνουν ότι δεν θεωρούνται απαραίτητα έγκυρος τρόπος χρήσης ιδιαίτερα στην περίπτωση των νοερών παρενθέσεων. Οι απαντήσεις του βασίζονται σε πολλαπλά πλαίσια τόσο στην Ερμηνεία όσο και στην Απόφαση. Συγκεκριμένα, η Επαγγελματική Παρατήρηση του εκπαιδευτικού φαίνεται να καθορίζεται από παράγοντες που αφορούν την επιστημονική γνώση των μαθηματικών, τις απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος, τις ανάγκες του συγκεκριμένου μαθητή, καθώς και την υποστήριξη της τάξης, όπως και στα αποτελέσματα των Yang et al. (2023), αλλά και την αναγνώριση της διδακτικής πρακτικής ενός άλλου συναδέλφου.

Στην έρευνά μας τροποποιήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της Επαγγελματικής Παρατήρησης (Jacobs et al., 2010; Yang et al., 2023) προσθέτοντας (i) την εξέταση της Πλαισίωσης όχι μόνο στην Απόφαση αλλά και στην Ερμηνεία, (ii) ένα επιπλέον είδος πλαισίωσης: την *διδακτική πρακτική του άλλου*. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας ανέδειξαν την σημαντικότητα της εξέτασης της Επαγγελματικής Παρατήρησης σε ένα φαινόμενο που εντοπίζεται στα γραπτά κείμενα των μαθητών, δηλαδή στη χρήση των περιττών και νοερών παρενθέσεων. Ήδη εξετάζουμε την Επαγγελματική Παρατήρηση περισσότερων εκπαιδευτικών με διαφορετική εμπειρία καθώς και εκπαιδευτικών από άλλες βαθμίδες εκπαίδευσης, προκειμένου να γενικεύσουμε τα ευρήματά μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bannerjee, R., & Subramaniam, K. (2005). Developing procedure and structure sense of arithmetic expressions. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME Conference* (Vol. 2, pp. 121–128). PME.

Güler, M., Papadopoulos, I., & Thoma, A. (2022). Investigating Science Education students' mathematical writing–the case of mental brackets. In Marks, R. (Ed.*) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 42*(1).

Haney, W., Russell, M., & Bebell, D. (2004). Drawing on education: Using drawings to document schooling and support change. *Harvard Educational Review, 74*(3), 241-272.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202.

Landy, D., & Goldstone, R. L. (2010). Proximity and precedence in arithmetic. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 63*(10), 1953–1968.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–196.

Linchevski, L., & Vinner, S. (1990). Embedded fgures and structures of algebraic expressions. In G.Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME Conference* (Vol. 2, pp. 85–93). PME.

Papadopoulos, I., & Gunnarsson, R. (2020). Exploring the way rational expressions trigger the use of "mental" brackets by primary school students. *Educational Studies in Mathematics, 103*(2), 191207.

Papadopoulos, I., & Thoma, A. (2023a). Mental brackets and their use by high school students in arithmetic and algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(4), 1197-1218.

Papadopoulos, I., & Thoma, A. (2023b). Students' use of unnecessary brackets as a way of exhibiting structure-sense. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel & M. Tabach (Eds.). *Proceedings of the 46th PME Conference* (Vol. 4, pp. 11-18). PME 46.

Yang, M., Stylianides, A. J., & Jamnik, M. (2023). Teachers' multiple and adaptive noticing driven by their framing of professional obligations in the context of approving activity. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel., & M. Tabach (Eds.). *Proceedings of the 46th PME Conference* (Vol. 4, pp. 363-378). PME 46.

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΙ ΑΤΥΠΗ ΓΝΩΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΣΕ ΔΟΚΙΜΑΣΙΕΣ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Νάτσου Κυριακή, Τζεκάκη Μαριάννα

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

kyrinats@gmail.com, tzekaki@nured.auth.gr

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει την προσέγγιση των μαθητών κατά την αναγνώριση και την κατασκευή αξονικής συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, κατά πόσο συσχετίζονται οι στρατηγικές που ακολουθούν με τις τυπικές κι άτυπες γνώσεις που έχουν για την αξονική συμμετρία, οι οποίες προέρχονται από τη διδασκαλία και από την εμπειρία τους αντίστοιχα. Το δείγμα της παρούσας μελέτης αποτέλεσαν 15 μαθητές Στ΄ Δημοτικού και ακολουθήθηκε ποιοτική προσέγγιση. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αξιοποιούν την άτυπη γνώση τους κατά την αναγνώριση ακολουθώντας μια ολιστική προσέγγιση, ενώ αντίθετα επικαλούνται την τυπική κατά την κατασκευή επιλέγοντας την αναλυτική προσέγγιση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία εστιάζει στην *αξονική συμμετρία* (axial symmetry), η οποία χαρακτηρίζεται και ως *κατοπτρική ή αμφίπλευρη συμμετρία* (reflectional/ bilateral/ mirror symmetry) κι αποτελεί μέρος των ευκλείδειων γεωμετρικών μετασχηματισμών (Τσικοπούλου, 2010). Η αξονική συμμετρία συναντάται παντού στη φύση, στο σώμα των ανώτερων οργανισμών και του ανθρώπινου σώματος, όπως και σε πολλά δημιουργήματα της τέχνης (Weyl, 1991).

Κατά συνέπεια, το άτομο δέχεται ερεθίσματα και διαμορφώνει μια άτυπη γνώση σχετικά με το τι είναι συμμετρικό από πολύ μικρή ηλικία (Lave, 1988; Bryant και Nunes, 2007). Με την εισαγωγή του στο σχολείο, ο μαθητής διδάσκεται την αμφίπλευρη συμμετρία ενταγμένη σε μια πιο μαθηματικά οργανωμένη δομή, καθώς μαθαίνει να την προσεγγίζει όχι μόνο με τη διαίσθησή του αλλά στηριζόμενος στις ιδιότητές της. Έτσι, σταδιακά διαμορφώνει την τυπική γνώση γι' αυτήν (Lester, 1989), με αποτέλεσμα οι μαθητές για να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν συνθέσεις με αξονική συμμετρία να καταφεύγουν στην επίκληση είτε των άτυπων είτε των τυπικών γνώσεων είτε συνδυασμού τους.

Ωστόσο, όπως διαπιστώνει και η Xistouri (2007), αν και η συμμετρία είναι ιδιαίτερα σημαντική, δεν αντιμετωπίζεται με την αντίστοιχη προσοχή στη

διδασκαλία των μαθηματικών. Αντίστοιχα, η σχετική έρευνα είναι περιορισμένη.

Αυτό το κενό καλείται να καλύψει η παρούσα έρευνα που έχει στόχο την πληρέστερη κατανόηση των τρόπων προσέγγισης των μαθητών Στ' τάξης στην αναγνώριση και κατασκευή αξονικής συμμετρίας, μέσα από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν γι' αυτό τον σκοπό και τη σύνδεσή τους με τις τυπικές κι άτυπες γνώσεις τους για την αξονική συμμετρία.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ιδιότητες αξονικής συμμετρίας

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η αξονική συμμετρία παρόλο που συναντάται παντού στη φύση και σε ανθρώπινα δημιουργήματα, έχει μια αυστηρή γεωμετρική δομή με συγκεκριμένες ιδιότητες. Τα συμμετρικά σχήματα έχουν α) ίδιο σχήμα και μέγεθος, β) ισαπέχουν από τον άξονα συμμετρίας, γ) έχουν αντίθετο προσανατολισμό, ενώ δ) ο άξονας συμμετρίας αποτελεί τη μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα συμμετρικά σημεία ενός σχήματος και του συμμετρικού του (Tzekaki, 2014; Hoyles & Healy, 1997; Ho, Ramful & Lowrie, 2014).

Τυπική και άτυπη γνώση παιδιών για την αξονική συμμετρία

Η άτυπη γνώση του ατόμου για την αξονική συμμετρία διαμορφώνεται διαισθητικά μέσω της επαφής του με συμμετρικές δομές σε διάφορα εξωσχολικά πλαίσια κατά τη διάρκεια καθημερινών πρακτικών, όπως συμβαίνει και με άλλες μαθηματικές γνώσεις κατά τη Lave (1988) και τους Bryant και Nunes (2007). Κατ' επέκταση, η άτυπη αυτή γνώση αξιοποιείται και στις στρατηγικές αναγνώρισης και κατασκευής αμφίπλευρης συμμετρίας (Boulter & Kirby, 1994).

Συνεπώς, οι μαθητές έρχονται στο σχολείο έχοντας ήδη διαμορφώσει μια διαισθητική αντίληψη για την έννοια της συμμετρίας, που αποτελεί την άτυπη γνώση. Μετά την είσοδό τους στο σχολείο, αποκτούν γνώσεις, οι οποίες έχουν μια πιο οργανωμένη μαθηματική δομή και στηρίζονται σε συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες, τις τυπικές. Αυτές περιλαμβάνουν σχετική μαθηματική ορολογία και κυρίως τις ιδιότητες που ισχύουν για τα συμμετρικά σχήματα. Τις τυπικές γνώσεις για την συμμετρία τις αξιοποιούν οι μαθητές για να επιλέξουν και να εφαρμόσουν στρατηγικές που είναι οι καταλληλότερες κάθε φορά ανάλογα με την συμμετρική κατάσταση που αντιμετωπίζουν (Lester, 1989).

Οι μαθητές προσεγγίζοντας την αξονική συμμετρία στο πλαίσιο του ελληνικού προγράμματος σπουδών, αρχικά εισάγονται στην αναγνώριση μέσω της παρατήρησης και διαισθητικών στρατηγικών, όπως η αναδίπλωση, αξιοποιώντας την άτυπη γνώση τους και στη συνέχεια μεταβαίνουν στην κατασκευή, στηριζόμενοι στις ιδιότητες της συμμετρίας

και σε πιο τυπικές στρατηγικές, για παράδειγμα τη μέτρηση, όπως καταγράφει και η Τσικοπούλου (2010).

Ολιστικές και Αναλυτικές στρατηγικές της αξονικής συμμετρίας

Οι Boulter και Kirby (1994) και οι Ho κ.ά. (2014) εντάσσουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε προβλήματα γεωμετρικών μετασχηματισμών σε δύο κατηγορίες: στην Ολιστική (Holistic) ή οπτική (visual), κατά τους Ho κ.ά. (2014), και στην Αναλυτική (Analytic). Η πρώτη κατηγορία στρατηγικών (ολιστικές) στηρίζεται στην άτυπη γνώση των μαθητών, ενώ η δεύτερη (αναλυτικές) στην τυπική. Στις ολιστικές στρατηγικές ο μαθητής προσεγγίσει και αντανακλά ένα αντικείμενο ως "όλο". Επικεντρώνεται, με άλλα λόγια, στη γενικότερη αντίληψη της εικόνας του αντικειμένου. Αντιθέτως, στις αναλυτικές στρατηγικές ο μαθητής επικεντρώνεται σε λεπτομέρειες ενός αντικειμένου, το σπάζει σε κομμάτια-τμήματα για να το επεξεργαστεί και να αναγνωρίσει ή να σχεδιάσει το συμμετρικό του (Boulter & Kirby, 1994).

Οι δύο ευρύτερες κατηγορίες στρατηγικών, η ολιστική και η αναλυτική, εμπεριέχουν υποκατηγορίες στρατηγικών αναγνώρισης και κατασκευής αξονικής συμμετρίας που έχουν εντοπιστεί και καταγραφεί από τη σχετική βιβλιογραφία. Χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε πως οι συνηθέστερες ολιστικές στρατηγικές που στηρίζονται στην άτυπη γνώση των μαθητών(και ουσιαστικά στις αισθήσεις) αποτελούν η αναδίπλωση του χαρτιού στον άξονα συμμετρίας και η νοερή αναπαράσταση της συμμετρικής εικόνας ενός αντικειμένου (Ho κ.ά., 2014; Τσικοπούλου, 2010). Απ’ την άλλη πλευρά, οι πιο κοινές αναλυτικές στρατηγικές που στηρίζονται στην τυπική γνώση των μαθητών αποτελούν η μέτρηση με τη βοήθεια του χάρακα ή του πλέγματος και η αρχική εύρεση των συμμετρικών σημείων ενός σχήματος κι έπειτα η κατασκευή των συμμετρικών πλευρών του (Küchemann, 1980).

Τέλος, υπάρχουν κι άλλα στοιχεία που αποτελούν ενδείξεις αξιοποίησης του εκάστοτε είδους στρατηγικής (ολιστικής ή αναλυτικής), τα οποία ερμηνεύονται συνδυαστικά. Αυτά είναι: 1) η γλωσσική επεξήγηση: απλοϊκή, καθημερινή γλώσσα και επεξήγηση για ολιστική προσέγγιση (Ho κ.ά., 2014), ενώ αξιοποίηση μαθηματικής ορολογίας για αναλυτική (Ng & Sinclair, 2015). 2) Οι εννοιολογικές συσχετίσεις: συσχέτιση μη σημαντικών χαρακτηριστικών της γεωμετρικής δομής, όπως το χρώμα (ολιστική), ενώ ουσιαστικές συσχετίσεις σημαντικών χαρακτηριστικών, όπως η απόσταση από τον άξονα συμμετρίας (αναλυτική) (Ng & Sinclair, 2015). 3) Η αντίληψη: η γεωμετρική δομή ως "όλο", χωρίς εστίαση σε λεπτομέρειες (ολιστική), ενώ στην αναλυτική, επικέντρωση σε λεπτομέρειες ενός αντικειμένου, σπάζοντάς το σε κομμάτια-τμήματα για επεξεργασία (Boulter & Kirby, 1994) και 4) ο τρόπος προσέγγισης και

επεξεργασίας, καθώς και το είδος των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούν: η ολιστική προσέγγιση είναι διαισθητική, με κινήσεις του σώματος, ιδιαίτερα των χεριών (Clements & Samara, 2009), εμπεριέχει απλοϊκές στρατηγικές που αναπτύσσουν και επινοούν τα ίδια τα παιδιά (Boulter & Kirby, 1994) και οι μαθητές κατασκευάζουν πολλές φορές δικά τους σχέδια, εικόνες κι αναπαραστάσεις για πληρέστερη κατανόηση κι επεξήγηση του μαθηματικού νοήματος (Ng & Sinclair, 2015; Lowrie, 2012 όπως αναφέρεται στους Ho & Logan, 2013). Αντιθέτως, στην αναλυτική προσέγγιση αξιοποιούνται μαθηματικές τεχνικές, όπως η μέτρηση (Ho κ.ά., 2014) και οι μαθητές χρησιμοποιούν σημάδια σε κορυφές ή πλευρές του σχήματος, όπως γράμματα ή τελείες, εστιάζοντας σε λεπτομέρειες της γεωμετρικής δομής (Boulter & Kirby, 1994).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος μιας μεγαλύτερης έρευνας που διερευνά και καταγράφει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές Στ’ τάξης για να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν αξονική συμμετρία σε σύνδεση με τις τυπικές κι άτυπες γνώσεις τους γι’ αυτήν. Στο παρόν άρθρο, όμως, εξετάζεται μόνο ο τελευταίος άξονας με τα εξής ερευνητικά ερωτήματα: 1) Πώς σχετίζονται οι στρατηγικές αναγνώρισης αξονικής συμμετρίας που χρησιμοποιούν οι μαθητές με την τυπική κι άτυπη γνώση τους; 2) Πώς σχετίζονται οι στρατηγικές κατασκευής αξονικής συμμετρίας που χρησιμοποιούν οι μαθητές με την τυπική κι άτυπη γνώση τους;

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε για τη διεκπεραίωση της έρευνας ήταν η ποιοτική προσέγγιση, η οποία στηρίζεται σε συνεντεύξεις μαθητών κατά την επίλυση των δοκιμασιών του ερευνητικού εργαλείου (task interview) σε συνδυασμό με την παρατήρηση και την ταυτόχρονη καταγραφή σημειώσεων πεδίου από την ερευνήτρια περαιτέρω επεξηγήσεων, ερμηνειών και μη λεκτικών δεδομένων. Για παράδειγμα, κινήσεις χεριών για αναδίπλωση ή περιστροφή του φύλλου για αλλαγή του προσανατολισμού του άξονα συμμετρίας. Οι συνεντεύξεις των μαθητών ήταν ατομικές και διεξήχθησαν εκτός μαθήματος σε μια άλλη αίθουσα.

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 15 μαθητές της Στ' τάξης ενός σχολείου της δυτικής Θεσσαλονίκης διαφόρων μαθησιακών επιδόσεων, που είχαν διδαχθεί το μάθημα της συμμετρίας. Η Στ΄ επιλέχθηκε, καθώς σε αυτήν την τάξη οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή τόσο με την άτυπη όσο και με την τυπική γνώση για την αξονική συμμετρία, αφού διδάσκεται σε όλες τις προηγούμενες τάξεις του Δημοτικού. Έτσι, έχουν διαμορφώσει πια μια πιο πλήρη εικόνα σχετικά με την αναγνώριση και την κατασκευή της.

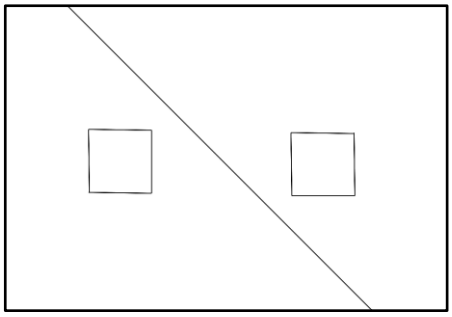
Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε περιείχε 14 δραστηριότητες, 7 αναγνώρισης κι 7 κατασκευής αξονικής συμμετρίας, οι περισσότερες των οποίων δημιουργήθηκαν για τον σκοπό της έρευνας, σε συνδυασμό με

παράγοντες που επιδρούν στην επιλογή στρατηγικών, όπως το είδος του σχήματος (πραγματικό ή γεωμετρικό), η σύνθεση του κι ο προσανατολισμός του, η κλίση του άξονα συμμετρίας (κάθετος/οριζόντιος/πλάγιος) και η ύπαρξη ή όχι πλέγματος στο φόντο. Για λόγους περιορισμού σελίδων κάποια παραδείγματα σχημάτων εμφανίζονται στα αποτελέσματα.

Ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν με το ερευνητικό εργαλείο πραγματοποιήθηκε με «Θεματική Ανάλυση Ποιοτικών Δεδομένων», κατά την οποία τα δεδομένα κωδικοποιούνται βάσει κοινού νοήματος και οργανώνονται σε θέματα, δηλαδή ευρύτερες ενότητες κατηγοριοποίησης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αναφορικά με την αναγνώριση της αξονικής συμμετρίας, κυρίως στις δοκιμασίες που παρουσιάζουν εικόνες συμμετρίας στην καθημερινή ζωή και τη φύση, καθώς και σε γεωμετρικά σχήματα όπου απουσιάζει το πλέγμα ή υπάρχει πλάγιος άξονας συμμετρίας, οι περισσότεροι μαθητές επικαλούνται την άτυπη γνώση τους και χρησιμοποιούν την ολιστική προσέγγιση, είτε αποκλειστικά είτε συνδυαστικά με στοιχεία τυπικής γνώσης, όπως η επίκληση σε κάποια ιδιότητα της συμμετρίας.



Εικόνες 1 και 2: Δοκιμασίες αναγνώρισης αξονικής συμμετρίας, που κυριάρχησε η άτυπη γνώση και η ολιστική προσέγγιση.

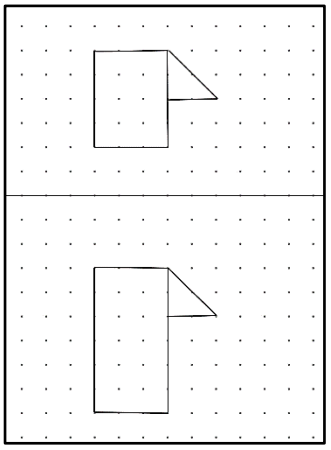
Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές χρησιμοποιούν ολιστικές στρατηγικές που παραπέμπουν στην αξιοποίηση της άτυπης γνώσης, όπως είναι η *Αναδίπλωση* στον άξονα συμμετρίας, νοερή ή πραγματική, για διαπίστωση της συμμετρίας και η *Οπτική διαπίστωση της συμμετρίας* με βάση την εμπειρία τους. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα:

> Μαθητής 1: Άμα τα διπλώσεις θα γίνουν ένα. Θα διπλωθεί ακριβώς. […] Το σκέφτηκα στο μυαλό μου να το διπλώνω.
>
> Μαθήτρια 2: Εάν τα ενώσουμε, αυτά τα δύο τρίγωνα θα πέσουν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο.

Ωστόσο, σε δοκιμασίες γεωμετρικών σχημάτων με οριζόντιο ή κάθετο άξονα και πλέγμα στο φόντο, οι μαθητές συνδυάζουν την άτυπη γνώση

τους με την τυπική και στοιχεία της αναλυτικής προσέγγισης. Γι' αυτό, επεξεργάζονται το σχήμα τμηματικά, επικαλούνται ιδιότητες συμμετρίας, μαθηματική ορολογία και χρησιμοποιούν τη μέτρηση με χάρακα ή των σημείων του πλέγματος για εύρεση απόστασης απ' τον άξονα συμμετρίας ή σύγκριση του μεγέθους των σχημάτων. Για παράδειγμα, μια μαθήτρια επικαλείται τη διαφορά μεγέθους των σχημάτων της Εικόνας 3 μετρώντας και συγκρίνοντας τις βούλες του πλέγματος που περικλείει το κάθε σχήμα:

Μαθήτρια: Αυτό δεν πιστεύω ότι είναι ίσο. Αν και το τρίγωνο είναι το ίδιο, αλλά εδώ πέρα είναι ορθογώνιο, καλά κι εδώ είναι ορθογώνιο αλλά μέσα του έχει πιο λίγες κουκίδες. Κι άμα το δεις από μακριά σου φαίνεται πιο μεγάλο αυτό.



Εικόνα 3: Δοκιμασία αναγνώρισης αξονικής συμμετρίας με κάθετο άξονα συμμετρίας και πλέγμα στο φόντο.

Έπειτα, συνεχίζει χρησιμοποιώντας μαθηματική ορολογία, όπως «άξονας συμμετρίας» και «απόσταση», επικαλούμενη την ιδιότητα της συμμετρίας για ίση απόσταση από τον άξονα συμμετρίας των δύο σχημάτων. Έτσι, κάνει φανερή την τυπική γνώση που αναδύεται με την αναλυτική στρατηγική «*μετρώντας τις κουκίδες*» σε συνδυασμό με την άτυπη «*φαίνεται*» κατά τη δοκιμασία:

Μαθήτρια*:* Δεν είναι συμμετρικό. Κι επίσης ο άξονας συμμετρίας από εδώ έχει πιο λίγη απόσταση, ενώ από εδώ πέρα είναι μεγαλύτερη η απόσταση. […] Το κατάλαβα μετρώντας τις κουκίδες αλλά και φαίνεται ότι είναι πιο μακριά το ένα απ' το άλλο.

Κατά τη διαδικασία της κατασκευής τα δεδομένα είναι αντίθετα. Πάλι καταγράφονται οι ολιστικές και οι αναλυτικές προσεγγίσεις είτε μόνες τους είτε συνδυαστικά. Ωστόσο, η αναλυτική προσέγγιση υπερτερεί και τις περισσότερες φορές συνδυάζεται με την ολιστική, εκτός τις περιπτώσεις που υπάρχει ένας απλός γεωμετρικός σχηματισμός σε πλέγμα, όπου αποκλειστικά η αναλυτική προσέγγιση επαρκεί για την κατασκευή του συμμετρικού.

Έτσι, κατά την κατασκευή οι μαθητές εστιάζουν σε τμήματα του σχήματος και σε λεπτομέρειές του και γίνεται χρήση αναλυτικών στρατηγικών, με τις κυριότερες τη *μέτρηση* και την *ορθογώνια διαδικασία*. Η *μέτρηση* των σημείων του πλέγματος ή η μέτρηση με χάρακα ως αναλυτική στρατηγική χρησιμοποιείται συνεχώς από όλους τους μαθητές στις δοκιμασίες κατασκευής και συνδυαστικά με άλλες στρατηγικές, καθώς αποτελεί

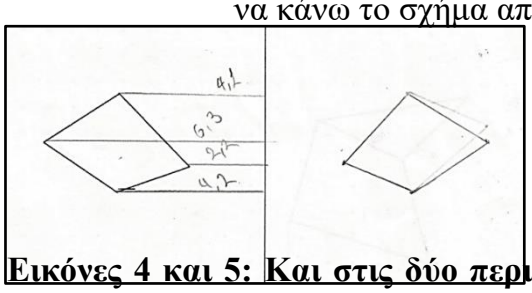
εργαλείο για τον υπολογισμό του μήκους των πλευρών και της απόστασης από τον άξονα συμμετρίας. Σχετικά αποσπάσματα:

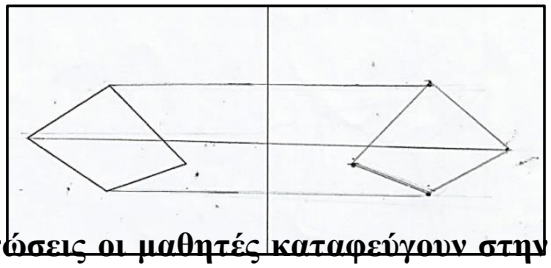
Μαθητής 1: Μέτρησα πρώτα τις πλευρές με τον χάρακα και μετά τράβηξα τις γραμμές για να γίνει η σωστή αντανάκλαση.

Μαθητής 2: Μετράω τις βουλίτσες που έχει όλη η πλευρά, έτσι ώστε να τραβήξω το ίδιο και απ' την άλλη, για να μην είναι η μια πλευρά πιο μικρή και η άλλη πιο μεγάλη.

Ακόμη, η επόμενη πιο συχνή αναλυτική στρατηγική είναι η *ορθογώνια διαδικασία*, κατά την οποία οι μαθητές βρίσκουν αρχικά τις συμμετρικές κορυφές του σχήματος, υπολογίζοντας την κάθετη απόσταση της μιας κορυφής με τον άξονα συμμετρίας κι αφήνοντας ίση κάθετη απόσταση κι από την άλλη μεριά, ώστε να βρουν τη συμμετρική κορυφή. Στη συνέχεια, κάποιοι ενώνουν τις κορυφές αυτές για να κατασκευαστεί το συμμετρικό σχήμα. Χαρακτηριστικό απόσπασμα:

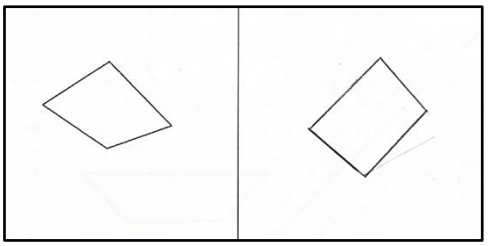
Μαθήτρια: Μέτρησα πόσα εκατοστά ήταν η απόσταση από την κορυφή έως τον άξονα, που ήταν 2 εκ. Μετά είδα κι εδώ ότι ήταν 2 εκ. [εννοεί από την άλλη πλευρά], έβαλα μια βουλίτσα και άρχισα να κάνω το σχήμα από εκεί.

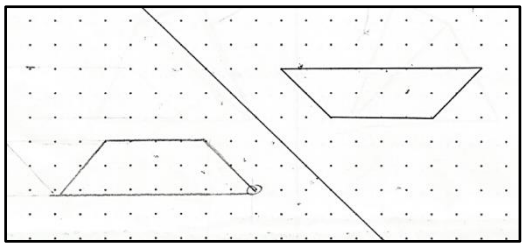




Εικόνες 4 και 5: Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές καταφεύγουν στην ορθογώνια διαδικασία για την εύρεση των συμμετρικών κορυφών.

Επίσης, όταν οι μαθητές δυσκολεύονται να προχωρήσουν στην κατασκευή του συμμετρικού μόνο με την τυπική γνώση τους, τότε επιστρατεύουν και την άτυπη, δηλαδή τη διαισθητική εμπειρία τους και μεταβαίνουν από την αναλυτική στην ολιστική προσέγγιση. Δυσκολίες εμφανίζονται όταν ο άξονας συμμετρίας είναι πλάγιος και υπάρχει πλέγμα στο φόντο (Εικόνα 7), όταν η πλευρά ή οι κορυφές του σχήματος δεν εφάπτονται με τις βούλες του πλέγματος κι έτσι δεν μπορούν να βρουν τις συμμετρικές μέσω μέτρησης, όταν δεν υπάρχει καθόλου πλέγμα κι έτσι δεν βρίσκουν τη συμμετρική θέση όλων των κορυφών του σχήματος παρά μόνο μίας (Εικόνα 6). Τέλος, σε κάποιες περιπτώσεις οι μαθητές καταφεύγουν στην ολιστική προσέγγιση αφού έχουν κατασκευάσει το σχήμα με αναλυτική ως τρόπο επιβεβαίωσης, ώστε να διαπιστώσουν εάν η κατασκευή τους είναι συμμετρική.





Εικόνες 6 και 7. Περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές δυσκολεύτηκαν. Ξεκίνησαν με αναλυτική προσέγγιση και ολοκλήρωσαν την κατασκευή με ολιστική.

Ακόμη, κατά την κατασκευή οι μαθητές χρησιμοποιούν μαθηματική ορολογία, όπως «κορυφή», «άξονας συμμετρίας» και κάνουν συχνή αναφορά στις ιδιότητες της συμμετρίας, βάσει των οποίων κατασκευάζουν το εκάστοτε σχήμα, όπως η ίση απόσταση των σημείων από τον άξονα συμμετρίας. Αυτά φαίνονται στο παρακάτω απόσπασμα:

Μαθήτρια: Παίρνω το χάρακα και μετράω την απόσταση της κορυφής από τον άξονα συμμετρίας. Είναι 2 [εκατοστά]. Μετά τη βρίσκω από την άλλη πλευρά.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τόσο την αναγνώριση όσο και την κατασκευή της αξονικής συμμετρίας, οι μαθητές τις προσεγγίζουν με δύο τρόπους. Είτε αξιοποιούν αποκλειστικά ένα είδος προσέγγισης, την αναλυτική ή την ολιστική με επίκληση στην τυπική και άτυπη γνώση τους αντίστοιχα, είτε καταφεύγουν στο συνδυασμό τους, με την μία να υπερτερεί της άλλης ανάλογα τη δοκιμασία. Σε αυτή την προσέγγιση κατέληξε και η έρευνα των Boulter και Kirby (1994) καθώς και των Ho κ.ά. (2014), οι οποίοι υποστηρίζουν πως όταν οι μαθητές ακολουθούν ένα από τα δύο είδη προσέγγισης, αυτό μπορεί να εμπεριέχει χαρακτηριστικά κι από το άλλο είδος.

Η προσέγγιση, όμως, που επικρατεί κατά την αναγνώριση συμμετρικών γεωμετρικών δομών είναι η ολιστική. Οι μαθητές καταφεύγουν περισσότερο στην αποκλειστική αξιοποίηση της άτυπης γνώσης τους για να αναγνωρίσουν τη συμμετρικότητα σε γεωμετρικές δομές, όπως διαπίστωσαν και οι Boulter και Kirby (1994), στην έρευνα των οποίων βρέθηκε ότι κατά την αναγνώριση αξιοποιείται η ολιστική προσέγγιση χωρίς δυσκολία. Ακόμη, σε δοκιμασίες με πραγματικά σχήματα καθημερινής ζωής συνδυάζεται η άτυπη γνώση με την τυπική, με την πρώτη να υπερτερεί, καθώς τα παιδιά επικαλούνται την εμπειρία τους από τα συμμετρικά ερεθίσματα που συναντούν στη ζωή τους, όπως αναφέρει και ο Weyl (1991).

Από την άλλη πλευρά, η αποκλειστική αξιοποίηση της τυπικής γνώσης για την αναγνώριση αξονικής συμμετρίας σχεδόν δεν υφίσταται, ενώ ο συνδυασμός αναλυτικής και ολιστικής προσέγγισης με την πρώτη να

υπερτερεί, δηλαδή επίκληση τυπικών κι άτυπων γνώσεων, αξιοποιείται σε πολύ μικρό βαθμό. Παρόμοιες διαπιστώσεις που αφορούν την αναγνώριση δεν έχουν καταγραφεί από τη σχετική βιβλιογραφία.

Αντιθέτως, κατά την κατασκευή αξονικής συμμετρίας η αναλυτική προσέγγιση και κατά συνέπεια η αξιοποίηση της τυπικής γνώσης είναι η κυρίαρχη. Αυτή αξιοποιείται κυρίως συνδυαστικά με την άτυπη γνώση και στοιχεία ολιστικής προσέγγισης ή αποκλειστικά. Παρόλα αυτά, η αποκλειστική αξιοποίηση της ολιστικής προσέγγισης είναι ελάχιστη.

Στην περίπτωση συνδυασμού των δύο προσεγγίσεων, η μετάβαση από αναλυτική σε ολιστική προσέγγιση γίνεται κυρίως όταν οι μαθητές δυσκολεύονται να ολοκληρώσουν την κατασκευή στηριζόμενοι στην τυπική τους γνώση, συνεπώς επιστρατεύουν την εμπειρία τους, δηλαδή την άτυπη γνώση τους γι' αυτόν τον σκοπό. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τους Kyllonen, Lohman και Snow (1984), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι σε πιο δύσκολες δοκιμασίες αυξάνεται η αξιοποίηση αναλυτικών στρατηγικών (Boulter & Kirby, 1994). Απ' την άλλη πλευρά, η μετάβαση από ολιστική σε αναλυτική προσέγγιση γίνεται όταν οι άτυπες γνώσεις των μαθητών δεν επαρκούν για την ολοκλήρωση της κατασκευής κι όταν χρησιμοποιούν τις άτυπες γνώσεις τους σαν "σκαλωσιά" για την εφαρμογή της τυπικής. Το ίδιο υποστηρίζουν και οι Ho κ.ά. (2014), σύμφωνα με τους οποίους όταν η ολιστική προσέγγιση δεν αποδίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα, λειτουργεί ως σκαλοπάτι για την μετάβαση σε αναλυτική, όπου οι μαθητές θα αξιοποιήσουν τις ιδιότητες της συμμετρίας.

Συγκρίνοντας, λοιπόν, τον αντίθετο τρόπο προσέγγισης των μαθητών στην αναγνώριση και κατασκευή αξονικής συμμετρίας μια πιθανή ερμηνεία μπορεί να αποδοθεί από τους Boulter και Kirby (1994), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η προσέγγιση που ακολουθεί ο μαθητής εξαρτάται από το είδος που προωθείται από τις απαιτήσεις της εκάστοτε δοκιμασίας, για παράδειγμα η ύπαρξη πλέγματος προωθεί τη διαδικασία της μέτρησης, δηλαδή την αναλυτική προσέγγιση.

Συμπερασματικά**,** η επικράτηση της ολιστικής προσέγγισης (άτυπη γνώση) σε δοκιμασίες αναγνώρισης της αξονικής συμμετρίας σε αντίθεση με την επικράτηση της αναλυτικής προσέγγισης σε δοκιμασίες κατασκευής κάνει φανερή την ανάγκη αξιοποίησης περισσότερων δοκιμασιών κατασκευής της αξονικής συμμετρίας κατά την διδασκαλία, αποσκοπώντας στην προώθηση της αναλυτικο-συνθετικής σκέψης των μαθητών με προσφυγή και αξιοποίηση των ιδιοτήτων της συμμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Boulter, D. R. & Kirby, J.R. (1994). Identification of Strategies Used in Solving Transformational Geometry Problems. *The Journal of Educational Research, 87*(5), 298-303. https://doi.org/10.1080/00220671.1994.9941257

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. New York: Routledge.

Ho, S. Y. & Logan, T. (2013). Students' Performance on a Symmetry Task. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), *Proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, (*747-750). Melbourne, Australia: MERGA.

Ho, S. Y., Ramful A. & Lowrie, T. (2014). Visual and Analytical Strategies in Spatial Visualization: Perspectives from Bilateral Symmetry and Reflection. In Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* 3 (313-320). Vancouver, Canada: PME.

Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding Meanings for Reflective Symmetry. *International Journal of Computers in Mathematical Learning*, *2* (1), 27-59.

Küchemann, D. K. (1980). Children's Difficulties with Single Reflections and Rotations. *Mathematics in Schools, 9* (2), 12-13.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lester, F. K. (1989). Mathematical problem solving in and out of school. *Arithmetic Teacher, 37* (3), 33-35.

Ng, O. L. & Sinclair, N. (2015). Young Children Reasoning about Symmetry in a Dynamic Geometry Environment. *ZDM*, *47* (3), 421-434. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0660-5

Nunes, T. & Bryant, P. (2007). *Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά*. Αθήνα: Gutenberg.

Tzekaki, M. (2014). Mathematical Activity in Early Childhood: Is it so Simple? In Nicol, C., Oesterle, S., Liljedahl, P. & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* 5 (289-296). Vancouver, Canada: PME.

Weyl, H. (1991). *Συμμετρία*. Αθήνα: Τροχαλία.

Xistouri, X. (2007). Student's Ability in Solving Line Symmetry Tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5): Working Group 3* (526-535). Larnaca, Cyprus: CERME.

Τσικοπούλου, Σ. Δ. (2010). *Η Κατανόηση των Γεωμετρικών Εννοιών από τους Μαθητές της Β/μιας Εκπαίδευσης: Διαμεσολαβήσεις, Αναπαραστάσεις σε μια Ιστορική Ανάδραση, Η Περίπτωση της Αξονικής Συμμετρίας* (Διδακτορική Διατριβή). ΕΚΠΑ.

Θεματική Ενότητα 3: Αξιολόγηση των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών

MATH IS EVERYWHERE/ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΟΥ

Ελπίδα Χαραλαμπίδου

Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

elpidachara@hotmail.gr

Στο πρόγραμμα Math is Everywhere συμμετέχουν 8 σχολεία, με στόχο την αναζήτηση της σύνδεσης των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα. Σχεδιάζεται κάθε μήνα να μελετάται η σχέση μεταξύ μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες, την ιστορία, την τέχνη, τη φυσική αγωγή, την πληροφορική και τη γεωγραφία. Μέχρι στιγμής έχει αποτυπωθεί η σχέση μαθηματικών με τη φυσική. Εξετάστηκαν και αξιολογήθηκαν τα θετικά αποτελέσματα αυτής της σύνδεσης στους μαθητές. Η αξιολόγηση έγινε με τη μορφή δομημένων συνεντεύξεων και η ανάλυση ακολούθησε τα βήματα της ανάλυσης περιεχομένου. Αναδείχθηκε η θετική επίδραση της επικοινωνίας των δύο γνωστικών αντικειμένων στην καλλιέργεια δεξιοτήτων. Οι μαθητές αναγνώρισαν τη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή τους ζωή, ενώ κατέληξαν πως τα μαθηματικά είναι περισσότερο ευχάριστα και ελκυστικά μέσα από αυτές τις προσεγγίσεις.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Τα μαθηματικά φαίνεται πως συνδέονται με πολλές πτυχές της καθημερινής ζωής (Κολτσάκης, 2008). Αυτή η σχέση και η σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα, γίνεται ορατή στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Πολλές φορές όμως η διαθεματικότητα δεν πριμοδοτείται από τις διδακτικές πρακτικές, με αποτέλεσμα να μην καταφθάνει στους αποδέκτες της μαθησιακής διαδικασίας.

Η δημιουργία σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων συνιστά επιτακτική ανάγκη για τους μαθητές ήδη από μικρή ηλικία (Λούρια, 1992). Μάλιστα μια τέτοια σύνδεση επιτρέπει την καλλιέργεια σύνθετων τρόπων σκέψης από τους μαθητές (Concoran e.t. al., 2009).

Στα πλαίσια αυτά και σε συνδυασμό με τις δυνατότητες που προσφέρουν τα ευρωπαϊκά προγράμματα E Twinning έγινε προσπάθεια να ελεγχθεί η ύπαρξη σύνδεσης των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

E Twinning

Αναφορικά με το E Twinning, αυτό αποτελεί μια κοινότητα των σχολείων της Ευρώπης. Συνιστά καινοτομία της Ευρωπαϊκής Επιτροπής, κατά την οποία προσφέρεται η δυνατότητα συμμετοχής και δημιουργίας ευρωπαϊκών προγραμμάτων. Αυτά μπορεί να είναι εθνικά, δηλαδή να συντελούνται μεταξύ σχολείων της ίδιας χώρας ή ευρωπαϊκά, όπου

συνεργάζονται σχολεία διαφορετικών χωρών. Στο παρόν άρθρο συντελείται πρόγραμμα ευρωπαϊκού τύπου.

Επιπλέον τα προγράμματα e twinning μπορούν να σχετίζονται με όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης ξεκινώντας από την πρωτοβάθμια και καταλήγοντας μέχρι και τη δευτεροβάθμια. Για τα προγράμματα, παρέχεται μια πλατφόρμα επικοινωνίας μεταξύ των εκπαιδευτικών και των μαθητών. Στην πλατφόρμα αυτή δίνεται η δυνατότητα γραπτής επικοινωνίας μέσω chat, αλλά και δια ζώσης. Ακόμη προσφέρεται χώρος ανάρτησης των υλικών και των αποτελεσμάτων της κάθε μελέτης (twinspace). Διακρίνεται λοιπόν η παροχή εργαλείων στους συμμετέχοντες στα ευρωπαϊκά προγράμματα E Twinning, ώστε η συνεργασία, η επικοινωνία και η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών να είναι εφικτή (Crawley e.t. a.l, 2007). Τέλος το κάθε πρόγραμμα διαθέτει τον δημιουργό και τον συνδημιουργό του. Οι υπόλοιποι συμμετέχοντες συνιστούν απλώς μέλη του προγράμματος. Η παρούσα εργασία παρουσιάζεται από μέλος της ομάδας του προγράμματος Math is Everywhere.

Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες

Τα δύο αυτά γνωστικά αντικείμενα συνδέονται κοινωνικά, πολιτικά και οικονομικά. Παρέχουν και οι δύο επιστήμες αξιόπιστες γνώσεις για τους πολίτες, χρήσιμες για την καθημερινή ζωή. Η σύνδεση όμως των δύο γνωστικών αντικειμένων είναι ισχυρότερη, καθώς τα μαθηματικά προσφέρουν εργαλεία για την ανάλυση των δεδομένων της φυσικής επιστήμης, ενώ η τελευταία παρέχει προβλήματα προς διερεύνηση (Τσελφές, 2010).

Αναφορικά με αυτή τη σύνδεση έχουν καταγραφεί δύο μορφές της διαλεκτικής σχέσης των δύο αντικειμένων. Στην πρώτη τα μαθηματικά παρέχουν λύσεις και πρακτικές σε καθαρά μαθηματικά ζητήματα, ενώ στη δεύτερη τα μαθηματικά αποτελούν εργαλείο κατανόησης, προσέγγισης και επίλυσης φυσικών φαινομένων. Έτσι στην πρώτη περίπτωση κύριο ρόλο κατέχει η μαθηματική επιστήμη. Από την άλλη στη δεύτερη προσέγγιση, τα φαινόμενα εντάσσονται στην κατηγορία των κατεξοχήν φυσικών φαινομένων, που προσεγγίζονται, μελετώνται και αναλύονται με τη χρήση και αξιοποίησης της μαθηματικής επιστήμης (Σιουμάλας-Χριστοδούλου, 2017). Στο παρόν κείμενο φαίνεται πως τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν τη δεύτερη μορφή διαλεκτικής σχέσης των δύο επιστημών.

Επιπλέον κοινό χαρακτηριστικό των δύο αντικειμένων συνιστά η προσπάθεια και των δύο να ερμηνεύσουν τον κόσμο, να κατασκευάσουν νοήματα και να δημιουργήσουν εμπειρίες, ικανές για την οικοδόμηση της γνώσης (Χασάπης, 2010). Ακόμη τα δύο γνωστικά αντικείμενα αξιοποιούν μια κοινή συμβολική γλώσσα, η οποία περιλαμβάνει κώδικες, σύμβολα και

κανόνες. Πιο αναλυτικά και τα δύο γνωστικά αντικείμενα αξιοποιούν εικονικές αναπαραστάσεις, μοντέλα και εξειδικευμένες δραστηριότητες του πεδίου, γεγονός που ισχυροποιεί τη διαλεκτική τους σχέση. Οι γραφικές και εικονικές παραστάσεις, που εξυπηρετούν και τις δύο επιστήμες, λειτουργούν σε ένα σύστημα που διευκολύνει την ενασχόληση με τις μαθηματικές και φυσικές δραστηριότητες και ενισχύει τη δημιουργία μαθηματικών και φυσικών νοημάτων (Lemke, 2004).

Αναλυτικότερα, η γλώσσα που αξιοποιούν μαθηματικά και φυσική περιλαμβάνει τρεις κοινές παραδοχές. Η πρώτη εμπερικλείει την παρουσίαση μιας κατάστασης, δηλαδή τον ορισμό της προσέγγισης και ερμηνείας του φαινομένου. Η δεύτερη λειτουργία επικεντρώνεται στον προσανατολισμό, κατά τον οποίο, η οποιαδήποτε θέση και ερμηνεία επιδέχεται αποδοχής ή απόρριψης. Τέλος στην τρίτη λειτουργία της γλώσσας των δύο επιστημών, παρατηρείται η συνθετική χρήση και αποτύπωση της γλώσσας, όπου κειμενικές δομές συνδυάζονται συνθετικά για τη δημιουργία νοήματος (Χασάπης, 2010).

Καταληκτικά, οι δύο επιστήμες, Μαθηματικά και Φυσική, συνδέονται και αλληλεπιδρούν διδακτικά και παιδαγωγικά. Συγκεκριμένα, μαθηματικές μέθοδοι αξιοποιούνται στη φυσική, ενώ φυσικές έννοιες, τρόποι σκέψεις και επιχειρήματα, διευκολύνουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών- πεδίων. Διδακτικά η αξιοποίηση Μαθηματικών Μοντέλων που προσεγγίζουν την πραγματικότητα, δημιουργούν υποθέσεις, απλοποιώντας τα φαινόμενα και τους νόμους που τα διέπουν. Αυτή η διαδικασία είναι επαναληπτική, καθώς ξεκινά από το φαινόμενο της πραγματικότητας, μεταβαίνει στη μαθηματική μοντελοποίηση και οδηγείται εκ νέου στην ερμηνεία του πραγματικού κόσμου (Μπερκέτης, 2010).

Διακρίθηκε λοιπόν πως η σχέση φυσικής και μαθηματικών είναι ισχυρή, ενώ η απουσία αυτής της διαλεκτικής συνύπαρξης, μπορεί να οδηγήσει σε εμπόδια στη μάθηση (Κρητικός και σύν, 2019).

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Ερευνητικό Πρόβλημα- Ερευνητικά Ερωτήματα

Το ερευνητικό πρόβλημα διερευνούσε τη σχέση-σύνδεση των μαθηματικών με τη φυσική και τα μαθησιακά αποτελέσματα αυτής της σχέσης.

Το ερώτημα αυτό εστιάστηκε στην αναζήτηση αυτής της σχέσης σε μαθητές Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, καθώς στο παρελθόν έχει διερευνηθεί η σύνδεση των δύο γνωστικών αντικειμένων, κατεξοχήν στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (σχέση μαθηματικών και εφαρμοσμένης φυσικής) (Τελφές, 2010).

Μεθοδολογία

Στο συγκεκριμένο ευρωπαϊκό πρόγραμμα έγινε προσπάθεια να μελετηθεί η σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα, κάθε μήνας αφοσιώθηκε στη μελέτη της συνύπαρξης και της συνεισφοράς των μαθηματικών στην προσέγγιση άλλων γνωστικών αντικειμένων. Έτσι τον μήνα Δεκέμβριο οι μαθητές έλεγξαν και επεξεργάστηκαν τη σχέση και τη σύνδεση των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες.

Στο παρόν άρθρο αναδεικνύονται τα προϊόντα εργασίας ενός Δημοτικού Σχολείου της Ελλάδας, παρόλο που στο πρόγραμμα συμμετέχουν οκτώ σχολεία από χώρες της Ευρώπης. Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας αναδεικνύονται τα προϊόντα εργασίας Δημοτικού Σχολείου ημιαστικής περιοχής της Χαλκίδας. Τα προϊόντα αφορούν τη σχέση των μαθηματικών και των φυσικών, καθώς οι επόμενες συσχετίσεις ακολουθούν και έπονται της ημερομηνίας των εργασιών του συνεδρίου.

Δείγμα αποτελούν 11 μαθητές της Ε΄ Τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Εργαλείο συλλογής των δεδομένων ήταν οι δομημένες συνεντεύξεις ενώ για την ανάλυσή τους αξιοποιήθηκε η ανάλυση περιεχομένου.

Για την προσέγγιση του ερευνητικού προβλήματος, δόθηκαν στα παιδιά τρεις δραστηριότητες και στη συνέχεια ακολούθησε η διαδικασία της δομημένης συνέντευξης.

Δομημένη Συνέντευξη

Το εργαλείο συλλογής των δεδομένων ήταν η δομημένη συνέντευξη. Αυτή αποτελεί μέσο συλλογής δεδομένων σε ποιοτικές ερευνητικές προσεγγίσεις. Προσφέρει τη δυνατότητα άμεσης επικοινωνίας του ερευνητή με τα υποκείμενα του δείγματος και τη λήψη πληροφοριών, αναφορικά με τον τρόπο σκέψης και δράσης των υποκειμένων (Παπαναστασίου και Παπαναστασίου, 2016).

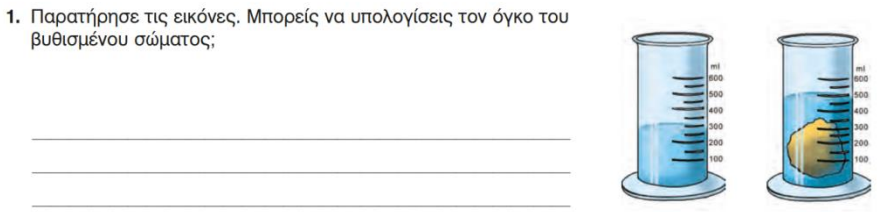
Η δομημένη συνέντευξη χαρακτηρίζεται από ερωτήσεις προσχεδιασμένες και προκαθορισμένες. Ακόμη και η σειρά διατύπωσης των ερωτήσεων, ενδέχεται να έχει προσχεδιαστεί και συμφωνηθεί εκ των προτέρων. Συνιστάται η χρήση της, για λήψη πληροφοριών αναφορικά με την προσωπική γνώμη και κρίση των υποκειμένων (Μπίνης, 2021).

Ωστόσο η συνέντευξη ως εργαλείο προσφέρει τη δυνατότητα ανακάλυψης των απόψεων και των εσωτερικών σκέψεων των ατόμων. Στα πλαίσια αυτά η συνέντευξη πριμοδοτείται από τις ίδιες τις απαντήσεις των υποκειμένων. Αυτό συνιστά και πλεονέκτημά της, δηλαδή, η δυνατότητα διευκρίνισης, περαιτέρω διερεύνησης και εμβάθυνσης στις απαντήσεις του δείγματος (Bird, et. al, 1999).

Οι δραστηριότητες αξιοποιούσαν προγενέστερες γνώσεις των μαθητών, τόσο στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών όσο και των φυσικών. Οι δραστηριότητες που δόθηκαν ήταν τρεις.

Πιο αναλυτικά στην **πρώτη δραστηριότητα** ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν τον όγκο ενός βυθισμένου αντικειμένου.

Πρώτη δραστηριότητα: Μέτρηση όγκου



Στη δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές κλήθηκαν να τοποθετήσουν τους κύβους σε φθίνουσα σειρά με βάση τη μάζα τους.

Δεύτερη Δραστηριότητα: Σειροθέτηση

Τέλος στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να δημιουργήσουν ένα γεύμα 5.040 kj, όσων δηλαδή θερμίδων πρέπει να καταναλώνουν ημερησίως. Για τον λόγο αυτό προσφέρθηκε στα παιδιά ένας ενημερωτικός πίνακας τροφίμων, αναγράφοντας και την ενέργεια που περιέχει το κάθε προϊόν. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τα τρία γεύματα της ημέρας τους (πρωινό, μεσημεριανό, βραδινό), καταγράφοντας τη συνολική ενέργεια του κάθε γεύματος, αλλά και την ολιστική ενέργεια, για όλη την ημέρα. Αξιολογήθηκε έτσι η ικανότητα δημιουργίας εκ μέρους των μαθητών ημερησίου γεύματος έως 5.040 kj.

Χρησιμοποιήθηκαν δραστηριότητες που μελετούν έννοιες της φυσικής όπως η μάζα, ο όγκος και η ενέργεια. Επιλέχθηκαν έννοιες διαφορετικών ενοτήτων, ώστε να ελεγχθεί η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, θα μπορούσε η σύνδεση των δύο γνωστικών αντικειμένων να υφίσταται σε μία έννοια της φυσικής επιστήμης, στην οποία τα μαθηματικά αποτελούν εργαλείο διεκπεραίωσής της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος (Σιουμάλας-Χριστοδούλου, 2017). Για να αποφευχθεί όμως μια τέτοια επιστημονική αστοχία επιδιώχθηκε η επιλογή των θεματικών ενοτήτων, να καλύπτουν μεγαλύτερο εννοιολογικό εύρος, ώστε

η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων να εξασφαλιστεί σε μεγαλύτερο επίπεδο.

Αναφορικά με την αξιοπιστία των ερωτημάτων της συνέντευξης, αυτά δοκιμάστηκαν πιλοτικά σε δύο μαθητές.

Οι ερωτήσεις της **συνέντευξης** ήταν οι ακόλουθες:

- ✓ Πώς κατάφερες να λύσεις τις δραστηριότητες;
- ✓ Πώς σου φάνηκαν οι δραστηριότητες;
- ✓ Τι έκανες για να τις λύσεις;
- ✓ Θα μπορούσες να τις λύσεις χωρίς τη βοήθεια των μαθηματικών πράξεων;

Η πιλοτική εφαρμογή επιβεβαίωσε τα ερωτήματα, τα οποία διατηρήθηκαν. Ανέδειξε όμως την ανάγκη υποστήριξης και παροχής διευκρινίσεων για την πρώτη και την τρίτη ερώτηση. Ο τρόπος εργασίας δε διατυπώθηκε ρητά από τους δύο μαθητές που συμμετείχαν στη δοκιμαστική εφαρμογή. Για τον λόγο αυτό, στην πρώτη και στην τρίτη ερώτηση κρίθηκε αναγκαία η ανάγκη επιμερισμού τους σε διευκρινιστικούς άξονες. Αυτοί έλαβαν την ακόλουθη μορφή και εφαρμόστηκαν στο κυρίως δείγμα:

-Τι έκανες στην αρχή;

-Πώς σκέφτηκες;

-Πώς προχώρησες στη συνέχεια;

-Τι τρόπο ακολούθησες;

-Είχες κάποιο εμπόδιο;

-Πώς μπορείς να το λύσεις;

Ανάλυση Περιεχομένου

Η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων ήταν η ανάλυση περιεχομένου. Πρόκειται για μια τεχνική διερεύνησης του περιεχομένου επικοινωνίας. Μέσω αυτής της μεθόδου ερμηνεύεται ο προφορικός και ο γραπτός λόγος. Έτσι προκύπτουν μετρήσιμα δεδομένα που μπορούν να συνοψιστούν και να κατηγοριοποιηθούν.

Η ανάλυση των δεδομένων υλοποιείται σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη συγκεκριμενοποιούνται οι υποθέσεις της έρευνας και επιλέγεται το υλικό προς ανάλυση. Στη δεύτερη αναλύεται το υλικό, μέσω κωδικοποίησης και προσδιορισμού της μονάδας καταγραφής. Ως μονάδα καταγραφής μπορεί να αξιοποιηθεί μια λέξη, ένα θέμα, μια πρόταση, μία παράγραφος ή και ολόκληρο το κείμενο.

Στη συνέχεια συντελείται ομαδοποίηση των μονάδων καταγραφής που εμπίπτουν στην ίδια κατηγορία ή έχουν κοινά χαρακτηριστικά.

Καταληκτικά προκύπτουν οι κατηγορίες που απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα (Cohen, e.t. a.l, 2008).

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων ανέδειξαν ορισμένες κατηγορίες στα ερωτήματα που τέθηκαν. Συγκεκριμένα, υπήρχαν μαθητές που έλυσαν μόνοι τους τις δραστηριότητες, χωρίς τη χρήση βοήθειας ή την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού.

> «Τα έλυσα μόνος μου, ήταν εύκολα» «Είχαν φυσική και μαθηματικά, είμαι καλή σε αυτά».

Αυτοί ήταν 4 από τους 11. Οι υπόλοιποι όπως δήλωσαν και στις συνεντεύξεις τους χρειάστηκαν την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού και την επικοινωνία και συνεργασία μαζί της. Η καθοδήγηση περιελάμβανε τον επιμερισμό των αξόνων για την πρώτη και τρίτη ερώτηση, όπως περιγράφηκε νωρίτερα.

Αξίζει να σημειωθεί πως κατάφεραν να λύσουν όλα τα παιδιά τις δραστηριότητες, ακόμη και μαθητές που αντιμετωπίζουν εμπόδια στη μάθηση (ελληνικά δεύτερη ξένη γλώσσα για έναν μαθητή και μαθησιακές δυσκολίες για μία μαθήτρια).

Σε όλα τα παιδιά οι δραστηριότητες φάνηκαν εύκολες και ευχάριστες. Δήλωσαν μάλιστα πως τα μαθηματικά ήταν πολύ ευχάριστα. Από τα δεδομένα αναδείχθηκε πως μια τέτοια προσέγγιση των μαθηματικών είναι πιο διασκεδαστική. Μάλιστα οι μαθητές συνέδεσαν τα μαθηματικά με γεγονότα της καθημερινής ζωής και εμπειρίας. Ορισμένες δηλώσεις που επιβεβαίωσαν την εν λόγω κατηγορία ήταν οι ακόλουθες:

> «Μου άρεσαν έτσι τα μαθηματικά κυρία».

> «Δεν το περίμενα πως τα μαθηματικά υπάρχουν σε τόσα πράγματα. Όταν τρώω, δηλαδή θα μετράω τις θερμίδες. Και στο φαΐ μαθηματικά».

> «Να ξανακάνουμε τέτοιες δραστηριότητες».

Όλοι οι μαθητές συμφώνησαν πως για να λύσουν τις εν λόγω δραστηριότητες χρειάστηκε να κάνουν μαθηματικές διαδικασίες. Συγκεκριμένα, αξιοποιήθηκε η σειροθέτηση των αριθμών, η πρόσθεση και η αφαίρεση φυσικών αριθμών. Το δείγμα δεν αποτύπωσε με τους μαθηματικούς όρους τις μαθηματικές διαδικασίες που αξιοποιήθηκαν, αλλά ανέδειξε πως δεν θα μπορούσε να λύσει τις δραστηριότητες χωρίς μαθηματικές πράξεις

> «Το έλυσα με αφαίρεση».

> «Χωρίς πρόσθεση δεν θα μπορούσα να το λύσω».

«Απλά έβαλα τους αριθμούς από το πιο μεγάλο στο πιο μικρό. Θυμόμουν πως γινόταν».

Οι διευκρινιστικές ερωτήσεις αναδείχθηκαν λειτουργικές, καθώς διευκόλυναν τη σκέψη των μαθητών και ισχυροποίησαν τα αποτελέσματα. Στο ερώτημα αναφορικά με την αρχική εργασία των μαθητών, το δείγμα ανέδειξε πως χρειάστηκε να παρατηρήσει τις εικόνες. Στη συνέχεια τα παιδιά αναγκάστηκαν να αξιοποιήσουν μαθηματικές διαδικασίες για την επίλυση των δραστηριοτήτων, ενώ συμφώνησαν πως τα μαθηματικά και οι συνοδευτικές εικόνες υποβοηθούν την επίλυση των δραστηριοτήτων φυσικής. Ενδεικτικά παρατίθενται αποσπάσματα των παιδιών:

-«κυρία παρατηρώ τις εικόνες, τις συγκρίνω».

-Τι έκανες στη συνέχεια;

-«Μετά έκανα αφαίρεση και το βρήκα».

«Βλέπω τους κύβους και το νούμερο που έχουν δίπλα. Το πιο μεγάλο κερδίζει».

«Σκέφτηκα τι τρώω κάθε μέρα. Αλλά μετά χρειάστηκε να τα προσθέσω, για να είμαι μέσα στο όριο».

Αναφορικά με τις μονάδες ανάλυσης, για τον τρόπο επίλυσης των δραστηριοτήτων, αυτές εμπερικλείουν διαδικασίες των μαθηματικών ρητά ή έμμεσα ειπωμένες (πρόσθεση, αφαίρεση, συγκρίνω, το μεγάλο νικάει). Οι δραστηριότητες λύθηκαν από όλους τους μαθητές, βοηθητικό στοιχείο για την παροχή ίσων ευκαιριών στη μάθηση. Ακόμη και μαθητές με εμπόδια στη μάθηση, κατάφεραν με τις διευκρινιστικές ερωτήσεις να ολοκληρώσουν τις δραστηριότητες. Όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν τη χρηστικότητα των μαθηματικών διαδικασιών για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων, αναφέροντας τις πράξεις και τον τρόπο σκέψης που ακολούθησαν, είτε με δική τους πρωτοβουλία, είτε μέσω των διευκρινιστικών ερωτήσεων.

Η πλειονότητα της τάξης βρήκε ενδιαφέρουσες τις εργασίες, ενώ ως μονάδες αναφοράς και ανάλυσης κρίθηκαν θετικές δηλώσεις που επιβεβαίωναν αυτό το αποτέλεσμα.

Τέλος, το δείγμα πιστοποίησε πως χωρίς τη βοήθεια των μαθηματικών δε θα μπορούσε να λύσει τις δραστηριότητες, παραθέτοντας αρνητικές δηλώσεις στο ερώτημα «Θα μπορούσες να λύσεις τις δραστηριότητες, χωρίς μαθηματικές πράξεις»;

ΣΥΖΗΤΗΣΗ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της ερευνητικής προσπάθειας ανέδειξαν την ανάγκη υλοποίησης μαθηματικών πράξεων και διαδικασιών για την ολοκλήρωση δραστηριοτήτων σχετικών με τα φυσικά. Συγκεκριμένα, το δείγμα ανέφερε

πως οι δραστηριότητες που αναφέρονταν σε έννοιες της φυσικής (βασικές ιδιότητες των σωμάτων, ενέργεια) δε θα μπορούσαν να διεκπεραιωθούν χωρίς την εφαρμογή μαθηματικών πράξεων.

Αυτή η σύνδεση και διαλεκτική σχέση των δύο επιστημών, επιβεβαιώνεται και από τη βιβλιογραφία. Πιο αναλυτικά αρκετές μελέτες και έρευνες διαθέτουν ως ερευνητικό ζήτημα τη σχέση των δύο γνωστικών αντικειμένων.

Βάσει των βιβλιογραφικών στοιχείων παρουσιάζονται δύο μορφές αυτής της διαλεκτικής σχέσης μαθηματικών και φυσικής. Ειδικότερα η πρώτη μορφή αναφέρεται ως μαθηματικές εξηγήσεις καθαρά μαθηματικών φαινομένων, ενώ η δεύτερη ως μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων. Στην πρώτη περίπτωση τα μαθηματικά περιορίζονται σε δομές της ίδιας της επιστήμης. Από την άλλη οι μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων εννοούν την εστίαση σε φυσικά φαινόμενα, τα οποία επεξηγούνται με μαθηματικό τρόπο. Αυτό σημαίνει πως τα μαθηματικά λειτουργούν ως εργαλείο για την ανάλυση και επεξήγηση φυσικών νόμων (Σιουμάλας-Χριστοδούλου, 2017).

Τα ευρήματα της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας μοιάζει να εντάσσονται στη δεύτερη προσέγγιση, όπου οι φυσικοί νόμοι και τα γεγονότα εξηγούνται και ισχυροποιούνται μέσω μαθηματικών διεργασιών.

Στηριζόμενη σε αυτήν την προσέγγιση και ερμηνεία της διαλεκτικής σχέσης των δύο γνωστικών αντικειμένων, τα μαθηματικά ως εργαλείο και τρόπος σκέψης απέδωσε θετικά μαθησιακά αποτελέσματα. Οι μαθητές αναγνώρισαν την ύπαρξη των μαθηματικών σε ζητήματα της καθημερινότητας τους και της ζωής τους γενικότερα (διατροφή). Φάνηκε η μαθησιακή διαδικασία να γίνεται περισσότερο ευχάριστη και ελκυστική, στα πλαίσια της συνθετικής παρουσίασης εννοιών και διαδικασιών (φυσικών εννοιών και μαθηματικών διαδικασιών).

Μια τέτοια διαπίστωση επιβεβαιώνεται και από τη βιβλιογραφία, όπου καταγράφεται πως τα μαθηματικά από μόνα τους ασχολούνται με αποδείξεις. Διακρίνονται από τυπικότητα και αυστηρότητα και εμφανίζονται τυποποιημένα από τους εκπαιδευτικούς. Μια τέτοια προσέγγιση και παρουσίαση μοιάζει μη ελκυστική στα παιδιά και δεν αναδεικνύει τη δημιουργική και πνευματική δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγονται τα μαθηματικά (Ζαχάρος, 1997).

Καταληκτικά η παρούσα εργασία ανέδειξε την ύπαρξη σχέσης μεταξύ του μαθηματικού αντικειμένου και του μαθήματος των φυσικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Τα μαθηματικά αποτέλεσαν εργαλείο για τη διεκπεραίωση δραστηριοτήτων σχετικών με έννοιες της φυσικής. Οι μαθηματικές διαδικασίες ενίσχυσαν τους νόμους της φυσικής για τις βασικές ιδιότητες των σωμάτων και για τη μέτρηση της ενέργειας. Η

σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή των παιδιών αναδείχθηκε, ενώ η μαθησιακή διαδικασία φάνηκε πιο ελκυστική στο δείγμα.

Αναστοχασμοί-Επέκταση Έρευνας

Η παρούσα εργασία αποτελεί κομμάτι μιας ευρύτερης προσπάθειας σύνδεσης των μαθηματικών με πολλά γνωστικά αντικείμενα. Στο παρόν άρθρο αναδείχθηκε η σχέση και η συνεισφορά των μαθηματικών μόνο στο γνωστικό αντικείμενο των φυσικών και μόνο για μια μικρή ομάδα μαθητών. Μελλοντικά θα μπορούσε η μελέτη να επεκταθεί σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα, με τα οποία συνδέονται τα μαθηματικά στο Ευρωπαϊκό Πρόγραμμα E Twinning "Math is Everywhere" και να υπάρξει σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των χωρών. Έτσι η αξιοποίηση μεγαλύτερου πληθυσμιακού δείγματος θα ισχυροποιούσε τα ερευνητικά συμπεράσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bird, M., Hammersley, M., Gomm, R., & Woods, P. (1999). *Εκπαιδευτική Έρευνα στην Πράξη, Εγχειρίδιο Μελέτης*, (μτφ. Ε. Φράγκου). Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform. (Research Report RR-63)*. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education.

Crawley, C., Dumitru, P. & Gilleran, A. (2007). *Learning about E-Twinning. Guide For Teachers.* Belgium: European Schoolnet.

Lemke, J.L. (2004). The literacies of science. Στο E. Wendy Saul (Eds.). *Crossing Borders in Literacy and Science Instruction: Perspectives on Theory and Practice*. International Reading Association, Newark, DE 33-47.

Ζαχάρος, Κ. (1997). Σχέσεις Μαθηματικών και Φυσικής: Μία εμπειρική έρευνα για τη δυνατότητα γραφικής αναπαράστασης της έννοιας του διαστήματος από μαθητές της Α΄Λυκείου. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 95, σελ.59-67.

Κολτσάκης, Ε. (2008). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των γνωστικών αντικειμένων*. Κιλκίς: ΕΦΚΕ.

Κτητικός, Γ., Μούτσιος-Ρέντζος, Α., Πιννίκα, Β. & Καλαβάσης, Φ. (2019). Διεπιστημονική Προσέγγιση της (συν)διδασκαλίας Μαθηματικών και Φυσικής: Η περίπτωση της χωρητικότητας ενός πυκνωτή. Στο 11ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση «*Επαναπροσδιορίζοντας τη Διδασκαλία και Μάθηση των Φυσικών Επιστημών και της Τεχνολογίας στον 21ο αιώνα*». Φλώρινα.

Λούρια, Α. Ρ. (1992). *Γνωστική Ανάπτυξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Μπερκέτης, Ν. (2010). *Φυσικές Επιστήμες και η σχέση τους με την ιστορία και την παιδαγωγική των μαθηματικών*. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.). Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Μπίνης, Α. (2021). *Τεχνικές Συνεντεύξεων. Η συνέντευξη ως εργαλείο ελέγχου.* Αθήνα: ΕΣΟΕΛ.

Παπαναστασίου, Κ. & Παπαναστασίου, Ε. Κ. (2016). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας.* Αθήνα: Ιδιωτική.

Σιουμάλας-Χριστοδούλου, Κ. (2017). *Μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων.* Διπλωματική Εργασία. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο/Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.

Τελφές, Β. (2010). *Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες: Μια προσπάθεια διερεύνησης της κοινής εκπαιδευτικής τους μοίρας*. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.). Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Χασάπης, Δ. (2010). *Η γλώσσα των μαθηματικών, η γλώσσα των φυσικών επιστημών, η γλώσσα των εκπαιδευτικών πρακτικών*. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.). Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Ο ΑΝΤΙΚΤΥΠΟΣ ΤΗΣ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΙΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΗΜΙ-ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Γεώργιος Βεντίστας[1], Ουρανία Μαρία Βεντίστα[2], Παρασκευή Τσάνη[2], Γρηγόριος Αρκουμάνης[3]

[1]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, [2]Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, [3]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

gventist@eled.auth.gr, ventista@uth.gr, patsani@uth.gr, grigorisark@primedu.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα εξέτασε την επίδραση διδακτικής παρέμβασης βασισμένης στις αρχές Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης στις δεξιότητες επίλυσης Μαθηματικών προβλημάτων. Ο σχεδιασμός ήταν ημι-πειραματικός με 124 μαθητές/τριες Α΄ Λυκείου (74 στην ομάδα παρέμβασης και 50 στην ομάδα ελέγχου). Η παρέμβαση διήρκεσε 11 διδακτικές ώρες. Πραγματοποιήθηκε προ-έλεγχος και *μετα-έλεγχος. Τα εργαλεία μέτρησης της επίδοσης βασίστηκαν σε προβλήματα ρεαλιστικών μαθηματικών από το Διεθνές Πρόγραμμα Αξιολόγησης PISA. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν συνολική βελτίωση της επίδοσης στην ομάδα παρέμβασης. Ιδιαίτερα για τους/τις μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης η βελτίωση ήταν αναλογικά μεγαλύτερη.*

Λέξεις κλειδιά: Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος, Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, PISA, Διδακτική Παρέμβαση

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τον ΟΟΣΑ (Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης) η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως μία από τις σημαντικότερες δεξιότητες του 21ου αιώνα (OECD, 2014a). Παρόλο που και τα προγράμματα σπουδών αναγνωρίζουν την επίλυση προβλήματος ως βασική προτεραιότητα, οι εκπαιδευτικοί δεν αφιερώνουν αρκετό χρόνο στην επίλυση προβλήματος κατά τη διάρκεια του μαθήματος (Ellison, 2009). Επιπρόσθετα, έχει υποστηριχθεί ότι περισσότερες έρευνες πρέπει να διερευνήσουν πιθανούς τρόπους βελτίωσης των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος (Lester, 2013). Δεδομένης της σημασίας των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος και του βιβλιογραφικού κενού, η παρούσα έρευνα εξετάζει την επίδραση μιας διδακτικής παρέμβασης, η οποία είναι βασισμένη στις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (PME),

στις δεξιότητες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος των μαθητών/τριών Λυκείου.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση

Η PME ξεκίνησε από τον Freudenthal τη δεκαετία του ’70. Η βασική ιδέα είναι ότι οι ρεαλιστικές καταστάσεις οφείλουν να διαδραματίζουν πρωτεύοντα ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία. Ο όρος «ρεαλιστικό» αναφέρεται σε δραστηριότητες της καθημερινής ζωής ή σε οτιδήποτε μπορεί να λειτουργήσει ως βιωματικό πρόβλημα στο μυαλό του/της μαθητή/τριας (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Ο Freudenthal συζητάει δύο διαφορετικά είδη μαθηματικοποίησης, την οριζόντια και την κατακόρυφη. Η οριζόντια αναφέρεται στον εντοπισμό των μαθηματικών εργαλείων που βοηθούν στην επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος, δηλαδή στη μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των μαθηματικών, ενώ η κατακόρυφη αφορά τη διαδικασία ανάλυσης και απάντησης εντός του μαθηματικού συστήματος (Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996).

Η διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων παρέχει ερεθίσματα για μάθηση και για μαθηματική εξερεύνηση στους/στις μαθητές/τριες (Cai, 2003). Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, ενώ ο/η εκπαιδευτικός, σύμφωνα με τη PME, έχει ρόλο διευκολυντικό (Selmer & Kale, 2013). Μέσω της επίλυσης προβλημάτων οι μαθητές/τριες μπορούν να μάθουν την μαθηματική έννοια που πρέπει να διδαχθεί (Lesh, 2007), επιτυγχάνοντας την εννοιολογική ανάπτυξη μέσω επέκτασης και αναθεώρησης του τρόπου σκέψης (Lesh & Harel, 2003). Επιπρόσθετα, οι μαθητές/τριες, λειτουργώντας σε ομάδες, εμπλέκονται σε σύνθετες μορφές συλλογισμού δημιουργώντας συνδέσεις μεταξύ των εννοιών και διαδικασιών (Bostic κ.ά., 2016), καθώς η εκμάθηση των μαθηματικών είναι ατομική αλλά και κοινωνική δραστηριότητα (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

Ο αντίκτυπος της PME

Έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί με PME δείχνουν θετικό αντίκτυπο σε διαφορετικές δεξιότητες των μαθητών/τριών. Οι Bray και Tangney (2016) διεξήγαγαν μια μελέτη με 3 σχολεία στην Ιρλανδία με μαθητές ηλικίας 15 και 16 ετών, κατά την οποία οι μαθητές/τριες επέλυαν προβλήματα ομαδικά κάνοντας χρήση τεχνολογικών μέσων. Τα ευρήματα έδειξαν τον θετικό αντίκτυπο της παρέμβασης PME στην εμπλοκή και την ενίσχυση της εμπιστοσύνης των μαθητών στα Μαθηματικά.

Μία μικρής κλίμακας έρευνα (25 άτομα στην πειραματική και 25 στην ομάδα ελέγχου) σε μαθητές γυμνασίου εντόπισε τη βελτίωση γνωστικής επίδοσης μαθητών/τριών και ότι οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες έγιναν πιο κατανοητές (Laurens κ.ά., 2017). Παρέμβαση PME με 48 μαθητές/τριες γυμνασίου έδειξε ότι τονώθηκε η πρωτοβουλία για μάθηση, αυξήθηκε η συνεργασία μεταξύ των μαθητών/τριών, καθώς και δεξιότητες της κριτικής σκέψης (Uyen κ.ά., 2021).

Στην Ελλάδα, οι Papadakis κ.ά. (2017), με παρέμβαση 14 εβδομάδων σε 122 μαθητές/τριες (ομάδα παρέμβασης) και 109 μαθητές/τριες (ομάδα ελέγχου) εντόπισαν τον θετικό αντίκτυπο της PME στις μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών/τριών στο νηπιαγωγείο. Οι Zaranis και Exarchakos (2018), σε έρευνα με 99 δευτεροετείς φοιτητές/τριες στην πειραματική ομάδα και 90 στην ομάδα ελέγχου διαπίστωσαν ότι η διδασκαλία διάρκειας 5 εβδομάδων με τη χρήση της PME οδήγησε σε βελτίωση επίδοσης που σχετίζεται με προηγμένες έννοιες της στερεομετρίας.

Συμπερασματικά, οι προηγούμενες μελέτες προσφέρουν ενδείξεις ότι η PME είναι μία διδακτική μέθοδος που θα μπορούσε να αναπτύξει τις δεξιότητες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Ωστόσο, δε φαίνεται να έχει εξεταστεί ο αντίκτυπος της παρέμβασης με μαθητές Λυκείου στην Ελλάδα. Η καινοτομία αυτής της παρέμβασης εντοπίζεται κυρίως στο πλαίσιο και στα εργαλεία της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, η καινοτομία εδράζεται στη χρήση εργαλείων βασισμένων στο PISA και στην εξέταση του φαινομένου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελλάδα, η οποία συνήθως δεν επικεντρώνεται στα ρεαλιστικά προβλήματα και στην ομαδοσυνεργατική μάθηση (Ventistas κ.ά., 2024). Επιπλέον, οι προηγούμενες έρευνες δεν εστιάζουν στη βελτίωση της επίδοσης μαθητών/τριών με χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά. Η εστίαση της συγκεκριμένης έρευνας γίνεται ακόμη πιο ενδιαφέρουσα καθώς το ποσοστό των μαθητών/τριών με χαμηλή επίδοση στον διαγωνισμό PISA είναι αρκετά μεγάλο στην Ελλάδα (OECD, 2023). Αυτό το ερευνητικό κενό προσπάθησε να καλύψει η παρούσα έρευνα.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να μελετήσει τον αντίκτυπο μίας διδακτικής παρέμβασης PME στις δεξιότητες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν:

- Έχει μια παρέμβαση PME αντίκτυπο σε δεξιότητες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος των μαθητών/τριών Λυκείου;
- Έχει η παραπάνω παρέμβαση αντίκτυπο στις δεξιότητες επίλυσης προβλήματος μαθητών/τριών χαμηλής επίδοσης;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ο σχεδιασμός της παρούσας έρευνας είναι ημι-πειραματικός. Στη μία ομάδα εφαρμόστηκε παρέμβαση σύμφωνα με τις αρχές της PME, δίνοντας ευκαιρία στους/στις μαθητές/τριες να επιλύσουν συνεργατικά προβλήματα ρεαλιστικών μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, μια άλλη ομάδα (ομάδα ελέγχου) παρακολούθησε μαθήματα σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα της Α΄ τάξης Λυκείου. Χρησιμοποιήθηκε δείγμα ευκολίας με 124 συμμετέχοντες/ουσες της Α΄ Λυκείου ενός σχολείου σε ημιαστική περιοχή. Από τα 5 τμήματα της Α΄ Λυκείου του σχολείου, τα 3 (74 άτομα) αποτέλεσαν την ομάδα παρέμβασης ενώ τα 2 (50 άτομα) την ομάδα ελέγχου.

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε με τους/τις μαθητές/τριες χωρισμένους/ες σε ανομοιογενείς ομάδες με τέσσερα μέλη. Κάθε μαθητής/τρια διάβαζε το πρόβλημα, σημείωνε και κατόπιν συζητούσε με τα άλλα μέλη της ομάδας. Ο/Η εκπαιδευτικός παρατηρούσε τις ομάδες και έδινε διευκρινίσεις αν χρειαζόταν. Μετά από μερικά λεπτά όποια ομάδα ήταν έτοιμη παρουσίαζε τη λύση της. Για να εξασφαλιστεί η συνεργασία της ομάδας υπήρξε όρος ότι οποιοδήποτε μέλος της ομάδας θα μπορούσε να επιλεχθεί από τον/την εκπαιδευτικό για την παρουσίαση της λύσης και συνεπώς όφειλε να είναι ενημερωμένο. Οι άλλες ομάδες παρακολουθούσαν, έκαναν παρατηρήσεις και κατόπιν κοινοποιούσαν στην αίθουσα τυχόν διαφορετικές λύσεις, αν υπήρχαν. Μέσω της συζήτησης για τον τρόπο επίλυσης και της ενδεχόμενης αντιπαράθεσης ή επικύρωσης, στόχος ήταν να επέλθει η ενίσχυση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται στο πρόβλημα (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

Η παρέμβαση διήρκεσε 11 διδακτικές ώρες. Επιλύθηκαν προβλήματα που περιείχαν αναλογίες, γραφήματα, γεωμετρικά σχήματα, χρόνο, ανισότητες, εξισώσεις, ποσοστά, στατιστικά, εκτιμήσεις και μοτίβα. Τα προβλήματα ήταν αυτούσια με τα προτεινόμενα του ΙΕΠ, τα οποία είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα «ΙΕΠ Θέματα Μαθηματικών PISA» (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2019). Η τελευταία ώρα αφιερώθηκε σε συζήτηση για την παρέμβαση. Οι έννοιες ή διαδικασίες με

τις οποίες ήρθαν σε επαφή οι μαθητές/τριες, μέσω της επίλυσης προβλημάτων, ήταν θεωρητικά γνωστές. Μερικές από αυτές όμως δεν ήταν τόσο οικείες (π.χ. μήκος τόξου, εμβαδό κυκλικού τομέα).

Εργαλεία

Τα εργαλεία μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο αποτελούνταν από προβλήματα που τέθηκαν σε προηγούμενους διαγωνισμούς του PISA (Australian Council for Educational Research κ.ά., 2013). Το PISA αξιολογεί την ικανότητα των 15χρονων μαθητών/τριών (Α΄ Λυκείου) στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας με τη βοήθεια των μαθηματικών, η οποία ορίζεται ως μαθηματικός γραμματισμός (OECD, 2014a). Η Ελλάδα κατέλαβε στα Μαθηματικά 451 μονάδες σε σχέση με το μέσο όρο των 489 μονάδων στο διαγωνισμό του 2018. Το ποσοστό των χαμηλής επίδοσης μαθητών/τριών βρίσκεται στο 35,8% του συνόλου των μαθητών/τριών (OECD, 2023).

Στα εργαλεία του προ-ελέγχου και μετα-ελέγχου χρησιμοποιήθηκαν 11 προβλήματα με 26 συνολικά ερωτήματα. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 βαθμό, οπότε το άριστα ήταν 26 βαθμοί. Ως επίδοση του/της μαθητή/τριας ορίστηκε το άθροισμα των σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις της αξιολόγησης.

Οι κατηγορίες των ρεαλιστικών προβλημάτων του PISA είναι: Χώρος και Σχήμα, Ποσότητα, Αλλαγή και Σχέσεις, Αβεβαιότητα και Δεδομένα. Τα προβλήματα του PISA έχουν 6 επίπεδα δυσκολίας και μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης θεωρούνται οι μαθητές που δεν έχουν καταφέρει να ολοκληρώσουν το επίπεδο 2.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα των ερευνητικών ερωτημάτων παρουσιάζονται παρακάτω.

Σύγκριση επίδοσης ομάδας παρέμβασης και ομάδας ελέγχου

Για να απαντηθεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, αρχικά ελέγχθηκαν οι προϋποθέσεις της κανονικότητας στις βαθμολογικές επιδόσεις των δύο ομάδων. Επίσης, ελέγχθηκε ότι οι δύο ομάδες δεν είχαν στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοσή τους στον προέλεγχο. Έτσι, στη συνέχεια λήφθηκε η διαφορά επίδοσης κάθε μαθητή/τριας ανάμεσα στον προ-έλεγχο και στον μετα-έλεγχο. Στον μετα-έλεγχο η πειραματική ομάδα βελτίωσε το βαθμολογικό της σκορ σε σχέση με την ομάδα ελέγχου. Η ομάδα ελέγχου ($M = 0,40$, $SD = 2,36$) είχε μικρότερη διαφορά επίδοσης σε σχέση με την ομάδα παρέμβασης ($M = 1,92$, $SD = 2,83$). Η διαφορά

επίδοσης μεταξύ των δύο ομάδων στον μετα-έλεγχο βρέθηκε στατιστικά σημαντική, t(122) = -3,13, p = 0,002, με effect size Cohen's d=0,31.

Επίδοση των μαθητών/τριών χαμηλής επίδοσης

Η έρευνα εστίασε ιδιαίτερα στη διερεύνηση της ενδεχόμενης βελτίωσης της επίδοσης των μαθητών/τριών που παρουσίασαν χαμηλό σκορ στον προέλεγχο. Από τις 26 ερωτήσεις, οι 8 ερωτήσεις αφορούσαν ευκολότερα επίπεδα, δηλαδή επίπεδα 1 και 2 όπως ορίζονται από το PISA (OECD, 2014b). Συνεπώς, ως μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης ορίσθηκαν οι μαθητές/τριες που είχαν σκορ μέχρι 8 (με άριστα τους 26 βαθμούς) στον προέλεγχο. Οι μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης ήταν 18 από τους 50 στην ομάδα ελέγχου (ποσοστό 36%) ενώ οι μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης ήταν οι 29 από τους 74 στην ομάδα παρέμβασης (ποσοστό 39%).

		Προ-έλεγχος		Μετα-έλεγχος	
	Αριθμός Μαθητών /τριών	Μέση βαθμολογία	Τυπική απόκλιση	Μέση βαθμολογία	Τυπική απόκλιση
Ομάδα παρέμβασης (Π)	29	6,27	1,62	8,72	3,38
Ομάδα ελέγχου (Ε)	18	6,33	1,50	6,67	1,75

Πίνακας 1: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις βαθμολογίας των μαθητών/τριών χαμηλής επίδοσης κατά τον προ-έλεγχο και μετα-έλεγχο και για τις δύο ομάδες.

Από τον Πίνακα 1 προκύπτει ότι στον προ-έλεγχο οι δύο ομάδες των μαθητών/τριών χαμηλής επίδοσης ήταν ισορροπημένες και οι βαθμολογίες τους δε διέφεραν, Mann–Whitney U = 256,500, n_1=29, n_2 =18, p = 0,92. Η σημαντικότητα διερευνήθηκε με το μη-παραμετρικό κριτήριο Mann-Witney U επειδή δεν ικανοποιήθηκε η προϋπόθεση της κανονικότητας σε όλες τις υποομάδες. Στον μετα-έλεγχο, η ομάδα παρέμβασης βελτίωσε τις επιδόσεις της. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικά, Mann–Whitney U = 152,000, n_1=29, n_2 =18, p = 0,016, με effect size Cohen's d =1,51.

Κατηγορία προβλήματος	Ομάδα	Προ-έλεγχος		Μετα-έλεγχος		Μέγιστο Σκορ	Μέγεθος Επίδρασης Cohen's d
		Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση		
	Π	1,38	0,98	2,10	1,23	8	0,81

Χώρος και Σχήμα	Ε	1,50	0,92	1,44	0,98		
Ποσότητα	Π	1,24	0,83	2,17	1,54	7	0,94
	Ε	1,44	0,92	1,56	1,20		
Αλλαγή και Σχέσεις	Π	0,93	0,65	1,48	0,95	7	0,07
	Ε	0,61	0,70	1,11	0,96		
Αβεβαιότητα και Δεδομένα	Π	2,72	0,84	2,97	1,15	4	0,80
	Ε	2,94	0,87	2,56	1,34		

Πίνακας 2: Μέση τιμή και τυπική απόκλιση ανά κατηγορία προβλημάτων για μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης (ομάδα παρέμβασης και ελέγχου κατά τον προ-έλεγχο και μετα-έλεγχο)

Στον Πίνακα 2 αναφέρονται οι επιδόσεις των ομάδων στις τέσσερις βασικές κατηγορίες προβλημάτων του PISA που περιέχονταν στον προ-έλεγχο και μετα-έλεγχο. Προέκυψε ότι οι μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης της πειραματικής ομάδας βελτίωσαν το βαθμολογικό τους σκορ σε όλες τις κατηγορίες προβλημάτων. Ωστόσο, μεγάλα θετικά μεγέθη επίδρασης (effect sizes) παρουσιάζονται μόνο στις τρεις από τις τέσσερις κατηγορίες. Ελάχιστη βελτίωση παρατηρήθηκε στην κατηγορία «Αλλαγή και Σχέσεις».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τα αποτελέσματα προκύπτουν ενθαρρυντικές ενδείξεις ότι μια παρέμβαση PME μπορεί να βελτιώσει τις δεξιότητες επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Αυτό είναι σε συμφωνία με ευρήματα προηγούμενων ερευνών που εντόπισαν θετικό αντίκτυπο της PME στην επίδοση και στις δεξιότητες των μαθητών/τριών στα Μαθηματικά (Laurens κ.ά., 2017; Papadakis κ.ά., 2017; Uyen, κ.ά., 2021; Zaranis & Exarchakos, 2018). Οι μαθητές/τριες χαμηλών επιδόσεων βελτίωσαν τα αποτελέσματά τους και μάλιστα αναλογικά περισσότερο από τους υπόλοιπους μαθητές/τριες στην πειραματική ομάδα. Αυτό σημαίνει ότι ενδεχομένως μία τέτοια παρέμβαση μπορεί μακροπρόθεσμα να μειώσει πιθανό χάσμα επίδοσης στα Μαθηματικά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές/τριες που είχαν χαμηλή επίδοση στον προ-έλεγχο βελτιώθηκαν στον μετα-έλεγχο κυρίως σε ερωτήματα συγκεκριμένου τύπου. Αυτά περιλάμβαναν την ερμηνεία μιας εικόνας, την εστίαση της προσοχής σε κάποιο δεδομένο του προβλήματος, τα ποσοστά και τη μέθοδο των τριών. Εάν και οι μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης

βελτιώθηκαν και στις τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων του PISA, οι μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης παρουσίασαν τη μικρότερη βελτίωση στην κατηγορία προβλημάτων «Αλλαγή και Σχέσεις». Αυτό συμφωνεί με δεδομένα από άλλες χώρες, που τοποθετούν τη συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων τελευταία στην πορεία κατάκτησης γνώσης και δεξιοτήτων. Συγκεκριμένα, στην Αυστραλία, στον Καναδά, στο Ηνωμένο Βασίλειο και στη Ρωσία η συνηθέστερη πορεία κατάκτησης γνώσης και δεξιοτήτων είναι η ακόλουθη: οι μαθητές πρώτα βελτιώνονται και κατακτούν δεξιότητες επίλυσης της κατηγορίας «Αβεβαιότητα και Δεδομένα», στη συνέχεια της κατηγορίας «Ποσότητα», μετά «Χώρος και Σχήμα» και τέλος παρουσιάζεται η κατάκτηση γνώσης και βελτίωση στην κατηγορία «Αλλαγή και Σχέσεις» (Wu κ.ά.., 2020). Επομένως, μία πιθανή ερμηνεία για το μικρό μέγεθος επίδρασης που βρέθηκε στη συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων είναι ότι οι μαθητές/τριες χαμηλής επίδοσης στην παρούσα έρευνα βρίσκονται σε παρόμοια πορεία κατάκτησης γνώσης με την προαναφερθείσα. Αυτό πιθανώς εξηγεί γιατί στην κατηγορία προβλημάτων που αναφέρονται στην «Αλλαγή και Σχέσεις», η βελτίωση δεν είναι ακόμη εμφανής.

Συνοψίζοντας, η διδακτική παρέμβαση βασισμένη στις αρχές PME με επίλυση προβλήματος σε ομάδες φαίνεται να έχει θετικό αντίκτυπο στις δεξιότητες μαθητών/τριών για την επίλυση προβλημάτων ρεαλιστικών μαθηματικών. Επιπλέον, αυτός ο αντίκτυπος φαίνεται να είναι ακόμη μεγαλύτερος για τους/τις μαθητές/τριες που εμφάνιζαν αρχικά χαμηλή βαθμολογική επίδοση. Μάλιστα, αναλογικά αυτοί/ες οι μαθητές/τριες βελτιώνουν την επίδοσή τους ακόμη περισσότερο μετά τη συγκεκριμένη παρέμβαση σε σχέση με το γενικό σύνολο των μαθητών/τριών. Επομένως, προτείνεται στους/στις εκπαιδευτικούς να εφαρμόζουν διδακτικές παρεμβάσεις που βασίζονται σε ομαδοσυνεργατική επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων με αρχές PME και να εμπλέκουν το σύνολο των μαθητών/τριών στη διαδικασία επίλυσης. Τέλος, με βάση το εργαλείο μέτρησης, προερχόμενο από διαγωνισμούς PISA, προέκυψε ότι ο θετικός αντίκτυπος μετουσιώνεται και σε βαθμολογικό επίτευγμα. Αυτό υπονοεί ότι οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να διδάξουν τους/τις μαθητές/τριες με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να έχουν καλύτερη επίδοση σε αντίστοιχο διεθνή διαγωνισμό. Τέλος, προτείνεται μελλοντικές έρευνες να εστιάσουν και σε ποιοτικά χαρακτηριστικά ώστε να υπάρξει εμβάθυνση και ανάδειξη επιπλέον πτυχών του φαινομένου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Australian Council for Educational Research, cApStAn Linguistic Quality Control, Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung, Educational Testing Service, Institutt for Lærerutdanning og Skoleutvikling, Leibniz - Institute for Science and Mathematics Education, National Institute for Educational Policy Research, The Tao Initiative: CRP - Henri Tudor and Université de Luxembourg - EMACS, Unité d' analyse des systèmes et des pratiques d'enseignement, & Westat. (2013). *PISA 2012 Released Mathematics Items*. OECD Publishing.

Bostic, J. D., Pape, S. J., & Jacobbe, T. (2016). Encouraging sixth-grade students' problem-solving performance by teaching through problem solving. *Investigations in mathematics learning*, *8*(3), 30-58. https://doi.org/10.1080/24727466.2016.11790353

Bray, A., & Tangney, B. (2016). Enhancing student engagement through the affordances of mobile technology: a 21st century learning perspective on Realistic Mathematics Education. *Mathematics Education Research Journal*, *28*, 173-197. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0158-7

Cai, J. (2003). Investigating parental roles in students' learning of mathematics from a cross-national perspective. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 87-106. https://doi.org/10.1007/BF03217372

Ellison, J. G. (2009). Increasing problem solving skills in fifth grade advanced mathematics students. *Journal of curriculum and Instruction*, *3*(1), 15-31. https://doi.org/10.3776/joci.2009.v3n1p15

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2019). *Θέματα Μαθηματικών*. Ανακτήθηκε 24 Αγούστου 2023 από http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/examples/themata-mathimatikon

Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R., & Leasa, M. (2017). How does realistic mathematics education (RME) improve students' mathematics cognitive achievement?. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(2), 569-578.

Lesh, R. (2007). Problem solving and modelling. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 763-804.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical thinking and learning*, *5*(2-3), 157-189. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998

Lester, F. K. Jr. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The mathematics enthusiast*, *10*(1), 245-278.

Μαμωνά-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης. *Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης*.

OECD. (2014a), *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V)*, PISA, OECD Publishing

OECD, (2014b) *PISA 2012 Technical Report.* OECD Publishing

OECD. (2023). *Education GPS: Greece Student Performance (PISA 2018).* Retrieved March 10, 2023, from https://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?primaryCountry=GRC&treshold=10&topic=PI

Papadakis, S., Kalogiannakis, M., & Zaranis, N. (2017). Improving mathematics teaching in kindergarten with realistic mathematical education. *Early Childhood Education Journal*, *45*, 369-378. https://doi.org/10.1007/s10643-015-0768-4

Selmer, S., & Kale, U. (2013). Teaching mathematics through problem solving. *Innovación educativa (México, DF)*, *13*(62), 45-59.

Uyen, B. P., Tong, D. H., Loc, N. P., & Thanh, L. N. P. (2021). The Effectiveness of Applying Realistic Mathematics Education Approach in Teaching Statistics in Grade 7 to Students' Mathematical Skills. *Journal of Education and E-Learning Research*, *8*(2), 185-197. https://doi.org/10.20448/journal.509.2021.82.185.197

Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education* [Doctoral dissertation, Utrecht University]. Utrecht University Repository. https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/1705

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713-717). Springer

Ventistas, G., Ventista, O. M., & Tsani, P. (2024). The impact of realistic mathematics education on secondary school students' problem-solving skills: a comparative evaluation study. *Research in Mathematics Education*, 1-25. https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2306633

Wu, X., Wu, R., Chang, H. H., Kong, Q., & Zhang, Y. (2020). International comparative study on PISA mathematics achievement test based on cognitive diagnostic models. *Frontiers in psychology*, *11*, 2230. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.02230

Zaranis, N., & Exarchakos, G. M. (2018). The Use of ICT and the realistic mathematics education for understanding simple and advanced stereometry shapes among university students. *Research on e-Learning and ICT in Education: Technological, Pedagogical and Instructional Perspectives*, 135-152.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΠΟΥ ΣΥΜΒΑΛΟΥΝ ΣΤΗ ΓΝΩΣΗ, ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ TIMSS 2019

Παναγή-Λουκά Νεκταρία, Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Χρίστου Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Κύπρου

panagi.nektaria@ucy.ac.cy dpitta@ucy.ac.cy edchrist@ucy.ac.cy

Η παρούσα μελέτη επιδιώκει τη διερεύνηση των παραγόντων που συμβάλλουν στην επίδοση των Κύπριων μαθητών/τριών Δ' Δημοτικού, με αναφορά στη γνώση, την εφαρμογή και τον συλλογισμό στα μαθηματικά, μέσα από τα αποτελέσματα της TIMSS 2019. Η πολυεπίπεδη πολυμεταβλητή ανάλυση δείχνει ότι σε επίπεδο μαθητή/ήτριας οι σημαντικότεροι προβλεπτικοί παράγοντες της επίδοσης των μαθητών/τριών είναι το φύλο, το κοινωνικοοικονομικό επίπεδο, οι προσδοκίες των γονέων, οι αριθμητικές δραστηριότητες, η ατομική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. η αυτοπεποίθηση και οι στάσεις των μαθητών/τριών Σε επίπεδο σχολείου τα χρόνια υπηρεσίας, οι δραστηριότητες πρόκλησης ενδιαφέροντος, η συστηματική αξιολόγηση και η έμφαση του σχολείου για ακαδημαϊκή επιτυχία προβλέπουν την επίδοση των μαθητών/τριών. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι παράγοντες, φοίτηση στην προδημοτική, περιορισμοί στην διδασκαλίας και αποκλίνουσα συμπεριφορά των μαθητών/τριών έχουν διαφορετική επίδραση στους τρεις γνωστικούς τομείς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Διεθνής Έρευνα Τάσεων στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (Trends in International Mathematics and Science Study- TIMSS) αξιολογεί την επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά ενώ ταυτόχρονα συλλέγει πληροφορίες για παράγοντες που αφορούν τον/την μαθητή/ήτρια και το οικογενειακό του περιβάλλον, την τάξη και το σχολείο (Van Damme et al., 2010). Παρά το γεγονός ότι πολλές μελέτες έχουν διεξαχθεί στο πλαίσιο της TIMSS, δεν έγινε πολυεπίπεδη διερεύνηση των παραγόντων που επηρεάζουν τους τρείς γνωστικούς τομείς των μαθηματικών. Ο στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των παραγόντων που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών/τριών στους γνωστικούς τομείς των μαθηματικών, γνώση, εφαρμογή και συλλογισμό, σε επίπεδο μαθητή/ήτριας και σχολείου.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας οργανώνεται σε τρία μέρη. Αρχικά, γίνεται αναφορά στα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών/τριών στα μαθηματικά. Στο δεύτερο μέρος, η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας

επικεντρώνεται στους παράγοντες που αφορούν τον/την μαθητή/ήτρια και στο τρίτο μέρος γίνεται αναφορά των παραγόντων που συμβάλλουν στην επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά σε επίπεδο σχολείου.

Μαθησιακά αποτελέσματα

Το πλαίσιο αξιολόγησης της TIMSS δίνει έμφαση στη συνολική επίδοση στα μαθηματικά καθώς και στις επιμέρους περιοχές των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, τα μαθηματικά έργα στα οποία αξιολογούνται οι μαθητές/ήτριες στην TIMSS ομαδοποιούνται α) ανάλογα με τη θεματική περιοχή των μαθηματικών: αριθμοί, γεωμετρία και μέτρηση, αναπαράσταση δεδομένων και β) ανάλογα με τον γνωστικό τομέα: γνώση, εφαρμογή, και συλλογισμό (Mullis & Martin, 2017). Η γνώση αφορά την ικανότητα των μαθητών/τριών να ανακαλούν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Η εφαρμογή αφορά την ικανότητα των μαθητών/τριών να χρησιμοποιούν τις γνώσεις, για να επιλύουν προβλήματα και να απαντούν σχετικά ερωτήματα. Ο συλλογισμός αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών/τριών να χρησιμοποιούν γνώσεις σε άγνωστες και περίπλοκες καταστάσεις και στην ικανότητα να επιλύουν προβλήματα πολλαπλών βημάτων (Mullis & Martin, 2017).

Παράγοντες που αφορούν τον/την μαθητή/ήτρια

Μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση φαίνεται ότι οι σημαντικότεροι παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση στα μαθηματικά σε επίπεδο μαθητή/ήτριας είναι το φύλο, το κοινωνικοοικονομικό επίπεδο (SES), οι προσδοκίες των γονέων, οι αριθμητικές δεξιότητες πριν από τη φοίτηση, η φοίτηση στην προδημοτική, η αυτοπεποίθηση και οι στάσεις για τα μαθηματικά, η ευκαιρία για ατομική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ο χρόνος απουσίας από το σχολείο και υποστηρικτική εκπαίδευση εκτός σχολείου.

Τα ευρήματα των Glassow et al. (2023) δείχνουν ότι το φύλο και ο αριθμός των βιβλίων ως μεταβλητή του SES μπορούν να προβλέψουν την επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά. Η έμφαση που δίνεται σε αριθμητικές δεξιότητες πριν από τη φοίτηση στο σχολείο έχει σημαντική επίδραση στην αριθμητική ικανότητα των μαθητών/τριών στα αρχικά χρόνια της φοίτησής τους (Anders et al., 2012). Οι προσδοκίες των γονέων, στάσεις των μαθητών/τριών για τα μαθηματικά και η αυτοπεποίθησή τους φαίνεται να επηρεάζει την επίδοσή τους στα μαθηματικά (Lee & Stankov, 2018). Επίσης, ο χρόνος που ο μαθητής απουσιάζει από το σχολείο (De Jong et al., 2004), ο χρόνος που αφιερώνει για εξωσχολική υποστηρικτική εκπαίδευση και οι ευκαιρίες που παρέχονται για μάθηση μαθηματικών

(Creemers & Kyriakides, 2008), επηρεάζουν τα μαθησιακά αποτελέσματα. Μέσα από τα αποτελέσματα της TIMSS 2019 φαίνεται ότι η επίδοση των μαθητών/τριών αυξάνεται, όταν η συχνότητα με την οποία απουσιάζουν οι μαθητές/ήτριες από το σχολείο μειώνεται (Mullis et al., 2020).

Παράγοντες που αφορούν το σχολείο

Οι σημαντικότεροι παράγοντες όπως φαίνεται από τη βιβλιογραφία σε επίπεδο σχολείου είναι τα χρόνια υπηρεσίας των εκπαιδευτικών, η ενσωμάτωση δραστηριοτήτων πρόκλησης ενδιαφέροντος στη διδασκαλία των μαθηματικών, οι περιορισμοί της διδασκαλίας και η αποκλίνουσα συμπεριφορά, η συστηματική αξιολόγηση και η έμφαση του σχολείου στην ακαδημαϊκή επιτυχία.

Τα αποτελέσματα ερευνών για το κατά πόσον επηρεάζουν τα χρόνια υπηρεσίας των εκπαιδευτικών στην επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά δεν φαίνεται να συμφωνούν. Ειδικότερα, τα ευρήματα της TIMSS 2019 έδειξαν ότι οι μαθητές/ήτριες με εκπαιδευτικούς με περισσότερα από 20 χρόνια υπηρεσίας έχουν τις υψηλότερες επιδόσεις (Mullis et al., 2020) ενώ οι Gustafsson and Nilsen (2016) έδειξαν ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική επίδραση.

Παράγοντες που σχετίζονται με τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και ειδικότερα η αξιολόγηση, οι περιορισμοί που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί αναφορικά με τους/τις μαθητές/ήτριες που δεν είναι έτοιμοι για διδασκαλία (όπως για παράδειγμα μαθητές/ήτριες με νοητικές ή άλλες δυσκολίες, χωρίς προαπαιτούμενες γνώσεις, που απουσιάζουν από τη διδασκαλία, κ.ά), η αποκλίνουσα συμπεριφορά των μαθητών/τριών, και οι διδακτικές πρακτικές φαίνεται να έχουν σημαντική επίδραση στην επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά (Creemers & Kyriakides, 2008). Μέσα από τα αποτελέσματα της TIMSS 2019 φαίνεται ότι η πολιτική για συστηματική αξιολόγηση στα μαθηματικά επηρεάζει την επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά (Panagi-Louka et al., 2022). Επιπρόσθετα, οι διδακτικές πρακτικές, όπως η ενσωμάτωση δραστηριοτήτων πρόκλησης ενδιαφέροντος στη διδασκαλία παρουσιάζεται να συμβάλλει στη συνολική επίδοσή στα μαθηματικά (Panagi-Louka et al., 2022). Παράγοντες που αφορούν το κλίμα του σχολείου και συγκεκριμένα η έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία φαίνεται να έχουν θετική επίδρασή στη συνολική επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά (Gustafsson et al., 2018).

Σκοπός και ερευνητικό ερώτημα

Η παρούσα μελέτη έχει ως στόχο τη διερεύνηση της επίδρασης των παραγόντων στην μαθηματική γνώση, την εφαρμογή και τον συλλογισμό

των μαθητών/τριών, μέσα από μία πολυεπίπεδη ανάλυση. Το ερευνητικό ερώτημα που τίθεται είναι: «Ποιοι παράγοντες σε επίπεδο μαθητή/ήτριας και σχολείου σχετίζονται με τις επιδόσεις στη γνώση, στην εφαρμογή και στο συλλογισμό στα μαθηματικά των μαθητών/τριών Δ' τάξης, στην Κύπρο, όπως προκύπτουν από τα δεδομένα της TIMSS 2019;»

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 3034 μαθητές/ήτριες Δ' Δημοτικού, που φοιτούσαν σε 141 σχολεία της Κύπρου και συμμετείχαν στην έρευνα TIMSS. Τα εργαλεία αποτελούν το δοκίμιο αξιολόγησης μαθηματικών και τα ερωτηματολόγια μαθητή, εκπαιδευτικού, διευθυντή και γονέα. Τα δεδομένα της TIMSS έχουν ιεραρχική δομή, δηλαδή ομαδοποιούνται ανάλογα με τον/την μαθητή/ήτρια, την τάξη και το σχολείο (Raudenbush et al., 2002). Για αυτό, εφαρμόστηκε πολυεπίπεδη ανάλυση, με το λογισμικό MLwiN (Rashbash et al., 2012). Στο πρώτο επίπεδο της ανάλυσης διερευνήθηκαν οι παράγοντες που αφορούν τον/την μαθητή/ήτρια και στο δεύτερο επίπεδο διερευνήθηκαν τόσο οι παράγοντες που σχετίζονται με τον/την μαθητή/ήτρια όσο και οι παράγοντες της τάξης και του σχολείου.

Για την ανάλυση των δεδομένων οι εξαρτημένες μεταβλητές ήταν η γνώση, η εφαρμογή και ο συλλογισμός των μαθητών/τριών στα μαθηματικά (Mullis & Martin, 2017). Ως ανεξάρτητες μεταβλητές σε επίπεδο μαθητή/ήτριας χρησιμοποιήθηκαν το φύλο, ο αριθμός των βιβλίων στο σπίτι, η φοίτηση στην προδημοτική, οι προσδοκίες των γονέων, και η ευκαιρία για ενασχόληση με αριθμητικές δραστηριότητες πριν από τη φοίτησή στο Δημοτικό, η αυτοπεποίθηση και οι στάσεις για τα μαθηματικά, η ατομική ενασχόληση στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, η συχνότητα με την οποία ο μαθητής απουσιάζει από το σχολείο και η χρονική περίοδος που ο μαθητής λαμβάνει υποστηρικτική εκπαίδευση εκτός σχολείου. Σε επίπεδο σχολείου, οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τα χρόνια υπηρεσίας των εκπαιδευτικών του σχολείου, οι διδακτικές πρακτικές κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, η διαχείριση της τάξης, η αξιολόγηση, και το σχολικό μαθησιακό περιβάλλον.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι δείκτες συσχέτισης Pearson μεταξύ των παραγόντων ήταν μικρότεροι από .30, εκτός από την αυτοπεποίθηση και τις στάσεις των μαθητών/τριών στα μαθηματικά, στις οποίες υπάρχει υψηλή συσχέτιση (r=.59) και εισήχθησαν ξεχωριστά κατά την πολυεπίπεδη ανάλυση. Στο αρχικό

μοντέλο περιλαμβάνονται μόνο οι μέσοι όροι της επίδοσης των μαθητών/τριών στη γνώση, την εφαρμογή και τον συλλογισμό (526.40 για τη γνώση, 532.94 για την εφαρμογή, και 522.85 για τον συλλογισμό). Στο μοντέλο 1 περιλαμβάνονται οι παράγοντες που αφορούν τον/την μαθητή/ήτρια. Η ανάλυση έδειξε παράγοντες του/της μαθητή/ήτριας προβλέπουν μέρος της επίδοσης των τριών γνωστικών τομέων (R^2= 34.61% για τη γνώση, R^2= 36.26% για την εφαρμογή, και R^2=35.73% για το συλλογισμό). Έτσι, οι μέσοι όροι των εξαρτημένων μεταβλητών μειώθηκαν από το αρχικό μοντέλο (298.18 για τη γνώση, 319.74 για την εφαρμογή, και 321.01 για τον συλλογισμό). Στο μοντέλο 2 εξετάστηκαν οι παράγοντες του μοντέλου 1 και οι παράγοντες που αφορούν την τάξη και το σχολείο. Η ανάλυση σε επίπεδο σχολείου έδειξε ότι παράγοντες που αφορούν την τάξη και το σχολείο προβλέπουν μέρος της επίδοσης στους τρεις γνωστικούς τομείς (R^2= 44.21% για τη γνώση, R^2= 46.26% για την εφαρμογή, και R^2=51.68% για το συλλογισμό). Οι μέσοι όροι μειώνονται από το μοντέλο 1 (193.64 για τη γνώση, 207.61 για την εφαρμογή, και 226.24 για τον συλλογισμό). Ο Πίνακας 1 (βλ. Παράρτημα) δείχνει την επίδραση των παραγόντων του μοντέλου 1 (M1) και του μοντέλου 2 (M2), σε επίπεδο σημαντικότητας α=.05.

Γνώση στα μαθηματικά

Όσον αφορά τη μαθηματική γνώση σε επίπεδο μαθητή/ήτριας, ο αριθμός βιβλίων που διατίθενται στο σπίτι έχουν στατιστικά σημαντική συνεισφορά ($p<.05$). Επιπρόσθετα, όσον αφορά το φύλο, φαίνεται ότι τα αγόρια έχουν υψηλότερη επίδοση από τα κορίτσια. Η επίδραση του φύλου στο M1 (-24.11 $p<.05$) παραμένει στατιστικά σημαντική και στο M2 (-18.37, $p<.05$). Οι προσδοκίες των γονέων για το επίπεδο μόρφωσης που θα επιτύχουν τα παιδιά τους (Γυμνάσιο ή ψηλότερο) ($p<.05$). Η φοίτηση των μαθητών/τριών στην προδημοτική (14.15 στο M1 και 13.66 στο M2, $p<.05$) και η ευκαιρία που δίνεται στους/στις μαθητές/ήτριες να ασχοληθούν με αριθμητικές δραστηριότητες (8.66 στο M1 και 8.00 στο M2, $p<.05$) έχουν θετική συνεισφορά στην επίδοση των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, η αυτοπεποίθηση (11.76 στο M1 και 11.83 στο M2, $p<.05$) και οι θετικές στάσεις (5.61 στο M1 και 5.29 στο M2, $p<.05$) των μαθητών/τριών στα μαθηματικά συμβάλλουν θετικά στη επίδοσή τους στη γνώση. Παρόμοια, θετική συνεισφορά έχει και η συχνότητα που οι μαθητές/ήτριες επιλύουν μαθηματικά προβλήματα ατομικά κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών (11.92 στο M1 και 6.92 στο M2, $p<.05$). Αρνητική επίδραση στην επίδοση στη μαθηματική γνώση έχει η συχνότητα απουσίας των μαθητών/τριών από το σχολείο (-10.31 στο M1

και -8.63 στο M2, p<0.5) ενώ όσοι/ες έχουν χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά παρακολουθούν υποστηρικτική εκπαίδευση εκτός σχολείου (-35.61 στο M1 και -29.95 στο M2 p<.05).

Σε επίπεδο σχολείου (M2), φαίνεται ότι τα χρόνια υπηρεσίας των εκπαιδευτικών έχουν θετική συνεισφορά στην μαθηματική γνώση (0.68, p<.05). Επιπρόσθετα, η συμπερίληψη δραστηριοτήτων πρόκλησης ενδιαφέροντος στη διδασκαλία των μαθηματικών (6.56, p<.05) και η πολιτική για συστηματική αξιολόγηση (8.51, p<.05) έχουν θετική επίδραση στην επίδοση των μαθητών/τριών στη μαθηματική γνώση. Οι περιορισμοί στη διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται να έχει αρνητική επίδραση στην μαθηματική γνώση (-0.71, p<.05). Από την άλλη, η αποκλίνουσα συμπεριφορά των μαθητών δεν έχει στατιστικά σημαντική επίδραση. Τέλος, η έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία επηρεάζει θετικά την επίδοση των μαθητών/τριών στη μαθηματική γνώση (2.82, p<.05).

Εφαρμογή στα μαθηματικά

Το φύλο (-13.83 στο M1 και -7.86 στο M2, p<.05) και οι προσδοκίες των γονέων των μαθητών/τριών (p<.05) επηρεάζουν την επίδοση στα μαθηματικά έργα εφαρμογής. Επίσης, οι αριθμητικές δραστηριότητες πριν από το Δημοτικό (8.00 στο M1 και 5.94 στο M2, p<.05), η φοίτηση στην προδημοτική (14.15 στο M1 και 13.66 στο M2, p<.05), η ευκαιρία για ατομική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (11.18 στο M1 και 6.29 στο M2, p<.05), η αυτοπεποίθηση (10.82 στο M1 και 11.00 στο M2, p<.05), και οι στάσεις (5.01 στο M1 και 4.80 στο M2, p<.05) των μαθητών/τριών για τα μαθηματικά έχουν θετική επίδραση στην επίδοση στα έργα εφαρμογής. Ο χρόνος απουσίας από το σχολείο (-10.31 στο M1 και -8.63 στο M2, p<.05) έχει αρνητική επίδραση στην επίδοσή στα έργα εφαρμογής στα μαθηματικά, ενώ οι μαθητές/ήτριες με χαμηλές επιδόσεις παρακολουθούν υποστηρικτική εκπαίδευση εκτός σχολείου (-40.44 στο M1 και -35.35 στο M2, p<.05).

Σε επίπεδο σχολείου (M2), τα χρόνια υπηρεσίας των εκπαιδευτικών (0.68, p<.05), η ένταξη δραστηριοτήτων πρόκλησης ενδιαφέροντος (6.43, p<.05), η πολιτική για συστηματική αξιολόγηση (8.51, p<.05) και η έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία (2.82, p<.05) συμβάλλουν θετικά στην επίδοση των μαθητών/τριών. Οι περιορισμοί στη διδασκαλία και η αποκλίνουσα συμπεριφορά των μαθητών/τριών δεν έχουν στατιστικά σημαντική επίδραση στην επίδοση στα έργα εφαρμογής στα μαθηματικά.

Συλλογισμός στα μαθηματικά

Ο αριθμός των βιβλίων στο σπίτι και οι προσδοκίες των γονέων για το επίπεδο μόρφωσης των μαθητών/τριών έχουν σημαντική επίδραση στην επίδοση στο συλλογισμό ($p<.05$). Οι αρχικές δραστηριότητες πριν από το Δημοτικό έχουν θετική επίδραση (7.21 στο M1 και 5.39 στο M2, $p<.05$), ενώ η φοίτηση στην προδημοτική δεν είναι στατιστικά σημαντική στο συλλογισμό. Η ευκαιρία στην ατομική επίλυση προβλημάτων (12.06 στο M1 και 7.19 στο M2, $p<.05$), η αυτοπεποίθηση (10.22 στο M1 και 10.37 στο M2, $p<.05$), και οι στάσεις (4.78 στο M1 και 4.54 στο M2, $p<.05$) των μαθητών/τριών έχουν θετική επίδραση στην επίδοσή τους στο συλλογισμό. Αρνητική επίδραση έχει ο χρόνος απουσίας από το σχολείο (-10.31 στο M1 και -8.63 στο M2, $p<.05$) ενώ οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στο συλλογισμό έχουν υποστηρικτική εκπαίδευση εκτός σχολείου (-45.14 στο M1 και -39.75 στο M2, $p<.05$).

Σε επίπεδο σχολείου (M2), τα χρόνια υπηρεσίας των εκπαιδευτικών (0.68, $p<.05$), οι δραστηριότητες πρόκλησης ενδιαφέροντος (6.31, $p<.05$), η πολιτική για συστηματική αξιολόγηση (8.51, $p<.05$)), η έμφαση που δίνεται για ακαδημαϊκή επιτυχία (2.82, $p<.05$) έχουν θετική επίδραση στην επίδοση των μαθητών/τριών στον συλλογισμό. Τέλος, αρνητική επίδραση έχει η αποκλίνουσα συμπεριφορά των μαθητών/τριών (-1.48, $p<.05$) ενώ οι περιορισμοί της διδασκαλίας δεν έχουν στατιστικά σημαντική επίδραση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη εξέτασε μέσω πολυεπίπεδης πολυμεταβλητής ανάλυσης τους παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών/τριών της Κύπρου στους τρείς γνωστικούς τομείς των μαθηματικών, γνώση, εφαρμογή, και συλλογισμό. Τα αποτελέσματα τονίζουν την ανάγκη για τη διερεύνηση των επιδράσεων των παραγόντων όχι μόνο στη συνολική επίδοση των μαθητών/τριών στα μαθηματικά, αλλά και στους επιμέρους γνωστικούς τομείς των μαθηματικών. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα υπογραμμίζουν τη σημαντικότητα της διερεύνησης των παραγόντων που σχετίζονται με τους/τις μαθητές/ήτριες ταυτόχρονα με τους παράγοντες στο πλαίσιο του σχολείου.

Τα ευρήματα δείχνουν ότι οι παράγοντες που αφορούν τους/τις μαθητές/ήτριες επεξηγούν μεγαλύτερο μέρος της επίδοσης και στους τρεις γνωστικούς τομείς από τους παράγοντες που αφορούν την τάξη και το σχολείο. Ωστόσο, οι επιδράσεις του SES, του φύλου (Glassow et al., 2023), των αριθμητικών δραστηριοτήτων πριν από το Δημοτικό και της φοίτησης στην προδημοτική (Anders et al., 2012) μειώνονται και στους τρεις τομείς των μαθηματικών όταν λαμβάνονται υπόψη οι παράγοντες της τάξης και

του σχολείου. Συγκεκριμένα, τα ευρήματα δείχνουν ότι το χάσμα μεταξύ της επίδοσης των μαθητών/τριών στους τρείς γνωστικούς τομείς διαφορετικού επιπέδου SES μειώνεται με την συνεισφορά των παραγόντων της τάξης και του σχολείου. Η συνεισφορά των παραγόντων της τάξης και του σχολείου μειώνει επίσης την διαφορά στην επίδοση στη γνώση, την εφαρμογή και τον συλλογισμό μεταξύ αγοριών και κοριτσιών. Οι αρχικές δραστηριότητες πριν το Δημοτικό, η φοίτηση στην προδημοτική, και ατομική επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Lee & Stankov, 2018) επηρεάζουν σε λιγότερο βαθμό όταν λαμβάνονται υπόψη οι παράγοντες σε επίπεδο σχολείου. Από τα ευρήματα φαίνεται ακόμα ότι η αυτοπεποίθηση και οι θετικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά παραμένουν σταθεροί προβλεπτικοί παράγοντες όταν λάβουμε υπόψη το πλαίσιο της τάξης και του σχολείου.

Τα ευρήματα δείχνουν ότι η φοίτηση στη προδημοτική προβλέπει την επίδοση των μαθητών/τριών μόνο στη γνώση και την εφαρμογή. Οι περιορισμοί στη διδασκαλία επηρεάζουν μόνο τη γνώση, εύρημα που ίσως οφείλεται στο οι μαθητές/ήτριες των οποίων οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν πιο συχνά περιορισμούς κατά τη διδασκαλία, δυσκολεύονται να εφαρμόσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, με αποτέλεσμα να έχουν χαμηλές επιδόσεις στη γνώση. Η αποκλίνουσα συμπεριφορά των μαθητών/τριών επιδρά αρνητικά μόνο το συλλογισμό, εύρημα που ίσως οφείλεται στο ότι οι μαθητές/ήτριες επηρεάζονται από την ύπαρξη αποκλινουσών συμπεριφορών στη διδασκαλία όταν πρόκειται να σκεφτούν και να επιλύσουν άγνωστα μαθηματικά προβλήματα και να ερμηνεύσουν τη σκέψη τους. Η σημαντικότητα της έρευνας εδράζεται στη διερεύνηση των επιμέρους τομέων των μαθηματικών συνολικά στο πλαίσιο του σχολείου.
Μελλοντικές μελέτες είναι δυνατόν να δώσουν περισσότερο φως στη διερεύνηση των επιδράσεων των παραγόντων στους γνωστικούς τομείς των μαθηματικών σε χώρες με υψηλές, μέτριες και χαμηλές επιδόσεις.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Anders, Y., Rossbach, H. G., Weinert, S., Ebert, S., Kuger, S., Lehrl, S., & Von Maurice, J. (2012). Home and preschool learning environments and their relations to the development of early numeracy skills. *Early Childhood Research Quarterly*, *27*(2), 231–244.

Gustafsson, J. E., & Nilsen, T. (2016). *The impact of school climate and teacher quality on mathematics achievement: A difference-in-differences approach*. Teacher quality, instructional quality and student outcomes, 2, 81–95.

Glassow, L. N., Yang Hansen, K., & Gustafsson, J.-E. (2023). Does socioeconomic sorting of teacher qualifications exacerbate mathematics achievement inequity? Panel data estimates from 20 years of TIMSS. *Studies in Educational Evaluation*, *77*, 101–255. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2023.101255

Gustafsson, J.-E., Nilsen, T., & Hansen, K. Y. (2018). School characteristics moderating the relation between student socio-economic status and mathematics achievement in grade 8. Evidence from 50 countries in TIMSS 2011. *Studies in Educational Evaluation, 57*, 16–30. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2016.09.004

Lee, J., & Stankov, L. (2018). Non-cognitive predictors of academic achievement: Evidence from TIMSS and PISA. *Learning and Individual Differences, 65*, 50–64. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.05.009

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science.* TIMSS & PIRLS International Study Center.

Panagi-Louka, N., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2022). *Factors that influence students' achievement in mathematics according to TIMSS 2019 data.* Proceedings of the 9th Panhellenic Conference of the Researchers in Mathematics Education (ENEDIM) (pp.647–656). Volos, Greece.

Rasbash, J., C. Charlton, W. J. Browne, M. Healy, and B. Cameron. 2012. MLwiN (Version 2.27) [Computer Software]. Bristol: University of Bristol, Centre for Multilevel Modelling.

Raudenbush, S. W., & Bryk, A. S. (2002). *Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods* (2nd ed.). Sage Publications.

Van Damme, J., Liu, H., Vanhee, L., & Pustjens, H. (2010). Longitudinal studies at the country level as a new approach to educational effectiveness: explaining change in reading achievement (PIRLS) by change in age, socio-economic status and class size. *Effective Education*, *2*(1), 53–84.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 1: Παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση στους γνωστικούς τομείς των μαθηματικών, γνώση, εφαρμογή, συλλογισμό.

	Μοντέλο 1			Μοντέλο 2		
Παράγοντες	**Γνώση**	**Εφαρμογή**	**Συλλογισμός**	**Γνώση**	**Εφαρμογή**	**Συλλογισμός**

Επίπεδο Μαθητή/ήτριας						
Αριθμός βιβλίων στο σπίτι						
0-10	-28.97 (3.89)	-27.58 (3.55)	-31.31 (3.78)	-22.05 (3.91)	-20.72 (3.55)	-24.37 (3.85)
11-25	-11.83 (2.70)	-14.35 (2.46)	-16.67 (2.65)	-7.73 (2.68)	-10.30 (2.43)	-13.06 (2.67)
101-200	2.30 (0.92)		8.20 (1.10)	2.54 (0.98)		8.23 (1.16)
> 200			9.04 (1.11)			8.79 (1.18)
Φύλο (κορίτσι)	-24.11 (2.08)	-13.83 (1.96)	-24.11 (2.08)	-18.37 (2.10)	-7.86 (1.96)	-18.37 (2.10)
Προσδοκίες γονέων						
επίπεδο Δημοτικού			-22.60 (6.60)			-22.44 (8.89)
επίπεδο Γυμνασίου	-15.98 (2.55)	-21.88 (2.35)		-15.20 (2.62)	-21.39 (2.40)	
επίπεδο πτυχίου	21.55 (3.87)	12.92 (3.67)	18.25 (3.82)	21.07 (3.85)	12.68 (3.65)	17.81 (3.82)
επίπεδο MA-PhD	39.05 (3.80)	30.98 (3.65)	39.05 (3.80)	33.51 (3.80)	25.76 (3.64)	33.51 (3.80)
Αριθμητικές δραστηριότητες	8.66 (0.60)	8.00 (0.50)	7.21 (0.59)	6.45 (0.61)	5.94 (0.56)	5.39 (0.60)
Φοίτηση στην προδημοτική	14.15 (1.53)	14.15 (1.53)		13.66 (1.29)	13.66 (1.29)	
Αυτοπεποίθηση για μαθηματικά	11.76 (0.48)	10.82 (0.44)	10.22 (0.48)	11.83 (0.51)	11.00 (0.47)	10.37 (0.50)
Στάσεις για μαθηματικά	5.61 (0.52)	5.03 (0.48)	4.78 (0.51)	5.29 (0.56)	4.80 (0.51)	4.54 (0.54)
Ευκαιρία για ατομική επίλυση προβλημάτων	11.92 (1.28)	11.18 (1.17)	12.06 (1.24)	6.92 (1.29)	6.29 (1.17)	7.19 (1.27)
Χρόνος απουσίας από σχολείο	-10.31 (1.19)	-10.31 (1.19)	-10.31 (1.19)	-8.63 (1.19)	-8.63 (1.19)	-8.63 (1.19)
Υποστηρικτική εκπαίδευση εκτός σχολείου	-35.61 (3.03)	-40.44 (2.77)	-45.14 (2.94)	-29.95 (3.02)	-35.35 (2.75)	-39.75 (2.97)
Επίπεδο Σχολείου						
Χρόνια υπηρεσίας εκπαιδευτικών				0.68 (0.19)	0.68 (0.19)	0.68 (0.19)
Δραστηριότητες πρόκλησης ενδιαφέροντος				6.56 (2.20)	6.43 (2.06)	6.31 (2.05)
Περιορισμοί διδασκαλίας				-0.713 (0.25)		
Αποκλίνουσα συμπεριφορά						-1.48 (0.37)
Πολιτική για συστηματική αξιολόγηση				8.51 (2.45)	8.51 (2.45)	8.51 (2.45)
Έμφαση στην ακαδημαϊκή επιτυχία				2.82 (0.95)	2.82 (0.95)	2.82 (0.95)

<u>Σημείωση 1</u>: Στον Πίνακα αναγράφονται οι φορτίσεις των παραγόντων και σε παρένθεση τα τυπικά σφάλματα. Όλες οι φορτίσεις των παραγόντων ήταν στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο α<.05.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΥΝΤΟΜΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΠΡΩΙΜΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ: ΜΙΑ ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

Μελισσανίδου Ιωάννα[1], Μάρκος Άγγελος[2], Χρήστου Κων/νος[3]

[1]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας [2]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
[3]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ioanna.melissanidou@gmail.com/ amarkos@eled.duth.gr/
kchristou@auth.gr

Στόχος της παρούσας μελέτης ήταν να αναπτυχθεί ένα σύντομο και εύχρηστο εργαλείο μέτρησης της πρώιμης μαθηματικής γνώσης και να ελεγχθεί ως προς την αξιοπιστία του και την εγκυρότητά του. Το εργαλείο που σχεδιάστηκε περιλαμβάνει 31 έργα που αφορούν τα βασικά στοιχεία της πρώιμης μαθηματικής γνώσης. Στη μελέτη συμμετείχαν 66 παιδιά νηπιαγωγείων. Η ανάλυση των ψυχομετρικών ιδιοτήτων του εργαλείου έγινε με ανάλυση Rasch. Τα αποτελέσματα έδειξαν υψηλή αξιοπιστία και καλή προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα. Περαιτέρω ανάλυση έδειξε πως το εργαλείο έχει παραγοντική εγκυρότητα και μπορεί να θεωρηθεί ως μονοδιάστατο. Δεν εντοπίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα σε προνήπια και νήπια.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Εισαγωγή

Οι μαθηματικές δεξιότητες στην προσχολική εκπαίδευση αποτελούν τα θεμέλια, τόσο για την απόκτηση μεταγενέστερων δεξιοτήτων, όσο και για τη μελλοντική ακαδημαϊκή επίδοση (Purpura, Reid, Eiland & Baroody, 2015). Οι γνώσεις των παιδιών σε μαθηματικά έργα έχουν χαρακτηριστεί και ως μαθηματική επάρκεια, που όπως την ορίζουν οι Niss και Højgaard (2019, σ. 4), είναι «*η διορατική ετοιμότητα κάποιου να ενεργήσει κατάλληλα, ως απάντηση σε κάθε είδους μαθηματική πρόκληση που σχετίζεται με δεδομένες καταστάσεις*». Τα τελευταία χρόνια ολοένα και αυξάνεται το ενδιαφέρον για την πρώιμη μαθηματική γνώση (Π.Μ.Γ.), καθώς και για τους τρόπους μέτρησής της, διότι ο έγκαιρος εντοπισμός των μαθητών με ελλείμματα σε πτυχές της μαθηματικής γνώσης, αποτελεί βασική προϋπόθεση για την υποστήριξη των μαθητών αυτών, μέσα από την καθοδήγηση εκπαιδευτικών πρακτικών προς αντιμετώπιση αυτών των ελλειμμάτων.

Παρά το πλήθος των εργαλείων που έχουν προταθεί για τη μέτρηση της Π.Μ.Γ., η κριτική που τους ασκείται στη βιβλιογραφία αφορά την αξιολόγηση περιορισμένου εύρους μαθηματικών δεξιοτήτων (Clements,

Sarama & Liu, 2008), την πολύπλοκη χορήγηση (π.χ. κάρτες, κύβοι κ.α.) και τον χρόνο που απαιτείται για τη χορήγησή τους (π.χ. δύο ή παραπάνω εικοσάλεπτες συνεδρίες) (Purpura et al., 2015).

Προσεγγίσεις και εργαλεία μέτρησης της Π.Μ.Γ.

Σύμφωνα με τις Αρχές και τα Πρότυπα του NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000), ένα παιδί νηπιαγωγείου πρέπει να έχει κατακτήσει κάποιες βασικές πρώιμες μαθηματικές έννοιες που οργανώνονται σε πέντε τομείς: αριθμοί και πράξεις, άλγεβρα, γεωμετρία, μέτρηση και ανάλυση δεδομένων και πιθανότητες. Σε μελέτη των Clements, Sarama και Liu (2008) εξετάστηκαν όλες οι μαθηματικές δεξιότητες ως προς συγκεκριμένα κριτήρια, όπως να έχουν οι δεξιότητες στη βάση τους τα μαθηματικά, να είναι κατάλληλες για το αναπτυξιακό επίπεδο των παιδιών και να αποτελούν βάση για μεταγενέστερη μάθηση των μαθηματικών. Οι τομείς μαθηματικών δεξιοτήτων που πληρούσαν όλα τα κριτήρια ήταν: οι αριθμοί (λεκτική αρίθμηση, καταμέτρηση, άμεση αναγνώριση αριθμού, σύγκριση και διάταξη αριθμών, αναγνώριση αριθμητικών συμβόλων, σύνθεση και ανάλυση αριθμών, πρόσθεση και αφαίρεση), η γεωμετρία (αναγνώριση σχημάτων, ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων, κατασκευή και μετασχηματισμό σχημάτων), η μέτρηση και οι κανονικότητες. Πέρα από την ταξινόμηση, καμία άλλη δεξιότητα από τους τομείς της ανάλυσης δεδομένων και των πιθανοτήτων δεν πληρούσε τα κριτήρια επιλογής για αυτό το ηλικιακό επίπεδο.

Για την αξιολόγηση της Π.Μ.Γ. έχει σχεδιαστεί πλήθος έργων και εργαλείων, όπως ενδεικτικά αναφέρονται η Κλίμακα Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Van de Rijt, Van Luit & Pennings, 1999), η οποία σταθμίστηκε στα ελληνικά από τους Μπάρμπα, Βερμέουλεν, Κιοσέογλου και Μενεξέ (2008), το Test of Early Mathematics Ability (TEMA-3) (Ginsburg & Baroody, 2003), το Child Math Assessment (CMA) (Starkey, Klein & Wakeley, 2004), το Number Sense Brief (NSB) (Jordan, Glutting & Ramineni, 2010), το Research-Based Mathematics Assessment Brief (REMA-B) (Weiland, Wolfe, Hurwitz, Clements, Sarama & Yoshikawa, 2012) καθώς και το Preschool Early Numeracy Skills Screener Brief (PENS-B) (Purpura et al., 2015). Όλα τα παραπάνω απευθύνονται σε παιδιά νηπιαγωγείου και πρώτων τάξεων του Δημοτικού (3 έως 9 ετών) και αξιολογούν τους τομείς των αριθμών και της αριθμητικής, και πιο συγκεκριμένα τις δεξιότητες αρίθμησης και καταμέτρησης, αναγνώρισης των αριθμητικών συμβόλων, διάταξης και σύγκρισης. Έργα που εξετάζουν νοερούς υπολογισμούς, πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα και αριθμητικούς συνδυασμούς

περιέχονται στο CMA (Starkey et al., 2004), στο TEMA-3 (Ginsburg & Baroody, 2003), στο NSB (Jordan et al., 2010), στο REMA-B (Weiland et al., 2012) και το PENS-B (Purpura et al., 2015). Ωστόσο, οι τομείς του χώρου και της γεωμετρίας, των κανονικοτήτων και της μέτρησης αξιολογούνται μονάχα μέσα από το REMA-B (Weiland et al., 2012) και το CMA (Starkey et al., 2004). Η χορήγηση των παραπάνω εργαλείων υπερβαίνει τα 30 λεπτά, εξαιρουμένων όσων εργαλείων είναι σύντομες εκδόσεις (π.χ. REMA-B, NSB & PENS-B), η χορήγηση των οποίων δεν ξεπερνά τα 15 λεπτά. Τέλος, όλα τα προαναφερθέντα εργαλεία παρουσιάζουν δείκτη αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας άνω του αποδεκτού ορίου.

Οι μελέτες ελέγχου επιδόσεων στις οποίες εφαρμόζονται εργαλεία μέτρησης Π.Μ.Γ. συχνά εστιάζουν και αναδεικνύουν αναπτυξιακές διαφορές ανάμεσα σε δείγματα παιδιών διαφορετικών ηλικιών. Όσον αφορά τις μικρές ηλικίες, σύμφωνα με τους Litkowski, Duncan, Logan και Purpura (2020), η μέση επίδοση των παιδιών ηλικίας 5,5 ετών είναι υψηλότερη από αυτή των προνηπίων (4 ετών). Γενικότερα, όπως επισημαίνουν και οι Starkey et al. (2004), υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις επιδόσεις ανάμεσα σε προνήπια και νήπια. Παράλληλα, όσον αφορά τον παράγοντα του φύλου, η κατανόηση βασικών αριθμητικών εννοιών δεν εμφανίζει διαφορές ανάμεσα σε αγόρια και κορίτσια στο Νηπιαγωγείο (Lachance & Mazzocco, 2006). Για παράδειγμα, οι Milburn, Lonigan, DeFlorio και Klein (2019) βρήκαν πως η διαφορά στη μέση συνολική βαθμολογία μεταξύ αγοριών και κοριτσιών δεν ήταν στατιστικά σημαντική.

Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να αναπτυχθεί και να ελεγχθεί ένα σύντομο και εύχρηστο εργαλείο μέτρησης της Π.Μ.Γ. των παιδιών νηπιαγωγείου. Ως ερευνητικά ερωτήματα τέθηκαν ποιες είναι οι βασικές διαφορές που εμφανίζονται σε παιδιά νηπιαγωγείου σε σχέση με τα διαφορετικά πεδία της Π.Μ.Γ. και αν υπάρχουν αναπτυξιακές διαφορές και διαφορές ως προς το φύλο. Ενδεχόμενες διαφορές φύλου θα έδειχναν ότι το συγκεκριμένο εργαλείο μπορεί να ευνοεί κάποιο από τα δυο κυρίαρχα φύλα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 66 παιδιά τυπικής ανάπτυξης, με μητρική γλώσσα την ελληνική, που φοιτούν σε νηπιαγωγεία της Βόρειας Ελλάδας, ηλικίας 4 έως 6 ετών (31 προνήπια και 35 νήπια· 35 κορίτσια).

Η επιλογή του δείγματος ήταν σκόπιμη, καθώς επιλέχθηκε δείγμα ευκολίας.

Εργαλείο

Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε είναι το Σύντομο Εργαλείο Μέτρησης της Πρώιμης Μαθηματικής Γνώσης, το οποίο κατασκευάστηκε από την πρώτη συγγραφέα με βάση υπάρχοντα εργαλεία μέτρησης της Π.Μ.Γ. που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία (βλ. Starkey et al., 2004; Clements et al., 2008; Μπάρμπας και συν., 2008; Jordan et al., 2010; Weiland et al., 2012; Purpura et al., 2015). Για την κατασκευή του παρόντος εργαλείου, επιλέγησαν έργα που εξετάζουν μαθηματικές δεξιότητες που αναμένεται τα παιδιά να έχουν αναπτύξει στο νηπιαγωγείο, όπως αυτά παρουσιάζονται στον Πίνακα 1, και αποτελούν θεμέλια για την μετέπειτα μαθηματική ανάπτυξη σύμφωνα με τη βιβλιογραφία. Το εργαλείο περιλαμβάνει 31 έργα με αυξανόμενη δυσκολία. Η χορήγηση του εργαλείου ήταν ατομική. Τα έργα παρουσιάστηκαν στα παιδιά ένα ένα δίνοντας προφορικά ερώτηση-οδηγία που συνοδεύει τα υλικά/εικόνες. Η διάρκεια χορήγησης δεν ξεπερνούσε τα 15 λεπτά.

Μαθηματική Ικανότητα	**Πλήθος έργων**
Αριθμοί – Αριθμητική	7
Λεκτική αρίθμηση – Καταμέτρηση	5
Σύγκριση	3
Διάταξη	3
Κανονικότητες	3
Σχήματα	3
Μέτρηση	3
Άμεση αναγνώριση	2
Πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα	2
Σύνολο	31

Πίνακας 1: Συγκεντρωτικός πίνακας με τα πεδία των μαθηματικών γνώσεων που αξιολογούνται στο εργαλείο.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για τις στατιστικές αναλύσεις, τα υποερωτήματα του εργαλείου βαθμολογήθηκαν ως λάθος/σωστό. Ωστόσο, δεν συμπεριλήφθηκαν και

δεν παρουσιάζονται οι απαντήσεις στα έργα 1 (λεκτική αρίθμηση έως το 5) και 2 (σύγκριση ύψους), καθώς απαντήθηκαν σωστά απ' όλα τα παιδιά.

Αξιοπιστία και εγκυρότητα του ερευνητικού εργαλείου

Η εφαρμογή της Διερευνητικής Ανάλυσης Παραγόντων στον πίνακα των τετραχωρικών συσχετίσεων των 29 βαθμολογημένων έργων έδειξε ότι αυτά μετρούν την ίδια εννοιολογική κατασκευή, δηλαδή την Π.Μ.Γ., με τον μοναδικό παράγοντα να εξηγεί το 26,37% της συνολικής διακύμανσης (κριτήριο του Kaiser, παράγοντες με ιδιοτιμή >1, parallel analysis). Επομένως, επιβεβαιώνεται η παραγοντική εγκυρότητα του εργαλείου. Στη συνέχεια, εφαρμόστηκε το διχοτομικό μοντέλο Rasch. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το μοντέλο προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα της έρευνας (τιμή του δείκτη MADaQ3 = 0,130). Επιπλέον, ο δείκτης αξιοπιστίας ατόμων (Person reliability) βρέθηκε ίσος με 0,837, κάτι που φανερώνει υψηλή αξιοπιστία εσωτερικής συνοχής του ερευνητικού εργαλείου.

Συνολική επίδοση στο εργαλείο και ανά κατηγορία μαθηματικής γνώσης.

Όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 2, οι μαθητές απάντησαν σωστά σε 19 με 20 (από τα 31) έργα, κατά μέσο όρο, με τυπική απόκλιση 5,5 έργα, κάτι που φανερώνει σχετικά υψηλές επιδόσεις των μαθητών του δείγματος, κατά μέσο όρο, αλλά με αρκετά μεγάλη διακύμανση.

	Πλήθος παιδιών	Ελάχιστη τιμή	Μέγιστη τιμή	Μέσος όρος	Διάμεσος	Τυπική απόκλιση	Τυπικό σφάλμα
Σύνολο	66	6	29	19,8	21	5,49	0,676
Επίπεδο ικανότητας (logits)		-3,25	3,88	0,0	-	1.40	-

Πίνακας 2: Σύνοψη των επιδόσεων στη δοκιμασία της Π.Μ.Γ.

Με βάση τη μέση επίδοση, οι συμμετέχοντες/ουσες, τα πήγαν καλύτερα στον τομέα των αριθμών και της αριθμητικής (81,16%). Οι δυο κατηγορίες, στις οποίες σημειώθηκε η χαμηλότερη επίδοση, ήταν αυτές των σχημάτων και των πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων (41,41% και 37,12% αντίστοιχα).

Δυσκολία και προσαρμογή Rasch ανά έργο

Η δυσκολία των έργων σε μονάδες logit και οι δείκτες προσαρμογής Infit και Outfit παρουσιάζονται στον Πίνακα 3. Όσα έργα έχουν δυσκολία

μεγαλύτερη από +0,5 logits, χαρακτηρίζονται δύσκολα, ενώ όσα έργα έχουν δυσκολία μικρότερη από –0,5 logits, χαρακτηρίζονται εύκολα. Συνεπώς, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3, τα έργα 8, 13, 17 και 23 θεωρήθηκαν δύσκολα με βάση τις επιδόσεις των συμμετεχόντων. Ιδιαίτερα το έργο 23 αποτέλεσε το πιο δύσκολο έργο, με 51 παιδιά να αναγνωρίζουν το ορθογώνιο (που ορθά κατασκεύασαν από τις κορυφές του) ως τετράγωνο. Για το έργο 8, το πιο σύνηθες λάθος ήταν η επιλογή του συνόλου με αυξανόμενο μέγεθος και όχι με μειούμενο, όπως τους είχε ζητηθεί, ενώ για το έργο 13, το πιο σύνηθες ήταν οι συμμετέχοντες να απαντούν «5» και όχι «10», επιδιώκοντας την καταμέτρηση των 10 τελειών στα 2 δευτερόλεπτα, αντί για την άμεση αναγνώριση. Για το πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα της αφαίρεσης (έργο 17), οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις οφείλονταν σε λάθη υπολογισμού.

Έργα	Δυσκολία (logits)	Infit	Outfit
3: Άμεση αναγνώριση 3 τελειών.	-3,7843	0,833	**0,338**
4: Σύγκριση ποσότητας.	-4,9959	0,922	**0,191**
5: Λεκτική αρίθμηση έως το 20.	-1,5999	0,858	0,713
6-1: Καταμέτρηση 7 μπανανών.	-2,7324	1,278	1,121
6-2: Καταμέτρηση 12 μήλων.	-1,4907	0,982	1,158
7: Κατανόηση τακτικού αριθμού.	-1,7138	0,925	0,698
8: Σύγκριση συνεχούς ποσότητας και διάταξης.	0,5055	1,216	1,468
9-1: Αντιστοίχιση «1» με ένα αστέρι.	-3,1685	0,807	**0,312**
9-2: Αντιστοίχιση «2» με δυο αστέρια.	-3,1685	0,768	**0,300**
9-3: Αντιστοίχιση «3» με τρία αστέρια.	-2,9359	0,671	**0,278**
9-4: Αντιστοίχιση «4» με τέσσερα αστέρια.	-2,7324	0,678	**0,311**
9-5: Αντιστοίχιση «5» με πέντε αστέρια.	-2,7324	0,678	**0,311**
10: Σύνθεση του αριθμού 7.	0,0189	1,370	**1,646**
11: Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης.	0,2609	0,779	0,681
12-1: Προσδιορισμός επόμενου αριθμού από 12.	-2,2330	0,936	0,921
12-2: Προσδιορισμός προηγούμενου αριθμού από 8.	-0,2240	0,842	0,748
13: Άμεση αναγνώριση 10 τελειών.	0,5055	0,809	0,707
14: Αντίστροφη λεκτική αρίθμηση.	0,1801	0,859	0,789
15: Σύγκριση αριθμών.	-1,7138	1,207	1,311

16: Προσδιορισμός πλησιέστερου αριθμού.	0,0995	1,139	**1,502**
17: Πλαισιωμένο λεκτικό πρόβλημα αφαίρεσης.	1,2029	0,963	1,086
18: Νοερή πρόσθεση.	-0,7271	1,082	1,166
19: Αναγνώριση τριγώνων.	0,0995	1,422	**1,721**
20: Επέκταση μοτίβου ΑΒ.	-2,7324	0,890	0,528
21: Επέκταση εξελισσόμενου μοτίβου.	-0,1427	1,082	1,123
22: Εύρεση του μέρους του μοτίβου που λείπει.	-1,9586	1,025	1,016
23: Κατασκευή και αναγνώριση ορθογωνίου.	1,8292	1,076	1,163
24: Άμεση σύγκριση επιφανειών.	-1,9586	1,299	**1,938**
25: Ανάλυση τετραγώνου.	-0,3058	0,965	1,004

Πίνακας 3: Δυσκολία (logits) και δείκτες Infit/Outfit ανά έργο.

Ακόμη, στις δυο τελευταίες στήλες του Πίνακα 3 (Infit και Outfit) φαίνεται ποια έργα προσαρμόζονται καλά στο μοντέλο του Rasch. Ο δείκτης Infit είναι ένα μέτρο της εσωτερικής συνοχής των απαντήσεων των μαθητών στο συγκεκριμένο έργο, σε σχέση με τις αναμενόμενες απαντήσεις βάσει του μοντέλου Rasch. Τιμές του δείκτη ανάμεσα στο +0,5 και το 1,5 δείχνουν ότι οι απαντήσεις είναι συνεπείς με τις προσδοκίες του μοντέλου. Ο δείκτης Outfit είναι ένας δείκτης εξωτερικής συνοχής, με την έννοια ότι λαμβάνει υπόψη την παρουσία ασυνήθιστων απαντήσεων σε ένα συγκεκριμένο έργο (π.χ. απαντήσεις που δόθηκαν στην τύχη). Τιμές του δείκτη ανάμεσα στο +0,5 και το +1,5 υποδηλώνουν ότι δεν υπάρχουν απαντήσεις στο συγκεκριμένο έργο που να αποκλίνουν από τις αναμενόμενες από το μοντέλο Rasch. Όσα έργα έχουν δείκτη μεγαλύτερο από +1,5, θα πρέπει να τροποποιηθούν ή να αντικατασταθούν, ώστε να βελτιωθεί η αξιοπιστία του εργαλείου. Τιμές χαμηλότερες του αποδεκτού εύρους δείχνουν πως υπάρχει μεγάλη ευκολία σε αυτά τα έργα, τα οποία ενδεχομένως να είναι περιττά. Ωστόσο, οι χαμηλές τιμές δεν υποβαθμίζουν την αξιοπιστία της δοκιμασίας. Σε αντίθεση, τα έργα που παρουσιάζουν τιμές των δύο δεικτών μεγαλύτερες του +1,5 (βλ. Πίνακα 3) δημιουργούν «θόρυβο» στα δεδομένα και ίσως η διατύπωσή τους να έχει μπερδέψει τα παιδιά και να επιδέχονται βελτίωση. Αυτά τα έργα είναι το 16 με οριακή τιμή, το 19, το 10 και το 24. Για τα έργα αυτά παρατηρήθηκαν ασυνήθιστες απαντήσεις, με την έννοια ότι είτε απαντήθηκαν σωστά από μαθητές με χαμηλή συνολική επίδοση στη δοκιμασία είτε απαντήθηκαν λανθασμένα από μαθητές με υψηλή συνολική επίδοση στη δοκιμασία.

Διαφορές στην επίδοση με βάση την ηλικία και το φύλο

Για να διαπιστωθεί αν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στην Π.Μ.Γ. ως προς το φύλο και τη βαθμίδα (νήπια/προνήπια), εφαρμόστηκε ο t έλεγχος για ανεξάρτητα δείγματα. Τα προνήπια απάντησαν σωστά σε 19 περίπου έργα, ενώ τα νήπια απάντησαν σωστά σε 21 περίπου έργα. Ο t-έλεγχος για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι η διαφορά αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική (t = -1,68 , p = 0,098). Όσον αφορά τον παράγοντα του φύλου, τα κορίτσια απάντησαν σωστά σε περίπου 19 έργα κατά μέσο όρο, ενώ τα αγόρια σε 20-21 έργα κατά μέσο όρο, και η διαφορά αυτή επίσης δεν ήταν στατιστικά σημαντική (t = 1,18, p = 0,243).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Βασικός στόχος της παρούσας μελέτης ήταν η ανάπτυξη ενός εργαλείου μέτρησης της Π.Μ.Γ., που θα αποτελούνταν από σχετικά μικρό αριθμό έργων και δεν θα απαιτούσε το χειρισμό αντικειμένων, προκειμένου να είναι σύντομο και πρακτικό. Επιλέχθηκαν έργα που αξιολογούν δεξιότητες της λεκτικής αρίθμησης και καταμέτρησης, της σύγκρισης, της άμεσης αναγνώρισης, των πλαισιωμένων λεκτικών προβλημάτων, της διάταξης, των αριθμών και της αριθμητικής, των κανονικοτήτων, των σχημάτων και της μέτρησης. Τα αποτελέσματα υποστηρίζουν την συγκεκριμένη επιλογή, αλλά και των έργων που επιλέχθηκαν για την αξιολόγησή τους, καθώς η Διερευνητική Ανάλυση Παραγόντων επιβεβαίωσε την παραγοντική εγκυρότητα της κλίμακας και άρα, μπορεί να θεωρηθεί ως μονοδιάστατο εργαλείο. Αυτά τα ευρήματα ενισχύουν τα ευρήματα άλλων ερευνών (Starkey et al., 2004; Μπάρμπας και συν., 2008; Purpura et al., 2015), καθώς έδειξαν πως μέσω όλων αυτών των έργων, αξιολογούνται τα βασικά χαρακτηριστικά της Π.Μ.Γ.

Επιπλέον, στόχος ήταν να μελετηθούν οι διαφορές στην Π.Μ.Γ. των μαθητών ανά κατηγορία μαθηματικής γνώσης. Σχετικά με τις συνολικές επιδόσεις στην Π.Μ.Γ., τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι συμμετέχοντες βρίσκονται σε μέτριο προς καλό επίπεδο Π.Μ.Γ. Ωστόσο, η επίδοση ήταν χαμηλή στον τομέα κατανόησης των σχημάτων. Φαίνεται πως τα μικρά παιδιά δυσκολεύονται να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ του ορθογωνίου και του τετραγώνου, όπως και ενός τριγώνου με ένα ημιτελές σχήμα, που μοιάζει με τρίγωνο, όπως υποστηρίζεται και από τη σχετική βιβλιογραφία (Milburn et al., 2019). Ωστόσο, 2 από τα 3 έργα που εξέταζαν την κατανόηση των σχημάτων χρειάζονται αναδιατύπωση ή αντικατάσταση. Η αντικατάσταση τους, λοιπόν, πιθανά να οδηγήσει σε νέα ευρήματα. Ακόμα, στα πλαισιωμένα λεκτικά προβλήματα, μεγαλύτερη δυσκολία

εντοπίζεται στα προβλήματα αφαίρεσης. Η επίδοση σ' αυτήν την κατηγορία είναι χαμηλή και δε συμβαδίζει με αυτή προηγούμενης μελέτης (Litkowski et al., 2020).

Σχετικά με τις διαφορές στην επίδοση ανάμεσα στα νήπια και στα προνήπια, αυτές δεν είναι στατιστικά σημαντικές, εύρημα που έρχεται σε αντίθεση με παλαιότερες έρευνες (Jordan et al., 2010). Αυτό σημαίνει πως το εργαλείο περιέχει αρκετά εύκολα έργα με αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η διάκριση των παιδιών σε αυτά με χαμηλές και υψηλές επιδόσεις. Αυτά τα έργα θα μπορούσαν να αντικατασταθούν από δυσκολότερα ή αλλιώς να παρέχουν μια συνολική βαθμολογία ανά μαθηματική δεξιότητα (για παράδειγμα να εξάγεται μια βαθμολογία με βάση τις απαντήσεις σε όλα τα υποερωτήματα αντιστοίχισης της ποσότητας με το αριθμητικό σύμβολο). Μια τέτοια αλλαγή πιθανά να αναδείξει και αναπτυξιακές διαφορές ανάμεσα σε νήπια και προνήπια, που το παρόν εργαλείο δεν έδειξε.

Άλλες προτάσεις όσον αφορά την κατασκευή του εργαλείου αφορούν τα δυο πρώτα έργα, που δεν συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση των αποτελεσμάτων. Αν και οι υψηλές επιδόσεις στα έργα αυτά οδηγούν στην απόφαση να αφαιρεθούν από την ανάλυση, προτείνεται ωστόσο, να χρησιμοποιούνται ως εισαγωγικές ερωτήσεις, ώστε τα παιδιά να ξεκινούν το εργαλείο με δυο πολύ εύκολα έργα κι έτσι να ελαχιστοποιείται ο παράγοντας του άγχους. Ακόμη, παρατηρήθηκε από την ανάλυση Rasch, πως τέσσερα έργα φαίνεται να μην λειτουργούν καλά μέσα στο εργαλείο. Αυτά τα έργα είναι το έργο προσδιορισμού πλησιέστερου αριθμού στο 6 μεταξύ 4 αριθμών, το έργο ανάλυσης/σύνθεσης του αριθμού 7, το έργο αναγνώρισης τριγώνων και το έργο άμεσης σύγκρισης επιφανειών. Κρίνεται αναγκαίο, αυτά τα έργα είτε να τροποποιηθούν και να ξανά ελεγχθούν, είτε να αφαιρεθούν και να αντικατασταθούν από άλλα.

Σχετικά με τον παράγοντα του φύλου, τα ευρήματα αυτά υποστηρίζουν παλαιότερες έρευνες (Lachance & Mazzocco, 2006; Milburn et al., 2019) στις οποίες οι διαφορές στην Π.Μ.Γ. μεταξύ των δυο κυρίαρχων φύλων δεν είναι στατιστικά σημαντικές. Αυτό το εύρημα κρίνεται ως θετικό, καθώς δείχνει πως το εργαλείο δεν είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο που να ευνοεί κάποιο από τα δυο κυρίαρχα φύλα.

Τέλος, για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων πρέπει να ληφθεί υπόψη πως το δείγμα ήταν βολικό και μικρό, με αποτέλεσμα το εργαλείο να αδυνατεί να αναδείξει σε βάθος προβλήματα και δυσκολίες των παιδιών σε συγκεκριμένες κατηγορίες Π.Μ.Γ. (π.χ. στην αριθμητική), παρά μόνο μέσα από μια προσεκτική ανάγνωση των αποτελεσμάτων. Από την άλλη

μεριά, ένα εργαλείο με περισσότερα έργα ανά κατηγορία μαθηματικής γνώσης θα ήταν εκτενέστερο, πιο χρονοβόρο και δύσκολο στην ανάλυση, πράγμα που δε θα εξυπηρετούσε τον βασικό στόχο της μελέτης, δηλαδή την ανάπτυξη ενός σύντομου και εύχρηστου εργαλείου μέτρησης της Π.Μ.Γ. για τη χρήση του από νηπιαγωγούς, με σκοπό τη διερεύνηση των αρχικών γνώσεων και την αξιολόγηση των αποκτηθέντων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D.H., Sarama, J.H., & Liu, X.H. (2008). Development of a measure of early mathematics achievement using the Rasch model: The research-based early mathematics assessment. *Educational Psychology*, *28*(4), 457–482.

Ginsburg, H., & Baroody, A. J. (2003). *TEMA-3: Test of early mathematics ability*. Austin, TX: Pro-ed.

Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences, 20(*2), 82–88. https://doi:10.1016/j.lindif.2009.07.004

Lachance, J. A., & Mazzocco, M. M. (2006). A longitudinal analysis of sex differences in math and spatial skills in primary school age children. *Learning and individual differences*, *16*(3), 195-216.

Litkowski, E. C., Duncan, R. J., Logan, J. A., & Purpura, D. J. (2020). When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of experimental child psychology*, *195*, 104846.

Milburn, T. F., Lonigan, C. J., DeFlorio, L., & Klein, A. (2019). Dimensionality of preschoolers' informal mathematical abilities. *Early childhood research quarterly*, *47*, 487-495.

Μπάρμπας, Γ., Βερμέουλεν, Φ., Κιοσέογλου Γ. & Μενεξές Γ. (2008). *Ψυχομετρικό κριτήριο πρώιμης μαθηματικής επάρκειας της Ουτρέχτης (προσαρμογή – στάθμιση)*, στο πλαίσιο του έργου ΕΠΕΑΕΚ «Ψυχομετρική - διαφορική αξιολόγηση παιδιών και εφήβων με μαθησιακές δυσκολίες», Θεσσαλονίκη.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 9-28.

Purpura, D. J., Reid, E. E., Eiland, M. D., & Baroody, A. J. (2015). Using a brief preschool early numeracy skills screener to identify young children with mathematics difficulties. *School Psychology Review*, *44*(1), 41-59.

Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early childhood research quarterly*, *19*(1), 99-120.

Van de Rijt, B. A. M., Van Luit, J. E. H., & Pennings, A. H. (1999). The construction of the Utrecht early mathematical competence scales. *Educational and psychological measurement*, *59*(2), 289-309.

Weiland, C., Wolfe, C. B., Hurwitz, M. D., Clements, D. H., Sarama, J. H., & Yoshikawa, H. (2012). Early mathematics assessment: Validation of the short form of a prekindergarten and kindergarten mathematics measure. *Educational Psychology*, *32*(3), 311-333.

Θεματική Ενότητα 4: Ψηφιακές τεχνολογίες και μαθηματική εκπαίδευση για τον 21 ο αιώνα

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ - ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΣΕ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ

Γεώργιος Θωμά

Department of Mathematics Education, Loughborough University, UK

g.thoma@lboro.ac.uk

Εστιάζοντας στην κλασματική ισοδυναμία στην αριθμογραμμή, η παρούσα έρευνα παρουσιάζει τη δημιουργία «αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων» από την καταγραφή οθόνης των κινήσεων μαθητή Α' γυμνασίου. Μέσω εκπαιδευτικού παιχνιδιού, ο μαθητής εκτίμησε τη θέση 82 κλασμάτων στην 0-1 αριθμογραμμή. Το σύνολο για εκτίμηση σχεδιάστηκε από ζεύγη κλασμάτων: 21 ισοδύναμα (π.χ., 3/12 & 4/16) και 20 διπλά ζεύγη (7/9 & 7/9). Από την ανάλυση αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων αναδεικνύεται η χρήση σημείων αναφοράς και η διαφορά προσέγγισης κατά την εκτίμηση κλασμάτων στην αριθμογραμμή σύμφωνα με τον παρονομαστή.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ, ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΚΑΙ Η ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ

Πρόσφατες έρευνες αποκαλύπτουν τη σημασία της γνώσης κλασμάτων ως μέτρου πρόβλεψης της μελλοντικής επίδοσης μαθητών στην άλγεβρα και στα μαθηματικά γενικότερα (Booth & Newton, 2012; Siegler et al., 2012), καθώς και των δυσκολιών που προκαλούνται από τα κλάσματα τόσο σε μαθητές όσο και ενήλικες (π.χ., DeWolf & Vosniadou, 2015). Σε αυτό το πλαίσιο, η ιδιότητα ισοδυναμίας κλασμάτων έχει χαρακτηριστεί ως μια από τις πιο σημαντικές αλλά και δύσκολες μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται σε νεαρή ηλικία (Kamii & Clark, 1995; Ni 2001; Fazio & Siegler, 2011). Αν και συνήθως είναι συσχετισμένη με την αριθμητική κλασμάτων (π.χ., στην εύρεση κοινού παρονομαστή), η κλασματική ισοδυναμία εν δυνάμει εμφανίζεται και συντροφεύει κάθε χώρο όπου εμφανίζονται κλάσματα—όπως για παράδειγμα, στην αριθμογραμμή.

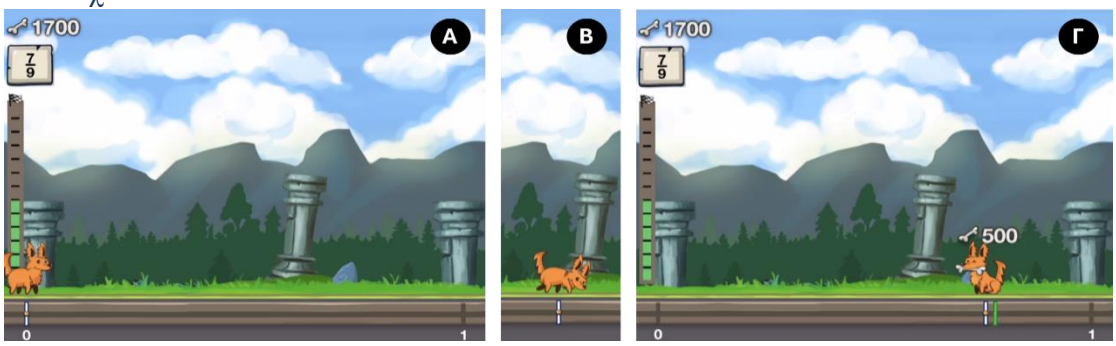
Η παρουσίαση κλασμάτων στην αριθμογραμμή ενδείκνυται σαν μέσο διδακτικής (Fazio & Siegler, 2011; Sidney, Thompson & Rivera, 2019), καθώς μεταξύ άλλων, ενισχύει την ιδέα του κλάσματος ως αριθμού και μεγέθους ανάμεσα στους ήδη γνωστούς φυσικούς αριθμούς—εισάγοντας έτσι και την έννοια της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα, ένας δημοφιλής τρόπος εξέτασης της κλασματικής γνώσης στην αριθμογραμμή, είναι η άσκηση εκτίμησης θέσης κλάσματος—π.χ.: «Εκτιμήστε τη θέση του κλάσματος 3/4 στην 0-1 αριθμογραμμή». Η

άσκηση αυτή μελετάται συνήθως ποσοτικά, μέσω της μέτρησης του χρόνου ανταπόκρισης καθώς και της απόκλισης εκτίμησης από την πραγματική θέση του κλάσματος (π.χ., Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2022). Πέραν των ποσοτικών δεδομένων του χρόνου και της τελικής θέσης, η εν λόγω άσκηση έχει μελετηθεί και με ποιοτικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, οι Siegler και συνάδελφοι (2011) χαρακτηρίζουν τη διαδικασία εκτίμησης κλασμάτων στην αριθμογραμμή ως μια «ελεγχόμενη, στρατηγική προσέγγιση» (σελ. 283), αφού παρατηρώντας τις προσεγγίσεις των μαθητών και τις αναφορές τους, παρουσιάζουν δύο κατηγορίες συχνών στρατηγικών. Αυτές είναι: «στρατηγικές αριθμητικών μετατροπών», όπου το ζητούμενο για εκτίμηση κλάσμα μετατρέπεται σε πιο βολικό αριθμό (π.χ., με στρογγυλοποίηση: «5/9 είναι λίγο μεγαλύτερο από 1/2»), και «στρατηγικές διαχωρισμού της αριθμογραμμής», όπου γίνεται χρήση υποκειμενικών σημείων αναφοράς ή διαχωρισμός της αριθμογραμμής με βάση τον παρονομαστή (σελ. 282-283). Επιπροσθέτως, μαθητές κατά την εκτίμηση ενός κλάσματος συνήθως χρησιμοποιούσαν συνδυασμό στρατηγικών και από τις δύο κατηγορίες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη της κλασματικής ισοδυναμίας σε περιβάλλον εκπαιδευτικού παιχνιδιού, όπως αυτή εκδηλώνεται εμμέσως, μέσω άσκησης εκτίμησης θέσης κλάσματος σε αριθμογραμμή. Για την κατά δυνατόν βαθύτερη μελέτη συγκεντρώθηκαν, όπως σε Siegler και συνάδελφοι (2011), ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα. Τα μεν μέσω άμεσης καταγραφής από το παιχνίδι, τα δε, από καταγραφή ήχου και οθόνης των παικτών. Επιπλέον, καθότι η τελική επιλογή κλασμάτων σε έρευνες που ασχολούνται με αυτά είναι καίριας σημασίας (π.χ., Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Δεσλή & Τριανταφύλλου, 2022), στην παρούσα έρευνα η επιλογή αυτή αποκτά ακόμα μεγαλύτερη βαρύτητα, δεδομένου ότι η ισοδυναμία στην αριθμογραμμή δεν φαίνεται να έχει ερευνηθεί ως τώρα με τον παρόν τρόπο—δηλαδή, μέσω της χρήσης ισοδύναμων κλασματικών ζευγαριών για εκτίμηση στην αριθμογραμμή.

Το παιχνίδι Number Trace



Εικόνα 1: Το παιχνίδι Number Trace. (Α) Αρχική θέση, (Β) απόσπασμα κίνησης, (Γ) εκτίμηση παίκτη και διορθωτική πράσινη γραμμή—ανάλογα προσφέρονται πόντοι και ανατροφοδότηση μέσω κινουμένου σχεδίου.

Το εκπαιδευτικό παιχνίδι Number Trace [1] και οι προηγούμενες εκδόσεις του έχουν χρησιμοποιηθεί σαν ερευνητικό περιβάλλον κυρίως για τη μελέτη κλασμάτων (π.χ., Ninaus et al., 2017). Επιγραμματικά, ο σκοπός του παιχνιδιού είναι η κατά το δυνατόν επιτυχής εκτίμηση κλασμάτων στην 0-1 αριθμογραμμή. Ο παίκτης κατευθύνει δεξιά-αριστερά στην αριθμογραμμή έναν σκύλο που αναζητά θαμμένα κόκαλα, η θέση των οποίων δίνεται από κλάσματα στο πάνω αριστερά μέρος της οθόνης. Μόλις αποφασιστεί η θέση και επιβεβαιωθεί η εκτίμηση μεσώ πληκτρολογίου, το παιχνίδι προσφέρει ανατροφοδότηση και ανάλογους πόντους για τη συγκεκριμένη εκτίμηση του κλάσματος.

Το σύνολο κλασμάτων

Για τη μελέτη ισοδυναμίας, σχεδιάστηκε και επιλέχθηκε συγκεκριμένο σύνολο κλασμάτων [2], που τροφοδοτήθηκε στο παιχνίδι. Το σύνολο των 82 επιλεγμένων κλασμάτων αποτελείται από ζεύγη κλασμάτων: 21 ισοδύναμα ζεύγη (π.χ., 3/12 & 4/16) και 20 διπλά ζεύγη (7/9 & 7/9). Μόλις εκτιμηθεί το ένα κλάσμα, εμφανίζεται το επόμενο για εκτίμηση, και ούτω καθεξής, μέχρι να εκτιμηθούν και τα 82. Τα κλάσματα αυτά παρουσιάζονται το ένα μετά το άλλο, σε τυχαία σειρά.

Τα κλάσματα επιλέχθηκαν όσο το δυνατόν διεσπαρμένα στην 0-1 αριθμογραμμή, ενώ εσκεμμένα αποφεύχθηκε η χρήση κλασμάτων ίσων ή μεγαλύτερων της μονάδας. Σκοπός της έρευνας είναι η ‘έμμεση’ μελέτη κλασματικής ισοδυναμίας στην αριθμογραμμή μέσω της άσκησης εκτίμησης θέσης. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, επιδιώκεται να μελετηθεί ο τρόπος αντιμετώπισης κλασμάτων χωρίς απαραίτητα οι παίκτες να υποψιαστούν πως ο στόχος της μελέτης είναι η κλασματική ισοδυναμία. Ως εκ τούτου, στις συζητήσεις και τα σχετικά έγγραφα που διανεμήθηκαν, σκόπιμα αποφεύχθηκε η χρήση του όρου από τον ερευνητή. Αντίθετα,

δόθηκε σημασία στο περιβάλλον του παιχνιδιού που οι μαθητές θα έπαιζαν για πρώτη φορά. Από προγραμματιστική άποψη, για να μείνει όσο το δυνατόν κρυφός ο σχεδιασμός προς τη μελέτη κλασματικής ισοδυναμίας, το παιχνίδι τροποποιήθηκε περαιτέρω ώστε να μην εμφανίζονται σε άμεση αλληλουχία τα επιλεγμένα ζεύγη κλασμάτων—π.χ., να μην εμφανιστεί το 3/12 και αμέσως μετά το ισοδύναμο ζεύγος του 4/16.

Από την άλλη, λόγω της ανάγκης επιλογής ποικιλίας κλασμάτων στην κατηγορία των ισοδύναμων ζευγών, το 16 επιλέχθηκε ως μέγιστος παρονομαστής. Επίσης, έγινε προσπάθεια αποφυγής γνωστών κλασμάτων όπως 1/2, 1/3, 1/4, 1/5. Στη θέση τους, επιλέχθηκαν τα ισοδύναμά τους: 7/14 & 8/16, 4/12 & 5/15, 4/16 & 3/12, 2/10 & 3/15.

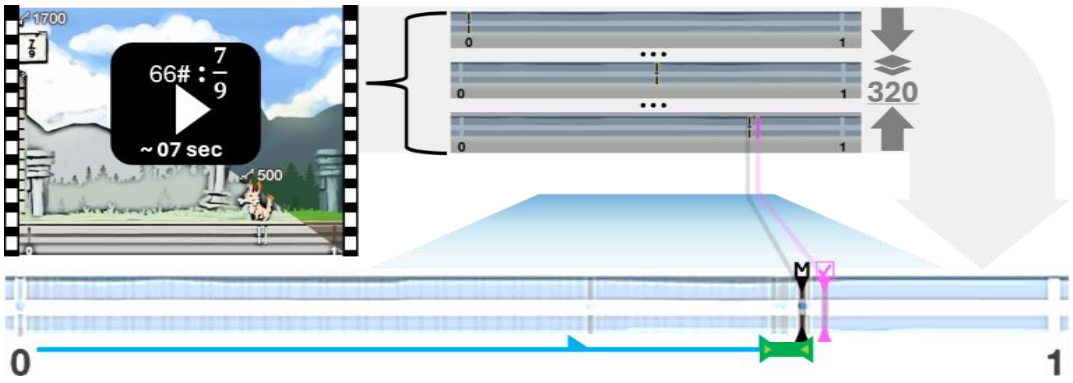
Επιλογή των δεδομένων του μαθητή Μάριου

Επιλέχθηκε η συνεδρία παιχνιδιού μαθητή Α' Γυμνασίου—από το σύνολο πέντε μαθητών οι μέθοδοι και τεχνικές των οποίων αναλύθηκαν υπό το πρίσμα της λύσης προβλήματος—του 13-χρονου «Μάριου», αλλιώς "Malcom" (Thoma, Bahnmuller & Moeller, 2023). Τα δεδομένα του συγκεκριμένου μαθητή που έπαιξε το παιχνίδι για πρώτη φορά (διάρκεια μισής ώρας) επιλέχθηκαν για ανάλυση λόγω της ιδιαίτερης τεχνικής που ακολούθησε με τον συστηματικό βηματισμό του σκύλου πέρα-δώθε στην αριθμογραμμή (π.χ., Εικ. 4Α)—σε συνδυασμό με την ομιλητικότητά του.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Δημιουργία αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων

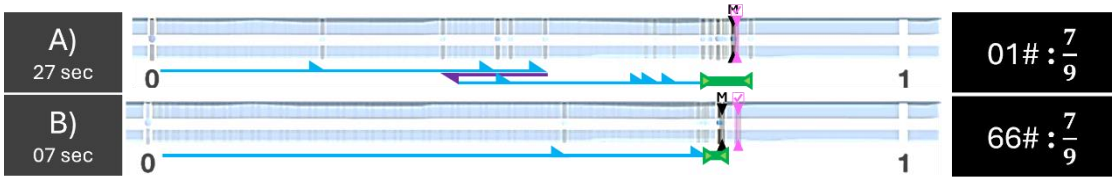
Με σκοπό τη λεπτομερή απεικόνιση και μελέτη της ισοδυναμίας στην αριθμογραμμή μέσω σημείων αναφοράς, ακολουθήθηκαν τα παρακάτω έξι βήματα δημιουργίας αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων εικόνας (Εικ. 2), ενώ χρησιμοποιήθηκαν το λογισμικό επεξεργασίας βίντεο Shotcut (βήματα α-γ), κώδικας Python (δ-ε), και PowerPoint (στ):



Εικόνα 2: Διαδικασία δημιουργίας αντιπροσωπευτικού στιγμιοτύπου 66#.

α) Η χρονική απομόνωση της εκτίμησης του κάθε κλάσματος, σε 82 αποκόμματα βίντεο· β) η επεξεργασία ολόκληρου του οπτικού υλικού σε αρνητικό, αναστρέφοντας τα σκοτεινά χρώματα της αριθμογραμμής σε φωτεινά για μεγαλύτερη ευκρίνεια· γ) η εξαγωγή-μεταποίηση του κάθε αποκόμματος σε σειρά από στιγμιότυπα οθόνης (300-1800 στιγμιότυπα από κάθε απόκομμα, ανάλογα με τον χρόνο εκτίμησης κάθε κλάσματος)· δ) η μαζική μείωση της αδιαφάνειας κάθε στιγμιοτύπου· ε) η συρραφή της σειράς πλήθους στιγμιοτύπων σε μία εικόνα, ώστε όλες μαζί, να διαμορφώσουν τη μια αντιπροσωπευτική εικόνα εκτίμησης του συγκεκριμένου κλάσματος απεικονίζοντας, με αυτόν τον τρόπο, το συνολικό αποτύπωμα κινήσεων του μαθητή. Ως εκ τούτου, η διαδικασία ανάλυσης οδήγησε στη δημιουργία 82 αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων εκτίμησης κλάσματος, προσφέροντας, έτσι, μια περιληπτική οπτική του ιστορικού των ενεργειών του παίκτη συνολικά στην έρευνα. Τέλος, η ανάλυση συνεχίστηκε στο έκτο (στ) βήμα με το ζευγάρωμα του κάθε κλάσματος με το ισοδύναμο ή διπλό ζεύγος του. Μέσω αυτών, εντοπίστηκαν μοτίβα και ενδιαφέροντα περιστατικά, τα οποία εμπλουτίστηκαν περαιτέρω μέσω της επανειλημμένης μελέτης του οπτικοακουστικού υλικού και την προσθήκη επεξηγηματικών συμβόλων ακολουθώντας τις κινήσεις του Μάριου (π.χ., Εικ. 3). Μετά την αρχική ανάλυση των ζευγών κρίθηκαν ως απλές περιπτώσεις κλάσματα με τιμές πολύ κοντά στο 0 και στο 1 αντίστοιχα—π.χ., 2/16 & 1/8, και 10/12 & 5/6 αυτές οι περιπτώσεις δεν καλύπτονται παρακάτω.

Ανάλυση Περιπτώσεων

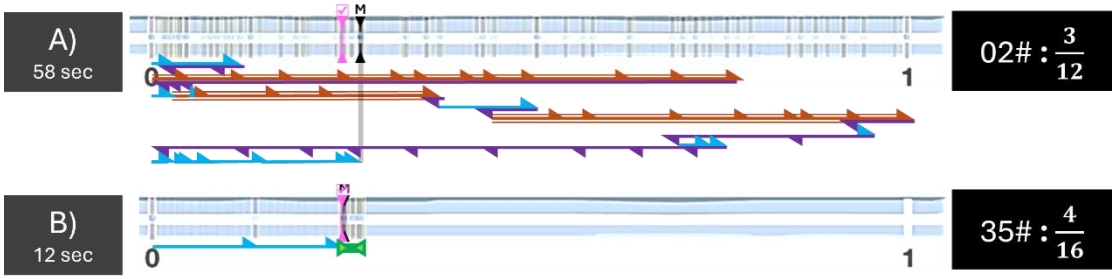


Εικόνα 3: Ζεύγος διπλών κλασμάτων 7/9.

Εισαγωγικά, παρουσιάζεται η Εικόνα 3, που αποτελείται από δύο αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα. Στόχος αυτής της εισαγωγικής, σχετικά απλής, περίπτωσης είναι αφενός η επεξήγηση των συμβόλων που θα χρησιμοποιηθούν περαιτέρω, και αφετέρου ο σχολιασμός γύρω από τον παράγοντα εξοικείωσης του Μάριου με το παιχνίδι. Στα άκρα, παρουσιάζεται ο χρόνος εκτίμησης του κάθε κλάσματος σε δευτερόλεπτα (27 & 07) και η σειρά που εμφανίστηκε και εκτιμήθηκε το 7/9 ζεύγος κλασμάτων (01# & 66#). Στο κέντρο διακρίνονται τα αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα με τα ίχνη στάσεων του Μάριου: από το 0 προς το σημείο εκτίμησης (μαύρο «M»). Η έγχρωμη ροζ γραμμή αποτυπώνει την

πραγματική θέση του κλάσματος στην αριθμογραμμή και συνεπώς παρουσιάζεται και στα δύο στιγμιότυπα ακριβώς στην ίδια θέση (ροζ νύγμα/«τικ»). Βέλη αναπαράγουν το μονοπάτι κινήσεων του Μάριου: με γαλάζια βέλη οι στάσεις προς δεξιά, με μωβ προς τα αριστερά. Το πράσινο διάστημα σηματοδοτεί αλλεπάλληλες μπρος-πίσω κινήσεις, συνήθως πριν την τελική εκτίμηση. Για καλύτερη κατανόηση κάθε εικόνας, παρακαλούνται οι αναγνώστες να ακολουθήσουν με το δάκτυλό τους τα μονοπάτια. Γενικά, κάθε στάση που έχει σημανθεί, διαρκεί μεταξύ μισού και ενός δευτερολέπτου. Όσο πιο έντονη η γραμμή, τόσο περισσότερος ο χρόνος αναμονής στο σημείο εκείνο.

Πέραν από τον ρόλο εξοικείωσης και κατανόησης του παιχνιδιού στη βελτίωση της ταχύτητας εκτίμησης, όσον αφορά τα σημεία αναφοράς, στο περιστατικό αυτό ξεχωρίζει η στάση στη μέση της αριθμογραμμής (πιο ξεκάθαρη στην Εικόνα 3Β), γεγονός που εμφανίζεται πιο έντονα σε άρτιους παρονομαστές παρακάτω. Τα δύο αυτά φαινόμενα, του χρόνου εκτίμησης και του σημείου αναφοράς στη μέση της αριθμογραμμής, γενικά εμφανίζονται στην πλειονότητα των παρακάτω περιστατικών.

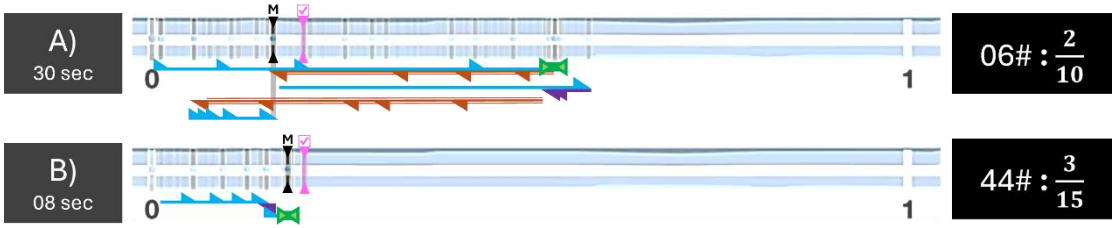


Εικόνα 4: Ζεύγος ισοδύναμων κλασμάτων 3/12 και 4/16.

Επιστρέφοντας στις αρχικές εκτιμήσεις, ο Μάριος που μόλις εκτίμησε με επιτυχία το 7/9 (Εικ. 3Α), πρέπει να εκτιμήσει το 3/12 (Εικ. 4Α). Ο συνδυασμός της πρώτης του επιτυχούς εκτίμησης και πως ακόμα ίσως δεν έχει κατανοήσει πλήρως το περιβάλλον του παιχνιδιού, οδηγεί τον Μάριο στην παρακάτω τεχνική—χωρίς να εκφράσει ότι παρατήρησε την ισοδυναμία 3/12 = 1/4. Με πορτοκαλί ραβδώσεις επισημαίνονται τα δώδεκα βήματα που έκανε (Εικ. 4Α), προσπαθώντας να χωρίσει την αριθμογραμμή σε ίσα τμήματα. Καθώς τα βήματά του δεν τον οδηγούν ως το 1, επιστρέφει στο 0, και ξαναπροσπαθεί. Φτάνοντας στο άκρο 1, λέει: «Εδώ προσπαθώ να βρώ… να το χωρίσω σε δώδεκα», και επιστρέφοντας στο 0, προσπαθεί να διατηρήσει τον ίδιο αριθμό τμημάτων.

Αντίθετα, ξεχωρίζει η προσέγγιση στο ισοδύναμο 4/16 (Εικ. 4Β), όπου η εκτίμηση φαίνεται απλή, με τον Μάριο να λέει: «Αυτό κάπου εδώ νομίζω

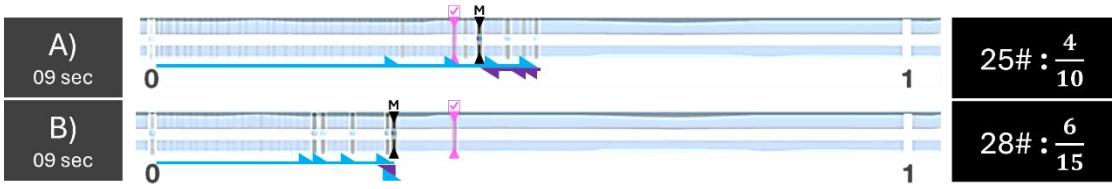
θα είναι», καθώς φαίνεται να κατευθύνεται άμεσα στο 1/4 της αριθμογραμμής. Όταν ο Μάριος αναγνώριζε πως ένα κλάσμα είναι στο πρώτο μισό της αριθμογραμμής, μεταξύ 0-1/2, συχνά ακολουθούσε την παραπάνω άμεση προσέγγιση, συνοδευόμμενη από μια παρεμφερή έκφραση—π.χ., Εικ. 5Β) στο κλάσμα 3/15: «Εμμ πιστεύω κάπου… κάπου εδώ θα είναι. Ωραία». Τέτοια κλάσματα ήταν τα προαναφερθέντα π.χ., 2/16 & 1/8, 2/14 & 1/7, που λόγω της εγγύτητας με το 0, δεν προσφέρονται για ιδιαίτερη μελέτη. Παρ' όλ' αυτά, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εκτιμήσεις κλασμάτων στο πρώτο μισό της αριθμογραμμής, των οποίων όμως ο παρονομαστής είναι το 10.



Εικόνα 5: Ζεύγος ισοδύναμων κλασμάτων 2/10 και 3/15.

Όταν παρουσιάστηκε το 06# κλάσμα 2/10, το πρώτο κλάσμα με 10 ως παρονομαστή που συνάντησε, ο Μάριος λέει: «Τώρα θα πάω στη μέση και από εδώ θα μετρήσω 5». Πράγματι, στην Εικόνα 5Α, φαίνεται πως κατευθύνθηκε προς τη μέση, και όταν ένιωσε άνετα με τη θέση του, άρχισε να μετράει τα βήματα, πίσω προς το 0 (με πορτοκαλί ραβδώσεις). Όπως και στην Εικόνα 4Α, όταν δεν ένιωσε ικανοποιημένος με τα βήματά του, επέστρεψε πάλι στη μέση, προσάρμοσε τη θέση του, και άρχισε πάλι να μετράει τα βήματα προς το 0.

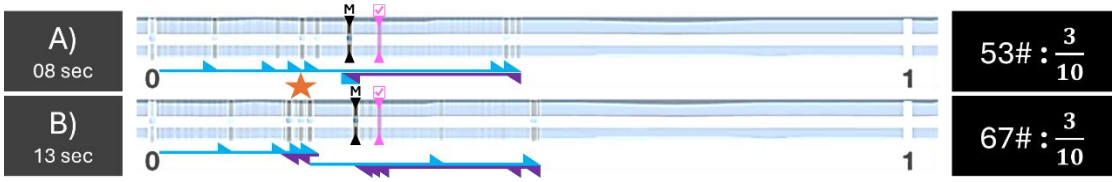
Αυτό το φαινόμενο παρουσιάζεται ακόμα πιο ξεκάθαρα στην Εικόνα 6, καθώς τα ισοδύναμα κλάσματα προσεγγίζονται από διαφορετική πλευρά την κάθε φορά, όπου και διακρίνονται τα αντίστοιχα σημεία αναφοράς, στο Α κοντά στο 1/2, στο Β κοντά στο 1/3.



Εικόνα 6: Ζεύγος ισοδύναμων κλασμάτων 4/10 και 6/15.

Στο 4/10 (Εικ. 6Α) φτάνει ως τη μέση, και επιστρέφει προς τα πίσω—λέγοντας: «Αυτό κοντά στη μέση. Εδώ.». Ενώ, στο 6/15, που πλησιάζει από τα αριστερά: «Αυτό λίγο πιο πάνω από το 1/3. Εδώ, εδώ νομίζω…» (Εικ. 6Β). Συνεπώς, ενώ τα ισοδύναμα κλάσματα 4/10 και 6/15

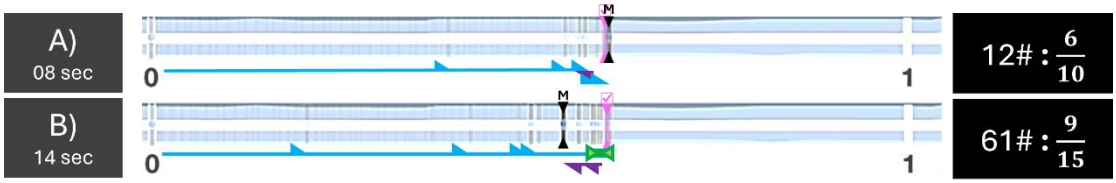
απλοποιούνται στο 2/5, φαίνεται πώς τα σημεία αναφοράς 1/2 = 5/10 και 1/3 = 5/15 χρησιμοποιούνται αντίστοιχα. Η χρήση ισοδυναμίας είναι έμμεση, με την έννοια του υποθετικού συλλογισμού ότι το κλάσμα 4/10, είναι κοντά στο 5/10 που είναι ισοδύναμο με το 1/2—και το 6/15, κοντά στο 5/15 που είναι ισοδύναμο με το 1/3.



Εικόνα 7: Ζεύγος διπλών κλασμάτων 3/10.

Αντίστοιχα, πολύ αργότερα όταν συναντάει τα 3/10 (Εικ. 7), φαίνεται να προτιμά τη μέση και στις δύο περιπτώσεις. Μάλιστα, λέει: «Αυτό… εδώ είναι η μέση…» και επιστρέφοντας προς τα πίσω: «κάπου… κάπου εδώ νομίζω. Ωραία.» (Εικ. 7Α). Ομοίως, και αργότερα: «Τώρα, και αυτό εδώ… εδώ είναι η μέση περίπου… κάπου εδώ νομίζω. Ωραία-» (Εικ. 7Β).

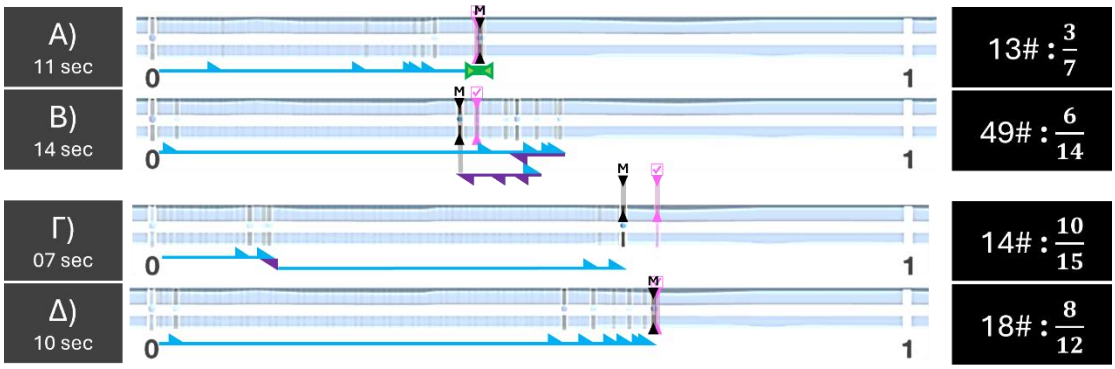
Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η συγκέντρωση σημείων στα αριστερά από τις τελικές του εκτιμήσεις (με πορτοκαλί αστέρι, Εικ. 7Α & Β). Φαίνεται πως η προσέγγιση του Μάριου ξεκίνησε σαν τη συνήθη προσέγγισή του μεταξύ 0-1/2 στην αριθμογραμμή, και μετά αφού παρατηρηθεί ο παρονομαστής, αποφασίζει ο Μάριος να κατευθυνθεί στη μέση, όπως και στις προηγούμενες του εκτιμήσεις με 10 ως παρονομαστή (Εικ. 5Α).



Εικόνα 8: Ζεύγος ισοδύναμων κλασμάτων 6/10 και 9/15.

Επιστρέφοντας στα ισοδύναμα ζεύγη (Εικ. 8), με 10 ως παρονομαστή ο Μάριος λέει: «Αυτό… Κάπου εδώ στη μέση εδώ πέρα. Ωραία!» (Εικ. 8Α). Αξιοσημείωτα, στο Β) πάλι επικαλείται τη μέση: «Αυτό… Λίγο πιο μπροστά από τη μέση. Πιο… εδώ νομίζω κάπου.» (Εικ. 8Β).

Επικεντρώνοντας στο 9/15 (Εικ. 8Β), καθώς δεν υπάρχει «εύκολη» υπόθεση για το πιο κλάσμα χρησιμοποιήθηκε σαν σημείο αναφοράς ή αριθμητικής στρογγυλοποίησης, μετά από αρκετές υποθέσεις για το πως ο Μάριος εξέφρασε με τέτοια αυτοπεποίθηση τα παραπάνω, προτίθεται η παρακάτω εξήγηση: μπορεί να έχει υπολογίσει πως 15÷2=7,5 όπου 9 >7,5. Άρα πρέπει να κατευθυνθεί «λίγο πιο μπροστά από τη μέση».



Εικόνα 9: Ζεύγη ισοδύναμων κλασμάτων 3/7 και 6/14, 10/15 και 8/12.

Τέλος, παρατίθενται δύο ζεύγη μαζί με τις εκφράσεις του Μάριου: «Εδώ… θα είναι… περίπου στη μέση. Κάπου εδώ πιστεύω. Ωραία.» (Εικ. 9Α). Τα 3/7 προσεγγίζονται από τα αριστερά, ενώ το ισοδύναμο 6/14, μετά από επίσκεψη στη μέση: «Εδώ…κοντά στη μέση θα είναι. Η μέση αν είναι κάπου εδώ, αυτό θα είναι… εδώ πέρα νομίζω… Ναι, ωραία» (Εικ. 9Β).

Αντίστοιχα, στο επόμενο ζεύγος, με παρονομαστή το 12: «Χμμ… εδώ θα είναι λίγο πιο πάνω από τη μέση. Κάπου εδώ.» (Εικ. 9Δ). Ενώ, όταν ο παρονομαστής είναι το 15: «Αυτό θα είναι κάπου εδώ.» (Εικ. 9Γ), παρουσιάζεται ενδιαφέρουσα συσσώρευση κοντά στο 1/3 όπως προηγουμένως με 15 ως παρονομαστή (Εικ. 7Β και 8Β), που μπορεί να είναι σύμπτωση ή ίσως αποκαλύπτει την αναγνώριση ισοδυναμίας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συνοψίζοντας, ο στόχος της παρούσας έρευνας ήταν η μελέτη ισοδυναμίας στην αριθμογραμμή μέσω σημείων αναφοράς χρησιμοποιώντας ένα παιχνίδι εκτίμησης θέσης κλασμάτων. Επιλέχθηκαν ζεύγη κλασμάτων που εξετάστηκαν μέσω τις οπτικοποίησης αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων σε αυτήν τη μελέτη περίπτωσης του Μάριου. Συγκεκριμένα, τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι διαφορετικά σημεία αναφοράς χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση ισοδύναμων κλασμάτων. Σε κλάσματα με άρτιους παρονομαστές φάνηκε κυρίως η χρήση του σημείου 1/2, όπου ιδιαίτερο ενδιαφέρον έδειξαν προσεγγίσεις με παρονομαστή το 10 (π.χ., Εικ. 5Α /6Α/8Α και Εικ. 7). Σε κλάσματα με 15 ως παρονομαστή παρουσιάστηκαν συγκεντρώσεις γύρω στο 1/3 κάθε φορά (π.χ., Εικ. 5Β/6Β/8Β και Εικ. 9Γ). Ο βαθμός εξοικείωσης με το παιχνίδι έπαιξε ρόλο στην προσέγγιση εκτίμησης, π.χ., στο 02# κλάσμα 3/12 (Εικ. 4Α) έγινε συστηματικός διαχωρισμός σε 12 τμήματα, σε αντίθεση με το ισοδύναμο 4/16 (Εικ. 4Β).

Η παρούσα έρευνα ενισχύει τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας που παρουσιάζουν μαθητές να ακολουθούν διαφορετικές στρατηγικές

εκτίμησης κλασμάτων και συνδυασμό αυτών (π.χ., Siegler, Thompson & Schneider, 2011), ενώ, σημαντικό εύρημα αποτελεί ο ρόλος της δομής των κλασμάτων η οποία φαίνεται να επηρεάζει τις προσεγγίσεις μαθητών, ακόμα και όταν τα κλάσματα έχουν το ίδιο μέγεθος—είναι ισοδύναμα.

Όσον αφορά τον πρωτότυπο τρόπο μελέτης της ισοδυναμίας στην αριθμογραμμή, μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εστιάσουν στον τρόπο προσέγγισης πιο πολύπλοκων κλασμάτων (με παρονομαστή μεγαλύτερο του 16) και να διερευνήσουν το ενδεχόμενο χρήσης διαφορετικών σημείων αναφοράς—από ίσως ελαφρώς μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες. Η αύξηση του παρονομαστή θα επιτρέψει πρόσβαση σε μεγαλύτερο πλήθος ισοδύναμων κλασμάτων, όπου θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τριάδες ή τετράδες κλασμάτων αντί ζευγών. Ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και η χρήση αντιπροσωπευτικών στιγμιοτύπων σε περιπτώσεις όπου οι μαθητές ακολούθησαν διαφορετικές τεχνικές εκτίμησης π.χ., την κίνηση της κεφαλής πάνω-κάτω κατά τον διαχωρισμό της αριθμογραμμής (Thoma, Bahnmueller & Moeller, 2023), ίσως με τη συνδυαστική χρήση οφθαλμικού ιχνηλάτη (eye-tracker).

1.Για trailer του παιχνιδιού: https://youtu.be/T7s7xSlLrac?si=E0aLs91kRcfRqXf2. Θερμές ευχαριστίες στους Kristian Kiili, Manuel Ninaus, και Antero Lindstedt για την προσφορά και προσαρμογή του παιχνιδιού για την παρούσα έρευνα.
2. Θερμές ευχαριστίες στους Korbinian Moeller, Julia Bahnmueller και Jessica Maisey για την καθοδήγηση και βοήθεια στην επιλογή κλασμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman?. *Contemporary Educational Psychology, 37*(4), 247-253. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001.

Δεσλή Δ., & Τριανταφύλλου Ε. (2022). Εκτιμήσεις πάνω σε αριθμογραμμή: η περίπτωση των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών,* (16), 5–25. ανακτήθηκε από https://ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/enedim/article/view/29626.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39-49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002.

Fazio, L., & Siegler, R. S. (2011). *Teaching fractions (Vol. 22).* North Coburg: International Academy of Education.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(4), 365-378. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90035-7.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary educational psychology, 26*(3), 400-417. https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1072.

Ninaus, M., Kiili, K., McMullen, J., & Moeller, K. (2017). Assessing fraction knowledge by a digital game. *Computers in Human Behavior, 70*, 197-206. https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.01.004.

Sidney, P. G., Thompson, C. A., & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology, 58*, 288-298. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science, 23*(7), 691-697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101.

Siegler, R.S., Thompson, C.A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001 .

Thoma, G., Bahnmueller, J., & Moeller, K. (2023). Problem solving when digging for fractions: a case study of a fraction number line game. In *Problem Solving in Mathematics Education: Proceedings of the 22nd ProMath Conference. Thessaloniki* (pp. 81-95).

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Μαρία Χειμωνή, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Κωνσταντίνος Χρίστου, Μάριος Πιττάλης & Χρύσω Αθανασίου

Τμήμα Επιστήμων της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

chimoni.maria@ucy.ac.cy; christou.constantinos@ucy.ac.cy; pitta-pantazi.demetra@ucy.ac.cy; pittalis.marios@ucy.ac.cy; athanasiou.chryso@ucy.ac.cy

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στη διερεύνηση της επίδρασης μιας σειράς ψηφιακών μαθημάτων στην εννοιολογική κατανόηση και διαδικαστική επάρκεια στην επίλυση εξίσωσης σε μαθητές και μαθήτριες της Στ' Δημοτικού. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκε ένα διδακτικό πείραμα στο οποίο μία ομάδα μαθητών/τριών συμμετείχε σε ψηφιακά μαθήματα (πειραματική ομάδα) και μία ομάδα μαθητών/τριών συμμετείχε σε μαθήματα στα οποία αξιοποιούνταν αποκλειστικά οι δραστηριότητες στο διδακτικό εγχειρίδιο (ομάδα ελέγχου). Όλοι οι μαθητές/ήτριες εξετάστηκαν στο ίδιο αρχικό και τελικό δοκίμιο. Τα ποσοτικά και ποιοτικά αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν σημαντική επίδραση των ψηφιακών μαθημάτων στην ανάπτυξη της έννοιας της εξίσωσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις μέρες μας, υπάρχει πληθώρα ψηφιακών εργαλείων που είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Drijvers & Sinclair, 2023). Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη ψηφιακών πλατφόρμων, οι οποίες συνδυάζουν διάφορες λειτουργίες, όπως εφαρμογίδια για αναπαράσταση, διερεύνηση και εξάσκηση σε μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, σύνδεση με πολλαπλά πολυμέσα και κοινότητες μάθησης, καθώς και παροχή συστημάτων αξιολόγησης που καταγράφουν ηλεκτρονικά τα δεδομένα των μαθητών/τριών και συνοψίζουν αυτόματα την επίδοσή τους σε αναφορές ή πίνακες (Pepin et al., 2017).

Παρά την ευρεία διάδοση των ψηφιακών πλατφόρμων, δεν υπάρχουν ακόμα επαρκή ερευνητικά δεδομένα που να επιβεβαιώνουν την προσθετική τους αξία σε σχέση με τη χρήση παραδοσιακών εργαλείων, όπως το έντυπο διδακτικό εγχειρίδιο (Choppin et al., 2014). Ωστόσο, η αποτελεσματικότητα τους δεν μπορεί να θεωρηθεί ως δεδομένη, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών που έδειξαν ότι, γενικά, η μετρήσιμη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων ως συνέπεια της χρήσης της τεχνολογίας στα μαθηματικά

είναι μέτρια, ενώ παρατηρείται ακόμα μικρότερη βελτίωση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων ανώτερης μαθηματικής σκέψης σε σχέση με την εξάσκηση σε βασικές δεξιότητες (Pepin et al., 2017).

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να αξιολογήσει την επίδραση της αξιοποίησης των ψηφιακών πλατφόρμων στη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων των μαθητών/τριών στα μαθηματικά. Στο πλαίσιο αυτό, παρουσιάζεται ο σχεδιασμός μιας σειράς μαθημάτων, τα οποία περιλαμβάνουν τη χρήση ψηφιακών πλατφόρμων. Τα μαθήματα επικεντρώνονται στο θέμα της Άλγεβρας και ειδικότερα στις ιδιότητες των ισοτήτων και στην επίλυση εξίσωσης στη Στ΄ Δημοτικού.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Προηγούμενες έρευνες που εξέτασαν κατά πόσο η χρήση της τεχνολογίας συνεισφέρει στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης και στην εννοιολογική κατανόηση βασικών εννοιών και διαδικασιών έχουν δώσει αντικρουόμενα αποτελεσμάτα (Drijvers & Sinclair, 2023). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αποτελεσματικότητα της χρήσης της τεχνολογίας εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τον διδακτικό σχεδιασμό και τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται στην τάξη (Drijvers et al., 2014). Για παράδειγμα, η έρευνα των Andrade-Aréchiga et al. (2012) έδειξε ότι η χρήση μιας ψηφιακής πλατφόρμας για τη διδασκαλία της μαθηματικής ανάλυσης σε μαθητές και μαθήτριες λυκείου είχε θετικά αποτελέσματα. Ωστόσο, το διδακτικό πείραμα των Drijvers et al. (2014) έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών και μαθητριών Β΄ Γυμνασίου στην επίλυση εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού ήταν χαμηλότερη στην πειραματική ομάδα που αξιοποίησε σχετικά διαδικτυακά εφαρμογίδια σε σχέση με την ομάδα ελέγχου. Το διδακτικό πείραμα των Chimoni et al. (2023) με μαθητές/ήτριες Ε΄ Δημοτικού έδειξε τον σημαντικό ρόλο ορισμένων χαρακτηριστικών των διαιδυκτυακών εφαρμογιδίων, όπως οι ανοικτού τύπου ερωτήσεις και η διασύνδεση με καταστάσεις της καθημερινής ζωής για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης.

Γενικότερα, η χρήση της τεχνολογίας φαίνεται να έχει μικρή θετική επίδραση στα μαθησιακά αποτελέσματα σε μαθήματα άλγεβρας (Rakes et al., 2014). Ένας πιθανός λόγος είναι η πολύπλευρη φύση της αλγεβρικής σκέψης, η οποία συνδυάζει βαθιά εννοιολογική κατανόηση της χρήσης των συμβόλων (Arcavi, 1994), αλλά και διαδικαστικής επάρκειας στην εφαρμογή μετασχηματισμών σε αλγεβρικές παραστάσεις (Kieran, 2022). Ως εκ τούτου, χρειάζεται να γίνει ένας προσεκτικός διδακτικός σχεδιασμός, ώστε η τεχνολογία να αξιοποιείται με τρόπο που εξυπηρετεί τόσο την εννοιολογική κατανόηση όσο και τη διαδικαστική επάρκεια.

Οι ψηφιακές πλατφόρμες φαίνεται να δίνουν πληθώρα επιλογών σε σχέση με τον διδακτικό σχεδιασμό των μαθημάτων στα Μαθηματικά. Ένα από τα πλεονεκτήματά τους είναι ο συνδυασμός εφαρμογιδίων που προσεγγίζουν δυναμικά τις μαθηματικές έννοιες μέσα από δραστηριότητες διερεύνησης, εφαρμογών και εξάσκησης (Peppin et al., 2017). Επιπρόσθετα, δίνουν την επιλογή για άμεση παρακολούθηση της προόδου της εργασίας των μαθητών/τριών και παροχή άμεσης ανατροφοδότησης, κάτι το οποίο έχει χαρακτηριστεί ως ένα από τα πλέον ισχυρά πλεονεκτήματα της χρήσης της τεχνολογίας (Hoyles, 2018). Ένα άλλο πλεονέκτημα των ψηφιακών πλατφόρμων είναι η δυνατότητα για συχνή αναδιαμόρφωση του περιεχομένου τους, καθώς και η ευέλικτη προσαρμογή τους σε διαφορετικά μοντέλα διδασκαλίας και μάθησης (Fletcher et al., 2012).

Λαμβάνοντας υπόψη τα διαθέσιμα ερευνητικά δεδομένα, αλλά και τις δυνατότητες που φαίνεται να έχουν οι σύγχρονες ψηφιακές πλατφόρμες, η παρούσα εργασία εστιάζεται στη χρήση ψηφιακών πλατφόρμων για τη διδασκαλία και μάθηση της έννοιας της εξίσωσης και της διαδικασίας επίλυσης εξισώσεων με τη χρήση αλγεβρικών μεθόδων στη Στ΄ Δημοτικού. Οι μαθητές/ήτριες της Στ’ Δημοτικού διδάσκονται για πρώτη φορά την έννοια της εξίσωσης και επίλυσης εξίσωσης, με σκοπό τη μετάβαση τους από τη χρήση αριθμητικών στρατηγικών για τον υπολογισμό της τιμής του αγνώστου σε απλές εξισώσεις μίας και δύο πράξεων (αντίθετες πράξεις ή δοκιμή και έλεγχος) στη χρήση αλγεβρικών στρατηγικών (εφαρμογή ιδιοτήτων της ισότητας). Ως εκ τούτου, η έρευνα εξετάζει την επίδραση μιας σειράς μαθημάτων με τη χρήση ψηφιακών πλατφόρμων στην επίδοση των μαθητών και μαθητριών Στ’ Δημοτικού σε έργα που αφορούν την έννοια και τη διαδικασία επίλυσης εξίσωσης. Επιπλέον, διερευνάται η επίδραση των μαθημάτων αυτών στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση εξίσωσης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Ο συνολικός αριθμός των συμμετεχόντων ήταν 10 εκπαιδευτικοί και 164 μαθητές/ήτριες της Στ΄ Δημοτικού (μέση ηλικία 11,5 χρόνια) από 5 δημοτικά σχολεία της Κύπρου. Όλοι/ες οι εκπαιδευτικοί είχαν εμπειρία άνω των 15 ετών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ένα τμήμα από κάθε σχολείο αποτέλεσε την πειραματική ομάδα, ενώ ένα άλλο τμήμα αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου. Η πειραματική ομάδα χρησιμοποίησε τις ψηφιακές πλατφόρμες, ενώ η ομάδα ελέγχου το διδακτικό εγχειρίδιο.

Μαθήματα

Οι μαθητές/ήτριες της πειραματικής ομάδας παρακολούθησαν επτά συνολικά μαθήματα διάρκειας 80 λεπτών το καθένα που κάλυπταν τα πιο κάτω θέματα:

Μάθημα 0: Μάθημα για εξοικείωση εκπαιδευτικών και μαθητών/τριών στις ψηφιακές πλατφόρμες

Μάθημα 1: Επανάληψη – Μεταβλητή, αλγεβρική παράσταση

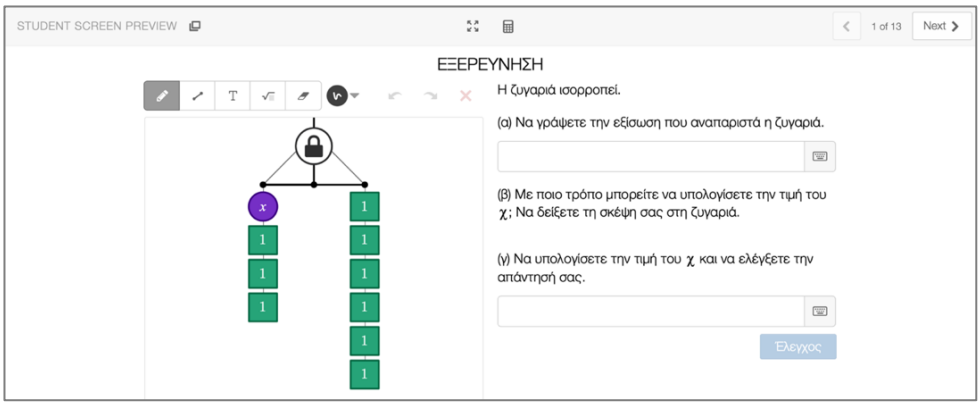
Μαθήματα 2 και 3: Έννοια της ισότητας και ιδιότητες ισοτήτων

Μαθήματα 4, 5 και 6: Έννοια της εξίσωσης και επίλυση εξίσωσης

Οι μαθητές/ήτριες της Ομάδα Ελέγχου παρακολούθησαν τα Μαθήματα 1-6, αξιοποιώντας αποκλειστικά το διδακτικό εγχειρίδιο.

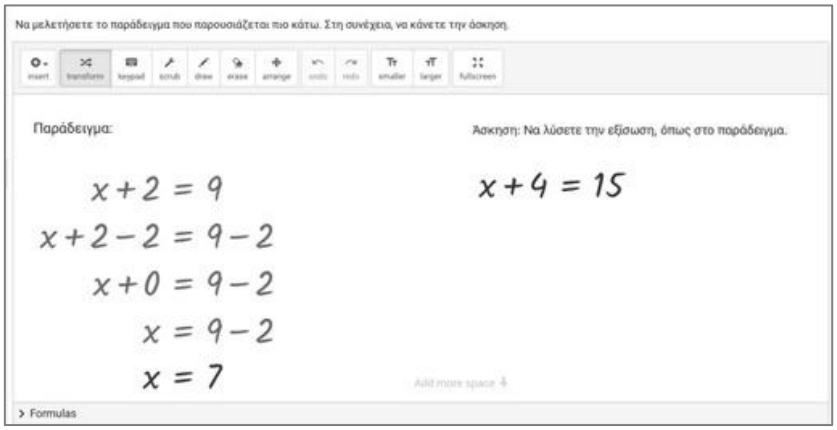
Περιγραφή ψηφιακών πλατφόρμων

Για το σχεδιασμό των μαθημάτων της Πειραματικής Ομάδας, αναπτύχθηκαν ψηφιακές δραστηριότητες, αξιοποιώντας τις ψηφιακές πλατφόρμες Desmos (www.desmos.com) και Graspable (www.graspable.com). Η πρώτη ψηφιακή πλατφόρμα παρέχει τη δυνατότητα αξιοποίησης, επεξεργασίας και σχεδιασμού ψηφιακών δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες αυτές έχουν δυναμικό χαρακτήρα και προσφέρονται για την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, επιτρέποντα την άμεση επικοινωνία και διάδραση. Στη δραστηριότητα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 1, οι μαθητές/ήτριες εξερευνούν την έννοια της εξίσωσης, αξιοποιώντας την αναπαράσταση της ζυγαριάς από την οποία είναι δυνατόν να αφαιρέσουν βαρίδια, ώστε να καταλήξουν στον υπολογισμό της άγνωστης ποσότητας (Stephens et al., 2022). Η εξερεύνηση έχει ως στόχο οι μαθητές/ήτριες να συζητήσουν την ιδέα της διαγραφής της ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές, ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία της ζυγαριάς.



Εικόνα 1: Το ψηφιακό περιβάλλον DESMOS

Η δεύτερη ψηφιακή πλατφόρμα παρέχει τη δυνατότητα για αξιοποίηση, επεξεργασία και σχεδιασμό δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούν τη συμβολική γλώσσα της άλγεβρας. Οι δραστηριότητες αυτές αποσκοπούν στην ανάπτυξη διαδικαστικής επάρκειας σε σχέση με τον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων, δίνοντας έμφαση στην εξάσκηση στους συντακτικούς κανόνες της άλγεβρας (Kieran, 2022).



Εικόνα 2: Το ψηφιακό περιβάλλον Graspable

Στη δραστηριότητα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 2, οι μαθητές/ήτριες παρατηρούν τα βήματα που ακολουθούνται, ώστε να μετασχηματιστούν τα δύο μέλη της εξίσωσης. Για να επιλύσουν μία εξίσωση, χρειάζεται να επιλέξουν το σύμβολο =. Τότε παρουσιάζεται το σύμβολο Ε (εξίσωση) και υπολογιστική μηχανή με την οποία καταγράφουν την πράξη που χρειάζεται να γίνει ταυτόχρονα και στα δύο μέλη της εξίσωσης, ώστε να εξαχθεί η τιμή του αγνώστου.

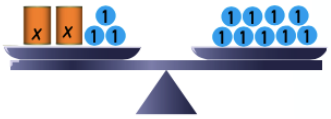
Εργαλεία συλλογής δεδομένων

Για την αξιολόγηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων, σχεδιάστηκαν δύο διαγνωστικά δοκίμια, ένα αρχικό και ένα τελικό. Το αρχικό δοκίμιο περιλάμβανε 18 έργα που αξιολογούσαν την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών/τριών σε θέματα άλγεβρας. Το τελικό δοκίμιο περιλάμβανε συνολικά 22 έργα που κατανέμονταν σε 2 μέρη. Το Μέρος Α΄ ήταν πανομοιότυπο με το αρχικό δοκίμιο ενώ το Μέρος Β΄ περιλάμβανε 4 έργα που αφορούσαν τα θέματα που είχαν διδαχθεί κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει παραδείγματα των έργων.

Διαδικασία

Το διδακτικό πείραμα πραγματοποιήθηκε σε 4 φάσεις. Στην πρώτη φάση οι εκπαιδευτικοί παρακολούθησαν επιμόρφωση από την ερευνητική ομάδα σε σχέση με τον διδακτικό σχεδιασμό των μαθημάτων, καθώς και για τον τρόπο χρήσης των ψηφιακών πλατφόρμων. Στη δεύτερη φάση χορηγήθηκε το αρχικό δοκίμιο στους/στις μαθητές/τριες. Στην τρίτη φάση οι εκπαιδευτικοί εφάρμοσαν τα μαθήματα στις τάξεις τους. Στα τμήματα

όπου πραγματοποιήθηκαν οι ψηφιακές δραστηριότητες, αξιοποιήθηκαν οθόνες αφής. Στην τέταρτη φάση χορηγήθηκε το τελικό δοκίμιο.

Μέρος	Έννοια/διαδικασία	Παράδειγμα έργου
Α	Μετάφραση λεκτικών εκφράσεων σε αλγεβρικές	Ποια αλγεβρική παράσταση αντιστοιχεί στη λεκτική έκφραση «αφαιρώ 5 από το κ»; (α) $5-\kappa$ (β) -5κ (γ) $-5-\kappa$ (δ) $\kappa-5$
Β	Αναπαράσταση και επίλυση εξίσωσης	Να γράψετε την εξίσωση που αναπαριστά η ζυγαριά και να την επιλύσετε. 

Πίνακας 1: Παραδείγματα έργων στο τελικό δοκίμιο

Ανάλυση αποτελεσμάτων

Για να διαπιστωθεί κατά πόσο υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών/τριών (πειραματική και ελέγχου) στο αρχικό δοκίμιο, έγινε Ανάλυση Διασποράς (ANOVA). Για την αξιολόγηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων με βάση τα δεδομένα του αρχικού και του τελικού δοκιμίου, πραγματοποιήθηκε Ανάλυση Συν-διασποράς (ANCOVA), ελέγχοντας την αρχική επίδοση. Επιπρόσθετα, έγινε καταγραφή της συχνότητας χρήσης αριθμητικών και αλγεβρικών στρατηγικών στα έργα επίλυσης εξίσωσης στο τελικό δοκίμιο. Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν με το στατιστικό πακέτο SPSS.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τα αποτελέσματα της Ανάλυσης Διασποράς, τα οποία δείχνουν ότι δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους επίδοσης στο αρχικό δοκίμιο μεταξύ της ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ομάδας ($F=1,42$, $p>0,05$). Αυτό καταδεικνύει ότι το επίπεδο της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών/τριών στις δύο ομάδες πριν από την έναρξη των μαθημάτων ήταν το ίδιο.

Μεταβλητή	Ομάδα Ελέγχου (N=83)		Πειραματική Ομάδα (N=81)		F	*p*
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.		
Αρχικό Δοκίμιο	0,68*	0,17	0,72*	0,16	1,42	0,23

*Η συνολική επίδοση στο δοκίμιο σταθμίστηκε στη μονάδα.

Πίνακας 2: Ανάλυση διασποράς στην επίδοση των μαθητών/τριών στο αρχικό δοκίμιο

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης συν-διασποράς παρουσιάζονται στον Πίνακα 3. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η πειραματική ομάδα είχε στατιστικά υψηλότερο μέσο όρο (M=0,82) στο τελικό δοκίμιο σε σύγκριση με την ομάδα ελέγχου ($M_{Π.Ο.}$ =0,82, $M_{Ο.Ε.}$=0,76, F=5,18, p<0,05). Το μοντέλο που προκύπτει από τη συγκεκριμένη ανάλυση ερμηνεύει το 75% της διασποράς στους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών/τριών στο τελικό δοκίμιο, ποσοστό που κρίνεται ως αρκετά υψηλό.

Μεταβλητή	Ομάδα Ελέγχου (N=83)		Πειραματική Ομάδα (N=81)		F	p
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.		
Τελικό Δοκίμιο	0,76	0,18	0,82	0,14	5,18	0,02

R^2 = 75%

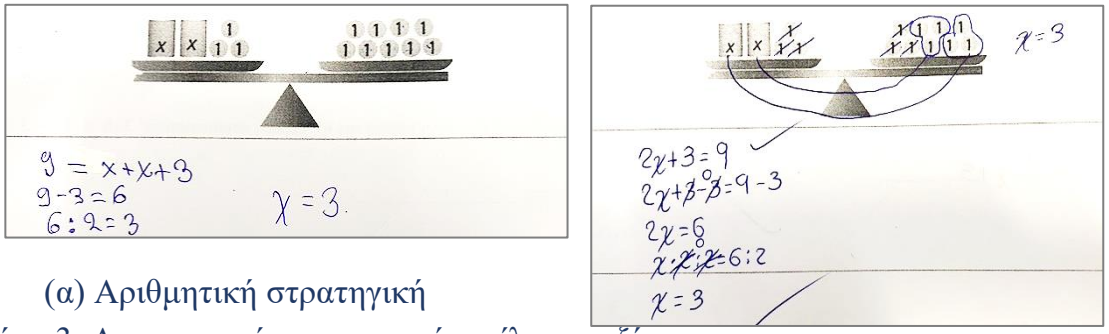
Πίνακας 3: Ανάλυση συν-διασποράς στην επίδοση των μαθητών/τριών στο τελικό δοκίμιο με συν-μεταβλητή την επίδοσή τους στο αρχικό δοκίμιο

Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει τη συχνότητα εμφάνισης τριών κατηγοριών στρατηγικών στα έργα επίλυσης εξίσωσης: «αριθμητική στρατηγική», (αντίθετες πράξεις ή δοκιμή και έλεγχος), «αλγεβρική στρατηγική» (εφαρμογή των ιδιοτήτων της ισότητας) και «καμία στρατηγική» (περιπτώσεις όπου δεν παρουσιάζονται ξεκάθαρα μία από τις δύο στρατηγικές). Όπως φαίνεται, το 42% των μαθητών/τριών της πειραματικής ομάδας χρησιμοποίησε αλγεβρική στρατηγική, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για την ομάδα ελέγχου ήταν 28%. Το ποσοστό των μαθητών/τριών της πειραματικής ομάδας που χρησιμοποίησε αριθμητικές στρατηγικές ήταν 17%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για την ομάδα ελέγχου ήταν 31%.

Στρατηγική	Ομάδα Ελέγχου (N=83)	Πειραματική Ομάδα (N=81)
	f (%)	*f* (%)
Αριθμητική στρατηγική	31%	17%
Αλγεβρική στρατηγική	28%	42%
Καμία στρατηγική	41%	41%

Πίνακας 4: Συχνότητα αριθμητικών και αλγεβρικών στρατηγικών στην επίλυση εξίσωσης.

Η Εικόνα 3 παρουσιάζει παραδείγματα αριθμητικών και αλγεβρικών στρατηγικών από δύο μαθητές/ήτριες της πειραματικής ομάδας. Στην εικόνα 3α φαίνεται η χρήση αντίθετων και αντίστροφων πράξεων. Στην εικόνα 2 φαίνεται η αξιοποίηση των ιδιοτήτων της ισότητας και στα δύο βήματα επίλυσης της εξίσωσης. Παράλληλα, φαίνεται και διαγραμματικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε.



(α) Αριθμητική στρατηγική

Εικόνα 3: Διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης εξίσωσης

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα του διδακτικού πειράματος έδειξαν ότι η χρήση των ψηφιακών πλατφόρμων ενίσχυσε τα μαθησιακά αποτελέσματα. Η πειραματική ομάδα πέτυχε μεγαλύτερο μέσο όρο στο τελικό δοκίμιο, αποτέλεσμα το οποίο είναι δυνατόν να αποδοθεί στον διδακτικό σχεδιασμό των μαθημάτων, τα οποία πιθανόν να ευνόησαν σε μεγαλύτερο βαθμό τόσο την εννοιολογική διδασκαλία των νέων εννοιών όσο και τη διαδικαστική επάρκεια. Το αποτέλεσμα αυτό υποστηρίζεται και από την ανάλυση των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές και μαθήτριες σε έργα επίλυσης εξίσωσης. Μία από τις μεγαλύτερες δυσκολίες που έχουν οι μαθητές/ήτριες στην άλγεβρα είναι να αντιληφθούν ότι κάθε μέλος μιας ισότητας αναπαριστά τόσο μια πράξη όσο και ένα ενιαίο μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο μπορούν να γίνουν παρεμβάσεις, καθώς και το ότι τα δύο αυτά μέλη είναι ισοδύναμα (Jupri et al., 2014). Η αξιοποίηση των δυναμικών ζυγαριών στο ψηφιακό περιβάλλον και του πειραματισμού στην πρόσθεση και αφαίρεση αντικειμένων φαίνεται να υποβοήθησε στην εδραίωση της έννοιας αυτής, αλλά και των ιδιοτήτων της ισότητας (Stephens et al., 2022). Αντίθετα, οι μαθητές/ήτριες της Ομάδας Ελέγχου δεν είχαν αυτή τη δυνατότητα, αφού στο διδακτικό εγχειρίδιο η ζυγαριά παρουσιαζόταν στατικά στο χαρτί και δεν υπήρχε η άμεση ανατροφοδότηση για τη διατήρηση της ισορροπίας ή όχι. Επιπρόσθετα, η χρήση των μετασχηματιστικών αλγεβρικών δραστηριοτήτων, φαίνεται να υποστήριξε την προοδευτική κατασκευή ενός νοητικού σχήματος (Freudenthal, 1991) για την επίλυση εξίσωσης που προχώρησε από τις αριθμητικές στρατηγικές σε συγκεκριμένες διαδικασίες για την προσέγγιση εξισώσεων με αλγεβρικές στρατηγικές. Με τον τρόπο αυτό δόθηκε έμφαση και στον διαδικαστικό χαρακτήρα της επίλυσης εξίσωσης,

ο οποίος βασίζεται στους συντακτικούς κανόνες της άλγεβρας (Kieran, 2022).

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι η χρήση των ψηφιακών πλατφόρμων σε μαθήματα άλγεβρας είναι δυνατόν να συνεισφέρει στη μεγιστοποίηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων, αλλά αυτό προϋποθέτει προσεκτικό διδακτικό σχεδιασμό και αξιοποίηση διαφορετικών ψηφιακών πλατφόρμων ανάλογα με την υπό έμφαση μαθηματική έννοια και διαδικασία. Φαίνεται ότι στην περίπτωση της διδασκαλίας της έννοιας της εξίσωσης επηρέασε με θετικό τρόπο τα μαθησιακά αποτελέσματα ο συνδυασμός κατάλληλων δραστηριοτήτων εννοιολογικής κατανόησης και διαδικαστικής επάρκειας. Ωστόσο, τα αποτελέσματα αυτά είναι δυνατόν να οφείλονται και σε άλλα χαρακτηριστικά που ευνοεί το περιβάλλον της ψηφιακής πλατφόρμας, όπως η άμεση ανατροφοδότηση από το ψηφιακό περιβάλλον και τον/την εκπαιδευτικό και η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών/τριών. Μελλοντικές έρευνες είναι δυνατόν να εστιάσουν περισσότερο στη μέτρηση της επίδρασης των παραγόντων αυτών.

Καταλήγοντας, η παρούσα εργασία προσφέρει ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν ότι οι ψηφιακές πλατφόρμες φαίνεται να συμπεριλαμβάνονται στα σύγχρονα διαθέσιμα μέσα που δίνουν τη δυνατότητα για αλλαγή της φύσης του «κάνω μαθηματικά» και της σχέσης βασικών διαδικαστικών δεξιοτήτων και εννοιολογικής κατανόησης, των διδακτικών πρακτικών και της αξιολόγησης (Drijvers & Sinclair, 2023).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Andrade-Aréchiga, M., López, G., & López-Morteo, G. (2012). Assessing effectiveness of learning units under the teaching unit model in an undergraduate mathematics course. *Computers and Education*, *59*, 594–606. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.010

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24–35.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2023). Two different types of technologically enhanced intervention modules to support early algebraic thinking. *Education and Information Technologies*, *28*(3), 3417-3441. https://doi.org/10.1007/s10639-022-11331-x

Choppin, J., Carson, C., Borys, Z., Cerosaletti, C., & Gillis, R. (2014). A typology for analyzing digital curricula in mathematics education. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, *2*(1), 11–25.

Drijvers, P., Doorman, M., Kirschner, P. et al. The Effect of Online Tasks for Algebra on Student Achievement in Grade 8. *Technology,*

Knowledge and Learning, *19*, 1–18 (2014). https://doi.org/10.1007/s10758-014-9217-5

Drijvers, P. & Sinclair, N. (2023). The role of digital technologies in mathematics education: purposes and perspectives. *ZDM–Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01535-x

Fletcher, G., Scaffhauser, D, & Levin, D. (2012). *Out of Print: Reimagining the K-12 textbook in a digital age*. State Educational Technology Directors Association.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer.

Hoyles, C. (2018) Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Ed*ucation, *20*(3), 209–228. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1484799

Jupri, A., Drijvers, P. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 683–710 (2014). https://doi.org/10.1007/s13394-013-0097-0

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Pepin, B., Choppin, J., Ruthven, K., & Sinclair, N. (2017). Digital curriculum in mathematics education: *Foundations for change. ZDM Mathematics Education*, *49*, 645–661. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0879-z

Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research*, *80*(3), 372–400. https://doi.org/10.3102/0034654310374880

Stephens, A., Sung, Y., Strachota, S., Torres, R.V., Morton, K., Murphy, A., Gardiner, Blanton, M., Knuth, E. & Stroud, R. (2022). The role of balance scales in supporting productive thinking about equations among diverse learners. *Mathematical Thinking and Learning*, *24*(1), 1–18, https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1793055

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

[1]Μαρία Λάτση, [2]Χριστίνα Γκρέκα

[1,2]Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Φιλοσοφική Σχολή, Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

[1]mlatsi@ppp.uoa.gr , [2]xristgreka@eds.uoa.gr

Με αφετηρία το αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον για τη χρήση ψηφιακών παιχνιδιών για τα μαθηματικά και την ανάγκη για σύνδεση της σχολικής γνώσης με τον πραγματικό κόσμο, σε αυτή την έρευνα σχεδιασμού αξιοποιήσαμε τη μεθοδολογία Σχεδιαστικής Σκέψης με στόχο να διερευνήσουμε τις μαθηματικές έννοιες που αναδύονται καθώς 6 μαθητές της ΣΤ Δημοτικού τροποποιούν ένα ψηφιακό μαθηματικό παιχνίδι. Συμπεραίνουμε πως η δραστηριότητα τροποποίησης του ψηφιακού παιχνιδιού μέσα από τις φάσεις της Σχεδιαστικής Σκέψης παρείχε στους μαθητές ένα ρεαλιστικό και με νόημα πλαίσιο στο οποίο ανέπτυξαν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα αναφορικά με έννοιες όπως οι αρνητικοί αριθμοί, η επεξεργασία δεδομένων γραφημάτων και η αλγεβρική έκφραση.

Λέξεις κλειδιά: ψηφιακά μαθηματικά παιχνίδια, Σχεδιαστική Σκέψη, τροποποίηση μαθηματικών παιχνιδιών, Δημοτικό

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και η εκπαιδευτική αξιοποίηση των ψηφιακών παιχνιδιών απασχολεί την εκπαιδευτική έρευνα εδώ και ήδη μία εικοσαετία (Pan et. al., 2022), σήμερα, οι ερευνητές προτείνουν περισσότερο κατασκευαστικές προσεγγίσεις, στο πλαίσιο των οποίων τα παιδιά δεν περιορίζονται στο ρόλο του παίκτη αλλά αναπτύσσουν έννοιες κατασκευάζοντας τα δικά τους παιχνίδια (Kafai & Burke, 2015). Παράλληλα, επιχειρώντας τη διασύνδεση της σχολικής γνώσης με τον πραγματικό κόσμο (Hwa, 2018) το ενδιαφέρον στρέφεται σε εκπαιδευτικές προσεγγίσεις, εμπνευσμένες από επαγγελματικά πεδία, όπως αυτή της Σχεδιαστικής Σκέψης (Huq & Gilbert, 2017), στο πλαίσιο των οποίων τα παιδιά δημιουργούν «γρήγορα πρωτότυπα», ενώ σχεδιάζουν λύσεις σε πραγματικά προβλήματα.

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών που χρησιμοποιούν παιδιά ηλικίας 12 ετών, καθώς τροποποιούν ένα ψηφιακό παιχνίδι ακολουθώντας τις φάσεις της Σχεδιαστικής Σκέψης. Ειδικότερα:

1ο Ερευνητικό Ερώτημα: Ποιες μαθηματικές έννοιες έρχονται στο προσκήνιο, καθώς οι μαθητές παίζουν και κυρίως καθώς τροποποιούν ένα μαθηματικό παιχνίδι το οποίο έχει σχεδιαστεί αρχικά για μαθητές των πρώτων τάξεων του Δημοτικού;

2ο Ερευνητικό Ερώτημα: Πώς αυτές οι μαθηματικές έννοιες εξελίσσονται μέσα από τις φάσεις της Σχεδιαστικής Σκέψης;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η Σχεδιαστική Σκέψη (Design Thinking) είναι μια μεθοδολογία που χρησιμοποιούν οι σχεδιαστές για να κατανοήσουν καλύτερα τις ανάγκες των χρηστών τους, ώστε να αναπτύξουν καινοτόμες λύσεις ή προϊόντα που ανταποκρίνονται σε αυτές. Πραγματοποιείται σε μια ακολουθία φάσεων κατά τις οποίες: α) εξερευνούν τις ανάγκες των χρηστών, β) πλαισιώνουν το πρόβλημα, γ) αναπτύσσουν και δοκιμάζουν πρωτότυπα και τέλος δ) παρουσιάζουν σε κοινό αυτό που έχουν σχεδιάσει (Huq & Gilbert, 2017). Στο πλαίσιο του μετασχηματισμού της μεθοδολογίας σε εκπαιδευτικά πλαίσια, τα παιδιά σκέφτονται σαν σχεδιαστές, διερευνούν πραγματικά προβλήματα και σχεδιάζουν λύσεις, δημιουργώντας «γρήγορα πρωτότυπα», τα οποία βελτιώνουν μέσα από κύκλους ανατροφοδότησης-επανασχεδιασμού. Οι δραστηριότητες της Σχεδιαστικής Σκέψης συνάδουν έτσι με την κατασκευαστική θεώρηση της μάθησης (Papert, 1980), σύμφωνα με την οποία τα παιδιά μαθαίνουν μέσα από την κατασκευή τεχνουργημάτων με προσωπικό και συλλογικό νόημα, (Kafai & Burke, 2015), όσο και με την προσέγγιση των ρεαλιστικών μαθηματικών (Freudenthal, 1968), συνδέοντας τα μαθηματικά με την εμπειρία των παιδιών και τις προκλήσεις του πραγματικού κόσμου.

Από την άλλη τα ψηφιακά παιχνίδια φαίνεται να έχουν ιδιαίτερα θετική επίδραση στη μάθηση των μαθηματικών αφού υποστηρίζουν την ενσωμάτωση των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών σε ρεαλιστικά πλαίσια κάνοντας έτσι τις μαθηματικές έννοιες περισσότερο προσβάσιμες στα παιδιά (Pan et al., 2022). Ωστόσο, το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών που αφορούν την εκπαιδευτική χρήση ψηφιακών παιχνιδιών αναφέρεται κυρίως σε ψηφιακά παιχνίδια πρακτικής και εξάσκησης, τα οποία χρησιμοποιούνται συμπληρωματικά της παραδοσιακής διδασκαλίας και διέπονται από μια συμπεριφοριστική αντίληψη (Pan και συν., 2022). Στο πλαίσιο μιας περισσότερο κατασκευαστικής προσέγγισης, οι Grizioti & Kynigos (2021) προτείνουν την εμπλοκή των μικρών παιδιών στο σχεδιασμό ψηφιακών παιχνιδιών μέσα από δραστηριότητες τροποποίησης τους (game modding): τα παιδιά τροποποιούν στοιχεία ήδη υπαρχόντων παιχνιδιών για να δημιουργήσουν τις δικές τους εκδοχές (mods) και έτσι εμπλέκονται σε δραστηριότητες πειραματισμού και διερεύνησης,

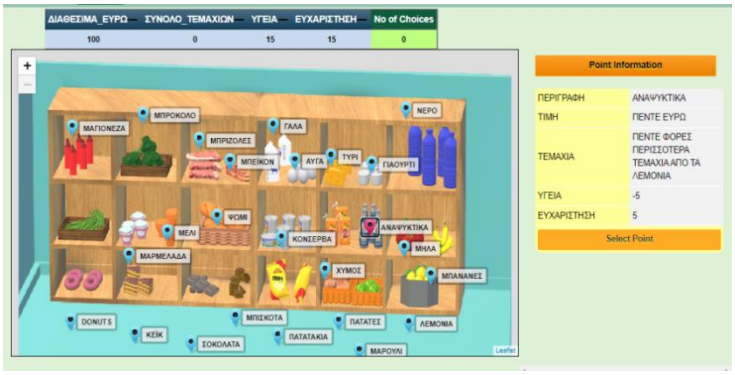
αναπαράστασης και ελέγχου των ιδεών τους, πριν αυτές ενσωματωθούν στο ψηφιακό παιχνίδι.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στοχεύοντας στο να διερευνήσουμε σε βάθος τη μαθησιακή δραστηριότητα των μαθητών στα πλαίσια των διαφόρων φάσεων της Σχεδιαστικής Σκέψης ακολουθήσαμε τη μεθοδολογία της έρευνας σχεδιασμού (Baker, 2018). Σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε μια εκπαιδευτική παρέμβαση βασισμένη στη Σχεδιαστική Σκέψη, κατά την οποία τα παιδιά τροποποίησαν το παιχνίδι ChoiCo "Βόλτα στην Υπεραγορά" με στόχο να το βελτιώσουν, ώστε να χρησιμοποιηθεί από μεγαλύτερους μαθητές.

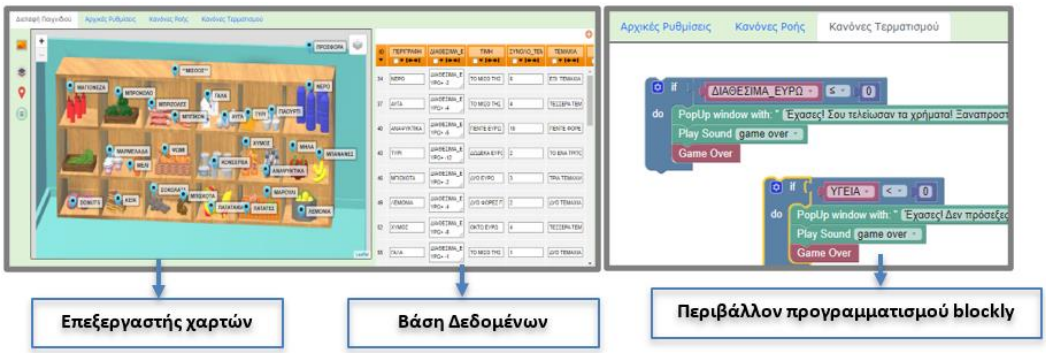
Το παιχνίδι "Βόλτα στην Υπεραγορά"

Το παιχνίδι "Βόλτα στην Υπεραγορά", περιλαμβάνεται στα Διαδραστικά Βιβλία του Ψηφιακού Σχολείου για τα Μαθηματικά και έχει ως στόχο να εμπλέξει τους μαθητές των πρώτων τάξεων του Δημοτικού στη διερεύνηση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων και νοερών υπολογισμών, καθώς και στη λήψη αποφάσεων στο πλαίσιο μιας παιγνιώδους δραστηριότητας. Έχει αναπτυχθεί με το ψηφιακό περιβάλλον ChoiCo, ένα δωρεάν ανοικτού τύπου ψηφιακό περιβάλλον για τη δημιουργία ψηφιακών παιχνιδιών (Grizioti & Kynigos, 2021). Ως παίκτες στο συγκεκριμένο παιχνίδι τα παιδιά επιλέγουν προϊόντα που έχουν θετικές και αρνητικές επιπτώσεις στα πεδία "διαθέσιμα ευρώ", "σύνολο τεμαχίων", "υγεία" και "ευχαρίστηση" (Εικόνα 1), με στόχο να συγκεντρώσουν όσο το δυνατόν περισσότερα τεμάχια πριν η τιμή κάποιου από τα πεδία μηδενιστεί.



Εικόνα 1: Το παιχνίδι «Βόλτα στην Υπεραγορά»

Ως σχεδιαστές τα παιδιά χρησιμοποιούν το περιβάλλον σχεδιασμού για να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν επιλογές ή πεδία στο παιχνίδι, να ορίσουν τις συνέπειες κάθε επιλογής και να προγραμματίσουν τους κανόνες του παιχνιδιού χρησιμοποιώντας μια γλώσσα προγραμματισμού με blocks (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Το περιβάλλον Σχεδιασμού του ChoiCo

Ροή δραστηριοτήτων

Η παρέμβαση ακολούθησε τις φάσεις της μεθοδολογία της Σχεδιαστικής Σκέψης (Huq & Gilbert, 2017). Στην πρώτη φάση της ανακάλυψης (discover) όλα τα παιδιά (22) ενός τμήματος της ΣΤ τάξης έπαιξαν το παιχνίδι και στη συνέχεια τα 6 παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα δημιούργησαν ένα ερωτηματολόγιο με στόχο να αντλήσουν πληροφορίες για τις απόψεις των συμμαθητών τους σχετικά με το παιχνίδι. Στη δεύτερη φάση της πλαισίωσης (define) τα παιδιά εξήγαγαν συμπεράσματα από τις απαντήσεις που έδωσαν οι συμμαθητές τους σχετικά με τις αλλαγές που θα χρειαζόταν να κάνουν στο παιχνίδι, ώστε να το βελτιώσουν κατά τη τρίτη φάση της ανάπτυξης (develop).

Πλαίσιο έρευνας, συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν 6 παιδιά, 3 αγόρια και 3 κορίτσια της ΣΤ τάξης του 4ου Δημοτικού Σχολείου Μεγάρων. Οι δραστηριότητες διήρκησαν συνολικά 6 ώρες, υλοποιήθηκαν στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου. Δύο ερευνήτριες καθοδήγησαν τα παιδιά σχετικά με τη χρήση του ψηφιακού εργαλείου και τη ροή των δραστηριοτήτων. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν περιλάμβαναν ηχητικές καταγραφές των συνομιλιών των μαθητών, αρχεία βίντεο καταγραφής οθόνης, ερωτηματολόγια και φύλλα παρατήρησης. Για την ανάλυση των δεδομένων, ακολουθήσαμε τη μέθοδο της θεματικής ανάλυσης (Xu & Zammit, 2020). Σε πρώτη φάση απομαγνητοφωνήσαμε και συσχετίσαμε τα διαφορετικού είδους δεδομένα. Εξαγάγαμε κρίσιμα επεισόδια, περιστατικά στα οποία τα παιδιά δοκίμαζαν κάποια νέα ιδέα ή προσπαθούσαν να βρουν λύση σε κάποιο πρόβλημα. Σε επόμενο στάδιο αποδώσαμε επεξηγηματικούς κωδικούς στα επεισόδιο. Τέλος, οι κωδικοί που προέκυψαν ταξινομήθηκαν σε ευρύτερες κατηγορίες - θέματα με στόχο την ανεύρεση μοτίβων που θα επέτρεπαν όχι μόνο την οργάνωση και περιγραφή των δεδομένων μας, αλλά και την ερμηνεία των διαφορετικών πτυχών τους στη των ερευνητικών μας ερωτήματα (Xu & Zammit, 2020).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι κεντρικές μαθηματικές έννοιες που αναδύθηκαν κατά την τροποποίηση του παιχνιδιού «Βόλτα στην Υπεραγορά» ήταν οι αρνητικοί αριθμοί, η επεξεργασία δεδομένων και η δημιουργία προβλημάτων.

Οι αρνητικοί αριθμοί και σχεδιαστική σκέψη

Στις δραστηριότητες της έρευνας, τα παιδιά χρησιμοποίησαν τους αρνητικούς αριθμούς -οι οποίοι διδάσκονται μόνο σε ένα κεφάλαιο της Ε' Δημοτικού- σε ένα τελείως διαφορετικό από τα συνηθισμένα πλαίσιο, συσχετίζοντας τις θετικές και αρνητικές τιμές των επιλογών τους με θετικές και αρνητικές συνέπειες αντίστοιχα στα πεδία του παιχνιδιού.

Αν και οι μαθητές από τη φάση της 'ανακάλυψης' χρησιμοποίησαν τους αρνητικούς αριθμούς συσχετίζοντας τους με αρνητική συνέπεια και μείωση της τιμής ενός πεδίου, ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχε η χρήση των αρνητικών αριθμών στις φάσεις της 'πλαισίωσης' και της 'ανάπτυξης'. Στη φάση της πλαισίωσης, τα παιδιά της μίας ομάδας άντλησαν πληροφορίες για τις απόψεις των συμμαθητών τους σχετικά με τις τιμές των πεδίων του παιχνιδιού 'υγεία' και 'ευχαρίστηση', κάνοντας μια ιδιότυπη έρευνα την ώρα του διαλείμματος, στην οποία, χρησιμοποίησαν τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές (Εικόνα 4β). Από αυτές τα παιδιά στη συνέχεια εκτίμησαν τη μέση τιμή, την οποία και χρησιμοποίησαν στο τροποποιημένο παιχνίδι. Έτσι οι μαθητές αυτής της ομάδας εκτέλεσαν πράξεις στο σύνολο των ακεραίων αριθμών, κάτι με το οποίο δεν έχουν ασχοληθεί καθόλου στην ΣΤ' Δημοτικού.

Στη φάση της 'ανάπτυξης' τα παιδιά πειραματίστηκαν με τις τιμές των διαφόρων πεδίων. Στο επεισόδιο 1 τα παιδιά έχουν προσθέσει στο παιχνίδι ένα επιπλέον πεδίο «Περιβάλλον», το οποίο αναπαριστά τις συνέπειες της επιλογής ενός προϊόντος στο περιβάλλον.

Επεισόδιο 1

Μ3: Οι μπριζόλες -3 γιατί σκοτώνουν τα ζώα…

Μ4: Τυρί είναι επίσης -2.

Μ3: Αν είναι να βάλουμε -2 στο τυρί, τότε πρέπει να βάλουμε -2 και στο γιαούρτι και στο γάλα γιατί είναι και τα δύο από γάλα.

Μ3: Ωραία, βάλε -2 σε όλα τα γαλακτοκομικά.

Εικόνα 3: Οι μαθητές εισάγουν αρνητικές τιμές στο πεδίο «Περιβάλλον» για τις επιλογές «Μπριζόλες», «Μπέικον» και «Γιαούρτι».

Στο παραπάνω επεισόδιο ο Μ3 προτείνει μια αρνητική τιμή για τις «Μπριζόλες» στο πεδίο «Περιβάλλον», καθώς όπως εξηγεί, για να προκύψουν οι μπριζόλες ως προϊόντα «σκοτώνουν τα ζώα». Το ίδιο συμβαίνει και για τα υπόλοιπα γαλακτοκομικά όπως επισημαίνει ο Μ3. Οι αρνητικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται από τους ίδιους τους μαθητές για να αναπαραστήσουν τις αρνητικές συνέπειες συγκεκριμένων επιλογών, αλλά και για να αναπαραστήσουν τη μαθηματική σχέση μεταξύ συγκεκριμένων παραμέτρων του παιχνιδιού σε ένα ρεαλιστικό και με νόημα για τους μαθητές πλαίσιο (Van de Walle et al. 2014).

Συλλογή - Επεξεργασία δεδομένων και σχεδιαστική σκέψη

Στη φάση της 'πλαισίωσης', τα παιδιά συζήτησαν τις απαντήσεις που έδωσαν οι συμμαθητές τους στα ερωτηματολόγια που ανέπτυξαν. Στο επεισόδιο 2 τα παιδιά συζητούν για το ραβδόγραμμα που έχει προκύψει από τις απαντήσεις των συμμαθητών τους στο ερώτημα "Το παιχνίδι ήταν ένας διασκεδαστικός τρόπος να κάνω εξάσκηση στα μαθηματικά.". Οι ερωτηθέντες απάντησαν στην ερώτηση αυτή επιλέγοντας μια τιμή από το 1 έως το 5, όπου το 1 αντιστοιχούσε στην απάντηση "Διαφωνώ πολύ" ενώ με το 5 δήλωναν πως "Συμφωνούν πολύ" (Εικόνα 4α).

Εικόνα 4: Το ραβδόγραμμα που προέκυψε από τις απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα «Το παιχνίδι ήταν ένας διασκεδαστικός τρόπος να κάνεις εξάσκηση στα μαθηματικά» (α) και η ιδιότυπη έρευνα της μίας ομάδας όπου τα παιδιά αποτύπωσαν τις στάσεις των συμμαθητών τους με θετικές αλλά και αρνητικές τιμές (β).

Επεισόδιο 2

Ερ.: «Το παιχνίδι ήταν ένας διασκεδαστικός τρόπος να κάνεις εξάσκηση στα μαθηματικά»…

Μ4: Ναι…

Μ5: Όχι τόσο,

Μ4: Ναι, αφού απάντησαν το 5 οι πιο πολλοί.

Μ5: Ναι, οι πιο πολλοί δηλαδή είναι 4, όλοι οι άλλοι είναι 1+1+1,3…

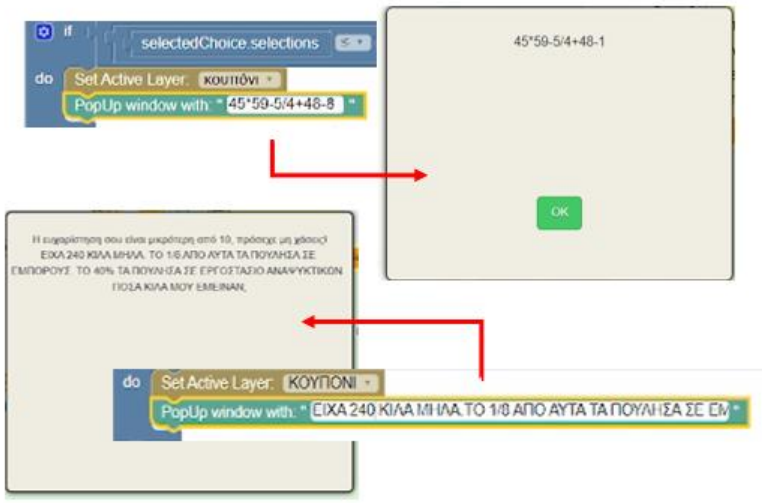
Στο παραπάνω επεισόδιο, ενώ η Μ4 συγκρίνει τον αριθμό αυτών που "Συμφωνούν πολύ" (5) με το πλήθος των απαντήσεων σε κάθε μία από τις άλλες επιλογές, συμπεραίνοντας πως οι περισσότεροι μαθητές που έπαιξαν το παιχνίδι συμφωνούν με την πρόταση, ο Μ5 διαφωνεί. Εξηγεί πως το σύνολο των παιδιών που θεωρούν το παιχνίδι έναν διασκεδαστικό τρόπο να κάνουν εξάσκηση στα μαθηματικά δεν αποτελεί σημαντική πλειοψηφία, καθώς το σύνολο των παιδιών που επέλεξαν κάποια από τις άλλες απαντήσεις δεν είναι πολύ μικρότερο. Πέραν δηλαδή των επιμέρους δεδομένων των ράβδων, ο μαθητής λαμβάνει υπόψη το σύνολο των δεδομένων που αναπαρίστανται στο ραβδόγραμμα, κάτι που απαιτεί ικανότητες ερμηνείας των γραφημάτων (Lake & Kemp, 2001). Αυτή η ικανότητα συχνά δεν είναι επαρκώς ανεπτυγμένη σε μαθητές Δημοτικού (Tarr & Shaughnessy, 2007). Ωστόσο, το συγκεκριμένο πλαίσιο πιθανώς υποστήριξε την ερμηνεία του ραβδογράμματος αφενός λόγω της οικειότητας των παιδιών με τα δεδομένα, καθώς τα είχαν συλλέξει τα ίδια τα παιδιά (Glazer, 2011), αφετέρου λόγω του ότι, στο πλαίσιο της μεθοδολογίας της Σχεδιαστικής Σκέψης, στόχος των παιδιών ήταν η τροποποίηση του παιχνιδιού με βάση προτιμήσεις των άλλων (Garfield & Ben-Zvi, 2009).

Δημιουργία προβλημάτων και σχεδιαστική σκέψη

Από τις απαντήσεις που έλαβαν τα παιδιά στην πρώτη φάση από τους συμμαθητές και μελλοντικούς χρήστες του παιχνιδιού, εξήγαγαν συμπεράσματα τα οποία καθοδήγησαν το είδος των αλλαγών που θα έκαναν στο παιχνίδι. Έτσι, πρόσθεσαν προϊόντα στο παιχνίδι και άλλαξαν τις τιμές-συνέπειες των επιλογών στη βάση δεδομένων στο περιβάλλον σχεδιασμού ChoiCo (Εικόνα 2). Μεταξύ άλλων συμπέραναν πως το παιχνίδι φάνηκε στους συμμαθητές τους πολύ εύκολο. Για να δυσκολέψουν το παιχνίδι αρχικά αποφάσισαν να αλλάξουν τις περιγραφές των τιμών των πεδίων του παιχνιδιού για κάποιες από τις επιλογές. Για παράδειγμα η μία ομάδα άλλαξε την τιμή της επιλογής «Μπισκότα» από «Δύο ευρώ» σε «Το ΕΚΠ του 6 και του 2 αν το διαιρέσεις με το 3» και η άλλη την τιμή της «Μαγιονέζας» από «Δύο φορές πιο ακριβή από τα μήλα» σε «Το 4πλάσιο της τιμής του νερού, αν το διαιρέσουμε δια δύο και αφαιρέσουμε 1». Στη 1η περίπτωση οι μαθητές χειρίζονται μια 'απροσδιόριστη τιμή' – το ΕΚΠ του 6 και του 2- και τη διαιρούν με το 3. Αυτού του είδους οι υπολογισμοί, δηλαδή οι υπολογισμοί με μη καθορισμένες αριθμητικά ποσότητες αποτελούν βασικό κριτήριο

διάκρισης μεταξύ αριθμητικής και αλγεβρικής σκέψης (Radford, 2018). Επιπρόσθετα στη 2η περίπτωση είναι ιδιαίτερα σημαντικό ότι οι μαθητές δεν εστιάζουν σε μαθηματικούς υπολογισμούς, αλλά στην περιγραφή μιας συναρτησιακής σχέσης μεταξύ 2 μεταβλητών, της τιμής του νερού και της μαγιονέζας. Φαίνεται ότι καθώς οι μαθητές προσπαθούν να τροποποιήσουν το παιχνίδι εμπλέκονται σε αλγεβρικούς συλλογισμούς, καθώς περιγράφουν αρχικά λεκτικά και στη συνέχεια συμβολικά συναρτησιακές σχέσεις.

Κατόπιν, τα παιδιά διατύπωσαν «μαθηματικές προκλήσεις» που θα έκαναν το παιχνίδι περισσότερο απαιτητικό. Η μία ομάδα δημιούργησε μια αριθμητική παράσταση (Εικόνα 5α), ενώ η δεύτερη ομάδα ενσωμάτωσε στο παιχνίδι ένα λεκτικό πρόβλημα που περιλάμβανε κλάσματα και ποσοστά (Εικόνα 5β).



Εικόνα 5: Οι «μαθηματικές προκλήσεις» που εισήγαν οι μαθητές στο παιχνίδι με τη μορφή αριθμητικής παράστασης (α) και λεκτικού προβλήματος (β).

Τα παιδιά ενεπλάκησαν στην επίλυση των ίδιων τους των προβλημάτων, αφού κάτι τέτοιο απαιτούνταν σχεδιαστικά- έπρεπε να ενσωματωθεί στον προγραμματισμό η σωστή απάντηση- ενώ παράλληλα ενάλλασσαν ρόλους βιώνοντας τα Μαθηματικά ως μια διαδικασία όπου οι ίδιοι αποφασίζουν ποια προβλήματα –ερωτήματα θα θέσουν και θα επιδιώξουν να λύσουν (Μαμωνά- Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή τη μικρής κλίμακας έρευνα εξετάσαμε τις μαθηματικές έννοιες που αξιοποίησαν οι μαθητές της Στ’ Δημοτικού, καθώς τροποποιούσαν ένα μαθηματικό παιχνίδι ακολουθώντας τη μεθοδολογία της Σχεδιαστικής Σκέψης. Από την ανάλυση των δεδομένων φάνηκε ότι οι μαθητές κατασκεύασαν δικά τους προβλήματα και αξιοποίησαν ποικίλες

μαθηματικές έννοιες σε ένα ρεαλιστικό και με νόημα για αυτούς πλαίσιο (Freudenthal, 1968) Ειδικότερα, οι αρνητικοί αριθμοί συνδέθηκαν με συγκεκριμένες επιπτώσεις στις τιμές των μεταβλητών του παιχνιδιού, αξιοποιήθηκαν στα πλαίσια της έρευνας των μαθητών για να αποτυπώσουν τις προτιμήσεις των συμμαθητών τους, αλλά και σε αριθμητικές παραστάσεις κατά τον προγραμματισμό για να περιγράψουν συγκεκριμένους κανόνες του παιχνιδιού (Van de Walle et al. 2014). Αντίστοιχα, το γεγονός ότι στη συγκεκριμένη μεθοδολογία, η τροποποίηση του παιχνιδιού γίνεται στη βάση των αποτελεσμάτων έρευνας που έχει προηγηθεί, ώστε να ληφθούν υπόψη οι προτιμήσεις των τελικών χρηστών, ενέπλεξε τους μαθητές σε διαδικασίες έρευνας και επεξεργασίας των δεδομένων, αλλά και ερμηνείας των σχετικών γραφημάτων (Garfield & Ben-Zvi, 2009). Τέλος, στα πλαίσια του συγκεκριμένου παιχνιδιού οι μαθητές ανέπτυξαν και έλυσαν αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις (Radford, 2018), κατασκεύασαν και επέλυσαν λεκτικά προβλήματα, τα οποία ενσωμάτωσαν στα παιχνίδια τους Έτσι, βίωσαν τα Μαθηματικά ως μια διαδικασία που ο ίδιος μαθητής μπορεί να αποφασίσει ποια προβλήματα –ερωτήματα θα θέσει και θα επιδιώξει να λύσει (Μαμωνά- Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

Συμπερασματικά, η τροποποίηση ψηφιακών μαθηματικών παιχνιδιών, ιδιαίτερα όταν συνδυάζεται με τη μεθοδολογία της Σχεδιαστικής Σκέψης, φαίνεται να προσφέρει ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα σε ρεαλιστικά διαθεματικά περικείμενα, κάτι που αξίζει να διερευνηθεί περαιτέρω.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα έρευνα χρηματοδοτείται από το έργο HORIZON-WIDERA "TransEET" (Transforming Education with Emerging Technologies - No. 101078875) του European Research Executive Agency – REA. Ωστόσο, οι απόψεις που εκφράζονται είναι αποκλειστικά των συγγραφέων και δεν αντανακλούν κατ' ανάγκη εκείνες της ΕΕ, η οποία δεν θεωρείται υπεύθυνη, όπως και η χορηγούσα αρχή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers.* Routledge.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 3-8.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics, 31*(3), 72-77.

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of the literature. *Studies in Science Education*, *47*(2), 183–210.

Grizioti, M., & Kynigos, C. (2021). Children as players, modders, and creators of simulation games: A design for making sense of complex real-world problems. *Interaction Design and Children*. https://doi.org/10.1145/3459990.3460706

Huq, A. & Gilbert, D. (2017). All the world's a stage: transforming entrepreneurship education through design thinking. *Education & Training*, *59*(2). 155-170. https://doi.org/10.1108/ET-12-2015-0111

Hwa, S. P. (2018). Pedagogical Change in Mathematics Learning: Harnessing the Power of Digital Game-Based Learning. *Journal of Educational Technology & Society*, *21*(4), 259–276. https://www.jstor.org/stable/26511553

Kafai, Y. B., & Burke, Q. (2015). Constructionist Gaming: Understanding the Benefits of Making Games for Learning. *Educational Psychologist*, *50*(4), 313–334. https://doi.org/10.1080/00461520.2015.1124022

Lake, D., & Kemp, M. (2001). Choosing and using graphs. *Australian Mathematics Teacher*, *57*(3), 7-12.

Pan, Y., Ke, F., & Xu, X. (2022). A systematic review of the role of learning games in fostering mathematics education in K-12 settings. *Educational Research Review*, 36, 100448. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100448

Papert, S. (1980). *" Mindstorms" Children. Computers and powerful ideas*.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: *The global evolution of an emerging field of research and practice*, 3-25.

Scheer, A., Noweski, C., & Meinel, C. (2012). Transforming constructivist learning into action: Design thinking in education. *Design and Technology Education*, *17*(3), 8-19.

Tarr, J. E., & Shaughnessy, J. M. (2007). Student performance in data analysis, statistics, and probability. *Results and interpretations of the 2003 mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, 139-168.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics*. Pearson.

Xu, W., & Zammit, K. (2020). Applying Thematic Analysis to Education: A Hybrid Approach to Interpreting Data in Practitioner Research.

International Journal of Qualitative Methods, *19*(2), 1–9. Sagepub. https://doi.org/10.1177/1609406920918810

Μαμωνά-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση Προβλήματος στα Μαθηματικά*. Ηράκλειο Κρήτης: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΟ ΜΑΣΤΟΡΕΜΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Κάτια Σχίζα, Χρόνης Κυνηγός

Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Φιλοσοφική Σχολή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

katiaschiza@eds.uoa.gr; kynigos@eds.uoa.gr

Στην παρούσα εργασία, μαθητές της Γ' Γυμνασίου μαστορεύουν δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού Αλφαβήτου με το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2 μέσα από μία σειρά δραστηριοτήτων που στοχεύουν στην ανάπτυξη της ανθεκτικής κατανόησης μαθηματικών ιδιοτήτων από τους μαθητές και στην καλλιέργεια της ικανότητας τους να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά μέσα στο εκάστοτε πλαίσιο. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ευκαιρίες ανάπτυξης μιας ισχυρής μαθηματικής σκέψης μέσω γενίκευσης των μαθηματικών ιδιοτήτων και χρήσης του μαθηματικού φορμαλισμού με προσωπικό νόημα για τους μαθητές, ενώ φέρνουν στην επιφάνεια προ υπάρχουσες παρανοήσεις στη χρήση της μεταβλητής.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία [1], οι συγγραφείς μελετούν νοήματα και πτυχές της μαθηματικής ικανότητας και της ανθεκτικής κατανόησης που αναπτύσσουν μαθητές της Γ' Γυμνασίου, καθώς μαστορεύουν δυναμικά μοντέλα γραμμάτων του Ελληνικού Αλφαβήτου με το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2. Δεδομένης, αφενός, της έντασης που υπάρχει μεταξύ του τι συμβαίνει στη σημερινή τεχνολογικά προηγμένη κοινωνία και του τι συμβαίνει στα σχολεία και αφετέρου, μιας ευρύτερης ανησυχίας για την προετοιμασία των παιδιών για το μέλλον τους μέσα στο συνεχώς εξελισσόμενο και πολύπλοκο κόσμο που ζούμε (Gravemeijer et al., 2017), το ενδιαφέρον των ερευνητών στη μαθηματική εκπαίδευση φαίνεται να έχει μετατεθεί πρόσφατα στην ευρύτερη έννοια της μαθηματικής ικανότητας (competence) επισκιάζοντας προηγούμενα κυρίαρχα μοντέλα της εκπαίδευσης, όπως η νοηματοδότηση εννοιών, η επίλυση προβλήματος ή η απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων (skills). Η έννοια της ικανότητας ως 'competence' περιλαμβάνει ένα συνδυασμό γνώσεων, δεξιοτήτων και συμπεριφορών σχετικών με το εν λόγω πλαίσιο (European Parliament & Council, 2006) και έτσι, η μαθηματική ικανότητα υπερβαίνει τη γνώση ή την κατανόηση των μαθηματικών εστιάζοντας στην ενεργητική άσκηση αυτών, συμπεριλαμβανομένης και της λήψης αποφάσεων (Niss & Højgaard, 2019). Η βασική πρόκληση, λοιπόν, έγκειται στη δημιουργία ισχυρών μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία

υποστηρίζουν κάθε μαθητή να αναπτύξει όχι μόνο τη γνώση και τις πρακτικές που διέπουν τη μαθηματική σκέψη, αλλά και το αίσθημα της αυτενέργειας (agency) να συμμετέχει στην ανάπτυξη της κατανόησης και την καλλιέργεια της μαθηματικής του σκέψης και να μάθει να σκέφτεται μέσα από τα μαθηματικά και μαζί με αυτά, κάνοντας μαθηματικά (Schoenfeld, 2022). Ως εκ τούτου, στην παρούσα μελέτη, οι συγγραφείς δεν μελετάνε πώς οι μαθητές μαθαίνουν μία μαθηματική ιδιότητα, αλλά πώς χρησιμοποιούν μία μαθηματική έννοια ή ιδιότητα σαν εργαλείο μέσα σε ένα πλαίσιο βασιζόμενο στη μαθηματική δραστηριότητα μέσω του προγραμματισμού και της μηχανικής (Kynigos & Diamantidis, 2022), εξετάζοντας το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα: *Πώς το μαστόρεμα κινούμενων μοντέλων στο προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2 μπορεί να υποστηρίξει τους μαθητές ως προς την ανάπτυξη της ανθεκτικής κατανόησης τους και της ικανότητας χρήσης μαθηματικών ιδιοτήτων;*

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Για την πλαισίωση της παρούσας μελέτης οι συγγραφείς επέλεξαν να συνδυάσουν δύο θεωρητικά μοντέλα. Το πρώτο αποτελεί το θεωρητικό πλαίσιο *Διδασκαλίας για Ανθεκτική Κατανόηση (Teaching for Robust Understanding – TRU)* το οποίο συνιστά έναν τρόπο εντοπισμού ισχυρών περιβαλλόντων μάθησης. Αποτελείται από πέντε διαστάσεις για τις οποίες η έρευνα έχει δείξει ότι τάξεις που αναπτύσσουν τους μαθητές ως γνώστες και επινοητικούς στοχαστές δίνουν έμφαση στα ακόλουθα χαρακτηριστικά (Schoenfeld, 2016; 2022): *D1 – Το Περιεχόμενο*: την ποιότητα και τον πλούτο της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών και τις ευκαιρίες για ανάπτυξη ισχυρής μαθηματικής σκέψης, *D2 – Γνωστικό Αίτημα*: τις προκλήσεις για εμπλοκή με τα μαθηματικά και νοηματοδότηση γύρω από σημαντικές μαθηματικές έννοιες και τη χρήση τους μέσα από μία 'παραγωγική πάλη', *D3 – Ισότιμη Πρόσβαση*: την ουσιαστική εμπλοκή και συμμετοχή όλων των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία, *D4 – Αυτενέργεια, Αίσθηση Ιδιοκτησίας και Ταυτότητα*: την εμπλοκή των μαθητών με σκοπό να κάνουν τα μαθηματικά δικά τους και να δουν τον εαυτό τους ως κάποιον που μπορεί να κάνει και να εξηγήσει μαθηματικά, *D5 – Διαμορφωτική Αξιολόγηση*: τις ευκαιρίες των μαθητών να δείχνουν τον τρόπο που προχωρά η κατανόηση τους κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Το δεύτερο θεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι το παιδαγωγικό μοντέλο των *'5Es'* (Benton et al., 2016). Παρέχει έναν τρόπο σκέψης και σχεδιασμού δραστηριοτήτων με προγραμματιστικά μέσα με σαφή εστίαση στην εμπλοκή των παιδιών με τα μαθηματικά και τον προγραμματισμό. Αποτελείται από πέντε μη ταξινομημένες φάσεις οι οποίες επιτρέπουν στους μαθητές να: 1) Εξερευνήσουν ***(E**xplore)* και να πειραματιστούν αναλαμβάνοντας οι ίδιοι τον έλεγχο της μάθησης τους μέσα από την κατασκευή και το μαστόρεμα, 2) Διατυπώσουν τις ιδέες τους

και να εξηγήσουν ***(Explain)*** τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού ως 'εργαλείο σκέψης', 3) Προβλέψουν ***(Envisage)*** αποτελέσματα πριν την εκτέλεση του κώδικα με στόχο να αναστοχαστούν και να συγκρίνουν την πρόβλεψη με το τελικό αποτέλεσμα, 4) Επιχειρηματολογούν, ανταλλάσσουν ***(Exchange)*** ιδέες και «χτίζουν» πάνω στις ιδέες άλλων, 5) Κάνουν συνδέσεις μεταξύ του προγραμματιστικού περιβάλλοντος και των «επίσημων» μαθηματικών ***(bridgE)*** μέσα από μία αναπλαισίωση των ιδεών τους. Αν και οι διαστάσεις του μοντέλου TRU παρέχουν πολύτιμες πτυχές για τη διδασκαλία των μαθηματικών, υστερούν στην αποτύπωση μιας λεπτομερούς ανάλυσης των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών κατά την αλληλεπίδραση τους με τα ψηφιακά μέσα. Από την άλλη, οι φάσεις των '5Es' εστιάζουν σε μία βαθύτερη ανάλυση της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών με τα εργαλεία, αλλά δεν αναφέρονται στη συνολική αξία της μαθησιακής διαδικασίας ή το ρόλο του εκπαιδευτικού. Συνεπώς, οι ερευνητές πραγματεύονται τη χρήση ενός συνδυασμού αυτών των δύο θεωρητικών πλαισίων τόσο για τον σχεδιασμό ενός ισχυρού μαθησιακού περιβάλλοντος βασισμένου στον προγραμματισμό, όσο και για την ανάλυση της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών με στόχο την ανθεκτική κατανόηση τους πάνω σε μαθηματικές ιδιότητες, την ικανότητα χρήσης αυτών σε διαφορετικά πλαίσια και τη μελέτη της πορείας σκέψης τους προς τη γενίκευση μέσα από το μαστόρεμα κινούμενων μοντέλων.

Τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου σε προγραμματιστικό περιβάλλον έχουν αξιοποιηθεί και στο παρελθόν για τη διερεύνηση της νοηματοδότησης μαθητών γύρω από την έννοια του λόγου και της αναλογίας (Psycharis & Kynigos, 2009; Noss & Hoyles, 1996), εδώ όμως οι ερευνητές τα αξιοποιούν με έμφαση στη χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων που μπορούν να ενσωματωθούν σε γενικευμένα μοντέλα γραμμάτων που αποτελούνται από κατακόρυφα και πλάγια τμήματα (π.χ. Πυθαγόρειο θεώρημα, τριγωνομετρία). Έμφαση δόθηκε και στην έννοια της μεταβλητής κατά την εμπλοκή των μαθητών με τα δυναμικά μοντέλα γραμμάτων, καθώς όταν πρόκειται για τη χρήση της ως γενικευμένου αριθμού, η έρευνα δείχνει μια σειρά δυσκολιών και παρανοήσεων για τους μαθητές που οδηγεί σε αδυναμία γενίκευσης ή χρήσης των μεταβλητών σε πλαίσια πέραν της άλγεβρας (Dede, 2004), ενώ και στη γεωμετρία, οι μαθητές φαίνεται να παρουσιάζουν δυσκολίες με το Πυθαγόρειο θεώρημα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς όταν απαιτείται η χρήση μεταβλητών (Rudi et al., 2020; Orhun, 2004).

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η μέθοδος της έρευνας ακολούθησε την προσέγγιση της έρευνας σχεδιασμού, η οποία έχει μετασχηματιστικό χαρακτήρα, καθώς "αφορά την εκπαίδευση όπως θα μπορούσε να είναι ή ακόμη και όπως θα έπρεπε

να είναι" (Bakker, 2018, p. 3). Ως εκ τούτου, ο σκοπός του σχεδιασμού αυτής της εκπαιδευτικής παρέμβασης θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μετασχηματιστικός στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς οι ερευνητές είχαν ως στόχο να διερευνήσουν τις δυνατότητες του μαστορέματος κινούμενων μοντέλων μέσω του προγραμματισμού στην υπηρεσία της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών. Η συγκεκριμένη μελέτη αποτέλεσε πιλοτική εφαρμογή μιας ευρύτερης έρευνας που τροφοδοτήθηκε από προηγούμενο κύκλο σχεδιασμού, εφαρμογής και ανάλυσης και επανασχεδιάστηκε (κυρίως μετά από αφαίρεση δραστηριοτήτων με σταθερά μοντέλα γραμμάτων), δεδομένα που όμως δεν θα αναλυθούν στο παρόν άρθρο. Η παρούσα έρευνα διεξήχθη με 4 μαθητές της Γ' Γυμνασίου, οι οποίοι συμμετείχαν εθελοντικά στην παρέμβαση που διήρκεσε 8 διδακτικές ώρες και δούλεψαν σε δύο ομάδες. Κάθε ομάδα είχε ένα φορητό υπολογιστή και ένα φύλλο εργασίας για κάθε δραστηριότητα. Η ερευνήτρια είχε υποστηρικτικό ρόλο κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να εκφράζουν και να αιτιολογούν τις ιδέες τους. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν από ποικίλες πηγές (καταγραφή οθόνης και ήχου, σημειώσεις μαθητών, κώδικες μοντέλων στο MaLT2) και αναλύθηκαν μέσα από το πρίσμα των διαστάσεων και φάσεων των πλαισίου TRU και '5Es' με βάση επεισόδια (Noss & Hoyles, 1996) της δραστηριότητας των μαθητών σχετικά με τη χρήση μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων κατά την αλληλεπίδρασή τους με το ψηφιακό εργαλείο, τις ομάδες ή την ερευνήτρια.

Ψηφιακό εργαλείο MaLT2 και Σχεδιασμός δραστηριότητας

Το MaLT2 αποτελεί ένα εργαλείο συμβολικής έκφρασης για μαθηματική δραστηριότητα μέσω του προγραμματισμού με σκοπό τη δημιουργία και το μαστόρεμα δυναμικών μοντέλων με τρεις αλληλένδετες αναπαραστάσεις: i. συμβολική (κώδικας), ii. γραφική και iii. δυναμικός χειρισμό γενικευμένων μοντέλων (μεταβολείς) (Εικόνα 1α). Εδώ, οι μαθητές καλούνταν να προβλέψουν, κατασκευάσουν και διορθώσουν δυναμικά μοντέλα των γραμμάτων Ν, Ζ, Σ, Μ και Α (Πίνακας 1).

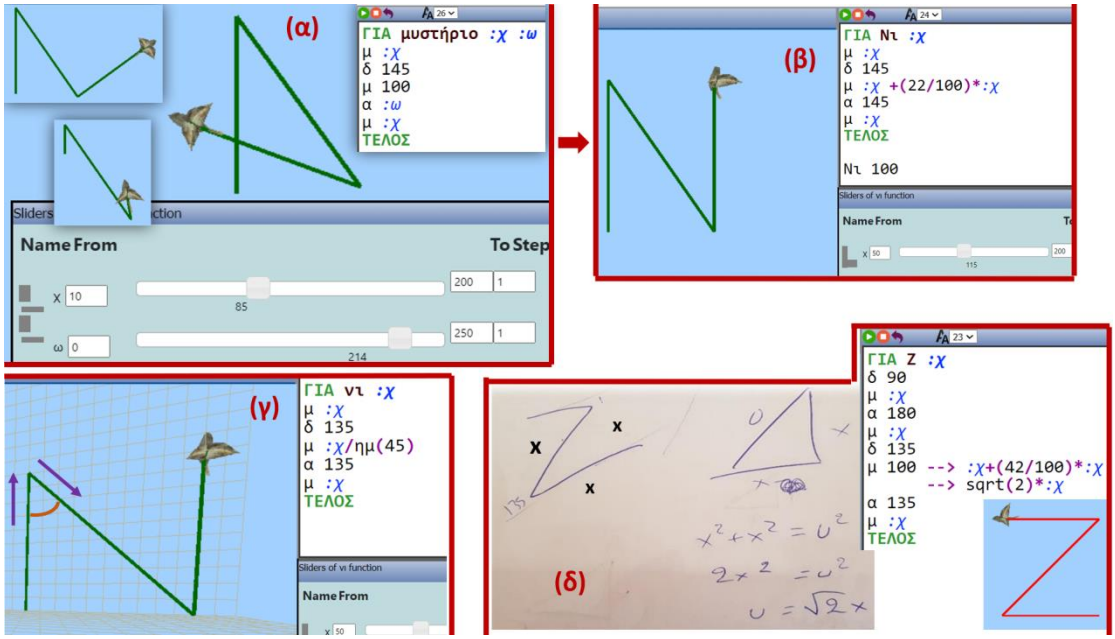
Μισοψημένο μοντέλο Ν: Πρόβλεψη & Διόρθωση	Φάση Α
Εύρεση κώδικα μοντέλου Ν μέσα σε τετράγωνο	
Ελεύθερη Κατασκευή μοντέλου Ζ	
Μισοψημένο μοντέλο Σ: Πρόβλεψη, Διόρθωση & Παρουσίαση	Φάση Β
Μισοψημένη λέξη ΝΗΣΙ	
Μισοψημένη λέξη ΑΜΜΟΣ	

Πίνακας 1: Σύντομη περιγραφή των φάσεων της Δραστηριότητας

Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας βασίστηκε κυρίως στον διδακτικό σχεδιασμό των ‘μισοψημένων’ μικρόκοσμων (Kynigos, 2007), όπου τα εσφαλμένα μοντέλα κρύβουν τις μαθηματικές ιδιότητες πίσω από τον προγραμματιστικό τρόπο κατασκευής τους και στοχεύουν στην εμπλοκή των μαθητών μέσω του μαστορέματος και της απασφαλμάτωσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρακάτω αναλύονται δύο επεισόδια της μαθηματικής εμπειρίας των μαθητών με τα μοντέλα N και Z της Φάσης Α (Πίνακας 1) και στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συνολικής δραστηριότητας μέσα από τις διαστάσεις των πλαισίων TRU και ‘5Es’ (Πίνακας 2). Αρχικά, δόθηκε στις ομάδες ο κώδικας «μυστήριο» ενός μισοψημένου μοντέλου N (Εικόνα 1α), ο οποίος όμως δεν αποκάλυπτε το γράμμα στους μαθητές. Στο μοντέλο αυτό, είχε σταθεροποιηθεί εσκεμμένα από τους ερευνητές η σχέση εξάρτησης του πλάγιου τμήματος με τα κατακόρυφα (εντολή μ 100), ενώ αντίθετα μεταβαλλόταν η δεύτερη γωνία (εντολή α :ω) η οποία όφειλε να είναι σταθερή με αποτέλεσμα το N να «σπάει». Ζητήθηκε από τους μαθητές να προβλέψουν ένα πιθανό δόμημα που κατασκευάζει ο δοσμένος κώδικας πριν τον εκτελέσουν και στη συνέχεια, να επέμβουν στο μοντέλο όπως αποφασίσουν οι ίδιοι, τροποποιώντας το ώστε αυτό να μην αλλοιώνεται όταν μεταβάλλονται οι τιμές των μεταβλητών του. Και οι δύο ομάδες κατέληξαν στο γράμμα N (δευτερεύον δόμημα που έδωσε μία ομάδα ήταν το τρίγωνο), ενώ ήρθε στο προσκήνιο έντονα και ο ρόλος της μεταβλητής, καθώς οι μαθητές φάνηκε να παλινδρομούν μεταξύ άγνωστου και γενικευμένου αριθμού.



Εικόνα 1: Συμβολικές και γραφικές αναπαραστάσεις των μοντέλων N, Z

Το επεισόδιο που ακολουθεί έλαβε χώρα κατά τη φάση της πρόβλεψης, πριν την εκτέλεση του κώδικα.

Μ4: Κι εγώ νομίζω ότι βγαίνει Ν. Βασικά περίμενε. Λοιπόν, εδώ πάει μπροστά χ. Πες ότι είναι τόσο το χ. Αριστερά εντάξει. Μπροστά 100. Δεν πάει τόσο πολύ μπροστά.

Μ3: Δεν σου λέει πόσο πάει στην αρχή. Αυτό είναι λιγότερο.

Μ4: Πού το ξέρεις αφού δεν σου λέει. Να προβλέψουμε θέλει.

Μ3: Άρα δεν ξέρουμε αν είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το 100. Περίμενε. Ξέρεις τι; Αυτά τα χ μπορεί να είναι όσο θέλουμε.

Οι μαθητές αποσύνθεσαν τη διαδικασία που τους δόθηκε, ακολουθώντας νοητά μία προς μία τις εντολές του κώδικα και προσπαθώντας να προβλέψουν το γραφικό αποτέλεσμα του. Η 'παραγωγική πάλη' των μαθητών που προέκυψε εδώ ήταν η προσπάθεια τους να ξεφύγουν από το ρόλο της μεταβλητής ως άγνωστο που είχαν στο μυαλό τους και να μεταβούν 'ανεπίσημα' στο ρόλο της ως γενικευμένο αριθμό (D2). Αυτό έγινε προσπαθώντας να φανταστούν και να εξηγήσουν (Envisage & Explain) τη γραφική αναπαράσταση του δοσμένου κώδικα ως προς τις 3 εντολές 'μπροστά' (μ) που αποτελούσαν τα 3 τμήματα του Ν και χτίζοντας ο ένας πάνω στις ιδέες του άλλου (D4) ως προς τη μεταβλητή χ μέσα από τη σύγκριση με τον σταθερό αριθμό 100 που υπήρχε στον κώδικα. Η εξερεύνηση του μοντέλου (Explore) μετά την εκτέλεση του κώδικα και ο δυναμικός χειρισμός του μέσω των ολισθητών έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά (D3) στην τροποποίηση του χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ισότητας των εντός εναλλάξ γωνιών και της αναλογίας (Εικόνα 1β) αναγνωρίζοντας τη σχέση εξάρτησης των τμημάτων του Ν καθώς αυτό αυξομειώνεται (D1). Στη συνέχεια, δόθηκε το γραφικό μοντέλο ενός γενικευμένου Ν και ζητήθηκε από τους μαθητές να ανακαλύψουν τον κώδικα που θα μπορούσε να το κατασκευάζει. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, εδώ, είναι ότι αυτό το μοντέλο πλαισιωνόταν από ένα αόρατο τετράγωνο, γεγονός που οι μαθητές ανακάλυψαν μέσα από την εξερεύνηση του μοντέλου (Explore) με την κάμερα και το βοηθητικό πλέγμα της σκηνής του MaLT2 (Εικόνα 1γ), διακρίνοντας νοητά ορθογώνια τρίγωνα. Η μία ομάδα (Μ3&Μ4) σύνδεσε άμεσα τα ορθογώνια τρίγωνα με τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος, ενώ ο Μ1 της άλλης ομάδας πρότεινε τη χρήση του ημιτόνου, γεγονός που προέκυψε μέσα από τη συντονικότητα του σώματος (body syntonicity) (Papert, 1980): «Όταν είδα ότι εδώ το Ν μπορούμε να το σκεφτούμε μέσα σε τετράγωνο και να φτιάξουμε τρίγωνα, σε αυτό το τρίγωνο πήγα και *στάθηκα* στην πάνω κορυφή και από εκεί το πουλί *κοιτούσε* απέναντι. Οπότε με το που είδα το απέναντι, σκέφτηκα και την υποτείνουσα και βγήκε το ημίτονο.» Η δραστηριότητα αυτή έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της συνέχειας,

όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ελεύθερα ένα κινούμενο μοντέλο του γράμματος Z. Οι M1&M2 φάνηκε να είχαν μία ανθεκτική κατανόηση ως προς τις ιδιότητες που η ερευνήτρια ενσωμάτωσε στο τελευταίο μοντέλο με το πλαίσιο του τετραγώνου γύρω από το γράμμα N, κάτι που επέλεξαν και μόνοι τους να συνεχίσουν στο επόμενο ελεύθερο μοντέλο του Z. Ξεκινώντας έθεσαν έναν σταθερό αριθμό για το πλάγιο τμήμα, στη συνέχεια σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν τις αναλογίες και τελικά εξέφρασαν την πλευρά με βάση το Πυθαγόρειο (Εικόνα 1δ).

Ε: Αρχικά επιλέξατε τις αναλογίες. Τι άλλαξε τώρα;

Μ2: Η αναλογία έβγαινε και 41 και 42 και 43%...

Μ1: Δεν ήταν τελείως ακριβές, γιατί το βρίσκαμε με το μάτι και τους άξονες πίσω πιο πολύ.

Μ2: Ναι, με το μάτι δοκιμάζοντας. Αυτό είναι πιο μαθηματικό. Πριν προτιμήσαμε τις αναλογίες γιατί μας ήρθαν στο μυαλό πιο εύκολα. Όμως το Πυθαγόρειο το βγάζει ακριβώς και ας έχει όσα δεκαδικά θέλει.

Μ1: Ναι αυτό! Με το Πυθαγόρειο δεν βλέπουμε καν τα δεκαδικά. Δεν τα χρειαζόμαστε.

Η εμπλοκή των μαθητών με τα προηγούμενα μοντέλα του N φαίνεται να τους ώθησε σε μία μεταστροφή της αρχική τους επιλογής στο Z, από τη χρήση αναλογίας στη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Οι μαθητές φάνηκε να αντιλαμβάνονται την ανάγκη να μην βασίζονται ‘στο μάτι’ και να σκεφτούν πιο μαθηματικά. Αυτή η κριτική σκέψη και η συνειδητοποίηση της αξίας της χρήσης μιας συγκεκριμένης ιδιότητας με κριτήριο το αποτέλεσμά της και όχι την ευκολία της είναι μία ένδειξη της ανάπτυξης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών (D1), η οποία προήλθε μέσα από τη συζήτηση και τον αναστοχασμό των μαθητών (Exchange) με δεδομένη την προηγούμενη εμπειρία τους. Η συνειδητή αυτή στρατηγική της πλαισίωσης του μοντέλου μέσα σε ένα τετράγωνο ακολουθήθηκε από τους συγκεκριμένους μαθητές και στο γράμμα Μ (Φάση Β’ – ΑΜΜΟΣ). Αν και τους δόθηκε ένα μισοψημένο μοντέλο με μία αναλογία στα πλάγια τμήματα του Μ, η οποία δεν προκαλούσε πρόβλημα στην αυξομείωση του μοντέλου, οι ίδιοι αμφισβήτησαν τόσο τη χρήση της αναλογίας, όσο και τον ίδιο τον ερευνητή που έδωσε το μοντέλο και αποφάσισαν να αντικαταστήσουν τη δοσμένη αναλογία με το ημίτονο. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές προχώρησαν σε χρήση της γενικευμένης ιδέας της κατασκευής του προηγούμενου μοντέλου N με τα τυπικά μαθηματικά στα οποία βασίζεται αυτή και, μέσα σε αυτό πλαίσιο, προχώρησαν στην ανάπτυξη της κατανόησης και ικανότητας τους ως προς τη χρήση μίας συγκεκριμένης μαθηματικής ιδιότητα (D1), έχοντας ταυτόχρονα τον έλεγχο αυτών που δημιουργούν (D4). Αξίζει, τέλος, να τονιστεί η

αγκίστρωση των μαθητών στη μεταβλητή ως άγνωστο και κατά την κατασκευή του Z, όταν μία ομάδα θεώρησε λανθασμένα όλες τις πλευρές του ίσες, φτάνοντας σε αδιέξοδο λόγω παρανόησης του ρόλου της μεταβλητής (Εικόνα 1δ). Οι αναστοχαστικές ερωτήσεις της ερευνήτριας και η άμεση απόκριση του εργαλείου στις υποθέσεις των μαθητών (D5), έδωσαν την ευκαιρία να κάνουν σύνδεση (bridgE) μεταξύ του προγραμματιστικού περιβάλλοντος (εντολή μ :x) και των 'επίσημων' μαθηματικών ως προς τους διαφορετικούς ρόλους της μεταβλητής (π.χ. άγνωστος, ετικέτα, γενικευμένος αριθμός), με τον M2 να εξηγεί χαρακτηριστικά στο συμμαθητή του: «Κοίτα, στο σχολείο ό,τι ψάχνουμε το βάζουμε χ. Όμως, εδώ, χ είναι η απέναντι πλευρά, αυτή του τετραγώνου, και όχι η υποτείνουσα που βάλαμε εμείς χ.»

D1: Τα Μαθηματικά	Σύνδεση με προηγούμενες έννοιες & ιδιότητες (γωνίες παραλλήλων, αναλογίες, Πυθαγόρειο, τριγωνομετρία) μέσω πειραματισμού με το εργαλείο, σύνδεση 'επίσημων' μαθηματικών - προγραμματισμού, ανάπτυξη ισχυρής μαθηματικής σκέψης μέσω γενίκευσης και συνειδητής χρήσης ιδιοτήτων σε άλλα πλαίσια	5Es
D2: Γνωστικό Αίτημα	«Παραγωγική πάλη» μέσω συνεχόμενων κύκλων πειραματισμού και εξερεύνησης (κώδικας, κάμερα, πλέγμα σκηνής, ολισθητές), συνεχής μετάβαση μεταξύ συμβολικής και χωρικής αναπαράστασης, διαφορετικοί ρόλοι μεταβλητής, κριτική χρήση ιδιοτήτων	Explore Explain Exchange Envisage
D3: Ισότιμη Πρόσβαση	Ενεργή συμμετοχή μαθητών μέσω πολλαπλών σημείων εισόδου των δραστηριοτήτων και της πρόβλεψης/εξερεύνησης κώδικα και μοντέλων	Explain Exchange
D4: Αυτενέργεια, Ιδιοκτησία, Ταυτότητα	Ουσιαστική εμπλοκή με τα μοντέλα μέσα από επιλογή/δικαιολόγηση μαθηματικών ιδιοτήτων από προηγούμενη κυρίως εξερεύνηση και διαμόρφωση θετικής μαθηματικής ταυτότητας μέσα από συνεχή προσπάθεια, διόρθωση παρανοήσεων ή δημιουργία νέων ιδεών	Explore Explain Exchange
D5: Διαμορφω-τική Αξιολόγηση	Εμφανής η σκέψη των μαθητών μέσα από την άμεση ανατροφοδότηση του εργαλείου, τη σύγκριση πρόβλεψης - αποτελεσμάτων και τις σύντομες ερωτήσεις της ερευνήτριας	Envisage Explain Exchange bridgE

Πίνακας 2: Αποτελέσματα μέσα από τα θεωρητικά μοντέλα TRU & '5Es'

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές φάνηκε να είχαν την ευκαιρία να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών ιδεών και μαθηματικών ιδιοτήτων και να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά ως εργαλείο σκέψης και κατασκευής στα διάφορα μοντέλα,

και όχι απλώς ως διαδικασία απομνημόνευσης, ενισχύοντας τη μαθηματική τους ταυτότητα και αναλαμβάνοντας το ρόλο δημιουργού-σχεδιαστή για τα μοντέλα τους. Οι μαθητές φάνηκε πως ανέπτυξαν κριτική στάση απέναντι στις μαθηματικές ιδιότητες, ενεργή εμπλοκή και αυτενέργεια μέσα από το μαστόρεμα των διαφορετικών μοντέλων, αισθανόμενοι την ανάγκη να βασιστούν στα ίδια τα μαθηματικά και όχι στο 'μάτι', προχωρώντας από την απλή χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων προς τη γενίκευση, στοιχεία που δείχνουν την ευκαιρία ανάπτυξης μίας ισχυρής μαθηματικής σκέψης και τη δημιουργία ενός ισχυρού μαθησιακού περιβάλλοντος σύμφωνα με τις διαστάσεις του πλαισίου TRU. Ταυτόχρονα, η πρόβλεψη, η κατασκευή και η απασφαλμάτωση των δυναμικών γραμμάτων έφερε τους μαθητές αντιμέτωπους με διαφορετικούς ρόλους της μεταβλητής μέσα από τις μαθηματικές ιδιότητες που επέλεγαν κάθε φορά να χρησιμοποιήσουν, φέρνοντας στο προσκήνιο προ υπάρχουσες παρανοήσεις τους και επιβεβαιώνοντας τόσο προηγούμενες έρευνες, όσο και την εστίαση του σημερινού σχολείου κυρίως σε διαδικασίες επίλυσης και στείρας παρουσίασης της έννοιας της μεταβλητής ως άγνωστου, με τα αποτελέσματα να δείχνουν νοηματοδότηση των μαθητών ως προς το ρόλο της ως γενικευμένο αριθμό. Είναι εμφανές ότι η παρούσα εργασία υπόκειται σε ποικίλους περιορισμούς, φωτίζει όμως πτυχές της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών μέσα από την εμπλοκή τους με προγραμματιστικά μέσα και δυναμικά μοντέλα σε συνδυασμό με τις ευκαιρίες που δίνουν τα δύο θεωρητικά μοντέλα των TRU και '5Es'.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η παρούσα έρευνα χρηματοδοτείται από το έργο HORIZON-WIDERA "TransEET" (Transforming Education with Emerging Technologies - No. 101078875) του European Research Executive Agency – REA. Ωστόσο, οι απόψεις που εκφράζονται είναι αποκλειστικά των συγγραφέων και δεν αντανακλούν κατ' ανάγκη εκείνες της ΕΕ, η οποία δεν θεωρείται υπεύθυνη, όπως και η χορηγούσα αρχή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers.*

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I., & Noss, R. (2016). Building mathematical knowledge with programming: insights from the ScratchMaths project. In A. Sipitakiat & N. Tutiyaphuengprasert (Eds.), *Proceedings of Constructionism Conference 2016,* (pp. 26–33).

Dede, Y. (2004). The Concept of Variable and Identification its Learning Difficulties. *Educational Science: Theory & Practice, 4*(1), 50–58.

European Parliament & Council. (2006). Recommendation of the European Parliament and the Council on key competences for lifelong learning (2006/962/EC). *Official Journal of the European Union.*

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 105–123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Kynigos, C. (2007). Half-baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design. *Informatics in Education, 6*(2), 335–358. https://doi.org/10.15388/infedu.2007.22

Kynigos, C. & Diamantidis, D. (2022). Creativity in engineering mathematical models through programming. *ZDM Mathematics Education 54*, 149–162. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01314-6

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competences revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers.* Kluwer Academic Publishers.

Orhun, N. (2004). Students' mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 797–820.

Papert, S. (1980). Mindstorms - Children, Computers and Powerful Ideas. Basic Books, Inc.

Psycharis, G. & Kynigos, C. (2009). Normalising Geometrical Figures: Dynamic Manipulation and Construction of Meanings for Ratio and Proportion. *Research in Mathematics Education, 11*(2), 149–166. http://dx.doi.org/10.1080/14794800903063349

Rudi, Suryadi, D., & Rosjanuardi, R. (2020). Identifying Students' Difficulties in Understanding and Applying Pythagorean Theorem with an Onto Semiotic Approach. *MaPan: Jurnal Matematika dan Pembelajaran, 8*(1), 1–18. https://doi.org/10.24252/mapan.2020v8n1a1

Schoenfeld, A.H. (2022). Why Are Learning and Teaching Mathematics So Difficult?. In: Danesi, M. (Eds), *Handbook of Cognitive Mathematics.* Springer.

Schoenfeld, A. H. (2016). An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Retrieved from http://map.mathshell.org/trumath.php

Η ΔΤΜ ΣΤΗΝ ΕΠΟΧΗ ΤΩΝ ΑΣΑΦΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ: ΨΗΦΙΑΚΟΙ ΠΟΡΟΙ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ

Χρόνης Κυνηγός

ΕΚΠΑ, ΦΛΣ, ΠαιΤΔΕ, Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας

http://etl.eds.uoa.gr , kynigos@eds.uoa.gr

Ο κάθε πολίτης αισθάνεται εκτεθειμένος σε ασαφή προβλήματα, παγκόσμια, αμφιλεγόμενα, πολύπλοκα, αξιακά βεβαρημένα κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα, όπως η πανδημία και η κλιματική αλλαγή. Η κοινωνία μας είναι γεμάτη από ατομικό και κοινό άγχος, άρνηση και αδράνεια, που τελικά οδηγεί σε εκθετική αύξηση του κινδύνου για συνέπειες σε ευρύτερη έκταση. Εντείνεται η ρητορική για εκπαιδευτικό μετασχηματισμό με στόχο να παρέχει στους μαθητές εμπειρία ώστε να αντιμετωπίσουν τέτοια ζητήματα συμμετοχικά και έχοντας αποκτήσει γνώσεις. Σε αυτό το άρθρο συζητώνται θέματα παιδαγωγικού σχεδιασμού για την καλλιέργεια του ορθολογισμού και της μαθηματικής σκέψης ως μέσο αντιμετώπισης τέτοιων ζητημάτων.

ΑΣΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Στη σύγχρονη κοινωνία και την καθημερινότητά μας παρεισφρύει όλο και περισσότερο η ενασχόληση και η εμπλοκή σε προσωπικό επίπεδο όχι με καθαρά, δυνητικά επιλύσιμα, μαθηματικά προβλήματα, αλλά με πολύ σύνθετα ζητήματα και προβλήματα που μας περιβάλλουν: κλιματική κρίση, βιωσιμότητα, βιώσιμες πόλεις, πανδημίες, ατομική διατροφή που να συνδυάζει την υγεία και την ευεξία. Αυτού του είδους τα ζητήματα δεν εμπεριέχουν μια μοναδική λύση μέσα τους και δεν μπορούμε να βρούμε έναν έξυπνο τρόπο να τα αντιμετωπίσουμε και να απαλλαγούμε τελικά από αυτά. Παρόλο που οι μαθηματικοί παράγουν ατελείωτα μοντέλα τέτοιων πολύπλοκων καταστάσεων, κανένα από αυτά δεν εξηγεί πραγματικά το αντίστοιχο φαινόμενο με κάποιον ολοκληρωμένο τρόπο επίλυσης (Davis & Hersch, 1981).

Στην παρούσα εργασία εξετάζω ένα ερώτημα που πιστεύω ότι πρέπει να τεθεί στην κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης:

- Υπάρχει ρόλος για τα μαθηματικά και τη μαθηματική σκέψη στην αντιμετώπιση σύνθετων, αμφιλεγόμενων, κοινωνικο-επιστημονικών ζητημάτων;

- Αν ναι, πώς μπορούν να σχεδιαστούν και να χρησιμοποιηθούν τα ψηφιακά μέσα ώστε να εισαχθεί η μαθηματική σκέψη και ο ορθολογισμός για τη διαχείριση και την αντιμετώπιση τέτοιων ζητημάτων;

Τέτοια ζητήματα έχουν διαδραματίσει κεντρικό ρόλο στη δημιουργία μεγάλων ρευμάτων που πιέζουν για αλλαγές και επηρεάζουν τα εκπαιδευτικά συστήματα στην Ευρώπη και σε όλο τον κόσμο. Έχουν συνδεθεί με τις ιδέες της καλλιέργειας των δεξιοτήτων του 21ου αιώνα και την ικανότητα δράσης. Οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν συνδέσει αυτά τα είδη δεξιοτήτων –όπως η δημιουργικότητα, η υπολογιστική σκέψη, η συνεργασία και η επικοινωνία, η θέση και επίλυση προβλημάτων– με τη μαθηματική λογική (Kynigos & Diamantidis, 2021).

Υπάρχει επομένως ρόλος για εμάς ως κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης να συμβάλουμε σε αυτό το ρεύμα αλλαγής ή είναι καλύτερα να μείνουμε στην άκρη με την ελπίδα ότι ο απομονωμένος τομέας των μαθηματικών και η ομορφιά τους θα παραμείνει και θα γίνει σεβαστός όπως είχε καθιερωθεί στην εκπαίδευση τον προηγούμενο αιώνα; Με άλλα λόγια, υπάρχει ρόλος για τη μαθηματική σκέψη και τον ορθολογισμό στη μετα-κανονική επιστήμη;

Ας πάρουμε το ρόλο του σχολείου να εμπνεύσει τη δια βίου ενασχόληση των πολιτών με προβλήματα που μπορούν να συμβάλουν σε μια πρακτική δημοκρατική, που εμπλέκει με κοινωνικό τρόπο τη βιώσιμη ανάπτυξη, όπου εμπειρογνώμονες και διάφορες ομάδες πολιτών με διαφορετικές οπτικές συμμετέχουν σε μια διαλογική έρευνα για ένα σύνθετο, ασαφές, πολύπλευρο, αμφιλεγόμενο ζήτημα, όπως η βιώσιμη διαβίωση. Αυτού του είδους το ζήτημα έχει ονομαστεί «ασαφές πρόβλημα» (wicked problem), δηλαδή πρόκειται για δυσλειτουργία μέσα σε ένα πολύπλοκο σύστημα (Brown et al., 2010).

Ωστόσο, τα ασαφή προβλήματα χρειάζονται ενέργειες σε πολλά επίπεδα, παρουσιάζουν κίνδυνο αδράνειας και εκθετική αύξηση του προβλήματος και των συνεπειών του σε υψηλά επίπεδα. Για το άτομο είναι σημαντικό ευαισθητοποιηθεί και να αποκτήσει γνώσεις σχετικά με το πρόβλημα και να συμμετάσχει επίσης σε ενέργειες όπως να φροντίσει να αφήσει το ατομικό του αποτύπωμα σε σχέση με το πρόβλημα, να θέσει σε αμφισβήτηση τις δικές του πράξεις, πεποιθήσεις και συνήθειες, και να ενδιαφερθεί όχι μόνο για την ατομική του δράση αλλά και για τη συμβολή σε συλλογική δράση σε επίπεδο πόλης ή δήμου. Απαιτείται αλλαγή παραδείγματος, από την επίλυση σαφώς καθορισμένων μεμονωμένων προβλημάτων σε μια μετα-κανονική επιστημονική προσέγγιση.

Μέχρι σήμερα, ο μετασχηματισμός της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν έχει ασχοληθεί σχεδόν καθόλου με τον ρόλο των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης στη μετα-κανονική επιστήμη. Η διαψευσιμότητα (fallibility) στα μαθηματικά έχει γίνει αντιληπτή στο πλαίσιο της διαδικασίας αναζήτησης της αλήθειας, της βεβαιότητας, σε ένα κανονικό επιστημονικό περιβάλλον (Lakatos, 1976). Στη μετα-κανονική επιστήμη,

ωστόσο, το ζήτημα δεν είναι η διαδικασία παραγωγής της μαθηματικής αλήθειας, αλλά θα μπορούσε ενδεχομένως να είναι ο ρόλος που μπορεί να διαδραματίσει μια τέτοια αλήθεια σε, ας πούμε, ασαφή προβλήματα (Riling, 2020). Σε αυτό το άρθρο, υποστηρίζω ότι η μαθηματική σκέψη και οι μαθηματικές έννοιες έχουν και θα πρέπει να έχουν έναν δευτερεύοντα αλλά όχι λιγότερο σημαντικό ρόλο να διαδραματίσουν στη μετα-κανονική επιστήμη και ότι οι Μαθηματικοί πρέπει να σκεφτούν τη συμμετοχή τους στο πρόσφατο παιδαγωγικό ρεύμα που απαιτεί από το σχολείο να παρέχει εκπαίδευση στα ασαφή προβλήματα.

ΨΗΦΙΑΚΑ ΜΕΣΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΣΑΦΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ CHOICO

Ψηφιακά μέσα έχουν σχεδιαστεί ως εργαλεία που συμβάλλουν στο παιδαγωγικό ρεύμα μετασχηματισμού του παραδείγματος της μαθηματικής εκπαίδευσης: από αυτό που ο Chevallard (2012) αποκαλεί παράδειγμα «επίσκεψης των εκθεμάτων» σε ένα βιωματικό, αμφισβητούμενο (questioning), δημιουργικό και διαλεκτικό παράδειγμα (Papert, 1993). Οι μετασχηματισμοί, ωστόσο, έχουν μέχρι στιγμής διατηρήσει τα μαθηματικά ως τον πρωταρχικό εκπαιδευτικό στόχο του εγχειρήματος, όπου η έμφαση δίνεται στη μοντελοποίηση μαθηματικών αντικειμένων και αναπαραστάσεων ευθέως ή το πολύ-πολύ στη μοντελοποίηση αντικειμένων και συμπεριφορών που ενσωματώνουν άμεσα και σημαντικά μαθηματικές έννοιες (Sarama & Clements, 2002).

Σε αυτό το πλαίσιο παρουσιάζουμε ένα κατασκευαστικό (constructionist) εργαλείο που ονομάζουμε «ChoiCo», ένα ψηφιακό μέσο ειδικά σχεδιασμένο για τη μετα-κανονική εκπαίδευση των κοινωνικο-επιστημονικών ζητημάτων. Το ChoiCo είναι ακρωνύμιο των λέξεων «Choices with Consequences» (Kynigos & Grizioti, 2020, http://etl.ppp.uoa.gr/choico). Πρόκειται για ένα σύστημα συγγραφής παιχνιδιών που εμπεριέχει κοινωνικο-επιστημονικά θέματα. Το σύστημα αφήνει την επιλογή και τον ορισμό ενός τέτοιου θέματος στον χρήστη. Βασίζεται στην ιδέα ενός παιχνιδιού όπου υπάρχει ένας μόνο παίκτης που κάνει επιλογές ανάμεσα σε αντικείμενα τοποθετημένα σε έναν τοπολογικά κωδικοποιημένο χάρτη. Κάθε επιλογή έχει συνέπειες σε κάποια προκαθορισμένα πεδία, αλλά δεν υπάρχει μια «καθαρή» επιλογή, δηλαδή μια επιλογή που έχει μόνο θετικές ή αρνητικές συνέπειες. Το παιχνίδι τελειώνει όταν ο παίκτης περάσει κάποια προκαθορισμένη τιμή σε ένα από τα πεδία, δηλαδή περάσει μια «κόκκινη γραμμή». Έτσι, ο παίκτης πρέπει να περιηγηθεί σε ένα πεδίο επιλογών, με το νόημα του παιχνιδιού να είναι να παραμείνει στο παιχνίδι όσο το δυνατόν περισσότερο αποφεύγοντας τις «κόκκινες γραμμές». Όσο περισσότερες επιλογές γίνονται, τόσο καλύτερος είναι ο παίκτης. Η βιωσιμότητα είναι το κλειδί- όσο περισσότερο μπορεί ο παίκτης να διατηρήσει τη δυνατότητά του να

επιλέγει, τόσο το καλύτερο. Αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι το ChoiCo παρέχει διαφάνεια αφήνοντας τους χρήστες να δημιουργήσουν ή να αλλάξουν το παιχνίδι, να ονοματίσουν όσα πεδία επιθυμούν, να ορίσουν τιμές για κάθε επιλογή, να προγραμματίσουν τις αρχικές τιμές, τις «κόκκινες γραμμές» και μια σειρά από «προειδοποιητικά μηνύματα» και άλλους κανόνες μέσω μιας γλώσσας προγραμματισμού. Οι τιμές των πεδίων μπορούν να είναι αριθμητικά σταθερές ή τυχαίες, ορατές ή κρυμμένες από τον παίκτη. Οι τιμές μπορούν να οδηγούν τον παίκτη να συμπεράνει τις συνέπειες που απορρέουν από την επιλογή ενός πεδίου παρατηρώντας κάποιο κείμενο, ένα βίντεο ή μια εικόνα.Το ChoiCo επομένως δεν περιορίζει το χρήστη μόνο στο παίξιμο ενός παιχνιδιού, αλλά του δίνει τη δυνατότητα να αναλάβει τον ρόλο του επινοητή και παραγωγού, του «παραναλωτή» (prosumer), κάποιου που ασχολείται με την αλλαγή των κανόνων του παιχνιδιού εναλλάξ με το παίξιμο.

Ας ξεκινήσουμε, λοιπόν, με ένα παράδειγμα παιχνιδιού που σχεδιάστηκε στην πραγματικότητα από μεταδιδακτορικούς ερευνητές/τριες του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (Kynigos & Grizioti 2020). Ας θεωρήσουμε μια χρήστη στον ρόλο της παίκτριας. Ας της δώσουμε ένα όνομα: «Μαίρη». Η Μαίρη είναι πολίτης και ζει στην εποχή της πανδημίας του κορονοϊού. Έχει να κάνει κάποιες επιλογές σχετικά με το τι θα κάνει στην ημέρα της. Για παράδειγμα, μπορεί να σκεφτεί να τρέξει. Αν επιλέξει να τρέξει, το παιχνίδι τής λέει ποιες θα είναι οι συνέπειες ως προς μια «αξιών»/παραμέτρων. Οι αξίες είναι οι εξής: «φυσική ικανότητα», «διασκέδαση», «κοινωνικότητα», «χρήματα» και «κίνδυνος μόλυνσης από κορονοϊό». Έτσι, το παιχνίδι λέει στη Μαρία τι πρόκειται να συμβεί, αν κάνει μια επιλογή, πριν αποφασίσει να την κάνει. Αν επιλέξει να ασχοληθεί με το τρέξιμο, τότε ο κίνδυνος μόλυνσης από κορονοϊό θα είναι ένας τυχαίος αριθμός από μείον 15 έως μείον 20, δηλαδή *ίση πιθανότητα στο αντίστοιχο εύρος τιμών.* Επομένως, δεν θα ήταν μεγάλος ο κίνδυνος, αλλά και πάλι, η Μαρία δεν θα ήταν σίγουρη για το τι πρόκειται να συμβεί. Η συνέπεια ως προς τη «φυσική κατάσταση» είναι μια συνάρτηση του πόσο καλή φυσική κατάσταση θα είχε η Μαρία αν περπατούσε. Και οι υπόλοιπες είναι απλώς αριθμοί. Έτσι, κάνοντας κλικ στην επιλογή να πάει για τρέξιμο, η Μαίρη παρατηρεί την αλλαγή των συνολικών τιμών σε ένα αντίστοιχο πάνελ στην οθόνη. Στη συνέχεια, μπορεί να δοκιμάσει να κάνει κάτι άλλο. Για παράδειγμα, μπορεί να δοκιμάσει να πάει σε ένα κατάστημα της περιοχής.

Αυτή η επιλογή θα οδηγούσε σε πολύ μεγαλύτερο κίνδυνο μόλυνσης από κορονοϊό, 15 έως 25, και θα είχε ως αποτέλεσμα να ξοδευτούν χρήματα (-30). Από τη θετική πλευρά, θα ανέβαζε την κοινωνικότητα και τη φυσική της κατάσταση, με το πολύ περπάτημα πάνω-κάτω στους διαδρόμους του καταστήματος που βλέπετε. Αν στη συνέχεια επιλέξει να πάει στο

εμπορικό κέντρο, θα κινδυνεύσει να πεταχτεί έξω από το παιχνίδι, καθώς ο κίνδυνος μόλυνσης από κορονοϊό εκεί θα είναι τεράστιος. Έτσι, ίσως αποφασίσει να πάει στο σπίτι της. Κάνοντας κλικ σε αυτή την επιλογή εμφανίζεται ένα διαφορετικό επίπεδο με πράγματα που μπορεί να κάνει στο σπίτι, π.χ. να εργαστεί από το σπίτι, να ψωνίσει στο διαδίκτυο, κ.λπ. Για παράδειγμα, αν αποφασίσει να κοιμηθεί και συνεχίσει να κάνει αυτή την επιλογή ουσιαστικά, δηλαδή να κοιμηθεί κατά τη διάρκεια της πανδημίας, το παιχνίδι στέλνει γρήγορα ένα προειδοποιητικό σήμα: «Είσαι δυστυχισμένη. Πρέπει να κάνεις κάτι». Και μετά, αν συνεχίσει, την πετάει έξω, αφού η τιμή «διασκέδαση» ξεπερνάει τα όρια και το παιχνίδι αναφέρει ότι έχει πάθει κατάθλιψη. Έτσι, η ιδέα του παιχνιδιού είναι να παραμείνετε στο παιχνίδι όσο το δυνατόν περισσότερο, και δεν υπάρχει καμία επιλογή που να έχει μόνο θετικές ή μόνο αρνητικές συνέπειες. Η Μαρία πρέπει να βρει έναν τρόπο να πλοηγηθεί προκειμένου να παραμείνει στο παιχνίδι όσο το δυνατόν περισσότερο. Αυτό είναι ένα παιχνίδι για έναν πολίτη που αντιμετωπίζει ένα ασαφές πρόβλημα.

Τώρα ως προς τις μικρο-παρεμβάσεις, το «πείραγμα» (modding) του παιχνιδιού, αναλαμβάνοντας ο/η παίκτης/ κτρια τον ρόλο ενός χάκερ. Στο παράδειγμα του παιχνιδιού covid, όλα όσα αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής μπορούν να αλλάξουν με το να αλλάξει ο παίκτης ρόλο και να παρέμβει στο παιχνίδι (modder).

Όλες αυτές οι δυνατότητες έχουν σχεδιαστεί για να επιτρέπουν στους χρήστες να εμπλέκονται με ένα μεγαλύτερο και πιο σύνθετο σύνολο εννοιών, πρακτικών και αξιών σε σχέση με εκείνες που μπορεί να βρει κανείς σε παρόμοια συστήματα συγγραφής στον χώρο της εκπαίδευσης. Υπάρχουν τρεις διακριτοί αλλά και αλληλένδετοι τομείς σε σχέση με τα παραπάνω. Ο ένας είναι, φυσικά, τα ζητήματα του κοινωνικού συστήματος που εμπεριέχονται στο παιχνίδι, ο άλλος είναι η υπολογιστική σκέψη, δηλαδή οι έννοιες και οι πρακτικές που καλλιεργούνται και χρησιμοποιούνται, και ο τρίτος μπορεί να αφορά μαθηματικές έννοιες και το μαθηματικό συλλογισμό.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΑΣΑΦΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Πώς μπορούμε λοιπόν να σκεφτούμε τη χρήση του ChoiCo στην κατεύθυνση του να αναπτύξουν οι μαθητές την προδιάθεση να χρησιμοποιούν τον ορθολογισμό και τη μαθηματική σκέψη, προκειμένου να αντιμετωπιστούν ασαφή προβλήματα όπως οι συνέπειες της πανδημίας από τον κορονοϊό; Ας σκεφτούμε καταρχήν το παιχνίδι Covid −και το ChoiCo γενικότερα− ως έναν μαθηματικό μικρόκοσμο (Healy & Kynigos, 2010). Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι ή θα μπορούσαν να είναι ενσωματωμένες σε ένα παιχνίδι; Και όταν οι μαθητές αλλάζουν το

παιχνίδι, ποια μαθηματική τεκμηρίωση (reasoning) θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν καθώς εντοπίζουν, αμφισβητούν και τροποποιούν τις τιμές και τις μεταξύ τους σχέσεις; Όπως υπαινιχθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα, το παιχνίδι Covid ενσωματώνει τον αναλογικό συλλογισμό (proportional thinking), τις συναρτήσεις, τις πιθανότητες, μαθηματικά ζητήματα που σχετίζονται με τον προγραμματισμό. Αλλά, φυσικά, αυτές οι μαθηματικές ιδέες υιοθετούν το καθεστώς των πιθανοτήτων. Όταν το παιχνίδι χρησιμοποιείται από τους μαθητές, ο προσδιορισμός αυτών των ιδεών και των τρόπων με τους οποίους αυτές οι ιδέες μπορούν ή δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι μια διαδικασία εργαλειοποίησης που συνοδεύει και αλλαγές στις λειτουργικότητες του ίδιου του ψηφιακού πόρου όπως την περιγράφουν οι Γάλοι ερευνητές (Artigue, 2012).

Τα παιχνίδια που βασίζονται στο ChoiCo μπορούν να αποτελέσουν πηγή για τους μαθητές ώστε να εμπλακούν και να ασχοληθούν με κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα στο πλαίσιο της μετα-κανονικής επιστήμης και μπορούν να σχεδιαστούν ώστε να προκαλέσουν τους μαθητές να επιφέρουν σε αυτό αλλαγές. Δεν χρειάζεται να είναι σχεδιασμένα ώστε οι αλλαγές να είναι δύσκολες και οι μαθητές να είναι τρομερά μυημένοι. Μπορούν να σχεδιαστούν έτσι ώστε οι μαθητές να θεωρήσουν εύκολο να συμμετέχουν στην τροποποίηση του παιχνιδιού. Από παιδαγωγική άποψη, τα παιχνίδια αυτά αντί να αποτελούν πηγές που έχουν σχεδιαστεί για να ενισχύσουν την ανταπόκριση των μαθητών σε καθαρά μαθηματικά ζητήματα, μπορούν να θεωρηθούν εργαλεία για την καλλιέργεια μιας μαθηματικής προδιάθεσης και ικανότητας, εκλαμβάνοντας τους μαθητές ως νέους πολίτες. Το μαστόρεμα (modding) των παιχνιδιών, όπως του ChoiCo, μπορεί επομένως να βοηθήσει τους μαθητές να αναγνωρίσουν την αξία της μαθηματικοποίησης, της μοντελοποίησης, του μαστορέματος με μοντέλα, της χρήσης του ορθολογισμού για την αντιμετώπιση ασαφών προβλημάτων.

Υπάρχουν ήδη αρκετά ελεύθερα διαθέσιμα παιχνίδια στον ιστότοπο του ChoiCo, http://etl.ppp.uoa.gr/choico. Επιπλέον, ένας μικρός, προς το παρόν, αριθμός παιχνιδιών ChoiCo, που έχουν σχεδιαστεί με μεγαλύτερη έμφαση στις μαθηματικές ιδέες και αφορούν τις αγορές σε ένα σούπερ μάρκετ, βρίσκονται στο ψηφιακό σχολείο, ένα διαδικτυακό χώρο με μεγάλη προβολή και χρήση στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα (http://photodendro.edu.gr). Οι τιμές αφορούν: ένα αριθμό προϊόντων, πόσα χρήματα διαθέτουμε, την υγεία και την ευχαρίστηση. Έτσι, αν αγοράσετε σοκολάτα τότε έχετε: το κόστος είναι 7€, ο αριθμός των αντικειμένων είναι 7 φορές μεγαλύτερος από το να αγοράζαμε μέλι, η υγεία παίρνει την τιμή -5, και η ευχαρίστηση 4. Έτσι, αν συνεχίσετε να τρώτε μόνο σοκολάτα, το παιχνίδι θα σας προειδοποιεί όταν η υγεία σας φτάσει κάτω από την τιμή 10, και θα σας πετάξει έξω όταν φτάσετε κάτω

από το μηδέν με το αιτιολογικό της κακής υγείας. Αν, αντίθετα, αγοράσετε γιαούρτι ή μπρόκολο, η υγεία σας βελτιώνεται, αλλά η ευχαρίστησή σας μειώνεται. Η ιδέα εδώ είναι ότι οι συνέπειες δεν έχουν μόνο άμεσες τιμές Μερικές φορές οι τιμές πρέπει να εξετάζονται σε σχέση με άλλα πράγματα, οπότε οι μαθητές πρέπει να σκέφτονται τις μονάδες μέτρησης και τις σχέσεις και τις λειτουργείς που αναπτύσσονται κατ' αναλογία. Το παιχνίδι Supermarket είναι ένα παράδειγμα διαμόρφωσης ενός παιχνιδιού που ταιριάζει περισσότερο με τα μαθηματικά ενός προγράμματος σπουδών διαρθρωμένου σε γνωστικά αντικείμενα. Όμως, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν σημαντικά θέματα που εμπεριέχουν αξίες, όπως η γεύση, η υγεία, η απόλαυση της τροφής, οι ισορροπημένες δαπάνες κ.λπ.

ΟΤΑΝ Η ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΟΙ ΑΞΙΕΣ ΣΥΝΥΠΑΡΧΟΥΝ

Πώς φαίνεται λοιπόν ο μαθηματικός συλλογισμός στο πλαίσιο της αντιμετώπισης ασαφών προβλημάτων; Στο παράδειγμα που παρουσιάζουμε εδώ, μια ομάδα τριών 13χρονων μαθητών τροποποιούν από κοινού ένα παιχνίδι ChoiCo που σχεδιάστηκε από ερευνητές ώστε να συμπεριλαμβάνει αμφισβητούμενες αντιλήψεις σχετικά με το τι σημαίνει για έναν πολίτη να ζει μια βιώσιμη ζωή στην πόλη του (Kynigos &Yiannoutsou, 2018). Οι μαθητές έπαιξαν αρχικά το παιχνίδι και στη συνέχεια άρχισαν να συζητούν τις ιδέες που ενσωματώνονται σε αυτό. Ο Ε είναι ο ερευνητής, ο Μ(x) είναι ένας μαθητής:

Μ 8: Ποιος είπε ότι τα χρήματα είναι το πιο σημαντικό για το παιχνίδι; Το μόνο που κάνατε ήταν να πηγαίνετε από τη δουλειά στο σπίτι και αντίστροφα.

Μ 5: Νομίζω ότι κερδίσαμε επειδή έχουμε τα υψηλότερα επίπεδα ενέργειας και το υψηλότερο κοινωνικό status.

Μ 11: Περιμένετε, περιμένετε. Νικητής είναι αυτός που έχει τις μεγαλύτερες τιμές σε όλα: χρήματα, ενέργεια, διασκέδαση, κοινωνική θέση, υγεία, υγιεινή.

Ε: Τι ζωή πρέπει να κάνετε για να το πετύχετε αυτό;

Μ 16: Πρέπει να κάνεις πολλά από όλα: να διασκεδάζεις πολύ, να έχεις πολλά χρήματα, να μην παραμελείς την κοινωνική σου ζωή... Όλα αυτά είναι πάρα πολλά.

Μ 3: Πρέπει να είσαι φρικιό για να ζεις έτσι. Δεν θα έχεις ούτε μια στιγμή ηρεμίας.

Στον παραπάνω διάλογο που προκάλεσε ο ερευνητής, οι μαθητές συζήτησαν πάνω σε μια ιδέα του παιχνιδιού −τι σημαίνει να κερδίζεις− συνδέοντάς την πρωτίστως με το ασαφές πρόβλημα: αξίζει ένας πολίτης να ζει μια ζωή όπου επιδιώκει πάντα υψηλές επιδόσεις σε όλες τις πτυχές της ζωής του; Σε αυτόν τον κύκλο συζήτησης, οι μαθητές εξέτασαν τις

αριθμητικές τιμές και τα αθροίσματά τους, έχοντας σιωπηρά κατά νου ότι κάθε μία από τις διαθέσιμες επιλογές είχε τουλάχιστον μία ανεπιθύμητη τιμή, έναν αρνητικό αριθμό από αυτή την άποψη. Το υποκείμενο πρόβλημα ήταν το πώς να αυξηθούν οι τιμές όλων των πεδίων, παρόλο που κάθε επιλογή θα επέφερε αναπόφευκτα μείωση σε τουλάχιστον ένα από αυτά τα πεδία.

Μ 1: Δεν είμαι σίγουρος για το να μην υπάρχουν αυτοκίνητα στην πόλη.

Μ 2: Σας λέω ότι αυτό έχει γίνει στο Φράιμπουργκ. Τα αυτοκίνητα συνδέονται με τη ρύπανση.

Μ 1: Ναι, αλλά φανταστείτε πόσο περισσότερο χρόνο χρειάζεστε αν πηγαίνετε στη δουλειά σας με ποδήλατο. Πρέπει να ξυπνάτε τουλάχιστον μία ώρα νωρίτερα.

Μ 3: Εντάξει τότε, θα προσθέσουμε χρόνο στους δείκτες. Η χρήση του ποδήλατου θα έπρεπε να έχει μειώσει τη ρύπανση αλλά να έχει αυξήσει τον χρόνο.

Συζητώντας τα υπέρ και τα κατά των τρόπων μετάβασης στη δουλειά, οι μαθητές εντόπισαν ότι η ρύπανση και ο χρόνος είναι αντιστρόφων εξαρτώμενες μεταβλητές και έτσι αποφάσισαν να εισάγουν άλλο ένα πεδίο, τον χρόνο. Και πάλι, στο επίκεντρο βρισκόταν κυρίως το πρόβλημα της ρύπανσης και η ιδέα της αντίστροφης αναλογίας ήταν ένα εργαλείο με το οποίο σκέφτηκαν και ανέπτυξαν την επιχειρηματολογία τους για την επιλογή του πολίτη να πηγαίνει στη δουλειά του με το αυτοκίνητο ή με το ποδήλατο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Είναι γεγονός ότι αυτό το άρθρο έχει ανοίξει πολλά ζητήματα ταυτόχρονα: Μπορούν τα μαθηματικά ως κανονική επιστήμη να θεωρηθούν ένα εργαλείο, μια δεξιότητα και μια ικανότητα που μπορεί να αξιοποιηθεί σε καταστάσεις που γίνονται καλύτερα κατανοητές μέσω της μετα-κανονικής επιστήμης, όπως τα άτομα και οι συλλογικότητες που αντιμετωπίζουν ασαφή προβλήματα; Πώς μπορεί ο σχεδιασμός ψηφιακών μέσων για την εκπαίδευση σε ασαφή προβλήματα να ενσωματώσει ζητήματα προς συζήτηση της μετασχηματιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως αυτά που αναφέρθηκαν στην πρώτη ενότητα; Τι είδους δεξιότητες, ικανότητες και διαθέσεις μπορούν να καλλιεργηθούν με τη βοήθεια του μαθηματικού συλλογισμού; Μπορεί να καλλιεργηθεί ο μαθηματικός συλλογισμός στο πλαίσιο της λήψης ατομικών αποφάσεων, όταν κάποιος καλείται να είναι δημιουργικός και να υιοθετεί, τόσο σε προσωπικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο, μια ενεργή στάση απέναντι στα ασαφή προβλήματα;

Το παράδειγμα του παιχνιδιού «Πολίτης στην εποχή του Covid-19» του ChoiCo και τα σύντομα παραθέματα από μαθητές που τροποποίησαν το

παιχνίδι «Πολίτης σε μια βιώσιμη πόλη» χρησιμοποιήθηκαν ως πλαίσιο αναφοράς για την επεξεργασία πιθανών εκπαιδευτικών και ερευνητικών προσπαθειών σε αυτή την κατεύθυνση. Οι μαθηματικές ιδέες που ενσωματώθηκαν στα δύο παραδείγματα παιχνιδιών κυμαίνονταν από απλές πράξεις έως αναλογίες και από γραμμικές λειτουργικές σχέσεις έως πιθανότητες. Πρέπει να κατανοήσουμε βαθύτερα το εύρος των ιδεών που μπορεί να είναι χρήσιμες στην εκπαίδευση για τα ασαφή προβλήματα, αλλά το ενδιαφέρον ερώτημα είναι κυρίως τι είδους ορθολογισμός μπορεί να αναπτυχθεί όταν χρησιμοποιείται ο μαθηματικός λογισμός και, ειδικότερα, πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτός ο ορθολογισμός όταν προσπαθούμε να κατανοήσυομε και να αντιμετωπίσουμε ασαφή προβλήματα; Στα αποσπάσματα, είδαμε τους μαθητές να αρθρώνουν μια τεκμηρίωση σε ποικίλα επίπεδα: από την διατύπωση πιο εστιασμένων επιχειρημάτων πρόσθεσης ή υπολογισμού τιμών έως την επανεξέταση των «μεγάλων ζητημάτων», όπως «ποια είναι η αξία του να είσαι πρώτος σε όλα». Υπάρχουν πολλά ακόμη να μάθουμε για το πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αιτολόγηση σε τέτοιες καταστάσεις και πώς και πότε μπορεί να είναι χρήσιμες μαθηματικές ιδέες και έννοιες. Το παιχνίδι Covid ChoiCo θα μπορούσε να ενσωματώσει ένα ευρύτερο φάσμα μαθηματικών εννοιών, όπως τετραγωνικές ή εκθετικές ή περιοδικές συναρτησιακές σχέσεις, και θα μπορούσε να σχεδιαστεί ένα μάθημα που να ταλαντεύεται από την εστίαση στις συνήθειες των πολιτών προς τα μαθηματικά που κρύβονται κάτω από τις συνέπειες των εκάστοτε ενεργειών. Σε κάθε περίπτωση, αυτό το άρθρο είχε στόχο να προσκαλέσει την κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης να αναλογιστεί τον ρόλο της μαθηματικής λογικής για τα ασαφή προβλήματα και να αναπτύξει μια επιχειρηματολογία για την καλλιέργεια αυτής της λογικής στο πλαίσιο του μετασχηματισμού της εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Brown, V. A., Harris, J. A., & Russell, J. Y. (Eds.). (2010). *Tackling wicked problems through the transdisciplinary imagination*. Earthscan.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique [Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach]. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Birkhauser.

European Commission. (2020). *Digital education action plan (2021–2027): Resetting education and training for the digital age*. https://education.ec.europa.eu/focus-topics/digital/education-action-plan

Healy, L., Kynigos, C. (2010) Charting the microworld territory over time: design and construction in learning, teaching and developing mathematics. The International Journal of Mathematics Education, 42, ZDM, Springer Verlag, 63-76.

Kynigos, C., & Yiannoutsou, N. (2018). Children challenging the design of half-baked games: Expressing values through the process of game modding. *International Journal of Child-Computer Interaction*, *17*, 16–27. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42975-5_1

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2020). Modifying games with ChoiCo: Integrated affordances and engineered bugs for computational thinking. *British Journal of Educational Technology*, *51*(6), 2252–2267. https://doi.org/10.1111/bjet.12898

Kynigos, C., & Diamantidis, D. (2021). Creativity in engineering mathematical models through programming. *ZDM Mathematics Education*, *42*, 63–76. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01314-6

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Papert, S. (1993). The Children´s Machine, Rethinking School in the Age of the Comptuter. New York: Basic Books.

Riling, M. (2020). Recognizing mathematics students as creative: Mathematical creativity as community-based and possibility-expanding. *Journal of Humanistic Mathematics*, *10*(2), 6–39.

Sarama, J., & Clements, D. (2002). Design of microworlds in mathematics and science education. *Journal of Educational Computing Research*, *27*(1), 1–5.

Χρηματοδότηση: HORIZON-WIDERA "TransEET" - No. 101078875, European Research Executive Agency – REA. Οι απόψεις που εκφράζονται είναι αποκλειστικά των συγγραφέων και δεν αντανακλούν κατ' ανάγκη εκείνες της ΕΕ, η οποία δεν θεωρείται υπεύθυνη, όπως και η χορηγούσα αρχή.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑΣ

Τερτίκας Χρήστος
Μαθηματικός MSc-MEd, Γενικό Λύκειο Γλαύκης Ξάνθης
E-mail: tertchr@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Η παρούσα έρευνα εξετάζει τον βαθμό συμβολής της χρήσης νέων τεχνολογιών στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο από μαθητές της μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης, οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη χρήση της ελληνικής γλώσσας. Η μέθοδος της έρευνας ήταν η έρευνα δράσης, καθώς ο διδάσκων στη σχεδιασμένη διδακτική παρέμβαση ήταν ταυτόχρονα και μελετητής στην έρευνα. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η χρήση των δυναμικών περιβαλλόντων μάθησης συμβάλλει θετικά στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, υποκαθιστώντας επικοινωνιακές δυνατότητες της ελληνικής γλώσσας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
Η έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της προσεγγίστηκε διδακτικά μέσω της έννοιας της εφαπτομένης ευθείας γραφικής παράστασης συνάρτησης και με την βοήθεια της χρήσης των γραφικών περιβαλλόντων νέων τεχνολογιών στην διδασκαλία της. Η έρευνα υλοποιήθηκε με την εξής σειρά διαδοχικών φάσεων: $1^{η}$ φάση: Διδακτική παρέμβαση οκτώ διδασκαλιών και καταγραφή των παρατηρήσεων των φαινομένων της από τον εκπαιδευτικό, $2^{η}$ φάση: Δύο ερωτηματολόγια (γνωστικού περιεχομένου και αντιλήψεων των μαθητών για την παρέμβαση), $3^{η}$ φάση: Συνεντεύξεις πέντε μαθητών/τριών. Η διδακτική προσέγγιση της έννοιας αυτής ακολουθεί μία σειρά διαδοχικών μεταβάσεων: από την έννοια της τέμνουσας στην έννοια της κλίσης της, στη συνέχεια, στην έννοια της εφαπτομένης ευθείας και μετέπειτα στην κλίση αυτής και τέλος στην έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της. Στην έρευνα εξετάστηκε αν αυτές οι μεταβάσεις διευκολύνονται με την εποικοδομητική χρήση των διαδραστικών περιβαλλόντων μάθησης, ιδιαίτερα για τους μαθητές της μουσουλμανικής μειονότητας που αντιμετωπίζουν γλωσσικές δυσκολίες. Συγκεκριμένα, η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο με την βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού Geogebra εστιάζει στην κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας από τους μαθητές/τριες, μέσω της οπτικής της αναπαράστασης (κλίση εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης) και της διερευνητικής μάθησης, ακολουθώντας την διαδρομή: Εικασία → Διερεύνηση →Επαναπροσδιορισμός εικασίας → Επανάληψη διερεύνησης → … → Συμπέρασμα. Στην έρευνα εξετάστηκε αν με αυτό

τον τρόπο οι μαθητές/τριες ξεπερνούν τις γλωσσικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την διαπραγμάτευση της συγκεκριμένης έννοιας. Η αξία και η σημασία της έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι εξετάζει τον βαθμό στον οποίο είναι δυνατόν τα διαδραστικά περιβάλλοντα μάθησης (Geogebra) να υποβοηθήσουν την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, ιδιαίτερα από μαθητές της μειονότητας που συναντούν γλωσσικές δυσκολίες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στη συγκεκριμένη ενότητα, αρχικά, γίνεται μία ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά στη προσέγγιση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο μέσω της έννοιας της κλίσης της εφαπτομένης ευθείας γραφικής παράστασης συνάρτησης. Έπειτα ακολουθεί μία εστίαση στις έρευνες που ασχολούνται με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές/τριες στην κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης. Στην συνέχεια παρουσιάζονται έρευνες που ασχολούνται με την διδακτική προσέγγιση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, μέσω της έννοιας της εφαπτομένης ευθείας με χρήση των νέων τεχνολογιών. Στο τελευταίο μέρος της ενότητας παρουσιάζονται οι έρευνες που αναδεικνύουν την καθοριστική συμβολή των διαδραστικών περιβαλλόντων μάθησης στην κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας από τους μαθητές της μειονότητας που αντιμετωπίζουν γλωσσικές δυσκολίες.

Ένα μεγάλο πλήθος ερευνών έχει ασχοληθεί με την μελέτη της κατανόησης, από τους μαθητές, της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, ως κλίση της εφαπτομένης ευθείας γραφικής παράστασης. Συγκεκριμένα, ο Hirst ασχολήθηκε με την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της και με το αν αυτή θα πρέπει ή όχι να συνδεθεί με την έννοια της εφαπτομένης ευθείας και της κλίσης αυτής (Biza & Zachariades, 2010).

Δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης

Μία σειρά ερευνών κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές έχουν βασικές παρανοήσεις για την εφαπτομένη ευθεία. Μία από αυτές τις παρανοήσεις είναι ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν την εφαπτομένη ως οριακή θέση τεμνουσών, γιατί η προσοχή τους επικεντρώνεται στην σχηματιζόμενη χορδή από τα δύο σημεία που διέρχεται η τέμνουσα. Η δυσκολία των μαθητών έγκειται στο γεγονός ότι παρατηρούν την χορδή που τείνει να γίνει σημείο και δεν παρακολουθούν την τέμνουσα που τείνει να γίνει εφαπτομένη (Park, 2016).

Με βάση την έρευνα της Μπιζά (2008) εντοπίστηκαν τρεις βασικές διαφορετικές αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτομένη, οι οποίες ήταν: η Γεωμετρική Ολική, η Ενδιάμεση Τοπική και η Αναλυτική Τοπική. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την Γεωμετρική Ολική αντίληψη, μία ευθεία

θα χαρακτηρίζεται από τους μαθητές ως εφαπτομένη μιας καμπύλης, όταν έχει μόνο ένα κοινό σημείο με ολόκληρη την καμπύλη και την αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο. Σύμφωνα με την Ενδιάμεση Τοπική αντίληψη, μία εικόνα της εφαπτομένης αποτελεί μία ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την καμπύλη και την αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο σε μία περιοχή του σημείου επαφής, με την προϋπόθεση η καμπύλη να είναι λεία στο σημείο επαφής. Ενώ, σύμφωνα με την Αναλυτική Τοπική αντίληψη, η επικρατέστερη εικόνα της εφαπτομένης για τους μαθητές είναι μία ευθεία που έχει και άλλα κοινά σημεία με την καμπύλη, μπορεί να ταυτιστεί με αυτήν, μπορεί να διέλθει από σημεία καμπής αλλά όχι από γωνιακά σημεία. Στην συγκεκριμένη έρευνα της Μπιζά (2008) εντοπίστηκε ένα ευρύ φάσμα αντιλήψεων μεταξύ της Αναλυτικής Τοπικής και της Γεωμετρικής Ολικής αντίληψης (Biza & Zachariades, 2010).

Διδακτική Προσέγγιση μέσω της έννοιας της Εφαπτομένης Ευθείας με Χρήση Νέων Τεχνολογιών

Ο Leinbach και ο Steen αναφέρουν ότι τα γραφικά περιβάλλοντα των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μετατραπεί η μάθηση και η διδασκαλία της Ανάλυσης από διαδικαστικά σε εννοιολογικά προσανατολισμένη (Bingolbali & Monaghan, 2008). Η εννοιολογική κατανόηση από τους μαθητές ενισχύεται κάθε φορά που χρησιμοποιούνται οπτικές απεικονίσεις, καθώς είναι ωφέλιμο να υπάρχουν πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης (Ζαχαριάδης, και συν., 2017). Ο Tall αναφέρει ότι η χρήση των Νέων Τεχνολογιών διευκολύνει τους μαθητές να έχουν πιο συνεκτική και πιο συγκροτημένη εικόνα για την έννοια και ταυτόχρονα δίνει την δυνατότητα εστίασης σε βασικές ιδιότητες της έννοιας, μέσω της χρήσης παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων της, σε ένα διαδραστικό περιβάλλον. Το μέγιστο όφελος και η προστιθέμενη αξία της διδασκαλίας εννοιών της Ανάλυσης με την χρήση Νέων Τεχνολογιών έγκειται στην δυναμικότητα των ηλεκτρονικών περιβαλλόντων των λογισμικών, δηλαδή στην δυνατότητα κατασκευής δυναμικών αντικειμένων, τα οποία μπορούν να μεταβάλλονται, αλλά να διατηρούν τις ιδιότητες τους (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006).

Η συμβολή των διαδραστικών περιβαλλόντων μάθησης στη μαθηματική επικοινωνία μαθητών που αντιμετωπίζουν γλωσσικές δυσκολίες

Η έρευνα της Ng (2016) πραγματεύθηκε τη σημασία της εξέτασης της σημαντικότητας της μη-γλωσσικής μορφής επικοινωνίας δίγλωσσων μαθητών για την κατανόηση της μαθηματικής σκέψης τους (Ng, 2016).

Η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών και των περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας ειδικότερα έχει αποδειχθεί ότι διευκολύνει την επικοινωνία των δίγλωσσων μαθητών, με την παροχή οπτικών και δυναμικών τρόπων αλληλεπίδρασης (Falcade, Laborde, & Mariotti, 2007; Ferrara et al., 2006). Πολλές μελέτες έχουν ερευνήσει την επίδραση κατά την μεσολάβηση των περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας στην εκμάθηση των εννοιών της Ανάλυσης από δίγλωσσους μαθητές (Hong & Thomas, 2013; Yerushalmy, & Swidan, 2012; Yoon, Thomas, & Dreyfus, 2011).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνα είχε ως σκοπό να εξετάσει αν η χρήση των Νέων Τεχνολογιών στην διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλει στην άμβλυνση των δυσκολιών, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης, σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο λόγω της γλωσσικής τους ανεπάρκειας στην ελληνική γλώσσα (ερευνητικό πρόβλημα).

Η παραπάνω ερευνητική περιοχή (ερευνητικό πρόβλημα) ερευνήθηκε ως προς τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα: Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα αφορά στην εξέταση του κατά πόσο η χρήση των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας (Geogebra) συμβάλλει στην κατανόηση από τους μαθητές της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αναφέρεται στην εξέταση του κατά πόσο η χρήση αυτών των λογισμικών συμβάλλει στην άμβλυνση των γλωσσικών προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της μειονότητας κατά την διδασκαλία της προαναφερθείσας έννοιας.

Μέθοδος έρευνας

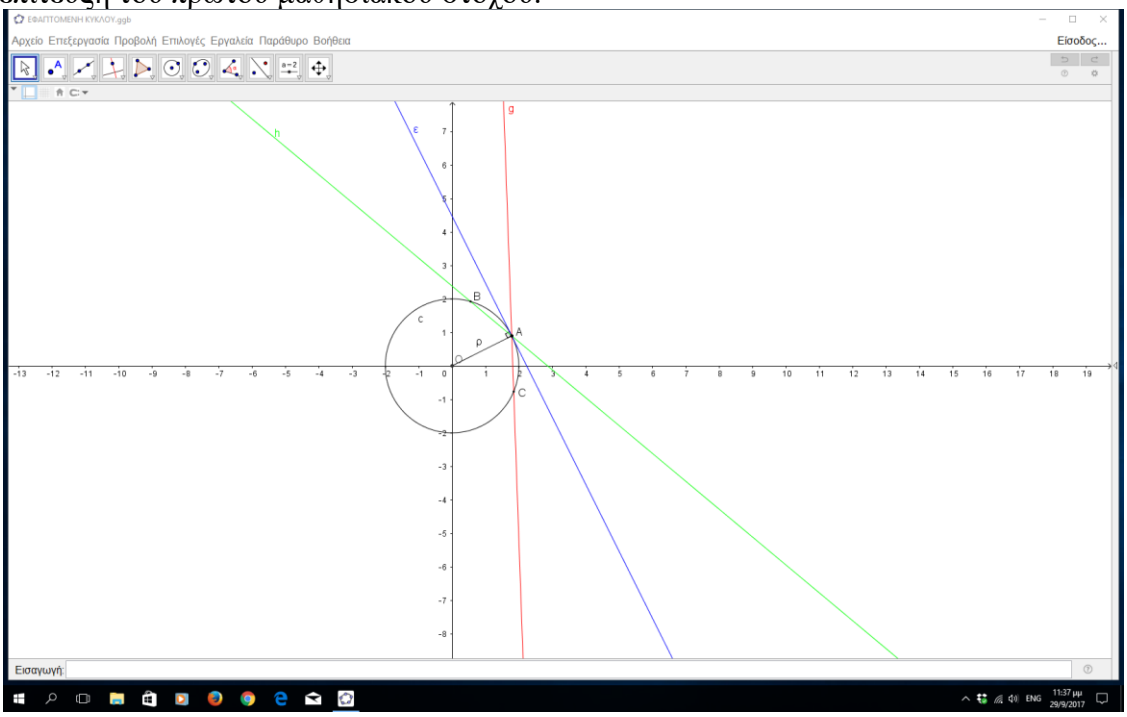
Ο εκπαιδευτικός έλαβε μέρος ως διδάσκων σε μία σχεδιασμένη διδακτική παρέμβαση 8 διδασκαλιών, ενώ παράλληλα ήταν και αυτός που διεξήγαγε την έρευνα, μελετώντας και βελτιώνοντας την διδακτική παρέμβαση συνεχώς, μέσω ανατροφοδότησης. Για το λόγο αυτό η μέθοδος της έρευνας θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως έρευνα δράσης (Potari, Sakonidis, Chatzigoula, & Manaridis, 2010). Για την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης χρησιμοποιήθηκαν τρία φύλλα εργασίας, που αφορούσαν την έννοια της εφαπτομένης ευθείας του κύκλου, του ημικυκλίου και της γραφικής παράστασης συνάρτησης και κατ' επέκταση την έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της. Αυτή η διαδοχική σειρά μεταβάσεων για την έννοια της εφαπτομένης ευθείας είχε ως σκοπό την μετακίνηση της σκέψης των μαθητών από την ολιστική προς την αναλυτική αντίληψη για την συγκεκριμένη έννοια.

Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Geogebra, γιατί οι μαθητές ήταν ήδη εξοικειωμένοι με το λογισμικό από την προηγούμενη σχολική χρονιά και κατά την γενική άποψη πολλών ερευνητών το λογισμικό αυτό παρέχει μία μεγάλη πληθώρα δυνατοτήτων για να δημιουργηθεί κατάλληλο περιβάλλον διερεύνησης μέσα στην τάξη διδασκαλίας των μαθηματικών (Tamam & Dasari, 2021).

Η υλοποίηση του πρώτου φύλλου εργασίας στηρίχθηκε στις μικροεφαρμογές για την εφαπτομένη κύκλου και ημικυκλίου. Το δεύτερο φύλλο εργασίας στηρίχθηκε στην μικροεφαρμογή για την εφαπτομένη γραφικής παράστασης και της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$, στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ και τέλος το τρίτο φύλλο εργασίας στηρίχθηκε στις τέσσερις μικροεφαρμογές για την εφαπτομένη γραφικής παράστασης και της παραγώγου των συναρτήσεων $f(x)=|x|$, $f(x)=x^3$, $f(x)=\sqrt{|x|}$, $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{, αν } x\le 0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$, στο σημείο $\mathrm{A}(0,0)$.

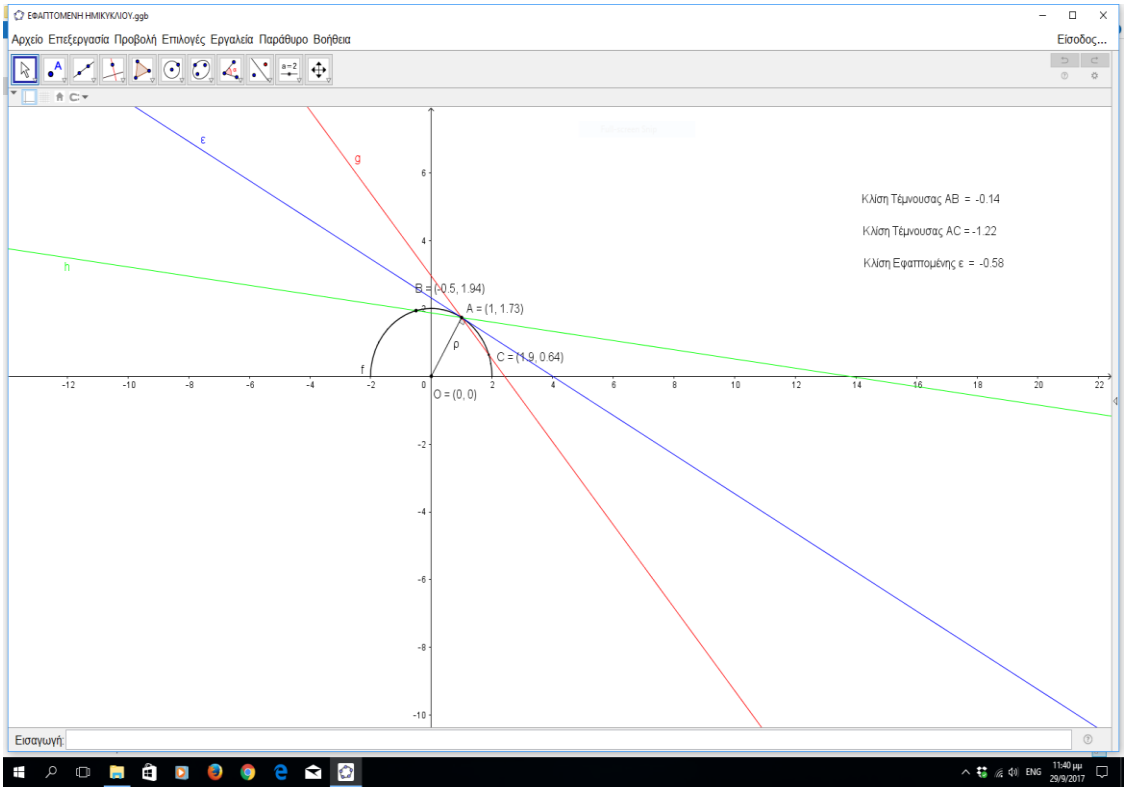
Σύμφωνα με τον σχεδιασμό, ο διδακτικός στόχος του πρώτου μέρους του πρώτου φύλλου εργασίας, το οποίο αφορούσε την εφαπτομένη κύκλου ήταν οι μαθητές να κατανοήσουν ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου στο σημείο Α είναι η οριακή θέση των τεμνουσών ΑΒ και ΑC, καθώς τα σημεία Β και C πλησίαζαν το σημείο Α. Με βάση το περιβάλλον της μικροεφαρμογής Geogebra για την εφαπτομένη κύκλου, όπως φαίνεται

στην παρακάτω εικόνα 1 δημιουργήθηκαν οι απαραίτητες προϋποθέσεις για την επίτευξη του πρώτου μαθησιακού στόχου.



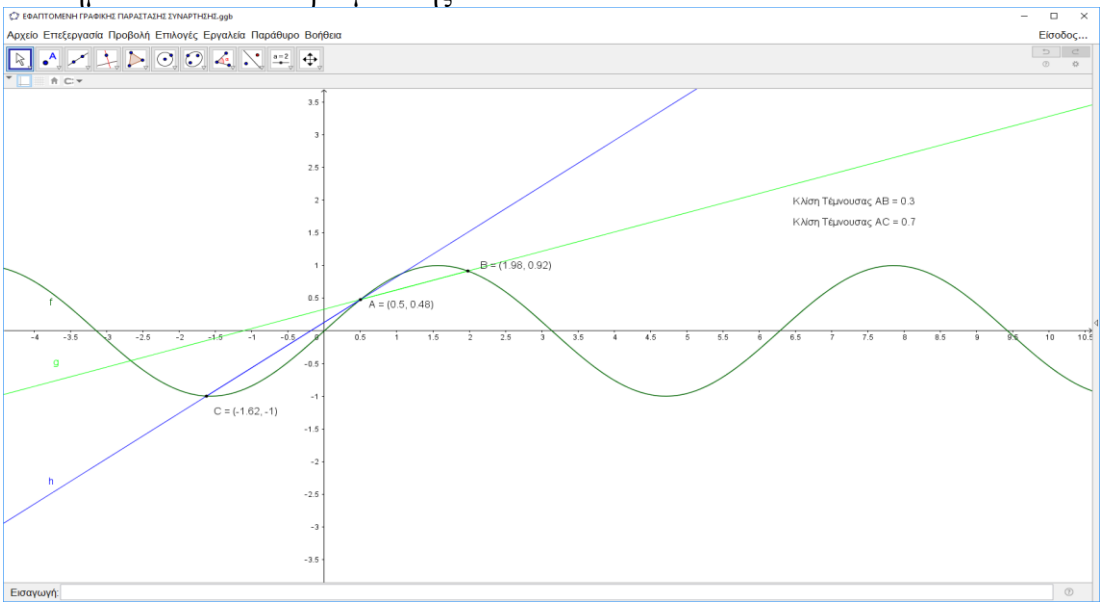
ΕΙΚΟΝΑ 1: ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ

Μέσω του περιβάλλοντος της μικροεφαρμογής του Geogebra, που αφορούσε την εφαπτομένη ημικυκλίου, όπως φαίνεται στην εικόνα 2 επιδιώχθηκε οι μαθητές να μεταβούν από την έννοια της εφαπτομένης κύκλου στην αντίστοιχη έννοια της εφαπτομένης ημικυκλίου, που αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης. Με την βοήθεια κατάλληλων εργαλείων του Geogebra (μετρητές κλίσεων τεμνουσών), οι μαθητές θα μπορούσαν να μεταβούν από το πλαίσιο της Γεωμετρίας στο πλαίσιο της Ανάλυσης, χρησιμοποιώντας τις αλγεβρικές εκφράσεις των κλίσεων των τεμνουσών ΑΒ και ΑC, καθώς και την μαθηματική έκφραση της οριακής τιμής των κλίσεων των τεμνουσών αυτών, όταν τα σημεία Β και C προσέγγιζαν το σημείο Α.



ΕΙΚΟΝΑ 2: ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ

Ο βασικός στόχος του δεύτερου φύλλου εργασίας ήταν η γενίκευση των προηγούμενων συμπερασμάτων για την εφαπτομένη του ημικυκλίου (η εφαπτομένη ως οριακή θέση τεμνουσών και η κλίση της εφαπτομένης ως οριακή τιμή των κλίσεων των τεμνουσών αυτών) και για την περίπτωση της οποιασδήποτε γραφικής παράστασης συνάρτησης, σε οποιοδήποτε σημείο της. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον της μικροεφαρμογής του Geogebra, όπου ήταν σχεδιασμένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$, στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, όπως φαίνεται στην εικόνα 3. Οι μαθητές προσπάθησαν να ανακαλύψουν την έννοια της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης και μέσω αυτής την έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.



ΕΙΚΟΝΑ 3: ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \eta\mu x$

Στο επόμενο βήμα, μέσω του τρίτου φύλλου εργασίας έγινε διερεύνηση της ύπαρξης εφαπτομένης ειδικών περιπτώσεων συνάρτησης σε ένα σημείο της, καθώς και της παραγώγου συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. Επίσης, οι μαθητές μελέτησαν την συσχέτιση μεταξύ της ύπαρξης εφαπτομένης και της ύπαρξης παραγώγου συνάρτησης σε συγκεκριμένο σημείο της.

Δείγμα Έρευνας και πηγές Δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν οι 25 μαθητές της Γ' Λυκείου του Θετικού Προσανατολισμού ενός Γενικού Λυκείου της μειονότητας. Η πλειονότητα των συγκεκριμένων μαθητών συναντούσε πολλές δυσκολίες στην κατανόηση των μαθηματικών, καθώς και της ελληνικής γλώσσας.

Οι πηγές συλλογής των δεδομένων της έρευνας ήταν τέσσερις: 1) οι παρατηρήσεις του εκπαιδευτικού για τις διδασκαλίες, 2) τα κρίσιμα συμβάντα των διδασκαλιών, με βάση το βαθμό συμβολής των μικροεφαρμογών του λογισμικού στη βελτίωση της κατανόησης των συγκεκριμένων εννοιών, 3) οι απαντήσεις των μαθητών σε δύο ερωτηματολόγια, τα οποία δόθηκαν αμέσως μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης των 8 διδασκαλιών. Το μεν πρώτο περιελάμβανε 3 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και 7 ερωτήσεις ελεύθερης απάντησης, οι οποίες αφορούσαν τις αντιλήψεις τους για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της συγκεκριμένης παρέμβασης. Το δε δεύτερο αποτελούνταν από 1 ερώτηση ανάπτυξης και 1 ερώτηση πολλαπλής επιλογής, οι οποίες αφορούσαν την πρόοδο της κατανόησης των μαθητών για τις συγκεκριμένες έννοιες, 4) οι συνεντεύξεις 5 μαθητών/τριών, οι οποίες διενεργήθηκαν μετά την συμπλήρωση των 2 ερωτηματολογίων. Αυτοί/ές οι μαθητές/τριες επιλέχθηκαν γιατί είχαν μεγάλο βαθμό προόδου στην κατανόηση των εννοιών και θεωρούσαν ότι διευκολύνεται η κατανόηση με την χρήση των λογισμικών. Οι συνεντεύξεις ήταν δομημένου τύπου, με 3 ερωτήσεις κλειστού τύπου, που αφορούσαν τις μελετώμενες έννοιες και με 5 ερωτήσεις ελεύθερης απάντησης, σχετικά με την αποδοχή ή μη της συγκεκριμένης μεθόδου διδασκαλίας από τους μαθητές.

Ανάλυση Δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας που υιοθετήθηκε ήταν η Ανάλυση Περιεχομένου, μέσω του εντοπισμού των κρίσιμων συμβάντων που παρουσιάστηκαν στις 8 διδασκαλίες της διδακτικής παρέμβασης. Τα κρίσιμα συμβάντα εντοπίστηκαν με βάση το κριτήριο, το οποίο αφορούσε την συμβολή της χρήσης του λογισμικού Geogebra στην κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές (Πόταρη, Ψυχάρης, & Κουλέτση, 2017). Στη συνέχεια, εντοπίστηκαν οι απόψεις των μαθητών, που παρουσιάστηκαν στα ερωτηματολόγια και στις συνεντεύξεις τους, καθώς και οι απόψεις του διδάσκοντα στις σημειώσεις του για την κάθε διδασκαλία, οι οποίες είχαν το ίδιο περιεχόμενο με τα προαναφερόμενα κρίσιμα συμβάντα.

Ένα ενδεικτικό κρίσιμο συμβάν της τρίτης διδασκαλίας εντοπίζεται στο παρακάτω απόσπασμα διδασκαλίας και σχετίζεται με την υπόθεση των μαθητών ότι η θέση στην οποία συμπίπτουν οι τέμνουσες ΑΒ και ΑC, θα μπορούσε να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο Α:

Μαθητής Α: «Ναι. Μετακινήστε τα σημεία Β και C πάνω στην C_f, ώστε να πλησιάζουν το σημείο της Α και παρατηρήστε τις τιμές των κλίσεων των τεμνουσών ΑΒ και ΑC».

Εκπαιδευτικός: «Εδώ λέει με απλά λόγια θα προσπαθήσετε να σπρώξετε το σημείο Β πάνω στην γραφική παράσταση και ταυτόχρονα από την άλλη μεριά το σημείο C. Σπρώξτε λίγο το ένα, λίγο το άλλο. Και παράλληλα να παρατηρείτε την κλίση της

τέμνουσας ΑΒ και της ΑC. Τις βλέπετε που αλλάζουν; Παρατηρήστε όταν τα σημεία Β και C πλησιάζουν προς το σημείο Α……».
Μαθητής Α: «Γίνονται εφαπτόμενη».
Εκπαιδευτικός: «Ποιες γίνονται εφαπτόμενη;»
Μαθήτρια Μ: «Και οι δύο».
Εκπαιδευτικός: «Δηλαδή ποιες;»
Μαθητής Α: «Οι τέμνουσες ΑΒ και ΑC».
Εκπαιδευτικός: «Μπράβο. Σωστό.».
Μαθητής Α: «Όταν τα σημεία Β και C πλησιάζουν προς το σημείο Α, τότε οι τέμνουσες ΑΒ και ΑC γίνονται εφαπτόμενη».

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο αφορά την προστιθέμενη αξία της χρήσης των Νέων Τεχνολογιών στην διδασκαλία των μαθηματικών, τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν αναμενόμενα, καθώς έδειξαν ότι η χρησιμοποίηση από τους μαθητές των μικροεφαρμογών του Geogebra, ως διερευνητικό, επαληθευτικό και ανακαλυπτικό εργαλείο της μαθηματικής γνώσης, τους βοήθησε να κατανοήσουν ευκολότερα και σε μεγαλύτερο βαθμό τις έννοιες της εφαπτομένης ευθείας και της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, συγκριτικά με ένα τρόπο διδασκαλίας τους χωρίς τη χρήση Νέων Τεχνολογιών. Το σύνολο των κρίσιμων συμβάντων των διδασκαλιών ανέδειξε ότι η συμβολή του λογισμικού Geogebra ήταν καθοριστική, για την κατανόηση των χαρακτηριστικών της έννοιας της εφαπτομένης ημικυκλίου, η οποία αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης. Με αυτή την προσέγγιση, σε επόμενο στάδιο, οι μαθητές θα ήταν σε θέση να μεταβούν από την «ολιστική» αντίληψη της εφαπτομένης κύκλου στην «αναλυτική» αντίληψη της εφαπτομένης ευθείας γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Επίσης, το γεγονός ότι η χρήση των λογισμικών στην διδασκαλία συμβάλλει θετικά στην κατανόηση αυτών των εννοιών προέκυψε τόσο από τις επιδόσεις των μαθητών στις ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου του ερωτηματολογίου που συμπλήρωσαν μετά το πέρας των διδασκαλιών, καθώς και από τις παρατηρήσεις του εκπαιδευτικού για κάθε διδασκαλία, όσο και από τις απόψεις των μαθητών κατά την διάρκεια των συνεντεύξεων τους. Συγκεκριμένα, οι μαθητές εξέφρασαν την άποψη ότι η ενασχόληση τους με τα αντικείμενα των μικροεφαρμογών του διαδραστικού περιβάλλοντος του λογισμικού τους βοήθησε να κατανοήσουν τις συγκεκριμένες έννοιες, μέσω των αναπαραστάσεων τους στο εικονικό περιβάλλον του Geogebra, το οποίο τους έδινε πάρα πολλές σχεδιαστικές δυνατότητες. Αυτό αποτυπώνεται κατά την διάρκεια των συνεντεύξεων των μαθητών/τριών, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα: **Μαθητής Α:** «Αυτό μας βοήθησε σε μεγάλο βαθμό, γιατί μπορέσαμε να κατανοήσουμε… και να το δούμε στην πράξη… πως γίνεται… και να αλλάξουμε τις μεταβλητές, τις τέμνουσες, να πάρουμε διάφορα σημεία, ….. ενώ στην τάξη αν ήμασταν δεν θα μπορούσαμε… μόνο ένα σχήμα ο καθηγητής θα το έκανε… και δεν θα μπορούσαμε να το κατανοήσουμε τόσο όσο κάναμε σε αυτά τα μαθήματα, με το πρόγραμμα Geogebra. Μας βοήθησε πάρα πολύ…» **Μαθητής Α:** «Επίσης, να προσθέσω κάτι ακόμα, στην τάξη, δεν μπορεί οι μαθητές και ο καθηγητής, χωρίς τα εργαλεία αυτά… να τα σχηματίσει ίσια, όπως εδώ στο πρόγραμμα, το Geogebra και να τα κατανοήσουμε…»
Μαθήτρια Ε: «Ναι. Με βοήθησε περισσότερο από ότι το κανονικό μάθημα, επειδή εδώ πέρα στον υπολογιστή μπορούσαμε να μετακινούμε τα σημεία και να βλέπουμε το αν θα ήταν εφαπτόμενη ή όχι…..»
Εκπαιδευτικός: «Α, κατάλαβες καλύτερα τον παράγωγο αριθμό . Τι σε βοήθησε στο να καταλάβεις καλύτερα την έννοια αυτή;»

Μαθήτρια Σ: «… Γιατί το βλέπαμε … ήταν μπροστά μας και μετακινούσαμε το Α, το Β, το C … και καταλάβαινα καλύτερα …»

Η πλειοψηφία των μαθητών, μέσω των συνεντεύξεων τους, δήλωσαν ότι το εικονικό-γραφικό περιβάλλον του λογισμικού δρούσε ενισχυτικά στη δημιουργία εικόνων της έννοιας της εφαπτομένης ευθείας, στο μυαλό τους, όπως φαίνεται για παράδειγμα στις ακόλουθες φράσεις της συνέντευξης μιας μαθήτριας: «… Η εφαπτομένη, για παράδειγμα, μου έχει μείνει ως εικόνα… το πώς είναι …το πώς μπορώ να τη σχεδιάσω… », «Να αποθηκεύεις καλύτερα τις εικόνες…» και «Αποθηκεύω καλύτερα στο μυαλό μου…». Κατά την άποψη σχεδόν όλων των μαθητών, που έδωσαν συνέντευξη, το συγκεκριμένο λογισμικό έδινε στους μαθητές την δυνατότητα να εξετάσουν πολλές διαφορετικές περιπτώσεις μιας τιθέμενης υπόθεσης, με την βοήθεια ενός δυναμικού γεωμετρικού σχήματος, κάτι το οποίο δεν θα μπορούσε να γίνει με το στατικό σχήμα του πίνακα της τάξης.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο αφορά τον βαθμό συμβολής του λογισμικού στην αντιμετώπιση των γλωσσικών δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές της μουσουλμανικής μειονότητας κατά την διάρκεια της διδασκαλίας εμφανίστηκαν αρκετά κρίσιμα συμβάντα, τα οποία έδειξαν τα εξής: Όλοι οι μαθητές της τάξης αντιμετώπιζαν δυσκολίες στην προσπάθεια κατανόησης των συγκεκριμένων εννοιών σε στατικά περιβάλλοντα μάθησης. Επίσης, αρκετοί μαθητές της τάξης συναντούσαν δυσκολίες στη χρήση λέξεων της ελληνικής γλώσσας, όπως για παράδειγμα όταν αναφέρονταν σε δύο ευθείες, με την φράση «Τείνουν να γίνουν ίσες» εννοούσαν «Τείνουν να ταυτιστούν». Επιπλέον, με την λέξη «τείνει» εννοούσαν «τέμνει», με την λέξη «αντιλάβει» εννοούσαν «αντιληφθεί» και με την λέξη «καταντούσαμε» εννοούσαν «καταλήγαμε», καθώς επίσης έδειχναν να μην κατανοούν την σημασία της λέξης «διαπερνά». Αυτές οι γλωσσικές δυσκολίες που συναντούσαν οι μαθητές/τριες καταγράφονται και σε πολλά σημεία των συνεντεύξεων τους, όπως το παρακάτω ενδεικτικό απόσπασμα συνέντευξης:

Εκπαιδευτικός: «Ακόμα και τώρα συναντάς δυσκολίες με λέξεις;»

Μαθήτρια Σ: «Αυτές που είναι πάρα πολύ άγνωστες,… Δεν τις ακούω στην καθημερινή ζωή… που δεν τις μιλάω… Ναι, είναι.»

Εκπαιδευτικός: «Υπήρχαν λέξεις που όταν κάναμε μάθημα σας φαινόταν δύσκολες και δεν τις καταλαβαίνατε;»

Μαθήτρια Σ: «Παράγωγος… Αυτό ήταν δύσκολο. Εφαπτομένη, τέμνουσες, κλίση…»

Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών, τόσο μέσω των ερωτηματολογίων, όσο και μέσω των συνεντεύξεων τους, εξέφρασε την άποψη ότι το εικονικό και ταυτόχρονα διαδραστικό περιβάλλον του λογισμικού Geogebra τους βοήθησε σε αρκετά μεγάλο βαθμό να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που δημιουργούσε η γλωσσική τους ανεπάρκεια στην κατανόηση του μαθηματικού νοήματος των συγκεκριμένων εννοιών. Σε αυτό το εικονικό περιβάλλον, οι μαθητές χειρίζονταν τις εικονικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων (τέμνουσα, εφαπτομένη ευθεία) και είχαν την δυνατότητα να παρακολουθούν τις μεταβολές άλλων μαθηματικών αντικειμένων (κλίση εφαπτομένης ευθείας). Σύμφωνα με τις απόψεις των προαναφερόμενων μαθητών, ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίστηκαν οι γλωσσικές δυσκολίες συνίσταται στην αντικατάσταση μαθηματικών όρων, αλλά και δύσκολων λέξεων για αυτούς τους μαθητές, με εικονικές αναπαραστάσεις τους από το περιβάλλον εργασίας του Geogebra, στο μυαλό των μαθητών. Το γεγονός αυτό αποτυπώνεται με ευδιάκριτο τρόπο στο παρακάτω απόσπασμα συνεντεύξεων μαθητών/τριών: **Μαθητής Α:** «Μπορεί εγώ αλλιώς να το σχημάτιζα στο μυαλό μου, δηλαδή εδώ να σκεφτόμουν άλλα … ενώ εδώ όταν το βλέπεις, μας δείχνει τις αποδείξεις, έχει αποδείξεις … Αυτή

η εφαπτόμενη είναι αυτό και αυτό … Μπορείς να το κατανοήσεις, χωρίς πολλά λόγια, … χωρίς πλούσιο λεξιλόγιο, μπορείς να κατανοήσεις καλύτερα».
Εκπαιδευτικός: «Δηλαδή, θες να μου πεις ότι η εικόνα … σε βοηθάει καλύτερα να καταλάβεις αυτό ακριβώς που θέλουν να πουν οι λέξεις, αλλά εσύ δεν μπορείς να τις καταλάβεις;»
Μαθητής Α: «Βεβαίως».
Εκπαιδευτικός: «Τώρα με τον υπολογιστή αυτές τις δυσκολίες τις ξεπερνούσαμε; Δηλαδή μπορούσατε μέσω αυτού να καταλάβετε περισσότερα πράγματα χωρίς να χρειάζεται…»
Μαθήτρια Ε: «Ναι. Αυτό εννοώ. Ναι.»
Μαθήτρια Μ: «Ακόμα και αν χρησιμοποιούνται δύσκολες λέξεις, επειδή το βλέπεις οπτικά καταλαβαίνεις κατευθείαν το τι είναι».
Μαθήτρια Μ: «Όπως σας είπα και προηγουμένως, τις λέξεις τις αντικαθιστώ με εικόνες…».
Επίσης, ένας μαθητής σημείωσε ότι η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών βοηθήθηκε μέσω της κατασκευής των μαθηματικών εννοιών (παράγωγος συνάρτηση σε σημείο), με χρήση αντικειμένων (τέμνουσες) του διαδραστικού περιβάλλοντος του λογισμικού Geogebra, όπως αποτυπώνεται στο επόμενο απόσπασμα συνέντευξης: «Σχεδιάσαμε με αυτό το πρόγραμμα τον δρομέα μας… πως πρέπει από την αρχή… από την αφετηρία μέχρι το τέλος… να πάμε σε αυτές τις έννοιες... να τις κατανοήσουμε…». Επιπλέον, μία μαθήτρια διατύπωσε την άποψη ότι η χρήση των σχημάτων και των εικόνων γενικά θα μπορούσε να βοηθήσει στη μη λεκτική επικοινωνία των μαθητών, κατά την διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας, όπως αναφέρει συγκεκριμένα με την ακόλουθη φράση: «…. Μόνο με τα σχήματα….». Η καθοριστική συμβολή του λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας στην υπερπήδηση των γλωσσικών δυσκολιών από τους μαθητές καταγράφεται και σε πολλά κρίσιμα συμβάντα που παρουσιάστηκαν στις διδασκαλίες. Ένα ενδεικτικό κρίσιμο συμβάν αφορά την έννοια της εφαπτομένης κύκλου. Πιο συγκεκριμένα αφορά την διερεύνηση της διατήρησης της καθετότητας της εφαπτομένης ευθείας κύκλου στην ακτίνα του στο σημείο επαφής, όταν αυτό είναι οποιοδήποτε σημείο του κύκλου (χαρακτηριστική ιδιότητα εφαπτομένης κύκλου), όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα διδασκαλίας (η εφαπτομένη και η ακτίνα κύκλου ήταν χρωματισμένες):
Μαθήτρια Μ: «Τι θα γίνει αν αλλάξουμε θέση την κάθετη ΟΑ; Θα είναι πάλι εφαπτόμενη η μπλε ευθεία;»
Εκπαιδευτικός: «Μία καλή ερώτηση. Η Μαθήτρια Μ λέει τι θα γίνει αν αλλάξει θέση το σημείο επαφής Α πάνω στον κύκλο, δηλαδή η μπλε ευθεία θα συνεχίσει να είναι εφαπτόμενη. Για δοκιμάστε λίγο να το εξετάσετε. Τι γίνεται;»
Μαθήτρια Μ: «Τίποτα. Το ίδιο. Δεν αλλάζει.»
Εκπαιδευτικός: «Η μπλε ευθεία συνεχίζει να είναι εφαπτόμενη;»
Μαθητής Α: «Ναι»
Μαθήτρια Μ: «Άρα σε οποιοδήποτε σημείο του κύκλου ισχύει το ίδιο. Είναι εφαπτόμενη αυτή η μπλε ευθεία και είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας εξάγονται συμπεράσματα, τα οποία στην πλειοψηφία τους συμφωνούν με τα αντίστοιχα συμπεράσματα των προγενέστερων ερευνών, σε καθένα από τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας.
Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας βοηθούν τους μαθητές να

κατανοήσουν την συγκεκριμένη έννοια, αλλά και να ξεπεράσουν προϋπάρχουσες παρανοήσεις. Αυτό το συμπέρασμα της έρευνας συμφωνεί με τα συμπεράσματα προγενέστερων ερευνών, όπως αυτών του Tall (1986) και των Ferrara et al. (2006), οι οποίες αναφέρουν ότι η εννοιολογική κατανόηση από τους μαθητές ενισχύεται όταν χρησιμοποιούνται οπτικές απεικονίσεις των εννοιών, καθώς και λόγω της δυναμικότητας και της διαδραστικότητας των ηλεκτρονικών περιβαλλόντων των λογισμικών.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, το οποίο αφορά τον βαθμό συμβολής της χρήσης των Νέων Τεχνολογιών, κατά την διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, στην αντιμετώπιση των γλωσσικών δυσκολιών των μαθητών του συγκεκριμένου κοινωνικού – πολιτισμικού περιβάλλοντος, τα δεδομένα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές συναντούν γλωσσικές δυσκολίες, οι οποίες τους εμποδίζουν να κατανοήσουν τον γραπτό λόγο των μαθηματικών κειμένων, τον προφορικό λόγο που εκφέρεται από τον εκπαιδευτικό μέσα στη σχολική τάξη, καθώς και στο να εκφράσουν τις απόψεις τους με σαφήνεια, για τις προς διαπραγμάτευση μαθηματικές έννοιες.

Ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα της συγκεκριμένης έρευνας είναι ότι οι γλωσσικές δυσκολίες των μαθητών της μειονότητας, κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, μπορούν να αντιμετωπιστούν με την χρήση Νέων Τεχνολογιών και ιδιαίτερα των λογισμικών δυναμικού τύπου. Το μαθηματικό νόημα των εννοιών μπορεί να προσεγγιστεί με την βοήθεια των εικονικών αναπαραστάσεων αυτών των εννοιών, στο περιβάλλον του Geogebra. Αυτό το συμπέρασμα της έρευνας συμφωνεί με σχετικά συμπεράσματα άλλων ερευνών, όπως αυτή της Ng (2016), η οποία εστιάζει στη σημαντικότητα της μη-γλωσσικής επικοινωνίας δίγλωσσων μαθητών για την κατανόηση της μαθηματικής σκέψης τους και τονίζει ότι η χρήση της μη λεκτικής επικοινωνίας μπορεί να βοηθήσει συμπληρωματικά στη μείωση της χρήσης της γλώσσας από τους δίγλωσσους μαθητές. Επίσης, ανάλογα είναι τα συμπεράσματα των ερευνών των Falcade et al. (2007) και Ferrara et al. (2006), τα οποία αναφέρουν ότι η χρήση των ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών διευκολύνει την επικοινωνία των δίγλωσσων μαθητών μιας τάξης, με την παροχή οπτικών και δυναμικών τρόπων αλληλεπίδρασης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*, pp. 19-35.

Biza, I., & Zachariades, T. (2010, Δεκέμβριος 4). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, σσ. 218-229.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*, pp. 317 – 333.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus: Ideas discussed at PME over the last 30 years. In A. Gutierrez, & P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 237–273). Rotterdam: Sense Publishers.

Ng, O.-L. (2016). The interplay between language, gestures, dragging and diagrams in bilingual learners' mathematical communications. *Educational Studies in Mathematics, 91*, σσ. 307–326.

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics, 91*, pp. 395–421 .

Potari, D., Sakonidis, H., Chatzigoula, R., & Manaridis, A. (2010, September 16). Teachers' and researchers' collaboration in analysing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, σσ. 473–485.

Tamam, B., & Dasari, D. (2021). The use of Geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*.

Yerushalmy, M., & Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. *Educational Studies in Mathematics, 80(3)*, pp. 287–306.

Yoon, C., Thomas, M. O., & Dreyfus, T. (2011). Gestures and insight in advanced mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42(7)*, pp. 891–901.

Ζαχαριάδης, Θ., Πάμφιλος, Π., Jones, K., Mallev, R., Χρίστου, Κ., Γιαννακούλιας, Ε., . . . Πιττάλης, Μ. (2017, Δεκέμβριος 29). *Διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης με χρήση Εργαλείων Δυναμικής Γεωμετρίας*. Ανάκτηση από Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών/Τμήμα Μαθηματικών/CalGeo: www.math.uoa.gr/calgeo/docs/6.2.1.book.CalGeo.gr.pdf

Μπιζά, Ε. (2008). *Διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την εφαπτομένη ευθεία στην Ανάλυση, Διδακτορική Διατριβή.* Αθήνα.

Πόταρη, Δ., Ψυχάρης, Γ., & Κουλέτση, Ε. (2017, Αύγουστος 01). *Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα*. Ανάκτηση από Προσδιορίζοντας κρίσιμα συμβάντα: opencourses.uoa.gr/modules/.../file.../Προσδιορίζοντας%20κρίσιμα%20συμβάντα.pdf

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΕΣΩ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΟΡΕΥΤΙΚΩΝ ANIMATION

Μυρτώ Καραβάκου και Χρόνης Κυνηγός

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Φιλοσοφική Σχολή, ΕΚΠΑ

karavak@eds.uoa.gr; kynigos@eds.uoa.gr

Η εργασία μελετάει τη νοηματοδότηση της περιοδικής συμμεταβολής από μαθητές Β' Λυκείου, καθώς δημιουργούν χορευτικά animation που ταιριάζουν σε μουσικά κομμάτια μέσω ψηφιακών τεχνολογιών. Οι μαθητές διερεύνησαν ποικίλες αναπαραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων και προσεγγίσεων σειρών Fourier για να αποτυπώσουν προσωπικές καλλιτεχνικές ιδέες που συνέδεαν με τη μουσική. Η ανάλυση εστιάζει στον ρόλο των ψηφιακών αναπαραστάσεων και των αισθητικών εμπειριών των μαθητών στη νοηματοδότηση περιοδικής συμμεταβολής που εκφράζει την αλλαγή γεωμετρικών μεγεθών ως προς τον χρόνο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συνεχώς αυξανόμενος αριθμός ερευνών μελετάει και αναδεικνύει τη σημασία της συμμεταβολής, δηλαδή της δυναμικής αλλαγής δύο εξαρτώμενων ποσοτήτων, για την ολιστική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, και γενικότερα την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης (Thompson & Carlson, 2017). Καθώς στα σχολικά μαθηματικά επικρατεί η στατική προσέγγιση της συνάρτησης ως κανόνας αντιστοίχισης δύο ποσοτήτων, έρευνες τονίζουν την ανάγκη σχεδιασμού μαθησιακών περιβαλλόντων που καλλιεργούν τον συμμεταβολικό συλλογισμό και μελέτης του τρόπου ανάπτυξής του από τους μαθητές. Οι ψηφιακές τεχνολογίες (ΨΤ), μέσα από τις αλληλένδετες δυναμικές αναπαραστάσεις τους, διευρύνουν τις δυνατότητες απεικόνισης και διερεύνησης της συμμεταβολής, ανοίγοντας νέους ερευνητικούς ορίζοντες για τους τρόπους νοηματοδότησής της (Arzarello, 2019).

Στη βιβλιογραφία, τα υπό μελέτη μαθησιακά περιβάλλοντα εστιάζουν στη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων. Έτσι, έμφαση έχει δοθεί στη νοηματοδότηση των μαθητών καθώς παρατηρούν και επεξεργάζονται τις αναπαραστάσεις ή απαντούν σε ερωτήσεις κλειστού τύπου που αφορούν στο φυσικό μοντέλο (Thompson & Carlson, 2017). Ωστόσο, από τα περιβάλλοντα αυτά απουσιάζουν στοιχεία όπως η αισθητική, η

δημιουργικότητα και η πρωτοτυπία των μαθητών, παρά τη αναδυόμενη σημασία τους στη μάθηση μαθηματικών (de Freitas & Sinclair, 2014· Sinclair, 2018). Ανοίγονται, έτσι, ερωτήματα σχετικά με τις δυνατότητες των αισθητικών εμπειριών στη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών, όπως η συμμεταβολή. Επιπλέον, έμφαση δίνεται σε παραβολικές ή εκθετικές συναρτήσεις, με τη νοηματοδότηση περιοδικής συμμεταβολής (ΝΠΣ) να βρίσκεται στο ερευνητικό «περιθώριο», παρά το πλούσιο μαθηματικό, (δι)επιστημονικό και αισθητικό της ενδιαφέρον (Shama, 1998).

Για την παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε μία σειρά δραστηριοτήτων για τη ΝΠΣ που προτεραιοποιεί τη μοντελοποίηση ελεύθερων καλλιτεχνικών ιδεών, παρέχοντας μια προσωποποιημένη μαθησιακή εμπειρία, καθοδηγούμενη από αισθητικές αποκρίσεις. Οι μαθητές εργάστηκαν σε μικρόκοσμους (Healy & Kynigos, 2010) για να φτιάξουν περιοδικά κινούμενα γεωμετρικά μοντέλα που ταιριάζουν σε τραγούδια. Μελετάμε το ερώτημα: ποιος είναι ο ρόλος των α) ψηφιακών αναπαραστάσεων και β) των αισθητικών εμπειριών των μαθητών στη ΝΠΣ μέσα από την εμπλοκή τους με αυτό το περιβάλλον;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ

Νοηματοδότηση Περιοδικής Συμμεταβολής (ΝΠΣ)

Η ΝΠΣ συνδέεται με την ικανότητα συντονισμού των αλλαγών δύο ποσοτήτων που μεταβάλλονται συγχρόνως (Thompson κ.α., 2017). Πρόκειται για μία πολύπλοκη γνωστική διεργασία, η οποία είναι σημαντική για την ουσιαστική νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης. Ο Thompson (2011) τόνισε τη δυναμική της φύση, προσθέτοντας ότι οι παράλληλες αλλαγές γίνονται μέσα σε ένα διάστημα «εννοιολογικού χρόνου», ο οποίος είναι πυκνό και συνεχές σύνολο και οριοθετείται από το διάστημα στο οποίο κάποιος σκέφτεται για τη (συμ)μεταβολή ποσοτήτων. Σύμφωνα με μία σύγχρονη οπτική των Thompson και Carlson (2017), ο συμμεταβολικός συλλογισμός περιλαμβάνει 6 εξελικτικά στάδια: (1) το στάδιο «μη συμμεταβολής», με τους μαθητές να εστιάζουν σε μία μόνο μεταβλητή χωρίς να τη συσχετίζουν με την άλλη, (2) το «προ-συμμεταβολικό» στάδιο, όπου οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι οι δύο ποσότητες μεταβάλλονται, αλλά ασύγχρονα, (3) το «ακαθόριστα συμμεταβολικό» στάδιο, κατά το οποίο οι μαθητές νοηματοδοτούν την κατεύθυνση αλλαγής των δύο ποσοτήτων, (4) το «διακριτά συμμεταβολικό», όπου οι μαθητές μπορούν να συντονίσουν διακριτά τις τιμές της μίας ποσότητας με αντίστοιχες τις άλλης, (5) το

στάδιο «αποσπασματικά συνεχούς συμμεταβολής», με τους μαθητές να νοηματοδοτούν τη συμμεταβολή των ποσοτήτων σε μεμονωμένα διαστήματα και τέλος (6) το στάδιο «ομαλά συνεχούς συμμεταβολής», όπου οι μαθητές νοηματοδοτούν την συμμεταβολή των ποσοτήτων με ομαλό και συνεχές τρόπο για όλο το διάστημα της μεταξύ τους συσχέτισης.

Ο Arzarello (2019) και η Bagossi (2023) διεύρυναν το πλαίσιο αυτό, περιλαμβάνοντας την έννοια της παραμέτρου. Εισήγαγαν το «2ο επίπεδο συμμεταβολικού συλλογισμού», που αποτελεί την ικανότητα των μαθητών να νοηματοδοτούν τη συγχρονισμένη συμμεταβολή μίας κλάσης (συναρτησιακών) σχέσεων και των χαρακτηριστικών τους παραμέτρων.

Μαθηματικές Αισθητικές Εμπειρίες (ΜΑΕ)

Η δεύτερη διάσταση θεωρητικής πλαισίωσης της έρευνας περιλαμβάνει τις Μαθηματικές Αισθητικές Εμπειρίες (ΜΑΕ), δηλαδή μια αντιληπτική εμπειρία με συναισθηματική και διανοητική απόκριση που προκαλείται από τη μαθηματική ομορφιά (Sinclair, 2004). Παραδοσιακές προσεγγίσεις ορίζουν την ΜΑΕ ως μία έμφυτη ικανότητα. Εστιάζουν στην αξιολογική της διάσταση, δηλαδή στην αναγνώριση αντικειμενικών αξιών μαθηματικών εννοιών που γίνεται μεν αντιληπτή μέσω των αισθήσεων, αλλά εκτιμάται κυρίως σε διανοητικό επίπεδο με αναγνώριση τυπικών χαρακτηριστικών, όπως η οικονομία, η απλότητα, η πρωτοτυπία, η σαφήνεια και η χρησιμότητα (πχ. ο τύπος του Euler). Τα αισθητικά κριτήρια διαθέτουν ένα στάτους πνευματικής αυτονομίας έξω από τον ανθρώπινο κόσμο, με μειοψηφία των μαθητών να είναι σε θέση να τα οικειοποιηθούν, λόγω της προχωρημένης μαθηματικής σκέψης που απαιτούν. Ακόμα και πιο «επιφανειακή» ομορφιά των μαθηματικών, που συναντάται σε μαθηματικές (οπτικές ή άλλες) αναπαραστάσεις (πχ. οι αναπαραστάσεις της συμμετρίας και της αυτό-ομοιότητας στα μοτίβα και τα fractals αντίστοιχα), μπορεί να προκαλέσει ΜΑΕ σε περιορισμένο ποσοστό μαθητών που μπορεί να διακρίνει τις μαθηματικές σχέσεις.

Πρόσφατα, ερευνητές έχουν επιδιώξει να διευρύνουν τη θεώρηση της ΜΑΕ, προσθέτοντας μία επιστημολογική οπτική που πηγάζει από στην ιδέα νοηματοδότησης μέσω των αισθήσεων (Karavakou κ.α., 2023· Sinclair, 2018· Nemirovsky κ.α., 2013). Έθεσαν, έτσι, μία υποκειμενική διάσταση στην αξιολογική προσέγγιση των ΜΑΕ, επιτρέποντας την προσαρμογή των μαθηματικών αισθητικών κριτηρίων σε προσωπικά ενδιαφέροντα, συναισθηματικές πτυχές και κοινωνικό-πολιτισμικές επιρροές. Η ενσωμάτωση στοιχείων όπως η υποκειμενικότητα, η ελεύθερη έκφραση, η ανοικτή διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και η σύνδεση με προσωπικά ενδιαφέροντα, στηρίζουν την καλλιέργεια ΜΑΕ (Sinclair, 2004· Sinclair, 2018). Τέτοια περιβάλλοντα μπορούν να αποτελέσουν: α)

οι ΨΤ με τις δυναμικές αναπαραστάσεις και τα διαδραστικά, εκφραστικά εργαλεία τους, και β) αυτά που συνδέονται με την καλλιτεχνική έκφραση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέθοδος – Συλλογή και Ανάλυση Δεδομένων

Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μίας έρευνας σχεδιασμού μεγαλύτερου εύρους. Περιλάμβανε δύο κύκλους (τον πιλοτικό και τον κύριο) σχεδιασμού, υλοποίησης και ανάλυσης της έρευνας για τη δημιουργία εμπειρικά θεμελιωμένων θεωριών και πλαισίων δράσης (Cobb κ.ά., 2003) γύρω από τη ΝΠΣ χρόνου -περιοδικά μεταβαλλόμενου γεωμετρικού μεγέθους (απόσταση/γωνία) που καθορίζεται μέσα από διάφορες παραμέτρους. Για τον κύριο κύκλο, σχεδιάστηκε ένα μαθησιακό περιβάλλον με ΨΤ για την ανάπτυξη ΜΑΕ, με σκοπό να πλαισιώσουν και να καθοδηγήσουν την ΝΠΣ των μαθητών. Στην εργασία αναλύεται ένα μέρος του κύριου κύκλου, στο οποίο συμμετείχαν 8 μαθητές Β' Λυκείου (Μ1-Μ8) στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους. Τα εμπειρικά δεδομένα περιλαμβάνουν: απομαγνητοφώνηση των διαλόγων των μαθητών, από-βιντεοσκόπηση της δραστηριότητάς τους στα ψηφιακά μέσα, γραπτές σημειώσεις και εκφράσεις του σώματος. Τα θεωρητικά στοιχεία που αναλύθηκαν παραπάνω πλαισίωσαν την ανάλυση των δεδομένων ως προς τα στάδια ΝΠΣ και τον ρόλο των ΜΑΕ και των ψηφιακών μικρόκοσμων σε αυτήν. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το «κρίσιμο συμβάν», δηλαδή ένα σύνολο κεντρικών ενεργειών οι οποίες είχαν ως αποτέλεσμα μια σημαντική αλλαγή στη μαθησιακή διαδικασία.

Δραστηριότητες και ψηφιακά μέσα

Στην εργασία αναλύονται 2 φάσεις δραστηριοτήτων διάρκειας 8 ωρών. Οι μικρόκοσμοι σχεδιάστηκαν σε δύο λογισμικά: το GeoGebra (https://www.geogebra.org) και το MaLT2 (http://etl.ppp.uoa.gr/malt2). Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 2 και συμμετείχαν στη δημιουργία «ψηφιακών χορευτικών» για 8 (4 ανά φάση) τραγούδια. Για κάθε τραγούδι, το οποίο ακούγανε με ακουστικά, είχαν 6 γύρους στους οποίους έπρεπε: 1) να επιλέξουν συνάρτηση της μορφής $f(t)=\alpha\eta\mu(\beta t)$ ή $f(t)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta t)$ (για την 1η φάση) και $f(t)=a_1\eta\mu(t)+b_1\sigma\upsilon\nu(t)+a_2\eta\mu(2t)+b_2\sigma\upsilon\nu(2t)+a_3\sigma\upsilon\nu(3t)+b_3\sigma\upsilon\nu(3t)+a_4\eta\mu(4t)+b_4\sigma\upsilon\nu(4t)$, δηλαδή προσέγγιση σειράς Fourier (για τη 2η φάση), με βάση τη γραφική παράσταση που κατασκεύαζαν στους μικρόκοσμους του GeoGebra, ρυθμίζοντας τις τιμές των παραμέτρων μέσω των ολισθητών (Εικόνα 1α, 1δ)· 2) να σημειώσουν τον τύπο της συνάρτησης στο φύλλο δραστηριότητας (Εικόνα 1β)· 3) να δοκιμάσουν την περιοδική κίνηση που κάνει ένα δυναμικό γεωμετρικό μοντέλο σε έναν από τους 3 μικρόκοσμους του MaLT2 που κινείται με

διαφορετικό τρόπο μέσω της συνάρτηση αυτής (όπως φαίνεται στα βίντεο της Εικόνας 1), σύροντας με σταθερό ρυθμό τον ολισθητή που αντιστοιχούσε στην μεταβλητή t (Εικόνα 1γ, 1ε).

Το σύρσιμο του ολισθητή υποστασιοποίησε τον «εννοιολογικό χρόνο», τον οποίο χειρίζονταν οι ίδιοι οι μαθητές, πατώντας το δεξί βελάκι του πληκτρολογίου (για σταθερή, συνεχόμενη αύξηση) ή το ποντίκι (για μη σταθερή μεταβολή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση). Στόχος ήταν μέχρι την 6η προσπάθεια να βρουν την κατάλληλη συνάρτηση για το αντίστοιχο τραγούδι.

Εικόνα 1. Μικρόκοσμοι των 2 φάσεων δραστηριοτήτων: α) & δ) οι μικρόκοσμοι του GeoGebra· β) το Φύλλο Δραστηριότητας· γ) & δ) ένας μικρόκοσμος (από τους 3 κάθε φάσης) του MaLT2. Οι μικρόκοσμοι κάθε φάσης παρουσιάζονται στα βίντεο-link1 (για 1η φάση) και βίντεο-link2 (για 2η φάση) (μπορούν να ανοιχτούν και μέσω σαρώματος QR code).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πιάνοντας τον ρυθμό

Στη 1η φάση, τα αισθητικά κριτήρια των μαθητών εστίαζαν κυρίως στο ταίριασμα με τον ρυθμό της μουσικής. Μία ομάδα μαθητριών (Μ5, Μ6), στην προσπάθεια εύρεσης της κατάλληλης συνάρτησης για το τραγούδι «The pink panther theme», πέρασε από πολλά στάδια επανα-προσδιορισμού αισθητικών κριτηρίων πάνω στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Στους πρώτους γύρους, οι μαθήτριες διερευνούσαν ποια γραφική παράσταση ταιριάζει στον ρυθμό του τραγουδιού, σκεπτόμενες με προ-συμμεταβολικό και αποσπασματικό τρόπο για τη περιοδική συμμεταβολή. Για παράδειγμα, στον 2ο γύρο, η Μ5 υποστήριζε ότι η γραφική παράσταση της $f(t)=22ημ(t)$ ταιριάζει καλύτερα από τη συνάρτηση $f(t)=40ημ(2t)$ που είχαν επιλέξει στον προηγούμενο γύρο:

Μ5: Αυτό μου φαίνεται ταιριάζει καλύτερα με τη βασική μελωδία. Δες το χέρι μου, κοίτα την οθόνη.

Η Μ5 κούνησε το ποντίκι κατά μήκος του γραφήματος με τον μεταβαλλόμενο ρυθμό της μελωδίας, όπως φαίνεται στο βίντεο της Εικόνας 2α. Η κίνησή της υποδεικνύει ότι αντιλαμβανόταν αντίστοιχα μέρη διαφορετικών περιόδων του γραφήματος να έχουν διαφορετικό ρυθμό μεταβολής. Δοκιμάζοντας την κίνηση στον μικρόκοσμο 1 του MaLT2 (Εικόνα 2β), η Μ5 αναθεώρησε την υπόθεσή της:

Μ5: Όχι, όχι. Μου φαίνεται το ίδιο αργό.

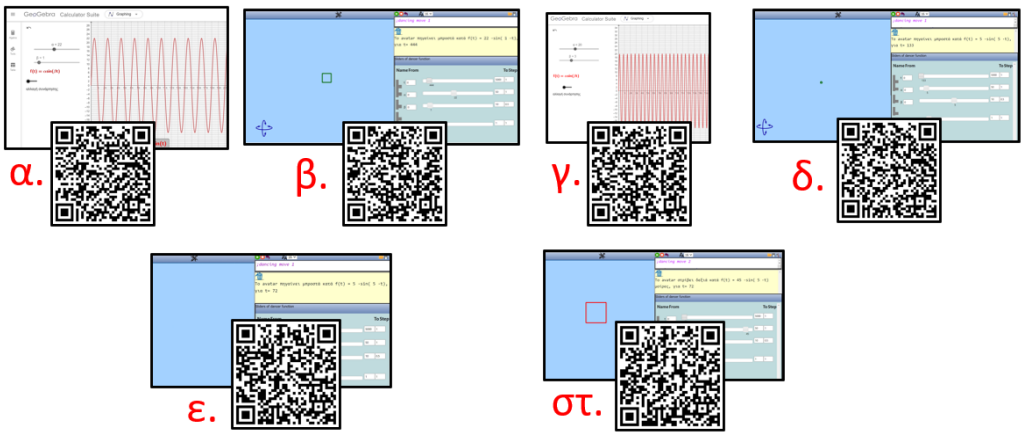
Μ6: Πρέπει να πιάσουμε το σταθερό μπιτ από πίσω. Το τουντουν-τουντουν.

Η Μ6 γύρισε στο GeoGebra και ρύθμισε τις παραμέτρους, επιλέγοντας τη συνάρτηση *f(t)=20ημ(3t)*. Έπειτα κούνησε το ποντίκι κατά μήκος του γραφήματος με σταθερό ρυθμό, όπως φαίνεται στο βίντεο της Εικόνας 2γ.

Μ5: Δεν το κουνάς σωστά. Την βασική μελωδία θέλουμε να πιάσουμε.

Μ6: Όχι. Πρέπει να πιάσουμε τον σταθερό ρυθμό. Δεν έχει νόημα να πιάσουμε την κεντρική μελωδία. Το από πίσω είναι το σταθερό.

Η κίνηση της Μ6 δείχνει ότι σκέφτηκε τη συμμεταβολή με ομαλά συνεχές τρόπο. Αξιολογώντας το αισθητικό αποτέλεσμα στο MaLT2 και τη μορφή της γραφικής παράστασης, επαναπροσδιόρισε τα αισθητικά της κριτήρια για αναζήτηση μίας συνάρτησης που να ακολουθεί τον σταθερό ρυθμό.



Εικόνα 2. Βίντεο για τη δραστηριότητα των Μ5, Μ6: α) αποσπασματική ΝΠΣ στο GeoGebra (link)· β) δοκιμή στο MaLT2 (link)· γ) ομαλή ΝΠΣ στο GeoGebra (link)· δ) δοκιμή κίνησης *f(t)=5ημ(5t)* στον μικρόκοσμο 1 (link)· ε) μελέτη περιόδου στον μικρόκοσμο 1 (link)· στ) μελέτη περιόδου στον μικρόκοσμο 2 (link).

Διακρίνοντας τον ρόλο των παραμέτρων

Οι Μ5 και Μ6 συνεχίζοντας την αναζήτηση κατάλληλης συνάρτησης για το ίδιο τραγούδι, στον 4ο και 5ο γύρο δοκίμασαν τις συναρτήσεις *f(t)=45ημ(5,5t)* και *f(t)=40ημ(5t)* αντίστοιχα, στους μικρόκοσμους 1 και 2 του MaLT2. Στον 6ο γύρο συζήτησαν για τον ρόλο των παραμέτρων α και β παρατηρώντας την αναπαράσταση στο GeoGebra:

Μ6: Θέλουμε λίγο πιο γρήγορη κίνηση, άρα πιο μικρή περίοδο. Η περίοδος αλλάζει με το β.

Μ5: Ναι αλλά το 5,5 ήταν γρήγορο και το 5 πιο αργό για το μπιτ. Να μικρύνουμε το α; Θα κάνει μικρότερη κίνηση, άρα πιο γρήγορα.

Η Μ6 έθεσε το *α=5* επιλέγοντας τη συνάρτηση *f(t)=5ημ(5t)* και δοκίμασε στον μικρόκοσμο 1 του MaLT2 (Εικόνα 2δ). Ακολούθησε η αισθητική αξιολόγηση της κίνησης, συνοδευόμενη από αναστοχασμό:

Μ5: Πάλι το ίδιο αργό μου φαίνεται.

Μ6: Ε ναι ρε. Άκου, κοίτα. Έχει την ίδια περίοδο με πριν.

Η Μ6 έσυρε αργά την μπάρα της μεταβλητής t από 0 μέχρι 72. Στη συνέχεια άλλαξε την τιμή της παραμέτρου *α* από 5 σε 50 και έσυρε την μπάρα της μεταβλητής t από 0 μέχρι 72 (Εικόνα 2ε).

Μ6: Βλέπεις; Είναι ίδια ακριβώς περίοδος. 72 μονάδες.

Μ5: Πώς γίνεται, αφού είναι μικρότερη η κίνηση.

Μ6: Ναι αλλά είναι στον ίδιο χρόνο. Ίδια διάρκεια κίνησης πάνω-κάτω.

Η Μ6 επανέλαβε τη διερεύνησή της στον μικρόκοσμο 2 (Εικόνα 2στ).

Μ6: Κι εδώ στο 72 τελειώνει η περίοδος. Δες. Στα θετικά πάει δεξιά, στα αρνητικά αριστερά και στο 72 ξαναπάει στο κέντρο. Ίδια ταχύτητα είναι, ανεξάρτητα από το α. (*Η Μ6 ξανασύρει την μπάρα της μεταβλητής t ακούγοντας το τραγούδι.*)

Μ5: Οκ, τώρα το έπιασα. Μήπως να πιάσουμε το διπλό μπιτ με πιο αργό β;

Η Μ6 αξιοποίησε την μπάρα της t για να ελέγξει αν συναρτήσεις με ίδιο *β* και διαφορετικό *α* έχουν την ίδια περίοδο. Ο συλλογισμός της υποδεικνύει ΝΠΣ ως προς την αλλαγή κατεύθυνσης, με ομαλό συνεχές τρόπο. Η 2η αναπαράσταση του MaLT2 (Εικόνα 2στ) βοήθησε στη ΝΠΣ της Μ5. Τέλος, χρησιμοποίησαν 2ο επίπεδο συμμεταβολικού συλλογισμού για τον επαναπροσδιορισμό των αισθητικών τους κριτηρίων.

Μετατρέποντας τη μελωδία από τη φαντασία σε συνάρτηση

Στη 2η φάση, οι μαθητές μπορούσαν να επιλέξουν προσέγγιση σειράς Fourier. Όλες οι ομάδες δοκίμασαν και διερεύνησαν περίπλοκες συναρτήσεις, οι οποίες, όταν τις δοκίμαζαν στους μικρόκοσμους του MaLT2 τους προκαλούσε έκπληξη και ενθουσιασμό. Τους επέτρεπαν, έτσι, να θέσουν συνθετότερους αισθητικούς στόχους που συνδύαζαν τόσο τον ρυθμό όσο και τη μελωδία του τραγουδιού. Η ομάδα των Μ1, Μ2, προσπαθώντας να βρει μία συνάρτηση που να ταιριάζει στο 3ο τραγούδι «Tango», επέλεξε να τη σχεδιάσει πρώτα στο χαρτί, όπως την φανταζόταν:

Μ1: Δεν γίνεται έτσι στην τύχη. Πρέπει να σκεφτούμε πρώτα πώς τη θέλουμε.

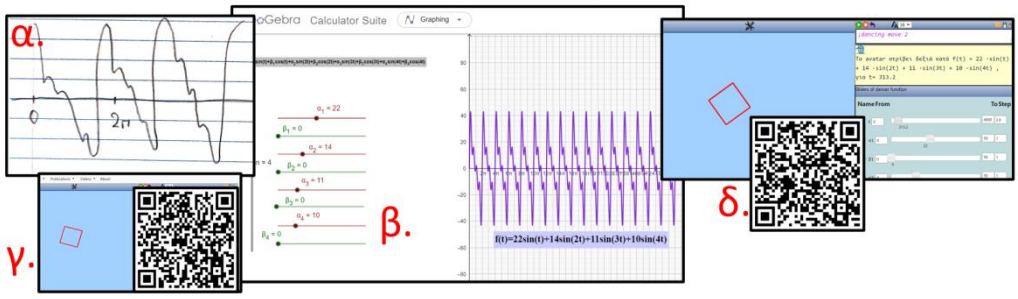
Μ2: Ωραία, φέρε το τετράδιό σου να το ζωγραφίσω, όπως το φαντάζομαι. (*Σχεδιάζει στο χαρτί 4 γραφήματα, τα 3 από τα οποία τα σβήνει, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3α*). Να έτσι το σκέφτομαι. (*Τραγουδάει τη μελωδία και κάνει κίνηση με τα χέρια.*) Θα ξεκινάει από τη μία μεριά και τσούκου-τσούκου να πηγαίνει από την άλλη, ακολουθώντας τις νότες.

Ο Μ2, εξέφρασε τη συμμεταβολή με συνεχές και ομαλό τρόπο μέσω της κίνησης των χεριών του και της αναπαράστασης στο χαρτί. Αφού διερεύνησαν συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων για να πετύχουν τη συνάρτηση που ταιριάζει στο σχέδιο του Μ2, κατέληξαν στη συνάρτηση $f(t)=22ημ(t)+5συν(t)+14ημ(2t)+4συν(2t)+11ημ(3t)+10ημ(4t)$.

Μ1: Αααα αυτό αυτό! Είναι πολύ κοντά. Μηδένισε μία όλα τα συνημίτονα..

Μ2: Ω λες; (*Ο Μ2 μηδενίζει τις παραμέτρους $β_1$, $β_2$, σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $f(t)=22ημ(t)+14ημ(2t)+11ημ(3t)+10ημ(4t)$. Εικόνα 3β)*) Ναι! Το άθροισμα ημιτόνων κάνει τα σκαλοπάτια ακριβώς που σκεφτόμουν. Πάμε να δούμε την κίνηση!

Ο Μ2 έδειξε ενθουσιασμό βρίσκοντας τον τύπο της συνάρτησης, την οποία είχε ήδη εκφράσει με στατικό (χαρτί) και δυναμικό (κίνηση με χέρια) τρόπο. Το συμπέρασμα του για τον ρόλο των παραμέτρων α_i στη μορφή της γραφικής παράστασης (το οποίο στη συνέχεια της δραστηριότητας διορθώνεται και γίνεται πιο συγκεκριμένο) υποδεικνύει ότι ενεπλάκη σε 2ο επίπεδο συμμεταβολικού συλλογισμού της περιοδικής συνάρτησης. Ωστόσο, δοκιμάζοντας την κίνηση στον μικρόκοσμο 2 του MaLT2 (Εικόνα 3γ), οι μαθητές είχαν ανάμεικτα συναισθήματα και οδηγήθηκαν σε επαναπροσδιορισμό των αισθητικών τους στόχων και περαιτέρω εμβάθυνση στη ΝΠΣ, όπως φαίνεται στην επόμενη παράγραφο.



Εικόνα 3. α) Σχέδιο γραφικής παράστασης Μ2 στο χαρτί· β) εύρεση τύπου στο GeoGebra· γ) & δ) κίνηση στο MaLT2 με *βήμα=1* (link) και *2,9* (link).

Ταιριάζοντας τη μελωδία στον ρυθμό

Μ2: Πω… όχι, όχι, είναι πολύ αργό.

Μ1: Περίμενε. Είναι αργό αλλά είναι ακριβώς η κίνηση που ταιριάζει. Αν απλά κάνουμε αυτήν την κίνηση να είναι πιο γρήγορη;

Μ2: Πώς; Θα πρέπει να κουνάμε πιο γρήγορα την μπάρα.

Μ1: Οκ. Κοίτα. (*Δείχνει το γράφημα της Εικόνας 6α. Σημειώνει στον οριζόντιο άξονα του γραφήματος τις τιμές 0 και 2π.*) Τώρα εδώ είναι το 2π. Σωστά; Θέλει 360 κινήσεις του t για να φτάσει στο 2π. Αν όμως κάνουμε το βήμα 2, θα θέλει μισές κινήσεις, άρα μισό χρόνο. Ε;

Οι Μ1 και Μ2 έθεσαν ως στόχο να φτιάξουν την ίδια κίνηση σε μικρότερο χρόνο. Εκφράζοντας ιδέες, χρησιμοποίησαν συνεχές ομαλό και διακριτό συμμεταβολικό συλλογισμό, αναφερόμενοι στη περιοδική συνάρτηση ως συνεχόμενη περιοδική κίνηση στον χρόνο και επισημαίνοντας τα σημεία αρχής και τέλους της πρώτης περιόδου. Ο Μ1 σκέφτηκε συμμεταβολικά για τον ίδιο το χρόνο, εκφράζοντας μία νέα σχέση μπάρας-χρόνου. Έτσι, το εργαλείο του ολισθητή του MaLT2 έδωσε την ευκαιρία για πιο σύνθετη ΝΠΣ για τη σχέση 3 εξαρτώμενων ποσοτήτων (κίνηση μπάρας, αναλογική μεταβολή χρόνου και περιοδική μεταβολή μέτρου γωνίας στο μικρόκοσμο 2 του MaLT2). Ο Μ1 τότε άλλαξε την τιμή του βήματος της μπάρας της μεταβλητής *t* από 1 σε 2 (έτσι η *t* παίρνει τιμές τα πολλαπλάσια του βήματος: *step=2*). Δοκίμασε τη περιοδική κίνηση στον μικρόκοσμο 2 του MaLT2, εκφράζοντας ότι το θέλουν ακόμα πιο γρήγορο. Μετά από άλλες 2 δοκιμές (*step=3* και *2,5*), κατέληξαν στην τιμή *step=2,9* (Εικόνα 3δ).

Μ2: Τέλειο είναι! Τώρα ταιριάζει και ο ρυθμός και η μελωδία!

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ΝΠΣ των μαθητών ενισχύθηκε από τη συνεχόμενη εναλλαγή δράσεων μεταξύ ψηφιακών μικρόκοσμων, κινήσεων σώματος και σχεδίων στο

χαρτί. Όλοι οι τύποι συμμεταβολικού συλλογισμού εμφανίστηκαν και αξιοποιήθηκαν για την κάλυψη ποικίλων αισθητικών κριτηρίων. Ο συνδυασμός του γραφήματος GeoGebra με τις δυναμικές αναπαραστάσεις του MaLT2 έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη νοηματοδότηση κατεύθυνσης αλλαγής της συμμεταβολής, στη μετάβαση από αποσπασματικό σε ομαλό, συνεχές τρόπο νοηματοδότησης και στην εμπλοκή με 2ο επίπεδο συμμεταβολικού συλλογισμού, μέσω της διάκρισης του ρόλου των παραμέτρων και σχέσεων μεταξύ αυτών. Οι μαθητές σταδιακά άρχισαν να προβλέπουν τη κίνηση που αναπαριστούσε κάθε γραφική παράσταση, καθώς στα τελευταία τραγούδια έβρισκαν με τις πρώτες προσπάθειες συναρτήσεις ταιριαστές στις ιδέες τους. Εξίσου σημαντικό ρόλο έπαιξαν οι ΜΑΕ των μαθητών, οι οποίες πλαισίωσαν τη δράση τους στις ΨΤ. Χαρακτηριστικά της συμμεταβολής συζητήθηκαν ως υποκειμενικά αισθητικά κριτήρια, συνυφασμένα με κριτήρια που πήγαζαν από το άκουσμα της μουσικής (ρυθμός, μελωδία, συναίσθημα). Η συνεχόμενη ροή επανασύστασης αισθητικών στόχων, εκτός από κινητήρια δύναμη, καθόρισε και τη ροή νοηματοδότησης της συμμεταβολής: η κατάλληλη συνάρτηση δεν ήταν αυτή που τηρούσε κάποιους εξωτερικούς παράγοντες (πχ. πείραμα φυσικής), αλλά εκείνων που προερχόταν από τη φαντασία και τις μουσικές ευαισθησίες των μαθητών. Στη 2^{η} φάση δραστηριοτήτων, οι μαθητές οδηγήθηκαν σε πιο πολύπλοκες καλλιτεχνικές ιδέες, πιο έντονες αισθητικές εμπειρίες, αλλά και πιο σύνθετη ΝΠΣ, η οποία δυστυχώς δεν μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω στο πλαίσιο της εργασίας.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η παρούσα έρευνα χρηματοδοτείται από το έργο HORIZON-WIDERA "TransEET" (Transforming Education with Emerging Technologies - No. 101078875) του European Research Executive Agency – REA.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arzarello, F. (2019). Instrumented covariation: a phenomenon of semiotic and epistemological mediation. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 14. Número 18, 11–29

Bagossi, S. (2023). Engaging in covariational reasoning when modelling a real phenomenon: the case of the psychrometric chart. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 1-22.

Cobb, Paul, Jere Confrey, Andrea DiSessa, Richard Lehrer, and Leona Schauble. "Design experiments in educational research." *Educational researcher* 32, no. 1 (2003): 9-13. doi: 10.3102/0013189X032001009

De Freitas, E., and Sinclair, N. (2014). Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom. Cambridge University Press, New York.

Healy, L., Kynigos, C. (2010) Charting the microworld territory over time: design and construction in learning, teaching and developing mathematics. The International Journal of Mathematics Education, 42, ZDM, Springer Verlag, 63-76.

Karavakou, M., Kynigos, C., & Sinclair, N. Bridging disciplinary aesthetics: when Mathematics meets Art through Educational Technology. In *Frontiers in Education* (Vol. 8, p. 1284718). Frontiers.

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(2), 372-415.

Shama, G. (1998). Understanding periodicity as a process with a gestalt structure. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 255-281.

Sinclair, N. (2004). The roles of the aesthetic in mathematical inquiry. *Math. Think. Learn. 6,* 261–284. doi: 10.1207/s15327833mtl0603_1

Sinclair, N. (2018). Aesthetics as philosophy for mathematics education. For *the Learning of Mathematics, 38,* 21–23. FLM Publishing Association, Ontario, Canada

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling1, 2. *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*, *33*.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

Χρόνης Κυνηγός[1], Μαριάνθη Γριζιώτη[2], Μαρία Λάτση[3]

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ΕΚΠΑ

1. kynigos@eds.uoa.gr, 2. mgriziot@eds.uoa.gr, 3. mlatsi@ppp.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα εξετάζει τη μαθηματική δραστηριότητα 6 μαθητών Γυμνασίου καθώς αυτοί έπαιξαν, τροποποίησαν και επανασχεδίασαν δύο παιχνίδια κατηγοριοποίησης αναφορικά με τις έννοιες των συνόλων αριθμών και της γωνίας σε μια διαδικτυακή πλατφόρμα με την ονομασία 'Sor.B.E.T'. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, έπειτα από ποιοτική ανάλυση των δεδομένων, μέσω της ταξινόμησης παραδειγμάτων και μέσω της δημιουργίας παραδειγμάτων οι μαθητές ανέπτυξαν διαδικασίες κατηγοριοποίησης, παράλληλα με την κατασκευή νοημάτων σχετικά με: α) την έννοια της γωνίας και β) την έννοια των συνόλων των αριθμών, τα όρια καθενός και τις μεταξύ τους σχέσεις.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στη βιβλιογραφία, η κατηγοριοποίηση έχει προσεγγιστεί και έχει οριστεί με διάφορους τρόπους. Περιγράφεται ως μια λογικομαθηματική λειτουργία απαραίτητη για την ανάπτυξη της τυπικής σκέψης (Inhelder & Piaget, 1964), ενώ θεωρείται ότι κατακτάται μέσω εμπειρικών διερευνήσεων και μέσω της επίλυσης λογικομαθηματικών προβλημάτων. Παράλληλα, θεωρείται ως μια κομβική διαδικασία της μάθησης και της αντίληψης του κόσμου, ενώ πρόσφατα έχει αρχίσει να προσεγγίζεται ως μια κεντρική δεξιότητα του 21ου αιώνα, της υπολογιστικής σκέψης και του ψηφιακού γραμματισμού (Vuorikari, Kluzer & Punie, 2022).

Η κατηγοριοποίηση θεωρείται δύσκολο έργο για τους μαθητές (Armoni, 2013), καθώς περιλαμβάνει αφαιρετικές διαδικασίες, όπως για παράδειγμα τη διάκριση μεταξύ ιδιοτήτων αντικειμένων, τη γενίκευση των χαρακτηριστικών κλάσεων αντικειμένων, τη δημιουργία κατηγοριών. Έτσι τα εκπαιδευτικά συστήματα τείνουν να αφήνουν την κατηγοριοποίηση εκτός των προγραμμάτων σπουδών έως το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και να ενσωματώνουν μόνο βασικές έννοιες κατηγοριοποίησης κυρίως στα πρώτα στάδια της βασικής εκπαίδευσης. Παράλληλα, τα διαθέσιμα ψηφιακά εργαλεία και οι συναφείς εκπαιδευτικές δραστηριότητες που αφορούν την κατηγοριοποίηση περιλαμβάνουν συνήθως κλειστού τύπου δραστηριότητες, αφήνοντας ένα μεγάλο ερευνητικό κενό αναφορικά με τον τρόπο που η μαθησιακή διαδικασία συνδέεται με διαδικασίες κατηγοριοποίησης, αλλά και

αναφορικά με τον τρόπο που τα ψηφιακά εργαλεία θα μπορούσαν να υποστηρίξουν αυτές τις διαδικασίες.

Στη παρούσα έρευνα οι μαθητές έπαιξαν, τροποποίησαν και επανασχεδίασαν δύο ψηφιακά παιχνίδια κατηγοριοποίησης τύπου ‘τέτρις’ αναφορικά με τις έννοιες των συνόλων αριθμών και της γωνίας στο διαδικτυακό εργαλείο ‘Sor.B.E.T’ (Grizioti & Kynigos, 2023). Θεωρώντας τη διδασκαλία των μαθηματικών ως μια κατασκευαστική δραστηριότητα (Papert, 1980), θελήσαμε να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να διερευνήσουν τις ιδιότητες των συνόλων των αριθμών, καθώς και τις διάφορες πτυχές της έννοιας της γωνίας σε διάφορα τυπικά μαθηματικά και φυσικά πλαίσια, μέσω της ταξινόμησης παραδειγμάτων και μέσω της δημιουργίας παραδειγμάτων από τους ίδιους. Ιδιαίτερα, ο πειραματισμός με τους κανόνες ενός παιχνιδιού με στόχο την τροποποίηση και τον επανασχεδιασμό του, θεωρείται μια κατασκευαστική δραστηριότητα (Kynigos & Grizioti, 2020) που επιτρέπει στους μαθητές να εκφράσουν προσωπικά νοήματα για επιστημονικές έννοιες.

Αν και έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές έρευνες σχετικά με το πώς οι μαθητές κατανοούν τις αναπαραστάσεις των αριθμών αναφορικά με συγκεκριμένα σύνολα αριθμών (Psycharis, Latsi & Kynigos, 2009), δεν υπάρχουν έρευνες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα όρια κάθε συνόλου αριθμών και τις μεταξύ τους σχέσεις. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1973), υπάρχουν πολλές διαφορετικές πτυχές της έννοιας του αριθμού τόσο ως προς το ‘περιεχόμενο’ (content) όσο και ως προς τη ‘μορφή’(form). Σχετικά με το περιεχόμενο, οι αριθμοί μπορούν να ταξινομηθούν σε σύνολα, όπως φυσικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί, ρητοί και πραγματικοί αριθμοί. Πολλοί από τους ορισμούς των διαφόρων συνόλων αριθμών αναφέρονται σε αναπαραστάσεις. Η διάκριση εάν ένας αριθμός ανήκει σε ένα σύνολο αριθμών βασίζεται στο εάν μπορεί ή όχι να αναπαρασταθεί με μια δεδομένη μορφή. Για παράδειγμα, ένας ρητός αριθμός είναι ένας αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα με ακέραιο αριθμητή και θετικό ακέραιο παρονομαστή.

Από την άλλη, η γωνία, αν και μια από τις βασικές γεωμετρικές ιδιότητες του χώρου που μας περιβάλλει δεν είναι τόσο ευδιάκριτη, δεν εντοπίζεται εύκολα, γι’ αυτό και συχνά οι μαθητές τη συγχέουν με άλλες γεωμετρικές έννοιες, π.χ. με την έννοια του μήκους. Οι γωνίες εμφανίζονται σε μια ποικιλία φυσικών περικείμενων τα οποία και δεν συσχετίζονται εύκολα μεταξύ τους. Πολλοί ερευνητές (Freudenthal, 1983, Mitchelmore & White, 2000) κατηγοριοποιούν τις γωνίες και τους συναφείς ορισμούς σε δυο μεγάλες κατηγορίες κάνοντας διάκριση μεταξύ δυναμικών και στατικών πτυχών της έννοιας. Οι ορισμοί που θεωρούνται ως δυναμικοί δίνουν έμφαση στην γωνία ως αποτέλεσμα κίνησης και στροφής, ενώ οι ορισμοί

που θεωρούνται στατικοί δίνουν έμφαση στη γωνία ως σταθερό γεωμετρικό σχήμα. Εμπλέκοντας τους μαθητές σε ένα ψηφιακό παιχνίδι στο οποίο πρέπει να αναγνωρίσουν και να κατηγοριοποιήσουν γωνίες σύμφωνα με το μέτρο τους αλλά και να δημιουργήσουν δικά τους παραδείγματα, καθώς θα τροποποιούν το παιχνίδι, ενδέχεται να τους βοηθήσει να αναγνωρίσουν και να συντονίσουν τις διαφορετικές πτυχές της έννοιας της γωνίας.

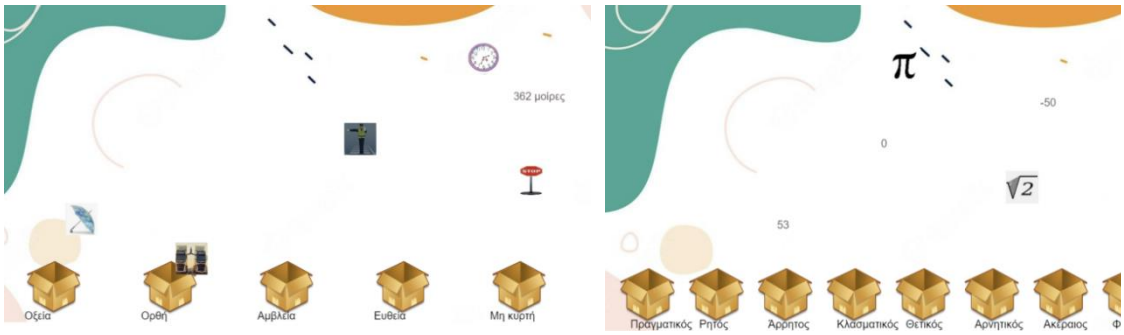
Συνοψίζοντας, τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας μελέτης είναι τα εξής:

α) Ποιες διαδικασίες ταξινόμησης αναπτύσσουν οι μαθητές καθώς παίζουν και τροποποιούν δύο παιχνίδια ταξινόμησης που αφορούν στις μαθηματικές έννοιες των συνόλων των αριθμών και της γωνίας στο ψηφιακό περιβάλλον του Sor.B.E.T;

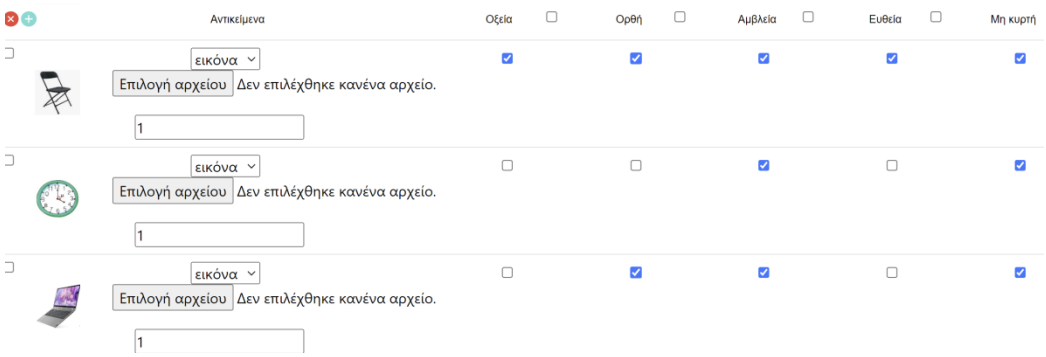
β) Πώς αυτές οι διαδικασίες ενισχύουν την ανάπτυξη νοημάτων και ιδεών αναφορικά με τις μαθηματικές έννοιες που έχουν ενσωματωθεί στα συγκεκριμένα παιχνίδια;

Το υπολογιστικό περιβάλλον

Το Sor.B.E.T είναι μια διαδικτυακή εφαρμογή του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας του ΕΚΠΑ που επιτρέπει το παιχνίδι και τον σχεδιασμό παιχνιδιών ταξινόμησης και είναι διαθέσιμο δωρεάν στο διαδίκτυο (Grizioti & Kynigos, 2023). Το Sor.B.E.T. προσφέρει δύο διαφορετικές λειτουργίες: την λειτουργία παιχνιδιού (Εικόνα 1), όπου ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να παίξει ένα παιχνίδι ταξινόμησης και τη λειτουργία του σχεδιασμού, όπου μπορεί να σχεδιάσει εύκολα ένα νέο παιχνίδι ή να τροποποιήσει ένα ήδη υπάρχον χρησιμοποιώντας τα ειδικά εργαλεία που διαθέτει (Εικόνα 2).



Εικόνα 4:Αριστερά: Στιγμιότυπο από το παιχνίδι ταξινόμησης «Πτώση Γωνιών, Δεξιά: Στιγμιότυπο από το παιχνίδι ταξινόμησης «Κατηγορίες αριθμών»



Εικόνα 5: Στιγμιότυπο απο την τροποποίηση του παιχνιδιού «Πτώση Γωνιών» στη λειτουργία σχεδιασμού του SorBET

Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας σχεδιάστηκαν 2 παιχνίδια (Εικόνα 1): Το πρώτο, που ονομάζεται "Κατηγορίες Αριθμών" και είναι ένα παιχνίδι που επικεντρώνεται στην κατηγοριοποίηση αριθμών σε κατηγορίες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, δηλαδή σε πραγματικούς, ρητούς, άρρητους, κλασματικούς, θετικούς, αρνητικούς, ακεραίους, φυσικούς, δεκαδικούς. Οι κατηγορίες επιλέχθηκαν έτσι ώστε ορισμένες από αυτές να περιλαμβάνουν άλλες. Για παράδειγμα, η κατηγορία των ακεραίων περιλαμβάνει αντικείμενα (αριθμούς) που ανήκουν επίσης στις κατηγορίες των θετικών και των αρνητικών.

Το δεύτερο παιχνίδι, που ονομάζεται 'Πτώση Γωνιών', είναι ένα μαθηματικό παιχνίδι που επικεντρώνεται στη έννοια της γωνίας (Εικόνα 1). Ο παίκτης πρέπει να ταξινομήσει εικόνες που αναπαριστούν πραγματικά αντικείμενα, π.χ. δείκτες ρολογιού, φτερά πουλιού, θέση χεριών, σε πέντε κατηγορίες γωνιών (οξεία, ορθή, αμβλεία, ευθεία, μη-κυρτή). Κάποιες εικόνες μπορεί να ταξινομηθούν σε περισσότερες από μία κατηγορίες, καθώς απεικονίζουν περισσότερες από μία γωνίες.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η μελέτη που παρουσιάζεται σε αυτό το άρθρο αποτελεί μέρος μιας εν εξελίξει έρευνας σχεδιασμού (Bakker, 2018). Η έρευνα σχεδιασμού περιλαμβάνει τον σχεδιασμό εργαλείων και δραστηριοτήτων, καθώς και τη συστηματική μελέτη τόσο της διαδικασίας της μάθησης όσο και των μέσων που την υποστηρίζουν με σκοπό τη δημιουργία νέων θεωρητικά πλαισιωμένων κατανοήσεων για περιοχές για τις οποίες γνωρίζουμε λίγα.

Η μελέτη, διάρκειας 4 ωρών, πραγματοποιήθηκε σε ένα πειραματικό γυμνάσιο στην Ελλάδα. Συμμετείχαν έξι μαθητές, τέσσερα αγόρια και δύο κορίτσια, ηλικίας 13-14 ετών, οι οποίοι δούλεψαν σε ομάδες των 2-3

μαθητών. Δεν είχαν εμπειρία στον σχεδιασμό παιχνιδιών, ενώ είχαν διδαχθεί τα σύνολα αριθμών και είχαν βασικές γνώσεις των γωνιών.

Συλλέχθηκαν τρία είδη δεδομένων τα οποία περιλάμβαναν: καταγραφή οθόνης και ήχου κάθε ομάδας, τα τροποποιημένα παιχνίδια των μαθητών και σημειώσεις παρατήρησης. Εφαρμόστηκε η μέθοδος της θεματικής ανάλυσης, ενώ ως μονάδα ανάλυσης χρησιμοποιήθηκε το "κρίσιμο περιστατικό", δηλαδή ένα αντιπροσωπευτικό στιγμιότυπο της δραστηριότητας του μαθητή που σχετίζεται με τα ερωτήματα της μελέτης (Tripp, 2011).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων μας οργανώνεται γύρω από δύο κύρια θέματα: α) διαδικασίες ταξινόμησης και δημιουργία μαθηματικών νοημάτων κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού και β) διαδικασίες ταξινόμησης και δημιουργία μαθηματικών νοημάτων κατά τη διάρκεια της τροποποίησης και του επανασχεδιασμού των παιχνιδιών. Ωστόσο, στην ανάλυση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται εδώ, εστιάζουμε σε κάθε κατηγορία σε ένα μόνο παιχνίδι.

Κατηγοριοποίηση και ανάπτυξη νοημάτων: Νοήματα για τα σύνολα αριθμών κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού "κατηγορίες αριθμών"

Η ανάλυση των κρίσιμων περιστατικών έδειξε ότι όλες οι ομάδες, όταν έπαιξαν αρχικά το παιχνίδι, έτειναν να κατηγοριοποιούν κάθε αριθμό σε μία μόνο κατηγορία, αφήνοντας μερικές κατηγορίες χωρίς αντικείμενα. Αρχικά οι μαθητές επέλεγαν κυρίως τις κατηγορίες "Θετικοί, Αρνητικοί και Δεκαδικοί". Ωστόσο, καθώς οι μαθητές συνέχιζαν να παίζουν το παιχνίδι, άρχισαν να συζητούν εάν ένας αριθμός θα μπορούσε να ανήκει σε περισσότερες από μία κατηγορίες, πειραματιζόμενοι με το να ‘σέρνουν’ τους αριθμούς σε διάφορα κουτιά. Έτσι, ανέπτυξαν μια νέα διαδικασία ταξινόμησης που κωδικοποιήθηκε ως "Σύγκριση ιδιοτήτων αντικειμένων", ενώ παράλληλα συζητούσαν τα ‘κριτήρια ταξινόμησης’.

1 Γιώργος: Βάλε το 6.99 στους ρητούς.
2 Νίκος: Ναι, αλλά δεν είναι ακέραιος [τελικά δεν το βάζει].
3 Γιώργος: Ε και; Δεν έχει σημασία. Είναι ρητός και δεκαδικός.
4 Νίκος: Ναι αλλά όσα βάλαμε στους ρητούς και ήταν σωστά ήταν ακέραιοι.
5 Γιώργος: Όχι. Το 2/3 ήταν επίσης σωστό. Νομίζω ότι όλοι οι ακέραιοι είναι ρητοί, αλλά υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί που είναι ρητοί όπως τα κλάσματα. Βάλε το την επόμενη φορά και βλέπουμε.

Στο παραπάνω κρίσιμο συμβάν, οι μαθητές της ομάδας 2 παίζουν το παιχνίδι για έκτη φορά και έχουν ξεκινήσει να εξερευνούν τις κατηγορίες στις οποίες ανήκει κάθε αριθμός. Υπάρχει αντίθεση απόψεων μεταξύ τους σχετικά με το εάν το 6.99 είναι ρητός αριθμός, πυροδοτώντας συζήτηση σχετικά με το ποιες άλλες αναπαραστάσεις αριθμών περιλαμβάνονται στο σύνολο των "Ρητών" αριθμών. Ο Γιώργος εξηγεί στον Νίκο ότι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί είναι ρητοί, αλλά αυτό δεν σημαίνει το αντίθετο, δηλαδή ότι όλοι οι ρητοί αριθμοί είναι απαραίτητα ακέραιοι.

Η ανάλυση αποκάλυψε επίσης ότι οι μαθητές προσέγγιζαν αρχικά τους αριθμούς αποκλειστικά ως αναπαράσταση μιας ποσότητας, ως τον αριθμό των στοιχείων ενός συνόλου χωρίς περαιτέρω ιδιότητες. Σε αυτήν την περίπτωση, οι μαθητές ταξινομούσαν κάθε αριθμό μόνο σε μία κατηγορία, (π.χ. το 2/3 αναπαριστά ένα κλάσμα), υποθέτοντας ότι δεν μπορεί να ανήκει και σε άλλη. Καθώς το παιχνίδι συνεχίστηκε, οι μαθητές άλλαξαν σταδιακά τα κριτήρια ταξινόμησής τους, προσεγγίζοντας τον αριθμό ως κάτι που έχει τόσο περιεχόμενο όσο και μορφή, δηλαδή ως αναπαράσταση μιας ποσότητας με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Για παράδειγμα, στο επόμενο περιστατικό, οι μαθητές της ομάδας 1 παίζουν το παιχνίδι των αριθμών για 4η φορά.

> Γιάννης: Ωραία το 6/3 είναι κλάσμα, εύκολο
>
> Χρήστος: Τι άλλο μπορεί να είναι; Θετικός σίγουρα. Βάλτο να πέσει στο κουτί των θετικών
>
> Γιάννης: Α! Μήπως να το βάλουμε στους ακεραίους; Επειδή 6/3 κάνει 2;
>
> Χρήστος: Λες; Να το δοκιμάσουμε επόμενη φορά! Αν ισχύει αυτό, τότε και το 2/4 που πέφτει τώρα θα είναι επίσης δεκαδικός;

Ενώ στην αρχή ο Γιάννης εστιάζει στην αναπαράσταση του αριθμού 6/3 ως κλάσμα με συγκεκριμένο αριθμητικό περιεχόμενο, ο Χρήστος αρχίζει να σκέφτεται το 6/3 ως μια αναπαράσταση με συγκεκριμένες ιδιότητες. Στη συνέχεια, και οι δύο προσπαθούν να εκφράσουν τις ιδιότητες αυτής της αριθμητικής αναπαράστασης σύμφωνα με τις ιδιότητες των κατηγοριών του παιχνιδιού. Συμμετέχουν σε μια ενδιαφέρουσα μαθηματική συζήτηση για το αν το 6/3 είναι επίσης ένας ακέραιος αριθμός και το 2/4 ένα δεκαδικός. Παρότι η υπόθεσή τους δεν είναι σωστή με τυπικούς μαθηματικούς όρους, το παιχνίδι ενέπλεξε τους μαθητές σε μια διαδικασία σύγκρισης των δύο αναπαραστάσεων. Είναι επίσης ενδιαφέρον το ότι οι μαθητές δεν αναφέρονται σε τυπικούς ορισμούς, αλλά προσπαθούν να ανακαλύψουν τις ιδιότητες κάθε αριθμητικής αναπαράστασης χρησιμοποιώντας παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, καθώς παίζουν. Στη συνέχεια, εστιάζουμε στις διαδικασίες

κατηγοριοποίησης και τη δημιουργία νοήματος κατά τη διάρκεια της τροποποίησης και του επανασχεδιασμού του παιχνιδιού "πτώση γωνιών".

Κατηγοριοποίηση και ανάπτυξη νοημάτων: Νοήματα για τη γωνία κατά την τροποποίηση του παιχνιδιού "πτώση γωνιών"

Καθώς ξεκινούν να τροποποιούν το παιχνίδι ‘πτώση γωνιών’ στο παρακάτω περιστατικό, οι μαθήτριες σκέφτονται να προσθέσουν ένα νέο αντικείμενο που να ανήκει σε δύο κατηγορίες, θεωρώντας τις αμβλείες γωνίες ως μια υποκατηγορία των κυρτών (Εικόνα 2). Στη συνέχεια, μετά από υπόδειξη του εκπαιδευτικού, προσπαθούν να βρουν ένα αντικείμενο που δεν ανήκει σε καμία κατηγορία του παιχνιδιού και αποφασίζουν να προσθέσουν στο παιχνίδι τους έναν κύκλο και μια τελεία. Με αυτόν τον τρόπο προσθέτουν στο παιχνίδι τους μη-παραδείγματα, μια επιλογή που δίνει έμφαση στη διάκριση μεταξύ των κατηγοριών του παιχνιδιού.

1 Εκπαιδευτικός: Μπορείτε να βρείτε ένα αντικείμενο που ανήκει σε 2 κατηγορίες;
2 Μαρία: Ένα ρολόι στις 12 και 1 λεπτό.
3 Εκπαιδευτικός: Πού θα πηγαίνει αυτό;
4 Μαρία: Οξεία και μη κυρτή.
5 Εκπαιδευτικός: Κάποιο που να μην πηγαίνει σε καμία κατηγορία;
6 Μαρία: Σε καμιά κατηγορία ε;
7 Ελένη: Ο κύκλος;
8 Εκπαιδευτικός: Γιατί;
9 Ελένη: Γιατί δεν έχει καθόλου γωνίες
10 Μαρία: Η μια τελεία!

Προσθέτοντας νέα αντικείμενα από διάφορα φυσικά - στατικά, όπως η αναπαράσταση ενός καθίσματος, ή δυναμικά περικείμενα, όπως ο ποδοσφαιριστής που τρέχει και προσπαθώντας παράλληλα να ταξινομήσουν τις γωνίες αυτών των αντικειμένων, οι μαθητές οδηγούνται σε γενίκευση αναφορικά με τον τύπο γωνιών που μπορεί να έχει ένα 2D αντικείμενο. Σε αυτήν τη διαδικασία, λαμβάνουν υπόψη τους ολόκληρο το επίπεδο και όχι μόνο το τμήμα του επιπέδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των ακτινών της γωνίας. Για παράδειγμα, στο επόμενο περιστατικό οι μαθητές της ομάδας 1, έχοντας κατά νου την πλήρη γωνία, συμπεραίνουν ότι όλα τα αντικείμενα που έχουν μια αμβλεία ή μια οξεία γωνία έχουν επίσης και μια μη κυρτή γωνία (γραμμή 4). Με άλλα λόγια, αντιλαμβάνονται την κυρτή και μη κυρτή γωνία ως τα δύο συμπληρωματικά μέρη μιας πλήρους γωνίας, η οποία μπορεί να μετρηθεί με 360° ..

1 Χρήστος: Άρα όλες οι γωνίες έχουν μια μη κυρτή από την άλλη μεριά;

2 Γιάννης: Όχι όλες. Η ευθεία γωνία είναι 180 μοίρες, άρα δεν έχει κάτι από την άλλη μεριά.

3 Χρήστος: Α, ναι, σωστά.

4 Γιάννης: Νομίζω πως όλα τα αντικείμενα που έχουν μια οξεία ή μια αμβλεία γωνία θα έχουν σίγουρα και μια μη κυρτή. Να το δοκιμάσουμε;

5 Χρήστος: Κύριε, κύριε! Βρήκαμε έναν καινούριο κανόνα!

Σκέφτονται επίσης την ειδική περίπτωση της ευθείας γωνίας (γραμμή 2). Δημιούργησαν έτσι ένα μη-παράδειγμα περιορίζοντας την έκταση των υπαρχουσών κατηγοριών και τη γενίκευση στην οποία είχαν καταλήξει.

Κατά την προσπάθεια τροποποίησης του παιχνιδιού "πτώσης γωνιών", στην ομάδα 3 προέκυψε μια πρωτότυπη ιδέα: αποφάσισαν να τροποποιήσουν τις κατηγορίες του παιχνιδιού, έτσι ώστε ο παίκτης να ταξινομεί τα αντικείμενα σε κατηγορίες γεωμετρικών σχημάτων, όπως παραλληλόγραμμο, τρίγωνο κ.λπ. Αυτή η τροποποίηση οδήγησε στην ανάπτυξη διαδικασιών ταξινόμησης που κωδικοποιήθηκαν ως "Ενσωμάτωση Κατηγοριών" (δηλαδή, σχεδιασμός κατηγορίας που περιλαμβάνει μια άλλη, με την τελευταία να κληρονομεί τις ιδιότητες της προηγούμενης) και "Σχεδιασμός Μοντέλου Ταξινόμησης" (δηλαδή, σχεδιασμός και θέσπιση κανόνων για το μοντέλο ταξινόμησης του παιχνιδιού, π.χ. πόσες κατηγορίες θα έχει). Ένα παράδειγμα αποτελεί το παρακάτω περιστατικό.

1 Μαρία: Να βάλουμε και κατηγορίες ορθογώνια και τετράγωνα.

2 Ελένη: Ναι, αλλά ένα ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο σωστά; …Ναι γιατί στην κατηγορία παραλληλόγραμμο ανήκουν όλα τα παραλληλόγραμμα, ακόμα και τα ορθογώνια.

3 Μαρία: [παύση] όμως, υπάρχουν τόσα άλλα παραλληλόγραμμα που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.

4 Ελένη: Ναι, αλλά όλα τα αντικείμενα που θα πηγαίνουν στα ορθογώνια θα πηγαίνουν αναγκαστικά και στα παραλληλόγραμμα. Αυτό λέω.

5 Μαρία: Αααα, κατάλαβα. Και το ίδιο με τα τετράγωνα ε;

6 Ελένη: Ναι! Γι’ αυτό σου λέω. Μήπως να βάλουμε κατηγορίες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και πλάγιο παραλληλόγραμμο; Τότε σίγουρα θα έχουν διαφορετικά αντικείμενα οι 2 κατηγορίες.

7 Μαρία: Ωραία. Και να βάλουμε και μια πιο γενική που να περιλαμβάνει και τις 2 για να κάνουμε το παιχνίδι πιο δύσκολο. Πώς λέγεται;

8 Ελένη: Τι πώς λέγεται;

9 Μαρία: Τι είναι ένα ορθογώνιο και ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο και ένα εξάγωνο κλπ. ;

10 Ελένη: Α! Νομίζω πολύγωνα!

Η κατηγορία "ορθογώνιο" (γραμμή 2 και 4) θεωρείται από τι μαθήτριες ως υποκατηγορία της κατηγορίας "παραλληλόγραμμο", ενώ η κατηγορία "ορθογώνιο παραλληλόγραμμο" αποκλείει όλα τα αντικείμενα που ανήκουν στην κατηγορία "πλάγιο παραλληλόγραμμο" (γρ. 6). Τέλος, στη γραμμή 10 βρίσκουν μια υπερκείμενη κατηγορία που περιλαμβάνει ορθογώνια, παραλληλόγραμμα και εξάγωνα και καταλήγουν ότι αυτή η κατηγορία είναι το "πολύγωνο". Μέσω αυτής της διαδικασίας οι μαθητές ασχολούνται με την διερεύνηση των σχέσεων ενσωμάτωσης μεταξύ των διαφόρων κλάσεων των τετραπλεύρων και των πολυγώνων, κάτι που θεωρείται (Matsuo, 2007) ως το υψηλότερο στάδιο κατανόησης των σχέσεων μεταξύ σχημάτων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές ανέλυσαν το μοντέλο ταξινόμησης κάθε παιχνιδιού και ανέπτυξαν πολύπλοκες διαδικασίες ταξινόμησης, όπως η σύγκριση των ιδιοτήτων των αντικειμένων, η γενίκευση και η ενσωμάτωση κατηγοριών, προκειμένου να κατανοήσουν και να τροποποιήσουν το μοντέλο ταξινόμησης των δύο παιχνιδιών. Σημαντικό ρόλο σε αυτήν τη διαδικασία φάνηκε να παίζει το είδος του μοντέλου ταξινόμησης του Sor.B.E.T. (ένα προς πολλά), το οποίο πυροδότησε σχετικές συζητήσεις.

Παράλληλα, μέσω του παιχνιδιού, οι αριθμοί άρχισαν σταδιακά να γίνονται αντιληπτοί ως αναπαραστάσεις μιας ποσότητας με δεδομένη μορφή (π.χ. ρητοί, θετικοί και δεκαδικοί), μια μορφή που είναι κοινή με όσους αριθμούς ανήκουν στον ίδιο σύνολο. Οι μαθητές άρχισαν σταδιακά να αντιλαμβάνονται τα όρια κάθε συνόλου αριθμών και τις μεταξύ τους σχέσεις, κάτι που δεν έχει διερευνηθεί αρκετά μέχρι σήμερα.

Επίσης, παρατηρήσαμε τους μαθητές να συσχετίζουν τυπικές και μη-τυπικές αναπαραστάσεις γωνιών σε διάφορα φυσικά (δυναμικά ή στατικά) και μαθηματικά πλαίσια. Η έννοια της γωνίας έγινε αντιληπτή όχι μόνο ως η ένωση δύο ακτινών με ένα κοινό άκρο και ως η περιοχή που περιέχεται μεταξύ αυτών, αλλά και ως τμήμα του επιπέδου και ως μέρος του κύκλου, καθώς μετράται σε μοίρες από 0 έως 360. (Freudenthal, 1983; Mitchelmore & White, 2000). Είναι επίσης ενδιαφέρον το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού του παιχνιδιού, οι μαθητές δημιούργησαν δικά τους παραδείγματα, αντιπαραδείγματα και μη-παραδείγματα των μαθηματικών εννοιών που ενσωματώνονταν στα παιχνίδια.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας υποδεικνύουν τη συμβολή της εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες ταξινόμησης και σχεδιασμού

παιχνιδιών στην ανάπτυξη νοημάτων γύρω από αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, κάτι που θα μπορούσε ενδεχομένως να αξιοποιηθεί και ευρύτερα σε διαθεματικά/διεπιστημονικά πλαίσια με στόχο την καλλιέργεια δεξιοτήτων του 21ου αιώνα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Χρηματοδότηση: HORIZON-WIDERA "TransEET" - No. 101078875), European Research Executive Agency – REA. Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής για την παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά έγκριση του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις των συγγραφέων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Armoni, M. (2013). On teaching abstraction in CS to novices. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 32(3), 265–284.

Bakker, A. (2018). Design research in education. Routledge.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. D. Reidel Publishing.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. D. Reidel Publishing

Grizioti, M., & Kynigos, C. (2023, on-line). Integrating computational thinking and data science: The case of modding classification games. Informatics in Education.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). The early growth of logic in the child: Classification and seriation. Routledge & Kegan Paul.

Kurbanova, A., & Salikhova, N. (2016). Operations of classification thinking in students working on verbal tasks. International Journal of Environmental & Science Education, 11(3), 289–298.

Matsuo, N. (2007). Differences of students' understanding of geometric figures based on their definitions. In Proceedings of the 31st Conference of the International Group or the Psychology of Mathematics Education, (vol. 1, p. 264). PME.

Mitchelmore, M., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. Educational Studies in Mathematics, 41(3), 209–238.

Owen, K., & Barnes, C. (2021). The development of categorization in early childhood: A review. Early Child Development and Care, 191(1), 13–20.

Papert, S. (1980). Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas. Basic Books, Inc.

Psycharis, G., Latsi, M., & Kynigos, C. (2009). Meanings for fraction as number-measure by exploring the number line. International Journal for Technology in Mathematics Education, 16(3), 91–108.

Tripp, D. (2011). Critical incidents in teaching (classic edition): Developing professional judgement. Routledge.

Vuorikari, R., Kluzer, S., & Punie, Y. (2022). DigComp 2.2: The digital competence framework for citizens - With new examples of knowledge, skills and attitudes, Publications Office of the European Union.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΡΓΕΙΑΣ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΣΗΣ ΧΑΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Αλίκη Περιβολάρη, Γιώργος Ψυχάρης

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

aperivolari@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα μελετά τον ρόλο της συνέργειας ενός χειραπτικού τεχνουργήματος (δίπλωση χαρτιού) και ενός ψηφιακού (Geometer's Sketchpad) στη νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης «αν…τότε» και της απόδειξης κατά την εμπλοκή μαθητών/-ριών Α' Λυκείου με κατασκευαστικά-αποδεικτικά προβλήματα. Η συνδυαστική αξιοποίηση του θεωρητικού πλαισίου των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας και της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης ανέδειξε τον κρίσιμο ρόλο της συνέργειας των δύο πεδίων στην κατανόηση των δομικών στοιχείων μιας υποθετικής πρότασης, στην διερεύνηση εικασιών και μεθόδων επικύρωσής τους, στη γενίκευση προτάσεων και στη δόμηση τυπικών αποδείξεων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η απόδειξη και οι τρόποι ενίσχυσης της κατανόησής της από τους/ις μαθητές/-ριες αποτελούν κεντρικά ζητήματα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Υποστηρίζοντας την ανάγκη μιας διερευνητικής φάσης κατά την αποδεικτική διαδικασία, πολλές έρευνες (π.χ. Arzarello et al. 2002; Olivero & Robutti, 2007) έχουν μελετήσει τις δυνατότητες των περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας (ΠΔΓ) στη μετάβαση από τη διαμόρφωση εικασιών στη δόμηση αποδείξεων, συγκρίνοντάς τες κατά βάση με τον στατικό χαρακτήρα του περιβάλλοντος χαρτί-μολύβι. Παράλληλα, αρκετές έρευνες έχουν αναδείξει τις δυνατότητες της δίπλωσης χαρτιού (paper folding) στην ανάπτυξη μαθηματικής γνώσης, εστιάζοντας στην καλλιέργεια της χωρικής αντίληψης και του γεωμετρικού συλλογισμού, στην υποστήριξη της εξερεύνησης εικασιών, την ανακάλυψη γεωμετρικών σχέσεων και την κατανόηση των λογικών βημάτων της απόδειξης (π.χ. Wiles, 2013, 2015; Gürbüz et al., 2018). Εντός του ερευνητικού διαλόγου της κατασκευής μαθηματικών νοημάτων από τους/τις μαθητές/-ριες, στην πρόσφατη βιβλιογραφία συναντάμε μελέτες που εξετάζουν την αλληλεπίδραση δύο τεχνουργημάτων, ενός ψηφιακού και ενός χειραπτικού, με τον αριθμό τους ωστόσο να μικραίνει

σημαντικά όταν πρόκειται για την συμβολή αυτής της αλληλεπίδρασης στην απόδειξη και τη γενίκευση. Ειδικότερα, στην υπάρχουσα βιβλιογραφία συναντάμε μία μόνο σχετική έρευνα των Valori, Giacomone, Albanese και Adamuz Povedano (2022) η οποία εστιάζεται στην επιστημική ανάλυση δύο κατασκευαστικών-αποδεικτικών έργων και στην γνωστική ανάλυση των ενεργειών των μαθητών/-ριών καθώς εργάζονται με τη δίπλωση χαρτιού και το GeoGebra. Η ανάλυσή τους ανέδειξε ότι οι πολλαπλές οπτικές αναπαραστάσεις επιτρέπουν τον καλύτερο συντονισμό των λειτουργικών και των διαλεκτικών αντιλήψεων (Duval, 1994) κατά τη διαδικασία διαμόρφωσης εικασιών μέχρι την διατύπωση παραγωγικών επιχειρημάτων. Συνεπώς, το κενό που επιχειρεί να καλύψει η παρούσα έρευνα έγκειται στη μελέτη του ρόλου της *συνέργειας*, όπως ορίζεται ακολούθως, της δίπλωσης χαρτιού και του ΠΔΓ Geometer's Sketchpad (GSP) στην νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης «αν…τότε» και της απόδειξής της με τη συνδυαστική χρήση δύο αναλυτικών φακών, των Μαθηματικών Πεδίων Εργασίας (ΜΠΕ) (Kuzniak & Richard, 2014) και της Θεωρίας Σημειωτικής Διαμεσολάβησης (ΘΣΔ) (Bussi & Mariotti, 2008). Η *συνέργεια* δύο τεχνουργημάτων ορίστηκε από τις Mariotti και Montone (2020) και, υπό το πρίσμα της ΘΣΔ, εμφανίζεται όταν τα νοήματα που σχετίζονται με τη χρήση ενός από τα τεχνουργήματα συμπληρώνουν τα νοήματα που προκύπτουν από τη χρήση του άλλου δομώντας μια σημειωτική αλυσίδα που θα οδηγήσει τους/ις μαθητές/ριες στη δημιουργία κάποιου μαθηματικού νοήματος. Αξιοποιώντας στην παρούσα έρευνα το θεωρητικό πλαίσιο των ΜΠΕ και της ΘΣΔ προτείνεται ένας νέος θεωρητικός φακός για τη μελέτη της συνέργειας ενός χειραπτικού και ενός ψηφιακού τεχνουργήματος. Σύμφωνα με το πλαίσιο των ΜΠΕ, η εργασία των μαθητών/-ριών κατά τη νοηματοδότηση μιας μαθηματικής έννοιας πραγματοποιείται μεταξύ δύο επιπέδων: (α) του επιστημολογικού, που σχετίζεται με το μαθηματικό περιεχόμενο και (β) του γνωστικού, που αφορά στον συλλογισμό του ατόμου που εμπλέκεται με μία μαθηματική δραστηριότητα. Σύμφωνα με τη θεωρία ΜΠΕ η εξέλιξη της μαθηματικής εργασίας αναπτύσσεται προοδευτικά, μέσα από τη γεφύρωση του επιστημολογικού και του γνωστικού επιπέδου. Η γεφύρωση αυτή πραγματοποιείται σε τρεις αλληλένδετες διαστάσεις, τη σημειωτική (*semiotic)*, την εργαλειακή (*instrumental*) και την διαλογική (*discursive*). Η σημειωτική διάσταση αποκαλύπτει την διαλεκτική σχέση μεταξύ συντακτικής και σημασιολογικής πτυχής ενός μαθηματικού αντικειμένου (σύμβολα, αναπαραστάσεις, κλπ.). Η εργαλειακή διάσταση σχετίζεται με τη σύνδεση μεταξύ των τεχνουργημάτων και των κατασκευαστικών διαδικασιών που συμβάλλουν στην ολοκλήρωση του μαθηματικού έργου.

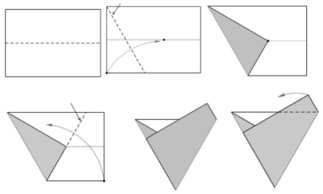
Τέλος, στη διαλογική διάσταση εντοπίζεται η οργάνωση όλων των ιδιοτήτων ενός θεωρητικού συστήματος αναφοράς με στόχο τη μαθηματική αιτιολόγηση ή την επικύρωση συλλογισμών. Η ΘΣΔ αξιοποιείται στη μελέτη της διαδικασίας αλληλεπίδρασης τριών ειδών σημείων, σημεία από το τεχνούργημα (*artefact signs*), μεταβατικά σημεία (*pivot sign*), μαθηματικά σημεία (*mathematical signs*) στην πορεία νοηματοδότησης της υποθετικής πρότασης και της απόδειξης. Τα σημεία από το τεχνούργημα αναφέρονται στο πλαίσιο χρήσης του τεχνουργήματος και τα συνδεόμενα νοήματα είναι προσωπικά, αυστηρά συνδεδεμένα με την εμπειρία του υποκειμένου με το τεχνούργημα. Τα μαθηματικά σημεία αναφέρονται στο μαθηματικό πλαίσιο και σχετίζονται με μαθηματικά νοήματα. Τέλος, τα μεταβατικά σημεία αποτελούν γέφυρες ανάμεσα στα σημεία από το τεχνούργημα και τα μαθηματικά σημεία και μπορούν να αναφέρονται στη δραστηριότητα με το τεχνούργημα και στο μαθηματικό πλαίσιο. Η εξέλιξη των νοημάτων μπορεί να οργανωθεί σε *σημειωτικές αλυσίδες* οι οποίες αναδεικνύουν τη διαδικασία νοηματοδότησης μέσα από τον μετασχηματισμό των σημείων και τη μετάβαση από νοήματα συσχετιζόμενα με το τεχνούργημα σε μαθηματικά και αποπλαισιωμένα νοήματα. Στην παρούσα έρευνα τα ΜΠΕ προσφέρουν ένα εργαλείο ανάλυσης της εργασίας των μαθητών/-ριών με τη δίπλωση χαρτιού και το GSP, λαμβάνοντας υπόψη σημειωτικά, κατασκευαστικά και διαλογικά χαρακτηριστικά. Από την άλλη, η έννοια της σημειωτικής αλυσίδας της ΘΣΔ συμβάλλει στην ανάλυση της σύνδεσης των δύο ΜΠΕ μέσα από την μελέτη των μεταβάσεων από διαστάσεις του ενός σε διαστάσεις του άλλου και την καταγραφή της εξέλιξης των νοημάτων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες/-ουσες και ερευνητικά δεδομένα

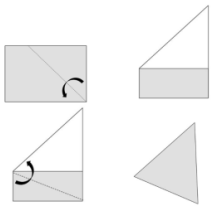
Η έρευνα αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης με δύο ομάδες μαθητών/-ριών Α' Λυκείου οι οποίες εργάστηκαν ανεξάρτητα σε τρεις συναντήσεις η καθεμία, συνολικής διάρκειας $5\frac{1}{2}$ ώρες με την Ομάδα 1 (Μ1,Μ2) και $6\frac{1}{2}$ με την Ομάδα 2 (Μ3,Μ4). Τα δεδομένα περιλαμβάνουν ηχογράφηση, βιντεοσκόπηση, καταγραφή οθόνης, φύλλα εργασίας και φύλλα χαρτιού με τις τσακίσεις και τις διπλώσεις των μαθητών/-ριών.

Δραστηριότητες



Εικ.1 Οδηγίες δίπλωσης Δραστηριότητας 1

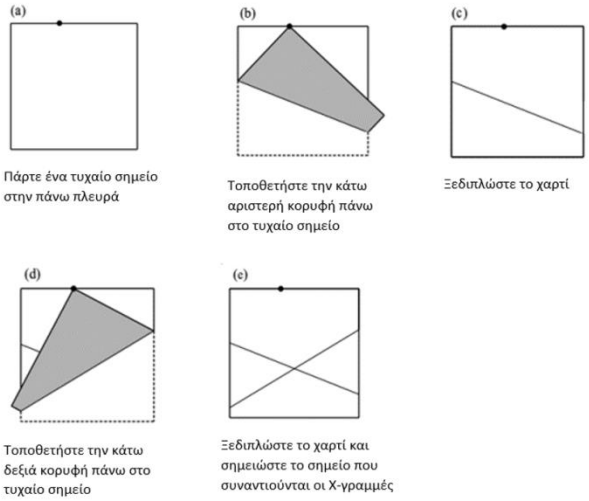
Όπως και στις τρεις δραστηριότητες, η Δρ. 1 καλεί αρχικά τις ομάδες να πραγματοποιήσουν τις διπλώσεις που τους δίνονται (Εικ.1) και έπειτα να διατυπώσουν μία εικασία για το τελικό σχήμα. Η αναμενόμενη εικασία είναι ότι το προκύπτον σχήμα είναι ισόπλευρο τρίγωνο, την οποία καλούνται να επικυρώσουν στο πεδίο της δίπλωσης. Ακολούθως, ζητείται μέσα από τον εντοπισμό ιδιοτήτων και σχέσεων των τσακίσεων να αναπαραστήσουν την ίδια κατασκευή εξολοκλήρου και βήμα-βήμα με ανθεκτικό τρόπο (διατήρηση ιδιοτήτων κατά το σύρσιμο) στο GSP επιλέγοντας κατάλληλα εργαλεία του πεδίου. Στη φάση αυτή αναμένεται η επιχειρηματολογία των μαθητών/-ριών να λάβει περισσότερο μαθηματικό χαρακτήρα μέσα από την απόδοση μαθηματικού νοήματος στα σημεία της δίπλωσης. Την ολοκλήρωση της ανθεκτικής κατασκευής στο GSP ακολουθεί το αίτημα επικύρωσης της εικασίας και στο ψηφιακό περιβάλλον. Τέλος, ζητείται μια τυπική απόδειξη της εικασίας με χαρτί-μολύβι, στην οποία αναμένεται να αξιοποιηθούν τα μαθηματικά νοήματα και οι ιδιότητες που αναδύθηκαν μέσα από τη συνέργεια των δύο πεδίων.



Εικ.2 Οδηγίες δίπλωσης Δραστηριότητας 2

Οι Δρ. 2, 3 προσθέτουν στις προαναφερθείσες στοχεύσεις ορισμένα νέα στοιχεία. Η Δρ. 2 (Εικ.2) ενέχει την εμφάνιση αντιφατικών τελικών αποτελεσμάτων στην οθόνη και στο διπλωμένο χαρτί. Ενώ η αναμενόμενη εικασία στο πεδίο της δίπλωσης είναι ότι το προκύπτον σχήμα είναι ισοσκελές τρίγωνο, η ολοκλήρωση της κατασκευής στο GSP οδηγεί σε ένα σκαληνό. Η αντίφαση προκύπτει αν δεν ληφθεί υπόψη η υπόθεση της διατήρησης της αναλογίας των διαστάσεων του ορθογωνίου με αυτές του φύλλου Α4. Η διαδικασία αυτή στοχεύει στην κατανόηση της λογικής εξάρτησης των υποθέσεων και του συμπεράσματος μιας υποθετικής πρότασης.

Το ιδιαίτερο στοιχείο που φέρει η Δρ.3 (Εικ.3) είναι η εμπλοκή με την έννοια της γενίκευσης. Έπειτα από κάποιες επαναλήψεις των βημάτων δίπλωσης (με διαφορετικό αρχικό τυχαίο σημείο) οι ομάδες καλούνται να διατυπώσουν μια εικασία σχετικά με τα σημεία τομής των Χ-γραμμών. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο της πάνω και κάτω πλευράς του τετραγώνου. Το αίτημα για αναπαράσταση της κατασκευής στο GSP και για διερεύνηση της εικασίας, αναμένεται να οδηγήσει στην διάκριση ειδικού – γενικού μέσα από διαδικασίες διερεύνησης αναλλοίωτων ιδιοτήτων. Κρίσιμος θα είναι ο ρόλος του συρσίματος του GSP στην παραγωγή πολλαπλών ζευγών Χ-γραμμών και στην παρατήρηση γενικών ιδιοτήτων. Επιπλέον, η Δραστηριότητα 3 καλεί τις ομάδες να αποδείξουν την εικασία τους στην ειδική περίπτωση που το τυχαίο σημείο είναι μια από τις κορυφές του τετραγώνου και στην γενική περίπτωση. Η διαδικασία αυτή αναμένεται να συνεισφέρει στην επιπλέον κατανόηση της διάκρισης γενικού-ειδικού μέσα από την ανάγκη αλλαγής αποδεικτικής διαδρομής. Και σε αυτή τη δραστηριότητα η λογική σύνδεση του συμπεράσματος από τις υποθέσεις αναμένεται να γίνει φανερή σε εμπειρικό αλλά και αυστηρά μαθηματικό επίπεδο.



Εικ.3 Οδηγίες δίπλωσης Δραστηριότητας 3

A-priori ανάλυση

Διακρίνουμε δύο ΜΠΕ, το «Πεδίο δίπλωσης χαρτιού» (χειραπτικό) και το «Πεδίο GSP» (ψηφιακό), καθένα από τα οποία προσφέρει διαφορετικές δυνατότητες για την εργασία των ομάδων στα τρία επίπεδά του (σημειωτικό, εργαλειακό, διαλογικό). Ωστόσο, εστίαση της έρευνας αποτελεί η μεταξύ τους συνέργεια. Έπειτα από την ολοκλήρωση της κατασκευής στο πεδίο της δίπλωσης χαρτιού αναμένεται η συνεχής συνομιλία των διαστάσεων των δύο ΜΠΕ και ο εμπλουτισμός νοημάτων του ενός από νοήματα που αναδύθηκαν κατά την εμπλοκή με το άλλο. Ειδικότερα, κατά τη μεταφορά της κατασκευής από το χειραπτικό στο ψηφιακό μέσο, την εργασία στο σημειωτικό και εργαλειακό επίπεδο του «Πεδίου της δίπλωσης», με την εμπειρική ερμηνεία των τσακίσεων, είναι προσδωκόμενο να διαδεχθεί η ανακάλυψη ιδιοτήτων και αναλοίωτων

σχέσεων που θα κινητοποιήσουν την σημειωτική και εργαλειακή εργασία στο «Πεδίο GSP». Κατά την εξέλιξη της συγκεκριμένης διαδικασίας αναμένεται η μετάβαση από προσωπικά σε μαθηματικά νοήματα μέσα από τον μετασχηματισμό της νοηματοδότησης των σημείων από τους/ις μαθητές/-ριες. Η συνεργασία των διαλογικών επιπέδων των ΜΠΕ αναμέται να γίνει ορατή κατά την διερεύνηση μαθηματικών νοημάτων, μεθόδων επικύρωσης εικασιών και την απόδειξής τους. Επεισόδια συνέργειας αναμένεται να εμφανιστούν και σε καταστάσεις αντιφατικών αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο πεδίων και διερεύνησης ειδικών και γενικών περιπτώσεων. Υποστηρίζουμε ότι οι σημειωτικές δυνατότητες του κάθε πεδίου και συγκεκριμένα η οπτικό-απτική εμπειρία της δίπλωσης χαρτιού και ο δυναμικός χαρακτήρας του GSP αποτελούν έναν συνδυασμό που μπορεί να συμβάλει καθοριστικά στην εξέλιξη μαθηματικών νοημάτων σχετικών με την υποθετική πρόταση και την απόδειξή της.

Μέθοδος ανάλυσης

Έπειτα από την απομαγνητοφώνηση, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ανοιχτής κωδικοποίησης (Strauss & Corbin, 1998) κατά την οποία αποδόθηκαν κωδικοί σε σχέση με τις διαστάσεις (σημειωτική, εργαλειακή, διαλογική) καθενός από τα δύο ΜΠΕ στα οποία εργάζονταν οι ομάδες. Έπειτα, προστέθηκαν κωδικοί που αναφέρονται στο είδος των σημείων (artefact, pivot, mathematical) σύμφωνα με τη ΘΣΔ. Στο επόμενο στάδιο εντοπίστηκαν τα επεισόδια συνέργειας μεταξύ των ΜΠΕ και οργανώθηκε σε σημειωτικές αλυσίδες η διαδοχή, από το ένα πεδίο στο άλλο, και η εξέλιξη νοημάτων. Τέλος, τα επεισόδια κατηγοριοποιήθηκαν σε 4 ενότητες με βάση τη συμβολή τους στην νοηματοδότηση συγκεκριμένων στοιχείων ή διαδικασιών σχετικά με την υποθετική πρόταση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρουσιάζεται ένα επεισόδιο από κάθε ενότητα ώστε να σκιαγραφηθεί η προοδευτική νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης και της απόδειξης.

Ανάδυση υποθέσεων της υποθετικής πρότασης

Και στις τρεις δραστηριότητες, έπειτα από την ολοκλήρωση των διπλώσεων και τη διατύπωση εικασίας, η συνθήκη της ανθεκτικής κατασκευής στο GSP έφερε στην επιφάνεια επεισόδια συνέργειας των δύο ΜΠΕ στην προσπάθεια των μαθητών/-ριών να νοηματοδοτήσουν τις διπλώσεις και τις μεταξύ τους σχέσεις. Η επίτευξη αυτού του στόχου οδήγησε τις ομάδες σε πρώιμες υποθέσεις και λογικές συνδέσεις της υποθετικής πρότασης. Το απόσπασμα που ακολουθεί είναι από την εμπλοκή της Ομάδας 1 (Μ1, Μ2) με την Δρ. 1, στο οποίο οι μαθήτριες επιχειρούν να αποδώσουν μαθηματικό νόημα στη πρώτη τσάκιση (Εικ. 4).

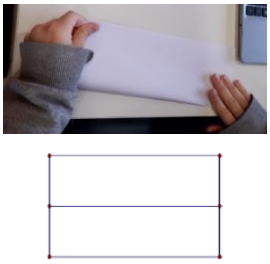
Μ1: Είναι μεσοπαράλληλος

Ε: Γιατί;

Μ2: Αν διπλώσω πέφτει η μια πάνω στην άλλη

Μ1: Ναι αυτό…δύο ίσες

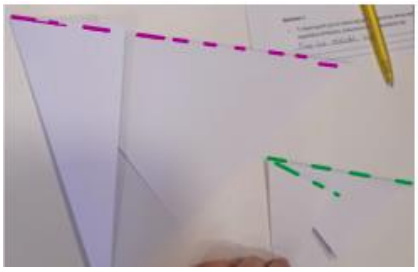
Αρχικά, οι μαθήτριες εργαζόμενες στο σημειωτικό επίπεδο της δίπλωσης χαρτιού οπτικοποιούν την 1η τσάκιση (σημείο από το τεχνούργημα-δίπλωση) και αναφέρονται σε αυτήν ως «μεσοπαράλληλος» (μαθηματικό σημείο). Ζητώντας τους να αιτιολογήσουν αυτή την εικασία, ενεργοποιούν την εργαλειακή διάσταση και ξανά διπλώνοντας κατά μήκος της 1ης τσάκισης παρατηρούν ότι η πάνω και κάτω πλευρά ταυτίζονται (μεταβατικό σημείο-δίπλωση). Ερμηνεύουν αυτή την οπτικό-απτική εμπειρία ως συμμετρία (μαθηματικό σημείο) των πλευρών και τελικά, παρατηρώντας τις απορρέουσες ισότητες, αιτιολογούν τον ισχυρισμό τους. Αυτή η εργαλειακή και διαλογική διάσταση του πεδίου της δίπλωσης κατευθύνει ακολούθως την εργασία τους στο GSP, καθώς εντοπίζουν εκείνες τις ιδιότητες του σημείου (1^{η} τσάκιση) που θα επιτρέψουν την αποτύπωσή του στο GSP. Με τη χρήση κατάλληλων εντολών (μεταβατικό σημείο-GSP), οι μαθήτριες κατασκευάζουν τη μεσοκάθετο της δεξιάς και αριστερής πλευράς του ορθογωνίου, εμπλουτίζοντας το αρχικό νόημα της μεσοπαραλλήλου, με αποτέλεσμα να ενεργοποιείται η εργαλειακή και διαλογική διάσταση του GSP. Συνοπτικά, η συνέργεια των ΜΠΕ αποκάλυψε υποθέσεις σχετικές με την πρώτη τσάκιση και ειδικότερα με τις ιδιότητες της μεσοπαραλλήλου και της μεσοκαθέτου, οι οποίες ωστόσο δεν αξιοποιήθηκαν εντέλει ρητά από τις μαθήτριες στην τελική απόδειξη.



Εικ.4 Εργασία στο πεδίο της δίπλωσης και στο GSP

Ανάδυση λογικών συνδέσεων της υποθετικής πρότασης

Κατά τη διερεύνηση των αντιφατικών αποτελεσμάτων στο πεδίο της δίπλωσης και στο GSP στη Δρ. 2, οι ομάδες οδηγήθηκαν στην παραγωγική αμφισβήτηση υποθέσεων και στην κατανόηση των λογικών εξαρτήσεων της υποθετικής πρότασης. Η αντίφαση οδήγησε κυρίως την (Μ1, Μ2) στη δημιουργία συνδέσεων-αντιστοιχίσεων τόσο μεταξύ σημείων όσο και ενεργειών που πραγματοποιούσαν στα δύο ΜΠΕ. Ειδικότερα, οι μαθήτριες αρχικά εργάζονται στο εργαλειακό επίπεδο του GSP όπου αξιοποιώντας το σύρσιμο και τη μέτρηση εντοπίζουν θέσεις στις οποίες το τρίγωνο γίνεται ισοσκελές (μεταβατικό σημείο-GSP), όπως και ανέμεναν. Η εργασία αυτή ενεργοποίησε την εργαλειακή διάσταση του πεδίου της δίπλωσης καθώς οι μαθήτριες επανέλαβαν τις ίδιες διπλώσεις σε φύλλα διαφορετικών διαστάσεων *(«χειραπτικά αντιπαραδείγματα»)* (σημείο από το τεχνούργημα -δίπλωση), ανακαλύπτοντας ότι μόνο τα φύλλα που είναι όμοια (μαθηματικό σημείο) με το Α4 οδηγούν σε ισοσκελές τρίγωνο. Η συγκριτική παρατήρηση των «χειραπτικών αντιπαραδειγμάτων», οδήγησε στον εντοπισμό της αναγκαίας μαθηματικής σχέσης που οδηγεί στο επιθυμητό συμπέρασμα, δηλαδή η καθετότητα δύο τμημάτων (Εικ.5, μωβ). Η συνέργεια αυτή οδήγησε στην διαλογική γένεση νοημάτων σχετικών με την εξάρτηση του συμπεράσματος από τις υποθέσεις.

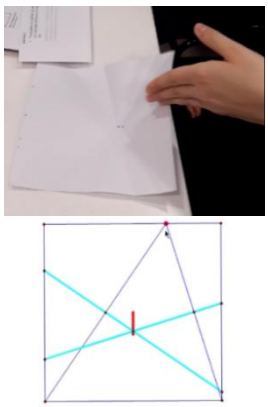


Εικ.5 «Χειραπτικά αντιπαραδείγματα»

Ανάδυση συμπερασμάτων και ισχυροποίηση των λογικών συνδέσεων της υποθετικής πρότασης

Στη Δρ. 3, οι μαθήτριες της Ομάδας 2 (Μ3,Μ4) προκειμένου να ελέγξουν την εικασία ότι τα σημεία τομής των Χ-γραμμών βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο των δύο απέναντι πλευρών του τετραγώνου, προβαίνει σε δύο μεθόδους επικύρωσης στο πεδίο της δίπλωσης και σε δύο στο GSP, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Ειδικότερα, η Μ3, έχοντας κάνει ήδη 4 επαναλήψεις των διπλώσεων, για να απορρίψει το ότι έτυχε να είναι τα σημεία συνευθειακά, προβαίνει σε μια ακόμα επανάληψη (σημείο από το τεχνούργημα-δίπλωση) (Εικ.6). Κατά αντιστοιχία, η ίδια ομάδα σχεδίασε στο GSP το ίχνος (σημείο από το τεχνούργημα- GSP) του σημείου τομής των Χ-γραμμών (Εικ.6). Η συνέργεια των εργαλειακών διαστάσεων των δύο πεδίων οδήγησε στην νοηματοδότηση του γεωμετρικού τόπου ως σύνολο από άπειρα σημεία με κοινή ιδιότητα. Άλλη μέθοδος επικύρωσης ήταν η παραγωγή μιας νέας τσάκισης (σημείο από το τεχνούργημα-

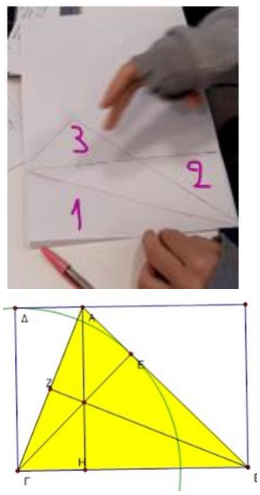
δίπλωση) κατά μήκος της ευθείας από την οποία διέρχονταν τα σημεία τομής, ώστε να ελεγχθεί το κατά πόσο η ευθεία αυτή (δηλ. η τσάκιση) είναι μεσοκάθετος. Αντίστοιχα, στο GSP ο Μ4 αναφέρει πως για να επιβεβαιώσουν ότι τα σημεία τομής των Χ-γραμμών είναι πάνω στην μεσοκάθετο (μαθηματικό σημείο) μπορούν να την κατασκευάσουν (σημείο από το τεχνούργημα-GSP) και έπειτα να ελέγξουν αν πράγματι τα σημεία τομής είναι σημεία της με την αξιοποίηση του συρσίματος (μεταβατικό σημείο-GSP). Η συνέργεια σε αυτή την περίπτωση οδήγησε στην αντίληψη του γεωμετρικού τόπου ως ολότητα, ως αντικειμένου δηλαδή που φέρει συγκεκριμένες ιδιότητες. Οι αλυσίδες νοημάτων που συντίθενται λόγω των συνδέσεων των μεθόδων επικύρωσης συμβάλλουν -πέρα από την ανάδειξη διαφορετικών πτυχών ενός μαθηματικού αντικειμένου- στην ισχυροποίηση των κατασκευαστικών και τελικά λογικών εξαρτήσεων των υποθέσεων με το συμπέρασμα.



Εικ.6 Σημεία τομής στο χαρτί και ίχνος στο GSP

Απόδειξη υποθετικής πρότασης

Η ανάδυση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ των σημείων που πραγματοποιήθηκε μέσω της συνέργειας του χειραπτικού και του ψηφιακού πεδίου και η αλυσιδωτή σύνδεση νοημάτων, φανέρωσε στις ομάδες τα απαραίτητα συστατικά της απόδειξης, τα οποία συνδυάστηκαν με γνωστές τους προτάσεις και θεωρήματα. Χαρακτηριστικά, οι μαθήτριες της Ομάδας 1 (Μ1, Μ2) στη Δρ. 2 προκειμένου να αποδείξουν ότι το τρίγωνο ΑΒΓ (Εικ. 7) είναι ισοσκελές, αξιοποιούν τις γεωμετρικές σχέσεις που ανακάλυψαν μέσω της συνέργειας. Σε προηγούμενη φάση οι μαθήτριες μέσα από τις ιδιότητες των διπλώσεων απέδειξαν με εμπειρικό τρόπο (ταύτιση) ότι τρία τρίγωνα είναι ίσα (Εικ.7), ενώ η αιτιολόγηση της ισότητας έλαβε μαθηματικό χαρακτήρα κατά τη μεταφορά στο ψηφιακό περιβάλλον. Η ισότητα των τριγώνων 1, 2 (Εικ.7) αιτιολογήθηκε με αξιοποίηση ιδιότητας των διαγωνίων ορθογωνίου και η ισότητα των 1,3 αιτιολογήθηκε μέσω της συμμετρίας η οποία εκφράστηκε στο GSP με αξιοποίηση του εργαλείου της ανάκλασης. Μέσω της λογικής σχέσης «αν α=β και β=γ τότε α=γ» αιτιολόγησαν την ισότητα των τριγώνων 2, 3 και τελικά την ισότητα των γωνιών ΑΓΒ και ΓΑΒ και ανακάλεσαν τη γνωστή



Εικ.7 Η κατασκευή στο χαρτί και στο GSP

τους πρόταση περί ισότητας των προσκείμενων γωνιών σε ισοσκελές τρίγωνο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε τη συμβολή της συνέργειας των δύο ΜΠΕ στην προοδευτική εξέλιξη της νοηματοδότησης της υποθετικής πρότασης, των συστατικών της στοιχείων (υποθέσεις, συμπέρασμα, λογικές συνδέσεις) και της απόδειξής της. Ειδικότερα, η οπτικό-απτική εμπειρία που προσέφερε η δίπλωση χαρτιού ενεργοποίησε την σημειωτική και εργαλειακή διάσταση αυτού του πεδίου με αποτέλεσμα την εμπειρική απόδοση μαθηματικού νοήματος στις τσακίσεις και την ανακάλυψη σχέσεων σχετικών κυρίως με τη συμμετρία (π.χ. ισότητες τμημάτων και γωνιών, παραλληλία). Το αίτημα αναπαράστασης της κατασκευής των τριών δραστηριοτήτων στο GSP οδήγησε τις ομάδες στην αναζήτηση κατάλληλων εντολών, ενώ στις Δρ. 2, 3 ήταν κρίσιμος ο δυναμικός χαρακτήρας του ψηφιακού περιβάλλοντος (σύρσιμο, ίχνος) για τη διερεύνηση των αντιφατικών αποτελεσμάτων και του γεωμετρικού τόπου. Οι σημειωτικές αλυσίδες που παρατηρήθηκαν σηματοδοτούν την εξέλιξη προσωπικών νοημάτων σε μαθηματικά και τελικά την αποκάλυψη των υποθέσεων και των λογικών συνδέσεων της υποθετικής πρότασης. Επιπλέον, ο εύκολος χειρισμός του χαρτιού και ο δυναμικός χαρακτήρας του GSP με τις άμεσες ανατροφοδοτήσεις τους βοήθησαν τις ομάδες να βρουν μεθόδους επικύρωσης των εικασιών τους. Οι συμπληρωματικότητα της εξέτασης μιας ακόμα περίπτωσης στο χαρτί με την ενεργοποίηση του ίχνους και η δίπλωση κατά μήκος του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου με την κατασκευή αυτού του αντικειμένου στο GSP στη Δρ. 3 οδήγησε σε σημειωτικές αλυσίδες που αναδεικνύουν το ρόλο της συνέργειας στην ισχυροποίηση των λογικών συνδέσεων και στην κατανόηση της γενίκευσης μιας πρότασης. Τέλος, τα νοήματα που αναδύθηκαν στα επεισόδια συνέργειας όσον αφορά στις υποθέσεις και στις λογικές συνδέσεις με τα συμπεράσματα, αξιοποιηθήκαν από τις ομάδες κατά την αποδεικτική διαδικασία. Οι πλούσιες νοηματοδοτήσεις των σημείων και οι λογικές εξαρτήσεις οδήγησαν στην επίκληση ποικιλίας προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με τις οποίες συνδυάστηκαν αποτελεσματικά δομώντας τις τελικές αποδείξεις, όπως στην αιτιολόγηση της ισότητας τριγώνων στη Δρ. 2. Συμπερασματικά, η έρευνα συνεισφέρει στην περιορισμένη μελέτη σχετικά με τη συμβολή της συνέργειας ενός

χειραπτικού και ενός ψηφιακού μέσου στην διερεύνηση εικασιών και στην νοηματοδότηση της υποθετικής πρότασης και της απόδειξής της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34(3)*, 66–72.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education, 746*.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères Irem*, *17*, 121-138.

Gürbüz, MÇ, Ağsu, M., & Güler, H. K. (2018). Investigating geometric habits of mind by using paper folding. *Acta Didactica Napocensia, 11(3–4)*, 157–174.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-I), 17-27.

Mariotti, M. A., & Montone, A. (2020). The potential synergy of digital and manipulative artefacts. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*, 109-122.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*, 135–156.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Sage.

Valori, G., Giacomone, B., Albanese, V., & Adamuz-Povedano, N. (2022). Approaching Euclidean proofs through explorations with manipulative and digital artifacts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-32.

Wiles, P. (2013). Folding corners of the habits of mind. *Mathematics Teaching in the middle school*, *19*(4), 208-213.

ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Δημήτριος Ιωάννης Καψίδης και Σοφία Χατζηλεοντιάδου

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

ikapsid@ee.duth.gr, schatzil@eled.duth.gr

Στην εργασία παρουσιάζεται μέρος μιας συστηματικής επισκόπησης άρθρων δημοσιευμένων σε περιοδικά μεταξύ 2021 και 2024 σχετικά με την αξιοποίηση της τεχνητής νοημοσύνης στη μαθηματική εκπαίδευση. Η συστηματική επισκόπηση ακολούθησε το πρωτόκολλο PRISMA. Ειδικότερα μέσα από ανάλυση του περιεχομένου 29 άρθρων που εντοπίστηκαν, αναδείχθηκε η κατανομή του ερευνητικού ενδιαφέροντος σε κατηγορίες τεχνητής νοημοσύνης, σε μαθηματικά πεδία και σε βαθμίδες εκπαίδευσης που υιοθετήθηκαν. Η εργασία συμβάλλει στην ενημερότητα για το πρόσφατο ερευνητικό έργο στην περιοχή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ιδιότητα του πολίτη, η μαθηματική εκπαίδευση και η Τεχνητή Νοημοσύνη (ΤΝ) αλληλοσυνδέονται στο πεδίο διαμόρφωσης των ικανοτήτων των ατόμων να συμμετέχουν ως ενημερωμένα και υπεύθυνα μέλη στην κοινωνία. Η εκπαίδευση στα μαθηματικά χρησιμεύει ως βάση για την κριτική σκέψη και τον αλφαβητισμό δεδομένων (data literacy), επιτρέποντας στους πολίτες να συμμετέχουν ουσιαστικά στις συζητήσεις που αφορούν τις ηθικές, κοινωνικές και πολιτικές επιπτώσεις της ΤΝ. Επιπλέον, η ΤΝ παρουσιάζει ευκαιρίες για την ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης μέσω εξατομικευμένων μαθησιακών εμπειριών και πραγματικών εφαρμογών, υπό την προϋπόθεση ότι οι ηθικοί παράγοντες παραμένουν κεντρικοί για την ενσωμάτωσή της στις εκπαιδευτικές πρακτικές.

Η ΤΝ αναφέρεται στο πεδίο της έρευνας για την ανάπτυξη υπολογιστικών συστημάτων τα οποία είναι ικανά να εκτελούν εργασίες που απαιτούν ανθρώπινη νοημοσύνη (Yang κ.ά., 2021), όπως η μάθηση, η λήψη απόφασης και η κατανόηση της φυσικής γλώσσας. Η τεχνητή νοημοσύνη περιλαμβάνει μια σειρά από τεχνολογίες μεταξύ των οποίων είναι η μηχανική μάθηση (machine learning), η επεξεργασία φυσικής γλώσσας (natural language processing), η ρομποτική (robotics) και η υπολογιστική όραση (computer vision). Η ΤΝ βρίσκει εφαρμογές σε πολλές περιοχές όπως στη μηχανική, στην ιατρική αλλά και στην εκπαίδευση. Η

αξιοποίηση της ΤΝ στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης ειδικότερα αναπτύσσεται σημαντικά τα τελευταία χρόνια.

Οι Zawacki-Richter κ.ά. (2019) ανέδειξαν μέσα από μια συστηματική επισκόπηση τέσσερεις ρόλους της ΤΝ γενικότερα στην τριτοβάθμια εκπαίδευση: α) δημιουργία του μοντέλου του εκπαιδευόμενου (learner profile) και πρόβλεψη (prediction), β) ανάπτυξη έξυπνων συστημάτων διδασκαλίας (intelligent tutoring systems) γ) αξιολόγηση και εκτίμηση (assessment and evaluation) και δ) ανάπτυξη προσαρμοστικών συστημάτων (adaptive systems) και εξατομίκευση (personalization). Οι Hwang και Tu (2021) εκπόνησαν μια συστηματική επισκόπηση του ερευνητικού έργου σχετικά με την αξιοποίηση της ΤΝ στη μαθηματική εκπαίδευση το οποίο δημοσιεύτηκε μέχρι 31 Δεκεμβρίου 2020. Η επισκόπηση απέφερε 43 άρθρα δημοσιευμένων σε επιστημονικά περιοδικά, για δε την ανάλυσή τους αξιοποιήθηκε η ταξινομία των Zawacki-Richter κ.ά. (2019) η οποία συμπληρώθηκε με την εισαγωγή ενός επιπλέον επιπέδου ταξινόμησης (π.χ., συναισθημάτων, στάσεων και δεξιοτήτων των εκπαιδευόμενων). Οι Mohamed κ.ά. (2022) έκαναν συστηματική επισκόπηση στην ίδια περιοχή, η οποία απέφερε 20 άρθρα τα οποία δημοσιεύτηκαν σε επιστημονικά περιοδικά κατά διάστημα 2017-2021. Καθώς η ταξινομία των Zawacki-Richter κ.ά. (2019) αφενός εστιάζει στην αξιοποίηση της ΤΝ γενικότερα στην εκπαίδευση και αφετέρου περιλαμβάνει περιορισμούς που προκύπτουν από την αλληλοεπικάλυψη μερικών κατηγοριών, η ταξινομία των Van Vaerenbergh και Pérez-Suay (2022) είναι πιο προσαρμοσμένη στην περιοχή της μαθηματικής εκπαίδευσης καθώς εστιάζει στην αξιοποίηση της ΤΝ από αυτήν την οπτική. Ειδικότερα οι Van Vaerenbergh και Pérez-Suay (2022) πρότειναν τέσσερεις κατηγορίες ταξινόμησης συστημάτων ΤΝ τα οποία αξιοποιούνται στη μαθηματική εκπαίδευση: α) *μοντελοποίηση βάσει δεδομένων* (data driven modeling), β) σύστημα επεξήγησης (explainer system) γ) *εξόρυξη πληροφορίας* (information extraction), και δ) *μηχανή συλλογιστικής* (reasoning engine). Επιπλέον σχολιάζουν τα *έξυπνα συστήματα διδασκαλίας* (intelligent tutoring systems) ως συστήματα τα οποία περιλαμβάνουν κατά περίπτωση υλοποιήσεις ΤΝ που εμπίπτουν σε μία ή περισσότερες από τις παραπάνω κατηγορίες.

Οι συστηματικές επισκοπήσεις που έχουν ανιχνευτεί στην περιοχή αφορούν σε δημοσιευμένο έργο μέχρι το 2021. Η περαιτέρω συστηματική επισκόπηση του ερευνητικού ενδιαφέροντος αναφορικά με την αξιοποίηση της ΤΝ στην περιοχή της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί

το αντικείμενο μιας ερευνητικής προσπάθειας η οποία είναι σε εξέλιξη. Μέρος αυτής της προσπάθειας παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία η οποία επιχειρεί να απαντήσει στο ερώτημα:

Πώς κατανέμεται το ερευνητικό ενδιαφέρον στην περιοχή αξιοποίησης της ΤΝ στη μαθηματική εκπαίδευση κατά το διάστημα Ιανουάριος 2021 έως και Ιανουάριος 2024;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για τη διεξαγωγή της συστηματικής επισκόπησης αξιοποιήθηκε το πρωτόκολλο PRISMA (Page κ.ά., 2021). Ακολούθως περιγράφονται οι σχετικές ενέργειες που ακολουθήθηκαν.

Προετοιμασία της διαδικασίας αναζήτησης εμπειρικών ερευνών

Επιλογή κριτηρίων συμπερίληψης ενός άρθρου στη συστηματική επισκόπηση. Το άρθρο έπρεπε αποκλειστικά να αφορά σε εμπειρική έρευνα, γραμμένη στην αγγλική γλώσσα, δημοσιευμένη σε περιοδικό με κριτές, στο διάστημα 1/1/ 2021-31/01/2024, με περιεχόμενο σχετικά με την αξιοποίηση της ΤΝ στη μαθηματική εκπαίδευση.

Επιλογή τόπων αναζήτησης. Οι βάσεις στις οποίες έγινε αναζήτηση ήταν: Scopus, Springer Link, IEEE Xplore και ProQuest.

Λέξεις-κλειδιά. Για τον εντοπισμό των άρθρων στις περιοχές ΤΝ και μαθηματική εκπαίδευση χρησιμοποιήθηκαν οι όροι (“artificial intelligence” OR “machine intelligence” OR “intelligent support” OR “intelligent virtual reality” OR “chat bot*” OR “machine learning” OR “automated tutor*” OR “personal tutor*” OR “intelligent agent*” OR “expert system*” OR “neural network*” OR “natural language processing” OR “chatbot*” OR “intelligent system” OR “intelligent tutor*”) AND (“mathematics” OR “math” OR “statistics” OR “calculus” OR “algebra”) σε συνδυασμό με φίλτρα που αφορούσαν στα κριτήρια συμπερίληψης.

Διεξαγωγή της διαδικασίας αναζήτησης εμπειρικών ερευνών

Η αναζήτηση των άρθρων έγινε μεταξύ 10 και 31 Ιανουαρίου 2024 σύμφωνα με τα παρακάτω βήματα του πρωτοκόλλου PRISMA.

Εντοπισμός άρθρων. Αρχικά έγινε αναζήτηση στους υπόψη τόπους, με βάση τα κριτήρια και τις λέξεις κλειδιά που ορίστηκαν. Εντοπίστηκαν 446 έρευνες στους τίτλους και περιλήψεις των οποίων ανιχνεύτηκαν οι λέξεις κλειδιά.

Διαλογή άρθρων. Από τα 446 άρθρα αφαιρέθηκαν 44 τα οποία εντοπίστηκαν ως διπλότυπα και 5 άρθρα τα οποία ήταν επισημασμένα ως αποσυρθέντα για διάφορους λόγους. Από τα 397 άρθρα που έμειναν διαβάστηκαν οι περιλήψεις και εξαιρέθηκαν 316 άρθρα διότι δεν πληρούσαν αποκλειστικά όλα τα κριτήρια συμπερίληψης. Από τα 81

άρθρα που έμειναν, ανακτήθηκαν τα 80 και μελετήθηκε το πλήρες κείμενό τους.

Άρθρα που συμπεριλήφθηκαν. Τελικά συμπεριλήφθηκαν 29 άρθρα τα οποία στο σύνολό τους πληρούσαν όλα τα κριτήρια επιλεξιμότητας (Παράρτημα).

Κωδικοποίηση των δεδομένων

Προκειμένου να διερευνηθεί η διασπορά του ερευνητικού ενδιαφέροντος στο πεδίο της αξιοποίησης της ΤΝ στη μαθηματική εκπαίδευση κατά το υπόψη χρονικό διάστημα, έγινε αρχικά ποσοτική ανάλυση του περιεχομένου των 29 άρθρων ως προς τους παρακάτω άξονες:

Τεχνητή νοημοσύνη. Αξιοποιήθηκε η ταξινομία των τεσσάρων κατηγοριών των Van Vaerenbergh και Pérez-Suay (2022), καθώς και τα *Έξυπνα συστήματα διδασκαλίας* ως διακριτή σύνθετη κατηγορία.

Θεματικά πεδία των μαθηματικών. Αξιοποιήθηκαν τα θεματικά πεδία των μαθηματικών όπως αυτά παρουσιάζονται στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (ΙΕΠ, 2021) και ειδικότερα: *Πεδίο 1: Αριθμός, άλγεβρα και ανάλυση*, *Πεδίο 2: Γεωμετρία, μέτρηση και αναλυτική γεωμετρία* και *Πεδίο 3: Στοχαστικά μαθηματικά*, στην περίπτωση των άρθρων στα οποία γινόταν ρητή αναφορά στο περιεχόμενο των πεδίων αυτών. Επιπλέον, ορίστηκαν τ0 *Πεδίο 4: Μη καθορισμένο* και το *Πεδίο 5: Μίξη Πεδίων*, για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το άρθρο αναφερόταν γενικά στα μαθηματικά (π.χ., *mathematics math, maths*), ή σε μαθηματικά πεδία περισσότερα του ενός, αντίστοιχα.

Πληθυσμοί αναφοράς. Ως πληθυσμοί αναφοράς αξιοποιήθηκαν ο εκπαιδευτικές βαθμίδες με γενικούς όρους που ισχύουν στο ελληνικό και διεθνές εκπαιδευτικό σύστημα: *Προσχολική* (pre-school), *Πρωτοβάθμια* (primary), *Δευτεροβάθμια* (secondary, περιλαμβάνει τους όρους junior και senior high school) και *Τριτοβάθμια* (περιλαμβάνει τους όρους tertiary, higher education). Επιπλέον, θεωρήθηκαν ως ενιαίος πληθυσμός *Εκπαιδευτικοί*, οι εκπαιδευόμενοι (pre-service) και εν ενεργεία (in-service) εκπαιδευτικοί. Η κατηγορία *Μίξη βαθμίδων* αξιοποιήθηκε στις περιπτώσεις όπου το κοινό της έρευνας αποτελείται από μέλη περισσότερων του ενός πληθυσμού αναφοράς ή δεν αναφέρεται ρητά ο πληθυσμός αναφοράς και τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να εφαρμοστούν σε περισσότερες από μια εκπαιδευτικές βαθμίδες (Hwang & Tu, 2021). Επίσης, υιοθετήθηκε το *chatbot* ως πληθυσμός αναφοράς για την άντληση πληροφορίας.

Από τη θεματική ανάλυση ευρημάτων ως προς τους παραπάνω άξονες προέκυψαν θέματα γύρω από τα οποία οργανώνεται το ερευνητικό ενδιαφέρον στην περιοχή.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τη διασπορά των 29 άρθρων ανά κατηγορίες της ΤΝ, πληθυσμό αναφοράς και θεματικό πεδίο των μαθηματικών.

Πίνακας 1. Διασπορά των άρθρων ανά κατηγορίες της ΤΝ, πληθυσμό αναφοράς και θεματικό πεδίο των μαθηματικών

Κατηγορίες της ΤΝ	Πληθυσμοί αναφοράς	Θεματικά πεδία των μαθηματικών					Γενικό σύνολο
		Πεδίο 1	Πεδίο 2	Πεδίο 3	Πεδίο 4	Πεδίο 5	
Μοντελοποίηση βάσει δεδομένων	Προσχολική		(Gui & Suh, 2022)				1
	Πρωτοβάθμια				(Aksu κ.ά., 2022)		1
	Δευτεροβάθμια	(Mills, 2021)			Botelho κ.ά., 2023), (Spitzer & Moeller, 2023), (Wang κ.ά., 2022)		4
	Τριτοβάθμια	(Anwar & Rani, 2021)		(Wu, 2021)	(Mushi & Ngondya, 2021)	(Ahmed κ.ά., 2022), (Dai κ.ά., 2023)	5
	Εκπαιδευτικοί	(Lee & Yeo, 2022)			(Dobie & Sherin, 2021), (Zheng, 2022)		3
	Μίξη βαθμίδων				(Spitzer & Moeller, 2024)		1
Σύνολο		**3**	**1**	**1**	**8**	**2**	**15**
Σύστημα επεξήγησης	Chatbot			(Einarsson κ.ά., 2024)			1
	Μίξη βαθμίδων				(Wardat κ.ά., 2023)		1
Σύνολο				**1**	**1**		**2**
Εξόρυξη πληροφορίας	Δευτεροβάθμια			(Boels, 2023)			1
	Εκπαιδευτικοί				(King κ.ά., 2022)		1
Σύνολο				**1**	**1**		**2**
Μηχανή συλλογιστικής	Chatbot	(Mandal & Naskar, 2021) (Zhang κ.ά., 2022)			(Arnau-González κ.ά., 2023)	(Calonge κ.ά., 2023)	4
Σύνολο		**2**			**1**	**1**	**4**
Έξυπνα συστήματα διδασκαλίας	Πρωτοβάθμια	del Olmo-Muñoz κ.ά., 2022), (Mavrikis κ.ά., 2022)				(Johnson κ.ά., 2022)	3
	Τριτοβάθμια	(VanLehn κ.ά., 2023)		(Tacoma κ.ά., 2021)			2
	Μίξη βαθμίδων				(Jančařík κ.ά., 2023),		1
Σύνολο		**3**		**1**	**2**	**1**	**6**
Γενικό σύνολο		**8**	**1**	**4**	**13**	**4**	**29**

Από τον Πίνακα 1 διαπιστώνεται ότι αναφορικά με τις κατηγορίες της ΤΝ, η κατηγορία *Μοντελοποίηση βάσει δεδομένων* συγκεντρώνει τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, με τα μισά άρθρα (15/29) να ταξινομούνται σε αυτήν, ενώ περίπου το ένα τέταρτο των άρθρων (6/29) εμπίπτουν στην επόμενη σε συχνότητα κατηγορία των *Έξυπνων συστημάτων διδασκαλίας*. Το θεματικό πεδίο των μαθηματικών με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης ήταν το *Πεδίο 4: Μη καθορισμένο* (13/29), ενώ τη μικρότερη συχνότητα εμφάνισης παρουσίασε το *Πεδίο 2: Γεωμετρία, μέτρηση και αναλυτική γεωμετρία* (1/29). Τέλος, όσο αφορά στον πληθυσμό αναφοράς, η *τριτοβάθμια* συγκεντρώνει τη μεγαλύτερη συχνότητα (7/29) ακολουθούμενη από τις κατηγορίες *Πρωτοβάθμια, Δευτεροβάθμια και Μίξη βαθμίδων* με την ίδια συχνότητα (5/29), *Εκπαιδευτικοί* (4/29), *Chatbot* (2) και τέλος *Προσχολική* (1/29).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην ταξινόμηση του ερευνητικού ενδιαφέροντος στην περιοχή αξιοποίησης της ΤΝ στη μαθηματική εκπαίδευση με βάση κριτήρια που τέθηκαν.

Η κατηγορία της *Μοντελοποίησης βάσει δεδομένων* φαίνεται πως συγκεντρώνει σημαντικό ερευνητικό ενδιαφέρον (15/29). Κατά κανόνα η μοντελοποίηση γίνεται με χρήση αλγορίθμων μηχανικής μάθησης με βάση εμπειρικά δεδομένα, για την εξαγωγή συμπερασμάτων γύρω από θέματα σχετικά με: α) την *επίδοση* στα μαθηματικά όπως, η ανίχνευση παραγόντων που επηρεάζουν την επίδοση στα τεστ PISA (Aksu κ.ά., 2022), η επίδραση της επίδοσης στα μαθηματικά σε άλλα γνωστικά αντικείμενα (Anwar & Rani, 2021), β) την *αξιολόγηση της επίδοσης* στα μαθηματικά μετά από κάποια διδακτική παρέμβαση (Gui & Suh, 2022) ή κατά την κατεπείγουσα εξ αποστάσεως διδασκαλία (Spitzer & Moeller, 2023;2024) ή με βάση τις απαντήσεις τους σε ερωτήσεις ανοικτού τύπου (Botelho κ.ά., 2023), γ) την *πρόβλεψη της επίδοσης* στα μαθηματικά (Ahmed κ.ά., 2022; Mills, 2021; Mushi & Ngondya, 2021) ώστε να γίνουν εγκαίρως παρεμβάσεις για την επιτυχή ολοκλήρωση των σπουδών (Mills, 2021), δ) τη διερεύνηση *συμπεριφορών* των μαθητών (Dai κ.ά., 2023;Wu, 2021), ε) την πρακτική άσκηση δεξιοτήτων (Lee & Yeo, 2022; Wang κ.ά., 2022), και στ) την ανάδειξη μοτίβων στον τρόπο *χρήσης ορολογίας* από την εκπαιδευτική και ερευνητική κοινότητα στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Dobie & Sherin, 2021) με κατάλληλη αξιοποίηση και τεχνικών επεξεργασίας της φυσικής γλώσσας. Οι περισσότερες έρευνες οι οποίες ταξινομήθηκαν σε αυτήν την κατηγορία της ΤΝ εστιάζουν στην τριτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Φαίνεται ότι στην τριτοβάθμια υπάρχει μεγαλύτερη ανάγκη για πρόβλεψη και αξιολόγηση

της επίδοσης γιατί αυτό σχετίζεται με τα ποσοστά εγκατάλειψης και αποτυχίας των φοιτητών να ολοκληρώσουν τις σπουδές τους, το οποίο έχει να κάνει τόσο με τη φήμη του ιδρύματος όσο και με πιο πρακτικά προβλήματα όπως η χρηματοδότησή του. Από την άλλη μεριά, στη δευτεροβάθμια υπάρχει ενδιαφέρον γιατί θα πρέπει να έχουν προετοιμαστεί οι μαθητές ώστε να μπορούν να ανταπεξέλθουν τόσο στις απαιτήσεις κατά την έξοδό τους στη κοινωνία ως πολίτες όσο και κατά την προσπάθειά τους να εγγραφούν και να ολοκληρώσουν επιτυχώς ένα πρόγραμμα σπουδών της τριτοβάθμιας.

Η κατηγορία *Σύστημα επεξήγησης* παρουσιάζει μικρή συχνότητα εμφάνισης (2/29). Στις δύο εργασίες που εντοπίστηκαν γίνεται χρήση chatbot και ειδικά αξιολόγηση του ChatGPT ως προς την ικανότητά του: α) να λύσει βήμα προς βήμα κάποια προβλήματα άλγεβρας και γεωμετρίας ώστε να διαπιστωθεί αν μπορεί στη συνέχεια να αξιοποιηθεί και ως εργαλείο διδασκαλίας ή ανατροφοδότησης (Wardat κ.ά., 2023) και β) να αναδιατυπώσει μαθηματικά προβλήματα στατιστικής, που είναι κοινά σε περισσότερα επιστημονικά πεδία τα οποία αξιοποιούν τη στατιστική, ώστε να ταιριάζει η εκφώνηση των προβλημάτων με το αντίστοιχο πλαίσιο στο οποίο αυτό χρησιμοποιείται. Στην κατηγορία αυτή ελέγχεται η διδακτική επάρκεια του chatbot ως εκδοχής της ΤΝ ώστε να ενταχθεί σε μαθησιακό/διδακτικό πλαίσιο.

Στην κατηγορία *Εξόρυξη πληροφορίας* εντοπίστηκαν δύο άρθρα (2/29) τα οποία εστιάζουν στην εξαγωγή πληροφοριών με βάση τη συγκέντρωση και ανάλυση δεδομένων που συλλέγονται: α) από ανιχνευτή βλέμματος ώστε να εντοπιστεί πότε ένας μαθητής χρησιμοποιεί σωστή τεχνική στην εξαγωγή συμπερασμάτων από γραφήματα στατιστικών αναλύσεων (Boels, 2023) και β) από αισθητήρες ώστε να αξιολογηθεί η ανάπτυξη συγκεκριμένης δεξιότητας μέσα σε ένα εικονικό τρισδιάστατο περιβάλλον (King κ.ά., 2022). Ο τελικός σκοπός και των δύο ερευνών είναι η ανάπτυξη ενός εργαλείου για την αξιολόγηση της επίδοσης και την ανατροφοδότηση των μαθητών στα μαθηματικά.

Η κατηγορία *Μηχανή συλλογιστικής* αφορά σε τεχνικές και εργαλεία τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα την αυτόματη απόδειξη θεωρημάτων ή την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων χωρίς να είναι εξηγήσιμη η διαδικασία η οποία ακολουθήθηκε. Μια σημαντική διάσταση αυτής της κατηγορίας για τη μαθηματική εκπαίδευση είναι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που διατυπώνονται με λόγο (Math Word Problems, MWP) η οποία υλοποιείται με τη χρήση αλγορίθμων επεξεργασίας φυσικής

γλώσσας. Σε αυτήν την περίπτωση, το υποκείμενο της έρευνας δεν είναι οι μαθητές αλλά τα ίδια τα chatbot τα οποία υποβάλλονται σε μια σειρά από δοκιμασίες προκειμένου να αξιολογηθεί η ποιότητα των απαντήσεών τους. Σε αυτήν την κατηγορία, εντοπίστηκαν τέσσερεις εργασίες (4/29), εκ των οποίων: α) τρεις (Arnau-González κ.ά., 2023; Mandal & Naskar, 2021; Zhang κ.ά., 2022), αφορούν σε συστήματα επίλυσης MWP για το ίδιο το chatbot, ενώ μια εργασία (Calonge κ.ά., 2023) συγκρίνει διαφορετικά chatbots σε σχέση με τη δυνατότητα ορθής επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

Έξι εργασίες (6/29) αφορούν τον σχεδιασμό ή τη βελτίωση επιμέρους χαρακτηριστικών *Έξυπνων συστημάτων διδασκαλίας*. Τα συστήματα αυτά κατά περίπτωση επιτελούν σύνθετες λειτουργίες όπως *Μοντελοποίηση βάσει δεδομένων* και *Εξόρυξη πληροφορίας* από τα δεδομένα που συλλέγουν από τη διάδραση του εκπαιδευόμενου με το περιβάλλον της εφαρμογής και επιπλέον λειτουργούν ως *Συστήματα επεξήγησης* και ως *Μηχανές συλλογιστικής* για την αξιολόγηση και την ανατροφοδότηση του μαθητή, αντίστοιχα. Ειδικότερα, οι προτάσεις των ερευνών που εντοπίστηκαν σχετικά με *Έξυπνα συστήματα διδασκαλίας* αφορούν σε στοιχεία: α) του σχεδιασμού τους όπως, ο συνδυασμός ανοιχτών διερευνητικών περιβαλλόντων με δομημένα περιβάλλοντα για την καλλιέργεια εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης (Mavrikis κ.ά., 2022), η βήμα προς βήμα καλλιέργεια μιας δεξιότητας (VanLehn κ.ά., 2023), η χρήση chatbot ως διδάσκοντα (Jančařík κ.ά., 2023), η δυνατότητα προσωποποίησης της διαδρομής μέσα στο ίδιο το σύστημα ανάλογα με τον τρόπο χρήσης και τις απαντήσεις του εκπαιδευόμενου κατά την εξάσκησή του στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων (Jančařík κ.ά., 2023), και β) της αξιολόγησης ή/και βελτίωσής τους με βάση ημι-πειραματικές προσεγγίσεις χρήσης τους, όπως η βελτίωση της ανατροφοδότησης σε σχέση με τη θέση της στην εκπαιδευτική διαδικασία (Tacoma κ.ά., 2021), η βελτίωση του τρόπου επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (del Olmo-Muñoz κ.ά., 2022) και η συμβολή πολιτισμικών στοιχείων στο μαθησιακό πλαίσιο (Johnson κ.ά., 2022).

Η παρούσα συστηματική επισκόπηση, απαντώντας στο ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε, ανέδειξε την κατανομή του ερευνητικού ενδιαφέροντος στην περιοχή αξιοποίησης της ΤΝ στη μαθηματική εκπαίδευση. Τα κριτήρια επιλεξιμότητας των άρθρων οριοθέτησαν το εύρος της επισκόπησης. Η εργασία συμβάλλει στην ενημερότητα σχετικά με τις πρόσφατες ερευνητικές προσπάθειες αξιοποίησης της ΤΝ στη μαθηματική εκπαίδευση. Μένει ωστόσο, μεταξύ άλλων, ως ανοικτό θέμα

προς μελλοντική διερεύνηση η σύνδεση των προσπαθειών αυτών με την ιδιότητα του πολίτη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΙΕΠ (2021*). Νέα αναλυτικά προγράμματα* Νέα ΠΣ - Προβολή - Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (iep.edu.gr)

Hwang, G.-J., & Tu, Y.-F. (2021). Roles and Research Trends of Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Bibliometric Mapping Analysis and Systematic Review. *Mathematics*, *9*(6), Article 6. https://doi.org/10.3390/math9060584

Mohamed, M. Z. B., Hidayat, R., Suhaizi, N. N. B., Sabri, N. B. M., Mahmud, M. K. H. B., & Baharuddin, S. N. B. (2022). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *17*(3), Article 3. https://doi.org/10.29333/iejme/12132

Page, M. J., Moher, D., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., Shamseer, L., Tetzlaff, J. M., Akl, E. A., Brennan, S. E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J. M., Hróbjartsson, A., Lalu, M. M., Li, T., Loder, E. W., Mayo-Wilson, E., McDonald, S., … McKenzie, J. E. (2021). *PRISMA 2020 explanation and elaboration: Updated guidance and exemplars for reporting systematic reviews*. BMJ, n160. https://doi.org/10.1136/bmj.n160

Van Vaerenbergh, S., & Pérez-Suay, A. (2022). A classification of artificial intelligence systems for mathematics education. In *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning* (pp. 89-106). Cham: Springer International Publishing.

Yang, J.H., Ogata, H., Matsui, T., & Chen, N.S. (2021). Human-centered artificial intelligence in education: Seeing the invisible through the visible. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 2, 100008. https://doi.org/10.1016/j.caeai.2021.100008

Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M., & Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education – where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *16*(1), 39. https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ahmed, A. A. M., Deo, R. C., Ghimire, S., Downs, N. J., Devi, A., Barua, P. D., & Yaseen, Z. M. (2022). Introductory Engineering Mathematics Students' Weighted Score Predictions Utilising a Novel Multivariate

Adaptive Regression Spline Model. *Sustainability (Switzerland)*, *14*(17), Article 17. Scopus. https://doi.org/10.3390/su141711070

Aksu, N., Aksu, G., & Saracaloğlu, S. (2022). Prediction of the Factors Affecting PISA Mathematics Literacy of Students from Different Countries by Using Data Mining Methods. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *14*(5), Article 5. Scopus. https://doi.org/10.26822/iejee.2022.267

Anwar, M., & Rani, R. (2021). A machine learning approach to identify impact of mathematical courses performance in engineering degree program. *IBIMA Business Review*, *2021*. Scopus. https://doi.org/10.5171/2021.750757

Arnau-González, P., Serrano-Mamolar, A., Katsigiannis, S., Althobaiti, T., & Arevalillo-Herráez, M. (2023). Toward Automatic Tutoring of Math Word Problems in Intelligent Tutoring Systems. *IEEE Access*, *11*, 67030–67039. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3290478

Boels, L. (2023). Reflections on gaze data in statistics education. *Teaching Statistics*, *45*(S1), Article S1. Scopus. https://doi.org/10.1111/test.12340

Botelho, A., Baral, S., Erickson, J. A., Benachamardi, P., & Heffernan, N. T. (2023). Leveraging natural language processing to support automated assessment and feedback for student open responses in mathematics. *Journal of Computer Assisted Learning*, *39*(3), Article 3. https://doi.org/10.1111/jcal.12793

Calonge, D. S., Smail, L., & Kamalov, F. (2023). Enough of the chit-chat: A comparative analysis of four AI chatbots for calculus and statistics. *Journal of Applied Learning and Teaching*, *6*(2), Article 2. Scopus. https://doi.org/10.37074/jalt.2023.6.2.22

Dai, C.-P., Ke, F., Pan, Y., & Liu, Y. (2023). Exploring students' learning support use in digital game-based math learning: A mixed-methods approach using machine learning and multi-cases study. *Computers and Education*, *194*, 104698. Scopus. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104698

del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D., & Arevalillo-Herráez, M. (2022). Using intra-task flexibility on an intelligent tutoring system to promote arithmetic problem-solving proficiency. *British Journal of Educational Technology*, *53*(6), Article 6. Scopus. https://doi.org/10.1111/bjet.13228

Dobie, T. E., & Sherin, B. (2021). The language of mathematics teaching: A text mining approach to explore the zeitgeist of US mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), Article 1. Scopus. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10019-8

Einarsson, H., Lund, S. H., & Jónsdóttir, A. H. (2024). Application of ChatGPT for automated problem reframing across academic domains.

Computers and Education: Artificial Intelligence, *6*, 100194. Scopus. https://doi.org/10.1016/j.caeai.2023.100194

Gui, J., & Suh, J. (2022). Analysis of Graphic Perception Education for Young Children Based on Fuzzy Clustering Analysis. *Computational Intelligence and Neuroscience : CIN*, *2022*. Publicly Available Content Database. https://doi.org/10.1155/2022/8046713

Jančařík, A., Michal, J., & Novotná, J. (2023). Using AI Chatbot for Math Tutoring. *Journal of Education Culture and Society*, *14*(2), Article 2. Scopus. https://doi.org/10.15503/jecs2023.2.285.296

Johnson, J. D., Smail, L., Corey, D., & Jarrah, A. M. (2022). Using Bayesian Networks to Provide Educational Implications: Mobile Learning and Ethnomathematics to Improve Sustainability in Mathematics Education. *Sustainability*, *14*(10), Article 10. Publicly Available Content Database. https://doi.org/10.3390/su14105897

King, S., Estapa, A., Bell, T., & Boyer, J. (2022). Behavioral Skills Training Through Smart Virtual Reality: Demonstration of Feasibility for a Verbal Mathematical Questioning Strategy. *Journal of Behavioral Education*. Scopus. https://doi.org/10.1007/s10864-022-09492-3

Lee, D., & Yeo, S. (2022). Developing an AI-based chatbot for practicing responsive teaching in mathematics. *Computers and Education*, *191*. Scopus. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104646

Mandal, S., & Naskar, S. K. (2021). Classifying and Solving Arithmetic Math Word Problems—An Intelligent Math Solver. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, *14*(1), Article 1. Scopus. https://doi.org/10.1109/TLT.2021.3057805

Mavrikis, M., Rummel, N., Wiedmann, M., Loibl, K., & Holmes, W. (2022). Combining exploratory learning with structured practice educational technologies to foster both conceptual and procedural fractions knowledge. *Educational Technology Research and Development*, *70*(3), Article 3. Scopus. https://doi.org/10.1007/s11423-022-10104-0

Mills, N. J. D. (2021). ALEKS constructs as predictors of high school mathematics achievement for struggling students. *Heliyon*, *7*(6), Article 6. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e07345

Mushi, P. K., & Ngondya, D. (2021). Prediction of mathematics performance using educational data mining techniques. *International Journal of Advanced Computer Research*, *11*(56), Article 56. Publicly Available Content Database. https://doi.org/10.19101/IJACR.2021.1152024

Spitzer, M. W. H., & Moeller, K. (2023). Performance increases in mathematics during COVID-19 pandemic distance learning in Austria: Evidence from an intelligent tutoring system for mathematics. *Trends in*

Neuroscience and Education, *31*. Scopus. https://doi.org/10.1016/j.tine.2023.100203

Spitzer, M. W. H., & Moeller, K. (2024). Performance Increases in Mathematics in K-12 Intelligent Tutoring during Covid-19 Related School Closures. *Computers and Education Open*, 100162. https://doi.org/10.1016/j.caeo.2024.100162

Tacoma, S., Drijvers, P., & Jeuring, J. (2021). Combined inner and outer loop feedback in an intelligent tutoring system for statistics in higher education. *Journal of Computer Assisted Learning*, *37*(2), Article 2. Scopus. https://doi.org/10.1111/jcal.12491

VanLehn, K., Milner, F., Banerjee, C., & Wetzel, J. (2023). A Step-Based Tutoring System to Teach Underachieving Students How to Construct Algebraic Models. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*. Scopus. https://doi.org/10.1007/s40593-023-00328-3

Wang, G., Chen, X., Zhang, D., Kang, Y., Wang, F., & Su, M. (2022). Development and Application of an Intelligent Assessment System for Mathematics Learning Strategy among High School Students—Take Jianzha County as an Example. *Sustainability*, *14*(19), Article 19. Coronavirus Research Database; Publicly Available Content Database. https://doi.org/10.3390/su141912265

Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., & Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(7), Article 7. Scopus. https://doi.org/10.29333/ejmste/13272

Wu, J.-Y. (2021). Learning analytics on structured and unstructured heterogeneous data sources: Perspectives from procrastination, help-seeking, and machine-learning defined cognitive engagement. *Computers and Education*, *163*. Scopus. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.104066

Zhang,Y., Zhou, G., Xie, Z., & Huang., J. X. (2022). HGEN: Learning Hierarchical Heterogeneous Graph Encoding for Math Word Problem Solving. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, *30*, 816–828. https://doi.org/10.1109/TASLP.2022.3145314

Zheng, Y. (2022). Research on Mathematics Classroom Teaching Optimization Model Based on GA Neural Network. *Mathematical Problems in Engineering*, *2022*. Publicly Available Content Database. https://doi.org/10.1155/2022/5414306

Θεματική Ενότητα 5: Προγράμματα Σπουδών για τα μαθηματικά: σύγχρονες προσεγγίσεις

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ

Έλενα Χατζηγεωργίου & Κωνσταντίνος Χρίστου

Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστήμων της Αγωγής

hadjigeorgiou.eleni@ucy.ac.cy; edchrist@ucy.ac.cy

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού μοντέλου για τη χρήση του εγχειριδίου των μαθηματικών από μαθητές, με βάση τη θεωρία της εργονομικής προσέγγισης (instrumental approach). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το προτεινόμενο μοντέλο αποτελεί ένα κατάλληλο εργαλείο περιγραφής της δομής του τρόπου χρήσης του εγχειριδίου (ως τεχνούργημα) από μαθητές για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Με βάση το μοντέλο, η χρήση του εγχειριδίου αποτελεί σύνθεση έξι παραγόντων που σχετίζονται με τα σχήματα χρήσης (usage schemes) του εγχειριδίου και την κατάλληλη αξιοποίησή τους μέσω της ανάπτυξης σχημάτων ενοργανοποιημένης δράσης (instrumented action schemes).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το εγχειρίδιο των μαθηματικών είναι ανάμεσα στους κυριότερους παράγοντες που επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα των Προγραμμάτων Σπουδών της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Το ζητούμενο, ωστόσο, είναι ο τρόπος χρήσης του από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές εντός των τάξεων (Zhu & Fan, 2006). Στην πλειοψηφία τους οι έρευνες ασχολήθηκαν με την κοινωνικο-ιδεολογική λειτουργία που επιτελούν τα εγχειρίδια (Brantlinger, 2011), ενώ ελάχιστες ασχολήθηκαν με τη διδακτική και μαθησιακή λειτουργία τους (Zhu & Fan, 2006). Για αυτό δεν έχει αναπτυχθεί ένα ολοκληρωμένο θεωρητικό μοντέλο που να περιγράφει τη χρήση τους από εκπαιδευτικούς και μαθητές εντός των τάξεων. Επιπρόσθετα, η ανάλυση του περιεχομένου του εγχειριδίου φαίνεται να μην αποτελεί εργαλείο μεθοδολογικής προσέγγισης για τους ερευνητές που μελετούν τον τρόπο χρήσης των εγχειριδίων, με αποτέλεσμα να μην προσεγγίζεται ερευνητικά η χρήση του εγχειριδίου σε σχέση με τη φύση του. Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου θεωρητικού μοντέλου για τη χρήση του εγχειριδίου των μαθηματικών από μαθητές, με βάση τη θεωρίας της εργονομικής προσέγγισης (instrumental approach) (Rebardel, 1995; Trouche, 2004). Ειδικότερα, οι στόχοι της έρευνας ήταν: (α) η ανάλυση του περιεχομένου του εγχειριδίου των μαθηματικών της Β΄ Λυκείου προσανατολισμού (ενότητα συναρτήσεις) σε

σχέση με τα σχήματα αξιοποίησής του (utilization schemes), (β) η περιγραφή των αντιλήψεων των μαθητών για τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν οι ίδιοι το εγχειρίδιο (ως τεχνούργημα μάθησης) και οι εκπαιδευτικοί τους (ως τεχνούργημα διδασκαλίας) και (γ) ο εντοπισμός των παραγόντων που συνθέτουν τις αντιλήψεις των μαθητών για τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν οι ίδιοι και οι εκπαιδευτικοί τους το εγχειρίδιο και η εξέταση τυχόν σχέσεων μεταξύ τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Το Σχολικό Εγχειρίδιο

Το εγχειρίδιο είναι το μακροβιότερο εκπαιδευτικό εργαλείο με κυρίαρχο ρόλο στην πραγμάτωση της μάθησης διεθνώς, εφόσον μετουσιώνει τους σκοπούς και τους στόχους του εκάστοτε προγράμματος σπουδών για μια συγκεκριμένη τάξη και σχολική βαθμίδα (Zhu & Fan, 2006). Λόγω της βαρύνουσας μορφωτικής σημασίας του ως υποστηρικτικό εργαλείο για τη διαδικασία της μάθηση των μαθηματικών, η ποιότητά του είναι μείζονος σημασίας. Ένα υψηλής ποιότητας σχολικό εγχειρίδιο υποστηρίζει την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και βοηθά τους μαθητές να βελτιώσουν την ακαδημαϊκή τους απόδοση και να επιτύχουν σημαντικούς στόχους της μάθησης των μαθηματικών (Hudson et al., 2010).

Η Χρήση του Σχολικού Εγχειριδίου από τους Μαθητές

Παρόλο που τα εγχειρίδια απευθύνονται κυρίως στους μαθητές, μικρός αριθμός ερευνητικών προσπαθειών έχει εστιαστεί στη χρήση των εγχειριδίων από τους μαθητές. Η πλειονότητα των ερευνών αναφέρεται στη χρήση των εγχειριδίων από τους εκπαιδευτικούς. Οι Haggarty και Pepin (2002) θεωρούν ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί δρουν ως διαμεσολαβητές στον τρόπο χρήσης του εγχειριδίου από τους μαθητές. Την άποψη αυτή υποστηρίζουν και οι Weinberg και Wiesner (2011), οι οποίοι παρατήρησαν ότι οι μαθητές χρειάζονται καθοδήγηση από τους εκπαιδευτικούς ως προς τον τρόπο με τον οποίο θα χρησιμοποιήσουν το εγχειρίδιο τους. Αντίθετα, ο Rezat (2013) παρατήρησε ότι η χρήση του εγχειριδίου από τους μαθητές ως εργαλείο εκμάθησης των μαθηματικών δεν είναι πάντα διαμεσολαβούμενη από τους εκπαιδευτικούς, υποστηρίζοντάς ότι οι μαθητές αξιοποιούν κατάλληλα τα σχήματα αξιοποίησης του εγχειριδίου για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών σε ένα πλαίσιο αυτορρυθμιζόμενης μάθησης. Ωστόσο, τονίζει ότι η χρήση του εγχειριδίου από τους μαθητές αποτελεί μια πολύπλοκη διαδικασία στην οποία ο εκπαιδευτικός μπορεί να συνεισφέρει θετικά.

Η Θεωρία της Εργονομικής Προσέγγισης και το Σχολικό Εγχειρίδιο

Η διαφοροποίηση μεταξύ αντικειμένου (artefact) και οργάνου (instrument) αποτελεί τη βάση στη θεωρία της εργονομικής προσέγγισης. Ως όργανο (instrument) θεωρείται κάθε υλικό ή συμβολικό αντικείμενο (artefact) με προκαθορισμένη χρήση (Kieran & Drijvers, 2006) που χρησιμοποιείται για την επίτευξη ενός σκοπού και αποκτά υπόσταση από τη στιγμή που ο χρήστης το προσαρμόσει στις δικές του ανάγκες και το ενσωματώσει στις δραστηριότητές του προσδίδοντάς του νέες δυνατότητες, διαδικασία ενοργανωτικής γένεσης (instrumental genesis). Το όργανο περιλαμβάνει το τεχνούργημα (artefact) μαζί με τους τρόπους χρήσης του, όπως αυτοί διαμορφώνονται από τον χρήστη του, όργανο = τεχνούργημα + σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης (instrumented action schemes).

Ερευνητικές προσπάθειες έχουν εστιαστεί στη μελέτη της εργονομικής προσέγγισης στο πλαίσιο κυρίως ψηφιακών περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας, με στόχο την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Trouche, 2004). Για παράδειγμα, οι Drijvers και Gravemeijer (2005) αξιοποίησαν τη διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης στα συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας (CAS) και κατέδειξαν ότι μπορούν να συμβάλλουν στο σχηματισμό γνωστικών σχημάτων άλγεβρας κατά την επίλυση παραμετρικών εξισώσεων. Ο Rezat (2013) αξιοποίησε τη θεωρία της εργονομικής προσέγγισης με σκοπό την κατανόηση του τρόπου χρήσης του σχολικού εγχειριδίου από τους μαθητές. Τα αποτελέσματα της έρευνας του έδειξαν ότι οι μαθητές μέσα από τις λειτουργίες του εγχειριδίου (usage schemes) και μέσα από τις δραστηριότητες που εμπλέκονται προκειμένου να υλοποιήσουν ένα συγκεκριμένο στόχο, αναπτύσσουν τρία σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης: το σχήμα θέσης (position-dependent practicing), το σχήμα μπλοκ (block-dependent practicing) και το σχήμα εμφάνισης (salience-dependent practicing). Όσον αφορά στο σχήμα «θέσης», οι μαθητές επέλεγαν όμοιες δραστηριότητες με αυτές που δίδαξε ο εκπαιδευτικός ή που γειτνίαζαν με τις δραστηριότητες που δίδαξε ο εκπαιδευτικός. Αναφορικά με τα σχήμα «μπλοκ», οι μαθητές επέλεγαν τα πλαίσια με τις περιλήψεις, καθώς και αποσπάσματα τα οποία θεωρούσαν ενδιαφέρον. Σχετικά με το σχήμα «εμφάνισης», οι μαθητές επέλεγαν τις δραστηριότητες που είχαν όμοια οπτικά ή λειτουργικά χαρακτηριστικά (χρήση παρόμοιων ιδιοτήτων, κανόνων ή θεωρημάτων).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

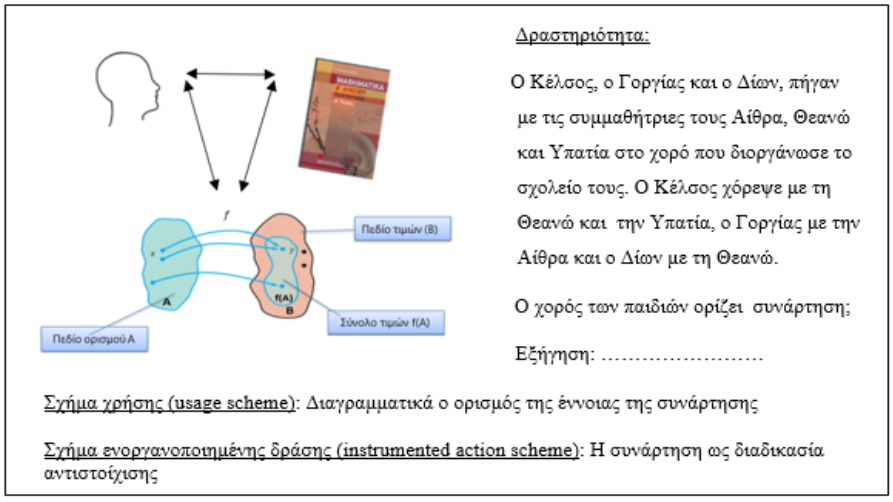
Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 181 μαθητές, από οκτώ τμήματα Β΄ Λυκείου με προσανατολισμό στα μαθηματικά. Η επιλογή του δείγματος

των σχολείων και των τμημάτων ήταν «βολική», δηλαδή εξαρτήθηκε πρωτίστως από προθυμία των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών.

Η Έννοια της Συνάρτησης στο Κυπριακό Σχολικό Εγχειρίδιο

Για την επίτευξη των στόχων της παρούσας διατριβής επιχειρήθηκε ο εντοπισμός των σχημάτων αξιοποίησης του εγχειριδίου που δύναται να αναπτύξουν οι μαθητές, κατά την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης. Λήφθηκαν υπόψη οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Η έννοια της συνάρτησης επιλέγηκε γιατί είναι θεμελιώδους σημασίας στη μάθηση των μαθηματικών καθόλη τη σχολική εκπαίδευση των μαθητών (Chazan & Yerushalmy, 2003).

Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει το εγχειρίδιο ως τεχνούργημα στην κατανόηση του ορισμού της έννοιας της συνάρτησης και τη διαδικασία εξέλιξής του σε όργανο. Το εγχειρίδιο κατευθύνει με τον διαγραμματικά ορισμό της



συνάρτησης τη σκέψη του μαθητή (διαδικασία της ενοργάνωσης) και τον βοηθά να αναπτύξει σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης, όπως για παράδειγμα την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης ως διαδικασία αντιστοίχισης, τη διάκριση της έννοιας της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, το σχήμα του πεδίο ορισμού και τιμών μιας συνάρτησης κλπ., ώστε να ανταποκριθεί αποτελεσματικά στη συγκεκριμένη δραστηριότητα (η διαδικασία της ενοργανοποίησης).

Διάγραμμα 1: Το εγχειρίδιο ως τεχνούργημα και τα σχήματα αξιοποίησής του στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας

Το Προτεινόμενο Μοντέλο Χρήσης του Εγχειριδίου από τους Μαθητές

Με βάση τη σύνθεση των αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας, εξετάστηκε η εγκυρότητα ενός μοντέλου με βάση το οποίο οι πιο κάτω παράγοντες

συνθέτουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν το εγχειρίδιο ως τεχνούργημα μάθησης μαθηματικών εννοιών: (α)«Μελέτη των ορισμών, ιδιοτήτων, προτάσεων, θεωρημάτων, αποδείξεων: Σχήμα χρήσης και Σχήμα «Γνωστικών και Μεταγνωστικών Στρατηγικών» (Π1), (β)«Μελέτη των παραδειγμάτων και των δραστηριοτήτων υποενότητας, ενότητας: Σχήμα χρήσης και Σχήμα Θέσης-Ομοιότητας» (Π2), (γ)«Το Σχολικό Εγχειρίδιο ως Μέσο Διδασκαλίας» (Π3), (δ)«Μελέτη των δραστηριοτήτων εξερεύνησης, διερεύνησης, ιστορικά σημειώματα: Σχήμα χρήσης» (Π4), (ε)«Μελέτη των σχολίων, παρατηρήσεων, σημειώσεων, περιλήψεων, συμπερασμάτων: Σχήμα χρήσης και Σχήμα Μπλοκ» (Π5) και (στ)«Μελέτη των δραστηριοτήτων υποενότητας, ενότητας, εμπλουτισμού: Σχήμα χρήσης και Σχήμα Θέσης-Ομοιότητας» (Π6).

Εργαλεία Συλλογής Δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων της έρευνας έγινε μέσω της χορήγησης ερωτηματολογίου. Η ανάπτυξη των δηλώσεων του ερωτηματολογίου στηρίχθηκε στη δομή του εγχειριδίου της Β΄ Λυκείου προσανατολισμού και στη σχετική με τα σχήματα αξιοποίησης του εγχειριδίου βιβλιογραφία (Trouche, 2004). Πιο συγκεκριμένα, στους μαθητές δόθηκε ερωτηματολόγιο με δηλώσεις τύπου Likert με 7 σημεία (1= καθόλου, 7=πάρα πολύ), οι οποίες είχαν σκοπό την ανάδειξη των αντιλήψεων των μαθητών για τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν τα σχήματα αξιοποίησης του εγχειριδίου στην καθημερινή τους μελέτη, στην προετοιμασία τους για γραπτή αξιολόγηση και για τον τρόπο με τον οποίο τα αξιοποιούν στη διδασκαλία οι εκπαιδευτικοί τους (Πίνακας 1). Οι δηλώσεις αυτές κατηγοριοποιούνται σε σχήματα χρήσης του εγχειριδίου και σε σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης.

Οι δηλώσεις που σχετίζονται με τη διαδικασία ανάγνωσης (υπογράμμιση υποθέσεων, συμπερασμάτων, διατύπωση εικασιών, ερμηνεία ορισμών και θεωρημάτων, κατασκευή περιλήψεων, παράθεση παραδειγμάτων κλπ.), αναφέρονται στον παράγοντα Π1. Οι δηλώσεις που αναφέρονται στην επιλογή από τους μαθητές λυμένων παραδειγμάτων και δραστηριοτήτων της ενότητας που είναι ίδιες ή όμοιες με δραστηριότητες που δίδαξε ο εκπαιδευτικός τους, αναφέρονται στον παράγοντα Π2. Οι δηλώσεις που σχετίζονται στον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί το εγχειρίδιο κατά τη διδασκαλία, αναφέρονται στον παράγοντα Π3. Οι δηλώσεις που σχετίζονται με τη μελέτη των δραστηριοτήτων εξερεύνησης και διερεύνησης, καθώς και των ιστορικών σημειωμάτων, αναφέρονται στον παράγοντα Π4. Οι δηλώσεις που αναφέρονται στην επιλογή από τους μαθητές πληροφοριών τις οποίες θεωρούν ενδιαφέρουσες και χρήσιμες για

την κατανόηση του περιεχομένου του εγχειριδίου, όπως των πλαισίων με τις περιλήψεις και τα συμπεράσματα, τα μαύρα γράμματα, τα σχόλια και τις παρατηρήσεις, αναφέρονται στον παράγοντα Π5. Τέλος, οι δηλώσεις που αναφέρονται στην επιλογή από τους μαθητές δραστηριοτήτων από το υλικό της ενότητας και του εμπλουτισμού που είναι ίδιες ή όμοιες με δραστηριότητες που δίδαξε ο εκπαιδευτικός τους, όταν προετοιμάζονται για γραπτή αξιολόγηση, αναφέρονται στον παράγοντα Π6.

Τεχνικές Ανάλυσης Ποσοτικών Δεδομένων

Για την εξέταση της εγκυρότητας και καταλληλότητας του προτεινόμενου μοντέλου πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Για τη διεξαγωγή των αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MPLUS (Muthen & Muthen, 2007). Για την επιβεβαίωση των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι τρεις δείκτες: (α) ο λόγος $\frac{x^2}{df}$ (<2), ο δείκτης CFI (>0.9) (comparative fit index) και ο δείκτης RMSEA (<0.08). Εφαρμόστηκε, επίσης, περιγραφική στατιστική με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου SPSS.

Αντιλήψεις για τον τρόπο αξιοποίησης του σχολικού εγχειριδίου στην καθημερινή μελέτη

Σχήματα αξιοποίησης του σχολικού εγχειριδίου

(Α) *Σχήματα χρήσης*: Αν στο μάθημα της ημέρας περιλαμβάνονται λυμένα παραδείγματα του βιβλίου, τα επιλύω ξανά μόνος/η μου στο σπίτι.

(Β) *Σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης:* Αν στο μάθημα της ημέρας περιλαμβάνονται διατυπώσεις ορισμών/ θεωρημάτων/ προτάσεων/ ιδιοτήτων, επιμένω να τις καταλάβω (π.χ. τις ερμηνεύω με δικά μου λόγια, κάνω σημειώσεις, σκέφτομαι δικά μου παραδείγματα κτλ.).

Αντιλήψεις για τον τρόπο αξιοποίησης του σχολικού εγχειριδίου σε γραπτή αξιολόγηση

Σχήματα αξιοποίησης του σχολικού εγχειριδίου

(Α) *Σχήματα Χρήσης:* Διαβάζω τις διατυπώσεις των ορισμών, θεωρημάτων, προτάσεων, ιδιοτήτων, όταν προετοιμάζομαι για διαγώνισμα.

(Β) *Σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης*: Όταν προετοιμάζομαι για διαγώνισμα επιλύω μόνο τις δραστηριότητες εξάσκησης/ ενότητας που μας δίδαξε ο/η καθηγητής/τρια μου

Αντιλήψεις των μαθητών για τον τρόπο αξιοποίησης του σχολικού εγχειριδίου από τον εκπαιδευτικό

Ο/Η καθηγητής/τρια μου κάνει συχνές αναφορές για το βιβλίο (π.χ. αυτό που κάναμε σήμερα θα το βρείτε σελ. 25)

Πίνακας 1: Παραδείγματα Δηλώσεων του Ερωτηματολογίου

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων θα γίνει με βάση τους τρεις στόχους της εργασίας.

Σχήματα Αξιοποίησης του Εγχειριδίου

Η ανάλυση του περιεχομένου του εγχειριδίου σε σχέση με τα σχήματα αξιοποίησής του έγινε με βάση τη δομή του, η οποία περιλαμβάνει 5 φάσεις: τις δραστηριότητες διερεύνησης, τα λυμένα παραδείγματα, τις δραστηριότητες υποενότητας, τις δραστηριότητες ενότητας και τις δραστηριότητες εμπλουτισμού. Ταυτόχρονα, οι πιο πάνω φάσεις περιλαμβάνουν ιστορικά σημειώματα, ορισμούς, θεωρήματα, παρατηρήσεις, σχόλια, διευκρινίσεις, γενικεύσεις κτλ. Επιπρόσθετα, το εγχειρίδιο περιλαμβάνει παράρτημα επεξήγησης μαθηματικών συμβόλων και παράρτημα απαντήσεων των δραστηριοτήτων υποενότητας, ενότητας και εμπλουτισμού. Όσον αφορά τα σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης, προέκυψαν από την επεξεργασία των δηλώσεων του ερωτηματολογίου της έρευνας και κατηγοριοποιούνται σε 4 ομάδες: το σχήμα «Γνωστικές και Μεταγνωστικές Στρατηγικές», το σχήμα ««Θέσης-Ομοιότητας», το σχήμα «Μπλοκ» και το σχήμα «Αυτοαξιολόγηση».

Αντιλήψεις των Μαθητών για τον Τρόπο Χρήσης του Εγχειριδίου

Οι μαθητές του δείγματος αξιοποιούν περισσότερο ($\underline{x} = 4.60$) τα σχήματα χρήσης του εγχειριδίου και αναπτύσσουν περισσότερο ($\underline{x} = 4.76$)σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης, όταν προετοιμάζονται για γραπτή αξιολόγηση σε σχέση με την καθημερινή τους μελέτη αντίστοιχα). Επίσης, συγκρίνοντας τους μέσους όρους ανά είδος μελέτης φαίνεται ότι ο βαθμός ανάπτυξης σχημάτων ενοργανοποιημένης δράσης από τους μαθητές είναι ανάλογος του βαθμού αξιοποίησης των σχημάτων χρήσης του εγχειρίδιου.

Το σχήμα χρήσης του εγχειριδίου που αξιοποιούν περισσότερο οι μαθητές του δείγματος τόσο στην καθημερινή τους μελέτη ($\underline{x} = 4.62$) όσο και κατά την προετοιμασία τους για γραπτή αξιολόγηση ($\underline{x} = 5.74$) είναι οι «διατυπώσεις των ορισμών, των θεωρημάτων, των προτάσεων και των ιδιοτήτων». Το σχήμα χρήσης που φαίνεται ότι αξιοποιείται λιγότερο από τους μαθητές στην καθημερινή τους μελέτη είναι τα «ιστορικά σημειώματα» ($\underline{x} = 1.88$). Όσον αφορά τα σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης, οι μαθητές φάνηκε ότι εφαρμόζουν σε μεγάλο βαθμό «γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές» για την κατανόηση των διατυπώσεων των «ορισμών, θεωρημάτων, προτάσεων, ιδιοτήτων» ($\underline{x} = 5.49$) και των αποδείξεων τους ($\underline{x} = 5.22$).

Μοντέλο Περιγραφής της Χρήσης του Εγχειριδίου

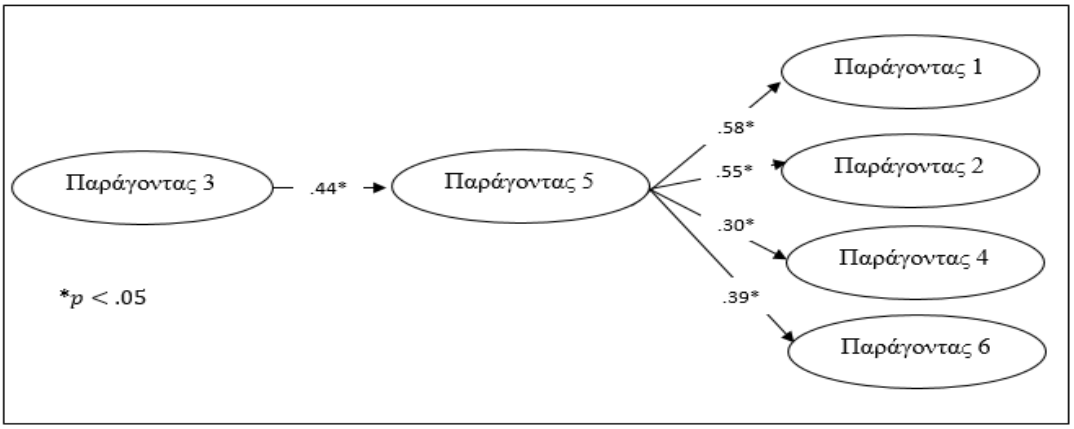
Για την επιβεβαίωση του προτεινόμενου μοντέλου πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν ικανοποιητική (CFI=.95, x^2=336.89, df=234, x^2/df=1.44, RMSEA=.05), επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της δομής του προτεινόμενου μοντέλου. Οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων ήταν ικανοποιητικές και στατιστικά σημαντικές, Επίσης, η ερμηνευμένη διασπορά των δηλώσεων ήταν υψηλή (r^2), δείχνοντας ότι μπορεί να ερμηνεύσει τη διασπορά των παραγόντων του μοντέλου. Για να εξεταστούν οι σχέσεις μεταξύ των παραγόντων του μοντέλου εξετάστηκε η εγκυρότητα ενός δομικού μοντέλου με βάση τη σύνθεση της βιβλιογραφίας (Rezat, 2009; Trouche, 2004), που θεωρεί ότι οι εκπαιδευτικοί ενορχηστρώνουν, κατά τη διδασκαλία τους, τον τρόπο χρήσης του εγχειριδίου από τους μαθητές. Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν (δείτε Διάγραμμα 2), ο παράγοντας Π3 έχει σημαντική επίδραση στον παράγοντα Π5 (r=.44). Στη συνέχεια ο παράγοντας Π5 προβλέπει άμεσα τους παράγοντες Π1 (r=.58), Π2 (r=.55), Π4 (r=.30) και Π6 (r=.39). Συμπερασματικά, ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί το εγχειρίδιο εντός της τάξης (παράγοντας Π3) αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης των υπόλοιπων πέντε παραγόντων, οι οποίοι σχετίζονται άμεσα με τα σχήματα αξιοποίησης του εγχειριδίου. Επιπλέον, η επίδραση του παράγοντα Π5 είναι μεγαλύτερη στους παράγοντες που εμπλέκουν περισσότερο στρατηγικές που υποστηρίζουν την αναγνωστική κατανόηση (εντοπισμός

κύριων ιδεών, εικασίες, ερμηνείες κλπ.), την οργάνωση, την επεξεργασία και την διατήρηση των πληροφοριών που βρίσκονται στο κείμενο.

Διάγραμμα 2. Σχέσεις μεταξύ των Παραγόντων

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η κατανόηση της χρήσης των εγχειριδίων από τους μαθητές αποτελεί προϋπόθεση για την αποτελεσματική εφαρμογή τους στη διαδικασία της μάθησης (Zhu & Fan, 2006). Το μοντέλο της παρούσας έρευνας προσφέρει ένα έγκυρο εργαλείο περιγραφής της δομής του τρόπου χρήσης του εγχειριδίου από τους μαθητές. Ειδικότερα, υπογραμμίζει τη σημαντική ιεραρχική σχέση μεταξύ των παραγόντων Π3 και Π5, η οποία υποδηλώνει ότι ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί το εγχειρίδιο στη διδασκαλία του (παράγοντας Π3) ενεργοποιεί δεξιότητες στους μαθητές χρήσης του εγχειριδίου (παράγοντας Π3: σχήμα «Μπλοκ» - προσοχή στα



πλαίσια με τη μαθηματική θεωρία τα σχόλια, τις περιλήψεις, τα συμπεράσματα κλπ.) με τρόπο που να υποστηρίζει την εννοιολογική τους ανάπτυξη. Αυτό το εύρημα υποδηλώνει και τη μεγάλη σημασία που διαδραματίζει ο εκπαιδευτικός στη διαδικασία της γένεσης του εγχειριδίου σε όργανο. Επομένως, το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να αποτελέσει διδακτικό και διαγνωστικό εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς, εφόσον τους δίνει πληροφορίες για τους παράγοντες στους οποίους πρέπει να εστιάσουν, προκειμένου να ελέγξουν τη διαδικασία μάθησης με τρόπο που να προωθεί την εξέλιξη του εγχειριδίου ως προς τα προσδοκώμενα μαθηματικά αποτελέσματα. Από την πλευρά των μαθητών, το μοντέλο μπορεί να λειτουργήσει ως εύχρηστος συνοπτικός οδηγός χρήσης του εγχειριδίου για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο, δεν μπορεί να συσχετιστεί άμεσα με άλλα μοντέλα λόγω του ότι για πρώτη φορά έγινε

προσπάθεια να περιγραφεί ένα θεωρητικό μοντέλο χρήσης του εγχειριδίου από τους μαθητές, με βάση τη θεωρία της εργονομικής προσέγγισης.

Συνοψίζοντας, τα σχήματα χρήσης του υπό μελέτη εγχειριδίου (όπως τα παραδείγματα, οι δραστηριότητες ενότητας, τα πλαίσια με τη θεωρία, οι αποδείξεις θεωρημάτων κλπ.), φάνηκε ότι συμβάλλουν στην ανάπτυξη σχημάτων ενοργανοποιημένης δράσης, υποβοηθώντας τη διαδικασία της γένεσης του εγχειριδίου ως τεχνουργήματος σε όργανο. Τα σχήματα ενοργανοποιημένης δράσης που φάνηκε ότι οι μαθητές του δείγματος ανάπτυξαν περισσότερο ήταν: (α) η κατασκευή ενεργών νοημάτων κατά την άμεση αλληλεπίδρασή τους με το μαθηματικό κείμενο και την επιμονή τους να καταλάβουν τις αποδείξεις με τη χρήση κατάλληλων γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών, (β) ο εντοπισμός πληροφοριών που εφαρμόζονταν άμεσα στις δραστηριότητες εξάσκησης, καθώς και σε λυμένα παραδείγματα με ίδια ή παρόμοια λειτουργικά χαρακτηριστικά (χρήση ίδιων ιδιοτήτων, θεωρημάτων κλπ.) (σχήμα «Ομοιότητας») και (γ) η εστίαση στα πλαίσια με τη μαθηματική θεωρία, τις περιλήψεις, τα σχόλια κλπ. (σχήμα «Μπλοκ»). Αναφορικά με τις δραστηριότητες εξάσκησης επιλέγουν για μελέτη αυτές που δίδαξε ο καθηγητής τους ή που είχαν όμοια οπτικά ή λειτουργικά χαρακτηριστικά με αυτές που τους δίδαξε (σχήμα «Θέσης – Ομοιότητας»). Το σχήμα χρήσης του εγχειριδίου που φάνηκε ότι χρησιμοποιούν περισσότερο οι μαθητές είναι η μαθηματική θεωρία. Αυτό καταδεικνύει ότι οι μαθητές του δείγματος ακολουθούσαν την ακριβή πορεία σχεδιασμού του εγχειριδίου, πιθανώς γιατί οι εκπαιδευτικοί στην παρούσα έρευνα ακολουθούσαν στενά το εγχειρίδιο κατά τη διδασκαλία τους. Αντίθετα, άλλες έρευνες (Weinberg & Wiesner, 2011) έδειξαν ότι οι μαθητές δεν ακολουθούσαν το εγχειρίδιο όπως προορίζεται από τους συγγραφείς του, αλλά μεταβαίνουν απευθείας σε παραδείγματα, αναζητώντας αλγόριθμους ως προς την αντιμετώπιση όμοιων δραστηριοτήτων. Εν κατακλείδι, οι περισσότεροι μαθητές της έρευνας φαίνεται να διαμορφώνουν το εγχειρίδιο με τέτοιο τρόπο που να εξυπηρετεί τις ανάγκες τους για την επίτευξη των μαθησιακών τους στόχων, μετασχηματίζοντάς το σε όργανο μάθησης μαθηματικών εννοιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. In *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (pp. 163-196). US: Springer.

Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who ets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal, 28(4),* 567-590.

Hudson, R., Lahan, P., & Lee, J. (2010). Considerations in the review and adoption of mathematics textbooks. In B. Reys, R. Reys, & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics Curriculum: Issues, Trends, and Future Directions* (pp. 213-229). Reston: VA: Council for Teachers of Mathematics.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(2), 205-263.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Rezat, S. (2013). The textbook-in-use: Students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM Mathematics Education 45*, 659-670.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.

Weinberg, A., & Wiesner, E. (2011). Understanding mathematics textbooks through reader-oriented theory. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 49–63.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

ΑΤΥΠΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ/ΤΡΙΩΝ 6-8 ΕΤΩΝ ΣΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Αναστασία Μιχαλοπούλου and Σόνια Καφούση

Σύγχρονες έρευνες υποστηρίζουν τη σημασία της εμπλοκής των μαθητών και μαθητριών από την πρώτη σχολική ηλικία με δραστηριότητες στατιστικής. Η παρούσα εργασία διερευνά τους τρόπους απαντήσεων των μαθητών και των μαθητριών Α και Β Δημοτικού όταν συμμετέχουν σε δραστηριότητες στατιστικής πρόβλεψης. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με 67 μαθητές και μαθήτριες ενός τυπικού δημόσιου σχολείου μέσω συνεντεύξεων που δόθηκαν πριν και μετά την ολοκλήρωση μίας σχετικής διδακτικής παρέμβασης στη σχολική τάξη. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες ανέπτυξαν μια ποικιλία απαντήσεων σε δραστηριότητες πρόβλεψης.

1.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η σύγχρονη έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση αναδεικνύει τη χρησιμότητα της ένταξης της μάθησης και διδασκαλίας της στατιστικής στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Cobb,1999; Franklin et al., 2007; Weiland, 2017). Στην παρούσα εργασία υποστηρίζουμε με βάση σχετικές έρευνες (English, 2013; Makar, 2016; Makar & Rubin, 2017; Oslington et al., 2020) ότι είναι σημαντικό οι μαθητές και οι μαθήτριες να αποκτούν εμπειρίες στη στατιστική από μικρή ηλικία.

Τα τελευταία χρόνια δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην έρευνα για τη στατιστική εκπαίδευση στην ανάπτυξη της άτυπης στατιστικής συμπερασματολογίας (informal statistical inference) στις μικρές ηλικίες (Makar & Rubin, 2017). Η στατιστική συμπερασματολογία είναι μέθοδος άντλησης συμπερασμάτων από τα δεδομένα ενός δείγματος για τον πληθυσμό από τον οποίο προήλθαν ή για τον μηχανισμό ο οποίος τα παρήγαγε. Η στατιστική συμπερασματολογία ερμηνεύεται ως πιθανός και όχι ντετερμινιστικός ισχυρισμός, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα ως απόδειξη και ενσωματώνοντας την αβεβαιότητα (Makar & Rubin, 2009). Μέρος της στατιστικής συμπερασματολογίας είναι και η πρόβλεψη (English, 2012; Meletiou-Mavrotheris & Paparistodemou, 2015; Watson, 2007). Η πρόβλεψη είναι μια καθημερινή στατιστική δραστηριότητα κατά

την οποία τα άτομα, στηριζόμενα σε προηγούμενες εμπειρίες και μερική πληροφόρηση, κάνουν εκτιμήσεις, προγραμματίζουν ή συμπεραίνουν (Oslington et al., 2020). Η πρόβλεψη ως καθημερινή δραστηριότητα αξιοποίησης της προσωπικής εμπειρίας επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να εμπλακούν με την άτυπη στατιστική συμπερασματολογία (Makar, 2013; Zieffler et al., 2008). Προκειμένου να περιγράψουμε τον τρόπο που εμπλέκονται οι μαθητές και μαθήτριες σε άτυπες προβλέψεις αξιοποιήσαμε τα τέσσερα επίπεδα αντίληψης δεδομένων όπως παρουσιάζονται στην εργασία του Konold και των συνεργατών του (Konold et al., 2015). Η αντίληψη των δεδομένων κατηγοριοποιείται σε τέσσερα επίπεδα:

(1)Αντίληψη των δεδομένων ως υπενθυμίσεις (pointers) του γεγονότος από το οποίο προήλθαν.

(2)Αντίληψη των δεδομένων ως συγκεκριμένες περιπτώσεις (case values), που δίνουν πληροφορίες μόνο για μεμονωμένες περιπτώσεις και τις ιδιότητές τους.

(3)Αντίληψη των δεδομένων ως ταξινομητές (classifiers) που δίνουν πληροφορίες σχετικά με τη συχνότητα περιπτώσεων ορισμένης τιμής.

(4)Αντίληψη των δεδομένων ως ένα ενιαίο σύνολο (aggregate) με ιδιότητες όπως σχήμα και κέντρο.

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας με σκοπό τη διερεύνηση των επιπέδων αντίληψης των δεδομένων στις μικρές ηλικίες σε δραστηριότητες στατιστικής πρόβλεψης και του τρόπου που σχετίζεται η γονική συμμετοχή στο σπίτι με τα επίπεδα αντίληψης των δεδομένων των μαθητών και μαθητριών. Στην παρούσα εργασία διερευνάται αν και πώς μαθητές και μαθήτριες της Α΄ και Β΄ δημοτικού αναγνωρίζουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων σε έναν πίνακα δεδομένων και πραγματοποιούν άτυπες προβλέψεις, κατά τη διάρκεια συνεντεύξεων που δόθηκαν πριν και μετά την ολοκλήρωση μίας σχετικής διδακτικής παρέμβασης στη σχολική τάξη. Τα ερευνητικά ερωτήματα που μας απασχόλησαν ήταν: (1) Ποιες κατηγορίες απαντήσεων των μαθητών/τριών εμφανίζονται σε κάθε επίπεδο αντίληψης δεδομένων; (2) Ποιες μεταβολές παρατηρούνται σε κάθε επίπεδο αντίληψης δεδομένων πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση σε κάθε τάξη;

2.ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Οι συμμετέχοντες και συμμετέχουσες στην έρευνα ήταν 67 μαθητές και μαθήτριες Α΄ και Β΄ δημοτικού, από 2 τμήματα πρώτης δημοτικού (26

μαθητές και μαθήτριες) και 3 τμήματα δευτέρας δημοτικού (41 μαθητές και μαθήτριες) του ίδιου τυπικού δημόσιου σχολείου. Το συγκεκριμένο σχολείο εμπίπτει στην κατηγορία των σχολείων στα οποία ο μαθητικός πληθυσμός είναι κυρίως μέρος της κυρίαρχης εθνικότητας (από το σύνολο του μαθητικού πληθυσμού περίπου το 85% των μαθητών και μαθητριών είναι ελληνικής καταγωγής, (Authors, 2015). Οι γονείς των 67 μαθητών και μαθητριών ήταν στην πλειονότητά τους απόφοιτοι τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (89,5%). Η διδακτική παρέμβαση ολοκληρώθηκε σε 5 διδακτικές ώρες (45 λεπτών) για κάθε τμήμα στη διάρκεια της οποίας δόθηκαν δύο φορές εργασίες για το σπίτι. Τα μαθήματα στην τάξη ηχογραφήθηκαν, ενώ οι εργασίες για το σπίτι αποτελούνταν από δύο φυλλάδια εργασιών που συμπληρώθηκαν από τους γονείς και το παιδί στο σπίτι. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 7 στάδια σε κάθε τάξη (βλ. Πίνακας 1).

	ΣΤΑΔΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ	ΔΡΑΣΕΙΣ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ
Συνέντευξη	1ο στάδιο	Κλινική συνέντευξη	Αποτύπωση επιπέδων αντίληψης δεδομένων πριν τη διδακτική παρέμβαση
Διδακτική Παρέμβαση	2ο στάδιο	Δραστηριότητες στην τάξη (2 διδακτικές ώρες)	Οργάνωση έρευνας στην τάξη. Οι μαθητές/τριες δημιουργούν πίνακα δεδομένων, ραβδογράμματα, σημειογράμματα
		Δραστηριότητα στην τάξη (1 διδακτική ώρα)	Οι μαθητές/τριες ασχολούνται με το εύρος τιμών των δεδομένων για να παράγουν προβλέψεις
	3ο στάδιο	Εργασία για το σπίτι	Παράγουν προβλέψεις σε συνεργασία με γονέα στο σπίτι
	4ο στάδιο	Δραστηριότητα στην τάξη (1 διδακτική ώρα)	Παρουσίαση εργασιών που έγιναν στο σπίτι Οι μαθητές/ μαθήτριες ασχολούνται με το εύρος τιμών και το πλήθος των

			δεδομένων για να παράγουν προβλέψεις
	5ο στάδιο	Εργασία για το σπίτι	Παράγουν προβλέψεις σε συνεργασία με γονέα στο σπίτι
	6ο στάδιο	Δραστηριότητα στην τάξη (1 διδακτική ώρα)	Παρουσίαση εργασιών που έγιναν στο σπίτι
Συνέντευξη	7ο στάδιο	Κλινική συνέντευξη	Αποτύπωση επιπέδων αντίληψης δεδομένων μετά τη διδακτική παρέμβαση

Πίνακας 1. Στάδια διεξαγωγής της έρευνας

Όλα τα έργα σχεδιάστηκαν λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία εμπλοκής των μαθητών και μαθητριών στη συλλογή, την επεξεργασία δεδομένων και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων (Bargagliotti et al., 2020; Franklin et al., 2007). Το έργο που δόθηκε στη συνέντευξη της Α΄ δημοτικού πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση περιείχε κατηγορικά δεδομένα και παρουσιάζεται στον Πίνακα 2. Στην Β΄ δημοτικού δόθηκε αντίστοιχο έργο με ίδιες τιμές διακριτών ποσοτικών δεδομένων.

Ρωτήσαμε τα 20 παιδιά που πάνε στο τμήμα Α1 στο διπλανό σχολείο πώς περνάνε το Σαββατοκύριακο. Σημειώσαμε στον πίνακα τι έκαναν για 3 συνεχόμενα Σαββατοκύριακα.

Δραστηριότητα	Πρώτο Σαββατοκύριακο	Δεύτερο Σαββατοκύριακο	Τρίτο Σαββατοκύριακο	Επόμενο Σαββατοκύριακο
Παιδική χαρά	11	16	14	
Θέατρο	1	1	1	
Λογοτεχνικό βιβλίο	5	3	4	
Ποδήλατο	3	0	1	
Σύνολο	20	20	20	

1. Πόσα παιδιά προβλέπεις ότι μπορεί να παίξουν στην παιδική χαρά το επόμενο Σαββατοκύριακο; Πώς το σκέφτηκες;
2. Πόσα παιδιά προβλέπεις ότι μπορεί να πάνε στο θέατρο το επόμενο Σαββατοκύριακο; Πώς το σκέφτηκες;
3. Πόσα παιδιά προβλέπεις ότι μπορεί να διαβάσουν ένα λογοτεχνικό βιβλίο το επόμενο Σαββατοκύριακο; Πώς το σκέφτηκες;
4. Πόσα παιδιά προβλέπεις ότι μπορεί να κάνουν ποδήλατο το επόμενο Σαββατοκύριακο; Πώς το σκέφτηκες;

Πίνακας 2. ΄Εργο συνέντευξης Α΄ δημοτικού

Οι τιμές των τεσσάρων κατηγορικών δεδομένων επιλέχθηκαν έτσι ώστε να μελετηθεί στις απαντήσεις των παιδιών αν στο πρώτο κατηγορικό δεδομένο (παιδική χαρά) για την επιλογή τιμής πρόβλεψης θα κινηθούν στο εύρος των τιμών που δίνονται, αν στο δεύτερο κατηγορικό δεδομένο (λογοτεχνικό βιβλίο) θα επιλέξουν την επικρατούσα τιμή και αν στο τρίτο κατηγορικό δεδομένο (θέατρο) θα κινηθούν προς τη μέση τιμή. Στο τέταρτο κατηγορικό δεδομένο (ποδήλατο) διερευνήθηκε αν οι μαθητές και οι μαθήτριες θα επέλεγαν μία τιμή ώστε να διασφαλίζεται η σταθερότητα της τιμής του συνόλου των δεδομένων (n=20) και να είναι μέσα στο εύρος των τιμών. Τα στατιστικά δεδομένα παρουσιάζονταν στους μαθητές και τις μαθήτριες τόσο με τη μορφή πίνακα δεδομένων όσο και με τη μορφή διαγραμμάτων (στην Α΄δημοτικού με εικονόγραμμα και στην Β΄ δημοτικού με σημειόγραμμα).

Οι μαθητές και οι μαθήτριες που συμμετείχαν δεν είχαν καμία προηγούμενη εμπειρία με τη στατιστική. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων πριν τη διδακτική παρέμβαση τέθηκαν πολλές ερωτήσεις κατανόησης του πίνακα δεδομένων (π.χ. πόσα παιδιά διάλεξαν να διαβάσουν ένα βιβλίο το δεύτερο Σαββατοκύριακο;). Τα περισσότερα παιδιά ήταν σε θέση να αντλήσουν πληροφορίες από τον πίνακα δεδομένων και λίγα χρειάστηκε να βοηθηθούν από την ερευνήτρια. Στην πρώτη συνέντευξη οι μαθητές και οι μαθήτριες κατασκεύασαν αρχικά με βάση τον πίνακα δεδομένων έναν δικό τους πίνακα δεδομένων σε ένα λευκό φύλλο χαρτί συζητώντας το νόημα κάθε εγγραφής δεδομένου. Παρατηρήθηκε ότι από την πρώτη συνέντευξη, αλλά και στη διάρκεια του διδακτικού πειράματος ήταν κοινά αποδεκτό ότι η πρόβλεψη αφορά στην αξιοποίηση των διαθέσιμων δεδομένων για την πρόταση κάποιας τιμής δεδομένου που μπορεί να εμφανιστεί στο μέλλον.

Η ανάλυση των δεδομένων στηρίζεται στην ανάλυση περιεχομένου και στη θεματική ανάλυση (βλ. Bryman, 2016). Αρχικά όλες οι απαντήσεις των παιδιών κωδικοποιήθηκαν με βάση το επίπεδο αντίληψης δεδομένων

που αντιστοιχούσαν (Konold et al., 2015). Σε κάθε μαθητή/ μαθήτρια δόθηκε ένας αριθμός έτσι ώστε σε κάθε απάντηση να διακρίνεται ποιος την έδωσε (π.χ. ο κωδικός ΜΑΘ25 αναφέρεται στην μαθήτρια ή τον μαθητή 25). Στη συνέχεια συγκεντρώθηκαν όλες οι απαντήσεις που αντιστοιχούσαν σε κάθε επίπεδο αντίληψης δεδομένων και για τα τέσσερα ερωτήματα και εξετάστηκαν ποιες κατηγορίες απαντήσεων διαμορφώνονται.

3.ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι κατηγορίες απαντήσεων ανά επίπεδο αντίληψης δεδομένων που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις με βάση τη θεματική ανάλυση σε όλες τις ερωτήσεις και στις δύο τάξεις.

ΕΠΙΠΕΔΟ/ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	1^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	2^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	3^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ	4^{Ο} ΕΠΙΠΕΔΟ
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 1	Τυχαίοι Αριθμοί	Απομόνωση κάποιου δεδομένου	Τιμή πρόβλεψης μέσα στο εύρος τιμών των δεδομένων	Αναφέρεται στο σύνολο των δεδομένων
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 2	Επανάληψη προηγούμενης πρόβλεψης	Απομόνωση κάποιου δεδομένου και εύρεση πρόβλεψης από τον επόμενο ή προηγούμενο αριθμό στην ακολουθία φυσικών αριθμών	Επικρατούσα τιμή	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 3	Πράξεις με στοιχεία από δεδομένα	Εύρεση κοντινής ταδεκάδας	Παρατηρεί μία τάση τιμών στα δεδομένα και δίνει ως τιμή πρόβλεψης μία τιμή κοντά στο εύρος τιμών των δεδομένων	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 4	Μέτρηση από την εικόνα		Μέση τιμή	
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 5	Προσωπικές εμπειρίες			
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 6	Παρατήρηση δεδομένων			

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 7 Αναφορά ιστορίας

Πίνακας 3. Κατηγορίες απαντήσεων σε κάθε επίπεδο αντίληψης δεδομένων

Στο πρώτο επίπεδο αντίληψης δεδομένων δημιουργήθηκαν 7 κατηγορίες απαντήσεων, εκ των οποίων η Κατηγορία 1 (Τυχαίοι Αριθμοί) και η Κατηγορία 3 (Πράξεις με στοιχεία από τα δεδομένα) εμφανίστηκαν πιο συχνά. Στη συνέχεια παρουσιάζονται παραδείγματα σε κάθε κατηγορία:

Κατηγορία 1: «41» (ΜΑΘ24, τάξη Α, ερώτηση 1)

Κατηγορία 2: «2, γιατί θέλω να βάζω 2 (δείχνει την προηγούμενη τιμή πρόβλεψης που έδωσε)» (ΜΑΘ23, τάξη Α, ερώτηση 4)

Κατηγορία 3: «8, γιατί 3 και 5 (δείχνοντας τα δεδομένα) κάνει 8», (ΜΑΘ5, τάξη Α, ερώτηση 3)

Κατηγορία 4: «5, γιατί 5 είναι τα παιδιά στην εικόνα» (ΜΑΘ18, τάξη Α, ερώτηση 3)

Κατηγορία 5: «1, το Σαββατοκύριακο μόνο εγώ παίζω στην παιδική χαρά» (ΜΑΘ22, τάξη Α, ερώτηση 2)

Κατηγορία 6: «2, γιατί είδα όλα τα νούμερα και το 2 δεν υπήρχε» (ΜΑΘ25, τάξη Α, ερώτηση 1)

Κατηγορία 7: «Θα βάλω 1, γιατί 5 και 3, 8 και 4, 12. Θα βάλω 1 για να μην στριμώχνονται» (ΜΑΘ14, τάξη Α, ερώτηση 3)

Στο δεύτερο επίπεδο αντίληψης δεδομένων διαμορφώθηκαν 3 κατηγορίες απαντήσεων, εκ των οποίων η πιο συχνή ήταν η Κατηγορία 2.

Κατηγορία 1: «16, γιατί το είδα κι εδώ (δείχνει στο δεύτερο Σαββατοκύριακο)» (ΜΑΘ1, τάξη Α, ερώτηση 1)

Κατηγορία 2: «15, από το 14 (είναι μετά το 14)» (ΜΑΘ4, τάξη Α, ερώτηση 1)

Κατηγορία 3: «10, 11,16,14 είναι όλα πάνω από το 10» (ΜΑΘ20, τάξη Α, ερώτηση 1)

Στο τρίτο επίπεδο αντίληψης δεδομένων αναδείχθηκαν 4 κατηγορίες απαντήσεων, εκ των οποίων οι πιο συχνές ήταν οι Κατηγορίες 1 και 2.

Κατηγορία 1: «15, γιατί πηγαίνει 11,16,14,15» (ΜΑΘ23, τάξη Α, ερώτηση 1)

Κατηγορία 2: «1, γιατί το πρώτο Σαββατοκύριακο 1 παιδί, το δεύτερο Σαββατοκύριακο 1 παιδί, το τρίτο Σαββατοκύριακο 1 παιδί, και το τέταρτο Σαββατοκύριακο θα είναι 1» (ΜΑΘ4, τάξη Α, ερώτηση 2)

Κατηγορία 3: «6, είναι 5,4,5,6. Πάει 3,4,5,6» (ΜΑΘ10, τάξη Α, ερώτηση 3)

Κατηγορία 4: «4, γιατί 5,3,4. Γιατί 5 είναι μετά το 4 και μετά το 3 είναι το 4 και σκέφτηκα 4» (ΜΑΘ25, τάξη Α, ερώτηση 3)

Στο τελευταίο επίπεδο αντίληψης δεδομένων αναδύθηκε η κατηγορία απαντήσεων «Αναφορά στο σύνολο των δεδομένων» κατά την οποία ο μαθητής ή η μαθήτρια λαμβάνει υπόψη τόσο τη μεταβλητότητα των τιμών των δεδομένων όσο και το σύνολο των δεδομένων. Για παράδειγμα η απάντηση στο ερώτημα 4: «1, γιατί 15 και 1, 16 και 3, 19 και 1, 20» (ΜΑΘ4) στην οποία η μαθήτρια επιλέγει τιμή πρόβλεψης μέσα στο εύρος τιμών των δεδομένων τέτοια ώστε να διατηρεί το σύνολο των δεδομένων σταθερό.

Στους επόμενους Πίνακες 4 και 5 φαίνεται η κατανομή των απαντήσεων ανά επίπεδο αντίληψης δεδομένων για την Α (Πλήθος μαθητών:26,

Πλήθος απαντήσεων:104) και Β δημοτικού (Πλήθος μαθητών:41,

Πλήθος απαντήσεων:164), πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

ΕΠΙΠΕΔΟ ΑΝΤΙΛΗΨΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ/ ΤΑΞΗ	$1^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	$2^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	$3^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	$4^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	Δεν απάντησαν
Α ΤΑΞΗ	41 (39%)	37 (36%)	18 (17%)	0 (0%)	8 (8%)
Β ΤΑΞΗ	33 (20%)	63(38,5%)	55(33,5%)	0 (0%)	13 (8%)

Πίνακας 4. Συχνότητα απαντήσεων σε κάθε επίπεδο αντίληψης δεδομένων πριν τη διδακτική παρέμβαση

ΕΠΙΠΕΔΟ ΑΝΤΙΛΗΨΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ/ ΤΑΞΗ	$1^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	$2^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	$3^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	$4^{Ο}$ ΕΠΙΠΕΔΟ	Δεν απάντησαν
Α ΤΑΞΗ	13(12,5%)	16 (15%)	65(62,5%)	5(5%)	5 (5%)
Β ΤΑΞΗ	1 (0,5%)	12 (7%)	131(80%)	14 (8,5%)	6 (4%)

Πίνακας 5. Συχνότητα απαντήσεων σε κάθε επίπεδο αντίληψης δεδομένων μετά τη διδακτική παρέμβαση

Από τους παραπάνω πίνακες φαίνεται ότι στην Α΄ δημοτικού 5% των μαθητών και μαθητριών έδωσαν απάντηση τέταρτου επιπέδου αντίληψης δεδομένων μετά τη διδακτική παρέμβαση, ενώ στην Β΄ δημοτικού το αντίστοιχο ποσοστό είναι 8,5%. Και στις δύο τάξεις του δημοτικού παρατηρήθηκε σημαντική αύξηση των ποσοστών των απαντήσεων που αντιστοιχούν στο τρίτο επίπεδο αντίληψης των δεδομένων, στην Α΄ δημοτικού από 17% σε 62,5% και στην Β΄ δημοτικού από 33,5 % σε 80%. Φαίνεται ότι και στις δύο τάξεις η πλειοψηφία των μαθητών παιδιών μετά τη διδακτική παρέμβαση αναγνώρισαν το εύρος τιμών των δεδομένων και επέλεξαν ως τιμή πρόβλεψης μία τιμή μέσα από το εύρος τιμών. Στο πρώτο επίπεδο αντίληψης δεδομένων αντιστοιχήθηκαν οι απαντήσεις των περισσοτέρων μαθητών της Α΄ δημοτικού (39%) πριν τη διδακτική παρέμβαση σε αντίθεση με την Β΄ δημοτικού, όπου μόνο το 20% των απαντήσεων αντιστοιχούσαν σε αυτό το επίπεδο. Τα αντίστοιχα ποσοστά μετά τη διδακτική παρέμβαση ήταν αντίστοιχα 12,5% για την Α΄ δημοτικού και μόνο 0,5% για την Β΄ δημοτικού. Το ποσοστό των απαντήσεων στο δεύτερο επίπεδο αντίληψης δεδομένων ήταν περίπου το ίδιο για τους μαθητές και τις μαθήτριες της Α΄ δημοτικού (36%) και της Β΄ δημοτικού (38,5%) πριν τη διδακτική παρέμβαση. Μετά τη διδακτική παρέμβαση το ποσοστό αυτό μειώθηκε σε 15% για την Α΄ δημοτικού και σε 7% για την Β΄ δημοτικού.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας καταδεικνύουν ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες που συμμετείχαν επωφελήθηκαν από την εμπειρία τους στη διδακτική παρέμβαση και ανέπτυξαν την αντίληψή τους για τα δεδομένα. Σε συμφωνία με αντίστοιχες έρευνες (English, 2013; Oslington et al., 2020) αναδείχθηκε το γεγονός ότι η εμπλοκή των μαθητών και μαθητριών με δραστηριότητες πρόβλεψης δημιουργεί κατάλληλες μαθησιακές ευκαιρίες για την κατανόηση των δεδομένων και την δημιουργία στατιστικών συλλογισμών. Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται ότι ένα πολύ μικρό ποσοστό απαντήσεων ήταν επιπέδου αντίληψης δεδομένων 4, γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται και από άλλες έρευνες (Cobb, 1999; Konold et al., 2015) που καταδεικνύουν τη δυσκολία ακόμη και μεγαλύτερων μαθητών και μαθητριών στην αντίληψη του συνόλου των δεδομένων ως μονάδα ανάλυσης. Επίσης, οι μαθητές και οι μαθήτριες της Β΄ δημοτικού παράγουν πιο πολλές απαντήσεις από τους μαθητές και της μαθήτριες της Α΄ δημοτικού στο τρίτο επίπεδο αντίληψης

δεδομένων και λιγότερες απαντήσεις στο πρώτο επίπεδο αντίληψης δεδομένων μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Από τις απαντήσεις των παιδιών διαμορφώθηκαν διακριτές κατηγορίες σε κάθε επίπεδο αντίληψης δεδομένων, επεκτείνοντας την υπάρχουσα έρευνα (Konold et al., 2015) στους τρόπους με τους οποίους αντιλαμβάνονται οι μαθητές και οι μαθήτριες τα στατιστικά δεδομένα. Οι κατηγορίες που αναδείχθηκαν μπορούν να συντελέσουν στο σχεδιασμό πιο πλούσιων και περιεκτικών σε νόημα μαθησιακών δραστηριοτήτων, δεδομένου ότι από τη σύγχρονη έρευνα προτείνεται η ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών άτυπης στατιστικής συμπερασματολογίας από το νηπιαγωγείο (Makar & Rubin, 2018). Ωστόσο, η έρευνα αυτή περιορίστηκε σε μια συγκεκριμένη σχολική μονάδα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και κρίνεται σκόπιμο να διερευνηθεί η αντίστοιχη ανταπόκριση σε περισσότερες ομάδες μαθησιακού πληθυσμού με άλλα χαρακτηριστικά (συμπερίληψης ευάλωτων ομάδων, ειδικών μαθησιακών χαρακτηριστικών, διαφορετικού οικονομικού προφίλ).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bryman, A. (2016). *Social Research Methods* (5th ed.). Oxford

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)* (2nd ed.). American Statistical Association.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking.* Kluwer Academic Publishers. http://site.ebrary.com/id/10139730

Cobb, P. (1999) Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 5-44.

English, L. D. (2012). Data modeling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics, 81*, 15-30. DOI 10.1007/s10649-011-9377-3

English, L. D. (2013). Reconceptualising statistical learning in the early years. In L. D. English & J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 67-82). Dordrecht: Springer

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007) How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review, 75* (3), 372-396. doi: 10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Konold, C., Higgins, T., Russell S.J., Khalil, K. (2015). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics, 88*, 305-325. DOI 10.1007/s10649-013-9529-8

Makar, K. (2013). Predict! Teaching statistics using informal statistical inference. *Australian Mathematics Teacher*, *69*(4), 34-40.

Makar, K. (2016). Developing young children's emergent inferential practices in statistics. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(1), 1-24. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107820

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82-105.

Makar, K. & Rubin, A. (2017). Learning about statistical inference. In D.Ben- Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds.), *The International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Cham, Switzerland: Springer

Meletiou-Mavrotheris, M. & Paparistodemou E. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences. *Educational Studies in Mathematics, 88*, 385-404. DOI 10.1007/s10649-014-9551-5

Authors (2015). School socio-cultural identity and perceived parental involvement about mathematics learning in Greece. *REDIMAT*, *4*(3), 234-259. doi: 10.4471/redimat.2015.1527

Oslington, G., Mulligan, J., Bergen P.V. (2020) Third- graders' predictive reasoning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *104*, 5-24. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09949-0

Watson, J. (2007, August). Facilitating beginning inference with Tinker Plots for novice grade 7 students. *Paper presented at the Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy* (SRTL-5). Warwick, UK.

Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies *Educational Studies in Mathematics, 96*, 33-47. DOI 10.1007/s10649-017-9764-5

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 40-58.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΡΓΩΝ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Χρήστος Σούραλης, Χρυσαυγή Τριανταφύλλου, Κωνσταντίνος Στουραΐτης

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

c.souralis@gmail.com chrtriantafillou@gmail.com kstouraitis@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα μελετά πως διαμορφώνονται, στα πλαίσια της επιμόρφωσης για το νέο πρόγραμμα σπουδών, τα μαθηματικά έργα με κανονικότητες στην Α΄ Γυμνασίου και οι διδακτικές πρακτικές 5 εκπαιδευτικών πειραματικών σχολείων. Υιοθετήθηκε η συμμετοχική προσέγγιση για την θέαση της σχέσης των εκπαιδευτικών με το πρόγραμμα σπουδών. Τα έργα είναι κυρίως προβλήματα με ρεαλιστικό πλαίσιο και στηρίζουν τη μαθηματική δραστηριότητα με οπτικά βοηθήματα και χειραπτικά υλικά. Οι προσαρμογές των έργων και της διδακτικής διαχείρισης κυρίως εστίαζαν στην υποστήριξη και την εμπλοκή όλων των μαθητών με την αλγεβρική γενίκευση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδασκαλία έργων με κανονικότητες ή μοτίβα παρέχει ευκαιρίες ανάπτυξης της μεγάλης μαθηματικής ιδέας της γενίκευσης που κατέχει κεντρική θέση στον μαθηματικό συλλογισμό (Τζεκάκη, Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2019) και συνδέεται άμεσα με τις μαθηματικές πρακτικές της επίλυσης προβλήματος και της μοντελοποίησης (Demonty, Vlassis & Fagnant, 2018; Amit & Neria, 2008). Αυτές οι διαστάσεις βρίσκονται στον πυρήνα της τρέχουσας μεταρρύθμισης στη διδασκαλία των μαθηματικών που προωθείται μέσα από τα νέα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) στα Μαθηματικά. Ταυτόχρονα, η υλοποίηση μιας μεταρρύθμισης αποτελεί μια σύνθετη διαδικασία που έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές (π.χ. Στουραΐτης & Πόταρη, 2015). Στη διαδικασία αυτή πέραν της παροχής των πόρων του νέου ΠΣ, όπως τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ) και ο Οδηγός του Εκπαιδευτικού, απαιτείται και η υποστήριξη με προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης που εστιάζουν στην αλλαγή της διδασκαλίας και μάθησης (Litke, Corven & Sternberg, 2023). Έτσι, το πλαίσιο της επιμόρφωσης για τα νέα ΠΣ συμπεριλάμβανε συναντήσεις των εκπαιδευτικών όπου μοιράζονταν τους σχεδιασμούς τους και αναστοχάζονταν πάνω στη διδασκαλία τους.

Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε στον σχεδιασμό και τον αναστοχασμό μιας ομάδας πέντε εκπαιδευτικών σχετικά με τη διδασκαλία των κανονικοτήτων σε τάξεις της Α΄ Γυμνασίου. Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι: ΕΕ1: Τι είδους έργα με κανονικότητες επιλέγουν και πώς τα προσαρμόζουν; ΕΕ2: Πώς τα διαχειρίζονται διδακτικά; ΕΕ3: Πώς αιτιολογούν τις παραπάνω επιλογές τους;

Τα είδη των διδακτικών επιλογών που αφορούν τη διαδικασία υλοποίησης ενός νέου ΠΣ δεν έχουν ερευνηθεί ιδιαίτερα (Ahl et al., 2022). Ταυτόχρονα, είναι περιορισμένες οι έρευνες που σχετίζονται με τη διερεύνηση των διδακτικών επιλογών και την αιτιολόγησή τους κατά την

εισαγωγή καινοτόμων προγραμμάτων σπουδών στην ελληνική τάξη των μαθηματικών. Επιπλέον, στον ελληνικό χώρο οι περισσότερες έρευνες σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση έργων με κανονικότητες αφορούν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση (π.χ. Τζεκάκη κ. ά., 2019).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η συμμετοχική προσέγγιση

Πολλοί ερευνητές αναγνωρίζουν ότι ο εκπαιδευτικός δεν μεταφέρει πιστά εκείνο που συνέλαβαν οι συντάκτες του ΠΣ, αλλά συνδιαμορφώνει τα μαθηματικά που τελικά διδάσκονται στην τάξη (Remillard, 2005). Οι εκπαιδευτικοί και το ΠΣ εμπλέκονται σε μια δυναμική αλληλεπίδραση κατά την οποία το ΠΣ επηρεάζει, προτείνει και προκαλεί τον αναστοχασμό των εκπαιδευτικών και οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν, προσαρμόζουν και τροποποιούν τα μαθηματικά έργα. Αυτή η αλληλεπίδραση περιγράφεται ως μια συμμετοχική σχέση μεταξύ των εκπαιδευτικών και των πόρων ενός ΠΣ. Ο Brown (2009) αναγνωρίζει τρεις διαφορετικούς τρόπους χρήσης των υλικών: *off loading-πιστή εφαρμογή* όταν ο εκπαιδευτικός μεταφέρει αυτούσιες στην τάξη τις οδηγίες και τα έργα του ΠΣ, *adapting-προσαρμογή* όταν ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί το ΠΣ, προσαρμόζοντας το όμως κατάλληλα και *improvising-αυτοσχεδιασμός* όταν ο εκπαιδευτικός λαμβάνει αποφάσεις που μπορεί να αντικαθιστούν ή να προσθέτουν κάτι σε σχέση με το ΠΣ.

Ο Choppin (2011) μελέτησε τη χρήση των υλικών ενός νέου ΠΣ από μια ομάδα εκπαιδευτικών. Ο ερευνητής κατέληξε ότι κάποιοι εκπαιδευτικοί παρέμειναν μόνο στο μαθηματικό περιεχόμενο του ΠΣ ενώ άλλοι αναγνώρισαν ποια άλλα στοιχεία του ΠΣ, πέραν του μαθηματικού περιεχομένου, μπορούν να λειτουργούν ως πόροι υποστήριξης της σκέψης των μαθητών. Στη δεύτερη περίπτωση οι εκπαιδευτικοί ανέπτυξαν μια πιο βαθιά γνώση των πόρων του ΠΣ που επηρέασε και τους τρόπους χρήσης του. Σε αυτή την περίπτωση ο ερευνητής προσδιόρισε τις προσαρμογές των πόρων του νέου ΠΣ ως *προσαρμογές μάθησης* (learned adaptations).

Η διδασκαλία μαθηματικών έργων με κανονικότητες

Στο νέο ΠΣ η κανονικότητα περιγράφεται ως ο κανόνας, η δομική μονάδα, τα αναλλοίωτα χαρακτηριστικά ή οι γενικές ιδιότητες που μπορεί να εμφανίζονται σε μια συλλογή μαθηματικών αντικειμένων. Τα έργα με κανονικότητες μπορεί να δίνονται σε μορφή αριθμητική, εικονιστική ή γεωμετρικών σχημάτων. Το πλαίσιο μπορεί να είναι μαθηματικό ή ρεαλιστικό και να συνδέεται και με την επίλυση προβλήματος. Η γενίκευση σε έργα με μοτίβα μπορεί να είναι αριθμητική και να γίνεται για την εύρεση κάποιου όρου κοντινού στους δοθέντες, αναπτύσσοντας την

προσθετική στρατηγική όπου ο λύτης προσθέτει κάτι σταθερό ώστε να οδηγηθεί στον αμέσως επόμενο όρο. Ή μπορεί να γίνεται για την εύρεση κάποιου μακρινού όρου από τους δοθέντες, όπου ο λύτης αναγκάζεται να στραφεί στην πολλαπλασιαστική στρατηγική (Amit & Neria, 2008; Demonty et al., 2018). Οι συνήθεις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών που δεν θεωρούν ότι η αριθμητική γενίκευση είναι μια πλούσια αλγεβρική δραστηριότητα, είναι μια από τις συνηθισμένες διδακτικές δυσκολίες (Demonty et al., 2018). Προτείνεται η αλληλεπίδραση ανάμεσα στους μαθητές και στον εκπαιδευτικό σαν μια στρατηγική υποστήριξης των μαθητών στην εύρεση του γενικού όρου μιας κανονικότητας (Ellis, 2011). Συνεπώς, η έρευνα έχει αναδείξει δυσκολίες των εκπαιδευτικών στη διδακτική διαχείριση έργων με κανονικότητες στη σχολική τάξη.

Η παρούσα εργασία μελετά τις προσαρμογές των εκπαιδευτικών κατά τον σχεδιασμό και την διδακτική διαχείριση έργων με κανονικότητες στην Α΄ Γυμνασίου στα πλαίσια μιας εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της έρευνας

Στο νέο ΠΣ οι κανονικότητες εμφανίζονται σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. Ειδικά, στο Γυμνάσιο αφορούν πρώτου και δευτέρου βαθμού κανονικότητες. Το πλαίσιο της έρευνας είναι η διετής επιμόρφωση εκπαιδευτικών στο νέο ΠΣ στα Μαθηματικά. Στην επιμόρφωση οι εκπαιδευτικοί είχαν την ευκαιρία να πληροφορηθούν για το νέο ΠΣ, να το μελετήσουν, να σχεδιάσουν διδασκαλίες με περιεχόμενο από νέες θεματικές περιοχές (π.χ. κανονικότητες, γεωμετρικοί μετασχηματισμοί), να συζητήσουν τους σχεδιασμούς τους με τους συναδέλφους τους, να υλοποιήσουν πειραματικές διδασκαλίες παρουσία κάποιου συναδέλφου τους και να αναστοχαστούν σχετικά με τη διδασκαλία τους. Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονταν να συναντιούνται σε μικρές ομάδες και να ανταλλάσσουν ιδέες για το σχεδιασμό και τον αναστοχασμό των διδασκαλιών που αφορούν ενότητες του νέου ΠΣ. Η παρούσα έρευνα μελετά 2 συναντήσεις μιας μικρής ομάδας 5 εκπαιδευτικών που εργάζονταν σε Πειραματικά σχολεία. Οι εκπαιδευτικοί είναι ο Πέτρος, η Όλγα, η Βάγια, η Αρχοντία και ο Δήμος (ψευδώνυμα) που συνεργάστηκαν εξ αποστάσεως στο σχεδιασμό και την υλοποίηση νέων θεματικών ενοτήτων. Η εστίαση σε αυτή την εργασία είναι η διδασκαλία έργων με κανονικότητες στην Α΄ Γυμνασίου.

Τα ερευνητικά δεδομένα

Τα ερευνητικά δεδομένα είναι δύο βιντεοσκοπημένες ωριαίες εξ αποστάσεως συναντήσεις της ομάδας των πέντε εκπαιδευτικών με θέμα τη διδασκαλία έργων με μοτίβα. Η πρώτη συνάντηση (σ1) αφορούσε τον σχεδιασμό και η δεύτερη (σ2) τον αναστοχασμό που ακολούθησε τα μαθήματα αυτά. Στις συναντήσεις αυτές εμφανίζονται και πόροι που δόθηκαν στους εκπαιδευτικούς και δεν περιλαμβάνονται στο ΠΣ. Η απουσία σχολικού εγχειριδίου σύμφωνα με το νέο ΠΣ, κατά τη διάρκεια της παρούσας μελέτης, είναι άξια αναφοράς καθώς στην διδασκαλία των μαθηματικών είναι έντονη η εξάρτηση από το σχολικό βιβλίο (Baker, 2022).

Ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων ακολούθησε τα εξής βήματα: Βήμα 1ο: Απομαγνητοφώνηση των δύο συναντήσεων. Βήμα 2ο: Επιλογή επεισοδίων που αφορούσαν συζητήσεις των μελών της ομάδας σχετικά με τον σχεδιασμό και την υλοποίηση έργων με κανονικότητες. Βήμα 3ο: Κωδικοποίηση των θεμάτων στα οποία αναφέρονται οι εκπαιδευτικοί στα συγκεκριμένα επεισόδια σε σχέση με τη διδασκαλία κανονικοτήτων και τις συνδέσεις που επιχειρούν με πτυχές του νέου ΠΣ. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία της θεμελιωμένης θεωρίας (Charmaz, 2006). Βήμα 4ο: Έγινε ομαδοποίηση των κωδικών σε ευρύτερους άξονες με σκοπό την απάντηση των τριών ερευνητικών ερωτημάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

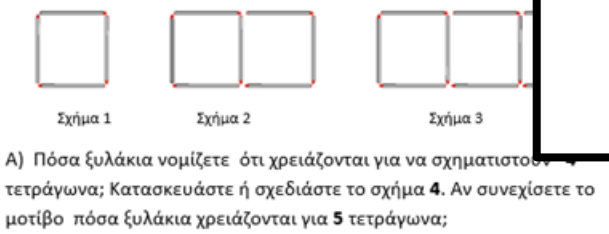
Το είδος των έργων με κανονικότητες και οι προσαρμογές τους

Τα έργα που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί: Στο έργο *Τα σπίρτα* (έργο 1) που διαμόρφωσε η Όλγα, δίνονται ως στήριγμα οι σχηματικές αναπαραστάσεις των 3 πρώτων όρων της κανονικότητας και καλούνται οι μαθητές να κατασκευάσουν τον 4ο και τον 5ο όρο. Καλούνται να υπολογίσουν το πλήθος των σπίρτων που θα χρειαστούν για την κατασκευή του 100ου και ν-οστού όρου. Το φύλλο εργασίας που σχεδίασε ο Πέτρος περιέχει 2 έργα. Τα έργα *πλακόστρωση σε μορφή σκάλας* (έργο 2) και *πλακόστρωση σε μορφή πυραμίδας* (έργο 3) διαθέτουν ως πλαίσιο την πλακόστρωση της σχολικής αυλής (μπροστινής και πίσω αντίστοιχα). Τα πλακάκια τοποθετούνται ακολουθώντας έναν διαφορετικό σε κάθε περίπτωση κανόνα (μοτίβο). Και στα τρία έργα αναμένεται η εμπλοκή των μαθητών με την αριθμητική και αλγεβρική γενίκευση αφού για την εύρεση κάποιου όρου απαιτείται ο υπολογισμός κάποιων αθροισμάτων.

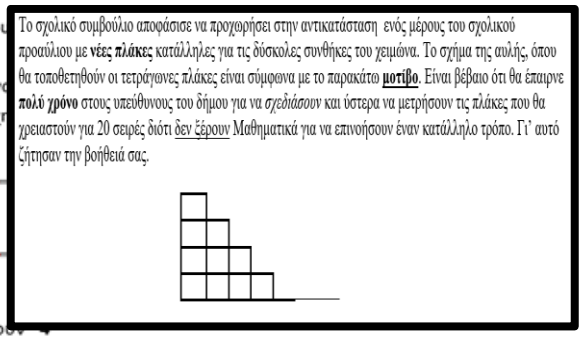
Τα τρία έργα επιλέχθηκαν και τροποποιήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς με στόχο την υλοποίηση των ΠΜΑ των κανονικοτήτων της Α΄ Γυμνασίου. Το φύλλο εργασίας σχεδιάστηκε από τον Πέτρο επιλέγοντας και τροποποιώντας έργα που δόθηκαν στο πλαίσιο της επιμόρφωσης. «Δούλεψα από μια ιδέα που μου ήρθε από ένα έγγραφο με κανονικότητες που είχε στείλει το ΙΕΠ [...] Αντιστοιχεί σε ένα καινούργιο ΠΜΑ…να

αναγνωρίζουν και να συγκρίνουν και να περιγράφουν κανονικότητες» (Πέτρος, σ1). Στο έργο 2, οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν, συμπληρώσουν και επεκτείνουν την κανονικότητα υλοποιώντας συγκεκριμένα ΠΜΑ του νέου ΠΣ. «Να συμπληρώνουν, να επεκτείνουν και να δημιουργούν […] αυτό που θα κάνουν μόνοι τους» (Πέτρος, σ1) και να λύσουν ρεαλιστικά προβλήματα «το ΠΜΑ […] που αφορά επίλυση προβλημάτων με ρεαλιστικό πλαίσιο υλοποιείται στα έργα *πλακόστρωση με μορφή σκάλας* και *με μορφή πυραμίδας* μιας και συνδέεται με την καθημερινή ζωή» (Πέτρος, σ1).

Έργο 1: Τα σπίρτα



Έργο 2: Η πλακόστρωση σε μορφή σκάλας



Πίνακας 1. Τα έργα 1 και 2

Αύξηση της μαθηματικής πρόκλησης (προσαρμογή): Στη συνάντηση σχεδιασμού η Βάγια αναφέρθηκε στις προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών σχετικά με το άθροισμα Gauss και αυτό οδήγησε τον Πέτρο να τροποποιήσει το 3ο ερώτημα (έργο 2) για να αυξηθεί η πρόκληση καλώντας τους μαθητές να κατασκευάσουν τον 20ο όρο αντί για τον 10ο:

Βάγια: Αυτό θυμίζει λίγο και ένα ιστορικό σημείωμα…που μιλάει για τον Gauss.

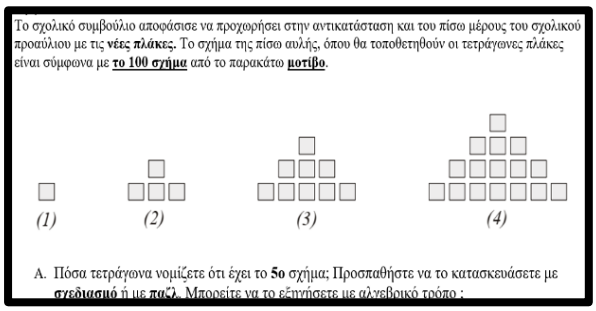
Πέτρος: Ναι για αυτό το άλλαξα…το έκανα μέχρι 20…αν έχει κάνει μέχρι 10 με Gauss…θα βοηθήσει τα παιδιά. (σ1)

Αφαίρεση ερωτήματος στο έργο 3 (προσαρμογή): Ο Πέτρος αφαίρεσε από το φύλλο εργασίας ερωτήματα που εστίαζαν στην αλγεβρική αναπαράσταση της απόδειξης του γενικού όρου της κανονικότητας (Εικόνα 1). Αυτά τα ερωτήματα φαίνεται να μην ταιριάζουν με την γεωμετρική λογική του υπόλοιπου φύλλου εργασίας και ο Πέτρος αποφασίζει τελικά να τα αφαιρέσει.

$$(1+2+3+\ldots\ldots+\nu)+(1+2+3+\ldots\ldots+\nu\text{-}1)=\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\frac{(\nu-1)\nu}{2}=\frac{\nu}{2}[(\nu+1)+(\nu\text{-}1)]=\frac{\nu\bullet 2\nu}{2}=\nu^2$$

Εικόνα 1. Το ερώτημα που αφαιρέθηκε

Χρήση χειραπτικών εργαλείων (προσαρμογή). Ο Πέτρος επέλεξε να χρησιμοποιήσει χειραπτικό εργαλείο (αυτοκόλλητα χαρτάκια post it) με σκοπό την υποστήριξη των μαθητών στην εύρεση του μοτίβου και του αθροίσματος των τετραγώνων «θα τους δώσω τετραγωνάκια με τα οποία θα μπορέσουν να υλοποιήσουν το μοτίβο, να το αλλάξουν θέσεις να το μετρήσουν και μέσα από αυτό να βγει ένα είδος κανονικότητας» (Πέτρος, σ1).

Έργο 3: Η πλακόστρωση σε μορφή πυραμίδας	Προσαρμογή του έργου 3 με τη χρήση χαρτάκια post it
 Το σχολικό συμβούλιο αποφάσισε να προχωρήσει στην αντικατάσταση και του πίσω μέρους του σχολικού προαύλιου με τις **νέες πλάκες**. Το σχήμα της πίσω αυλής, όπου θα τοποθετηθούν οι τετράγωνες πλάκες είναι σύμφωνα με **το 100 σχήμα** από το παρακάτω **μοτίβο**. (1) (2) (3) (4) Α. Πόσα τετράγωνα νομίζετε ότι έχει το **5ο** σχήμα; Προσπαθήστε να το κατασκευάσετε με **σχεδιασμό** ή με **παζλ**. Μπορείτε να το εξηγήσετε με αλγεβρικό τρόπο ;	

Πίνακας 2. Το έργο 3 και η προσαρμογή του

Προβλέψεις μαθητικής δράσης των μαθητών (προσαρμογή): Φαίνεται ότι ο Πέτρος αναμένει ότι οι μαθητές καθώς θα χειρίζονται τις οπτικές αναπαραστάσεις των κανονικοτήτων στο έργο 3, θα περιστρέψουν το δοθέν σχήμα αναπτύσσοντας έτσι την πρακτική της οπτικοποίησης κάτι που συνδέεται με τις μαθηματικές πρακτικές που προτείνει το ΠΣ «έχουμε το τρίγωνο και θέλουμε να το περιστρέψουμε» (Πέτρος, σ1).

Αιτιολόγηση των επιλογών και των προσαρμογών

Οι αιτιολογήσεις των εκπαιδευτικών για τις επιλογές και τις προσαρμογές τους στη διαμόρφωση των έργων αφορούσαν: την αντιστοίχιση με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών (π.χ. μέσω της αύξησης της μαθηματικής πρόκλησης), τις αναμενόμενες δυσκολίες τους (π.χ. αφαίρεση ερωτήματος), την υποστήριξη της γεωμετρικής προσέγγισης και της αλγεβρικής γενίκευσης (π.χ. μέσω του προσεκτικού σχεδιασμού των τριών έργων) και την ευθυγράμμιση με τα συγκεκριμένα ΠΜΑ του νέου ΠΣ.

Η διδακτική διαχείριση των έργων στη σχολική τάξη

Σχεδιασμός κατάλληλων ερωτήσεων: Ο Πέτρος έχει ετοιμάσει κάποιες ερωτήσεις για τους μαθητές αν διαπιστώσει ότι χρειάζονται επιπλέον στήριξη στην ανάπτυξη της γεωμετρικής απόδειξης και την δημιουργία του ορθογωνίου «Εδώ θα πέσουν ερωτήσεις… Πως γεωμετρικά μπορεί να υλοποιηθεί; Θα το διαιρέσουμε δια 2; δια 3; Δια 4;» (Πέτρος, σ1).

Έμφαση στην σκέψη των μαθητών: Ο Πέτρος εστιάζει στην ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών και όχι στην ορθότητα των απαντήσεων τους, καλώντας τους να εκθέσουν στην ολομέλεια της τάξης το σκεπτικό τους: «σηκώναμε ένα παιδί, έναν μαθητή από την [κάθε] ομάδα, να γράψει την σκέψη του, την σκέψη του όχι τη λύση» (Πέτρος, σ2).

Αναγνώριση δυσκολιών των μαθητών στην αλγεβρική γενίκευση και διδακτική διαχείρισή της. Μια σημαντική δυσκολία που εντόπισαν ο Πέτρος και η Όλγα αφορά την αποτυχία των μαθητών να βρουν τον 100-στο όρο. «Το κρίσιμο ήταν το εκατοστό σχήμα δηλαδή πως να πάνε από το έκτο στο εκατοστό. Εκεί τα παιδιά χάθηκαν λίγο» (Πέτρος, σ2). Έτσι, απέτυχαν και να γενικεύσουν αλγεβρικά βρίσκοντας τον γενικό όρο του μοτίβου. «[Αυτή η ομάδα] έβγαλε τον γενικό κανόνα. Ήτανε η μόνη ομάδα που έφτανε εκεί από τις οκτώ» (Πέτρος, σ2). Ο Πέτρος αναφέρει «Αυτό είναι ένα θέμα το οποίο το συζητήσαμε με την συνάδελφό μου στο σχολείο» (Πέτρος, σ2). Αποφάσισαν στο επόμενο μάθημα, που υλοποίησε η Όλγα, να ενισχύσουν την κοινωνική πρακτική της συνεργασίας των μαθητών. Η Όλγα αρχικά είχε σχεδιάσει 2 μόνο μαθητές να παρουσιάσουν τις λύσεις τους στην τελική ομαδική συζήτηση αλλά τελικά προτίμησε η παρουσίαση να γίνεται μετά από κάθε υπό-ερώτημα: «κάθε φορά που τελείωνε μια ομάδα … σηκώναμε έναν μαθητή από την ομάδα, να γράψει την σκέψη του». Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, οι περισσότερες ομάδες να λύσουν τα δοθέντα ερωτήματα με όμοιο τρόπο και σε ίδιο χρόνο και άρα να αναπτύξουν την αλγεβρική γενίκευση όπως περιγράφει ο Πέτρος «Γιατί έφτασαν όλες οι ομάδες μαζί ταυτόχρονα ανά ερώτημα στα ίδια σχεδόν αποτελέσματα και στον γενικό κανόνα» (σ2).

Προσθήκη χρόνου ατομικής εργασίας. Οι Πέτρος και Όλγα εντόπισαν την δυσκολία συμμετοχής στην ομαδική εργασία και ανταποκρίθηκαν σε αυτό το ζήτημα σχεδιάζοντας στο επόμενο μάθημα να προηγηθεί της ομαδικής εργασίας, ολιγόλεπτη ατομική εργασία «ένα παιδί σε κάθε ομάδα δεν έκανε τίποτα…για αυτό σκέφτηκα σήμερα να τους βάλω στην αρχή [να δουλέψουν ατομικά]» (Όλγα, σ2). Αυτή η αλλαγή στον σχεδιασμό είχε

στόχο όλοι οι μαθητές να έχουν κάποιες σκέψεις για το πρόβλημα και να τις μοιραστούν με την ομάδα τους.

Αιτιολόγηση της διδακτικής διαχείρισης των έργων

Οι αιτιολογήσεις των εκπαιδευτικών για τις επιλογές διαχείρισης των έργων στην τάξη αφορούσαν: την υποστήριξη των μαθητών στην ανάπτυξη οπτικοποιήσεων και γενικεύσεων (π.χ. χρήση κατάλληλων ερωτήσεων), την έμφαση στην ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού (π.χ. επιδιώκοντας τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης) και την εμπλοκή όλων των μαθητών (π.χ. μέσω της συνεργασίας τους σε ομάδες, επέκταση της ατομικής εργασίας και συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί κατά το σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδασκαλίας τους αξιοποίησαν τα έργα του ΠΣ για τις κανονικότητες με τρόπο που «αντανακλούσε την συμβολή τόσο του ΠΣ, όσο και των προσωπικών τους πόρων» (Brown, 2009, σ. 25). Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί στην προσπάθειά τους να υλοποιήσουν τα νέα ΠΜΑ που αφορούσαν τη διδασκαλία έργων με κανονικότητες στην Α΄ Γυμνασίου επέλεξαν και σχεδίασαν έργα όπου τα μοτίβα ήταν, είτε σε μορφή εικονιστική (έργο 2, 3) είτε σε μορφή γεωμετρικών σχημάτων (έργο 1). Το πλαίσιο των έργων θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ρεαλιστικό. Τα έργα καλούσαν τους μαθητές στην εύρεση κοντινών όρων (αριθμητική γενίκευση) και μακρινών όρων (αλγεβρική γενίκευση) της κανονικότητας. Φαίνεται ότι ο τρόπος χρήσης των υλικών μπορεί να χαρακτηριστεί ως *προσαρμογή* (Brown, 2009) καθώς οι εκπαιδευτικοί δεν περιορίστηκαν σε μια πιστή εφαρμογή των υλικών του νέου ΠΣ, αλλά ούτε κατάφεραν να φτάσουν σε μια πλήρη αυτονόμηση από αυτά και να αυτοσχεδιάσουν. Κυρίως προσάρμοσαν τα έργα τροποποιώντας ερωτήματα, προσθέτοντας ρεαλιστικό πλαίσιο, αξιοποιώντας χειραπτικά υλικά και εικονιστικές αναπαραστάσεις.

Η διδακτική διαχείριση των έργων που σχεδίασαν οι συμμετέχοντες αφορούσε την έμφαση στον μαθηματικό συλλογισμό αλλά και σε αλλαγές στην οργάνωση του μαθήματος στην τάξη μετά από συζητήσεις με τα άλλα μέλη της ομάδας. Η πρόκληση που συνάντησαν οι εκπαιδευτικοί ήταν η διαχείριση της δυσκολίας των μαθητών να κάνουν την αλγεβρική γενίκευση και να βρουν τον γενικό τύπο του μοτίβου (Demonty et al., 2018). Ωστόσο, οι συμμετέχοντες προσανατολίστηκαν στην αλληλεπίδραση στην τάξη (Ellis, 2011), τόσο κατά τον σχεδιασμό, ετοιμάζοντας υποστηρικτικές ερωτήσεις, όσο και κατά τη διάρκεια της

διδασκαλίας, εμπλουτίζοντας τις δικές τους παρεμβάσεις και αξιοποιώντας την εργασία των μαθητών σε ομάδες και στη συζήτηση στην ολομέλεια. Οι αιτιολογήσεις των συμμετεχόντων για τις διδακτικές επιλογές τους και οι προσαρμογές που έκαναν αφορούσαν κυρίως την υποστήριξη όλων των μαθητών.

Καθώς οι εκπαιδευτικοί ξεκίνησαν να χρησιμοποιούν τους πόρους του νέου ΠΣ κατανόησαν τις ευκαιρίες μάθησης που το ΠΣ δημιουργεί για τους μαθητές στη διδασκαλία έργων με κανονικότητες στην Α΄ Γυμνασίου. Έτσι, αναδείχθηκαν ευκαιρίες μάθησης και για τους εκπαιδευτικούς, όπως η υιοθέτηση των μαθηματικών πρακτικών της οπτικοποίησης και της χρήσης χειραπτικών εργαλείων καθώς και η ανάπτυξη της κοινωνικής πρακτικής της συνεργασίας, προσαρμοσμένες στο πλαίσιο της τάξης τους. Δηλαδή, οι προσαρμογές που υιοθέτησαν οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να οριστούν ως *προσαρμογές μάθησης* όπως τις ορίζει ο Choppin (2011). Η παρούσα έρευνα προσπαθεί να συμβάλλει στην κατανόηση του ερευνητικού πεδίου για το πώς ένας εκπαιδευτικός προσπαθεί να υλοποιήσει ένα νέο ΠΣ με τρόπους που βασίζονται και επεκτείνουν τις προθέσεις των σχεδιαστών του.

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΕΙΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί τμήμα διδακτορικής διατριβής και χρηματοδοτείται από το τμήμα Μαθηματικών της σχολής Θετικών Επιστημών του ΕΚΠΑ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ahl, L. M., Aguilar, M. S., Jankvist, U. T., Misfeldt, M., & Prytz, J. (2022). Professional development as a means for implementing mathematics education innovations: results from a systematic review. In L. Mattsson, J. Häggström, M. Carlsen, C. Kilhamn, H. Palmér, M. Perez, & K. Pettersson (Eds.), *The relation between mathematics education research and teachers' professional development. Proceedings of MADIF13* (pp. 57-67). http://matematikdidaktik.org/wpcontent/uploads/2022/07/MADIF13_final.pdf

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM, 40,* 111-129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Baker, C. K. (2022). Learning to design effective professional development: The influence of integrating a coaching tool with an elementary mathematics specialist course assignment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25(5),* 555-580. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09507-2

Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17-36). New York: Routledge

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis* (2nd ed.). Sage Publications.

Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of mathematics teacher education, 14,* 331-353. https://doi.org 10.1007/s10857-011-9170-3

Demonty, I., Vlassis, J., & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 99,* 1-19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for research in mathematics education, 42(4),* 308-345. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0308

Litke, E., Corven, J., & Sternberg, K. A. (2023). Algebra-focused features of instruction: an integrated investigation of curricular guidance and instructional enactment. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1-30. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09573-8

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of educational research, 75(2),* 211-246.

Στουραΐτης, Κ. & Πόταρη, Δ. (2015). Διαλεκτικές αντιθέσεις και μετατοπίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (επιμ.). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: (σσ. 248-257)* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Τζεκάκη, Μ., Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2019). Κανονικότητες (patterning) στις μικρές ηλικίες: Συνθετική παρουσίαση ερευνών. Στο Κ. Χρίστου (Επιμ.), *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ) (σελ. 276-284).* Λευκωσία, Κύπρος: ΕΝ.ΕΔ.ΙΜ.

Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ DELEUZE ΣΤΗΝ ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΒΙΩΜΕΝΗΣ ΕΜΠΕΙΡΙΑΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Γεώργιος Κυριακόπουλος,

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, gvk_6@yahoo.gr

Περίληψη:

Η παρούσα θεωρητική εργασία διερευνά το φιλοσοφικό πλαίσιο του Gilles Deleuze και την εφαρμογή του στον τομέα της εκπαίδευσης, εστιάζοντας συγκεκριμένα στη διδασκαλία των μαθηματικών στα δημοτικά σχολεία. Οι ιδέες του Deleuze, ιδιαίτερα ο συσχετισμός της βιωμένης εμπειρίας και της ριζωματικής φύσης της μάθησης, προσφέρουν μια μοναδική θεώρηση για την επαναξιολόγηση του παραδοσιακού σχεδιασμού προγραμμάτων σπουδών και των παιδαγωγικών προσεγγίσεων. Η εργασία διερευνά πώς οι έννοιες του Deleuze μπορούν να συμβάλουν σε ένα πιο δυναμικό και μαθητοκεντρικό πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών που λαμβάνει υπόψη τις βιωμένες εμπειρίες των μαθητών του δημοτικού σχολείου.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το τοπίο της εκπαίδευσης έχει υποστεί σημαντικούς μετασχηματισμούς τις τελευταίες δεκαετίες, με αυξανόμενη αναγνώριση της ανάγκης για παιδαγωγικές προσεγγίσεις που προωθούν μια βαθύτερη αλληλεπίδραση μεταξύ πραγματικής ζωής και σχολικής γνώσης (May, 2005). Οι παραδοσιακές μέθοδοι διδασκαλίας, ιδιαίτερα στον τομέα των μαθηματικών, έχουν αντιμετωπίσει κριτική για τους αντιληπτούς περιορισμούς τους στην καλλιέργεια κριτικής σκέψης και δεξιοτήτων εφαρμογής στον πραγματικό κόσμο (Wiseman et al., 2020). Καθώς τα δημοτικά σχολεία προσπαθούν να προετοιμάσουν τους μαθητές για την πολυπλοκότητα του 21ου αιώνα, τίθεται το ερώτημα: Πώς μπορεί το πρόγραμμα σπουδών να επαναπροσδιοριστεί ώστε να λαμβάνει υπόψη τις εμπειρίες των μικρών μαθητών;

Σε αυτό το πλαίσιο, η φιλοσοφία του Gilles Deleuze προσφέρει μία ενδιαφέρουσα οπτική μέσω της οποίας μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε τις εκπαιδευτικές πρακτικές. Το έργο του Deleuze, που συχνά συνδέεται με τη μεταστρουκτουραλιστική σκέψη, παρέχει ένα θεωρητικό υπόβαθρο που δίνει έμφαση στη δυναμική, μη γραμμική και διασυνδεδεμένη φύση των μαθησιακών εμπειριών όπως αυτές αποτυπώνονται σε ένα πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών για το

Δημοτικό Σχολείο (Richerme, 2017). Η παρούσα εργασία διερευνά τις δυνατότητες της φιλοσοφίας του Deleuze να φωτίσει τη βιωμένη εμπειρία ενός προγράμματος σπουδών, με ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία των μαθηματικών στα δημοτικά σχολεία.

Το σκεπτικό για την υιοθέτηση μιας τέτοιας προσέγγισης υπαγορεύεται από τους περιορισμούς των συμβατικών παιδαγωγικών μεθόδων που συχνά μειώνουν τη μάθηση σε μια γραμμική εξέλιξη προκαθορισμένης γνώσης. Η φιλοσοφία του Deleuze, που χαρακτηρίζεται από τις έννοιες του ριζώματος, της νομαδικής σκέψης και του συναισθήματος, αμφισβητεί αυτά τα παραδοσιακά μοντέλα υποστηρίζοντας μια πιο ρευστή και ανοιχτή προσέγγιση στην εκπαίδευση και κατ' επέκταση και στο περιεχόμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών (Semetsky & Masny, 2013). Αυτή η αλλαγή προοπτικής οδηγεί σε μια εξερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τέτοιες έννοιες μπορούν να εφαρμοστούν πρακτικά στη διδασκαλία των μαθηματικών, ένα θέμα που συχνά θεωρείται άκαμπτο και αφηρημένο (Semetsky & Masny, 2013).

Εξετάζοντας τους τρόπους με τους οποίους οι ιδέες του Deleuze μπορούν να μετεξελίξουν το σχεδιασμό προγραμμάτων σπουδών και την παιδαγωγική προσέγγιση του αντικειμένου, η παρούσα εργασία στοχεύει, επιπλέον, να συμβάλει στη συνεχιζόμενη συζήτηση για την εκπαιδευτική καινοτομία (Semetsky & Masny, 2013). Τέλος, επιδιώκει να ρίξει φως στα πιθανά οφέλη της υιοθέτησης ενός πλαισίου εμπνευσμένου από τον Deleuze, το οποίο αναγνωρίζει την ποικιλομορφία των ατομικών εμπειριών και προωθεί μια πιο περιεκτική, δυναμική και ελκυστική προσέγγιση στην εκμάθηση των μαθηματικών στα Δημοτικά σχολεία.

Στο ευρύτερο πλαίσιο των σπουδών του προγράμματος σπουδών, η φιλοσοφία του Deleuze θα μπορούσε να συσχετιστεί με την έννοια του "currere" όπως εισήχθη από τον William Pinar (Semetsky & Masny, 2013). Το currere ενθαρρύνει μια στοχαστική και αυτοβιογραφική εξερεύνηση του προγράμματος σπουδών, τονίζοντας τη σημασία των προσωπικών εμπειριών και αφηγήσεων στην εκπαιδευτική διαδικασία όπως αυτή υλοποιείται στο ιστορικό παρόν.

Το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών γίνεται αντιληπτό ως μια δυναμική και εξελισσόμενη οντότητα που εστιάζει στη διαδικασία, αντανακλώντας τη βιωμένη εμπειρία των προοπτικών των μαθητών και τα ευρύτερα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια στα οποία βρίσκονται τα μαθηματικά. Ως στοχαστική διαδικασία ενθαρρύνει τους μαθητές να εξετάσουν βαθιά τις εκπαιδευτικές τους εμπειρίες και να ανταποκρίνονται

στις διαφορετικές ανάγκες και ενδιαφέροντα τους. Συνεπώς, διασφαλίζει τη σύνδεση των εκπαιδευτικών εμπειριών με ευρύτερα κοινωνικά, πολιτισμικά και ιστορικά πλαίσια, ενισχύοντας έτσι τη συνολική κατανόηση και ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών (Kyriakopoulos et al., 2023).

2. ΤΟ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ DELEUZE ΟΠΩΣ ΣΧΕΤΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Επιδιώκοντας μια ολοκληρωμένη διερεύνηση της συμβολής του Deleuze στη βιωμένη εμπειρία ενός προγράμματος σπουδών μαθηματικών στα δημοτικά σχολεία, η παρούσα εργασία εξετάζει τα ακόλουθα βασικά ερευνητικά ερωτήματα:

1. Πώς μπορούν οι έννοιες του Deleuze για το ρίζωμα, τη νομαδική σκέψη και το παιδαγωγικό κλίμα να εφαρμοστούν στο σχεδιασμό και την υλοποίηση ενός προγράμματος σπουδών μαθηματικών δημοτικού σχολείου;
2. Με ποιους τρόπους μια προσέγγιση εμπνευσμένη από τον Deleuze ενισχύει τη βιωμένη εμπειρία των μαθητών στην εκμάθηση μαθηματικών;

Το φιλοσοφικό πλαίσιο του Gilles Deleuze παρέχει ένα πλούσιο μωσαϊκό εννοιών που αμφισβητούν τις παραδοσιακές έννοιες της εκπαίδευσης και προσφέρουν εναλλακτικές θεωρήσεις για τη φύση της μάθησης. Κεντρικό στοιχείο της σκέψης του Deleuze είναι τρεις βασικές έννοιες (Deleuze & Guattari, 1987):

1. Το ρίζωμα, όπως σχεδιάστηκε από τους Deleuze και Guattari, χρησιμεύει ως μεταφορά για μη ιεραρχικές, διασυνδεδεμένες και πολλαπλές δομές. Στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, το ριζωματικό μοντέλο απορρίπτει γραμμικές, προκαθορισμένες οδούς υπέρ μιας δικτυωμένης προσέγγισης όπου η γνώση και οι εμπειρίες διασυνδέονται με μη γραμμικό τρόπο. Αυτή η έννοια ενθαρρύνει την απομάκρυνση από τις άκαμπτες δομές του προγράμματος σπουδών, ανοίγοντας δυνατότητες για ένα πιο ευέλικτο και δυναμικό μαθησιακό περιβάλλον (Cole, 2011).
2. Η νομαδική σκέψη, μια άλλη κεντρική έννοια στη φιλοσοφία του Deleuze, αμφισβητεί τις σταθερές ταυτότητες και δομές. Οι νομάδες χαρακτηρίζονται από τη συνεχή κίνηση και προσαρμοστικότητά τους, πλοηγούμενοι σε διαφορετικά εδάφη. Εφαρμοσμένη στην εκπαίδευση, η νομαδική σκέψη προκαλεί μια επανεξέταση των σταθερών ρόλων και ταυτοτήτων στη μαθησιακή διαδικασία, ενθαρρύνοντας μια ρευστή και προσαρμοστική προσέγγιση τόσο

στη διδασκαλία όσο και στο σχεδιασμό του προγράμματος σπουδών. Η νομαδική σκέψη αμφισβητεί τους σταθερούς ρόλους που παραδοσιακά συνδέονται με τους δασκάλους και τους μαθητές. Σε ένα πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών, οι εκπαιδευτικοί γίνονται διευκολυντές, πλοηγούμενοι στο μαθηματικό έδαφος μαζί με τους μαθητές. Αυτή η αλλαγή ρόλων ενθαρρύνει ένα συνεργατικό και προσαρμοστικό μαθησιακό περιβάλλον, όπου οι εκπαιδευτικοί ανταποκρίνονται στις ποικίλες ανάγκες και ενδιαφέροντα των μαθητών (Braidotti, 2011).

3. Το παιδαγωγικό κλίμα, αναφέρεται στην ένταση της εμπειρίας που υπερβαίνει τις παραδοσιακές αντιλήψεις των συναισθημάτων. Έτσι, δεν περιορίζεται στα ατομικά συναισθήματα, αλλά περιλαμβάνει τη βούληση, τις σχεσιακές και δυναμικές συνιστώσες που διαμορφώνουν τις εμπειρίες, το θυμικό. Η ενσωμάτωση του παιδαγωγικού κλίματος στην εκπαίδευση τονίζει τη σημασία της δημιουργίας ενός συναισθηματικά φορτισμένου και ελκυστικού μαθησιακού περιβάλλοντος. Μέσα σε ένα Ντελευζιανό πλαίσιο, το συναίσθημα λειτουργεί ως δυναμική επιθυμίας μέσα σε οποιοδήποτε σύνολο για να χειραγωγήσει το νόημα και τις σχέσεις, να ενημερώσει και να κατασκευάσει την επιθυμία και να δημιουργήσει δράση - δημιουργώντας διαφορετικά συναισθήματα σε οποιαδήποτε δεδομένη κατάσταση ή γεγονός.

Επιπλέον, το ριζωματικό πρόγραμμα σπουδών θα μπορούσε να ενσωματώσει εφαρμογές πραγματικού κόσμου και διεπιστημονικές συνδέσεις, δίνοντας έμφαση στην πρακτικότητα και τη συνάφεια των μαθηματικών εννοιών σε διάφορα πλαίσια (Cole, 2011). Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές θα αντιλαμβάνονταν τα μαθηματικά ως ένα ζωντανό, εξελισσόμενο θέμα με συνδέσεις με τις καθημερινές τους εμπειρίες, ευθυγραμμιζόμενοι με την έμφαση του Deleuze στην εγγενή παρουσία της γνώσης μέσα στις βιωμένες πραγματικότητες.

Ο ενεργός ρόλος των μαθητών αποτελεί βασική επιδίωξη σε ένα πρόγραμμα σπουδών που ακολουθεί αυτή τη φιλοσοφία, αναγνωρίζοντας ότι το μαθηματικό ταξίδι κάθε μαθητή είναι μοναδικό. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δημιουργήσουν ευκαιρίες για τους μαθητές ώστε να συμβάλουν στο σχεδιασμό μαθησιακών εμπειριών, προωθώντας την αίσθηση του ανήκειν και της ενδυνάμωσης της μαθητικής τους ταυτότητας αναζητώντας τη γνώση. Οι ομαδικές δραστηριότητες, οι συνεργασίες συμμαθητών και η εκπαιδευτική διαδικασία και μάθηση όταν οι μαθητές αναλαμβάνουν πρωτοβουλία τονίζουν περαιτέρω τη νομαδική φύση της μάθησης, επιτρέποντας την εμφάνιση διαφορετικών θεωρήσεων και

προσεγγίσεων μέσα στη μαθηματική κοινότητα μιας τάξης (Pignatelli, 2016).

3. ΒΙΩΜΕΝΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΣΤΗΝ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μία από τις σημαντικές προκλήσεις της παραδοσιακής μαθηματικής εκπαίδευσης έγκειται στον αγώνα της να εμπλέξει αποτελεσματικά τους μαθητές (Deleuze & Guattari, 1987). Η αφηρημένη και διαδικαστική φύση πολλών μαθηματικών εννοιών μπορεί να δημιουργήσει ένα εμπόδιο για τους μαθητές να δουν τη συνάφεια του θέματος με την καθημερινή τους ζωή (Biesta, 2013). Η παραδοσιακή προσέγγιση συχνά στερείται ευκαιριών για πρακτική, βιωματική μάθηση, καθιστώντας δύσκολο για τους μαθητές να αναπτύξουν ένα γνήσιο ενδιαφέρον και ενθουσιασμό για τα μαθηματικά. Επιπλέον, η εστίαση στην ατομική επιτυχία, παρά στη συνεργατική εξερεύνηση, μπορεί να καλλιεργήσει μια αίσθηση απομόνωσης των μαθητών μεταξύ τους και αποσύνδεσης του περιεχομένου των μαθηματικών από την πραγματική ζωή και τις πολλαπλές εφαρμογές της. Ως αποτέλεσμα, ένα σημαντικό μέρος του μαθητικού πληθυσμού αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά ως ένα εκφοβιστικό και απρόσιτο θέμα, οδηγώντας σε αποδέσμευση και αδιαφορία (Boaler, 2016).

Οι ελλείψεις που εντοπίστηκαν στις παραδοσιακές προσεγγίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης υπογραμμίζουν την πιεστική ανάγκη για αλλαγή παραδείγματος στον σχεδιασμό προγραμμάτων σπουδών και στις παιδαγωγικές πρακτικές (Deleuze & Guattari, 1987). Καθώς ο κόσμος εξελίσσεται, η έμφαση στις διεπιστημονικές συνδέσεις και την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου γίνεται όλο και πιο ζωτικής σημασίας. Αυτή η αλλαγή δεν περιλαμβάνει μόνο την επαναξιολόγηση του περιεχομένου και της δομής του προγράμματος σπουδών, αλλά και την επανεξέταση των ρόλων τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία (Biesta, 2013).

Η έννοια της ζώσας εμπειρίας του προγράμματος σπουδών υποστηρίζει ότι η γνώση είναι στενά συνδεδεμένη με τις μοναδικές εμπειρίες των ατόμων (Stephens et al., 2014). Εφαρμοσμένη στην εκπαίδευση των μαθηματικών, αυτή η θεώρηση υποστηρίζει μια προσέγγιση που αναγνωρίζει και εκτιμά το διαφορετικό υπόβαθρο, τις προοπτικές και τα πλαίσια από τα οποία προέρχονται οι μαθητές. Με την επικέντρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης γύρω από τις βιωμένες

εμπειρίες των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δημιουργήσουν ένα πιο ουσιαστικό και σχετικό μαθησιακό περιβάλλον. Αυτή η προσέγγιση αναγνωρίζει ότι η εκμάθηση των μαθηματικών δεν είναι μια αποστασιοποιημένη και αφηρημένη προσπάθεια, αλλά είναι βαθιά συνυφασμένη με τις καθημερινές εμπειρίες και προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές (Penman & Maiden, 2017). Μέσω της ενσωμάτωσης των βιωμένων εμπειριών στο πρόγραμμα σπουδών, οι μαθητές είναι πιο πιθανό να βρουν συνάφεια και προσωπικό νόημα στις μαθηματικές έννοιες, προωθώντας μια βαθύτερη και πιο διαρκή κατανόηση.

Σε μια μελέτη περίπτωσης που διεξήχθη σε ένα διαφορετικό περιβάλλον δημοτικού σχολείου, οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες μέσω πρακτικών δραστηριοτήτων, συνεργατικών έργων και εφαρμογών πραγματικού κόσμου (Smith et al., 2005). Το currere επέτρεψε στους μαθητές να επιλέξουν θέματα με βάση τα ενδιαφέροντά τους, προωθώντας μια αίσθηση ιδιοκτησίας και αυτονομίας στη μάθησή τους. Η ενσωμάτωση των βιωμένων εμπειριών στο πρόγραμμα σπουδών παρείχε ένα ουσιαστικό πλαίσιο για μαθηματική εξερεύνηση. Οι μαθητές επέδειξαν αυξημένο ενθουσιασμό, με ορισμένους να εκφράζουν μια πρωτόγνωρη εκτίμηση για το θέμα, καθώς αναγνώρισαν τη σημασία του για την καθημερινή τους ζωή. Αυτή η μελέτη περίπτωσης απεικονίζει τις δυνατότητες της προσέγγισης στη δημιουργία μιας θετικής μαθηματικής μαθησιακής εμπειρίας (Harrison, 2020). Αναγνωρίζεται έτσι η διάσταση του θυμικού στη μάθηση των μαθηματικών, αφού τα συναισθήματα διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη διαμόρφωση της εμπλοκής και της επιμονής των μαθητών στις μαθηματικές προσπάθειες (Deleuze, 1990, Pignatelli, 2016).

4. ΣΥΝΈΠΕΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΉ ΠΡΑΚΤΙΚΉ

Η υιοθέτηση πρακτικών εμπνευσμένων από τον Deleuze στην εκπαίδευση μαθηματικών του δημοτικού σχολείου έχει βαθιές επιπτώσεις στην ενίσχυση της συμμετοχής των μαθητών. Αγκαλιάζοντας ριζωματικές δομές, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δημιουργήσουν ένα μαθησιακό περιβάλλον που επιτρέπει ευελιξία και αυτονομία. Οι μαθητές, τείνουν να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες μέσα από τα δικά τους ενδιαφέροντα και μονοπάτια, γίνονται ενεργοί συμμετέχοντες στο μαθησιακό τους ταξίδι. Αυτή η αίσθηση αυτενέργειας προωθεί ένα αυξημένο επίπεδο

δέσμευσης καθώς οι μαθητές βλέπουν τη συνάφεια των μαθηματικών με τη ζωή τους.

Η ριζωματική δομή προκαλεί τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών εννοιών, ενθαρρύνοντας μια ολιστική κατανόηση και αποφεύγοντας την απομνημόνευση (Nguyen, 2020). Η έμφαση στη νομαδική σκέψη, όπου οι μαθητές περιηγούνται σε διαφορετικά μαθηματικά εδάφη, προάγει την προσαρμοστικότητα και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων (Bissola et al., 2016). Οι εκπαιδευτικοί, αναλαμβάνοντας το ρόλο των διευκολυντών, καθοδηγούν τους μαθητές στη συνεργατική εξερεύνηση, καλλιεργώντας μια κουλτούρα έρευνας και εξερεύνησης (Bozkurt et al., 2016). Καθώς οι μαθητές ασχολούνται με πραγματικές εφαρμογές και διεπιστημονικές συνδέσεις, αναπτύσσουν την ικανότητα να σκέφτονται κριτικά για τις πρακτικές συνέπειες των μαθηματικών εννοιών, προετοιμάζοντάς τους για την πολυπλοκότητα ενός εξελισσόμενου παγκόσμιου τοπίου (Mackness et al., 2016).

Η έμφαση στην αυτονομία, τη συνεργασία και την προσαρμοστικότητα που είναι εγγενείς στις ριζωματικές δομές μάθησης αντικατοπτρίζει τις δεξιότητες που απαιτούνται στους σύγχρονους χώρους εργασίας (Bissola et al., 2016). Ενθαρρύνοντας τους μαθητές να εξερευνήσουν τα μαθηματικά με δυναμικό και διασυνδεδεμένο τρόπο, το πρόγραμμα σπουδών τους προετοιμάζει να πλοηγηθούν σε πολύπλοκες προκλήσεις και να συμβάλουν ουσιαστικά στη σύνδεση της προϋπάρχουσας γνώση και του ιστορικού παρόντος με την εκπαιδευτική διαδικασία. Η εστίαση στο θυμικό κατά τη διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της κοινωνικής και συναισθηματικής νοημοσύνης, βασικά συστατικά της αποτελεσματικής συνεργασίας και επικοινωνίας στον 21ο αιώνα. Υιοθετώντας τις αρχές του Deleuze, οι εκπαιδευτικοί όχι μόνο εξοπλίζουν τους μαθητές με μαθηματική επάρκεια, αλλά και καλλιεργούν το ευρύτερο σύνολο δεξιοτήτων που απαιτείται για την επιτυχία σε μια ποικιλόμορφη και διασυνδεδεμένη παγκόσμια κοινωνία (Krejsler, 2016).

Η ενσωμάτωση πρακτικών εμπνευσμένων στην εκπαιδευτική πρακτική απαιτεί μια προσεκτική και συνεργατική προσέγγιση (Brailas, 2021). Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών, η υποστήριξη από τους διαχειριστές και η συνεχής έρευνα αποτελούν βασικά συστατικά της επιτυχούς εφαρμογής αυτών των παιδαγωγικών στρατηγικών (Krejsler, 2020). Οι επιπτώσεις που περιγράφονται παραπάνω ενισχύουν το μετασχηματιστικό δυναμικό μιας προσέγγισης Deleuzian στη διαμόρφωση

μιας μαθηματικής εκπαίδευσης που δεν είναι μόνο ακαδημαϊκά αυστηρή αλλά και ανταποκρίνεται στις εξελισσόμενες ανάγκες των μαθητών στον 21ο αιώνα.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η διερεύνηση της φιλοσοφίας του Deleuze στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης του δημοτικού σχολείου αποκαλύπτει μια μετασχηματιστική δυνατότητα επαναπροσδιορισμού των παιδαγωγικών πρακτικών. Μελέτες περιπτώσεων και παραδείγματα δείχνουν αντίστοιχες πρακτικές μπορούν να ενισχύσουν την εμπλοκή των μαθητών, να προωθήσουν την κριτική σκέψη και να ευθυγραμμιστούν με την ανάπτυξη βασικών δεξιοτήτων του 21ου αιώνα. Παρά τους πρακτικούς περιορισμούς και τις πιθανές επικρίσεις, τα ευρήματα δείχνουν ότι τα οφέλη τέτοιας προσέγγισης υπερτερούν των προκλήσεων, προσφέροντας μια πολλά υποσχόμενη οδό για τη δημιουργία μιας πιο δυναμικής και μαθητοκεντρικής μαθηματικής εκπαίδευσης (Kairienė, 2020).

Οι συνεισφορές μιας τέτοιας προσέγγισης στη μαθηματική εκπαίδευση είναι πολύπλευρες. Με την επικέντρωση του προγράμματος σπουδών γύρω από τις εμπειρίες των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δημιουργήσουν ένα μαθησιακό περιβάλλον που είναι προσωπικά σημαντικό και σχετικό. Η υιοθέτηση ριζωματικών δομών παρέχει μια απόκλιση από τις γραμμικές δομές, επιτρέποντας ποικίλες οδούς και προωθώντας μια αίσθηση αυτονομίας (Nicolescu, 2023). Αυτές οι συνεισφορές συμβάλλουν συλλογικά σε μια πιο ελκυστική, χωρίς αποκλεισμούς και μετασχηματιστική εμπειρία μαθηματικής εκπαίδευσης για μαθητές δημοτικού σχολείου.

Η φιλοσοφία του Deleuze δίνει έμφαση σε έννοιες που δύνανται να μετατοπίσουν τον εκπαιδευτικό από το να αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά ως ένα σταθερό σύνολο κανόνων και διαδικασιών, να τα αντιμετωπίζει ως ένα δυναμικό πεδίο όπου οι έννοιες ξεδιπλώνονται και εξελίσσονται συνεχώς. Η έννοια του Pinar για το currere, περιλαμβάνει τη διαδικασία αναστοχασμού των εκπαιδευτικών εμπειριών των μαθητών ενθαρρύνοντας τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς να ασχοληθούν κριτικά με το θέμα, διερευνώντας όχι μόνο τις μαθηματικές έννοιες που πρέπει να «διδαχθούν» αλλά και τις προσωπικές τους εμπειρίες και προοπτικές που σχετίζονται με τα μαθηματικά.

Μια σημαντική πτυχή αυτής της προσέγγισης είναι η έμφαση στη δημιουργικότητα και τον πειραματισμό στην εκμάθηση των μαθηματικών. Αγκαλιάζοντας την έννοια του γίγνεσθαι, οι μαθητές ενθαρρύνονται να

εξερευνήσουν πολλαπλές οδούς για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, προωθώντας μια βαθύτερη και πιο ευέλικτη κατανόηση των μαθηματικών. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μια μετατόπιση από την απομνημόνευση αλγορίθμων και διαδικασιών και σε μια πιο διαισθητική και διερευνητική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων με την ενσωμάτωση ποικίλων μαθηματικών εμπειριών στο πρόγραμμα σπουδών όπου οι μαθητές μπορούν να δουν τον εαυτό τους να αντικατοπτρίζεται στο θέμα και να αισθάνονται ενδυναμωμένοι να ασχοληθούν με τα μαθηματικά πιο βαθιά.

Η προσέγγιση αυτή ενθαρρύνει μια κριτική εξέταση της δυναμικής ισχύος που είναι εγγενής στη μαθηματική εκπαίδευση. Διαταράσσοντας τους καθιερωμένους κανόνες και τις υποθέσεις σχετικά με το ποιος μπορεί να επιτύχει στα μαθηματικά, δύναται να βοηθήσει στη δημιουργία ενός πιο δίκαιου και ενδυναμωτικού μαθησιακού περιβάλλοντος για όλους τους μαθητές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΊΑ

Biesta, G. (2013). Interrupting the Politics of Learning. Power and Education, 5(1), 4-15. https://doi.org/10.2304/power.2013.5.1.4

Bissola, R., Imperatori, B., & Biffi, A. (2016). A rhizomatic learning process to create collective knowledge in entrepreneurship education: open innovation and collaboration beyond boundaries. Management Learning, 48(2), 206-226. https://doi.org/10.1177/1350507616672735

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.* Jossey-Bass/Wiley.

Bozkurt, A., Honeychurch, S., Caines, A., Bali, M., Koutropoulos, A., & Cormier, D. (2016). Community tracking in a cmooc and nomadic learner behavior identification on a connectivist rhizomatic learning network. Turkish Online Journal of Distance Education, 0(0). https://doi.org/10.17718/tojde.09231

Braidotti, R. (2011). Nomadic subjects: Embodiment and sexual difference in contemporary feminist theory. Columbia University Press.

Brailas, A. (2021). Rhizomatic learning in action: a virtual exposition for demonstrating learning rhizomes.. https://doi.org/10.35542/osf.io/rcp24

Clinton, V. (2021). Open pedagogy: a systematic review of empirical findings. Journal of Learning for Development, 8(2), 255-268. https://doi.org/10.56059/jl4d.v8i2.511

Cole, D. R. (2011). Educational rhizomes: Deleuze and Guattari in education. Educational Philosophy and Theory, 43(1), 97-115.

Deleuze, G. (1990). The logic of sense. Columbia University Press.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1987). A Thousand Plateaus: Capitalism and Schizophrenia. University of Minnesota Press.

Harrison, M. (2020). Deleuze-inspired action research in the university: mobilising deleuzian concepts to rethink research on the reflective writing practices of student teachers. Educational Action Research, 30(3), 395-410. https://doi.org/10.1080/09650792.2020.1850493

Kairienė, A. (2020). The rhizomatic learning from a perspective of poststructuralism. Journal of Education Culture and Society, 11(1), 102-115. https://doi.org/10.15503/jecs2020.1.102.115

Krejsler, J. (2016). Seize the opportunity to think differently! a deleuzian approach to unleashing becomings in education. Educational Philosophy and Theory, 48(14), 1475-1485. https://doi.org/10.1080/00131857.2016.1163247

Krejsler, J. (2020). Multitude, weaponize ye theories of globalization! deleuzian strategies to affirm diversity vs predatory capitalism and nationalisms. Discourse Studies in the Cultural Politics of Education, 42(5), 796-811. https://doi.org/10.1080/01596306.2020.1843117

Kyriakopoulos, G., Appelbaum, P., Stathopoulou, C., (2023), Responding to community's concerns through a mathematical currere: The case of painting a wall, CIAEM74 proceedings.

Mackness, J., Bell, F., & Funes, M. (2016). The rhizome: a problematic metaphor for teaching and learning in a mooc. Australasian Journal of Educational Technology, 32(1). https://doi.org/10.14742/ajet.2486

Massumi, B. (2002). Parables for the virtual: Movement, affect, sensation. Duke University Press.

May, T. (2005). Gilles deleuze: an introduction. Choice Reviews Online, 43(02), 43-0866-43-0866. https://doi.org/10.5860/choice.43-0866

Nguyen, M. (2020). Understanding listening comprehension processing and challenges encountered: research perspectives. International Journal of English Language and Literature Studies, 9(2), 63-75. https://doi.org/10.18488/journal.23.2020.92.63.75

Nicolescu, B. (2023). The complexity of the mathematics' teaching-learning in the primary cycle.. https://doi.org/10.15405/epes.23045.139

Pignatelli, F. (2016). Affect and mathematics education: A Deleuzian perspective. Educational Studies in Mathematics, 91(3), 265-280.

Richerme, L. (2017). A deleuzian reimagining of susanne langer's philosophy: becoming-feeling in music education. Music Education Research, 20(3), 330-341. https://doi.org/10.1080/14613808.2017.1409201

Semetsky, I. and Masny, D. (2013). Deleuze and education. https://doi.org/10.1515/9780748669455

Smith, K., Sheppard, S., Johnson, D., & Johnson, R. (2005). Pedagogies of engagement: classroom-based practices. Journal of Engineering Education, 94(1), 87-101. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2005.tb00831.x

Stephens, L., Ruddick, S., & McKeever, P. (2014). Disability and deleuze. Body & Society, 21(2), 194-220. https://doi.org/10.1177/1357034x14541155

Wiseman, D., Borden, L., Beatty, R., Jao, L., & Carter, E. (2020). Whole-some artifacts: (stem) teaching and learning emerging from and contributing to community. Canadian Journal of

Science Mathematics and Technology Education, 20(2), 264-280. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00079-6

Η ΤΡΟΧΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Σοφία Φραγκίσκου, Άντα Μπούφη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

fragkiskousofia@gmail.com, aboufi@primedu.uoa.gr

Ένα νέο Πρόγραμμα Σπουδών (Π.Σ.) για το μάθημα των Μαθηματικών έχει ήδη εκπονηθεί από ομάδες ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών. Στην εργασία αυτή εξετάζεται η οργάνωση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (Π.Μ.Α.) στη θεματική ενότητα των θετικών ρητών αριθμών από την Α΄ μέχρι την ΣΤ΄ δημοτικού. Ειδικότερα, αναλύεται και διευκρινίζεται η τροχιά μάθησης που προτείνει το νέο Π.Σ. στη συγκεκριμένη ενότητα. Διαπιστώνεται ότι οι συγγραφείς έλαβαν υπόψη τους και αξιοποίησαν ερευνητικά βασισμένες πορείες ανάπτυξης της ιδέας του κλάσματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το νέο Π.Σ. των Μαθηματικών έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές «ώστε να γίνουν ενεργοί, χειραφετημένοι και κριτικοί πολίτες του αύριο» (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4874). Για την επίτευξη αυτού του στόχου, φαίνεται να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη συνεκτικότητα και τη συνοχή των Π.Μ.Α. μέσα από την προοδευτική μάθηση των μαθηματικών εννοιών:

> Η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης αποτελεί μία προοδευτική διεργασία. Τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά των κρίσιμων μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών και διεργασιών αλλά και δεξιοτήτων, ικανοτήτων και συμπεριφορών εισάγονται στις πρώτες τάξεις (Α΄ και Β΄), ενδυναμώνονται στις ενδιάμεσες τάξεις (Γ΄ και Δ΄) και συστηματοποιούνται στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4874).

Το ίδιο κριτήριο για την αξιολόγηση της ποιότητας ενός Π.Σ. επισημαίνουν και οι Cobb και Jackson (2011), αναφερόμενοι σε συνεκτικές τροχιές μάθησης. Αποφασίστηκε λοιπόν να επιλεχθεί μία θεματική ενότητα, αυτή των θετικών ρητών αριθμών, προκειμένου να διερευνηθεί αν στο Π.Σ. σκιαγραφείται μία συνεκτική τροχιά μάθησης που να οδηγεί σε μια προοδευτική μαθηματικοποίηση της μαθηματικής έννοιας. Η συγκεκριμένη θεματική ενότητα επιλέχθηκε διότι τα κλάσματα

αποτελούν μία από τις δυσκολότερες μαθηματικές έννοιες της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005). Οι δυσκολίες τους έγκεινται τόσο στην ίδια τους τη φύση, καθώς επιδέχονται πολλαπλές ερμηνείες, όσο και στις προσεγγίσεις που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί για να τα διδάξουν (Lamon, 2007). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης της τροχιάς μάθησης του κλάσματος θα μπορούσαν να είναι χρήσιμα στους εκπαιδευτικούς καθώς και τις συγγραφικές ομάδες των διδακτικών εγχειριδίων που θα στηριχτούν στο νέο Π.Σ..

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Η διδασκαλία που βασίζεται σε τροχιές μάθησης συνήθως είναι πιο αποτελεσματική, διότι προσφέρει περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές να οικοδομούν συνεκτικές γνώσεις (Clements, 2007). Οι τροχιές μάθησης αποτυπώνουν τους τρόπους με τους οποίους εξελίσσονται η σκέψη και οι ιδέες των μαθητών, καθώς και τα μέσα στήριξης αυτής της διαδικασίας εξέλιξης (Lobato & Walters, 2017). Σχετικά με τα κλάσματα, στοιχεία για τη σκιαγράφηση μιας πιθανής τροχιάς μάθησης παρέχουν τόσο οι διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος, όσο και τα κλασματικά σχήματα που έχει φανεί ότι αναπτύσσουν τα παιδιά μέσα από την έρευνα (Hackenberg, 2013· Steffe & Olive, 2010).

Ο Kieren (1979) μίλησε για 5 ερμηνείες του κλάσματος: μέρος-όλου, μέτρο, πηλίκο, λόγος και τελεστής. Κατά τη διαδικασία μάθησης των κλασμάτων, η εξοικείωση των μαθητών με αυτές τις διαφορετικές ερμηνείες είναι κοινά αποδεκτό ότι εξασφαλίζει τη βαθύτερη κατανόησή τους (Brenner, κ.ά., 1999).

Ο Streefland (1991) μέσα από μια φαινομενολογική μελέτη κατέληξε και ο ίδιος σε αυτές τις ερμηνείες και τις αξιοποίησε ως πλαίσια για να εισάγει τους μαθητές στις κλασματικές έννοιες. Η έρευνά του δείχνει ότι μετά τα αρχικά στάδια μάθησης και διδασκαλίας, ένα από τα πλαίσια αυτά θα μπορούσε να χρησιμοποιείται ως βάση για γενικεύσεις προς την τυπική αριθμητική. Κατανοούμε ότι οι ερμηνείες αυτές συνδέονται στενά με το πλαίσιο και τα εξωτερικά στοιχεία ενός προβλήματος και μπορούν να αξιοποιούνται για να περιγράψουν το νόημα του κλασματικού συμβόλου σε κάποιο ειδικό πλαίσιο. Ωστόσο, μία πλήρης κατανόηση του κλάσματος δεν μπορεί να προέλθει από μία μόνο ερμηνεία (Pitkethly & Hunting, 1996). Ο Kieren (1979) τονίζει ότι προϋπόθεση κατανόησης του ρητού αριθμού, εκτός από την κατανόηση κάθε ερμηνείας, είναι κυρίως η κατανόηση του τρόπου αλληλοσύνδεσής τους. Η Lamon (2007), μέσα από μία συγκριτική μελέτη, κατέληξε ότι η έμφαση της διδασκαλίας στην

ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο στηρίζει αποτελεσματικότερα τους μαθητές στην κατανόηση των υπολοίπων ερμηνειών. Τόνισε όμως ότι ένας πιο σημαντικός παράγοντας επιτυχίας της διδασκαλίας είναι η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής λογικής των μαθητών.

Η ερευνητικά βασισμένη θεωρία των Steffe και Olive (2010) προσδιορίζει μία ιεραρχία 5 κλασματικών σχημάτων (τρόποι σκέψης) και εξηγεί με ποιον τρόπο οι μαθητές αναπτύσσουν προοδευτικά κατανόηση των κλασμάτων στη βάση εξέλιξης της πολλαπλασιαστικής λογικής τους (συντονισμός μονάδων σε διαφορετικά επίπεδα): το *σχήμα μέρος-όλου*, το *μεριστικό σχήμα μοναδιαίου κλάσματος,* το *μεριστικό σχήμα κλάσματος,* το *αντιστρέψιμο μεριστικό σχήμα κλάσματος* και το *επαναληπτικό σχήμα κλάσματος.* Το σχήμα μέρος-όλου συνάδει με τη συνήθη ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου, αρκεί οι μαθητές να διατηρούν το όλο όταν το μέρος αποσύρεται από το όλο (Norton & Boyce, 2013). Στο μεριστικό σχήμα μοναδιαίου κλάσματος αναπτύσσεται η πολλαπλασιαστική φύση του κλάσματος και το όλο προκύπτει από την επανάληψη του κλασματικού μέρους αντίστοιχες φορές. Ως εκ τούτου, το μοναδιαίο κλάσμα δηλώνει το μέγεθος (μέτρο) ενός μοναδιαίου κλασματικού κομματιού σε σχέση με το όλο. Το μεριστικό σχήμα κλάσματος κατοχυρώνει τα γνήσια κλάσματα ως μέτρα κλασματικών ποσοτήτων σε σχέση με το όλο (Norton & McCloskey, 2008). Το αντιστρέψιμο μεριστικό σχήμα αφορά στην ικανότητα των παιδιών να δημιουργούν το όλο έχοντας ένα κλασματικό μέρος αυτού (Norton & Wilkins, 2009). Στο επαναληπτικό σχήμα τα παιδιά αντιλαμβάνονται όλα τα κλάσματα (και τα καταχρηστικά) ως πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεγέθους με το όλο και μπορούν να φτιάξουν το όλο από οποιοδήποτε κλάσμα και οποιοδήποτε κλάσμα από το όλο (Norton & Boyce, 2013).

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλα τα σχήματα διαμορφώνονται καθώς οι μαθητές γίνονται ολοένα και πιο ικανοί να ενεργοποιούν και να συνδυάζουν τις νοητικές λειτουργίες του ισομερισμού και της επανάληψης, αλλά και το συντονισμό μονάδων διαφορετικών επιπέδων. Θεωρώντας ότι η σχέση ενός Π.Σ. με τη διδασκαλία είναι αλληλένδετη, ένα Π.Σ. θα μπορούσε να χαρακτηρίζεται ως συνεκτικό στο βαθμό που προωθεί κάποια συνεκτική τροχιά μάθησης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός της εργασίας είναι να διαπιστωθεί αν μέσα από το νέο Π.Σ. των Μαθηματικών διαφαίνεται μια συνεκτική τροχιά μάθησης για την έννοια του κλάσματος. Έτσι, μελετήθηκε το νέο Π.Σ. και αναλύθηκαν τα Π.Μ.Α.

όχι μόνο κάθε τάξης ξεχωριστά, αλλά και από τάξη σε τάξη. Η ανάλυση των Π.Μ.Α. δεν στηρίχθηκε σε ποσοτικούς δείκτες (π.χ. συχνότητα εμφάνισης ερμηνειών κλάσματος κ.λπ.) και ως εκ τούτου τα συμπεράσματά μας αφορούν σε μια σκιαγράφηση της συνοχής του Π.Σ. στη συγκεκριμένη περιοχή. Πιο συγκεκριμένα, σε μία *πρώτη φάση* καταγράψαμε τα Π.Μ.Α κάθε τάξης. Σε μία *δεύτερη φάση* επιχειρήσαμε να διακρίνουμε ποιες ερμηνείες κλάσματος αντιστοιχούν στα εκάστοτε Π.Μ.Α. και αν προωθείται μία προοδευτική κατανόηση και σύνδεση μεταξύ τους ή κατά πόσο υπάρχουν ενδείξεις ενθάρρυνσης των ιεραρχικά αλληλένδετων κλασματικών σχημάτων (βλ. θεωρητικό πλαίσιο). Σε μερικές περιπτώσεις, η περιγραφή των Π.Μ.Α. δεν μας επέτρεπε να κατανοήσουμε με ποια συγκεκριμένη ερμηνεία του κλάσματος συνδέονται. Τότε αναζητήσαμε ενδεικτικές δραστηριότητες που η ενασχόληση των μαθητών με αυτές θα τους έδινε την ευκαιρία αφενός να οδηγηθούν στα συγκεριμένα μαθησιακά αποτελέσματα και αφετέρου να εξοικειωθούν με κάποια από τις ερμηνείες του κλάσματος. Τέλος, σε μία *τρίτη φάση* ελέγξαμε τη συσχέτιση των Π.Μ.Α. ανά τάξη αλλά και από τάξη σε τάξη προκειμένου να διαπιστώσουμε αν και σε ποιο βαθμό, τελικά, η οργάνωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων στο νέο Π.Σ. συνιστά μια συνεκτική τροχιά μάθησης, η οποία ενθαρρύνει την ανάπτυξη ολοένα και περισσότερο πολύπλοκων κλασματικών σχημάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το κλάσμα στην Α΄ και Β΄ Δημοτικού στο νέο Π.Σ.

Στο νέο Π.Σ. η διδασκαλία του κλάσματος ξεκινάει από την πρώτη κιόλας τάξη του δημοτικού και περιλαμβάνεται σε όλες τις υπόλοιπες. Στην Α΄ και Β΄ δημοτικού τα Π.Μ.Α. που προτείνονται από το Π.Σ. είναι αρκετά παρόμοια. Στην Α’ τάξη περιλαμβάνονται τα εξής Π.Μ.Α.:

> Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν απλές κλασματικές μονάδες (1/2, 1/3, 1/4) μιας επιφάνειας και ενός συνόλου, χρησιμοποιώντας πραγματικά αντικείμενα, χειραπτικό υλικό και εικόνες, συγκρίνουν δύο ποσότητες με απλή σχέση μεγέθους 1/2, 1/4 και περιγράφουν τη σχέση λεκτικά (μισή/διπλάσια…· Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4880).

Στη Β΄ δημοτικού αναφέρονται οι ίδιοι στόχοι με τους παραπάνω, με τη διαφορά ότι πλέον τα παιδιά θα είναι σε θέση τη σχέση μεγέθους να την περιγράφουν και συμβολικά (π.χ. 1/3, 1/5, 1/10) (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4885). Επιπλέον, προστίθεται ένας ακόμη στόχος, τα παιδιά: «διερευνούν με χειραπτικά υλικά και αναπαραστάσεις και προσεγγίζουν διαισθητικά τα κλάσματα 2/4, 3/4, 2/3» (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4885).

Στα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα δεν αναφέρεται ρητά ποια ερμηνεία του κλάσματος θα αξιοποιηθεί για την επίτευξη αυτών. Αν θεωρηθεί ότι το Π.Σ. υπονοεί την

ερμηνεία μέρος-όλου, τότε, σύμφωνα με το σχήμα μέρος-όλου, το οποίο άλλωστε είναι το πρώτο στην ιεραρχία εξέλιξης των κλασματικών σχημάτων, οι μαθητές ερμηνεύουν ένα κλάσμα (π.χ. το 1/4) εφόσον τους δίνονται ευκαιρίες: (1) να ισομερίζουν μια σοκολάτα σε 4 μέρη και να επιλέγουν το ένα εξ αυτών ως απάντηση στο αίτημα να φτιάξουν (αναπαραστήσουν) το ένα τέταρτο της σοκολάτας, και (2) να αναγνωρίζουν ότι μια μικρή σοκολάτα με 1 κομμάτι απέναντι από μια μεγάλη σοκολάτα με 4 ίδια κομμάτια είναι το ένα τέταρτο της μεγάλης. Αντίθετα, ο συνήθης τρόπος για να προωθηθεί η συγκεκριμένη ερμηνεία του κλάσματος, όπως και στα υπάρχοντα διδακτικά βιβλία, είναι να παρουσιάζεται ένα σχήμα ήδη ισομερισμένο με κάποιο αριθμό γραμμοσκιασμένων μερών και να ζητείται να βρεθεί το κλάσμα ή να ζητείται να γραμμοσκιαστεί ένα ήδη ισομερισμένο σχήμα ώστε να αναπαριστά κάποιο δοσμένο κλάσμα. Όμως, μια τέτοια πρακτική ίσως να έρχεται σε αντίθεση με το νέο Π.Σ. καθώς όπως αναφέρεται:

> Βασίζεται στην πεποίθηση ότι οι μαθητές/τριες μαθαίνουν Μαθηματικά αποτελεσματικά, όταν τους δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουν ιδέες και έννοιες μέσω της επίλυσης προβλημάτων (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4874).

Σε αυτό το πλαίσιο, οι αναπαραστάσεις θα ήταν καλό να προκύπτουν από τη μαθηματική δραστηριότητα των ίδιων των μαθητών.

Πιστεύουμε ότι ο στόχος σχετικά με την αναγνώριση και αναπαράσταση απλών κλασματικών μονάδων θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με προβλήματα που οδηγούν, ταυτόχρονα, και στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλο και στην ερμηνεία του κλάσματος ως πηλίκο. Ένα τέτοιο πρόβλημα θα μπορούσε να είναι το εξής: «Μοίρασε δίκαια μια σοκολάτα σε 4 φίλους. Πόσο θα φάει ο κάθε φίλος;». Τα προβλήματα δίκαιης μοιρασιάς κινητοποιούν τους μαθητές να ισομερίσουν και μάλιστα μέσα από τη συζήτηση των ενδεχομένως διαφορετικών τρόπων ισομέρισης να αντιληφθούν ότι τα μέρη που προκύπτουν δεν χρειάζεται να έχουν υποχρεωτικά το ίδιο σχήμα. Επίσης, η συζήτηση σχετικά με την περιγραφή του μεριδίου ενός φίλου, στην ίδια ή και σε επόμενη τάξη, θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές σε μια σύνδεση της ερμηνείας του κλάσματος ως πηλίκο και ως μέρος-όλου. Επιπλέον, αν η συζήτηση εστίαζε και στη σύγκριση του μεριδίου με ολόκληρη τη σοκολάτα, οι μαθητές θα είχαν την ευκαιρία να αρχίσουν να συνειδητοποιούν την πολλαπλασιαστική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο μέρος και το όλο (ολόκληρη η σοκολάτα προκύπτει από την επανάληψη ενός κλασματικού μεριδίου 4 φορές). Άλλωστε, ένα τέτοιο μαθησιακό αποτέλεσμα επιδιώκει και το Π.Σ., το οποίο υπαγορεύει και για τις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συγκρίνουν δύο ποσότητες και να εκφράζουν λεκτικά και αργότερα συμβολικά την αμοιβαία σχέση *μεγέθους* τους. Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειώσουμε ότι η πολλαπλασιαστική συσχέτιση δύο ποσοτήτων προοιωνίζει την κατανόηση του κλάσματος ως μέτρο ή αντίστοιχα,

επιτρέπει στους μαθητές να οικοδομήσουν το μεριστικό κλασματικό σχήμα.

Οι παρατηρήσεις μας από τα Π.Μ.Α. του Π.Σ. για την Α΄ και Β΄ δημοτικού μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μια συνεκτική (υπο)τροχιά μάθησης των πρώτων κλασματικών εννοιών θα μπορούσε να εξασφαλιστεί αρκεί οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες να ασκούνται στις διαδικασίες της ισομέρισης και της επανάληψης ποσοτήτων ώστε να επιτυγχάνεται μια βάση για περαιτέρω ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος.

Το κλάσμα στη Γ΄ Δημοτικού στο νέο Π.Σ.

Στη Γ΄ δημοτικού αναφέρεται ρητά η αξιοποίηση της ερμηνείας του κλάσματος ως μέρος-όλου, καθώς στα μαθησιακά αποτελέσματα προβλέπεται τα παιδιά να «αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με τη βοήθεια εποπτικών μέσων, εικόνων και εφαρμογών την έννοια του κλάσματος ως μέρος-όλου» (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4891). Ακόμα, αναφέρονται τα ακόλουθα Π.Μ.Α.:

> Εκφράζουν την ίδια (κλασματική) σχέση με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις, συγκρίνουν δύο κλασματικές ποσότητες, προσδιορίζουν τη σχέση μεγέθους τους και την αναπαριστούν συμβολικά (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4891).

Με αφορμή τα μοναδιαία κλάσματα, τονίσαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι η ερμηνεία μέρος-όλου επιτρέπει στους μαθητές να κατανοούν τα κλάσματα ως πλήθη κομματιών προερχόμενα από ένα όλο ήδη ισομερισμένο. Το μέγεθος των κλασματικών κομματιών περνάει συνήθως απαρατήρητο. Οι μαθητές δεν είναι σε θέση να κατανοούν ένα κλάσμα α/β ως την ποσότητα που φτιάχνεται από α κλασματικά μέρη μεγέθους 1/β. Ωστόσο, το Π.Σ. προτείνει να ασχοληθούν οι μαθητές με την ισοδυναμία κλασματικών ποσοτήτων και τον προσδιορισμό της σχέσης κλασματικών ποσοτήτων. Χωρίς όμως προηγουμένως οι μαθητές να έχουν συνειδητοποιήσει τη σταθερή σχέση μεγέθους ενός κλασματικού μέρους με το μέγεθος του όλου, είναι αμφίβολο ότι θα είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι όταν ένα όλο ισομερίζεται σε ένα πλήθος κομματιών πολλαπλάσιο ενός ήδη υπάρχοντος πλήθους ίσων κομματιών, θα προκύπτει το ίδιο πολλαπλάσιο πλήθος μικρότερου μεγέθους μοναδιαίων κλασματικών κομματιών. Ομοίως, οι μαθητές θα δυσκολεύονται στον προσδιορισμό της σχέσης δύο κλασματικών ποσοτήτων, καθώς αυτός προϋποθέτει μια βαθιά κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων. Βέβαια, κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι οι μαθητές θα κατανοήσουν την

ισοδυναμία των κλασμάτων πολύ εύκολα αν τους καλέσουμε να διαπιστώσουν ότι τα κλάσματα π.χ. 1/2 και 2/4 είναι ισοδύναμα επειδή σε δύο διαφορετικά ισομερισμένα ορθογώνια καλύπτουν την ίδια επιφάνεια. Ένας τέτοιος ισχυρισμός στηρίζεται στην αντίληψη της δυνατότητας των εξωτερικών αναπαραστάσεων να μεταφέρουν με τρόπο ξεκάθαρο μαθηματικά νοήματα, η οποία όμως έχει αμφισβητηθεί κατ' επανάληψη (Gravemeijer, 1997). Ο Norton (2008) έδειξε μέσα από την έρευνά του ότι η ισοδυναμία κλασμάτων είναι ιδιαίτερα απαιτητική ως έννοια και προϋποθέτει ότι οι μαθητές έχουν την ικανότητα να συντονίζουν 3 επίπεδα μονάδων (το υψηλότερο επίπεδο πολλαπλασιαστικής λογικής). Αξίζει να σημειωθεί ότι σχεδόν σε όλα τα Π.Μ.Α. παρατηρούμε να γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην αξιοποίηση *διαφορετικών* διδακτικών αναπαραστάσεων για τις κλασματικές ποσότητες: χειραπτικό υλικό, πραγματικά αντικείμενα, εικόνες, λέξεις, σύμβολα. Η προσεκτική μετάβαση των μαθητών ανάμεσα σε αυτές τις αναπαραστάσεις θα μπορούσε να εξασφαλίσει την επιθυμητή κατανόηση, με την προϋπόθεση ότι τα διαφορετικά νοήματα των μαθητών θα γίνονται διαρκώς θέμα συζήτησης στην τάξη.

Τα συμπεράσματά μας για την Γ΄ δημοτικού είναι τα ίδια με αυτά της Α΄ και Β΄ δημοτικού. Η ενασχόληση των μαθητών με τις διαδικασίες ισομέρισης και επανάληψης ποσοτήτων πάνω σε κατάλληλο υλικό θα μπορούσε να δημιουργήσει τις προϋποθέσεις για να προσεγγίσουν την ισοδυναμία και τη σύγκριση κλασματικών ποσοτήτων με τρόπο που θα εξασφάλιζε την κατανόηση.

Το κλάσμα στη Δ΄ Δημοτικού στο νέο Π.Σ.

Δύο είναι τα μαθησιακά αποτελέσματα που αναμένονται κατά τη διδασκαλία του κλάσματος στην Δ΄ τάξη: (1) να αναπαριστούν κλάσματα σαν αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή, (2) να συγκρίνουν κλάσματα με διάφορους τρόπους (Νόμος 10522/Δ1/2023).

Η απουσία ιδιαίτερων ενδείξεων στο Π.Σ. σχετικά με την ανάπτυξη των κλασματικών σχημάτων πέραν του σχήματος μέρος-όλου καθιστά την επιδίωξη κατανόησης του κλάσματος ως αριθμό μάλλον απότομη. Αναρωτιόμαστε με ποιον τρόπο οι μαθητές που ερμηνεύουν το κλάσμα ως μέρος-όλου θα μεταβούν στο κλάσμα ως αριθμό, "απελευθερωμένο" από την παρουσία κάποιας μονάδας αναφοράς. Ωστόσο, η έμφαση στην περιγραφή του αντίστοιχου Π.Μ.Α. για την αξιοποίηση της αριθμογραμμής ως μέσο στήριξης είναι σύμφωνη με τις υποδείξεις αρκετών ερευνητών (Siegler, κ.ά., 2010, όπως αναφέρεται στο Tunç-Pekkan, 2015). Οι μαθητές με τη μέρος-όλου ερμηνεία ίσως θα είναι σε

θέση να τοποθετούν και να εντοπίζουν γνήσια κλάσματα στην αριθμογραμμή αξιοποιώντας την ισομέριση και επιλέγοντας κατάλληλα πλήθη κομματιών. Και πάλι όμως, οι μαθητές με το μέρος-όλου ως τη μόνη διαθέσιμη ερμηνεία για τα κλάσματα, θα είχαν ιδιαίτερες δυσκολίες να τοποθετήσουν καταχρηστικά κλάσματα πάνω σε μια αριθμογραμμή. Η μονάδα του 1 και το όλο για τους μαθητές αυτούς ταυτίζονται. Οι αριθμοί μεγαλύτεροι του 1 σε κλασματική μορφή θα ήταν ασύλληπτοι. Βέβαια, η συζήτηση των ιδεών των μαθητών στην τάξη σε συνδυασμό με κατάλληλες δραστηριότητες θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να δουν τα κλάσματα ως αριθμούς. Το Π.Μ.Α. σχετικά με τη σύγκριση κλασμάτων θα μπορούσε να ενταχθεί στο πλαίσιο δραστηριοτήτων επάνω στην αριθμογραμμή και έτσι να δοθούν περισσότερες ευκαιρίες για την κατανόηση του μεγέθους των κλασμάτων.

Συμπερασματικά, παρά το γεγονός ότι η μετάβαση στο κλάσμα ως αριθμός ίσως να μην έχει προετοιμαστεί επαρκώς σε προηγούμενες τάξεις (μέσω του κλάσματος ως μέτρο), η κατάλληλη αξιοποίηση της αριθμογραμμής στην τάξη θα μπορούσε να γεφυρώσει τις όποιες ασυνέχειες στη μάθηση των μαθητών.

Το κλάσμα στην Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού στο νέο Π.Σ.

Στην Ε΄ δημοτικού στο Π.Σ. περιλαμβάνονται τα εξής Π.Μ.Α.:

> Διατάσσουν ένα σύνολο κλασματικών αριθμών και βρίσκουν ενδιάμεσους μικρότερους και μεγαλύτερους κλασματικούς αριθμούς [και] χρησιμοποιούν ποικίλα μέσα αναπαράστασης και στρατηγικές, για να απλοποιούν και να βρίσκουν ισοδύναμα κλάσματα (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4904).

Σε αυτή την τάξη αναμένεται επίσης τα παιδιά να εφαρμόζουν τις τέσσερις πράξεις σε κλάσματα με φυσικούς αριθμούς και σε κλάσματα με κλάσματα. Στην τελευταία τάξη του δημοτικού αναμένεται τα παιδιά να «ερμηνεύουν το κλάσμα ως σχέση μέρους-όλου, ως μέτρηση, ως διαίρεση, ως τελεστή και ως λόγο» (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4909) και τελικά να «αντιλαμβάνονται τους θετικούς ρητούς ως ένα διακριτό σύνολο αριθμών εφοδιασμένο με πράξεις» (Νόμος 10522/Δ1/2023, σελ. 4910).

Στο πλαίσιο των συμπερασμάτων μας από τα Π.Μ.Α. του Π.Σ. των προηγούμενων τάξεων δεν φαίνεται να προστίθενται στην Ε΄ και ΣΤ΄ δημοτικού επιπλέον μαθησιακά αποτελέσματα που να ενθαρρύνουν μια βαθύτερη κατανόηση του κλάσματος. Άλλωστε, το κλάσμα ως αφηρημένος αριθμός αναφέρθηκε στη Δ΄ δημοτικού. Οι πράξεις με κλασματικούς αριθμούς στην Ε΄ δημοτικού (με κατάλληλο υποστηρικτικό υλικό) θα βοηθήσουν τους μαθητές να τις δουν ως ίδιες με αυτές στο

σύνολο των φυσικών αριθμών. Παρόλα αυτά, γνωστικές συγκρούσεις είναι αναμενόμενες καθώς οι ιδέες των μαθητών από το πλαίσιο των φυσικών αριθμών δεν εναρμονίζονται με τα χαρακτηριστικά του συνόλου των ρητών αριθμών.

Τέλος, στην ΣΤ΄ δημοτικού γίνεται λόγος για όλες τις διαφορετικές ερμηνείες του κλάσματος. Ίσως, η οικοδόμηση κάποιων εξ αυτών θα έπρεπε να έχει ξεκινήσει από προηγούμενες τάξεις και στην τελευταία τάξη να δίνονται ευκαιρίες για αναστοχασμό και δημιουργία νέων συνδέσεων μεταξύ αυτών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η τροχιά μάθησης του Π.Σ. περιλαμβάνει ένα συνεκτικό σύνολο από Π.Μ.Α. (αναγνώριση και αναπαράσταση κλασματικών συμβόλων, σύγκριση κλασμάτων, πράξεις με κλάσματα). Εστιάζοντας στην αναγνώριση και αναπαράσταση των κλασματικών συμβόλων, επισημάναμε κάποιες ασυνέχειες στη βασική πτυχή της τροχιάς των κλασμάτων (υποτροχιά που ουσιαστικά αφορά στην κατανόηση του κλάσματος). Το νέο Π.Σ. σε σχέση με το προηγούμενο, φαίνεται να δίνει ιδιαίτερη έμφαση στις διδακτικές αναπαραστάσεις και να θεωρεί τις μεταβάσεις ανάμεσα σε αυτές βασικό στήριγμα για την προοδευτική μαθηματικοποίηση του κλάσματος. Ωστόσο, η ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλου φαίνεται να υπερισχύει έναντι των άλλων ερμηνειών. Επιπλέον, δεν περιλαμβάνονται ενδιάμεσα Π.Μ.Α. τα οποία ενδεχομένως θα προωθούσαν μια διασύνδεση όλων των ερμηνειών όπως αυτή εξασφαλίζεται μέσα από την ενθάρρυνση οικοδόμησης των ιεραρχικών κλασματικών σχημάτων. Κλείνοντας, πιστεύουμε ότι σε αρκετά σημεία θα ήταν χρήσιμες κάποιες διευκρινίσεις ώστε να δοθεί η δυνατότητα μιας πιο πιστής εφαρμογής του Π.Σ. Για παράδειγμα, η αναφορά στις γνωστικές απαιτήσεις των διαφόρων μαθησιακών αποτελεσμάτων θα έδινε την ευκαιρία να προβλεφθούν και στη συνέχεια να καλυφθούν οι ανάγκες των εκπαιδευτικών και των λοιπών εμπλεκόμενων ομάδων που θα εφαρμόσουν το Π.Σ..

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z., & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 541-557.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the *29th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 233-240). PME.

Clements, D. H. (2007). Curriculum research: Toward a framework for research-based curricula. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(1), 35-70.

Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Assessing the quality of the common core standards for mathematics. *Educational Researcher, 40*(4), 183-185.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An international perspective* (pp. 315-345). Psychology press.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 538-563.

Kieren, T. E. (1979). The development in children and adolescents of the construct of rational numbers as operators. *Alberta Journal of Educational Research, 25*(4), 234–247.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Vol. 1, pp. 629-667). NCTM.

Lobato, J., & Walters, C. D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 74-101.

Νόμος 10522/Δ1/2023. Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο. Εφημερίδα της Κυβέρνησης (ΦΕΚ 508/Β/2-2-2023).

Norton, A., & Boyce, S. (2013). A cognitive core for common state standards. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 266-279.

Norton, A. H., & McCloskey, A. V. (2008). Modeling students' mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics, 15*(1), 48-54.

Norton A., & Wilkins, J. L. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*(2-3), 150-161.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational studies in Mathematics*, *30*(1), 5-38.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Springer.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer Academic Publications.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 419-441.

Θεματική Ενότητα 6: Επαγγελματική ανάπτυξη και μαθηματική εκπαίδευση: διδάσκοντας μαθηματικά για τον μελλοντικό ενεργό πολίτη

ΕΜΠΕΙΡΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Διονυσία Μπακογιάννη, Μαρία Μελετίου-Μαυροθέρη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου

dbakogianni@math.uoa.gr, M.Mavrotheris@euc.ac.cy

Το άρθρο αυτό αποτυπώνει την εμπειρία μας από ένα μεταπτυχιακό μάθημα με στόχο την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε θέματα διδασκαλίας και μάθησης της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων. Μέσα από τις φωνές των φοιτητών του μαθήματος διερευνούμε κυρίαρχα ζητήματα που φαίνεται επιδρούν στο σχεδιασμό έργων στατιστικής που υποστηρίζουν τις σύγχρονες ιδέες στη Στατιστική Εκπαίδευση. Στα αποτελέσματα συμπυκνώνονται τα ιδιαίτερα στοιχεία του περιεχομένου της Στατιστικής και ζητήματα διδακτικής διαχείρισης αυτού του περιεχομένου. Επίσης αναδεικνύονται πόροι που φαίνεται να είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με τη στατιστική δραστηριότητα και τις πρακτικές ανάπτυξης στατιστικής συλλογιστικής.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι προσπάθειες που γίνονται τα τελευταία χρόνια σε επίπεδο αναμόρφωσης των αναλυτικών προγραμμάτων ενισχύουν το περιεχόμενο της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων στα Σχολικά Μαθηματικά (π.χ. Franklin & Bargagliotti, 2020). Για να ενσωματωθούν όλες αυτές οι αλλαγές με γόνιμο τρόπο στη διδασκαλία, είναι αναγκαίο οι εκπαιδευτικοί να λάβουν κατάλληλη επιμόρφωση και να εμπλακούν σε κατάλληλες εμπειρίες. Παρά την ολοένα αυξανόμενη ανάγκη για μια σύγχρονη και επαρκή επιμόρφωση των εκπαιδευτικών (Burril et.al., 2023), τα προγράμματα επιμόρφωσης που υπάρχουν σήμερα στη χώρα μας, και τα οποία εξειδικεύονται στη διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, σπανίζουν και συνήθως λειτουργούν αποσπασματικά μέσα στο πλαίσιο ευρύτερων ενοτήτων.

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε τα πρώιμα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων ενός μεταπτυχιακού μαθήματος με στόχο τη διερεύνηση της διδασκαλίας της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, που προσφέρθηκε το χειμ. εξάμηνο του ακαδ. έτους 2022-2023. Συγκεκριμένα, μέσα από την εμπλοκή των φοιτητών στο σχεδιασμό στατιστικών έργων για την σχολική τάξη, το ερευνητικό ερώτημα που επιχειρούμε να απαντήσουμε είναι:

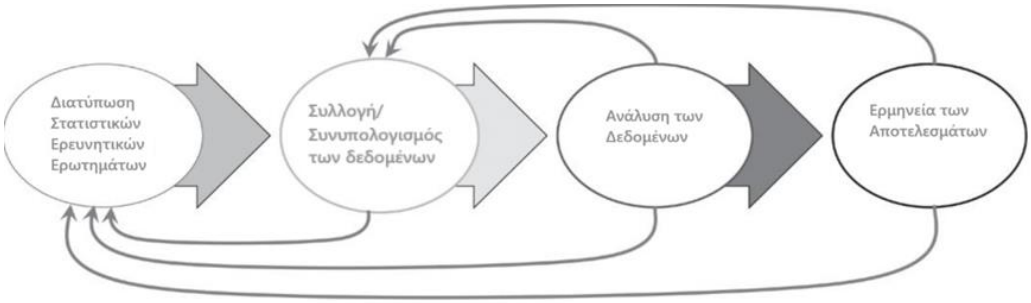
- Ποια είναι τα κυρίαρχα ζητήματα που φαίνεται να αναδύονται όταν οι φοιτητές σχεδιάζουν έργα στατιστικής που υποστηρίζουν τις σύγχρονες ιδέες της Στατιστικής Εκπαίδευσης;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η στατιστική ξεχωρίζει από τα άλλα πεδία των μαθηματικών γιατί λαμβάνει υπόψη την αβεβαιότητα (Ben-Zvi, et.al., 2018). Οι πολυπλοκότητες και οι ιδιαιτερότητες της στατιστικής δραστηριότητας καθώς και η φύση των στατιστικών προβλημάτων, αποτυπώνονται στο πλαίσιο των Wild και Pfannkuch (1999) για τη στατιστική σκέψη στην στατιστική έρευνα. Στο μοντέλο του στατιστικού ερευνητικού κύκλου (Πρόβλημα-Μεθοδολογία-Δεδομένα-Ανάλυση-Συμπεράσματα), κάθε βήμα συνεπάγεται διαδικασίες σκέψης και ικανότητες που είναι ειδικές για τη στατιστική δραστηριότητα, καθώς και προκλήσεις και πολυπλοκότητες που είναι συνυφασμένες με το στοχαστικό πλαίσιο των στατιστικών προβλημάτων.

Σήμερα, η εξέλιξη της επιστήμης της Στατιστικής φέρνει νέες τάσεις στην Στατιστική Εκπαίδευση. Οι Burril και Biehler (2011) προσδιορίζουν επτά θεμελιώδεις στατιστικές έννοιες οι οποίες αποτελούν για τη σύγχρονη διδασκαλία και μάθηση της στατιστικής. Αυτές είναι: *Δεδομένα (Data).* Στη στατιστική, τα δεδομένα είναι αριθμοί μέσα σε πλαίσιο. Η έννοια περιλαμβάνει όλες τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες, δηλαδή τους τύπους δεδομένων, τις μεθόδους συλλογής και μέτρησης, τα σφάλματα, καθώς και την ερμηνεία των γραφημάτων. Το νέο μοντέλο-πλαίσιο GAISE II (Franklin & Bargagliotti, 2020) δίνει έμφαση σε δεξιότητες που απαιτούνται στον σύγχρονο κόσμο των μεγάλων δεδομένων (big data/data mining). *Διακύμανση (Variation).* Η αλλαγή σε μια αβέβαιη κατάσταση. Δεδομένου ότι τα πραγματικά δεδομένα περιέχουν σφάλμα και αβεβαιότητα, η διακύμανση αφορά την αναγνώριση και μέτρηση της μεταβλητότητας για να προβλέψουμε, να εξηγήσουμε και να ελέγξουμε. *Κατανομή (Distribution).* Η κατανομή είναι ένα έννοια που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της στατιστικής για να περιγράψει μοτίβα κεντρικής τάσης και διασποράς. *Αναπαράσταση (Representation).* Η αναπαράσταση αναφέρεται σε γραφικές ή άλλες αναπαραστάσεις που αποκαλύπτουν ιστορίες στα δεδομένα. Η αλλαγή από μια αναπαράσταση σε άλλη αποτελεί ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία στη στατιστική δραστηριότητα που επιτρέπει την κατανόηση των δεδομένων. Ο όρος "*transnumeration*" έχει δημιουργηθεί για να περιγράψει αυτήν τη διαδικασία (Wild και Pfannkuch, 1999; σελ. 227). *Συσχέτιση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές (Association And Modelling Relations Between Two Variables)*. Η μελέτη της φύσης της σχέσης μεταξύ στατιστικών μεταβλητών. *Μοντέλα πιθανοτήτων για παραγωγή δεδομένων (Probability Models For Data-Generating Processes)*. Στη στατιστική, η μεταβλητότητα στα δεδομένα μπορεί να ποσοτικοποιηθεί και να μοντελοποιηθεί με μοντέλα πιθανοτήτων. Από την άλλη πλευρά, η κατανόηση της πιθανότητας μπορεί να διευκολυνθεί μέσω προσομοιώσεων, πραγματικών συνόλων δεδομένων

και τυχαίων δειγμάτων. *Δειγματοληψία και Συμπερασματολογία (Sampling And Inference)*. Η διαδικασία επιλογής δειγμάτων από έναν πληθυσμό και η εξαγωγή συμπερασμάτων από αυτά τα δείγματα με κάποιο βαθμό βεβαιότητας.



Εικόνα 1: Διαδικασία επίλυσης στατιστικών προβλημάτων (μτφ. Franklin & Bargagliotti, 2020; σελ. 13)

Το περιεχόμενο του μαθήματος που σχεδιάσαμε ευθυγραμμίστηκε με τις σύγχρονες κατευθύνσεις από την έρευνα στο πεδίο της Διδακτικής της Στατιστικής (Burrill & Pfannkuch, 2023) και δομήθηκε γύρω από την ιδέα του Στατιστικού Κύκλου έρευνας όπως προτείνεται από το GAISE II (Franklin & Bargagliotti, 2020) -Εικόνα 1.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της έρευνας

Το μεταπτυχιακό μάθημα που σχεδιάσαμε χωρίστηκε σε πέντε βασικές ενότητες. Οι τέσσερις πρώτες ακολούθησαν τα τέσσερα βασικά στάδια στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων όπως προτείνεται από τις Franklin & Bargagliotti (2020), με στόχο να εξοικειωθούν οι φοιτητές με το περιεχόμενο και τις δεξιότητες που απαιτούνται σε καθένα από αυτά. Μέσα στις ενότητες αυτές δόθηκε μεγάλη έμφαση στην χρήση του λογισμικού TinkerPlots (Konold, et.al., 2005). Η πέμπτη ενότητα αφορούσε έναν κύκλο Σχεδιασμού-Ανατροφοδότησης-Αναστοχασμού. Στην ενότητα αυτή οι φοιτητές χωρίστηκαν σε 6 ομάδες των 3 ή 4 ατόμων, καθεμιά από τις οποίες ανέλαβε να σχεδιάσει ένα έργο στατιστικής που να υποστηρίζει τη διερεύνηση δεδομένων και την ανάπτυξη στατιστικής συλλογιστικής. Πέρα από το σχεδιασμό σε κάθε ομάδα ανατέθηκε η επισκόπηση και η ανατροφοδότηση του έργου μιας άλλης ομάδας. Οι συγγραφείς του παρόντος έκαναν από κοινού τη διδασκαλία του μαθήματος.

Οι συμμετέχοντες

Στο μάθημα συμμετείχαν 20 εκπαιδευτικοί, μισοί από τους οποίους είναι μελλοντικοί και μισοί εν ενεργεία. Όλοι οι φοιτητές ήταν μεταπτυχιακοί φοιτητές του ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών. Όλοι ήταν Μαθηματικοί πλην μίας φοιτήτριας που ήταν Δασκάλα (θα

αναφερόμαστε σε αυτούς με Μ1, Μ2,… για τους Μαθηματικούς, Δ για τη δασκάλα και Ε1, Ε2 για τις δύο συγγραφείς-διδάσκουσες). Περίπου το ένα τρίτο των φοιτητών δήλωσε εξοικειωμένο με το περιεχόμενο της Στατιστικής ενώ μόνο μία περίπτωση δήλωσε ότι είχε λάβει γνώση σχετικά με τις δυνατότητες εξειδικευμένου λογισμικού για τη διδασκαλία της Στατιστικής, χωρίς όμως να έχει προσωπική εμπειρία από τη χρήση του.

Τα δεδομένα

Η συλλογή των δεδομένων από το μάθημα αφορά μια ευρύτερη διερεύνηση των αναγκών και των προκλήσεων στην επαγγελματική εξέλιξη εκπαιδευτικών σε θέματα που αφορούν τη σύγχρονη διδασκαλία της Στατιστικής. Για την πρώιμη επεξεργασία που μας επιτρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα του παρόντος άρθρου αξιοποιήσαμε τα αρχεία που υποβλήθηκαν από τους φοιτητές του μαθήματος στην τελευταία ενότητα που αφορά στον κύκλο Σχεδιασμού-Ανατροφοδότησης-Αναστοχασμού (αρχεία παρουσιάσεων, σχέδια μαθήματος, αρχεία ανάλυσης δεδομένων κ.α.) καθώς και το βίντεο από την καταγραφή των αντίστοιχων διαλέξεων (τρεις 4ωρες διαλέξεις).

Η ανάλυση των δεδομένων

Η πορεία ανάλυσης των δεδομένων που ακολουθήθηκε βασίζεται στις αρχές της θεματικής ανάλυσης (Braun & Clarke, 2006). Αναλύσαμε τις συζητήσεις που έγιναν στο πλαίσιο των μαθημάτων ξεχωρίζοντας κάποια κρίσιμα επεισόδια και κωδικοποιώντας αποσπάσματα που περιέχονταν σε αυτά. Ως κρίσιμο χαρακτηρίζουμε ένα επεισόδιο όταν οι φοιτητές: αναφέρονται σε προκλήσεις/δυσκολίες που αντιμετώπισαν, αναφέρονται στη συνεργασία τους με τους συμφοιτητές τους, ή αναφέρονται στην εμπειρία τους από την εφαρμογή του έργου.

Η κωδικοποίηση ανέδειξε τα θέματα που φάνηκε να είναι κυρίαρχα κατά το σχεδιασμό έργων στατιστικής που υποστηρίζουν τις σύγχρονες ιδέες της Στατιστικής Εκπαίδευσης. Περαιτέρω ανάλυση και τριγωνοποίηση με δεδομένα από τη διδασκαλία του μαθήματος σε επόμενες περιόδους είναι βασική επιδίωξη των συγγραφέων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων ξεχώρισαν τρία βασικά θέματα που φάνηκε να κυριαρχούν στο σχεδιασμό ενός στατιστικού έργου: Δεδομένα, Τεχνολογία, Διδακτική Διαχείριση. Ακολούθως περιγράφουμε το περιεχόμενο και τα επιμέρους θέματα όπως αναδείχθηκαν στις συζητήσεις και τις παρουσιάσεις των φοιτητών.

Δεδομένα

Το θέμα αυτό συμπυκνώνει όλη τη διαπραγμάτευση των φοιτητών γύρω από την έννοια των δεδομένων στη Στατιστική, τον ιδιαίτερο ρόλο τους στη διδασκαλία και τη μάθηση αλλά και

το ιδιαίτερο περιεχόμενο της έννοιας που κάνει τη διδακτική διαχείρισή τους απαιτητική και δύσκολη. Η έννοια των δεδομένων ήταν πολύ κεντρική από όλες τις ομάδες τόσο στις περιγραφές τους για το σχεδιασμό και τις προκλήσεις που συνάντησαν, όσο και στη συζήτηση για την αποτίμηση της εμπειρίας τους και τα ζητήματα που θεωρούν κυρίαρχα στην διδασκαλία της στατιστικής. Μέσα από τις συζητήσεις για τα δεδομένα ξεχώρισαν τρία επιμέρους θέματα που συντέλεσαν στο θέμα Δεδομένα.

Το πλαίσιο των δεδομένων. Η σημασία του πλαισίου για τα δεδομένα ήταν κάτι στο οποίο αναφέρθηκαν αρκετοί φοιτητές. Το πλαίσιο των δεδομένων στη Στατιστική είναι αυτό που νοηματοδοτεί τα αριθμητικά αποτελέσματα και επιτρέπει στους μαθητές να ερμηνεύσουν τους αριθμούς και να εξάγουν συμπεράσματα. Η εξοικείωση του μαθητή με το πλαίσιο είναι σημαντική για την κατανόηση του ερωτήματος και για την επίλυση του προβλήματος. Χαρακτηριστική είναι η φράση της Μ1 στη φάση του αναστοχασμού:

> Μ1:Εδώ συνειδητοποιήσαμε ότι είναι σημαντικό να σκεφτόμαστε πιο βαθιά μέσα στο πλαίσιο. Για τα παιδιά η Στατιστική είναι συνήθως μόνο ποσοστά. Εδώ μάθαμε να βοηθάμε τα παιδιά να μη βλέπουν μόνο την αριθμητική πράξη που καταλήγει σε ένα αποτέλεσμα, αλλά να ερμηνεύουν τα δεδομένα.

Ακόμα ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για τη σημασία του πλαισίου όταν οι φοιτητές σχεδιάζουν έργα στατιστικής εμφανίζεται στο απόσπασμα από μια ομάδα κατά τη συζήτηση γύρω από προκλήσεις που αντιμετώπισαν:

> Μ2: Για εμένα νομίζω μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις ήταν που χρειάστηκε να σκεφτούμε γύρω από τα δεδομένα. Δεδομένα που θα είχε νόημα να διερευνήσουν οι μαθητές.
>
> Μ3: Θα συμφωνήσω. Κι όχι μόνο να έχει νόημα να διερευνήσουν αλλά να είναι και κάτι που θα τους ιντριγκάρει, κάτι που θα πουν ναι αυτό θέλω να το μελετήσω, να δω τι θα προκύψει.

Η μεταβλητότητα των δεδομένων. Ένα ιδιαίτερο στη Στατιστική είναι ότι τα δεδομένα περιέχουν μεταβλητότητα. Το στοιχείο αυτό τα κάνει να ξεχωρίζουν και από το περιεχόμενο των άλλων πεδίων στα μαθηματικά αλλά και από τη διδασκαλία τους. Η Μ4 περιγράφει πολύ χαρακτηριστικά αυτήν την ιδιαιτερότητα στον αναστοχασμό της:

> Μ4: Εδώ οι μαθητές καλούνται να κρίνουν τα δεδομένα. Στα υπόλοιπα πεδία των Μαθηματικών είναι κάτι που δέχονται αδιαμφισβήτητα. Στη Στατιστική είναι στοιχείο Διαπραγμάτευσης.

Αλλά και η Μ5 περιγράφοντας την δική της εμπειρία από το σχεδιασμό στην ομάδα της αναφέρει:

Μ5: Τα δεδομένα στη Στατιστική είναι σε αναφορά με τον πληθυσμό. Συνήθως υπάρχει μεγάλος όγκος δεδομένων που πρέπει κανείς να διαχειριστεί.

Ε2: Και χρειάζεται εδώ να δει κανείς τι εκφράζουν αυτά τα δεδομένα, σε σχέση με τον πληθυσμό.

Η φύση των δεδομένων. Στη Στατιστική ποικίλει τόσο ο τύπος των δεδομένων (κατηγορικά, ποσοτικά, διατεταγμένα..) αλλά και οι μέθοδοι παραγωγής τους (πραγματικά δεδομένα, δεδομένα από προσομοίωση/μοντελοποίηση, δεδομένα από βάσεις δεδομένων,..). Η πολυπλοκότητα αυτή αναδείχθηκε έντονα στο σχεδιασμό σχεδόν όλων των ομάδων και προβλημάτισε ο ρόλος που μπορούν να έχουν οι μαθητές σε αποφάσεις που αφορούν τον τύπο και την παραγωγή των δεδομένων. Ο προβληματισμός αυτός είναι έκδηλος στη φράση του Μ6:

Μ6: Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο είναι ότι τα δεδομένα εδώ δεν είναι έτοιμα. Τα παιδιά χρειάζεται να διαμορφώσουν τα δεδομένα, χρειάζονται εργαλεία για να το κάνουν αυτό.

Τεχνολογία

Στη διάρκεια του μαθήματος δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στα ψηφιακά εργαλεία και οι φοιτητές είχαν τη δυνατότητα να εξοικειωθούν και να πειραματιστούν με το TinlerPlots (Konold, et.al., 2005). Παρότι για το σχεδιασμό τους υπήρξε προτροπή αλλά όχι ρητή οδηγία για αξιοποίηση του λογισμικού, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι όλες οι ομάδες αξιοποίησαν το TinkerPlots στα έργα που σχεδίασαν. Έτσι, ζητήματα που σχετίζονται με την διδακτική αξιοποίηση του λογισμικού και τη σημασία του στα στατιστικά έργα ήταν πολύ ισχυρά και σε όλες τις φάσεις της ενότητας που αναλύσαμε.

Παραγωγή των δεδομένων. Όλοι οι φοιτητές αναφέρθηκαν στην δυνατότητα που δίνει το λογισμικό για γρήγορη παραγωγή δεδομένων. Επίσης οι περισσότεροι σχολίασαν τη σημασία πρόσβασης σε μεγάλο όγκο δεδομένων προκειμένου να επιτευχθεί η δυνατότητα διερεύνησης των δεδομένων από τους μαθητές. Επίσης όλοι οι φοιτητές συμφώνησαν ότι η αξιοποίηση ενός κατάλληλου δυναμικού ψηφιακού εργαλείου δίνει μια πραγματική ευκαιρία για στατιστική δραστηριότητα στην τάξη.

Άτυπη Στατιστική Συμπερασματολογία. Η ενθάρρυνση της Συμπερασματολογίας μέσα από τη διδασκαλία της Στατιστικής αποτέλεσε κυρίαρχο σημείο εστίασης του μαθήματος. Όλες οι ομάδες υποστήριξαν αυτόν το στόχο στο σχεδιασμό τους και η δυνατότητα οπτικοποίησης και εξερεύνησης δεδομένων που δίνει το TinkerPlots ήταν καθοριστικά στην απόφαση αξιοποίησης του λογισμικού στα έργα που σχεδίασαν, όπως ανέφεραν οι ίδιοι. Επιπλέον, οι φοιτητές αναφέρθηκαν στη δυνατότητα του λογισμικού να κάνει πολλές επαναλήψεις ενός πειράματος. Τα σημεία στα

οποία εστίασαν κυρίως είναι ότι μέσα από τις πολλές επαναλήψεις ενός πειράματος τα παιδιά κατανοούν καλύτερα αυτό που συμβαίνει, αντιλαμβάνονται την μεταβλητότητα που διέπει το πείραμα και πείθονται γύρω από ζητήματα που πολλές φορές αντικρούονται με τη διαίσθησή τους. Ακολουθεί ένα απόσπασμα από την παρουσίαση της ομάδας με τη Δ η οποία είχε καταφέρει να κάνει εφαρμογή του έργου που σχεδίασαν στα παιδιά της Δ' Δημοτικού στα οποία διδάσκει:

Δ: Σε παιδιά Δ' Δημοτικού είναι πολύ δύσκολο να μιλήσεις για Πιθανότητες. Όταν για παράδειγμα φέρουν 3-4 ένα αποτέλεσμα αρχίζουν να πιστεύουν ότι αυτό είναι πιο πιθανό. Είχα μεγάλη δυσκολία να τους βοηθήσω να καταλάβουν τι είναι το τυχαίο. Το λογισμικό με βοήθησε πολύ σε αυτήν την περίπτωση. Με βοήθησε να τους εξηγήσω.

Μ7: Με το λογισμικό πείθονται.

Μ1: Μέσα από τη δυνατότητα των πολλών επαναλήψεων γίνεται αντιληπτή η ιδέα της τυχαιότητας, της μεταβλητότητας.

Διδακτική Διαχείριση

Το θέμα της διδακτικής διαχείρισης και οι ιδιαίτερες προκλήσεις που έχει να αντιμετωπίσει ο εκπαιδευτικός όταν εντάσσει το στοχαστικό πλαίσιο στην τάξη των μαθηματικών αναδείχθηκε πολύ και στις συζητήσεις με τους φοιτητές τόσο στη φάση που παρουσίαζαν το σχεδιασμό τους όσο και στη φάση αναστοχασμού της ενότητας.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού ήταν ένα στοιχείο που κυρίαρχησε στα λεγόμενα των φοιτητών. Όπως σχολίασαν οι περισσότεροι σε πολλά σημεία της συζήτησης σε μια στατιστική δραστηριότητα η συζήτηση και η διαπραγμάτευση από τους μαθητές είναι αναπόσπαστο μέρος της διαδικασίας. Ο ρόλος του καθηγητή ξεφεύγει από την παρουσίαση ενός προβλήματος και την επικύρωση της σωστής λύσης. Παίρνει έναν ρόλο διευκολυντή στη διαπραγμάτευση του προβλήματος από τους μαθητές. Επιπλέον, στη στατιστική δεν υπάρχει σωστό και λάθος, αυτό που αποτιμάται είναι η μέθοδος, η ακρίβεια, η εγκυρότητα, επομένως ο ρόλος του δεν είναι να επικυρώσει το σωστό αλλά να θέσει τα κρίσιμα ερωτήματα που θα βοηθήσουν τους μαθητές να βελτιώσουν τη στρατηγική τους. Το ακόλουθο απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό των ζητημάτων που ανέδειξαν οι φοιτητές:

Μ8: Η θέση του διδάσκοντα είναι εντελώς διαφορετική. Δεν μπορείς να μπεις στη στατιστική δραστηριότητα μέσα από έναν παραδοσιακό ρόλο. Αναθεωρείται το διδακτικό συμβόλαιο.

Μ6: Η Στατιστική υπάρχει γύρω μας, Τα παιδιά έχουν προϋπάρχουσα γνώση ακόμα και για έννοιες που δεν έχουν διδαχθεί. Εμπλέκονται εύκολα σε συζήτηση. Ο ρόλος του διδάσκοντα είναι πιο καθοδηγητικός.

Η αβεβαιότητα στο σχεδιασμό. Ένα στοιχείο που προέκυψε πολύ ισχυρά στις τοποθετήσεις των φοιτητών ήταν το γεγονός ότι στο σχεδιασμό ενός στατιστικού κύκλου έρευνας δεν μπορείς ούτε να προκαθορίσεις το αποτέλεσμα, ούτε να ελέγξεις την ίδια την πορεία του κύκλου. Προσπαθείς απλά να εξοικειωθείς με το πλαίσιο και τις συνθήκες του προβλήματος όσο καλύτερα μπορείς προκειμένου να συντονίσεις αποτελεσματικά αυτό που θα έρθει κατά την εφαρμογή. Το στοιχείο αυτό αναδείχτηκε από την πλειοψηφία των φοιτητών. Τα παρακάτω αποσπάσματα είναι πολύ χαρακτηριστικά:

> Μ9: Έπρεπε να σκεφτώ εντελώς διαφορετικά. Πάντα στο σχεδιασμό μαθημάτων ήξερα τι ήθελα και μπορούσα να προβλέψω και σε έναν βαθμό τι θα γίνει μέσα στην τάξη όταν δώσω ένα τέτοιο σενάριο. Εδώ τα πράγματα είναι πολύ διαφορετικά. Αυτό με έβγαλε εντελώς από τα νερά μου.

….

> Ε1: Στο δικό σας έργο το ιδιαίτερο στοιχείο ήταν ότι οι ίδιοι οι μαθητές διαπραγματεύονται το ερώτημα.

> Μ10: Κι εδώ θα συμφωνήσω με την Μ9. Και για εμάς αυτό ήταν μεγάλη πρόκληση. Φτιάχναμε σενάρια, δοκιμάσαμε άπειρα πράγματα. Και βέβαια μπορεί να μη βάλουν τίποτα από όσα είπαμε εμείς και να βάλουν τα δικά τους.

Οι διαθέσιμοι πόροι. Οι πόροι που απαιτούνται προκειμένου να μπορεί κανείς να βάλει τη στατιστική δραστηριότητα μέσα στη σχολική τάξη ήταν κυρίαρχο σημείο στις παρουσιάσεις όλων των ομάδων. Οι λέξεις διερεύνηση-ρεαλιστικό-εφαρμόσιμο-εφικτό μπλέκονταν πολύ συχνά και στις περιγραφές των έργων και στο αναστοχασμό των φοιτητών. Οι πόροι που αναδείχτηκαν κυρίως από τους φοιτητές ήταν αρχικά υλικοί πόροι (ψηφιακά εργαλεία, εργαστηριακή υποδομή κτλ). Πολλές ομάδες μάλιστα παρουσίασαν διαφορετικές εκδοχές του σεναρίου τους ώστε να μπορεί να το αξιοποίησει και κάποιος που το σχολείο του δεν του παρέχει τα απαραίτητα μέσα. Στην περίπτωση αυτή βέβαια το εναλλακτικό σενάριο το χαρακτήριζαν ως πιο απλοϊκό «Να μπορεί να το εφαρμόσει και κάποιος που δεν έχει πρόσβαση στο λογισμικό, έστω σε ένα πρώτο επίπεδο διερεύνησης.» (Μ2).

Ο διαθέσιμος χρόνος και οι περιορισμοί στο αναλυτικό πρόγραμμα, αναδείχθηκαν επίσης πολύ ισχυρά στις συζητήσεις με τους φοιτητές. Η μεγάλη πλειοψηφία των έργων απαιτούσε 2-3 διδακτικές ώρες και όλοι οι φοιτητές συμφώνησαν ότι είναι δύσκολο να μπορέσει να πραγματοποιηθεί ουσιαστική στατιστική διερεύνηση σε μια διδακτική ώρα.

Τέλος ένα στοιχείο που φαίνεται να έπαιξε ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό που έκαναν οι φοιτητές ήταν οι ανθρώπινοι πόροι, η συνεργασία και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους, τόσο στο πλαίσιο της ομάδας σχεδιασμού με την οποία δούλεψαν όσο και στο πλαίσιο αλληλεπίδρασης με την ομάδα ανατροφοδότησης που έκρινε το έργο τους. Η συνεργασία και η αλληλεπίδραση φάνηκε να είναι καθοριστικοί παράγοντες στη διαχείριση της αβεβαιότητας του περιεχομένου των στατιστικών προβλημάτων αλλά και της αβεβαιότητας στη διαχείριση του προβλήματος μέσα στην τάξη, όπως συζητήθηκε και νωρίτερα. Χαρακτηριστική είναι η φράση του Μ6:

> Μ6: Για εμένα αυτή η εμπειρία της συνεργασίας στο πλαίσιο της ανατροφοδότησης ήταν μοναδική. Λέω, να που αυτή η διαδικασία λειτουργεί, δεν είναι για το ακαδημαϊκό της υπόθεσης. Το ένιωσα και το επιβεβαιώνει και το αποτέλεσμα.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο άρθρο αυτό διερευνήσαμε κυρίαρχα ζητήματα που αναδύονται όταν οι φοιτητές σχεδιάζουν έργα στατιστικής που υποστηρίζουν τις σύγχρονες ιδέες της Στατιστικής Εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας ανέδειξαν τρία κύρια θέματα που απασχόλησαν το σχεδιασμό των φοιτητών του μαθήματος. Το πρώτο είναι τα Δεδομένα και πως το νόημα και η διαχείρισή τους διαφοροποιείται στη στατιστική σε σχέση με τα υπόλοιπα πεδία των μαθηματικών. Το δεύτερο είναι η Τεχνολογία και ο ρόλος της στη στατιστική διερεύνηση και την ανάπτυξη στατιστικής συλλογιστικής και το τρίτο είναι η Διδακτική Διαχείριση και οι ιδιαίτερες προκλήσεις που φαίνεται να πηγάζουν από το στοχαστικό πλαίσιο των στατιστικών προβλημάτων.

Σε προηγούμενες έρευνες των συγγραφέων έχουν επίσης αναδειχθεί ιδιαιτερότητες του περιεχομένου της Στατιστικής και προκλήσεις που αφορούν στην νέα πρακτική και το νέο ρόλο που καλούνται να αναπτύξουν οι εκπαιδευτικοί (π.χ. Μπακογιάννη, 2017; Παπαριστοδήμου et.al., 2017). Το ιδιαίτερο στοιχείο που αναδεικνύει τη σημασία αυτής της έρευνας είναι ότι τα στοιχεία αυτά δεν ήταν αποτέλεσμα παρατήρησης των ερευνητών αλλά αποτέλεσμα της εμπειρίας των ίδιων των φοιτητών μέσα από ένα οργανωμένο πρόγραμμα επιμόρφωσης.

Μέσα από τη φωνή των εν-ενεργεία και μελλοντικών εκπαιδευτικών που αναπτύσσουν την πρακτική τους αντιλαμβανόμαστε σε βάθος την ανάγκη συστηματικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών σε αυτό το ιδιαίτερο και απαιτητικό πεδίο των μαθηματικών που κυριαρχεί στη ζωή των σύγχρονων πολιτών. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι η ανάπτυξη στατιστικής συλλογιστικής μέσα στην τάξη των μαθηματικών διαμορφώνει διαφορετικές διδακτικές πρακτικές κι επιπλέον απαιτεί

πρόσβαση σε πόρους και διδακτικά υλικά που δεν είναι διαθέσιμοι σε μια συνήθη τάξη μαθηματικών στη χώρα μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ben-Zvi, D., Makar, K., Garfield, J. (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education. Springer International Handbooks of Education,* Springer, Cham

Burrill, G. F., de Oliveria Souza, L., & Reston, E. (Eds.). (2023). Research on reasoning with data and statistical thinking: International perspectives. Springer Nature.

Burrill, G., & Pfannkuch, M. (2023). Emerging trends in statistics education. ZDM–Mathematics Education, 1-11.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK-12 Curriculum Framework*.

Franklin, C., & Bargagliotti, A. (2020). *Introducing GAISE II: A guideline for precollege statistics and data science education*.

Μπακογιάννη, Δ. (2017). Διαμορφώνοντας την ιδέα του ανθρώπινου πόρου κατά τη μελέτη της ανάπτυξης της διδασκαλίας της στατιστικής. *Πρακτικά 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*. Πανεπιστήμιο Κύπρου στις 6-8 Δεκεμβρίου 2019, Λευκωσία, Κύπρος.

Παπαριστοδήμου, Ε., Μελετίου-Μαυροθέρη, Μ. & Serrado Bayes, A. (2017). Μοντελοποιώντας προβλήματα στατιστικού συλλογισμού. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 0, 27- 42.

Konold, C., & Miller, C. D. (2005). *TinkerPlots: Dynamic data exploration.* [Computer software] Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, 67(3), 223-248.

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΜΕ ΥΛΙΚΟ ΤΟΥ ΑΛΛΟΥ

Ευσταθία Αποστολοπούλου[1], Ανδρέας Κουλούρης[2], Απόστολος Σίδερης[3], Κωνσταντίνος Στουραΐτης[4]

[1]4ο ΓΕΛ Γαλατσίου, [2]3ο ΓΕΛ Γαλατσίου, [3]3ο ΓΕΛ Αλίμου,

[4]Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

efsapostol@yahoo.gr, akoulouris13@gmail.com, aposider@gmail.com, stouraitisk@gmail.com

Η επιλογή και χρήση διδακτικού υλικού από τους εκπαιδευτικούς είναι μια αμφίδρομη διαδικασία κατά την οποία ο εκπαιδευτικός προσαρμόζει τις επιλογές του και τροποποιεί το υλικό. Στην παρούσα εργασία, τέσσερις εκπαιδευτικοί διερευνούν την επιλογή νέου υλικού και την προσαρμογή του από τους ίδιους για τις ανάγκες της διδασκαλίας τους. Το υλικό έχει δημιουργηθεί από άλλον εκπαιδευτικό της ομάδας και σε μία περίπτωση για διαφορετικό τρόπο χρήσης. Μέσα από τις αιτιολογήσεις των επιλογών προκύπτουν στοιχεία για την διαμόρφωση νέων σχημάτων χρήσης του υλικού από τους εκπαιδευτικούς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιλογή και η ανάπτυξη υλικού για τη διδασκαλία των μαθηματικών και η προσαρμογή του στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών είναι μια πτυχή της εργασίας του εκπαιδευτικού που έχει σημαντική επίδραση στις ευκαιρίες που έχουν οι μαθητές[4] να μάθουν μαθηματικά. Η σχέση του εκπαιδευτικού με τα υλικά και τους πόρους που χρησιμοποιεί έχει μελετηθεί αρκετά (Remillard, 2005, Trouche, Gueudet & Pepin, 2020). Ο Brown (2009) γράφοντας για τα υλικά των προγραμμάτων σπουδών, αναφέρει ότι οι εκπαιδευτικοί μπορεί να τα υιοθετούν, να τα απορρίπτουν ή να τα τροποποιούν, και πάντως προσπαθούν να συμβιβάσουν αυτά που θεωρούν ως πρόθεση των συγγραφέων με τους δικούς τους στόχους και δυνατότητες.

Η παρούσα εργασία περιγράφει και αναλύει την προσπάθεια τεσσάρων εκπαιδευτικών να μελετήσουν την επιλογή και τροποποίηση διδακτικού υλικού από τους ίδιους για την τάξη τους και εντάσσεται στο πλαίσιο της ευρύτερης και μακρόχρονης επαγγελματικής συνεργασίας τους. Το ερευνητικό πρόβλημα που οδήγησε σε αυτήν είναι η επιλογή και χρήση υλικού που έχει δημιουργηθεί από κάποιον άλλον. Παρά το ότι η αλληλεπίδραση του εκπαιδευτικού με τα υλικά και τους πόρους έχει μελετηθεί αρκετά, η έρευνα δεν έχει εστιάσει ιδιαίτερα στην προέλευση του διδακτικού υλικού. Επιπλέον, η συμβολή της παρούσας εργασίας εντοπίζεται αφενός στο ότι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί διερευνούν τις δικές τους επιλογές και αφετέρου στο ότι εντάσσουν αυτή τη διαδικασία στο πλαίσιο της επαγγελματικής τους ανάπτυξης.

---

[4] Χρησιμοποιούμε το γραμματικό αρσενικό γένος «ο μαθητής» με συμπεριληπτικό τρόπο, δηλαδή εννοούμε «ο μαθητής και η μαθήτρια». Εφεξής, το γραμματικό αρσενικό γένος χρησιμοποιείται σε όλες τις ανάλογες περιπτώσεις με παρόμοιο τρόπο.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

1ο: Γιατί ένας εκπαιδευτικός αναζητά νέο υλικό και με ποια κριτήρια το επιλέγει;

2ο: Ποιες τροποποιήσεις επιφέρει στο υλικό αυτό και γιατί;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Στην εκπαίδευση χρησιμοποιούνται, δημιουργούνται και αναπτύσσονται πόροι, που μπορεί να είναι υλικοί, όπως ο πίνακας και ο υπολογιστής, ή άυλοι, όπως τα προγράμματα σπουδών και τα εκπαιδευτικά λογισμικά (Adler, 2000). Ενώ στους πόρους μπορεί να συμπεριλαμβάνονται πολλά και διαφορετικά στοιχεία που αξιοποιεί ο εκπαιδευτικός πριν, κατά και μετά από τη διδασκαλία του, στην παρούσα μελέτη ως διδακτικό υλικό αντιλαμβανόμαστε αυτό που είναι σχεδιασμένο για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και αξιοποιείται στην τάξη ή στο σπίτι π.χ. διδακτικοί σχεδιασμοί, έργα που δίνονται στους μαθητές, φύλλα εργασίας (φ.ε.), ψηφιακά υλικά, βίντεο κ.α. Το διδακτικό υλικό που αξιοποιείται στην τάξη των μαθηματικών δεν εξαντλείται στα υλικά του προγράμματος σπουδών και για αυτό η έρευνα μελετά γενικότερα τις σχετικές επιλογές των εκπαιδευτικών (Remillard, 2005). Η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών φαίνεται να έχει μελετήσει αρκετά την χρήση και την τροποποίηση των υλικών και μάλλον λιγότερο τη λογική της επιλογής τους από τους εκπαιδευτικούς, ιδιαίτερα στη σύγχρονη εποχή της κυριαρχίας του διαδικτύου (Yacobson & Alexandron, 2023).

Σχετικά με την αλληλεπίδραση του εκπαιδευτικού με το υλικό, οι θεωρητικές οπτικές που έχουν προταθεί (Remillard 2005, Trouche κ.α., 2020) αναγνωρίζουν ότι πρόκειται για μια αμφίδρομη διαδικασία: Ο εκπαιδευτικός και οι διδακτικές επιλογές του επηρεάζονται από το υλικό, αλλά συγχρόνως ο εκπαιδευτικός επηρεάζει, τροποποιεί και διαμορφώνει το υλικό. Η «θεωρία μονάδων διδασκαλίας και χρήσης πηγών» (Documentantional Approach to Didactics - DAD) (Trouche κ.α., 2020), φαίνεται να συλλαμβάνει αυτή την αμφίδρομη διαδικασία. Σύμφωνα με την DAD, κατά την αλληλεπίδρασή του με τους πόρους, ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει σχήματα χρήσης αυτών των πόρων. Στα σχήματα συμπεριλαμβάνονται οι στόχοι της δραστηριότητας και οι κανόνες εφαρμογής των πόρων αλλά και γενικότερες κοινωνικομαθηματικές και κοινωνικές νόρμες που υιοθετεί ο εκπαιδευτικός. Έτσι, διαφορετικοί εκπαιδευτικοί μπορεί να αναπτύσσουν διαφορετικά σχήματα χρήσης για τον ίδιο πόρο, ανάλογα με τις γνώσεις και τις προδιαθέσεις τους. Ακόμα και ο ίδιος εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί το ίδιο υλικό με διαφορετικό τρόπο σε διαφορετικές τάξεις (Kayali & Biza, 2021).

Για την επιλογή των πόρων, φαίνεται ότι μία βασική προέλευση είναι τα υπάρχοντα υλικά των προγραμμάτων σπουδών και των βιβλίων (Remillard, 2005). Ωστόσο, τις τελευταίες δεκαετίες με την ανάπτυξη της χρήσης του διαδικτύου, η πρόσβαση σε διδακτικά υλικά και η επικοινωνία μεταξύ εκπαιδευτικών έχει γίνει πολύ πιο εύκολη (Trouche κ.α., 2020, Yacobson & Alexandron, 2023) και έχει αυξηθεί σημαντικά, ιδιαίτερα μετά την περίοδο του covid.

Η επιλογή του υλικού από τον εκπαιδευτικό επηρεάζεται από τις μορφές δραστηριότητας που προτιμά ο εκπαιδευτικός για την τάξη του αλλά και από τις οπτικές που υιοθετεί για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους (Pepin, Gueudet & Trouche, 2013). Ωστόσο, όπως συμπεραίνουν οι Diekema και Olsen στην έρευνά τους (2012), ένας βασικός παράγοντας επιλογής εκπαιδευτικών πόρων είναι η σύσταση από συναδέλφους. Στον ελληνικό χώρο, οι Δίκαρου και Τριανταφύλλου (2019) μελετώντας τις πηγές που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών, σημειώνουν ότι για την επιλογή πηγών είναι κυρίαρχος ο ανθρώπινος παράγοντας, είτε με τη μορφή του συγγραφέα του υλικού, είτε με τη μορφή της επικοινωνίας με ομότιμους μέσω διαδικτυακών φόρουμ. Ομοίως, οι Yacobson και Alexandron (2023) αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί δίνουν μεγάλη σημασία τόσο στο ποιος

(εκπαιδευτικός) είναι ο δημιουργός του υλικού, όσο και στο ποιος μεταφέρει πληροφορίες για αυτό.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της έρευνας

Οι τρεις εκ των συγγραφέων, εκπαιδευτικοί (με πάνω από 25 χρόνια εμπειρίας) σε τρία Γενικά Λύκεια περιοχών της Αθήνας αναζήτησαν και χρησιμοποίησαν νέο υλικό για τη διδασκαλία στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. Οι διδασκαλίες αφορούσαν την ν-οστή ρίζα πραγματικού αριθμού και την δύναμη με ρητό εκθέτη και σε αυτές οι εκπαιδευτικοί αξιοποίησαν διδακτικό υλικό που είχε δημιουργηθεί από άλλην εκπαιδευτικό της ομάδας, αφού το προσάρμοσαν για τη δική τους διδασκαλία. Τα αρχικά υλικά ήταν δύο: Πρώτο, ένας σχεδιασμός διδασκαλίας της Λίνας (ψευδώνυμο, όπως και τα υπόλοιπα ονόματα) ο οποίος είχε στόχο να αναγνωρίσουν τα παιδιά την αναγκαιότητα εισαγωγής τη νιοστής ρίζας και να οδηγηθούν στον ορισμό και τις ιδιότητες της. Με βάση αυτόν τον σχεδιασμό η Άννα οργάνωσε τη διδασκαλία της με προφορικές ερωτήσεις και η Εύα δημιούργησε φύλλο εργασίας για την τάξη της. Δεύτερο, ένα βίντεο (14 λεπτών) που είχε κατασκευάσει η Άννα για την δύναμη με ρητό εκθέτη στο πλαίσιο της ανεστραμμένης διδασκαλίας αλλά και για να μπορούν οι μαθητές να ανατρέξουν σε αυτό κατά τη μελέτη τους στο σπίτι. Το βίντεο είχε στόχο να παρουσιάσει τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη ως νιοστές ρίζες και τις επιλογές που υπάρχουν για την εκτέλεση πράξεων. Η Λίνα χρησιμοποίησε αυτό το βίντεο στο εργαστήριο πληροφορικής, ζητώντας από τους μαθητές να το παρακολουθήσουν ανά δύο, να γυρίζουν πίσω όποτε χρειάζεται και να σταματούν σε συγκεκριμένα σημεία για να λύσουν συνεργαζόμενοι ασκήσεις, οι οποίες περιλαμβάνονταν σε φύλλο εργασίας που κατασκεύασε για τον σκοπό αυτόν. Αφού παρακολούθησαν το μάθημα της Λίνας, στη συνέχεια την ιδέα αυτή, με μικρές τροποποιήσεις, υλοποίησαν η Εύα και η Άννα.

Και τα δύο αρχικά υλικά είχαν εννοιολογικό προσανατολισμό, ακόμα κι αν αναφέρονταν σε αλγοριθμικού τύπου διαδικασίες, όπως η απλοποίηση μιας παράστασης με ρίζες. Σε όλες τις διδασκαλίες οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των δύο ή περισσότερων ατόμων.

Η γένεση και η ανάλυση των δεδομένων

Έγιναν πέντε διδασκαλίες τις οποίες παρακολούθησαν μέλη της ομάδας των συγγραφέων καταγράφοντας παρατηρήσεις, χωρίς να έχει προηγηθεί συζήτηση για τον σχεδιασμό τους. Ακολουθούσαν αναστοχαστικές συζητήσεις επί των διδασκαλιών σε οκτώ συναντήσεις των συγγραφέων. Οι συζητήσεις ηχογραφούνταν και επεξεργάζονταν εκ νέου από τις εκπαιδευτικούς. Τα δεδομένα της παρούσας μελέτης είναι τα αρχικά υλικά, οι τροποποιήσεις τους, οι απαντήσεις των μαθητών σε σύντομα ερωτηματολόγια αναστοχασμού και οι οκτώ απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις των εκπαιδευτικών. Τα ερευνητικά ερωτήματα δεν ήταν διαμορφωμένα από την αρχή, αν και η ομάδα ήταν προσανατολισμένη στο ευρύτερο ερευνητικό πρόβλημα: γιατί και πώς ένας εκπαιδευτικός αξιοποιεί υλικό άλλου εκπαιδευτικού.

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με μεθόδους ανάλυσης περιεχομένου. Οι συγγραφείς, μελετώντας τα οκτώ απομαγνητοφωνημένα κείμενα, έδωσαν στα ερευνητικά ερωτήματα την τελική τους μορφή, συγκέντρωσαν τα αποσπάσματα που έδειχναν να συνδέονται με αυτά και όταν συμφώνησαν στην ερμηνεία τους διαμόρφωσαν την παρούσα εργασία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Γιατί οι εκπαιδευτικοί αναζήτησαν νέο υλικό;

Οι εκπαιδευτικοί αναζήτησαν κυρίως διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις, νέο -για τους ίδιους- υλικό, τόσο στη μορφή όσο και στο περιεχόμενο. Η Λίνα λέει «μπορεί το αρχικό κίνητρο να είναι ότι θέλω να πλουτίσω κάτι». Η Άννα, εκφράζοντας τις δικές της ανησυχίες,

λέει «με ενδιαφέρει πάρα πολύ, αν κάποιος έχει διαφορετική προσέγγιση από τη δική μου». Η Εύα αναγνωρίζει την ανάγκη να εμπλουτίσει με νέο υλικό τη διδασκαλία της, εφόσον τα διδακτικά βιβλία παραμένουν ίδια για δεκαετίες. Επιπλέον, κίνητρο μπορεί να είναι και η μορφή του υλικού: «βίντεο δεν έχω ξανακάνει».

Παρόλη τη διάθεση αλλαγής, οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν ότι υπάρχουν αντιστάσεις: «η ασφάλεια της πεπατημένης, του γνωστού, η βαρεμάρα …» (Λίνα). Ακόμα, η μακρόχρονη εμπειρία μπορεί να αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στο να διαθέσουν κόπο και χρόνο σε αναζητήσεις. Όπως λέει η Εύα, «το υλικό που παίρνω από άλλον θέλει χρόνο». Η Άννα συμπληρώνει ότι της εξήγησε το υλικό η Λίνα, διότι αλλιώς «δεν θα καταλάβαινα καλά, ίσως δεν θα του έδινα σημασία, δεν θα το μελετούσα σε βάθος». Η Λίνα υπερθεματίζει: «κυκλοφορούν άπειρα βίντεο, δεν ξέρω αν θα άνοιγα ένα … αν δεν υπάρχει κάτι να με κάνει να αγκιστρωθώ …», εξάλλου «υπάρχει μεγάλη αντίσταση να υιοθετήσει κάποιος κάτι καινούργιο» (Άννα).

Με ποια κριτήρια επέλεξαν το νέο υλικό;

Στην επιλογή του νέου υλικού ιδιαίτερο ρόλο φαίνεται να διαδραματίζει η αξία που έχει για τις εκπαιδευτικούς η πηγή της πληροφόρησης, «το να μου το συστήσει ο φίλος, ο συνάδελφος που ξέρω» επισημαίνει η Άννα. «Βρήκα αυτό το υλικό από τη Λίνα που την γνώριζα» λέει η Άννα και επαυξάνει «…χρειάζομαι κάποια εγγύηση».

Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα για το υλικό που επέλεξαν. Για το βίντεο, όπως λέει η Λίνα,

> θα είναι ένας καθηγητής που θα λέει αυτά που θα τους έλεγα εγώ και τα παιδιά έχουν ένα τηλεκοντρόλ για να τον κανονίζουν να μιλάει με τον ρυθμό και τις επαναλήψεις που θέλουν … και μπορεί να το επαναλάβει όσες φορές θέλει ή σε όσα σημεία θέλει.

Βέβαια, υπάρχουν και μειονεκτήματα. «…Το βίντεο δεν έχει διάδραση» (Λίνα). «…(Ο μαθητής) μπορεί να το επαναλάβει όσες φορές θέλει, αλλά δεν μπορεί ποτέ να τροποποιήσει αυτό που ακούει» και «τελικά ο μαθητής δεν έχει τη δυνατότητα να παρεκκλίνει … να ακολουθήσει διαφορετικό δρόμο» (Εύα).

Στη διδακτική προσέγγιση της Λίνας αναγνωρίστηκε αφενός ότι αναδεικνύεται η έννοια των νιοστών ριζών και όχι οι σχετικοί φορμαλισμοί και αφετέρου ότι εμπλέκονται οι μαθητές στη διερεύνηση της έννοιας και της ανάγκης εισαγωγής της (Εύα), και τους προσφέρεται η δυνατότητα της ανακάλυψης.

Οι τροποποιήσεις στον σχεδιασμό της διδασκαλίας για τις ρίζες

Το υλικό της Λίνας ήταν ένας σχεδιασμός διδασκαλίας για την εισαγωγή στην έννοια της νιοστής ρίζας, στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου που ήταν διαμορφωμένος σε μορφή γραπτού κειμένου.

Η Άννα επέλεξε να το αξιοποιήσει θέτοντας στους μαθητές διαδοχικά ερωτήματα τα οποία ακολουθούσαν το σκεπτικό της διδακτικής πρότασης της Λίνας. Οι μαθητές συνεργάζονταν για λίγα λεπτά στην ομάδα τους για να απαντήσουν στα ερωτήματα. Η Άννα επέλεγε τον εκπρόσωπο της κάθε ομάδας, ο οποίος απαντούσε στα ερωτήματα και εξηγούσε στην τάξη την άποψη της ομάδας του και κατόπιν προχωρούσε στο επόμενο ερώτημα. Εξηγεί ότι έτσι προωθεί τη συνεργασία των μαθητών στην ομάδα.

Η Άννα ανέφερε ότι η πρώτη διδασκαλία ήταν μόνο η αρχή μιας συνεχούς εξέλιξης στην κατανόησή της λογικής του νέου υλικού αλλά και στην βελτίωση της εφαρμογής του. «Πάντα

θέλω μια πρόβα όταν κάνω κάτι πρώτη φορά, την επομένη πάντα το αλλάζω, αν το 'χω κάνει πολλές φορές μπορεί να μην το αλλάξω …»

Η Εύα επέλεξε να κατασκευάσει ένα φύλλο εργασίας δομημένο σύμφωνα με το σκεπτικό της διδασκαλίας της Λίνας, στο οποίο οι μαθητές εργάστηκαν ανά τέσσερεις. Στην πορεία της διδασκαλίας, παρουσιάστηκε η ανάγκη το φύλλο να συμπληρωθεί με σχήματα που η εκπαιδευτικός έκανε στον πίνακα, ενώ κατά τη διάρκεια της μετέπειτα συζήτησης των εκπαιδευτικών, η Λίνα ανέφερε πώς όταν επιλέγει και η ίδια να διδάξει το μάθημα αυτό με φύλλα εργασίας, χρησιμοποιεί κατά κύριο λόγο ερωτήματα που σχετίζονται με συγκεκριμένα σχήματα.

Στη συζήτηση των εκπαιδευτικών η Εύα ανέφερε ότι επέλεξε να φτιάξει ένα φ.ε. επειδή αισθάνθηκε την ανάγκη «να τον εφαρμόσει [τον σχεδιασμό της Λίνας] με κάπως πιο οριοθετημένα βήματα» ώστε η συζήτηση που θα προέκυπτε στην τάξη να μην ξεφύγει από τους διδακτικούς στόχους, αφού δεν είχε προηγούμενη εμπειρία από την χρήση του υλικού. Ακόμα, μη γνωρίζοντας τις χρονικές απαιτήσεις του φ.ε., διαμόρφωσε τα τελευταία ερωτήματα ώστε να μπορούν να δοθούν ως εργασία στο σπίτι.

Οι τροποποιήσεις στη χρήση του βίντεο για τις δυνάμεις

Το υλικό της Άννας ήταν ένα βίντεο στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου που είχε κατασκευάσει για τη διδασκαλία της δύναμης με ρητό εκθέτη, με σκοπό να μπορούν να ανατρέξουν σε αυτό οι μαθητές εκτός τάξης, σε περίπτωση που έχουν χάσει την παράδοση του αντίστοιχου μαθήματος. Το βίντεο παρουσίαζε όσα γράφονταν στον πίνακα σε μια «εικονική» παράδοση του μαθήματος, ενώ ταυτόχρονα ακουγόταν η φωνή της εκπαιδευτικού που εξηγούσε αυτά που έγραφε.

Η Λίνα, αντίθετα από το σχεδιασμό της Άννας, επέλεξε να χρησιμοποιήσει το βίντεο στην τάξη, με στόχο την εισαγωγή της έννοιας του ρητού εκθέτη, και την επίλυση απλών ασκήσεων. Για τον λόγο αυτό, έφτιαξε και μοίρασε φύλλο εργασίας, το οποίο περιείχε οδηγίες προς τους μαθητές να σταματήσουν την προβολή του βίντεο σε συγκεκριμένα σημεία, και να επιλύσουν αντίστοιχες ασκήσεις.

> Ήθελα να δω κατά πόσον ένα βίντεο μπορεί να με βοηθήσει ιδιαίτερα. Αλλά εγώ το πρώτο που θα ήθελα να δω είναι οι ομάδες να κάνουν μπρος πίσω [να ανατρέχουν στα κατάλληλα σημεία του βίντεο].

Η προβολή του βίντεο έγινε στους υπολογιστές του Εργαστηρίου Πληροφορικής του σχολείου. Οι μαθητές δούλεψαν ανά δύο και μοιράστηκαν ακουστικά που συνέδεσαν στους υπολογιστές για να ακούν ταυτόχρονα τον ήχο του βίντεο και να συνεργάζονται. Οι εκπαιδευτικοί διαπίστωσαν ότι η ανάγκη να μοιραστούν δύο μαθητές το ίδιο ζευγάρι ακουστικών (λόγω έλλειψης περισσότερων συσκευών) προώθησε τη συνεργασία μεταξύ τους, όπως άλλωστε σχολίασαν και οι ίδιοι οι μαθητές.

Ενώ η παρακολούθηση ενός βίντεο δεν επιτρέπει την αλληλεπίδραση μαθητή-εκπαιδευτικού, η Λίνα θεωρεί ότι η δυνατότητα του μαθητή να διατρέξει το βίντεο και να επαναλάβει την προβολή των σημείων που επιθυμεί, του επιτρέπει να «παρέμβει» στον ρυθμό της διδασκαλίας και να τον διαμορφώσει σύμφωνα με τις ανάγκες του.

Η Εύα χρησιμοποίησε τον ίδιο τρόπο προβολής του βίντεο στους μαθητές, δηλαδή ανά δύο, με κοινά ακουστικά, στο Εργαστήριο Πληροφορικής. Στο μάθημα αυτό, οι μαθητές πήραν οδηγίες να παρακολουθήσουν πρώτα ολόκληρη την προβολή του βίντεο και να σημειώσουν ότι θεωρούσαν σημαντικό. Στη συνέχεια, τους δόθηκε ένα φύλλο ασκήσεων, με την οδηγία, σε περίπτωση που χρειάζονταν βοήθεια, να ανατρέξουν είτε στις σημειώσεις τους είτε στο κατάλληλο σημείο στο βίντεο.

Η Εύα επέλεξε αυτή την χρήση του βίντεο θεωρώντας ότι μπορεί να υποστηρίξει την εξοικείωση των μαθητών με την αξιολόγηση της πληροφορίας και την καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων, αφού η δυνατότητα παύσης ή επαναπροβολής τους βοηθά να εργάζονται με τον δικό τους ρυθμό και τους δίνει τον χρόνο να αξιολογήσουν τη νέα γνώση.

Οι διδάσκουσες παρατήρησαν ότι και στις δύο διδασκαλίες με την χρήση του βίντεο, οι μαθητές ήταν περισσότερο προσηλωμένοι από ότι συνήθως. Αυτό μπορεί να συνδέεται με τον διαφορετικό τρόπο που έγινε το μάθημα, που ίσως ανανέωσε το ενδιαφέρον τους, ή με την εξοικείωση και την προτίμησή τους στα ηλεκτρονικά μέσα ή ακόμα και με την ύπαρξη παρατηρητών στην τάξη.

Δυσκολίες και προβληματισμοί στην επιλογή και τροποποίηση υλικού

Κατά τις συζητήσεις των εκπαιδευτικών ήταν εμφανής ο προβληματισμός σχετικά με την ενσωμάτωση υλικού από άλλη εκπαιδευτικό. Κάθε υλικό είναι συμβατό με ένα διδακτικό μοντέλο που μπορεί να μην ταιριάζει σε άλλην εκπαιδευτικό. «…Είναι δύσκολο να αξιοποιήσεις υλικό άλλου» λέει η Εύα και η Άννα λέει ότι θέλει να δει το μάθημα της δημιουργού, να καταλάβει την φιλοσοφία της και τους στόχους της «και μετά θα το εντάξω στην δική μου φιλοσοφία και θα βάλω δικές μου ερωτήσεις…» Τα προηγούμενα φέρνουν στο επίκεντρο τη χρήση υλικού με στόχους διαφορετικούς από εκείνους της δημιουργού. «…[Κ]αι τι πειράζει να πάρω εγώ το δικό σου φυλλάδιο… αν έχω άλλη στοχοθεσία; Δηλαδή ένα φυλλάδιο εξυπηρετεί ένα συγκεκριμένο στόχο;» αναρωτιέται η Εύα. Από την άλλη, η Λίνα συγκρίνοντας τις διαφορετικές εφαρμογές, αποφαίνεται «είναι τεράστια η διαφορά». Και παρατηρεί ότι οι οδηγίες που δίνονται από την εκπαιδευτικό μπορεί να αλλοιώσουν τον αρχικό χαρακτήρα του υλικού, να τον περιορίσουν και να αποκλείσουν ενδεχομένως κάποιες λειτουργίες που θα μπορούσε να εξυπηρετήσει: «τους έδωσα οδηγίες σημαίνει ότι εγώ έκοψα κάποιες δυνατότητες του υλικού». Η Άννα σημειώνει ότι ενώ έχει φτιάξει πολλά βίντεο, παρόλα αυτά, «...δεν θα πήγαινε ποτέ το μυαλό μου να αξιοποιήσω κάποιο διδακτικά με τον τρόπο που πρότεινε η Λίνα».

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Άννα αξιοποίησε σε άλλα 4 τμήματα το δικό της βίντεο, αλλά με την διδακτική προσέγγιση της Λίνας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σχετικά με το γιατί ένας εκπαιδευτικός αναζητά νέο διδακτικό υλικό, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας υποδεικνύουν ότι οι λόγοι που ώθησαν τις συμμετέχουσες ήταν αφενός η κάλυψη της ανάγκης εμπλουτισμού του σχολικού βιβλίου και, αφετέρου, η διάθεση να ανανεώσουν το διδακτικό τους ρεπερτόριο δοκιμάζοντας υλικά και προσεγγίσεις που έχουν αξιοποιηθεί στη διδασκαλία. Οι ίδιες όμως αναγνωρίζουν τις αντιστάσεις στην αλλαγή που δημιουργούνται είτε από δυνάμεις αδράνειας, είτε από την απαίτηση να διατεθεί πολύς χρόνος σε μια ενδεχομένως ατελέσφορη αναζήτηση.

Οι συμμετέχουσες είχαν ως κριτήριο επιλογής του υλικού την προέλευσή του από τις συναδέλφισσές τους που γνώριζαν και εκτιμούσαν το έργο τους. Αυτή η προέλευση θεωρήθηκε ότι μειώνει σε χρόνο την αναζήτηση και διασφαλίζει την ποιότητα του υλικού και την συμβατότητά του με τις προτιμήσεις της εκπαιδευτικού που κάνει την επιλογή. Ειδικά όσον αφορά το υλικό που επιλέχθηκε, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά του σχετίστηκαν με την δυνατότητα προσαρμογής του στις ανάγκες των μαθητών και τον βαθμό εμπλοκής που αυτό επέτρεπε.

Τα συμπεράσματα βρίσκονται σε συμφωνία με ευρήματα άλλων ερευνητών που αναδεικνύουν την αξία που έχει για τους εκπαιδευτικούς τόσο η γνώμη και οι συστάσεις των συναδέλφων

τους, όσο και τα υλικά που έχουν παραχθεί από εκείνους (Diekema & Olsen, 2012, Δίκαρου & Τριανταφύλλου, 2019, Yacobson & Alexandron, 2023).

Παρατηρήθηκε ότι σε όλες τις περιπτώσεις το υλικό προσαρμόστηκε από την εκπαιδευτικό που το χρησιμοποίησε και σε μια περίπτωση, από την ίδια εκπαιδευτικό που το δημιούργησε, αφού είχε χρησιμοποιηθεί από τις άλλες εκπαιδευτικούς. Μεταξύ των τροποποιήσεων, η αξιοποίηση του βίντεο στην τάξη αποκάλυψε νέες δυνατότητες και προοπτικές για το υλικό. Οι αλλαγές αιτιολογούνταν από τις ίδιες ως απαραίτητες ώστε να ταιριάξουν στο διδακτικό μοντέλο που έχουν διαμορφώσει μετά από πολλά χρόνια διδασκαλίας. Η Λίνα, αιτιολογεί τις επιλογές της με την επιδίωξη να ενεργοποιηθούν οι μαθητές κατά τη χρήση του βίντεο. Για το ίδιο βίντεο η Εύα κάνει τον σχεδιασμό της επιδιώκοντας την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών και για τη διδασκαλία των ριζών με ένα φ.ε. επιδιώκει την οριοθέτηση της συζήτησης. Η Άννα διαχειρίζεται τον διάλογο στην τάξη με τρόπο που προωθεί τη συνεργασία των μαθητών. Φαίνεται λοιπόν ότι οι εκπαιδευτικοί διαμορφώνουν σχήματα χρήσης του υλικού (Trouche κ.α., 2020) με βάση το είδος της δραστηριότητας που επιδιώκουν να αναπτυχθεί στην τάξη και τις νόρμες που προωθούν.

Σε μία περίπτωση είχαμε τη χρήση του βίντεο από την δημιουργό του (την Άννα) αλλά με εντελώς διαφορετικό τρόπο από εκείνον για τον οποίο το δημιούργησε. Αυτό συνομιλεί με τα συμπεράσματα των Kayali και Biza (2021) σύμφωνα με τα οποία ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί το ίδιο υλικό με διαφορετικό τρόπο. Ωστόσο, το συμπέρασμα εκείνων των ερευνητριών συνδέονταν με τις διαφορετικές ανάγκες διαφορετικών τάξεων, ενώ στην παρούσα έρευνα έχουμε αξιοποίηση του ίδιου υλικού για ανάπτυξη διαφορετικής δραστηριότητας στην τάξη και έτσι διαμόρφωση νέων σχημάτων χρήσης.

Μια σημαντική πτυχή συνδέεται με τα απρόοπτα που είτε παρατηρήθηκαν και επηρέασαν την μετέπειτα χρήση του υλικού (όπως η χρήση ενός ζεύγους ακουστικών από δύο μαθητές), είτε έγινε προσπάθεια να προληφθούν (όπως η προσπάθεια οριοθέτησης της συζήτησης μέσω ενός φ.ε.). Αυτά επηρέασαν την διαμόρφωση των σχημάτων χρήσης του υλικού ή και το ίδιο το υλικό, επιβεβαιώνοντας ότι "αυτές οι στιγμές έχουν ουσιώδη ρόλο στο πώς οι εκπαιδευτικοί επεξεργάζονται τους πόρους" (Kayali & Biza, 2021, σ. 430)

Συμπερασματικά, θα λέγαμε ότι οι εκπαιδευτικοί, ακόμα και οι έμπειροι, συχνά αναζητούν νέο υλικό που θα ανανεώσει τη διδασκαλία τους αλλά ταυτόχρονα να είναι προσαρμόσιμο στις προτιμήσεις τους. Ωστόσο, η υπερπληθώρα υλικού που διατίθεται σε έντυπη ή ηλεκτρονική μορφή ενδέχεται να δρα αποτρεπτικά. Ένας τρόπος υπέρβασης αυτού του παράδοξου ίσως είναι η ανάπτυξη δικτύων/κοινοτήτων από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, με αντικείμενο - μεταξύ άλλων- τον σχεδιασμό, τον διαμοιρασμό και την αξιοποίηση νέου υλικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3,* 205–224.

Brown, M. W. (2009). The teacher–tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Heisenmann, & G. M. Lloyd (Επιμ.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 19-36). New York & London: Routledge.

Diekema, A. R., & Olsen, M. W. (2012). The notion of relevance in teacher information behavior. *Proceedings of the American Society for Information Science and Technology, 49*(1), 1–9.

Kayali, L., & Biza, I. (2021). Scheming and re-scheming: Secondary mathematics teachers' use and re-use of resources. *Digital Experiences in Mathematics Education, 7*(3), 427-452.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: A collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM, 45*(7), 929-943.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211-246.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). The documentational approach to didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd ed., pp. 237–247). Dordrecht: Springer.

Yacobson, E., & Alexandron, G. (2023). How Do Teachers Search for Learning Resources? A Mixed Method Field Study. In Viberg, O., Jivet, I., Muñoz-Merino, P., Perifanou, M., Papathoma, T. (eds), Responsive and Sustainable Educational Futures (pp. 489-503), Springer.

Δίκαρου, Α., & Τριανταφύλλου, Χ., 2019. Μη θεσμικές πηγές που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών κατά τη διαδικασία της αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών. Στο Χρίστου, Κ., *Πρακτικά του δου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ.* (σ. 401-409) Κύπρος: ΕΝΕΔΙΜ.

Υπό ανάπτυξη

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΜΟΥΣΟΥΛΜΑΝΙΚΗ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΘΡΑΚΗΣ

Δημήτριος Πολυχρόνης

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

polisdim@gmail.com

Η έννοια της επαγγελματικής ταυτότητας στη ΜΕ θεμελιώνεται στη βιβλιογραφία μέσα από κοινωνιολογικές και ψυχαναλυτικές προσεγγίσεις. Η παρούσα έρευνα εστιάζει στην επαγγελματική ταυτότητα των μειονοτικών εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά στα δημοτικά σχολεία της μουσουλμανικής μειονότητας της Δυτικής Θράκης. Η ανάλυση των αφηγήσεων δύο μειονοτικών εκπαιδευτικών αναδεικνύει τον ρόλο της γλώσσας ως μέσο πολιτισμικής έκφρασης και επικοινωνίας των μαθηματικών, της επαγγελματικής τους δράσης εντός της κοινότητάς τους, καθώς και της αλληλεπίδρασης των δύο στη διαμόρφωση των επαγγελματικών τους ταυτοτήτων που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε ερευνητικό επίπεδο έχουν επικρατήσει δύο θεωρίες σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας της ταυτότητας στη Μαθηματική Εκπαίδευση (ΜΕ) (Darragh, 2016). Η πρώτη αφορά την *κοινωνιολογική* προσέγγιση και αντιμετωπίζει την ταυτότητα ως μια πράξη, ως κάτι που κάποιος κάνει, έχει πολλαπλότητα, αντιφάσεις και αποτελεί μια κοινωνικά καθορισμένη κατασκευή. Η δεύτερη προσέγγιση είναι *ψυχαναλυτική* και αντιλαμβάνεται την ταυτότητα ως κάτι που αποκτάται και έχει συνεκτικότητα και συνέπεια. Οι Radovic και συν. (2018) διαπιστώνουν ότι ουσιαστικά αυτές οι δύο όψεις της αποτελούν ενδοδιαστατικούς πόλους, οι οποίοι ορίζουν τη σχέση μεταξύ όλων των καθοριστικών χαρακτηριστικών και προσδιορίζουν τελικά την ταυτότητα, ανάλογα με τον επιδιωκόμενο σκοπό και τη μεθοδολογική θεμελίωση της ερμηνείας της.

Οι ερευνητές που υποστηρίζουν ένα κοινωνικό-πολιτικό πλαίσιο σκέψης θεωρούν την ταυτότητα ως γίγνεσθαι και όχι ως το «ποιος είσαι». Αυτό οφείλεται στο ότι σε αυτήν την προοπτική, τόσο η μάθηση όσο και η γνώση γίνονται αντιληπτές ως προϊόντα κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Κατά συνέπεια, η ταυτότητα ενός ατόμου βρίσκεται εν μέρει στον έλεγχο του ίδιου και εν μέρει στα χέρια άλλων που επιδιώκουν να ορίσουν, να δημιουργήσουν και να δράσουν για τον εαυτό τους (Gutiérrez, 2013). Τα άτομα μπορούν να προβάλουν μια συγκεκριμένη εικόνα του εαυτού τους με τα πράγματα που λένε για τον εαυτό τους στους άλλους και με τους τρόπους με τους οποίους αλληλεπιδρούν, μέσα από μια αμφίδρομη σχέση.

Σε κάθε περίπτωση, η ταυτότητα αναγνωρίζεται ως το αποτέλεσμα της διαδικασίας ταυτοποίησης, δηλαδή της αναγνώρισης είτε από τον αυτοπροσδιορισμό είτε από την ταυτοποίηση από άλλους (Darragh, 2016). Η εστίαση στην ταυτότητα οφείλει να την αντικρύζει ως μια διαρκώς μεταβαλλόμενη διαδικασία μετασχηματισμού μέσω δραστηριοτήτων, προβληματισμών και προσωπικών εμπειριών (Bjuland et al., 2012). Στην παρούσα έρευνα, επιδιώκεται η δημιουργία συνδέσεων μεταξύ της ταυτότητας που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί που προέρχονται από τη μειονότητα αναφορικά με τα Μαθηματικά και της πρακτικής τους εντός των τάξεων των μαθηματικών.

ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΕ

Σύμφωνα με την έννοια της Επαγγελματικής Ταυτότητας (ΕΤ) του εκπαιδευτικού, η ταυτότητα οριοθετείται μέσα από τη συμμετοχή του στις αφηγήσεις και την ανάπτυξη λόγου (discourse) του (Darragh, 2016). Στην παρούσα εργασία επιλέγεται η εστίαση σε δύο σημαντικές όψεις της ΕΤ του εκπαιδευτικού: (α) στα ζητήματα γλωσσικής ετερότητας στις τάξεις των μαθηματικών, καθώς η γλώσσα αποτελεί βασική μορφή πολιτισμικής έκφρασης με την οποία επικοινωνούνται τα μαθηματικά και η εκμάθησή τους (Civil & Hunter, 2019) και (β) στα περιβάλλοντα επαγγελματικής δράσης που καθορίζει τη συγκρότηση της ΕΤ του εκπαιδευτικού.

Οι λόγοι στους οποίους συμμετέχουν οι εκπαιδευτικοί, ειδικότερα όσοι διδάσκουν σε πολυπολιτισμικά περιβάλλοντα, εστιάζουν συχνά στον ρόλο της μητρικής γλώσσας στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Όχι σπάνια, ο σχετικός λόγος παραπέμπει στην εγκαθιδρυμένη πεποίθηση ότι οι μαθητές που δεν έχουν κατακτήσει σε ικανοποιητικό βαθμό τη γλώσσα διδασκαλίας δεν είναι σε θέση να επικοινωνούν με επάρκεια τα σχολικά μαθηματικά (Civil & Hunter, 2019). Κατά συνέπεια καθίσταται σημαντικό να μελετηθούν οι επιρροές και οι προεκτάσεις της γλωσσικής διάστασης της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών, η οποία αποτελεί κρίσιμη συνιστώσα της διαμόρφωσης της ΕΤ του εκπαιδευτικού.

Οι σχετικές μελέτες προτείνουν πρακτικές που οδηγούν σε μεταρρυθμίσεις για τη διδακτέα ύλη με στόχο να καταστούν οι μαθητές μονόγλωσσοι, αντί να υποστηριχθούν στην εκμάθηση των μαθηματικών, με το μήνυμα που στέλνεται να είναι ότι πρέπει να υπάρχει κατάλληλη γλώσσα διδασκαλίας για την εκμάθηση των μαθηματικών (Civil & Hunter, 2019). Στις κοινότητες που εμφανίζονται αυτές οι πρακτικές, συγκεκριμένες ομάδες αγωνίζονται να διατηρήσουν ή να '*αναστήσουν*' τις περιθωριοποιημένες ή εξαφανισμένες τοπικές γλώσσες, παράγοντας, τελικά, γλωσσική ετερότητα που θεωρείται ως βούληση αναγνώρισης της παρουσίας ανθρώπων που μιλούν μια γλώσσα διαφορετική από αυτήν που επικρατεί ως επίσημη ή επιβεβλημένη (Chronaki & Planas, 2018).

Τα τελευταία χρόνια το πρόταγμα της γλωσσικής ετερότητας έναντι αυτού της μονογλωσσίας στις τάξεις των μαθηματικών κερδίζει συνεχώς έδαφος. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι η εκμάθηση των μαθηματικών εξαρτάται από τις γλωσσικές συνεισφορές των μαθητών, αρκεί αυτές να γίνονται αντιληπτές, τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς, ως παροχή ευκαιριών μάθησης (Planas, 2014). Κατά συνέπεια, αποτελεσματικός θεωρείται ο εκπαιδευτικός που ευνοεί τη γλωσσική ετερότητα στην τάξη μαθηματικών με σκοπό μια *'παγκόσμια μαθηματική εκπαίδευση'*. Πρόκειται για προσανατολισμό που χαρακτηρίζει πλέον τις συζητήσεις για την αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών στην κατεύθυνση των «μαθηματικών για όλους» (Chronaki & Planas, 2018).

Η δεύτερη σημαντική όψη της ΕΤ του εκπαιδευτικού στην οποία εστιάζει η παρούσα μελέτη συνδέεται με τα επαγγελματικά περιβάλλοντα και τα πλαίσια αναφοράς που δύνανται να αποτελέσουν διαφοροποιητικό παράγοντα της συγκρότησής της. Αυτό συμβαίνει διότι θεωρείται κρίσιμη η συμμετοχή σε διαδικασίες αλληλεπίδρασης και συνεργασίας με άλλους

εκπαιδευτικούς και η ικανότητά τους να αναστοχάζονται τις δράσεις τους και τον εαυτό τους ως εκπαιδευτικό που δρα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (Bjuland et al., 2012). Κατά συνέπεια και με δεδομένο ότι η ταυτότητα δεν αποτελεί μια στατική αλλά συνεχώς μεταβαλλόμενη συνθήκη διαμόρφωσης των εκπαιδευτικών, είναι σημαντική η μελέτη στοιχείων της επαγγελματικής του δράσης που επηρεάζουν και εν πολλοίς καθορίζουν αυτή την εξέλιξη και τη μεταβολή της ΕΤ μέσα στον χρόνο.

Η διερεύνηση της επαγγελματικής δράσης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά επιχειρείται τα τελευταία χρόνια μέσα από την οπτική που προσφέρουν οι *'κοινότητες πρακτικής'*. Μια κοινότητα πρακτικής είναι μια ομάδα ατόμων που αλληλεπιδρούν, μαθαίνουν, οικοδομούν σχέσεις εμπιστοσύνης και αναπτύσσουν σχέσεις αμοιβαίας δέσμευσης και συμμετοχής σε μια πρακτική με ένα συγκεκριμένο στόχο. Η πρακτική χαρακτηρίζεται από αμοιβαία δέσμευση, κοινές δράσεις και ένα κοινό ρεπερτόριο. Στο πλαίσιο μιας κοινότητας πρακτικής, οι εκπαιδευτικοί γίνονται πιο έμπειροι και προχωρούν σε θέσεις μεγαλύτερης ευθύνης στην επαγγελματική τους κοινότητα, αναπτύσσοντας όχι μόνο τις απαιτούμενες γνωστικές δεξιότητες, αλλά και στάσεις, κίνητρα και αξίες της κοινότητας (Potari et al., 2010).

Οι κοινότητες πρακτικής, ως ομάδες, τείνουν να αναδεικνύουν συνεχώς τις διαφορές μεταξύ αυτών και άλλων ομάδων ώστε να δημιουργήσουν μια διακριτή συλλογικότητα. Η δράση μια κοινότητας πρακτικής είναι συνάρτηση ισχυρών λόγων (discourses) που πλαισιώνουν τη συμμετοχή των συμμετεχόντων, μέσα στους οποίους τα μέλη της κοινότητας τοποθετούνται με συγκεκριμένους τρόπους, υιοθετώντας αποκλίνουσες αλλά και συγκλίνουσες θέσεις. Τελικά, με αυτόν τον τρόπο φέρνουν στο προσκήνιο εντάσεις ή ευθυγραμμίσεις αντίστοιχα που επηρεάζουν το αντικείμενο αλλά και την εξέλιξη της δράσης τους (Sakonidis et al., 2022) και κατ' επέκταση της ΕΤ τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της παρούσας έρευνας αναφέρεται τους εκπαιδευτικούς που προέρχονται από τη *'Μουσουλμανική Μειονότητα της Δυτικής Θράκης'* και αποτελούν ένα πολύμορφο και εκπαιδευτικά ενδιαφέρον συγκείμενο. Διαμορφωμένη μέσα από ιστορικές συγκρούσεις και γεγονότα, καθώς και πολιτισμικές διαφοροποιήσεις, το περασμένο έτος η εκπαίδευση των παιδιών της μειονότητας συμπλήρωσε έναν αιώνα ζωής. Αναπόφευκτα, η φυσιογνωμία της εκπαίδευσης των μαθητών της μειονότητας μέσα στο πέρασμα του χρόνου βίωνε έντονες αντιπαραθέσεις που είχαν ως αποτέλεσμα τη διαμόρφωση των συνθηκών μάθησης των μαθητών της. Κορυφαίο ρόλο σε αυτό το εκπαιδευτικό γίγνεσθαι έχουν οι εκπαιδευτικοί ως επαγγελματίες και διαμεσολαβητές της γνώσης. Φέροντας ο καθένας τα δικά του ιδιαίτερα ταυτοτικά χαρακτηριστικά, όπως αυτά έχουν διαμορφωθεί από κοινωνικό-πολιτισμικές επιρροές κι από τις προσωπικές τους εμπειρίες.

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει τις όψεις συγκρότησης της ΕΤ των εκπαιδευτικών που διδάσκουν στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση τα Μαθηματικά και προέρχονται από τη μουσουλμανική μειονότητα της Θράκης. Πιο συγκεκριμένα το ερευνητικό ερώτημα που εξετάζεται είναι*: Πώς το ζήτημα της γλωσσικής ετερότητας και η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών που προέρχονται από τη Μειονότητα της Θράκης συμβάλουν στη συγκρότηση της ΕΤ τους ως δασκάλων των μαθηματικών;*

Υιοθετώντας την κοινωνιολογική οπτική, ως ΕΤ θεωρείται το σύνολο των τρόπων με τους οποίους επιλέγει το άτομο να εντάσσεται, να συνδέεται και να ανήκει κάπου. Εκφράζεται μέσω των λόγων (discourses) που αναπτύσσονται κι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, καθώς και της κοινωνικής πρακτικής και της ταυτοποίησης ως μέρος της αναγνώρισης. Διαμεσολαβείται από το λόγο (discourse) μέσα από περιγραφές και αφηγήσεις τόσο του εαυτού όσο και του

πλαισίου δράσης του ατόμου και του περίγυρού του. Τέλος, ερμηνεύεται μέσα από τρόπους δράσης, μορφές συμμετοχής ή εμπλοκής και αποστασιοποίησης, καθώς και από τους διάφορους ρόλους που εκτελούνται εντός των τάξεων των μαθηματικών.

Για τη μελέτη του ερευνητικού ερωτήματος αξιοποιήθηκε μια υβριδική μέθοδος αφηγηματικών συνεντεύξεων δύο ιδιαίτερων περιπτώσεων εκπαιδευτικών από τη Μειονότητα που εργάζονται στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο τρόπος επιλογής των συμμετεχόντων βασίστηκε στην ιδιαιτερότητα και την αναγνωρισιμότητα των συγκεκριμένων εκπαιδευτικών. Ως *ιδιαίτερη περίπτωση* ορίστηκε η μοναδικότητα των επιτευγμάτων και των πλαισίων που φέρουν, η ευρεία αποδοχή που εκφράζεται μέσα από θεσμικούς, κοινωνικούς και άλλους ρόλους που κατέχουν και προσδίδουν ιδιαίτερη αξία στις διάφορες ταυτότητες που αναπτύσσονται, ξεχωρίζοντάς τους από τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς της μειονότητας. Οι συνεντεύξεις των επιλεγέντων εκπαιδευτικών αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που είχε σκοπό τη διερεύνηση επιπλέον διαστάσεων της επαγγελματικής ταυτότητας των εκπαιδευτικών από τη Μειονότητα στη ΜΕ.

Για τη διερεύνηση του ερωτήματος αξιοποιήθηκε δομημένη συνέντευξη προκειμένου να αποτελεί τη βάση των αφηγήσεων, διασφαλίζοντας παράλληλα την απαραίτητη χρονική αλληλουχία, καθώς και την κάλυψη των όψεων που μελετήθηκαν. Οι ερωτήσεις αφορούσαν το σύνολο του εύρους της ΕΤ του εκπαιδευτικού στη ΜΕ, όπως αυτή άρχισε να διαμορφώνεται από την πρώτη επαφή του ατόμου με τα μαθηματικά μέχρι και τις πιο πρόσφατες εμπειρίες του εντός και εκτός των τάξεων των Μαθηματικών. Μέσα από τις βιογραφικές αφηγήσεις για τις ατομικές εμπειρίες μπορεί να γίνει κατανοητός ο βιωματικός κόσμος των ανθρώπων (Lutovac & Kaasila, 2019). Να εντοπιστούν συστήματα και τα πλαίσια στα οποία αυτά αναπτύσσονται και το πώς το άτομο αποδίδει συγκεκριμένο νόημα σε καταστάσεις. Ακόμη, ερμηνεύονται και οι τρόποι με τους οποίους τα άτομα δρουν μέσα σε αυτά τα πλαίσια (Πουρκός et al., 2015).

Αρχικά, κάθε συνέντευξη αναλύθηκε σε αυτοτελείς αφηγηματικές ιστορίες που περιλάμβαναν εμπειρίες και περιγραφές των τριών σταδίων τη εκπαίδευσης, της φοίτησης και της υπηρέτησης. Η ανάλυση περιλάμβανε τη χρονική στοιχειοθέτηση των ιστοριών, την ταξινόμηση σύμφωνα με την εκάστοτε όψη και την πρώτη απόδοση ερμηνειών σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε. Αυτή η διαδικασία ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς ανέδειξε ορισμένα *'κενά'* σε επίπεδο χρονικής αλληλουχίας και περιεχομένου που είτε παρέμενε ασαφές είτε δεν έτυχε να αναπτυχθεί κατά την αφήγηση. Στη συνέχεια συγκροτήθηκαν επιπλέον επιμέρους ερωτήματα με σκοπό την αποσαφήνισή τους και τα οποία συζητήθηκαν κατά τη δεύτερη συνεδρία της συνέντευξης. Κατόπιν, συμπληρώθηκε το ψηφιδωτό των αφηγήσεων και ενισχύθηκαν οι ερμηνείες με σκοπό τη σύγκριση των ιστοριών, τη συζήτηση των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Ακολουθούν οι περιγραφές της Μπαχάρ και του Οζγκιούρ (ψευδώνυμα των πραγματικών ονομάτων).

Η *Μπαχάρ* σπούδασε Μαθηματικά σε ελληνικό πανεπιστήμιο, απέκτησε εξειδίκευση στην Ειδική Αγωγή και υπηρετεί ως μόνιμη εκπαιδευτικός. Φοίτησε σε ΜΔΣ όπου βίωσε συγκρουσιακές καταστάσεις που συνδέονταν με θέματα γλώσσας, διαφοράς κουλτούρας οικογένειας και σχολείου, καθώς και απαξιωτικές και στοχοποιητικές συμπεριφορές στο μάθημα των μαθηματικών που θεωρεί ότι καθόρισαν τη σχέση της με τα Μαθηματικά, τα οποία αγάπησε στο Γυμνάσιο. Ξεπέρασε γρήγορα τις γλωσσικές δυσκολίες που αντιμετώπισε στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση και επέτυχε υψηλές επιδόσεις από την αρχή. Προκειμένου να υπερκεράσει τις δυσκολίες που αντιμετώπιζε κατά τη φοίτησή της στο Τμήμα Μαθηματικών, συμμετείχε σε μια ιδιότυπη κοινότητα μάθησης που αναπτύχθηκε μεταξύ της ίδιας και συμφοιτητών της από μεγαλύτερα κυρίως έτη, καλύπτοντας τα κενά που είχε και επιτυγχάνοντας στα μαθήματα. Μετά την ολοκλήρωση των σπουδών της βρέθηκε στη Μεγάλη Βρετανία, όπου ξεκίνησε να εργάζεται ως βοηθός καθηγητή Μαθηματικών αλλά τελικά

επέστρεψε στην Ελλάδα όπου άρχισε να διδάσκει σε δημόσια σχολεία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Ο Οζγκιούρ υπηρετεί ως δάσκαλος της Μειονότητας από το 1987 και από το 2015 ως στέλεχος της εκπαίδευσης στην περιοχή της ΑΜ–Θ. Η εκπαίδευσή του ξεκίνησε στο ΜΔΣ του χωριού του το 1968, όπου ανέφερε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών, πραγματοποιούταν αρχικά στην οθωμανική γραφή και αργότερα στη νέα τουρκική γλώσσα. Αυτή η γλωσσική μετάβαση αποτέλεσε έναν από τους σημαντικότερους κόμβους της μαθηματικής του εκπαίδευσης, καθώς ανέφερε πως ό,τι γνώσεις είχε αποκτήσει ο ίδιος και οι συμμαθητές του έπρεπε να προσαρμοστούν. Με την ολοκλήρωση του ΜΔΣ, εισήχθη στο ΜΙ της Κομοτηνής όπου για πρώτη φορά ήρθε σε επαφή με την ελληνική γλώσσα. Το 1979 μετακόμισε στη Θεσσαλονίκη προκειμένου να φοιτήσει στην ΕΠΑΘ. Η υπηρέτησή του σε ΜΔΣ ξεκίνησε το 1987 όπου, προκειμένου να αποφύγουν οι μαθητές του τις δυσκολίες που αντιμετώπισε ο ίδιος, άρχισε να παρέχει δικές του πρωτότυπες σημειώσεις. Τα τελευταία χρόνια υπηρετεί ως στέλεχος εκπαίδευσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αναφορικά με τη **γλωσσική ετερότητα**, έπειτα από τη συστηματική ανάλυση διακρίθηκε σε δύο βασικές διαστάσεις. Η πρώτη σχετίζεται αμιγώς με τη χρήση της ως πολιτισμικής έκφρασης της ταυτότητας του ατόμου. Η δεύτερη αφορά τη χρήση της ως εργαλείο διαμεσολάβησης για την επικοινωνία και την κατανόηση των εννοιών. Φαινομενικά, η δεύτερη δε φαίνεται να σχετίζεται άμεσα με την έννοια της ταυτότητας, αλλά, όπως θα γίνει αντιληπτό, συμβάλλει στη διαμόρφωση της ΕΤ στη ΜΕ.

Σχετικά με την πρώτη διάσταση, από την πρώτη αρχή της συνέντευξης η Μπαχάρ ανέφερε ότι η στάση της απέναντι σε όλα τα τουρκόγλωσσα μαθήματα, όπως είναι τα μαθηματικά, χαρακτηριζόταν από μια τροχιά εξόδου λόγω της μη αποδοχής της πομακικής ταυτότητας που φέρει.

> Μπαχάρ: Στο μειονοτικό δημοτικό πήγα δυστυχώς [...] Λέω δυστυχώς γιατί με πήγε πίσω σε πολλά πράγματα στη ζωή μου πιστεύω. Έτσι τουλάχιστον εγώ νιώθω λόγω της γλώσσας, πολύ έως πάρα πολύ μπέρδεμα και προσπαθούν να σου περάσουν σου μια διαφορετική ταυτότητα στο σχολείο το οποίο εμένα δε μου άρεζε […] δεν το δεχόντουσαν εύκολα αυτοί τέλος πάντων είχαμε διάφορα ζητήματα εκεί πέρα [συνέντευξη 3/1/23]

Ένα κομβικό σημείο όπου γίνεται εμφανής η δεύτερη διάσταση της γλώσσας ως εργαλείο διαμεσολάβησης κι επικοινωνίας είναι η γλωσσική μετάβαση που βίωσαν και οι δύο από το ΜΔΣ στο Γυμνάσιο σε επίπεδο ορολογιών και διατυπώσεων. Ο Οζγκιούρ αναφέρεται ως παράδειγμα στο πολλαπλασιασμό δύο αριθμών, όπου στα ελληνικά η ερώτηση περιλαμβάνει τους δύο αριθμούς χωρίς την παρεμβολή κάποιας λέξης, σε αντίθεση με τα τουρκικά όπου παρεμβάλλεται ενδιάμεσα η λέξη «φορές».

> Οζγκιούρ: Του λέω πέντε-πέντε και με κοιτάει. Έρχεται στο Γυμνάσιο και δεν ξέρει την προπαίδεια για παράδειγμα πέντε-πέντε. Σε ένα τουρκόφωνο μαθητή το πέντε-πέντε δε λέει τίποτα. Μπορεί να είναι 55 μπορεί να είναι 25, τίποτα όμως δε λέει γι’ αυτόν […] Οπότε ο μαθητής αν δεν το ξέρει αυτό δεν το ‘χει ακούσει κι ο

> εκπαιδευτικός δεν ξέρει αυτή την ιδιαιτερότητα, τον θεωρεί "χαζό" [συνέντευξη 24/1/23]

Σε ό,τι αφορά τις γλωσσικές μεταβάσεις, σημαντικές αφηγήσεις προσφέρθηκαν από τον Οζγκιούρ ο οποίος, εκτός του ότι βίωσε τρεις από αυτές σε επίπεδο μαθηματικής ορολογίας κι έκφρασης, διαθέτει και τις απαιτούμενες ακαδημαϊκές γνώσεις. Αναφέρει ότι άρχισε να μαθαίνει τα μαθηματικά στην αραβική γραφή και ορολογία κατά τις πρώτες τέσσερις τάξεις του ΜΔΣ. Τα αραβικά ωστόσο, αν και γλώσσα θρησκευτικής έκφρασης λόγω του *Κορανίου*, δεν επιτελούσαν κάποια χρηστική ή λειτουργική γλώσσα ή κώδικα και κατά συνέπεια δεν μπορούσαν να αποτελέσουν εργαλείο ή μέσο εννοιολογικής κατανόησης. Αντίθετα, τα '*νέα τούρκικα'* που διδάχθηκε στις δύο τελευταίες τάξεις του ΜΔΣ και τις πέντε τάξεις του Μουσουλμανικού Ιεροσπουδαστηρίου (ΜΙ) και χρησιμοποιούνται και σήμερα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, αποτελούν μια *ουραλοαλταϊκή* γλώσσα. Αυτό, μεταξύ άλλων, έχει ως αποτέλεσμα πολλές μαθηματικές ορολογίες, ιδίως στη Γεωμετρία, να αποτελούν σύνθεση λέξεων που ενισχύουν την περιγραφικότητα της έννοιας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που ανέφερε ήταν αυτό της *οξείας γωνίας* όπου η ορολογία στα νέα τούρκικα θα αποδιδόταν ως *'στενή γωνία'*, υποδηλώνοντας μια περιγραφή που εστιάζει στην εσωτερική σχέση μεταξύ των δύο πλευρών. Όμοια με αυτή των ελληνικών όπου ο όρος *οξύς* εστιάζει στην περιγραφή της εξωτερικής οπτικής.

Αναφορικά με την όψη της **επαγγελματικής δράσης**, αυτή γίνεται εμφανής μέσα από δύο βασικά είδη αφηγήσεων. Το πρώτο περιλαμβάνει αφηγήσεις σχετικά με την ατζέντα που αναπτύσσεται εντός της κοινότητας και συγκροτεί ένα μέρος του λόγου που αναπτύσσεται. Το δεύτερο αφορά αφηγήσεις για τις δράσεις εντός τάξης των ίδιων και άλλων εκπαιδευτικών. Όπως γίνεται κατανοητό, ορισμένες αφηγήσεις αυτής της ατζέντας, τελικά επηρεάζουν και τις δράσεις των ίδιων των εκπαιδευτικών της κοινότητας.

Ο πρώτος τόμος της ατζέντας εστιάζει στην απαιτούμενη κατάρτιση που πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί που προέρχονται από τη μειονότητα, καθώς διαπιστώνουν ότι φέρουν σημαντικά ελλείμματα τόσο σε γνωστικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο διδακτικής πρακτικής. Ιδιαίτερα στην περίπτωση του Οζγκιούρ, βασική πεποίθηση αποτελεί ότι οι διαδικασίες επιπλέον κατάρτισης μπορούν και κινητοποιούν τους δασκάλους είτε με άμεσο είτε με έμμεσο τρόπο.

> Οζγκιούρ: Διάβασε το μάθημα, το διάβαζε ο μαθητής τι κατάλαβες, εντάξει πάμε παρακάτω, διαβάστε παρακάτω. Αυτό δεν είναι διδασκαλία. Αυτή την κουλτούρα για να την αλλάξεις δεν είναι εύκολο… Τώρα βέβαια τα τελευταία χρόνια όσοι πήγαιναν στο Παιδαγωγικό για Εξομοίωση έχουν αλλάξει, […] Και ο άλλος αναγκάζεται και προσαρμόζεται ή στο διπλανό χωριό ο άλλος που έχει κάνει άλλα πράγματα, αυτά ακούγονται βλέπεις κι ο άλλος προσπαθεί να προσαρμοστεί.

Οι αφηγήσεις τους συνηγορούν στο ότι το εφαρμοζόμενο πρόγραμμα διαμορφώνεται σχεδόν αποκλειστικά από τα ίδια τα εγχειρίδια, καθώς αποτελούν τον οδηγό των εκπαιδευτικών και οι οποίοι στηρίζονται στην ύλη με βάση τον αριθμό των σελίδων. Μια πρακτική που σύμφωνα με τις περιγραφές τους φαίνεται να είναι βαθιά ριζωμένη ήδη από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα. Χαρακτηριστικά, η Μπαχάρ αναφέρει.

> Μπαχάρ: Είχα ένα τετράδιο μιας μαθήτριας που οι άλλοι μαθητές που ερχόντουσαν ακριβώς τα ίδια πράγματα γράφανε, τις ίδιες

> λέξεις, τις ίδιες ασκήσεις, όλα ίδια […] Τα διαγωνίσματα ίδια, τα τεστάκια ίδια, στο τέλος στις εξετάσεις ίδιες, δεν αλλάζανε ούτε αριθμό.

Τούτο, έχει διαμορφώσει εν πολλοίς και τη δράση των ίδιων τους εντός των τάξεων, με τον Οζγκιούρ να αναφέρει ότι η καθοδήγηση και η συμβουλευτική του προς τους εκπαιδευτικούς εστιάζει στην προετοιμασία των μαθητών αναφορικά με τη γλωσσική μετάβαση.

> Οζγκιούρ: Επίσης είχα ετοιμάσει λεξιλόγιο μαθηματικών όρων στις δυο γλώσσες γιατί υπάρχει τεράστιο πρόβλημα όταν τα παιδιά πάνε στο Γυμνάσιο, αντιμετωπίζουν πρόβλημα ορολογίας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εστίαση σε ζητήματα γλωσσικής ετερότητας, ως βασικό μέσο πολιτισμικής έκφρασης αλλά και τρόπου επικοινωνίας των Μαθηματικών, κυριάρχησε και στις δύο αφηγήσεις. Αναδείχθηκαν στοιχεία των δύο εκπαιδευτικών μέσα από περιγραφές που εστιάζουν τους λόγους (discourses) και αναπτύσσονται εντός της κοινότητάς τους. Αυτά τα στοιχεία γίνονται ιδιαίτερα ορατά μέσα από δύο βασικούς κόμβους και περιγράφονται από σημαντικές (ή κρίσιμες) αφηγήσεις σε σχέση με τη γλώσσα. Ο πρώτος κόμβος συνδέει τη γλώσσα διδασκαλίας με αυτή της οικογένειας και την ερμηνεύει μέσα από εντάσεις μειονοτικών ομάδων και την ανάγκη τους για επιβίωση (Chronaki & Planas, 2018). Ο δεύτερος κόμβος αντιμετωπίζει τη γλώσσα ως εργαλείο νοήματος και αντιμετωπίζει τη γλώσσα, μέσα από τη γλωσσική μετάβαση, ως το κατάλληλο μέσο για την απόδοση νοημάτων στη ΜΕ (Civil & Hunter, 2019).

Οι αφηγήσεις για την επαγγελματική δράση αναδεικνύουν αφενός την ένταξη τους σε ομάδες, και κατ' επέκταση την όψη της ταυτότητας για το «ανήκειν» και αφετέρου τους λόγους (discourses) που αναπτύσσονται εντός τους. Από την πρώτη αρχή της επαγγελματικής εκπαίδευσης και μετέπειτα κατάρτισης που δέχονται, εντάσσονται σε κοινότητες και αναπτύσσουν ένα ρεπερτόριο σε σχέση με τα αναλυτικά προγράμματα, τα εγχειρίδια διδασκαλίας και τις διδακτικές πρακτικές. Ιδιαίτερα στην περίπτωση του Οζγκιούρ, όπου κατέχει και ρόλο στελέχους της εκπαίδευσης, αυτό εκφράζεται έντονα μέσα και από τον εντοπισμό των αδυναμιών, καθώς και την καθοδήγηση – συμβουλευτική που προσφέρει σε συναδέλφους του. Ενώ παράλληλα, σημαντική αναφορά της επαγγελματικής του δράσης κατέχει και η πρακτική του σε επίπεδο τάξης για την προετοιμασία των μαθητών αναφορικά με τη γλωσσική μετάβαση.

Συνοψίζοντας, οι ερμηνείες που προέκυψαν μεταξύ των δύο όψεων της ΕΤ αναδεικνύουν τον βαθμό στον οποίο αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Στην περίπτωση της Μπαχάρ, οι ατομικές εμπειρίες που βίωσε σε σχέση με τη γλώσσα δε φαίνεται να διαφοροποίησαν την επαγγελματική της δράση από αυτή του Οζγκιούρ σε επίπεδο λόγου (discourse), καθώς σε μεγάλο βαθμό οι αφηγήσεις τους ταυτίζονται. Στον αντίποδα, τα βιώματα της έντονης γλωσσικής ετερότητας που εκφράστηκαν από τον Οζγκιούρ, φαίνεται να έχει ισχυρότερο αντίκτυπο στην επαγγελματική του δράση. Αυτές οι γλωσσικές μεταβάσεις που βίωσε ο Οζγκιούρ, φαίνεται να επηρέασαν τη δράση του άμεσα τόσο μέσα από την πρακτική του για τη διδασκαλία των μαθηματικών όσο και από την αντίστοιχη καθοδήγηση και τη συμβουλευτική του προς την κοινότητα των συναδέλφων του.

Οφείλουμε να αναγνωρίσουμε ότι η διερεύνηση του ερωτήματος περιορίζεται από την εστίαση στις δύο όψεις της ΕΤ και το μικρό πλήθος των συμμετεχόντων, με αποτέλεσμα να μη καθίσταται εφικτή μια άμεση και βέβαιη απάντηση για το πώς επενεργούν στη διαμόρφωση της ΕΤ των εκπαιδευτικών. Παράλληλα, περιορίζεται και η ορατότητα

περισσοτέρων συνδέσεων που συμβάλλουν στη διαμόρφωσή της. Γι' αυτούς τους λόγους, είναι σημαντικό μελλοντικές έρευνες να αξιοποιήσουν περισσότερες όψεις της ΕΤ και αφηγήσεις μεγαλύτερου πλήθους συμμετεχόντων που θα επιτρέψουν τη διερεύνηση επιπλέον συνδέσεών τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΊΑ

Bjuland, R., Cestari, M. L., & Borgersen, H. E. (2012). Professional mathematics teacher identity: Analysis of reflective narratives from discourses and activities. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(5), 405–424. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9216-1

Chronaki, A., & Planas, N. (2018). Language diversity in mathematics education research: a move from language as representation to politics of representation. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(6), 1101–1111. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0942-4

Civil, M., & Hunter, R. (2019). PROMOTING EQUITABLE TEACHING IN MATHEMATICS TEACHER EDUCATION. In *Equity in Mathematics Education* (pp. 179–199).

Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 19–33. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9696-5

Lutovac, S., & Kaasila, R. (2019). Methodological landscape in research on teacher identity in mathematics education: a review. *ZDM - Mathematics Education*, *51*(3), 505–515. https://doi.org/10.1007/s11858-018-1009-2

Planas, N. (2014). One speaker, two languages: Learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(1), 51–66. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9553-3

Potari, D., Sakonidis, H., Chatzigoula, R., & Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analysing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(6), 473–485. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9161-9

Radovic, D., Black, L., Williams, J., & Salas, C. E. (2018). Towards conceptual coherence in the research on mathematics learner identity: a systematic review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(1), 21–42. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9819-2

Sakonidis, C., Potari, D., & Zachariades, T. (2022). Research in Mathematics Education Meeting the challenges of re-designing two mathematics curricula reforms in uncertain times. *Research in Mathematics Education*, *0*(0), 1–20. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2086609

Πουρκός, Σ. Μ., Δαφέρμος, Μ., Έρευνα, Π., & Επιστημολογικ, Ε. (2015). *Γ . Τσιώλης : Η Επικαιρότητα της Βιογραφικής Προσέγγισης στην Ποιοτική Κοινωνική έρευνα . Στο Μ . Πουρκός & Μ . Δαφέρμος (επιμ .) Ποιοτική Έρευνα στις Κοινωνικές Επιστήμες : Επιστημολογικ ... November*.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΟΙΧΤΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΛΛΙΕΡΓΕΙΑ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΟΙ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Μαριάνθη Ζιώγα & Δέσποινα Δεσλή

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

mizioga@eled.auth.gr, ddesli@eled.auth.gr

Η δημιουργικότητα των μαθητών στα μαθηματικά μπορεί να καλλιεργηθεί μέσω της αναζήτησης πολλών λύσεων σε δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί συχνά δεν επιλέγουν ή δεν αξιοποιούν κατάλληλα τέτοιες δραστηριότητες. Η παρούσα εργασία εξετάζει τον βαθμό στον οποίο αξιοποιούν δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης επτά εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, μέσω παρατήρησης της διδασκαλίας τους, πριν από και μετά τη συμμετοχή τους σε επιμορφωτική παρέμβαση εστιασμένη στην καλλιέργεια της μαθηματικής δημιουργικότητας. Αναδεικνύεται η ένδεια δραστηριοτήτων ανοιχτής απάντησης στη σχολική πραγματικότητα και ο δισταγμός των εκπαιδευτικών να σχεδιάσουν οι ίδιοι τέτοιες δραστηριότητες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω δημιουργικών δραστηριοτήτων με σκοπό την καλλιέργεια της δημιουργικότητας έχει πολλαπλά γνωστικά και συναισθηματικά οφέλη για τους μαθητές (Mann, 2006) όπως, για παράδειγμα, την σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, την αναγνώριση της αξίας των μαθηματικών, και για αυτό επιδιώκεται στο πλαίσιο του σχολείου. Στη βιβλιογραφία (Guilford, 1966; Torrance, 1967), η δημιουργικότητα στα μαθηματικά συνήθως περιγράφεται και αξιολογείται με βάση την *ευχέρεια* (εύρεση πολλών απαντήσεων σε ένα ερώτημα), την *ευελιξία* (αναζήτηση διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης), την *πρωτοτυπία* (εύρεση ασυνήθιστων απαντήσεων σε ένα ερώτημα) και την *επεξεργασία* (εξέλιξη μιας ιδέας, ενσωμάτωση λεπτομερειών και συνδυασμός της με άλλες). Και οι τέσσερις δείκτες δημιουργικότητας συνδέονται με τον μη αλγοριθμικό τρόπο σκέψης και αναδεικνύουν την ικανότητα για αφαιρετική σκέψη και γενίκευση.

Όπως εξηγούν οι Leikin και Elgrably (2020), η δημιουργικότητα των μαθητών μπορεί να καλλιεργηθεί με την αξιοποίηση δραστηριοτήτων ανοιχτής απάντησης (open tasks). «Δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης» θεωρούνται οι δραστηριότητες που έχουν περισσότερες από μία σωστές λύσεις ή αποτελέσματα (open-end tasks) ή/και οι δραστηριότητες που μπορούν να επιλυθούν αξιοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές (open-start tasks). Συχνά, μία δραστηριότητα ανοιχτής απάντησης μπορεί να συνδυάζει και τα δύο αυτά χαρακτηριστικά. Όπως εξηγούν οι Levenson et al. (2018), οι δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης ενδείκνυνται για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών στα μαθηματικά, καθώς ενισχύουν όχι μόνο την ευχέρεια, αλλά και την ευελιξία και την πρωτοτυπία των μαθητών. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί συχνά εμφανίζονται με περιορισμένες αντιλήψεις σχετικά με τη δημιουργικότητα (Levenson, 2015). Μάλιστα, σε έρευνες που περιλαμβάνουν παρατήρηση διδασκαλίας, φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί συχνά δεν είναι σε θέση να καλλιεργήσουν τη δημιουργικότητα των μαθητών τους ούτε να αξιοποιήσουν αποτελεσματικά τις δυνατότητες που προσφέρουν για ενίσχυση της δημιουργικότητας οι δραστηριότητες που οι ίδιοι έχουν επιλέξει (π.χ., Meyer & Lederman, 2013; Zioga & Desli, 2023).

Στο παρελθόν έχουν πραγματοποιηθεί ελάχιστες επιμορφωτικές παρεμβάσεις με στόχο τον εμπλουτισμό των γνώσεων των εκπαιδευτικών αναφορικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, η Levenson (2015) και η Shriki (2010) έδειξαν ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εξελίχθηκαν σε θεωρητικό επίπεδο, χωρίς ωστόσο να έχει παρατηρηθεί η διδασκαλία τους. Αντίθετα, οι Panaoura και Panaoura (2014) βρήκαν ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, στα σχέδια διδασκαλίας που ετοιμάζουν, προτιμούν τυποποιημένες δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου, ακόμα και μετά την παρακολούθηση εκπαιδευτικού προγράμματος εστιασμένου στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που ενισχύουν την ευχέρεια και την ευελιξία. Βέβαια, οι συγκεκριμένοι συμμετέχοντες αποδίδουν το γεγονός αυτό στην έλλειψη αυτοπεποίθησης που πηγάζει από την απουσία διδακτικής εμπειρίας. Ωστόσο, οι διδακτικές πρακτικές και οι δραστηριότητες που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία τους, μετά τη συμμετοχή τους σε πρόγραμμα που αφορά στην καλλιέργεια της μαθηματικής δημιουργικότητας, δεν έχουν μελετηθεί. Ανακύπτει, επομένως, το ερώτημα: οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν σε αυτά τα προγράμματα

ενσωματώνουν στη διδασκαλία τους τις γνώσεις και ιδέες που αποκόμισαν;

Η παρούσα εργασία, διεισδύοντας σε σχολικές τάξεις, παρέχει μία ρεαλιστική εικόνα για τον βαθμό στον οποίο οι εκπαιδευτικοί ενισχύουν τη δημιουργικότητα των μαθητών τους επιλέγοντας δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης. Επιπλέον, εξετάζει αν οι εκπαιδευτικοί, μετά τη συμμετοχή τους σε επιμορφωτική παρέμβαση, αξιοποιούν κατάλληλα στη διδασκαλία τους ή σχεδιάζουν δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης που καλλιεργούν τη δημιουργικότητα των μαθητών τους. Πιο συγκεκριμένα, επιχειρείται η διερεύνηση των ερωτημάτων: α) Ποια είναι η συχνότητα αξιοποίησης δραστηριοτήτων ανοιχτής απάντησης πριν από και μετά την παρέμβαση; και β) Σε ποιο βαθμό προσφέρονται ευκαιρίες για καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Οι συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν εθελοντικά επτά εν ενεργεία εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (τρεις γυναίκες), οι οποίοι, κατά την περίοδο συλλογής των δεδομένων, δίδασκαν σε διαφορετικές τάξεις, σε δημόσια δημοτικά σχολεία της πόλης της Θεσσαλονίκης. Δύο μόνο εκπαιδευτικοί διέθεταν μεταπτυχιακές σπουδές στη διδακτική των Μαθηματικών. Η προϋπηρεσία τους κυμαινόταν από 8 έως 30 έτη, με μέσο όρο τα 21 έτη υπηρεσίας. Η ηλικία τους κυμαινόταν από 32 έως 55 έτη, με μέσο όρο τα 45,6 έτη. Επιλέχθηκαν καθώς, μετά από πρόσκληση των ερευνητριών μέσω της Πρωτοβάθμιας Διεύθυνσης Θεσσαλονίκης, εκδήλωσαν ενδιαφέρον για συμμετοχή στο επιμορφωτικό πρόγραμμα. Για λόγους ηθικής δεοντολογίας, τα ονόματα που αναφέρονται είναι ψευδώνυμα.

Η παρέμβαση. Η επιμορφωτική παρέμβαση στην οποία συμμετείχαν πραγματοποιήθηκε σε έξι συναντήσεις διάρκειας τριών ωρών εκάστη (για λεπτομερή περιγραφή της παρέμβασης, βλ. Zioga & Desli, 2023). Κατά τη διάρκειά της, οι εκπαιδευτικοί ενημερώθηκαν για τις σύγχρονες έρευνες σχετικά με την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά και, ειδικότερα, για τις διδακτικές προσεγγίσεις και τα είδη των μαθηματικών έργων που ευνοούν την καλλιέργειά της (π.χ., δραστηριότητες που ευνοούν την καλλιέργεια της ευχέρειας, της ευελιξίας, της πρωτοτυπίας και της εξεργασίας, όπως δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης, μη τυποποιημένα προβλήματα, έργα που οδηγούν σε μαθηματική γενίκευση). Κάθε συνάντηση περιλάμβανε συζήτηση με τους συμμετέχοντες, μελέτη και σχολιασμό δημιουργικών έργων καθώς

και τροποποίηση επιλεγμένων έργων με στόχο να γίνουν περισσότερο πρόσφορα για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά.

Εργαλεία. Για τον σκοπό της παρούσας εργασίας, η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω δομημένης παρατήρησης. Το φύλλο παρατήρησης που χρησιμοποιήθηκε σχεδιάστηκε ειδικά για τις ανάγκες της έρευνας και εστίαζε στο είδος των έργων που επέλεγαν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία τους καθώς και στη διδακτική προσέγγιση που υιοθετούσαν. Η εισαγωγή των δεδομένων πραγματοποιούνταν με δύο τρόπους: α) με δειγματοληψία συμβάντων και β) με καταγραφή σε διαστήματα, ώστε τα γεγονότα να καταγράφονται σε προκαθορισμένα διαστήματα (1 λεπτού) και να απεικονίζεται η διάρκεια και η χρονολογική σειρά τους (Cohen, Manion & Morrison, 2008).

Ανάλυση των δεδομένων. Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων αξιοποιήθηκε η θεματική ανάλυση (Bryman, 2017), σύμφωνα με την οποία οι διδακτικές πρακτικές των συμμετεχόντων οργανώθηκαν αρχικά σε ευρύτερες κατηγορίες (π.χ., είδη δημιουργικών δραστηριοτήτων που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί) και, στη συνέχεια, σε θέματα (νοηματικά μοτίβα) που σχετίζονται με το αντικείμενο της έρευνας (π.χ., δραστηριότητες που καλλιεργούν την ευχέρεια).

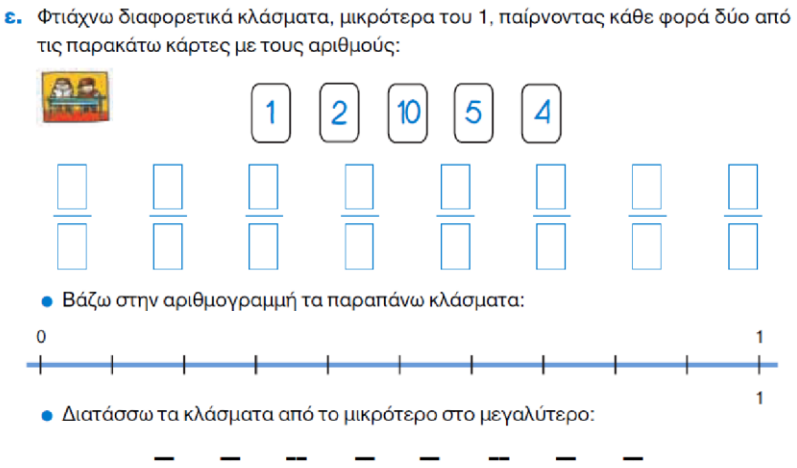
Διαδικασία. Πραγματοποιήθηκε παρατήρηση της διδασκαλίας κάθε εκπαιδευτικού στην ώρα των μαθηματικών, σε συνολικά οκτώ ώρες, ισάριθμα μοιρασμένες πριν από και μετά την παρέμβαση. Η μέρα και η ώρα της παρατήρησης καθορίζονταν μετά από συνεννόηση με τους εκπαιδευτικούς, ενώ η επιλογή του περιεχομένου διδασκαλίας αποτελούσε αποκλειστική ευθύνη των συμμετεχόντων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πριν από την παρέμβαση. Η αξιοποίηση δραστηριοτήτων ανοιχτής απάντησης από την πλευρά των εκπαιδευτικών πραγματοποιήθηκε σε πολύ περιορισμένο βαθμό. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια των 28 ωρών (7 εκπαιδευτικοί x 4 ώρες/εκπαιδευτικό) παρατήρησης της διδασκαλίας που προηγήθηκε της παρέμβασης, μόλις δύο εκπαιδευτικοί (η Χαρά και ο Βασίλης, με 25 και 28 έτη υπηρεσίας, αντίστοιχα) επέλεξαν συνολικά τέσσερις δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης, στις οποίες αφιερώθηκαν 49’. Η παρουσίασή τους στην τάξη ήταν αυτούσια όπως συναντώνται στο σχολικό εγχειρίδιο. Επιπλέον, παρόλο που επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες δραστηριότητες, δεν αξιοποιήθηκαν στο μέγιστο οι ευκαιρίες που προσφέρουν για καλλιέργεια της δημιουργικότητας των

μαθητών. Ενδεικτικά, στην Εικόνα 1 φαίνεται μία εργασία που επέλεξε ο Βασίλης από το σχολικό εγχειρίδιο της Ε' τάξης[5].

Αρχικά ο Βασίλης, προκειμένου να ανασύρουν οι μαθητές του από τη μνήμη τους όσα είχαν συζητήσει στην τάξη την προηγούμενη ημέρα, τους ρώτησε: "*Πότε ένα κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας;*". Ένας από τους μαθητές απάντησε ότι ένα κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας, όταν ο αριθμητής του είναι μικρότερος από τον παρονομαστή. Αμέσως συνέχισαν με την εκτέλεση της εργασίας, κατά την οποία οι μαθητές πρότειναν από ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας, ενώ ο Βασίλης τα έγραφε στον πίνακα και, στη συνέχεια, πάλι με προφορική συμμετοχή των μαθητών, τα τοποθέτησε ο ίδιος σε αριθμογραμμή. Με δεδομένο ότι ένας μαθητής είχε ήδη υπενθυμίσει τον κανόνα ότι ο αριθμητής πρέπει να είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, οι μαθητές προέβαιναν ουσιαστικά σε σύγκριση φυσικών αριθμών για να σχηματίσουν κλάσματα μικρότερα της μονάδας. Η εργασία ολοκληρώθηκε σε πέντε λεπτά, χωρίς δυσκολίες.



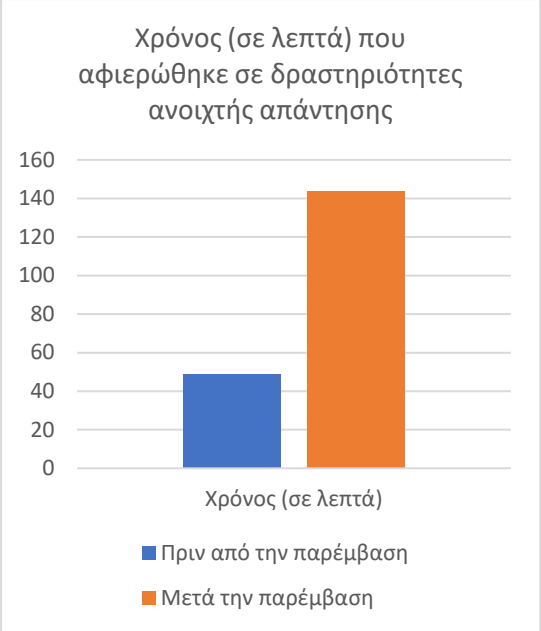
Εικόνα 1: Εργασία που δόθηκε από τον Βασίλη πριν από την παρέμβαση (Ε' τάξη, Τ.Ε., Κεφάλαιο 16, σελ. 11)

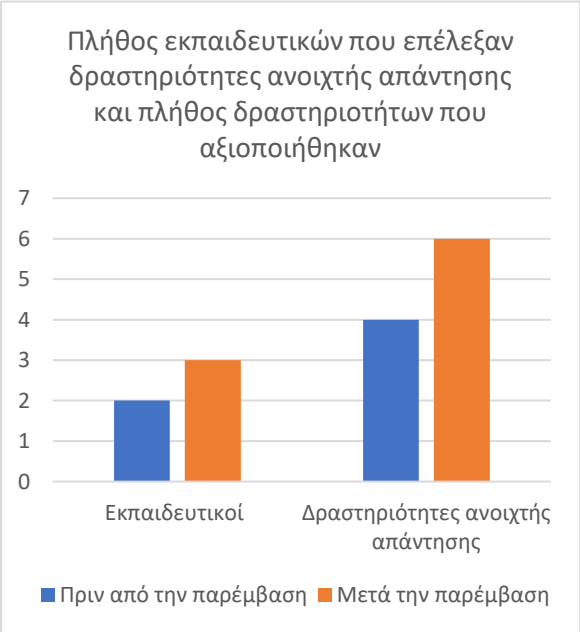
Μία ακόμα δραστηριότητα ανοιχτής απάντησης, την οποία αξιοποίησε η Χαρά, προέκυψε από τροποποίηση εργασίας του σχολικού εγχειριδίου της Α' τάξης (Β.Μ., σελ. 25, εργασία 2). Έδωσε στους μαθητές κάθε θρανίου δύο καλαθάκια και έξι κύβους και τους ζήτησε να συνεργαστούν με τον διπλανό τους ώστε να χωρίσουν τους κύβους, τοποθετώντας τους στα καλαθάκια με διάφορους τρόπους. Αφού κάθε ζευγάρι πρότεινε από έναν τρόπο (συχνά επαναλαμβάνοντας κάποιον που είχε ήδη ειπωθεί,

[5] Κατά την περίοδο της συλλογής των δεδομένων χρησιμοποιούνταν το παλαιό σχολικό εγχειρίδιο (Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης, Χρονοπούλου, 2007) για τα Μαθηματικά στην Ε' τάξη.

καθώς οι τρόποι είναι αριθμητικά περιορισμένοι), η Χαρά τούς μοίρασε φωτοτυπίες με πολλά ζεύγη από καλαθάκια, ώστε να συμπληρώσουν γραπτώς όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Η δραστηριότητα αυτή είχε διάρκεια είκοσι λεπτά.

Μετά την παρέμβαση. Αξιοσημείωτη είναι η αύξηση στον χρόνο που αφιερώνουν οι εκπαιδευτικοί για την καλλιέργεια της ευχέρειας. Όπως φαίνεται στα Σχήματα 1 και 2, μετά την παρέμβαση διαθέτουν συνολικά 144’ σε δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης (τριπλάσιο σε σύγκριση με πριν). Ωστόσο, ο αριθμός των εκπαιδευτικών που επιλέγουν τέτοιες δραστηριότητες είναι σχεδόν ίδιος σε σχέση με πριν. Συγκεκριμένα, τρεις εκπαιδευτικοί επιλέγουν συνολικά έξι δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης, ενώ πριν από την παρέμβαση αξιοποιήθηκαν τέσσερις δραστηριότητες αυτού του είδους από δύο συμμετέχοντες. Τις περισσότερες από τις δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί μετά την παρέμβαση, δεν τις συνθέτουν οι ίδιοι ούτε τις αναζητούν σε διάφορες πηγές. Αντίθετα, επιλέγουν σχεδόν αυτούσιες δραστηριότητες που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Για παράδειγμα, η Ελένη (8 έτη υπηρεσίας) ανέθεσε στους μαθητές της, της Δ’ τάξης, το εξής πρόβλημα, το οποίο είχε συζητηθεί κατά τη διάρκεια των συναντήσεων με τους εκπαιδευτικούς: «*Σχεδιάστε σχήματα με το ίδιο εμβαδόν, 24τ.εκ.*». Τους ενθάρρυνε εξαρχής να αναζητήσουν πολλές λύσεις. Σύντομα, κάποιοι μαθητές πρότειναν ως λύση το τετράγωνο με πλευρά 6εκ. Η Ελένη, προκειμένου να αντιληφθούν μόνοι τους το λάθος τους, τους ζήτησε να το σχεδιάσουν και να υπολογίσουν το εμβαδόν του, το οποίο προκύπτει 36τ.εκ. Αφού οι μαθητές συνειδητοποίησαν πού οφειλόταν η παρανόησή τους, πρότειναν με ευκολία τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές 12εκ.×2εκ., 8εκ.×3εκ. και 6εκ.×4εκ.

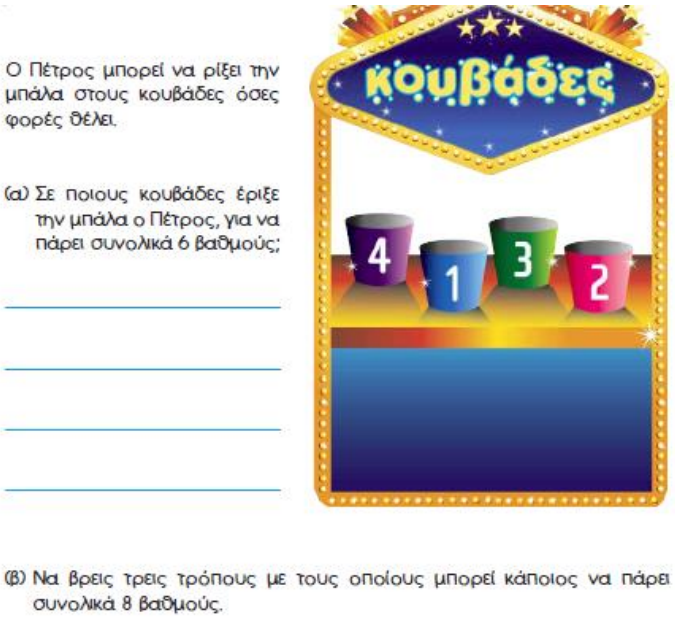




Σχήματα 1 και 2: Συχνότητα εκπαιδευτικών που επέλεξαν δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης, συχνότητα δραστηριοτήτων ανοιχτής απάντησης που αξιοποιήθηκαν και χρόνος που αφιερώθηκε σε αυτές, πριν από και μετά την παρέμβαση

Μία ακόμα δραστηριότητα ανοιχτής απάντησης, η οποία αξιοποιήθηκε από τη Χαρά κατά τη διδασκαλία της στην Α’ τάξη, φαίνεται στην Εικόνα 2. Η Χαρά επέλεξε ως έχει ένα από τα προβλήματα που αποτέλεσαν αντικείμενο συζήτησης κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και προέρχεται από το σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Κύπρου. Επέλεξε να το τροποποιήσει ελαφρά, όχι ως προς το περιεχόμενο, αλλά ως προς την παρουσίασή του στην τάξη. Προσπάθησε να το προσομοιώσει με αληθινό παιχνίδι, ζωγράφισε στον πίνακα τους κουβάδες με τους αντίστοιχους βαθμούς, κάλεσε τους μαθητές έναν–έναν στον πίνακα, τους έδωσε ένα μπαλόνι και τους ζήτησε να το ακουμπούν σε όποιους κουβάδες θέλουν, σχηματίζοντας το ζητούμενο άθροισμα. Παράλληλα, τους ενθάρρυνε να βρουν διαφορετικές λύσεις μεταξύ τους, ενισχύοντας έτσι όχι μόνο την ευχέρεια αλλά και την πρωτοτυπία τους. Τα αθροίσματα που σχημάτισαν οι μαθητές αφορούσαν δύο όρους (π.χ.,

4+2, 3+3), τρεις όρους (π.χ., 3+2+1, 4+1+1) ή τέσσερις όρους (π.χ., 2+1+2+1). Η Χαρά πρότεινε επίσης αθροίσματα με περισσότερους από τέσσερις όρους (π.χ., 1+1+1+1+1+1). Τέλος, επέκτεινε τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, καθώς ζήτησε από τους μαθητές να βρουν νέους τρόπους ώστε να συγκεντρώσουν ακριβώς 8 βαθμούς.



Εικόνα 2: Εργασία που μετατράπηκε σε παιχνίδι από τη Χαρά, μετά την παρέμβαση (Μαθηματικά Α' τάξης Κύπρου, μέρος 3, σελ. 37)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι πριν από την παρέμβαση σχεδόν απουσιάζουν από τη σχολική τάξη οι δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης. Κατ' επέκταση, οι ευκαιρίες που προσφέρονται στους μαθητές για αναζήτηση πολλών λύσεων και καλλιέργεια της ευχέρειας και της δημιουργικότητας στα μαθηματικά είναι πολύ περιορισμένες. Κατά την παρατήρηση της διδασκαλίας κάθε εκπαιδευτικού, οι πέντε από τους επτά δεν απευθύνουν στους μαθητές τους κανένα ερώτημα που επιδέχεται πολλές απαντήσεις. Διαφαίνεται, επομένως, μία τάση των εκπαιδευτικών να προτιμούν κλειστού τύπου δραστηριότητες. Παράλληλα, οι εκπαιδευτικοί εμφανίζονται προσηλωμένοι στο σχολικό εγχειρίδιο, επιλέγοντάς το σχεδόν αποκλειστικά ως πηγή για τις εργασίες που αναθέτουν στους μαθητές και χωρίς να παρεκκλίνουν από τη διατύπωση των εργασιών σε αυτό. Ακόμα και όταν επιλέγουν δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου που εν δυνάμει προσφέρονται για καλλιέργεια της ευχέρειας και της δημιουργικότητας των μαθητών, δεν τις τροποποιούν κατάλληλα ώστε να αξιοποιήσουν τις ευκαιρίες που εμφωλεύουν. Παρόμοια αδυναμία αξιοποίησης των δυνατοτήτων που προσφέρουν οι δραστηριότητες που οι ίδιοι έχουν επιλέξει, εντόπισαν και οι Meyer και Lederman (2013) σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην εργασία που ανέθεσε ο Βασίλης, για παράδειγμα, οι μαθητές, αντί να επιλέγουν αποκλειστικά συνδυασμούς ανάμεσα σε πέντε συγκεκριμένους, δοσμένους αριθμούς, θα μπορούσαν να προτείνουν διάφορα κλάσματα μικρότερα της μονάδας, χρησιμοποιώντας αριθμούς της αρεσκείας τους, έχοντας έτσι περιθώριο για μεγαλύτερη

ενίσχυση της ευχέρειας και της πρωτοτυπίας. Με τον τρόπο αυτό, «ανοίγοντας» την αρχική δραστηριότητα, η δημιουργικότητα των μαθητών καλλιεργείται σε μεγαλύτερο βαθμό.

Μετά την παρέμβαση, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παρατήρηση της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών δεν είναι τόσο ενθαρρυντικά όσο θα περιμέναμε λαμβάνοντας υπόψη την εξέλιξη των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στα προγράμματα των Levenson (2015) και Shriki (2010). Ωστόσο, στις προαναφερθείσες έρευνες οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών εξετάστηκαν σε θεωρητικό επίπεδο και δεν παρατηρήθηκε η διδασκαλία τους. Όπως επισημαίνει η Levenson (2015), η θεωρητική αυτή εξέλιξη δεν συνεπάγεται απαραίτητα αντίστοιχη εξέλιξη και στις διδακτικές τους προσεγγίσεις μέσα στη σχολική τάξη. Στην παρούσα εργασία, η αύξηση στον αριθμό των εκπαιδευτικών που επιλέγουν δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης μετά την παρέμβαση, αλλά και στο πλήθος των δραστηριοτήτων ανοιχτής απάντησης που αξιοποιούνται, είναι μικρή. Από την άλλη πλευρά, ο χρόνος που διαθέτουν σε δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης είναι τριπλάσιος σε σχέση με πριν. Αυτή η αναντιστοιχία φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι οι δραστηριότητες που επιλέγουν μετά την παρέμβαση διαφέρουν ποιοτικά και είναι πιο απαιτητικές σε γνωστικό και δημιουργικό επίπεδο. Επιπλέον, ίσως δείχνει ότι το πλήθος των δημιουργικών δραστηριοτήτων δεν μπορούσε να αυξηθεί δραματικά γιατί απαιτούν περισσότερο διδακτικό χρόνο. Όσον αφορά την προσήλωση στο σχολικό εγχειρίδιο, οι εκπαιδευτικοί που αξιοποιούν δραστηριότητες ανοιχτής απάντησης ξεφεύγουν μεν από το στενό πλαίσιό του, αλλά διστάζουν ή δυσκολεύονται να αναζητήσουν καινούριες ούτε επιχειρούν να τις συνθέσουν μόνοι τους ή να τις δημιουργήσουν τροποποιώντας άλλες, πιθανότατα κλειστού τύπου δραστηριότητες. Αντίθετα, επιλέγουν (σχεδόν) αυτούσιες δραστηριότητες που παρουσιάστηκαν και συζητήθηκαν κατά τη διάρκειά της παρέμβασης, παρά το γεγονός ότι η μία από τις έξι συναντήσεις αφιερώθηκε σε τροποποίηση δραστηριοτήτων προκειμένου να ενισχύουν τη δημιουργικότητα. Το συγκεκριμένο εύρημα επιβεβαιώνει προηγούμενα ευρήματα των Panaoura και Panaoura (2014) σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι αποδίδουν τον δισταγμό τους να συνθέσουν δραστηριότητες κυρίως σε λόγους έλλειψης αυτοπεποίθησης και διδακτικής εμπειρίας. Ωστόσο, όπως φαίνεται από την παρούσα εργασία, και οι έμπειροι, εν ενεργεία εκπαιδευτικοί καταφεύγουν στο υλικό της παρέμβασης. Φαίνεται, επομένως, ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται υποστήριξη, προκειμένου να αξιοποιήσουν δημιουργικές δραστηριότητες στη διδασκαλία τους, γεγονός που αξίζει να ληφθεί υπόψη στο πλαίσιο της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών. Παράλληλα, αναδεικνύεται η ανάγκη για εμπλουτισμό των σχολικών εγχειριδίων, και γενικότερα του διδακτικού υλικού, με δημιουργικές δραστηριότητες.

Ο αριθμός των συμμετεχόντων στην παρούσα εργασία είναι μικρός και ασφαλώς δεν επαρκεί για τη γενίκευση των αποτελεσμάτων. Εντούτοις, η εικόνα που σκιαγραφείται αναδεικνύει την ανάγκη αφενός να εμπλουτιστούν οι γνώσεις των εκπαιδευτικών αναφορικά με την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά (Levenson, 2015; Zioga & Desli, 2023) και αφετέρου να ενισχυθεί η ικανότητά τους για τροποποίηση υπαρχουσών αλλά και κατασκευή και εφαρμογή νέων δημιουργικών δραστηριοτήτων. Αξίζει να μελετηθεί περεταίρω αν οι εκπαιδευτικοί ενσωμάτωσαν στη διδασκαλία τους τέτοιες δραστηριότητες σε βάθος χρόνου, καθώς έχει αναγνωριστεί η αξία της δημιουργικότητας (Leikin & Elgrably, 2020), για την προετοιμασία του πολίτη του μέλλοντος.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ερευνητική εργασία υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛΙΔΕΚ) και από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ), στο πλαίσιο της Δράσης «Υποτροφίες ΕΛΙΔΕΚ Υποψηφίων Διδακτόρων» (κωδικός 1901).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι κοινωνικής έρευνας*. Αθήνα: Gutenberg.

Cohen, J., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Guilford, J. P. (1966). Measurement and creativity. *Theory into Practice*, *5*(4), 185–189.

Leikin, R., & Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, *102*, 1-13.

Levenson, E. (2015). Exploring Ava's developing sense for tasks that may occasion mathematical creativity. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(1), 1–25.

Levenson, E., Swisa, R., & Tabach, M. (2018). Evaluating the potential of tasks to occasion mathematical creativity: Definitions and measurements. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 273-294.

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236–260.

Meyer, A. A., & Lederman, N. G. (2013). Inventing creativity: An exploration of the pedagogy of ingenuity in science classrooms. *School Science and Mathematics*, *113*(8), 400-409.

Panaoura, A., & Panaoura, G. (2014). Teachers' awareness of creativity in mathematical teaching and their practice. *IUMPST*, *4*. Ανακτήθηκε από https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1043048.pdf

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 159-179.

Torrance, E. P. (1967). Scientific views of creativity and factors affecting its growth. *Daedalus*, *94*(3), 663–681.

Zioga, M., & Desli, D. (2023). Fostering mathematical creativity through problem posing: The use of "What-if…" strategy. In I. Papadopoulos, & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd ProMath conference* (pp. 149–163). Faculty of Education, Aristotle University of Thessaloniki.

ΥΠΕΠΘ-ΠΙ. *Διδακτικά πακέτα Δημοτικού Σχολείου*. Διαθέσιμο σε: http://www.pi-schools.gr/books/dimotiko/

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΙΑΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πετρίδου Αντωνία

Εκπαιδευτικός ΠΕ70 /4ο ΔΣ Αλεξανδρούπολης

pantonia65@gmail.com

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται να παρουσιαστεί ένα τμήμα μιας έρευνας που αφορά τη μελέτη των δυνατοτήτων επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στα μαθηματικά, στο πλαίσιο μιας κοινότητας πρακτικής, η οποία συγκροτήθηκε και λειτούργησε κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2017-2018, σε ένα πειραματικό σχολείο της Βόρειας Ελλάδας. Για τη 'μελέτη περίπτωσης' της εν λόγω κοινότητας πρακτικής αξιοποιήθηκε η θεωρία του Wenger για τις κοινότητες πρακτικής. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η ανατροφοδότηση που παρείχε η κοινότητα των ερευνητών αποτέλεσε παράγοντα που συνέβαλε στην αποτελεσματικότητα της κοινότητας πρακτικής.

Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1.1. Επαγγελματική ανάπτυξη - επαγγελματική μάθηση

Ο Ponte (2011) υποστηρίζει ότι ο όρος «επαγγελματική ανάπτυξη» είναι ισοδύναμος με τον όρο «επαγγελματική μάθηση», υπογραμμίζοντας ότι η θεώρηση του είναι υποκειμενική και ότι υπάρχουν ερευνητές που θεωρούν τον δεύτερο όρο ευρύτερο, γιατί αφορά όχι μόνο τις εσωτερικές διαδικασίες που συμβαίνουν στον εκπαιδευτικό στη διάρκεια της επαγγελματικής τους ζωής αλλά και στις εξωτερικές επιρροές.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ο όρος επαγγελματική ανάπτυξη ως ισοδύναμο με τον όρο επαγγελματική μάθηση, προσδίδοντας του τα χαρακτηριστικά της επαγγελματικής μάθησης.

1.2 Σύγχρονα μοντέλα επαγγελματικής ανάπτυξης- επαγγελματικής μάθησης

Τα σύγχρονα μοντέλα επαγγελματικής ανάπτυξης-επαγγελματικής μάθησης, που προτείνονται από τη διεθνή βιβλιογραφία είναι συνεργατικά, υλοποιούνται στο χώρο του σχολείου και έχουν στόχο τη συνεργασία των εκπαιδευτικών και το διαμοιρασμό των αποτελεσμάτων της (Robutti et al.,2016)

Προτάσεις όπως, ο μετασχηματισμός του σχολείου σε 'οργανισμό που μαθαίνει' και των ομάδων των εκπαιδευτικών σε επαγγελματικές κοινότητες μάθησης (Πασιάς κ.σύν., 2015), ή της δημιουργίας 'ομάδων συλλογικής δράσης' εκπαιδευτικών, μέσα από τη σχολική μονάδα, που αναλαμβάνουν την επίλυση των προβλημάτων, τα οποία προκύπτουν σε επίπεδο τάξης, σχολείου ή εκπαιδευτικού συστήματος, συγκλίνουν με τις διεθνείς τάσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών, στο πλαίσιο κοινοτήτων πρακτικής (Wenger, 1998· Robutti et al., 2016).

Μελέτες όπως αυτή των Louws, et al., (2017), στην Ολλανδία, έδειξαν ότι αν και οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να θέτουν τους δικούς τους στόχους για την επαγγελματική τους ανάπτυξη και να αναλαμβάνουν την προσωπική τους εξέλιξη, λόγω της αυτονομίας που

τους παρέχει η σχολική μονάδα στην οποία εργάζονται, χρειάζονται βοήθεια στη διαδικασία του αναστοχασμού και της επανεξέτασης των διδακτικών τους πρακτικών στην τάξη, από υποστηρικτές (facilitator) στην οργάνωση του προσωπικού τους σχεδίου Επαγγελματικής Ανάπτυξης (ΕΑ).

2.1. Επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά στο πλαίσιο κοινοτήτων πρακτικής

Η άποψη για την πλαισιωμένη μάθηση και τη συνεργασία των εκπαιδευτικών, έχει επηρεάσει τις σύγχρονες θεωρήσεις για την εκπαίδευση και την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, προτείνοντας την επαγγελματική μάθηση μέσα από κοινότητες πρακτικής, όπως την έχει την θεμελιώσει ο Wenger (1998) και κοινότητες διερεύνησης, όπως την επέκτεινε η Jaworski (2005, 2006) εισάγοντας το όρο της 'διερεύνησης', και την προϋπόθεση της συνεργασίας των εκπαιδευτικών με ερευνητές της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών.

2.1.1.Κοινότητες πρακτικής

Μια κοινότητα πρακτικής (Community of Practice) συγκροτείται από επαγγελματίες και γενικότερα από ανθρώπους που μοιράζονται την επαγγελματική τους γνώση/τεχνογνωσία ή το πάθος για μια κοινή δράση, που αλληλεπιδρούν συζητώντας και δίνοντας νόημα στις γνώσεις και τις πράξεις τους και που παράγουν νέες ιδέες προκείμενου να βελτιώσουν τις καθημερινές τους πρακτικές. Αυτές οι πρακτικές, που αναπτύσσονται γύρω από την αναζήτηση ενός κοινού εγχειρήματος, είναι που διαμορφώνουν και την κοινότητα, η οποία αποτελεί μία κοινότητα πρακτικής (Wenger, 1998, σ. 45).

2.1.2. Διαστάσεις του 'ανήκειν' σε μια κοινότητα πρακτικής

Σύμφωνα με τον Wenger (1998) οι τρόποι κατανόησης του 'ανήκειν' στην κοινότητας πρακτικής από τα μέλη καθορίζονται από:

Τη Δέσμευση- Εμπλοκή στην κοινότητα (Engagement). Αφορά στις δράσεις, στις συζητήσεις και στα παραγόμενα – τεχνουργήματα των μελών της ΚΠ.

Την Εικόνα –ταυτότητα (Imagination): Αφορά είτε στην ατομική είτε στη συλλογική εικόνα που διαμορφώνουν τα μέλη της ΚΠ, καθώς και στη ταυτότητα – εικόνα της κοινότητας.

Την Ευθυγράμμιση με τους στόχους της κοινότητας (Alignment): Αφορά στην κοινή διαδικασία συντονισμού με τις ιδέες, τους στόχους και τις προοπτικές της ΚΠ, έτσι ώστε να γίνουν πραγματικότητα υψηλότεροι στόχοι.

Η **δέσμευση (engagement**) αποτελεί ισχυρό παράγοντα, ο οποίος συμβάλλει στην οριοθέτηση της κοινής δράσης των μελών μιας ΚΠ και βοηθά στην διαπραγμάτευση του κοινού εγχειρήματος και στη διαμόρφωση του πλαισίου μέσα στο οποίο δομείται, όχι μόνο η εμπειρία τους, αλλά και η ταυτότητα, που συνδέεται με την ικανότητα τους. Παρότι, όλα τα μέλη της ΚΠ μπορεί να έχουν την ίδια δέσμευση για το κοινό εγχείρημα, καθένα από αυτά βλέπει τον εαυτό του και τις δράσεις του με διαφορετικό τρόπο, διαμορφώνουν διαφορετική **ταυτότητα-εικόνα (imagination),** ο καθένας για τον εαυτό του.

Όπως η φαντασία (imagination) και η δέσμευση (engagement), έτσι και η **ευθυγράμμιση (alignment)** αποτελεί έναν τρόπο έκφρασης του 'ανήκειν' σε μια ΚΠ, ο οποίος διευκολύνει την εμπλοκή και γεφυρώνει το χάσμα του χρόνου και του χώρου, που απαιτείται σε ένα ευρύ εγχείρημα. Έτσι, τα μέλη μιας ΚΠ, μέσω της ευθυγράμμισης, μπορούν να συντονιστούν με τις δράσεις της, ανάλογα με τις δυνατότητες χρόνου, χώρου, πρακτικών, δράσεων και ενέργειας, που μπορούν να διαθέσουν τη δεδομένη στιγμή.

2.2. Κοινότητες διερεύνησης

Αποτελεί κοινή διαπίστωση των ερευνητών (Wells, 1999· Jaworski, 2005) ότι οι κοινότητες πρακτικής συχνά αναπαράγουν και ενισχύουν την υπάρχουσα πρακτική που έχει αναπτυχτεί στο πλαίσιο τους, ενώ τα μέλη τους, πολλές φορές, διαπιστώνουν ότι δεν είναι αρκετά αποτελεσματική και αναζητούν καινούριες πρακτικές.

Ο Wells (όπ. αναφ. στο Νίκα, 2014), εκκινώντας από την άποψη του Wenger (1998), ότι η βελτίωση των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την εμπλοκή τους σε κοινότητες πρακτικής, εισάγει τον όρο 'κοινότητες διερεύνησης'. Αναγνωρίζει το διερευνητικό χαρακτήρα της συνεργασίας των μελών μιας ΚΠ, δηλαδή την υιοθέτηση της πρακτικής που αφορά στην υποβολή ερωτήσεων από τα μέλη της ΚΠ, στην προσπάθεια τους να διερευνήσουν τις διδακτικές πρακτικές τους, ώστε να τις βελτιώσουν.

Για τη Jaworski (2006), η διερεύνηση αποτελεί βασική αρχή της θεωρίας της και η έρευνα είναι το εργαλείο (inquiry as a tool) διερεύνησης των αναγκών και των προκλήσεων που αντιμετωπίζουν εκπαιδευτικοί και ερευνητές στο πλαίσιο της ΚΠ στην οποία ανήκουν.

Ερευνητές και εκπαιδευτικοί αποτελούν μέλη ξεχωριστών μεν ΚΠ, αλλά με συναφή ενδιαφέροντα, τα οποία σχετίζονται με την ανάπτυξη αποτελεσματικών μοντέλων διδασκαλίας (Jaworski,2005· Goos, 2014). Την πρωτοβουλία για τη συνεργασία ερευνητών –εκπαιδευτικών μπορεί να αναλάβει είτε η ΚΠ των ερευνητών, είτε η ΚΠ των εκπαιδευτικών, είτε αρμόδιοι φορείς της εκπαίδευσης, όπως το υπουργείο, η διεύθυνση του σχολείου κτλ. (Goos, 2014).Η έρευνα της Goos, έδειξε ότι όχι μόνο οι ερευνητές είχαν ακαδημαϊκά οφέλη, αλλά και οι εκπαιδευτικοί επαγγελματικά οφέλη, λόγω της υποστήριξης τους από τους ερευνητές.

Χαρακτηριστική περίπτωση είναι το πρόγραμμα Learning Communities in Mathematics (LCM), που αφορούσε τη συνεργασία 12 ερευνητών, με 25-30 εκπαιδευτικούς, οι οποίοι συγκρότησαν μια κοινότητα διερεύνησης (community of inquiry), με στόχο τη διερεύνηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων στην τάξη. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι, ενώ αρχικά οι εκπαιδευτικοί περίμεναν από τους ερευνητές να τους καθοδηγήσουν στο 'πώς' θα εφαρμόσουν τη διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας, σταδιακά άρχισαν να συνεργάζονται μεταξύ τους, να αναστοχάζονται πάνω στις διδακτικές τους πρακτικές, να ασκούν κριτική και να συμμετέχουν στην οργάνωση των εργαστηρίων και να προτείνουν αποτελεσματικότερους τρόπους εφαρμογής της διερευνητικής μάθησης (Goodchild et al., 2013).

Συνοψίζοντας, σε μια κοινότητα διερεύνησης, εκπαιδευτικοί και ερευνητές εξελίσσονται επαγγελματικά οι μεν και ακαδημαϊκά οι δε, μαθαίνοντας από κοινού (Σακονίδης, 2012).

Β. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ-ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1.Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των δυνατοτήτων επαγγελματικής ανάπτυξης εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, που έχουν συγκροτήσει και λειτουργούν μια κοινότητα πρακτικής για τα μαθηματικά.

3.2. Ερευνητικό ερώτημα

Η παρούσα μελέτη αποσκοπεί να απαντήσει στο παρακάτω ερευνητικό ερώτημα:

Πώς συμβάλλει η συνεργασία εκπαιδευτικών και ερευνητών στην επαγγελματική ανάπτυξη των πρώτων;

3.3. Μεθοδολογικό πλαίσιο

3.3.1.Μέθοδος συλλογής δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα αξιοποιηθήκαν ποιοτικές μέθοδοι, καθώς τα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν αφορούσαν ένα σχέδιο μελέτης του πραγματικού κόσμου (Robson, 2007), το οποίο αποσκοπεί στην σύνδεση των ερευνητικών ερωτημάτων με μια προϋπάρχουσα θεωρία, τη θεωρία που έχει διατυπώσει ο Wenger (1998) για τις κοινότητες πρακτικής.

Για την περιγραφή και κατανόηση του τρόπου συγκρότησης και λειτουργίας της συγκεκριμένης κοινότητας πρακτικής και των τρόπων που τα μέλη της κατανοούν τις δυνατότητες επαγγελματικής ανάπτυξής τους και νοηματοδοτούν τη συμμετοχή τους, θεωρήθηκε κατάλληλη και αξιοποιήθηκε η τεχνική της 'μελέτης περίπτωσης'(Creswell, 2011).

3.3.2. Δείγμα –Συμμετέχοντες - Η σύσταση της κοινότητας

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 9 εκπαιδευτικοί, 8 γυναίκες και 1 άντρας, μέλη της κοινότητας πρακτικής για τα μαθηματικά, η οποία συγκροτήθηκε και λειτούργησε σε ένα πειραματικό σχολείο, που βρίσκεται σε αστική περιοχή της Βορείου Ελλάδας. Οι εκπαιδευτικοί, η ερευνήτρια, (εκπαιδευτικός του σχολείου και μέλος της κοινότητας), 2 μέλη της ακαδημαϊκής κοινότητας, που υποστηρίζουν επιστημονικά την κοινότητα, συγκροτούν την 'περίπτωση' της κοινότητας πρακτικής, η οποία θα μελετηθεί στην παρούσα έρευνα.

3.3.3. Ερευνητική διαδικασία

Η διεξαγωγή της έρευνας έγινε με ευελιξία, δεδομένου ότι η ερευνήτρια αποτελούσε μέλος της κοινότητας πρακτικής και είχε τη δυνατότητα πρόσβασης στους χώρους και στα μέλη της κοινότητας ανά πασά στιγμή.

Για τη συλλογή των δεδομένων, αποφασίστηκε να αξιοποιηθούν σημειώσεις ημερολογίου και ηχογραφημένα αρχεία από τις (τυπικές) συναντήσεις των μελών της κοινότητας πρακτικής στο πανεπιστήμιο και τις (άτυπες) συναντήσεις στο χώρο του σχολείου, καθώς και οι ημιδομημένες συνεντεύξεις με καθέναν από τους 9 εκπαιδευτικούς που συμμετέχουν στην ΚΠ. Ο σχεδιασμός του πρωτόκολλου της συνέντευξης ξεκίνησε με την μετατροπή των ερευνητικών στόχων σε ερωτήματα, τα οποία συνδέονται άμεσα με το φαινόμενο που μελετάται (Cohen, Manion, & Morrison, 2008).

3.3.4.Εργαλεία και Υλικό Συλλογής Δεδομένων

Η συνέντευξη αποτέλεσε βασικό εργαλείο διερεύνησης των απόψεων των εκπαιδευτικών, για τη δυνατότητα επαγγελματικής ανάπτυξης στα μαθηματικά, στο πλαίσιο της ΚΠ που έχουν συγκροτήσει, γιατί μπορεί να εξυπηρετήσει αυτό τον σκοπό (Cohen, Manion, & Morrison, 2008). Επιλέχτηκε η μορφή της ημιδομημένης συνέντευξης, γιατί είναι κατάλληλη για ποιοτικές έρευνες, που επικεντρώνονται στις νοηματοδοτήσεις των συμμετεχόντων, όπως το φαινόμενο που μελετάται στην παρούσα (Robson, 2007).

Γ. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Προκειμένου να απαντήσουμε στο ερευνητικό ερώτημα αναζητήσαμε τους τρόπους με τους οποίους τα μέλη της κοινότητας ευθυγραμμίζονται με την κοινότητα πρακτικής, επομένως, α)

αν συντονίζονται με τις ενέργειες και τις προοπτικές της κοινότητας, β) αν ασκούν κριτική και αν αμφισβητούν τις ενέργειες-δράσεις της και γ) πώς επωφελούνται από την κοινότητα και ποιες θεωρούν ότι είναι ότι είναι οι προοπτικές της.

Συντονισμός με τις ενέργειες και τις προοπτικές της κοινότητας

Στην πλειοψηφία τους, φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν με τις δράσεις της κοινότητας, γιατί θεωρούν ότι οι συναντήσεις στο Πανεπιστήμιο ολοκληρώνουν τη στήριξη που επιζητούν από την κοινότητα πρακτικής, με την επιστημονική υποστήριξη που παρέχουν οι ερευνητές και τις διαφορές παρεμβάσεις που οργανώνουν και προτείνουν.

Συγκεκριμένα οι ερευνητές:

Α) Θέτουν το θεωρητικό πλαίσιο των διδακτικών παρεμβάσεων. Για παράδειγμα:

> Υπάρχουν συναντήσεις στο Πανεπιστήμιο στις οποίες συζητάμε ότι κάνουμε, τον τρόπο που το κάνουμε, ακούμε από τους συναδέλφους ότι έγινε. Γίνεται μια ανατροφοδότηση, να πω. Πιστεύω ότι είναι πολύ σημαντική αυτή η συνάντηση που έχουμε κάθε μήνα.[….] (Σ8)[6]

Β) Προτείνουν εκπαιδευτικό υλικό ή υποστηρίζουν τη δημιουργία υλικού για τη διδασκαλία.

> Μέσα λοιπόν από τη συνεργασία των συνάδελφων και των καθηγητών από το πανεπιστήμιο, μπορέσαμε και φτιάξαμε υλικό, κάναμε διδασκαλία, συγκεντρώσαμε υλικό, δουλέψαμε ολόκληρη ενότητα για τα μαθηματικά και ήταν πραγματικά ένα πάρα πολύ ωραίο αποτέλεσμα. Και είμαι σίγουρη ότι και στα παιδιά άρεσε και κατάλαβαν και πάρα πολλά πράγματα Ήταν θετικό! (Σ4)

Γ) Λύνουν απορίες και δίνουν απαντήσεις σε ερωτήματα που προκύπτουν στο πλαίσιο των διδακτικών παρεμβάσεων και στην προετοιμασία τους.

> Βεβαίως όταν παρουσιάζεται κάποια δυσκολία, κάποιος προβληματισμός, Ο ειδικός είναι ειδικός και ξέρει περισσότερα από μένα. Εννοείται με έχουν βοηθήσει ώστε να καταλάβω τις μαθηματικές έννοιες, πώς θα τις δώσω, πώς θα βοηθήσω τους μαθητές μου να τις καταλάβουν. Πάρα πολύ! (Σ3)

Δ) Ενημερώνουν για τα νέα ερευνητικά δεδομένα και ταυτόχρονα παρατηρούν από απόσταση τα τεκταινόμενα παρέχοντας μια αντικειμενική ματιά που μπορεί να δώσει ιδέες που θα βοηθήσουν στη βελτίωση των διδακτικών πρακτικών.

> Αλλά γενικώς η εφαρμογή στο χώρο της εκπαίδευσης δεδομένων ερευνητικών μόνο θετικά έχει να προσφέρει. Μια έξωθεν του σχολείου ματιά σίγουρα βοηθάει, γιατί εμείς μέσα στην ρουτίνα του σχολείου κάποια πράγματα ίσως δεν τα αντιλαμβανόμαστε. (Σ5)

---

[6] Για τη διασφάλιση της ανωνυμίας των συμμετεχόντων αρχικά έγινε κωδικοποίηση των συνεντεύξεων με την ονομασία Σ1, Σ2…Σ9, η οποία διατηρήθηκε και στις αναφορές σε όλες τις άλλες πηγές (ημερολόγιο, ηχογραφημένα αρχεία κτλ.)

Ε) Συμβάλλουν γενικότερα στην αλλαγή απόψεων στάσεων και πρακτικών των εκπαιδευτικών στην τάξη.

Βεβαίως και συμβάλλει. Με οδηγεί σε άλλους τρόπους σκέψης. Αλλιώς αντιμετώπιζα τα προβλήματα ή τα είδη προβλημάτων που μπορεί να έβαζα στους μαθητές μου και αλλιώς τα αντιμετωπίζω τώρα. Τώρα προσπαθούμε να τα εντάξουμε στην καθημερινότητά στην καθημερινή ζωή των παιδιών και στο βιωματικό έτσι.....Να γίνουν πιο βιωματικά. Έχει αλλάξει ο ρόλος μου μέσα στην τάξη δεν είναι ο ρόλος της αυθεντίας. Είναι ο ρόλος του συντονιστή του βοηθού του καθοδηγητή.(Σ2)Διαπιστώθηκε γενικά ότι όλα τα μέλη συντονίζονται με τις ενέργειες και τις δράσεις που προτείνονται από τους ερευνητές και καλύπτονται από τον τρόπο οργάνωσης και λειτουργίας της κοινότητας. *Προς το παρόν δεν έχει συμβεί να θέλω να αλλάξει κάτι, αλλά νομίζω ότι αν προκύψει, αν χρειαστεί θα το κάνω γιατί τα μέλη είναι ισότιμα. (Σ1)*

Κριτική, αμφισβήτηση των ενεργειών –δράσεων της κοινότητας

Κριτική, αμφισβήτηση των ενεργειών –δράσεων της κοινότητας φαίνεται να ασκεί μόνο το μέλος (Σ6), όμως μόνο σε πρακτικά και οργανωτικά θέματα.

Όσον αφορά τη χρονική στιγμή και το υλικό που θα μπορούσαμε να έχουμε στα χέρια μας είμαστε λίγο βιαστικοί! Βέβαια φταίει το γεγονός ότι και εμείς το σχολείο δεν έχουμε πολύ χρόνο με την ύλη που τρέχει να εφαρμόσουμε και να ψαχτούμε από μόνοι μας αυτό ενοχλεί εμένα που από μόνη μου δεν έχω κάνει πράγματα τόσα όσα θα ήθελα για να αξιοποιήσω στην τάξη αυτά που έμαθα από την κοινότητα. (Σ6)

Ερώτηση: Εννοείται ότι δεν έρχεται τόσο υλικό όσο θα θέλατε;

Ναι! Υλικό που θα μπορούσα να το ψάξω και το υλικό που ερχόταν πιστεύω και ο χρόνος ο δικός μου δεν είναι αρκετός που θα μπορούσα να το αξιοποιήσω. Το ένα δηλαδή με το άλλο είναι αλληλένδετα. Τώρα για παράδειγμα που έχουμε υλικό στα χέρια μας για τα προβλήματα ελπίζω να μπορέσουμε. Θα μου άρεσε να υπήρχε πιο πριν και για το προηγούμενο διάστημα. (Σ6)

Προτάσεις – Διερεύνηση προοπτικών (κριτική ευθυγράμμιση)

Τέλος, οι μόνες προτάσεις που έγιναν, από δύο εκπαιδευτικούς, ήταν να εμπλακούν στη έρευνα δράση. Αναφέρουν :

Όχι δεν έχω προτείνει αλλαγές (συνεργασίας) αλλά θα ήθελα ας πούμε τον επόμενο χρόνο να υπάρχει συνεργασία μεγαλύτερη με κάποια μέλη. Αυτή η συνεργασία που παρατηρώ να γίνεται,

θα μπορούσα να εμπλακώ και εγώ. Την έρευνα δράσης που γίνεται. (Σ6)

Εμένα με ικανοποιεί το πλαίσιο και θα μπορούσε απλώς να εξελιχθεί, όπως ήδη εφαρμόζεται όμως. Να έχουμε τη συνάδελφο ή οποία έχει την περεταίρω , ενδεχομένως γνώση , να μπαίνει μία φορά την εβδομάδα […]Αυτό που ήδη γίνεται. Θα ήθελα να το δοκιμάσω. Να ενταχθούμε. (Σ9)

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι τα μέλη της κοινότητας συντονίζονται με τις ενέργειες και δράσεις της κοινότητας που προτείνονται από τους ερευνητές. Δεν ασκούν κριτική παρά μόνο σε θέματα οργάνωσης, όπως στην έγκαιρη λήψη του εκπαιδευτικού υλικού και οι προτάσεις τους αφορούν μόνο την επέκταση της έρευνας δράσης με την μορφή που υλοποιείται σήμερα.

Δ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η προηγηθείσα συζήτηση των αποτελεσμάτων της έρευνας μας επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων, τα οποία αφορούν τις δυνατότητες επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στο πλαίσιο κοινοτήτων πρακτικής, στις οποίες συμμετέχουν και ερευνητές.

Η συνεργασία με τους ερευνητές φαίνεται να διευκολύνει τον αναστοχασμό των εκπαιδευτικών και να βοηθά στη διαμόρφωση της ατομικής τους ταυτότητας, αλλά και της ταυτότητας μέλους της κοινότητας.

Θεωρούμε ότι η κοινότητα κατάφερε να βρει τρόπους ανατροφοδότησης των πρακτικών της,μεσα από τη συνεργασία με τους ερευνητές, αλλά δεν μπόρεσε να δώσει τη δυνατότητα κριτικής ευθυγράμμισης στα μέλη- εκπαιδευτικούς, καθώς δεν τους είδαμε να ασκούν κριτική στο έργο της ΚΠ παρά μόνο σε θέματα οργάνωσης, ούτε να κάνουν προτάσεις για την πορεία της.

Καταλήγοντας θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι ΚΠ των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά και γενικότερα σε όλα τα αντικείμενα, όταν συγκροτούνται με πρωτοβουλία των εκπαιδευτικών, λειτουργούν κατά βάση στο χώρο του σχολείου, επιδιώκουν τη συνεργασία με ΚΠ ερευνητών και γενικότερα ειδικών, μπορούν να συμβάλουν στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K.(2008).*Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας.* Αθήνα: Μεταίχμιο

Creswell, W. j.(2011). *Η Έρευνα στην εκπαιδευτική πράξη. Σχεδιασμός, Διεξαγωγή και Αξιολόγηση της ποσοτικής και ποιοτικής Έρευνας*. Αθήνα: Έλλην.

Goodchild, S., Fuglestad, A. B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 393–412.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM,* 46(2), 189–

Jaworski, B. (2005). Learning communities in mathematics: creating an inquiry community between teachers and didacticians. *Research in Mathematics Education, 7*(1), 101–119. doi:10.1080/14794800008520148.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching.*Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 187–211.Louws, M., Meirink, J., Veen, K & Driel, J.(2017). Teachers' self-directed learning and teaching experience: What, how, and why teachers want to learn.*Teaching and Teacher Education* 66, 171-183.

200. doi:10.1007/s11858-013-0556-9.

Κλώθου, Α.,& Κυβηρτζίκης, Ε.(2014). *Νέο πρόγραμμα σπουδών στα μαθηματικά : Μια πιλοτική εφαρμογή στο 1ο Πρότυπο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Αλεξανδρούπολης.* Ανακοίνωση στο 3ο Διεθνές Συνέδριο «Η Σχολική Μονάδα ως ένας Οργανισμός που Μαθαίνει».Προσεγγίσεις και εφαρμογές, Αθήνα.

Νίκα, Σ. (2014). *Σχεδιασμός και υλοποίηση ενός προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης των δασκάλων στα μαθηματικά* (Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών). Διαθέσιμο από τη βάση δεδομένων του Εθνικού Κέντρου Τεκμηρίωσης (Κωδ. 40921).

Πασιάς, Γ., Αποστολόπουλος, Κ. & Στυλιάρης, Ε. (2015). «Αυτοαξιολόγηση» και «Αξιολόγηση ομοτέχνων»: Διαδικασίες βελτίωσης του σχολείου και μετασχηματισμού του σε επαγγελματική κοινότητα μάθησης, *Έρευνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών-Επιστημονικών Θεμάτων*, Τεύχος 7ο, 25-35. Ανακτήθηκε 3/2/2018, από http://erkyna.gr/e_docs/periodiko/dimosieyseis/ekpaideytika/t07-02.pdf

Ponte, J.P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *J Math Teacher Educ*ation, 14, pp 413–417. DOI 10.1007/s10857-011-9195-7

Robson, C. (2007). *Η έρευνα του πραγματικού κόσμου*, (μτφ. Β. Νταλάκου & Κ. Βασιλικού). Αθήνα: Gutenberg.(έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1993)

Robutti, O., Cusi, A., Clark -Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley,C., Goos, m., Isoda, M., & Joubert, M.(2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016.*ZDM Mathematics Education,* 48:651–690. DOI 10.1007/s11858-016-0797-5

Σακονίδης, Χ. (2012). Διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας και συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη: μια κρίσιμη σχέση για την ανάπτυξη της διδακτικής πρακτικής. Στο Ε. Κολέζα, Α. Γαρμπής και Χ. Μαρκόπουλος (Εκδ.) Πρακτικά Συνεδρίου: *"Καινοτόμες Προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση: Σχεδιασμός και Δικτύωση",* (σελ. 109-132). Πανεπιστήμιο Πατρών.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

ΑΜΦΙΣΗΜΙΕΣ ΣΤΟΝ ΠΡΟΦΟΡΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κοτσαλίδης Φώτιος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,

Α΄ και Β΄ Αρσάκειο Γυμνάσιο Ψυχικού, fokotsal@gmail.com

Η παρούσα ερευνητική εργασία εστιάζει στις αμφισημίες του προφορικού λόγου μαθητών και εκπαιδευτικού, που προκύπτουν σε ένα ομαδοσυνεργατικό μάθημα Άλγεβρας. Συγκεκριμένα αναδεικνύει πώς ο εκπαιδευτικός δεν κατάφερε να αναγνωρίσει εγκαίρως δύο κρίσιμες, αναδυόμενες περιπτώσεις διασαφηνίσιμης αμφισημίας, ώστε να υποστηρίξει τη συνεργασία των αντίστοιχων ομάδων πιο αποτελεσματικά. Τα συμπεράσματα κατατείνουν στην προώθηση τόσο ενός αναστοχαστικού σχεδιασμού, όσο και ενός αναδυόμενου σχεδιασμού εκ μέρους του εκπαιδευτικού για την παιδαγωγική αξιοποίηση των αμφισημιών στον μαθηματικό λόγο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αμφισημία (ambiguity) στον εντός τάξης/σχολικό προφορικό μαθηματικό λόγο αποτελεί μια πύλη εισόδου στην συνθετότητα των σχετικών επικοινωνιακών φαινομένων. Η αμφισημία αναφέρεται στην παρουσία πολλαπλών ή ασαφών νοημάτων ή ερμηνειών για μία λέξη, ένα σύμβολο, μια έννοια ή μια κατάσταση· ανάλογα με την έγκαιρη αναγνώριση και τον χειρισμό της ή μη, η αμφισημία μπορεί να αποτελέσει ευκαιρία για δημιουργικότητα και εναλλακτικές θεωρήσεις, αλλά και πηγή σύγχυσης, λάθους ή παρανόησης (Barnett-Clarke & Ramirez, 2004; Barwell, 2003; Foster, 2011; Καμηλάκη & Κοτσαλίδης, 2017; Rowland 1999, 2000).

Κάποιες έρευνες έχουν εστιάσει στην αμφισημία των ορισμών, δηλαδή στο πώς διαφορετικοί ορισμοί για τον ίδιο όρο μπορούν να επηρεάσουν την ορθότητα και εγκυρότητα μαθηματικών ισχυρισμών και πώς οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί χειρίζονται τέτοιες περιστάσεις (Kercher et al. 2022). Ένα συμπέρασμα, που προκύπτει, είναι ότι ο σχετικός τύπος αμφισημίας είναι κοινός, συχνά περνά απαρατήρητος και προκαλεί εμπόδια στην επικοινωνία, αλλά επιπλέον προσφέρει ευκαιρίες για μάθηση και αιτιολόγηση, ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας των μαθητών, της δημιουργικότητας και των επικοινωνιακών τους δεξιοτήτων (Barwell, 2003; Foster, 2011). Επιπρόσθετα, στη βιβλιογραφία προτείνονται και γενικές οδηγίες ή στρατηγικές για την ελαχιστοποίηση της προβληματικής λειτουργίας των αμφισημιών, όπως η χρήση ακριβούς και συνεπούς ορολογίας, η αποφυγή συνωνύμων και ομωνύμων και η συστηματική εξήγηση του νοήματος και του πλαισίου χρήσης των συμβόλων και των εκφράσεων (Isaacson et al. 2012).

Η παρούσα ερευνητική εργασία εστιάζει στο πώς σε δύο επεισόδια προφορικής επικοινωνίας σε ένα μάθημα Άλγεβρας εμφιλοχωρούν αντίστοιχες αμφισημίες, που δεν γίνονται αντιληπτές από τον εκπαιδευτικό με αποτέλεσμα την ανάδυση και παραμονή εμποδίων στις διακλαδώσεις της μαθηματικής επικοινωνίας δύο ομάδων μαθητών κατά την προσπάθεια για γενίκευση. Η εικόνα περιπλέκεται ακόμη περισσότερο, αν συμπεριληφθεί η ασύμμετρη σχέση εκπαιδευτικού και μαθητών στην διεξαγωγή των συνομιλιών, η οποία φαίνεται να διαδραματίζει σημαντικό, αλλά και διαφορετικό ρόλο στις δύο περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που κατευθύνουν την παρούσα μελέτη είναι ΕΕ1: Με ποιους τρόπους οι αμφισημίες σε καθημερινές λέξεις προκαλούν δυσκολίες στην επικοινωνία μαθητών και εκπαιδευτικού σε ένα συγκεκριμένο μάθημα Άλγεβρας; ΕΕ2: Με ποιον τρόπο οι παρατηρούμενες στο εν λόγω μάθημα δυσκολίες σχετικά με τις αμφισημίες μπορούν να ενημερώσουν την πρακτική του

εκπαιδευτικού, ώστε να παρέχει πιο αποτελεσματική υποστήριξη στους μαθητές σε ανάλογες περιπτώσεις στο μέλλον;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Για τη μελέτη της αμφισημίας στον προφορικό μαθηματικό λόγο οι Peterson et al. (2020) εισήγαγαν τη διάκριση ανάμεσα σε αμφισημία που είναι φυσικό κομμάτι όλης της διαδικασίας νοηματοδότησης στην τάξη των μαθηματικών και σε *διασαφηνίσιμη αμφισημία*, που επιτρέπει στους μαθητές να συνεχίσουν την μαθησιακή διαδικασία με αμοιβαιότητα και συμφωνία ως προς τη χρήση και αναφορά των λεγομένων τους. Οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν τρεις αναγκαίες συνθήκες για τον χαρακτηρισμό της αμφισημίας μιας λέξης ως διασαφηνίσιμης. Αν μία λέξη χρησιμοποιείται ώστε **(α)** να μπορεί να κατανοηθεί κατά πολλαπλές, ευσταθείς (viable) ερμηνείες, **(β)** η ύπαρξη αυτών των ερμηνειών να καθιστά το συνολικό νόημα της πρότασης, στην οποία εμφανίζεται, αμφίσημο και **(γ)** το άτομο που έκανε τη δήλωση να μπορεί να διασαφηνίσει το σκοπούμενο νόημα, αν ερωτηθεί, τότε η αμφίσημη λέξη θεωρείται διασαφηνίσιμη. Η διασαφηνίσιμη αμφισημία προκαλείται κατά κανόνα από τη χρήση μιας ασαφούς αναφοράς.

Αξιοποιώντας τη διάκριση που προτείνουν οι Ainley & Margolinas (2015) ανάμεσα σε αναστοχαστικό και αναδυόμενο (reflective vs emergent task design) για τον σχεδιασμό των μαθηματικών έργων, προτείνουμε μία αντίστοιχη διάκριση ως προς τη διαχείριση των αμφισημιών από τον εκπαιδευτικό. Με τον όρο «αναστοχαστικό σχεδιασμό για την αμφισημία» εννοούμε εκείνες τις γλωσσικές αμφισημίες, που ο εκπαιδευτικός προβλέπει πριν το μάθημα ότι μπορούν να αποτελέσουν εμπόδιο στην προφορική επικοινωνία των μαθητών μαζί με τις σχετικές ενέργειες θεματοποίησης και διασάφησης, ενώ με τον «αναδυόμενο σχεδιασμό για την αμφισημία» αναφερόμαστε στις ενέργειες, στις οποίες προβαίνει ο εκπαιδευτικός κατά την in situ διαπίστωση των εμποδίων ή των ευκαιριών, που προέρχονται από αμφισημίες, που δεν έχουν προβλεφθεί ή επισημανθεί από τον ίδιο. Και οι δύο αυτοί όροι αφορούν και εντάσσονται σε μία γενικότερη βιβλιογραφική τάση συμπερίληψης της οπτικής των μαθητών για το σχεδιασμό και υλοποίηση έργων και ενορχήστρωσης συναφών συζητήσεων. Υποστηρίζουμε, σε συμφωνία με τους Johnson et al. (2017), ότι η βελτίωση του αναστοχαστικού συντελεί και σε βελτίωση του αναδυόμενου σχεδιασμού, υπό τη μορφή της καλλιέργειας της ετοιμότητας του εκπαιδευτικού να αναγνωρίζει εγκαίρως τις αμφισημίες και να τις χειρίζεται κατά παιδαγωγικά ισχυρούς τρόπους.

Παράλληλα, η ασύμμετρη σχέση εκπαιδευτικού-μαθητών μπορεί να διαδραματίσει και αυτή έναν ρόλο, καθώς οι αμφισημίες και οι απορρέουσες παρανοήσεις δε συμβαίνουν εν κενώ, αλλά μέσα σε ένα πλαίσιο διδασκαλίας. Οι Amit & Fried (2005) υποστηρίζουν ότι μία σχέση εξουσίας υπάρχει όταν ένα άτομο (ή ομάδα ατόμων) τείνει να αποδέχεται, να υποτάσσεται, να ακολουθεί χωρίς αμφισβήτηση, τις δηλώσεις ή τις διαταγές ενός άλλου ατόμου (ή ομάδας ατόμων ή κάθε άλλης οντότητας ικανής να παράγει δηλώσεις ή διαταγές). Οι ίδιοι υπογραμμίζουν ότι η θέση της μαθηματικής αυθεντίας μέσα στη μαθηματική τάξη έχει συνέπειες στις παρεχόμενες στους μαθητές ευκαιρίες δημιουργίας νοήματος. Οι σχέσεις εξουσίας σε ένα μάθημα Μαθηματικών δεν γίνονται πάντοτε ρητές ή ορατές και μπορούν να λάβουν λεπτές αποχρώσεις ή διαφορετικές μορφές (Σακονίδης, 2017). Η συνεργατική μάθηση είναι μια διδακτική επιλογή, που, τουλάχιστον θεωρητικά, συνάδει με την προώθηση ενός αντι-αυταρχικού μοντέλου ως προς τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Langer-Osuna, 2017). Ως τέτοια αποτελεί και μια πρώτης τάξεως ευκαιρία για τη συνειδητοποίηση των αδιόρατων σχέσεων εξουσίας, όπως αυτές αναδύονται στην προφορική επικοινωνία μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα μελέτη, εστιάζουμε σε ένα μάθημα Άλγεβρας που διεξάγεται από έναν εκπαιδευτικό Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε Ιδιωτικό σχολείο του νομού Αττικής. Διδάσκει πάνω από 10 χρόνια και είναι ταυτόχρονα και ο συγγραφέας της παρούσας ερευνητικής εργασίας. Η συγκεκριμένη τάξη που μελετήσαμε είναι η Γ΄ Γυμνασίου. Ερευνητικό πλαίσιο της παρούσας μελέτης αποτέλεσε το μάθημα της Μαθηματικής Σκέψης, μία ώρα που διεξάγεται επιπρόσθετα στις 4 ώρες του εβδομαδιαίου ωρολογίου προγράμματος. Οι μαθητές και οι μαθήτριες Γ΄ Γυμνασίου είχαν χωριστεί σε τριμελείς ομάδες σύμφωνα με τη δική τους αυθόρμητη προτίμηση. Η επιλογή του πλήθους των μαθητών ανά ομάδα τεκμηριώνεται επαρκώς από τον Liljedahl (2021) ως μία ισορροπία ανάμεσα στην ύπαρξη κοινού εδάφους (redundancy) και την διαφοροποίηση/ποικιλία (diversity). Ο εκπαιδευτικός καθόρισε το εν λόγω πλήθος και οι μαθητές τη σύνθεση των ομάδων. Οι δύο ομάδες της ερευνητικής εστίασης αποτελούνταν από άτομα του ίδιου φύλου, η Α΄ ομάδα από μαθήτριες και η Β΄ από μαθητές. Η διαφοροποίηση με βάση το φύλο, ωστόσο, δε θα αξιοποιηθεί ερευνητικά στην παρούσα εργασία.

Σύντομη περιγραφή μαθήματος

Το μάθημα της Μαθηματικής Σκέψης στοχεύει στην καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών και, ως εκ τούτου, κάποιες φορές η επιλογή των ομάδων αφήνεται από τον εκπαιδευτικό σκόπιμα στους μαθητές, οι οποίοι ομαδοποιούνται αυτοβούλως με κοινωνικά κριτήρια. Αυτή είναι μια συνειδητή επιλογή του εκπαιδευτικού, παρόλο που στη σχετική βιβλιογραφία διατυπώνονται σοβαρά και εύλογα επιχειρήματα εναντίον μιας τέτοιας επιλογής (Liljedahl 2021, Alexander 2020). Στο πλαίσιο της Μαθηματικής Σκέψης οι εκπαιδευτικοί έχουν την ευχέρεια να προτείνουν στους μαθητές έργα εκτός ΑΠΣ. Ερευνητικό εργαλείο της παρούσας έρευνας ήταν το μαθηματικό έργο, που ο εκπαιδευτικός παρουσίασε στους μαθητές. Το έργο (βλ. παράρτημα) αφορά στη ανακάλυψη του αλγεβρικού μοτίβου που διέπει τη συμπεριφορά των τετραγώνων των διψηφίων που λήγουν σε 5, τη λεκτική διατύπωσή του και στη συνέχεια τη διατύπωση της σχετικής αλγεβρικής εικασίας και την απόδειξή της. [1] Το εν λόγω έργο επελέγη με στόχο την επανειλημμένη και αμφίδρομη μετακίνηση ανάμεσα σε λεκτικό και συμβολικό/αλγεβρικό επίπεδο. Το μάθημα κατά κανόνα διεξάγεται ομαδοσυνεργατικά με στόχο να δοθούν στους μαθητές ευκαιρίες για διατύπωση της σκέψης τους και για εμπλοκή τους με τη σκέψη των άλλων.

Ερευνητικά εργαλεία και ανάλυση ερευνητικών δεδομένων

Ερευνητικά εργαλεία της παρούσας έρευνας αποτέλεσαν το μαθηματικό έργο, η μαγνητοφώνηση του μαθήματος και οι σημειώσεις πεδίου. Η ερευνητική εστίαση στις αμφισημίες του προφορικού λόγου δεν ήταν a priori καθορισμένη, αλλά καθοδηγήθηκε από την επισκόπηση των ερευνητικών δεδομένων (data driven). Η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων ακολούθησε τα εξής στάδια: α) απομαγνητοφώνηση μαθήματος, β) εντοπισμός επεισοδίων, όπου αναδύονται αμφισημίες. Ως επεισόδιο ορίζουμε το τμήμα εκείνο του διαλόγου είτε μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών είτε μεταξύ μαθητών, το οποίο επιτρέπει να κατανοηθεί το πλαίσιο ανάδυσης της αμφισημίας και η σύγχυση που αυτή προκαλεί.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Και στις δύο ομάδες παρουσιάστηκαν επεισόδια με αντίστοιχες περιπτώσεις αμφισημίας, που εμπίπτουν στην κατηγορία της διασαφηνίσιμης αμφισημίας, εφόσον πληρούνται οι τρεις αναγκαίες προϋποθέσεις κατά τους Peterson et al. (2020). Ωστόσο, αξίζει να επισημανθεί ότι, ενώ οι εν λόγω ερευνητές επιστρατεύουν τον όρο αυτό για να περιγράψουν την ασάφεια ως

προς την αναφορά στο λόγο των μαθητών, στα παρακάτω επεισόδια αναδεικνύεται έντονα ότι η αμφισημία συμβαίνει στην επικοινωνία με κατεύθυνση από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές.

<u>1ο μέρος Επεισοδίου 1</u>

Εκπαιδευτικός: Για παραγοντοποίησέ το. άλφα τετράγωνο και άλφα. Για βοηθήστε όλες!

Άννα: Εεεε, άλφα τετράγωνο συν άλφα. Α! άλφα επί άλφα συν 1.

Μαίρη: Σε παρένθεση.

Εκπαιδευτικός: Δηλαδή, ουσιαστικά είναι ο άλφα… ο άλφα είναι ποιος; Πώς θα τον περιγράψετε; Είναι το ψηφίο των…;

Άννα: …εκατοντάδων.

Εκπαιδευτικός: Πες το σωστά. Εκατοντάδες είναι εδώ πέρα;

Μαίρη: …δεκάδων.

Άννα: Α, στο *επόμενο(1)* είναι στο ψηφίο των εκατοντάδων.

Εκπαιδευτικός: Αν ο άλφα είναι το ψηφίο των δεκάδων, ποιος είναι ο άλφα και 1;

Μαίρη: Ο… ο εαυτός του αυξημένος κατά 1.

Εκπαιδευτικός: Μπράβο, ο *επόμενος(3)*. Θυμάστε τι σημαίνει ο *επόμενος(3)*; Ε; Ποιος είναι ο *επόμενος(3)* του 3; Το 4. Ποιος είναι ο *επόμενος(3)* του 5; Το 6. Πάρα πολύ ωραία, πολύ ωραία πάτε. Έχετε φτάσει λοιπόν… Προσπαθήστε να γράψετε λεκτικά… να το γράψετε. Όταν έχεις να υψώσεις στο τετράγωνο έναν διψήφιο που λήγει σε 5 τι πρέπει να κάνεις… σαν μία πρακτική οδηγία, κάνε αυτό… για προσπαθήστε να το κάνετε.

Το 1ο μέρος του επεισοδίου 1 γίνεται παρουσία του εκπαιδευτικού, ενώ το 2ο μέρος συμβαίνει, ενώ ο εκπαιδευτικός έχει απομακρυνθεί και συνομιλεί με άλλη ομάδα. Η ομάδα Α΄ από πολύ νωρίς, αντί του προσδοκώμενου $\alpha(\alpha+1)$ διατυπώνει την ισοδύναμη αλγεβρική παράσταση $\alpha^2+\alpha$ για να εκφράσουν το μοτίβο για το/α ψηφίο/α των εκατοντάδων του αποτελέσματος - η Άννα [2] το πρωτοδιατυπώνει και η Μαίρη, έπειτα από διευκρινιστικές ερωτήσεις, το ελέγχει και επαληθεύει ότι ισχύει και στις επόμενες περιπτώσεις-. Ο εκπαιδευτικός βρίσκεται και ο ίδιος προ εκπλήξεως, όταν το συνειδητοποιεί: «Κοίτα να δεις! Δουλεύει!», αλλά στη συνέχεια, αφού προτρέπει τις μαθήτριες να παραγοντοποιήσουν τη συμβολική μορφή $\alpha^2+\alpha$, επιχειρεί τη σύνδεση με την σκοπούμενη μορφή$\alpha(\alpha+1)$ στη λεκτική της διατύπωση: «το γινόμενο του ψηφίου των δεκάδων με τον επόμενό του». Αν η διατύπωση του εκπαιδευτικού ήταν «με τον επόμενο φυσικό», ενδεχομένως η σύγχυση, που ακολούθησε, να είχε αποφευχθεί. Η αμφισημία της λέξης *επόμενος* (επόμενος φυσικός του ψηφίου των δεκάδων και επόμενος αριθμός στη λίστα των παρατιθέμενων τετραγώνων) εισάγει μια σύγχυση στη συζήτηση, η οποία ανακόπτει την ροή της ομάδας Α΄. (βλ. 2ο μέρος επεισοδίου 1). Στο επεισόδιο οι μαθήτριες κατά την προσπάθειά τους να διατυπώσουν λεκτικά το μοτίβο επιδίδονται σε μια ομιλία με δοκιμαστικό/πειραματικό χαρακτήρα (exploratory talk) (Barnes, 2008). Μία τέτοια ομιλία χαρακτηρίζεται από δισταγμούς ή αλλαγές κατεύθυνσης και τροποποιήσεις, στο μέτρο που ο ομιλητής στοχεύει να ξεκαθαρίσει τις δικές του σκέψεις. Αυτή είναι μια ευκαιρία, που η συγκεκριμένη, διαλογική μορφή μαθήματος προσφέρει, και που δε θα παρουσιαζόταν στα τυπικά μοτίβα αλληλεπίδρασης IRE/IRF, στα οποία κατά κανόνα αναγνωρίζονται μόνο οι ραφιναρισμένες μορφές λόγου (Alexander, 2020). Τα μοτίβα αλληλεπίδρασης IRF/IRE αναφέρονται στη βιβλιογραφία στην αρχετυπική τριμερή σχολική αλληλεπίδραση (Initiation-

Response-Feedback/Evaluation): ο εκπαιδευτικός ρωτά, ο μαθητής απαντά και ο εκπαιδευτικός αξιολογεί/δίνει ανατροφοδότηση (Alexander, 2020).

2ο μέρος Επεισοδίου 1

Άννα: Κάτσε… για κάθε τετράγωνο διψηφίου που λήγει σε 5 ισχύει ότι λήγει με το τετράγωνο του 5, 25, και αρχίζει με το τετράγωνο των δεκάδων αυξημένο κατά τον εαυτό του.

Μαίρη: Όχι… και τον *επόμενο(;)* δεν είπε;
Βασιλική: Ναι.
Άννα: Και αυτό ισχύει και για τους *επόμενους(2)*.
(Γέλια από όλη την ομάδα)
Μαίρη: Τι;! Όχι! Δεν ισχύει για τους *επόμενους(2)*, είναι ο *επόμενος(;)*.
Βασιλική: Άσε τον *επόμενο(;)*, για έναν αριθμό θα πούμε, όχι και για τους *επόμενους(2)*.
Τι λέει; Ισχύει ότι… λήγει…
Με το τετράγωνο του 5… 25.

Πίνακας 1: Οι διαφορετικές αναφορές της λέξης *επόμενος* ως πηγή σύγχυσης στα δύο μέρη του επεισοδίου 1.

$15^2 = 225,\ 25^2 = 625, 35^2 = 1225, \ldots$

1. *επόμενος(1)* του 15 (μετά το ίσον) είναι το 225,
2. *επόμενο(2)* αριθμητικό παράδειγμα, δηλαδή η δεύτερη μετά την πρώτη ισότητα,
3. *επόμενος(3)* φυσικός του ψηφίου των δεκάδων στον αριθμό αριστερά του ίσον,
4. *επόμενος(4)* φυσικός του ψηφίου των δεκάδων/εκατοντάδων στον αριθμό δεξιά του ίσον,
5. *επόμενος(;)* ως αόριστη αναφορά ή απλώς διευκρίνιση/υπενθύμιση της λέξης του εκπαιδευτικού.

Αξίζει να επισημανθεί μία σημαντική διαφορά ανάμεσα σε δύο ομάδες περιπτώσεων του Πίνακα 1, όπου καταγράφονται όλες οι δυνατές αναφορές της λέξης επόμενος: Στις περιπτώσεις 1 και 2 ο επόμενος είναι εμπειρικά διαθέσιμος στην κατάλληλη μετακίνηση του βλέμματος του μαθητή. Αντιθέτως, στις περιπτώσεις 3 και 4 ο *επόμενος* αφορά στη δομή των φυσικών και κατά συνέπεια απαιτεί την απόσπαση και εξέταση των εν λόγω ψηφίων ως αυτόνομων οντοτήτων, καθώς και την αναπλαισίωσή τους στο σύνολο των φυσικών, που διαθέτει την ιδιότητα της διαδοχικότητας. Υπό αυτή την έννοια, η συγκεκριμένη χρήση είναι αρκετά απαιτητική και, ως εκ τούτου, είναι λιγότερο πιθανόν να γίνει κατανοητή από τους μαθητές με τον προσδοκώμενο από τον εκπαιδευτικό τρόπο.

Στο 2ο μέρος του επεισοδίου 1 φαίνεται να αναδύεται η αυθεντία του εκπαιδευτικού ως εμπόδιο για την πρόοδο της ομάδας, στο μέτρο που η Μαίρη προβάλλει την ανάγκη ευθυγράμμισης με τη φράση του, χωρίς όμως να έχει γίνει απολύτως κατανοητή η εννοιολογική σύνδεση ανάμεσα στις δύο ισοδύναμες μορφές (**αλγεβρικά:** $\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1)$, **λεκτικά:** το τετράγωνο του

ψηφίου των δεκάδων αυξημένο κατά τον εαυτό του = το ψηφίο των δεκάδων επί τον επόμενό του φυσικό). Η επίμονη προσκόλληση του εκπαιδευτικού στη χρήση της λέξης *επόμενος* στη λεκτική διατύπωση των μαθητών φαίνεται να αποτελεί και αυτή μέρος του προβλήματος. Δηλαδή, σε αυτό το σημείο η ομάδα φαίνεται προς στιγμήν να απομακρύνεται από τη δική της επίλυση και επιχειρεί να οικειοποιηθεί τη φωνή του εκπαιδευτικού ως εκπροσώπου του θεσμικού λόγου, χωρίς όμως να παρακινείται από μία δική της εκφραστική ανάγκη. Η συλλογική ροή εμφανίζεται αφενός να εξελίσσεται με ραγδαίο κατά διαστήματα ρυθμό, αφετέρου να είναι εύθραυστη, καθότι υπόκειται σε αποπροσανατολιστικές παρεμβάσεις.

Επεισόδιο 2

Εκπαιδευτικός: Άρα τα ψηφία πριν από το 25 προκύπτουν πώς; Αν πάρεις το ψηφίο των δεκάδων και το… Αυτό που μου είπες, δηλαδή: 1 επί 2
Ανδρέας: Το πολλαπλασιάσω.
Εκπαιδευτικός: Με ποιον;
Ανδρέας: Ξεκινώντας από το 2.
Εκπαιδευτικός: Ξεκινάς από το 1. Από το 1 πώς προκύπτει το 2;
Ανδρέας: Επί 2.
Εκπαιδευτικός: Από το 2 πώς προκύπτει το 6;
Πάνος: Επί 3. Βγαίνει. επί 3, επί 4, επί 5, επί 6 και βγαίνει.
Εκπαιδευτικός: Ναι, αλλά για το *κάθε* ψηφίο πρέπει να μου πεις τι κάνεις. Πολλαπλασιάζεις με ποιον τελικά; Για αυτόν τι κάνεις; Πολλαπλασιάζεις επί; Κάθε έναν τον πολλαπλασιάζεις με τι; Πείτε το! Πείτε το καλά.
Πάνος: Πες το καλά.
Ανδρέας: Πες το εσύ καλά ρε.

Στην ομάδα Β΄ (βλ. επεισόδιο 2) μία παρόμοια σύγχυση επικρατεί όταν ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν λεκτικά το μοτίβο, αλλά η επικοινωνία μεταξύ τους φαίνεται να παγιδεύεται στην αμφισημία της λέξης *κάθε*. Το *κάθε* του εκπαιδευτικού στοχεύει στη *διατύπωση του γενικού κανόνα* (δηλαδή ότι το ψηφίο των δεκάδων πολλαπλασιάζεται επί τον επόμενό του φυσικό), ενώ οι μαθητές φαίνονται να το αντιλαμβάνονται ως *εξαντλητικό των επιμέρους περιπτώσεων* (για το 1 επί 2, για το 2 επί 3, κλπ.) και τις οποίες -ο Πάνος και ο Ανδρέας- κατ' επανάληψη αναφέρουν. Στο τέλος της μαθηματικής τους επικοινωνίας και λίγο πριν ο εκπαιδευτικός απομακρυνθεί για να συζητήσει με άλλη ομάδα μοιάζουν να μένουν με την απορία γιατί ο εκπαιδευτικός επιμένει να το πουν καλά, ενώ το έχουν ήδη πει. Τελικά, σε αντίθεση με την ομάδα Α΄, η ομάδα Β΄ δεν καταφέρνει να μεταβεί από τη λειτουργική στη δομική θεώρηση του μοτίβου και στη συνέχεια του μαθήματος επιδίδεται σε συζήτηση εκτός έργου. Αυτή, σύμφωνα με την ανάλυσή μας, είναι μια χαμένη ευκαιρία για τον εκπαιδευτικό, καθώς σε περίπτωση που η έγκαιρη αναγνώριση της αμφισημίας συνδυαζόταν με τον παιδαγωγικά κατάλληλο χειρισμό της θα μπορούσε να προωθήσει την περαιτέρω συνεργασία των μαθητών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εξέταση των συνομιλιών αποκαλύπτει τα μαθηματικά ως ένα πεδίο νοήματος που είναι διαρκώς υπό διαπραγμάτευση μεταξύ των συμμετεχόντων, κάτι που βρίσκεται σε ένταση με την αντίληψη των μαθηματικών ως ενός μονολογικού, παγιωμένου συστήματος γνώσης. Θεωρούμε ότι και στα δύο επεισόδια η ούτως ή άλλως απαιτητική πορεία των δύο ομάδων προς την γενίκευση δυσχεραίνεται από αμφισημίες που εντοπίζονται όχι αποκλειστικά στα λεγόμενα των μαθητών, αλλά στο πώς οι μαθητές επιχειρούν να κατανοήσουν και να οικειοποιηθούν τον λόγο του εκπαιδευτικού για να ανταποκριθούν στην απαίτησή του. Ενώ η

ομάδα Α΄ έχει βρει και εκφράσει λεκτικά το μοτίβο με τον δικό της τρόπο, δε μπορεί να βρει την απαιτούμενη από τον εκπαιδευτικό λεκτική διατύπωση. Ωστόσο, η προσωρινή δυσκολία ξεπερνιέται τελικά μέσα από την επιμονή και περαιτέρω εμπλοκή της ομάδας στο έργο. Στην ομάδα Β΄ η αμφισημία της φράσης *για κάθε* οδήγησε τους μαθητές σε αδιέξοδο, καθώς δεν τους δόθηκαν αρκετές ευκαιρίες να κατανοήσουν την απάντησή τους ως *ανεπαρκή από αλγεβρική σκοπιά*.

Η παρούσα εργασία θεωρούμε ότι συνεισφέρει στην προαγωγή της επιστημονικής κατανόησης για τον σύνθετο ρόλο των αμφισημιών καθημερινών φράσεων στον προφορικό μαθηματικό λόγο και μπορεί να προωθήσει τόσο τον αναστοχαστικό -πριν το μάθημα-, όσο και τον αναδυόμενο -κατά τη διάρκεια του μαθήματος- σχεδιασμό ενός εκπαιδευτικού για τις αμφισημίες. Πράγματι, ο εκπαιδευτικός του συγκεκριμένου μαθήματος, μετά την ακρόαση των ηχογραφημένων συνομιλιών, επανήλθε στα συγκεκριμένα θέματα και συζήτησε με τους μαθητές για τις συγκεκριμένες αμφισημίες, που δυσχέραναν την επικοινωνία τους κατά την επίλυση του έργου, αξιοποιώντας τα εμπόδια που παρουσιάστηκαν ως μαθησιακή ευκαιρία. Ειδικά για τη φράση «ο επόμενος», εστίασε στις δυνατότητες παρανόησης μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο του έργου με τις πολλαπλές δυνατότητες κατανόησης της αναφοράς της. Για τη φράση «για κάθε» έκανε μια διάκριση ανάμεσα στο πώς κατανόησαν τη φράση οι μαθητές (επιμέρους παραδείγματα) και το πώς ο ίδιος ανέμενε να την κατανοήσουν (γενικός κανόνας), ενώ έδωσε και άλλα προσιτά παραδείγματα γενίκευσης. Η εμπειρία μας έρχεται σε συμφωνία με τους Peterson et al. (2020) ως προς τα παιδαγωγικά πλεονεκτήματα της διασαφήνισης: 1. Η παρέμβαση του εκπαιδευτικού επιτρέπει στους μαθητές να εντοπίσουν όψεις της επικοινωνίας που είναι προβληματικές, παρέχοντάς τους ευκαιρίες να διασαφηνίσουν τις ιδέες τους. 2. Η ίδια παρέμβαση υποστηρίζει την περαιτέρω εμπλοκή των μαθητών της τάξης. 3. Με τις ενέργειες του εκπαιδευτικού για τη διασαφήνιση της αμφισημίας νομιμοποιούνται και ενθαρρύνονται οι προσπάθειες των μαθητών να εμπλακούν με τη σκέψη των άλλων και να δώσουν έμφαση στη σαφήνεια των διατυπώσεών τους. 4. Οι διασαφητικές ενέργειες εκπέμπουν το μήνυμα ότι ο εκπαιδευτικός έχει ακούσει τον μαθητή, επιθυμεί να κατανοήσει το νόημα των λεγομένων του και αποδίδει αξία στην τάξη ως ολότητα, που συμμετέχει στη διαδικασία νοηματοδότησης. Αυτά τα μηνύματα παίζουν ρόλο στην ενίσχυση της αυτοπεποίθησης των μαθητών ως προς την ικανότητά τους να προσφέρουν αποδεκτές και χρήσιμες μαθηματικές ιδέες.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

[1] Η δευτερεύουσα αναφορική πρόταση «που λήγουν σε 5» προκαλεί αμφισημία ως προς τον όρο αναφοράς: είναι οι διψήφιοι που λήγουν σε 5 ή τα τετράγωνα των διψηφίων; Η αμφισημία δεν προκαλεί προβλήματα συνεννόησης, εφόσον το έργο συνοδεύεται με τη γραπτή παράθεση των τετραγώνων των διψηφίων.

[2] Όλα τα ονόματα των μαθητών/-ριών είναι ψευδώνυμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainley, J., & Margolinas, C. (2015). Accounting for student perspectives in task design. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 115–142). Switzerland: Springer International Publishing.

Alexander, R. (2020). *A dialogic teaching companion*. Routledge.

Amit, M., & Fried, M. N. (2005). Authority and authority relations in mathematics education: A view from an 8th grade classroom. *Educational studies in Mathematics, 58*, 145-168.

Barnes, D. (2008). Exploratory talk for learning. *Exploring talk in school*, 1-15.

Barnett-Clarke, C., & Ramirez, A. (2004). Language pitfalls and pathways to mathematics. In R. N. Rubenstein & G. W. Bright (Eds.), Perspectives on the teaching of mathematics (pp. 56–66). Reston, VA: NCTM.

Barwell, R. (2003). Ambiguity in mathematics classroom discourse. In J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British society for research into learning mathematics* (Vol. 23, pp. 1–6). Manchester, England: University of Manchester.

Foster, C. (2011). Productive ambiguity in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 31, 3–7.

Isaacson, M. D., Srinivasan, S & Lloyd, L. L. (2012). Ambiguity and inconsistencies in mathematics spoken in the classroom: The need for teacher training and rules for communication of mathematics. Journal of Science Education for Students with Disabilities, 15, 41-45.

Johnson, H. L., Coles, A., & Clarke, D. (2017). Mathematical tasks and the student: navigating "tensions of intentions" between designers, teachers, and students. *ZDM*, *49*(6), 813–822.

Καμηλάκη, Μ. & Κοτσαλίδης, Φ. (2017). Λέξεις με… μαθηματική ακρίβεια: Σχολική γλώσσα και κριτικός γραμματισμός στους μαθηματικούς ορισμούς του Γυμνασίου, *Μελέτες για την ελληνική γλώσσα* 37 σελ. 327-340.

Kercher, A., Bergman, A. M., & Zazkis, R. (2022). Definitional ambiguity: a case of continuous function.

Langer-Osuna, J. M. (2017). Authority, identity, and collaborative mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(3), 237-247.

Liljedahl, P. (2021). Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12:14 teaching practices for enhancing learning Thousand Oaks, *Corwin*, California.

Peterson, B. E., Leatham, K. R., Merrill, L. M., & Van Zoest, L. R., Stockero, S. L. (2020). Clarifiable Ambiguity in Classroom Mathematics Discourse, *Investigations in Mathematics Learning*, 12:1, 28-37, DOI: 10.1080/19477503.2019.1619148

Rowland, T. (1999). Pronouns in mathematics talk: Power, vagueness and generalisation. *For the Learning of Mathematics*, 19(2), 19–26.

Rowland, T. (2000). The pragmatics of mathematics education: Vagueness in mathematical discourse. London: Falmer Press.

Σακονίδης Χ. (2017). Η μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών της μουσουλμανικής μειονότητας στη Θράκη: Κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παράμετροι. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (10), 27–54. https://doi.org/10.12681/enedim.15217

Παράρτημα:

<u>Το έργο:</u> Να ανακαλύψετε το μοτίβο για τα τετράγωνα των διψήφιων που λήγουν σε 5. Να διατυπώσετε λεκτικά μια εικασία, να την εκφράσετε συμβολικά και να την αποδείξετε.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΝΤΑΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΟΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δημήτρης Διαμαντίδης[1], Χρόνης Κυνηγός[1], Χρήστος Μάλλιαρης

[1]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Φιλοσοφική Σχολή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

dimitrd@eds.uoa.gr , kynigos@eds.uoa.gr , chrismalliaris@gmail.com

Αυτή η εργασία εστιάζει σε μια ομάδα εκπαιδευτικών Μαθηματικών που εργάζονται στο ίδιο Γυμνάσιο και επιχείρησαν να αξιοποιήσουν ένα ψηφιακό εργαλείο στη διδασκαλία των Πιθανοτήτων. Τροποποίησαν το ψηφιακό εργαλείο, σχεδίασαν και υλοποίησαν διδασκαλίες με αυτό και συζήτησαν αναστοχαστικά για αυτές. Στόχος της έρευνας ήταν να εντοπίσουμε εντάσεις, δηλαδή ενέργειές που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε ένα αποτέλεσμα (ψηφιακό μέσο, διδακτικό σχεδιασμό) με αντιφάσεις. Από την σκοπιά της θεωρίας δραστηριότητας, τέτοιες εντάσεις μπορούν να είναι ευνοϊκό περιβάλλον για την αλλαγή των πρακτικών των εκπαιδευτικών. Εδώ εστιάζουμε σε εντάσεις σε σχέση με τον ρόλο των επίσημων οδηγιών διδασκαλίας για τα Μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα έρευνα είναι μέρος μιας ευρύτερης μελέτης των ενεργειών των εκπαιδευτικών Μαθηματικών που συνεργάζονται σχεδιάζοντας ή διασκευάζοντας ψηφιακά εργαλεία (ΨΕ), τα οποία σκοπεύουν να αξιοποιήσουν στις διδασκαλίες τους. Στόχος μας ήταν να αξιοποιήσουμε την διαδικασία του σχεδιασμού και των αποτελεσμάτων, σαν έναν «φακό» για να περιγράψουμε πτυχές αυτών των ενεργειών, που ευνοούν αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές τους. Μια πτυχή στην οποία εστιάζουμε εδώ είναι η εξής: Ποιος είναι ο ρόλος κειμένων όπως οι οδηγίες διδασκαλίας (ΟΔ) σε μια τέτοια συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών; Τα ευρήματα που παρουσιάζουμε προέκυψαν από την ανάλυση της αλληλεπίδρασης των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών, τις διδασκαλίες και τη συζήτησή τους. Αν και η έρευνα γύρω από τις πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών σε σύνδεση με τη χρήση των ψηφιακών μέσων για τη διδασκαλία προσφέρει στους ερευνητές μια σειρά θεωρητικών προσεγγίσεων (Clark-Wilson, Robutti, Sinclair, et al., 2022), για την ανάλυση και την ερμηνεία των δεδομένων που παράχθηκαν από την παρέμβασή μας αξιοποιήσαμε τη θεωρία της πολιτισμικής-ιστορικής δραστηριότητας (CHAT) (Engeström, 2001), βλέποντας εξ αρχής την αλλαγή στις πρακτικές των εκπαιδευτικών

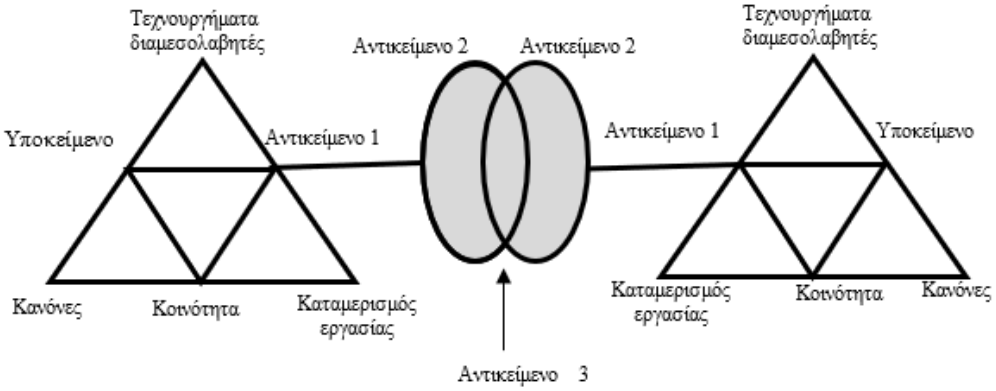
σαν το αποτέλεσμα διαλεκτικού τύπου αντιφάσεων που μπορούν να εμφανιστούν σε οποιαδήποτε πτυχή της εκπαιδευτικής δραστηριότητας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μελέτη των εκπαιδευτικών Μαθηματικών ως σχεδιαστών διδακτικών παρεμβάσεων, με την αξιοποίηση ψηφιακών ή μη μέσων έχει σημαντική συμβολή στην κατανόηση των διδακτικών ενεργειών τους, συχνά με σημείο αναφοράς τις απόψεις τους για τα προγράμματα σπουδών (Remillard, 2018). Επιπλέον, οι μελέτες για τους εκπαιδευτικούς ως σχεδιαστές ψηφιακών μαθησιακών αντικειμένων, είτε τα χρησιμοποιούν στη διδασκαλία είτε όχι, κάνουν πιο σαφές το είδος της γνώσης που αυτοί αξιοποιούν ως επαγγελματίες (Laurillard, 2018). Μιλώντας για γνώση και για διδακτικές ενέργειες του εκπαιδευτικού ως σχεδιαστή, αναδεικνύεται το εξής κοινό στοιχείο: ο εκπαιδευτικός προσεγγίζεται ως ο επαγγελματίας που μαθαίνει να δημιουργεί ευκαιρίες μάθησης. Ωστόσο, στο σχολείο οι εκπαιδευτικοί μπορούν να υιοθετήσουν και άλλους, υβριδικούς ρόλους, αλληλεπιδρώντας με το σχολικό περιβάλλον, με πολλούς τρόπους: ως συνάδελφοι, ως συνεργάτες, ως υπάλληλοι κτλ. Δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί συν-σχεδιάζουν -ακόμα και άδηλα- εκπαιδευτικό υλικό (Laurillard, 2018) είναι εύλογο να αναζητήσουμε ένα παράθυρο στην κατανόηση των ενεργειών τους μέσα από τη μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ τους, η οποία συμβαίνει με στόχο τον συν-σχεδιασμό, αλλά κοιτώντας και τους άλλους (υβριδικούς) ρόλους που αυτοί έχουν. Άλλωστε, σε προηγούμενη εργασία μας μελετήσαμε έναν εκπαιδευτικό Μαθηματικών ως συν-σχεδιαστή εκπαιδευτικού υλικού σε συνεργασία με μαθητές (Diamantidis, et al., 2019), όπου η πολυπλοκότητα του σχεδιασμού ως δραστηριότητας ήταν εμφανής. Ο εκπαιδευτικός έλαβε αποφάσεις που δεν σχετίζονταν μόνο με το περιεχόμενο, αλλά και με κοινωνικές παραμέτρους προσπαθώντας να αυξήσει την μαθηματική πρόκληση για τα παιδιά. Στην παρούσα μελέτη στοχεύσαμε να κατανοήσουμε ολιστικά και σε βάθος πτυχές των ενεργειών των εκπαιδευτικών που συνεργάστηκαν εστιάζοντας στην αξιοποίηση των ΟΔ. Πέρα από τα σχήματα χρήσης των ΟΔ, ώστε να τις αξιοποιήσουν διδακτικά και εκπαιδευτικά σε ΨΕ για τα Μαθηματικά, αναλύσαμε τον ρόλο τους στο σχολικό περιβάλλον και τους κανόνες του ή πιθανά διλήμματα αξιοποίησης που προέκυψαν. Χρησιμοποιώντας τη Θεωρία Δραστηριότητας τρίτης γενιάς (ΘΔ) (Engeström, 2001) αποκτήσαμε μια πιο λεπτομερή άποψη αυτώ των ζητημάτων (εικόνα 1).

Στην περίπτωσή μας η δραστηριότητα ήταν ο σχεδιασμός παρεμβάσεων με ψηφιακά μέσα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (σχεδιασμός/διδασκαλία) και περιγράφεται από το «σύστημα δραστηριότητας» (ΣΔ) της εικόνας 1: Τα υποκείμενα ήταν οι εκπαιδευτικοί, ενώ οι κανόνες και η κοινότητα αναφέρονται στο σχολικό

περιβάλλον, καθώς και ο καταμερισμός εργασίας (π.χ., οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διδάσκουν και οι μαθητές να κάνουν τις εργασίες τους κτλ.). Το αντικείμενο 1 περιγράφεται από τον στόχο της δραστηριότητας, ενώ το αντικείμενο 2 ήταν το αποτέλεσμα της δραστηριότητας (π.χ., το ψηφιακό εργαλείο που σχεδιάστηκε, το μάθημα που έγινε από έναν εκπαιδευτικό). Εφόσον διαφορετικοί εκπαιδευτικοί ασχολήθηκαν με μια παρόμοια δραστηριότητα (δηλαδή σχεδίαση/διδασκαλία), τότε το αντικείμενο 2 ήταν διαφορετικό ανά εκπαιδευτικό, γιατί μπορεί να υπήρχαν διαφορετικά κίνητρα (π.χ., διαφορετικοί διδακτικοί στόχοι) και να οδήγησαν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Το αντικείμενο 3 είναι μια συνθετική περιγραφή, όλων των αντικειμένων 2 παρομοίων δραστηριοτήτων, όχι μόνο αυτών της έρευνας, αλλά ευρύτερη.



Εικόνα 1: Το Σύστημα Δραστηριότητας (ΣΔ) (Engeström, 2001).

Στο πλαίσιο της ΘΔ, μια ενδεχόμενη αλλαγή στη δραστηριότητα ευνοείται όταν στις ενέργειες του υποκειμένου εντοπίζονται εντάσεις, δηλαδή υποδηλώνονται ασυμφωνίες οι οποίες μπορούν να εξελιχθούν σε αντιφάσεις, ανάμεσα στα στοιχεία του ΣΔ. Για παράδειγμα, στον συν-σχεδιασμό, οι ενέργειες ενός εκπαιδευτικού να σχεδιάσει μια δραστηριότητα απαιτητική σε χρόνο ενασχόλησης των παιδιών και ενός άλλου να την περιορίσει σύμφωνα με τις διαθέσιμες διδακτικές ώρες, ενέχουν ένταση, η οποία γίνεται ορατή όταν προσπαθούμε να περιγράψουμε αυτό που είπαμε «αντικείμενο 2», της δραστηριότητας. Εξειδικεύοντας το ερώτημα της έρευνας θα λέγαμε: Πώς περιγράφονται οι εντάσεις που σχετίζονται με τις ΟΔ, στις ενέργειες των εκπαιδευτικών Μαθηματικών που συνεργάστηκαν για να διασκευάσουν και να αξιοποιήσουν ΨΕ στη διδασκαλία;

Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Για την έρευνα τρεις εκπαιδευτικοί Μαθηματικών (Ε1, Ε2 και Ε3) ενός Γυμνασίου στην Αθήνα διασκεύασαν «μικρο-πειράματα» (μ-π), δηλαδή ψηφιακά δομήματα που προσομοιώνουν τη διάταξη πειραμάτων εμπεριέχοντας μια πρόκληση και προκαλούν τα παιδιά να το χρησιμοποιήσουν και να εμπλακούν σε διερεύνηση (Kynigos & Grizioti, 2018). Στην εργασία εστιάζουμε στην επιλογή ενός προσομοιωτή του στριψίματος συνηθισμένου κέρματος (εικόνα 2). Με αυτόν σχεδίασαν μαθήματα για τη διδασκαλία της πιθανότητας. Ως προς τα μαθησιακά

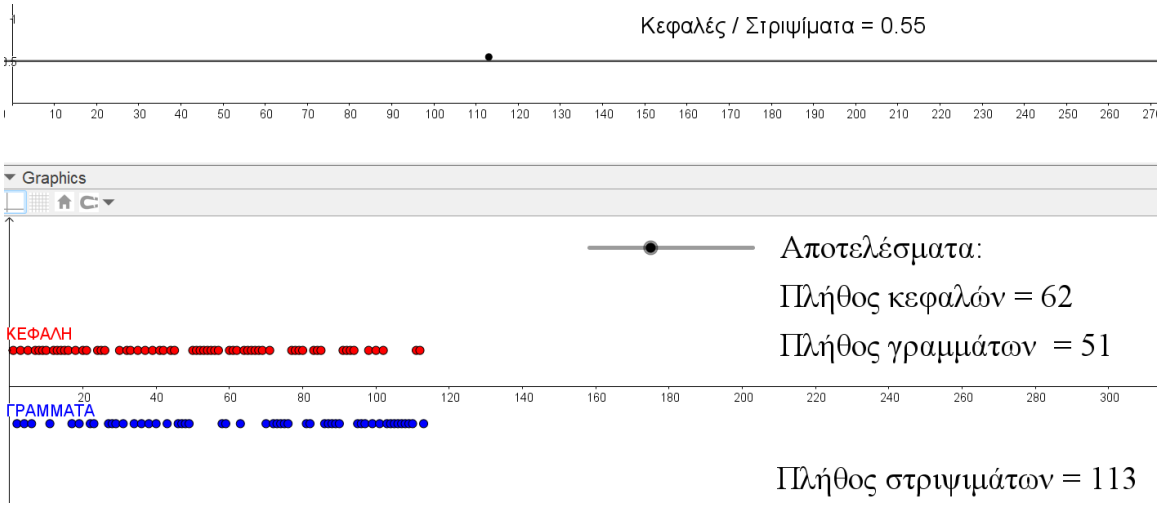
αποτελέσματα -σύμφωνα με το ΠΣ- οι μαθητές/τριες αναμενόταν να χρησιμοποιούν τη θεωρητική πιθανότητα για να λύνουν προβλήματα και να τη συγκρίνουν με τα αποτελέσματα των αντίστοιχων πειραμάτων τύχης. Τα αποτελέσματα της έρευνας αντιστοιχούν στον έβδομο από τους οκτώ κύκλους σχεδιασμού, στους οποίους συμμετείχαν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια της μελέτης. Σε κάθε κύκλο επέλεξαν ένα μ-π από το «Φωτόδεντρο» (https://photodentro.edu.gr/lor/) ή άλλη πηγή και συζήτησαν για το πώς θα μπορούσαν να το αξιοποιήσουν. Έτσι, το επανασχεδίασαν, παράγοντας μία ή περισσότερες διαφορετικές εκδόσεις και τις χρησιμοποίησαν στα μαθήματά τους. Σε κάθε μάθημα, ένας είχε το ρόλο του διδάσκοντος, ενώ οι άλλοι συμμετείχαν και παρακολούθησαν το μάθημα κρατώντας σημειώσεις. Ένας από αυτούς ήταν μέλος της ερευνητικής ομάδας. Μετά από κάθε μάθημα συζητούσαν τις παρατηρήσεις τους. Για την ευρύτερη μελέτη υιοθετήσαμε μεθόδους έρευνας σχεδιασμού (Bakker, 2018) κάνοντας τροποποιήσεις μετά από κάθε κύκλο, αναθεωρώντας τις αρχές σχεδιασμού με τις οποίες ξεκινήσαμε. Η βασική αρχή σχεδιασμού στην αρχή αυτού του κύκλου ήταν ότι «η μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των εκπαιδευτικών, ενώ διασκεύαζαν και αξιοποιούσαν ψηφιακά μέσα, θα βοηθούσαν να εντοπίσουμε εντάσεις στις ενέργειές τους». Το σώμα των δεδομένων που παρήχθη ήταν ηχογραφήσεις των διαλόγων μεταξύ των εκπαιδευτικών στη φάση του σχεδιασμού, από την τάξη στη φάση της διδασκαλίας, σημειώσεις του ερευνητή, απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις με τους συμμετέχοντες και οι ψηφιακοί πόροι που υιοθέτησαν, επανασχεδίασαν και χρησιμοποίησαν στην τάξη. Αναλύσαμε τις απομαγνητοφωνήσεις και καθορίσαμε ως μονάδα ανάλυσης τα «τμήματα νοήματος» (Strijbos, et al., 2006) με τη βοήθεια των υπόλοιπων δεδομένων. Κατηγοριοποιώντας αυτά τα τμήματα (πίνακας 1) αναζητήσαμε ενδείξεις ενστάσεων και περιγράψαμε τις παρατηρήσεις μας (Kelle, 2005).

Ε2: Καλό! Νομίζω ότι περιέγραψαν τον νόμο των μεγάλων αριθμών, κατά κάποιο τρόπο. Και απάντησαν αρκετά καλά στην ερώτησή σου.	ΟΔ3.3		
Ε2: Άρα, σχεδόν απάντησαν!			ΟΔ3.4
Ε3: Σχεδόν! Τουλάχιστον, συνειδητοποίησαν ότι όταν τα στριψίματα αυξάνονται, οι συχνότητες είναι συνήθως κοντά στο 0,5. Αλλά δεν το συνδύασαν με την τιμή της πιθανότητας.		ΟΔ2.4	

Πίνακας 1: Ενδεικτική κατηγοριοποίηση των τμημάτων νοήματος της έρευνας. Οι κατηγορίες ΟΔ3 και ΟΔ4 αναφέρονται σε διαφορετικού τύπου αξιοποίηση των ΟΔ, που ενδεχομένως δείχνουν σχετική ένταση.

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Θα παρουσιάσουμε ενδεικτικά αποσπάσματα των ευρημάτων μας και εντάσεις, που αναδείχθηκαν μεταξύ των προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών για τη χρήση του μ-π (εικόνα 2).



Εικόνα 2: Το μ-π αρχικά (κάτω) και μετά την πρώτη διασκευή (επάνω).

Ένταση μεταξύ οδηγιών διδασκαλίας και χρήσης του μ-π.

Η θέση του σημείου μεταβαλλόταν δυναμικά σύροντας τον ολισθητή (στο κάτω γράφημα), δηλαδή αλλάζοντας το πλήθος των στριψιμάτων. Η αρχική έκδοση του μ-π δεν συμπεριλάμβανε το επάνω γράφημα, το οποίο πρόσθεσαν οι εκπαιδευτικοί στη φάση του σχεδιασμού:

096 Ε1: Θα πρέπει να προσθέσουμε [στο πάνω γράφημα] ένα σημείο που να δείχνει τη συχνότητα των κεφαλών, ώστε οι μαθητές, σύροντας τον ολισθητή, να δουν τη διακύμανση των αποτελεσμάτων γύρω από τη θεωρητική τιμή της πιθανότητας.

097 Ε2: Τότε, θα πρέπει να φαίνεται αυτή η τιμή […]

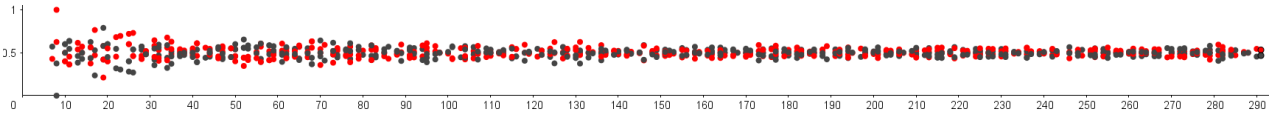
107 Ε2: Ναι, να προσθέσουμε μια οριζόντια γραμμή, y=0,5 και το ίχνος του αντίστοιχου σημείου για να αντιληφθούν ότι υπάρχει φυσική μεταβλητότητα γύρω στο 0,5.

108 Ε3: Ναι, αλλά δεν είναι αυτό το πνεύμα των ΟΔ που έχουμε! Πρέπει να μάθουν πιθανότητες. Γι' αυτό σκέφτομαι να τους ζητήσω να διερευνήσουν τη σχέση της συχνότητας με την πιθανότητα. Καλύτερα να έχουμε δύο σημεία: ένα κόκκινο για τη συχνότητα των κεφαλών και ένα μαύρο για τη συχνότητα των γραμμάτων.

109 Ε1: Εντάξει, αλλά αν είχαμε την οριζόντια γραμμή, δηλαδή τη θεωρητική πιθανότητα των «κεφαλών», οι μαθητές θα μπορούσαν να διερευνήσουν τι συμβαίνει όταν αυξάνεται ο αριθμός των κερμάτων που στρίβουμε. Κάτι σαν τον νόμο των μεγάλων αριθμών. Γιατί να μην τα ρωτήσουμε και αυτά;

110 Ε3: Πολύ φιλόδοξο, νομίζω, αλλά ας το δοκιμάσουμε. Ωστόσο, θα ήθελα και μια άλλη εκδοχή, όπως αυτή που είπα πριν. Σκέφτομαι να τους ζητήσω να περιγράψουν πώς αλλάζουν οι

συχνότητες κάθε αποτελέσματος, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των κερμάτων που στρίβουν. Μακάρι να πουν κάτι για τη διαφορά τους, να περιγράψουν πώς αλλάζει […].



Εικόνα 3: Το μ-π και πώς άλλαξε μετά την πρόταση της Ε3. Τα ίχνη του κόκκινου σημείου αντιστοιχούν στη συχνότητα των κεφαλών και του μαύρου στη συχνότητα των γραμμάτων.

Ως «συχνότητες» η Ε3 εννοεί των κεφαλών και των γραμμάτων ως προς το σύνολο των στριψιμάτων. Αυτή η συζήτηση σχετικά με τη χρήση και την αξιοποίηση του μ-π οδήγησε τους εκπαιδευτικούς σε μια νέα εκδοχή του, με βάση αυτό που πρότεινε η Ε3 σχετικά με τις ΟΔ (γραμμή 108). Το πάνω γράφημα στην εικόνα 2, αντικαταστάθηκε με ένα άλλο γράφημα (εικόνα 3). Ωστόσο ζήτησαν να είναι διαθέσιμες για χρήση στο ίδιο μ-π και οι δύο εκδόσεις, καθώς ήθελαν να συμπεριλαμβάνει όλες τις δυνατότητες. Η Ε3 χρησιμοποίησε στο μάθημα την έκδοση με δύο σημεία, κόκκινο και μαύρο (εικόνα 3), στο οποίο συμμετείχαν οι Ε1 και Ε2 ως παρατηρητές. Τα παιδιά εργάστηκαν σε ζευγάρια, στο εργαστήριο Η/Υ του σχολείου. Κάθε ζευγάρι είχε έναν υπολογιστή με το μ-π. Η πρόκληση ήταν να διερευνήσουν «πότε οι δύο συχνότητες πλησιάζουν το 0,5». Μετά το μάθημα ακολούθησε συζήτηση των εκπαιδευτικών. Στο απόσπασμα αναφερόμαστε στα παιδιά χρησιμοποιώντας τα αρχικά των κρυπτογραφημένων ονομάτων τους.

351 Ε1: Όσο για τους Μ και Ξ, φάνηκε να έβγαλαν σαφές συμπέρασμα.

352 Ε3: Ναι, είπαν ότι υπήρχε συμμετρία μεταξύ κόκκινου και μαύρου σημείου. Και ότι τα σημεία ήρθαν πιο κοντά το ένα στο άλλο και στο 0,5 όταν αυξήθηκε ο αριθμός των στριψιμάτων.

353 Ε2: Καλό! Νομίζω ότι περιέγραψαν τον νόμο των μεγάλων αριθμών, κατά κάποιο τρόπο. Και απάντησαν αρκετά καλά στην ερώτησή σου.

354 Ε3: Ή απλώς συνειδητοποίησαν ότι η διαφορά των δύο συχνοτήτων μειώνεται, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των στριψιμάτων.

355 Ε2: Άρα, σχεδόν απάντησαν!

356 Ε3: Σχεδόν! Τουλάχιστον, συνειδητοποίησαν ότι όταν τα στριψίματα αυξάνονται, οι συχνότητες είναι συνήθως κοντά στο 0,5. Αλλά δεν το συνδύασαν με την τιμή της πιθανότητας.

Ο Ε1 χρησιμοποίησε την πρώτη τροποποίηση του μ-π (εικόνα 2) για τη διδασκαλία του. Η ενορχήστρωση της τάξης ήταν σαν αυτή της Ε3, ενώ η Ε2 και η Ε3 είχαν το ρόλο των συμμετεχόντων παρατηρητών. Ο Ε1 ζήτησε από τα παιδιά να διερευνήσουν τι συνέβη όταν αυξήθηκε ο αριθμός των στριψιμάτων. Εφόσον το μάθημα του Ε1 ακολούθησε το μάθημα της Ε3, η συζήτηση μετά το μάθημα του Ε1 ήταν συνολικά αναστοχαστική.

509 Ε3: Νομίζω ότι τα παιδιά τα πήγαν καλύτερα. Για παράδειγμα, ο Κ και η Ι είπαν ότι όταν αυξάνονται τα στριψίματα, το σημείο παραμένει κοντά στην οριζόντια γραμμή, που είναι η θεωρητική τιμή της πιθανότητας των «κεφαλών».

510 Ε1: Ναι, ήταν καλή απάντηση. Αλλά και οι Γ και Δ έβγαλαν ένα πολύ καλό συμπέρασμα.

511 Ε2: Συμφωνώ απόλυτα! Είπαν: «αν μετακινήσετε τον ολισθητή προς τα δεξιά, τότε έχετε μεγάλο αριθμό στριψιμάτων και μικρή απόκλιση του σημείου γύρω από την οριζόντια γραμμή. Αλλά όταν το μετακινείτε αριστερά, έχετε λιγότερα στριψίματα και μεγαλύτερη απόκλιση γύρω από την οριζόντια γραμμή». Τι άλλο θέλετε να πουν;

512 Ε3: Ναι, πολύ καλή η παρατήρησή τους, αλλά είναι αυτό που θέλουμε; Σχετίζεται περισσότερο με το γράφημα παρά με την έννοια της πιθανότητας.

513 Ε2: Δεν πειράζει. Ο ολισθητής τους βοήθησε να κατανοήσουν την σχέση μεταξύ πλήθους στριψιμάτων και της μεταβλητότητας στην συχνότητα των κεφαλών.

514 Ε1: Και φαίνεται ότι θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το μ-π και σε διδασκαλίες εκτός από των πιθανοτήτων.

Στα παραπάνω αποσπάσματα, φαίνεται ότι οι τρεις εκπαιδευτικοί έχουν διαφορετικές θέσεις για τους μαθησιακούς στόχους των πιθανοτήτων στην Γ΄ τάξη του Γυμνασίου, για τον τρόπο που αυτοί υλοποιούνται και το πώς τα παιδιά αντιμετώπισαν τις προκλήσεις, σε σχέση με τους στόχους.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αναλύοντας τα αποτελέσματα από την οπτική της ΘΔ, προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε εντάσεις στις προσεγγίσεις των Ε1 και Ε3. Το τεχνούργημα ήταν κυρίως το μ-π ή άλλα ψηφιακά δομήματα, που είχαν υπόψη τους οι εκπαιδευτικοί, για την προσομοίωση στριψίματος κέρματος. Οι Ε1 και Ε3 ήταν τα υποκείμενα, ενώ μαζί με τους μαθητές ανήκαν στην (σχολική) κοινότητα. Ο καταμερισμός της εργασίας διαφοροποιήθηκε ως προς τον ρόλο κάθε εκπαιδευτικού, στο μάθημα.

Υποκείμενο	Ε3	Ε1

Αντικείμενο 1	Να σχεδιάσουν/διδάξουν με το μ-π.	
Τεχνούργημα	Το μ-π, άλλες σχετικές προσομοιώσεις.	
Κοινότητα	Ε1, Ε2, μαθητές/τριες.	Ε2, Ε3, μαθητές/τριες.
Κανόνες	Η ερμηνεία των ΟΔ.	
Καταμερισμός εργασίας	Όλοι σχεδιάζουν. Η Ε3 διδάσκει, οι άλλοι εκπαιδευτικοί είναι συμμετέχοντες παρατηρητές. Τα παιδιά αντιμετωπίζουν μια πρόκληση, η οποία πρέπει να εστιάσει στην έννοια της πιθανότητας .	Όλοι σχεδιάζουν. Ο Ε1 διδάσκει, οι άλλοι είναι συμμετέχοντες παρατηρητές. Τα παιδιά αντιμετωπίζουν μια πρόκληση, η οποία προσανατολίζεται αρχικά στη (θεωρητική) πιθανότητα, αλλά είναι ανοικτή σε επεκτάσεις.
Κίνητρο	Οι μαθητές να βγάλουν συμπεράσματα για την θεωρητική πιθανότητα.	Οι μαθητές να βγάλουν γενικότερα συμπεράσματα για την έννοια «πιθανότητα».

Πίνακας 2: Σύστημα δραστηριότητας σχεδιασμού/διδασκαλίας Ε1 και Ε3.

Τα στοιχεία των δύο τελευταίων γραμμών του πίνακα 2 ήταν που διαφοροποίησαν τη δραστηριότητα των Ε1 και Ε3. Φαίνεται ότι η Ε3 σχεδίασε τη διδακτική της παρέμβαση έχοντας κατά νου τους «περιορισμούς» των ΟΔ, σύμφωνα με την ίδια (γραμμή 108), ενώ ο Ε1 θεωρούσε αποδεκτό να αφήσει ανοιχτό στους μαθητές να διερευνήσουν ευρύτερα την πιθανότητα (γραμμές 096, 109). Αυτό φαίνεται και από τη γνώμη της Ε3 για τις απαντήσεις των μαθητών και στα δύο μαθήματα (γραμμές 356, 509, 512). Περίμενε να επικεντρωθούν στη θεωρητική πιθανότητα, ενώ η ο Ε1 ήταν πιο ανεκτικός -ή και δεκτικός- σε γενικότερες περιγραφές ή στόχους για την πιθανότητα, τον νόμο των μεγάλων αριθμών, τη φυσική μεταβλητότητα της συχνότητας γύρω από την τιμή της πιθανότητας. Επιπλέον, στη γραμμή 510 ο Ε1 είπε ότι οι Γ και Δ έφτασαν σε ένα «πολύ καλό συμπέρασμα». Αυτοί οι δύο μαθητές συντόνισαν το πλήθος των στριψιμάτων με την μεταβλητότητα της συχνότητας των κεφαλών, όπως απεικονιζόταν γύρω από την οριζόντια γραμμή. Με αφορμή αυτή την ενέργειά τους ο Ε1 είπε ότι θα μπορούσε να επεκταθεί η χρήση του μ-π (γραμμή 514), διευκρινίζοντας σε συνέντευξη που ακολούθησε είπε ότι είχε στο μυαλό του την έννοια της συμμεταβολής (Thompson & Carlson, 2017). Επίσης χαρακτήρισε τέτοιες συνδέσεις ως χρήσιμες, «αν και αφορούν άλλες ενότητες της ύλης και δεν προβλέπονται στις οδηγίες διδασκαλίας των πιθανοτήτων», κάτι που είναι ενδεικτικό της οπτικής του για την αξιοποίηση των ΟΔ. Η Ε3, όταν ρωτήθηκε για αυτή την προσέγγιση είπε ότι, αν και ήταν «καλή ιδέα» προτιμούσε να προσεγγίσει την συμμεταβολή «στην ενότητα των συναρτήσεων, όπως λένε οι ΟΔ». Οι εντάσεις γίνονται πιο εμφανείς περιγράφοντας το αντικείμενο 2 (το αποτέλεσμα της δραστηριότητας), για τους Ε1 και Ε3:

Για τον Ε1 ήταν ο σχεδιασμός/διδασκαλία για την πιθανότητα και άλλες έννοιες που σχετίζονται με τη φυσική μεταβλητότητα και την τυχαιότητα, ενώ για την Ε3 ήταν ο σχεδιασμός/διδασκαλία, ώστε τα παιδιά να ασχοληθούν με τη διερεύνηση της πιθανότητας σε σχέση με τη συχνότητα των «κεφαλών» και «γραμμάτων». Παρατηρώντας τα ΣΔ βλέπουμε τις διαφορετικές οπτικές τους για τις ΟΔ. Η ένταση που εντοπίσαμε ενδεχομένως δεν αφορά μόνο το περιεχόμενό των ΟΔ σε σχέση με τη μάθηση, αλλά αντανακλά και την θέση κάθε εκπαιδευτικού για τον ρόλο των ΟΔ: Τα κείμενα αυτά συνθέτουν ένα κανονιστικό πλαίσιο ή έχουν συμβουλευτικό χαρακτήρα;

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτή τη μελέτη, καταγράψαμε τις ενέργειες και τις συζητήσεις των εκπαιδευτικών για τη διασκευή ενός ψηφιακού μέσου και τη διδασκαλία με αυτό -ως μια ενιαία δραστηριότητα- εστιάζοντας στις αλληλεπιδράσεις όχι μόνο μεταξύ τους αλλά και μέρος του εργασιακού τους περιβάλλοντος και αναζητήσαμε εντάσεις σε αυτή τη δραστηριότητα των εκπαιδευτικών. Οι εντάσεις που εντοπίσαμε συνδέονται με τις ΟΔ. Εκτός από τη διάσταση των διαφορετικών προσεγγίσεων των εκπαιδευτικών, ως προς το περιεχόμενο των ΟΔ υπήρξε και η διάσταση του πώς λειτουργούν αυτά, σε σχέση με τους κανόνες του σχολείου και του επαγγέλματος του εκπαιδευτικού. Ωστόσο είναι δύσκολο -και ίσως όχι σκόπιμο- να μπει μια διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο αυτών διαστάσεων και να επιχειρήσει να εντοπίσει κανείς ποια ένταση οφείλεται στην ερμηνεία του περιεχομένου των ΟΔ και ποια στην ερμηνεία των ΟΔ ως κανονιστικό πλαίσιο ή συμβουλευτικό κείμενο. Ας διασαφηνίσουμε ότι η ένταση που καταγράψαμε δεν είναι μεταξύ των εκπαιδευτικών και των προσεγγίσεών τους, αλλά ενυπάρχει στην δραστηριότητα των εκπαιδευτικών, μέρη της οποίας είναι οι επιμέρους ενέργειες του καθενός. Ακόμα και αν στον καθένα κυριαρχεί μια προσέγγιση για τις ΟΔ, η άλλη προσέγγιση ενδεχομένως ενυπάρχει, έστω και σε λανθάνουσα μορφή, καθώς δρουν σε περιβάλλον αλληλεπιδράσεων. Έτσι, η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών είναι κρίσιμη ερευνητικά, γιατί αναδεικνύει εντάσεις στην δραστηριότητα που ενώ υπάρχουν, μπορεί να μην είναι ορατές όταν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση.

Τέλος, στη βάση των παραπάνω επαναδιατυπώνουμε την αρχή σχεδιασμού του 7ου κύκλου: «Με τη μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των εκπαιδευτικών, ενώ διασκεύαζαν και αξιοποιούσαν ψηφιακά μέσα μπορούν να εντοπιστούν εντάσεις στις ενέργειές τους που σχετίζονται με τους πολλαπλούς ρόλους που έχουν στο εργασιακό τους περιβάλλον». Περισσότερη έρευνα χρησιμοποιώντας αυτή τη θεωρητική προσέγγιση θα ήταν διαφωτιστική για αυτό το συμπέρασμα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η μελέτη αυτή χρηματοδοτείται από το έργο HORIZON-WIDERA του Ευρωπαϊκού Εκτελεστικού Οργανισμού Έρευνας (REA) με τίτλο «TransEET» (αριθμός έργου: 101078875). Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής για την παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά έγκριση του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις των συγγραφέων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bakker, A. (2018). Design research in education: A practical guide for early career researchers. Routledge.

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Sinclair, N. (Eds.). (2022). The Mathematics Teacher in the Digital Era: International Research on Professional Learning and Practice (Vol. 16). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-05254-5

Diamantidis, D., Kynigos, C., & Papadopoulos, I. (2019). The co-design of a c-book by students and teachers as a process of meaning generation. CERME 11. Proceedings of CERME 11. https://ikee.lib.auth.gr/record/316373

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. Informatics in Education, 17(2), 321–340.

Remillard, J. T. (2018). Examining Teachers' Interactions with Curriculum Resource to Uncover Pedagogical Design Capacity. In L. Fan, C. Qi, S. Rezat, L. Trouche, & J. Visnovska (Eds.), Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources: Advances and Issues (1st ed. 2018, pp. 69–88). Springer International Publishing : Imprint: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ

Ελένη Οδυσσέως, Μάριος Πιττάλης

Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

odysseos.o.eleni@ucy.ac.cy, m.pittalis@ucy.ac.cy

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση των αντιλήψεων εκπαιδευτικών Δημοτικής εκπαίδευσης για τον συναρτησιακό λογισμό και η εξέταση της επίδρασης ενός παρεμβατικού προγράμματος, που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος FunThink, στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών. Στο πρόγραμμα συμμετείχαν 40 εκπαιδευτικοί που είχαν την ευκαιρία να εμπλακούν σε διαδραστικές δραστηριότητες που εξετάζουν τις διαφορετικές πτυχές της έννοιας της συνάρτησης. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι μετά το επιμορφωτικό πρόγραμμα οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε συγκεκριμένες πτυχές της συνάρτησης όπως είσοδος-έξοδος, συμμεταβολή και αντιστοιχία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο συναρτησιακός λογισμός αποτελεί σημαντικό θέμα συζήτησης στη μαθηματική εκπαίδευση από τις αρχές του 20ου αιώνα. Θεωρείται μια βασική πτυχή στα μαθηματικά και σχετίζεται με πολλούς άλλους τομείς, τόσο στο σχολικό περιβάλλον όσο και στην καθημερινή ζωή. Αυξανόμενος αριθμός ερευνητικών εργασιών εστιάζει στον συναρτησιακό λογισμό, γιατί αποτελεί εργαλείο για την επίλυση ποικίλων προβλημάτων, εντός και εκτός των μαθηματικών (Krüger, 2019; Wilkie et al., 2016). Προσφέρει τη δυνατότητα μοντελοποίησης περίπλοκων καταστάσεων του πραγματικού κόσμου και αποτελεί ενοποιητικό στοιχείο του προγράμματος σπουδών. Για αυτό τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών εισηγούνται την ενσωμάτωση δραστηριοτήτων που συμβάλουν στην ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Blanton et al., 2015). Η ενσωμάτωση αποτελεί μεγάλη πρόκληση για τους μελλοντικούς και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς, καθώς οι περισσότεροι από αυτούς δεν έχουν επιμορφωθεί για τη διδασκαλία του συναρτησιακού λογισμού με αποτέλεσμα να στερούνται σημαντικές γνώσεις (Oliveira et al., 2021). Σύμφωνα με την Kieran (2007), δεν έχει δοθεί έμφαση στη μελέτη των γνώσεων και αντιλήψεων των εκπαιδευτικών που αφορούν τη διδασκαλία των συναρτήσεων και την ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού των μαθητών. Η παρούσα έρευνα αποσκοπεί να μελετήσει τις αντιλήψεις Κύπριων εκπαιδευτικών για τον συναρτησιακό λογισμό και να διαπιστώσει τον τρόπο με τον οποίο η συμμετοχή τους σε πρόγραμμα επιμόρφωσης μπορεί να εμπλουτίσει τις αντιλήψεις τους για αυτόν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Περιγραφή Συναρτησιακού Λογισμού

Στη βιβλιογραφία υπάρχει μια ποικιλία ορισμών για τον συναρτησιακό λογισμό (Thompson & Carlson, 2017), λόγω του ότι δεν μπορεί να διδαχθεί ως ανεξάρτητο θέμα, αλλά χρειάζεται να ληφθεί υπόψη η διασύνδεση του με την έννοια της συνάρτησης (Vollrath, 1989). Σύμφωνα με τους Blanton & Kaput (2011), ο συναρτησιακός λογισμός δίνει έμφαση στη διαδικασία της

γενίκευσης και στη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ διαφορετικών ποσοτήτων. Την άποψη αυτή έρχονται να υποστηρίξουν οι Blanton et al. (2015), που περιγράφουν τον συναρτησιακό λογισμό «ως διαδικασία οικοδόμησης, περιγραφής και συλλογισμού των συναρτήσεων». Άλλοι ερευνητές έχουν ορίσει τον συναρτησιακό λογισμό εστιασμένοι σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του. Για παράδειγμα οι Cañadas et al. (2016) τον συνέδεσαν με τις μαθηματικές έννοιες της δομής, της αλλαγής και των σχέσεων των αριθμών, καθώς και της χρήσης του στην επίλυση προβλημάτων. Συνεπώς, ο συναρτησιακός λογισμός περιλαμβάνει (α) τον εντοπισμό και τη γενίκευση σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, (β) την αναπαράσταση των σχέσεων αυτών και (γ) την αξιοποίηση αυτών των αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων (Cañadas et al., 2016).

Πτυχές Συναρτησιακού Λογισμού

Ερευνητές περιγράφουν τον συναρτησιακό λογισμό με βάση τέσσερις πτυχές της συνάρτησης (Frey et al., 2022). Στην παρούσα έρευνα υιοθετείται η πρόταση των Doorman et al. (2012) για τη διάκριση των πτυχών της έννοιας της συνάρτησης ως εξής:

Συνάρτηση ως διαδικασία εισόδου-εξόδου

Η πτυχή της συνάρτησης ως διαδικασία εισόδου-εξόδου υπογραμμίζει τον υπολογιστικό χαρακτήρα της συνάρτησης και συσχετίζεται με δραστηριότητες διερεύνησης και περιγραφής των μοτίβων, αριθμομηχανές και αναπαραστάσεις όπως βελοδιαγράμματα και πίνακες με στήλες εισόδου-εξόδου.

Συνάρτηση ως δυναμική διαδικασία συμμεταβολής

Σύμφωνα με τους Thompson και Carlson (2017) η πτυχή αυτή σχετίζεται με την αντίληψη της συνάρτησης ως δύο ποσότητες που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, καθώς η τιμή της μιας ποσότητας καθορίζει την τιμή της άλλης (σχέση εξαρτημένης – ανεξάρτητης μεταβλητής).

Συνάρτηση ως σχέση αντιστοιχίας

Η προσέγγιση αυτή για τη συνάρτηση αφορά την κατανόηση της γενικής σχέσης ανάμεσα στην ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή, καθώς και την αναπαράσταση της σχέσης αυτής ως ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη. Έτσι οι τιμές μιας μεταβλητής καθορίζονται με μοναδικό τρόπο από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής με βάση έναν συγκεκριμένο κανόνα αντιστοίχισης (Thompson & Carlson, 2017).

Συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο

Στην πτυχή αυτή της συνάρτησης συμπεριλαμβάνονται οι ιδιότητες και οι διαφορετικές αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν σε αυτήν, ώστε να είναι συγκρίσιμη με άλλα μαθηματικά αντικείμενα. Για την οικοδόμηση της συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο, χρησιμοποιούνται κυρίως οι αναπαραστάσεις της γραφικής παράστασης και της συμβολικής αναπαράστασης του γενικού τύπου.

Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τον συναρτησιακό λογισμό

Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών στον τομέα των μαθηματικών. Αυτό προκύπτει από το γεγονός πως οι αντιλήψεις που εκφράζουν οι εκπαιδευτικοί για τον συναρτησιακό λογισμό συνδέονται άμεσα με τις γνώσεις που διαθέτουν για την έννοια της συνάρτησης (Thompson & Carlson, 2017). Έρευνες έχουν καταδείξει μεγάλη ποικιλομορφία στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, καθώς δεν εκφράζουν μια ολιστική αντίληψη για τον συναρτησιακό λογισμό αλλά τον συσχετίζουν κυρίως με συγκεκριμένες πτυχές της συνάρτησης (Yemen-Karpuzcu et al., 2017). Οι επικρατέστερες αντιλήψεις στη βιβλιογραφία συνδέουν τον συναρτησιακό λογισμό με την έννοια της συνάρτησης και με εφαρμογές στην πραγματική ζωή. Οι Frey et al. (2022) διερεύνησαν τις αντιλήψεις έμπειρων

εκπαιδευτικών για τον συναρτησιακό συλλογισμό, σε συγκριτική έρευνα, στην οποία συμμετείχαν εκπαιδευτικοί από την Πολωνία, την Κύπρο, τη Σλοβακία, τη Γερμανία, και την Ολλανδία. Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δήλωσε ότι ο όρος αυτός ήταν άγνωστος. Οι Κύπριοι συμμετέχοντες στην έρευνα ανέφεραν ότι ο συναρτησιακός λογισμός συνδέεται με την πτυχή της συνάρτησης ως εισόδου-εξόδου, μέσω της χρήση των αριθμομηχανών.

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να μελετήσει τις απόψεις Κύπριων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (φοιτητών, προϋπηρεσιακών και ενδοϋπηρεσιακών) για τον συναρτησιακό λογισμό και να διερευνήσει κατά πόσον η συμμετοχή τους σε διαδραστικό επιμορφωτικό πρόγραμμα συμβάλει στον εμπλουτισμό των αντιλήψεων αυτών. Επομένως, το ερευνητικό ερώτημα που καλείται να απαντήσει η μελέτη αυτή είναι: «Πώς η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε ένα παρεμβατικό πρόγραμμα, για τον συναρτησιακό λογισμό, επηρεάζει τις αντιλήψεις τους;».

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα αποτελείται από 40 συμμετέχοντες, εκ των οποίων 12 ενδοϋπηρεσιακοί εκπαιδευτικοί, 8 προϋπηρεσιακοί εκπαιδευτικοί και 20 τεταρτοετείς προπτυχιακοί φοιτητές του τμήματος Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου. Από τους εν υπηρεσία και προ υπηρεσία εκπαιδευτικούς, 9 δήλωσαν μερική και 11 πλήρης απασχόληση σε δημόσια ή ιδιωτικά σχολεία/φροντιστήρια/εκπαιδευτήρια. Παράλληλα, 14 από τους προαναφερόμενους εκπαιδευτικούς έχουν κάτω από 10 χρόνια εμπειρία στη διδασκαλία των μαθηματικών και 6 εκπαιδευτικοί πάνω από 10 χρόνια εμπειρία. Έτσι, το δείγμα της συγκεκριμένης μελέτης, ήταν ετερογενές στο πλαίσιο της διερευνητικής ποιοτικής προσέγγισης.

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω ενός διαδικτυακού ερωτηματολογίου (pre-test), το οποίο χορηγήθηκε στους συμμετέχοντες κατά την εγγραφή τους στο επιμορφωτικό πρόγραμμα, που αποτελούνταν από τέσσερις συνεδρίες των 2 ωρών, καθώς και με το πέρας των συνεδρίων αυτών όπου συμπλήρωσαν ακόμη ένα διαδικτυακό ερωτηματολόγιο (post-test). Το ερωτηματολόγιο που χορηγήθηκε αποτελούνταν από 6 ερωτήματα ανοικτού τύπου, που αφορούν τον συναρτησιακό λογισμό, και στάλθηκε μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου συνοδευόμενο με ένα επεξηγηματικό κείμενο για τον σκοπό της έρευνας. Σε αυτή την εργασία αναλύουμε τις απαντήσεις των συμμετεχόντων στο ερώτημα «Έχετε ακούσει ποτέ τον όρο Συναρτησιακός Λογισμός; Αν ναι, τι πιστεύετε ότι περιλαμβάνει; Να εξηγήσετε.».

Δομή Προγράμματος Επιμόρφωσης

Στην πρώτη συνάντηση οι εκπαιδευτικοί ήρθαν σε επαφή με την έννοια του συναρτησιακού συλλογισμού (ορισμός, πτυχές συνάρτησης), τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο (δείτε Πίνακα 1). Συγκεκριμένα, καλέστηκαν να κατασκευάσουν γραφικές παραστάσεις με βάση δοσμένο βίντεο και να αλληλοεπιδράσουν με ένα ψηφιακό εργαλείο μέσω του οποίου αναπαριστούσαν το σχήμα του δοχείου με βάση τη γραφική παράσταση. Ακολούθως, μελέτησαν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Κύπρου προκειμένου να προσδιορίσουν ποιες πτυχές της έννοιας της συνάρτησης εμπλέκονται και ποια ερωτήματα θα μπορούσαν να θέσουν στους μαθητές για την ανάπτυξη των πτυχών αυτών. Συνεχίζοντας στη δεύτερη συνάντηση, οι εκπαιδευτικοί είχαν πιο ενεργητικό ρόλο, καθώς καλέστηκαν να πειραματιστούν σε διάφορες δραστηριότητες, ως μαθητές. Συγκεκριμένα, είχαν την ευκαιρία να παρατηρήσουν τον τρόπο με τον οποίο μια αριθμητική γραμμή μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην εξαγωγή του γενικού κανόνα ενός μοτίβου, και πως μια σειρά οδηγιών μπορεί να τους βοηθήσει να υπολογίσουν την ημερομηνία γέννησης ενός ατόμου. Παράλληλα, οι συμμετέχοντες εργάστηκαν, ως μαθητές, σε δύο εφαρμογίδια που μελετούν την έννοια της συνάρτησης ως είσοδος-έξοδος και ως συμμεταβολή. Στη συνέχεια συζήτησαν για τον τρόπο

αξιοποίησης των εγχειριδίων αυτών στη διδασκαλία, ώστε να αναδειχθούν οι διαφορετικές πτυχές της συνάρτησης.

Πίνακας 1: Περιεχόμενο ανά σεμινάριο

1η Συνάντηση	2η Συνάντηση	3η Συνάντηση	4η Συνάντηση
1.Εισαγωγή στον Συναρτησιακό Λογισμό. 2.Κατασκευή γραφικών παραστάσεων με βάση δοσμένο βίντεο 3.Χρήση της εφαρμογής «Όγκος Νερού» για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων 4.Συζήτηση για το πως παρουσιάζεται ο συναρτησιακός λογισμός στα βιβλία των μαθηματικών των σχολείων της Κύπρου	1.Διαδραστική δραστηριότητα «Περπατώντας στην αριθμητική γραμμή» 2.Δραστηριότητα «Μαντέψτε τα γενέθλια μου» 3.Εξερεύνηση εφαρμογιδίου «Function Machines» 4.Εξερεύνηση δραστηριοτήτων μέσω της εφαρμογής GeoGebra 5.Εργασία με το εφαρμογίδιο «nomogram» 6.Κατασκευή ρεαλιστικού σεναρίου για δοσμένη γραφική παράσταση	1.Δραστηριότητα: «Περπατώντας στην αριθμητική γραμμή» με βάση δοσμένες οδηγίες ή γραφικές παραστάσεις και χρήση εφαρμογιδίου καταγραφής κινήσεων 2.Πειραματισμός με τη χρήση του εφαρμογιδίου «Turtle Crossing» 3.Αξιολόγηση δοσμένου μαθήματος και συζήτηση των στοιχείων του συναρτησιακού λογισμού που μπορούν να εξαχθούν 4.Παρακολούθηση συνέντευξης μαθητών και συζήτηση των δυσκολιών που αντιμετώπισαν 5.Εισήγηση σεναρίων για την κατανόηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή, στο δημοτικό σχολείο	1.Χρήση εφαρμογιδίου εύρεσης σχέσεων 2.Βίντεο: «Ανθρώπινη πυραμίδα» για τη διδασκαλία των μοτίβων 3.Εξερεύνηση εφαρμογιδίων 4.Δημιουργία ερωτημάτων για τις πτυχές του συναρτησιακού λογισμού 5.Μοτίβα (Ορισμός, Κριτήρια Κατηγοριοποίησης, Είδη Μοτίβων) 6.Επίλυση φύλλου εργασίας και συζήτηση για αξιοποίηση του 7.Σχολιασμός δοσμένης διδασκαλίας και ιδέες για τη δική τους διδασκαλία

Οι εκπαιδευτικοί στην τρίτη συνάντηση λειτούργησαν συνεργατικά για τη διεκπεραίωση των δραστηριοτήτων. Αρχικά, κλήθηκαν να εργαστούν σε ζευγάρια χρησιμοποιώντας τις οδηγίες που τους δίνονταν (είτε λεκτικά, είτε σε μορφή γραφικής παράστασης), ώστε να αναπαραστήσουν τις σχέσεις των αριθμών, κινούμενοι πάνω σε μια αριθμητική γραμμή. Τις κινήσεις αυτές κατέγραφε ένα εφαρμογίδιο καταγραφής κινήσεων, το οποίο τις μετέφραζε σε γραφικές παραστάσεις. Με τον τρόπο αυτό, οι εκπαιδευτικοί, ήταν σε θέση να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους και να σκεφτούν την προστιθέμενη αξία του εφαρμογιδίου, για την κατανόηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή. Παράλληλα, πειραματίστηκαν με ένα άλλο ψηφιακό εργαλείο στο οποίο μπορούσαν οι ίδιοι οι συμμετέχοντες, με βάση τις οδηγίες που τους δίνονταν, να κατασκευάσουν μια γραφική παράσταση που να αναπαριστά την κίνηση μιας χελώνας και το αντίστροφο. Ακολούθως, ανέφεραν πιθανές δραστηριότητες στις οποίες μπορούν να αξιοποιήσουν το εφαρμογίδιο αυτό για την ανάπτυξη του συναρτησιακού

λογισμού των μαθητών. Τέλος, αξιολόγησαν μια δοσμένη διδασκαλία, συζητώντας τα στοιχεία του συναρτησιακού λογισμού που μπορούν να εξαχθούν από αυτή. Στην τελευταία συνάντηση, οι συμμετέχοντες ασχολήθηκαν με την έννοια του μοτίβου, τα είδη των μοτίβων και τα κριτήρια κατηγοριοποίησης τους. Προκειμένου να αντιληφθούν πως κατασκευάζεται και αναπτύσσεται ένα μοτίβο, αλληλοεπίδρασαν με διάφορα ψηφιακά εργαλεία, που αναπτύχθηκαν από την ερευνητική ομάδα, και τα οποία θα μπορούσαν οι ίδιοι να αξιοποιήσουν στις διδασκαλίες τους.

Ανάλυση Δεδομένων

Η κωδικοποίηση των απαντήσεων έγινε σε συμφωνία με τα υπόλοιπα μέλη της ερευνητικής ομάδας του προγράμματος FunThink με βάση τις απαντήσεις όλων των συμμετεχόντων από τις 5 Ευρωπαϊκές χώρες (Κύπρος, Γερμανία, Ολλανδία, Πολωνία, Σλοβακία). Πρωτίστως, κωδικοποιήθηκαν οι ιδέες των εκπαιδευτικών, με βάση την οπτική στην οποία αναφέρθηκαν για τον συναρτησιακό λογισμό. Εδώ εστιάζουμε στις τέσσερις πτυχές των συναρτήσεων (εισόδου-εξόδου, συμμεταβολής, αντιστοιχίας, μαθηματικό αντικείμενο) που παίζουν καθοριστικό ρόλο στην εξέταση των συναρτήσεων. Ακολούθως, κωδικοποιήθηκε ο τρόπος με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις για την μαθηματοποίηση εντός (από άτυπα σε τυπικά μαθηματικά) και εκτός (μοντελοποίηση μιας κατάστασης με μαθηματικά εργαλεία) των μαθηματικών. Στη συνέχεια, κωδικοποιήθηκαν οι δραστηριότητες που θεωρούσαν οι εκπαιδευτικοί ότι συμβάλλουν στην ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού, με ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή μοτίβων και στη χρήση αναπαραστάσεων (π.χ. γραφική παράσταση). Τέλος, κωδικοποιήθηκαν σημασιολογικά στοιχεία και έννοιες που σχετίζονται με τις συναρτήσεις και τον συναρτησιακό λογισμό, αλλά και αντιπαραδείγματα που φάνηκαν στις απαντήσεις των συμμετεχόντων.

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η ποιοτική ανάλυση περιεχομένου (Mayring, 2015). Αρχικά, παρατηρήθηκαν ομοιότητες και διαφορές στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, ώστε να ομαδοποιηθούν βάση συγκεκριμένων κριτηρίων. Ακολούθως, μελετήθηκαν οι κατηγορίες που υφίστανται στη βιβλιογραφία, προκειμένου να γίνει σύνδεση με τις απαντήσεις των συμμετεχόντων και κατηγοριοποίηση τους με βάση το κοινό τους χαρακτηριστηκό. Τέλος, μέσω της επαγωγικής προσέγγισης, προέκυψε η κωδικοποίση των απαντήσεων για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Έτσι προέκυψαν τέσσερις βασικές κατηγοριοποιήσεις των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών εκ των οποίων: (1) Διασύνδεση με συγκεκριμένη πτυχή των συναρτήσεων, (2) Σημασία της διασύνδεσης του συναρτησιακού λογισμού με άλλες έννοιες εντός ή εκτός των μαθηματικών, (3) Διασύνδεση με τα μοτίβα και (4) Διασύνδεση με διαφορετικές αναπαραστάσεις (π.χ. γραφικές παραστάσεις). Για την ανάλυση των δεδομένων, λήφθηκαν υπόψη οι συχνότητες των απαντήσεων σε κάθε ερώτημα και καταγράφηκαν υπό μορφή ποσοστών, λόγω του μεγέθους του δείγματος.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τις απαντήσεις των συμμετεχόντων πριν και μετά την ολοκλήρωση του επιμορφωτικού προγράμματος, για το πρώτο ερώτημα του ερωτηματολογίου «Έχετε ακούσει ποτέ τον όρο Συναρτησιακός Λογισμός; Αν ναι, τι πιστεύετε ότι περιλαμβάνει; Να εξηγήσετε.». Οι συμμετέχοντες, πριν από το πρόγραμμα επιμόρφωσης, είτε δεν είχαν ξανακούσει τον συναρτησιακό λογισμό είτε τον είχαν συνδέσει μόνο με μια πτυχή της συνάρτησης. Αντίθετα, μετά από το πρόγραμμα, ανέφεραν στις απαντήσεις τους πολλαπλές αντιλήψεις που αφορούσαν τις διάφορες πτυχές του συναρτησιακού λογισμού, τη διασύνδεση του με άλλους τομείς εντός ή εκτός των μαθηματικών καθώς και τις αναπαραστάσεις με τις οποίες συνδέεται.

Για την απάντηση του ερευνητικού ερωτήματος αξιοποιήθηκαν συγκριτικά οι αντιλήψεις των υποκειμένων πριν και μετά τη συμμετοχή τους στο επιμορφωτικό πρόγραμμα. Όπως φαίνεται

στον Πίνακα 1, πριν από το παρεμβατικό πρόγραμμα, το 50% των προ υπηρεσία και εν υπηρεσία εκπαιδευτικών, ανέφεραν ότι δεν είχαν ακούσει ποτέ πριν τον όρο «συναρτησιακός λογισμός», ενώ το υπόλοιπο 50% ανέφερε μια από τις πτυχές του. Το 15% των εκπαιδευτικών αναφέρθηκαν στον συναρτησιακό λογισμό ως σχέση αντιστοιχίας μεταξύ δύο μεγεθών, ένα άλλο ποσοστό του 15% ανέφεραν ότι είναι σημαντικός σε διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών και ένα άλλο 10% των συμμετεχόντων εξήγησαν ότι ο συναρτησιακός λογισμός είναι μια γενική ιδέα. Όσον αφορά τους προπτυχιακούς φοιτητές, το 90% δήλωσε ότι δεν έχει ξανακούσει τον όρο «συναρτησιακός λογισμός», ενώ μόνο δύο ανέφεραν μια από τις πτυχές που συνδέονται με αυτόν.

Μετά την ολοκλήρωση του παρεμβατικού προγράμματος, το ποσοστό των συμμετεχόντων που δεν γνώριζαν την έννοια του συναρτησιακού λογισμού ήταν μηδενικό, καθώς οι εκπαιδευτικοί ήταν σε θέση να αναφέρουν πολλαπλές ερμηνείες για τον συναρτησιακό λογισμό, οι οποίες αφορούσαν τις διαφορετικές πτυχές των συναρτήσεων, τις διαφορετικές αναπαραστάσεις αλλά και τις μεθόδους με τις οποίες μπορεί να αναπτυχθεί ο συναρτησιακός λογισμός. Αρχίζοντας από τις πτυχές της συνάρτησης, το 28% των εκπαιδευτικών (προϋπηρεσιακών και ενδοϋπηρεσιακών) αναφέρθηκαν στον συναρτησιακό λογισμό ως διαδικασία εισόδου-εξόδου, το 22% αναφέρθηκε στη λειτουργία του ως μια δυναμική διαδικασία συμμεταβολής και το 28% ως σχέση αντιστοιχίας μεταξύ δύο ποσοτήτων/μεταβλητών. Όσον αφορά τους προπτυχιακούς φοιτητές, το 12% τόνισε την πτυχή του συναρτησιακού λογισμού ως συνάρτηση εισόδου-εξόδου, το 18% ως δυναμική διαδικασία συμμεταβολής και το 59% ως σχέση αντιστοιχίας μεταξύ δύο ποσοτήτων/μεταβλητών. Συνεχίζοντας με τη διασύνδεση με άλλους τομείς, το 17% των εκπαιδευτικών και το 18% των φοιτητών αναφέρθηκαν στην εμπλοκή των συναρτήσεων σε διαφορετικούς τομείς εντός των μαθηματικών, ενώ κανένας από τους συμμετέχοντες δεν αναφέρθηκε σε κάποιο τομέα εκτός των μαθηματικών. Επιπρόσθετα στη διασύνδεση του συναρτησιακού λογισμού με τα μοτιβά αναφέρθηκαν το 22% των εκπαιδευτικών και το 24% των φοιτητών. Τέλος, στη διασύνδεση του συναρτησιακού λογισμού με διαφορετικές αναπαραστάσεις έγινε αναφορά από το 34% των εκπαιδευτικών, εκ των οποίων οι μισοί αναφέρθηκαν σε γραφικές παραστάσεις και οι άλλοι μισοί στη χρήση εξισώσεων, καθώς και το 12% των φοιτητών για τις γραφικές παραστάσεις και το 35% για τις έννοιες που σχετίζονται με τις συναρτήσεις.

Πίνακα 2: Απόψεις εκπαιδευτικών για τον συναρτησιακό λογισμό

	Πριν		**Μετά**	
Αντιλήψεις	**Εκπαιδευτικοί (Προ/Ενδο Υπηρεσιακοί)**	**Φοιτητές**	**Εκπαιδευτικοί (Προ/Ενδο Υπηρεσιακοί)**	**Φοιτητές**
Δεν το έχει ξανακούσει ποτέ	10/20 (50%)	18/20 (90%)	-	-
Πτυχές Συνάρτησης				
Συναρτήσεις ως σχέση αντιστοιχίας μεταξύ δύο μεγεθών	3/20 (15%)	1/20 (5%)	5/18 (28%)	10/17 (59%)
Συναρτήσεις ως είσοδος–έξοδος	-	-	5/18 (28%)	2/17 (12%)
Συναρτήσεις ως συμμεταβολή	-	-	4/18 (22%)	6/17 (18%)

Διασύνδεση με άλλους τομείς				
Εντός των μαθηματικών				
Περιλαμβάνει συναρτήσεις σε διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών	3/20 (15%)	1/20 (5%)	3/18 (17%)	3/17 (18%)
Εκτός των μαθηματικών				
Συναρτησιακός λογιμός ως γενική ιδέα	2/20 (10%)	-	-	-
Διασύνδεση με μοτίβα				
Μοτίβα	-	-	4/18 (22%)	4/17 (22%)
Διασύνδεση με αναπαραστάσεις				
Ενασχόληση με αναπαραστάσεις	-	-	3/18 (17%)	2/17 (12%)
Σημασιολογικά και συντακτικά στοιχεία που σχετίζονται με τις συναρτήσεις	-	-	3/18 (17%)	6/17 (35%)

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Πριν από το πρόγραμμα επιμόρφωσης, οι συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας, διέθεταν πολύ περιορισμένη γνώση σχετικά με τον συναρτησιακό λογισμό σε σχέση με τις πτυχές της συνάρτησης και τους σχετικούς τομείς των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών και φοιτητών δεν ήταν σε θέση να εκφράσουν μια ολοκληρωμένη άποψη για τον συναρτησιακό λογισμό. Με το πέρας του προγράμματος, οι συμμετέχοντες παρουσίασαν πολλαπλές αντιλήψεις για τις πτυχές της συνάρτησης (είσοδος-έξοδος, συμμεταβολή, αντιστοιχία) και τη διασύνδεση του συναρτησιακού λογισμού με άλλους τομείς (εντός και εκτός των μαθηματικών), έννοιες και αναπαραστάσεις.

Συμπερασματικά, το πρόγραμμα επιμόρφωσης συνέβαλε θετικά στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τον συναρτησιακό λογισμό, αφού με την ευκαιρία που τους δόθηκε να επιμορφωθούν, φάνηκε να απέκτησαν μια ολοκληρωμένη εικόνα για την έννοια του συναρτησιακού λογισμού. Συγκεκριμένα, η ενεργή εμπλοκή τους στο πρόγραμμα και η αλληλοεπίδραση τους με τις πτυχές της συνάρτησης, συνέβαλε στις βασικές γνώσεις για τη διδασκαλία του συναρτησιακού λογισμού στο δημοτικό σχολείο. Η αλληλοεπίδραση των συμμετεχόντων με διάφορα ψηφιακά εργαλεία, έτοιμα φύλλα εργασίας και βιντεοσκοπιμένες διδασκαλίες, σε πλαίσιο τάξης, ενίσχυσαν τις γνώσεις τους για τις πτυχές της συνάρτησης είσοδος-έξοδος, συμμεταβολή, αντιστοιχία αλλά και το πως μπορούν οι ίδιοι να συμβάλουν στην ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού των μαθητών. Κλείνοντας, με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής, φάνηκε πως η διεξαγωγή διαδραστικών επιμορφωτικών

προγραμμάτων, που αφορούν τον συναρτησιακό λογισμό, συμβάλει στον εμπλουτισμό των αντιλήψεων και των γνώσεων των εκπαιδευτικών. Η παρούσα μελέτη κατέδειξε τη σημαντικότητα της συμμετοχής των εκπαιδευτικών σε παρεμβατικά προγράμματα ανάπτυξης των γνώσεων τους για σημαντικά θέματα του προγράμματος σπουδών.

Με συγχρηματοδότηση από το πρόγραμμα «Erasmus+» της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresemath educ.46.5.0511

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87–103.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243–1267.

Frey K., Pittalis, M., Veldhuis, M., Geisen, M., Krisakova, M., Sajka, M., Nowinska, E., Hubenakova, V., Sproesser, U., (2022). Functional thinking: conceptions of mathematics educators – a framework for analysis. *In C. Fernandez, S. Llinares, A. Gutierrez, & N. Planas (Eds.), Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 343). Alicante, Spain: PME.

Krüger, K. (2019). Functional thinking: The history of a didactical principle. In H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand, & G. Schubring (Eds.), *The legacy of felix klein* (pp. 35–54). Springer International Publishing.

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods*, 365-380.

Oliveira, H., Polo-Blanco, I., & Henriques, A. (2021). Exploring Prospective Elementary Mathematics Teachers' Knowledge: A Focus on Functional Thinking. *Journal on Mathematics Education, 12*(2), 257-278.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 10*(1), 3–37.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal, 28*, 223-243.

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., & Işıksal-Bostan, M. (2017). Prospective middle school mathematics teachers' covariational reasoning for interpreting dynamic events during peer interactions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 89-108.

Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΦΟΙΤΗΤΩΝ - ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΝΑ ΣΥΝΤΟΝΙΖΟΥΝ ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΠΟΣΟΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Άννα Σπηλιοπούλου, Κωστούλα Ντούμα, Άντα Μπούφη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

annspiliop@gmail.com,kostoul_a@hotmail.com,
aboufi@primedu.uoa.gr

Η ικανότητα των δασκάλων να οργανώνουν τις ποσότητες σε 3 επίπεδα μονάδων θεωρούμε ότι αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο της μαθηματικής γνώσης τους για τη διδασκαλία. Στην εργασία αυτή, αναλύουμε ορισμένα στοιχεία που συλλέξαμε από την προσπάθεια μιας τριμελούς ομάδας φοιτητών - μελλοντικών δασκάλων (ΦΜΔ) να βοηθήσει μια μαθήτρια της ΣΤ΄ δημοτικού να κατανοήσει τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν τον σημαντικό ρόλο που έχει η ικανότητα των ΦΜΔ να συντονίζουν διαφορετικά επίπεδα μονάδων στη δυνατότητά τους να στηρίζουν την ανάπτυξη της ποσοτικής σκέψης των μαθητών, όταν λύνουν προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία αφορά στις γνώσεις που χρειάζεται ένας δάσκαλος, ώστε να είναι σε θέση να στηρίζει τη μάθηση των μαθητών του. Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών εστιάζοντας στις μαθηματικές γνώσεις που χρειάζονται οι δάσκαλοι για να διδάσκουν Μαθηματικά επισημαίνουν τη διαφορετικότητα αυτών των γνώσεων από εκείνες που διαθέτουν οι μορφωμένοι ενήλικες. Πρώτος ο Shulman (1986) αναφέρθηκε στην ‘παιδαγωγική γνώση περιεχομένου’ συνδέοντας τις γνώσεις των δασκάλων με τη μάθηση των μαθητών. Η Ball και οι συνεργάτες της (1990, 2008) εισήγαγαν τον όρο μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία, η οποία ορίστηκε ως η γνώση του περιεχόμενου που απορρέει από τη διδακτική πράξη και ταυτόχρονα τη στηρίζει. Η γνώση αυτή επιτρέπει την αναγνώριση της σκέψης των μαθητών, καθώς και την κατανόηση των ειδικών μαθηματικών ιδεών που προϋποθέτει η διδασκαλία τους. Διέκριναν τρεις κύριες κατηγορίες αυτής της γνώσης: κοινή γνώση του περιεχομένου (οι μαθηματικές γνώσεις που έχουν όλοι όσοι γνωρίζουν και χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά), εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου (οι γνώσεις ενός δασκάλου που διδάσκει μαθηματικά στους μαθητές) και η γνώση του μαθηματικού ορίζοντα (η επίγνωση του τρόπου με τον οποίο σχετίζονται οι μαθηματικές ιδέες που περιλαμβάνει ένα αναλυτικό πρόγραμμα).

Στην εργασία αυτή, μας απασχολεί η εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου των ΦΜΔ που συμμετείχαν σε ένα διετές πρόγραμμα εκπαίδευσης. Ειδικότερα, εστιάζουμε στην

εξειδικευμένη γνώση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων μιας μόνο τριμελούς ομάδας εξ αυτών. Το ερευνητικό ερώτημα που μελετάμε είναι με ποιον τρόπο η ανάπτυξη αυτής της γνώσης συνδέεται με τις προσπάθειές τους να βοηθήσουν μια μαθήτρια της ΣΤ΄ δημοτικού να εστιάζει στις μονάδες ποσοτήτων που εμπλέκονται σε προβλήματα πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΣΙΟ

Σκοπός της εκπαίδευσης των ΦΜΔ που συμμετείχαν στο πρόγραμμα ήταν να μάθουν να χτίζουν τη διδασκαλία τους πάνω στις συνεισφορές των μαθητών. Σύμφωνα με τον ριζοσπαστικό εποικοδομισμό (von Glasersfeld, 1995), οι εμπειρίες των μαθητών αποτελούν βάση για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και γι' αυτό η διδασκαλία θα πρέπει να στηρίζεται σε αυτές. Ο αναστοχασμός των μαθητών πάνω στα αποτελέσματα των ενεργειών τους εξασφαλίζει την ουσιαστική κατανόηση. Για να επιτευχθεί αυτός ο αναστοχασμός, ο σχεδιασμός ενός μαθήματος από τον δάσκαλο χρειάζεται να περιλαμβάνει: τον καθορισμό της τρέχουσας γνώσης των μαθητών, τον σκοπό μάθησης, την αλληλουχία των ενεργειών που θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στον σκοπό, καθώς και την επιλογή ενός προβλήματος (Simon, 1995· Tzur, 2008). Στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων που μελετάμε, οι ΦΜΔ στηρίχθηκαν να φέρνουν στο προσκήνιο τις ενέργειες της μαθήτριας που θα συνέβαλαν στην εννοιολογική κατανόηση του πολλαπλασιασμού, αυτές του αναδρομικού και του επιμεριστικού ισομερισμού (Steffe & Olive, 2009). Παρακάτω, γίνεται αναφορά σε μια άλλη βασική λειτουργία που εμπλέκεται στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, τον συντονισμό μονάδων.

Η ποσοτική σκέψη θα πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη σε κάθε προσπάθεια διδασκαλίας της αριθμητικής με νόημα (Behr κ.ά., 1994). Η ικανότητα των μαθητών να συντονίζουν μονάδες αναφέρεται στην ικανότητα τους να δημιουργούν μονάδες ποσοτήτων και να διατηρούν τη σχέση τους με τις άλλες μονάδες που περιέχουν ή με αυτές στις οποίες περιέχονται (Norton κ.ά., 2015a), χτίζοντας ολοένα και πιο σύνθετες νοητικές δομές (Norton κ.ά., 2015b). Η ικανότητα αυτή των μαθητών (και των δασκάλων) συνδέεται με πολλές περιοχές των Μαθηματικών, όπως με την έννοια του αριθμού ως σύνθετη μονάδα, τον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών, τα κλάσματα, την αλγεβρική επιχειρηματολογία κλπ. (Norton & Boyce, 2015). Για παράδειγμα, η κατανόηση των καταχρηστικών κλασμάτων προϋποθέτει τον συντονισμό τριών επιπέδων μονάδων (π.χ. το 8/3 προκύπτει ως μία σύνθετη μονάδα που περιέχει 8 μονάδες του 1/3, οι οποίες ανά 3 φτιάχνουν το 1 (3/3)). Το γεγονός πως περίπου το 30-50% των μαθητών όταν τελειώνει το δημοτικό σχολείο είναι σε θέση να χρησιμοποιεί αποκλειστικά απλές μονάδες (Steffe, 2007) φανερώνει την ανάγκη για τη στήριξη των μαθητών στην ανάπτυξη οργάνωσης ποσοτήτων με διαφορετικούς τρόπους.

Όσον αφορά στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων που σχετίζεται με το θέμα της εργασίας μας, για το πολλαπλασιαστικό σχήμα των μοναδιαίων κλασμάτων, εάν ένας μαθητής έχει να υπολογίσει το ½ του ¼ πρέπει να ισομερίσει το όλο σε 4 μέρη, να αποσπάσει ένα από αυτά και να το ισομερίσει ξανά σε 2 μέρη. Εάν επαναλάβει το ένα μέρος από αυτά στα οποία κατέληξε μέχρι να εξαντληθεί το όλο, θα καταφέρει να εκφράσει τη ζητούμενη ποσότητα ως το 1/8 του όλου. Ωστόσο, το όλο (8/8) που δημιούργησε καταλήγει να είναι μια δομή 2 επιπέδων μονάδων, διότι δεν συνειδητοποιεί ότι ταυτόχρονα αποτελείται από 4 μονάδες που η καθεμία περιέχει δύο μονάδες. Αντίθετα, ένας μαθητής που συντονίζει 3 επίπεδα μονάδων αντιλαμβάνεται πως το ¼ είναι ταυτόχρονα τα 2/8 του όλου και ότι υπάρχουν 2 μικρότερες μονάδες μέσα σε κάθε μονάδα του ¼ του όλου. Αυτό σημαίνει πως επεκτείνοντας τον ισομερισμό σε κάθε τέταρτο (αναδρομικός ισομερισμός) είναι σε θέση να έχει μια

επίγνωση της σχέσης των μονάδων μεταξύ τους αλλά και με το όλο (Hackenberg & Tillema, 2009· Lee & Shin, 2011).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής προσπάθειας να μελετηθεί η μάθηση ΦΜΔ σε ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα, καθώς στηρίζονταν να διδάσκουν σε μαθητές του δημοτικού σχολείου. Αυτοί οι ΦΜΔ ήταν φοιτητές ενός Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών. Κατά τη διάρκεια του προγράμματος, η ομάδα στήριξης πραγματοποιούσε εβδομαδιαίες τρίωρες συναντήσεις με τους ΦΜΔ. Επιπρόσθετα, στο δεύτερο έτος, οι ΦΜΔ έπρεπε να σχεδιάζουν και να υλοποιούν (από 8 έως 12) συναντήσεις με ένα παιδί.

Πριν από κάθε συνάντηση, οι ΦΜΔ παρέδιδαν ένα πλάνο για τη διδασκαλία (φύλλο σχεδιασμού). Μετά από κάθε συνάντηση, κατέγραφαν τα σημεία στα οποία στήριξαν τον μαθητή αλλά και τις ευκαιρίες στήριξης που έχασαν (φύλλο αποτίμησης). Τη στήριξη των ΦΜΔ συνιστούσε τόσο η συζήτηση θεμάτων που προέκυπταν από τα φύλλα εργασίας, όσο και οι παρεμβάσεις μας κατά τη διάρκεια των συναντήσεών τους με τους μαθητές.

Η παρούσα ποιοτική έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης (Creswell, 2013) μίας τριμελούς ομάδας από τους ΦΜΔ που συμμετείχαν στο πρόγραμμα. Η συγκεκριμένη ομάδα πραγματοποίησε 8 συναντήσεις με μία μαθήτρια της Στ΄ δημοτικού, με στόχο την ανάπτυξη νοήματος για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μαθήτρια είχε ήδη διδαχθεί τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων στην τάξη της. Από την παρατήρηση μερικών διδασκαλιών είχε διαπιστωθεί ότι προτεραιότητα είχαν οι σωστές απαντήσεις, παρά η κατανόηση. Στις συναντήσεις των ΦΜΔ με τη μαθήτρια, μία ΦΜΔ είχε τον κύριο ρόλο της δασκάλας. Τα άλλα δύο μέλη βοηθούσαν τη συζήτηση, όπου έκριναν απαραίτητο, ενώ παράλληλα κρατούσαν γραπτές σημειώσεις και βιντεοσκοπούσαν τη συνάντηση.

Πηγή των δεδομένων αποτελούν οι βιντεοσκοπήσεις των συναντήσεων των ΦΜΔ με την ομάδα στήριξης και των ΦΜΔ με τη μαθήτρια. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν τα φύλλα σχεδιασμού της διδασκαλίας των ΦΜΔ, τα φύλλα αποτίμησης, οι γραπτές απαντήσεις τους σε διάφορα προβλήματα, καθώς και τα φύλλα εργασίας της μαθήτριας κατά τη διάρκεια των συναντήσεων.

Η ανάλυση των δεδομένων ακολούθησε τέσσερα στάδια. Στο πρώτο στάδιο, πραγματοποιήθηκε απομαγνητοφώνηση των βίντεο από τις συναντήσεις μας με τους ΦΜΔ, αλλά και των ΦΜΔ με τη μαθήτρια. Στη συνέχεια, επιλέξαμε τα σημεία εκείνα που περιείχαν ενδείξεις για την εξοικείωση των ΦΜΔ με τον συντονισμό μονάδων. Στο τρίτο στάδιο,

επιλέξαμε κρίσιμα επεισόδια από τις συναντήσεις της ομάδας με τη μαθήτρια. Το κριτήριο για την επιλογή αυτών των επεισοδίων ήταν οι ερωτήσεις που έθετε η ομάδα των ΦΜΔ και βοηθούσαν τη μαθήτρια να εστιάσει στις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων. Στο τελευταίο στάδιο της ανάλυσης, έγινε προσπάθεια να ερμηνευτεί η στήριξη που παρείχαν οι ΦΜΔ στη μαθήτρια για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, με βάση την εξοικείωσή τους με τον συντονισμό μονάδων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να γίνει κατανοητό ότι το κλάσμα έχει σχέση με τις νοητικές ενέργειες που συντελούνται (π.χ. ισομερισμός, επανάληψη) με αφορμή κάποιο πρόβλημα και δεν είναι απλά το όνομα που δίνεται σε ένα αντικείμενο, δόθηκε στους ΦΜΔ να αναφέρουν τα διαφορετικά κλάσματα που θα μπορούσαν να διακρίνουν σε μια ορθογώνια διάταξη από 2 σειρές με 3 κύκλους στην καθεμιά. Όλοι οι ΦΜΔ μπόρεσαν να διακρίνουν μοναδιαία και γνήσια κλάσματα, ενώ κανένας δεν εντόπισε καταχρηστικά κλάσματα (π.χ. 6/5, 6/3, 6/2 κτλ.). Αυτό θεωρήθηκε από εμάς ως μία ένδειξη ότι οι ΦΜΔ δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιούν αυθόρμητα συντονισμούς μονάδων σε τρία διαφορετικά επίπεδα.

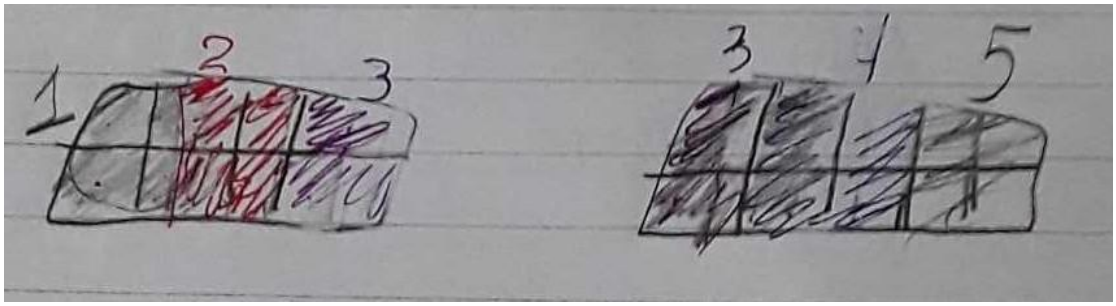
Οι συζητήσεις στα μαθήματα με αφορμή τις λύσεις των ΦΜΔ σε μαθηματικά προβλήματα έδιναν ευκαιρίες ώστε προοδευτικά να αρχίσουν να συνειδητοποιούν τη σημασία του συντονισμού μονάδων σε διαφορετικά επίπεδα ως βασική πτυχή της ποσοτικής σκέψης σε προβλήματα με κλάσματα. Μία ανάλυση των μεταβάσεων αυτών θα είχε ενδιαφέρον, αλλά δεν εστιάζει στο θέμα της παρούσας εργασίας. Αντίθετα, μας ενδιαφέρει η ανάπτυξη της ικανότητάς τους να οργανώνουν ποσότητες μέσω της διδασκαλίας τους σε μαθητές του δημοτικού σχολείου.

Η ανάλυσή μας εστιάζει σε τρία επεισόδια που κρίνουμε πως είναι αντιπροσωπευτικά του τρόπου που η τριμελής ομάδα των ΦΜΔ στήριζε μια μαθήτρια να εμβαθύνει στο ποσοτικό νόημα του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Όπως θα φανεί, ο τρόπος αυτός συνδέεται στενά με την ευελιξία της δασκάλας να διαχειρίζεται τις διαφορετικές μονάδες μέτρησης των ποσοτήτων που αναφέρονται στα προβλήματα.

Στην πρώτη συνάντηση, οι ΦΜΔ μέσα από διάφορα προβλήματα επιχείρησαν να διαπιστώσουν τις γνώσεις της μαθήτριας που θα μπορούσαν να λειτουργήσουν ως αφετηρία για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, με το πρόβλημα «2/5x3/7=;» διαπίστωσαν ότι η μαθήτρια αδυνατούσε να εξηγήσει τα βήματα του αλγορίθμου, παρόλο που τον εφάρμοσε σωστά.

Μέσα σε ένα πλαίσιο δίκαιης μοιρασιάς, σκόπευαν να της ζητήσουν να μοιράσει «2 ορθογώνιες πίτσες σε 5 παιδιά» και στη συνέχεια «4 ορθογώνιες πίτσες μισού μεγέθους από τις προηγούμενες σε 10 παιδιά», προκειμένου να συζητήσουν μαζί της την ποσοτική σχέση των αποτελεσμάτων στις δύο δίκαιες μοιρασιές. Παρόλα αυτά, ο χρόνος επέτρεψε να συζητηθεί μόνο το πρώτο πρόβλημα. Στο φύλλο σχεδιασμού της συνάντησης, οι ΦΜΔ είχαν σημειώσει ότι με αυτήν τη δραστηριότητα ήθελαν να ελέγξουν κατά πόσον η μαθήτρια αντιλαμβάνεται ότι τα κλασματικά μερίδια 2/5 και 4/10 δεν αντιπροσωπεύουν την ίδια ποσότητα. Κρίνουμε ότι η ιδέα της διαφορετικού μεγέθους μονάδας, στην οποία αναφέρονται τα δύο κλάσματα, θα μπορούσε να συνδέεται με την κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων ως αλλαγή στην μονάδα μέτρησης μιας ποσότητας (Simon κ.ά., 2018a). Επιπλέον, η κατάλληλη διαχείριση του προβλήματος θα μπορούσε να προσφέρει στη μαθήτρια ευκαιρίες ισομερισμού και επιμεριστικού ισομερισμού της ποσότητας, ενέργειες απαραίτητες για να δοθεί νόημα και στον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Simon κ.ά., 2018b).

Αρχικά, η μαθήτρια έκανε τη διαίρεση 5:2. Η συζήτηση με αφορμή την λανθασμένη της απάντηση, την οδήγησε να διαιρέσει το 2 με το 5 και να καταλήξει πως κάθε φίλος θα φάει 0,4, δηλαδή 4/10 της πίτσας. Η ΦΜΔ ζήτησε από τη μαθήτρια να δείξει την απάντησή της πάνω στο σχήμα των δύο ορθογωνίων πιτσών που είχε ήδη σχεδιάσει στο χαρτί της. Με τη κίνησή της αυτή θεωρούμε πως η ΦΜΔ θέλησε να βοηθήσει τη μαθήτρια να οδηγηθεί σε ένα ποσοτικό νόημα του πηλίκου. Καθώς η μαθήτρια δεν ήταν εξοικειωμένη να σκέφτεται με σχήματα που αντιπροσωπεύουν ποσότητες, δυσκολεύτηκε να δημιουργήσει ένα σχέδιο που να σχετίζεται άμεσα με την απάντησή της, δηλαδή να χωρίσει την κάθε πίτσα σε 10 κομμάτια. Τελικά, με τις ερωτήσεις της φοιτήτριας που εστίαζαν την προσοχή της μαθήτριας στη σχέση του σχεδίου με τα δεδομένα του προβλήματος κατάφερε να σχεδιάσει το μερίδιο κάθε φίλου μετά από αρκετές ενδιάμεσες αποτυχημένες απόπειρες (Εικ.1).



Εικόνα 1: Το σχέδιο της μαθήτριας για το πρόβλημα «2 πίτσες σε 5 φίλους»

Σε μια προσπάθεια της φοιτήτριας για ανακεφαλαίωση, έγινε ο διάλογος:

Φοιτήτρια: Και πόσο είπες θα φάει ο καθένας;

Μαθήτρια: Θα φάει ή τα **2/10** ή τα **4/20**.

Φοιτήτρια: Της κάθε πίτσας ή και από τις δύο πίτσες μαζί;

Μαθήτρια: Και από τις δύο.

Φοιτήτρια: Και από την κάθε πίτσα, δηλαδή, ο καθένας τι έχει φάει;

Μαθήτρια: Ο ένας έχει φάει τα **4/10** από τη μία πίτσα. Άρα, γενικά έχει φάει και από τις δύο πίτσες **4/20**.

Αν και δεν διευκρινίστηκε ο τρόπος με τον οποίο η μαθήτρια κατέληξε στις απαντήσεις της, θα μπορούσαμε να πούμε ότι για την απάντηση 4/20 των πιτσών, ενδεχομένως, να συντόνισε μονάδες δυο επιπέδων, δηλαδή να 'είδε' την ποσότητα ως μία μονάδα – οι 2 πίτσες μαζί (1ο επίπεδο), χωρισμένη σε 20 κομμάτια (2ο επίπεδο). Για την ισοδυναμία, όμως, των μεριδίων 4/20 των 2 πιτσών και 4/10 της μιας πίτσας, θα χρειαζόταν να συντονίσει δύο διαφορετικές οργανώσεις της ποσότητας σε 3 επίπεδα μονάδων, αφενός ως μία μονάδα (οι 2 πίτσες μαζί), 10 δυάδες κομματιών και 20 απλές μονάδες (τα ξεχωριστά κομμάτια στα οποία είναι χωρισμένες οι 2 πίτσες) και αφετέρου ως μια μονάδα (οι 2 πίτσες μαζί), 2 μονάδες (η κάθε πίτσα χωριστά) και 20 απλές μονάδες - από 10 στην κάθε πίτσα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, τα κομμάτια των πιτσών θα μπορούσαν να ερμηνεύονται ως εικοστά των 2 πιτσών και ταυτόχρονα ως δέκατα της μιας πίτσας.

Θεωρούμε πως η μαθήτρια έδωσε τις παραπάνω απαντήσεις, χάρη στην εύστοχη στήριξη της ΦΜΔ, η οποία σε κάθε λανθασμένη απάντησή της την προκαλούσε ρωτώντας την: «Από τη μία πίτσα;», «Από τις δύο πίτσες;», «Από την καθεμία πίτσα;», εστιάζοντας την προσοχή της στην μονάδα αναφοράς. Η επιμονή της φοιτήτριας στις μονάδες αναφοράς των μεριδίων θα μπορούσε να υπονοεί την ικανότητα της ΦΜΔ να συντονίζει με ευχέρεια δυο δομές 3 επιπέδων

μονάδων. Δεν έχουμε, όμως, στοιχεία που να επιβεβαιώνουν μία τέτοια υπόθεση. Το γεγονός ότι δε ζητήθηκαν διευκρινίσεις για την απάντηση 2/10 των 2 πιτσών, μας οδήγησε να συζητήσουμε τη συγκεκριμένη ισοδυναμία μεριδίων με όλους τους φοιτητές. Τελικά, στη συνάντηση μας με τους ΦΜΔ δόθηκε η ευκαιρία να αποσαφηνιστούν οι εμπλεκόμενες οργανώσεις των μονάδων, καθώς και η σπουδαιότητα σχεδιασμού των διαφορετικών ομαδοποιήσεων στα παραγόμενα σχήματα.

Στην τρίτη συνάντηση, οι ΦΜΔ έδωσαν στη μαθήτρια το παρακάτω πρόβλημα: «Έχουμε μια κορδέλα. Από αυτήν παίρνουμε τα ¾, για να φτιάξουμε χριστουγεννιάτικα στολίδια. Τελικά, προλάβαμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο το 1/9 από αυτήν. Τι μέρος της κορδέλας χρησιμοποιήσαμε;». Η μαθήτρια επέλεξε, αρχικά, να χωρίσει τα 3 κομμάτια σε 9 μέρη το καθένα, επειδή, όπως ισχυρίστηκε, 4x9=36. Σύμφωνα με τα λεγόμενά της, αυτή η ιδέα προέκυψε από 'τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων', τον οποίο ήδη γνώριζε. Η έντονη προσπάθεια της φοιτήτριας να τη στηρίξει στην ανάπτυξη ποσοτικού νοήματος για τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων τη βοήθησε να δει τα 36 κομμάτια σε σχέση με τα 4 μέρη του 4/4. Όμως, στη συνέχεια, η μαθήτρια εστιάζοντας μόνο στα 3 εκ των τεσσάρων μερών φάνηκε επιρρεπής στην απάντηση 3/27. Η φοιτήτρια ζήτησε επιπλέον διευκρινίσεις σχετικά με τον ισομερισμό των 3 μερών που θα επέτρεπε τον σχηματισμό του 1/9. Η μαθήτρια πρότεινε να χωρίσει τα 3 μέρη του ¾ σε 3 κομμάτια το καθένα, αντί σε 9 που είχε πει αρχικά. Η φοιτήτρια δεν απέρριψε την πρότασή της. Αφού η μαθήτρια ολοκλήρωσε την κατασκευή της ζητούμενης ποσότητας, η ΦΜΔ της ζήτησε να προσδιορίσει το μέγεθός της σε σχέση με την αρχική κορδέλα. Τελικά, η απάντηση 1/12 έγινε δεκτή από τη φοιτήτρια, παρόλο που διέφερε από την απάντηση 3/36 του αλγορίθμου. Ο διαχωρισμός της κατασκευής της ποσότητας από τη μέτρησή της θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένδειξη ότι ο συντονισμός των μονάδων στις εμπλεκόμενες ποσότητες είχε για τη φοιτήτρια περιθώρια να εκδηλωθεί και ενδεχομένως να γίνει αντιληπτός από τη μαθήτρια. Στοιχεία για την ικανότητα της φοιτήτριας να συντονίζει ποσότητες με 3 επίπεδα μονάδων καθώς δίδασκε τη μαθήτρια έχουμε από την τελευταία συνάντηση. Με αφορμή το πρόβλημα: «Σε ένα δάσος υπάρχει ένα μονοπάτι όπου ανά 1/5 του μονοπατιού υπάρχει μία έξοδος. Ένας αθλητής έτρεξε τη Δευτέρα το 1/7 του 1/5 του μονοπατιού. Τι σχέση έχει το 1/7 του 1/5 του μονοπατιού με όλο το μονοπάτι;…», η φοιτήτρια ρώτησε τη μαθήτρια: «Τι σχέση έχει όλο το μονοπάτι με το 1/5 του μονοπατιού;». Μετά την απάντηση της μαθήτριας ότι ολόκληρο το μονοπάτι είναι πενταπλάσιο του 1/5 του μονοπατιού, τη ρώτησε: «Πόσες φορές μεγαλύτερο θα είναι το 1/5 του μονοπατιού από το 1/7 του 1/5 του μονοπατιού που έτρεξε τη Δευτέρα;». Η μαθήτρια δεν παρήγαγε τις απαντήσεις της βάσει κάποιου γραπτού σχεδίου, ωστόσο, η φοιτήτρια τις κατέγραφε με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων. Όταν η μαθήτρια απάντησε «7 φορές», η ΦΜΔ προσπάθησε να τη βοηθήσει να συνδυάσει τις απαντήσεις της, για να βρει ότι όλο το μονοπάτι είναι 35 φορές μεγαλύτερο από αυτό που ο αθλητής είχε τρέξει. Η αντιστροφή αυτής της σχέσης οδήγησε στην τελική απάντηση. Είναι εμφανές ότι η φοιτήτρια, έχοντας στον νου της τα 3 επίπεδα των εμπλεκόμενων μονάδων, προσπάθησε χωρίς σχήμα να ωθήσει και τη μαθήτρια να συνειδητοποιήσει τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις των μονάδων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μελέτη περίπτωσης των ΦΜΔ στην οποία αναφερθήκαμε φανερώνει ότι κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής τους, με τις ευκαιρίες που τους δόθηκαν, ανέπτυξαν την ικανότητά τους να συντονίζουν τρία επίπεδα μονάδων. Μέσα από την ανάλυση των επεισοδίων, φάνηκε ότι έθεταν στη μαθήτρια ερωτήσεις οι οποίες ήταν προσανατολισμένες στις σχέσεις ποσοτήτων. Οι ερωτήσεις αυτές βοηθούσαν τη μαθήτρια να αρχίσει να εμβαθύνει στο νόημα του πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

Η ικανότητα των ΦΜΔ να θέτουν αυτές τις ερωτήσεις πηγάζει από τη δική τους προοδευτική εξοικείωση με την οργάνωση ποσοτήτων σε διαφορετικά επίπεδα, γεγονός που επαληθεύει την αρχική μας υπόθεση πως ο συντονισμός μονάδων είναι αναπόσπαστο στοιχείο της μαθηματικής γνώσης των ΦΜΔ για τη διδασκαλία.

Ο συντονισμός των μονάδων δεν βοηθά μόνο στην εμβάθυνση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, αλλά υπεισέρχεται και στηρίζει τη βαθιά κατανόηση ενός σημαντικού μέρους της ύλης των Μαθηματικών. Ως εκ τούτου, θεωρούμε ότι η διδασκαλία (πρακτική άσκηση) των δασκάλων, αλλά και των φοιτητών – δασκάλων μπορεί να προσφέρει άφθονες ευκαιρίες για την ανάπτυξή του.

Η ικανότητα του συντονισμού μονάδων συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών ιδεών, που σήμερα αποτελεί στόχο της εκπαίδευσης. Η βαθύτερη αυτή κατανόηση διαμορφώνει δασκάλους που επιδιώκουν οι μαθητές να αποκτήσουν μια γόνιμη σχέση με τα Μαθηματικά και αντίστοιχα μαθητές που αναπτύσσουν κριτική και δημιουργική σκέψη, δηλαδή, πολίτες που σκέφτονται κι αποφασίζουν. Συμπερασματικά, η βαθύτερη κατανόηση είναι ένας τρόπος να προωθηθεί «ενεργή πολιτειότητα».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, *1*, 121-176.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry & research design* (3rd ed.). Los Angeles, CA: Sage Publications.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In *Educational design research* (pp. 29-63). Routledge.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 1-18.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 629-667.

Lee, S. J., & Shin, J. H. (2011). Preservice teachers' Key Developmental Understandings (KDUs) for fraction multiplication. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, *14*(4), 477-490.

Norton, A., & Boyce, S. (2015). Provoking the construction of a structure for coordinating n+ 1 levels of units. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 211-232.

Norton, A., Boyce, S., Phillips, N., Anwyll, T., Ulrich, C., & Wilkins, J. L. (2015a). A written instrument for assessing students' units coordination structures. *Mathematics Education*.

Norton, A., Boyce, S., Ulrich, C., & Phillips, N. (2015b). Students' units coordination activity: A cross-sectional analysis. The Journal of Mathematical Behavior, 39, 51-66.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. A., Kara, M., Norton, A., & Placa, N. (2018a). Fostering construction of a meaning for multiplication that subsumes whole-number and fraction multiplication: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, *52*, 151-173.

Simon, M. A., Kara, M., & Placa, N. (2018b). Promoting reinvention of a multiplication-of-fractions algorithm: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, *52*, 174-187.

Steffe, L. P. (2007, April). Problems in mathematics education. In *Senior Scholar Award of the Special Interest Group for Research in Mathematics Education (SIG-RME) at the annual conference of the American Educational Research Association in Chicago, Illinois*.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2009). *Children's fractional knowledge*. Springer Science & Business Media.

Tzur, R. (2018). Profound awareness of the learning paradox (PALP). In B. Jaworski and T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, (pp. 137-156). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

von Glasersfeld, E. (1995). A constructivist Appoach to Teaching. *Constructivism in Education*, 3-16.

Θεματική Ενότητα 7: Εμπειρικές και θεωρητικές μελέτες στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που δεν κατατάσσονται στους θεματικούς άξονες 1-6.

«ΟΤΑΝ Η ΓΡΑΜΜΗ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ» ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΙ ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΘΕΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρμύρα Ιωάννα[1], Χατζημανωλάκη Βασιλική[2], Βασιλοπούλου Μαρία[1]
ΕΚΠΑ[1], ΕΑΠ[2]

iwannaarm@yahoo.com, vassilikixa@gmail.com,
vasilopouloumath@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά τη χρήση παραμυθιών στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Εστιάζει μέσω της grounded theory, στις συνδέσεις που ανέπτυξαν οι μαθητές μέσω των επιχειρημάτων τους καθώς επίσης την ισότιμη συμμετοχή των μαθητών με διαφορετικές μαθησιακές ανάγκες. Η διδακτική πρόταση βασίζεται στο παραμύθι «Όταν η Γραμμή συνάντησε τον Κύκλο» και εφαρμόστηκε σε μία τάξη της Α΄ Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως οι μαθητές ανέπτυξαν συνδέσεις που αφορούν α) γεωμετρικά σχήματα ή γεωμετρικές έννοιες, β) εικόνες της καθημερινότητας, και γ) την τέχνη καθώς επίσης και την συμμετοχή όλων των μαθητών της τάξης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα παραμύθια που έχουν σχεδιαστεί για ακαδημαϊκούς σκοπούς σε σχολεία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και σε ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης γίνονται σταδιακά απαραίτητο εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς (Kucheriavyi, 2022). Ειδικότερα, παρουσιάζουν ευκαιρίες θετικής εμπλοκής -συνεπώς συμπερίληψης- των μαθητών μέσω της διδασκαλίας της κοινωνικής δικαιοσύνης και της ανάπτυξης της συναισθηματικής νοημοσύνης (Saxby, 2022). Η μέθοδος της εξιστόρησης συμβάλλει παιδαγωγικά στη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών αφού οι μαθητές βιώνουν έναν εντελώς νέο τρόπο μάθησης (Karlsen et al., 2020). Η χρήση της λογοτεχνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλει στη μείωση του άγχους και στην αύξηση του ενδιαφέροντος και της εμπιστοσύνης των μαθητών για τα μαθηματικά (Furner, 2018). Παρόλα αυτά οι έρευνες που εστιάζουν στην επιτυχία της χρήσης παραμυθιών στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι ελάχιστες και μάλιστα αφορούν κυρίως μαθητές προσχολικής ηλικίας (Perger, 2011). Η εργασία αυτή, στοχεύει να αναδείξει τα θετικά χαρακτηριστικά σε μία τάξη δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία επιχειρεί να απαντήσει η εργασία αυτή είναι: ΕΕ1: τι είδους συνδέσεις αναπτύσσουν οι μαθητές στην τάξη των μαθηματικών σε μία διδασκαλία

βασισμένη σε ένα παραμύθι; ΕΕ2: Θα συμμετάσχουν ισότιμα οι μαθητές με άκρως αντίθετες μαθησιακές ανάγκες με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους;

ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Η Roos (2023) βλέπει τη συμπερίληψη ως διαδικασίες συμμετοχής (2023) στη μαθηματική εκπαίδευση στις οποίες έχει πρόσβαση κάθε μαθητής. Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τις τάξεις δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ΦΕΚ235/Αρ. 4362/Δ2/20-01-2023) υποστηρίζει έργα που εμπλέκουν τους μαθητές στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού. Προτείνει τα μαθηματικά έργα που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί, να προσφέρουν ευκαιρίες ανάπτυξης ποικιλίας μαθηματικών και κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών. Για παράδειγμα, να έχουν πλούσιες μαθηματικές δραστηριότητες, οποιασδήποτε μορφής όπως εκείνης του παιχνιδιού. Η έρευνα δείχνει πως οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να συμπεριλάβουν μαθητές με άκρως αντίθετο επίπεδο προκλήσεων στα μαθηματικά (Roos, 2019). Ένας από τους παράγοντες που οι ίδιοι παραδέχτηκαν, είναι η δυσκολία εύρεσης κατάλληλων διδακτικών εργαλείων (Vasilopoulou & Triantafillou, 2023). Η μελέτη των Lemonidis & Kaiafa, (2019) έδειξε πως οι μαθητές με μέτριες και χαμηλές επιδόσεις φαίνεται να ωφελούνται ιδιαίτερα στα μαθηματικά από τη χρήση της αφήγησης ιστοριών. Ταυτόχρονα, οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις μπορούν να βελτιώσουν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και του τρόπου με τον οποίο οι έννοιες αυτές σχετίζονται με θέματα της πραγματικής ζωής (Price, 2009). Η χρήση της αφήγησης δημιουργεί ένα ουσιαστικό πλαίσιο για τη διεξαγωγή μαθηματικών συζητήσεων (Flevares & Schiff, 2014) και ιδιαίτερα όσον αφορά τρόπους με τους οποίους τα μαθηματικά συνδέονται με καθημερινές καταστάσεις και εμπειρίες των μαθητών (Koellner et al., 2009), ενώ ταυτόχρονα προάγει τη μαθηματική γλώσσα (Wiburne & Napoli, 2008).

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Στόχοι

Στην εν λόγω διδακτική πρόταση, όλοι οι μαθητές ανεξάρτητα από τις διαφορετικές μαθησιακές τους ανάγκες, έχουν την ευκαιρία να γίνουν μέρος ενός μαθηματικού παραμυθιού, να βιώσουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά με τον τρόπο που επιλέγουν και να συνδεθούν με το περιβάλλον. Αποτελεί ένα ανοιχτό μαθηματικό έργο, καθώς οι συμμετέχοντες μελετούν τα σχήματα, τη φύση και το περιβάλλον μέσα από τη ζωντανή αλληλεπίδραση και τη συνεργατική δουλειά, τη συν-

δημιουργία, την ανταλλαγή ιδεών και αποτελεσμάτων. Εξερευνούν βιωματικά τον κύκλο, τη γραμμή και το τετράγωνο μέσα από κατασκευές, κινήσεις, σχέδια, θέατρο, παρατηρήσεις, συζητήσεις και άλλα. Συζητούν για το «τέλειο σχήμα», αλλά παράλληλα προβληματίζονται σχετικά με τη διαφορετικότητα, τη συμπερίληψη, τη φιλία και τη δικαιοσύνη μέσω της δημιουργικότητας, της τέχνης και της λογικής σκέψης. Βασίζεται στη θεωρία ότι τα διάφορα είδη δημιουργικότητας στοχεύουν στην απόκτηση συναισθηματικής εμπειρίας θεμελιωδών φυσικών νόμων, τύπων και αφηρημένων ορισμών (που δίνονται στα σχολικά βιβλία) δηλαδή της ουσίας των εννοιών των μαθηματικών (Kucheriavyi, 2022).

Το παραμύθι

Το παραμύθι «όταν η Γραμμή συνάντησε τον Κύκλο», που δημιουργήθηκε από τη Βασιλική Χατζημανωλάκη (2^{η} συγγραφέας), είναι ένα πρωτότυπο λογοτεχνικό έργο στο οποίο οι χαρακτήρες-ήρωες είναι γεωμετρικά σχήματα και των οποίων η δράση αποκαλύπτει μαθηματικές έννοιες, ενώ ταυτόχρονα συμβολίζει σχέσεις και κοινωνικές συμπεριφορές. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διδακτικούς σκοπούς αφού όταν οι κύριοι χαρακτήρες της ιστορίας χρησιμοποιούνται για να θέσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, μπορούν να ενεργοποιήσουν τη φαντασία και τη δημιουργικότητα των μαθητών και να δημιουργήσουν ενθουσιασμό στην τάξη (Casey, 2004). Η «Γραμμή» και ο «Κύκλος» είναι οι δύο κύριοι ήρωες του παραμυθιού. Το πρόβλημα ξεκινά όταν η Γραμμή ζητά από τον Κύκλο να γίνουν φίλοι και ο Κύκλος αρνείται, γιατί πιστεύει ότι είναι το τέλειο σχήμα. Απευθύνονται έτσι στο «Τετράγωνο» για βοήθεια και διαμεσολάβηση στη μεταξύ τους αντιπαράθεση επιχειρημάτων. Τους ζητείται να επιδείξουν τα χαρακτηριστικά και τις δεξιότητές τους, αλλά στο τέλος, θα βρουν τον τρόπο να συνεργαστούν και να γίνουν φίλοι.

Σχεδιασμός

Αυτό το έργο προσφέρεται για ομάδες μικτών ικανοτήτων, καθώς οι μαθητές φαίνεται να τις προτιμούν (Vasilopoulou & Triantafillou, 2022). Η δραστηριότητα θα μπορούσε να γίνει χωρίς κανένα διδακτικό εργαλείο, ωθώντας τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το σώμα τους για να αναπαραστήσουν τα σχήματα και τις ιδιότητές τους. Ωστόσο, για να ενισχυθεί ο συμπεριληπτικός χαρακτήρας της δραστηριότητας (Erath et al., 2021), θα ήταν ωφέλιμο οι δραστηριότητες να οργανωθούν με την αξιοποίηση σταθμών πολλαπλών χειραπτικών εργαλείων στο χώρο, με άμεση πρόσβαση στους μαθητές. Για παράδειγμα, προτείνουμε σταθμούς με χαρτί, μολύβια, χρώματα ή πλαστελίνη, σχοινιά, κορδέλες ή κρουστά κ.α. Επιπλέον, οι δραστηριότητες μπορούν να πραγματοποιηθούν σε

εξωτερικό χώρο, ώστε τα παιδιά να συνδεθούν με το περιβάλλον. Παρατηρώντας τη φύση, αποδομώντας την εικόνα και εμβαθύνοντας στα σχήματα, μπορούν να παρατηρήσουν και να ανακαλύψουν το τετράγωνο στα λουλούδια, τη γραμμή στη θάλασσα κλπ. Η αξία της σύνδεσης του περιβάλλοντος με τα μαθηματικά μέσω της διδασκαλίας, έχει αναδειχθεί ερευνητικά (Le Grange, 2010).

ΜΕΛΕΤΗ

Η διδακτική παρέμβαση «Όταν η Γραμμή συνάντησε τον Κύκλο» εφαρμόστηκε σε τάξεις μαθηματικών Νηπιαγωγείου, Γυμνάσιου, και Επαγγελματικού Λυκείου. Στόχος ήταν να μελετήσουμε τα επιχειρήματα που θα ανέπτυσσαν οι μαθητές και τον τρόπο που θα συνεργάζονταν. Επιπλέον, επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε αν θα συμπεριλαμβάνονταν οι μαθητές με ήπιες μαθησιακές δυσκολίες εξίσου με εκείνους που κατανοούν τα μαθηματικά του σχολείου πιο γρήγορα από τους άλλους συμμαθητές τους. Στην παρούσα ερευνητική εργασία παρουσιάζουμε τα δεδομένα που συλλέχθηκαν σε ένα Γυμνάσιο της Αττικής από ένα τμήμα της Α΄ Γυμνασίου.

ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Στη συγκεκριμένη μελέτη συμμετείχαν εθελοντικά α) η εκπαιδευτικός που διαθέτει πάνω από δέκα χρόνια διδακτική εμπειρία και β) 18 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Εστιάσαμε σε δύο μαθητές (χρησιμοποιούμε τα ψευδώνυμα Ιόλη και Γιώργος) με διαγνωσμένες ήπιες μαθησιακές δυσκολίες. Σύμφωνα με την εκπαιδευτικό, οι εν λόγω μαθητές δεν συμμετέχουν ιδιαίτερα στο μάθημα των μαθηματικών. Χαρακτηρίζει την Ιόλη ως «ντροπαλή» και τον Γιώργο ως «ήσυχο». Οι υπόλοιποι μαθητές αναφέρονται με το κωδικό όνομα Μ1, Μ2, …, Μ16. Μεταξύ αυτών είναι και τρεις μαθητές οι οποίοι σύμφωνα με την εκπαιδευτικό έχουν ιδιαίτερη ευκολία στην κατανόηση των μαθηματικών του σχολείου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η εφαρμογή της διδακτικής πρότασης διήρκησε δύο διδακτικές ώρες. Δημιουργήθηκαν δύο ομάδες: η ομάδα «Κύκλος» και η ομάδα «Γραμμή». Οι μαθητές επέλεξαν την ομάδα που προτιμούσαν να συμμετέχουν. Ταυτόχρονα, μία μαθήτρια προθυμοποιήθηκε να αναλάβει το ρόλο του «Τετραγώνου». Στη συνέχεια, η εκπαιδευτικός βασισμένη στην πλοκή του παραμυθιού, ζήτησε από κάθε μαθητή να επιχειρηματολογήσει σχετικά με το «ποιος είναι το καλύτερο σχήμα», δίνοντας την ευκαιρία να εμπλακούν όλοι οι μαθητές της τάξης. Η δραστηριότητα είχε τον χαρακτήρα παιχνιδιού, κάτι που ενθάρρυνε τους μαθητές να βρίσκουν όσα περισσότερα επιχειρήματα μπορούσαν σε συνεργασία με τους συμμαθητές

τους για τις ιδιότητες και τα θετικά χαρακτηριστικά μίας ευθείας ή ενός κύκλου αλλά και του συνδυασμού τους. Η εκπαιδευτικός τους παρότρυνε να εντοπίσουν τα σχήματα στο περιβάλλον της τάξης τους, του σχολείου αλλά και έξω από αυτό. Στο τέλος, σχεδίασαν όλοι ζωγραφιές, αποτυπώνοντας καλλιτεχνικά τα επιχειρήματα που ανέπτυξαν κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τους εξής τρόπους: α) με μαγνητοφώνηση, β) με παρατήρηση στην τάξη και γ) με σημειώσεις πεδίου. Κατόπιν συλλέχθηκαν δ) οι δημιουργίες και τα επιχειρήματα των μαθητών που είχαν καταγραφεί (πχ. «ο κύκλος είναι στρογγυλός και λείος χωρίς γωνίες» ή «γιατί ο κύκλος έχει ακτίνες» ή «μια γραμμή μπορεί να είναι ό,τι σχήμα θέλει» ή «ο κύκλος είναι μια καμπύλη γραμμή»). Τέλος, έγινε ε) συνέντευξη με την εκπαιδευτικό σχετικά με την εμπειρία της με περιπτώσεις μαθητών με ήπιες μαθησιακές δυσκολίες, τους τρόπους επιμόρφωσης και προσπάθειας συμπερίληψής τους, όπως για παράδειγμα ο διαδραστικός πίνακας και τα γραφήματα. Στη συνέχεια, ακολούθησε στ) η απομαγνητοφώνηση της διδασκαλίας και της συνέντευξης. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με τη βοήθεια της grounded theory (Charmaz, 2014). Στην πρώτη φάση εντοπίστηκαν οι συνδέσεις που έκαναν οι μαθητές και στη συνέχεια κατηγοριοποιήθηκαν σύμφωνα με τα κοινά τους στοιχεία. Για παράδειγμα εντοπίστηκαν επιχειρήματα που συνδέονταν με την καθημερινότητά τους: «δε θα μπορούσαμε να ζήσουμε αν δεν είχαμε ευθεία, δηλαδή τα σπίτια θα ήταν κυκλικά;» (Μ5)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Συνδέσεις σε αντιπαραβολή με το πρόγραμμα σπουδών

Οι μαθητές προκειμένου να υπερασπιστούν το σχήμα που εκπροσωπούσαν, εμβάθυναν στις ιδιότητες των σχημάτων όπως προβλέπεται στους μαθησιακούς στόχους του προγράμματος σπουδών της Α΄ Γυμνασίου. Μέσα από τους διαλόγους και τα επιχειρήματά τους, οι μαθητές ανέπτυξαν συνδέσεις που αφορούν γεωμετρικές έννοιες και σχήματα, την καθημερινότητα και την τέχνη.

α) σύνδεση με γεωμετρικά σχήματα ή γεωμετρικές έννοιες

Σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών, οι μαθητές είναι απαραίτητο να γνωρίζουν και να περιγράφουν βασικές γεωμετρικές έννοιες**,** όπως την ευθεία και την ημιευθεία: «Η γραμμή μπορεί να γίνει και ημιευθεία μπορεί να γίνει και ευθεία» (Μ4), «Μπορεί κάποιες φορές να μην έχει αρχή, να έχει τέλος και κάποιες φορές να μην έχει ούτε αρχή ούτε τέλος. Να μη ξέρουμε από πού έρχεται, αλλά κάπου να σταματά» (Μ6). Ταυτόχρονα, να

κατανοούν ιδιότητες του κύκλου αλλά και σχέσεις που αφορούν το τόξο και την επίκεντρη γωνία καθώς επίσης και τις μονάδες μέτρησης αυτών, σε απλά και σύνθετα γεωμετρικά σχήματα: «Ο κύκλος θεωρείται τέλειο σχήμα γιατί έχει και αρχή και τέλος, ενώ η γραμμή δεν έχει» ή «ο κύκλος έχει περισσότερες μοίρες απ' ότι η γραμμή. Δηλαδή ο κύκλος έχει 360°, ενώ η γραμμή 180°» (ομάδες μαθητών). Ακόμη, οι μαθητές θα πρέπει να κατανοούν τις σχετικές σχέσεις ευθείας και κύκλου:

> Μ18: Η γραμμή είναι κάθε σχήμα. Για παράδειγμα, αν βάλεις 4 γραμμές μαζί κάνεις ένα τετράγωνο»
>
> Μ4: Το τετράγωνο είναι μέσα στον κύκλο
>
> Μ5: ο κύκλος όμως μπορεί να κλείσει το τετράγωνο
>
> Μ3: αν η γραμμή δεν είχε σχηματίσει το τετράγωνο, το τετράγωνο δεν θα υπήρχε, άρα και ο κύκλος δεν θα μπορούσε να το έχει μέσα του ή αντίστοιχα το τετράγωνο να έχει μέσα το κύκλο.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής πρότασης, οι μαθητές προχώρησαν σε τεκμηρίωση αναπτύσσοντας λογικούς συλλογισμούς και χρήση γεωμετρικών οργάνων και ψηφιακών εργαλείων όπως προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών: «Ο κύκλος έχει άπειρους διαμέτρους» (Μ6). Μάλιστα, κάποιοι μαθητές σκέφτηκαν με επαγωγικό τρόπο και τελικά συνέδεσαν την ευθεία με ν-γωνα:

> «Με μια γραμμή μπορείς να βάλεις άλλες 2 γραμμές και να φτιάξεις ένα τρίγωνο. Αν σχεδιάσω πολλές γραμμές μπορώ να φτιάξω πολλά σχήματα, δηλαδή αν βάλω πολλές γραμμές μαζί μπορεί να φτιάξω αλλά σχήματα. Για παράδειγμα, με 4 γραμμές φτιάχνω τετράγωνο, με 8 ένα οκτάγωνο, και ούτε καθεξής. Δηλαδή, με μια γραμμή και με μια άλλη γραμμή και με μια τρίτη γραμμή μπορώ να φτιάξω διάφορα πολύγωνα»

Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών του Γυμνασίου σκοποθετεί μεταξύ άλλων τη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή αλλά και την τέχνη.

β) σύνδεση με εικόνες καθημερινότητας

Οι μαθητές εντόπισαν κύκλους και ευθείες σε όσα συναντούν ή μελετούν καθημερινά: «στα γράμματα» (Μ8) ή «στα παλιά χρόνια το κανόνι επιχρυσωνόταν με τέτοιους κύκλους» (Μ2) ή «και στα ποδήλατα και στα μηχανάκια και στα αυτοκίνητα και στα αεροπλάνα οι τροχοί είναι κυκλικοί» (Μ18). «Τα πάρκα είναι κυκλικά» (Μ9). «Τα μάτια είναι κυκλικά και τα ρουθούνια» (Μ1). Επιπλέον, συνέδεσαν το περιβάλλον του σχολείου με τον κύκλο: «παρατήρησα στη μπασκέτα που ήταν το στεφάνι» (Μ7) ή «κάτω εκεί που γίνεται το τζάμπολ» (Μ8), «εγώ είδα ένα λουλούδι κυκλικό σχήμα και τα κλαδιά ήταν ευθεία» (Μ9), «τα σύρματα αυτά είναι γραμμές σαν ακτίνες» (Μ6). Τέλος, παρατήρησαν στην τάξη τους: «η

πρίζα έχει κύκλο και γραμμές» (Μ13), «οι βίδες στην καρέκλα είναι στρόγγυλες κυκλικές στο κεφάλι τους και η βίδα ευθεία» (Μ9). Όμως δεν περιορίστηκαν στους εσωτερικούς και εξωτερικούς χώρους του σχολείου αλλά επεκτάθηκαν και στους δημόσιους δρόμους: «το ασθενοφόρο» (Μ10), «το φανάρι» (Μ12). Μάλιστα, κάποιοι μεταξύ των οποίων και η Ιόλη, παρατήρησαν ακόμα μακρύτερα συνδέοντας τον κύκλο και τις ευθείες με αστέρες του ηλιακού συστήματος (ήλιος): «ο κύκλος είναι σαν τον ήλιο, έχει ακτίνες» (Μ11), «ο κύκλος είναι ο ήλιος» (Ιόλη).

γ)σύνδεση με την τέχνη

Εξαιρετικά ενδιαφέρουσα είναι η αναφορά της Ιόλης στη χρήση του κύκλου στην τέχνη, αναδεικνύοντας τη σχέση της με τη γεωμετρία: «ο κύκλος θεωρείται τέλειος γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί πχ. για τη ζωγραφική» (Ιόλη). Φαίνεται πως αυτό επηρέασε τους συμμαθητές της, αφού στη συνέχεια βασίστηκαν σε εκείνη ώστε να αναδείξουν και τη γραμμή: «μα και η γραμμή μπορεί για τη ζωγραφική» (Μ2).

Συμμετοχή μαθητών με άκρως αντίθετες μαθησιακές ανάγκες

Η διδακτική παρέμβαση είχε τελικά θετικό πρόσημο για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (Ιόλη και Γιώργος) οι οποίοι συμμετείχαν ισότιμα στη δραστηριότητα της τάξης και στην επιχειρηματολογία. Για παράδειγμα, όταν η εκπαιδευτικός έδωσε την ευκαιρία στα παιδιά να εκφράσουν καλλιτεχνικά τα επιχειρήματά τους, η Ιόλη έδειξε να βρήκε ένα οικείο τρόπο έκφρασης και επικοινωνίας μέσω της ζωγραφικής. Αυτό συνδέεται με τις έρευνες που δείχνουν πως τα άτομα με δυσλεξία έχουν συχνά ένα φυσικό ταλέντο για μια ή περισσότερες τέχνες, μέσα σε αυτές η ζωγραφική (Chakravarty, 2009). Ο Γιώργος και η Ιόλη εντόπισαν τον κύκλο σε μία μπάλα και στα λουλούδια: «είναι το τέλειο σχήμα γιατί μας βοήθησε να φτιάξουμε τη μπάλα» (Γιώργος) και «τα πέταλα ενός λουλουδιού» (Ιόλη). Η σύνδεση με την καθημερινότητά τους προσέφερε δίκαιη ευκαιρία συμμετοχής, συνεπώς και συμπερίληψης (Foote & Lambert, 2011). Ταυτόχρονα, οι τρεις μαθητές με ιδιαίτερη ευκολία στα μαθηματικά του σχολείου συμμετείχαν ισότιμα με τους συμμαθητές τους, χωρίς να μονοπωλούν τη συζήτηση αλλά με ενθουσιασμό και δημιουργικότητα. Χαρακτηριστικά, μία μαθήτρια απευθυνόμενη στην εκπαιδευτικό είπε: «τέτοια μαθηματικά να κάνουμε κυρία».

Τέλος, ενδιαφέρον είναι πως συχνά οι μαθητές οικειοποιήθηκαν τους ρόλους τους στο παραμύθι μιλώντας σε α΄ ενικό πρόσωπο. «Είμαι το τέλειο σχήμα γιατί μπορείς να με αναπτύξεις και να φτιάξεις διάφορα αλλά σχήματα» (Μ4), «Δηλαδή αν εγώ περπατήσω σε μια κυκλική πλατεία κάποια στιγμή θα ξαναφτάσω εκεί που ξεκίνησα» (Μ13). Τέλος, προβληματίστηκαν για πιο γενικές έννοιες όπως α) ύπαρξης: «αν η γραμμή

δεν είχε σχηματίσει το τετράγωνο, το τετράγωνο δε θα υπήρχε, άρα και ο κύκλος δε θα μπορούσε να το έχει μέσα του ή αντίστοιχα το τετράγωνο να έχει μέσα το κύκλο» (Μ3), β) τελειότητας: «Εγώ πιστεύω ότι και τα δύο έχουν ελαττώματα και θετικά και κανένα από τα δύο δεν γίνεται να είναι τέλειο» και γ) φιλοσοφίας: «Μα τίποτα δεν είναι τέλειο».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι πολλαπλές ευκαιρίες έκφρασης και εμπλοκής στη δραστηριότητα σε συνδυασμό με την εξιστόρηση ενός παραμυθιού και τη διαρκή μαθηματική συζήτηση των παιδιών, έδωσε στα συμμετέχοντα παιδιά δυνατότητες ανάλυσης, συνειδητοποίησης, κατανόησης και εμβάθυνσης μαθηματικών εννοιών. Η διατύπωση του μαθηματικού έργου συνδέεται με την ανάπτυξη επιχειρημάτων, μιας και ενεργοποιεί την αντιπαράθεση απόψεων. Οι μαθητές ήταν πρόθυμοι να συμβάλλουν με κάθε τρόπο στα επιχειρήματα τόσο σε ατομικό όσο και σε ομαδικό επίπεδο. Συμμετείχαν όλοι και το κλίμα της τάξης ήταν θετικό. Όπως έχει ειδωθεί ερευνητικά σε τάξεις πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Cahyandari & Fitriana, 2023), έτσι και εδώ τα μαθησιακά κίνητρα των μαθητών αυξήθηκαν μέσω του παραμυθιού. Μέσω των επιχειρημάτων που αναπτύχθηκαν από όλους τους μαθητές της τάξης, γεωμετρικές έννοιες όπως ευθεία, ημιευθεία, τόξο, επίκεντρη γωνία, κλπ. που στοχοθετούνται από το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Γυμνασίου, συνδέθηκαν με την καθημερινότητα, το περιβάλλον και την τέχνη.

Επιπλέον, η διδακτική παρέμβαση έδωσε την ευκαιρία σε όλους τους μαθητές, να συνεργαστούν και να αλληλεπιδράσουν με τους συμμαθητές τους, να διερευνήσουν μαθηματικές έννοιες αλλά και να προβληματιστούν για τη διαφορετικότητα, την αποδοχή, τη φιλία και τη δικαιοσύνη. Ταυτόχρονα έγινε αφορμή για προβληματισμούς φιλοσοφικού περιεχομένου, όπως για παράδειγμα «κανείς δεν είναι τέλειος». Η εμπλοκή τους στο μαθηματικό αυτό παραμύθι τους έφερε τελικά σε επαφή με διάφορα είδη δημιουργικότητας (λόγου, ζωγραφικής, κατασκευής κλπ) αναπτύσοντας την δημιουργική σκέψη και την επιχειρηματολογία. Έτσι, διερεύνησαν και κατέκτησαν βιωματικά και ευχάριστα, μαθηματικές έννοιες και φυσικούς νόμους (Kucheriavyi, 2022).

Οι μαθητές αναστοχάστηκαν και συλλογίστηκαν πάνω σε προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες, συνδέοντας αυθόρμητα την προγενέστερη οικειοποιημένη γνώση με τη νέα τους εμπειρία. Η παρούσα διδακτική πρόταση ως μία ανοιχτή δραστηριότητα (Demo et al., 2021) χωρίς προαπαιτούμενες γνώσεις, έδωσε την ευκαιρία να συμμετάσχουν όλοι οι μαθητές κάνοντας το μάθημα συμπεριληπτικό (Civil, Hunder & Crespo, 2019).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Casey, B. (2004). Mathematics problem-solving adventures: A language-arts-based supplementary series for early childhood that focuses on spatial sense. In D. Clements & J. Samara (Eds.), Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education (pp. 377–389). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Civil, M., Hunter, R., & Crespo, (2019). Mathematics teachers committed to equity. International handbook of mathematics teacher education: Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development, 1, 243-274. https://doi.org/10.1163/9789004418875_010

Chakravarty, A. (2009). Artistic talent in dyslexia—A hypothesis. Medical Hypotheses, 73(4), 569-571

Cahyandari, R., & Fitriana, D. (2023). Improving Mathematical Literacy: Strengthening Students' Learning Motivation through Fairy Tales with the Title "Petualangan Tiga Saudara Menyelamatkan Selendang Pusaka". *Jurnal Pendidikan: Riset dan Konseptual*, *7*(1), 50-60.

Charmaz, K. (2014). Constructing grounded theory. sage.

Demo, H., Garzetti, M., Santi, G., & Tarini, G. (2021). Learning mathematics in an inclusive and open environment: An interdisciplinary approach. Education Sciences, 11(5), 199. https://doi.org/10.3390/educsci11050199

Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J. & Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: a review of the state of development and research. ZDM: doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2.

Flevares, L. M., & Schiff, J. L. (2014). Learning mathematics in two dimensions: A review and look ahead at teaching and learning early childhood mathematics with children's literature. Frontiers in Psychology, 5, 1– 12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00854

Foote, M. Q., & Lambert, R. (2011). I have a solution to share: Learning through equitable participation in a mathematics classroom. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11, 247-260. https://doi.org/10.1080/14926156.2011.595882

Furner, J. M. (2018). Using Children's Literature to Teach Mathematics: An Effective Vehicle in a STEM World. European Journal of STEM Education, 3(3), 14. DOI:10.20897/ejsteme/3874

Karlsen, K. H., Berggren, S. A., Ludvigsen, A. R., & Næsje, R. L. (2020). «The Fairy-Tale Forest: Developing Pedagogical Content Knowledge for teaching Primary School Mathematics in The Scottish Storyline Approach. Teaching through Stories: Renewing the Scottish Storyline Approach in Teacher Education.

Koellner, K., Wallace, F. H., & Swackhamer, L. (2009). Integrating literature to support mathematics learning in middle school. Middle

School Journal, 41(2), 30–39. https://doi.org/10.1080/00940771.2009.11461710
Kucheriavyi, O. H. (2022, June). «Didactic fairy tale designing as a key to proactive training of Physics and Mathematics at primary schools», In *Journal of Physics*: Conference Series (Vol. 2288, No. 1, p. 012034). IOP. **DOI** 10.1088/1742-6596/2288/1/012034
Le Grange, L. (2010). «The environment in the mathematics, natural sciences, and technology learning areas for general education and training in South Africa», *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 10(1), 13-26. https://doi.org/10.1080/14926150903574247
Lemonidis, C., & Kaiafa, I. (2019). The Effect of Using Storytelling Strategy on Students' Performance in Fractions. Journal of Education and Learning, 8(2), 165-175. **DOI:**10.5539/jel.v8n2p165
Perger, P. (2011). Identifying mathematics in children's literature: Year seven student's results. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Eds.), Mathematics: Traditions and [new] practices. Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Adelaide: MERGA.
Price, R. R. (2009). Using Children's Literature to Teach Mathematics. NC: Quantile.
Roos, H. (2019). Challenges at the border of normality: Students in special educational needs in an inclusive mathematics classroom. In Mathematics Education and society, 10th International Conference, Hyderabad, India, Jan 28th-Feb2nd, 2019 (pp. 928-940). Mathematics Education and Society.
Roos, H. (2023). Students' voices of inclusion in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 113(2), 229-249. DOI https://doi.org/10.1007/s10649-023-10213-4
Saxby, G. (2022). Searching for a happily ever after: using fairy tales in primary classrooms to explore gender, subjectivity and the life-worlds of young people. The Australian Journal of Language and Literacy, 45(2), 219-232. DOI https://doi.org/10.1007/s44020-022-00017-z
Vasilopoulou, M., & Triantafillou, C. (2022, February). «Inclusion and peer-collaboration in mathematics classrooms: The case of students' perspectives» In Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12).
Vasilopoulou, M., & Triantafillou, C. (2023). Tensions in teachers' attempts to apply inclusive mathematics education for students with diverse learning needs. In *Thirteen Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13). (under publication)

Wilburne, J. M., & Napoli, M. (2008). Connecting Mathematics and literature: An analysis of pre-service education school teachers' changing beliefs and knowledge. IUMPST: The Journal, 2, 1–10. https://doi.org/10.1016/j.mehy.2009.05.034

ΠΡΩΙΜΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΡΩΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΜΕ ΝΟΗΤΙΚΗ ΑΝΑΠΗΡΙΑ: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΔΡΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΓΟΝΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΝΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ

Γαρυφαλιά Χαριτάκη

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο & Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
charitaki.garyfalia@ac.eap.gr

Μέσω της παρούσας μελέτης γίνεται μια προσπάθεια ανάδειξης προβλεπτικών παραμέτρων των πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών με νοητική αναπηρία μέσω των πρώιμων εμπειριών που βιώνουν οι μαθητές στο οικογενειακό τους περιβάλλον. Το δείγμα της μελέτης αποτέλεσαν 187 ζεύγη γονέων (μητέρα - πατέρας) παιδιών με νοητική αναπηρία προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας. Για τη διερεύνηση του προαναφερθέντος σκοπού αξιοποιήθηκε η θεωρία καταστροφών. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας κατέδειξαν με σαφήνεια ότι η κατάκτηση των πρώιμων μαθηματικών εννοιών από παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας με νοητική αναπηρία αποτελεί ένα σύνθετο φαινόμενο με σαφώς προσδιορισμένο δυναμικό χαρακτήρα των συνδεόμενων διαδικασιών, στο οποίο ταυτόχρονα ενυπάρχουν γραμμικές και μη-γραμμικές συμπεριφορές. Τα ευρήματα συζητούνται με άξονα την ανάδειξη πρακτικών εφαρμογών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με βάση όμως την 5η έκδοση του Διαγνωστικού και Στατιστικού Εγχειριδίου Ψυχικών Διαταραχών (DSM-V) (APA, 2013) και υπό το πρίσμα μιας νέας οπτικής, η διάγνωση της νοητικής αναπηρίας εκτός από την χαμηλή νοητική λειτουργικότητα ($ΔΝ<70$), θέτει στο επίκεντρό της τη λειτουργικότητα του ατόμου και την προσαρμοστική συμπεριφορά σε τρεις διακριτούς τομείς της ανθρώπινης ζωής-καθημερινότητας που εμφανίζονται ως απόρροια της γενικότερης νοητικής ικανότητας. Αυτοί αφορούν την αντίληψη (γλώσσα, την ανάγνωση, γραφή, μαθηματικά, αιτιολόγηση, λογική και μνήμη), τις κοινωνικές σχέσεις και την καθημερινή πρακτική (αυτοεξυπηρέτησης, διαχείρισης χρημάτων, αναψυχής και οργάνωσης των εργασιών του σχολείου).

Τα υπάρχοντα ερευνητικά δεδομένα καταδεικνύουν με σαφήνεια ότι τα παιδιά με νοητική αναπηρία αντιμετωπίζουν σημαντικές και εκτεταμένες δυσκολίες αναφορικά με την κατάκτηση των πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων (Charitaki, Soulis, & Alevriadou, 2023a). Ωστόσο,

αδιαμφισβήτητα πληθώρα ερευνών υπογραμμίζει εμφατικά τη σπουδαιότητα των προμαθηματικών εννοιών, αναγνωρίζοντάς τις, ως προβλεπτικό παράγοντα για τη μετέπειτα ομαλή μετάβαση του παιδιού στα τυπικά μαθηματικά με την έναρξη την σχολικής εκπαίδευσης (Charitaki et al., 2023b; Desoete & Grégoire, 2000· Dunst, et al., 2017· Gunderson & Levine, 2011· Jordan et al., 2007· LeFevre et al., 2002). Διαφοροποιήσεις στις προαναφερθείσες επιδόσεις των παιδιών προσχολικής ηλικίας καταγράφονται κατά την ηλικία των τεσσάρων ετών, οπότε και εντάσσονται στην υποχρεωτική προσχολική εκπαίδευση (Charitaki et al., 2022, 2023a· De Florio & Beliakoff, 2015· Dowker, 2021).

Εύλογα το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει στραφεί στη μελέτη του οικογενειακού περιβάλλοντος, όπως επίσης και στις ευκαιρίες μάθησης που οι γονείς δημιουργούν για τα παιδιά τους (Baker, 2015· Charitaki, 2023; Charitaki & Alevriadou, 2024· Cheung et al., 2020; Harris et al., 2014; Kleemans et al., 2012; Kleemans et al., 2013· Manolitsis et al., 2013· Melhuish et al., 2008). Επιπροσθέτως, η συστηματική εμπλοκή των γονέων φαίνεται να έχει σημαντικό αντίκτυπο στην μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών προσχολικής ηλικίας (Καφούση, 2022). Η εργασία των LeFevre et al. (2009) στο πεδίο οδήγησε σε μια συστηματική κατηγοριοποίηση των πρώιμων μαθησιακών εμπειριών που δημιουργούν οι γονείς για τα παιδιά τους. Σημαντικό μέρος του έργου τους συνδέεται με τις πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες. Εύλογα, ένας αδρός διαχωρισμός των πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων συνίσταται στο εννοιολογικό και διαδικαστικό περιεχόμενο των εννοιών, αλλά και του τρόπου χρήσης τους στην καθημερινότητα. Επιπροσθέτως, τα παιδιά με νοητική αναπηρία έχουν αδυναμία γενίκευσης. Έτσι, για τα εν λόγω παιδιά, είναι ιδιαιτέρως σημαντικό να βιώνουν μαθησιακές εμπειρίες που να είναι σκόπιμα σχεδιασμένες με τρόπο τέτοιο που να μπορούν να τις νοηματοδοτήσουν (Bouck, Park, & Stenzel, 2020).

Επίσης, ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το παράδοξο κατά το οποίο διαφορετικά επίπεδα γονεϊκής δέσμευσης αναφορικά με την παροχή πρώιμων μαθηματικών εμπειριών μπορούν να οδηγήσουν σε χαμηλές ακαδημαϊκές επιδόσεις των παιδιών. Έτσι, υπάρχει η βασική υπόθεση ότι ένα αποστερημένο από μαθηματικές εμπειρίες οικογενειακό περιβάλλον, μπορεί να επιφέρει παρόμοια αποτελέσματα με ένα πιεστικό περιβάλλον. Ωστόσο, τα υπάρχοντα ευρήματα περιορίζονται κυρίως σε τυπικώς αναπτυσσόμενα παιδιά (LeFevre et al., 2009), αφήνοντας πλήρως αχαρτογράφητη την ερευνητική περιοχή που αφορά σε παιδιά με νοητική αναπηρία.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας αξιοποιήθηκε συγχρονικός ερευνητικός σχεδιασμός. Πιο συγκεκριμένα, υιοθετήθηκε το ερευνητικό μοντέλο της επισκόπησης. Έτσι, η συλλογή των πρωτογενών δεδομένων υλοποιήθηκε μέσω της αξιοποίησης του προαναφερθέντος μοντέλου, το οποίο προϋποθέτει την επίδοση ερωτηματολογίων αυτοαναφοράς. Στο πλαίσιο υλοποίησης του παρόντος ερευνητικού σχεδιασμού χρησιμοποιήθηκε η ποσοτική προσέγγιση, καθώς ικανοποιεί τις ανάγκες περιγραφής μιας κεντρικής τάσης, καθώς και της ερμηνείας των υφιστάμενων συσχετίσεων (Howard & Hoffman, 2018).

Επιπροσθέτως, στη βιβλιογραφία υπάρχει η γενικότερη τάση να διερευνώνται οι μαθηματικές δεξιότητες των παιδιών προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας μέσω γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression), η οποία είναι η περισσότερο διαδεδομένη μεθοδολογία (ποσοτική προσέγγιση) στο πεδίο της διδακτικής μαθηματικών. Ωστόσο, η πολυπλοκότητα των φαινομένων αποκλίνει από την ερμηνεία που μας παρέχει η γραμμική παλινδρόμηση. Έτσι, η συνήθης προσέγγιση τείνει να παραβλέπει βασικές πτυχές της πολυπλοκότητας του φαινομένου, οι οποίες έχουν βαρύνουσα σημασία αναφορικά με τη διδακτική τους αξιοποίηση. Πιο συγκεκριμένα, όταν αξιοποιείται ένα γραμμικό μοντέλο μπορούμε να ανιχνεύσουμε την επίδραση της γονεϊκής εμπλοκής στην κατάκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων από παιδιά προσχολικής ηλικίας. Όμως, αδυνατούμε να ανιχνεύσουμε το σημείο στο οποίο η γονεϊκή εμπλοκή μπορεί να γίνει επιζήμια.

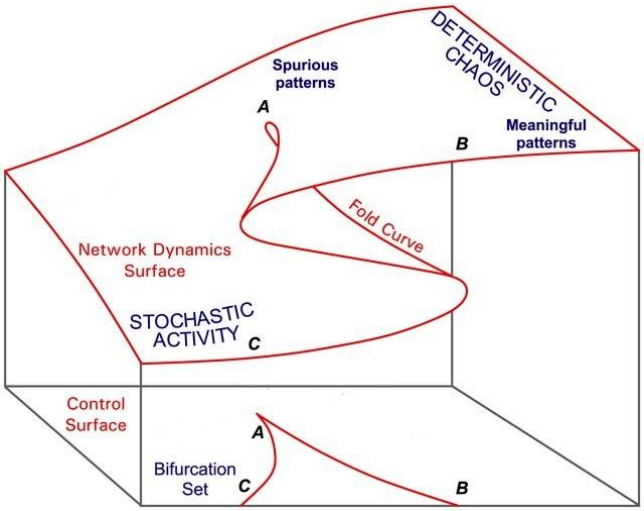
Κατά συνέπεια, πολλά φαινόμενα περιγράφονται καλύτερα μέσω μη-γραμμικών μοντέλων (non-linear model). Κατά τον Starobin (1976), τα μοντέλα καταστροφής Cusp (Cusp Catastrophe Model) είναι μη-γραμμικά μοντέλα, τα οποία αποτελούν "*δομικές τοπολογικές επιφάνειες που δημιουργούνται με τον καθορισμό της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης που σχετίζεται με διάφορους συνδυασμούς μεταβλητών ελέγχου που είναι ίσοι με το μηδέν*". Έτσι, η επιφάνεια καταστροφής δίνεται μέσω της επίλυσης της εξίσωσης που προκύπτει από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης $f(x, y, z)$.

$$f_{(x,y,z)} = \frac{1}{4}z^4 - xz - \frac{1}{2}yz^2$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 0 \Rightarrow$$

$$z^3 - x - y \cdot z = 0$$

Πιο συγκεκριμένα, τα μοντέλα καταστροφής Cusp δύναται να ερμηνεύουν την πολυπλοκότητα των φαινομένων στα οποία παρατηρείται ξαφνική μετατόπιση και ασυνέχεια. Ουσιαστικά, περιγράφεται η εξέλιξη ενός φαινομένου μέσω μιας αναδιπλούμενης επιφάνειας όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1: Απ ιστροφής Cusp (Cusp Catastropne Model) (άξονες μεταβλητών: *x* και *y* είναι δύο διαστάσεις ελέγχου και *z*, η διάσταση συμπεριφοράς του συστήματος, τα ξαφνικά άλματα και το σύνολο διακλάδωσης) (Cabessa & Villa, 2014).

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 187 ζεύγη γονέων παιδιών με νοητική αναπηρία, αποτελώντας ένα συνολικό αριθμό 374 γονέων. Η μέση ηλικία των μητέρων διαμορφώθηκε ήταν *37.56* έτη, ενώ των πατέρων ήταν *44.79* έτη. Τα παιδιά φοιτούσαν σε ειδικά νηπιαγωγεία και δημοτικά σχολεία. Η αξιολόγηση του νοητικού δυναμικού των παιδιών έγινε μέσω του ψυχομετρικού εργαλείου WPPSI-III GR (Wechsler Preschool Primary Scale of Intelligence) (Σιδερίδης & Αντωνίου, 2013). Το σύνολο των παιδιών είχε ήπια νοητική αναπηρία, βάσει της αξιολόγησης του νοητικού τους δυναμικού.

Ερευνητικά Εργαλεία

Για τη συλλογή των δεδομένων έγινε επίδοση 2 διαφορετικών ερευνητικών εργαλείων σε γονείς παιδιών με αναπηρία.

Πρώιμες Μαθησιακές Εμπειρίες παιδιών προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας στο Οικιακό Περιβάλλον – Ερευνητικό εργαλείο γονέων [Parents' Questionnaire (LeFevre et al., 2009)]

Το ερευνητικό εργαλείο των γονέων έχει σχεδιαστεί προκειμένου να αξιολογεί πέντε διακριτές περιοχές. Η πρώτη περιοχή αξιολογεί τις απόψεις των γονέων αναφορικά με τη σπουδαιότητα κατάκτησης των αναπτυξιακών ορόσημων από τα παιδιά τους (8 ερωτήματα) (π.χ. "*Να μετράει προφορικά μέχρι το 10.*"). Όλες οι υπόλοιπες περιοχές αποτυπώνουν τη συχνότητα υλοποίησης δραστηριοτήτων που

υλοποιούνται στο σπίτι και συνδέονται τον αναδυόμενο γραμματισμό (3 ερωτήματα) (π.χ. " *Αναγνώριση ονομάτων ή γραπτών γραμμάτων του αλφάβητου.*"), με τη λεπτή κινητικότητα (10 αντικείμενα) (π.χ. "*Τραγούδια που περιλαμβάνουν κίνηση – μουσικοκινητική (π.χ. Itsy Bitsy Spider)*"), με γενικές δεξιότητες (7 αντικείμενα) (π.χ. "*Παίζοντας "μαγαζί".*"), καθώς και με πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες (20 αντικείμενα) (π.χ. "*Ανάγνωση παραμυθιών με αριθμούς.*" ή "*Δραστηριότητες «Ένωσε τις κουκίδες».*"). Το ερωτηματολόγιο βαθμολογείται μέσω κλίμακων Likert πέντε βαθμών. Στα ερωτήματα που αξιολογούν τα αναπτυξιακά ορόσημα η κλίμακα Likert λαμβάνει διαβαθμίσεις από *1=καθόλου σημαντικό* έως *5=πολύ σημαντικό*. Στα ερωτήματα που αποτυπώνουν τη συχνότητα υλοποίησης δραστηριοτήτων που υλοποιούνται στο σπίτι η κλίμακα Likert λαμβάνει διαβαθμίσεις από *0=η δραστηριότητα δεν υλοποιείται καθόλου* έως *4=σχεδόν καθημερινά*.

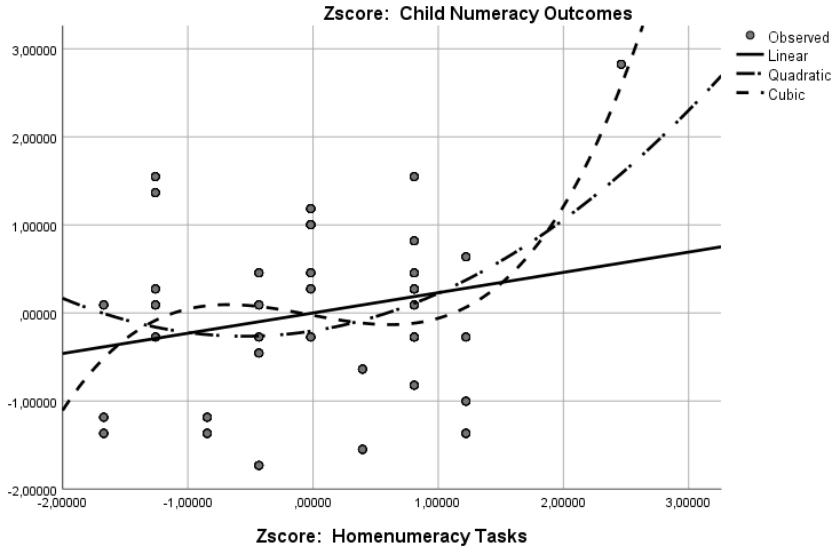
Λίστα Ελέγχου Ακαδημαϊκών Επιδόσεων (Υποκλίμακα Πρώιμων Μαθηματικών Δεξιοτήτων) [Academic Attainments Checklist (Arithmetic subscale - numeracy) - Sloper et al. (1990)]

Η λίστα ελέγχου ακαδημαϊκών επιδόσεων είναι ένα ερευνητικό εργαλείο το οποίο έχει αναπτυχθεί από τους Sloper et al. (1990) για παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας με νοητική αναπηρία. Με τη χρήση του εν λόγω εργαλείου αξιολογούνται οι ακαδημαϊκές επιδόσεις των παιδιών στην ανάγνωση (17 αντικείμενα), γραφή (19 αντικείμενα), καθώς και πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες (22 αντικείμενα). Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, οι γονείς των παιδιών συμπλήρωσαν την υποκλίμακα των πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων του προαναφερθέντος ερευνητικού εργαλείου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πρωταρχικά, η εστίαση του ενδιαφέροντος τοποθετήθηκε στην επιλογή του βέλτιστου μοντέλου (με την καλύτερη προσαρμογή) για την περιγραφή της συσχέτισης των πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών με νοητική αναπηρία με τη συχνότητα υλοποίησης δραστηριοτήτων που υλοποιούνται στο σπίτι και έχουν μαθηματικό περιεχόμενο. Αξιολογήθηκε εάν η συσχέτιση μπορεί να περιγραφεί γραμμικά (linear model), μέσω της χρήσης συνάρτησης δευτέρου βαθμού (quadratic model), ή μέσω της χρήσης συνάρτησης τρίτου βαθμού (cubic model).

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης κατέδειξαν ότι το cubic model (*b=-203, p=.000, R^2=68.92%)* έχει τη βέλτιστη προσαρμογή. Τόσο το γραμμικό μοντέλο (*b=-.028, p=.000, R^2=37.13%*), όσο και το quadratic model (*b=.067, p=.000, R^2=44.12%*) έχουν χειρότερη προσαρμογή. Πιο συγκεκριμένα, η καμπύλη που περιγράφει τις προαναφερθείσες μεταβλητές με τον βέλτιστο τρόπο είναι η $y = .210x^3 + .020x^2 - .263x - .028$ (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Ανίχνευση μη-γραμμικής σχέσης μεταξύ των επιδόσεων των παιδιών στα πρώιμα μαθηματικά και της συχνότητας υλοποίησης δραστηριοτήτων που υλοποιούνται στο σπίτι και συνδέονται με τις προμαθηματικές έννοιες.

Στο μοντέλο Cusp (Πίνακας 1) η συχνότητα υλοποίησης μαθηματικών δραστηριοτήτων στο σπίτι λειτουργεί ως παράγοντας διακλάδωσης.

Μοντέλο Cusp	***B***	***Δ.Ε. B 95%***		***Τ.Α.***	***z***	***p***
α: Παράγοντες ασυμμετρίας (intercept)	.325	.301	.349	.104	8.14	.0001
Συχνότητας υλοποίησης δραστηριοτήτων αναδυόμενου γραμματισμού στο σπίτι (α1)	-.413	-.481	-.345	.036	-10.36	.0001
Συχνότητας υλοποίησης δραστηριοτήτων λεπτής κινητικότητας στο σπίτι (α2)	.512	.378	.646	.045	11.23	.0001
Συχνότητας υλοποίησης γενικών δραστηριοτήτων στο σπίτι (α3)	.316	.109	.523	.067	8.07	.0001
Μορφωτικό επίπεδο μητέρας (α4)	.462	.261	.663	.089	10.78	.0001
Μορφωτικό επίπεδο πατέρα (α5)	.213	.145	.281	.112	6.54	.0001
Οικογενειακό εισόδημα (μηνιαίο) (α6)	.568	.459	.677	.074	12.29	.0001
Αριθμός βιβλίων που υπάρχουν στο σπίτι (α7)	.314	.028	.600	.012	8.07	.0001

β: Παράγοντες διακλάδωσης (intercept)	-.451	-.515	-.387	.061	-10.63	.0001
Συχνότητας υλοποίησης μαθηματικών δραστηριοτήτων στο σπίτι (β)	-.513	-.572	-.454	.056	-12.04	.0001
w: Εξαρτημένη μεταβλητή (intercept)	-.513	-.646	-.380	.142	-24.04	.0001
Πρώιμες Μαθηματικές Δεξιότητες (w)	.659	.361	.957	.056	48.56	.0001

Πίνακας 1: Το μοντέλο Cusp με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας

Μεταβλητές όπως η συχνότητα υλοποίησης δραστηριοτήτων αναδυόμενου γραμματισμού, λεπτής κινητικότητας, καθώς και γενικών δραστηριοτήτων στο σπίτι, το μορφωτικό επίπεδο μητέρας, το μορφωτικό επίπεδο πατέρα, το οικογενειακό εισόδημα (μηνιαίο) αλλά και ο αριθμός βιβλίων που υπάρχουν στο σπίτι λειτουργούν ως παράγοντες ασυμμετρίας. Τέλος, οι πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες του παιδιού λειτουργούν ως εξαρτημένη μεταβλητή.

Στον Πίνακα 2, αποτυπώνεται η σύγκριση μοντέλων με τη χρήση κριτηρίων πληροφορίας. Τα αποτελέσματα από τα κριτήρια AIC, AIC_c, και BIC καταδεικνύουν ότι το μοντέλο Cusp είναι το βέλτιστο μοντέλο, συγκρινόμενο με το γραμμικό (*Linear*) και το λογιστικό μοντέλο (*Logistic*).

Μοντέλο	Akaike Κριτήριο Πληροφορίας (AIC)	Διορθωμένο Κριτήριο Πληροφορίας Akaike (AIC_c)	Μπεϋζιανό Κριτήριο Πληροφορίας (BIC)
Linear	14162.507	14162.598	14186.604
Logistic	11987.104	11987.151	12064.002
Cusp	7984.146	7984.194	8012.046

Πίνακας 2: Σύγκριση μοντέλων με τη χρήση κριτηρίων πληροφορίας

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας κατέδειξαν με σαφήνεια ότι η κατάκτηση των πρώιμων μαθηματικών εννοιών από παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας με νοητική αναπηρία αποτελεί ένα σύνθετο φαινόμενο με σαφώς προσδιορισμένο δυναμικό χαρακτήρα των συνδεόμενων διαδικασιών. Κατά συνέπεια, η βέλτιστη ερμηνεία της κατάκτησης των πρώιμων μαθηματικών εννοιών από παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας με νοητική αναπηρία υλοποιείται μέσω ενός μοντέλου Cusp, στο οποίο ταυτόχρονα ενυπάρχουν γραμμικές και μη-γραμμικές συμπεριφορές. Μεταβλητές όπως η συχνότητα υλοποίησης

δραστηριοτήτων αναδυόμενου γραμματισμού, λεπτής κινητικότητας, καθώς και γενικών δραστηριοτήτων στο σπίτι λειτουργούν ως παράγοντες ασυμμετρίας φάνηκαν να έχουν προβλεπτικό (και γραμμικό) χαρακτήρα στην κατάκτηση των πρώιμων μαθηματικών εννοιών. Γεγονός το οποίο είναι σε συμφωνία με την υπάρχουσα βιβλιογραφία (Baker, 2015; Charitaki, 2023; Charitaki & Alevriadou, 2024· Cheung et al., 2020; Harris et al., 2014; Kleemans et al., 2012; Kleemans et al., 2013· Manolitsis et al., 2013· Melhuish et al., 2008). Ωστόσο, ιδιαιτέρως σημαντική είναι και η επίδραση παραμέτρων για τις οποίες δεν έχουμε σαφή ευρήματα στην βιβλιογραφία όπως το μορφωτικό επίπεδο μητέρας, το μορφωτικό επίπεδο πατέρα, το οικογενειακό εισόδημα (μηνιαίο) αλλά και ο αριθμός βιβλίων που υπάρχουν στο σπίτι (Incognito & Pinto, 2023· Jiang, Lau, & Tan, 2023· Liu, Georgiou, & Manolitsis, 2018).

Επίσης, η στατιστική ανάλυση υποστήριξε την αρχική υπόθεση ότι η συχνότητα υλοποίησης μαθηματικών δραστηριοτήτων στο σπίτι λειτουργεί ως παράμετρος διακλάδωσης. Συνεπώς οι διακυμάνσεις των επιδόσεων των παιδιών εξελίσσονται γραμμικά και ομαλά μέχρι μια συγκεκριμένη τιμή-κατώφλι (*critical threshold value*), όπου εμφανίζονται δικόρυφες κατανομές στην εξαρτημένη μεταβλητή. Κατά το φαινόμενο της διακλάδωσης, σε παιδιά παρόμοιου προφίλ μπορεί να βελτιστοποιηθούν ή να ελαχιστοποιηθούν οι πρώιμες μαθηματικές τους επιδόσεις, ως απόρροια μικρών αλλαγών στο περιβάλλον τους, γεγονός το οποίο συνδέεται με την πολυπλοκότητα της ανθρώπινης συμπεριφοράς.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Καθώς, τα παιδιά με νοητική αναπηρία εκδηλώνουν στρατηγικές αποφυγής είναι ιδιαιτέρως σημαντική η δημιουργία ενός υποστηρικτικού περιβάλλοντος στη βάση των δυνατοτήτων τους. Η δριμύτητα της νοητικής αναπηρίας του κάθε παιδιού καθορίζει με μονοσήμαντο τρόπο τη λειτουργικότητά του. Σύμφωνα με τα διαθέσιμα ερευνητικά ευρήματα, οι γονείς παιδιών με νοητική αναπηρία τείνουν να θέτουν τομείς προτεραιοτήτων για την εκπαίδευση των παιδιών τους, καθώς υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί που πρέπει να διαχειριστούν (Resch et al., 2010). Οι περισσότεροι από αυτούς δημιουργούν το περιβάλλον μάθησης στο σπίτι σύμφωνα με τις υποδείξεις των θεραπευτών. Σε πολλές περιπτώσεις, παρατηρήθηκε ότι η συμβουλευτική που έλαβαν δεν περιελάμβανε έμμεσες πρακτικές για να διδάξουν την αριθμητική στα παιδιά τους. Πολλοί από αυτούς πίστευαν ότι η διδασκαλία της αριθμητικής περιορίζεται στην διδασκαλία των δεξιοτήτων μέτρησης. Επίσης, περιοριζόταν σημαντικά ο παιγνιώδης χαρακτήρας των χρησιμοποιούμενων μαθηματικών δραστηριοτήτων. Κατά συνέπεια, είναι ιδιαιτέρως σημαντικό η συμβουλευτική των γονέων των παιδιών με νοητική αναπηρία να έχει στοχοκατευθυνόμενο χαρακτήρα και να κατευθύνει τους γονείς προς την υιοθέτηση πληθώρας δραστηριοτήτων στη βάση των δυνατοτήτων του δικού τους παιδιού. Επίσης, η παρατήρηση

της ανταπόκρισης του παιδιού στην παρέμβαση είναι εκείνη που θα καθορίσει και τη γενικότερη αποτελεσματικότητά της. Το κάθε παιδί μπορεί να φτάσει στο "κατώφλι (critical threshold value)" όπου εμφανίζονται δικόρυφες κατανομές στην εξαρτημένη μεταβλητή με διαφορετική συχνότητα υλοποίησης μαθηματικών δραστηριοτήτων. Είναι κατά συνέπεια, ιδιαιτέρως σημαντικό να υπάρχει συστηματική παρατήρηση του γονέα προκειμένου να ανιχνευθεί το χρονικό σημείο στο οποίο το παιδί αρχίζει να εκδηλώνει στρατηγικές αποφυγής. Κατόπιν, γνωρίζοντας αυτό το χρονικό σημείο μπορεί να αυξάνει με σταδιακό και ρεαλιστικό τρόπο την ενασχόληση του παιδιού με μαθηματικές δραστηριότητες. Επιπροσθέτως, οι γονείς θα πρέπει να βρίσκονται σε επικοινωνία με τον παιδαγωγό προσχολικής αγωγής προκειμένου να υπάρχει μια αμφίδρομη επικοινωνία αναφορικά με το σύνολο των πρακτικών που αξιοποιούνται στο σπίτι αλλά και τη συχνότητα εφαρμογής τους. Η δημιουργία portfolio σε συνεργασία με τον παιδαγωγό θα μπορούσε να επιφέρει πολλαπλά οφέλη αναφορικά με τη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών προσχολικής ηλικίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders (DSM-5)*. Washington: Author.

Baker, C. E. (2015). Does parent involvement and neighborhood quality matter for African American boys' kindergarten mathematics achievement?. *Early Education and Development, 20*(3), 342-355. doi:10.1080/10409289.2015.908238

Bouck, E. C., Park, J., & Stenzel, K. (2020). Virtual manipulatives as assistive technology to support students with disabilities with mathematics. Preventing School Failure: Alternative Education for *Children and Youth, 64*(4), 281-289.

Cabessa, J., & Villa, A. E. (2014). An attractor-based complexity measurement for boolean recurrent neural networks. *PLoS One, 9*(4), e94204.

Charitaki, G. (2023). Parents' attitudes toward mathematics and Home Numeracy Experiences Questionnaire: evidence for factor structure, reliability, construct validity and measurement invariance in a sample of preschoolers with mild intellectual disabilities. *International Journal of Developmental Disabilities*, 1-11.

Charitaki, G., & Alevriadou, A. (2024). Young children with Intellectual Disabilities and their mathematical attainments: Do parents' attitudes toward mathematics, home numeracy and literacy practices really matter?, *Journal for Intellectual Disabilities*.

Charitaki, G., Alevriadou, A., & Soulis, S. G. (2022). Early numeracy profiles in young children with intellectual disabilities: The role of cognitive functions. *Journal of Intellectual Disabilities,* 17446295221117021.

Charitaki, G., Soulis, S. G., & Alevriadou, A. (2023a). Factor structure of early numeracy: evaluation of a measurement model in greek-speaking children with intellectual disabilities. *International Journal of Developmental Disabilities, 69*(4), 505-514.

Charitaki, G., Soulis, S. G., & Alevriadou, A. (2023b). Early numeracy skills in children with intellectual disabilities between age groups 4–7 years: developmental patterns and interrelationships. *International Journal of Developmental Disabilities,* 1-15.

Cheung, S. K., Dulay, K. M., & McBride, C. (2020). Parents' characteristics, the home environment, and children's numeracy skills: How are they related in low-to middle-income families in the Philippines?. *Journal of Experimental Child Psychology, 192*(April), 104780. doi:10.1010/j.jecp.2019.104780

DeFlorio, L., & Beliakoff, A. (2015). Socioeconomic status and preschoolers' mathematical knowledge: The contribution of home activities and parent beliefs. *Early Education and Development, 20*(3), 319-341. doi:10.1080/10409289.2015.908239

Desoete, A., & Grégoire, J. (2000). Numerical competence in young children and in children with mathematics learning disabilities. *Learning and Individual differences, 10*(4), 351-307. doi:10.1010/j.lindif.2000.12.000

Dowker, A. (2021). Home Numeracy and Preschool Children's Mathematical Development: Expanding Home Numeracy Models to Include Parental Attitudes and Emotions. *Frontiers in Education (February)*. doi:10.3389/feduc.2021.575004.

Dunst, C. J., Hamby, D. W., Wilkie, H., & Dunst, K. S. (2017). Meta-analysis of the influences of home and family experiences on young children's early numeracy learning. In S. Phillipson, P. Sullivan, & A. Gervasoni (Eds.), *Engaging families as children's first mathematics educators: International perspectives* (pp. 105-125). Springer.

Gunderson, E. A., & Levine, S. C. (2011). Some types of parent number talk count more than others: Relations between parents' input and children's cardinal-number knowledge. *Developmental Science, 14*(5), 1021-1032. doi.:10.1111/j.1407-7087.2011.01050.x.

Harris, T., Sideris, J., Serpell, Z., Burchinal, M., & Pickett, C. (2014). Domain-specific cognitive stimulation and maternal sensitivity as predictors of early academic outcomes among low-income African American preschoolers. *Journal of Negro Education, 83*(1), 15-28. doi:10.7709/jnegroeducation.83.1.0015

Howard, M. C., & Hoffman, M. E. (2018). Variable-centered, person-centered, and person-specific approaches: Where theory meets the method. *Organizational Research Methods, 21*(4), 846-876.

Incognito, O., & Pinto, G. (2023). Longitudinal effects of family and school context on the development on emergent literacy skills in preschoolers. *Current Psychology, 42*(12), 9819-9829.

Jiang, Y., Lau, C., & Tan, C. Y. (2023). Socioeconomic Status and Children's English Language and Literacy Outcomes: The Mediating Role of Home Literacy Environment. *Early Education and Development*, 1-27.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & practice, 22*(1), 30-40. doi:10.1111/j.1540-5820.2007.00229.x

Καφούση, Σ. (2022). Διερευνώντας το ρόλο της γονικής συμμετοχής στην μαθηματική εκπαίδευση. Στο Χ. Σταθόπουλος, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη & Β. Χρυσικού (Επ.), 9ο πανελλήνιο συνέδριο, *Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις (σελ.31-48)*. Βόλος: ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.

Kleemans, T., Peeters, M., Segers, E., & Verhoeven, L. (2012). Child and home predictors of early numeracy skills in kindergarten. *Early Childhood Research Quarterly, 27*(3), 471-477. doi:10.1010/j.ecresq.2011.12.004.

Kleemans, T., Segers, E., & Verhoeven, L. (2013). Relations between home numeracy experiences and basic calculation skills of children with and without specific language impairment. *Early Childhood Research Quarterly, 28*(2), 415-423. doi:10.1010/j.ecresq.2012.10.004

Liu, C., Georgiou, G. K., & Manolitsis, G. (2018). Modeling the relationships of parents' expectations, family's SES, and home literacy environment with emergent literacy skills and word reading in Chinese. *Early Childhood Research Quarterly, 43*, 1-10.

LeFevre, J. A., Clarke, T., & Stringer, A. P. (2002). Influences of language and parental involvement on the development of counting skills: Comparisons of French-and English-speaking Canadian children. *Early Child Development and Care, 172*(3), 283-300. doi:10.1080/03004430212127.

LeFevre, J. A., Skwarchuk, S. L., Smith-Chant, B. L., Fast, L., Kamawar, D., & Bisanz, J. (2009). Home numeracy experiences and children's math performance in the early school years. *Canadian Journal of Behavioural Science/Revue canadienne des sciences du comportement, 41*(2), 55. doi:10.1037/a0014532

Manolitsis, G., Georgiou, G. K., & Tziraki, N. (2013). Examining the effects of home literacy and numeracy environment on early reading and math acquisition. *Early Childhood Research Quarterly, 28*(4), 092-703. doi:10.1010/j.ecresq.2013.05.004

Melhuish, E. C., Phan, M. B., Sylva, K., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I., & Taggart, B. (2008). Effects of the home learning environment and preschool center experience upon literacy and numeracy development in early primary school. *Journal of Social Issues, 64*(1), 95-114.

Resch, J. A., Mireles, G., Benz, M. R., Grenwelge, C., Peterson, R., & Zhang, D. (2010). Giving parents a voice: A qualitative study of the challenges experienced by parents of children with disabilities. *Rehabilitation psychology, 55*(2), 139 –150. doi:10.1037/a0019473.

Σιδερίδης, Γ., & Αντωνίου Φ. (2013). *Wechsler Preschool and Primary Scale of Intelligence (WPPSI-III)*. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος

Sloper, P., Cunningham, C., Turner, S., & Knussen, C. (1990). Factors related to the academic attainments of children with Down's syndrome. British journal of educational psychology, 60(3), 284-298.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Γεωργία Πήττα Ξένια Βαμβακούση

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

g.pitta@uoi.gr xvamvak@uoi.gr

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος μιας έρευνας σχεδιασμού με στόχο την ανάπτυξη ενός προγράμματος δραστηριοτήτων για την ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία. Εστιάζουμε στην παρουσίαση ευρημάτων από τον τρίτο κύκλο εφαρμογής του προγράμματος σε 22 παιδιά νηπιαγωγείου (4-6 ετών) που δείχνουν ότι τα παιδιά αυτής της ηλικία μπορούν να επιλύσουν πολλαπλασιαστικά προβλήματα ακόμη και σε πλαίσια διαφορετικά από εκείνα στα οποία διδάχτηκαν στο πλαίσιο της εφαρμογής. Αναδεικνύουμε και συζητάμε δι-ατομικές διαφορές μεταξύ προνηπίων και νηπίων, αλλά και μεταξύ των παιδιών της ίδιας ηλικιακής ομάδας, με αναφορά στις επιδόσεις και τις στρατηγικές επίλυσης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Έρευνες δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά διαθέτουν ικανότητες πολλαπλασιαστικές σκέψης που σχετίζονται τόσο με τις συνεχείς όσο και με τις διακριτές ποσότητες (Mix et al., 2002). Ωστόσο, τα εκπαιδευτικά προγράμματα στο νηπιαγωγείο και τις πρώτες τάξεις του δημοτικού δίνουν έμφαση στο πλήθος και τις προσθετικές σχέσεις στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Στο ίδιο πλαίσιο, γίνεται και η εισαγωγή των πολλαπλασιαστικών σχέσεων, κυρίως μέσα από καταστάσεις «δίκαιης μοιρασιάς». Η ασυμμετρία αυτή έχει συνέπειες στη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών. Πράγματι, έχει παρατηρηθεί ότι η επίδοση των παιδιών σε απλές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις με συνεχείς ποσότητες μειώνεται όταν μαθαίνουν να αναπαριστούν το πλήθος μέσω της καταμέτρησης (Ni & Zhou, 2005), ενώ δεν αποκτούν και το εννοιολογικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατανόηση των κλασμάτων (Hunting & Davis, 1991; Sophian 2004). Από την άλλη μεριά, φαίνεται ότι η πρώιμη πολλαπλασιαστική σκέψη ενισχύεται με την έκθεση σε σχετικές άτυπες ή τυπικές εμπειρίες (Hunting & Davis, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2020).

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζουμε αποτελέσματα από τον τρίτο κύκλο μιας θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού (topic-specific design research study, Gravemeijer & Prediger, 2019) με στόχο την ανάπτυξη ενός προγράμματος δραστηριοτήτων για την ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας. Ο σχεδιασμός του προγράμματος στηρίζεται σε τρεις αρχές: α) την ενιαία και παράλληλη αντιμετώπιση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων (βλ. Sophian

(2004) και Steffe (2013) για μια παρόμοια οπτική), β) την παροχή εμπειριών που σχετίζονται με τρεις μαθηματικές ενέργειες που είναι κοινές για διακριτές και συνεχείς ποσότητες και θεμελιώδεις στις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, δηλαδή τον ισομερισμό, την επανάληψη ποσότητας και τη μέτρηση με διαφορετικές μονάδες (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018), και γ) την παροχή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων και, συγκεκριμένα, όρους για τα ακέραια πολλαπλάσια και τα αντίστοιχα υποπολλαπλάσια, καθώς και τους όρους δυάδα, τριάδα, κ.λπ.. Τα γλωσσικά εργαλεία δίνουν τη δυνατότητα στα μικρά παιδιά να αναγνωρίσουν ίδιες σχέσεις σε διαφορετικά πλαίσια και να οργανώσουν τις τυπικές και άτυπες εμπειρίες τους με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (Hunting & Davis, 1991). Μάλιστα, σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα υποδεικνύουν ότι παιδιά που διαθέτουν απλό λεξιλόγιο για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων (π.χ. «διπλάσιο») στην 1η τάξη, υπερτερούν σε ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης στη 2η τάξη (Vanluydt, Supply, Verschaffel, & Van Dooren, 2021).

Το σκελετό του προγράμματος αποτελούν τρεις δραστηριότητες. Από μια πρώτη εφαρμογή σε μικρές ομάδες νηπίων (το πολύ 4 μέλη) είχαμε θετικές ενδείξεις σχετικά με τη δυνατότητα των παιδιών να ανταποκριθούν σε αυτές τις δραστηριότητες, όπως και για την επίδραση του προγράμματος στην ικανότητά τους να διαπιστώνουν και να εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, καθώς και να επιλύουν προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής. Η εργασία αυτή αφορά την εφαρμογή του προγράμματος σε τάξη νηπιαγωγείου, η οποία περιλαμβάνει νήπια και προνήπια. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα ήταν: α) είναι οι δραστηριότητες στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών και, ειδικότερα, των προνηπίων; β) θα υπάρξει θετική επίδραση στην ικανότητα των παιδιών να πραγματεύονται πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στη συνθήκη της εφαρμογής με μεγαλύτερη ομάδα παιδιών; γ) θα υπάρξουν και, αν ναι, τι είδους δι-ατομικές διαφορές ως προς τα ενδεχόμενα μαθησιακά οφέλη; Ένα είδος δι-ατομικών διαφορών που μας ενδιέφερε ήταν αυτές ως προς την ικανότητα των παιδιών να αναπαριστούν νοερά τις ποσότητες και τις ενέργειες για την επίλυση των προβλημάτων, καθώς η νοερή αναπαράσταση είναι μια ένδειξη ανώτερης επεξεργασίας μιας κατάστασης, σε σχέση με την πραγμάτευσή της στο επίπεδο της φυσικής δράσης (Steffe, 2013; Tzur, 2019).

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν είκοσι δύο παιδιά (9 προνήπια και 13 νήπια), μέσης ηλικίας 5 ετών και 7 μηνών (με εύρος 4 έτη 10 μήνες – 6 έτη 4 μήνες), με μητρική γλώσσα τα ελληνικά, ενός τμήματος ιδιωτικού σχολείου των

Ιωαννίνων. Τα 9 ήταν κορίτσια (4 προνήπια και 5 νήπια) και τα 13 ήταν αγόρια (5 προνήπια και 8 νήπια). Όλα τα παιδιά της τάξης συμμετείχαν στην έρευνα, με συγκατάθεση από τους γονείς τους και δική τους συναίνεση.

Σχεδιασμός των δραστηριοτήτων

Ο κορμός του προγράμματος είναι τρεις δραστηριότητες (Δ1, Δ2 και Δ3) πλαισιωμένες από ένα σενάριο με ήρωες δύο ομάδες των 10 φανταστικών πλασμάτων που παίζουν ένα ομαδικό άθλημα. Οι ήρωες αναπαρίστανται με ξύλινες κυλινδρικές ράβδους με ίδια βάση και ύψος από 1 έως 10 μονάδες μήκους. Η μονάδα μήκους είναι ίση με 4 εκ. για την πρώτη ομάδα και 3 εκ. για τη δεύτερη.

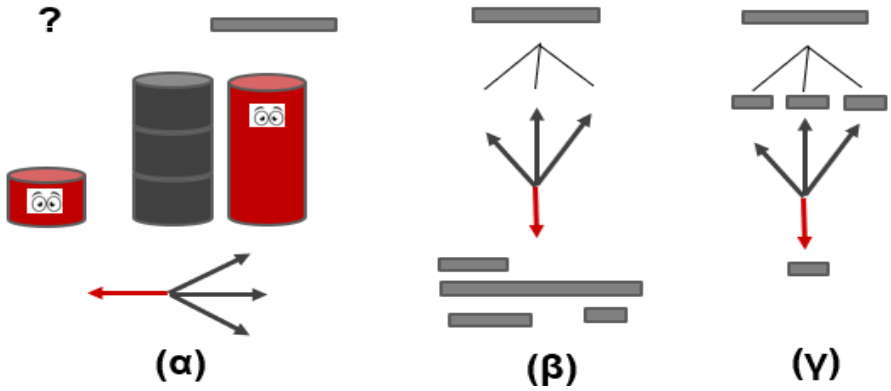
Στην εισαγωγική δραστηριότητα (Δ1) εισάγονται οι όροι για τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια για να περιγράψουν τη σχέση των «παικτριών» με την «αρχηγό» (με ύψος ίσο με τη μονάδα μήκους). Η σχέση διαπιστώνεται με μέτρηση και εκφράζεται συμμετρικά (π.χ. *η παίκτρια είναι τριπλάσια* (ως προς το ύψος) *από την αρχηγό, η αρχηγός είναι το ένα τρίτο της παίκτρια*ς). Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αξιοποιούνται οι εμπειρίες των παιδιών για την ακολουθία των φυσικών αριθμών και η κανονικότητα που διέπει την κατασκευή των ελληνικών λέξεων για τα πολλαπλάσια (κατάληξη -πλάσιο) και τα υποπολλαπλάσια (οι παρονομαστές των κλασμάτων που προκύπτουν μπορούν να κατασκευαστούν με τη χρήση των τακτικών αριθμητικών) (Πήττα & Βαμβακούση, 2022).

Στη δεύτερη δραστηριότητα (Δ2), τα παιδιά επιλύουν αναλογικά προβλήματα: Στην «αρχηγό» αντιστοιχεί μια ποσότητα είτε διακριτή, είτε συνεχής και ζητείται η ποσότητα που αντιστοιχεί σε κάποια «παίκτρια», ανάλογα με το ύψος της, - και αντίστροφα.

Η τρίτη δραστηριότητα (Δ3) εστιάζει στο πλαίσιο της πολλαπλασιαστικής αλλαγής χρησιμοποιώντας «κλασματομηχανές» (Hunting & Davis, 1991). Οι «κλασματομηχανές» που χρησιμοποιήθηκαν, αντίθετα με τις συνήθεις, λειτουργούν προς δύο κατευθύνσεις: Από τη μια μεριά, η εισερχόμενη ποσότητα πολλαπλασιάζεται με ένα φυσικό αριθμό ν, ενώ από την άλλη με τον αντίστροφό του 1/ν.

Και στις τρεις δραστηριότητες, χρησιμοποιήθηκαν εμπράγματες αναπαραστάσεις από χαρτόνι για τις εμπλεκόμενες ποσότητες (κυκλικοί δίσκοι για τις διακριτές και ορθογώνιες ράβδοι για τις συνεχείς). Επιπλέον στις Δ2 και Δ3, αξιοποιήθηκε υποστηρικτικά μια εμπράγματη αναπαράσταση του λόγου της δεδομένης και της ζητούμενης ποσότητας. Οι τρεις απαιτούμενες ενέργειες παρουσιάστηκαν με τον ίδιο τρόπο και για τα δύο είδη ποσοτήτων. Στην Εικόνα 1 παρουσιάζεται μια απεικόνιση αναλογικού προβλήματος (Δ2), με δεδομένη την ποσότητα που παίρνει η

«παίκτρια» και ζητούμενη την ποσότητα που αντιστοιχεί στην «αρχηγό». Η ενέργεια που απαιτείται είναι ο ισομερισμός που προσεγγίζεται ως εξής: Η σχέση μεταξύ «αρχηγού» και «παίκτριας» διαπιστώνεται μέσω μέτρησης με αντίγραφα της μονάδας και επιλέγεται το «εργαλείο» αναπαράστασής της (1α) που υποδεικνύει ότι η δεδομένη ράβδος πρέπει να διαμεριστεί σε τρία ίσα μέρη. Δίνονται στα παιδιά επιλογές για τα ίσα μέρη (1β) και καλούνται α) να εκτιμήσουν ποιο είναι το ζητούμενο και β) να ελέγξουν αν η επιλογή τους μπορεί, επαναλαμβανόμενη, να συνθέσει την αρχική ποσότητα. Τέλος, αξιοποιείται το «εργαλείο» που υποδεικνύει ότι στην «αρχηγό» αντιστοιχεί ένα από τα τρία ίσα μέρη. Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, οι επιλογές δίνονταν ως ν-άδες κολλημένες σε χάρτινες ταινίες.



Εικόνα 1. Απεικόνιση αναλογικού προβλήματος (Δ2) και της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου μεταξύ των εμπλεκόμενων ποσοτήτων

Διαδικασία και Ερευνητικά Εργαλεία

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων έγινε σε δύο ομάδες των 11 παιδιών στον χώρο του σχολείου. Κάθε ομάδα συμμετείχε σε εννιά συναντήσεις διάρκειας περίπου 45 λεπτών. Η εφαρμογή του προγράμματος ξεκίνησε τον Ιανουάριο και ολοκληρώθηκε τον Μάιο του σχολικού έτους 2022-23. Πραγματοποιήθηκε προέλεγχος και μεταέλεγχος με ατομική συνέντευξη των παιδιών σε χώρο του σχολείου. Οι συνεντεύξεις έγιναν σε δύο μέρη και βιντεοσκοπήθηκαν, με εστίαση στα χέρια των παιδιών και το τραπέζι στο οποίο βρίσκονταν τα υλικά.

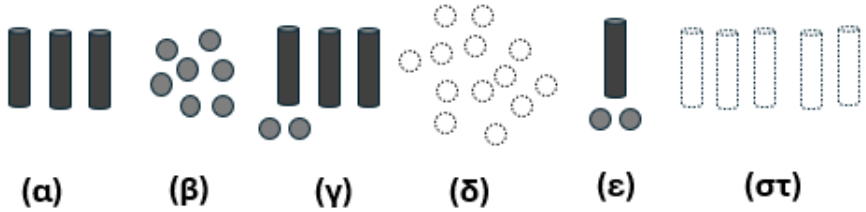
Στην εργασία αυτή θα αναφερθούμε σε δύο έργα που ήταν κοινά στον προέλεγχο και στο μεταέλεγχο. Τα έργα αυτά ήταν σε διαφορετικό πλαίσιο από αυτό της παρέμβασης και εξετάζουν κατά πόσο τα παιδιά είναι σε θέση να μεταφέρουν αυτά που διδάχτηκαν από ένα πιο οικείο πλαίσιο σε ένα άλλο. Το πρώτο έργο αφορούσε τις καταστάσεις των «ισοπληθών ομάδων» (διακριτές ποσότητες) και «ίσων μέτρων» (συνεχείς ποσότητες). Εξετάστηκαν και τα τρία προβλήματα που προκύπτουν από κάθε κατάσταση, για 2-4 ισοπληθείς ομάδες (ίσα μέτρα αντ.). Στην Εικόνα 2

παρουσιάζεται ένα μοντέλο αυτού του έργου, για 3 ισοπληθείς ομάδες. Τα προβλήματα (συνολικά, 18) διατυπώθηκαν ως εξής:

Πρόβλημα διαίρεσης μερισμού: Τρία παιδιά (2α) θα μοιραστούν δίκαια αυτές τις καραμέλες (2β). Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα πάρει κάθε παιδί;

Πρόβλημα πολλαπλασιασμού*:* Τρία παιδιά (2α) μοιράστηκαν ένα πακέτο καραμέλες. Η Ελένη πήρε αυτές τις δύο (2γ). Μπορείς να μου πεις πόσες καραμέλες είχε το πακέτο που μοιράστηκαν τα παιδιά;

Πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης: Μια παρέα παιδιών μοιράστηκε δίκαια αυτές τις καραμέλες (2β). Δεν ξέρω πόσα ήταν, αλλά ξέρω ότι η Ελένη πήρε αυτές τις δύο (2ε). Μπορείς να μου πεις πόσα ήταν τα παιδιά της παρέας;



Εικόνα 2. Μοντέλο έργου τριών προβλημάτων για τις «ισοπληθείς ομάδες»

Στο δεύτερο έργο, δόθηκαν στα παιδιά διακριτές και συνεχείς ποσότητες και τους ζητήθηκε ρητά να βρουν το ν-πλάσιο και το αντίστοιχο υποπολλαπλάσιο για ν=1,2,3,4. Παράδειγμα διατύπωσης για τις συνεχείς ποσότητες είναι το εξής: «Έχω αυτή τη σοκολάτα (χάρτινη ορθογώνια ράβδος). Θα δώσω στο Γιώργο το ένα τρίτο της σοκολάτας. Ποιο από αυτά τα κομμάτια (4 επιλογές) λες ότι θα πάρει ο Γιώργος;». Στο έργο αυτό (συνολικά, 12 προβλήματα), απαραίτητη προϋπόθεση επίλυσης ήταν η αναγνώριση και ερμηνεία των όρων.

Σε όλες τις δοκιμές των δύο έργων, τα παιδιά κλήθηκαν να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους, έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι δεν κάνουν τυχαίες επιλογές. Το εργαλείο αναπαράστασης του λόγου ήταν διαθέσιμο στα παιδιά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Επίδοση

Για κάθε πρόβλημα που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν τα παιδιά, εξετάστηκε αν επίλυση ήταν σωστή (με την προϋπόθεση ότι δεν ήταν τυχαία) ή όχι και βαθμολογήθηκε ως 1 (Επιτυχής) και 0 (Μη Επιτυχής), αντίστοιχα. Η συνολική επίδοση του κάθε παιδιού υπολογίστηκε ως το άθροισμα των βαθμών σε όλες τις δοκιμές και των δύο έργων (συνολικά, 30). Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι συχνότητες εμφάνισης των συνολικών επιδόσεων των παιδιών στον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, κατά τον προέλεγχο μόνο τέσσερα παιδιά (μεταξύ των οποίων και ένα προνήπιο) απάντησαν σωστά σε κάποιο από τα

προβλήματα. Όλες οι σωστές απαντήσεις των παιδιών στον προέλεγχο αφορούσαν έργα με διακριτές ποσότητες και πιο συγκεκριμένα έργα α) δίκαιης μοιρασιάς για δύο και σε μία περίπτωση και σε τρεις παραλήπτες, β) αναγνώριση του όρου «μισό» και γ) αναγνώριση του όρου «διπλάσιο».

Προέλεγχος			
Συνολική Επίδοση	Νήπια	Προνήπια	Σύνολο
3	1	0	1
2	2	1	3
0	10	8	18
Σύνολο	13	9	22
Μεταέλεγχος			
Συνολική Επίδοση	Νήπια	Προνήπια	Σύνολο
30	7	1	8
29	3	0	3
21	2	0	2
20	1	1	2
0	0	7	7
Σύνολο	13	9	22

Πίνακας 1: Συχνότητα εμφάνισης συνολικών επιδόσεων κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο, στο σύνολο των συμμετεχόντων

Στο μεταέλεγχο, 7 στα 9 προνήπια είχαν μηδενική συνολική επίδοση. Δύο από αυτά αρνήθηκαν εξαρχής να ασχοληθούν με τα συγκεκριμένα έργα, ενώ τα υπόλοιπα εγκατέλειψαν στην πορεία, μην έχοντας απαντήσει σωστά ούτε σε δοκιμές για τις σχέσεις 1:2/2:1.

Τα υπόλοιπα παιδιά μπορούν να διακριθούν αδρά σε δύο ομάδες: Στην πρώτη, 11 παιδιά (μεταξύ των οποίων ένα προνήπιο) απαντούν σωστά σε τουλάχιστον 29 από τα 30 προβλήματα, ενώ στη δεύτερη, 4 παιδιά (μεταξύ των οποίων ένα προνήπιο) απάντησαν σωστά σε 20-21 προβλήματα.

Επισημαίνουμε ότι οι λανθασμένες απαντήσεις παρατηρούνται σε προβλήματα τα οποία ξεφεύγουν από το μισό/διπλάσιο και δια δύο/επί δύο, κατά κύριο λόγο (αλλά όχι αποκλειστικά) στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και ιδιαίτερα όταν το ζητούμενο είναι το υπο-πολλαπλάσιο.

Στρατηγικές

Οι στρατηγικές των παιδιών κατά το μεταέλεγχο εξετάσθηκαν ως προς το βαθμό στον οποίο τα παιδιά χρειάστηκαν το υλικό ή/και το εργαλείο αναπαράστασης του λόγου στη διαδικασία της επίλυσης για να αναπαραστήσουν τις ποσότητες ή τις σχέσεις που εμπλέκονταν στα προβλήματα. Προέκυψαν τρεις κατηγορίες:

Η πρώτη (Σ1, εμπράγματη αναπαράσταση) περιλαμβάνει τις περιπτώσεις όπου τα παιδιά αξιοποίησαν το υλικό για να αναπαραστήσουν όλες τις εμπλεκόμενες ποσότητες ή/και χρησιμοποίησαν το εργαλείο αναπαράστασης του λόγου. Για παράδειγμα, σε πρόβλημα διαίρεσης μερισμού (6 καραμέλες σε 2 παιδιά), το Παιδί 1 χρησιμοποίησε τόσο το υλικό αναπαράστασης των καραμελών, όσο των παραληπτών: Αντιστοίχισε σε κάθε παραλήπτη αρχικά ένα ζευγάρι καραμέλες και στη συνέχεια μία ακόμα καραμέλα, εξαντλώντας την αρχική ποσότητα.

Η δεύτερη κατηγορία (Σ2, ημι-νοερή αναπαράσταση) περιλαμβάνει εκείνες τις περιπτώσεις όπου τα παιδιά χρησιμοποίησαν μεν το υλικό, αλλά όχι για όλες τις εμπλεκόμενες ποσότητες.

Για παράδειγμα, στο ίδιο με το παραπάνω πρόβλημα, το Παιδί 2 χρησιμοποίησε το υλικό αναπαράστασης των καραμελών, αλλά όχι των παραληπτών. Συγκεκριμένα, τοποθέτησε τις 6 καραμέλες σε μια γραμμή, ανάφερε ότι πρέπει να φτιάξει δύο ομάδες με καραμέλες, και έδειξε με το χέρι της το μέσο της γραμμής λέγοντας ότι «υπάρχουν δύο τριάδες επάνω στο τραπέζι και η Ελένη θα πάρει τη μία και την άλλη η αδερφή της».

Η τρίτη κατηγορία (Σ3, νοερή αναπαράσταση) περιλαμβάνει τις περιπτώσεις όπου τα παιδιά δεν χρησιμοποίησαν τα υλικά και επέλυσαν το πρόβλημα νοερά. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, το Παιδί 3 επιλύει πρόβλημα πολλαπλασιασμού (3 καραμέλες x 3 παιδιά) και εξηγεί ως εξής:

Παιδί 3, Επίλυση: [Κοιτάζει για λίγο τις καραμέλες] Είναι 9 καραμέλες [Φτιάχνει μία γραμμή με 9 καραμέλες].

Παιδί 3, Εξήγηση: [Δείχνει μία τριάδα με τα δάχτυλα του] Τρεις, τρεις, τρεις μας κάνει εννιά. Είναι το τριπλάσιο. Τρεις φορές. Εννιά.

Νοερές στρατηγικές εμφανίστηκαν και στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, το Παιδί 4 εκτιμά ποια από τις επιλογές αντιστοιχεί στο μισό της δεδομένης ποσότητας:

Παιδί 4, Επίλυση: [Κοιτάζει για λίγο τις επιλογές και διαλέγει τη σωστή] Αυτό το κομμάτι θα πάρει. Αυτό είναι το ένα δεύτερο.

Παιδί 4, Εξήγηση: Αν το βάλεις εδώ είναι το ένα από τα δύο κομμάτια. Κοίτα. [Ανοίγει τον αντίχειρα και τον δείκτη στο μήκος του κομματιού] Ένα, δύο [μετράει με το χέρι του τη σοκολάτα].

Μια επιπλέον κατηγορία (Σ0) περιλαμβάνει τις περιπτώσεις που αντιστοιχούν στις λανθασμένες ή μη τεκμηριωμένες απαντήσεις.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των παραπάνω κατηγοριών στο σύνολο των απαντήσεων (N=450) για τα 15 παιδιά που ανταποκρίθηκαν στα έργα του μεταελέγχου. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζεται μια αδρή κατηγοριοποίηση των παιδιών με κριτήριο το πλήθος των νοερών ή ημι-νοερών στρατηγικών που εμφάνισαν στο σύνολο των 30 προβλημάτων.

Στρατηγική	**Συχνότητα εμφάνισης (%)**
Σ0 – Καμία/Λανθασμένη	41 (9,1%)
Σ1 -Εμπράγματη	342 (76%)
Σ2 - Ημι- νοερή	37 (8,2%)
Σ3 - Νοερή	30 (6,7%)
Σύνολο	**450**

Πίνακας 2: Συχνότητα εμφάνισης στρατηγικών στο σύνολο των έργων του μεταελέγχου

Πλήθος Ημι-νοερών/ Νοερών Στρατηγικών	**Αριθμός παιδιών**

0	4
1-3	5
4-6	2
7-9	2
10	1
14	1
Σύνολο	**15**

Πίνακας 3: Αριθμός παιδιών για κάθε σύνολο ημι-νοερών και νοερών στρατηγικών στο σύνολο των έργων του μεταελέγχου

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 2, η κύρια στρατηγική των παιδιών ήταν, με μεγάλη διαφορά, η εμπράγματη αναπαράσταση των στοιχείων του προβλήματος. Από τον Πίνακα 3 προκύπτει ότι 11 από τα 15 παιδιά που συμμετείχαν στον μεταέλεγχο εμφάνισαν τουλάχιστον μία ημι-νοερή ή νοερή στρατηγική, με το πλήθος τους να κυμαίνεται από μηδέν (4 παιδιά), έως 14 (1 παιδί). Σημειώνεται ότι η μεγάλη πλειοψηφία αυτών των στρατηγικών εμφανίστηκε στα προβλήματα που αφορούσαν τις σχέσεις 1:2/2:1. Ωστόσο, 9 παιδιά εμφάνισαν τουλάχιστον μία τέτοια στρατηγική και για σχέσεις πέραν των 2:1 /1:2.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ / ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Παρουσιάσαμε ευρήματα από δύο έργα του μεταελέγχου από τον τρίτο κύκλο εφαρμογής ενός προγράμματος για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Το πρώτο εύρημα είναι ότι τα συγκεκριμένα έργα ήταν πολύ απαιτητικά για τα περισσότερα προνήπια. Οι δύο αξιοσημείωτες εξαιρέσεις υποδεικνύουν ότι αυτό δεν είναι αποκλειστικά θέμα ηλικίας, αναδεικνύοντας ταυτόχρονα το ενδεχόμενο μεγάλων δι-ατομικών διαφορών μεταξύ των προνηπίων, πέρα από αυτές μεταξύ προνηπίων και νηπίων.

Το δεύτερο εύρημα είναι ότι όλα τα νήπια (και δύο προνήπια) είχαν αξιόλογα μαθησιακά οφέλη. Τα παιδιά αυτά μετέφεραν όσα διδάχτηκαν, από τα οικεία προβλήματα της παρέμβαση, σε μη οικεία προβλήματα. Τα περισσότερα εμφάνισαν σταθερότητα απόδοσης σε όλα σχεδόν τα προβλήματα, ενώ μια μικρότερη ομάδα φάνηκε να μην έχει σταθεροποιήσει την απόδοσή της σε προβλήματα που διέπονται από σχέσεις πέραν των 2:1/1:2, που είναι γνωστό ότι είναι οι πιο προσιτές στα παιδιά αυτής της ηλικίας (Hunting & Davis, 1991).

Το τρίτο εύρημα είναι η εμφάνιση ημι-νοερών και νοερών στρατηγικών που δείχνει ένα ανώτερο επίπεδο επεξεργασίας του προβλήματος, σε σχέση με την επίλυση στο επίπεδο της καθαρά φυσικής δράσης (Steffe, 2013; Tzur, 2019), όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει συγκρίνοντας τις στρατηγικές επίλυσης του ίδιου προβλήματος των Παιδιών 1 και 2 που παρουσιάστηκαν παραπάνω: Και τα δύο παιδιά επιλύουν επιτυχώς το πρόβλημα, αλλά το Παιδί 2 φαίνεται να διατηρεί νοερά ένα από τα στοιχεία του προβλήματος και, επιπλέον, είναι σε θέση να διακρίνει δύο ομάδες των τριών αντικειμένων σε μια συλλογή 6 αντικειμένων, ένα σημαντικό επίτευγμα γι' αυτή την ηλικία (Steffe, 2013). Τα αποτελέσματά μας δείχνουν δι-ατομικές διαφορές ως προς τη χρήση ημι-νοερών και νοερών στρατηγικών, οι οποίες μπορούν να διερευνηθούν περαιτέρω ως σημεία μιας πιθανής τροχιάς μάθησης στο πεδίο αυτό (Clements & Sarama, 2009).

Όλα τα παραπάνω ευρήματα μπορούν να αποτελέσουν ενδείξεις για την χρησιμότητα του προγράμματος που σχεδιάσαμε και θα αποτελέσουν ανατροφοδότηση για την επανασχεδίασή του και τον τέταρτο κύκλο εφαρμογής του με σκοπό την ανάπτυξη ενός πιο ολοκληρωμένου

προγράμματος δραστηριοτήτων για την ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 302-311). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Clements, D., & Sarama, J. (2021). Learning and Teaching Early Math: The learning Trajectories Approach. New York: Routledge.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. In G. Kaiser & N.Presmeg (Eds.), *Compedium for early career researchers in mathematics education* (pp. 33-57). Cham: Switzerland: Springer Open.

Hunting, R. & Davis, G. (1991). Early fraction learning. New York: Springer Verlag.

Mix, K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). Quantitative development in infancy and early childhood. New York: Oxford University Press.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational psychologist*, *40*(1), 27-52.

Pitta, G., Kaldrimidou, M., & Vamvakoussi, X. (2021). Enhancing the development of multiplicative reasoning in early childhood education: a case study. In M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 481-490). Khon Kaen, Thailand: PME.

Pitta G., Vamvakoussi X. (2022). Introducing multiples and submultiples to pre-primary children. In Fernández, Ceneida, et al. (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 299-306). Alicante, Spain: PME

Sophian, C. (2004). Mathematics for the future: Developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 59-81.

Steffe, L. P. (2013). On children's construction of quantification. In R. L. Mayes & L.L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education: Papers from an International STEM Research Symposium* (pp. 13-41). Laramie, Wyoming: University of Wyoming.

Tzur, T. (2019). Developing fractions as multiplicative relations: a model of cognitive reorganization. In A. Norton & M.W. Alibali (Eds.), *Constructing number* (pp. 163-192). Cham, Switzerland: Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Elia, I. (2020). Mapping kindergartners' quantitative competence. *ZDM Mathematics Education*, 52, 805–819.

Vanluydt, E., Supply, A. S. Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2021). The importance of specific mathematical language for early proportional reasoning. *Early Childhood Research Quarterly*, 55(2), 193-200.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΗ ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Σταματία-Ευδοκία Ζέρβα, Θεοδοσία Γιαννούλη, Δήμητρα Πέππα, Μαρία Σακοράφα

Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

mantwzerva@hotmail.gr, theodosia1995@hotmail.com, peppa_dimitra@yahoo.gr, maria.sakorafa@yahoo.gr

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να διερευνήσει τη διδασκαλία των Μαθηματικών με έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών μέσω βιβλιογραφικής έρευνας και μελέτης περίπτωσης. Ερευνητικά δεδομένα αποτελούν η ημιδομημένη συνέντευξη, που εφαρμόζεται στην αντιπροσωπευτική περίπτωση ενός εκπαιδευτικού και η παρακολούθηση τριών μαθημάτων του. Η εργασία επικεντρώνεται στον προσδιορισμό των διδακτικών πρακτικών, οι οποίες δίνουν έμφαση και έχουν στόχο την ανάπτυξη της Μαθηματικής διαισθητικής γνώσης των μαθητών. Αναδείχθηκε βιβλιογραφική σύνδεση μεταξύ της διδακτικής προσέγγισης και των διδακτικών πρακτικών της οπτικοποίησης και της διερεύνησης, η οποία παρουσιάστηκε και στα ευρήματα της παρούσας ποιοτικής έρευνας. Επίσης προέκυψε σύνδεση με την εισαγωγή στοιχείων θεατρικότητας στη διδασκαλία, η οποία δεν είχε προβλεφθεί από τη βιβλιογραφία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι έννοιες της διαίσθησης και της διαισθητικής γνώσης έχουν απασχολήσει ποικίλους τομείς συμπεριλαμβανομένης της Φιλοσοφίας, των Μαθηματικών, της Ψυχολογίας και της Διδακτικής (Westcott, 1968). Σύμφωνα με τον Nelissen (2013), η διαίσθηση θεωρείται ως η εξερεύνηση της εσωτερικευμένης, συμπιεσμένης γνώσης, ενώ ο Fischbein (1999) αναφέρει πως οι διαισθήσεις μπορούν να αποκτηθούν αυθόρμητα στην περίπτωση των πρωτογενών διαισθήσεων, οι οποίες βασίζονται στην άρρητη μάθηση, αλλά και συστηματικά στην περίπτωση των δευτερογενών διαισθήσεων, οι οποίες βασίζονται στην εκπαίδευση. Όπως επισημαίνουν οι Ben-Zeev&Star (2001), Fischbein (1999, 1982) και Nelissen (2013), η διαισθητική γνώση των μαθητών οφείλει να αξιοποιείται και να αναπτύσσεται στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Παράλληλα, η προσέγγιση του Συμπεριφορισμού θεωρεί τη διαισθητική και την αναλυτική μορφή γνώσης ως συμπληρωματικές και βαθιά αλληλένδετες όψεις μιας μοναδικής νοητικής παραγωγικής συμπεριφοράς.

Παρ’ όλα αυτά, εκτός από διάσπαρτες αναφορές σε διδακτικές πρακτικές που προσδίδουν έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών στα Μαθηματικά, στη σχετική βιβλιογραφία δεν παρουσιάζεται κάποια

έρευνα, η οποία να κατατάσσει τις συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές εντός ενός γενικότερου πλαισίου. Ταυτόχρονα, η έρευνα των διαισθητικών αντιλήψεων στην εκπαίδευση εστιάζει είτε στις νεαρότερες ηλικίες, είτε στις εσφαλμένες διαισθητικές εκτιμήσεις, δίνοντας πολύ λιγότερη έμφαση στη διαισθητική κατανόηση, που αναπτύσσεται σε μεγαλύτερες ηλικίες και μπορεί να αξιοποιηθεί στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Ben-Zeev & Star, 2001, p.2). Η παρούσα εργασία είναι σύμφωνη με την άποψη των Ben-Zeev και Star, οι οποίοι υποστηρίζουν πώς «Η διαίσθηση μπορεί και πρέπει να είναι ένα αναπόσπαστο μέρος της μαθησιακής διαδικασίας.» (Ben-Zeev & Star, 2001, p. 27) και στοχεύει στον προσδιορισμό ενός πλαισίου των διδακτικών πρακτικών της διδασκαλίας των Μαθηματικών με έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών. Για αυτόν τον σκοπό πραγματοποιήθηκε αρχικά σχετική βιβλιογραφική έρευνα και στη συνέχεια μελέτη περίπτωσης, με συνέντευξη και παρακολουθήσεις μαθημάτων μίας αντιπροσωπευτικής περίπτωσης εκπαιδευτικού. Το ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας είναι το εξής: (Ε.Ε.) Ποιες είναι οι διδακτικές πρακτικές, που χρησιμοποιεί ένας εκπαιδευτικός, οι οποίες έχουν τη δυνατότητα να προσδώσουν έμφαση και μπορούν να αναπτύξουν τη διαισθητική γνώση των μαθητών στα Μαθηματικά;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η διαίσθηση είναι στενά συνδεδεμένη με τις γνωστικές δραστηριότητες, τις εικόνες, την εννοιολογική γνώση και την εμπειρία (Fischbein, 1999). Ο Fischbein (1982) εξηγεί πως για να φτάσει κάποιος στη διαισθητική κατανόηση μίας Μαθηματικής αλήθειας πρέπει να "ζήσει" τη διαδικασία ως αποτέλεσμα κάποιας συμπεριφορικής, προσωπικής, διανοητικής ή εξωτερικής εμπλοκής του με την απόδειξη (*Βάση της πεποίθησης*). Ως στρατηγικές διδασκαλίας με στόχο την ανάπτυξη δευτερογενών διαισθήσεων από τον μαθητή προσδιορίζει την καθοδηγούμενη διδασκαλία, τη μάθηση με γνώμονα την ανακάλυψη και τη χρήση επαναλαμβανόμενων δομών και μοτίβων (Fischbein et al., 1970, p.4). Ενώ οι Ben-Zeev και Star (2001) σημειώνουν πως η σύνδεση των Μαθηματικών με τις πρωτογενείς διαισθήσεις των μαθητών, στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, μπορεί να επιτευχθεί μέσω της διερεύνησης και της χρήσης χειραπτικών εργαλείων.

Κατά τη βιβλιογραφική έρευνα εντοπίστηκε σύνδεση της οπτικοποίησης με τη διαισθητική κατανόηση στα Μαθηματικά (Davis & Hersh, 2012; Nelissen, 2013; Fischbein, 1982). Χαρακτηριστικά ο Tall (1991) υποστηρίζει πως οι διαισθήσεις στα Μαθηματικά συνδέονται με τις νοητικές αναπαραστάσεις των Μαθηματικών ιδεών (concept image) ενώ η Boaler (2016) αναφέρει πως πολλές από τις Μαθηματικές έννοιες διατηρούνται σε οπτικές και αισθητικοκινητικές μνήμες. Παράλληλα, εντοπίστηκε σύνδεση της διερεύνησης με τη διαισθητική κατανόηση

(Dewey, 1986; Polya, 1962). Ο Bagnato (1973) ισχυρίζεται πως η ερώτηση και η απάντηση είναι η πιο χρήσιμη μέθοδος διδασκαλίας και η διαίσθηση είναι η ανταμοιβή που προορίζεται για όποιον την κατακτήσει, ενώ ο Brawn (2000) υποστηρίζει πως οι μαθητές επηρεάζονται από τις διαισθήσεις, οι οποίες προέκυψαν κατά τη διάρκεια συζητήσεων, και συνηθίζουν στην ιδέα ότι για το ίδιο πρόβλημα πολλαπλές προσεγγίσεις και λύσεις μπορεί να είναι έγκυρες. Όσον αφορά τη θεατρικότητα, η οποία εντοπίστηκε στην παρούσα έρευνα μελέτης περίπτωσης με έμφαση στη στάση του εκπαιδευτικού, οι Duatepe και Ubuz (2009) αναφέρουν πως οι θεατρικές δραστηριότητες διδασκαλίας Μαθηματικών βοηθούν τους μαθητές να οικοδομήσουν τις δικές τους γνώσεις για τον κόσμο μέσω αντιλήψεων και εμπειριών τους (Simon, 1995), συνδέοντας τη θεατρικότητα με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση. Ενώ το *σχήμα*, το οποίο αποτελεί κεντρικό όρο στη θεωρία του κονστρουκτιβισμού, συνδέεται καθοριστικά με τη διαίσθηση από τον Fischbein (1999).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Ο συμμετέχων στην έρευνα είναι ένας Μαθηματικός, με δεκατετραετή εμπειρία στον χώρο της φροντιστηριακής εκπαίδευσης. Η περίπτωση του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού θεωρήθηκε μοναδική, καθώς ο εκπαιδευτικός στρατηγικά στοχεύει με τη διδακτική του προσέγγιση να δώσει έμφαση αλλά και να αναπτύξει τη διαισθητική γνώση των μαθητών του στα Μαθηματικά, όπως αυτό παρατίθεται και στην ενότητα των αποτελεσμάτων. Ο εκπαιδευτικός θεωρήθηκε ιδιαίτερη περίπτωση, η οποία άξιζε να καταγραφεί και να αναλυθεί, καθώς η παρούσα έρευνα υιοθετεί την παραδοχή πως αν η διδασκαλία με έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών είναι εφικτή εντός της τάξης ενός φροντιστηρίου, όπου επικρατεί αυστηρά η διαδικαστική προσέγγιση της γνώσης μέσω μεθοδολογιών, τότε θα είναι εφικτή και εντός της τάξης ενός σχολείου.

Μεθοδολογία συνέντευξης

Ο σχεδιασμός της ημιδομημένης συνέντευξης ακολούθησε τη μεθοδολογία “Single-subject analysis” (Evans, 2002), βάσει της οποίας η δράση και το πλαίσιο σκέψης του συνεντευξιαζόμενου αντιμετωπίζονται ως μία ολότητα. Για αυτόν τον σκοπό, σχεδιάστηκαν ερωτήσεις οι οποίες συνδύαζαν την αναφορά σε προσωπικές εμπειρίες του εκπαιδευτικού με τη διδακτική του προσέγγιση, ώστε να προσδιοριστούν οι πρακτικές του. Οι ερωτήσεις δεν βαθμονομήθηκαν και χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες: Κατηγορία 1: Προσωπικές εμπειρίες και πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού ως προς τη διδασκαλία με έμφαση στη διαισθητική γνώση. Κατηγορία 2: Αναφορά σε διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού σε σχέση με τη διαισθητική γνώση των μαθητών και αξιολόγηση Μαθητικών

έργων, που του δόθηκαν ως προς τον παράγοντα αυτό. Κατηγορία 3: Περιγραφή του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος εντός των πλαισίων του οποίου πραγματοποιείται η συνέντευξη.

Πίνακας 1: Ερωτήσεις συνέντευξης

Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3
1) Τι σημαίνει για εσένα διδασκαλία με έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών;	2) Εσύ θεωρείς ότι εφαρμόζεις τη διδασκαλία με έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών; Αν ναι, με ποιο τρόπο;	3) Στο ΑΠΣ και σε Μαθηματικά βιβλία θεωρείς πως υπάρχουν ασκήσεις και προβλήματα τα οποία δίνουν έμφαση ή αναπτύσσουν τη διαισθητική γνώση των μαθητών; Αν ναι, δώσε μας ένα παράδειγμα.
6) Τι πιστεύεις ότι προσφέρει μία τέτοιας μορφής διδασκαλία;	4) Δόθηκαν Μαθηματικά έργα προς αξιολόγηση σε σχέση με την έμφαση στη Μαθηματική διαίσθηση.	
8) Πιστεύεις πως σε βάθος χρόνου μπορεί να δώσει γνωστικά αποτελέσματα και συναισθηματικές αλλαγές;	7) Πώς αξιολογείς τη διαισθητική γνώση στα Μαθηματικά των μαθητών σου;	5) Έχεις συναντήσει εκπαιδευτικό (συνάδελφο, δάσκαλο ή καθηγητή) που εφαρμόζει τη διδασκαλία με έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών;

Ερευνητικά δεδομένα και ανάλυσή τους

Πραγματοποιήθηκε μαγνητοσκόπηση της ημιδομημένης συνέντευξης του εκπαιδευτικού, καθώς και μαγνητοφώνηση των τριών παραδόσεών του. Οι δύο παραδόσεις πραγματοποιήθηκαν σε δύο τμήματα της Α΄ Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας, όπου επιλύθηκαν ασκήσεις από τα κεφάλαια της ύλης των τραπεζίων. Η παράδοση στο μάθημα της Άλγεβρας πραγματοποιήθηκε σε τμήμα της Α΄ Λυκείου και αφορούσε την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της κλίσης της ευθείας. Κατόπιν της απομαγνητοφώνησης της συνέντευξης και των παραδόσεων, τα δεδομένα επεξεργάστηκαν σύμφωνα με τη θεματική μέθοδο ανάλυσης της περίπτωσης “Holistic single-case design analysis” (Tsiolis, 2018). Αρχικά προσδιορίστηκαν οι κωδικοί των θεματικών ενοτήτων της Οπτικοποίησης (Σχήματα, Χρήση χρωμάτων) και της Διερεύνησης (Ερωτήσεις, Πολλαπλές λύσεις), που προέκυψαν κατά τη βιβλιογραφική έρευνα, και έπειτα αναζητήθηκαν στο σύνολο των δεδομένων. Στη συνέχεια, με χρήση της μεθοδολογίας “Pattern-matching”, προσδιορίστηκαν με επιμέρους κωδικούς οι υποκατηγορίες των κύριων θεματικών ενοτήτων. Καθώς

στόχος της ποιοτικής ανάλυσής ήταν να καταδείξει και νέες πτυχές της προσέγγισης διδασκαλίας που μελετάται, χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία "Pattern-matching" και για τον προσδιορισμό των κωδικών με υψηλή συχνότητα εμφάνισης που δεν είχαν προβλεφθεί από τη βιβλιογραφία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο εκπαιδευτικός της παρούσας έρευνας, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης στην Ερώτηση 1 (Πίνακας 1), ανέφερε χαρακτηριστικά ότι: «Η διαισθητική γνώση σημαίνει… έχω μια αποτύπωση της πραγματικότητας, δηλαδή αρχίζω και βιώνω την πληροφορία, μπαίνω μες στο νόημα.». Ενώ στην Ερώτηση 2 (Πίνακας 1), αναφορικά με το πώς ο ίδιος εφαρμόζει στη διδασκαλία του την έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών, απάντησε πως ενθαρρύνει τους μαθητές τους να οπτικοποιούν τις εκφωνήσεις και να εμπιστεύονται το ένστικτό τους, προσθέτοντας ότι: «Ο εαυτός σου θα σου λύσει την άσκηση, αρκεί να τον ρωτήσεις τα σωστά πράγματα… Ανάλογα τι ερωτήσεις θα του κάνεις, θα σου δώσει την απάντηση.».

Συνολικά τα αποτελέσματα της θεματικής ανάλυσης των δεδομένων, από την ημιδομημένη συνέντευξη και τις παρακολουθήσεις μαθημάτων του εκπαιδευτικού, ανέδειξαν τους τρεις κεντρικούς άξονες διδακτικών πρακτικών της Οπτικοποίησης, της Διερεύνησης και της Θεατρικότητας. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τρεις κεντρικοί άξονες με τους κωδικούς των υποκατηγοριών, που προέκυψαν από τα δεδομένα καθώς και τα αντιπροσωπευτικά αποσπάσματα των κωδικών.

Πίνακας 2: Θεματικοί άξονες, υποκατηγορίες και αποσπάσματα κωδικών

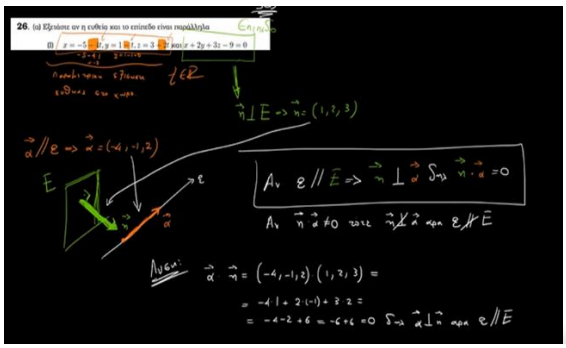
Θεματικοί άξονες	Κωδικοί	Δεδομένα
<u>Οπτικοποίηση:</u> Σχήματα	·Γραφική παράσταση ·Απεικόνιση ·Γεωμετρικό σχήμα	«Αυτό όμως είναι μια διαίσθηση. Αυτή η εκφώνηση πρέπει να γίνει σχήμα, στο μάτι, μέσα σου να γίνει σχήμα.»
	·Σύννεφο σκέψης	«Τι θα ήθελες για να σου γίνει ένα τέλειο τετράγωνο; … άλλο ένα αβ, συννεφάκι σκέψης από πάνω.»
<u>Οπτικοποίηση:</u> Χρήση χρωμάτων	·Απλότητα ·Αμεσότητα πληροφορίας	«Κάποια νούμερα έχουν νόημα βάζω χρώμα. Για να μπορεί να συνηθίζει το μάτι. Να εστιάζει στην πληροφορία και εκείνη την ώρα να συνηθίζει το μάτι και να μπορεί σιγά σιγά να κάνει σχήμα.»
	·Σύνδεση εννοιών	«Καταλαβαίνετε ότι δεν υπάρχει νόημα να σε ρωτήσει κάποιος για

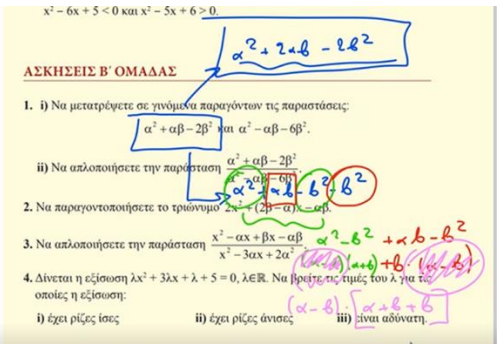
	·Πρόκληση ερεθίσματος	την μπλε και μετά η μπλε να μην υπάρχει πουθενά, για αυτό και χρησιμοποιώ και χρώματα για να βλέπουν πού υπάρχει η πληροφορία.»
<u>Οπτικοποίηση:</u> Χρήση γλώσσας για δημιουργία εικόνων	·Μεταφορές ·Παρομοιώσεις	«Κοίτα, ως ποδηλάτης ας πούμε, στην ανηφόρα το έργο, που απαιτείται για να πας από εδώ, εδώ είναι το ίδιο- είναι δυναμική ενέργεια. Το θέμα είναι άμα έχω πολύ δυνατά πνευμόνια, το κάνω το πράσινο. Αν όχι πάω με το μαύρο. Ανταλλάσσω κλίση με διάρκεια ανηφόρας. Οκ;»
<u>Διερεύνηση:</u>	·Αποδοχή λάθους	«Μπορεί τώρα να μην πέτυχε η ιδέα σου, αλλά την επόμενη φορά να έχεις μια πολύ καλή ιδέα που να λύνει την άσκηση.»
	·Πολλαπλές λύσεις	«Πιο αποδοτικό είναι να δείξετε πλουραλισμό λύσεων, ώστε ο καθένας να επιβεβαιώσει τη διαίσθησή του, παρά να επιβραβεύσετε τον τάδε και όλους τους υπόλοιπους τίποτα και να μην μάθουν ποτέ ότι η ιδέα τους είχε κι αυτή ζωή.»
	·Ερωτήσεις	«Τι λέμε μια ευθεία; Με ποια άλλη λέξη θα την περιγράφατε; Με ποια άλλη λέξη θα τη λέγατε;», «Τι σημαίνει f(x)=5; Περιέγραψέ το μου με άλλα λόγια. Εσύ πως το αντιλαμβάνεσαι;»
<u>Θεατρικότητα:</u> Παραστατικότητα	·Ιδιαίτερη εκφραστικότητα στην αφήγηση ·Ένταση φωνής	«Το 2! Θες το δύο! Αυτό το πράγμα εδώ (το συμπληρώνει στην εκφώνηση). Αααα δεν το χούμε, κριμααά…»
	·Πρόκληση συναισθημάτων	«Θα διαβάσετε την εκφώνηση σιγά σιγά ώστε να αρχίσετε να καταλαβαίνετε το σπίτι στο οποίο μπαίνετε μέσα. Ας πούμε, είναι σαν ένα θρίλερ, σε πετάνε μέσα σ’ ένα σπίτι, σου κλείνουνε πόρτες παράθυρα κι εσύ πρέπει να βρεις την άκρη εκεί μέσα.»
<u>Θεατρικότητα:</u>	·Χιουμοριστικές εκφράσεις	«Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία είναι κουτσομπόλες. Αν κάτσει κάποιος

Κώδικας επικοινωνίας φιλικός προς τους μαθητές		και αποκωδικοποιήσει την εκφώνηση του λέει πολλά πράγματα.»
	• «Δική» τους γλώσσα	«Εφόσον έχω το θεώρημα 90-60-30 πατ-πατ πατ-πατ (σημαδεύει τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα), τα σηματάκια ισότητας θα τα κάνουμε να μιλήσουνε.»
	• Χρήση αγγλικών	«That's it cowboys. That's all folks.»

Οπτικοποίηση

Ο εκπαιδευτικός χαρακτηριστικά ανέφερε ότι «διαισθητική γνώση σημαίνει εικόνες» και πως η διδασκαλία του βασίζεται στη δημιουργία σχημάτων, απεικονίσεων και στη χρήση χρωμάτων, προκειμένου να προκαλέσει το οπτικό ερέθισμα, το οποίο θα οδηγήσει στη διαισθητική κατανόηση των Μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Επίσης, ο εκπαιδευτικός παρουσίασε και τη χρήση του «Σύννεφου σκέψης» (ορολογία του εκπαιδευτικού), που αφορά την οπτική αναπαράσταση σχετικών ορισμών και ιδεών και εξυπηρετεί ως εργαλείο επίλυσης.





Εικόνα 4, 5: Χρήση χρωμάτων στην επίλυση και "Σύννεφο σκέψης".

Διερεύνηση

Ο εκπαιδευτικός ανέφερε πως παρακινεί την έκφραση των διαφορετικών τρόπων επίλυσης κάθε άσκησης, με στόχο την ανάδειξη της Μαθηματικής διαίσθησης όλων των μαθητών, πρακτική η οποία εντοπίστηκε και στις παρακολουθήσεις των μαθημάτων του. Όταν ορισμένες ιδέες των μαθητών οδηγούσαν σε αδιέξοδο, ο εκπαιδευτικός τις επιδοκίμαζε αναγνωρίζοντάς τες ως μέρος της διερευνητικής διαδικασίας. Τέλος, η συχνή χρήση των ερωτήσεων από τον εκπαιδευτικό αξιοποιούνταν όχι μόνο για την αιτιολόγηση μίας ιδέας, αλλά και για να δημιουργήσει αμφιβολίες, να προτρέψει τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις, να τους ενθαρρύνει να εξηγήσουν πώς αντιλαμβάνονται οι ίδιοι μια έννοια, πώς τη συσχετίζουν με άλλες οικείες έννοιες από την καθημερινή ζωή, τις εκπαιδευτικές τους

εμπειρίες ή από διαφορετικές επιστήμες, συνδέοντας το διδακτικό αντικείμενο με τη διαισθητική γνώση των μαθητών.

Θεατρικότητα

Ο άξονας των διδακτικών πρακτικών της Θεατρικότητας, ενώ δεν είχε προβλεφθεί από τη βιβλιογραφική έρευνα, προέκυψε από τα δεδομένα της μελέτης περίπτωσης κυρίως στις παρακολουθήσεις των μαθημάτων με έμφαση στη στάση του εκπαιδευτικού, χωρίς την εμπλοκή των μαθητών με όρους θεατρικότητας στο μάθημα. Ο εκπαιδευτικός θεατρικοποιούσε την εκφώνηση και τις Μαθηματικές έννοιες με εκφραστικότητα στην αφήγηση, με μακρόσυρτες εκφράσεις και διαφοροποίηση του τόνου της φωνής του. Επιπλέον, παρατηρήθηκε η χρήση συναισθηματικά επιφορτισμένων εκφράσεων που αφορούν Μαθηματικές έννοιες, καθώς και Μαθηματικές εκφράσεις με «ποιητικό» τρόπο. Επίσης, υπήρχαν περιπτώσεις όπου το μάθημα θύμιζε παιχνίδι, με τον εκπαιδευτικό να αλλοιώνει τη χροιά της φωνής του, αλλά και με την επανάληψη εκφράσεων των μαθητών διατηρώντας τα γραμματικά τους λάθη.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης περίπτωσης προέκυψαν οι κεντρικοί άξονες διδακτικών πρακτικών της Οπτικοποίησης και της Διερεύνησης, όπως αυτοί προσδιορίζονται από την σχετική βιβλιογραφία (Davis&Hersh, 2012; Nelissen, 2013; Fischbein, 1982; Tall, 1991; Boaler, 2016; Dewey, 1986; Polya, 1962; Bagnato, 1973; Brawn, 2000), οι οποίοι είχαν αναδειχθεί κατά τη βιβλιογραφική έρευνα ότι διαθέτουν σύνδεση με τη διαισθητική γνώση. Επιπλέον, προσδιορίστηκαν οι κεντρικοί άξονες με επιμέρους υποκατηγορίες διδακτικών πρακτικών, οι οποίοι εντοπίστηκαν βάσει της θεματικής ανάλυσης της ποιοτικής έρευνας και προέκυψε ο νέος άξονας διδακτικών πρακτικών της Θεατρικότητας. Ο νέος άξονας, ενώ δεν είχε προβλεφθεί από την αρχική βιβλιογραφική έρευνα, παρουσιάζεται επίσης να διαθέτει σύνδεση με τη διαισθητική γνώση μέσω του κονστρουκτιβιστικού πλαισίου μάθησης (Duatepe & Ubuz, 2009; Simon, 1995; Fischbein, 1999). Ως προς τους περιορισμούς της παρούσας έρευνας αναφέρονται οι εξής: 1) Η μελέτη μόνον ενός εκπαιδευτικού, οποίος ωστόσο υποστήριζε θεωρητικά και πρακτικά την προκείμενη προσέγγιση διδασκαλίας. 2) Η παρακολούθηση των μαθημάτων του εκπαιδευτικού περιορίστηκε μονάχα σε τρεις παραδόσεις.

Στην παρούσα έρευνα οι θεωρήσεις του εκπαιδευτικού, ως προς την ύπαρξη και τη σημασία αξιοποίησης της διαισθητικής γνώσης των μαθητών στη διδασκαλία, εμφανίστηκαν κατά τη συνέντευξη να ενισχύουν την πεποίθησή του ως προς την ισοτιμία όλων (εκπαιδευτικός και μαθητές) στο πλαίσιο ενός μαθήματος. Ενδεχομένως, για αυτόν τον λόγο ο εκπαιδευτικός καλλιεργεί ένα φιλικό περιβάλλον μάθησης, ακολουθώντας

την τακτική της *θετικής ενίσχυσης*, με χρήση των διδακτικών πρακτικών που παρουσιάστηκαν, όπου το κλίμα ασφάλειας δημιουργεί στους μαθητές συνθήκες πρόσβασης στη διαισθητική τους γνώση, ενώ παράλληλα η εισαγωγή αισθητηριακών ερεθισμάτων και η πρόκληση συναισθημάτων συνεισφέρουν στην εν δυνάμει δημιουργία νέων δευτερογενών διαισθήσεών τους μέσω της εμπειρικής τους εμπλοκής με τη Μαθηματική ύλη (Fischbein, 1982). Θεωρείται σκόπιμο η παρούσα έρευνα να επαναληφθεί σε επιπλέον εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και σε περιβάλλον σχολείου, ώστε να ελεγχθεί αν θα προκύψει διαφοροποίηση των διδακτικών πρακτικών. Διδακτικές πρακτικές όπως η χρήση χειραπτικών εργαλείων (Ben-Zeev & Star, 2001) ή οι δραστηριότητες με στοιχεία θεατρικότητας και ενεργό συμμετοχή των μαθητών ενδεχομένως να διαθέτουν δυσκολίες εφαρμογής στο ταχύρρυθμο εκπαιδευτικό περιβάλλον ενός φροντιστηρίου.

Επιπλέον, προτείνεται ως επέκταση της παρούσας έρευνας η μελέτη της προσέγγισης διδασκαλίας Μαθηματικών με έμφαση στη διαισθητική γνώση σε σχέση με την απόδοση των μαθητών αλλά και ως προς τη θετική ή αρνητική τους προδιάθεση προς τα Μαθηματικά. Χαρακτηριστικά διατυπώνεται από τον Fischbein (1982, p.12) η υπόθεση πως μία διδασκαλία των Μαθηματικών με έμφαση στη διαισθητική γνώση των μαθητών μπορεί ενδεχομένως να μειώσει το Μαθηματικό τους Άγχος. Όπως σημειώνει ο Schoenfeld (2017), η ανάπτυξη της *Μαθηματικής Ταυτότητας* των μαθητών συνεχίζει να συνιστά πρόκληση στη διδασκαλία. Η προσέγγιση διδασκαλίας η οποία διερευνήθηκε στην παρούσα εργασία έχει τη δυνατότητα να ενθαρρύνει την ιδιωτικοποίηση της γνώσης από τους μαθητές καθώς εστιάζει στην εξερεύνηση των διαισθητικών γνώσεων των μαθητών σχετικά με τη Μαθηματική ύλη, την επαλήθευση ή την επανεξέτασή τους, καθώς και την εν δυνάμει καλλιέργεια νέων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bagnato, R. A. (1973). Teaching college mathematics by question-and-answer. *Educational Studies in Mathematics*, 185-192.

Ben-Zeev, T., & Star, J. (2001). Intuitive mathematics: Theoretical and educational implications. In Understanding and teaching the intuitive mind (pp. 41-68). Routledge.

Boaler, J., Chen, L., Williams, C., & Cordero, M. (2016). Seeing as understanding: The importance of visual mathematics for our brain and learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, *5*(5), 1-6.

Brawn, J. R. (2000). The formal and the intuitive in science and medicine. In *The Intuitive Practitioner: On the value of not always knowing what one is doing* (pp. 149-164). Open University Press.

Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (2012). The mathematical experience, study edition. Boston: Birkhäuser Boston.

Dewey, J. (1986, September). Experience and education. In The educational forum (Vol. 50, No. 3, pp. 241-252). Taylor & Francis Group.

Duatepe-Paksu, A., & Ubuz, B. (2009). Effects of drama-based geometry instruction on student achievement, attitudes, and thinking levels. The Journal of Educational Research, 102(4), 272-286.

Evans, J. (2002). Adults' mathematical thinking and emotions: A study of numerate practice. Routledge.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. Educational studies in mathematics, 38(1), 11-50.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, *3*(2), 9-24.

Fischbein, E., Pampu, I., & Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *British Journal of Educational Psychology*, *40*(3), 261-270.

Nelissen, J. (2013). Intuition and problem solving. Curriculum and Teaching, 28(2), 27-44.

Polya, G. (1962). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. *New York: John Wiley.*

Schoenfeld, A. H. (2017). Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 415-432.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, *26*(2), 114-145.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. *Visualization in teaching and learning mathematics*, *19*, 105-119.

Tsiolis, G. (2018). Γ. Τσιώλης (2018) Θεματική ανάλυση ποιοτικών δεδομένων. *Στο Γ. Ζαϊμάκης (επιμ.),Ερευνητικές διαδρομές στις Κοινωνικές Επιστήμες. Θεωρητικές – Μεθοδολογικές Συμβολές και Μελέτες Περίπτωσης. Πανεπιστήμιο Κρήτης – Εργαστήριο Κοινωνικής Ανάλυσης και Εφαρμοσμένης Κοινωνικής έρευνας*. Σελ. 97-125.

Westcott, M. R. (1968). Toward a contemporary psychology of intuition: A historical, theoretical, and empirical inquiry. (No Title).

ΤΑ ΑΦΗΓΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΕΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Παλαμιώτη Νικολέττα[1], Ζαχαριάδης Θεοδόσιος[1], Μπιζά Ειρήνη[2], Πόταρη Δέσποινα[1]

[1]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, [2]University of East Anglia

nikipalam@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr, I.Biza@uea.ac.uk, dpotari@math.uoa.gr

Στην παρούσα εργασία [1] παρουσιάζουμε ευρήματα από τη διερεύνηση των αφηγημάτων πρωτοετών φοιτητών μαθηματικών για το τι είναι ορισμός και τι θεώρημα. Η ανάλυση των δεδομένων, με τη βοήθεια της θεωρίας του commognition, ανέδειξε ένα εύρος από διαφορετικά αλλά και αντιφατικά αφηγήματα. Φαίνεται ότι οι πρότερες εμπειρίες από το σχολείο και οι σχολικές ρουτίνες παίζουν ρόλο στο σχηματισμό αυτών των αφηγημάτων που έρχονται σε σύγκρουση με τα αντίστοιχα του πανεπιστημίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα στη Διδακτική των μαθηματικών όλο και περισσότερο εστιάζει στη μελέτη της μετάβασης των φοιτητών από το σχολικό στο πανεπιστημιακό περιβάλλον, καθώς και στη μάθηση και τη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο. Κατά τη μετάβαση, οι φοιτητές μπορεί να αντιμετωπίσουν δυσκολίες που σχετίζονται με ζητήματα είτε ατομικά, κοινωνικά είτε θεσμικά (Gueudet, 2008). Ειδικότερα, η Gueudet (2008) αναφέρει ότι το πανεπιστήμιο αποτελεί έναν νέον κόσμο για τους φοιτητές, όπου η εστίαση δεν είναι στον τρόπο οργάνωσης των γνώσεων, αλλά στον τρόπο που κατασκευάζουν αποδείξεις, που τις επικοινωνούν, καθώς και στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Η Sfard (2014) τονίζει ότι η μετάβαση αυτή συχνά αποτελεί πρόκληση για τους φοιτητές, οι οποίοι καλούνται να μετατοπιστούν από τον μαθηματικό λόγο του σχολείου στον λόγο του πανεπιστήμιου, αφού οι δυο λόγοι διαφέρουν.

Ο *ορισμός* και το *θεώρημα* αποτελούν θεμελιώδη αντικείμενα για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Χαρακτηριστικά οι Zaslavsky και Shir (2005) παρουσιάζουν τις διαφορετικές κατανοήσεις μαθητών για τους ορισμούς. Ειδικότερα, θεωρείται ότι ο ορισμός πρέπει να βασίζεται σε απλές και οικίες έννοιες, να έχει σωστή διατύπωση και να αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την έννοια που ορίζεται, ενώ οι ισοδύναμοι ορισμοί μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν θεωρήματα. Επιπλέον, οι μαθητές θεωρούν ότι η χρησιμότητα των ορισμών σχετίζεται με τη διαδικασία της απόδειξης και της επίλυσης προβλημάτων (Zaslavsky & Shir, 2005).

Ανατρέχοντας στα ελληνικά σχολικά βιβλία μαθηματικών, παρατηρείται ότι οι όροι «ορισμός» και «θεώρημα» εμφανίζονται κυρίως στη Γεωμετρία και στην Ανάλυση και λιγότερο στην Άλγεβρα. Στο πανεπιστήμιο οι φοιτητές καλούνται να αντιμετωπίσουν μια σιωπηρή μετατόπιση στη χρήση ορισμών και θεωρημάτων, καθώς γίνονται θεμελιώδη εργαλεία των μαθηματικών πρακτικών τους. Σε αυτό το πλαίσιο, οι Edwards και Ward (2004) αναφέρουν ότι οι φοιτητές μπορεί να μην κατηγοριοποιούν και να μην χρησιμοποιούν τους μαθηματικούς ορισμούς όπως οι μαθηματικοί. Επιπλέον, οι Gilboa, Dreyfus και Kidron (2023) κάνουν λόγο για μετα-μαθηματικές πτυχές των ορισμών που οι εκπαιδευόμενοι πρέπει να εκτεθούν ώστε να αντιληφθούν τον ορισμό που πραγματεύονται, αλλά και γενικά τους ορισμούς, ως βασικό στοιχείο των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε στα αφηγήματα των πρωτοετών φοιτητών μαθηματικών σχετικά με τους ορισμούς και τα θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία, η μάθηση και η σκέψη προσεγγίζονται με τη συμμετοχική και διαλεκτική οπτική της θεωρίας του Commognition (Sfard, 2008). Ο όρος *commognition* προκύπτει από τον συνδυασμό των λέξεων *communication* και *cognition*, δηλαδή επικοινωνία και νόηση, θέτοντας τη διαπροσωπική επικοινωνία και την ατομική σκέψη ως τις δυο όψεις του ίδιου φαινομένου. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η *σκέψη* θεωρείται ως η «εξατομικευμένη εκδοχή της διαπροσωπικής επικοινωνίας» (σελ. 81), τα *μαθηματικά* ως λόγος (discourse) (σελ.129), η *μάθηση των μαθηματικών* ως η αλλαγή του λόγου (σελ.255) ενώ η *διδασκαλία* των μαθηματικών ως το μέσο επίτευξης αυτής της αλλαγής.

Επιπλέον, τα μαθηματικά, ως λόγος, έχουν τέσσερα βασικά χαρακτηριστικά: *τη χρήση λέξεων* (word use) ως ο τρόπος που χρησιμοποιείται μια λέξη στο λόγο (π.χ. πώς χρησιμοποιείται η λέξη αριθμός), τους *οπτικούς διαμεσολαβητές* (visual mediators) ως τα μη λεκτικά μέσα επικοινωνίας (π.χ. γραφική αναπαράσταση, σύμβολα), τα *επικυρωμένα αφηγήματα* (endorsed narratives) ως το σύνολο των αφηγημάτων που περιγράφουν μαθηματικά αντικείμενα και τις σχέσεις τους (π.χ. ένας ορισμός, μια απόδειξη, ένα θεώρημα) και τις *ρουτίνες* (routines) που είναι οι επαναλαμβανόμενες δραστηριότητες-πρακτικές που κάνει κάποιος είτε όταν παράγει ο ίδιος είτε όταν παρακολουθεί μαθηματικά (π.χ. αποδεικνύει, ορίζει, κάνει γραφικές παραστάσεις) (Sfard, 2008). Επιπλέον, σύμφωνα με την Sfard (2014) ο πανεπιστημιακός μαθηματικός λόγος διακρίνεται από τον αντίστοιχο σχολικό όσον αφορά (1) την αντικειμενοποίησή του (*objectification*), (2) τους κανόνες επικύρωσης (*rules of endorsement)* που προάγουν την αναλυτική σκέψη και περιορίζουν τα εμπειρικά στοιχεία και (3) το επίπεδο αυστηρότητας (*level of rigour)* που απαιτείται. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι

θεμελιώδη όσον αφορά την εισαγωγή των φοιτητών στον πανεπιστημιακό μαθηματικό λόγο, ιδιαιτέρως κατά τη μετάβασή τους από το σχολείο.

Σύμφωνα με την Sfard (2008), τα αφηγήματα αποτελούν ακολουθίες διατυπώσεων που περιγράφουν αντικείμενα, διαδικασίες ή σχέσεις μεταξύ τους και μπορούν είτε να επικυρωθούν είτε και να απορριφθούν σύμφωνα με καλά ορισμένους κανόνες, οι οποίοι τίθενται στον μαθηματικό λόγο. Τα αφηγήματα μπορούν να χαρακτηριστούν ως επικυρωμένα αφού γίνει η διαδικασία της *τεκμηρίωσης* των αφηγημάτων (substantiation of narratives). Η Sfard (2008) αναφέρει ότι «σε μερικές περιπτώσεις η διαδικασία κατασκευής [ενός αφηγήματος], αν εκτελεστεί σωστά, αποτελεί ήδη την τεκμηρίωση του» (σελ. 232). Κατά τη τεκμηρίωση κάποιος παράγει μια ακολουθία ήδη επικυρωμένων αφηγημάτων. Ένας εκπαιδευόμενος μπορεί να χρησιμοποιεί αφηγήματα που δεν είναι επικυρωμένα και δεν έχουν τεκμηριωθεί. Επίσης, ο εκπαιδευόμενος συχνά αναμένει την έγκριση της διαδικασίας τεκμηρίωσης από έναν έμπειρο συμμετέχοντα στο μαθηματικό λόγο, όπως οι διδάσκοντες.

Οι ρουτίνες διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες (Sfard, 2008): στις ρουτίνες *εξερεύνησης* (explorations) που αφορούν την παραγωγή αφηγημάτων (σελ.223), (2) στις ρουτίνες *πρακτικών ενεργειών* που αφορούν την κατασκευή ή την αλλαγή των αντικειμένων και όχι μόνο αφηγημάτων (deeds) (σελ. 237) και στις *τελετουργικές* ρουτίνες (ritual) που αφορούν τις ενέργειες εκτέλεσης μιας διαδικασίας με ακρίβεια, εστιάζοντας στην εκτέλεση και όχι στη γνώση. Οι τελετουργικές ρουτίνες έχουν σκοπό την ένταξη του ατόμου σε ένα κοινωνικό σύνολο και όχι την παραγωγή επικυρωμένων αφηγημάτων (σελ.241). Οι Lavie et al. (2019) αναφέρουν ότι οι ρουτίνες αποτελούν μοτίβα ενεργειών που βασίζονται σε παρελθοντικές εμπειρίες, με τις ρουτίνες εξερεύνησης και τελετουργίας να αντιστοιχούν σε διαφορετικούς μηχανισμούς αξιοποίησης των εμπειριών αυτών.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που καλείται η εργασία να αντιμετωπίσει είναι:

Ε.Ε.1. Ποια είναι τα αφηγήματα των πρωτοετών φοιτητών μαθηματικών που αφορούν τους ορισμούς και τα θεωρήματα;

Ε.Ε.2. Πώς τα αφηγήματα των φοιτητών συνδέονται με τις σχολικές ρουτίνες;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζουμε ευρήματα μιας ευρύτερης και εν εξελίξει μελέτης πολλαπλών περιπτώσεων, με θέμα το μαθηματικό λόγο των πρωτοετών φοιτητών μαθηματικών όπως αναπτύσσεται στο πλαίσιο του Απειροστικού Λογισμού. Ειδικότερα, στην έρευνα συμμετείχαν 14 πρωτοετείς φοιτητές Μαθηματικού τμήματος που παρακολουθούσαν το

μάθημα του πρώτου εξαμήνου «Απειροστικός Λογισμός Ι» το ακαδημαϊκό έτος 2022-2023. Στην αρχή του εξαμήνου, όλοι οι πρωτοετείς φοιτητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με το σχολικό και μαθηματικό τους υπόβαθρο. Το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από δεκαπέντε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής σχετικά με τη σχολική τους εμπειρία (π.χ. γιατί αποφάσισαν να σπουδάσουν μαθηματικά, πώς μελετούσαν στο σχολείο) και τρία μαθηματικά ερωτήματα (π.χ. Έστω $A \subseteq R$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;). Στη συνέχεια, οι φοιτητές που δήλωσαν ενδιαφέρον να συμμετάσχουν στην έρευνα, χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες (Ομάδα Α, Ομάδα Β και Ομάδα Γ) από την ερευνήτρια (πρώτη συγγραφέας) ώστε σε κάθε ομάδα να συνυπάρχουν φοιτητές με διαφορετικό μαθηματικό και σχολικό υπόβαθρο. Κατά τη διάρκεια του εξαμήνου πραγματοποιήθηκαν πέντε συναντήσεις της ερευνήτριας με την κάθε ομάδα, όπου συζητήθηκαν θέματα που αφορούν γενικά τα μαθηματικά και το Απειροστικό Λογισμό. Οι συζητήσεις βασίστηκαν σε ερωτήσεις και ασκήσεις, εμπνευσμένες από τις διαλέξεις και την έρευνα για τη διδασκαλία και τη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού και αφορούσαν συγκεκριμένα θέματα κάθε φορά. Ειδικότερα, οι συζητήσεις ξεκινούσαν με την ερευνήτρια να ρωτά και έπειτα οι φοιτητές να περιγράφουν τι σημαίνει για αυτούς ένα μαθηματικό αντικείμενο σχετικό με το θέμα της συνάντησης. Στη συνέχεια, οι φοιτητές καλούνταν να αποδείξουν ή να σχολιάσουν μια απόδειξη είτε να επιλύσουν ασκήσεις. Οι συναντήσεις απείχαν χρονικά μεταξύ τους καθώς και από τη διδασκαλία του αντίστοιχου μαθηματικού περιεχομένου. Στόχος ήταν η σύνδεση των θεμάτων που θα συζητηθούν στις συναντήσεις με τη διδασκαλία τους στις διαλέξεις. Ο ρόλος της ερευνήτριας κατά τη διάρκεια των συναντήσεων ήταν να θέτει ερωτήσεις, να ενθαρρύνει τη συζήτηση χωρίς να επιβεβαιώνει τους μαθηματικούς ισχυρισμούς των φοιτητών και να τους προτρέπει σε περαιτέρω εξηγήσεις. Οι φοιτητές ενημερώθηκαν ότι οι συζητήσεις δεν αποτελούσαν μέρος της αξιολόγησης τους για το μάθημα και ότι μπορούσαν να εκφραστούν ελεύθερα προφορικά ή γραπτά. Όλες οι συζητήσεις ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν.

Τα δεδομένα για την παρούσα εργασία προέρχονται από την πρώτη συνάντηση με τις ομάδες που έγινε περίπου ένα μήνα μετά την έναρξη των μαθημάτων. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε αποσπάσματα από τη συζήτηση της Ομάδας Α, η οποία αποτελούνταν από τους Φ1, Φ2, Φ3 και Φ4, από τον διάλογο της ερευνήτριας (Ερ) με τους Φ5, Φ6 της Ομάδας Β και τέλος ένα απόσπασμα από διάλογο της ερευνήτριας με την Φ7 από την Ομάδα Γ. Οι συζητήσεις αφορούσαν το πως οι ίδιοι αντιλαμβάνονται τη σημασία των ορισμών, των θεωρημάτων και των προτάσεων. Τα αποσπάσματα επιλέχθηκαν λόγω της ποικιλίας που προσφέρουν σε πληροφορίες για τα διάφορα αφηγήματα αλλά και για τις λεπτομέρειες που

αναδεικνύουν σχετικά με τη σύνδεση των αφηγημάτων με την προηγούμενη σχολική εμπειρία των φοιτητών. Κατά την ανάλυση, εντοπίστηκαν τα διάφορα αφηγήματα των φοιτητών σχετικά με τους ορισμούς και τα θεωρήματα. Στη συνέχεια, τα αφηγήματα αναλύθηκαν σε σχέση με τη τεκμηρίωσή τους από τους φοιτητές. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στον εντοπισμό των ρουτίνων που προκύπτουν από τις περιγραφές των φοιτητών που αφορούν τις σχολικές τους εμπειρίες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα παρακάτω αποσπάσματα αποτελούν μέρος της συζήτησης που οι φοιτητές κλήθηκαν να απαντήσουν «Τι είναι ορισμός για εσάς; Πως τον αντιλαμβάνεστε;» και αντίστοιχα για το θεώρημα. Αρχικά, από την Ομάδα Α, ο Φ1 αναφέρεται στο θεώρημα ως κάτι γενικό που το γνωρίζουν όλοι και παραλληλίζει τον ορισμό με το θεώρημα.

> Φ1: Έτσι όπως το βλέπω το θεώρημα είναι πιο γενικό. Δηλαδή, ξέρεις… ας πούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα όλοι το ξέρουν. Δεν χρειάζεται να γράψεις και την απόδειξή του. Δηλαδή ότι το χρησιμοποιείς μπαμ, μπαμ και τέλειωσες την άσκηση [...] στο θεώρημα λες ότι ξέρω αυτό από παλιά, ισχύει. [...] Τώρα ο ορισμός είναι κάτι ίσως συγγενικό με το θεώρημα. [...] Δηλαδή ισχύει κάτι. [...] Στον ορισμό πιστεύω ότι δεν χρειάζεται να το εξηγήσεις γιατί είναι ο ορισμός ενώ στο θεώρημα ίσως χρειαστεί να το αποδείξεις γιατί λες ο άλλος μπορεί να πει «πώς ξέρεις ότι ισχύει;». Ενώ ο ορισμός είναι ορισμός, τέλος.

Στο παραπάνω απόσπασμα, ο Φ1 επικαλείται το Πυθαγόρειο Θεώρημα από την πρότερη σχολική του εμπειρία, με το οποίο φαίνεται να υποστηρίζει το αφήγημά του σχετικά με το ότι το θεώρημα δεν θέλει τεκμηρίωση. Ακόμα, παρατηρείται ότι ο Φ1 χρησιμοποιεί ρουτίνες επίλυσης ασκήσεων από το σχολείο για την τεκμηρίωση του αφηγήματός του. Σε αυτό το πλαίσιο, ο Φ1 εισάγει τον όρο «εξήγηση» και «απόδειξη», και εντοπίζει ότι ο ορισμός είναι μια διατύπωση που δεν χρήζει περαιτέρω εξήγησης, ενώ το θεώρημα μπορεί και να αποδειχθεί.

Στη συνέχεια, εξελίχθηκε ο διάλογος των Φ2, Φ3 και Φ4 της Ομάδας Α, όπως παρατίθεται παρακάτω. Κατά το διάλογο, οι Φ2 και Φ4 υποστηρίζουν ότι τα θεωρήματα μπορούν να «αμφισβητηθούν» σε αντίθεση με τον ορισμό, ενώ η Φ3 εκφράζει μια διαφορετική άποψη.

> 444 Φ2: Το θεώρημα μπορεί να το αμφισβητήσει ο οποιοσδήποτε χωρίς να έχει τεκμήρια. Χωρίς να μπορεί να το κάνει. Αλλά μπορεί, επειδή θέλει.[...] Δεν είναι τόσο ισχυρό [το θεώρημα]. Ο ορισμός είναι αποδεκτός από όλη την επιστημονική κοινότητα και μη.
>
> 445 Φ3: Δεν ξέρω. Εγώ το βλέπω τελείως ανάποδα.
>
> 446 Φ4: Το θεώρημα όμως προκύπτει από αποδείξεις. Εεε, αποδείξεις λέω; Εεε, χρήση ορισμών. Τους ορισμούς, τους χρησιμοποιείς

για να καταλήξεις ότι ισχύει το θεώρημα. Το θεώρημα σηκώνει αμφισβήτηση. Ο ορισμός δεν σηκώνει.

447 Φ3: Ναι, αυτό. Εγώ δεν το βλέπω έτσι, γιατί κιόλας τόσα χρόνια βασιζόμασταν σε θεωρήματα. Τότε κάτι κάναμε πολύ λάθος αν όλα αυτά μπορούν να σηκώσουν αμφισβήτηση, ενώ ορισμός όχι. [...] θεωρώ ότι το θεώρημα ναι μεν μπορούμε να το αμφισβητήσουμε, αλλά είναι πιο ισχυρό [από τον ορισμό] γιατί υπάρχει και απόδειξη. Δεν είναι αξίωμα που απλά έτσι δεχόμαστε. [...] Με κάποιον τρόπο υπάρχει απόδειξη, οπότε έχει μία κάποια ισχύ. Τώρα ορισμός δεν ξέρω μήπως θα μπορούσε να τροποποιηθεί. Όσο εξελίσσονται τα μαθηματικά έχουμε ορίσει διάφορα πράγματα, δεν ξέρω αν θα μπορούσε όσο περνάει ο καιρός να τροποποιηθεί.

Στο παραπάνω απόσπασμα, αρχικά παρατηρούμε ότι και οι τρείς φοιτήτριες συμφωνούν ότι το θεώρημα μπορεί να αμφισβητηθεί αλλά διαφοροποιούνται σχετικά με την ισχύ του και τον ρόλο της απόδειξης. Η Φ2 στο [444] θεωρεί ότι η ευρεία αποδοχή ενός ορισμού, τον ισχυροποιεί σε σχέση με το θεώρημα, χωρίς να εμπλέκει την απόδειξη στο αφήγημα της. Στη συνέχεια στο [446] η Φ4, αν και αρχικά εμπλέκει την απόδειξη, τελικά αναφέρει ότι οι ορισμοί είναι το μέσο με το οποίο οδηγούμαστε στα θεωρήματα και καταλήγει ότι το θεώρημα μπορεί να αμφισβητηθεί ενώ ο ορισμός δεν αμφισβητείται. Η Φ3 στο [447] πέφτει σε αντιφάσεις αναφερόμενη στα θεωρήματα. Αρχικά, φαίνεται ότι θεωρεί ότι τα θεωρήματα δεν μπορούν να αμφισβητηθούν γιατί τότε «κάναμε πολύ λάθος αν όλα αυτά μπορούν να σηκώσουν αμφισβήτηση». Έπειτα αντιφάσκει λέγοντας «ναι μεν μπορεί να αμφισβητηθεί [το θεώρημα]» και καταλήγει να θεωρεί ότι έχει «κάποια ισχύ» λόγω της ύπαρξης της απόδειξης. Έτσι, η απόδειξη φαίνεται να επηρεάζει την τεκμηρίωση του αφηγήματός της ότι το θεώρημα έχει κάποια ισχύ, αλλά η αντίφαση σχετικά με την αμφισβήτηση του θεωρήματος παραμένει. Επιπλέον, σε αντίθεση με τις Φ2 και Φ4, η Φ3 δηλώνει ότι ο ορισμός είναι αυτός μπορεί να τροποποιηθεί. Τέλος, στο [447] η Φ3 ανακαλεί την εμπειρία της από το σχολείο και τις ρουτίνες που ακολουθούσε στο σχολείο σχετικά με τα θεωρήματα κατά τη τεκμηρίωση του αφηγήματός της. Επομένως, φαίνεται ότι η πρότερη εμπειρία της επηρεάζει τη διαδικασία τεκμηρίωσης του αφηγήματός της.

Στη συνέχεια, παρατίθεται ένας διάλογος της ερευνήτριας (Ερ) με τον φοιτητή Φ5 της Ομάδας Β.

122 Φ5: Θεωρώ ότι ο ορισμός είναι η αυστηρή θεμελίωση μιας πρότασης. Δηλαδή, να εξηγήσω με τρόπο έτσι ώστε να μην μπορεί κανείς να με αμφισβητήσει.

123 Ερ: Όταν λες πρόταση τι εννοείς;

124 Φ5 : Έναν ισχυρισμό. Και να τον διατυπώσω με έναν τρόπο ώστε να μην μπορεί να αμφισβητήσει κανείς. Το οποίο το επιτυγχάνω με την απόδειξη. Δηλαδή, γράφω έναν ορισμό και μετά τον αποδεικνύω, με την απόδειξη. [...] Το θεώρημα ουσιαστικά είναι ένα ισχυρισμός, ο οποίος έχει οριστεί και έχει αποδειχθεί και η πρόταση δεν νομίζω να έχει. Στο σχολείο δεν κάναμε αποδείξεις. Δηλαδή, τις θεωρούσαμε αυτονόητες. Θεωρούσαμε ότι τις έχει αποδείξει κάποιος άλλος για εμάς, οπότε εμείς παίρνουμε τα θεωρήματα και τα χρησιμοποιούμε για να λύσουμε τα προβλήματα που προκύπτουνε στις ασκήσεις. Ενώ εδώ πέρα προσπαθούμε οτιδήποτε γράφουμε να τεκμηριώνουμε, να το αποδεικνύουμε βάσει των αξιωμάτων.

125 Ερ: Βάση των αξιωμάτων αποδεικνύουμε;

126 Φ5: Ναι. Και των ορισμών φυσικά [...] Ναι, θεωρώ ότι θα αποδειχθεί βάση των αξιωμάτων. Δηλαδή, πιστεύω ότι τα αξιώματα είναι κάποιοι ορισμοί που είναι τόσο αυτονόητοι που δεν μπορούν να αποδειχθούνε και τους θεωρούμε ότι ισχύουν απλά. Και βάση αυτών των αξιωμάτων βγαίνουν οι ορισμοί, οι αποδείξεις, οι προτάσεις, τα θεωρήματα. Όλα.

Όπως φαίνεται στο [122], ο Φ5 αναφέρει ότι ο ορισμός είναι η αυστηρή θεμελίωση μιας πρότασης και ότι η πρόταση αποτελεί έναν ισχυρισμό [124]. Στο [124] ο Φ5 φαίνεται να υποστηρίζει ότι ο ορισμός δεν μπορεί να αμφισβητηθεί και η απόδειξη λειτουργεί ως μέσο για την επίτευξη αυτού. Στη συνέχεια, στο [126] ο Φ5 θεωρεί τα αξιώματα ότι είναι ορισμοί που δεν αποδεικνύονται. Έτσι, το αφήγημα του για τον ορισμό χαρακτηρίζεται από αντιφατική ακολουθία διατυπώσεων. Παράλληλα, φανερώνεται ότι ο Φ5 τοποθετεί τα θεωρήματα μέσα από τη σχολική του εμπειρία και τα εντάσσει σε ένα πλαίσιο επίλυσης ασκήσεων όπου δεν χρειάζεται να αποδειχθούν. Βέβαια, σε αντίθεση με τον Φ1 που είχε αναφέρει ότι «ίσως να χρειαστεί να αποδειχθούν», ο Φ5 θεωρεί ότι τα θεωρήματα αποδεικνύονται αλλά σύμφωνα με το πλαίσιο του σχολείου δεν ήταν απαραίτητο. Στο [124] ο Φ5 αναφέρεται και στο πανεπιστημιακό περιβάλλον, όπου σε αντίθεση με το σχολείο, η τεκμηρίωση και η απόδειξη έχουν πιο θεμελιώδη ρόλο.

Επιπλέον, κατά τη διάρκεια της συνάντησης ο Φ5 αναφερόμενος σε ένα ερώτημα από το ερωτηματολόγιο που είχε δοθεί και που η απάντησή του βασίζονταν στον ορισμό της συνέχειας, δήλωσε χαρακτηριστικά:

> Φ5: Το β [συνθήκη του ερωτήματος] ισχύει, επειδή έχουμε μάθει από θεώρημα, δεν θυμάμαι πώς λέγεται το θεώρημα, νομίζω το θεώρημα συνέχειας ότι όταν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο x_0 τότε ισχύει το όριο του $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 ισούται με $f(x_0)$.

Στο παραπάνω απόσπασμα, φαίνεται ο Φ5 να επιβεβαιώνει την αντίφαση που εκφράζεται στο αφήγημά του αφού φαίνεται να βλέπει τον ορισμό της

συνέχειας ως θεώρημα. Ωστόσο, ο Φ5 συνειδητοποίησε τη σύγχυση του μετά την παρέμβαση μιας φοιτήτριας της Ομάδας Β, όπου δήλωσε ότι πρόκειται για τον ορισμό της συνέχειας και έτσι ο Φ5 αποκρίθηκε «Ναι μάλλον εννοούσα ορισμός, αλλά δεν το σκέφτηκα εκείνη τη στιγμή πολύ.»

Η συζήτηση στην Ομάδα Β συνεχίστηκε με τον παρακάτω διάλογο της ερευνήτριας (Ερ) με τη φοιτήτρια Φ6.

127 Φ6: Εγώ στο Λύκειο χρησιμοποιούσα κυρίως τους ορισμούς, επειδή ξέραμε ότι … κυρίως για τις Πανελλαδικές, που ήταν το Θέμα Α της θεωρίας και έπρεπε να το μάθουμε αρκετά καλά. Και μου έλεγαν οι καθηγητές μου να μάθω, όχι μόνο για να τα γράψω στο θέμα Α απλώς, για να με βοηθάνε και στην επίλυση των ασκήσεων. Το ίδιο και με τις αποδείξεις.[...] Τον είχα στο μυαλό μου [τον ορισμό] σαν αξίωμα. Ένα αξίωμα που το έχουμε στο μυαλό μας, σαν κάτι που δεν αλλάζει και ότι είναι σταθερό. Και ότι από εκεί οδηγούμαστε σε άλλα πράγματα. Κάτι σαν ιδιότητα κάποιου. Κάτι σαν να ορίζει. Γι' αυτό λέγεται ορισμός. Κάτι που να ορίζει κάτι άλλο.

128. Ερ: Σε σχέση με αυτό που είπε ο Φ5. Έχει απόδειξη ο ορισμός;

129. Φ6: Όχι. Δεν ξέρω. Όχι. Οι προτάσεις και τα θεωρήματα έχουν αποδείξεις από όσο γνωρίζω. Δεν έχω διαβάσει αρκετά.

Στο [127] η Φ6, όπως και ο Φ5, παραλληλίζει τα αξιώματα με τους ορισμούς. Έπειτα αναφέρει ότι ο ορισμός είναι κάτι που ισχύει και αποδίδει κάποια ιδιότητα στο αντικείμενο που ορίζεται. Ακόμα, στο [129] η Φ6 ισχυρίζεται ότι τα θεωρήματα αποδεικνύονται αλλά δεν φαίνεται να είναι σίγουρη γιατί δεν έχει «διαβάσει αρκετά». Επιπλέον, στο [127] αναδεικνύεται ο εκπαιδευτικός ως ένα μέσο για την επικύρωση του αφηγήματος, αφού φαίνεται οι ρουτίνες της προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις και της επίλυσης ασκήσεων να επηρεάζουν το αφήγημά της.

Τέλος, ακολουθεί ο διάλογος της ερευνήτριας και της Φ7 (Ομάδα Γ).

31. Φ7: Θεωρώ ότι αυτά, ορισμοί, λήμματα, προτάσεις και θεωρήματα δεν νομίζω ότι θα τα ξεχωρίσω. Τα βλέπω όλα μαζί. Δεν καταλαβαίνω τη διαφορά τους γιατί τα περισσότερα έχουνε και αποδείξεις. [...] Θεωρώ τον ορισμό ότι σου λέω τι είναι αυτό και στο εξηγώ. [...]

32. Ερ: Είπες ότι τα περισσότερα έχουν απόδειξη. Ο ορισμός έχει απόδειξη;

33.Φ7: Έχει; Κάποιοι ορισμοί θεωρώ ότι έχουνε. Ορισμός θεωρείται πότε μία συνάρτηση είναι κάτι;

34. Ερ: Ας πούμε για συνέχεια. Τον ορισμό της συνέχειας.

35. Φ7: Εεε, δεν θα έχει απόδειξη; Έχει απόδειξη.

36. Ερ: Αντίστοιχα το θεώρημα έχει απόδειξη;

37. Φ7: Για κάποιο λόγο θυμάμαι να γράφω κάτω από τη λέξη θεώρημα τη λέξη απόδειξη και κάτω από τη λέξη πρόταση τη λέξη απόδειξη. Οπότε όλα έχουν αποδείξεις. [...] Το [θεώρημα] θεωρώ κάτι όχι ανώτερο, κάτι πιο μεγάλο από τον ορισμό [...] Ότι υπάρχει το θεώρημα, το ξέρουν οι πάντες αλλά δεν ξέρουν τους ορισμούς μέσα στο θεώρημα.[...] ότι μέσα στο θεώρημα είναι οι ορισμοί. Σαν κουτάκια. Το ένα μπαίνει μέσα στο άλλο. [...] Μπορεί να το λέω λάθος, αλλά νομίζω ότι όταν ήρθα εδώ πρώτη φορά τα άκουσα όλα διαφορετικά. Όλα εγώ στο κεφάλι μου τα είχα σαν θεωρήματα. Και οι ορισμοί μπορεί να άκουγα ότι «Αααα! Αυτό είναι ορισμός», «Αααα! Αυτό είναι θεώρημα» αλλά και να τα έλεγα λάθος δεν θα μου έλεγε κάποιος κάτι, «Ότι ξέρεις το είπες λάθος αυτό, δεν είναι θεώρημα, είναι ορισμός». Μπορεί και να μην το έλεγα καν ότι θα πω τώρα αυτόν τον ορισμό [...] Και για αυτό μου είναι πάρα πολύ δύσκολο να μην τα μπερδεύω τώρα.

Σύμφωνα με τον παραπάνω διάλογο, η Φ7 δεν έχει ξεκάθαρα αφηγήματα που διαχωρίζουν τους ορισμούς από τα θεωρήματα. Πιο συγκεκριμένα, στο [31] αναφέρει ότι τα βλέπει όλα μαζί. Ωστόσο, στο [35] δηλώνει ότι οι ορισμοί έχουν απόδειξη, χωρίς όμως να το υποστηρίζει με βεβαιότητα ενώ στο [37] αναφέρει, ότι και τα θεωρήματα έχουν απόδειξη. Στο [37] φανερώνεται ότι η Φ7 τεκμηριώνει το αφήγημά της για την ύπαρξη απόδειξης στο θεώρημα ανακαλώντας μια τελετουργική ρουτίνα γραφής. Επιπλέον, στο [37] αναφέρει την εμπειρία της από το σχολείο όπου δεν χρησιμοποιούσε κατάλληλα και συνειδητά τον ορισμό ή το θεώρημα, αλλά τα θεωρούσε όλα θεωρήματα, με τη διάκριση αυτή να μην είναι φανερή αλλά ούτε και απαιτούμενη. Έτσι, φαίνεται το γεγονός αυτό να επηρέασε το αφήγημά της, οπότε και δυσκολεύεται κατά τη μετάβαση στον πανεπιστημιακό λόγο, όπως αναφέρει στο [37].

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως η παραπάνω ανάλυση ανέδειξε, τα αφηγήματα των πρωτοετών φοιτητών μαθηματικών για τον ορισμό και το θεώρημα διαφέρουν. Ειδικότερα, τα αφηγήματα για τον ορισμό αναφέρουν ότι ο ορισμός είναι κάτι που ισχύει, είναι ευρέως αποδεκτός, αμφισβητείται, δεν χρειάζεται εξήγηση και ότι αποδεικνύεται. Σχετικά με το θεώρημα, τα αφηγήματα εστιάζουν στο ότι το θεώρημα είναι γνωστό, αποδεικνύεται, δεν χρειάζεται απόδειξη, μπορεί να χρειαστεί απόδειξη και ότι αμφισβητείται.

Κατά την τεκμηρίωση των αφηγημάτων φαίνεται η πρότερη εμπειρία των φοιτητών, μέσα από την ανάκληση ρουτίνων που οι ίδιοι έχουν εμπλακεί ως συμμετέχοντες στον σχολικό λόγο (Lavie et al., 2019), να επηρεάζει τη διαδικασία αυτή. Πιο συγκεκριμένα, το γεγονός ότι στο Λύκειο, και ειδικότερα στη Γ΄ Λυκείου, τα περισσότερα θεωρήματα δεν αποδεικνύονται αλλά χρησιμοποιούνται στις ασκήσεις πιθανώς να

ενισχύει το αφήγημα ότι το θεώρημα δεν χρειάζεται απόδειξη. Επιπλέον, αναδεικνύεται ότι η προετοιμασία των μαθητών για τις Πανελλαδικές εξετάσεις επηρεάζει το αφήγημα τους για τον ορισμό και τη χρήση του σε ασκήσεις. Σε αυτό το πλαίσιο, αναδεικνύεται η έλλειψη ανάδειξης και διαπραγμάτευσης των μαθηματικών πρακτικών σε ένα μετα-επίπεδο στο σχολείο. Επίσης, φανερώνεται και ο ρόλος του εκπαιδευτικού σαν εκείνο το άτομο που θα επικυρώσει ή όχι ένα αφήγημα στα πλαίσια του σχολικού μαθηματικού λόγου (Sfard, 2008). Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα της μελέτης αναδεικνύουν δυσκολίες μετάβασης από τον μαθηματικό σχολικό λόγο στον αντίστοιχο πανεπιστημιακό που οφείλονται στις αντίστοιχες ρουτίνες του εκάστοτε λόγου. Έτσι, η μελέτη της επίδρασης των πανεπιστημιακών διαλέξεων στα αφηγήματα των φοιτητών προτείνεται για περαιτέρω έρευνα.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η ερευνητική εργασία υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ.) στο πλαίσιο της «4ης Προκήρυξης ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ. για Υποψήφιους/ες Διδάκτορες» (Αριθμός Υποτροφίας: 9479)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Edwards, B., & Ward, M. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly, 111*(5), 411–424. https://doi.org/10.2307/4145268

Gilboa, N., Dreyfus, T., & Kidron, I. (2023). Meta-mathematical aspects of definitions. *Educational Studies in Mathematics*, *114*(3), 461–481. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10252-x

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237–254. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge university press.

Sfard, A. (2014). University mathematics as a discourse–why, how, and what for? *Research in Mathematics Education, 16*(2), 199–203. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918339

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317–346. http://www.jstor.org/stable/30035043

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ Ε΄ ΤΑΞΗΣ

Δέσποινα Δεσλή & Ιωάννα Τσελεντάκη

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ddesli@eled.auth.gr, ioanna.tselentaki@hotmail.com

Ερευνητικές προσπάθειες έχουν αναδείξει το ζήτημα της δημιουργικότητας στην εκπαίδευση, εξετάζοντας εάν αφορά συγκεκριμένους τομείς (όπως τα μαθηματικά) ή αποτελεί γενική ικανότητα που καλύπτει πολλούς τομείς. Η παρούσα μελέτη διερευνά τη σχέση της μαθηματικής δημιουργικότητας με την αυτό-αξιολόγηση της δημιουργικότητας σε 40 μαθητές Ε' τάξης. Αξιοποιήθηκαν ένα ανοικτού τύπου μαθηματικό έργο για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας και ο κατάλογος αυτό-αναφοράς CAQ των Carson et al. (2005) για τη γενική δημιουργικότητα. Σημαντική θετική συσχέτιση βρέθηκε ανάμεσα στην πρωτοτυπία και την ευελιξία των παιδιών και την αυτό-αξιολόγηση της δημιουργικότητάς τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γενική δημιουργικότητα αποτελεί πολύπλευρη και περίπλοκη έννοια που περιγράφει τη διαδικασία δημιουργίας πρωτότυπων και ουσιαστικών ιδεών, λύσεων και προϊόντων σε ένα συγκεκριμένο (κοινωνικό) περιβάλλον (Plucker, Beghetto, & Dow, 2004). Αυτές οι ιδέες, οι λύσεις και τα τελικά προϊόντα μπορεί να είναι καινοτόμα και σημαντικά σε ευρεία, παγκόσμια κλίμακα (συχνά αποκαλούμενη «δημιουργικότητα Big-C»), όπως μια επιστημονική ανακάλυψη, ή σε μικρή κλίμακα, όπως όταν ένας μαθητής ανακαλύπτει μια καινοτόμα και σημαντική λύση σε ένα ζήτημα της καθημερινότητάς του (γνωστή ως «δημιουργικότητα little- ή mini-c») (Kaufman, & Beghetto, 2009).

Η πλειοψηφία των ερευνών που αφορούν τη δημιουργικότητα προέρχεται από τον τομέα της ψυχολογίας. Πρώτος ο Guilford (1950, στο Runco, & Jaeger, 2012, σελ. 94) επισήμανε ότι η δημιουργικότητα θα μπορούσε να μελετηθεί επιστημονικά: «Με τη στενή της έννοια, η δημιουργικότητα αναφέρεται στις ικανότητες που είναι οι πιο χαρακτηριστικές των δημιουργικών ατόμων. Οι δημιουργικές ικανότητες καθορίζουν το αν ένα άτομο έχει τη δύναμη να επιδείξει δημιουργική συμπεριφορά σε αξιοσημείωτο βαθμό». Ο Guilford (1967, 1959, στο Nadjafikhah, & Yaftian, 2013) παρατήρησε ότι υπάρχουν δυο τύποι ικανοτήτων που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα: η συγκλίνουσα (convergent thinking)

και η αποκλίνουσα σκέψη (divergent thinking). Η συγκλίνουσα σκέψη επικεντρώνεται στην εύρεση μίας μόνο σωστής λύσης για ένα δεδομένο έργο ή πρόβλημα, ενώ η αποκλίνουσα σκέψη δίνει έμφαση σε πολλαπλές λύσεις ή/και στην εξέταση του προβλήματος από διαφορετικές οπτικές. Η αποκλίνουσα σκέψη εμπεριέχει τέσσερα χαρακτηριστικά: (α) την ευχέρεια, η οποία αναφέρεται στην ικανότητα να παραχθούν πολλές ιδέες, (β) την ευελιξία, που αφορά στην ικανότητα να παραχθεί μία ποικιλία διαφορετικών ιδεών, (γ) την πρωτοτυπία, που αναφέρεται στην ικανότητα παραγωγής ασυνήθιστων ιδεών, και (δ) την επεξεργασία, η οποία αναφέρεται στην ικανότητα επίλυσης ή εμπλουτισμού ιδεών και παραγωγής λεπτομερειών για τη διαμόρφωση μιας ιδέας.

Στους μαθητές η δημιουργικότητα σχετίζεται κυρίως με την ικανότητά τους να προβαίνουν σε καινοτόμες και σημαντικές ερμηνείες και ιδέες όταν μαθαίνουν κάτι νέο. Συνδέεται, επίσης, σε κάποιο βαθμό, και με τη δημιουργία γνώσεων. Μια δημιουργική διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση των χαρακτηριστικών των ατόμων (όπως η επιμονή, το ενδιαφέρον και η δεκτικότητα), των γνωστικών λειτουργιών (όπως η αποκλίνουσα και η συγκλίνουσα σκέψη), των συμπεριφορικών ενεργειών και του φυσικού και κοινωνικού περιβάλλοντος, παράγει μια δημιουργική ιδέα, λύση ή προϊόν (Glăveanu, 2013).

Οι πρώτες αναφορές στη μαθηματική δημιουργικότητα προέκυψαν στο πλαίσιο εργασίας επαγγελματιών μαθηματικών. Αυτές οι αναφορές ήταν υποκειμενικές και συχνά αντιμετώπιζαν τη δημιουργικότητα ως ένα χαρακτηριστικό που αφορούσε τις ιδιοφυίες. Πλέον, η δημιουργικότητα στα μαθηματικά, αν και δύσκολα προσδιορίζεται εξαιτίας της δυσκολίας να περιγραφούν η δομή και τα χαρακτηριστικά της (Nadjafikhah, & Yaftian, 2013), θεωρείται πως μπορεί να ενισχυθεί στους μαθητές μέσα από σωστά επιλεγμένες μαθηματικές δραστηριότητες (Pelczer, & Rodríguez, 2011). Για παράδειγμα, ο Krutetskii (1976) εντόπισε τη μαθηματική δημιουργικότητα σε καταστάσεις δημιουργίας προβλήματος και τη συνέδεσε με την εφευρετικότητα, την ευελιξία και την αυθεντικότητα. Για τον Ervynck (1991), η δημιουργική εργασία στα μαθηματικά περιλαμβάνει την παραγωγή μαθηματικών εννοιών μέσα από τον συνδυασμό προηγούμενων γνωστών εννοιών ή την ανακάλυψη μη γνωστών μαθηματικών σχέσεων. Στο πλαίσιο του σχολείου, ο Sriraman (2005, σελ. 23) προτείνει ότι η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί «διαδικασία που οδηγεί σε ασυνήθιστες (καινοτόμες) ή/και διορατικές λύσεις σε ένα δεδομένο πρόβλημα ή σε ανάλογα προβλήματα, ή/και σε διατύπωση νέων ερωτημάτων ή/και δυνατοτήτων που επιτρέπουν την εξέταση ενός παλιού προβλήματος από μια νέα οπτική γωνία», δίνοντας έτσι έμφαση στη συγκλίνουσα και αποκλίνουσα σκέψη του Guilford. Προβλήματα με ενισχυμένο βαθμό αβεβαιότητας και ελευθερίας, όπως

είναι τα μη τυποποιημένα προβλήματα, φαίνεται πως καλλιεργούν και ενισχύουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Πρόκειται για μαθηματικά προβλήματα ανοικτού τύπου που δεν μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας γνωστές ή τυποποιημένες διαδικασίες. Ωστόσο, αυτού του τύπου τα προβλήματα δεν χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα συχνά στα μαθηματικά στο σχολείο (Kolovou, van den Heuvel-Panhuizen, & Bakker, 2009· van Zanten, & van den Heuvel-Panhuizen, 2018), πιθανότατα λόγω της δυσκολίας των εκπαιδευτικών να αναγνωρίσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα και τους τρόπους ενίσχυσής της (Desli, & Zioga, 2015).

Το δίλημμα της γενικής ή της ανά πεδίο εξειδικευμένης δημιουργικότητας (π.χ., μαθηματική δημιουργικότητα) αποτελεί «την καρδιά του ερωτήματος του τι σημαίνει να είσαι δημιουργικός» (Baer, & Kaufman, 2005, σελ. 158). Από τη μια, η δημιουργικότητα αντιμετωπίζεται ως καθολική ικανότητα η οποία συνεισφέρει σε όλα τα δημιουργικά επιτεύγματα, διατρέχει και εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε γνωστική περιοχή. Για παράδειγμα, οι Qian, Plucker και Young (2019), εξετάζοντας τη δημιουργικότητα ενηλίκων σε έξι διαφορετικά πεδία (ανάμεσά τους και τα μαθηματικά), βρήκαν ότι η δημιουργικότητα ήταν γενική και οδηγούσε τα άτομα σε πρωτότυπες δραστηριότητες σε όλα σχεδόν τα πεδία (με εξαίρεση τη Μουσική). Ωστόσο, υπάρχει και η αντίθετη άποψη, σύμφωνα με την οποία η δημιουργικότητα είναι εξειδικευμένη και εκδηλώνεται μόνο σε κάποιο συγκεκριμένο πεδίο. Για παράδειγμα, σε μελέτες στις οποίες οι συμμετέχοντες παρήγαγαν ποικιλία δημιουργικών εργασιών, όπως κολάζ, σχέδια και μαθηματικούς γρίφους, τις οποίες αξιολόγησαν ειδικοί σε κάθε πεδίο, παρέχονται στοιχεία ότι υπάρχουν εξειδικευμένες δημιουργικές δραστηριότητες (Kaufman, & Baer, 2004, στο Plucker, & Zabelina, 2009). Οι χαμηλές συσχετίσεις μεταξύ των αξιολογήσεων της δημιουργικής παραγωγής σε διαφορετικά πεδία θεωρούνται γενικά ως ένδειξη ότι η δημιουργικότητα είναι συγκεκριμένη σε μια περιοχή ή ακόμα και σε μία εργασία (Plucker, & Zabelina, 2009). Οι Kattou, Christou και Pitta-Pantazi (2015) αναφέρουν ότι η αναγνώριση ενός μαθητή που είναι δημιουργικός στα μαθηματικά δεν σημαίνει απαραίτητα ότι είναι δημιουργικός και στη λογοτεχνία ή τις τέχνες, και το αντίστροφο. Επισημαίνουν μάλιστα ότι ένας μαθητής δεν αποκλείεται από το να είναι δημιουργικός στα μαθηματικά μόνο και μόνο επειδή έχει επιδείξει έντονο δημιουργικό ταλέντο σε έναν άλλον τομέα.

Η παρούσα ερευνητική μελέτη σκοπεύει να εξετάσει τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών Ε΄ τάξης και τη σχέση της με την αυτο-αξιολόγηση της δημιουργικότητάς τους στα μαθηματικά και γενικά. Ειδικότερα, επιχειρεί να εξετάσει: (α) το επίπεδο της μαθηματικής δημιουργικότητας των παιδιών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και (β) σε ποιο βαθμό σχετίζεται η μαθηματική δημιουργικότητα των

παιδιών με την αυτό-αξιολόγηση της δημιουργικότητάς τους στα μαθηματικά και την αυτό-αξιολόγηση της γενικής δημιουργικότητάς τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Η έρευνα διεξήχθη σε δημοτικό σχολείο του Ν. Χαλκιδικής και συμμετείχαν 40 παιδιά (26 αγόρια, 14 κορίτσια) που φοιτούσαν στην Ε' τάξη (μ.ο. ηλικίας: 11 χρόνια και 6 μήνες). Η επιλογή τους πραγματοποιήθηκε με βολική δειγματοληψία.

Σχεδιασμός - Εργαλεία. Πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα και αξιοποιήθηκαν δύο εργαλεία. Για την εξέταση της γενικής δημιουργικότητας χρησιμοποιήθηκε ο κατάλογος αυτό-αναφοράς Creative Achievement Questionnaire (CAQ) των Carson et al. (2005). Το συγκεκριμένο εργαλείο ζητά από τους συμμετέχοντες, μέσα από δέκα ερωτήσεις, να αυτό-αξιολογήσουν τα δημιουργικά επιτεύγματά τους («Πόσο περισσότερο ταλέντο ή ικανότητα έχεις;») σε ισάριθμα δέκα τομείς (π.χ., εικαστικές τέχνες, θέατρο, κινηματογράφος, μαθηματικά) χρησιμοποιώντας πεντάβαθμη κλίμακα Likert (από «πολύ λίγο» έως «πάρα πολύ»). Για τον σκοπό της παρούσας εργασίας, η εστίαση γίνεται στην αυτό-αξιολόγηση της δημιουργικότητας των μαθητών μόνο στα μαθηματικά. Επίσης, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να δηλώσουν σε κλίμακα από το 0 («καθόλου») έως το 10 («πάρα πολύ») τον βαθμό που θεωρούν οι ίδιοι πως είναι γενικά δημιουργικοί («Πόσο δημιουργικός είσαι;»).

Για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, σχεδιάστηκαν έξι μαθηματικά έργα ανοικτού τύπου τα οποία οι μαθητές έπρεπε να λύσουν με όσες περισσότερες διαφορετικές λύσεις μπορούν. Στην παρούσα εργασία μελετούμε μόνο το έργο «Αριθμητική πυραμίδα» (βλ. Εικόνα 1): συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μια πυραμίδα με έξι κελιά, στην κορυφή των οποίων βρίσκεται ο αριθμός στόχος «48» που πρέπει να φτάσουν οι μαθητές. Σε κάθε κελί της πυραμίδας μπορεί να τοποθετηθεί ένας μόνο αριθμός, ο οποίος υπολογίζεται πραγματοποιώντας κάθε φορά την ίδια αριθμητική πράξη με τους δύο αριθμούς που τοποθετούνται από κάτω. Παρόμοιο έργο, με διαφορετικό όμως αριθμό στόχο, χρησιμοποιήθηκε από τους Kattou et al. (2013) για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας με σκοπό να εξετάσουν τη σχέση της μαθηματικής ικανότητας με τη μαθηματική δημιουργικότητα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Αυτό-αξιολόγηση της δημιουργικότητας. Οι συμμετέχοντες αυτό-αξιολόγησαν ιδιαίτερα θετικά τόσο τη δημιουργικότητά τους στα μαθηματικά (μ.ο.: 3,94, τ.α.: ,984, max=5) όσο και τη δημιουργικότητά τους γενικά (μ.ο.: 7,80, τ.α.: 2,09, max=10). Δεν βρέθηκε καμία σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στις τιμές των δύο αυτό-αξιολογήσεων (*Pearson's r*=-,063, *p*=.716): σε παρόμοιο, σχετικά υψηλό, βαθμό τα παιδιά έκριναν τους εαυτούς τους ως δημιουργικούς στα μαθηματικά και γενικά.

Παρατήρησε την παρακάτω **αριθμητική πυραμίδα**. Κάθε κελί περιέχει έναν μόνο αριθμό. Κάθε αριθμός στην πυραμίδα μπορεί να υπολογιστεί πραγματοποιώντας κάθε φορά **την ίδια πράξη** με τους δυο αριθμούς που εμφανίζονται από κάτω. Συμπλήρωσε τους αριθμούς που λείπουν στην πυραμίδα, έχοντας **τον αριθμό 48** στην κορυφή της πυραμίδας. Βρες όσες περισσότερες λύσεις μπορείς.

Εικόνα 6: Έργο μαθηματικής δημιουργικότητας «Αριθμητική πυραμίδα»

β. Δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Στο έργο της αριθμητικής πυραμίδας για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά παρουσιάστηκαν συνολικά 32 διαφορετικές σωστές λύσεις. Αν και όλα τα παιδιά πρόσφεραν απαντήσεις, πάντα περισσότερες από μία, αυτές δεν ήταν όλες σωστές. Συγκεκριμένα, περίπου το 60% των απαντήσεών τους αφορούσαν σε σωστές λύσεις (οι 148, από τις συνολικά 250 απαντήσεις, ήταν σωστές), ενώ οκτώ παιδιά (20%) δεν ήταν σε θέση να δώσουν μία σωστή απάντηση στο πρόβλημα.

Για κάθε συμμετέχοντα υπολογίστηκε η ευχέρειά του («πόσες σωστές λύσεις;») ως το άθροισμα των σωστών απαντήσεων που έδωσε στο έργο. Ο ανώτερος αριθμός σωστών λύσεων που δόθηκε ήταν οκτώ απαντήσεις τις οποίες πρόσφεραν μόνο δύο παιδιά (5%). Το ¼ των συμμετεχόντων (10 παιδιά) έδωσε πέντε σωστές απαντήσεις, ενώ έξι και επτά σωστές απαντήσεις παρουσίασαν συνολικά οκτώ παιδιά (20%). Μικρότερο αριθμό σωστών λύσεων έδωσαν συνολικά δώδεκα παιδιά (30%), από τα οποία τα δύο έδωσαν μία μόνο σωστή απάντηση, τα οκτώ έδωσαν ισάριθμα δύο και τρεις σωστές απαντήσεις και δύο παιδιά τέσσερις σωστές λύσεις. Στην πλειοψηφία τους οι απαντήσεις αυτές αφορούσαν την πρόσθεση, αρχικά διψήφιων, αριθμών (π.χ., 30+18/20+10, 10+8 ή 12+36/6+6, 6+30). Κατά μέσο όρο οι συμμετέχοντες πρόσφεραν 3,7 σωστές απαντήσεις (τ.α.: 2,56, max=8), υποδηλώνοντας αρκετά υψηλό βαθμό ευχέρειας.

Η ευελιξία των συμμετεχόντων («τι είδους σωστές λύσεις;») υπολογίστηκε σύμφωνα με τον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών στις οποίες ανήκαν οι απαντήσεις που έδωσαν. Πιο συγκεκριμένα, αναγνωρίστηκαν επτά διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων, σύμφωνα με την αριθμητική πράξη που χρησιμοποίησαν και την αρχική διάσπαση του αριθμού στόχου: οι πέντε από αυτές αναφέρονταν στην πρόσθεση [μικρός διψήφιος-μεγάλος διψήφιος (π.χ., 14+34), μεγάλος διψήφιος-μικρός διψήφιος (π.χ., 30+18), μονοψήφιος-διψήφιος (π.χ., 4+44), διψήφιος-μονοψήφιος (π.χ., 40+8), ίσοι διψήφιοι (π.χ., 24+24)] και οι άλλες δύο στην αφαίρεση (π.χ., 50-2) και τον πολλαπλασιασμό (π.χ., 2x24). Η ένταξη των απαντήσεων πρόσθεσης σε επιμέρους πέντε κατηγορίες πραγματοποιήθηκε, προκειμένου να αντληθούν περαιτέρω στοιχεία για τις επιλογές των μαθητών (π.χ., σειρά των όρων στην πρόσθεση). Ο ανώτερος αριθμός διαφορετικών κατηγοριών που παρατηρήθηκε ήταν τέσσερις και βρέθηκε στις απαντήσεις δύο παιδιών (5%), ενώ 20 παιδιά (50%) έδωσαν απαντήσεις που αφορούσαν

σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες. Κατά μέσο όρο οι απαντήσεις των συμμετεχόντων κάλυπταν 2,15 διαφορετικές κατηγορίες (τ.α.: 1,25, max=4). Η κατηγορία απαντήσεων με τη μεγαλύτερη συχνότητα αφορούσε στην πρόσθεση μικρού διψήφιου με μεγάλο διψήφιο και χρησιμοποιήθηκε από 28 παιδιά (70%). 22 παιδιά (55%) έδωσαν απαντήσεις της κατηγορίας 'πρόσθεση μονοψήφιου με διψήφιο'.

Η πρωτοτυπία κάθε συμμετέχοντα υπολογίστηκε ανάλογα με τη συχνότητα εμφάνισης κάθε λύσης που προσέφερε («πόσο συχνά;»). Έτσι, όσες σωστές λύσεις εμφανίστηκαν λιγότερο συχνά θεωρήθηκαν περισσότερο πρωτότυπες από αυτές που εμφανίστηκαν πιο συχνά. Συγκεκριμένα, μόνο δύο φορές παρουσιάστηκαν 18 λύσεις (από τις συνολικά 32), οι οποίες θεωρήθηκαν πάρα πολύ πρωτότυπες και βαθμολογήθηκαν με τον ανώτατο βαθμό πρωτοτυπίας (το 4). Δύο λύσεις δόθηκαν από σχεδόν τους μισούς συμμετέχοντες (20+28/10+10, 10+18 και 24+24/12+12, 12+12), ως εκ τούτου, θεωρήθηκαν πολύ λίγο πρωτότυπες και βαθμολογήθηκαν με τον χαμηλότερο βαθμό πρωτοτυπίας (το 1).

Γενικά, ήταν ιδιαίτερα υψηλός ο βαθμός πρωτοτυπίας στις απαντήσεις των συμμετεχόντων (μ.ο.: 2,90, τ.α.: 1,53, max=4). Οι μισοί συμμετέχοντες έδωσαν από μία πάρα πολύ πρωτότυπη απάντηση, ενώ υπήρξαν δύο και τέσσερις συμμετέχοντες που παρουσίασαν τρεις και τέσσερις πάρα πολύ πρωτότυπες λύσεις, αντίστοιχα. Μερικές από τις πάρα πολύ πρωτότυπες απαντήσεις αφορούσαν την πρόσθεση (1+47/0+1, 1+46 ή 32+16/16+16, 16+0), την αφαίρεση (50-2/60-10, 10-8) και τον πολλαπλασιασμό (2x24/1x2, 2x12).

γ. Σχέση της αυτό-αξιολόγησης της δημιουργικότητας με τη μαθηματική δημιουργικότητα. Στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις βρέθηκαν ανάμεσα στους τρεις δείκτες δημιουργικότητας (Πίνακας 1). Πιο συγκεκριμένα, όσο πιο πολλές σωστές λύσεις οι συμμετέχοντες έδιναν (ευχέρεια) τόσο μεγαλύτερη ευελιξία (*Pearson's r*=.802, *p*<.001) και πρωτοτυπία (*Pearson's r*=.749, *p*<.001) παρουσίαζαν. Σημαντική θετική συσχέτιση βρέθηκε, επίσης, ανάμεσα στην ευελιξία και την πρωτοτυπία (*Pearson's r*=.817, *p*<.001). Τέλος, η αυτό-αξιολόγηση της γενικής δημιουργικότητας συσχετίστηκε θετικά με την ευελιξία και την πρωτοτυπία (*Pearson's r*=.325, *p*<.01 και *Pearson's r*=.378, *p*<.01, αντίστοιχα): με άλλα λόγια, οι συμμετέχοντες που αυτό-αξιολογούσαν θετικά τη γενική δημιουργικότητά τους έτειναν να εμφανίζουν υψηλή ευελιξία και υψηλή πρωτοτυπία στο έργο της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ωστόσο, καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στην αυτό-αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας και τους δείκτες μαθηματικής δημιουργικότητας.

	Μαθηματική Δημιουργικότητα		
	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία
Αυτό – αξιολόγηση της			
Μαθηματικής δημιουργικότητας	,224	,127	-,083
Γενικής δημιουργικότητας	,189	,325*	,378*
Μαθηματική Δημιουργικότητα			
Ευχέρεια		,802**	,749**
Ευελιξία	,802**		,817**
Πρωτοτυπία	,749**	,817**	

** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.05 ** Στατιστική σημαντικότητα στο p<.01*

Πίνακας 1: Συσχετίσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας με την αυτό-αξιολόγηση της μαθηματικής και της γενικής δημιουργικότητας

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε αφενός η μαθηματική δημιουργικότητα παιδιών Ε' τάξης στην επίλυση προβλήματος και αφετέρου η σχέση της με την αυτό-αξιολόγηση των ίδιων των παιδιών τόσο για τη γενική όσο και τη μαθηματική δημιουργικότητά τους.

Τα ευρήματα της εργασίας ήταν ιδιαίτερα αισιόδοξα για το επίπεδο μαθηματικής δημιουργικότητας των παιδιών, με την πλειοψηφία των παιδιών να ανταποκρίνεται με επιτυχία στις απαιτήσεις του έργου μαθηματικής δημιουργικότητας. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε σχετικά υψηλή ευχέρεια στις απαντήσεις, καθώς οι συμμετέχοντες ήταν σε θέση να παρέχουν πολλές σωστές απαντήσεις στο πρόβλημα που τους παρουσιάστηκε. Είναι ενδεικτικό το εύρημα ότι το 35% των παιδιών παρείχε πέντε έως οκτώ σωστές απαντήσεις. Αν και οι περισσότερες από αυτές κινούνταν γύρω από συγκεκριμένες κατηγορίες απαντήσεων (τρεις ή τέσσερις), αναδεικνύοντας ικανοποιητική ευελιξία, το καινοτόμο εύρημα είναι ότι εμφανίστηκαν πολλές πολύ πρωτότυπες απαντήσεις. Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι μισοί συμμετέχοντες πρόσφεραν τουλάχιστον μία πολύ πρωτότυπη απάντηση. Βέβαια συχνά οι πρωτότυπες απαντήσεις τους αφορούσαν την ίδια κατηγορία απαντήσεων, προβάλλοντας την ικανότητα των παιδιών να πραγματοποιούν δημιουργικούς ελιγμούς στη διαχείριση των αριθμών που είχαν στη διάθεσή τους. Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με προηγούμενες έρευνες (π.χ., Kattou et al., 2013· Nadjafikhah, & Yaftian, 2013) στις οποίες παρουσιάζεται ένα υψηλό επίπεδο μαθηματικής δημιουργικότητας των παιδιών.

Η ανάλυση των απαντήσεων στον κατάλογο αυτό-αξιολόγησης της δημιουργικότητας έδειξε πως τα παιδιά αξιολόγησαν θετικά, και σε παρόμοιο βαθμό, τη δημιουργικότητά τους τόσο στα μαθηματικά όσο και γενικά. Ωστόσο, καμία συσχέτιση δεν βρέθηκε ανάμεσα στην αυτό-αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας και το επίπεδο της μαθηματικής δημιουργικότητας, όπως αυτό προέκυψε από τις απαντήσεις των παιδιών στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος. Με άλλα λόγια, δεν εντοπίστηκε κάποια τάση των παιδιών που θεωρούν τους εαυτούς τους δημιουργικούς στα μαθηματικά να είναι πράγματι δημιουργικοί στα μαθηματικά. Πιθανή ερμηνεία είναι ότι υπήρχαν παιδιά που, αν και έδειξαν υψηλό επίπεδο μαθηματικής δημιουργικότητας, τα ίδια έτειναν να μην αξιολογούν με ακρίβεια τις ικανότητές τους, συχνά μάλιστα να τις υποτιμούν (φαινόμενο Dunning-Kruger). Αντίθετα, η αυτό-αξιολόγηση της γενικής δημιουργικότητας παρουσίασε υψηλή σημαντική συσχέτιση με δύο από τους δείκτες της μαθηματικής δημιουργικότητας, την ευελιξία και την πρωτοτυπία. Δηλαδή, όσοι μαθητές θεωρούσαν πως είχαν υψηλό βαθμό δημιουργικότητας γενικά, και όχι αποκλειστικά στα μαθηματικά, έτειναν να παρουσιάζουν ευέλικτες και πρωτότυπες λύσεις στο μαθηματικό πρόβλημα. Αν και στην παρούσα έρευνα η γενική δημιουργικότητα των παιδιών δεν εξετάστηκε αυτή καθαυτή παρά μόνο μέσα από έναν κατάλογο αυτό-αναφοράς, τα ευρήματα για τη σχέση της με τη μαθηματική δημιουργικότητα φαίνεται να επιβεβαιώνουν προηγούμενα ερευνητικά δεδομένα, σύμφωνα με τα οποία η γενική δημιουργικότητα δυνητικά προβλέπει τη μαθηματική δημιουργικότητα (Jeon et al., 2011· Kattou et al., 2013· Kroesbergen, & Shoevers, 2017). Σε αυτό το πλαίσιο, η σχέση της γενικής δημιουργικότητας με τη μαθηματική πιθανότατα εξηγείται και αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον η αξιοποίησή της στην εκπαίδευση.

Καθώς η παρούσα έρευνα αφενός διεξήχθη σε σχετικά μικρό αριθμό παιδιών Ε΄ τάξης και με περιορισμένο γεωγραφικό χαρακτήρα και αφετέρου αξιοποιήθηκε ένα μόνο μαθηματικό πρόβλημα για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των παιδιών, τα

αποτελέσματά της δεν μπορεί να γενικευτούν σε περιπτώσεις ανόμοιες με αυτή που περιγράφονται στο άρθρο. Ωστόσο, τα ευρήματά της προσφέρουν σημαντικές πληροφορίες για τη σχέση της γενικής με τη μαθηματική δημιουργικότητα και αναδεικνύουν τη σπουδαιότητα της περαιτέρω διερεύνησης αυτής της σχέσης για τη μαθηματική εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baer, J., & Kaufman, J.C. (2005). Bridging generality and specificity: The amusement park theoretical (APT) model of creativity. *Rooper Review, 27*(3), 158-163.

Carson, S.H., Peterson, J.B., & Higgins, D.M. (2005). Reliability, validity, and factor structure of the Creative Achievement Questionnaire. *Creativity Research Journal, 17*(1), 37-50.

Desli, D., & Zioga, M. (2015). Looking for creativity in primary school mathematical tasks. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 989-995). Czech Republic: Prague.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). New York: Kluwer Academic Publishers.

Glăveanu, V.P. (2013). Rewritting the language of creativity: The five A's framework. *Review of General Psychology, 17*, 69-81.

Huang, P., Pen, S., Chen, H., Tseng, L., & Hsu, L. (2017). The relative influences of domain knowledge and domain-general divergent thinking on scientific creativity and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity, 25*, 1-9.

Jeon, K.N., Moon, S.M., & French, B. (2011). Differential effects of divergent thinking, domain knowledge, and interest on creative performance in art and math. *Creativity Research Journal, 23*, 60-71.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM, 45*, 167-181.

Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity? In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1016-1023). Czech Republic: Prague.

Kaufman, J.C., & Beghetto, R.A. (2009). Beyond big and little: The four c model of creativity. *Review of General Psychology, 13*, 1-12.

Kolovou, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in elementary school mathematics textbooks-a needle in haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*, 29-66.

Kroesbergen, E.H., & Schoevers, E.M. (2017). Creativity as predictor of mathematical abilities in fourth graders in addition to number sense and working memory. *Journal of Numerical Cognition, 3*, 417-440.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Nadjafikhah, M., & Yaftian, N. (2013). The frontage of creativity and mathematical creativity. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 90*, 344-350.

Pelczer, I., & Rodríguez, F.G. (2011). Creativity assessment in school settings through problem posing tasks. *The Mathematics Enthusiast, 8*(1), 383-398.

Plucker, J.A., Beghetto, R.A., & Dow, G.T. (2004). Why isn't creativity more important to educational psychologists? Potentials, pitfalls, and future directions in creativity research. *Educational Psychologist, 39* (2), 111-133.

Plucker, J.A., & Zabelina, D. (2009). Creativity and interdisciplinarity: One creativity or many creativities? *ZDM, 41*, 5-11.

Qian, M., Plucker, J.A., & Yang, X. (2019). Is creativity domain specific or domain general? Evidence from multilevel explanatory item response theory models. *Thinking Skills and Creativity, 33*, 100571.

Runco, M.A., & Jaeger, G.J. (2012). The standard definition of creativity. *Creativity Research Journal, 24*(1), 92-96.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*, 20-36.

van Zanten, M., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch elementary school mathematics textbooks. *ZDM, 50,* 827-838.

ΤΥΠΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗ

Μάριος Πιττάλης[1] & Παναγιώτης Γρίδος[2]

[1]Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστήμων της Αγωγής,

m.pittalis@ucy.ac.cy

[2]Ευρωπαϊκό Πρότυπο Σχολείο – EPS, Αθήνα, Ελλάδα

p.gridos@eps.edu.gr

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η περιγραφή της συναρτησιακής σκέψης ως συμμεταβολή για μαθητές Β΄ Γυμνασίου έως Α΄ Λυκείου μέσω ενός θεωρητικού μοντέλου που αναφέρεται σε τύπους συλλογισμού. Με βάση τη σύνθεση της βιβλιογραφίας, υποθέσαμε ότι πέντε τύποι συλλογισμού εμπλέκονται στο συναρτησιακό λογισμό ως συμμεταβολή. Οι πέντε τύποι συλλογισμού περιλαμβάνουν: την κατανόηση της συνάρτησης ως αντιστοιχία, την αναγνώριση της κατεύθυνσης της αλλαγής των δύο ποσοτήτων, τον υπολογισμό του σταθερού ρυθμού μεταβολής, τη διάκριση μεταξύ διαφορετικών ρυθμών μεταβολής και τη σύγκριση της έντασης του ρυθμού μεταβολής. Στην έρευνα συμμετείχαν 230 μαθητές από Ελλάδα και Κύπρο. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν τη δομή του μοντέλου και έδειξαν τις σχέσεις μεταξύ των πέντε διαφορετικών τύπων συλλογισμού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο συναρτησιακός λογισμός θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικός στη μαθηματική εκπαίδευση, γιατί συμβάλει στην κατανόηση και ανάπτυξη θεμελιωδών εννοιών όπως η δομή, η συμμεταβολή, ο ρυθμός μεταβολής και οι σχέσεις (NTCM, 2000; Stephen, Ellis, Blanton, & Brizuela, 2017). Ο συναρτησιακός λογισμός ορίζεται ως η διαδικασία οικοδόμησης και περιγραφής σχέσεων που αναφέρονται σε συναρτήσεις ή περιέχουν συναρτησιακές σχέσεις (Stephens, et al., 2017). Επιπρόσθετα, η έννοια του συναρτησιακού λογισμού συνδέεται με διαφορετικές αντιλήψεις και προσεγγίσεις για την έννοια της συνάρτησης (Dubinsky & Harel, 1992). Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι τα παραδοσιακά προγράμματα σπουδών εστιάζονται κυρίως στην αντίληψη της συνάρτησης ως αντιστοιχία, δίνοντας έτσι μια στατική αντίληψη για τη σχέση μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων (Thompson & Carlson, 2017). Το γεγονός αυτό συγκρούεται με σύγχρονα ερευνητικά αποτελέσματα που αναδεικνύουν τη σημασία της προσέγγισης της συνάρτησης ως συμμεταβολή, γιατί εστιάζει στην κατανόηση της συνάρτησης ως μια δυναμική διαδικασία συμμεταβολής μεταξύ της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής (Confrey & Smith, 1995). Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η περιγραφή του συναρτησιακού λογισμού μαθητών Β΄

Γυμνασίου μέχρι Α΄Λυκείου ως συμμεταβολή, μέσω ενός θεωρητικού μοντέλου που αναφέρεται σε είδη συλλογισμού.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ερευνητικά αποτελέσματα στους τομείς της γνωστικής ψυχολογίας και της μαθηματικής παιδείας περιγράφουν μοντέλα κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης που επικεντρώνονται σε διαφορετικά στοιχεία όπως, πτυχές της συνάρτησης (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon, & Reed, 2012), νοερές εικόνες, ιδιότητες της συνάρτησης και τροχιές μάθησης (Graf, Peters, Fife, van Rijn, Arieli-Attali, & Marquez, 2019). Η παρούσα εργασία συζητά ερευνητικά αποτελέσματα που αναδεικνύουν την αντίληψη του συναρτησιακού λογισμού ως συμμεταβολή καθώς και υφιστάμενα μοντέλα για την κατανόηση της συνάρτησης και τα στάδια ανάπτυξης του συλλογισμού των μαθητών στη συμμεταβολή ποσοτήτων.

Συναρτησιακός Λογισμός

Η αντίληψη του συναρτησιακού λογισμού ως συμμεταβολή στηρίζεται στην εργασία των Confrey και Smith (1995) και περιλαμβάνει την ανάλυση, διαχείριση και κατανόηση των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων που μεταβάλλονται. Συγκεκριμένα, αναφέρεται στη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβολής x και τη συμμεταβολή που προκύπτει στην εξαρτημένη μεταβλητή y. Με άλλα λόγια, αποτυπώνει τον τρόπο αλλαγής της μεταβλητής y, στην περίπτωση που το x μεταβάλλεται ομοιόμορφα (Lichti & Roth, 2019). Οι Thompson και Carlson (2017) προτείνουν μια ελαφρώς διαφορετική προοπτική για τον συναρτησιακό λογισμό. Στο δικό τους μοντέλο υποστηρίζουν ότι ο συλλογισμός για τη συμμεταβολή ποσοτήτων περιλαμβάνει πέρα από την επίγνωση για την αλλαγή των ποσοτήτων, συγκεκριμένες νοητικές ενέργειες για την κατανόηση καταστάσεων που εμπλέκουν ποσότητες και σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων που μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Στο πλαίσιο αυτό ορίζουν τη συνάρτηση ως «δύο ποσότητες που μεταβάλλονται ταυτόχρονα, ώστε να υπάρχει μια αμετάβλητη σχέση μεταξύ των τιμών τους, με βάση την οποία το άτομο αντιλαμβάνεται ότι κάθε τιμή της μιας ποσότητας καθορίζει ακριβώς μια τιμή της άλλης ποσότητας (Thompson & Carlson, 2017, σ. 436).

Η έρευνα των Graf et al. (2019) εισηγήθηκε μια τροχιά μάθησης για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Η τροχιά αυτή στηρίχθηκε στη σύνθεση προηγουμένων μοντέλων κατανόησης της συνάρτησης και εγκυροποιήθηκε με εμπειρικά δεδομένα. Το πρώτο επίπεδο της τροχιάς μάθησης περιλαμβάνει μόνο επέκταση ακολουθιών. Το δεύτερο επίπεδο αναφέρεται στην αντίληψη της συνάρτησης ως αλγεβρικό τύπο. Το τρίτο επίπεδο περιλαμβάνει τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης της συνάρτησης. Το τέταρτο επίπεδο αντιστοιχεί στην κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολή, ενώ το πέμπτο και τελευταίο επίπεδο περιλαμβάνει οικογένειες συναρτήσεων και τον χειρισμό τους ως μαθηματικό αντικείμενο.

Συλλογισμός για Ποσότητες που Συμμεταβάλονται

Ερευνητικές εργασίες έχουν μελετήσει τον συλλογισμό ατόμων στην κατανόηση, ερμηνεία, διαχείριση και αναπαράσταση ποσοτήτων που συμμεταβάλονται, προτείνοντας μοντέλα που περιγράφουν την ανάπτυξη του συλλογισμού αυτού σε ιεραρχικά επίπεδα (δείτε Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Thompson & Carlson, 2017). Για παράδειγμα, με βάση το μοντέλο των Carlson et al. (2002), στο πρώτο επίπεδο τα άτομα αναγνωρίζουν την εξάρτηση στην μεταβολή των δύο ποσοτήτων. Στο δεύτερο επίπεδο, αναγνωρίζουν την κατεύθυνσης της μεταβολής της μιας ποσότητας σε σχέση με τη μεταβολή της δεύτερης ποσότητας. Στο τρίτο επίπεδο, τα άτομα είναι σε θέση να συντονίσουν το μέγεθος της μεταβολής της μιας ποσότητας σε σχέση με τη μεταβολή της άλλης ποσότητας. Το τέταρτο επίπεδο αναφέρεται στο συντονισμό του μέσου ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης για ομοιόμορφες μεταβολές στην

ανεξάρτητη μεταβλητή. Τέλος, στο πέμπτο επίπεδο, τα άτομα συντονίζουν τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής για συνεχείς μεταβολές στην ανεξάρτητη μεταβολή.

Προτεινόμενο Μοντέλο και Στόχοι Εργασίας

Με βάση τη σύνθεση της βιβλιογραφίας υποθέσαμε ότι πέντε διακριτά είδη συλλογισμού εμπλέκονται στον συναρτησιακό λογισμό ως συμμεταβολή. Με τον όρο 'είδος συλλογισμού' αναφερόμαστε σε ένα σύνολο διαδικασιών ή/και ικανοτήτων που πρέπει να επιδείξει ένα άτομο σε διαφορετικά είδη έργων που εμπλέκουν ένα σενάριο ή πρόβλημα που απαιτεί τον χειρισμό μιας συναρτησιακής σχέσης. Το πρώτο είδος συλλογισμού αναφέρεται στην αντίληψη της συνάρτησης ως *αντιστοιχία* και εμπεριέχει την κατανόηση της συνάρτησης ως αλγεβρικός τύπος, ο οποίος μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή γραφικής παράστασης ή πίνακα τιμών (Doorman et al., 2012; Graf et al., 2019). Αναφέρεται σε ενέργειες όπως τον υπολογισμό της τιμής εξόδου για μια τιμή εισόδου με βάση τον κανόνα μιας συνάρτησης, γραφική αναπαράσταση γραμμικών συναρτήσεων, ερμηνεία γραφικών παραστάσεων μέσω της κατανόησης των τιμών διατεταγμένων ζευγών, καθώς και συμβολική αναπαράσταση της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων που συμμεταβάλονται.

Το δεύτερο είδος συλλογισμού, *κατεύθυνση της αλλαγής*, αναφέρεται στην αναγνώριση της κατεύθυνσης της αλλαγής της μιας ποσότητας σε σχέση με την άλλη (Carlson et al., 2002). Για παράδειγμα, τα άτομα ερμηνεύουν, χωρίς να κάνουν υπολογισμούς, πώς δύο ποσότητες μεταβάλλονται σε ένα ρεαλιστικό σενάριο, με βάση τον αλγεβρικό τύπο της συνάρτησης, ή αντιστοιχούν ρεαλιστικά σενάρια με γραφικές παραστάσεις με βάση τον τρόπο συμμεταβολής των εμπλεκόμενων ποσοτήτων.

Το τρίτο είδος συλλογισμού, *υπολογισμός του σταθερού ρυθμού μεταβολής*, περιλαμβάνει τον συντονισμό του ποσού της αλλαγής της μιας ποσότητας σε σχέση με την άλλη σε έργα που εμπλέκουν γραμμικές συναρτήσεις, στην περίπτωση που δίνεται γραφική παράσταση ή πίνακας τιμών ή λεκτική περιγραφή της κατάστασης (Carlson et al., 2002). Τα άτομα συντονίζουν το ποσό της αλλαγής, υπολογίζοντας την κλίση της ευθείας. Για το σκοπό αυτό αξιοποιούν συντεταγμένες σημείων που ανήκουν στην ευθεία ή επιλέγουν διατεταγμένα ζεύγη από πίνακα τιμών, για να υπολογίσουν τον λόγο της κατακόρυφης προς την οριζόντια μεταβολή ή τη μεταβολή της μιας ποσότητας σε σχέση προς τη μεταβολή της άλλης.

Το τέταρτο είδος συλλογισμού αναφέρεται στην ικανότητα *διάκρισης διαφορετικών ρυθμών μεταβολής* σε μια κατάσταση που εμπλέκει μια συναρτησιακή σχέση. Τα άτομα επεξηγούν πώς δύο ποσότητες μεταβάλλονται σε ένα συνεχές διάστημα και αναπαριστούν τη σχέση αυτή με κατάλληλο τρόπο. Αντιλαμβάνονται ότι η γραμμικότητα αποτελεί χαρακτηριστικό συναρτήσεων στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής είναι σταθερός, σε σύγκριση με τις περιπτώσεις στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής είναι διαφορετικός σε διαφορετικά σημεία (Arieli-Attali, Wylie, & Bauer, 2012). Το πέμπτο είδος συλλογισμού αντιστοιχεί στην ικανότητα *σύγκρισης της έντασης του ρυθμού μεταβολής* (Arieli-Attali et al., 2012; Jones, 2022). Συμπεριλαμβάνει ενέργειες όπως τον υπολογισμό, την ερμηνεία και τη σύγκριση του σταθερού ρυθμού μεταβολής σε σύνθετες συναρτησιακές καταστάσεις (για παράδειγμα σε τμηματικές συναρτήσεις) και κατανόηση καταστάσεων στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής μεταβάλλεται, μέσω της κατασκευής καμπύλης που αναπαριστά πώς αλλάζει ο ρυθμός μεταβολής καθώς οι δύο εμπλεκόμενες ποσότητες μεταβάλλονται ταυτόχρονα (στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής).

Στόχοι της εργασίας ήταν (α) να εξετάσει κατά πόσον έργα τα οποία εμπλέκουν συναρτησιακές σχέσεις κατηγοριοποιούνται με βάση τους τύπους συλλογισμού του προτεινόμενου μοντέλου μέτρησης και (β) να διερευνήσει τις σχέσεις μεταξύ των τύπων συλλογισμού μέσω της εμπειρικής επιβεβαίωσης ενός δομικού μοντέλου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

Τα υποκείμενα της εργασίας ήταν 230 μαθητές/τριες από την Ελλάδα (n=43) και την Κύπρο (n=187). Οι 93 από αυτούς φοιτούσαν στη Β΄ Γυμνασίου, οι 74 στην Γ΄ Γυμνασίου και οι υπόλοιποι 63 στην Α΄ Λυκείου. Η συμμετοχή των σχολείων και των εκπαιδευτικών στην έρευνα ήταν εθελοντική. Πριν τη διεξαγωγή της έρευνας εξασφαλίστηκε συγκατάθεση από τους συμμετέχοντες και τους γονείς τους. Οι συμμετέχοντες στην Κύπρο προέρχονται από δημόσιο γυμνάσιο και λύκειο, ενώ οι συμμετέχοντες στην Ελλάδα από ιδιωτικό σχολείο. Παρά το γεγονός ότι οι συμμετέχοντες προέρχονται από δύο διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα, ο τρόπος εισαγωγής της έννοιας στα σχολικά εγχειρίδια και τα σχετικά αναμενόμενα αποτελέσματα προγράμματα σπουδών των δύο χωρών παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες.

Έργα μέτρησης

Για τους σκοπούς της εργασίας αναπτύχθηκαν έργα που στηρίχθηκαν σε προηγούμενες έρευνες. Οι έρευνες αυτές ήταν κυρίως ποιοτικές, διδακτικά πειράματα ή παρεμβατικά προγράμματα για αυτό τα έργα τροποποιήθηκαν, ώστε να εξυπηρετούν τις ανάγκες ενός γραπτού τεστ. Λήφθηκε, επίσης, υπόψη το περιεχόμενο των προγραμμάτων σπουδών για την έννοια της συνάρτησης στις δύο χώρες. Το τεστ συμπεριλάμβανε 16 έργα για τη μέτρηση της ικανότητας των συμμετεχόντων στους πέντε τύπους συλλογισμού στον συναρτησιακό λογισμό ως συμμεταβολή. Ο Πίνακας 1 περιλαμβάνει περιγραφή των έργων αυτών και ένα παράδειγμα για κάθε τύπο συλλογισμού (λόγω περιορισμού στην έκταση).

Έργα μέτρησης για κάθε τύπο συλλογισμού	Παράδειγμα
Συνάρτηση ως αντιστοιχία Ε1: Υπολογισμός τιμών εισόδου και εξόδου (παράδειγμα). Ε2: Κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Ε3:Υπολογισμός της τιμής του y ή του x γραμμικής συνάρτησης με βάση τη γραφική παράσταση. Ε4: Αντιστοίχιση πινάκων τιμών με τύπους συναρτήσεων.	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x - 1$ (α) Να συμπληρώσετε τις τιμές του $f(x)$ στον πιο κάτω πίνακα τιμών. x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 $f(x)$ | | | | |

Κατεύθυνση αλλαγής

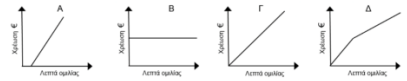
Ε5: Ερμηνεία λεκτικών προτάσεων για την κατεύθυνση της αλλαγής μεταξύ ποσοτήτων που συμμεταβάλονται.

Ε6: Ερμηνεία γραμμικής συνάρτησης με έμφαση στην κατεύθυνση της αλλαγής.

Ε7: Κατασκευή γραφικής για σενάριο απόσταση-χρόνος, για την αναπαράσταση της κατεύθυνσης της αλλαγής.

Ε8: Αντιστοίχιση λεκτικών περιγραφών με γραφική παράσταση (παράδειγμα).

Οι γραφικές παραστάσεις A, B, Γ και Δ παρουσιάζουν πακέτα χρέωσης μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας με βάση τα λεπτά ομιλίας.



Πιο κάτω δίνονται λεκτικές περιγραφές:

Π_1: Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Υπάρχει σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

Π_2: Υπάρχει μηνιαίο πάγιο και σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

Π_3: Υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Προσφέρονται δωρεάν λεπτά χρόνου ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα λεπτά αυτά, υπάρχει σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

Π_4: Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Υπάρχει σταθερή χρέωση για έναν αριθμό λεπτών ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα λεπτά αυτά η χρέωση ανά λεπτό ομιλίας μειώνεται.

Π_5: Υπάρχει μηνιαίο πάγιο και προσφέρεται δωρεάν απεριόριστος χρόνος ομιλίας.

Π_6: Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Προσφέρονται δωρεάν λεπτά χρόνου ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα λεπτά αυτά, υπάρχει σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις με τις λεκτικές περιγραφές, συμπληρώνοντας τον πιο κάτω πίνακα.

Γραφική Παράσταση	Α	Β	Γ	Δ
Λεκτική Περιγραφή				

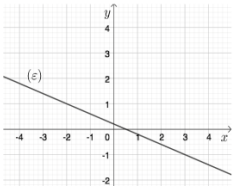
Υπολογισμός σταθερού ρυθμού μεταβολής

Ε9: Υπολογισμός κλίσης ευθείας με βάση τη γραφική παράσταση (παράδειγμα).

Ε10: Υπολογισμός κλίσης ευθείας με βάση πίνακα τιμών.

Ε11: Υπολογισμός της κλίσης ράμπας.

Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας ευθείας (ε). Με τη χρήση της γραφικής παράστασης, να υπολογίσετε την κλίση της (ε).



Διάκριση διαφορετικών ρυθμών μεταβολής

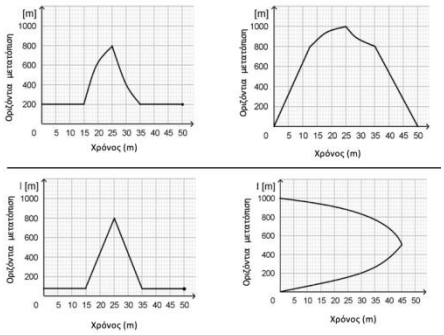
Ε12: Αντιστοίχιση ενός σεναρίου που εμπλέκει σταθερό και μη ρυθμό μεταβολής με γραφική παράσταση (παράδειγμα).

Ε13: Αντιστοίχιση ενός ρεαλιστικού σεναρίου που εμπλέκει μη συνεχή συνάρτηση με γραφική παράσταση.

Ε14: Αντιστοίχιση τμηματικής γραφικής παράστασης που εμπλέκει διαστήματα με διαφορετικό ρυθμό μεταβολής με δοχεία που γεμίζουν νερό.

Ο Γιώργος μεταβαίνει από το σημείο Α στο σημείο Β και μετά επιστρέφει στο σημείο Α.

Ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις δείχνει τη σχέση της **οριζόντιας μετατόπισης** του Γιώργου από το σημείο Α, σε σχέση με τον **χρόνο;**

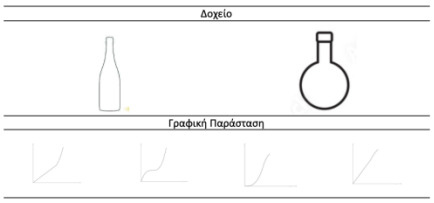


Σύγκριση έντασης ρυθμού μεταβολής

Ε15: Αντιστοίχιση δοχείων με γραφική παράσταση με έμφαση στον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής (παράδειγμα).

Ε16: Αντιστοίχιση διαστημάτων τμηματικής γραφικής παράστασης με λεκτικές προτάσεις που αναφέρονται σε διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής.

Τα δοχεία θα γεμίσουν με νερό με σταθερό ρυθμό. Να αντιστοιχίσετε **για κάθε δοχείο** τη γραφική παράσταση που αναπαριστά τη σχέση μεταξύ του ύψους του νερού στο δοχείο σε σχέση με τον χρόνο.



Πίνακας 1: Περιγραφή των Έργων και Παραδείγματα

Ανάλυση

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση με τη χρήση του λογισμικού SmartPLS. Για την αξιολόγηση της εγκυρότητας του μοντέλου μέτρησης χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι δείκτες: Cronbach's alpha και CRI (οι τιμές τους πρέπει να υπερβαίνουν το 0,60) και AVE, ποσοστό μέσης ερμηνευμένης διασποράς (τιμή μεγαλύτερη από 0.50) (Hair et al., 2019). Για την αξιολόγηση της εγκυρότητας του δομικού μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν οι δείκτες R^2 (τιμές 0,75, 0,50 και 0,25 αντιστοιχούν σε ισχυρή, μέτρια και αδύνατη επίδραση) και Q^2 (Stone-Greisser criterion Q^2), (τιμές μεγαλύτερες από 0, 0,25 και 0,50 αντιστοιχούν σε μικρή, μέτρια και ισχυρή προγνωστική ακρίβεια).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την επιβεβαίωση της εγκυρότητας του μοντέλου μέτρησης εξετάσαμε πρώτα την εγκυρότητα σύγκλισης και διάκρισης. Με βάση τον Πίνακα 2, όλες οι φορτίσεις των έργων (εκτός από μία) ήταν μεγαλύτερες από 0,50, για αυτό μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι πέντε παράγοντες του μοντέλου μετρήθηκαν επαρκώς από τις παρατηρούμενες μεταβλητές. Επιβεβαιώνοντας το θεωρητικό μας μοντέλο, τα 16 έργα ομαδοποιήθηκαν σε 5 παράγοντες πρώτης τάξης. Η μέση ερμηνευμένη διασπορά (AVE) των 4 από τους 5 παράγοντες ήταν υψηλότερη από 0,50. Οι τιμές για τον δείκτη CRI (σύνθετος δείκτης αξιοπιστίας) κυμάνθηκαν από 0,64 έως 0,84 (υψηλότερα από την κρίσιμη τιμή 0,60). Τα ερευνητικά αποτελέσματα επιβεβαίωσαν ότι πέντε διακριτοί τύποι συλλογισμού είναι δυνατόν να ερμηνεύσουν τις αποκλίσεις των μαθητών/τριών σε έργα που εμπλέκουν την πτυχή του συναρτησιακού λογισμού ως συμμεταβολή. Συγκεκριμένα, ο παράγοντας *συνάρτηση ως αντιστοιχία* επεξηγεί τις αποκλίσεις των μαθητών/τριών στην κατανόηση της συνάρτησης ως αλγεβρικός τύπος και ως κανόνας. Ο παράγοντας *κατεύθυνση αλλαγής* ερμηνεύει με ακρίβεια τις αποκλίσεις των μαθητών/τριών στην κατανόηση της κατεύθυνσης της αλλαγής μιας ποσότητας ως προς την αλλαγή της άλλης ποσότητας. Ο παράγοντας *υπολογισμός σταθερού ρυθμού μεταβολής* επεξηγεί τις αποκλίσεις σε έργα που απαιτούν αριθμητικούς υπολογισμούς για τον υπολογισμό της κλίσης ευθείας μιας γραμμικής συνάρτησης. Ο παράγοντας *διάκριση διαφορετικών ρυθμών μεταβολής* ερμηνεύει πιθανές αποκλίσεις μαθητών/τριών σε έργα που απαιτούν αναγνώριση διαφορετικών ρυθμών μεταβολής σε καταστάσεις που εμπλέκουν συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και τέλος ο παράγοντας *σύγκριση της έντασης αλλαγής* είναι δυνατόν να επεξηγήσει αποκλίσεις σε έργα που απαιτούν σύγκριση της έντασης του ρυθμού μεταβολής, με έμφαση στην αναπαράσταση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής.

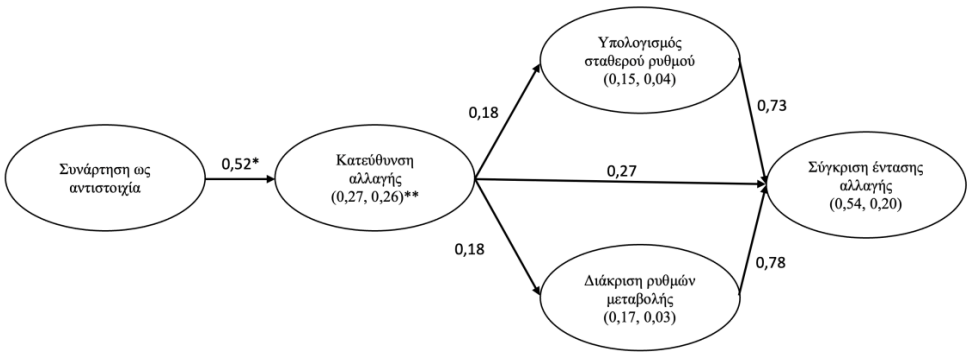
Πριν τον έλεγχο της εγκυρότητας δομικού μοντέλου που επεξηγεί τις σχέσεις μεταξύ των πέντε παραγόντων που περιεγράφηκαν πιο πάνω, εξετάσαμε τυχόν προβλήματα πολυσυγγραμικότητας. Όλες οι τιμές VIF ήταν κάτω από την κρίσιμη τιμή 2, επομένως προχωρήσαμε στην εξέταση της εγκυρότητας του μοντέλου, με βάση τα ακόλουθα κριτήρια: τους συντελεστές παλινδρόμησης, τις τιμές R^2 και το κριτήριο Q^2. Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει τις σχέσεις μεταξύ των πέντε παραγόντων. Η ανάλυση έδειξε ότι ο παράγοντας *συνάρτηση ως αντιστοιχία* έχει ισχυρή θετική επίδραση στον παράγοντα *κατεύθυνση αλλαγής* (r=.54, p<.01). Στη συνέχεια, ο παράγοντας *κατεύθυνση αλλαγής* προβλέπει σε μικρό βαθμό τους παράγοντες *υπολογισμός σταθερού ρυθμού μεταβολής* (r=.18, p<.01), *διάκριση διαφορετικών ρυθμών μεταβολής* (r=.18, p<.01) και *σύγκριση της έντασης αλλαγής* (r=.27, p<.01). Τέλος, οι τύποι συλλογισμού *υπολογισμός σταθερού ρυθμού μεταβολής* και *διάκριση διαφορετικών ρυθμών μεταβολής* αποτελούν ισχυρούς παράγοντες πρόβλεψης του τύπου συλλογισμού *σύγκριση της έντασης αλλαγής* (r=.73, p<.01 και r=.73, p<.01, αντίστοιχα). Με βάση το μοντέλο προκύπτουν πέρα από τις άμεσες και έμμεσες επιδράσεις. Ο παράγοντας *συνάρτηση ως αντιστοιχία* είχε μέτριας έντασης έμμεση επίδραση στον παράγοντα *σύγκριση της έντασης αλλαγής* (r=.29,

p<.01). Ο παράγοντας *κατεύθυνση αλλαγής* είχε άμεση και άμεση επίδραση στον παράγοντα *σύγκριση της έντασης αλλαγής* (Κατ. αλλαγής→Υπολογ. στ. ρυθμού→ Σύγκριση=0,13 και Κατ. αλλαγής→Διάκριση ρυθμ. Μεταβ.→Σύγκριση=0,14), με αποτέλεσμα η συνολική επίδραση να είναι μέτρια (Άμεση + Έμμεση=0,55).

Παράγοντας	Φόρτιση	AVE	CRI	Cronbach's alpha
Συνάρτηση ως αντιστοιχία		,56	,84	.74
T1	,77			
T2	,69			
T3	,83			
T4	,70			
Κατεύθυνση αλλαγής		,51	,80	,67
T5	,67			
T6	,76			
T7	,56			
T8	,81			
Υπολογισμός σταθερού ρυθμού		,64	,84	,71
T9	,85			
T10	,78			
T11	,76			
Διάκριση ρυθμών μεταβολής		,43	,65	,41
T12	,48			
T13	,50			
T14	,90			
Σύγκριση έντασης αλλαγής		,63	,76	,50
T15	,60			
T16	,93			

Πίνακας 2: Φορτίσεις Έργων στους Παράγοντες του Μοντέλου

Η ανάλυση έδειξε ότι το προτεινόμενο μοντέλο επεξηγεί σε μικρό βαθμό τη διασπορά των παραγόντων *κατεύθυνση αλλαγής* (R^2=.27)*, υπολογισμός σταθερού ρυθμού μεταβολής* (R^2=.15), και *διάκριση διαφορετικών ρυθμών μεταβολής* (R^2=.17)) και σε ικανοποιητικό βαθμό τη διασπορά του παράγοντα *σύγκριση της έντασης αλλαγής* (R^2=.54). Επιπλέον, οι τιμές του δείκτη Q^2 έδειξαν ότι το μοντέλο έχει μέτρια προγνωστική ακρίβεια για τον παράγοντα *σύγκριση της έντασης αλλαγής.*



* $p<0.01$, ** Ο πρώτος αριθμός δείχνει την τιμή R^2 και ο δεύτερος την τιμή Q^2

Διάγραμμα 1: Σχέσεις Μεταξύ των Τύπων Συλλογισμού

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Βασικός στόχος της εργασίας ήταν να προτείνει ένα μοντέλο περιγραφής τύπων συλλογισμού στον συναρτησιακό λογισμό ως συμμεταβολή για μαθητές Β΄ Γυμνασίου με Α΄ Λυκείου. Προτείναμε ένα μοντέλο που περιλαμβάνει πέντε είδη συλλογισμού. Τα αποτελέσματα της εργασίας επιβεβαίωσαν εμπειρικά την εγκυρότητα του μοντέλου, δείχνοντας ότι διαφορετικού τύπου έργα που εμπλέκουν συναρτησιακές σχέσεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με βάση τους πέντε τύπους συλλογισμού. Το μοντέλο αυτό συνδυάζει και επεκτείνει αντίστοιχα μοντέλα (δείτε Carlson et al., 2002), αναδεικνύοντας την πτυχή της έννοιας της συνάρτησης ως συμμεταβολή και λαμβάνει υπόψη τις απαιτήσεις των σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών για την κατανόηση της συνάρτησης. Για παράδειγμα, την ικανότητα αντίληψης των εμπλεκομένων ποσοτήτων σε ρεαλιστικά σενάρια και την αναγνώριση της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ των δύο ποσοτήτων, μέσω της ποιοτικής και ποσοτικής αντίληψης για τον τρόπο συμμεταβολής τους. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της εργασίας ανέδειξαν τις σχέσεις μεταξύ των τύπων συλλογισμού. Οι μαθητές επιτυγχάνουν πρώτα στην κατανόηση της συνάρτησης ως αντιστοιχία μέσω έργων υπολογισμού τιμών εισόδου-εξόδου και αναπαράστασης της σχέσης. Στη συνέχεια, η ανάλυση έδειξε την ύπαρξη τριών παράλληλων διαδρομών για την κατάκτηση της σύγκρισης της έντασης του ρυθμού μεταβολής. Οι διαδρομές αυτές δίνουν πληροφορίες στους εκπαιδευτικούς για τις ικανότητες που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές και αποτελούν σημεία προβληματισμού για σκοπούς διδασκαλίας. Για παράδειγμα, διαφαίνεται ότι στην περίπτωση που οι μαθητές/τριες αναπτύξουν την ικανότητα αναγνώρισης της κατεύθυνσης της αλλαγής, είναι δυνατόν η βελτίωση αυτή να έχει θετική επίδραση και στους άλλους τρεις τύπους συλλογισμού. Επιπρόσθετα, η διαδρομή από την αντίληψη της συνάρτησης ως αντιστοιχία μέχρι τη σύγκριση της έντασης του ρυθμού μεταβολής προτείνει μια τροχιά μάθησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arieli-Attali, M., Wylie, E. C., & Bauer, M. I. (2012). The use of three learning progressions in supporting formative assessment in middle school mathematics. In *Annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada*.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86. https://doi.org/10.2307/749228

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated

calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10,* 1243-1267.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85–106). Mathematical Association of America.

Graf, E. A., Peters, S., Fife, J. H., van Rijn, P. W., Arieli-Attali, M., & Marquez, E. (2019). A Preliminary Validity Evaluation of a Learning Progression for the Concept of Function. *ETS Research Report Series*, *2019*(1), 1-38.

Hair, J. F., Risher, J. J., Sarstedt, M., & Ringle, C. M. (2019). When to use and how to report the results of PLS-SEM. *European Business Review*, *31*(1), 2-24.

Jones, S. R. (2022). Multivariation and students' multivariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 67,* 100991.

National Council for Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Author.

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386–420). National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

ΥΠΑΡΧΕΙ Η ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ;

Δρ Πεκρή Χριστίνα

Πανεπιστήμιο Frederick

cppekr01@gmail.com

Η παρούσα έρευνα στοχεύει στη διερεύνηση της επίδοσης των μαθητών σε ανοικτά προβλήματα γεωμετρίας και των λαθών που γίνονται σε αυτά και καταδεικνύουν συγκεκριμένες παρανοήσεις. Στην έρευνα συμμετείχαν 380 μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού σχολείου στην Κύπρο. Εργαλείο συλλογής δεδομένων αποτέλεσε ένα δοκίμιο με 16 ανοικτά προβλήματα γεωμετρίας. Αναλύονται και ερμηνεύονται τα λάθη που προέκυψαν σε δύο συγκεκριμένα προβλήματα, τα οποία εξασφάλισαν τον υψηλότερο Μέσο Όρο ως προς την επίλυσή τους. Η ερμηνεία των λαθών αυτών μας επιτρέπει να εντοπίσουμε τυχόν παρανοήσεις που υπάρχουν και χρήζουν διδακτικής αντιμετώπισης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα ανοικτά μαθηματικά προβλήματα είναι ένα είδος προβλημάτων το οποίο εισήχθηκε με πιο συνειδητό τρόπο στα κυπριακά σχολικά εγχειρίδια περίπου την τελευταία δεκαετία με την αλλαγή του αναλυτικού προγράμματος το 2010 (ΑΠ, 2010). Πιστεύεται ότι τα προβλήματα αυτά φέρνουν τα μαθηματικά πιο κοντά στην πραγματικότητα, αφού η λύση δεν είναι μόνο μια αλλά επίσης, κινούν το ενδιαφέρον των μαθητών, αφού σπάνια θα αποκλειστεί κάποιος τρόπος σκέψης. Η ικανότητα να σκέφτονται και να αποφασίζουν με δημιουργικό και λογικό τρόπο αποτελεί και βασική επιδίωξη του Νέου Αναλυτικού Προγράμματος.

Ο σκοπός της έρευνας είναι να μελετήσει τα ανοικτά προβλήματα γεωμετρίας, στα οποία οι μαθητές παρουσίασαν μεγαλύτερη επιτυχία και να εστιάσει την προσοχή σε λάθη που παρουσιάστηκαν σε αυτά και δείχνουν παρανοήσεις που έχουν δημιουργηθεί.

Η έμφαση στην ανάγκη ανάπτυξης της κριτικής και δημιουργικής σκέψης ανέδειξε την ανάγκη αξιοποίησης αυθεντικών και ρεαλιστικών προβλημάτων με περισσότερες από μία λύσεις. Σε αυτό το πλαίσιο έχει αναδειχθεί η δυνατότητα επίλυσης «ανοικτών» προβλημάτων (Irsal, 2014; Yee, 2002). Τα μαθηματικά προβλήματα που μπορούν να λύνονται με πολλούς τρόπους, αναπτύσσουν τη μαθηματική ικανότητα των ατόμων και την ευελιξία τους, η οποία αποτελεί βασική διάσταση της δημιουργικότητας των ατόμων. Οι Lappan και Phillips (1998) θεωρούν ότι ένα από τα κριτήρια επιλογής ενός καλού προβλήματος είναι όταν τα προβλήματα προσεγγίζονται από τους μαθητές με πολλαπλούς τρόπους χρησιμοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης (από τους Lester & Cai, 2016).

Από τις έρευνες που έχουν διεξαχθεί μέχρι τώρα, φαίνεται ότι πληθώρα ερευνών έχουν ασχοληθεί με τη γεωμετρία (Gagatsis & Geitona, 2021; Modestou, Elia, Gagatsis & Spanoudes 2007). Τα ανοικτά γεωμετρικά προβλήματα έχουν ερευνηθεί στη μέση εκπαίδευση (π.χ. Gagatsis et al., 2022) και την ανώτερη εκπαίδευση (π.χ. Triutami et al., 2021) σε σχέση με τις Χωρικές Ικανότητες. Οι έρευνες αυτές, βασίζονταν κυρίως σε σχέσεις της χωρικής ικανότητας με την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία, διαστάσεις δηλαδή της δημιουργικότητας

(Gridos et al., 2021). Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στη μελέτη και ερμηνεία της επιτυχίας και των λαθών σε ανοικτά γεωμετρικά προβλήματα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, χωρίς να αξιολογεί το επίπεδο δημιουργικότητας. Σε σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών εντοπίζεται η ανάγκη επίλυσης των προβλημάτων με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, χωρίς όμως να επικεντρώνεται η προσοχή στα γεωμετρικά προβλήματα. Εντοπίζονται πιο συχνά αριθμητικά προβλήματα, τα οποία πιο εύκολα θεωρούνται ρεαλιστικά και ως εκ τούτου επιδέχονται περισσότερες από μία λύσεις ή πορείες λύσης (Bingolbali, 2020).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ανοικτά Μαθηματικά Προβλήματα

Πολλοί ερευνητές κατέγραψαν ορισμούς σχετικά με τα ανοικτά προβλήματα (Capraro, Capraro & Cifarelli, 2007; Pelfrey, 2000; Yee, 2002). Ωστόσο, λειτουργικό ορισμό της έρευνας αποτελεί αυτός του Pelfrey (2000), ο οποίος ορίζει τα ανοικτά προβλήματα ως τα προβλήματα, τα οποία έχουν περισσότερες από μια σωστή απάντηση και περισσότερες από μια στρατηγική για να βρεις την απάντηση.

Είδη ανοικτών προβλημάτων (Yee, 2002)

- Προβλήματα για επίλυση μέσω δεδομένων που λείπουν ή κρυμμένων υποθέσεων
- Προβλήματα για την επεξήγηση εννοιών/ διαδικασιών / λαθών
- Κατασκευή προβλήματος
- Πραγματικής ζωής/πρακτικά προβλήματα
- Προβλήματα διερεύνησης (σύγκρισης, αντίθεσης, κατάταξης, υπόθεσης και γενίκευσης)

Ο Chan (2005) χρησιμοποίησε ανοικτά προβλήματα σε μαθητές προς το τέλος του δημοτικού και εντόπισε πως οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά τη λύση τους είναι η χρήση της λίστας, της κατηγοριοποίησης και των γραφημάτων. Ενώ, οι Gagatsis et al. (2022) αναφέρουν πως σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων οι διάφοροι τρόποι επίλυσης μπορεί να είναι: (α) διαφορετικές αναπαραστάσεις της μαθηματικής έννοιας, (β) διαφορετικές ιδιότητες (ορισμοί ή θεωρήματα) των μαθηματικών εννοιών από το μαθηματικό θέμα, (γ) διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

Με τα ανοικτά προβλήματα δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλέκονται σε εικασίες-συμπεράσματα και αιτιολόγηση (Chan, 2005). Επιπλέον, οι μαθητές αναπτύσσουν την κριτική τους σκέψη, μαθαίνουν με περισσότερη δράση και αρχίζουν να βλέπουν το μάθημα των μαθηματικών πιο ενδιαφέρον και ουσιώδες (Yee, 2002). Τα ανοικτά προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών (Leikin, 2009).

Τέλος, η μειωμένη παρουσία τέτοιων προβλημάτων στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση μειώνει τις δυνατότητες των μαθητών για μεταγνωστική αξιολόγηση της καταλληλότητας διαφορετικών λύσεων ως προς την επίτευξη του ζητούμενου, αλλά και ως προς το βαθμό δυσκολίας και του γνωστικού φόρτου κάθε προσέγγισης (Panaoura, 2012).

Δυσκολίες και λάθη στη λύση προβλήματος

Από την αρχή συζήτησης της διαδικασίας λύσης προβλήματος με τον Polya και των στρατηγικών που αξιοποιούν τα άτομα στη λύση προβλήματος, η προσοχή εστιάστηκε στη διδακτική πρακτική και στον εντοπισμό των δυσκολιών, των λαθών και παρανοήσεων. Οι Phonapichat, Wongwanich και Sujiva (2014) αναφέρονται στον όρο δυσκολίες και τις κατηγοριοποιούν ως εξής:

(α) οι μαθητές έχουν δυσκολίες στην κατανόηση των λέξεων-κλειδιά, οι οποίες εμφανίζονται στα προβλήματα, έτσι δε μπορούν να τις ερμηνεύσουν μέσα στη μαθηματική πρόταση,

(β) οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν τις υποθέσεις που μπορούν να κάνουν και να διακρίνουν τις πληροφορίες που είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος,

(γ) όταν οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν το πρόβλημα, τότε τείνουν να μαντεύουν την απάντηση χωρίς να σκέφτονται,

(δ) οι μαθητές είναι ανυπόμονοι και δεν τους αρέσει να διαβάζουν μαθηματικά προβλήματα,

(ε) δεν αρέσει στους μαθητές να διαβάζουν μεγάλα προβλήματα.

Η πιο γνωστή θεωρία για την ανάλυση λαθών στα μαθηματικά προβλήματα είναι αυτή της Newman (Noutsara, Neunjhem & Chemrutsame, 2021). Με βάση τη Newman υπάρχουν πέντε κατηγορίες λαθών, (α) ανάγνωσης, (β) κατανόησης, (γ) μετασχηματισμού, (δ) δεξιοτήτων επεξεργασίας και (ε) κωδικοποίησης (Abdullah, Abidin & Ali, 2015). Τα λάθη ανάγνωσης αφορούν την ικανότητα του μαθητή να διαβάζει μαθηματικά προβλήματα που του δίνονται και να αναγνωρίζει προτάσεις και μαθηματικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται. Τα λάθη κατανόησης αφορούν την ικανότητα του μαθητή να καταλαβαίνει τα μαθηματικά προβλήματα. Τα λάθη μετασχηματισμού αφορούν την ικανότητα του μαθητή να ορίζει τη μέθοδο επίλυσης. Τα λάθη δεξιότητας επεξεργασίας αφορούν την ικανότητα του μαθητή να επεξεργάζεται σωστά (ή λάθος) τη διαδικασία. Τα λάθη κωδικοποίησης αφορούν την ικανότητα του μαθητή να γράφει κωδικοποιημένα λάθη κατά την ερώτηση (Rohmah & Sutiarso, 2018). Με προβλήματα γεωμετρίας σε σχέση με τη θεωρία Newman ασχολήθηκαν ερευνητικά τα τελευταία χρόνια. Συγκεκριμένα, με λάθη μαθητών γυμνασίου κατά την επίλυση προβλημάτων τριγωνομετρίας εντοπίστηκαν λάθη μόνο από τις 3 κατηγορίες λαθών, κατανόησης, μετασχηματισμού και δεξιοτήτων επεξεργασίας (Sartika & Fatmanissa, 2020).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

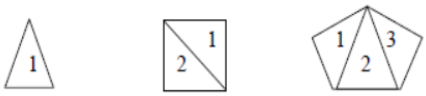
Στην έρευνα συμμετείχαν 380 μαθητές, οι οποίοι φοιτούν στη Στ τάξη δημοτικών σχολείων στην Κύπρο. Το δείγμα επιλέχθηκε με βολική δειγματοληψία, στη βάση της εύκολης πρόσβασης της ερευνήτριας, και το δοκίμιο χορηγήθηκε σε όσα παιδιά εξασφαλίστηκε η σχετική γονική συγκατάθεση. Εργαλείο αποτέλεσε ένα δοκίμιο με 16 ανοικτά προβλήματα γεωμετρίας (βλέπε παράδειγμα στην εικόνα 1 και εικόνα 2), το οποίο χορηγήθηκε με διάρκεια 80 λεπτά.

Εικόνα 1

1. Σχεδίασε και ονόμασε κλειστά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία μπορείς να φτιάξεις με 2 ίδια κοντά καλαμάκια και 2 ίδια μακριά καλαμάκια.

Εικόνα 2

5. Α. Να σχεδιάσεις τα 3 επόμενα σχήματα στο πιο κάτω μοτίβο.



Β. Πόσα τρίγωνα υπάρχουν σε ένα σχήμα με 10 πλευρές;_____

Για να αξιολογηθεί η επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο Ανοικτών Προβλημάτων Γεωμετρίας, ορίστηκαν κάποιες φόρμουλες. Να σημειωθεί ότι οι κενές απαντήσεις θεωρήθηκαν και αυτές

λανθασμένες. Κάθε πρόβλημα έπαιρνε μέχρι και μια μονάδα και ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος χρησιμοποιήθηκαν 3 τρόποι αξιολόγησης, οι οποίοι λάμβαναν υπόψη (α) τον αριθμό ορθών απαντήσεων που δίνονταν σε σχέση με τον συνολικό αριθμό ορθών απαντήσεων β) την ορθότητα της στρατηγικής που χρησιμοποιούσαν και (γ) τον αριθμό ορθών απαντήσεων σε προβλήματα που έχουν πολυάριθμες απαντήσεις.

Για το πρόβλημα 1 χρησιμοποιήθηκε ο τρόπος (α) και συγκεκριμένα αξιολογήθηκε η ορθότητα των πρώτων 3 σχημάτων και ονομάτων που δόθηκαν με 1 για κάθε ορθό και 0 για κάθε λάθος. Ο Μέσος Όρος (ΜΟ) των 6 αυτών μεταβλητών αποτέλεσε τον ΜΟ του προβλήματος. Για το πρόβλημα 5 χρησιμοποιήθηκε ο τρόπος (β) και συγκεκριμένα αξιολογήθηκε κατά πόσον ήταν ορθά τα 3 σχήματα στο ερώτημα 5α και κατά πόσο είχαν αντιληφθεί το μοτίβο του αριθμού των πλευρών και το μοτίβο του αριθμού των τριγώνων, με 1 για κάθε ορθό και 0 για κάθε λάθος. Ο ΜΟ των 5 αυτών μεταβλητών αποτέλεσε το 75% του ΜΟ του προβλήματος και το κατά πόσο ήταν ορθό το ερώτημα 5β αξιολογήθηκε με 1 για το ορθό και 0 για το λάθος και αποτέλεσε το 25% του ΜΟ του προβλήματος.

Το άθροισμα των βαθμών σε όλα τα προβλήματα αποτέλεσαν τον συνολικό βαθμό κάθε μαθητή στο δοκίμιο. Υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι του κάθε προβλήματος αλλά και του δοκιμίου συνολικά. Τα δεδομένα αναλύονται επίσης ως προς τα λάθη για δύο προβλήματα, τα οποία εξασφάλισαν τους υψηλότερους μέσους όρους. Η ανάλυση αυτή γίνεται με σκοπό να μελετηθεί και ερμηνευθεί η επιτυχία σε ανοικτά γεωμετρικά προβλήματα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αρχικά υπολογίστηκε ο Μέσος Όρος (ΜΟ) της επίδοσης των μαθητών στο δοκίμιο, ο οποίος ήταν 0.12 και οι ΜΟ του κάθε προβλήματος ξεχωριστά. Στον Πίνακα 1, φαίνονται τα πέντε προβλήματα που εξασφάλισαν τους υψηλότερους ΜΟ.

Στη συνέχεια, θα αναλυθούν τα προβλήματα 1 (περισσότερες από 1 απαντήσεις) και 5 (περισσότερες από 1 στρατηγικές επίλυσης), τα οποία εξασφάλισαν τον υψηλότερο ΜΟ, ο οποίος όμως εξακολουθεί να είναι πολύ χαμηλός (0.26), με το πρόβλημα 1 να είχε μικρότερη τυπική απόκλιση.

Πίνακας 1: Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις Προβλημάτων

Πρόβλημα	**$\bar{x}$**	**SD**
1	0.26	0.19
2	0.17	0.25
5	0.26	0.34
6	0.19	0.28
9	0.24	0.25

Στο πρόβλημα 1 (Εικόνα 1), το μεγαλύτερο ποσοστό (39.5%) παρουσίασε μία λύση και με πολύ κοντινό ποσοστό (38.4%) παρουσίασαν δύο λύσεις. Το 13,2% δεν απάντησε, ενώ πολύ χαμηλά ποσοστά έδωσαν 3, 4 και 5 λύσεις.

Σχετικά με την ορθότητα των λύσεων, το 44.7% έδωσε μια ορθή λύση, το 27.4% έδωσε δύο ορθές λύσεις, το 26.6% δεν έδωσε ορθές λύσεις και μόνο το 1,3% εντόπισαν 3 ορθές λύσεις. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, οι μαθητές που σχεδίασαν ορθά το πρώτο σχήμα είναι περίπου τριπλάσιοι από τους μαθητές που το σχεδίασαν λάθος, ενώ στο δεύτερο σχήμα, οι μαθητές που σχεδίασαν ορθά ήταν περίπου διπλάσιοι από αυτούς που σχεδίασαν λάθος. Ακόμα,

περισσότεροι από τους μισούς μαθητές δεν σχεδίασαν δεύτερο σχήμα, ενώ στο πρώτο σχήμα η αποχή ήταν 13,2%.

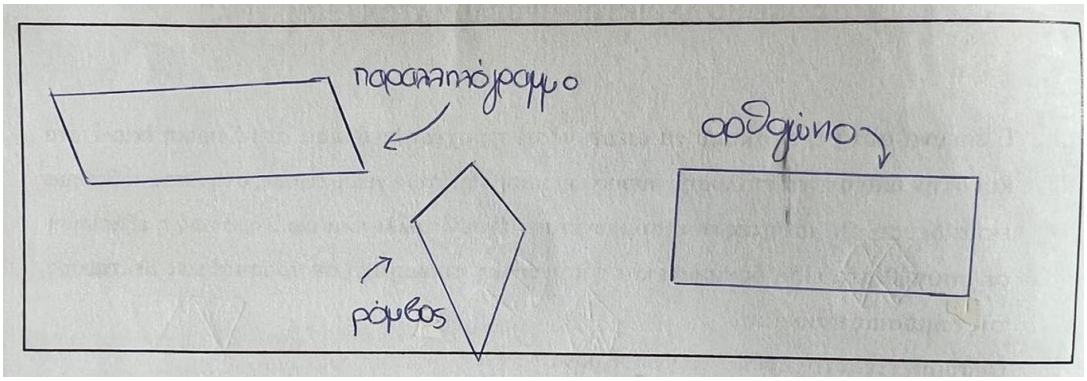
Σχετικά με την ορθότητα των ονομάτων των σχημάτων φαίνεται πως και αυτοί που σχεδίαζαν ορθά δεν έγραφαν καν το όνομα τους σχήματος, αφού τα ποσοστά κενού ονόματος ξεπερνούν κατά πολύ το κενό σχήμα στην κάθε περίπτωση. Αν και στο πρώτο σχήμα οι μαθητές που έδωσαν ορθά το όνομα ήταν περισσότεροι από τριπλάσιους σε σχέση με αυτούς που έδωσαν λανθασμένο, στην ονομασία τους δεύτερου σχήματος οι μαθητές ήταν περίπου ίσοι.

Πίνακας 2: Ποσοστά Ορθότητας της κάθε απάντησης στο Πρόβλημα 1

	Ορθότητα σχεδίου 1ου	**Ορθότητα ονόματος σχεδίου 1ου**	**Ορθότητα σχεδίου 2ου**	**Ορθότητα ονόματος σχεδίου 2ου**
Λάθος	21,6	12,9	16,1	14,7
Ορθό	65,3	37,1	32,1	16,6
Κενό	13,2	50	51,8	68,7

Μόνο το 3,95% των μαθητών είχε σχεδιάσει «kite», σχήμα το οποίο δε διδάσκεται στο δημοτικό. Οπότε, αυτό μπορεί να εξηγήσει και το γεγονός ότι μπορεί να σχεδίαζαν το συγκεκριμένο σχήμα, αλλά στο όνομα του έγραφαν είτε ρόμβος, είτε το άφηναν κενό (βλέπε παράδειγμα στην Εικόνα 3).

Εικόνα 3



Το πρόβλημα 5, περιλάμβανε ένα σχηματικό μοτίβο με δοσμένους τους τρεις πρώτους όρους και ζητούσε τους επόμενους τρεις, καθώς και στο ερώτημα (β) τον αριθμό των τριγώνων που θα είχε το σχήμα με 10 πλευρές (για να διαφανεί η ικανότητα γενίκευσης της συγκεκριμένης σχέσης).

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3, τα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων ξεπερνούν το 50% και στα τρία σχήματα, άρα η άσκηση φαίνεται να δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές ή να μην είχαν την κατάλληλη ακρίβεια στις απαντήσεις τους. Ακόμα, ο αριθμός των μαθητών που απάντησαν ορθά στο πρώτο και δεύτερο σχήμα ήταν περίπου ο ίδιος, ενώ στο τρίτο σχήμα είχε μείωση περίπου 10%. Σχετικά με τους μαθητές που δεν απάντησαν, παρατηρήθηκε μια μικρή αύξηση στο ποσοστό της τάξης του 2-4% από το πρώτο στο δεύτερο και από το δεύτερο στο τρίτο σχήμα.

Πίνακας 3: Ποσοστά Ορθότητας της κάθε απάντησης στο Πρόβλημα 5

	Ορθότητα σχήματος 1ου	**Ορθότητα σχήματος 2ου**	**Ορθότητα σχήματος 3ου**

Λάθος	53.4	50.0	57.9
Ορθό	31.6	31.8	21.8
Κενό	15.0	18.2	20.3

Στο ερώτημα (β), το 49.8% απάντησε λανθασμένα, το 19.2% απάντησε ορθά και το 31.1% δεν απάντησε. Το ποσοστό των μαθητών που απάντησε ορθά το ερώτημα (β) φαίνεται να είναι αρκετά κοντά με το ποσοστό των μαθητών που απάντησε ορθά το τρίτο σχήμα (21.8%) αλλά και αντιλήφθηκε το μοτίβο που ακολουθούσε ο αριθμός των πλευρών των σχημάτων (22.1%). Ενώ αυξημένο ήταν το ποσοστό που είχε αντιληφθεί το μοτίβο που ακολουθούσε ο αριθμός των τριγώνων (35,3%). Ως εκ τούτου, το πιο κοινό λάθος ήταν να φτιάχνουν σχήματα με ορθό αριθμό τριγώνων και λανθασμένο αριθμό πλευρών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Γενικά οι μαθητές φάνηκε να μην είναι πρόθυμοι να ασχοληθούν με ανοικτά προβλήματα γεωμετρίας, ίσως επειδή είναι πολύ πιο απαιτητική η ενασχόληση με αυτής της μορφής μαθηματικά προβλήματα (Phonapichat, Wongwanich & Sujiva, 2014). Ελάχιστοι μαθητές παρουσίαζαν μεγάλο αριθμό απαντήσεων, που οι περισσότερες από αυτές τις απαντήσεις ήταν λανθασμένες, γιατί δεν λάμβαναν υπόψη κάποιους περιορισμούς της οδηγίας. Αυτό έρχεται σε σύγκρουση με το γεγονός ότι σχεδόν κάθε φορά που διδάσκεται νέα έννοια, στα σχολικά εγχειρίδια περιλαμβάνεται μια δραστηριότητα ανοικτού τύπου, έτσι οι μαθητές αναμενόταν να είναι πιο εξοικειωμένοι.

Σχετικά με τα προβλήματα, στα οποία παρουσίασαν μεγαλύτερη επιτυχία, οι ΜΟ εξακολουθούσαν να είναι εξαιρετικά χαμηλοί. Στο πρόβλημα 1 αυτό προέκυψε πρωτίστως από τη μη επίτευξη εντοπισμού μίας ή περισσότερων ορθών απαντήσεων, ίσως επειδή έχουν δυσκολίες στην κατανόηση των λέξεων-κλειδιά, οι οποίες εμφανίζονται στα προβλήματα (Phonapichat, et al., 2014). Επίσης, παρουσιάζουν έλλειψη ορθής ορολογίας, ώστε να καταφέρουν να ονοματοδοτήσουν τα σχήματα που σχεδίαζαν, αυτό πιθανόν να αποτελεί λάθος κωδικοποίησης (Rohmah & Sutiarso, 2018). Στο πρόβλημα 5, οι μαθητές φάνηκε να αντιλαμβάνονται τη μια σχέση και να προχωρούν αγνοώντας την ύπαρξη δεύτερης σχέσης. Έτσι αυτό τους οδήγησε σε λανθασμένες λύσεις, πιθανόν από λάθη μετασχηματισμού, αφού δεν είχαν την ικανότητα να ορίζουν ορθά τη μέθοδο επίλυσης (Rohmah & Sutiarso, 2018).

Μπορεί τα ανοικτά προβλήματα να χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια στην Κύπρο, αλλά οι μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί πλήρως με τη μορφή και τις απαιτήσεις τους και αυτό αποδεικνύεται από τους εξαιρετικά χαμηλούς μέσους όρους σε όλα τα προβλήματα. Εντούτοις, η επιτυχία στην επίλυση προβλήματος δεν εξαρτάται μόνο από τη γνώση του μαθητή αλλά από τις αποφάσεις που θα πάρει για το πώς και πότε θα τη χρησιμοποιήσει (Schoenfeld, 1992). Μια μεταγενέστερη ανάλυση ανοικτών γεωμετρικών προβλημάτων που παρουσίασαν επιτυχία, θα μπορούσε να μας δώσει πιο ξεκάθαρη εικόνα αν τη διερευνούσαμε σε σχέση με τις διαστάσεις της δημιουργικότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z., & Ali, M. (2015). Analysis of students' errors in solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) problems for the topic of fraction. *Asian Social Science, 11*(21), 996–1005. https://doi.org/10.5539/ass.v11n21p133

Bingolbali, E. (2020). An analysis of questions with multiple solution methods and multiple outcomes in mathematics textbooks. *International*

journal of mathematical education in science and technology, 51(5), 669–687. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1606949

Capraro, M. M., Capraro, R. M., & Cifarelli, V. V. (2007). What are students thinking as they solve open-ended mathematics problems. In D. Pugalee (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference of Mathematics Education in a Global Community* (pp. 124–128). University of North Carolina.

Chan, E. C. M. (2005). Using open-ended mathematics problems: A classroom experience (Primary). In *Proceedings of the Redesigning pedagogy: research, policy, practice conference.*

Gagatsis, A., & Geitona Z. (2021). A multidimensional approach to students' creativity in geometry: spatial ability, geometrical figure apprehension and multiple solutions in geometrical problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 5–16.

Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z., Deliyianni, E., & Gridos, P. (2022). How could the presentation of a geometrical task influence student creativity?. *Journal of Research in Science Mathematics and Technology Education, 5*(1), 93–116. https://doi.org/10.31756/jrsmte.514

Gridos, P., Avgerinos, E., Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Geitona, Z. (2021). Unpacking the relation between spatial abilities and creativity in geometry. *The European Educational Researcher, 4*(3), 307–328. https://doi.org/10.31757/euer.433

Irsal, N. A. (2014). The development of mathematics open-ended problems in circle main topic for junior high school. In F.Galen (Ed.), *Proceeding the 2nd SEA-DR.*

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. (Ch. 9, pp. 129-145). Sense Publisher. https://doi.org/10.1163/9789087909352_010

Lester, F.K., Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems.* Research in Mathematics Education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudes, G. (2007). Problem solving in geometry: The case of the illusion of proportionality. In D. Pitta-Pantazi, & C. Philippou (Eds.), Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5) (pp. 1052–1061). University of Cyprus and ERME.

Noutsara, S., Neunjhem, T., & Chemrutsame, W. (2021). Mistakes in mathematics problems solving based on Newman's error analysis on set materials. *Journal La Edusci, 2*(1), 20–27. https://doi.org/10.37899/journallaedusci.v2i1.367

Panaoura, A. (2012). Improving problem solving ability in mathematics by using a mathematical model: A computerized approach. *Computers in Human Behavior, 28*(6), 2291–2297. https://doi.org/10.1016/j.chb.2012.06.036

Pelfrey, R., (2000). *Open-ended questions for mathematics.* Appalachian Rural Systemic Initiative University of Kentucky.

Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia-social and Behavioral Sciences, 116,* 3169–3174. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.728

Rohmah, M., & Sutiarso, S. (2018). Analysis problem solving in mathematical using theory Newman. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(2), 671–681. https://doi.org/10.12973/ejmste/80630

Sartika, I., & Fatmanissa, N. (2020). Analysis of students' error in solving trigonometric function problems which assess higher order thinking skills. *Contemporary Mathematics and Science Education, 1*(1), ep20002. https://doi.org/10.30935/conmaths/8437

Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 179–214. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_3

Triutami, T. W., Hariyanti, U., Novitasari, D., Tyaningsih, R. Y., & Junaidi, J. (2021). High visual-spatial intelligence students' creativity in solving PISA problems. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika), 5*(1), 36–49. https://doi.org/10.31764/jtam.v5i1.3280

Yee, F. P. (2002). Using short open-ended mathematics questions to promote thinking and understanding. *Proceedings of the 4 th International Conference on The Humanistic Renaissance in Mathematics Education,* (pp. 135–140).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΦΑΝΤΑΣΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΚΡΙΤΙΚΗ

Άρτεμις Παπαηλία

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

papailiaa@hotmai.com

Η μελέτη θα επικεντρωθεί στον τρόπο με τον οποίο ο Edwin A. Abbott, στο βιβλίο του «Flatland: Η Επιπεδοχώρα» (1884), συνδέει τα μαθηματικά με τη λογοτεχνία για να προσεγγιστούν με ευφυή τρόπο ηθικά και φιλοσοφικά ζητήματα, προσφέροντας μια εναλλακτική οπτική στην κατανόηση των κοινωνικών δομών της Βικτωριανής κοινωνίας. Επιπροσθέτως, θα επιχειρηθεί να φωτιστεί ο τρόπος με τον οποίο, η σύζευξη μαθηματικών και λογοτεχνίας μπορεί να εμπλουτίσει την κατανόηση του κόσμου μας, επισημαίνοντας πως τέτοιου είδους έργα μπορούν να ενθαρρύνουν την κριτική αποτίμηση των μαθηματικών εννοιών, όχι ως αφηρημένα σύμβολα, αλλά ως δυναμικά σημαινόμενα, και να προωθήσουν μια βαθύτερη κατανόηση του κοινωνικού γίγνεσθαι.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εμφάνιση της μαθηματικής μυθοπλασίας, στο τέλος του 19ου αιώνα, σηματοδότησε μια κομβική στιγμή στη λογοτεχνική ιστορία. Προσέφερε έναν πρωτότυπο τρόπο στους συγγραφείς να ασχοληθούν με τις μαθηματικές ιδέες, υφαίνοντάς τες στον ιστό των ιστοριών τους για να εξερευνήσουν βαθύτερες αλήθειες για την κοινωνία, τη φιλοσοφία και την ίδια τη φύση της πραγματικότητας.

Ένα από τα πρώτα και πιο γνωστά παραδείγματα μαθηματικής μυθοπλασίας αποτελεί το βιβλίο “Flatland: A Romance of Many Dimensions” (1884) του Edwin A. Abbott, που μεταφράστηκε στα ελληνικά ως «Flatland: Η Επιπεδοχώρα» το 1999. Το έργο του Abbott δεν είναι απλώς ένα ευφάνταστο ταξίδι στις γεωμετρικές διαστάσεις, αλλά και ένα αιχμηρό σχόλιο για την κοινωνική διαστρωμάτωση και τα πολιτιστικά πρότυπα της εποχής του. Εμφυσώντας ζωή στα γεωμετρικά σχήματα και τις αλληλεπιδράσεις τους σε έναν δισδιάστατο κόσμο, ο Abbott χρησιμοποίησε έξυπνα τα μαθηματικά ως καθρέφτη, προκειμένου να επικρίνει τις άκαμπτες κοινωνικές δομές της Βικτωριανής κοινωνίας. Η Επιπεδοχώρα δεν θεωρείται ένα εγχειρίδιο μαθηματικών που κρύβεται εντέχνως πίσω από ένα μυθιστόρημα, αλλά μία μυθοπλασία, όπου τα μαθηματικά υπηρετούν έναν κοινωνικά προσδιοριζόμενο στόχο.

Ο Edwin Abbott (1838-1926), ενδιαφερόταν κυρίως για το πεδίο της θεολογίας και της κλασικής λογοτεχνίας. Υπήρξε πρωτοποριακός δάσκαλος, καθώς στην εποχή που έζησε εισήγαγε καινοτόμες προτάσεις για τη διδασκαλία της χημείας, της συγκριτικής γραμματολογίας και της αγγλικής λογοτεχνίας και θεωρείται ένας από τους κορυφαίους ακαδημαϊκούς και θεολόγους της Βικτωριανής Εποχής. Όταν ο Edwin A. Abbott δημοσίευσε το Flatland, έκανε την ενδιαφέρουσα επιλογή να χρησιμοποιήσει το ψευδώνυμο “A. Square” αντί για το πραγματικό του όνομα. Η απόφαση αυτή μπορεί να προήλθε από την έντονη απόκλιση του μυθιστορήματος από τα συνήθη γραπτά του (Carluccio, 2015:55). Το βιβλίο, με τη μοναδική ιδέα και το αφηγηματικό του ύφος, διέφερε αρκετά από οτιδήποτε είχε γράψει στο παρελθόν. Η ανωνυμία προκάλεσε μεγάλη περιέργεια στους αναγνώστες και συνάμα, το

αντισυμβατικό και φανταστικό περιεχόμενο του μυθιστορήματος το κατέστησε αρκετά αινιγματικό. Μια κριτική, από το τεύχος της 15ης Νοεμβρίου του 1884, του περιοδικού "The Athenaeum", αποτυπώνει ευδιάκριτα αυτή τη σύγχυση, σημειώνοντας ότι «Αυτό το περίεργο βιβλίο, Flatland, από τον A. Square (Seeley & Co.), φαίνεται να έχει έναν σκοπό, αλλά είναι δύσκολο να ανακαλύψουμε ποιος μπορεί να είναι αυτός».

Το Flatland προέκυψε κατά τη διάρκεια της Βιομηχανικής Επανάστασης, μιας περιόδου κατά την οποία το Ηνωμένο Βασίλειο γνώρισε ταχεία βιομηχανική ανάπτυξη και οικονομική ευημερία. Σε αυτό το πλαίσιο, αναπτύχθηκε μια άκαμπτη κοινωνική διαστρωμάτωση. Το ανώτερο κοινωνικό κλιμάκιο, η αριστοκρατία, αντλούσε τον πλούτο της κυρίως από εκτεταμένες ιδιοκτησίες γης και στρατηγικές επενδύσεις στον βιομηχανικό τομέα. Κάτω από το αριστοκρατικό στρώμα βρισκόταν η μεσαία τάξη που κατηγοριοποιούνταν: στην ανώτερη μεσαία τάξη, η οποία αποτελούνταν από επαγγελματίες, όπως γιατρούς, δικηγόρους και τραπεζίτες, και την κατώτερη μεσαία τάξη, η οποία περιλάμβανε τεχνίτες, εκπαιδευτικούς και υπαλλήλους γραφείου. Ως κατώτερη θεωρούνταν η εργατική τάξη, η σκληρή εργασία της οποίας αποτέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο της βιομηχανικής επέκτασης. Ο κοινωνικός ρόλος της γυναίκας κατά τη διάρκεια αυτής της εποχής ήταν ιδιαίτερα περιορισμένος. Οι γυναίκες εξαρτιόνταν κυρίως από τους άνδρες και αποκλείονταν σε μεγάλο βαθμό από δικαιώματα, όπως η ψήφος, η τριτοβάθμια εκπαίδευση και η ιδιοκτησία. Ο κοινωνικός τους ρόλος περιοριζόταν στις οικιακές ευθύνες, με περιορισμένες ευκαιρίες συμμετοχής στον ευρύτερο οικονομικό ή πολιτικό διάλογο της εποχής. Αυτό το διαστρωματωμένο κοινωνικό πλαίσιο, που χαρακτηριζόταν από έντονες ταξικές διαιρέσεις και ανισότητες μεταξύ των φύλων, αποτέλεσε το σκηνικό στο οποίο γράφτηκε το Flatland, αντικατοπτρίζοντας τα κοινωνικά πρότυπα και τις προκλήσεις της Βικτωριανής εποχής. Ο Gilbert σημειώνει ότι «είναι, επίσης, ένα βιβλίο στο οποίο μπορούμε να στραφούμε σήμερα, με μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση απ' ό,τι σε πολλές πιο σοβαρές ιστορικές μελέτες, για μια ακριβή αναπαράσταση της ζωής και της σκέψης του δέκατου ένατου αιώνα» (1991: 396).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Διάφορες επιστημονικές εργασίες που μελετούν το Flatland, έχουν εμβαθύνει ιδιαίτερα σε στοιχεία, όπως η σάτιρα στη Βικτωριανή εποχή (Carluccio, 2015) και τη Βικτωριανή Ανθρωπολογία Smith, 2018). Μεταξύ των άλλων έχει ερευνηθεί η χρήση μη ευκλείδειων γεωμετριών στο μυθιστόρημα (Banchoff, 1990, 1991; Henderson, 2009), εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι μαθηματικές έννοιες είναι συνυφασμένες με την αφήγηση. Έχει εξεταστεί, επίσης, ο ρόλος της θρησκείας στην Επιπεδοχώρα (Jann, 1985; Smith, 1994; Smith, Berkove & Baker, 1996), διερευνώντας τον τρόπο με τον οποίο εισάγονται πνευματικά θέματα ή σχετίζονται με θεολογικά κείμενα που έχει συγγράψει ο Abbott, αναδεικνύοντας την πολύπλευρη φύση του βιβλίου και του συγγραφέα του. Σχετικές εργασίες για τη χρήση της Επιπεδοχώρας στη διδασκαλία των μαθηματικών ως εκπαιδευτικό υλικό δεν εντοπίστηκαν, παρά μόνο ένα σχέδιο διδασκαλίας (LeTME: Department of Early Childhood Studies, 2018) στο πλαίσιο του project: "Expanding the use of the 'Gender Equality Charter Mark for Schools across Europe", προκειμένου οι μαθητές, ηλικίας 9-12 ετών, να κατανοήσουν την κοινωνική κατασκευή των ρόλων των φύλων και να προβληματιστούν σχετικά με τα στερεότυπα των φύλων.

Η παρούσα μελέτη θα επικεντρωθεί στον τρόπο με τον οποίο ο Abbott ενσωματώνει τη μαθηματική λογική και τις γεωμετρικές έννοιες στη μυθοπλασία του, ώστε να ασκήσει κριτική στη Βικτωριανή Εποχή. Η συζήτηση θα εστιάσει στο πώς Η Επιπεδοχώρα μπορεί να εκληφθεί ως μια μαθηματική μεταφορά της ανθρώπινης κοινωνίας, προβάλλοντας ζητήματα σχετικά με την κοινωνική διαστρωμάτωση. Επιπλέον, θα εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο η μυθοπλασία συνδέει τα μαθηματικά με τη λογοτεχνία για να προσεγγιστούν με ευφυή τρόπο ηθικά και

φιλοσοφικά ζητήματα. Τέλος, το άρθρο θα επιχειρήσει να φωτίσει τον τρόπο με τον οποίο η σύζευξη μαθηματικών και λογοτεχνίας μπορεί να εμπλουτίσει την κατανόηση του κόσμου μας, επισημαίνοντας πως τέτοιου είδους έργα μπορούν να ενθαρρύνουν την κριτική αποτίμηση των μαθηματικών εννοιών, όχι ως αφηρημένα σύμβολα αλλά ως δυναμικά σημαινόμενα και να προωθήσουν μια βαθύτερη κατανόηση του κοινωνικού γίγνεσθαι.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΑ ΚΑΙ ΗΘΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ

Στην Επιπεδοχώρα, ο Abbott, δημιούργησε έναν φανταστικό κόσμο δύο διαστάσεων που κατοικείται από δισδιάστατα πλάσματα. Ο αφηγητής, ένα Τετράγωνο, που δεν βρίσκεται ούτε στις υψηλότερες ούτε στις χαμηλότερες τάξεις, σε πρώτο πρόσωπο, περιγράφει τον κόσμο του, σκιαγραφώντας, αρχικά, την κοινωνική διαστρωμάτωση της κοινωνίας του.

Οι χαρακτήρες του έργου είναι αναπαραστάσεις γεωμετρικών σχημάτων, των κανονικών (ισοσκελή τρίγωνα, ισόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα, εξάγωνα και τα λοιπά και οι κύκλοι) και ακανόνιστων μορφών τους. Η θέση ενός αρσενικού στην κοινωνική κλίμακα καθορίζεται από τις γωνίες και από τις πλευρές του. Τα Τρίγωνα είναι οι στρατιώτες και ανήκουν στις κατώτερες τάξεις των εργατών, ενώ τα ισοσκελή Τρίγωνα συνιστούν τη μεσαία κοινωνική τάξη. Οι Αξιότιμοι Επαγγελματίες είναι Τετράγωνα και Πεντάγωνα. Η αμέσως επόμενη τάξη είναι εκείνη των Ευγενών. Αρχίζοντας με τα Εξάγωνα, όσο αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών, τόσο ανεβαίνουμε κοινωνική τάξη, έως ότου φθάσουμε στο Πολύγωνο. Όταν ο αριθμός των πλευρών του τελευταίου σχήματος είναι τόσο μεγάλος, με τρόπο που να μη διαχωρίζεται από τον Κύκλο, τότε βρισκόμαστε στην υψηλότερη τάξη, που ονομάζεται Κυκλική ή Ιεραρχική. Οι Κύκλοι, που αντιπροσωπεύουν τη γεωμετρική τελειότητα, χαίρουν εκτίμησης σε αυτή την κοινωνία και κατέχουν την υψηλότερη θέση, με τον ίδιο τον Βασιλιά να είναι ο Παντόκυκλος. Η κοινωνική διαστρωμάτωση στο Flatland που αντικατοπτρίζει το Βικτωριανό ταξικό σύστημα, τα κανονικά σχήματα χαίρουν εκτίμησης και τα ακανόνιστα αντιμετωπίζουν σοβαρές κοινωνικές προκαταλήψεις, που συχνά οδηγούν σε φυλάκιση ή εκτέλεση.

Οι γονείς επιδιώκουν να αποκτήσουν παιδιά, τα οποία, σύμφωνα με τον δικό τους Φυσικό Νόμο, θα έχουν μία παραπάνω πλευρά από τον πατέρα τους και επομένως, θα κινούνται ανοδικά σε μια διαφορετική κοινωνική θέση. Το παραπάνω, ωστόσο, δεν ισχύει πάντοτε για τα Τρίγωνα «για τους οποίους άλλωστε με δυσκολία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο ανθρώπινα σχήματα» (26). Ακόμη, φιγούρες με ασυνήθιστες γωνίες τείνουν να θεωρούνται είτε απόβλητα είτε εγκληματίες.

Η απεικόνιση των γυναικείων χαρακτήρων ως απλών γραμμών αποτελεί κριτικό σχόλιο για τη δυναμική των φύλων στη Βικτωριανή κοινωνία. Η απλοϊκή τους γεωμετρική αναπαράσταση αντανακλά έντονα την κοινωνική περιθωριοποίηση των γυναικών κατά την εποχή εκείνη. Η επιλογή του Abbott να απεικονίσει τις γυναίκες ως τις πιο στοιχειώδεις γεωμετρικές μορφές - ευθείες γραμμές - δεν είναι απλώς μια στυλιστική επιλογή αλλά μια σκόπιμη κριτική της αναγωγικής θεώρησης των ρόλων των γυναικών στη Βικτωριανή εποχή. Τα θηλυκά πρόσωπα, παρά την απλοϊκή τους μορφή, διαπνέονται από μια παράδοξη φύση. Από τη μία πλευρά, θεωρούνται επικίνδυνες λόγω των αιχμηρών άκρων τους, ικανές να βλάψουν τις ανδρικές φιγούρες, γεγονός που μπορεί να ερμηνευθεί ως μια λεπτή αναγνώριση της λανθάνουσας δύναμής τους, πλαισιωμένη με συναισθήματα φόβου. Από την άλλη πλευρά, η απεικόνισή τους αντανακλά, επίσης, τους περιοριστικούς και καταπιεστικούς κοινωνικούς κανόνες που επιβάλλονται στις γυναίκες. Οι κανόνες που διέπουν την κίνηση και τη συμπεριφορά τους στην Επιπεδοχώρα, όπως η είσοδος στα σπίτια από ξεχωριστές πόρτες και οι σοβαρές συνέπειες για τη δημόσια μετακίνηση χωρίς ακουστική αναγγελία, αποτελούν έντονες αναπαραστάσεις των κοινωνικών περιορισμών που κατακεραυνώνουν την αυτονομία και τη συμμετοχή των γυναικών στη δημόσια ζωή.

Η θεώρηση της Επιπεδοχώρας ως μία οριζόντια επιφάνεια μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση του μοναδικού σκηνικού της. Η Επιπεδοχώρα είναι η κατοικία γεωμετρικών σχημάτων, διαφορετικών γωνιών και μεγεθών, αλλά κανένα από αυτά δεν έχει ύψος παρά μόνο πλάτος και μήκος. Υπάρχουν καθαρά σε δύο διαστάσεις, με μόνο το μήκος και το πλάτος ως χωρικά χαρακτηριστικά τους. Οι κάτοικοι έχουν αίσθηση της κατεύθυνσης και μπορούν να κινούνται προς όλες τις οριζόντιες κατευθύνσεις -Βορρά, Νότο, Ανατολή και Δύση. Παρόλα αυτά, βιώνουν μια μυστηριώδη βαρυτική έλξη προς το Νότο, ένα φαινόμενο που επηρεάζει αισθητά τον κόσμο τους: από τον αρχιτεκτονικό προσανατολισμό των πενταγωνικών σπιτιών τους που κοιτάνε πάντοτε προς τον Βορρά, μέχρι τη Νότια κατεύθυνση προς την οποία πέφτει η βροχή. Στην Επιπεδοχώρα, κάθε κάτοικος, πιστός στο όνομα του κόσμου του, είναι εντελώς επίπεδος, στερούμενος κάθε αντίληψης ύψους λόγω της δισδιάστατης πραγματικότητάς του. Η απεικόνιση ενός τέτοιου κόσμου από τον Abbott είναι κάτι περισσότερο από μια απλή μαθηματική εξερεύνηση, διότι προκαλεί τους αναγνώστες να εξετάσουν προοπτικές και διαστάσεις, πέρα από τις καθημερινές τους εμπειρίες. Είναι μια πρόσκληση να τεντώσουν τη φαντασία τους, αναλογιζόμενοι πώς η ζωή, η κίνηση και οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις θα μπορούσαν να συμβούν σε ένα πεδίο, όπου η έννοια του ύψους είναι ανύπαρκτη.

Η αφήγηση του Abbott εξετάζει κριτικά τους περιορισμούς της αντίληψης μέσα σε έναν δισδιάστατο κόσμο. Στην Επιπεδοχώρα, οι κάτοικοι, όπως οι δεσμώτες στον «Μύθο του Σπηλαίου» του Πλάτωνα, αδυνατούν να αντιληφθούν το πάνω και το κάτω ενός τρισδιάστατου κόσμου, περιοριζόμενοι αντίθετα στον Βορρά και τον Νότο της επίπεδης ύπαρξής τους. Οι περιορισμοί στην αντίληψη και την κατανόηση αντανακλά ένα ευρύτερο φιλοσοφικό ερώτημα σχετικά με τα όρια της ανθρώπινης γνώσης και τη δυνητική ύπαρξη ‘πραγματικοτήτων’ πέρα από την αισθητηριακή μας κατανόηση. Μία επέκταση της Πλατωνικής μεταφοράς για την σπηλιά, όπου οι κάτοικοι δεν βλέπουν τίποτα άλλο παρά τις σκιές των πραγματικών αντικειμένων κι όχι τα αντικείμενα καθαυτά.

Η βροχή και η υγρασία παίζουν καθοριστικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας αντιλαμβάνονται και κατανοούν το περιβάλλον τους. Η παρουσία της ομίχλης, για παράδειγμα, συμβάλλει καθοριστικά στο πώς μπορεί ένας κάτοικος να διακρίνει τη γωνία κάθε πλευράς που συναντά- μία μέθοδος ζωτικής σημασίας για τους κατοίκους, δεδομένης της έλλειψης αντίληψης της έννοιας του πάχους και της αδυναμίας τους να φιλοξενήσουν ένα ζευγάρι μάτια στο σώμα τους. Διαθέτοντας μόνο ένα μάτι, η αντίληψή τους για τις διαστάσεις διαφέρει σημαντικά από εκείνης του αναγνώστη, ιδίως όσον αφορά την αδυναμία τους να αντιληφθούν το ύψος, σε αντίθεση με έναν κάτοικο ενός τρισδιάστατου σύμπαντος. Ακριβώς, όπως οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας περιορίζονται από τη δισδιάστατη προοπτική τους, έτσι και οι αναγνώστες προτρέπονται να αναλογιστούν τους περιορισμούς της δικής τους τρισδιάστατης αντίληψης και τις πιθανές διαστάσεις πέρα από αυτήν.

Το δεύτερο μέρος του μυθιστορήματος, που τιτλοφορείται ως «Άλλοι Κόσμοι», καταλαμβάνεται από το όνειρο του αφηγητή σ’ έναν μονοδιάστατο χώρο, σε ένα μέρος όπου δεν έβλεπε τίποτα, παρά μόνο ένα ευθύγραμμο τμήμα που εκτεινόταν από τον Βορρά προς τον Νότο, που ονομάζεται Γραμμοχώρα. Ένα κομμάτι του ευθύγραμμου τμήματος παρουσιάζεται ως ο Βασιλιάς της Γραμμοχώρας. Η συνάντηση του Τετραγώνου με τον Βασιλιά χρησιμεύει ως μια κριτική διερεύνηση της αντίληψης περί διαστάσεων και των περιορισμών που υποθάλπουν. Η εμπειρία του Τετραγώνου στη Γραμμοχώρα, στην οποία και γίνεται αντιληπτός από τον Βασιλιά ως μια ασώματη φωνή, καταδεικνύει τους βαθύτατους περιορισμούς που ενυπάρχουν σε μία μονοδιάστατη αντίληψη. Ο Βασιλιάς, με ένα μάτι σε κάθε άκρο του γραμμικού του βασιλείου, είναι ικανός να αντιλαμβάνεται μόνο τα γειτονικά σημεία, περιορίζοντας όλες τις οπτικές του εμπειρίες σε απλές κουκκίδες. Η αδυναμία του Βασιλιά να κατανοήσει την έννοια μιας πραγματικότητας πέρα από τον γραμμικό του κόσμο παραλληλίζει την ανθρώπινη δυσκολία να αντιληφθούμε διαστάσεις πέρα από την τρισδιάστατη εμπειρία

μας. Ένα οξύ σχόλιο περί των αντιληπτικών περιορισμών που αντιμετωπίζουν τα όντα εντός μιας συγκεκριμένης διάστασης.

Η εισαγωγή από τον Ευκλείδη της έννοιας της γραμμής ως «μέγεθος χωρίς πλάτος» σηματοδοτεί ένα εννοιολογικό θεμέλιο στην κατανόηση της πρώτης διάστασης. Ενώ ο Αριστοτέλης συνέδεσε την έννοια της «γραμμής» με τη «διάσταση», ο Ευκλείδης, στα «Στοιχεία» του, δεν χρησιμοποιεί ρητά τον όρο «διάσταση», αν και αναφέρεται σε «μήκος, πλάτος και βάθος» (Κ.Ε. ΕΠ. ΕΚ., 2001). Η ερμηνεία του Abbott για τη διάσταση ως «κατεύθυνση, μέτρηση και δυνατότητα σύγκρισης» ξεπερνώντας τα όρια της παραδοσιακής ευκλείδειας γεωμετρίας, θέτει θεμελιώδη ερωτήματα σχετικά με την κατανόηση του χώρου. Η απόκλιση αυτή είναι εμφανής στον τρόπο με τον οποίο διερευνά την αντίληψη των κατοίκων της Γραμμοχώρας: εξαιτίας της περιορισμένης οπτικής τους αντιληπτικής ικανότητας, οι κάτοικοι έχουν αναπτύξει μια αυξημένη αίσθηση της ακοής για να μπορούν να κρίνουν τις αποστάσεις και το μέγεθος του άλλου, όπως ακριβώς οι άνθρωποι επεξεργάζονται τις ιδιότητες του εκάστοτε ήχου, ώστε να ερμηνεύσουν τον χώρο γύρω τους.

Το Τετράγωνο επιχειρεί να εξηγήσει τις δισδιάστατες έννοιες στον Βασιλιά, αλλά οι προσπάθειες του συναντούν τη ματαίωση και την εχθρότητα -αντιδράσεις που συμβολίζουν τις εγγενείς δυσκολίες στην κατανόηση προοπτικών πέρα από την εμπειρία των διαστάσεων του καθενός. Σε αυτό το σημείο, γεννάται η απορία, κατά πόσο ο χώρος που ζούμε μπορεί να θεωρηθεί πραγματικός αλλά και πού βρίσκονται τα όρια εκείνου. Τελικά, ο αφηγητής πηγαίνει τόσο μακριά, με αποτέλεσμα να απομακρύνεται εντελώς από το ευθύγραμμο τμήμα και από τα μάτια του Βασιλιά. Το Τετράγωνο συνεχίζει να μιλάει κάνοντας τον Βασιλιά να αναρωτιέται από πού ακούγεται, γεγονός που τον εξοργίζει και επιτίθεται στον αφηγητή, ο οποίος ξυπνά πίσω στην Επιπεδοχώρα.

Μία αξιοσημείωτη σκηνή, που λαμβάνει χώρα στην Επιπεδοχώρα, είναι όταν το Τετράγωνο, θυμωμένο, στέλνει τον εγγονό του για ύπνο, ο οποίος τοποθετήθηκε αναφορικά στην τρίτη διάσταση, χρησιμοποιώντας την αλγεβρική παράσταση τρία στον κύβο (3^3). Το συγκεκριμένο αφηγηματικό στιγμιότυπο γεφυρώνει έξυπνα την άλγεβρα με τη γεωμετρία, δείχνοντας πώς οι μαθηματικές έννοιες ξεπερνούν την αφηρημένη φύση τους για να εκδηλωθούν στη χωρική αντίληψη. Η αλγεβρική παράσταση 3^3 ισούται με 27, και μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά: ένας κύβος με κάθε πλευρά του να μετράει τρεις ίντσες, θα περιλάμβανε τον όγκο 27 κυβικών ιντσών.

Στη συνέχεια, το Τετράγωνο ακούει μια φωνή, ως ηχώ, που ανακοινώνει στο Τετράγωνο ότι ο ισχυρισμός του εγγονού του για το 3^3 εμπεριέχει ένα σημαντικό γεωμετρικό νόημα που δεν έχει ακόμη κατανοήσει. Η συνάντηση του Τετράγωνου με τη φωνή, που ανήκει στη Σφαίρα, είναι μια στιγμή βαθιάς σύγχυσης και έκπληξης. Το Τετράγωνο παρατηρεί μια οντότητα που αλλάζει γρήγορα σχήμα, ξεκινώντας ως κουκκίδα, στη συνέχεια εκτείνεται σε μια γραμμή και συνεχώς επεκτείνεται, παρουσιάζοντας ένα ακατανόητο θέαμα στο Τετράγωνο. Το τρισδιάστατο σχήμα της, χωρίς ευδιάκριτες πλευρές ή γωνίες, είναι κάτι που το Τετράγωνο δεν έχει συναντήσει ποτέ και δεν μπορεί να κατανοήσει. Η είσοδος της Σφαίρας στην Επιπεδοχώρα συμβολίζει την εισβολή μιας πραγματικότητας υψηλότερων διαστάσεων σε έναν κόσμο χαμηλότερων διαστάσεων. Το Τετράγωνο αρχικά επιδεικνύει μια μαχητική στάση, αρνούμενο να πιστέψει τα λόγια της Σφαίρας, αποτελώντας, πιθανόν, ένα κριτικό σχόλιο του συγγραφέα για τη νοοτροπία των ακλόνητων κομφορμιστών που αντιστέκονται στις καινοτομίες στην επιστήμη, την κοινωνία και την εκπαίδευση. Ο Abbot χρησιμοποιεί τη συνάντηση του Τετραγώνου με τη Σφαίρα ως μεταφορά για τον αγώνα να κατανοήσουμε το Θείο ή το άγνωστο. Αναδεικνύει τη δυσκολία αποδοχής εννοιών που βρίσκονται έξω από την τρέχουσα κατανόηση ή εμπειρία κάποιου. Το ταξίδι του Τετραγώνου από τη δυσπιστία στον σεβασμό μετά την αναγνώριση της τέλειας κυκλικότητας της Σφαίρας, συμβολίζει το ευρύτερο

ανθρώπινο ταξίδι από την άγνοια στη διαφώτιση. Η Σφαίρα, περιγράφοντας τον εαυτό της ως μια στερεή μορφή που αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό κύκλων διαφορετικών μεγεθών, αντιπροσωπεύει μια πραγματικότητα πολύ πέρα από τη δισδιάστατη κατανόηση του Τετραγώνου. Ωστόσο, βλέποντας την αδυναμία του Τετραγώνου να κατανοήσει αυτή την έννοια, η Σφαίρα επιλέγει να οδηγήσει το Τετράγωνο προς την κατανόηση, μέσω μιας εξελικτικής διαδικασίας: από το σημείο στη γραμμή, στο τετράγωνο και έπειτα, πέρα από αυτό.

Το ταξίδι των δύο πρωταγωνιστών στη Σημειοχώρα, σε ένα μηδενικής διάστασης πεδίο, στην αρχή των πάντων, εισάγει μια μοναδική οντότητα που αντιλαμβάνεται τον εαυτό της ως το μοναδικό και τέλειο ον. Η αφήγηση εδώ εμβαθύνει σε θέματα, όπως ο φόβος του αγνώστου, η αναζήτηση της γνώσης και η ένταση μεταξύ συναισθήματος και λογικής. Τα παραπάνω θέματα προκαλούν τους αναγνώστες να αναλογιστούν την ύπαρξη και τη φύση μιας αυτόνομης αλήθειας. Η Σημειοχώρα, που κατοικείται από ένα μοναχικό ον, χρησιμεύει ως μεταφορά για τον ακραίο σολιψισμό και τους περιορισμούς μιας περιχαρακωμένης νοοτροπίας. Ο κάτοικος της Σημειοχώρας, ο οποίος αδυνατεί να συλλάβει οτιδήποτε πέρα από τη μοναδική του οπτική γωνία, συμβολίζει τους κινδύνους της πνευματικής απομόνωσης και της άρνησης να αναγνωριστεί η ύπαρξη άλλων προοπτικών και διαστάσεων. Η προσπάθεια της Σφαίρας να διαφωτίσει το Τετράγωνο, που έχει επιλεγεί ως ο Μεσσίας της τρίτης διάστασης, οδηγεί σε μια στιγμή απογοήτευσης. Στο πλαίσιο των άκαμπτων κοινωνικών κανόνων, το Τετράγωνο εκλαμβάνει τα λόγια της Σφαίρας ως βλασφημία, αντανακλώντας τις προκλήσεις που αντιμετωπίζει κανείς όταν εισάγει επαναστατικές ιδέες σε ένα συντηρητικό περιβάλλον. Όπως και το ίδιο αναφέρει: «ένας απερίγραπτος τρόμος με κυρίευσε. Στην αρχή ήταν σκοτάδι. Μετά μια θολή εικόνα που μου έφερνε ίλιγγο και ζάλη. Έβλεπα και όμως δεν έβλεπα. Είδα μια Γραμμή που δεν ήταν Γραμμή, Χώρο που δεν ήταν Χώρος. Ήμουν εγώ και όμως δεν ήμουν» (119).

Η προσπάθεια της Σφαίρας να εξηγήσει τα στερεά στο Τετράγωνο περιλαμβάνει την κατασκευή ενός κύβου με τη χρήση πολλαπλών τετραγώνων. Η Σφαίρα στοιβάζει τα τετράγωνα για να σχηματίσει ένα σχήμα με έξι όμοιες πλευρές και οκτώ γωνίες. Το Τετράγωνο ενθουσιασμένο με την ιδέα του να είναι ο προπομπός ενός τόσο πολύπλοκου αντικειμένου, μεταπίπτει στη συνέχεια σε περιέργεια για τις διαστάσεις που είναι ακόμη πιο τέλειες από τη Σφαίρα και για το τί θα μπορούσε να συνεπάγει η ύπαρξης μίας τέταρτης διαστάσεως. Η μαθηματική μετάβαση από το 3^3 (27) στο 3^4 (81) χρησιμοποιείται για να νοηματοδοτήσει διαστάσεις πέρα από την εμπειρία του Τετραγώνου. Εντούτοις, ενώ η έννοια της τέταρτης διάστασης είναι αλγεβρικά εύλογη, παραμένει γεωμετρικά ασύλληπτη. Ακριβώς όπως ένας κύβος αντιπροσωπεύει την τρίτη διάσταση αλλά δεν μπορεί να απεικονιστεί πλήρως σε δύο διαστάσεις, η τέταρτη διάσταση, αν και αλγεβρικά αναπαραστάσιμη, δεν μπορεί να αποδοθεί ολοκληρωμένα στον τρισδιάστατο χώρο.

Όταν ξυπνάει στο κρεβάτι του, το Τετράγωνο, έχει επηρεαστεί βαθιά από τη νεοαποκτηθείσα κοσμική αλήθεια για τις ανώτερες διαστάσεις. Επιχειρεί να μοιραστεί αυτή την αποκάλυψη με τους ηγέτες της κοινωνίας του, ωστόσο, οι προσπάθειές του αντιμετωπίζονται με απόρριψη και δυσπιστία. Το Τετράγωνο κρίνεται τελικά ως παράφρων από την κοινωνία της Επιπεδοχώρας, η οποία δεν είναι πρόθυμη να δεχτεί την ύπαρξη μιας τρίτης διάστασης. Μια τέτοια αναγνώριση θα διέλυε ριζικά την καθιερωμένη κοινωνική ιεραρχία και το status quo της κοινωνικής της δομής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η Επιπεδοχώρα, λόγω του μείγματος μαθηματικών και φανταστικών στοιχείων, ορίζεται κυρίως ως ένα “jeu d’esprit” (Book Review, 1884b: 449), ως μία μαθηματικότροπη αφήγηση που αμφισβητεί και επεκτείνει την κατανόηση της πραγματικότητας, χρησιμοποιώντας επιστημονικά αληθοφανείς εναλλακτικούς κόσμους για τη διερεύνηση σύνθετων εννοιών,

όπως εκείνων σχετικά με τη διάσταση. Πέρα από μια κοινωνική σάτιρα επί της Βικτωριανής περιόδου και έργο φιλοσοφικής άσκησης, το βιβλίο του Abbott παρουσιάζεται ως μια χρήσιμη αναλογία για τους μοντέρνους αναγνώστες, έτσι ώστε να μπορέσουν να κατανοήσουν τις χωρικές προοπτικές. Προσεγγίζοντας την τρίτη διάσταση, διαμέσου της δεύτερης, η Επιπεδοχώρα παρουσιάζει όχι μόνο τη δυσκολία, αλλά και την αδυναμία οραματισμού μιας υψηλότερης διάστασης. Η έννοια αυτή προκαλεί κριτική σκέψη σχετικά με τη φύση των διαστάσεων πέρα από την άμεση εμπειρία μας και μάλιστα, θέτει ενδιαφέροντα ερωτήματα: Μπορούμε πραγματικά να αντιληφθούμε μια ανώτερη διάσταση χωρίς εμπειρικές αποδείξεις; Ποια είναι η πραγματική γεωμετρική δομή του Σύμπαντος στο οποίο κατοικούμε; Είναι δυνατόν να υπάρχουμε σε μια τετραδιάστατη σφαίρα;

Το κείμενο μάς ωθεί να αναρωτηθούμε για τη φύση της πραγματικότητας και για το τί συνιστά αλήθεια. Αντανακλά τη φιλοσοφική διαμάχη μεταξύ των εμπειριστών, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι κάθε άτομο ερμηνεύει υποκειμενικά το περιβάλλον του, και των ορθολογιστών, οι οποίοι πιστεύουν ότι μόνο η λογική και όχι η εμπειρία μπορεί να οδηγήσει στην αλήθεια, καθώς η εμπειρία είναι εγγενώς αλάνθαστη. Αυτό το θέμα του κειμένου συντονίζεται με τις ευρύτερες επιστημονικές και φιλοσοφικές συζητήσεις της εποχής του, ιδίως όσον αφορά τη φύση του χώρου και της πραγματικότητας. Μία αφήγηση που αποτελεί μεταφορική εξερεύνηση των γνωστικών και αντιληπτικών μας ορίων, υποδηλώνοντας ότι υπάρχουν διαστάσεις της πραγματικότητας που δεν έχουν ακόμη ανακαλυφθεί και κατανοηθεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abbott, E.A. (1999). Flatland: Η Επιπεδοχώρα. (μτφ: Μοράκη Φ.). Αιώρα.

Banchoff, T.F. (1990). From Flatland to Hypergraphics: Interacting with Higher Dimensions. *Interdisciplinary Science Reviews, 15(*4), 364-372.

Banchoff, T.F. (1991). *Flatland: A New Introduction, in Abbott E.A., Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Princeton University Press.

Book Review (1884a). *Athenaeum, 2977,* 662.

Book Review (1884b). *Knowledge, 6,* 449.

Carluccio C. (2015). La complessità del diverso nella piattezza di Flatland. *Lingue Linguaggi,13,* 55-74. DOI 10.1285/i22390359v13p55

Gilbert, E. (1991). 'Upward, Not Northward': Flatland and the Quest for the New. *English Literature in Translation, 34*(4), 391–404.

Henderson, A. (2009). Math for Math's Sake: Non-Euclidean Geometry, Aestheticism, and Flatland. *PMLA, 124* (2), 455–471.

Jann R. (1985). Abbott's "Flatland": Scientific Imagination and "Natural Christianity. *Victorian Studies, 28*(3), 473-490.

Κέντρο Έρευνας Επιστήμης Και Εκπαίδευσης (2001). *Ευκλείδη «Στοιχεία»: Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό, τόμ: Ι, Η γεωμετρία του Επιπέδου*, Βιβλία Ι,ΙΙ,ΙΙΙ,ΙV,V,VI. Κ.Ε. ΕΠ.ΕΚ.

LeTME: Department of Early Childhood Studies (2018). "*FLATLAND: Mathematical fiction on gender stereotypes*". Project: Expanding the use of the 'Gender Equality Charter Mark for Schools' across Europe. University of Thessaly.

Smith J. (1994). *Fact & Feeling: Baconian Science and the Nineteenth-Century Literary Imagination.* The University of Wisconsin Press.

Smith J., Berkove L.I. & Baker G.A. (1996). A Grammar of Dissent: "Flatland", Newman, and the Theology of Probability. *Victorian Studies, 39*(2), 129-150.

Smith, V. M. (2018). Edwin Abbott's Flatland and Victorian Anthropology. *Journeys*, *19*(2), 44-66. https://doi.org/10.3167/jys.2018.190203

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Σωτήριος Κατσομήτρος, Κωνσταντίνος Τάτσης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

s.katsomitros@uoi.gr, ktatsis@uoi.gr

Σκοπός της εργασίας είναι ο εντοπισμός ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των μαθηματικών δραστηριοτήτων που σχεδίασε μία εκπαιδευτικός Ε΄ Δημοτικού με απώτερο στόχο την προετοιμασία των μαθητών της για τη μαθηματική μετάβαση στο Γυμνάσιο. Η εκπαιδευτικός συμμετείχε σε ένα πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης εστιασμένο στην μετάβαση στα μαθηματικά από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Η ανάλυσή μας επικεντρώθηκε στη διαδικασία κατασκευής προβλήματος. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν την σημασία ενός πλαισίου που παρακινεί τους μαθητές, την γνωστική πολυπλοκότητα, αλλά και την εναρμόνιση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα ως σημαντικά χαρακτηριστικά της προετοιμασίας μαθητών για τη μετάβαση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μετάβαση στα μαθηματικά από την Πρωτοβάθμια στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει απασχολήσει ποικιλοτρόπως τον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Έρευνες προσεγγίζουν την μαθηματική μετάβαση υπό την οπτική των γνώσεων των εκπαιδευτικών (O'Meara et al., 2020), την συνοχή των αναλυτικών προγραμμάτων (Nicolescu & Petrescu, 2015) και την εμπειρία των εμπλεκομένων μερών (Paul, 2014). Πλέον, οι σύγχρονες ερευνητικές προσεγγίσεις σχετικά με τη μετάβαση επικεντρώνονται στη δημιουργία θεωρητικών πλαισίων (Cantley et al., 2021), αλλά και προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Fernandez & Anhalt, 2001). Στην τελευταία κατηγορία ανήκει και η παρούσα έρευνα.

Στο πλαίσιο του σχεδιασμού και της υλοποίησης ενός προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης, που στηρίζεται στον σχεδιασμό και εφαρμογή μαθηματικών δραστηριοτήτων για την προετοιμασία των μαθητών Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού για την επερχόμενη μετάβαση, ανήκει και η παρούσα εργασία. Θεωρώντας ότι η προετοιμασία των μαθητών του Δημοτικού για τη μαθηματική τους μετάβαση στο Γυμνάσιο εντοπίζεται κυρίως στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού (και όχι αποκλειστικά στη Στ΄ Δημοτικού), εστιάζουμε σε μία εκπαιδευτικό Ε΄ Δημοτικού. Επικεντρωνόμαστε στις μαθηματικές δραστηριότητες που προκύπτουν μέσα από την συμμετοχή της στο πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης, ώστε να διαπιστώσουμε χαρακτηριστικά αυτών που ενδεχομένως θα προετοιμάσουν τους μαθητές της για μια ομαλή μετάβαση στο Γυμνάσιο. Είναι γνωστό ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν σημαντικό ρόλο και επιρροή στο

μαθηματικό πέρασμα από τη πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Coffey, 2013; Hanewald, 2013) και οι μαθητές, ήδη από το Δημοτικό, προτείνεται να αρχίζουν να προετοιμάζονται περισσότερο αυτόνομα με πιο απαιτητικές στρατηγικές μάθησης, τις οποίες θα συναντήσουν αργότερα στο Γυμνάσιο (McGee et al., 2004).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η κατασκευή προβλήματος αποτελεί τη βάση του προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης που υλοποιήσαμε. Την κατασκευή προβλήματος την αντιλαμβανόμαστε ως:

> … μερικούς συναφείς τύπους δραστηριότητας (activity) που συνεπάγονται ή υποστηρίζουν δασκάλους και μαθητές να διατυπώνουν (ή να αναδιατυπώνουν) και να εκφράζουν ένα πρόβλημα ή ένα έργο (task) με βάση ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (Cai & Hwang, 2020, σελ. 2).

Συνεπώς, ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει τον ρόλο του «σχεδιαστή», καθώς επιλέγει, τροποποιεί, εφαρμόζει και αξιολογεί διδακτικά υλικά/έργα στην διδασκαλία του (Brown, 2009).

Το επόμενο βήμα σε μια διαδικασία σχεδιασμού είναι η αξιολόγηση των έργων που έχουν σχεδιαστεί. Επικεντρώνοντας λοιπόν στις μαθηματικές δραστηριότητες, υιοθετούμε το θεωρητικό πλαίσιο Framework for Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE) (Leavy & Hourigan, 2022). Το F-PosE αποτελείται από οκτώ δείκτες και στοχεύει στην υποστήριξη εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κατά την αξιολόγηση και επιλογή μαθηματικών προβλημάτων για την διδασκαλία τους.

Δείκτης 1:	<u>Χρήση πλαισίου που παρακινεί και εμπλέκει</u> (π.χ. Οι μαθητές κατασκευάζουν προσωπικό νόημα μέσα από την κατάσταση/πλαίσιο του προβλήματος; Είναι το πλαίσιο του προβλήματος ελκυστικό για τους μαθητές;)
Δείκτης 2:	<u>Σαφήνεια στη γλώσσα και το πολιτισμικό πλαίσιο</u> (π.χ. Γίνεται προσιτή η γλώσσα και η ορολογία με βάση το αναγνωστικό επίπεδο των μαθητών; Είναι το πλαίσιο του προβλήματος πολιτισμικά οικείο/προσβάσιμο στους μαθητές;)
Δείκτης 3:	<u>Συνοχή σε σχέση με το Αναλυτικό Πρόγραμμα</u> (π.χ. Απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος η κατανόηση μαθηματικού περιεχομένου, το οποίο ευθυγραμμίζεται σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα;)

Δείκτης 4:	Εστίαση σε γνωστικές απαιτήσεις (π.χ. Οι μαθητές εμπλέκονται σε σύνθετες στρατηγικές σκέψης και συλλογισμού, όπως η μετα-ανάλυση, η αιτιολόγηση, η εικασία και η επίλυση προβλήματος;)
Δείκτης 5:	Κατάλληλος αριθμός βημάτων επίλυσης για την ενίσχυση της αιτιολόγησης (π.χ. Απαιτούνται περισσότερα από ένα βήματα επίλυσης;)
Δείκτης 6:	Ποικιλία στρατηγικών επίλυσης (π.χ. Παρουσιάζεται μία κατάσταση, όπου η στρατηγική επίλυσης να μην είναι αμέσως εμφανής;)
Δείκτης 7:	Διευκόλυνση πολλαπλών λύσεων (π.χ. Το πρόβλημα έχει παραπάνω από μία σωστή λύση;)
Δείκτης 8:	Ευκαιρία για επιτυχία (π.χ. Υπάρχει ένα τμήμα του προβλήματος που είναι εύκολα επιλύσιμο από όλους τους μαθητές;)

Πίνακας 1: Δείκτες του θεωρητικού πλαισίου F-PosE (Leavy & Hourigan, 2022)

Συγκεντρωτικά, το ερευνητικό μας ερώτημα είναι: Ποια χαρακτηριστικά (του F-PosE) εμφανίζονται κατά την διαδικασία της κατασκευής προβλήματος μιας εκπαιδευτικού αναφορικά με τη μαθηματική μετάβαση;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο Έρευνας-Συμμετέχουσα

Η έρευνά μας αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης (Yin, 1994). Η Μαρία (ψευδώνυμο) τη δεδομένη στιγμή ήταν εκπαιδευτικός της Ε΄ τάξης με συνολικά 38 χρόνια προϋπηρεσίας. Επιλέχθηκε, καθώς θεωρείται έμπειρη εκπαιδευτικός. Ειδικότερα, στην επαγγελματική της πορεία είχε συνολικά 13 χρόνια ως εκπαιδευτικός Ε΄και Στ΄ τάξης, εκ των οποίων την τελευταία πενταετία ήταν 3 φορές εκπαιδευτικός της Στ΄ Δημοτικού.

Το πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης που συμμετείχε είχε διάρκεια 8 μηνών και περιλάμβανε τρεις φάσεις. Η πρώτη αφορούσε τη σκιαγράφηση του προφίλ της ως εκπαιδευτικού και οι απόψεις/γνώσεις της σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση και μετάβαση. Η δεύτερη φάση περιλάμβανε τέσσερις διαδοχικούς κύκλους (σχολιασμός και επιλογή μαθηματικών δραστηριοτήτων από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης κ.ά., 2012) σε συγκεκριμένες γνωστικές περιοχές για πιθανή εφαρμογή στην Ε΄/ Στ΄ Δημοτικού, τροποποίηση μερικών αν κρίνεται αναγκαίο και σχεδιασμός νέων μαθηματικών δραστηριοτήτων

στο πλαίσιο της μετάβασης). Παράλληλα, στη φάση αυτή σε κάθε διαδοχικό κύκλο, η εκπαιδευτικός έρχονταν σε επαφή με ερευνητικά πορίσματα σχετικά με τη μαθηματική μετάβαση και την κατασκευή προβλήματος (π.χ. Δείκτες του F-PosE των Leavy & Hourigan (2022)), τα οποία συζητούσε μαζί με τον ερευνητή (ο πρώτος συγγραφέας) στο πλαίσιο της εφαρμογής του προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης. Η τρίτη φάση περιλάμβανε τον σχεδιασμό, την υλοποίηση στην τάξη και τον αναστοχασμό τεσσάρων διδασκαλιών (ένα για κάθε κύκλο της δεύτερης φάσης) που θα προετοιμάζουν τους μαθητές για τη μαθηματική μετάβαση.

Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης

Στην συγκεκριμένη εργασία επικεντρωνόμαστε στα κλάσματα, καθώς αποτελεί μία κοινή διδακτική περιοχή των Ε΄, Στ΄ και Α΄ Γυμνασίου με βάση το Διαθεματικό Ενιαίο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003). Τα δεδομένα μας προέρχονται από τις παρακάτω συνεντεύξεις του προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης που σχεδιάσαμε:

1. εισαγωγική συνέντευξη σχετικά με απόψεις και γνώσεις για την μαθηματική μετάβαση και μαθηματική εκπαίδευση ευρύτερα
2. συνέντευξη με επίκεντρο το σχολιασμό και επιλογή κατάλληλων ασκήσεων στα κλάσματα από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου στο πλαίσιο της μετάβασης, συνέντευξη που αφορά την κατασκευή προβλημάτων για τα κλάσματα και οι αντίστοιχες μαθηματικές δραστηριότητες και από τις δύο συνεντεύξεις
3. συνέντευξη σχεδιασμού διδασκαλίας στα κλάσματα, συνέντευξη μετά τη διδασκαλία, μαθηματικές δραστηριότητες της διδασκαλίας, ηχητική καταγραφή μαζί με σημειώσεις πρώτου ερευνητή κατά τη διδασκαλία και τελική συνέντευξη του προγράμματος.

Όλες οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν από τον ερευνητή, ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν.

Η μελέτη μας επικεντρώθηκε στη διαδικασία κατασκευής προβλήματος της Μαρίας, καθώς και στις αιτιολογήσεις που αφορούν τις μαθηματικές δραστηριότητές της. Η εκπαιδευτικός κατά τη διαδικασία της κατασκευής προβλήματος είχε έρθει σε επαφή με τους Δείκτες του F-PosE (Leavy & Hourigan, 2022) και είχε την δυνατότητα να τους λάβει υπόψιν της σε όλη αυτή την διαδικασία εφόσον το έκρινε σκόπιμο. Η ανάλυση των μαθηματικών δραστηριοτήτων βασίστηκε στους δείκτες του F-PosE (Leavy & Hourigan, 2022). Παράλληλα, θεματική ανάλυση (Braun & Clarke, 2022) πραγματοποιήθηκε στις συνεντεύξεις της εκπαιδευτικού με στόχο τον εντοπισμό ευρύτερων κατηγοριών στις αιτιολογήσεις της που σχετίζονται και με τους δείκτες του F-PosE στο πλαίσιο της μαθηματικής μετάβασης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η Μαρία στην αρχική της συνέντευξη ανέφερε τα εξής:

> Μπορούμε μέσα από μία μαθηματική δραστηριότητα να έχουμε μία κατάλληλη προετοιμασία για το Γυμνάσιο… Ιδιαίτερα στα κλάσματα, όπου οι διδακτικοί στόχοι στην Ε΄ και Στ΄ είναι παρόμοιοι με του Γυμνασίου.

Σχετικά με τα κλάσματα πρότεινε 20 μαθηματικές δραστηριότητες από το σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου (αυτούσιες ή με τροποποιήσεις) και σχεδίασε 22 δικές της μαθηματικές δραστηριότητες, οι οποίες πίστευε ότι θα ήταν κατάλληλες για να προετοιμάσουν τους μαθητές της για την επερχόμενη μετάβαση. Τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας, φανερώνουν ότι η Μαρία κατά την διαδικασία κατασκευής προβλήματος φαίνεται συνήθως να χρησιμοποιεί/προτείνει ένα πλαίσιο που παρακινεί και εμπλέκει τους μαθητές της (Δείκτης 1), να συνυπολογίζει την συνοχή του Αναλυτικού Προγράμματος (Δείκτης 3) και να εστιάζει στις γνωστικές απαιτήσεις των μαθηματικών δραστηριοτήτων (Δείκτης 4), ως στοιχεία που θα ευνοούσαν την προετοιμασία των μαθητών της για το Γυμνάσιο. Παρακάτω στον Πίνακα 2, παραθέτουμε ορισμένες μαθηματικές δραστηριότητες που σχεδίασε η Μαρία στην τρίτη φάση του προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης που συμμετείχε.

Δραστηριότητα 1: Βρίσκω ποιο στοιχείο από τα δεδομένα του προβλήματος είναι περιττό και έπειτα λύνω το πρόβλημα: Μια παρέα βγήκε βόλτα 3 φορές αυτή τη βδομάδα και κατανάλωσε $\frac{4}{5}$ του κιλού παγωτό. Κάθε μέλος της παρέας έφαγε $\frac{1}{10}$ του κιλού παγωτό. Πόσα άτομα είχε η παρέα;
Δραστηριότητα 2: Βρίσκω ποιος από τους δύο έχει δίκιο: Κατά τη διάρκεια μιας αγωνιστικής περιόδου, μια ποδοσφαιρική ομάδα (στην οποία συμμετείχαν ο Κώστας και ο Μηνάς) έφερε ισοπαλία στα $\frac{3}{10}$ των αγώνων που έδωσε κι έχασε το $\frac{1}{5}$ των αγώνων. Αν η ομάδα είχε 12 ισοπαλίες, πόσες ήταν οι ήττες της; Ο Κώστας υποστηρίζει πως ήταν 8 ενώ ο Μηνάς πως ήταν 10. Ποιος έχει δίκιο; Γιατί;
Δραστηριότητα 3: Συμπληρώνω τα δύο ζητούμενα που μπορεί να έχει το παρακάτω πρόβλημα και έπειτα τα λύνω: Η Εβελίνα ρώτησε τα παιδιά του σχολείου της αν κάνουν κάποιο άθλημα. Τα $\frac{7}{9}$ των παιδιών απάντησαν «ΝΑΙ» και τα υπόλοιπα 48 παιδιά απάντησαν «ΟΧΙ». α) ……. β) …….

Πίνακας 2: Σχεδιασμένες μαθηματικές δραστηριότητες

Παρατηρούμε ότι και οι τρεις μαθηματικές δραστηριότητες έχουν ένα πλαίσιο (κατανάλωση παγωτού, ποδοσφαιρικοί αγώνες, έρευνα σε μαθητές σχολείου) που αναμένεται να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών (Δείκτης 1) και κατά συνέπεια μπορεί να θεωρηθεί ελκυστικό για

την επίλυσή τους. Η ίδια στην πρώτη συνέντευξη της δεύτερης φάσης διατείνεται ότι:

> …είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν με την επίλυση ενός προβλήματος, διότι έτσι διαπιστώνω αν έχουν εμπεδώσει τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκω σ΄ ένα πλαίσιο πιο κοντά στην καθημερινή τους ζωή.

Ταυτόχρονα, σημαντική παράμετρος για τον σχεδιασμό της είναι και οι γνωστικές απαιτήσεις κάθε μαθηματικής δραστηριότητας. Η Μαρία στην αρχική της συνέντευξη αναφέρει ότι επιθυμεί οι μαθητές της:

> … να έχουν εξασκηθεί επαρκώς στην μαθηματική σκέψη μέσω πιο πολύπλοκων γνωστικά δραστηριοτήτων, ώστε να προχωρήσουν με άνεση στο Γυμνάσιο.

Η ίδια αναγνωρίζει ότι ο διαχωρισμός/ αφαίρεση του περιττού δεδομένου (δραστηριότητα 1), η κρίση δύο εν δυνάμει απαντήσεων, τεκμηριώνοντας την σωστή ή απορρίπτοντας την λανθασμένη (δραστηριότητα 2) και η κατασκευή και επίλυση ερωτημάτων εντός μιας αρχικής κατάστασης/πλαισίου (δραστηριότητα 3) αποτελούν απαιτητικές γνωστικές διεργασίες που επιθυμεί να καλλιεργήσει στους μαθητές της, γιατί θα τις χρειαστούν στην επόμενη βαθμίδα εκπαίδευσης. Αναλυτικότερα για την δραστηριότητα 1, η Μαρία τονίζει στην συνέντευξη της τρίτης φάσης μετά τη διδασκαλία της:

> Πιστεύω ότι είναι μία καλή μαθηματική δραστηριότητα για την προετοιμασία των μαθητών μου για το Γυμνάσιο. Δεν είναι ένα «τυπικό» πρόβλημα σαν αυτά που έχουν συνηθίσει. Χρειάζεται κριτική ικανότητα (για να βρουν το περιττό δεδομένο), η οποία θα τους φανεί χρήσιμη στο Γυμνάσιο.

Ταυτόχρονα, η Μαρία χαρακτηρίζει και την δραστηριότητα 3, ως μία «μη τυπική» δραστηριότητα για τους μαθητές της Ε΄ Δημοτικού, γιατί δεν είναι οι μαθητές αρκετά εξοικειωμένοι με την κατασκευή προβλήματος. Πιο αναλυτικά, σχετικά με την τρίτη δραστηριότητα η εκπαιδευτικός υπογραμμίζει στην συνέντευξη της τρίτης φάσης:

> Η κατασκευή ερωτημάτων και η επίλυση αυτών από τους ίδιους τους μαθητές εξασκεί έναν πιο περίπλοκο τρόπο σκέψης, που καλό θα ήταν να αρχίζει να καλλιεργείται ήδη από το Δημοτικό, ως ένας τρόπος προετοιμασίας των μαθητών για το Γυμνάσιο.

Τέλος, η Μαρία προσπαθεί να ευθυγραμμίσει τα παραπάνω χαρακτηριστικά (Δείκτες 1, 4) με τους διδακτικούς στόχους της Ε΄ Δημοτικού και παράλληλα κρίνει ότι οι δραστηριότητές της (1, 2, 3) ανταποκρίνονται ταυτόχρονα και στους διδακτικούς στόχους της Στ΄ και Α΄ Γυμνασίου. Άρα, αναδύεται η προσπάθειά της για την συνοχή με το Αναλυτικό Πρόγραμμα (Δείκτης 3), ως σημαντικού παράγοντα για την προετοιμασία των μαθητών του Δημοτικού για τη μαθηματική μετάβαση

στο Γυμνάσιο, δεδομένου ότι οι σχεδιαζόμενες δραστηριότητές της (1,2,3) μπορούν να απευθυνθούν και στις τρεις αυτές τάξεις.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην συγκεκριμένη εργασία μελετήσαμε την κατασκευή προβλήματος της Μαρίας (εκπαιδευτικού Ε΄ Δημοτικού) στα κλάσματα υπό το πρίσμα της προετοιμασίας των μαθητών της κατά την μετάβαση στα μαθηματικά από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος μίας ευρύτερης έρευνας που αφορά την μαθηματική μετάβαση στα μαθηματικά στην Ελλάδα από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και απορρέει μέσα από την συμμετοχή της Μαρίας σε ένα πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης για το σκοπό αυτό. Πυρήνας αυτού του προγράμματος αποτέλεσε η διαδικασία της κατασκευής προβλήματος.

Για τον εντοπισμό των χαρακτηριστικών των μαθηματικών δραστηριοτήτων της εκπαιδευτικού στηριχθήκαμε στους οχτώ δείκτες του θεωρητικού πλαισίου F-PosE (Leavy & Hourigan, 2022). Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν ότι η χρήση ενός πλαισίου που παρακινεί και εμπλέκει τους μαθητές (Δείκτης 1), η εστίαση στις γνωστικές απαιτήσεις (Δείκτης 3) και στη συνοχή με το Αναλυτικό Πρόγραμμα (Δείκτης 4) των μαθηματικών δραστηριοτήτων φαίνεται να αναδύονται μέσα από την διαδικασία κατασκευής προβλήματος της Μαρίας.

Δεδομένου της εστίασης σε μία μόνο εκπαιδευτικό, δεν μπορούμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας. Ωστόσο, τα αποτελέσματα της εργασίας αναδεικνύουν την πολυπλοκότητα της κατασκευής προβλήματος κατά την μεταβατική περίοδο και τον ιδιαίτερο ρόλο που διαδραματίζει η μαθηματική δραστηριότητα για την προετοιμασία των μαθητών για την μαθηματική μετάβαση. Τα παραπάνω εναρμονίζονται με σχετικές έρευνες στον ελληνικό χώρο (Katsomitros & Tatsis, 2023). Κατά συνέπεια, κομβικός μπορεί να χαρακτηριστεί και ο ρόλος των εκπαιδευτικών κατά την μεταβατική περίοδο (Coffey, 2013; Hanewald, 2013), οι οποίοι επί της ουσίας επιλέγουν, κατασκευάζουν/τροποποιούν και εφαρμόζουν τις μαθηματικές δραστηριότητες κατά τη διδασκαλία.

Περαιτέρω έρευνα κρίνεται σκόπιμη. Περισσότεροι εκπαιδευτικοί της Ε΄ Δημοτικού προτείνεται να μελετηθούν και για περισσότερες μαθηματικές έννοιες του Αναλυτικού Προγράμματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2012). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Αθήνα, Ελλάδα: «Διόφαντος» Ινστιτούτο Τεχνολογίας, Υπολογιστών και Εκδόσεων.

Braun, V., & Clarke, V. (2022). Conceptual and design thinking for thematic analysis. *Qualitative Psychology, 9*(1), 3–26. https://doi.org/10.1037/qup0000196

Brown, M. W. (2009). The teacher-tool relationship. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17–36). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203884645

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and

directions for future research. *International Journal of Educational Research, 102*, 101391.

Cantley, I., O'Meara, N., Prendergast, M., Harbison, L., & O'Hara, C. (2021). Framework for analysing continuity in students' learning experiences during primary to secondary transition in mathematics. *Irish Educational Studies*, *40*(1), 37–49. https://doi.org/10.1080/03323315.2020.1779108

Coffey, A. (2013). Relationships: The key to successful transition from primary to secondary school?. *Improving Schools*, *16*(3), 261–271. https://doi.org/10.1177/1365480213505181

Fernandez, M. L., & Anhalt, C. O. (2001). Transition toward algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *7*(4), 236–241.

Hanewald, R. (2013). Transition between primary and secondary school: Why it is important and how it can be supported. *Australian Journal of Teacher Education (Online)*, *38*(1), 62–74.

Katsomitros, S., & Tatsis, K. (2023). Teachers' problem posing for facilitating mathematical transition from primary to secondary school. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 4159–4166). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Leavy, A., & Hourigan, M. (2022). The Framework for Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE): Supporting teachers to evaluate and select problems for use in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 111*(1), 147–176

McGee, C., Ward, R., Gibbons, J., & Harlow, A. (2003). Transition to secondary school: A literature review. *A Report to the Ministry of Education. Hamilton, University of Waikato, New Zealand*.

Nicolescu, B. N., & Petrescu, T. C. (2015). On the continuity mathematics curriculum between primary and secondary school. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 180*, 871–877. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.02.231

O'Meara, N., Prendergast, M., Cantley, I., Harbison, L., & O'Hara, C. (2020). Teachers' self-perceptions of mathematical knowledge for teaching at the transition between primary and post-primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(4), 497–519. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1589004

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. http://www.pi-schools.gr/programs/depps

Paul, M. (2014). Managing the transition from primary school mathematics to secondary school mathematics: Teachers' and learners' perspectives. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, *5*(25), 205–215.

Yin, R. K. (1994). Discovering the future of the case study method in evaluation research. *Evaluation Practice, 15*(3), 283–290. https://doi.org/10.1177/109821409401500309

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΤΡΑΠΕΖΙΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΔΙΚΗ ΔΙΑΠΑΙΔΑΓΩΓΗΣΗ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη & Γκιάτα Αντωνία

Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ., Πανεπιστήμιο Αιγαίου

kara@aegean.gr & antonia.giata@gmail.com

Η εκπαίδευση των παιδιών, από την πρώτη σχολική ηλικία, στα μαθηματικά και στην ασφαλή οδική συμπεριφορά αποτελούν δύο σημαντικούς πυλώνες της πολιτειότητας, η οποία στοχεύει στην ανάπτυξη ενός ενημερωμένου, αυτόνομου και υπεύθυνου μελλοντικού πολίτη. Στο πλαίσιο αυτό σχεδιάστηκε διαθεματικό επιτραπέζιο παιχνίδι για την καλλιέργεια της σωστής οδικής συμπεριφοράς, το οποίο συνδυάζει και στοιχεία μαθηματικών και απευθύνεται σε παιδιά πρώτης σχολικής ηλικίας. Η πειραματική πραγματοποίηση του παιχνιδιού, σε τμήματα νηπιαγωγείου, έδειξε ότι μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη ικανοτήτων αναγνώρισης της σωστής οδικής συμπεριφοράς και στην ανταπόκριση στα θέματα των μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει έντονη η τάση για εκπαίδευση στην πολιτειότητα. Εκπαίδευση δηλαδή στην οποία δίνεται χώρος και χρόνος στα παιδιά να συνειδητοποιήσουν τις ευθύνες τους ως μελλοντικοί πολίτες και να καλλιεργήσουν τις απαραίτητες ικανότητες και δεξιότητες για να ανταποκριθούν σε αυτές τις ευθύνες (Chee, Mehrotra & Liu, 2013). Δύο τομείς της πολιτειότητας, οι οποίοι συμβάλλουν στην απόκτηση κρίσιμων δεξιοτήτων και γνώσεων απαραίτητων για την ολοκληρωμένη ανάπτυξη ενός ατόμου και τη διαμόρφωσή του σε ενημερωμένο, αυτόνομο και υπεύθυνο μελλοντικό πολίτη, είναι, μεταξύ άλλων, η εκπαίδευση στα μαθηματικά και στην ασφαλή οδική συμπεριφορά.

Η σημασία των μαθηματικών στην εκπαίδευση των παιδιών, από την πρώτη σχολική ηλικία, αποτελεί σημαντικό κομμάτι της προετοιμασίας τους για το μέλλον και της συμμετοχής τους στην κοινωνία. Η ικανότητα των παιδιών να κατανοούν και να αντιμετωπίζουν προβλήματα στον τομέα των μαθηματικών είναι συχνά ένας ισχυρός προγνωστικός δείκτης αφενός για τη μελλοντική τους απόδοση σε ποικίλους γνωστικούς τομείς και αφετέρου για τον ρόλο τους ως μελλοντικών πολιτών. Η καλή επίδοση στα μαθηματικά σε μικρή ηλικία συνδέεται με τη μελλοντική ακαδημαϊκή και επαγγελματική επιτυχία (Parviainen, 2019).

Άλλο ζήτημα πρωταρχικής σημασίας για την εκπαίδευση στην πολιτειότητα, αποτελεί η αναγνώριση και υιοθέτηση σωστής οδικής συμπεριφοράς, για ποιοτική και ασφαλή ζωή, καθώς το μεγάλο πλήθος των οχημάτων και η συνεχώς αυξανόμενη κινητικότητα του πληθυσμού συνδέονται με τον πολλαπλασιασμό των ατυχημάτων και την απώλεια όλο και περισσότερων ανθρώπινων ζωών. Η συστηματική οδική διαπαιδαγώγηση από μικρή ηλικία, η οποία περιλαμβάνει ενημέρωση και ευαισθητοποίηση για τις βασικές αρχές ασφαλούς οδικής συμπεριφοράς, αποτελεί κομβικό στοιχείο στην αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος (Θεοδοσέλη, 2017· Κανελλαϊδης, Γίαννης, Βαρδάκη & Λαϊου, χχ).

Η εκπαίδευση στην οδική συμπεριφορά αποτελεί έναν από τους άξονες του μαθήματος της Αγωγής Υγείας και εμπεριέχεται στο κεφάλαιο 'Κυκλοφοριακή Αγωγή-Ατυχήματα', στα περιεχόμενα του οποίου αναφέρονται θέματα όπως η οδική συμπεριφορά πεζών-μαθητών, το κράνος και η ζώνη ασφαλείας, οι αρνητικές επιπτώσεις της χρήσης αλκοόλ πριν και κατά την οδήγηση, παιδιά στο αυτοκίνητο, καθώς και τι πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές ως ποδηλάτες, επιβάτες λεωφορείων, αεροπλάνων, πλοίων και άλλων μέσων μαζικής μεταφοράς (ΠΣΝ, 2014).

Η ενασχόληση στο σχολείο με τέτοιου είδους θέματα μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεξάρτητα ή σε συνδυασμό με άλλα γνωστικά αντικείμενα όπως τα μαθηματικά. Η προσέγγιση μαθηματικών θεμάτων μέσω πραγματικών καταστάσεων της καθημερινής ζωής ενισχύει τη συνειδητοποίηση της σημασίας τους, ενθαρρύνοντας τα παιδιά να χρησιμοποιούν τις μαθηματικές δεξιότητες τους στην πράξη και να αντιλαμβάνονται το υπό διαπραγμάτευση θέμα. Η διαθεματική αυτή προσέγγιση της μάθησης, για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων σε διάφορους τομείς της ζωής, μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω παιχνιδιών (Vogel, 2013· Σκουμπουρδή, 2015). Τα παιχνίδια, των οποίων η θετική επίδραση είναι αδιαμφισβήτητη (Chee, Mehrotra & Liu, 2013), μπορούν να αποτελέσουν ένα από τα εργαλεία για την εκπαίδευση στην πολιτειότητα.

Παρόλη τη σημασία των παραπάνω θεμάτων δεν υπάρχουν σχετικές έρευνες, οι οποίες να εξετάζουν συνδυαστικά τα παραπάνω ζητήματα. Με σκοπό τη διερεύνηση του αν μέσω του παιχνιδιού μπορεί να αναπτυχθεί η ικανότητα των μικρών παιδιών να αναγνωρίζουν τη σωστή οδική συμπεριφορά και να ανταποκρίνονται σε απλά μαθηματικά θέματα, σχεδιάστηκε και πραγματοποιήθηκε διαθεματικό επιτραπέζιο παιχνίδι για την οδική διαπαιδαγώγηση το οποίο συνδυάζει και στοιχεία μαθηματικών και απευθύνεται σε παιδιά πρώτης σχολικής ηλικίας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΕΠΙΤΡΑΠΕΖΙΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

Οι βασικές αρχές για τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη εκπαιδευτικού επιτραπέζιου παιχνιδιού βασίζονται σε εκείνες του σχεδιασμού και της ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού και συνδιαμορφώνονται από τρεις παραμέτρους (Σκουμπουρδή, 2023): 1) Τον σχεδιασμό του μετά από αποτίμηση της αναγκαιότητάς του, 2) Τον σχεδιασμό του με παιδαγωγική εγκυρότητα, καθώς και 3) Τον σχεδιασμό του με επιστημονική εγκυρότητα.

Η πρώτη παράμετρος (σχεδιασμός μετά από αποτίμηση της αναγκαιότητάς του), συνδιαμορφώνεται από την παράθεση των λόγων σχεδιασμού του νέου προϊόντος, καθώς και την τεκμηρίωση των διαφοροποιήσεών του από τα υφιστάμενα προϊόντα. Περιλαμβάνει δηλαδή στοιχεία για την αξιολόγηση της αναγκαιότητας δημιουργίας του, τη διερεύνηση, καταγραφή και αξιολόγηση των χαρακτηριστικών των παρόμοιων υφιστάμενων προϊόντων, των δυνατοτήτων και των ορίων χρήσης τους, καθώς και στοιχεία για τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του νέου προϊόντος που σχεδιάζεται να αναπτυχθεί.

Η δεύτερη παράμετρος (σχεδιασμός με παιδαγωγική εγκυρότητα) συνδιαμορφώνεται από την τεκμηρίωση της καταλληλότητας του νέου προϊόντος για εκπαιδευτική χρήση (ποιοτικό, ασφαλές, ανθεκτικό και σε κατάλληλο μέγεθος για την τάξη), καθώς και της δυνατότητας διασποράς του (αν θα είναι διαθέσιμο, προσβάσιμο και προσιτό στην υπόλοιπη εκπαιδευτική κοινότητα).

Η τρίτη παράμετρος (σχεδιασμός με επιστημονική εγκυρότητα), συνδιαμορφώνεται από την τεκμηρίωση της κάλυψης της επιστημονικής ιδέας, της αναπαράστασης της ιδέας με επιστημονική ακρίβεια και της ορατής λειτουργίας του νέου προϊόντος.

Επιπλέον των παραπάνω βασικών αρχών για τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη νέου εκπαιδευτικού υλικού λήφθηκαν υπόψη και τα κύρια στοιχεία ανάπτυξης ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού (Σκουμπουρδή, 2015). Δηλαδή, η διαπραγμάτευση ενός συγκεκριμένου θέματος, βάση του οποίου διαμορφώνονται και τα υπόλοιπα στοιχεία του, όπως είναι το ταμπλό, τα πιόνια, τα μέσα τυχαιότητας, τα αντικείμενα του παιχνιδιού και οι κανόνες του.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟΥ ΕΠΙΤΡΑΠΕΖΙΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ «ΚΥΚΛΟΦΟΡΩ ΜΕ ΑΣΦΑΛΕΙΑ»

Το παιχνίδι «Κυκλοφορώ με ασφάλεια» σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε με βάση τις παραπάνω παραμέτρους, καθώς και τα κύρια στοιχεία ανάπτυξης επιτραπέζιου παιχνιδιού. Συγκεκριμένα, η αποτίμηση της αναγκαιότητάς του, διαπιστώθηκε μετά από επεξεργασία των αποτελεσμάτων της αναζήτησης στην αγορά παιχνιδιών αντίστοιχης θεματολογίας. Η αναζήτηση οδήγησε στην εύρεση των παρακάτω τεσσάρων παιχνιδιών:

1. Το «Learning Tube K.O.K για τους οδηγούς του κόσμου!» είναι ένα παιχνίδι σχεδιασμένο για την απόκτηση κυκλοφοριακής παιδείας και τη γνώση του κώδικα οδικής κυκλοφορίας. Αποτελείται από 63 σήματα οδικής κυκλοφορίας και τη σημασία τους. Έχει στόχο την εξοικείωση των παιδιών ηλικίας 6 ετών και πάνω με τους κανόνες που προτάσσει η νομοθεσία για τη σωστή οδική συμπεριφορά και την απόκτηση ορθής κυκλοφοριακής παιδείας που θα βοηθήσει στη δημιουργία ενσυνείδητων οδηγών στο μέλλον.

2. Το "Κυκλοφοριακή Αγωγή" είναι ένα επιτραπέζιο παιχνίδι στο οποίο οι παίκτες αναλαμβάνουν τον ρόλο των γονέων και πρέπει να παραλάβουν τα παιδιά τους από το σχολείο για να τα οδηγήσουν με ασφάλεια στο σπίτι. Μέσα από τα σήματα, τα φανάρια και τους τροχονόμους δίνεται η ευκαιρία στους παίκτες να μάθουν τους κανόνες της Κυκλοφοριακής Αγωγής. Περιλαμβάνει συμβουλευτικές κάρτες για την ασφαλή μετακίνηση των πεζών. Είναι ένα παιχνίδι για 2-4 παίκτες, ηλικίας 6 ετών και πάνω και αποτελείται από ένα ταμπλό, 12 κάρτες με σήματα, 20 κάρτες για την Κυκλοφοριακή Αγωγή, 66 πλακίδια σχετικά με τα φανάρια, τους τροχονόμους, τη διέλευση, τους πεζούς και τα παιδιά, 1 ζάρι, 4 πιόνια σε διαφορετικά χρώματα σχετικά με το θέμα το παιχνιδιού και τους κανόνες.

3. Το "Από το σπίτι στο σχολείο" είναι ένα επιτραπέζιο παιχνίδι στο οποίο, κατά την επιστροφή στο σπίτι, συμβαίνουν διάφορα απρόοπτα και οι παίκτες οφείλουν να τα αντιμετωπίσουν με λογική σκέψη, παίρνοντας τις σωστές αποφάσεις κάθε φορά. Το παιχνίδι είναι για 2-6 παίκτες, ηλικίας 6 ετών και άνω. Περιέχει ταμπλό με μία συγκεκριμένη διαδρομή, 64 κάρτες ερωτήσεων και εντολών σχετικές με την οδική ασφάλεια, 6 πιόνια, 1 ζάρι, 48 κάρτες και τους κανόνες. Νικητής του παιχνιδιού δεν είναι ο παίκτης που θα καταφέρει απλά να φτάσει στο σημείο του τερματισμού, αλλά ο παίκτης που θα τερματίσει έχοντας τις περισσότερες μάρκες, κάτι το οποίο σημαίνει ότι κινήθηκε στη διαδρομή του με τη μεγαλύτερη ασφάλεια.

4. Τα "100 παιχνίδια Κυκλοφοριακής Αγωγής" είναι παιχνίδια με κάρτες δραστηριοτήτων στις οποίες οι παίκτες ψάχνουν διαφορές και συνειρμούς λογικής, λύνουν λαβυρίνθους, εξασκούνται στο να γράφουν και να λογαριάζουν, συνδυάζοντας τα μαθηματικά με το περιβάλλον. Μέσα από αυτά τα 100 διασκεδαστικά παιχνίδια λογικής τα παιδιά μαθαίνουν με ευχάριστο τρόπο τους κανόνες οδικής ασφάλειας, ενώ παράλληλα αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, τη λογική, τη φαντασία και τη μνήμη τους. Οι σημειώσεις των παικτών στις 54 κάρτες πολλαπλής χρήσης, πραγματοποιούνται με μαρκαδόρο ο οποίος σβήνει και έτσι μπορούν να ξαναχρησιμοποιηθούν. Το παιχνίδι είναι κατάλληλο για παιδιά ηλικίας 6 έως 10 ετών.

Από την περιγραφή των χαρακτηριστικών των παραπάνω παιχνιδιών γίνεται φανερό ότι όλα απευθύνονται σε παιδιά ηλικίας 6 ετών και πάνω και άρα κανένα δεν προτείνεται για παιδιά ηλικίας 4-6 ετών. Επιπλέον εκτός από τα "100 παιχνίδια Κυκλοφοριακής Αγωγής" κανένα άλλο δεν κάνει αναφορά στα μαθηματικά.

Η δημιουργία του παιχνιδιού «Κυκλοφορώ με ασφάλεια» έγινε με τέτοιον τρόπο ώστε να εξασφαλίζει ένα ποιοτικό, ασφαλές, ανθεκτικό και σε κατάλληλο μέγεθος για την τάξη, παιχνίδι και άρα να μπορεί να επιτευχθεί η θετική αξιολόγησή του για εκπαιδευτική χρήση. Συγκεκριμένα το

ταμπλό του παιχνιδιού είναι κατασκευασμένο από μακετόχαρτο, βαμμένο με ασφαλή χρώματα με σκοπό τη σαφή αναπαράσταση τεσσάρων (4) διαδρομών (κίτρινη, κόκκινη, μαύρη, πράσινη) διπλής κυκλοφορίας, οι οποίες συναντώνται σε έναν κυκλικό κόμβο (Εικόνα 1). Τα πιόνια

δημιουργήθηκαν από μη τοξικό πηλό και έχουν τη μορφή αυτοκινήτου σε τέσσερα διαφορετικά χρώματα. Το μπροστά και το πίσω μέρος του κάθε αυτοκινήτου είναι ίδια έτσι ώστε να μην επηρεάζονται οι παίκτες για την κατεύθυνση της κίνησής τους στο ταμπλό, από το πώς είναι στραμμένο το αυτοκίνητο.

Η διασπορά του «Κυκλοφορώ με ασφάλεια» βρίσκεται σε εξέλιξη ώστε να καταστεί διαθέσιμο, προσβάσιμο και προσιτό στην υπόλοιπη εκπαιδευτική κοινότητα και έτσι να μπορεί να αξιολογηθεί η παιδαγωγική του εγκυρότητα.

Η επιστημονική εγκυρότητα του περιεχομένου των καρτών του παιχνιδιού «Κυκλοφορώ με ασφάλεια» εξασφαλίστηκε μετά από γενική βιβλιογραφική μελέτη και ειδική μελέτη των Προγραμμάτων Σπουδών (ΠΣΝ, 2014) για θέματα οδικής συμπεριφοράς και ασφάλειας, καθώς και από επισκέψεις σε τμήματα τροχαίας της αστυνομίας και σε παρατηρητήρια οδικής ασφάλειας για ενημέρωση για τις εκπαιδευτικές τους δράσεις και για το ενημερωτικό τους υλικό. Τα θέματα που αναδείχθηκαν από την παραπάνω διερεύνηση σχετίζονταν, για τις μικρές ηλικίες, με την αναγνώριση των σημά των του ΚΟΚ, με την αναγνώριση της οδικής συμπεριφοράς πεζών, ποδηλατών, οδηγών μηχανών και αυτοκινήτων, αλλά και επιβατών λεωφορείων, αυτοκινήτων και μηχανών, καθώς και με τον εξοπλισμό ποδηλατών και οδηγών μηχανών. Τα θέματα αυτά συνδυάστηκαν με θέματα των μαθηματικών, όπως η καταμέτρηση, η άμεση αντίληψη της ποσότητας αντικειμένων, καθώς και η αναγνώριση των συμβόλων των αριθμών και αποτυπώθηκαν σε 66 κάρτες: 12 κάρτες με σήματα του ΚΟΚ (Εικόνα 2), 20 κάρτες για επιλογή της σωστής οδικής συμπεριφοράς (Εικόνα 3), 9 κάρτες για καταμέτρηση ατόμων που υιοθετούν σωστή/λάθος συμπεριφορά (Εικόνα 4), 12 κάρτες με πινακίδες αυτοκινήτων για αναγνώριση των συμβόλων των αριθμών (Εικόνα 5) και 13 κάρτες με κουκκίδες για άμεση αντίληψη της ποσότητας[7] (Εικόνα 6).

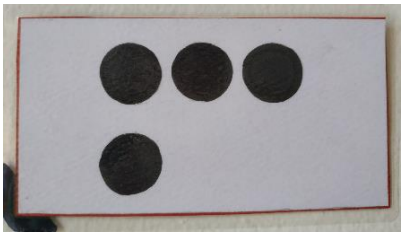
[7] Η άμεση αντίληψη της ποσότητας συνδέεται με την εξάσκηση στη γρήγορη αντίληψη που επιβάλλεται να έχουν οι οδηγοί.

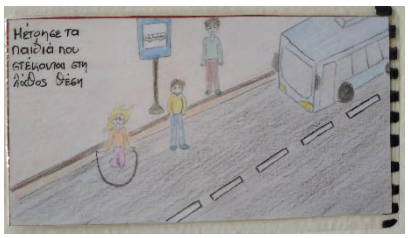
Εικ. 1: Ταμπλό **Εικ. 2: Κάρτα σήματος ΚΟΚ**

Οι εικόνες στις κάρτες αποτυπώθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι οικείες στα παιδιά και να συνδέονται με στιγμές της καθημερινότητάς τους. Με αυτόν τον τρόπο έγινε προσπάθεια να καλυφθούν βασικά θέματα της οδικής διαπαιδαγώγησης και των μαθηματικών και να αναπαρασταθούν με ακρίβεια κάνοντας ορατή τη λειτουργία του παιχνιδιού ακόμα και στον αρχάριο παίκτη.

Στη διαθεματική αυτή προσέγγιση του παιχνιδιού η γνώση αντιμετωπίζεται ενιαία μέσα από τη διερεύνηση θεμάτων, ζητημάτων και προβληματισμών, που παρουσιάζουν είτε προσωπικό ενδιαφέρον για τους μαθητές είτε γενικότερο ενδιαφέρον για την κοινωνία και τον πολιτισμό (Γκλιάου-Χριστοδούλου, 2005).

Εικόνα 3: Κάρτα επιλογής οδ. συμπ/ράς **Εικόνα 4: Κάρτα εντοπισμού οδ. συμπ/ράς**





Εικόνα 5: Κάρτα πινακίδας **Εικόνα 6: Κάρτα άμεσης αντίληψης**

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Προκειμένου να διερευνήσουμε αν μέσω του παιχνιδιού «Κυκλοφορώ με ασφάλεια» μπορεί να αναπτυχθεί η ικανότητα των μικρών παιδιών να αναγνωρίζουν τη σωστή οδική συμπεριφορά, αλλά και να ανταποκριθούν σε μαθηματικά θέματα σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε ένα διαγνωστικό δοκίμιο, με τη μορφή συνέντευξης, το οποίο απαντήθηκε από κάθε νήπιο, χωριστά, πριν και μετά την πραγματοποίηση του παιχνιδιού στην τάξη. Σκοπός του δοκιμίου ήταν η διερεύνηση των γνώσεων των νηπίων για τα οδικά και τα μαθηματικά θέματα που διαπραγματεύεται το παιχνίδι πριν και μετά την πραγματοποίησή του. Οι ερωτήσεις του δοκιμίου ήταν δώδεκα (Πίνακας 1). Τα παιδιά του τμήματος του νηπιαγωγείου που

συμμετείχαν στις συνεντεύξεις ήταν συνολικά 20 (11 αγόρια και 9 κορίτσια) ηλικίας 5-6 ετών.

Μετά την 1η συνέντευξη δόθηκε το παιχνίδι στη νηπιαγωγό για να παίξει με τα παιδιά και να εξοικειωθούν με αυτό. Μία εβδομάδα μετά τη συνέντευξη πραγματοποιήθηκε το παιχνίδι στην τάξη με την παρουσία, ενθάρρυνση και καθοδήγηση της ερευνήτριας. Λόγω του ότι τα παιδιά είχαν παίξει το παιχνίδι μερικές φορές με τη νηπιαγωγό τους είχαν άνεση με τη διαδικασία και τους κανόνες. Η σύνθεση των τεσσάρων ομάδων παιδιών (4 ομάδες από 5 άτομα η κάθε ομάδα) είχε καθοριστεί από τη νηπιαγωγό. Η δεύτερη συνέντευξη πραγματοποιήθηκε την επόμενη μέρα της πραγματοποίησης του παιχνιδιού. Η διάρκεια της πρώτης συνέντευξης ήταν κατά μέσο όρο 9΄ για κάθε παιδί ενώ της δεύτερης 5΄. Η διάρκεια του παιχνιδιού ήταν περίπου 45΄.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι σωστές απαντήσεις στο διαγνωστικό δοκίμιο (1η συνέντευξη) πριν την πραγματοποίηση του παιχνιδιού ήταν λιγότερες από τις σωστές απαντήσεις που δόθηκαν από τα παιδιά στη 2η συνέντευξη μετά την πραγματοποίηση του παιχνιδιού. Πιο συγκεκριμένα, αναφορικά με τα οδικά θέματα (Πίνακας 1) κανένα παιδί, πριν το παιχνίδι, δεν είχε παρατηρήσει τι γράφει η πινακίδα ενός αυτοκινήτου, μόνο οκτώ (8) παιδιά γνώριζαν τη σημασία σημάτων του Κ.Ο.Κ. και μόνο ένα (1) παιδί αναγνώριζε τις πινακίδες που προειδοποιούν για κίνδυνο. Δώδεκα (12) παιδιά γνώριζαν τι πρέπει να φοράμε όταν κυκλοφορούμε με ποδήλατο. Τέλος, μόνο δεκαπέντε (15) παιδιά επεσήμαναν ότι δεν είναι σωστό να παίζουμε στο πεζοδρόμιο, ενώ όλα τα παιδιά (20) γνώριζαν τη σημασία του πράσινου και του κόκκινου φαναριού.

Τα παραπάνω αποτελέσματα βελτιώθηκαν μετά από την πραγματοποίηση του παιχνιδιού (Πίνακας 1). Συγκεκριμένα, επτά (7) παιδιά είχαν παρατηρήσει τι γράφει η πινακίδα ενός αυτοκινήτου, δεκαεννέα (19) παιδιά γνώριζαν τη σημασία σημάτων του Κ.Ο.Κ. και δώδεκα (12) τις πινακίδες που προειδοποιούν για κίνδυνο. Δεκαέξι (16) παιδιά γνώριζαν τι πρέπει να φοράμε όταν κυκλοφορούμε με ποδήλατο. Δεκαεπτά (17) παιδιά επεσήμαναν ότι δεν είναι σωστό να παίζουμε στο πεζοδρόμιο.

Όσον αφορά στα μαθηματικά θέματα, παρατηρήθηκε πως τα παιδιά είχαν άνεση στις απαντήσεις τους. Όλα σχεδόν τα παιδιά (18 πριν το παιχνίδι και 19 μετά το παιχνίδι), μέτρησαν με άνεση μέχρι το 15. Όταν τους ζητήθηκε να αναγνωρίσουν τα αριθμητικά σύμβολα στην εικόνα όλα σχεδόν τα νήπια (18 πριν το παιχνίδι και 20 μετά το παιχνίδι), απάντησαν σωστά.

Ερωτήματα	**1η**	**2η**
1.Μπορείς να μετρήσεις μέχρι το 15;	18	19
2.Έχεις παρατηρήσει τι γράφει η πινακίδα ενός αυτοκινήτου;	0	7
3.(Δείχνω κάρτα πινακίδας) Ποιοι αριθμοί είναι αυτοί;	18	20
4.(Δείχνω κάρτα με σήματα ΚΟΚ) Αναγνωρίζεις τη σημασία των σημάτων;	8	19
5.(Δείχνω κάρτα με σήματα ΚΟΚ) Μπορείς να μου δείξεις τις πινακίδες που προειδοποιούν για κίνδυνο;	1	12
6.Όταν κυκλοφορούμε με ποδήλατο στον δρόμο, τι πρέπει να φοράμε;	12	16
7.(Δείχνω κάρτα εντοπισμού συμπεριφοράς) Μέτρησε τους ποδηλάτες που δεν τηρούν τους κανόνες.	7	18
8.(Δείχνω κάρτα εντοπισμού συμπεριφοράς) Μέτρησε τους πεζούς που δεν τηρούν τους κανόνες.	9	15
9.(Δείχνω κάρτα εντοπισμού συμπεριφοράς) Μέτρησε τα αμάξια που τηρούν τους κανόνες.	6	16
10.Με το πράσινο φανάρι τι κάνουμε;	20	20
11.Με το κόκκινο φανάρι τι κάνουμε;	20	20
12.Είναι σωστό να παίζουμε στο πεζοδρόμιο;	15	17

Πίνακας 1: Ερωτήματα δοκιμίου και σωστές απαντήσεις στην 1η συνέντευξη (πριν το παιχνίδι) και στη 2η συνέντευξη (μετά το παιχνίδι)

Στις κάρτες που συνδύαζαν θέματα οδικής συμπεριφοράς και μαθηματικών, τα παιδιά που απάντησαν σωστά, στην 1η συνέντευξη, πριν την πραγματοποίηση του παιχνιδιού, ήταν λιγότερα από τα μισά.

Συγκεκριμένα επτά (7), εννέα (9) και έξι (6) παιδιά αντίστοιχα κατάφεραν να μετρήσουν τα άτομα με τη σωστή συμπεριφορά, τους πεζούς που δεν τηρούν τους κανόνες και τα αμάξια που τηρούν τους κανόνες. Μετά την πραγματοποίηση του παιχνιδιού οι σωστές απαντήσεις αυξήθηκαν σε δεκαοχτώ (18), δεκαπέντε (15) και δεκαέξι (16) αντίστοιχα. Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν τα παιδιά για την καταμέτρηση ήταν ποικίλες από απλές, όπως η μέτρηση ανά-1 με το δάχτυλο έως και σύνθετες όπως η άμεση εκτίμηση των ποσοτήτων, χωρίς εμφανή την καταμέτρηση. Στα συνδυαστικά αυτά θέματα, η δυσκολία των παιδιών να καταμετρήσουν τις σωστές ποσότητες υποθέσαμε ότι περισσότερο οφείλεται στη μη γνώση των οδικών θεμάτων παρά σε δυσκολία στα μαθηματικά, εφόσον οι ποσότητες προς καταμέτρηση ήταν μικρές (2-6). Άρα η μη γνώση στοιχείων της οδικής συμπεριφοράς επηρέασε και τις απαντήσεις των παιδιών στα μαθηματικά θέματα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εκπαίδευση των παιδιών, από την πρώτη σχολική ηλικία, στα μαθηματικά και στην αναγνώριση και υιοθέτηση της σωστής οδικής συμπεριφοράς είναι θέματα που προτείνεται να περιλαμβάνονται στην εκπαίδευση για την πολιτειότητα γιατί αποτελούν σημαντικά ζητήματα για

τους μαθητές και για την κοινωνία (Chee, Mehrotra & Liu, 2013). Είναι πιθανόν ότι τα παιδιά τα οποία θα έχουν λάβει συστηματική εκπαίδευση οδικής συμπεριφοράς από την πρώτη σχολική ηλικία θα είναι πιο ευαισθητοποιημένα σε αυτά τα θέματα και θα έχουν την ευκαιρία να αναπτύσσουν τις απαραίτητες δεξιότητες για να κάνουν ασφαλείς επιλογές και να ενισχύουν την προσωπική τους ανάπτυξη και ασφάλεια. Ο συνδυασμός των θεμάτων αυτών με άλλα γνωστικά αντικείμενα, όπως τα μαθηματικά, μέσα από το πλαίσιο του παιχνιδιού μπορεί να οδηγήσει τα παιδιά στο να αντιληφθούν την εφαρμογή τους στην καθημερινότητά τους.

Στο πλαίσιο αυτό σχεδιάστηκε και πραγματοποιήθηκε το διαθεματικό επιτραπέζιο παιχνίδι «Κυκλοφορώ με ασφάλεια» με σκοπό να διερευνηθεί αν μέσω αυτού μπορεί να αναπτυχθεί η ικανότητα των μικρών παιδιών να αναγνωρίζουν τη σωστή οδική συμπεριφορά και να ανταποκρίνονται σε απλά μαθηματικά θέματα κάτι το οποίο οδήγησε σε θετικά αποτελέσματα.

Η μελέτη έδειξε πως το παιχνίδι «Κυκλοφορώ με ασφάλεια» παρείχε στα παιδιά εμπειρία σωστής οδικής συμπεριφοράς και τη δυνατότητα να συμμετέχουν σε αυτήν. Φάνηκε ότι το μαθησιακό αυτό περιβάλλον τους έδινε κίνητρο συμμετοχής και ενίσχυε τη δέσμευσή τους. Από τη διαφοροποίηση των απαντήσεων των νηπίων πριν και μετά την πραγματοποίηση του παιχνιδιού φάνηκε ότι το παιχνίδι τα βοήθησε να ανταποκριθούν καλύτερα στα θέματα της οδικής ασφάλειας και συμπεριφοράς, από την αρχική τους ανταπόκριση. Υπήρχαν οδικά θέματα, όπως για παράδειγμα η λειτουργία του κόκκινου και του πράσινου φαναριού και η απαραίτητη χρήση της ζώνης ασφαλείας, τα οποία, όπως μας ενημέρωσε η νηπιαγωγός συζητάνε συχνά στην τάξη και τα οποία γνώριζαν τα παιδιά. Επίσης, η ανταπόκρισή τους στα μαθηματικά θέματα (καταμέτρηση, άμεση αντίληψη ποσοτήτων, αναγνώριση των συμβόλων των αριθμών) ήταν αρκετά υψηλή από την αρχή.

Υπήρχαν όμως και θέματα, τα οποία συνδύαζαν γνώση οδικής συμπεριφοράς, όπως σωστής/λάθος οδικής συμπεριφοράς πεζών, ποδηλατών και αυτοκινήτων, και γνώση μαθηματικών (καταμέτρηση), τα οποία προβλημάτισαν τα παιδιά, οδηγώντας τα σε λανθασμένες απαντήσεις, οι οποίες όμως λιγόστεψαν μετά τη συμμετοχή τους στο παιχνίδι. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι απαντήσεις των παιδιών βελτιώθηκαν και σε πιο δύσκολα οδικά θέματα όπως αυτά της αναγνώρισης της σημασίας των σημάτων. Επιπλέον φάνηκε ότι τα νήπια εξασκήθηκαν, μέσω του παιχνιδιού, στην προσεκτικότερη παρατήρηση, αλλά και στην πιο λεπτομερή ερμηνεία των (οδικών) στοιχείων των εικόνων των καρτών με αποτέλεσμα να δίνουν πιο σωστές και ακριβείς απαντήσεις τόσο κατά τη συμμετοχή τους στο παιχνίδι όσο και κατά τη 2^{η} συνέντευξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γκλιάου-Χριστοδούλου, Ν. (2005). Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών για το νηπιαγωγείο. *Σύγχρονο Νηπιαγωγείο*, 36.

Chee, Y.-S., Mehrotra, S. & Liu, Q. (2013). Effective game-based citizenship education in the age of new media. *The Electronic Journal of e-Learning Volume 11, (*1), 16-28, available online at www.ejel.org

Θεοδοσέλη, Κ., (2017). *Συμβολή στην ανάπτυξη μεθοδολογικών εργαλείων για την εκπαίδευση οδικής ασφάλειας παιδιών προεφηβικής ηλικίας: Μια εκπαιδευτική παρέμβαση βασισμένη στις αρχές του νέου δημοσίου μάνατζμεντ*. Εθνικό Αρχείο Διδακτορικών Διατριβών.

Κανελλαϊδης, Γ., Γίαννης, Γ., Βαρδάκη, Σ. & Λαϊου, Α. (χχ). *Ανάπτυξη στρατηγικού σχεδίου για τη βελτίωση της οδικής ασφάλειας στην Ελλάδα, 2011-2020*. Ανακτήθηκε από https://www.nrso.ntua.gr/wp-content/uploads/ntua-rss3-rn54sgr.pdf

Parviainen, P. (2019). The development of early mathematical skills – a theoretical framework for a holistic model. *Journal of Early Childhood Education Research, 8(*1), 162-191.

ΠΣΝ (Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου) (2014). *Υπουργείο Παιδείας Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων*. Αναθεωρημένη έκδοση, Αθήνα.

Σκουμπουρδή, Χ. (2015*). Το παιχνίδι στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. https://hdl.handle.net/11419/1295

Σκουμπουρδή, Χ. (2023). *Διερευνητική προσέγγιση των μαθηματικών της πρώτης σχολικής ηλικίας: Κριτήρια σχεδιασμού δραστηριοτήτων και αξιολόγησης υλικών*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-125

Vogel, R. (2013). Mathematical situations of play and exploration. *Educational Studies in Mathematics, 84(*2), 209-225.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Κωνσταντινίδου Ζωή[1] & Παπανδρέου Μαρία[2]

Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής & Εκπαίδευσης,
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

konstzoe@auth.gr[1], mpapan@nured.auth.gr[2]

Περίληψη

Η εμπλοκή των παιδιών με μαθηματικές εμπειρίες στο ευρύτερο πλαίσιο του παιχνιδιού αποτελεί μια σύγχρονη τάση της μαθηματικής μάθησης στην προσχολική ηλικία. Στο πλαίσιο αυτό, το αντικείμενο μελέτης της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση των ευκαιριών για μαθηματική μάθηση με νόημα κατά τη διάρκεια του ελεύθερου κατασκευαστικού παιχνιδιού. Το παιχνίδι 18 παιδιών μιας τάξης δημόσιου νηπιαγωγείου μελετήθηκε μέσω της συμμετοχικής παρατήρησης για διάστημα 4 εβδομάδων. Από τα αποτελέσματα φαίνεται πως αναδείχθηκαν ποικίλα περιστατικά αυθόρμητου παιχνιδιού με μαθηματικό περιεχόμενο, όπου τα παιδιά αλληλοεπιδρώντας τόσο μεταξύ τους όσο και με το κατασκευαστικό υλικό ανέπτυξαν ποικίλες μαθηματικές συζητήσεις και διεργασίες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σήμερα, η μαθηματική μάθηση στις μικρές ηλικίες βρίσκεται στο επίκεντρο του διεθνούς ενδιαφέροντος, καθώς η έρευνα έχει δείξει ότι η πρώιμη μαθηματική γνώση μπορεί να αποτελέσει ένα ισχυρό προγνωστικό παράγοντα για την μετέπειτα μαθηματική μάθηση. Μια σημαντική διάσταση αυτού του ερευνητικού πεδίου, εξετάζει τη σχέση του παιχνιδιού με τη μαθηματική μάθηση, και τα τελευταία χρόνια με μια εστίαση στο παιχνίδι των παιδιών που ξεκινά με δική τους πρωτοβουλία.

Σύμφωνα με μια κοινωνικοπολιτισμική οπτική (Vygotsky, 2004), το παιχνίδι των παιδιών βασίζεται σε μια διαλεκτική σχέση μεταξύ φαντασίας και πραγματικότητας, ενώ η αυθεντική και ουσιαστική μάθηση στην προσχολική ηλικία είναι συνυφασμένη με το παιχνίδι και την εξερεύνηση (Nilsson eta al., 2018). Το ελεύθερο παιχνίδι, ως κυρίαρχη δραστηριότητα της παιδικής ηλικίας, αποτελεί μια ρεαλιστική συνθήκη για τα ίδια με νόημα. Συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί 'πηγή για την έναρξη της ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών, εργαλείων και διαδικασιών' ακόμα κι αν αυτή η πραγματικότητα περιλαμβάνει στοιχεία φαντασίας (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020, σ. 713), σε αντίθεση με τις δομημένες δραστηριότητες που συχνά προσομοιάζουν στην πραγματικότητα με επιφανειακό τρόπο (Thornton, 2018). Σε αυτό το πλαίσιο, τα παιδιά μπορούν να επιτύχουν ένα στοιχειώδες επίπεδο αφηρημένης σκέψης, (Vygotsky, 1978), καθώς συνδυάζοντας την πραγματικότητα με τη φαντασία αποδίδουν νόημα σε αφηρημένες έννοιες (Broström, 2017). Υπό αυτή την οπτική, ο van Oers (1996), υποστηρίζει ότι στο παιχνίδι μπορεί να συμβεί ένα πρώτο επίπεδο *μαθηματικοποίησης*, καθώς τα παιδιά αποδίδουν μαθηματικό νόημα σε στοιχεία του παιχνιδιού. Πρόκειται για μια διαδικασία η οποία περιλαμβάνει την οργάνωση στοιχείων της πραγματικότητας με

μαθηματικά μέσα (Jupri & Drijvers, 2016) και συμβαίνει μέσα από την αλληλεπίδραση γλωσσικών και μη γλωσσικών διαμεσολαβητών (Gejard & Melander, 2018).

Πρόσφατα η έρευνα που εξετάζει την αλληλεπίδραση μαθηματικών και παιχνιδιού εστιάζει στη διαδικασία τη μαθηματικοποίηση που μπορεί να συμβεί στο παιχνίδι των παιδιών, και του ρόλου των εκπαιδευτικών αφενός στον εντοπισμό των μαθηματικών ιδεών που επεξεργάζονται τα παιδιά στο παιχνίδι τους, κι αφετέρου στην αξιοποίηση και επέκταση αυτής της μαθηματικής γνώσης (Gejard & Melander, 2018· Papandreou & Konstantinidou, 2020· Trawick-Smith, Swaminathan, & Liu, 2015).

Σύμφωνα με τους Sarama και Clements (2009, σ. 327) στο ελεύθερο παιχνίδι μπορούμε να παρατηρήσουμε τη διασύνδεση παιχνιδιού-μαθηματικών σε δυο εκδοχές: 'παιχνίδι που εμπλέκει μαθηματικά' και 'παιχνίδι με τα ίδια τα μαθηματικά'. Ενώ στην πρώτη συνήθως αναδύεται απλά η χρήση μαθηματικών αντικειμένων (λεκτικά ή μη λεκτικά), στη δεύτερη παρατηρείται αυθόρμητη επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων. Οι περιστάσεις αυτές φαίνεται να αποτελούν κατάλληλες ευκαιρίες για την ανάπτυξη μαθηματικής μάθησης με νόημα για τα παιδιά εφόσον εντοπισθούν και αξιοποιηθούν περεταίρω από την εκπαιδευτικό της προσχολικής τάξης. Παρόλο που τα ευρήματα από αυτό το πεδίο έρευνας είναι ενδιαφέροντα, αυτή η προοπτική έχει μελετηθεί σποραδικά (Papandreou & Konstantinidou, 2020· Trawick-Smith et al., 2015). Μια δραστηριότητα στην οποία τα παιδιά φαίνεται ότι εμπλέκονται σε παιχνίδι με μαθηματικά αντικείμενα (πχ γεωμετρικά σχήματα, έννοιες συμμετρίας και χώρου) είναι το κατασκευαστικό παιχνίδι (ΚΠ) (Gejard & Melander, 2018· Ginsburg et al., 2003· Τσιούλη & Παπανδρέου, 2019) χωρίς όμως να έχει μελετηθεί με συστηματικό τρόπο.

Αναγνωρίζοντας αυτή την έλλειψη, αλλά και τη σημασία του παιχνιδιού για τη μάθηση στην προσχολική ηλικία, η παρούσα μελέτη, η οποία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που αφορούσε το ΚΠ, επεδίωξε να μελετήσει σε βάθος το μαθηματικό περιεχόμενο του παιχνιδιού των μικρών παιδιών όταν εμπλέκονται σε ΚΠ σε μια τάξη νηπιαγωγείου. Απώτερος σκοπός της μελέτης είναι να αναδείξει τις ευκαιρίες που αναδύονται για μαθηματική μάθηση στο ελεύθερο ΚΠ στο νηπιαγωγείο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για το σκοπό της έρευνας αξιοποιήθηκε η μελέτη περίπτωσης μιας τάξης δημοσίου νηπιαγωγείου. Η συλλογή των δεδομένων, υλοποιήθηκε με συμμετοχική παρατήρηση (Creswell, 2012) του ελεύθερου παιχνιδιού των παιδιών στην περιοχή του κατασκευαστικού υλικού. Αυτό σημαίνει ότι η ερευνήτρια εκτός από την παρατήρηση, αλληλοεπιδρούσε με τα παιδιά διατυπώνοντας ερωτήσεις για να κατανοήσει τις δράσεις και τη σκέψη τους και μερικές φορές για να προκαλέσει περαιτέρω προβληματισμό και επεξεργασία. Για την ανάπτυξη του ΚΠ, διαμορφώθηκε ένας κοινόχρηστος χώρος στο σχολείο με το οικοδομικό υλικό της τάξης το οποίο εμπλουτίστηκε με επιπλέον ανοιχτό υλικό (πχ σωλήνες, ρόδες, μικρά κομμάτια από κορμούς δέντρων), ενώ παράλληλα δημιουργήθηκε περιοχή για τη φύλαξη κατασκευών που βρίσκονταν υπό εξέλιξη, έτσι ώστε τα παιδιά να μπορούν να συνεχίσουν μια κατασκευή σε επόμενη μέρα.

Συμμετέχοντες/ουσες & ερευνητική διαδικασία

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε το σχολικό έτος 2022-2023 σε μια τάξη Νηπιαγωγείου (N=18, 10 αγόρια, 8 κορίτσια) ημιαστικής περιοχής του Νομού Ηρακλείου Κρήτης. Αφού εξασφαλίστηκε η απαιτούμενη άδεια (36948/23-12-2021), γονείς και παιδιά ενημερώθηκαν για το περιεχόμενο και τη διαδικασία της έρευνας και ζητήθηκε η συναίνεσή τους. Κατά τη διάρκεια της έρευνας, γινόταν τακτικά ανανέωση της συναίνεσης και τα παιδιά ήξεραν ότι μπορούσαν όποτε ήθελαν να αποσυρθούν ή να επανέλθουν.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζονται αποτελέσματα από δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά την έναρξη του ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος για διάστημα 4 συνεχόμενων εβδομάδων. Το οπτικοακουστικό υλικό (102 φωτογραφίες & 20΄ βίντεο), οι σημειώσεις πεδίου της ερευνήτριας, και τέσσερα τεκμήρια από προσωπικές σημειώσεις παιδιών μεταγράφηκαν και ταξινομήθηκαν σε ψηφιακά αρχεία, ενώ τα ονόματα των παιδιών αντικαταστάθηκαν από ψευδώνυμα. Στα δεδομένα αυτά εντοπίστηκαν και απομονώθηκαν 61 περιστατικά ΚΠ με μαθηματικό περιεχόμενο.

Η ανάλυση των δεδομένων δεν εστίασε απλά στον εντοπισμό αναφορών και δράσεων με μαθηματικό περιεχόμενο, αλλά στον εντοπισμό περιστατικών *μαθηματικού παιχνιδιού* (Sarama & Clements, 2009). Πρόκειται για καταστάσεις όπου τα παιδιά επεξεργάζονται τα μαθηματικά νοήματα που εμφανίζονται μέσα στο παιχνίδι τους, εστιάζουν σε αυτά και πολλές φορές αναπτύσσουν μαθηματικές συζητήσεις και δράσεις με διάρκεια (Τσιούλη & Παπανδρέου, 2019). Αρχικά τα περιστατικά αυτά μελετήθηκαν με σκοπό τον εντοπισμό των μαθηματικών αντικειμένων, ενώ σε δεύτερη φάση αναζητήθηκαν στα ίδια δεδομένα και οι μαθηματικές διεργασίες. Η ανάλυση στηρίχθηκε σε σχετική βιβλιογραφία για τα μαθηματικά στην προσχολική ηλικία (πχ. NCCA, 2014), και στις μαθηματικές ενότητες, όπως παρουσιάζονται στο ΠΣ για το Νηπιαγωγείο (ΙΕΠ, 2014).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κατά την ανάλυση των δεδομένων εντοπίστηκαν 227 αναφορές σε διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία αντιστοιχούν σε τέσσερις μαθητικές ενότητες (Πίνακας 1). Όπως διαπιστώθηκε στα περισσότερα περιστατικά συνυπήρχαν περισσότερες από μία μαθηματικές ενότητες. Οι ενότητες που κυριαρχούν είναι οι: «Αριθμοί & Πράξεις» με έμφαση στις υποενότητες «Χρήση απόλυτων αριθμών», «Καταμέτρηση ποσοτήτων» και «Χώρος & Γεωμετρία» με έμφαση στην «Αναγνώριση επίπεδων & στερεών γεωμετρικών σχημάτων», ενώ οι ενότητες των «Μετρήσεων» και της «Άλγεβρας» εντοπίστηκαν λιγότερο.

Μαθηματικές ενότητες	**N**	**%**
Αριθμοί & Πράξεις	84	37,0%
Χώρος & Γεωμετρία	82	36,0%
Μετρήσεις	33	14,5%
Άλγεβρα	28	12,5%
Σύνολο	227	100%

Πίνακας 1: Κατανομή περιστατικών μαθηματικού περιεχομένου στις μαθηματικές ενότητες

Η ανάλυση των περιστατικών αναφορικά με τις μαθηματικές διεργασίες, έδειξε ότι σχεδόν σε όλα τα περιστατικά τα παιδιά χρησιμοποιούν μία ή περισσότερες διεργασίες (N=110, Πίνακας 2). Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε συχνότερα η ανάπτυξη συλλογισμού (N=43), καθώς τα παιδιά συχνά προσπαθούσαν να εκφράσουν τις σκέψεις τους, είτε μεταξύ τους είτε στην ερευνήτρια, και να εξηγήσουν τα βήματα που ακολούθησαν (πχ ΚΠ3), τις επιλογές και δοκιμές που έκαναν και αποφάσεις που έλαβαν. Σε άλλες περιπτώσεις, οι συλλογισμοί αυτοί αναπτύχθηκαν σε ένα πλαίσιο έντονης συζήτησης και διαπραγμάτευσης απόψεων (N=13) για να υποστηρίξουν τη θέση τους ή να διαφωνήσουν με τη διατύπωση επιχειρημάτων. Αρκετά συχνή ήταν και η εμφάνιση της επίλυσης προβλήματος (N=26), όπου τα εμπλεκόμενα παιδιά αντιμετωπίζοντας ένα πρόβλημα ή εμπόδιο στην κατασκευή τους φάνηκε να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης. Ενδιαφέρον έχουν και οι συνδέσεις (N=13) που εντοπίστηκαν, τόσο μεταξύ μαθηματικών και άλλων γνωστικών αντικειμένων (πχ Φυσικές Επιστήμες) όσο και μεταξύ διαφορετικών περιοχών στο πεδίο των μαθηματικών (πχ αριθμός και μετρήσεις).

Μαθηματικές διεργασίες	**N**	**%**
Τεκμηρίωση/συλλογισμός (Reasoning)	43	39,1%
Επίλυση προβλήματος (Problem Solving)	26	23,6%
Συζήτηση/επιχειρηματολογία (Argumentation)	13	11,8%
Αναπαράσταση (Representing)	9	8,2%
Γενίκευση (Generalising)	6	5,5%
Σύνδεση (Connecting)	13	11,8%
Σύνολο	110	100%

Πίνακας 2: Κατανομή περιστατικών μαθηματικού περιεχομένου στις μαθηματικές διεργασίες ή διαδικασίες.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αποσπάσματα από τρία περιστατικά από αυτά που αναλύθηκαν, όπου φαίνεται ο τρόπος και η διάρκεια ενασχόλησης των παιδιών με συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα κατά τη διάρκεια του κατασκευαστικού παιχνιδιού.

Κατασκευή πόλης με lego (ΚΠ1)

Στο πρώτο απόσπασμα, συμμετέχουν τρία παιδιά τα οποία προσπαθούν να δημιουργήσουν τη δική τους πόλη με υλικό lego. Κατά τη διάρκεια, εμπλέκονται σε μια διερεύνηση των γεωμετρικών σχημάτων.

> Ζωή: Έχουμε πάρα πολλά παραλληλεπίπεδα αλλά δεν έχουμε κυλίνδρους. Δε μπορούμε να κάνουμε πύργους γιατί θέλουν κύκλους και αυτά έχουν όλα γωνίες!
>
> Αγάπη: Δε πειράζει, θα κάνουμε μόνο ορθογώνια και τετράγωνα κτίρια.
>
> Μιχάλης: Κοίτα, αν βάλεις τετράγωνο και τετράγωνο και ορθογώνιο μικρό γίνεται ένα ορθογώνιο μεγάλο!
>
> Ζωή: Κι εγώ έβαλα κύβο και κύβο από πάνω και έγινε παραλληλεπίπεδο!

Καθ' όλη τη διάρκεια του περιστατικού, τα παιδιά μοιράζονται τις ιδέες τους για τα γεωμετρικά σχήματα, χρησιμοποιούν γεωμετρικούς όρους, αναγνωρίζουν και αναλύουν ιδιότητες των σχημάτων. Παρέχουν οδηγίες και συμβουλές στους συμμαθητές τους διατυπώνοντας ταυτόχρονα επιχειρήματα και ανακαλύπτουν τα νέα σχήματα που προκύπτουν καθώς συνδέουν διαφορετικά τουβλάκια μεταξύ τους (πχ «Κοίτα, αν βάλεις τετράγωνο και τετράγωνο και ορθογώνιο μικρό γίνεται ένα ορθογώνιο μεγάλο!»), ενώ δοκιμάζοντας επιβεβαιώνουν τις διαπιστώσεις των άλλων με τις δικές τους συνθέσεις (πχ. «Κι εγώ έβαλα κύβο και κύβο από πάνω και έγινε παραλληλεπίπεδο!»). Παρόλο που οι όροι που χρησιμοποιούν τα παιδιά δεν είναι πλήρεις ή ακριβείς (ορθογώνιο μικρό/μεγάλο) φαίνεται ότι εστιάζουν με ενδιαφέρον στη διαδικασία της σύνθεσης για τη παραγωγή διαφορετικών σχημάτων. Η εστίαση αυτή έχει καθαρό μαθηματικό νόημα και αποτελεί μια ένδειξη μαθηματικοποίησης όπως είναι 'ο εντοπισμός

συγκεκριμένων μαθηματικών σε ένα γενικό πλαίσιο' (Jupri & Drijvers, 2016, σ. 2483).

Επίλυση προβλήματος όταν το οικοδομικό υλικό δεν φτάνει (ΚΠ2)

Στο δεύτερο παράδειγμα, μια παρέα κοριτσιών παίζουν παράλληλα, χρησιμοποιώντας πλαστικά τουβλάκια. Η Ηρώ θέλει να φτιάξει ένα ανθρώπινο σώμα και ζητά από την Ισμήνη να τις δανείσει 4 ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, αλλά εκείνη τα χρειάζεται για τη δική της κατασκευή. Τελικά, η Ισμήνη της παραχωρεί μερικούς κύβους αλλά η Ηρώ δεν είναι ευχαριστημένη. Τότε η Ισμήνη ενώνει ανά δυο τους κύβους (σε ποσότητα) και ανά δύο σειρές (ανάμεσα σε δυο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα για να τα στερεώσει) και λέει *"τώρα είναι 4 ορθογώνια!"* (βλ. Εικόνα 1, ΚΠ2).

Η Ισμήνη προκειμένου να *επιλύσει ένα πρόβλημα* που αναδύθηκε στο πλαίσιο του παιχνιδιού (έλλειψη υλικού) ενεπλάκη στη διαδικασία της σύνθεσης γεωμετρικών σχημάτων (κύβων) δημιουργώντας τα 4 ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που της ζήτησε αρχικά η Ηρώ. Παρόλο που σε αυτή την περίσταση, σε αντίθεση με την προηγούμενη (ΚΠ1), η σύνθεση των γεωμετρικών σχημάτων εκφράζεται κυρίως με το χειρισμό των υλικών και λιγότερο με το λόγο, η δράση της Ισμήνης έχει ρητό μαθηματικό περιεχόμενο και αντανακλά το *συλλογισμό* που τη συνοδεύει, καθώς αποδημεί το σχήμα του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και στη συνέχεια το ανα-δημιουργεί με την ένωση δύο κύβων. Η μαθηματικοποίηση σε αυτή την περίπτωση εκφράζεται κυρίως με την υποστήριξη μη-λεκτικών διαμεσολαβητών (Gejard & Melander, 2018).

Ο συμμετρικός πύραυλος (ΚΠ3)

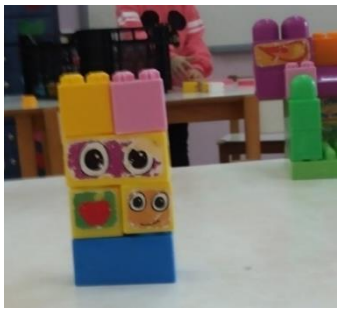
Σε ένα άλλο περιστατικό, δύο αγόρια κατασκευάζουν έναν συμμετρικό πύραυλο και τον παρουσιάζουν στην ολομέλεια με δική τους πρωτοβουλία.

> Μιχάλης: Τον φτιάξαμε όσο πιο ψηλό μπορούσαμε γιατί θα πάει στο διάστημα. Ότι βάλαμε δεξιά, βάλαμε και αριστερά, γιατί έτσι είναι οι πύραυλοι ίδιοι δεξιά και αριστερά για να μην είναι πιο βαρύς στη μια πλευρά και δεν πετάει καλά... [...] βάλαμε όρθια όλα τα παραλληλεπίπεδα γιατί θέλαμε να γίνει ψηλό, αλλά για να μην πέσει βάλαμε καλή βάση με πολλά τουβλάκια. Πάνω βάλαμε μυτερή άκρη όπως στους αληθινούς πύραυλους.
>
> Ζωή: (μια συμμαθήτρια παρατηρεί). Κάτω έχει ένα ξύλο στο πλάι αλλά δεν έχει από την άλλη (πλευρά).
>
> Σταύρος: Εκείνο δεν είναι του πύραυλου, είναι για να στέκεται ο πύραυλος μέχρι να γίνει η εκτόξευση. Μετά μένει στη Γη.
>
> Νηπιαγωγός: Τί σας δυσκόλεψε;
>
> Μιχάλης: Πάνω που έπρεπε να ισορροπήσουμε τα ξύλα και να έχει κενό.
>
> Νηπιαγωγός: Πώς το καταφέρατε;

Μιχάλης: Βάλαμε ακριβώς τα ίδια τουβλάκια δεξιά και αριστερά (ύψος) για να μην γέρνει και μετά επάνω βάλαμε ένα παραλληλεπίπεδο οριζόντια, αλλά από την μεγάλη την πλευρά για να ακουμπάνε καλά (όλη η επιφάνεια).

Νηπιαγωγός: Τί συμβουλή θα δίνατε σε κάποιο παιδί που θέλει να κάνει ο ίδιο;

Σταύρος: Να βάλουν κάτω στη βάση όλα τα μεγάλα τουβλάκια που είναι βαριά και πάνω τα πιο μικρά που είναι πιο ελαφριά.

		
ΚΠ1	ΚΠ2	ΚΠ3

Εικόνα 1: Κατασκευαστικά περιστατικά

Στο παράδειγμα αυτό, παρατηρούμε την εμπλοκή των παιδιών με διάφορα μαθηματικά αντικείμενα. Για να καταλήξουν στην τελική μορφή (Εικόνα 1, ΚΠ3), όπως φαίνεται από τις εξηγήσεις τους, δοκιμάζουν διάφορες λύσεις για τη σταθερότητα αλλά και για τη συμμετρία της κατασκευής, διερευνώντας ταυτόχρονα τα μεγέθη (συγκρίσεις) και τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (διαφορετικά μεγέθη των πλευρών των ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων κτλ.). Τα παιδιά εξετάζουν τις ιδιότητες των σχημάτων χωρίς όμως να τις διατυπώνουν ρητά, στην προσπάθειά τους να δημιουργήσουν έναν πύραυλο με συμμετρικό σχήμα. Ο Μιχάλης περιγράφοντας τα βήματα που ακολούθησαν παρουσιάζει το συλλογισμό του, ο οποίος υπονοεί τα χαρακτηριστικά του συμμετρικού σχήματος (δηλ., «*Οτι βάλαμε δεξιά, βάλαμε και αριστερά, γιατί έτσι είναι οι πύραυλοι ίδιοι δεξιά και αριστερά για να μην είναι πιο βαρύς στη μια πλευρά και δεν πετάει καλά*»). Επιπλέον, γίνονται φανερές και *συνδέσεις* διαφορετικών εννοιών που κάνουν τα ίδια τα παιδιά όπως η σύνδεση της συμμετρίας με τα γεωμετρικά σχήματα αλλά και η σύνδεση με έννοιες από το πεδίο των Φυσικών Επιστημών (βάρος, ισορροπία).

Σε αυτό περιστατικό, τα παιδιά εμπλέκονται σε μια ρεαλιστική κατάσταση επίλυσης προβλήματος με στόχο τη σταθερότητα και τη συμμετρία της κατασκευής, διατυπώνοντας ρητά τη στρατηγική που ακολούθησαν μέσα από δοκιμές και επαληθεύσεις. Καθώς το πρόβλημα αναδύεται στο

παιχνίδι τους έχει νόημα γι' αυτά. Έτσι η συμμετοχή τους είναι έντονη και συστηματική με τα μαθηματικά αντικείμενα, και οδηγεί στη διαμόρφωση ενός αρχικού κανόνα που διέπει τη δημιουργία συμμετρικών σχημάτων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με την παρούσα μελέτη επιδιώξαμε να μελετήσουμε σε βάθος τη μαθηματική γνώση που εκδηλώνεται και αναπτύσσεται στο πλαίσιο του ΚΠ στο νηπιαγωγείο σε δράσεις που ξεκινούν και κατευθύνονται από τα παιδιά. Η ανάλυση των 61 περιστατικών που εντοπίστηκαν μέσα σε ένα μήνα ανέδειξαν ένα πλούτο μαθηματικής γνώσης ειδικά στο ΚΠ, σε αντίθεση με προηγούμενες μελέτες που εστίασαν σε όλα τα είδη παιχνιδιού (Papandreou & Tsiouli, 2022· Worthington & van Oers, 2016). Τα παιδιά ενεπλάκησαν σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης (Jupri & Drijvers, 2016), καθώς εντόπιζαν στο παιχνίδι τους μαθηματικά νοήματα και τα επεξεργάζονταν. Διατύπωσαν προβληματισμούς και μαθηματικούς συλλογισμούς αναπτύσσοντας επιχειρήματα και βρίσκοντας πρωτότυπες λύσεις. Τα παιδιά, δηλαδή, έφεραν στο κέντρο του παιχνιδιού τους διάφορα μαθηματικά αντικείμενα αφενός μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ τους κι αφετέρου με τις αναστοχαστικές ερωτήσεις της ερευνήτριας. Μπόρεσαν έτσι να εκφράσουν και να συνειδητοποιήσουν μαθηματικά νοήματα και να τα επεξεργαστούν (van Oers, 1996), μετατρέποντας ταυτόχρονα αυτή την επεξεργασία σε *μαθηματικό παιχνίδι* (Sarama & Clements, 2009· Τσιούλη & Παπανδρέου, 2020)

Τα περιστατικά που συζητήθηκαν απεικονίζουν τη διαλεκτική σχέση μεταξύ φαντασίας και πραγματικότητας (Vygotsky, 2004), καθώς κατά τη διαδικασία αναπαράστασης, κύριο χαρακτηριστικό του ΚΠ, είναι ότι τα παιδιά βρίσκονται ταυτόχρονα μέσα κι έξω από το παιχνίδι. Επιπλέον, ανέδειξαν τις ευκαιρίες που παρουσιάζονται για μαθηματική μάθηση σε συνθήκες που είναι ρεαλιστικές για τα παιδιά, όχι με επιφανειακό τρόπο (Thornton, 2018), καθώς το παιχνίδι που ανέπτυξαν με το κατασκευαστικό υλικό ήταν δική τους επιλογή και φάνηκε να έχει νόημα και ενδιαφέρον γι' αυτά (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

Αν και μικρής εμβέλειας η έρευνα αυτή φαίνεται ότι εμπλουτίζει τις γνώσεις μας στο πεδίο της αυθόρμητης μαθηματικής μάθησης στο νηπιαγωγείο, η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί με τις κατάλληλες ενέργειες της εκπαιδευτικού. Άλλωστε τα πλούσια ευρήματα της έρευνας προέκυψαν από ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όπως ο εμπλουτισμός της περιοχής του κατασκευαστικού παιχνιδιού με μια μεγάλη ποικιλία υλικών για κατασκευές, αλλά και οι πρακτικές που υιοθετήθηκαν από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό. Η εξασφάλιση χρόνου για παιχνίδι, το ενδιαφέρον της για τις δράσεις των παιδιών, η αναγνώριση των προσπαθειών τους, η ενεργητική ακρόαση και οι ερωτήσεις της, όπως και η ανάληψη ευθυνών από τα παιδιά, είναι μερικές από τις πρακτικές που έχουν άμεσες προεκτάσεις για την εκπαιδευτική πράξη.

Τα ευρήματα της μελέτης συμβάλλουν στο να κατανοήσουμε: α) την ποσότητα και το εύρος της μαθηματικής γνώσης που εκδηλώνουν και καλλιεργούν τα παιδιά όταν παίζουν με ποικίλα υλικά κατασκευών, β) ότι αυτή η μαθηματική γνώση αυξάνεται όταν παρέχεται πλούσιο υλικό και χρόνος στα παιδιά να εμπλακούν σε κατασκευές, προβληματισμούς και αλληλεπιδράσεις και γ) τον ρόλο του εκπαιδευτικού ως ενεργό ακροατή και διευκολυντή, ο οποίος αποτελεί καταλυτικό παράγοντα για την εμπλοκή των παιδιών σε μαθηματικές αναζητήσεις και αλληλεπιδράσεις με νόημα, διάρκεια και βάθος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Broström, S. (2017). A dynamic learning concept in early years' education: A possible way to prevent schoolification. *International Journal of Early Years Education, 25*(1), 3-15.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research-planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Boston: Pearson.

Ginsburg, H. P., Lin, C., Ness, D., & Seo, K. H. (2003). Young American and Chinese children's everyday mathematical activity. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 235-258.

Gejard, G., & Melander, H. (2018) Mathematizing in preschool: children's participation in geometrical discourse. *European Early Childhood Education Research Journal, 26*(4), 495-511.

Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(9), 2481-2502.

ΙΕΠ (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής) (2014). *Πρόγραμμα Σπουδών για το Νηπιαγωγείο*. ΥΠΕΠΘ. Ανακτήθηκε από https://www.iep.edu.gr/images/IEP/programmata_spoudon/prosxoliki_elpaideysi/meros_1_paidagogiko_plaisio.pdf

NCCA (National Council for Curriculum and Assessment). 2014. *Mathematics in Early Childhood and Primary Education (3–8 Years): Teaching and Learning.* Ανακτήθηκε από https://www.ncca.ie/media/2147/ncca_research_report_18.pdf.

Nilsson, M., Ferholt, B., & Lecusay, R. (2018). 'The playing-exploring child': Reconceptualizing the relationship between play and learning in early childhood education. *Contemporary Issues in Early Childhood, 19*(3), 231-245.

Papandreou, M., & Tsiouli, M. (2022). Noticing and understanding children's everyday mathematics during play in early childhood classrooms. *International Journal of Early Years Education. 30*(4), 730-747.

Papandreou, M., & Konstantinidou, Z. (2020). 'We make stories one meter long': Children's participation and meaningful mathematical learning in ECE. *Review of Science, Mathematics and ICT Education*, 14(2).

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Building blocks and cognitive building blocks: Playing to know the world mathematically. *American Journal of Play, 1*(3), 313-337.

Thornton, S. (2018). Slow Maths: A Metaphor of Connectedness for Early Childhood Mathematics. In: Kinnear, V., Lai, M., Muir, T. (eds) *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning. Early Mathematics Learning and Development*. Springer, Singapore.

Trawick-Smith, J., Swaminathan, S., & Liu, X. (2015). The relationship of teacher–child play interactions to mathematics learning in preschool. *Early Child Development and Care, 186(*5), 716-733.

Τσιούλη, Μ., & Παπανδρέου, Μ. (2019). Διερευνώντας το αυθόρμητο 'μαθηματικό παιχνίδι' των παιδιών στο νηπιαγωγείο. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 12*, 42-62.

van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play. *European Early Childhood Research Journal, 4*(1), 71-87.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (2004) Imagination and Creativity in Childhood, *Journal of Russian & East European Psychology, 42*(1), 7-97.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713-717). Springer, Cham.

Worthington, M., & van Oers, B. (2016). Pretend play and the cultural foundations of mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal, 24*(1), 51-66.

ΜΠΟΡΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΙΚΑΝΟΙ ΛΥΤΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ;

Σμαράγδα Καϊμάκη, Μαριάννα Τζεκάκη

Δασκάλα, Υπ. Διδ. Α.Π.Θ., Ομότιμη Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

smkaimaki@yahoo.gr, tzekaki@auth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζεται η διερεύνηση των ικανοτήτων και των στρατηγικών επίλυσης μαθηματικού προβλήματος που χρησιμοποιούν παιδιά ηλικίας 10 ετών μιας τυπικής τάξης μαθηματικών σε σύγκριση με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των ικανών-δημιουργικών λυτών. Με βάση τα στοιχεία αυτά, προκύπτουν οι ανάγκες των παιδιών που θα πρέπει να ληφθούν υπόψη για τον σχεδιασμό ενός προγράμματος παρέμβασης που θα αποσκοπεί στη βελτίωση αυτών των ικανοτήτων και στρατηγικών συγκριτικά με αυτές ενός «ικανού-δημιουργικού λύτη».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση προβλήματος έχει επισημανθεί ως κεντρικό θέμα στη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών και συστήνεται να βρίσκεται στο επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών (Vale et al., 2018). Για τον λόγο αυτό απασχολεί συνεχώς και την έρευνα των μαθηματικών. Παρόλο όμως που η ΕΜΠ αποτελεί μια βασική δεξιότητα, τα παιδιά φαίνεται να έχουν αναπτύξει ανεπαρκώς τις σχετικές ικανότητες όπως αποδεικνύουν τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας σε τεστ, όπως η αξιολόγηση PISA του 2022 (OECD, 2022). Στην εργασία αυτή αναλύονται οι ικανότητες ΕΜΠ που εμφανίζουν παιδιά του δημοτικού, κάτι που είναι σημαντικό προκειμένου να αποτυπωθεί ο τρόπος που τα παιδιά επεξεργάζονται ένα πρόβλημα. Τα ευρήματα αυτά θα αποτελέσουν τη βάση για τον σχεδιασμό μιας παρέμβασης που θα αποσκοπεί στην ανάπτυξη χαρακτηριστικών «ικανού- δημιουργικού λύτη» προβλημάτων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η ΕΜΠ είναι η διαδικασία καθορισμού μιας σειράς ενεργειών που πραγματοποιούνται για να βρεθεί μια λύση σε μια άγνωστη κατάσταση (Milinković, 2022). Ο λύτης προβλημάτων σύμφωνα με τον Polya ακολουθεί τέσσερα βασικά στάδια (που γενικά γίνονται αποδεκτά κι από άλλους ερευνητές). Τα στάδια αυτά είναι: η κατανόηση του προβλήματος, η κατάστρωση ενός σχεδίου επίλυσης, η εκτέλεση του σχεδίου και ο έλεγχος της λύσης (Polya, 1998). Ο ικανός λύτης προβλημάτων ακολουθεί τα στάδια αυτά, αλλά επιπλέον σε κάθε στάδιο εμφανίζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που τον κάνουν να ξεχωρίζει. Έχει καλή γνώση των στρατηγικών ΕΜΠ, τις αξιοποιεί και τις προσαρμόζει ανάλογα με την προβληματική κατάσταση (Haavold & Sriraman, 2022). Οι σχετικές στρατηγικές αποτελούν ένα προτεινόμενο σχέδιο ενεργειών που αναπτύχθηκε για να παρέχει μια διαδρομή για την εύρεση λύσης στα προβλήματα (Milinković, 2022).

Ικανότητες Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος

Ο ικανός λύτης διαθέτει ικανότητες που σχετίζονται με την κατανόηση, την ευελιξία, την ευχέρεια, την πρωτοτυπία αλλά και τον έλεγχο. Δηλαδή τα χαρακτηριστικά του συνδέονται με τη δημιουργικότητα (Mann et al., 2017).

Η ικανότητα της κατανόησης σημαίνει ότι ο λύτης κατανοεί σε βάθος το πρόβλημα που του δίνεται. Εστιάζει στα δομικά χαρακτηριστικά του προβλήματος αντί για τα επιφανειακά και μπορεί να κατασκευάσει αναπαραστάσεις που βοηθούν στη λύση (Haavold & Sriraman, 2022).

Ο ικανός λύτης είναι ευέλικτος. Η ευελιξία είναι η ικανότητα του λύτη να σκεφτεί με διαφορετικούς τρόπους το ίδιο πρόβλημα, να το μελετήσει από διαφορετική σκοπιά, κάτι που σημαίνει ότι συσχετίζει διαφορετικά πεδία γνώσης (Vale et al., 2018). Η ικανότητα αυτή παρατηρείται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε στάδιο.

Η ευχέρεια έχει να κάνει με την εύρεση πολλών λύσεων, πολλών ιδεών και προσεγγίσεων για την επίλυση ενός προβλήματος, οι οποίες στη συνέχεια θα αξιολογηθούν για το κατά πόσο σχετίζονται με το πρόβλημα (Mann et al., 2017). Από την πληθώρα των λύσεων ο λύτης θα επιλέξει την πιο κατάλληλη (Vale et al., 2018). Το χαρακτηριστικό αυτό παρατηρείται στο δεύτερο, τρίτο και τέταρτο στάδιο.

Ο ικανός λύτης αναζητά πρωτότυπες λύσεις (Mann et al., 2017). Προσπαθεί να σκεφτεί πολλούς τρόπους επίλυσης και από τους τρόπους αυτούς επιλέγει τη λύση που τον ικανοποιεί, δηλαδή είναι πιο «εκλεπτυσμένη» (Kruteskii, 1976).

Τέλος, μπορεί να εξηγήσει σε βάθος μια λύση και να εντοπίσει τα περίπλοκα στοιχεία της (επεξεργασία) (Mann et al., 2017). Ελέγχει, δηλαδή αναστοχάζεται τις διαδικασίες που τον οδήγησαν στη λύση (Leikin & Kloss, 2011). Ωστόσο ακόμα και μαθητές που έχουν μια άνεση στην ΕΜΠ, δεν εμφανίζουν αυτά τα χαρακτηριστικά.

Ευρήματα σχετικά με τις ικανότητες ΕΜΠ

Γενικότερα οι έρευνες που έχουν γίνει σε μαθητές αναδεικνύουν τις ελλείψεις τους σε κάθε στάδιο ΕΜΠ. Φαίνεται ότι τα παιδιά, και ιδιαίτερα αυτά με μέσες ή χαμηλές επιδόσεις, έχουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων εκτός ρουτίνας (Yayuk et al., 2020). Πολλά από αυτά δυσκολεύονται στην κατανόηση του προβλήματος και της μαθηματικής γλώσσας, κάτι που οδηγεί σε παρανοήσεις (Osman et al., 2018). Αυτό με τη σειρά του οδηγεί σε λανθασμένο σχεδιασμό και δυσκολία στη σύνδεση των εννοιών (Nurkaeti, 2018).

Αναφορικά με τη διαδικασία επίλυσης, όταν οι μαθητές υποχρεούνται να σκεφτούν δημιουργικά σε ένα δεδομένο πρόβλημα, η λύση ακολουθεί και πάλι τις συνήθεις αλγοριθμικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για τα προβλήματα ρουτίνας (Hendriana & Fadhillah, 2019). Τα ποσοστά σε ό,τι αφορά τη δημιουργικότητα και πιο συγκεκριμένα σε πρωτοτυπία, ευελιξία και ευχέρεια είναι χαμηλά (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013). Σε σχέση με την ευελιξία φάνηκε πως οι μαθητές εφαρμόζουν την ίδια στρατηγική σε διαφορετικού τύπου προβλήματα, ενώ αδυναμία υπάρχει και στη γενίκευση της στρατηγικής (Erdogan, 2015).

Κατά τον έλεγχο τα παιδιά επαναλαμβάνουν τις λύσεις τους αλλά στην ουσία εξηγούν ξανά τις σκέψεις τους, χωρίς να τις εξετάζουν ή να αντικαθιστούν κάτι (Kiss & Ambrus, 2022).

Μπορούν τα χαρακτηριστικά αυτά να αλλάξουν;

Σχετικές έρευνες υποστηρίζουν ότι ορισμένες ικανότητες ΕΜΠ μπορούν να βελτιωθούν. Πιο συγκεκριμένα, η ευχέρεια και η ευελιξία, που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα, εμφανίζουν σημαντική δυναμική ανάπτυξης μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες που αποτελούν πρόκληση για τους μαθητές (Leikin, 2018). Τέτοιες δραστηριότητες είναι για παράδειγμα τα ανοιχτού τύπου προβλήματα. Οι ανοιχτές μαθηματικές εργασίες αποτελούν εργαλεία για την προώθηση της ευελιξίας και της δημιουργικότητας (Leikin et al., 2023). Άρα, λύνοντας ανοιχτού τύπου προβλήματα αναπτύσσεται η ευελιξία αλλά και η εξειδίκευση στην ΕΜΠ (Leikin, 2018). Τέτοια ευρήματα μπορούν να αποτελέσουν μια βάση για τον σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης που στοχεύει στην ανάπτυξη ικανοτήτων ΕΜΠ.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Η έρευνα που παρουσιάζεται στη συνέχεια αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης μελέτης που έχει σκοπό, αρχικά, να διερευνήσει τις ικανότητες και τις στρατηγικές ΕΜΠ που χρησιμοποιούν παιδιά ηλικίας 10 ετών μιας τυπικής τάξης μαθηματικών, συγκριτικά με τις ικανότητες των «ικανών-δημιουργικών λυτών» και έπειτα να εξετάσει τις δυνατότητες βελτίωσής τους μέσα από τη συμμετοχή των παιδιών σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης. Στο κείμενο αυτό παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα της διερεύνησης των ικανοτήτων ΕΜΠ σε παιδιά δημοτικού, καθώς και μια πρόταση για πρόγραμμα παρέμβασης με στόχο την καλλιέργεια των ικανοτήτων των «ικανών-δημιουργικών λυτών στο σύνολο των μαθητών.

Ερευνητικά Ερωτήματα

- Ποιες από τις ικανότητες ικανών λυτών εντοπίζονται στους μαθητές μιας τυπικής Ε΄ τάξης μαθηματικών;
- Ποιες είναι οι σημαντικότερες ανάγκες/ ελλείψεις των μαθητών σε σχέση με τις ικανότητες ικανών λυτών;
- Ποιους στόχους πρέπει να έχει μια παρέμβαση για την καλλιέργεια ικανοτήτων ικανών λυτών;

Ικανότητες Ικανών Λυτών

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, ικανός θεωρείται ο λύτης που μπορεί να λύσει προβλήματα «εκτός ρουτίνας» και ανοιχτού τύπου (Leikin & Kloss, 2011) το σημαντικό όμως είναι ότι στην πορεία επίλυσης εμφανίζει ορισμένα χαρακτηριστικά.

Πιο αναλυτικά στο πρώτο στάδιο ο ικανός λύτης (α) διακρίνει δεδομένα και ζητούμενα (β) διαχωρίζει τις περιττές πληροφορίες και (γ) κατανοεί απευθείας τις σχέσεις (Krutetski, 1976). Προσπερνάει τα επιφανειακά χαρακτηριστικά και (δ) μπορεί να δημιουργήσει μια αναπαράσταση που αναδεικνύει τις σχέσεις (Haavold & Sriraman, 2022). Επιλέγει τη στρατηγική κατανόησης που θεωρεί κατάλληλη και (ε) παρουσιάζει ευελιξία, δηλαδή την αλλάζει εάν χρειαστεί (Carreira & Amaral, 2018).

Κατά το δεύτερο στάδιο, ο ικανός λύτης (α) συνδέει το πρόβλημα που έχει να λύσει με προβλήματα που έλυσε στο παρελθόν (Krutetski, 1976), (β) δημιουργεί ένα σχέδιο λύσης σχεδιάζοντας λύσεις από διαφορετικές στρατηγικές (ευελιξία) (Carreira & Amaral, 2018) και μπορεί (γ) να βρει πολλές λύσεις για το πρόβλημα (ευχέρεια) (Mann et al., 2017).

Αντίστοιχα στο τρίτο στάδιο ο ικανός λύτης (α) επιλέγει τον πιο εκλεπτυσμένο τρόπο λύσης και εφαρμόζει . Μπαίνει στη διαδικασία (β) να αλλάξει στρατηγική, εάν δεν οδηγεί κάπου (ευελιξία) (Haavold & Sriraman, 2022). Σε ένα ανοιχτό πρόβλημα (γ) βρίσκει πολλές λύσεις, δηλαδή δίνει πολλές σωστές απαντήσεις (ευχέρεια) (Mann et al., 2017).

Τέλος στο τέταρτο στάδιο ο ικανός λύτης (α) επιστρέφει και ελέγχει αν έχει απαντήσει στο ερώτημα (Polya, 1998), (β) αναστοχάζεται τις διαδικασίες που ακολούθησε (Leikin & Kloss, 2011). Αναζητά (γ) επιπλέον λύσεις (ευχέρεια) ή μια ποιοτικότερη λύση (ευελιξία), προκειμένου να ικανοποιήσει την αισθητική του (Krutetski, 1976).

Μεθοδολογία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Οκτώβριο του 2023 και είναι συνδυασμός ποσοτικής και ποιοτικής. Πραγματοποιήθηκε μια γραπτή αξιολόγηση των ικανοτήτων ΕΜΠ των παιδιών και της ικανότητας να προχωρήσουν σε περισσότερες λύσεις με τεστ. Με βάση τα τεστ επιλέχθηκαν 12 μαθητές, τριών κατηγοριών (ικανοί, μέτριοι και μη ικανοί λύτες) οι οποίοι κλήθηκαν σε συνέντευξη ώστε να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν. Στα αποτελέσματα καταγράφονται κυρίως τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των μαθητών.

Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας είναι 52 μαθητές και μαθήτριες από ιδιωτικό σχολείο της Θεσσαλονίκης της Ε τάξης δημοτικού, δηλαδή 9-10 ετών, καθώς τα περισσότερα χαρακτηριστικά δημιουργικότητας και πιο συγκεκριμένα η ευελιξία και η πρωτοτυπία παρατηρούνται στην ηλικία αυτή (Sak & Maker, 2006).

Εργαλείο έρευνας

Η καταγραφή των ικανοτήτων ΕΜΠ πραγματοποιήθηκε με τεστ που αποτελούνταν από 3 λεκτικά προβλήματα ανοιχτού τύπου και εκτός ρουτίνας (Leikin et al., 2023), που συνοδεύονταν από οδηγίες και ερωτήσεις για κάθε στάδιο επίλυσης. Τα προβλήματα αυτού του τύπου και οι οδηγίες βοηθούν στην ανάδειξη των ικανοτήτων επίλυσης σε κάθε στάδιο.

Το πρώτο πρόβλημα είναι αριθμητικό πρόβλημα ασαφούς δομής με «παραπλανητικές» λέξεις-κλειδιά και περιττές πληροφορίες. Με το πρόβλημα αυτό εξετάζονται οι ικανότητες κατανόησης προβλήματος.

> Ο Λεωνίδας, ο Σπύρος και η Ηρώ παίζουν μπάσκετ. Ο Λεωνίδας και ο Σπύρος έβαλαν μαζί συνολικά 36 πόντους ενώ η Ηρώ έβαλε μόνη της 21 πόντους. Νικητής θα βγει το παιδί που θα φτάσει πρώτο τους 30 πόντους. Αν ξέρουμε ότι ο Λεωνίδας πέτυχε τους διπλάσιους πόντους από αυτούς του Σπύρου, πόσους πόντους νομίζεις ότι χρειάζεται το κάθε αγόρι για να βγει νικητής; (Με αλλαγές από τον διαγωνισμό Καγκουρό 2018)

Το δεύτερο πρόβλημα είναι αριθμητικό, ανοιχτού τύπου. Με το πρόβλημα αυτό εξετάζεται η ευελιξία, η ευχέρεια, η αιτιολόγηση αλλά και οι ικανότητες κατανόησης.

Ο κ. Κωνσταντίνος χώρισε τα παιδιά σε ομάδες για να φτιάξουν μια κατασκευή. Τους έδωσε τους αριθμούς 15, 20, 23, 25 και τους είπε ότι το παιδί που θα τύχει τον αριθμό που δεν ανήκει στην ίδια κατηγορία με τους υπόλοιπους, θα είναι αρχηγός της ομάδας. Ποιον αριθμό θα τύχει ο αρχηγός; Νομίζεις ότι υπάρχει όμως κι άλλη περίπτωση; (Klavir & Hershkovitz, 2008)

Το τρίτο πρόβλημα είναι χωρικό, ανοιχτό. Αναλύοντας τις λύσεις των παιδιών διαπιστώνεται η ικανότητα της ευελιξίας, της ευχέρειας αλλά και η πρωτοτυπία των λύσεων.

Ο Δημήτρης και η Κλειώ φτιάχνουν μια κατασκευή με την κυρία Χρύσα. Η κυρία Χρύσα τούς έδωσε ένα ορθογώνιο χαρτόνι με μήκος 3 εκ., πλάτος 4 εκ. και εμβαδό 12 τ. εκ. χωρισμένο σε τετραγωνάκια του 1 τ.εκ.. Πρέπει να κόψουν από αυτό δύο ολόιδια κομμάτια. Ποια μπορεί να είναι τα κομμάτια τους έτσι ώστε να μην πεταχτεί καθόλου χαρτόνι; (Με αλλαγές από τον διαγωνισμό Καγκουρό 2017)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται συνολικά οι σωστές και λάθος λύσεις που δόθηκαν από τους 52 μαθητές σε όλα τα προβλήματα. Τα καλύτερα αποτελέσματα εμφανίζονται στο δεύτερο πρόβλημα που έλυσαν 38 από τους 52 μαθητές, ενώ λιγότερο καλά είναι τα αποτελέσματα που καταγράφονται στο πρώτο πρόβλημα, γεγονός που μπορεί να σχετίζεται με το είδος του.

Πρόβλημα	Μαθητές που έλυσαν σωστά	Μαθητές που δεν έλυσαν	Μαθητές που έλυσαν λάθος
1ο πρόβλημα	18	9	25
2ο πρόβλημα	38	14	0
3ο πρόβλημα	41	11	9

Πίνακας 1: Απαντήσεις παιδιών

Αναφορικά με τις ικανότητες κατανόησης του προβλήματος, όπως αναλύθηκαν προηγούμενα, καταγράφονται τα ακόλουθα αποτελέσματα στον Πίνακα 2. Τα περισσότερα παιδιά απλώς διάβασαν τα προβλήματα. Δεν παρουσίασαν σχετική ευελιξία (ε), καθώς τα παιδιά επέμεναν σε αυτή τη στρατηγική ή ζητούσαν τη βοήθεια της εκπαιδευτικού.

Χαρακτηριστικά κατανόησης	1ο	2ο	3ο
α. Διαχωρίζει δεδομένα ζητούμενα	18	38	28
β. Διαχωρίζει περιττή πληροφορία	31	-	-
γ. Αναγνωρίζει τις σχέσεις	22	38	
δ. Αναπαριστά	6	-	

Πίνακας 2: Χαρακτηριστικά ικανού λύτη που παρατηρούνται κατά την κατανόηση

Οι μαθητές κατέγραψαν σωστά τα δεδομένα και τα ζητούμενα και στα τρία προβλήματα. Είναι μια διαδικασία που την έκαναν μόνο επειδή ζητούνταν, αλλά τη θεώρησαν περιττή. Υπήρχε επίσης μια περιττή πληροφορία, που οι περισσότεροι δεν χρησιμοποίησαν.

Το πιο απαιτητικό πρόβλημα, από πλευράς κατανόησης, ήταν το πρώτο (ασαφούς δομής), για το οποίο οι μαθητές είχαν παρανοήσεις λόγω των δύο λέξεων-κλειδί («διπλάσιο» και «μαζί συνολικά)» που φάνηκαν παραπλανητικές. Από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι οι μαθητές εστίασαν στα επιφανειακά χαρακτηριστικά. Η φράση που τους μπέρδεψε ήταν το «μαζί συνολικά». Όπως αναφέρει ένας μαθητής: «Το πρόβλημα έλεγε ότι έβαλαν μαζί συνολικά 36 πόντους, άρα έβαλαν ίσα καλάθια.».

Αναφορικά με το δεύτερο στάδιο, ελάχιστα παιδιά κατέστρωσαν σχέδιο, αντίθετα τα περισσότερα, μόλις διάβασαν τα προβλήματα, προχώρησαν απευθείας στην εκτέλεση πράξεων, δηλαδή στο τρίτο στάδιο. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά του ικανού λύτη που παρατηρήθηκαν στο στάδιο αυτό.

Χαρακτηριστικά σχεδίου επίλυσης	1ο	2ο	3ο
α. Προτείνει ποιοτική λύση	7	-	12
β. Αλλάζει στρατηγική (ευελιξία)	8	-	-
γ. Προτείνει πολλές λύσεις (ευχέρεια)	-	7	15

Πίνακας 3: Χαρακτηριστικά ικανού λύτη που παρατηρούνται στο στάδιο επίλυσης

Στο πρώτο πρόβλημα, οι μαθητές, αφού το διάβασαν, άρχισαν να δοκιμάζουν τους αριθμούς που ικανοποιούσαν τη συνθήκη, δηλαδή κατέφυγαν στη στρατηγική των τυχαίων δοκιμών. Επειδή οι αριθμοί ήταν «εύκολοι», η πλειοψηφία απάντησε σωστά. 7 παιδιά ανακάλυψαν τη σχέση και προχώρησαν σε ποιοτικές λύσεις, όπως διαίρεση ή σχέδιο.

Στο δεύτερο πρόβλημα η πλειοψηφία των μαθητών αφού το διάβασε και θεώρησε ότι το κατανοεί, έψαξε να βρει μια λύση και στη συνέχεια σταμάτησε εκεί, με πιο συνηθισμένη απάντηση τον αριθμό 23 (γιατί δεν ανήκει στην προπαίδεια του 5). Μόλις 7 παιδιά πρότειναν και δεύτερη λύση – συνήθως το 20 (επειδή είναι ζυγός αριθμός)- και κανείς περισσότερες. Οι περισσότερες λύσεις που συνοδεύονταν από ποιοτική αιτιολόγηση, χαρακτηρίζουν έναν ικανό λύτη.

Στο τρίτο πρόβλημα 24 παιδιά πρότειναν 2 και περισσότερες λύσεις όμως περιορίστηκαν στις συμβατικές λύσεις (απλά, γεωμετρικά σχήματα). Οι 6 μαθητές που βρήκαν περισσότερες από 4 λύσεις, μεταξύ των οποίων και πρωτότυπες (περίπλοκα σχήματα), θεωρήθηκαν πιο ικανοί.

Προχωρώντας στο τέταρτο στάδιο, στις περισσότερες περιπτώσεις απουσίαζε ο έλεγχος. Λίγοι ήταν επίσης οι μαθητές που έκαναν έλεγχο με επιστροφή στα ζητούμενα των προβλημάτων. Αυτοί που έλεγξαν, είδαν μόνο τις πράξεις και δεν έκαναν ελέγχους με βάση την εκφώνηση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Με βάση τα αποτελέσματα προκύπτουν και οι ικανότητες επίλυσης των μαθητών συγκριτικά με αυτές του ικανού λύτη. Αναφορικά με την κατανόηση, τα παιδιά επιμένουν να διαβάζουν ένα πρόβλημα, άρα είτε δεν γνωρίζουν στρατηγικές κατανόησης είτε λείπει η ευελιξία. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνει το εύρημα ότι τα παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση του προβλήματος (Osman et al., 2018). Επιπλέον, εστιάζουν στα επιφανειακά

χαρακτηριστικά, κάτι που σύμφωνα με τους Haavold & Sriraman (2022) κάνουν οι «αρχάριοι» λύτες.

Συνολικά, παρατηρείται ότι οι μαθητές επιδιώκουν αμέσως την εύρεση της λύσης, αντί να «μένουν» σε κάθε στάδιο και ιδιαίτερα σε αυτό της κατανόησης. Προχωρούν άμεσα στην εξερεύνηση πιθανών λύσεων, αλλά χωρίς οργάνωση, κάτι που συμφωνεί με τα ευρήματα από Erdogan (2015). Συνήθως, παρουσιάζουν ένα αποτέλεσμα χωρίς να μπορούν να το αιτιολογήσουν, ενώ λίγοι δείχνουν ευχέρεια στην εύρεση πολλών τρόπων λύσης, όπως αντίστοιχα παρατηρήθηκε και στην έρευνα των Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou (2013). Οι μαθητές φαίνεται ακόμα να ζητούν τη βοήθεια του δασκάλου, όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες, αντί να εφαρμόζουν διαφορετικές στρατηγικές, κάτι που επιβεβαιώνει τα ευρήματα των Yayuk et al. (2020). Στο τελικό στάδιο ελέγχου τα παιδιά θεωρούν ότι έλεγξαν τις λύσεις τους, ωστόσο ο τρόπος που το έκαναν αποδεικνύεται να είναι ανεπαρκής, αφού δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τα λάθη τους. Αυτό το εύρημα σχετίζεται με τη διαδικαστική αντιμετώπιση των προβλημάτων, η οποία οδηγεί στην αποφυγή του ελέγχου της λύσης (Nurkaeti, 2018).

Με βάση αυτές τις ελλείψεις κρίνεται απαραίτητο να σχεδιαστεί και μια παρέμβαση με σκοπό την καλλιέργεια ικανοτήτων επίλυσης. Είναι ζωτικής σημασίας να δοθεί έμφαση στα στάδια επίλυσης, τα οποία πρέπει να εξεταστούν τόσο ξεχωριστά όσο και συνολικά. Για τον λόγο αυτό, είναι απαραίτητη η δημιουργία "κύκλων" για κάθε στάδιο, που θα αποτελούνται από δραστηριότητες ενισχυτικές των χαρακτηριστικών του "ικανού-δημιουργικού" λύτη που αντιστοιχούν στο εκάστοτε στάδιο. Είναι σημαντικό να αξιοποιηθούν προβλήματα ανοιχτού τύπου και οι δραστηριότητες να εστιάζουν κάθε φορά σε διαφορετικό χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, στο στάδιο της κατανόησης, η παρέμβαση μπορεί να επικεντρωθεί στις αναπαραστάσεις και στη διάκριση των πληροφοριών. Αντίστοιχα, να σχεδιαστούν δραστηριότητες που να ενισχύουν την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία των λύσεων. Τέλος, εξέχουσα σημασία έχει η καλλιέργεια της ικανότητας ελέγχου. Συνοπτικά, η διαδικασία χρειάζεται να περιλαμβάνει συνεκτικούς "κύκλους" δραστηριοτήτων για κάθε στάδιο, προσδίδοντας ταυτόχρονα έμφαση στην εξέλιξη των επιθυμητών χαρακτηριστικών.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Carreira, S., & Amaral, N. (2018). Mathematical problem solving beyond school - a tool for highlighting creativity in children's solutions. In N. Amado et al. (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect,* (pp.187-217). Cham, Switzerland: Springer.

Erdogan, A. (2015). Turkish primary school students' strategies in solving a nonroutine mathematical problem and some implications for the curriculum design and implementation). *International Journal for Mathematics Teaching & Learning,* 1–27.

Haavold, P. Ø., & Sriraman, B. (2022). Creativity in problem solving: integrating two different views of insight. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(1), 83–96.

Hendriana, H., & Fadhillah, F. M. (2019). The students' mathematical creative thinking ability of junior high school through problem-solving approach. *Infinity Journal*, *8*(1), 11-20

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM*, *45*(2), 167-181.

Kiss, M., & Ambrus, A. (2022). How students control their work in the mathematical problem-solving process. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference on Problem Solving in Mathematics Education - ProMath 2022*, (pp.3–17). Faculty of Education, Aristotle University of Thessaloniki

Klavir, R., & Hershkovitz, S. (2008). Teaching and evaluating 'open-ended' problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 20(5),* 1–24.

Krutetskii, V. A., Kilpatrick, J., & Izaak Wirszup. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. The University of Chicago Press.

Leikin, R., & Kloss, Y. (2011). Mathematical creativity of 8th and 10th grade students. In M. Pytlak, E. Swoboda, & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 1084–1094). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Leikin, R. (2018). Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students. In N. Amado et al. (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving: A Focus on Technology, Creativity and Affect*, (pp. 387–397). Switzerland: Springer.

Leikin, R., Klein, S., Waisman, I. (2023). To what extent are open problems open? Interplay between problem context and structure. In: Cai, J., Stylianides, G.J., Kenney, P.A. (Eds.) *Research Studies on Learning and Teaching of Mathematics. Research in Mathematics Education*, (pp. 49-69). Springer, Cham.

Mann, E. L., Chamberlin, S. A., & Graefe, A. K. (2017). The prominence of affect in creativity: Expanding the conception of creativity in mathematical problem solving. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Advances in mathematics education. Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond*, (pp. 57–73). Springer.

Milinković, J. (2022). Transformation as a strategy in problem-solving. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference on Problem Solving in Mathematics Education - ProMath 2022*, (pp. 53–65). Faculty of Education, Aristotle University of Thessaloniki.

Nurkaeti, N. (2018). Polya's strategy: an analysis of mathematical problem-solving difficulty in 5th grade elementary school. EduHumaniora. *Journal of Basic Education Cibiru Campus*, *10*(2), 140-147.

OECD. (2022). *PISA 2022 Results: Country Notes - Greece*. Retrieved from https://www.oecd.org/publication/pisa-2022-results/country-notes/greece-a24e696b/

Osman, S., Che Yang, C. N. A., Abu, M. S., Ismail, N., Jambari, H., & Kumar, J. A. (2018). Enhancing Students' Mathematical Problem-Solving Skills through Bar Model Visualisation Technique. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(3), 273-279.

Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω* (3η Έκδοση) Αθήνα: Καρδαμίτσα.

Sak, U., & Maker, C. J. (2006). Developmental variation in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age, and knowledge. *Creativity research journal*, *18*(3), 279-291.

Yayuk, E., Purwanto, As'ari, A. R., & Subanji. (2020). Primary school students' creative thinking skills in mathematics problem solving. *European Journal of Educational Research*, 9(3), 1281-1295.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A. (2018). The power of seeing in problem solving and creativity: An Issue Under Discussion. In Amado et al. (Eds.) *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. Research in Mathematics Education*, (pp. 243-272). Springer, Cham.

Αναρτημένες Εργασίες

Ο ΧΡΟΝΟΣ ΣΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΚΟ ΣΥΓΚΕΙΜΕΝΟ

Νικόλαος Μακράκης

University of Klagenfurt, Αυστρία

nimakrakis@edu.aau.at

Ο χρόνος είναι ιδιαίτερη διάσταση της μαθηματικής εκπαίδευσης και της μαθηματικής αξιολόγησης. Η πίεση χρόνου σε διαγωνίσματα μαθηματικών και η έμφαση για ταχύτητα της δίνουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά με κοινωνικές και πολιτικές προεκτάσεις (Walen & Williams, 2002). Πώς επηρεάζουν τα χρονικά περιθώρια διαγωνισμάτων και η ανάγκη για ταχύτητα τους μαθητές όταν προετοιμάζονται για αυτά; Πώς τους επηρεάζουν την ώρα που γράφουν ένα τέτοιο διαγώνισμα; Πώς βλέπουν οι σχεδιαστές διαγωνισμάτων την χρονική διάσταση τους και την ταχύτητα στα μαθηματικά; Πώς αυτή συνδέεται με κοινωνικοπολιτικές διαστάσεις την μαθηματικής εκπαίδευσης;

Μελετάω αυτά τα ζητήματα παίρνοντας σαν μελέτη περίπτωσης τις πανελλαδικές εξετάσεις μαθηματικών και συλλέγοντας τέσσερα είδη δεδομένων που φαίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Είδη δεδομένων

1. Συνεντεύξεις με μαθητές/μαθήτριες *πριν* τις εξετάσεις μαθηματικών των πανελληνίων
2. Συνεντεύξεις με μαθητές/μαθήτριες *μετά* τις εξετάσεις μαθητικών των πανελληνίων
3. Παρουσία σε διαγωνίσματα προσομοίωσης πανελληνίων σχολείων ή φροντιστηρίων και συνέντευξη των μαθητών/μαθητριών αμέσως μετά το διαγώνισμα
4. Συνεντεύξεις με θεματοθέτες πανελληνίων μαθηματικών

Σκοπεύω να αναλύσω τα δεδομένα αρχικά με θεματική ανάλυση και έπειτα με ανάλυση λόγου. Θα προσπαθήσω να περιγράψω τα βασικά θέματα που αναφέρουν τα υποκείμενα, τα χαρακτηριστικά των λόγων τους και τους ανταγωνισμούς μεταξύ των λόγων σε σχέση με την διαμόρφωση των ταυτοτήτων τους μέσα στο κοινωνικοπολιτικό πλαίσιο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Walen, S. & Williams, S. (2002). A matter of time: emotional responses to timed mathematics tests. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 361–378.

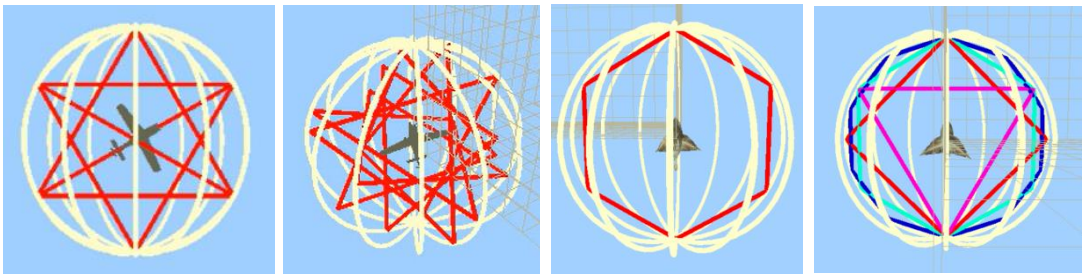
Η ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΤΗΤΑΣ, ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Κορομπλή Χαρίκλεια

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (ΕΚΠΑ)

harthekor@gmail.com

Η παρούσα μελέτη σχεδιάζει και υλοποιεί μία ανοιχτή διερεύνηση με το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2, πάνω στο ζήτημα της εγγραψιμότητας. Απευθύνεται σε παιδιά Γ' Γυμνασίου και αφορά το σχεδιασμό του εσωτερικού μίας τρελόμπαλας - ουσιαστικά δηλαδή, την εγγραφή δισδιάστατων ή τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων σε κύκλο και σε σφαίρα. Ο σχεδιασμός αποτελείται από ομαδικές δραστηριότητες, που παραμένουν ανοιχτές και διαρθρώνεται σε 3 φάσεις: Στην 1η φάση τα παιδιά επεξεργάζονται δοσμένες διαδικασίες, στις οποίες έχουν ενσωματωθεί λάθη (εσφαλμένες μαθηματικές σχέσεις)· τα παιδιά καταπιάνονται με την «ανακάλυψη» τους, τη διόρθωσή τους [debugging] και τη γενίκευση τους ή τη χρήση τους για κατασκευή νέων μοντέλων. Κατά την 2η Φάση, η κάθε ομάδα επιλέγει ένα δισδιάστατο αντικείμενο (πχ γράμμα, γεωμετρικό σχήμα, κλπ) και επιχειρεί να το εγγράψει σε σφαίρα (τρελομπαλάκι), ενώ στην 3η Φάση η ελεύθερη διερεύνηση επεκτείνεται στην επιλογή και εγγραφή ενός τρισδιάστατου αντικειμένου σε σφαίρα, ανά ομάδα. Η παρέμβαση σχεδιάστηκε στα πλαίσια της έρευνας σχεδιασμού (Design-Based Research) και υλοποιήθηκε σε τριμελείς ομάδες, σε δύο συναντήσεις, στο 2ο Πρότυπο Γυμνάσιο Αθήνας. Παρατίθενται ενδεικτικά κάποια από τα παραγόμενα μοντέλα των παιδιών.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Grizioti, M., Kynigos, C. (2021) Code the mime: A 3D programmable charades game for computational thinking in MaLT2. British Journal of Educational Technology, Wiley, UK., 52(3), 1004-1023

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. Human Development, 52(2), 83–94.

ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΩΣ ΖΩΣΑ ΕΜΠΕΙΡΙΑ: ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΔΡΑΜΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Στην τρίτη δημοτικού, η κατάκτηση της έννοιας των δεκαδικών ψηφίων μπορεί να είναι μια σημαντική πρόκληση λόγω της αφηρημένης φύσης τους (Resnick et al., 2019, Roëll et al., 2017).

Σκοπός του συγκεκριμένου πόστερ είναι να αναδείξει ότι ο εμπλουτισμός της μάθησης των Μαθηματικών με τεχνικές δράματος, καθοδηγούμενος από τις αρχές του Deleuze (Deleuze & Guattari, 1987), όχι μόνο διευκολύνει την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών αλλά επίσης καλλιεργεί βασικές δεξιότητες ζωής στα παιδιά.

Πώς οι μαθητές/τριες οδηγήθηκαν στην κατάκτηση της μαθηματικής έννοιας:

- (*Discursive plateaus*) Εξερεύνηση στην ομάδα τους (3 τετραμελείς ομάδες) διαφόρων καταστάσεων όπου συναντούμε δεκαδικούς αριθμούς και επιλογή 3 που θα συντελέσουν τους θεατρικούς σταθμούς.
- (*Assemblages*) Δημιουργία ευφάνταστων διαλόγων σε κάθε σταθμό, έχοντας ως δεδομένο «την εξαφάνιση των δεκαδικών αριθμών».
- (*Becomings*) Επινόηση γρίφων στην ομάδα τους για την επανεμφάνιση των δεκαδικών αριθμών και επίλυση αυτών από τις άλλες ομάδες.

Στο μανάβικο

(**Π**ελάτης – **Μ**ανάβης)

Π: Καλημέρα σας, παρακαλώ θέλω να μου βάλετε 3 ντομάτες.

Μ: Ωραία, ας τις ζυγίσουμε. 2€ παρακαλώ.

Π: Μα προχθές αγόρασα 5 ντομάτες και πάλι 2€ μου ζητήσατε. Τι συνέβη; Αυξήθηκε η τιμή τους;

Μ: Όχι, μέχρι το 1 κιλό πληρώνετε 2€, ενώ από 1 έως 2 κιλά πληρώνετε 4€. Δεν υπάρχουν ενδιάμεσες τιμές.

Π: Κατάλαβα. Ε τότε ας προσθέτουμε στη ζυγαριά μία

Στο βιβλιοπωλείο

(**Π**ελάτης – **Β**ιβλιοπώλης)

Π: Καλημέρα! Θα ήθελα να πάρω αυτά τα δύο ίδια μολύβια παρακαλώ, πόσο κοστίζουν;

Β: 1€ και τα δύο μαζί.

Π: Αχ, χρειάζομαι κι άλλο 1 ίδιο τελικά.

Β: 2€ τότε θα μου δώσετε.

Π: Πώς γίνεται αυτό;

Β: Καταλαβαίνω τον προβληματισμό σας αλλά δεν υπάρχει κάποια ενδιάμεση τιμή. Καταργήθηκαν τα λεπτά του ευρώ.

Στο ιατρείο

(**Γ**ιατρός – **Α**σθενής)

Γ: Πώς αισθάνεστε σήμερα;

Α: Έχω αρκετό πυρετό, γιατρέ μου, αλλά το θερμόμετρο δε βοηθάει πολύ. Δείχνει μόνο ολόκληρους αριθμούς.

Γ: Α, ναι, τα νέα μοντέλα χωρίς δεκαδικά ψηφία. Τι ακριβώς δείχνει τώρα;

Α: Λοιπόν, έδειχνε 38 πριν λίγο, αλλά δεν ξέρω αν είναι 38,0 ή 38,9!

Γ: Θα μετριέστε συνέχεια και μόλις δείξει 39 θα πάρετε ένα αντιπυρετικό. Έπειτα, θα συνεχίσετε να μετριέστε

μία ντομάτα μέχρι να φτάσουμε πιο κοντά στο κιλό…

Π: Δώστε μου τότε 4 μολύβια συνολικά για 2€.

συνέχεια να δούμε σε πόση ώρα θα πέσει κάτω από 37.

Γρίφοι

Ένας μανάβης έχει 350κ. μπανάνες και 261κ. μήλα. Για να βρεις πόσο κοστίζει το 1κ. μπανάνες, τοποθέτησε το ψηφίο 5 στα δέκατα και για να βρεις πόσο κοστίζει το 1κ. μήλα, τοποθέτησε το ψηφίο 1 στα εκατοστά. Πόσα περισσότερα ευρώ κοστίζει το 1κ. μπανάνες από το 1κ. μήλα;

Μετάτρεψε τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς για να βρεις τις τιμές των ακόλουθων βιβλίων (*σχέδια βιβλίων με 1 γράμμα το καθένα και μία μετατροπή*).

Τοποθέτησε τα σωστά γράμματα για να ανακαλύψεις το βιβλίο που αγόρασα.

_ _ _ _ _ _ _

0,15 1,8 3,1 0,004 1,5 1,8 0,004

Συμπλήρωσε τα ψηφία στο ψηφιακό θερμόμετρο ώστε:

- Το ψηφίο των μονάδων να είναι τριπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων.
- Το ψηφίο των δεκάτων να είναι μονός αριθμός και μικρότερος από το ψηφίο των δεκάδων.

_ _ , _

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Deleuze, G., & Guattari, F. (1987). A Thousand Plateaus: Capitalism and Schizophrenia. University of Minnesota Press.

Resnick, I., Rinne, L., Barbieri, C., & Jordan, N. C. (2019). Children's reasoning about decimals and its relation to fraction learning and mathematics achievement.. Journal of Educational Psychology, 111(4), 604-618. https://doi.org/10.1037/edu0000309

Roëll, M., Viarouge, A., Houdé, O., & Borst, G. (2017). Inhibitory control and decimal number comparison in school-aged children. Plos One, 12(11), e0188276. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0188276

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΟ LESSON STUDY ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

,Χλέτσου Ευαγγελία[1], Γλαβάς Ισίδωρος[2], Παπασπηλίου Ευγενία[3], Σίδερης Αποστόλης[4] Καλογερία Ελισάβετ[5]

1 Γελ Γλυφάδας[1], 3 Γελ Γλυφάδας[2], 3 Γελ Γλυφάδας[3], 3 Γελ Αλίμου[4], Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Δ Αθήνας[5],

ekalogeria@sch.gr evichletsou@sch.gr glavas.isi@gmail.com epapasp1@gmail.com aposider@gmail.com

Αντικείμενο της παρέμβασής, είναι η αξιοποίηση του διαδραστικού πίνακα και αν/πως αυτή επηρεάζει τις διαφορετικές τυπολογίες των μαθητών σε μια τάξη.Επιλέχθηκαν τέσσερις μαθητές περίπτωσης στους οποιους εστιάσαμε την παρατήρησή μας.Ακολουθήσαμε τις βασικές αρχές της Μελέτης Μαθήματος (lesson study) και αποτυπώσαμε τις παρατηρησεις και τον αναστοχασμό μας πανω σε δραστηριοτητες του φύλλου εργασίας που μοιράστηκε.Ένα μέρος του φύλλου εργασίας δημιουργήθηκε με χρήση τεχνητής νοημοσύνης.

ΣΤΟΧΟΣ

Οι διαδραστικοί πίνακες που ενσωματώθηκαν το τρέχον σχολικό έτος στα σχολεία ήταν η αφορμή για να σχεδιάσουμε από κοινού οι μαθηματικοί του 3 Γελ Γλυφάδας με την εποπτεία και την καθοδήγηση της υπεύθυνης συμβούλου εκπαίδευσης του σχολείου μια διδακτική παρέμβαση.Η παρέμβαση εστιάζει στο πως οι νέοι πίνακες επηρεάζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, εστιάζοντας σε τέσσερις τυπολογίες μαθητών αντιπροσωπευτικές αυτών που συναντούμε σε μια σχολική τάξη.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Η διδασκαλία υλοποιήθηκε σε τμήμα της Α Λυκείου, στη Γεωμετρία στην ενότητα του ορισμού και των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου.Ακολουθήθηκε η μεθοδολογία της Μελέτης Μαθήματος (lesson study).Καθορίσαμε τους διδακτικούς μας στόχους, κατασκευάσαμε φύλλο εργασίας, ένα μέρος του οποίου (οι ερωτήσεις κατανόησης) δημιουργήθηκε με χρήση Τεχνίτης Νοημοσύνης.Κάθε εκπαιδευτικός ανέλαβε να εστιάσει και να καταγράψει πως αντιδρά ένας μαθητής περίπτωσης σημειώνοντας πάνω στις αντίστοιχες δραστηριότητες του φύλλου εργασίας.Εστιάσαμε στις γνωστικές και συναισθηματικές ανάγκες των μαθητών περίπτωσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η χρήση του διαδραστικού πίνακα προσελκύει αρχικά την προσοχή όλων των μαθητών.

Κάθε μαθητής ήταν διαφορετική περίπτωση ωστόσο παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές που δεν συμμετέχουν πολύ ενεργά γιατί έχουν γνωστικές ελλείψεις και δεν νιώθουν σίγουροι για τις απαντήσεις τους δεν άλλαξαν την στάση τους.Η χρήση διαδραστικού πίνακα, παρατηρήθηκε ότι οδήγησε την εκπαιδευτικό να γράφει λιγότερο στον πίνακα και αυτό δυσκολεύει κάποιες κατηγορίες μαθητών (πιο αργών), που δεν προλάβαιναν να διορθώνουν λανθασμένες απαντήσεις τους.

Η χρήση του chat gpt αν και είναι πολύ ευχάριστη και οι μαθητές ενθουσιάζονται στην ιδέα, θέλει πολύ καλό έλεγχο καθώς κάποια ερωτήματα μεταφράζονται λανθασμένα και είναι ασαφή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Rock, T. C., & Wilson, C. (2005). Improving Teaching through Lesson Study. *Teacher Education Quarterly*, *32*(1), 77–92. http://www.jstor.org/stable/23478690

Wardat, Y., Tashtoush, M.A., AlAli, R.,& Jarrah, A.M. (2023).Chat GPT: a revolutionary tool for teaching and learning mathematics.*Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19(7), em 2286.* https://doi.org/10.29333/ejmste/13272

Wood, R.,(2007).The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics, a case study.*British Journal of Educational Technology, 39(1), 84-96.* https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2007.00699.x

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ

Χατζοπούλου Χρυσάνθη

Μαθηματικός 1ου Πειραματικού Γυμνασίου Νέας Ιωνίας Βόλου

email:chrysachatzo@gmail.com

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος

Καθηγητής/Αναπληρωτής Πρόεδρος τμήματος Παιδαγωγικού Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

knikolantonakis@uowm.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά σχεδιασμό διδακτικής παρέμβασης με στόχο την ανάπτυξη δομικής αντίληψης της έννοιας του γραμμικού συστήματος μέσα από την εμφάνισή και ανάπτυξη τους, στους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων, Αιγυπτίων, Ελλήνων, Κινέζων και στη διάρκεια του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης στην Ευρώπη. Η εργασία έγινε στο πλαίσιο του Αναλυτικού Ισχύοντος Προγράμματος Σπουδών του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος. Η παρέμβαση εφαρμόστηκε σε τμήμα 6 μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου κατά το σχολικό έτος 2019-2020. Λαμβάνοντας υπόψη την Ιστορία των Μαθηματικών χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας, pretest, posttest και ερωτηματολόγιο με στόχο την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές των γραμμικών συστημάτων και των τρόπων επίλυσής τους. Αναδείχθηκε η θετική συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά και των ομαδοσυνεργατικών δραστηριοτήτων στην απόκτηση δομικής αντίληψης της έννοιας και στη δυνατότητα αλλαγής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Χρησιμότητα έρευνας

Οι έννοιες των αλγεβρικών εξισώσεων και γραμμικών συστημάτων, είναι βασικές για όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ενός μαθητή, με σκοπό τη μετάβασή του στο διαφορικό λογισμό της Γ λυκείου. Ωστόσο αρκετά συχνά δημιουργούνται παρανοήσεις οι οποίες οδηγούν στη χρήση λανθασμένων διαδικασιών για την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων (Adu, E., Assuah, C. K., & Asiedu-Addo, S. K. 2015). Η αδυναμία απόκτησης δομικής αντίληψης δυσκολεύει τους μαθητές στην κατανόηση

των εννοιών των μεταβλητών, της ισότητας, των συναρτήσεων και κατ΄επέκταση των θεμάτων που αφορούν την έννοια του συστήματος.

Η εναλλακτική διδασκαλία η οποία περιγράφεται στην παρούσα εργασία αποτέλεσε προσπάθεια διδακτικής προσέγγισης των εννοιών αυτών. Ταυτόχρονα είχε ως φιλοδοξία την προτροπή των μαθητών να διώξουν τις διάφορες ετικέτες που δίνονται κατά καιρούς στα Μαθηματικά όπως δύσκολα, ακατανόητα, ανιαρά και να αντιληφθούν πως υπάρχουν και άλλοι τρόποι να τα διδαχθούν, πιο κοντά στους ίδιους, στην καθημερινότητά τους, κάνοντας αποδεκτά ακόμη και τα λάθη τους (Jankvist, 2009), όπως έκαναν πολλοί μεγάλοι επιστήμονες στο βάθος της Ιστορίας.

Η παρούσα εργασία συμβάλλει επίσης στην περαιτέρω εμπειρική έρευνα που αφορά την εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση. Υπάρχουν θετικά αποτελέσματα από σχετικές έρευνες (Farmaki & Paschos, 2007) ενώ αρκετοί καταξιωμένοι επιστήμονες τάχθηκαν στα υπέρ, βλέποντας έναν καινούργιο πολλά υποσχόμενο κλάδο. Οι Tzanakis & Thomaidis 2000 υπογραμμίζουν πως η εντοπισμένη και ιστορικά θεμελιωμένη μαθηματική διδασκαλία αποσκοπεί στη μάθηση μέσα από λάθη, εναλλακτικές αντιλήψεις, αλλαγή προοπτικής αλλά και στάσης απέναντι στο μάθημα. Οι περισσότερες όμως έρευνες είναι σε θεωρητικό επίπεδο εφόσον δεν υποστηρίζονται από αντίστοιχη εμπειρική έρευνα.

Πέρα από τη χρήση της Ιστορίας, στην έρευνα εντάχθηκε και η γραφική αναπαράσταση ως μέσο επίλυσης προβλημάτων (Merve Özkaya, MehmetFatih Öçal & Alper Cihan Konyalioğlu, 2016). Αρκετές προκαταλήψεις υπάρχουν γύρω από τις γραφικές παραστάσεις λ.χ. είναι εκτός ύλης, δεν αποτελούν επίσημη απόδειξη ή η χρήση τους γίνεται μόνο για επαλήθευση. Το δεύτερο φύλλο εργασίας, αφορά μόνο την γραφική επίλυση συστημάτων με σκοπό να παροτρύνει τους μαθητές να εξοικειωθούν με αυτήν και να την επιλέγουν συχνότερα.

Επιπρόσθετα, εντάχθηκαν ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων, την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών (Γκίκας Α. 2017; Ματσαγγούρας Η. 2004; Παναγάκος Ι. 2001; Swan 2000; Hawes 2007).

Τέλος οι διδακτικές παρεμβάσεις της παρούσας εργασίας που βασίζονται στις αντίστοιχες παρανοήσεις, στη χρήση της Ιστορίας των μαθηματικών και σε ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες αποσκοπούν στη διαμόρφωση ενός πακέτου διδασκαλίας του τρίτου κεφαλαίου της άλγεβρας της Γ΄ γυμνασίου. Αυτό το πακέτο θα μπορεί να το χρησιμοποιήσει ο οποιοσδήποτε εκπαιδευτικός, με βασικές γνώσεις της

Ιστορίας των γραμμικών συστημάτων, με σκοπό να διδάξει γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους.

Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Γ γυμνασίου, στο κεφάλαιο των γραμμικών συστημάτων, είναι ο μαθητής να μπορεί να λύσει γραμμικά συστήματα γραφικά, αλγεβρικά με δύο μεθόδους και να επιλύει προβλήματα που ανάγονται σε γραμμικά συστήματα. Η διδασκαλία αυτή εντάσσεται στα πλαίσια του προγραμματισμού ανάπτυξης της διδακτέας ύλης που καθορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας, μέσα στα προβλεπόμενα χρονικά πλαίσια. Υπό αυτό το πρίσμα, σχεδιάστηκαν και δομήθηκαν οι ερωτήσεις των φύλλων εργασίας, ώστε η ικανότητα επίλυσης των ασκήσεων από τους μαθητές να προκύπτει ως αποτέλεσμα της εννοιολογικής κατανόησης των ιδιοτήτων της ευθείας και του γραμμικού συστήματος.

Σκοπός λοιπόν, είναι να στηθεί ένα πακέτο διδασκαλίας για τα γραμμικά συστήματα και να συνεισφέρει επιπλέον στο να ερευνηθούν τα οφέλη αλλά και η απήχηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στους μαθητές, σε πραγματικές συνθήκες τάξης, να αναλυθούν τα αποτελέσματα και να απαντηθούν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Πώς επιδρά η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως εργαλείου στη δομική αντίληψη από τους μαθητές των εννοιών της ευθείας και των γραμμικών συστημάτων σε συνθήκες σχολικής τάξης;
- Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλάζει τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά κάνοντας τα λιγότερο απρόσωπα δείχνοντας ένα εξελισσόμενο και ανθρώπινο μάθημα παρά ένα σύστημα από αμετάβλητες αξίες που μας διδάσκει να μην απογοητευόμαστε μετά από κάθε αποτυχία, λάθος, αβεβαιότητα ή παρανόηση και μία πολιτισμική προσπάθεια;

Σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης

Ο σχεδιασμός του pretest έγινε με σκοπό τη διερεύνηση κενών ή παρανοήσεων από την ύλη της Β΄ γυμνασίου που είναι απαραίτητα εφόδια για το κεφάλαιο των γραμμικών συστημάτων. Οι ασκήσεις στα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν με βάση την διερευνητική – ανακαλυπτική μάθηση του Bruner. Η διδασκαλία είναι φτιαγμένη έτσι ώστε να μη δέχονται τη γνώση έτοιμη οι μαθητές, αλλά να συμμετέχουν στη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης. Στην παρέμβαση αυτή, εκτός της συμβολής της Ιστορίας των Μαθηματικών, έγινε προσπάθεια αξιοποίησης των δυνατοτήτων που παρέχουν οι ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες στη διδασκαλία (Swan 2000, Hawes 2007). Στόχος είναι η ανάπτυξη ενός περιβάλλοντος μάθησης που προωθεί την εννοιολογική κατανόηση των

γραμμικών συστημάτων έναντι της στείρας απομνημόνευσης διαδικασιών επίλυσης ασκήσεων, όπως σύντομα περιγράφεται αμέσως παρακάτω.

Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της μορφής διδασκαλίας είναι πως η συμμετοχή των μαθητών σε αυτήν την περίπτωση είναι ενεργητική και όχι παθητική. Μάλιστα, οι μαθητές καλούνται να πειραματιστούν και να ερευνήσουν, ώστε οι ίδιοι ομαδικά να δώσουν λύσεις στα καθημερινά εκπαιδευτικά καθήκοντα και δραστηριότητες (Γκίκας, 2017) ενώ καλλιεργείται και μεγαλύτερη αυτοεκτίμηση (Παναγάκο, 2001).

Pretest

Το διερευνητικό τεστ επιπέδου των μαθητών έγινε με σκοπό τον εντοπισμό κενών και την κάλυψή τους πριν την εφαρμογή. Δε χρησιμοποιήθηκε για να συσχετιστεί με το posttest διότι δεν εξετάζουν ισοδύναμα ζητήματα και επιπρόσθετα περιέχει θέματα εξισώσεων που δεν περιέχει το posttest. Οι ασκήσεις εξετάζουν την ικανότητά τους στις πράξεις μεταξύ αλγεβρικών πολυωνύμων και μονωνύμων, τις πρώτου βαθμού εξισώσεις, τη μοντελοποίηση γεωμετρικού προβλήματος και τη γραφική αναπαράσταση ευθείας. Οι ασκήσεις πάρθηκαν από το σχολικό βιβλίο της Β γυμνασίου, από τις προτεινόμενες ασκήσεις του αναλυτικού προγράμματος του 2011 και από τις αναρτημένες ενδεικτικές ασκήσεις του Κυπριακού Υπουργείου Παιδείας. Αν παρατηρηθούν κενά, προτείνεται μικροδιδασκαλία για την κάλυψη τους. Ακολουθεί άσκηση του pretest.

2) Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ	Δ
Η παράσταση 3x–2x+6x+x είναι ίση με:	7x	8x	-8x	10x
Οι εξισώσεις 3x = 6 και 2x = 6 έχουν κοινή λύση την:	x=8	x=2	Δεν έχουν κοινή λύση	x=3
Η εξίσωση x = x:	Έχει λύση μόνο x = 1	Είναι ταυτότητα	Είναι αδύνατη	Έχει λύση μόνο τους θετικούς αριθμούς
Η εξίσωση 3x-3x=0:	Έχει λύση την x=0	Είναι αδύνατη	Έχει λύση την x=3	Είναι ταυτότητα
Η εξίσωση 4x + 4 = 0 έχει λύση:	x=-1	x=0	x=4	Καμία
Η εξίσωση 3x + x = 0 έχει λύση:	x=3	x=-3	Άπειρες	x=0
Η εξίσωση 4 = 8x έχει λύση:	x=1	x=2	x=8	$x=\frac{1}{2}$
Η εξίσωση 2x+3 = 2x+4 έχει λύση:	Άπειρες	x=0	Καμία	x=1

Γενικό πλάνο φύλλων εργασίας

Τα φύλλα εργασίας έχουν διαμορφωθεί με βάση τους στόχους και την κατανομή των ωρών στο τωρινό αναλυτικό πρόγραμμα. Έχουν χρησιμοποιηθεί ασκήσεις (οι οποίες διαμορφώθηκαν) από το βιβλίο του καθηγητή που προτείνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 που δεν

εφαρμόστηκε, ασκήσεις από το κυπριακό σχολικό βιβλίο και από αυτές που προτείνει η ιστοσελίδα του Κυπριακού Υπουργείου Παιδείας. Επίσης τα φύλλα χρησιμοποιήθηκαν για εργασία σε ομάδες και με δραστηριότητες που θα αναλυθούν παρακάτω. Εκτός από την πρώτη ημέρα και το πρώτο φύλλο εργασίας το οποίο εφαρμόστηκε ατομικά για μία πιο ομαλή ένταξη των μαθητών στις ομάδες και το ύφος αυτών των διδασκαλιών. Περαιτέρω έγινε χρήση προβλημάτων, τα οποία βρέθηκαν είτε σε πάπυρους είτε σε κείμενα άλλου είδους από κάθε πολιτισμό. Ωστόσο οι αριθμοί των προβλημάτων προσαρμόστηκαν έτσι ώστε να ταιριάζουν με το σκοπό της κάθε άσκησης. Μετά από επεξεργασία, η τελική μορφή τόσο των προβλημάτων όσο και των ενδιάμεσων ερωτήσεων έγινε για την ανάδειξη και την αντιμετώπιση των παρανοήσεων που έχουν μελετηθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Ακολουθούν σημεία των δύο παρεμβάσεων.

Σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών:

ΣΦΗΝΟΕΙΔΗΣ ΓΡΑΦΗ

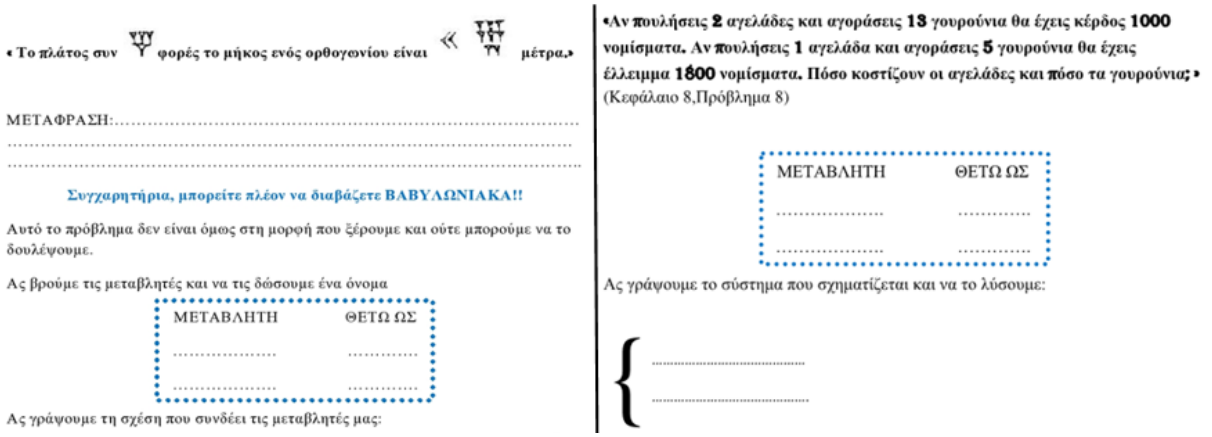
Τα κείμενα στους δίσκους ήταν γραμμένα με σφηνοειδή γραφή, γεγονός που βοήθησε στη μακροχρόνια συντήρηση τους. Χρησιμοποιούσαν ένα αμβλύ καλάμι, τη γραφίδα και με αυτό έγραφαν τα κείμενα τους σε υγρό αρχικά πηλό. Στη συνέχεια τα έψηναν είτε σε φούρνο είτε τα άφηναν στον ήλιο. Οι χαρακτήρες έπαιρναν το σχήμα σφήνας και ως εκ τούτου πήρε την ονομασία της. Πρώτοι οι Σουμέριοι χρησιμοποίησαν αυτόν τον τρόπο γραφής ενώ ακολούθησαν και άλλοι μεσοποτάμιοι πολιτισμοί.

Ωστόσο πολλά λάθη βρέθηκαν σε αυτούς τους δίσκους καθώς οι συγγραφείς τους έπρεπε να είναι γρήγοροι για να μην προλάβει ο πηλός να στεγνώσει.

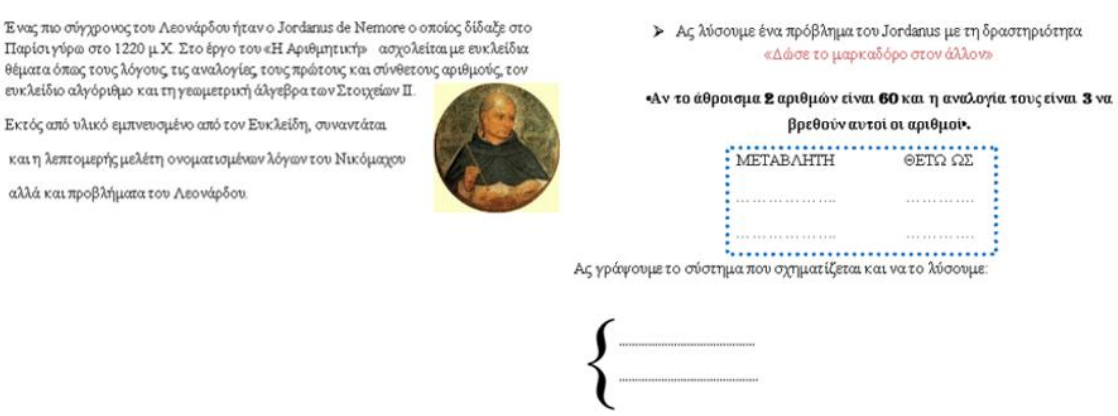
- Άρα <u>δε γράφουμε βιαστικά γιατί έτσι κάνουμε λάθη</u>, μας τα είπαν και οι Βαβυλώνιοι!!

Οι Βαβυλώνιοι παίρνοντας ως βάση το αριθμητικό σύστημα των Σουμέριων έφτιαξαν τους δικούς τους αριθμούς. Δε μοιάζουν με τους σημερινούς δικούς μας σίγουρα!!

Σχετικά με τη μοντελοποίηση συστήματος και γραφική παράσταση ευθείας:

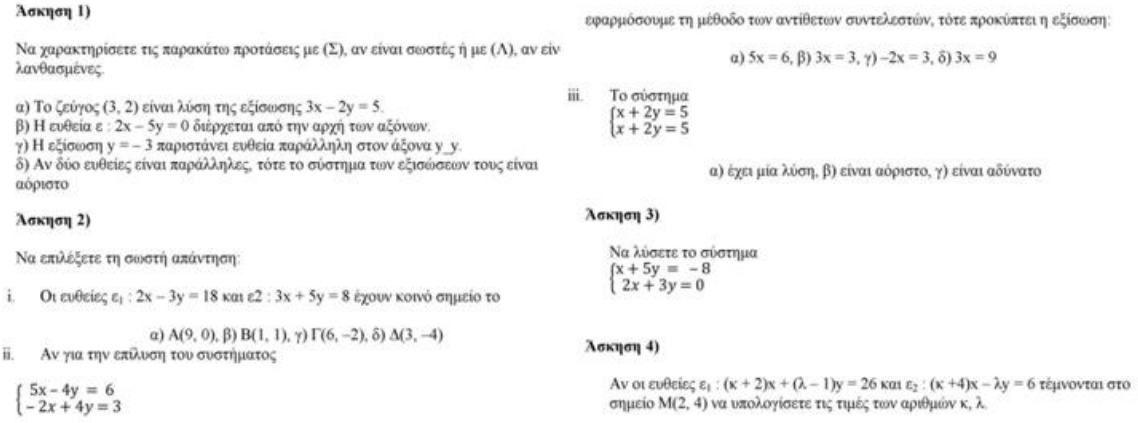


Σχετικά με ομαδοσυνεργατική δραστηριότητα:



Postest

Για το διερευνητικό τεστ μετά την εφαρμογή της διδασκαλίας, χρησιμοποιήθηκε το διαγώνισμα που προτείνει το αναλυτικό ισχύον πρόγραμμα μετά το πέρας του κεφαλαίου των συστημάτων. Χρησιμοποιήθηκε αυτούσιο, καθώς η διδασκαλία αυτή έχει τους ίδιους στόχους με το αναλυτικό πρόγραμμα, επομένως αναμένουμε τα ίδια αποτελέσματα όσον αφορά το πλαίσιο των καινούργιων γνώσεων. Ακολουθεί το posttest.



Άσκηση 1)

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είν λανθασμένες.

α) Το ζεύγος (3, 2) είναι λύση της εξίσωσης $3x - 2y = 5$.
β) Η ευθεία ε : $2x - 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
γ) Η εξίσωση $y = -3$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y_y.
δ) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους είναι αόριστο

Άσκηση 2)

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - 3y = 18$ και $\varepsilon 2 : 3x + 5y = 8$ έχουν κοινό σημείο το

α) Α(9, 0), β) Β(1, 1), γ) Γ(6, −2), δ) Δ(3, −4)

ii. Αν για την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$$

εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, τότε προκύπτει η εξίσωση:

α) $5x = 6$, β) $3x = 3$, γ) $-2x = 3$, δ) $3x = 9$

iii. Το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

α) έχει μία λύση, β) είναι αόριστο, γ) είναι αδύνατο

Άσκηση 3)

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 5y = -8 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4)

Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\kappa + 2)x + (\lambda - 1)y = 26$ και $\varepsilon_2 : (\kappa + 4)x - \lambda y = 6$ τέμνονται στο σημείο Μ(2, 4) να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών κ, λ.

Συμμετέχοντες στη έρευνα

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση διεξήχθη κατά το εκπαιδευτικό έτος 2019 – 2020, και συγκεκριμένα στο διάστημα από 28 Φεβρουαρίου έως 6 Μαρτίου 2020, στη διάρκεια 4 διδακτικών ωρών. Οι 6 μαθητές που συμμετείχαν, ανήκαν σε τμήματα της Γ΄ τάξης των εξής γυμνασίων της Θεσσαλονίκης: Διαπολιτισμικού Εύοσμου, 3ο Εύοσμου και 4ο Σταυρούπολης. Τα μαθήματα έλαβαν μέρος στο κοινωνικό φροντιστήριο του Εύοσμου. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης είτε δούλευαν ατομικά είτε χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ατόμων. Η παρέμβαση αυτή εντάσσεται στα πλαίσια του προγραμματισμού ανάπτυξης της διδακτέας ύλης και των ωρών που καθορίζονται από το Υπουργείο Παιδείας.

Ερευνητικά εργαλεία

Στην παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν: 1) 5 φύλλα εργασίας με ιστορικές εκδοχές, 2) pretest και posttest αξιολογητικά φύλλα, 3) ερωτηματολόγιο αποτίμησης 4) κινητό για την ηχογράφηση των διδασκαλιών από την εκπαιδευτικό. Τα φύλλα εργασίας περιέχουν τα κυριότερα κατά την κρίση μας, ως προς τη διδακτική αξιοποίηση, σημεία της ιστορικής εξέλιξης των γραμμικών συστημάτων, καθώς και εφαρμογές τους. Επίσης περιλαμβάνονται προβλήματα από αυθεντικά κείμενα των αντίστοιχων πολιτισμών της Ιστορίας. Το pretest χρησιμοποιήθηκε ένα μήνα πριν την εφαρμογή των διδασκαλιών, για να αναγνωρισθούν κενά και παρανοήσεις των μαθητών στις αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις, ώστε μέσα από

μαθήματα να καλυφθούν αυτά τα κενά πριν από τη διδακτική παρέμβαση. Τα ερωτηματολόγια, χρησιμοποιήθηκαν ώστε να εκφραστούν οι προσωπικές απόψεις των μαθητών και να αναδειχθεί η δυνατότητα των μαθητών εφαρμογής στην επίλυση ασκήσεων όσων διδάχθηκαν. Η αξιολόγηση της παρέμβασης έγινε μέσω των απαντήσεων των μαθητών ή των ομάδων στα φύλλα εργασίας, των ατομικών απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο και της συζήτησης μέσα στην τάξη μέσω των μαγνητοφωνημένων διδασκαλιών.

Συμπεράσματα των δύο πιλοτικών παρεμβάσεων

Οι δύο πιλοτικές διδακτικές παρεμβάσεις που έγιναν, δεν είναι αρκετές για να μπορέσουμε να εξάγουμε αποτελέσματα απαντώντας στα ερευνητικά ερωτήματα. Μπορούν όμως να προκύψουν κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα με σκοπό μελλοντικά την καθολική εφαρμογή του διδακτικού πακέτου ή συναφών ερευνών.

Στο pretest παρατηρήθηκαν αλγεβρικές παρανοήσεις παλαιότερων ετών. Εντοπίστηκαν στην επιμεριστική ιδιότητα, στην αναγωγή ομοίων όρων, στις εξισώσεις που κατέληγαν σε αδύνατες ή αόριστες, στην εύρεση περιμέτρου ορθογωνίου και στην αναπαράσταση ευθειών στο σύστημα συντεταγμένων. Ιδιαίτερη μνεία οφείλει να γίνει και στον τρόπο αντιμετώπισης της άσκησης σωστού λάθους. Αρκετοί μαθητές επέλεξαν δύσκολους και αργούς τρόπους για να αποφασίσουν την ορθότητα της πρότασης. Για παράδειγμα όταν δινόταν η πιθανή λύση μίας εξίσωσης, προτιμήθηκε η επίλυσή της παρά η πιο γρήγορη διαδικασία της επαλήθευσης ή μη της εξίσωσης. Μετά το pretest ακολούθησαν δύο διδασκαλίες πριν τη διδακτική παρέμβαση οι οποίες αφορούσαν τις πράξεις ανάμεσα σε αλγεβρικές εκφράσεις και τις πρώτου βαθμού εξισώσεις.

Κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών επαληθεύτηκε το θεωρητικό πλαίσιο των παρανοήσεων. Παρατηρήθηκε αδυναμία μοντελοποίησης προβλημάτων, λάθη σε όλα τα στάδια επίλυσης πρώτου βαθμού εξίσωσης (λ.χ. επιμεριστική ιδιότητα), προκατάληψη φυσικών αριθμών, λάθος ετικέτες σε μεταβλητές οι και μη έλεγχος λύσης (Clement Lochhead & Monk, 1981). Ειδικά σχετικά με το τελευταίο, δεν πείστηκαν ότι έγκειται στη μαθηματική διαδικασία επίλυσης άσκησης.

Παράλληλα έντονη ήταν και η αυθεντία του καθηγητή του σχολείου, ο οποίος εφόσον δεν έδειξε αντίστοιχους τρόπους ή δεν αναφέρεται στην Ιστορία των μαθηματικών, δεν δίνουν ιδιαίτερη σημασία και οι μαθητές. Οι απαντήσεις των παιδιών, στις αρχικές ερωτήσεις που αφορούσαν το κομμάτι της Ιστορίας, υπέδειξαν δυσκολίες εκ μέρους τους και σε αυτό το κομμάτι αλλά και απορία γιατί όπως ειπώθηκε αργότερα κανείς

μαθηματικός δεν τους είχε ρωτήσει κάτι τέτοιο. Σε ιστορικές ή κοινωνικές ερωτήσεις δεν είχαν το αντίστοιχο πλαίσιο λχ δεν μπορούσαν να αντιληφθούν το πόσο παλιά είναι το π.Χ., τι είδους γραφής είχαν σε κάθε χρονολογική περίοδο ή πάνω που έγραφαν (σε πάπυρους, πήλινες πλάκες κτλ) ή γιατί δεν υπήρχαν πολλές γυναίκες μαθηματικοί.

Εστιάζοντας στη χρήση της Ιστορίας, διεξάγουμε τόσο θετικά όσο και αρνητικά συμπεράσματα. Η συμμετοχή ή η επιτυχής απάντηση σε ιστορικού πλαισίου ερώτηση, έδινε ενθάρρυνση στο μαθητή. Ενώ τα κείμενα που ήταν μικρά και δίνονταν για συζήτηση προκαλούσαν ενδιαφέρον. Στον αντίποδα τα μεγάλα κείμενα που απλώς βρίσκονταν για ανάγνωση, ήταν αδιάφορα και κούραζαν. Επιπρόσθετα, η ελλιπής ή καθόλου γνώσεις για ιστορικά ή κοινωνικά γεγονότα και το αντίστοιχο κοινωνικό πλαίσιο, έκανε δύσκολη τη συζήτηση.

Μετά το πέρας των δύο διδασκαλιών οι μαθητές στην πλειονότητά τους μπορούσαν να λύνουν σωστά πρώτου βαθμού εξισώσεις, να εφαρμόζουν σωστά την επιμεριστική ιδιότητα, να μοντελοποιούν προβλήματα και να κάνουν γραφική παράσταση ευθείας βρίσκοντας το κοινό σημείων των δύο ευθειών. Θετική στάση υπήρξε και στη γραφική επίλυση συστήματος, παρότι υπάρχει αντιπάθεια για οτιδήποτε περικλείει σχήμα ή γεωμετρία. Η γραμμικότητα εξισώσεων, η οποία δεν αποσαφηνίζεται στο σχολικό βιβλίο, δεν προκάλεσε σύγχυση αλλά αφομοιώθηκε επιτυχώς. Πρόσθετα με τις υπόλοιπες θετικές εκβάσεις των διδασκαλιών προστίθεται και η συμμετοχή των μη ενεργών μαθητών, αρχικά στις συζητήσεις που αφορούσαν την Ιστορία των μαθηματικών και σε συνέχεια τις ίδιες τις ασκήσεις.

Συμπεράσματα

Κατά τη μελέτη των παρανοήσεων που αφορούν τα γραμμικά συστήματα παρατηρήθηκε πληθώρα άρθρων και ερευνών σχετικά με τις αλγεβρικές εκφράσεις, εξισώσεις και συναρτήσεις, ωστόσο δεν υπάρχει αρκετή βιβλιογραφία για τις παρανοήσεις στα γραμμικά συστήματα. Από την πιλοτική εφαρμογή των δύο πρώτων φάσεων της διδακτικής παρέμβασης, προέκυψαν αρκετές παρανοήσεις στα συστήματα. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα, πως υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω έρευνες σχετικά με τα συστήματα.

Η ανάλυση των σχολικών προγραμμάτων έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της διδακτικής παρέμβασης, καθώς είναι ο ακρογωνιαίος λίθος κάθε εκπαιδευτικού συστήματος. Τα αναλυτικά προγράμματα, τα εγχειρίδια των καθηγητών και τα σχολικά βιβλία, διαμορφώνουν όλο το εκπαιδευτικό σύστημα και τον τρόπο διδασκαλίας. Μικρές αλλαγές στα προαναφερθέντα, μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την εκπαιδευτική κοινότητα. Ενδιαφέρουσα υπήρξε και η μελέτη του αναλυτικού

προγράμματος 2011 που δεν εφαρμόστηκε εν τέλει στα σχολεία. Η διδακτική αυτή προσέγγιση είχε χαρακτηριστικά και από αυτό το αναλυτικό πρόγραμμα, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα πως η μελέτη διαφορετικών αναλυτικών προγραμμάτων (και ξένων) μπορεί να βοηθήσει έναν εκπαιδευτικό κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας του. Μακροπρόθεσμα, αυτό οδηγεί και στην επιτακτική ανάγκη εκσυγχρονισμού του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος αφού πρώτα γίνουν έρευνες και μελέτες στην ελληνική εκπαιδευτική και σχολική κοινότητα.

Οι προσεγγίσεις στα γραμμικά συστήματα μέσω ιστορικής σκοπιάς και με την εφαρμογή ομαδοσυνεργατικών δραστηριοτήτων, ίσως μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για μια διαφορετική διδασκαλία της Άλγεβρας. Όπως επιβεβαιώνει και το θεωρητικό πλαίσιο, η παρουσίαση των θεμάτων με ιστορικό τρόπο έχει θετικές επιδράσεις στους μαθητές. Δηλαδή να ξεκινάει με τη διατύπωση «αφελών» εικασιών μέσω κάποιων προβλημάτων προς μια άτυπη δικαιολόγηση της ισχύος ή όχι αυτών. Οι παρανοήσεις από την άλλη σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, χτίζουν μία διδασκαλία η οποία αρχικά θα τις αναδείξει και μετέπειτα θα τις καταρρίψει, χτίζοντας μία σωστή εννοιολογική αντίληψη επί του θέματος. Έπειτα οι ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν, επιβεβαίωσαν πως οι μαθητές τις προτιμούν καθώς χάνεται το «εγώ» στο σύνολο και έτσι εργάζονται καλύτερα, παίρνοντας βοήθεια από τους συνομηλίκους τους. Όλα τα παραπάνω επιβεβαιώνονται κατά την εφαρμογή του διδακτικού πακέτου στα γραμμικά συστήματα.

Έπειτα από τη μελέτη όλων των παραπάνω αντικειμένων, προκύπτει η ανάγκη να εφαρμοστεί μελλοντικά η παραπάνω διδακτική παρέμβαση και άλλες παρόμοιες, προσθέτοντας συμπεράσματα και αποτελέσματα τόσο στον τρόπο διδασκαλίας της Άλγεβρας όσο και στην ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adu, E., Assuah, C. K., & Asiedu-Addo, S. K. (2015). Students' errors in solving linear equation word problems: Case study of a Ghanaian senior high school. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences, 11*, 17-30.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly, 88*(4), 286-290.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 83-106.

Hawes, K. (2007). Using error analysis to teach equation solving. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(5), 238-242.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*, 235-261.

Ozkaya, M., Ocal, M. F., & Konyalioglu, A. C. (2016). Visualization in solving inequality questions: Case of pre-Service mathematics teachers. *Journal of Education and Human Development*, *5*(4), 119-137.

Swan, M. (2000). Making Sense of Algebra. *Mathematics teaching*, *171*, 16-19.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historial development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 44-55.

Γκίκας, Α. (2017). Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία στα νέα αναλυτικά προγράμματα θρησκευτικών του Γυμνασίου με τη χρήση διδακτικών σεναρίων. Εμπειρική προσέγγιση. *Ζητήματα Διδακτικής των Θρησκευτικών*, *1*, 332-337.

Κανάκης, Ι. (1987). Η οργάνωση της διδασκαλίας-μάθησης με ομάδες εργασίας (Θεωρητική θεμελίωση και πρακτική εφαρμογή). *Αθήνα: Γρηγόρης*.

Ματσαγγούρας, Η. (2004). Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση. Γ΄ Έκδοση. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρης.

Παναγάκος, Ι. (2001). Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και κοινωνικοσυναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, *6*, 80-90.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ

Μάριος Βώβος

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

mvov@math.uoa.gr

Σκοπός της παρούσας εργασίας αποτέλεσε η διερεύνηση της αξιοποίησης ψηφιακού περιβάλλοντος DGE-CAS για την ανάπτυξη της μαθηματικής επιχειρηματολογίας και της συλλογιστικής των μαθητών, στην περίπτωση που τίθεται περιορισμός στη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων. Στην εργασία παρουσιάζονται και αναλύονται επεισόδια δύο μαθητών της Α΄ λυκείου κατά την επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος χρωματισμού ορθογωνίου. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι τα ψηφιακά περιβάλλοντα DGE-CAS υπό περιορισμό εργαλείου, μπορούν να λειτουργήσουν ως διδακτικό εργαλείο ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύγχρονες έρευνες έχουν αναδείξει την κατασκευή της γνώσης μέσω επιχειρηματολογίας σε μαθητικά πλαίσια (Schwarz, Neumann, Gil, & Ilya; 2003). Μάλιστα, η επιχειρηματολογία των μαθητών σε τέτοια πλαίσια έχει κοινωνική διάσταση, λόγω της άμεσης αλληλεπίδρασης τους σε συλλογικές δραστηριότητες. Στο παρόν άρθρο γίνεται μια προσπάθεια να μελετηθεί η ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας δύο μαθητών Α΄ λυκείου σε σχέση με την αντιμετώπιση της έννοιας της πυκνότητας των ρητών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, μέσα από τη χρήση περιβάλλοντος DGE-CAS (GeoGebra®) που έχει αφαιρεθεί η δυνατότητα χρήσης εργαλείου του. Στόχος είναι η ανάπτυξη της δομής της επιχειρηματολογίας των μαθητών και η μελέτη της συλλογιστικής πορείας τους. Για την ανάλυση της δομής του επιχειρήματος χρησιμοποιούμε την ανάλυση του Toulmin (1958), ενώ για την μελέτη της συλλογιστικής τους βασιζόμαστε στους ορισμούς της απαγωγής του Eco (1983). Το ερευνητικό ερώτημα της εργασίας είναι: Ποια είναι η δομή της επιχειρηματολογίας των μαθητών και η συλλογιστική τους, μέσα από την χρήση περιβαλλόντων DGE-CAS υπό περιορισμό;

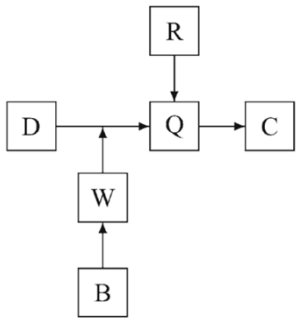
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μελέτη και η ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας των μαθητών αποτελεί σημαντικό ερευνητικό πεδίο τα τελευταία χρόνια (Hanna, 2020; Schwarz, 2010). Παράλληλα, τα ψηφιακά περιβάλλοντα χρησιμοποιούνται για την

ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών, γιατί είναι δυνατόν να συμβάλουν στην ανάπτυξη και ενίσχυση της επιχειρηματολογίας. Πολλοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης και επαγγελματικές οργανώσεις προτείνουν τη χρήση δυναμικών λογισμικών για τη διδασκαλία της γεωμετρίας (NCTM, 2000). Τα λογισμικά αυτά επιτρέπουν στους μαθητές να κατασκευάζουν γραφικές αναπαραστάσεις και να αλληλοεπιδρούν με αυτές, για να διερευνήσουν ιδιότητες και σχέσεις. Ερευνητικά αποτελέσματα για την αξιοποίηση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας από μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έδειξαν ότι βελτιώνει την κατανόησή τους για τις γεωμετρικές έννοιες και υποστηρίζει την ανάπτυξη τυπικών αποδείξεων (Laborde, et al., 2006).

Σχήμα Toulmin

Σύμφωνα με τον Toulmin κάθε επιχείρημα έχει μια συγκεκριμένη δομή. Πρώτα υπάρχουν οι ισχυρισμοί (C), δηλαδή προτάσεις που θέλουμε να διαπιστώσουμε αν είναι λογικά αληθείς. Στη συνέχεια, είναι τα δεδομένα (D), δηλαδή τα γεγονότα στα οποία ο ισχυρισμός βασίζεται. Έπειτα, είναι οι εγγυήσεις (W), που ορίζονται ως οι αιτιολογήσεις για τη χρήση των δεδομένων (D), για την απόδειξη του ισχυρισμού (C) και οι προσδιοριστές (Q), που είναι ρήσεις που δείχνουν τη βεβαιότητα μιας δήλωσης. Τέλος, είναι τα στηρίγματα (B) που με τη σειρά τους υποστηρίζουν τις εγγυήσεις (W) και η αντίκρουση (R). Η δομή του Toulmin παρουσιάζεται στην Εικόνα 1. Το μοντέλο που φαίνεται στην Εικόνα 1 είναι πλήρες με την έννοια ότι υπάρχουν όλα τα συστατικά μέρη (D, C, W, B, Q, R). Ένα επιχείρημα το οποίο πληροί τη δομή (D, C, W, B, Q, R) είναι πλουσιότερο για την ανάλυση και επεξήγηση του, συγκριτικά με ένα επιχείρημα της μορφής (D, C, W). Γενικά, τα επιχειρήματα που εμφανίζουν παραπάνω δομικά στοιχεία χαρακτηρίζονται πυκνά σε δομή.



Εικόνα 7: Πλήρες μοντέλο

Είδη συλλογισμού κατά Eco

Ο Eco (1983) κάνει μερικές χρήσιμες διακρίσεις με βάση τη διατύπωση του Peirce το 1878 για την απαγωγή: το συμπέρασμα μιας περίπτωσης από έναν κανόνα και ένα αποτέλεσμα. Ο Eco επισημαίνει ότι ο κανόνας που απαιτείται δεν είναι πάντα προφανής. Εάν είναι, τότε ισχύει η διατύπωση του Peirce, αλλά αν δεν είναι, τότε προκύπτουν άλλα είδη απαγωγής. Ο Eco προσδιορίζει τρία είδη απαγωγής: (1) υπερκωδικοποιημένη, (2) υποκωδικοποιημένη και (3) δημιουργική. Η υπερκωδικοποιημένη απαγωγή συμβαίνει, όταν το άτομο που επιχειρηματολογεί γνωρίζει μόνο έναν κανόνα από τον οποίο θα ακολουθούσε η γενική περίπτωση. Εάν υπάρχουν πολλοί γενικοί κανόνες από τους οποίους πρέπει να επιλεγούν,

ο Eco το αποκαλεί υποκωδικοποιημένη απαγωγή. Η επιλεκτική απαγωγή ορίζεται ως η διαδικασία εύρεσης της σωστής επεξηγηματικής υπόθεσης από ένα δεδομένο σύνολο πιθανών εξηγήσεων. Σε αυτή την περίπτωση, το άτομο που επιχειρηματολογεί θα πρέπει να βρει τον καταλληλότερο κανόνα, για να κατασκευάσει το συμπέρασμα από το σύνολο κανόνων στους οποίους έχει πρόσβαση. Ωστόσο, είναι δυνατόν να μην υπάρχει γενικός κανόνας γνωστός στο άτομο που επιχειρηματολογεί. Έτσι, πρέπει να εφεύρει έναν νέο κανόνα. Ο Eco (1983) αποκαλεί μια απαγωγή που περιλαμβάνει την εφεύρεση ενός νέου κανόνα, «δημιουργική απαγωγή».

Αφαίρεση εργαλείου περιβάλλοντος

Η απόδειξη στα μαθηματικά τις περισσότερες φορές δεν είναι μοναδική, καθώς η οπτική μεταβάλλεται. Πολλές φορές ο διδάσκων μπορεί να επηρεάσει τέτοιες μεταβολές, επηρεάζοντας τους μαθητές προς την αλλαγή της οπτικής τους (Krabbe, 2013). Για παράδειγμα, δίνεται το πρόβλημα: *Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:*

$x^{2025} + x^{2023} + \ldots + x^3 = 2024.$

Το πρόβλημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί διδακτικά κατά τη μετάβαση από την επίλυση εξισώσεων με χρήση αλγεβρικών μεθόδων, στη χρήση μεθόδων ανάλυσης (διαφορικό λογισμό). Σε τέτοια ερωτήματα ο διδάσκων μπορεί να εμποδίσει τους μαθητές από τη χρήση κάποιου συγκεκριμένου αποδεικτικού εργαλείου που αποτυγχάνει. Έτσι, αναφέρονται φράσεις, που περιορίζουν τους μαθητές, όπως "το πρόβλημα να λυθεί χωρίς χρήση παραγοντοποίησης". Η παρεμπόδιση έχει όφελος διδακτικό μέσα από την απεμπλοκή των μαθητών και την επανεκκίνηση της ροής του συλλογισμού. Αντίστοιχα, στην γεωμετρία πολλές φορές η απαίτηση της παύσης ισχύος αξιωμάτων, προτάσεων, κατασκευαστικών εργαλείων σχημάτων (διαβήτης, κανόνας) οδήγησε πολλές φορές στην ανάπτυξη της επιστήμης, όπως τη δημιουργία μη-Ευκλείδειων γεωμετριών (π.χ. υπερβολική, ελλειπτική γεωμετρία). Χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι το θεώρημα Mohr-Mascheroni, που αναφέρει ότι οποιαδήποτε γεωμετρική κατασκευή που μπορεί να εκτελεστεί με διαβήτη και κανόνα μπορεί να εκτελεστεί μόνο με διαβήτη. Προφανώς, η φράση "οποιαδήποτε γεωμετρική κατασκευή" αναφέρεται σε σχήματα που δεν περιέχουν ευθείες γραμμές, καθώς είναι σαφώς αδύνατο να σχεδιαστεί μια ευθεία γραμμή χωρίς ευθεία γραμμή. Στην παρούσα εργασία στηριζόμαστε στα παραπάνω και εισάγουμε την έννοια του ψηφιακού περιβάλλοντος DGE-CAS που ένα εργαλείο του, δομικό για το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί, απενεργοποιείται και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον χρήστη. Για παράδειγμα η κατασκευή του μέσου δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος, χωρίς τη χρήση του εργαλείου κατασκευής ευθειών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Διαδικασία – Περιβάλλον εργασίας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε εντός 5 μαθημάτων (διάρκειας δύο διδακτικών ωρών). Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο σπίτι των μαθητών (οι μαθητές είναι αδέλφια). Για τη διερεύνηση της σκέψης τους στην κατασκευή των επιχειρημάτων χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία διερεύνησης, όπως διατυπώθηκε από τους Cobb et al. (1990) σε κονστρουκτιβιστικό περιβάλλον. Στο περιβάλλον αυτό, ο διδάσκων δρα ως ερευνητής που προσπαθεί να εξηγήσει τις δράσεις των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικής γνώσης.

Στην έρευνα έλαβαν μέρος δύο μαθητές Α΄ Λυκείου. Οι μαθητές είχαν μαζί τους υπολογιστές. Χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον GeoGebra®, λόγω της εύκολης πρόσβασης μέσω διαδικτύου και εξυπηρετούσε τις ανάγκες της δραστηριότητας για διασύνδεση αλγεβρικών και γεωμετρικών εργαλείων και αναπαραστάσεων. Στόχος της δραστηριότητας ήταν να εμπλακούν οι μαθητές στην κατασκευή μαθηματικής γνώση, προσπαθώντας να επιλύσουν ένα ανοικτό πρόβλημα που απαιτούσε την εισαγωγή αλγεβρικών και γεωμετρικών εννοιών, όπως αυτή της γραφικής παράστασης συνάρτησης και του ίχνους ευθυγράμμου τμήματος. Το έργο ήταν βασισμένο σε ρεαλιστικό σενάριο κατασκευής χαλιών και κεντρική ιδέα ήταν η ανάδειξη της έννοια της πύκνωσης των ινών των χαλιών σε αντιστοιχία με την πύκνωση των ευθυγράμμων τμημάτων για την κάλυψη του ορθογωνίου. Οι μαθητές παρακολούθησαν βίντεο για τη δημιουργία χαλιών και μετέπειτα τους ζητήθηκε να προσπαθήσουν να χρωματίσουν στο περιβάλλον του GeoGebra® ένα χαλί, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, χωρίς τη χρήση κάποιου ψηφιακού εργαλείου χρωματισμού. Έτσι, το ψηφιακό περιβάλλον μετατράπηκε σε περιορισμένο. Για να το πραγματοποιήσουν έπρεπε να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά. Το πρόβλημα ήταν ανοικτό (Nohda, 1995) μιας και δεν είχε μοναδικότητα στον τρόπο επίλυσης (π.χ. η κατασκευή ιχνών μπορούσε να γίνει με διαφορετικές γεωμετρικές κατασκευές), μπορούσε να γενικευτεί σε νέο πρόβλημα (π.χ. χαλί με διαφορετικό σχήμα), ενέπλεκε στάδια μαθηματικής σκέψης (εξειδίκευση, εικασία, γενίκευση, επεξήγηση). Η επιλογή ανοικτού προβλήματος έγινε με στόχο την ανάπτυξη δεξιοτήτων ανώτερης τάξης (Pehkonen, 1997) αφού μέσα από την ανάλυση του, αξιολογούν και επιχειρηματολογούν, αναπτύσσουν και συνθέτουν επιμέρους στοιχεία για την επίλυση του. Οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν άρτια το ψηφιακό περιβάλλον (αλγεβρική – γεωμετρική εργαλειοθήκη, δυναμικός χειρισμός, ίχνος σημείου) και ταυτόχρονα να επινοήσουν τα μαθηματικά εργαλεία/έννοιες για την πραγματοποίηση του χρωματισμού, χωρίς το εργαλείο χρωματισμού του GeoGebra®.

Ανάλυση Δεδομένων

Για να απαντηθεί το ερευνητικό ερώτημα, αναλύθηκε η δομή και ο συλλογισμός των επιχειρημάτων των δύο μαθητών. Έγινε καταγραφή των επιχειρημάτων από τις απομαγνητοφωνήσεις των μαθημάτων. Από αυτά οι συστάδες μαθηματικών επιχειρημάτων (επεισόδια) καταγράφτηκαν ξεχωριστά και αναλύθηκαν. Ένα επεισόδιο κατηγοριοποιήθηκε ως επιχείρημα, όταν ο μαθητής ισχυριζόταν κάτι με μαθηματικό περιεχόμενο και υποστήριζε τον ισχυρισμό του. Στη συνέχεια αναλύθηκαν τα διάφορα στοιχεία του επιχειρήματος ως προς τη λειτουργία τους, χρησιμοποιώντας το σχήμα του Toulmin. Τα περισσότερα επιχειρήματα αποτελούνται από τουλάχιστον τρία στοιχεία: ισχυρισμό (C), δεδομένα (D) και εγγύηση (W). Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται 3 επεισόδια.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ

Το ερευνητικό ερώτημα της εργασίας ήταν ποια είναι η δομή της επιχειρηματολογίας των μαθητών και η συλλογιστική τους, μέσα από την χρήση περιβαλλόντων DGE-CAS υπό περιορισμό. Για τον σκοπό αυτό, παρουσιάζουμε επεισόδια των μαθητών στον χρωματισμό ορθογωνίου με περιορισμό στην χρήση εργαλείου χρωματισμού του ψηφιακού περιβάλλοντος και αναλύονται τα επιχειρήματα των μαθητών. Έγινε διαχωρισμός σε δύο σκέλη: το γενικό επιχείρημα του μαθητή και τα τοπικά επιχειρήματα που εκείνος δημιουργεί, για να υποστηρίξει το γενικό επιχείρημα.

Μελετώντας το πρόβλημα χρωματισμού ορθογωνίου: ανάλυση γενικού επιχειρήματος

Οι δύο μαθητές ξεκίνησαν να σκέφτονται έχοντας ως δεδομένο ότι το ερώτημα είναι επιλύσιμο. Ενώ κατά τον αρχικό πειραματισμό τους έφερναν ακανόνιστα σχήματα, κύκλους, ευθύγραμμα τμήματα, κ.ά. τελικά οι κεντρικές ιδέες τους ταυτίστηκαν ως προς την αντιμετώπιση του προβλήματος: ο χρωματισμός του ορθογωνίου έπρεπε να γίνει μέσω ιχνών ευθυγράμμων τμημάτων – ευθειών, όπως φαίνεται από τον παρακάτω διάλογο, καθώς και από τις κινήσεις των χεριών που έκαναν οι μαθητές.

> Μαθητής 1: Θα πάρουμε μια ακτίνα με χρώμα και να κάνει πέρα δώθε και σιγά σιγά θα χρωματιστεί όλο. […] Θέλω να το χρωματίσω όλο με όλες τις ακτίνες που θα τραβήξω. Θα τραβήξω όσες θέλω.

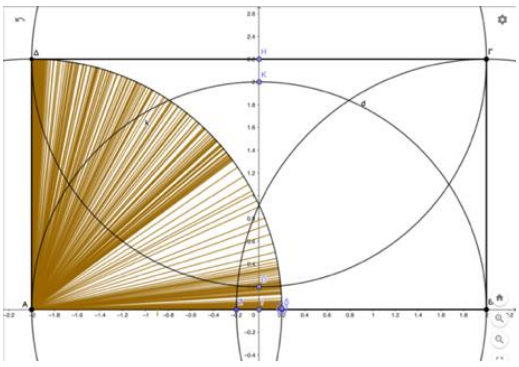
Οι μαθητές αλληλοεπιδρούσαν μεταξύ τους σε διάφορες φάσεις του μαθήματος είτε έμμεσα (οπτικές επαφές μεταξύ τους), είτε άμεσα (λεκτικές αναφορές). Η Μ2 μετά τις παραπάνω δηλώσεις του Μ1 επηρεάστηκε και άλλαξε τακτική, προσπαθώντας να εντοπίσει την

αλγεβρική κατασκευή που πρέπει να δημιουργηθεί, ώστε να καταφέρει να υποστηρίξει το γενικό επιχείρημα της. Η ανάλυση γίνεται με βάση τη δομή του Toulmin:

Δεδομένο (D):	Η ευθεία κατά τη μετακίνηση της αφήνει ίχνος.
Εγγύηση (W):	Οι ευθείες πιέζονται (πυκνώνουν) και χρωματίζουν το ορθογώνιο.
Στήριγμα (B):	Η διαδικασία πίεσης των ευθειών (πύκνωση) ευσταθεί, αν συγκρίνουμε τις γραμμές, με τις ίνες από τα χαλιά.
Ισχυρισμός (C):	Το ορθογώνιο χρωματίζεται.

Μελετώντας το πρόβλημα χρωματισμού ορθογωνίου: ανάλυση τοπικών επιχειρημάτων

Η κεντρική ιδέα και των δύο μαθητών Μ1, Μ2 ήταν ο χρωματισμός του ορθογωνίου μέσω κίνησης των ιχνών των ευθειών. Για την υποστήριξη των ισχυρισμών τους, καθένας τους διατύπωσε διαφορετικούς τρόπους κατασκευής. Ο μαθητής Μ1 κατασκεύασε κύκλους με ακτίνες τις πλευρές του ορθογωνίου και επέλεξε κάθε ακτίνα να εμφανίζει το ίχνος της. Στη συνέχεια, έδωσε κίνηση χειροκίνητα στις ακτίνες και έτσι, με σχολαστικότητα, έβαψε το ορθογώνιο. Ένα στιγμιότυπο της παραπάνω διαδικασίας φαίνεται στην Εικόνα 2. Η Μ2, για να κατασκευάσει τα ευθύγραμμα τμήματα με τα αντίστοιχα ίχνη τους, προσπάθησε να βρει την παραμετρική εξίσωση της ευθείας εκείνης, που καθώς η παράμετρος θα άλλαζε τιμές (μέσω του δρομέα του GeoGebra®), το ορθογώνιο θα χρωματιζόταν. Η έννοια της οικογένειας ευθειών έπρεπε να εφαρμοστεί. Η έννοια της κλίσης της ευθείας, αν και δεν αναφέρεται ρητά, υπάρχει εμμέσως.



Εικόνα 2: Στιγμιότυπο κατασκευής

Μαθητής 2: Έπρεπε να υπήρχε μια εξίσωση, $x = ay$. […] [Εννοώ] συνάρτηση. Όχι δεν ξέρω αν είναι συναρτήσεις. Είναι μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων και θα τη βάλουμε να αφήνει ίχνος, για κάθε λ που βάζουμε, όποτε έτσι όπως

αφήνουμε θα χρωματίζεται. […] Είναι μια εξίσωση που δεν τη θυμάμαι τόσο, την είχαμε πει πέρσι, μια τυχαία εξίσωση $ax = b$. […] Συνάρτηση, που να περνάει από την αρχή των αξόνων και να' ναι ευθεία.

Ερευνητής: Μήπως, θυμάσαι ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης αυτής;

Μαθητής 2: $xy = a$ [Προσπαθεί να την σχεδιάσει στο GeoGebra.] Δεν είναι αυτή [η συνάρτηση που θέλουμε], γιατί αυτή πάει έτσι καμπυλωτά. […] Τελικά, είναι $ax = y$.

Η Μ2 φαίνεται να είναι σε σύγχυση με τη διάκριση των εννοιών της συνάρτησης και παραμετρικής εξίσωσης ευθείας. Η επιβεβαίωση των προβληματισμών της στο ψηφιακό περιβάλλον, επιτρέπει τη συνέχεια του συλλογισμού της. Η ανάλυση του επιχειρήματος της είναι η εξής:

D: Η εξίσωση έχει κάποια αλγεβρική μορφή.

W: Υπάρχει συνάρτηση που αναπαριστά ευθεία.

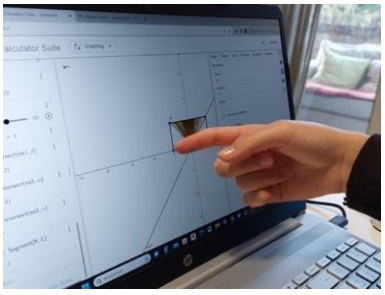
B: Το είχαμε πει πέρσι.

Q: Νομίζω ότι…

C1: Πρέπει να υπάρχει εξίσωση. Είναι μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

C2: Μπορούμε να δημιουργήσουμε πολλές τέτοιες ευθείες με εξίσωση $ax = y$.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση, η Μ2 αναφέρει εγγύηση και στήριγμα, κάνοντας το επιχείρημα της δομικά πυκνό. Για να υποστηρίξει τον ισχυρισμό της κάνει απαγωγή, προσπαθώντας να βρει την μορφή της που είναι το δεδομένο (D). Το είδος της είναι υποκωδικοποιημένη απαγωγή, γιατί προσπαθεί να βρει την εξίσωση της ευθείας, μέσα από ένα φάσμα δυνατών επιλογών, που εμπλέκουν τις μεταβλητές a, x, y. Τέτοιες πιθανές επιλογές φαίνονται να είναι η εξίσωση $xy = a$, $ax = y$ που αναφέρονται ρητά και άλλες που δεν αναφέρονται καθόλου $ay = x$, αλλά υποδηλώνονται από την ανάλυση του επιχειρήματος. Μάλιστα, οι εξισώσεις $ax = y$ και $ay = x$ είναι ισοδύναμες για διαφορετικές επιλογές του a, με την έννοια ότι η εξίσωση $2x = y$ και $\frac{1}{2}y = x$ ταυτίζονται. Η εξίσωση $xy = a$ απορρίπτεται άμεσα, μιας και η γραφική της παράσταση 'καμπυλώνει' κάτι που το παρατηρεί στο ψηφιακό περιβάλλον. Γίνεται εμφανές, ότι κατά τη μαθήτρια μια γραμμή είναι ευθεία, αν και μόνο αν δεν καμπυλώνει. Η έννοια της καμπύλης δεν αναφέρεται ρητά, όμως από την ερμηνεία των



Εικόνα 3: Κίνηση χεριών

κινήσεων της, που περιγράφουν την κίνηση της καμπύλης, διαφαίνεται η ταύτιση γραμμής που καμπυλώνει, με αυτή της τεθλασμένης γραμμής. Η κίνηση των χεριών της έπαιζε κεντρικό ρόλο στην έμμεση υποστήριξη των επιχειρημάτων της, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3. Η κίνηση των χεριών είχε άμεση σχέση με την δημιουργία του C2 (Η ευθεία πρέπει να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.), με την έννοια ότι εφόσον βρήκε την αλγεβρική εξίσωση της ευθείας, η κίνηση την βοήθησε στο να καταλήξει ότι "μπορούμε να δημιουργήσουμε πολλές τέτοιες ευθείες". Χρησιμοποιώντας κινήσεις, φαντάστηκε τη δημιουργία των ιχνών από τη μεταβολή της παραμέτρου a στην εξίσωση $ax = y$. Το τοπικό επιχείρημα της δεν ικανοποιεί τον ισχυρισμό του γενικού επιχειρήματος (χρωματισμός ορθογωνίου) μιας και η μεταβολή της ευθείας $ax = y$ για τις διάφορες τιμές του a δεν χρωματίζει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$. Οι μαθητές πειραματίστηκαν αρκετά, μεταβάλλοντας το διάστημα τιμών της παραμέτρου a, για πολύ μεγάλες τιμές του, συνειδητοποιώντας ότι ο κατακόρυφος άξονας προσεγγίζεται, αλλά δεν ταυτίζεται για καμία τιμή του a. Εντούτοις είναι δομικά πυκνό και λόγω αυτής της ισχύς του, η M2 καταφέρνει να τροποποιήσει την ιδέα της, αλλάζοντας την παραμετρική εξίσωση της ευθείας σε $y = \lambda$ και κινώντας τον δρομέα του λ για συγκεκριμένες τιμές, χρωματίζει το ορθογώνιο.

> Μαθητής 2: Αα το βρήκα! Είναι μια αόριστη ευθεία. Να είναι στην αρχή των αξόνων, στην ευθεία παράλληλη. […] Στον άξονα $x'x$ και να πάρουμε μετά ένα ευθύγραμμο τμήμα και να ανεβοκατεβαίνει και να πάρουμε [το ίχνος και να γεμίσει χρώμα το ΑΒΓΔ].

Ο τρόπος με τον οποίο το προηγούμενο επιχείρημα της τροποποιείται έχει επίσης σημασία. Η σύγκριση των διαλόγων αναδεικνύει τη βεβαιότητα που έχει η M2 κατά τη διατύπωση του τροποποιημένου ισχυρισμού της (C2→C2*). Η βεβαιότητα της φαίνεται και από το γεγονός ότι επιλέγει να μην χρησιμοποιήσει προσδιοριστή (Q) και να μην κάνει αντίκρουση (R). Το πρώτο, μάλιστα, ήταν δομικό χαρακτηριστικό του προηγούμενου επιχειρήματος της. Συνολικά και οι δύο μαθητές δεν δημιούργησαν αντικρούσεις (R) κατά την διατύπωση των επιχειρημάτων τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι ψηφιακά περιβάλλοντα DGE-CAS που κάποιο εργαλείο τους βρίσκεται υπό περιορισμό μπορούν να δημιουργήσουν χώρο για ανάπτυξη πυκνής επιχειρηματολογίας στους μαθητές, κάτι που τους οδηγεί στην απόκτηση γνώσης (Schwarz et al., 2010). Μέσα από την διαδικασία πειραματισμού και αλληλεπίδρασης με το περιορισμένο ψηφιακό περιβάλλον απέκτησαν γενικές δεξιότητες, όπως

η αιτιολόγηση, η δημιουργία πρότασης και αντιπρότασης, καθώς και η συνεργασία. Καθώς οι μαθητές εργάζονταν πάνω σε ανοικτό πρόβλημα, η ανάγκη τους να κατανοήσουν ο ένας τον άλλον και να επικοινωνήσουν τις απόψεις και τις εικασίες τους προκειμένου να καταλήξουν σε μια λύση οδήγησε στην ανάγκη να αποσαφηνίσουν και να διατυπώσουν καλύτερα τις σκέψεις τους. Η ποιότητα μέσα από την ανάλυση της συλλογιστικής, στη δομή των επιχειρημάτων είναι επίσης μια ένδειξη ότι σε ένα τέτοιο περιβάλλον, μπορούν να κατασκευαστούν στρατηγικές που βοηθούν στη δημιουργία ιδεών. Ο περιορισμός του εργαλείου χρωματισμού, οδήγησε τελικά στην έκφραση πολλαπλών μαθηματικών εννοιών και τεχνικών (συνάρτηση, γραφική παράσταση, ίχνος, γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη, παραλληλία, εναλλαγή μεταξύ άλγεβρας και γεωμετρίας) και φαίνεται να είναι μια ακόμη διδακτική επιλογή για τον διδάσκοντα κατά την διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με ψηφιακά περιβάλλοντα DGE-CAS. Τα συμπεράσματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με την παραδοσιακή διδασκαλία και τις μεθόδους της (π.χ. στυγνή διδασκαλία), που δημιουργούν σε περιπτώσεις: (1) στεγανά έκφρασης μαθηματικών ιδεών, (2) εμποδίζουν την εννοιολογική κατανόηση και κριτική ανάλυση. Επιπλέον, τα αποτελέσματα δείχνουν την δυσκολία εμφάνισης αντικρούσεων (R) και προσδιοριστών (Q) ως δομικά συστατικά των επιχειρημάτων των μαθητών. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των Knipping & Reid (2019) για την έλλειψη των εν λόγω δομικών στοιχείων στα σχολικά δεδομένα. Οι πεποιθήσεις του δασκάλου και τα διαφορετικά στυλ διδασκαλίας δεν έχουν ληφθεί υπόψη στην παρούσα μελέτη, αν και αποτελούν παράγοντα επιρροής στον τρόπο με τον οποίο δομείται η επιχειρηματολογία. Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθούν οι επιπτώσεις στην επιχειρηματολογία των μαθητών εντός περιορισμένων ψηφιακών περιβαλλόντων DGE-CAS, μέσα από πιο μακροχρόνια έρευνα όπου θα διερευνώνται οι αλλαγές κατά μήκος του χρονοδιαγράμματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1990). Chapter 9: Classrooms as Learning Environments for Teachers and Researchers. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *4*, 125–210.

Eco, U. (1983). Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction. *The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce*, 198-220.

Evens, H., & Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: 'I know but I can't explain'. Educational Research, 46, 269–282.

Hanna, G. (2020). Mathematical proof, argumentation, and reasoning. *Encyclopedia of mathematics education*, 561-566.

Knipping, C., & Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. *Compendium for early career researchers in mathematics education*, 3-31.

Krabbe, E. C. (2013). Strategic maneuvering in mathematical proofs. *The argument of mathematics*, 181-197.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 275-304.

Nohda, N. (1995). Teaching and Evaluating Using" Open-Ended Problems" in Classroom. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, *27*(2), 57-61.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Pehkonen, E. (1997). Use of problem fields as a method for educational change. *Use of open-ended problems in mathematics classrooms*, 73-84.

Schwarz, B. B., Hershkowitz, R., & Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. *Educational dialogues: Understanding and promoting productive interaction*, *115*, 141.

Stacey, K. (1995). The Challenges of Keeping Open Problem-Solving Open in School Mathematics. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education*, *27*(2), 62-67.

Toulmin, S. (1996). The Uses of Argument. Cambridge University Press, Cambridge; 1958 Means, M. L., & Voss, J. F. Who reasons well? Two

studies of informal reasoning among children of different grade, ability, and knowledge levels. *Cognition and Instruction, 14*, 139-179.

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ (Α)ΣΥΝΕΧΕΙΕΣ ΣΤΟΝ ΥΒΡΙΔΙΚΟ ΧΩΡΟ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

moutsiosrent@primedu.uoa.gr

Η πρόσφατη πανδημία άφησε έντονο αποτύπωμα στα μαθησιακά περιβάλλοντα με την αποδοχή ψηφιακών, σύγχρονων και ασύγχρονων, μέσων ως ισοδύναμων της διδασκαλίας και μάθησης σε φυσικό χώρο. Στην Ελλάδα νομοθετήθηκε η χρήση ψηφιακών ασύγχρονων ήκαι σύγχρονων τρόπων διδασκαλίας ως *εναλλακτικές ισοδύναμες* της δια ζώσης διδασκαλίας σε περιπτώσεις έκτακτων συνθηκών, καταδεικνύοντας τη θεσμική αποδοχή της διδακτικο-μαθησιακής *συνέχειας* στον χώρο των υβριδικών/μικτών μαθησιακών περιβαλλόντων. Ισοδυναμία και συνέχεια που φαίνεται να είναι ανεξάρτητες του μαθήματος που διδάσκεται, των εκπαιδευτικών, των παιδιών, της σχολικής μονάδας, του στενότερου και ευρύτερου κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου κ.τ.λ. Όμως, κάτι τέτοιο δεν θεωρείται δεδομένο από την επιστημονική έρευνα, με πλήθος σχετικών εργασιών (π.χ. De Freitas κ.ά., 2020). Ο χώρος μπορεί να ιδωθεί ως μια τριάδα πόλων (Lefebvre, 1991): ιδεατού (conceived), αισθητηριακού (perceived), και βιωμένου (lived). Αντλώντας από τη φαινομενολογική ιδέα της αποβλεπτικότητας (Sokolowski, 2000) και της εννοιοποίησης της σχολικής μονάδας ως σύστημα (Bertalanffy, 1968), ο υβριδικός χώρος αναδύεται στην πολύπλοκη αποβλεπτική σχέση σχεδιαστών, χρηστών και φυσικών νόμων της υλικότητάς του. Συνεπώς, προτείνεται η επανεξέταση ιζηματοποιημένων χωρικών νοηματοδοτήσεων στην υβριδική τάξη των μαθηματικών για να διερευνηθούν οι εκπαιδευτικές και παιδαγωγικές δυνατότητες και (α)συνέχειες τους με έμφαση στην *ενσώματη μάθηση*, τη *διεπιστημονικότητα*, την *οικογένεια*, και τη *συμπερίληψη*.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bertalanffy, L. V. (1968). *General System Theory: Foundations, Development, Applications*. George Braziller.

De Freitas, E., Rousell, D., & Jäger, N. (2020). Relational architectures and wearable space: Smart schools and the politics of ubiquitous sensation. *Research in Education, 107*(1), 10–32.

Lefebvre, H. (1991*). The production of space*. Blackwell.

Sokolowski, R. (2000). *Introduction to phenomenology*. Cambridge University Press.

Καινοτόμες Διδακτικές Προτάσεις

ΕΝΙΣΧΥΟΝΤΑΣ ΤΗ ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Αικατερίνη Βισσαρίου & Δέσποινα Δεσλή

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

aikaterinivissariou7@gmail.com, ddesli@eled.auth.gr

Στην παρούσα διδακτική πρόταση παρουσιάζεται η πορεία σχεδιασμού και υλοποίησης μεταγνωστικής διδασκαλίας που έλαβε χώρα σε ένα τμήμα Γ' τάξης κατά την επίλυση μη-τυποποιημένων προβλημάτων. Μετά την παρέμβαση σημαντική ήταν η βελτίωση των παιδιών σε γνωστικό και μεταγνωστικό επίπεδο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες η μεταγνώση, ως «σκέψη για τη σκέψη» (Flavell, 1979), βρίσκεται στο επίκεντρο του ερευνητικού και εκπαιδευτικού ενδιαφέροντος, κυρίως σε σχέση με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Σήμερα είναι κοινά αποδεκτό ότι η ανάπτυξη της μεταγνώσης καθιστά τα παιδιά πιο επιδέξιους λύτες, καθώς τα μαθαίνει να λειτουργούν ευέλικτα και να σκέφτονται κριτικά σε όλα τα στάδια της επίλυσης. Αναδεικνύεται, συνεπώς, ο καθοριστικός ρόλος που επιτελεί η μεταγνωστική διδασκαλία στη σχολική τάξη (Desoete & De Craene, 2019; Βισσαρίου, 2022). Από την άλλη μεριά, ο επιτυχής σχεδιασμός και η υλοποίηση μεταγνωστικής παρέμβασης προϋποθέτει, ανάμεσα σε άλλα, τα κατάλληλα μαθηματικά έργα, έργα στα οποία απαιτείται δημιουργική, κριτική και ευέλικτη σκέψη, όπως τα μη-τυποποιημένα προβλήματα (OECD, 2014; Βισσαρίου, 2022).

Η παρούσα διδακτική πρόταση εστιάζει στη βελτίωση της γνωστικής και μεταγνωστικής επίδοσης των παιδιών ενός τμήματος Γ' τάξης, που έλαβε μεταγνωστική διδασκαλία κατά τη διάρκεια επίλυσης μη-τυποποιημένων προβλημάτων.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ – ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Αρχικά, πραγματοποιήθηκε προκαταρκτική αξιολόγηση (pretest) των συμμετεχόντων, αφενός με τη συμπλήρωση καταλόγων μεταγνωστικής γνώσης (δηλωτικής, διαδικαστικής και υποθετικής), μεταγνωστικών δεξιοτήτων (σχεδιασμού, παρακολούθησης και αξιολόγησης) και μεταγνωστικών εμπειριών (πριν και μετά την επίλυση) για την αποτίμηση του μεταγνωστικού τους επιπέδου, και αφετέρου με την επίλυση μη-τυποποιημένων προβλημάτων για την αποτίμηση του γνωστικού τους

επιπέδου. Στη συνέχεια, οι συμμετέχοντες έλαβαν μεταγνωστική διδασκαλία διάρκειας τεσσάρων μηνών με ένα νέο, «πολυλειτουργικό» μοντέλο μεταγνωστικής διδασκαλίας στα μαθηματικά, το οποίο αποτελεί επέκταση της μεταγνωστικής διδακτικής μεθόδου STARtUP των Lee, Yeo και Hong (2014). Το εν λόγω μοντέλο ενδείκνυται για τη διδασκαλία επίλυσης πλούσιων μαθηματικών έργων, όπως είναι τα μη-τυποποιημένα προβλήματα, επιχειρεί να διδάξει το σύνολο των μεταγνωστικών λειτουργιών στα βασικά συστατικά της μεταγνώσης και δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στη φάση πριν από την επίλυση προβλήματος (κατανόηση και σχεδιασμός) συγκριτικά με τις άλλες δύο φάσεις (κατά την επίλυση και μετά την επίλυση). Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης, οι συμμετέχοντες αξιολογήθηκαν εκ νέου σε μεταγνωστικό και γνωστικό επίπεδο (post-test) με τα ίδια εργαλεία που αξιοποιήθηκαν στην προκαταρκτική αξιολόγηση.

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, πραγματοποιήθηκαν συνολικά 34 συνεδρίες. Από αυτές, οι δύο πρώτες ήταν εισαγωγικές, με στόχο την εισαγωγή των παιδιών στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, εμπλουτισμένη με μεταγνωστικά στοιχεία και δεξιότητες. Διεξήχθη συζήτηση για τον ορισμό και τα συστατικά του προβλήματος, για τα διάφορα είδη προβλημάτων, με έμφαση στα μη-τυποποιημένα προβλήματα, για τη σπουδαιότητα των τρόπων-στρατηγικών και την ανάλυση των βημάτων επίλυσης. Αν και στα παιδιά δεν χρησιμοποιήθηκαν μεταγνωστικοί όροι, η σημασία τους αναδείχθηκε με τη χρήση παραδειγμάτων. Προϊόν των συζητήσεων που διεξήχθησαν στις εισαγωγικές συνεδρίες ήταν η δημιουργία καρτών γνωστικών και μεταγνωστικών συμπεριφορών που αναδύονται στις φάσεις επίλυσης προβλήματος, τις οποίες οι μαθητές πλαστικοποίησαν και ανάρτησαν στον πίνακα της τάξης, προκειμένου να βοηθούνται στην επίλυση των προβλημάτων καθόλη τη διάρκεια της μεταγνωστικής διδασκαλίας.

Στη μεταγνωστική διδασκαλία αξιοποιήθηκαν συνολικά 32 μη-τυποποιημένα προβλήματα στον αντίστοιχο αριθμό συνεδριών. Οι 30 συνεδρίες διήρκησαν η καθεμία δύο διδακτικές ώρες (90΄), με εξαίρεση τις εισαγωγικές συνεδρίες που αφορούσαν την επίλυση των δύο πρώτων προβλημάτων, οι οποίες διήρκησαν τέσσερις διδακτικές ώρες η καθεμία. Ο χρόνος ενασχόλησης των παιδιών με τα πρώτα προβλήματα ήταν μεγαλύτερος, προκειμένου αυτά να εξοικειωθούν με την μέχρι τότε άγνωστη σε αυτά διαδικασία της επίλυσης. Τα παιδιά σε κάθε συνεδρία διαχειρίζονταν ένα μη-τυποποιημένο πρόβλημα. Τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν παρόμοιας μορφής, επιπέδου και δυσκολίας με τα προβλήματα της προκαταρκτικής αξιολόγησης και κάλυπταν διάφορες μαθηματικές περιοχές (π.χ., ώρα, χαρτονομίσματα του ευρώ, αποστάσεις, ηλικίες, κλπ.).

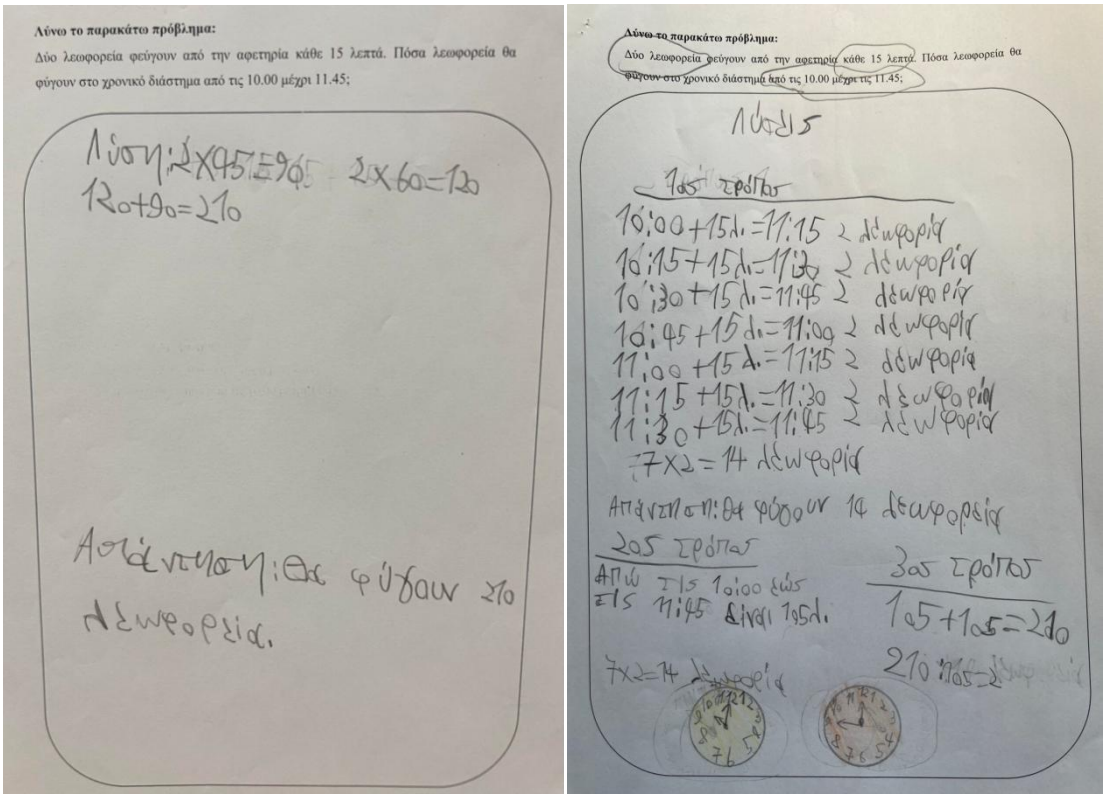
Η επίλυση κάθε μη-τυποποιημένου προβλήματος συνοδευόταν από μεταγνωστικές ερωτήσεις, τις οποίες τα παιδιά καλούνταν να απαντήσουν γραπτώς, αποτυπώνοντας έτσι τις ενέργειες και τις διαδικασίες της σκέψης τους αλλά και τις μεταγνωστικές λειτουργίες που λάμβαναν χώρα. Τέτοιες ερωτήσεις γίνονταν πριν από την επίλυση (π.χ., «τι πρέπει να βρω σε αυτό το

πρόβλημα;», «έχω λύσει νωρίτερα παρόμοιο πρόβλημα;»), κατά την επίλυση (π.χ., «ποιο είναι το πρώτο βήμα που θα κάνω;», «κάνω σωστά τις πράξεις;») και μετά την επίλυση (π.χ., «έλεγξα τις πράξεις μου;», «υπήρχε άλλος τρόπος για να εργαστώ;»). Ως εκ τούτου, οι μαθητές βρίσκονταν σε αδιάκοπη επαφή με τη μαθησιακή διαδικασία και μυούνταν να λειτουργούν μεταγνωστικά, παρακολουθώντας και ρυθμίζοντας τις ενέργειες και τη σκέψη τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας προέκυψε ότι, ενώ στην προκαταρκτική αξιολόγηση το μεταγνωστικό και γνωστικό επίπεδο των παιδιών ήταν πολύ χαμηλό, μετά την παρέμβαση βελτιώθηκε σημαντικά. Μάλιστα, μετά τη διδασκαλία τα παιδιά, όχι μόνο έλυσαν με επιτυχία τα περισσότερα προβλήματα, αλλά παράλληλα ανέδειξαν ποιοτικά χαρακτηριστικά υψηλού επιπέδου στον τρόπο που εργάστηκαν. Η διαφορά στην επίλυση προβλήματος πριν και μετά την παρέμβαση αποτυπώνεται ενδεικτικά στην προσπάθεια ενός μαθητή, με υψηλή επίδοση, να λύσει ένα μη-τυποποιημένο πρόβλημα πριν και μετά την παρέμβαση (Εικόνα 1). Συγκεκριμένα, πριν από την παρέμβαση, είναι εμφανής η απουσία βημάτων και σχεδίου λύσης, η έλλειψη αξιοποίησης στρατηγικής επίλυσης ή χρήσης αναπαράστασης του προβλήματος. Μάλιστα, παρατηρείται έμφαση σε αλγοριθμικό τρόπο σκέψης, με αποτέλεσμα οι αριθμητικές πράξεις που επέλεξε να κάνει να μη τον οδηγήσουν σε επιτυχή λύση.

Αντίθετα, μετά τη διδασκαλία έλυσε το πρόβλημα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, επιβεβαιώνοντας την ίδια σωστή λύση και στους τρεις. Επίσης, κύκλωσε τις σημαντικές πληροφορίες στην εκφώνηση του προβλήματος και επιχείρησε την αναπαράστασή τους (σχεδίασε δύο ρολόγια, στο πρώτο από τα οποία οι δείκτες δείχνουν την έναρξη του χρονικού διαστήματος και στο δεύτερο τη λήξη του χρονικού διαστήματος που θα αναχωρήσουν τα λεωφορεία). Η σωστή χρήση αναπαράστασης των δεδομένων του προβλήματος, ο εντοπισμός των σημαντικών πληροφοριών του, η σειρά ενεργειών και βημάτων που έκανε και η αναζήτηση περισσότερων από έναν τρόπων λύσης με την ταυτόχρονη εναλλαγή και αξιοποίηση στρατηγικών επίλυσης, οδήγησαν τον συγκεκριμένο μαθητή στην κατανόηση του προβλήματος και την επιτυχή λύση του. Τα ευρήματα αυτά αναδεικνύουν τα οφέλη της μεταγνωστικής διδασκαλίας στο πλαίσιο του σχολείου, στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών για επίλυση προβλήματος και την καλλιέργεια της μεταγνώσης.



Εικόνα 1. Απάντηση μαθητή σε μη-τυποποιημένο πρόβλημα πριν και μετά την παρέμβαση

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βισσαρίου, Α. (2022). *Ο ρόλος της μεταγνωστικής διδασκαλίας στην ανάπτυξη μεταγνώσης κατά την επίλυση προβλήματος σε παιδιά Γ' τάξης.* Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή. Θεσσαλονίκη: Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

Desoete, A., & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM (51)*4, 565–575.

Flavell, J.H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906–911.

Lee, N. H., Yeo, D. J. S., & Hong, S. E. (2014). A metacognitive-based instruction for primary 4 students to approach non-routine mathematical word problems. *ZDM*, *46*(3), 465–480.

OECD (2014). *Pisa 2012 Results: Creative problem solving: Students' skills in tackling real-life problems* (Vol. V), PISA: OECD Publishing.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΟΡΙΟΥ ΜΕΣΩ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Μαντατζή Στυλιανή

Φοιτήτρια ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών ΕΚΠΑ

mantatzistella@gmail.com

Η έννοια του ορίου για τους μαθητές της Γ΄ λυκείου είναι προβληματική λόγω των σημασιών της στην καθημερινή ομιλία αλλά και της πολυπλοκότητάς της (Imène Ghedamsi1 and Thomas Lecorre). Η εισαγωγή του ορίου μέσα από ρεαλιστικά προβλήματα βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι το όριο δεν είναι μια προσέγγιση και ότι δεν είναι κάτι άπιαστο (*Gravemeijer, K. & Doorman, D. (1999)). Αναδεικνύεται η οπτική του να ξεκινάω από το f(x) και όχι από το x καθώς έτσι είναι πιο εύκολο να έρθουν αντιμέτωποι με την απειρία και τον ορισμό με ε και δ. Αναπτύσσεται η οπτική της συμμεταβολής των x και f(x) στην διαδικασία εύρεσης του ορίου.*

ΟΡΓΑΝΩΣΗ-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η παρέμβαση εξέτασε το κατά πόσο βοηθάει τους μαθητές τρίτης λυκείου ένα ρεαλιστικό πρόβλημα στην εισαγωγή της έννοιας του ορίου και πώς τα ψηφιακά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας συμβάλλουν στην ανάπτυξη εικασιών, συλλογισμών και την σύνδεση εννοιών με την δυναμική οπτική τους. Ένα σχήμα για τους μαθητές έχει διπλό ρόλο, το χρησιμοποιούν για να οπτικοποιήσουν, να κάνουν εικασίες, να γενικεύσουν αλλά και για να επικυρώσουν τις εικασίες (García Cruz & Martinón (1997)). Η οπτικοποίηση μέσω υπολογιστών καθιστά δυνατή τη μετατροπή δεδομένων, την τροποποίηση εικόνων, τον χειρισμό αντικειμένων και την εξέταση χαρακτηριστικών των αντικειμένων πιο εύκολη καθώς όλα αυτά ήταν αδύνατα και απρόσιτα στο περιβάλλον χαρτί και μολύβι (Hanna 2000). Ο Mason (1991) υποστηρίζει ότι με το δυναμικό λογισμικό μπορεί κανείς να ελέγξει ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων καθώς όπως λέει ‘με την επίκληση της συνέχειας, ένα άπειρο αριθμό περιπτώσεων’. Η παρέμβαση έχει ως στόχο να συνδέσει το concept definition του ορίου με το concept image του, στοχεύοντας να ξεπεραστούν κάποιες βασικές αρχικές παρανοήσεις όπως η ταύτιση του τελευταίου όρου με το όριο και να βοηθήσει στην αναπαραστατική κατανόηση και ερμηνεία των στατικών όρων του ε,δ μέσω δυναμικών περιβαλλόντων. Προτείνεται μια σταδιακή εισαγωγή της έννοιας του ορίου μέσω κάποιων διαισθητικών προβλημάτων που συνδέονται με ρεαλιστικές καταστάσεις. Αρχικά μια συζήτηση για την ανάπτυξη της διαίσθησης για την έννοια μέσα από την ανάδειξη ζητημάτων από την καθημερινή ζωή. Έπειτα τα δυναμικά σχήματα και γραφήματα βοηθούν στην εξάλειψη ζητημάτων όπως ότι το όριο είναι ένας αριθμός που δεν επιτυγχάνεται ποτέ. Οι δραστηριότητες που προτείνονται στοχεύουν στην

πιστή αντανάκλαση του ορισμού μέσω απεικόνισης με σκοπό όταν οι μαθητές έρθουν σε επαφή με τον τυπικό ορισμό να μπορούν να ανακαλέσουν τις απεικονίσεις σε κάποια αποδεικτική διαδικασία. Οι μαθητές είχαν ως γνώσεις τους πραγματικούς αριθμούς, τις συναρτήσεις και τις ακολουθίες. Χωρίστηκαν σε ομάδες των 2 με έναν υπολογιστή. Είχε προηγηθεί μια επανάληψη στις απαραίτητες γνώσεις και μια εκπαίδευση στα δύο δυναμικά περιβάλλοντα. Οι μαθητές αφέθηκαν ελεύθεροι να δουλέψουν πάνω στις δραστηριότητες, η εκπαιδευτικός επενέβαινε με ρητορικές ερωτήσεις σε όποια ομάδα χρειαζόταν χωρίς όμως να προδίδει τον τρόπο ή την ίδια την λύση. Η πρώτη δραστηριότητα αφορούσε την έννοια του ορίου ακολουθίας. Η οπτικοποίησή της με την βοήθεια των ψηφιακών εργαλείων βοήθησε τους μαθητές στο να μπουν σε μια διαδικασία κατασκευής και παρατήρησης κάτι που ήταν αδύνατο στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι.

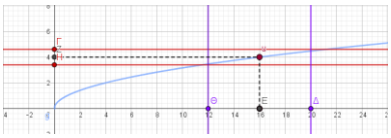
Χαλί του Seirpinski: Με αφορμή το παρακάτω πρόβλημα στην αρχή εντάξαμε τους μαθητές σε μια συζήτηση για την σημασία των φράκταλ στην καθημερινή ζωή (Barlow, M. T. and Perkins, E. A. 1988, Carles Puente-Baliarda, Jordi Romeu, Rafael Pous, Angel Cardama 1998). Δόθηκε στους μαθητές ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ στο Sketchpad και ζητήθηκε να απαντήσουν στις παρακάτω ερωτήσεις: Χωρίστε το τετράγωνο σε 9 ίσα τετράγωνα και το κεντρικό χρωματίστε το. Ποιο είναι το εμβαδόν και το μήκος της πλευράς του τετραγώνου χωρίς το χρωματισμένο; Χωρίστε τα 8 λευκά τετράγωνα και επαναλάβετε την διαδικασία. Ποιο είναι το εμβαδόν και το μήκος της πλευράς; Επαναλάβετε την διαδικασία άλλες 3 φορές τι παρατηρείτε; Τι θα συμβεί στη $10^{η}$ επανάληψη; Τι θα συμβεί στην ν-οστή επανάληψη;

Κατά την εφαρμογή του μαθηματικού έργου η εκπαιδευτικός ενθάρρυνε τους μαθητές στην εξερεύνηση. Αφού δόθηκε ο απαραίτητος χρόνος ακολούθησε μια συζήτηση για τη λύση του προβλήματος αλλά και για τα επιχειρήματα που ανέπτυξαν. Η διαδικασία ενασχόλησης με το ψηφιακό εργαλείο επηρέασε θετικά τους μαθητές καθώς θέλησαν σχεδόν όλοι να προσπαθήσουν να δουλέψουν πάνω σε αυτό και τους διευκόλυνε στην έκφραση εικασιών. Χρειάστηκαν παρότρυνση για να αιτιολογήσουν μαθηματικά την ισχύ ή όχι των εικασιών τους καθώς κάποιοι μαθητές έμεναν στην οπτική επιβεβαίωση. Στην συζήτηση που ακολούθησε ζητήθηκε να εκφράσουν οι ίδιοι όλη την πορεία σκέψης τους, τον τρόπο κατασκευής των σχημάτων καθώς και τις εικασίες τους ώστε να πείσουν για την ορθότητα της λύσης τους. Το τελικό αποτέλεσμα δεν ήταν εύκολο καθώς ερχόταν σε αντίθεση με την διαίσθηση. Όταν το είδαν όμως σε συνδυασμό με τα φράκταλ στην καθημερινή ζωή είδαν μια ομοιότητα που τους βοήθησε. Η δυνατότητα του zoom βοήθησε αρκετά στην κατασκευή βημάτων για την κατανόηση της διαίσθησης και στην μαθηματική

τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογιών ήταν καθοριστική στην κατανόηση του τελικού αποτελέσματος στο οποίο συνέβαλε αρκετά η πρότερη συζήτηση για τα φράκταλ.

Ράλι: Το παρακάτω πρόβλημα δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να έρθουν σε επαφή με μια πρώιμη μορφή του ε-δ ορισμού. Είδανε την έννοια του ορίου μέσα σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα με την βοήθεια ενός ψηφιακού περιβάλλοντος του οποίου το γράφημα αντανακλούσε με ακρίβεια τον τυπικό ορισμό. Αυτό τους βοήθησε αρκετά στο να συνδέσουν τα μαθηματικά με την καθημερινότητά τους Gravemeijer, K. & Doorman, D. (1999) και να εξαλειφθούν κάποιες παρανοήσεις. Η προσέγγιση αυτή παρακίνησε τους μαθητές να αξιοποιήσουν το GeoGebra για να εξάγουν συμπεράσματα, να οπτικοποιήσουν τα δεδομένα τους και να σχηματίσουν εικασίες τις οποίες επαλήθευσαν πειραματιζόμενοι με το περιβάλλον. Τα ερωτήματα που δόθηκαν ήταν: Παρακολουθούμε την πορεία ενός οδηγού ράλι. Κάμερα καταγράφει για 200 μέτρα την πορεία του ράλι. Ποια η μέση ταχύτητα του οδηγού την Τ=5; Για Τ γύρω από το 5 ποιον αριθμό πλησιάζει η ταχύτητα του οδηγού; Μειώστε την ζώνη για την ταχύτητα στο γράφημα και κινείστε κατάλληλα την ζώνη για τις κοντινές τιμές στο Τ ώστε οι τιμές της συνάρτησης να βρίσκονται μέσα στη πρώτη ζώνη. Σε ποια τιμή πλησιάζει η ταχύτητα; Επιλέξτε μια τιμή για το ε. Πότε το σημείο (t,ταχύτητα) βρίσκεται μέσα σε αυτή τη ζώνη; Για μικρότερο ε τι γίνεται; Ποια η ταχύτητα για t=5;

Το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας τους έδωσε την δυνατότητα να παρατηρήσουν ότι όσο μικρή και αν είναι η ζώνη της ταχύτητας, το ε, πάντα μπορώ να βρω μια ζώνη για τον χρόνο, ένα δ, ώστε οι τιμές της συνάρτησης να βρίσκονται μέσα στην ζώνη ε. Δεν επικεντρώθηκαν στις πράξεις αλλά στον πειραματισμό για να καταλάβουν τον ρόλο του ε, του δ και της τιμής της συνάρτησης στο 5 που αποτελεί το όριο. Στην εικόνα 1 μπορούμε να δούμε ένα από τα στάδια που πέρασαν. Αναδεικνύεται η χρησιμότητα των δυναμικών εργαλείων (Hanna 2000) καθώς οι ζώνες δεν είναι εύκολο να γίνουν σε χαρτί και μολύβι. Οι εικασίες και οι συνδέσεις που έπρεπε να κάνουν εργαζόμενοι με το δυναμικό περιβάλλον του GeoGebra σχετικά με την ταχύτητα αλλά και τον συνδυασμό των δύο ζωνών τους βοήθησε στην οπτικοποίηση του προβλήματος μέσα στο δυναμικό περιβάλλον καθώς συνέδεσαν τις ζώνες με τον χρόνο και με την συνάρτηση. Έφτασαν σε μια διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου που συνάδει με τον ε-δ ορισμό. Έπειτα ακολούθησε συζήτηση πάνω στις λύσεις των μαθητών χωρίς ιδιαίτερη παρέμβαση της καθηγήτριας.



Εικόνα 1

Τα ψηφιακά εργαλεία βοήθησαν στην ανάπτυξη επιχειρημάτων και στις δύο δραστηριότητες καθώς και στην έντονη συμμετοχή. Τα προβλήματα που ήταν βασισμένα σε καθημερινές έννοιες βοήθησαν στη σύνδεση των δύο κόσμων καθώς και την ομαλή μετάβαση στις έννοιες στα μαθηματικά. Η ανταλλαγή απόψεων συνέβαλλε στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης και δημιούργησε μια έμφυτη ανάγκη για επιχειρηματολογία.

Αξιολόγηση-Συμπεράσματα

Η συγκεκριμένη πρόταση ενώ είχε καλή αντιμετώπιση από τους μαθητές θα απαιτούσε περισσότερες από 2 διδακτικές ώρες καθώς και πιθανές επιπλέον ερωτήσεις στο δεύτερο πρόβλημα. Η τεχνολογία ήταν σημαντικό κομμάτι για την αντίληψη των μαθητών για τις έννοιες και έπαιξε καθοριστικό ρόλο για τις εικασίες τους και την τελική τους απάντηση. Ενδεχομένως οι συγκεκριμένες δραστηριότητες να ήταν εξίσου καλές και σε άλλες έννοιες όπως για παράδειγμα η πρώτη δραστηριότητα για την εισαγωγή της έννοιας της ακολουθίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barlow, M. T. and Perkins, E. A.: Brownian motion on the Sierpinski gasket, Prob. Theo. Rel. Fields 79 (1988) Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, no 3 (1989), p. 225-257.

On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna: Carles Puente-Baliarda, Member, IEEE, Jordi Romeu, Member, IEEE, Rafael Pous, Member, IEEE, Angel Cardama, Member, IEEE IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 46, NO. 4, APRIL 1998

Gravemeijer, K. & Doorman, D. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. Educational Studies in Mathematics, 39, 111-129.

Imène Ghedamsi1 and Thomas Lecorre: Students' understanding of ε-statements involving equality and limit. HAL Id: hal-01849943 https://hal.science/hal-01849943 Submitted on 10 Aug 2018

García Cruz, J. A. & Martinón, A. (1997). Actions and Invariant Schemata in Linear Generalizing Problems. In E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 2, pp. 289-296). University of Helsinki.

Hanna (2000). *Proof, explanation and exploration*

ΤΟ ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ: ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Άννα Γαβριήλ, Ανδρέας Λύκος

1ο ΓΕΛ Χρυσούπολης/ 3ο Πειραματικό ΓΕΛ Κομοτηνής

nzqrcanna@gmail.com / lykosand@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία διδακτική πρόταση για τη Β΄ τάξη του Γενικού Λυκείου στο πλαίσιο των μαθημάτων της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού. Με τη βοήθεια των βασικών αρχών της διαφοροποιημένης μάθησης προτάθηκαν στους μαθητές εργασίες με άξονα την πραγματεία του Αρχιμήδη, Στομάχιον. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες και ασχολήθηκαν με τη θεματολογία της εργασίας τους εντός και εκτός του σχολικού ωραρίου. Έμαθαν για τη ζωή και το έργο του Αρχιμήδη, συνδύασαν τις γνώσεις τους από τη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης ενισχύοντας την προσπάθεια καλλιέργειας της μαθηματικής κουλτούρας και πολιτειότητας στη σχολική κοινότητα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η ποικιλομορφία μιας σχολικής τάξης και η φιλοσοφία της μοναδικότητας του κάθε μαθητή υιοθετούνται στη διδακτική πρακτική με τη βοήθεια των αρχών της διαφοροποιημένης διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης καλούνται να ανταποκριθούν σε ανομοιογενείς εκπαιδευτικές ανάγκες με απώτερο στόχο να εξασφαλίσουν την πρόσβαση όλων των μαθητών στο αναλυτικό πρόγραμμα (Παντελιάδου, 2013). Η διαφοροποιημένη διδασκαλία δεν είναι απλώς μία στρατηγική ή ένα σύνολο στρατηγικών αλλά μία εκ των προτέρων διαδικασία σχεδιασμού του συνόλου της διδασκαλίας κατά συστηματικό και οργανωμένο τρόπο με βάση τις μαθησιακές ανάγκες του κάθε μαθητή (Tomlinson, 2001). Η φιλοσοφία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας θέτει στο επίκεντρο τη μοναδικότητα και την ετερότητα του κάθε μαθητή με στόχο τη δημιουργία διαφορετικών μαθησιακών εμπειριών ανάλογα με τις μαθησιακές ικανότητες, τον τρόπο σκέψης και μάθησης, τα ενδιαφέροντα και τα κίνητρα του μαθητή. Απώτερος στόχος είναι η οικοδόμηση της νέας γνώσης από τον μαθητή μέσα από μία ενεργητική και δυναμική μαθησιακή διαδικασία (Adams & Pierce, 2006, Βαλιαντή, 2015).

Η διαφοροποίηση στη διδασκαλία των μαθηματικών ερευνάται από πολλές οπτικές γωνίες, όπως σχετικά με τη σχεδίαση των προγραμμάτων σπουδών, τις εργασίες που ανατίθονται στους μαθητές και την αξιολόγησή τους, τη συνεργασία στα μέλη μιας ομάδας, τις γνώσεις των καθηγητών

και τα σχολικά περιβάλλοντα (Russo, Bobis & Sullivan, 2021). Η διαφοροποιημένη διδασκαλία θεωρείται μία διδακτική πρακτική που στηρίζεται στα ετερογενή χαρακτηριστικά των μαθητών μιας σχολικής τάξης, ώστε να δημιουργηθούν οι κατάλληλες πρακτικές που θα βοηθήσουν τον κάθε μαθητή και επαγωγικά όλους, να ανελιχθούν και να καλλιεργήσουν τις ικανότητες και τα ταλέντα τους (Mavidou & Kakana, 2019).

Πώς θα μπορούσε να ενσωματωθεί στη μαθησιακή διαδικασία το σύνολο των μαθητών μιας τάξης στο Γενικό Λύκειο; Πώς θα μπορούσε να ενεργοποιηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών μέσα στην τάξη, λαμβάνοντας υπόψη την ποικιλομορφία και τη διαφορετικότητά τους; Πώς μπορεί να επιτευχθεί η συνεργασία δύο καθηγητών των Μαθηματικών του ίδιου τμήματος στη Γεωμετρία και στην Κατεύθυνση με στόχο τη γεφύρωση των αντικειμένων; Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε την ιστορία των μαθηματικών, ώστε να συμβάλλουμε στην καλλιέργεια της μαθηματικής εκπαίδευσης και πολιτειότητας;

Η δράση

Η παρούσα διδακτική πρόταση εφαρμόστηκε σε ένα τμήμα της Β΄Λυκείου, του 3ου Πειραματικού Λυκείου Κομοτηνής, στο μάθημα της Γεωμετρίας, στο 2ο τετράμηνο, τη σχολική χρονιά 2021 – 22, σύμφωνα με τις αρχές της Διαφοροποιημένης Μάθησης. Η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε με συνεργασία της καθηγήτριας του τμήματος στο μάθημα της Γεωμετρίας και του καθηγητή του τμήματος στο μάθημα των Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού. Οι εργασίες των μαθητών αξιολογήθηκαν αντί διαγωνίσματος για το 2ο τετράμηνο στο μάθημα της Γεωμετρίας. Ωστόσο, είχαν θετική συνεισφορά και στη βαθμολογία τετραμήνου στο μάθημα της Κατεύθυνσης.

Οι μαθητές χωρίστηκαν με δική τους πρωτοβουλία, αφού είδαν τη θεματολογία κάθε ομάδας, σε 6 ομάδες των 4 μαθητών. Έχοντας ολοκληρώσει το 10ο Κεφάλαιο της Γεωμετρίας Β΄Λυκείου (Εμβαδά) μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τις γνώσεις μας σε μία πραγματεία του Αρχιμήδη, Το Στομάχιον. Κάθε ομάδα είχε ως κεντρικό θέμα το Στομάχιον, αλλά η προσέγγιση ήταν διαφορετική. Συγκεκριμένα, η Α΄ ομάδα αναζήτησε στοιχεία για τη ζωή και το έργο του Αρχιμήδη, για το Στομάχιον και δημιούργησε μία ιστοριογραμμή για την πορεία του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη. Η Β΄ ομάδα και η Γ΄ ομάδα υπολόγισαν το εμβαδόν των 14 πολυγώνων που σχηματίζουν ένα τετράγωνο, όπως περιγράφεται στο Στομάχιον του Αρχιμήδη με τη βοήθεια των γνώσεων του 10ου κεφαλαίου της Γεωμετρίας (Εμβαδά) και του 2ου κεφαλαίου των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β΄Λυκείου (Ευθεία) αντίστοιχα. Η Δ΄ ομάδα υπολόγισε τα εμβαδά των ίδιων πολυγώνων με τη βοήθεια του θεωρήματος του Pick, που δεν υπάρχει στα σχολικά βιβλία των

Μαθηματικών. Η Ε΄ ομάδα ασχολήθηκε με το πλήθος των τρόπων που μπορεί να δημιουργηθεί το τετράγωνο του Στομαχίου με τα 14 πολύγωνα. Ένα πρόβλημα συνδυαστικής και δημιουργίας. Η τελευταία ομάδα (ΣΤ΄) ασχολήθηκε με την καλλιτεχνική προσέγγιση του Στομαχίου και πιο συγκεκριμένα με τη ζωγραφική διαφορετικών τετραγώνων που όλα όμως αποτελούνται από τα ίδια 14 πολύγωνα.

Οι μαθητές συνεργάστηκαν στον χώρο του εργαστηρίου του σχολείου για την αναζήτηση των πληροφοριών στη διάρκεια του μαθήματος της Γεωμετρίας, 2 διδακτικές ώρες, αλλά και στον δικό τους χρόνο εκτός σχολείου. Στην τάξη έγινε ενημέρωση για την ανάθεση των εργασιών από τους δύο υπεύθυνους καθηγητές της δράσης, 1 διδακτική ώρα. Δόθηκαν ερευνητικά ερωτήματα για την κάθε ομάδα κλειστού αλλά και ανοιχτού τύπου. Για παράδειγμα, ζητήθηκε συγκεκριμένος υπολογισμός εμβαδού (Β΄, Γ΄ και Δ΄ ομάδα), αλλά και ελεύθερη σχεδίαση του τετραγώνου (ΣΤ΄ ομάδα). Οι μαθητές παρουσίασαν ανά ομάδα την εργασία τους με ppts στην ολομέλεια της τάξης στη διάρκεια δύο διδακτικών ωρών. Για την αξιολόγηση της δράσης δημιουργήθηκε μία ηλεκτρονική φόρμα (google) στην οποία οι μαθητές εκφράστηκαν θετικά για τη δράση. Οι ερωτήσεις ανοιχτού τύπου της φόρμας βασίστηκαν στον Οδηγό ημιδομημένων συνεντεύξεων των μαθητών (Βαλλιαντή, 2015). Δίνουμε μερικά παραδείγματα: Ο τρόπος που έγινε η εργασία σου άρεσε; Σου άρεσε που κάθε ομάδα είχε διαφορετικό θέμα; Αν ναι, γιατί; Σου άρεσε η συνεργασία με τα μέλη της ομάδας σου; Σου άρεσε η συνεργασία των δύο καθηγητών; Αν ναι, γιατί; Υπήρχε κάτι που δεν σου άρεσε σε όλη τη διάρκεια αυτής της εργασίας; Θα ήθελες να γίνει ξανά; Είναι αξιοσημείωτη η συνεργασία των μελών μέσα στην κάθε ομάδα, αλλά και των μελών διαφορετικών ομάδων αναφορικά με τα αριθμητικά αποτελέσματα των υπολογισμών τους στα εμβαδά των σχημάτων ή για τη σχεδίαση των σχημάτων. Επίσης, θετική ανταπόκριση είχε στους μαθητές και η συνεργασία των δύο καθηγητών λαμβάνοντας υπόψη της συμμετοχή τους, το ενδιαφέρον τους για την ολοκλήρωση της εργασίας τους και την ευχάριστη ατμόσφαιρα κατά την παρουσίασή της. Μία δράση για την ιστορία του Παλίμψηστου του Αρχιμήδη, με την «ανακάλυψη» του παιχνιδιού του Στομαχίου και την συνεργασία μαθητών και καθηγητών θεωρούμε ότι μπορεί να συμβάλλει στην καλλιέργεια της μαθηματικής εκπαίδευσης και πολιτειότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adams, C. M. & Pierce, R. (2006). *Differentiating instruction: A practical guide to tiered lessons in the elementary grades.* United Kingdom: Prufrock press inc.

Mavidou, A. & Kakana, D. (2019). Teachers' Experiences of a Professional Development Program for Differentiated Instruction. *Creative Education.* 10, pp. 555-569. https://doi.org/10.4236/ce.2019.103040

Russo, J. Bobis, J. & Sullivan, P. (2021). Differentiating Instruction in Mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development.* 3,Vol 23, pp. 1 – 5.

Tomlinson, C. A. (2001). Differentiated Instruction in the Regular Classroom: What Does It Mean? How Does It Look?. *Understanding Our Gifted.* 1, Vol 14, pp. 3 – 6.

Βαλιαντή, Σ. (2015). Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας σε τάξεις μικτής ικανότητας μέσα από τις εμπειρίες εκπαιδευτικών και μαθητών: μια ποιοτική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας και των προϋποθέσεων εφαρμογής της. *Επιστήμες Αγωγής*. Τεύχος 1, pp. 7 – 35.

Παντελιάδου, Σ. (2013). *Διαφοροποιημένη διδασκαλία*. Αθήνα: Πεδίο.

Η ΣΤΑΘΕΡΑ Π ΚΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ: ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΗΣ ΠΛΑΤΦΟΡΜΑΣ NUCLINO

Σακούλη Ασημένια

Εκπαιδευτικός ΠΕ70

asimeniasakouli@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία πρόταση διδασκαλίας για τη σταθερά π και τη σύνδεσή της με τον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου στην ΣΤ΄ δημοτικού. Περιλαμβάνει ποικίλες θεωρητικές προσεγγίσεις συμβατές με τις σύγχρονες παιδαγωγικές θεωρίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών όπως η σύνδεση της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά, η ενσώματη μάθηση και η επίλυση προβλήματος. Αξιοποιεί τις νέες τεχνολογίες και, πιο συγκεκριμένα το διαδραστικό διαδικτυακό περιβάλλον μάθησης Nuclino, κινητοποιώντας τους/τις μαθητές/τριες να αλληλεπιδράσουν με ένα ενδιαφέρον σενάριο βασισμένο σε μία λογοτεχνική ιστορία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία της σταθερά π και τη σύνδεσή της με τον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου στην ΣΤ΄ δημοτικού.

Ο αριθμός π εμφανίζεται στο πλαίσιο του σχολείου μέσα από τους τύπους για τη διδασκαλία της περιμέτρου και του εμβαδού του κυκλικού δίσκου, τους οποίους οι μαθητές/τριες τείνουν να τους απομνημονεύουν χωρίς να τους κατανοούν (O'Dell et al, 2016). Ως εκ τούτου, ο αριθμός π συχνά παρουσιάζεται ως κάτι που δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια κάνοντας την προσέγγισή του χαοτική για τους/τις μαθητές/τριες (Papadopoulos, 2013).

Για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες αναφορικά με την κατανόηση της σταθεράς π και του υπολογισμού του εμβαδού του κυκλικού δίσκου δημιουργήθηκε το παρόν σχέδιο διδασκαλίας. Κεντρικός του στόχος είναι η εξοικείωση των μαθητών/τριών, με τον αόριστο για αυτούς αριθμό π καθώς και με τον τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου, μέσα από τη σύνδεση της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά αλλά και την αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών υπό το πρίσμα της συνεργατικής μάθησης. Για τις ανάγκες του σεναρίου, σχεδιάστηκε ένας διαδραστικός ψηφιακός χώρος στη συνεργατική πλατφόρμα Nuclino, όπου δίνεται η

δυνατότητα στους μαθητές/τριες να αλληλεπιδράσουν με τις αναρτημένες δραστηριότητες που συνοδεύουν την εξέλιξη της προσαρμοσμένης ιστορίας.

ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Το σενάριο της διδακτικής πρότασης προέκυψε από το βιβλίο "Sir Cumference and the dragon of Pi, a math adventure" της Cindy Neuschwander (1999), προκειμένου αφενός να πλαισιωθεί νοηματικά η μαθησιακή διαδικασία και αφετέρου να κινητοποιηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών. Το βιβλίο χρησιμοποιείται μεταφρασμένο και προσαρμοσμένο, από ένα σημείο και μετά, στις ανάγκες του διδακτικού σεναρίου καθώς η χρήση της λογοτεχνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει βρεθεί πως συμβάλλει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Wilburne & Napoli, 2008).

Στο σχέδιο διδασκαλίας, εντάσσονται οι αρχές της ενσώματης μάθησης (embodied learning), καθώς πλέον αναγνωρίζεται ότι η σύνδεση και η ενσάρκωση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών με κινήσεις προσφέρει βαθύτερη κατανόηση των ρεαλιστικών μαθηματικών και δίνει νόημα στις μαθηματικές έννοιες (Nunez, Edwards & Matos, 1999).

Επιπρόσθετα, η διδακτική πρόταση περιλαμβάνει δραστηριότητες βασισμένες σε μεθόδους που εμπίπτουν στην ιστορία των μαθηματικών. Η ένταξη της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση ως εργαλείο (history as a tool) λειτουργεί ως κίνητρο για τους/τις μαθητές/τριες και αναδεικνύει πως ό,τι τους/τις προβληματίζει τώρα, πέρασε από διάφορες μελέτες ώστε να εδραιωθούν οι ως τώρα κεκτημένες μαθηματικές γνώσεις (Jankvist, 2009).

Περιγραφή διδακτικής πρότασης

Το μοντέλο διδασκαλίας που παρουσιάζεται διαρθρώνεται σε τρεις φάσεις: στην «Εξοικείωση», τη «Διερεύνηση» και τον «Αναστοχασμό» και αποτελείται από τέσσερις διδακτικές ώρες (Van de Walle, et al., 2017). Η «Εξοικείωση» περιλαμβάνει εισαγωγικές δραστηριότητες, που αποσκοπούν στην προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών/τριων και στη δημιουργία μίας σκαλωσιάς ανάμεσα στην προϋπάρχουσα και τη νέα γνώση. Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται, για παράδειγμα, δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές/τριες μετρούν ρεαλιστικά αντικείμενα μέσα στην τάξη με τυπικές (π.χ. εκατοστά) και άτυπες μονάδες μέτρησης (π.χ. σχοινί) ακολουθώντας τις οδηγίες που αναφέρονται στην ιστορία. Η «Διερεύνηση» συνιστά τον κύριο κορμό της διδασκαλίας, καθώς κατά τη διάρκειά της συντελείται η ενεργητική ανακάλυψη της νέας γνώσης. Στη φάση αυτή, πραγματοποιούνται κατά κύριο λόγο δραστηριότητες στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra ακολουθώντας πάντα την ροή του διαμορφωμένου σεναρίου. Οι

μαθητές/τριες μπαίνουν στην διαδικασία να ξεδιπλώσουν για παράδειγμα τον κύκλο καθώς και να πειραματιστούν με τα εγγεγραμμένα και περιεγραμμένα πολύγωνα του Αρχιμήδη, ώστε να εξοικειωθούν με τον αριθμό π και την ανακάλυψη του τύπου εύρεσης του εμβαδού κυκλικού δίσκου. Κατά τον «Αναστοχασμό», πραγματοποιείται η συστηματοποίηση της γνώσης που κατακτήθηκε μέσα από την επαναληπτική χρήση των δεξιοτήτων που κατακτήθηκαν στις προηγούμενες φάσεις, με βασικό σκοπό την ολοκλήρωση της ιστορίας που πλαισιώνει το διδακτικό σενάριο.

Για την ολοκλήρωση του σχεδίου διδασκαλίας προτείνεται η συμπληρωματική φάση της «Επίλυσης Προβλήματος», ώστε η τάξη να προχωρήσει σε περαιτέρω διερεύνηση και επέκταση των γνώσεων που κατέκτησε. Η μάθηση μέσω επίλυσης προβλήματος ενθαρρύνεται από πολλούς ερευνητές, καθώς δημιουργεί ένα ασφαλές μαθησιακό περιβάλλον, ώστε οι μαθητές να εκφράσουν ιδέες και επιχειρήματα, να εμπλακούν σε απαιτητικά μαθησιακά περιβάλλοντα και να διαμορφώσουν τελικά θετικές στάσεις για τα μαθηματικά. Επιπλέον, η μάθηση μέσω επίλυσης προβλημάτων επικεντρώνεται στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και όχι μόνο σε διαδικαστική γνώση (Cai, 2003).

Τέλος, όλες οι δραστηριότητες είναι ομαδικές και η πλατφόρμα Nuclino λειτουργεί ως συνδετικός κρίκος μεταξύ αυτών και του σεναρίου της θεματικής. Οι ομάδες κοινοποιούν στο σύνολο της τάξης τα αποτελέσματα της δράσης τους. Με αφορμή τις παρουσιάσεις των μαθητών/τριων ακολουθεί συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων για όσα διαδραματίστηκαν στις ομάδες. Τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων αποθηκεύονται στο ψηφιακό portfolio κάθε ομάδας (πλατφόρμα Nuclino) με κοινή πρόσβαση σε όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες της τάξης. Οι μαθητές/τριες αξιολογούνται για την κατάκτηση των στόχων του διδακτικού σεναρίου διαμορφωτικά και αξιοποιώντας τα portfolio των μαθητών/τριων, συνδυαστικά με περιγραφικές εκθέσεις του/της εκπαιδευτικού, σχόλια αυτοαξιολόγησης αλλά και σχόλια ετεροαξιολόγησης για τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας (Κωνσταντίνου & Κωνσταντίνου, 2017).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η διαδραστική πλατφόρμα που δημιουργήθηκε και η πλαισίωση της διδακτικής πρότασης με ένα λογοτεχνικό σενάριο κράτησε αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών. Η διαφοροποιημένη προσέγγιση της διδασκαλίας της σταθεράς π και του τύπου του εμβαδού του κυκλικού δίσκου ενέπλεξε ενεργά τους/τις μαθητές/τριες στην εκπαιδευτική διαδικασία με αποτέλεσμα την κατάκτηση των επιδιωκόμενων μαθηματικών στόχων.

Ευχαριστίες

This scientific paper was supported by the Onassis Foundation - Scholarship ID: G ZT 013-1/2023-2024

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*., pp. 241–254. VA: NCTM.

Neuschwander, C. (1999). *Sir Cumference and the dragon of pi: a math adventure*. Charlesbridge Publishing. U.S. https://videbouteilleprimaryschool.weebly.com/uploads/2/5/0/8/25089718/sir_cumference_and_the_dragon_of_pi.pdf

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235– 261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Κωνσταντίνου, Χ., & Κωνσταντίνου, Ι. (2017). *Η αξιολόγηση στην εκπαίδευση, η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού, του εκπαιδευτικού και του μαθητή ως θεωρία και πράξη.* Gutenberg.

Núñez R. E., Edwards L. D. & Matos J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 39*(1), 45–65 https://doi.org/10.1023/a:1003759711966

O'Dell, J. R., Rupnow, T. J., Cullen, C. J., Barrett, J. E., Clements, D. H., Sarama, J., & Van Dine, D. W. (2016). Developing an understanding of children's justifications for the circle area formula. In M. Wood, E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. *235–242)*. AZ: The University of Arizona. https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2038%202016%20Proceedings.pdf

Papadopoulos, I. (2013). How Archimedes helped students to unravel the mystery of the magical number pi. *Science & Education, 23*(1), 61–77. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9643- 0

Van de Walle, J. A., Bay-Williams, J. M., Lovin, L. H., & Karp, K. S. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο.* Gutenberg.

Wilburne, J. M., & Napoli, M. (2008). Connecting mathematics and literature: An analysis of pre-service elementary school teachers' changing beliefs and knowledge. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*: The Journal, 2, 1-9. https://www.math.ttu.edu/k12/htdocs/journal/2.pedagogy/volume.shtml

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ: ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κουκίου Αλεξάνδρα, Δερνίκα Αναστασία

1ο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας, Φοιτήτρια ΕΚΠΑ

kalexan65@gmail.com anastasiadernika@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η τεχνητή νοημοσύνη προσφέρει νέες προοπτικές και ευκαιρίες για τη βελτίωση της μάθησης και της διδασκαλίας. Η χρήση της στην εκπαίδευση εμπεριέχει προκλήσεις καθώς εισάγει νέους τρόπους ενίσχυσης των εκπαιδευτικών πρακτικών. Επηρεασμένοι απο τα αντίστοιχα μαθήματα επιμόρφωσης στο etwinning seminars και στο Ε.ΔΙ.Β.Ε.Α[8] αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνητή νοημοσύνη στην διδασκαλία μας. Στόχος η εφαρμογή καινοτομιών στην διδασκαλία με σκοπό να γίνει πιο ελκυστική η μάθηση γεωμετρικών εννοιών όπως τα πολύγωνα.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

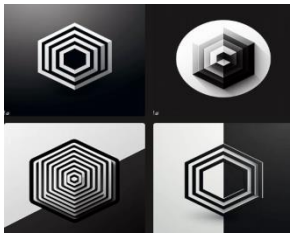
Η εφαρμογή του σεναρίου έγινε σε δύο τμήματα της Β Γυμνασίου σε ένα δημόσιο σχολείο και σε ένα ιδιωτικό εκπαιδευτήριο. Στόχος της διδακτικής μας παρέμβασης, είναι η υλοποίηση δραστηριοτήτων που βασίζονται σε νέα εργαλεία τεχνητής νοημοσύνης, και παράλληλα στην «εκμετάλλευση» εικαστικών δραστηριοτήτων, ως μέσο για να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με την γεωμετρία και να κατανοήσουν τα πολύγωνα ως μέσο κάλυψης επιφανειών (ψηφιδωτά)

Φάση 1: Αρχικά οι μαθητές συζητούν τα βασικά στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου βλέπουν μια παρουσίαση για τα πολύγωνα στην ζωή μας, και αλληλεπιδρούν με το chat gpt σχετικά με το τι είναι πολύγωνο. Χωρίζονται σε ομάδες και κατασκευάζουν το κανονικό πολύγωνο που θα τους ανατεθεί πάνω σε ενα χαρτόνι. Πρέπει να το σχεδιάσουν με ακρίβεια, να υπολογίσουν και να εμφανίσουν την κεντρική γωνία, τις εσωτερικές και εξωτερικές γωνίες και να δώσουν πραγματικά παραδείγματα αντικειμένων ή δομών που μοιάζουν με το πολύγωνό τους. Στο ίδιο χαρτόνι θα προσθέσουν και φωτογραφίες που θα δημιουργήσουν με το bing image creator. Παρακάτω δίνονται οι φωτογραφίες που δημιούργησαν οι μαθητές που είχαν ως σχήμα το εξάγωνο

---

[8]. Εργαστήριο Προηγμένων Μαθησιακών Τεχνολογιών στην Δια Βίου και Εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση του Πανεπιστημίου Κρήτης

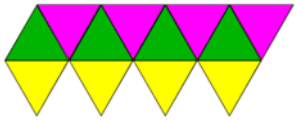
εξάγωνα βιβλία

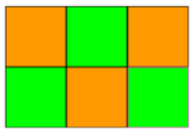


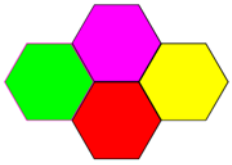
εξάγωνα στην τέχνη

εξάγωνα σπιτια

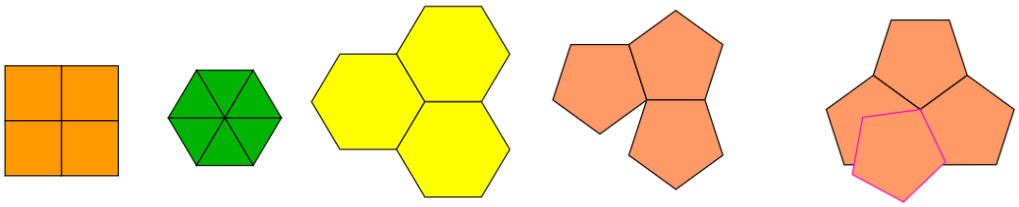
Φάση 2: Στην συνέχεια μέσα από την κατασκευή πολυγώνων στην σελίδα του NCTM με την βοήθεια του tesselation creator θα κατασκευάσουν ψηφιδωτά και θα συζητήσουν πώς αυτά δημιουργούνται.







Η μάθηση γίνεται παιχνίδι (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2009) και οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια του ψηφιδωτού. Απλό-κανονικό, λέμε το ψηφιδωτό όπου χρησιμοποιούμε μόνο ένα είδος πολυγώνου για την κατασκευή του. **Ποια πολύγωνα θα μπορούσαν να καλύψουν ακριβώς το επίπεδο χωρίς να γίνεται επικάλυψη ή να μένουν κενά;** Να δημιουργήσουν δηλαδή ένα κανονικό ψηφιδωτό; Οι μαθητές πειραματίζονται και εικάζουν ότι μόνο το τρίγωνο το τετράγωνο και το εξάγωνο καλύπτουν ακριβώς τον χώρο.



Τα ονομάζουμε αντίστοιχα 4-4-4-4, 3-3-3-3-3-3, 6-6-6 ανάλογα με τα πολύγωνα που είναι γύρω από μια κορυφή. Αντίθετα ο πειραματισμός με το πεντάγωνο προκαλεί επικαλύψεις ή δημιουργεί κενά. Η ερώτηση αυτή στο chat gpt μας αφήνει άναυδους. Η απάντηση του δεν συμφωνεί με τις εικασίες των μαθητών: Ισχυρίζεται πως το πεντάγωνο έχει αυτή την ιδιότητα. Οι μαθητές αμφισβητούν το μέσο και αρχίζει η συζήτηση. Ο καθηγητής εκφράζει απορίες όπως γιατί μπορεί να συμβαίνει αυτό; Γιατί μόνο τα τρία αυτά πολύγωνα καλύπτουν τον χώρο; Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μ τριγώνων, τετραγώνων, εξαγώνων για να ΄κλείσει΄ ένας κόμβος; Ποια σχέση μπορεί να έχει η γωνία του πολυγώνου με το πλήθος μ; Καθώς πειραματίζονται οι μαθητές οδηγούνται σιγά σιγά στα συμπεράσματα:

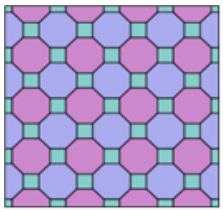
Σε ένα τέτοιο σημείο – κόμβο θα πρέπει οι γωνίες των πολυγώνων που ενώνονται να αθροίζονται ακριβώς σε 360° Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με

- 6 ισόπλευρα τρίγωνα (αφού 6×60°=360°)ή
- 4 τετράγωνα (αφού 4×90°=360°) ή
- 3 εξάγωνα (αφού 3×120°=360°)

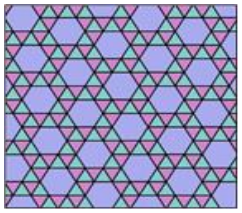
Για τα κανονικά πεντάγωνα όμως που η γωνία τους είναι 108° και δεν είναι τέλεια η διαίρεση 360° :108°, δεν μπορούμε να έχουμε κανονικό ψηφιδωτό. Με τα υπόλοιπα κανονικά πολύγωνα έχουμε το ίδιο πρόβλημα με τα πεντάγωνα. Γενικότερα λοιπόν θα πρέπει μ×φ=360° οπου φ η γωνία του πολυγώνου και μ ο ελάχιστος αριθμός των πολυγώνων γύρω από έναν κόμβο.

Φάση 3: Στην συνέχεια γίνεται αναφορά στην ιστορία με στόχο να βιώσουν οι μαθητές τα μαθηματικά ως μια δραστηριότητα, η οποία εξελίσσεται στο χώρο και το χρόνο (Thomaidis & Tzanakis, 2007). Ενημερώνουμε τους μαθητές ότι από την αρχαιότητα ορισμένοι αριθμοί είχαν ιδιαίτερο συμβολικό νόημα πέρα από την καθαρά πρακτική τους χρήση. Επιπλέον κάθε αριθμός μπορούσε να αντιστοιχηθεί με ένα επίπεδο σχήμα, ένα πολύγωνο, φέρ' ειπείν το τρία στο τρίγωνο, το τέσσερα στο τετράγωνο κοκ. Η ιδέα της αντιστοίχισης αριθμών σε επίπεδα σχήματα προέρχεται από τους πρώιμους Πυθαγόρειους που συνήθιζαν να αναπαριστούν τους αριθμούς με σχέδια από τελείες. Στο σημείο αυτό, οι μαθητές κάθε ομάδας ανοίγουν έναν διάλογο με τον Πυθαγόρα στο character AI. Τον χαρακτήρα Πυθαγόρα τον έχουμε δημιουργήσει εμείς έχοντας δώσει αρκετά link με πληροφορίες για τα πολύγωνα.

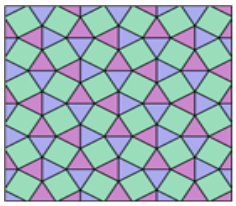
Φάση 4: Στο τελευταίο μέρος της διδακτικής παρέμβασης προχωράμε στα ημικανονικά ψηφιδωτά (semi-regular tessellation), διαφορετικά δηλαδή κανονικά πολύγωνα γύρω απο μια κορυφή. Προκαλούμε τους μαθητές να πειραματιστούν με το tesselation creator. Ψάχνοντας για όλα τα ημικανονικά ψηφιδωτά του επιπέδου θα οδηγηθούν στο γεγονός ότι μόνο συγκεκριμένα κανονικά πολύγωνα ταιριάζουν μεταξύ τους γύρω από ένα σημείο έτσι ώστε το άθροισμα των γωνιών γύρω από το σημείο να είναι ακριβώς 360°. Μερικά παραδείγματα:



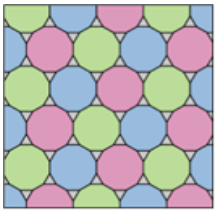
4-8-8



3-3-3-3-6



3-4-3-3-4



12-3-12

Με τα παραπάνω σχέδια οι μαθητές φτιάχνουν πίνακες και διακοσμούν την τάξη τους.

Στο τέλος για να ελέγξουμε την κατανόηση των μαθητών στις έννοιες που διδάχτηκαν δίνουμε ένα ερωτηματολόγιο στο quiziz ή στο kahoot.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Είναι αλήθεια πως η Γεωμετρία αποτελεί ένα χώρο όπου η αλληλεπίδραση εικόνων και εννοιών είναι απαραίτητη (Mariotti, 1995). Τα χρώματα και τα σχήματα του εργαλείου tesselation creator βοήθησαν τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση των πολυγώνων και των ψηφιδωτών. Με το imagecreator δημιούργησαν εικόνες με μπόλικη φαντασία. Το chatgpt και το character AI ηταν κάτι εντελώς καινούριο γι αυτούς και οι μαθητές απόλαυσαν την συζήτηση μαζί τους. Ειδικά το λάθος στο chatgpt έγινε αφορμή ν' αμφισβητήσουν το μέσο, να το δουν με μια πιο κριτική ματιά και να ξεκινήσουν μια επικοδομητική συζήτηση. Οι ερωτήσεις αξιολόγησης στο kahoot ή στο quizziz είχαν παιγνιώδη χαρακτήρα γι αυτό ήταν δελεαστικές. Οι αφίσες που κατασκεύασαν οι ομάδες παρουσιάστηκαν στην ολομέλεια της τάξης και στην συνέχεια τοιχοκολλήθηκαν. Όλη η διδακτική αξιοποίηση των εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να χειριστούν και να αλληλεπιδράσουν με νέα αντικείμενα, να διατυπώσουν υποθέσεις, να αμφισβητήσουν, να πειραματιστούν και τελικά να κατασκευάσουν προσωπικά νοήματα για μαθηματικές έννοιες και ιδέες.(Κυνηγός, 2010)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2009). Ο ρόλος του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση: ανταγωνιστικές στάσεις και ψευδαίσθηση ομοθυμίας. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση* 47

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical “parallelism” revisited: Historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 165–183.

Mariotti, M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.* Springer.

Κυνηγός, Χ. (2010). *Το μάθημα της Διερεύνησης* (3η). Ελληνικά Γράμματα.

ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. ΜΙΑ ΚΑΙΝΟΤΟΜΟΣ ΔΡΑΣΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Βιργινία Καραβοκύρη[1], Παρασκευή Καμπορούδη[1], Χρήστος Παπαδάκης[1], Σοφια Χατζηλεοντιάδου[2]

[1]1ο Πειραματικό Δ.Σχ. Αλεξανδρούπολης, [2]ΠΤΔΕ, ΔΠΘ

virgka@gmail.com, pkamporoudi@gmail.com, ch_papadakis@yahoo.gr, schatzil@eled.duth.gr

Η παρούσα εργασία αφορά την παρουσίαση μιας καινοτόμου δράσης η οποία είχε ως στόχο τη συμβολή στην επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών ΠΕ70 στο πεδίο της ένταξης της Ρομποτικής στο μάθημα των Μαθηματικών. Παρουσιάζεται το πλαίσιο και η πορεία που ακολουθήθηκε καθώς και μια πρώτη αποτίμηση σχετικά με την αποτελεσματικότητά της από την οπτική των συμμετεχόντων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πλαίσιο των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών (ΝΠΣ) των Μαθηματικών, ο εκπαιδευτικός θεωρείται επιστήμονας-επαγγελματίας που σχεδιάζει τη διδασκαλία του λαμβάνοντας υπόψη τις γνωστικές, μαθησιακές, συναισθηματικές και κοινωνικές ανάγκες των μαθητών του, τις ικανότητες και τα ενδιαφέροντά τους και επιλέγει το υλικό και τα εργαλεία για την επίτευξή τους (ΙΕΠ, 2021). Ένα από τα εργαλεία που μπορεί να αξιοποιήσει ο εκπαιδευτικός στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η Ρομποτική, η οποία μπορεί να συμβάλλει στην ανάδειξη των ιδεών των μαθητών και τη δημιουργία μαθηματικών συνδέσεων (Zhong & Xia, 2020). Ο εκπαιδευτικός, τα μαθηματικά έργα και το πλαίσιο της μάθησης παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτή την κατεύθυνση. Σύμφωνα με τους Zhong και Xia (2020) η έλλειψη υψηλής ποιότητας μελετών αναφορικά με την αξιοποίηση της Ρομποτικής στα Μαθηματικά υποδηλώνει ότι δεν έχουν μελετηθεί σε βάθος οι δυνατότητες που μπορεί αυτή να παρέχει στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιπλέον, όταν οι εκπαιδευτικοί επιχειρούν να την εντάξουν στη διδασκαλία των Μαθηματικών χωρίς την κατανόηση των δυνατοτήτων της, η αποτελεσματικότητα της μάθησης μπορεί να τεθεί σε κίνδυνο. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η *επαγγελματική μάθηση* εμπεριέχει δραστηριότητες (τυπικές ή άτυπες) που καθορίζονται από τον ίδιο τον ενήλικα με στόχο την επαγγελματική ανάπτυξή του (ΕΑ), είναι φανερό ότι δυνατότητες επαγγελματικής μάθησης των εκπαιδευτικών, οι οποίες μπορούν να επιφέρουν συγκριμένες αλλαγές στην επαγγελματική *γνώση*, *δεξιότητες*, *στάσεις*, *πεποιθήσεις* και *δράσεις*

στο πεδίο της ένταξης της Ρομποτικής στην τάξη τους και ειδικότερα στο μάθημα των Μαθηματικών, μπορούν να συμβάλλουν στην ΕΑ τους στην υπόψη περιοχή. Κατά την Kenedy (2005), ευκαιρίες επαγγελματικής μάθησης μπορούν να εντοπιστούν κατά μήκος ενός συνεχούς που αποτελείται από τα *μεταδοτικά* στα *μεταβατικά* και τέλος στα *μετασχηματιστικά* μοντέλα ΕΑ. Τα *μεταδοτικά* μοντέλα δεν υποστηρίζουν την επαγγελματική αυτονομία καθώς βασίζονται στην ΕΑ των εκπαιδευτικών μέσω διδασκαλίας από ειδικούς με επίκεντρο κυρίως τεχνικές πτυχές. Τα *μεταβατικά* μοντέλα, υποστηρίζουν είτε μια μεταδοτική είτε μια μετασχηματιστική ατζέντα και ανάλογα με τη μορφή και την φιλοσοφία περιλαμβάνουν το coaching/mentoring και κοινότητες πρακτικής. Τέλος, τα *μετασχηματιστικά* μοντέλα ΕΑ υποστηρίζουν σημαντικά την αυτονομία καθώς στοχεύουν στην εγκατάσταση ισχυρών δεσμών μεταξύ θεωρίας και πράξης, εσωτερίκευση εννοιών, προβληματισμό, κατασκευή νέας γνώσης, εφαρμογή σε διαφορετικές καταστάσεις και επίγνωση πλαισίου εργασίας.

Η ΚΑΙΝΟΤΟΜΟΣ ΔΡΑΣΗ

Στο πλαίσιο των καινοτόμων δράσεων του 1ου Πειραματικού Δημοτικού Σχολείου της Αλεξανδρούπολης, κατά το σχολικό έτος 2022-2023 υλοποιήθηκε ένα πρόγραμμα ΕΑ με τη συμμετοχή των τριών πρώτων συνσυγγραφέων της παρούσας εργασίας για την αξιοποίηση της Ρομποτικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ειδικότερα, οι δύο πρώτες (στο εξής Β/Π) ήταν εκπαιδευτικοί ΠΕ70 των τάξεων Στ΄ και Ε΄, αντίστοιχα και ο τρίτος (στο εξής Χ) εκπαιδευτικός πληροφορικής ΠΕ86. Οι Β/Π δεν είχαν πρότερη εμπειρία στην αξιοποίηση της Ρομποτικής και αισθάνονταν αδύναμες να την αξιοποιήσουν στο μάθημα των Μαθηματικών, λόγω έλλειψης γνώσεων και δεξιοτήτων.

Στόχος και ζητήματα εστίασης

Στόχος του προγράμματος ήταν η ενίσχυση της αυτοδυναμίας των εκπαιδευτικών Β/Π στην αξιοποίηση της Ρομποτικής στο μάθημα των Μαθηματικών, σχεδιάζοντας και υλοποιώντας διδακτικά σενάρια εναρμονισμένα με τα πρότυπα των Νέων Πιλοτικών Προγραμμάτων Σπουδών στα Μαθηματικά (2021). Ειδικότερα, δεδομένου ότι ο εκπαιδευτικός ως «μαθηματικός» έχει βαθιά γνώση του μαθηματικού περιεχομένου, το πρόγραμμα εστίασε στην ενίσχυση: α) της *γνώσης* των Β/Π σχετικά με τη Ρομποτική (δηλαδή της Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)), που αφορά τη γνώση που πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί στα πεδία P,C,K και τους συνδυασμούς τους, ώστε να

εντάξουν την τεχνολογία στη διδασκαλία τους (You et al., 2021), και β) σχετικών *δεξιοτήτων, στάσεων, πεποιθήσεων* και *δράσεων.*

Διεξαγωγή της καινοτόμου δράσης

Υιοθετήθηκε η κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση της *επαγγελματικής μάθησης* μέσα από τον σχεδιασμό και την υλοποίηση διδακτικών παρεμβάσεων (βιωματικών εμπειριών «κάνω μαθηματικά με Ρομποτική») στο κοινωνικό περιβάλλον των τάξεων των Β/Π με αξιοποίηση των kit Lego Spike Prime και σε συνδιδασκαλία καθεμίας με τον Χ, σε ένα διδακτικό δίωρο κάθε δεύτερη εβδομάδα μετά από κατάλληλη προσαρμογή του ωρολογίου προγράμματος του σχολείου. Η υλοποίησή της έγινε σε δύο φάσεις. Κατά την Α΄ φάση (Δεκέμβριος του 2022-Απρίλιος 2023), οι Β/Π αφού απάντησαν σε ερωτηματολόγιο για να διερευνηθεί ο βαθμός γνώσεων, ικανότητας και αυτονομίας στο πεδίο της Ρομποτικής, αρχικά προχώρησαν σε ατομική εξάσκηση με το υπόψη kit με βάση υποστηρικτικό υλικό (*μεταδοτικό* μοντέλο). Στη συνέχεια μελέτησαν τον σχεδιασμό και υλοποίησαν στην τάξη τους ένα έτοιμο διαθεματικό σεναρίο αξιοποίησης της Ρομποτικής (φυσική/μαθηματικά) (Kazantzis & Hadjileontiadou, 2021). Οι Β/Ε λειτούργησαν ως ετερο-παρατηρήτριες και συνδιδάσκουσες με τον Χ, ενισχύοντας τις γνώσεις τους (PTK, TCK), αλλά και των μαθητών τους, στη Ρομποτική, τόσο στο κατασκευαστικό μέρος όσο και στον προγραμματισμό. Σε αυτή τη φάση υιοθετήθηκε το *μεταβατικό* μοντέλο ΕΑ, στο πλαίσιο του οποίου ο Χ λειτουργούσε ως μέντορας των Β/Π κατά τη συνδιδασκαλία. Επίσης, όλα τα μέλη της κοινότητας πρακτικής (Β/Π και Χ) υποστηρίζονταν θεωρητικά από την τελευταία συνσυγγραφέα (στο εξής Σ) μέσω συχνών τηλεδιασκέψεων, όπου υπήρχε έμφαση στη διάκριση της χρήσης του kit ως γνωστικό εργαλείο/μέσο, σε βασικές έννοιες υπολογιστικής σκέψης και αποτίμηση-αναστοχασμός επί των συνδιδασκαλιών. Στη Β΄ φάση (Απρίλιος-Μάιος 2023), τα μέλη της ομάδας εστίασαν στο μαθηματικό περιεχόμενο και στον τρόπο με τον οποίο αυτό μπορεί να διερευνηθεί από τους μαθητές μέσω της αξιοποίησης της Ρομποτικής. Αρχικά, οι Β/Π σχεδίασαν ατομικά σενάρια στα Μαθηματικά τα οποία συνοδεύτηκαν από Φύλλα Εργασίας με έργα που απαιτούσαν τη χρήση Ρομποτικού οχήματος για την επίτευξη των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων σύμφωνα με τα ΝΠΣ. Πιο συγκεκριμένα, στην Ε΄ τάξη το σενάριο εστίαζε στο πώς η χρήση της Ρομποτικής μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια την αλγεβρικής σκέψης και συγκεκριμένα στη γενίκευση και στη χρήση συμβολικής γλώσσας. Στη Στ΄ τάξη το σενάριο αφορούσε την Αναλυτική Γεωμετρία και συγκεκριμένα την αναγνώριση και τοποθέτηση σημείου

στο επίπεδο με τη βοήθεια συντεταγμένων. Κατά τη διάρκεια της συγγραφής των σεναρίων υπήρξαν συναντήσεις ανατροφοδότησης των Β/Π με τον Χ, αλλά και με την Σ. Ακολούθως οι Β/Π υλοποίησαν τα σενάρια στα τμήματά τους με τον Χ ως παρατηρητή. Σε αυτή τη φάση υιοθετήθηκε το *μετασχηματιστικό* μοντέλο ΕΑ, καθώς οι Β/Π είχαν τον έλεγχο του σχεδιασμού και της υλοποίησης των σεναρίων τους και επιχείρησαν να συνδέσουν τη θεωρία με την πράξη.

Αναστοχασμός-στοιχεία αξιολόγησης

Σημαντικό μέρος της ΕΑ του εκπαιδευτικού είναι ο αναστοχασμός που πραγματώνεται μέσα από τη συνεργασία ομότιμων-συναδέλφων (ΙΕΠ, 2021). Η ετεροπαρατήρηση στο πλαίσιο της συνδιδασκαλίας με τον Χ, ο αναστοχασμός, οι συναντήσεις επιμόρφωσης και η επιστημονική καθοδήγηση της Σ, η ατομική εξάσκηση με το kit Lego Spike Prime, καθώς και η υλοποίηση του έτοιμου σεναρίου αποτέλεσαν σημαντικούς σταθμούς στην ενίσχυση της αυτοδυναμίας των Β/Π. Έτσι κατάφεραν να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν πρωτότυπο σενάριο στα Μαθηματικά αξιοποιώντας τη Ρομποτική με τα πρώτα αποτελέσματα από την συμμετοχή των μαθητών στην υλοποίηση των ατομικών σεναρίων τους να είναι ενθαρρυντικά. Η ΕΑ των Β/Π στο πεδίο των *γνώσεων*, ανιχνεύεται επίσης από τις απαντήσεις τους σε ερωτηματολόγια πριν και μετά την υλοποίηση της δράσης, αλλά και από την καταγραφή σε ημερολόγιο της πορείας τους στο πλαίσιο της TPACK. Από την οπτική του Χ, η ΕΑ εστιάζεται στην ενδυνάμωση των δεξιοτήτων του ως μέντορα και στη θετική στάση απέναντι σε δράσεις συνδιδασκαλίας των Μαθηματικών. Τα χαρακτηριστικά του προγράμματος ΕΑ (κοινωνικοπολιτισμική, πλαισιοθετημένη προσέγγιση της *επαγγελματικής μάθησης,* με φθίνουσα σκαλωσιά) αναδεικνύουν τη δυναμική μιας τέτοιας προσπάθειας στην κατεύθυνση της ένταξης της Ρομποτικής στην τάξη των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΙΕΠ (2021). Νέα Προγράμματα Σπουδών https://iep.edu.gr/el/nea-programmata-spoudon-arxiki-selida

Kazantzis, T., & Hadjileontiadou, S. (2021). Microgenetic Analysis of the Educational Robotics as Mindtools: A Case in the Construction of the Concept Speed. In: Tsiatsos, T., Demetriadis, S., Mikropoulos, A., Dagdilelis, V. (eds) *Research on E-Learning and ICT in Education. Springer*, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-64363-

Kennedy (2005). Models of continuing professional development (CPD): a framework for analysis. *Journal of In-Service Education*, *31*(2), 235–250. ttps://doi.org/10.1080/13674580500200277

You, H.S., Chacko, S. M., & Kapila,V. (2021). Examining the Effectiveness of a Professional Development Program: Integration of Educational Robotics into Science and Mathematics Curricula. *Journal of Science Education and Technology, 30*, 567–581. https://doi.org/10.1007/s10956-021-09903-6

Zhong, B., & Xia, L. (2020). A Systematic Review on Exploring the Potential of Educational Robotics in Mathematics Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18,* 79–101 https://doi.org/10.1007/s10763-018-09939-y

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ: ΜΕΤΡΩ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΖΩ ΤΟ ΜΗΚΟΣ

Μάνου Ευαγγελία

Δασκάλα Ειδικής Αγωγής, Νηπιαγωγός, Msc Counselling Psychology

vivimanou1992@gmail.com

Παπαοικονόμου Μαρία Δασκάλα, 1ο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Πορταριάς «Ν. Τσοποτός»

marokoug@gmail.com

Δαρόπουλος Απόστολος

Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ70 Μαγνησίας

apdaro@uth.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ

Η θεματική του προτεινόμενου διδακτικού σεναρίου αναφέρεται στις Μετρήσεις και συγκεκριμένα στην ενότητα Μετρώ και Εκφράζω το Μήκος της Τετάρτης τάξης (Δ΄) και έχει σχεδιασθεί για τρεις (3) διδακτικές ώρες. Πριν την υλοποίηση της διδασκαλίας αποφασίσαμε να προβούμε σε δοκιμαστικές δραστηριότητες με τη χρήση χάρακα, όπου διαπιστώθηκε αδυναμία εκτιμήσεων, κατανόησης των μονάδων μέτρησης όπως και ορθής χρήσης του χάρακα. Σύμφωνα με τους Van de Walle, Lovin, Karp και Bay- Williams (2017) οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές/ριες στη μέτρηση μήκους συνοψίζονται στις ακόλουθες: συνήθως αφήνουν κενά μεταξύ των μονάδων μέτρησης ή τις επικαλύπτουν μεταξύ τους, τείνουν να χρησιμοποιούν μονάδες που δεν έχουν ίσο μέγεθος μεταξύ τους με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λανθασμένες μετρήσεις και παρανοήσεις καθώς και προβαίνουν σε συνδυασμό διαφορετικών μονάδων μέτρησης (π.χ. 2 εκατοστά και 2 χιλιοστά, ίσον 4). Συνάμα, κατά τη χρήση τυπικών οργάνων μέτρησης (χάρακας, μέτρο), οι μαθητές/ριες ξεκινούν από το 1 και όχι το 0 ή μετρούν από τη λάθος άκρη τους, μετρούν τα ίδια τα σημάδια ή τα «σημεία» από τη μία πατημασιά στην άλλη αντί του διαστήματος ανάμεσα από τα σημάδια του χάρακα και τέλος όταν συγκρίνουν το μήκος δύο αντικειμένων, συγκρίνουν μόνο τη μία άκρη τους (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay – Williams, 2017).

Στόχος αποτελεί τα παιδιά να κατασκευάσουν και να χρησιμοποιούν με σωστό τρόπο τυπικές μονάδες μέτρησης (χάρακες). Αν και όλη η διδασκαλία έχει σχεδιαστεί με γνώμονα την ανταπόκριση όλων των μαθητών/ριων, ωστόσο υπάρχει η δυνατότητα διαφοροποίησής του στα

σημεία όπου θα προκύψει αδυναμία ανταπόκρισης από τον μαθητή με ε.ε.α.

Ειδικότερα, σύμφωνα με το Νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά οι μαθητές/ριες καλούνται:

Να κατασκευάζουν μη τυπικούς και τυπικούς χάρακες και να τους χρησιμοποιούν για να πραγματοποιήσουν μετρήσεις μήκους (Β΄ τάξη-

Μ.Μ.2.3).

Να πραγματοποιούν εκτιμήσεις και μετρήσεις μηκών με άτυπες & τυπικές μονάδες μέτρησης στον περιβάλλοντα χώρο και σε δισδιάστατες

αναπαραστάσεις (Γ τάξη- Μ.Μ.3.4).

Να επιλύουν προβλήματα μέτρησης με τη χρήση τυπικών οργάνων και να διαπιστώνουν την ανάγκη υποδιαιρέσεων (Γ΄ & Δ 'τάξη Μ.Μ.4.5).

Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στον διάλογο και τη διαπραγμάτευση.

Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά.

Για τον λόγο αυτό κρίνεται επιτακτική η αξιοποίηση μιας πληθώρας πρακτικών με σκοπό την ολόπλευρη ανάπτυξη του παιδιού, την εξοικείωση με τη νέα γνώση που αφορά το μήκος υπό το πρίσμα της κριτικής μάθησης, του προβληματισμού και της ενεργούς εμπλοκής. Υιοθετώντας το κονστρουκτιβιστικό μοντέλο όπου το παιδί κατανοεί τη γνώση σύμφωνα με τα δικά του γνωστικά αποθέματα και την κατασκευάζει ενεργητικά, επιλέχθηκε για τη συγκεκριμένη διδασκαλία η διδακτική προσέγγιση της επίλυσης προβλήματος και συγκεκριμένα το είδος που αφορά τη διδασκαλία μιας νέας έννοιας.

Εξέχουσας σημασίας στην επίλυση προβλήματος κρίνεται το λάθος καθώς αποτελεί πηγή προβληματισμού και ανάπτυξης. Όπως αναφέρουν οι Gedik, Konyalıoğlu, Tuncer & Morkoyunlu (2017), η σωστή αξιοποίηση των λαθών αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μαθησιακής διαδικασίας. Κάθε ένα από αυτά παρατηρείται ως μια ευκαιρία για μάθηση, έρευνα, διαπραγμάτευση και συλλογισμό για όλους καθώς συμβάλλει στην οικοδόμηση της νέας γνώσης με βιωματικό τρόπο. Το παιδί αναλαμβάνει ενεργό δράση, παύει να είναι παθητικός δέκτης της γνώσης, και σε συνεργασία με τον/ην εκπαιδευτικό κατασκευάζει προοδευτικά τη μαθηματική γνώση. Συνάμα εκτός από τη διδακτική στρατηγική διαχείρισης του λάθους αξιοποιήσαμε και τη διδακτική πρακτική της ενθάρρυνσης, της συνεργασίας μεταξύ των μελών των ζευγών που δημιουργήσαμε αλλά και μεταξύ τους. Αξίζει να αναφερθεί πως ο/η

εκπαιδευτικός σε όλη τη διαδικασία εμπλέκεται στον βαθμό που χρειάζεται, λειτουργώντας βοηθητικά και συμβουλευτικά μέσω της ενθάρρυνσης της ανάληψης πρωτοβουλίας για δράση, του προβληματισμού και της ενδυνάμωσης των μαθητών/ριων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Με αφορμή τις παραπάνω διαπιστώσεις δημιουργήθηκαν πέντε καινοτόμα έργα τα οποία παρουσιάζουμε συνοπτικά ακολούθως:

1) Αφού, ανακοινώσουμε στους/ις μαθητές/ριες το αντικείμενο με το οποίο θα ασχοληθούμε και το αναρτήσουμε στον τοίχο των Μαθηματικών, που έχουμε δημιουργήσει ήδη από την αρχή της σχολικής χρονιάς, συζητούμε σε επίπεδο ολομέλειας τη σημασία του αντικειμένου που θα διαπραγματευθούμε σήμερα (ιδεοκαταιγισμός). Κατόπιν οι μαθητές/ριες προβαίνουν σε εκτιμήσεις και μετρήσεις μήκους με τη χρήση άτυπων μονάδων όπως είναι τα σουβλακόξυλα, οι οδοντογλυφίδες, οι συνδετήρες, με σκοπό να εξοικειωθούν με αυτές και να διαπιστώσουν σταδιακά την ανάγκη ύπαρξης μια ενιαίας μονάδας.
2) Κυνήγι Θησαυρού: Παρουσιάζουμε στα παιδιά σκοινί ενός μέτρου. και έχοντάς το ως οδηγό (νοητική εικόνα) και τους ζητούμε να βρουν και να εκτιμήσουν αντικείμενα που έχουν περίπου τα μήκη που τους έχουμε δώσει.
3) Δημιουργία του δικού μας χάρακα: Τα παιδιά δημιουργούν τον δικό τους χάρακα, πραγματοποιούν μετρήσεις με αυτόν και τον συγκρίνουν με του εμπορίου.
4) Οι μαθητές/ριες συγκρίνουν τον χάρακά τους με του εμπορίου. Σ’ αυτό το σημείο ξεκινούν να δημιουργούν τις υποδιαιρέσεις και κάνουν με τον δικό τους χάρακα μετρήσεις.
5) Τέλος, παρουσιάζουμε το γαλλικό μέτρο στα παιδιά και τις καθιερωμένες ονομασίες μονάδων μέτρησης (μέτρο, δέκατο, εκατοστό) και συζητάμε πάνω σ αυτά.

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Από τα προσδοκώμενα Π.Μ.Α. ενεργοποιήθηκαν αυτά που αφορούν τις εκτιμήσεις μηκών, τις άτυπες μετρήσεις καθώς και την κατασκευή χάρακα από τους/ις μαθητές/ριες. Η επιλογή τους ήταν επιτυχής διότι όπως ήδη έχει αναφερθεί οι μαθητές/ριες εμφανίζουν δυσκολία κατάκτησης των εν λόγω δεξιοτήτων και έτσι οι άτυπες μονάδες μέτρησης περιέχουν ένα καλό σκεπτικό για το πέρασμα στις τυπικές. Επιπρόσθετα, στη συγκεκριμένη διδασκαλία εφαρμόστηκαν οι καινοτομίες που προτείνονται από το Νέο

Πρόγραμμα Σπουδών και αφορούν τον μαθηματικό συλλογισμό, την επιχειρηματολογία, την επίλυση προβλήματος, τη σύνδεση με την καθημερινότητα και τη χρήση χειραπτικών υλικών. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στις κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές, αφού στο μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας η μαθηματική γνώση προκύπτει μέσα από την αλληλεπίδραση των μαθητών/ριων μεταξύ τους ως ζευγάρι αλλά και σε επίπεδο ολομέλειας.

Η πρακτική της διαχείρισης του λάθους φάνηκε να συμβάλλει στην ανάπτυξη κριτικά σκεπτόμενων ατόμων, να τους κινητοποιεί για διερεύνηση των παραμέτρων που μπορεί να έχει μία συνθήκη, αν και αποτελεί κοπιαστικό εγχείρημα για τον εκπαιδευτικό ως προς τον τρόπο εφαρμογής του επί της ουσίας και όχι μηχανιστικά. Πρότασή μας ωστόσο είναι να αφιερώνεται περισσότερος χρόνος για την εννοιολογική κατανόηση του όρου μέτρηση μήκους, τις εκτιμήσεις και τη χρήση άτυπων μονάδων μέτρησης αντί να βομβαρδίζουμε τα παιδιά με υποδιαιρέσεις και μετατροπές ενώ αδυνατούν να κατανοήσουν επαρκώς τα παραπάνω και τα χρησιμοποιούν μηχανιστικά.

Αξίζει να σημειωθεί πώς πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη πλέον πως οι σύγχρονες τάξεις χαρακτηρίζονται ως πλουραλιστικές υπό το πρίσμα της διαφορετικότητας ως προς το κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο, τη χώρα προέλευσης, τη γλώσσα, τον πολιτισμό αλλά και τις ανάγκες και ικανότητες των μαθητών/ριων. Ως εκ τούτου, θα πρέπει κάθε Πρόγραμμα Σπουδών να διαπνέεται από την ικανότητα αναπροσαρμογής των ΠΜΑ, την συμπεριληπτική φιλοσοφία και κουλτούρα, στην καλλιέργεια κριτικά σκεπτόμενων ενηλίκων και να μην επικεντρώνεται αποκλειστικά στην παροχή μαθηματικών γνώσεων. Χρειάζεται ίσως να αναστοχαστούμε όλοι/ες και να θέσουμε εκ νέου στόχους για το είδος της εκπαίδευσης που προσφέρουμε στα παιδιά και τι επιθυμούμε να διαμορφώσουμε ως εκπαιδευτική πολιτική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gedik, S. D., Konyalıoğlu, A. C., Tuncer, E. B., & Morkoyunlu, Z. (2017). Mistake handling activities in mathematics educatıon: practice in class. *Journal of Education and Human Development, 6*(2), 86-95.

Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (2021). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό. ΙΕΠ. https://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli

Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση (2021). ΙΕΠ. https://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli

Van de Walle, J., Lovin H. L., Karp S.K. & Bay-Williams M.J. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. (Επιμ.). Τριανταφυλλίδης. Gutenberg.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ Β' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΤΑΞΗ

«ΜΑΘΑΙΝΩ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΠΑΙΖΩ ΜΕ ΑΥΤΗΝ»

Κατερίνα Παυλίδου

Σταυρούλα Στούμπου

Ηρακλής Καραγιάννης

Εκπαιδευτικός ΠΕ70, ΠΕ86 & Υποψήφια Διδακτόρισσα Π.Τ.Δ.Ε Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Εκπαιδευτικός ΠΕ70 MEd Ειδική Εκπαίδευση

Εκπαιδευτικός ΠΕ70, Msc Κοινωνικής Ανθρωπολογίας

pavlidou.kat@gmail.com

stavroula00@yahoo.gr

irakliskaragiannis@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Λαμβάνοντας υπόψη τη γενικότερη δυσκολία των μαθητών/τριών να εντοπίζουν την αξονική συμμετρία, η παρούσα διδακτική πρόταση στοχεύει στη διδασκαλία της συμμετρίας στους μαθητές/τριες της Β Δημοτικού, μέσα από τη χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών. Αξιοποιώντας την ανακαλυπτική μάθηση και την εποικοδομιστική προσέγγιση, οι μαθητές/τριες μαθαίνουν να εντοπίζουν τους άξονες συμμετρίας των σχημάτων και να δημιουργούν συμμετρικά είδωλα. Παράλληλα, τα εκπαιδευτικά λογισμικά προσφέρουν ένα παιγνιώδες πλαίσιο πειραματισμού, εξερεύνησης και αξιολόγησης του μαθησιακού αντικειμένου, με τον εκπαιδευτικό να λειτουργεί ως συντονιστής της μαθησιακής διαδικασίας.

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Λήφθηκαν υπόψη οι προϋπάρχουσες γνώσεις, ώστε να λειτουργήσουν ως βάση πάνω στην οποία θα οικοδομηθεί η νέα γνώση. Οι προαπαιτούμενες δυνατότητες των μαθητών/τριων, με βάση το Πρόγραμμα Σπουδών 2021 περιγράφονται αναλυτικά στους Μετασχηματισμούς ως μέρος των Μεγάλων ιδεών των Μαθηματικών (ΠΣ – Φιλοσοφία, 2021,) που εξειδικεύονται σε προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΣ-Μαθηματικά, Β' μέρος, 2021)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

Η διδακτική πρακτική της ενθάρρυνσης της συνεργασίας συνεισφέρει επιπλέον στην ανάπτυξη της γνωστικής συνιστώσας της μαθηματικής

κατανόησης αλλά και στη δημιουργία θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά. Οι συζητήσεις έχουν ως στόχο να δημιουργήσουν ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές/τριες μαθαίνουν να ακούνε τα επιχειρήματα των άλλων, να ασκούν κριτική και να εκφράζουν τα δικά τους.

ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Το θέμα αποτελεί θέμα ενότητας στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ τάξης Δημοτικού και κατά συνέπεια είναι απολύτως συμβατό με το Νέο ΠΣ. Μεγάλες Ιδέες που πρέπει να αποκομίσουν οι μαθητές/τριες μετά το τέλος του μαθήματος είναι: η Μαθηματική δομή, η Απόδειξη, η Γενίκευση, η Μεταβολή

ΟΙ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ

Από τη βιβλιογραφία –αλλά και από διερευνητικές ερωτήσεις κατά την προηγούμενη διδασκαλία– προκύπτει ότι τα παιδιά μπορούν να αναγνωρίζουν τη συμμετρία απλά εμπειρικά, χωρίς επιστημονικά κριτήρια ή χρήση της ορολογίας. Επίσης δεν μπορούν να αντιληφθούν το συσχετισμό ενός ειδώλου και του αντικειμένου που αντικατοπτρίζεται, ως ένα συμμετρικό σύνολο.

ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

- Να διακρίνουν και να εντοπίζουν τα συμμετρικά από τα μη συμμετρικά σχήματα, σχέδια ή εικόνες.
- Να δημιουργούν, με τη βοήθεια του Η/Υ, το συμμετρικό «είδωλο» ενός σχήματος, με βάση τον άξονα συμμετρίας που δίνεται κάθε φορά.
- Να διαπιστώσουν την ύπαρξη του διαγώνιου άξονα συμμετρίας.
- Να αντιληφθούν τη σημαντικότητα της μέτρησης, για την ίση απόσταση σημείων-κλειδιών από τον άξονα συμμετρίας.
- Να αντιληφθούν τις δυνατότητες για πειραματισμό που προσφέρουν τα κατάλληλα λογισμικά.
- Να ανακαλύψουν ότι τα διάφορα λογισμικά αποτελούν πηγή γνώσης και μάθησης τόσο σε ομαδικό όσο και σε ατομικό επίπεδο.
- Να νιώσουν χαρά και ικανοποίηση με τις δημιουργίες τους, καθώς και να εμπλουτιστεί το αισθητικό τους κριτήριο με τις αρμονικές συμμετρικές συνθέσεις τους.
- Γενικά να ενισχύσουν μια προϋπάρχουσα τεχνολογική κουλτούρα ή να αποτελέσει η ενασχόλησή τους μια ευκαιρία να την αποκτήσουν.
- Να αντιληφθούν την αποτελεσματικότητα της συλλογικής προσπάθειας στην κατάκτηση της νέας γνώσης.

- Να ενισχύσουν τις επικοινωνιακές και κοινωνικές τους δεξιότητες.
- Να εξασκηθούν στην παρατήρηση και σύγκριση εικόνων μεταξύ τους.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Το συγκεκριμένο σενάριο στηρίζεται κυρίως στις αρχές της ανακαλυπτικής μάθησης και του κοινωνικού εποικοδομητισμού καθώς δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μαθησιακή διαδικασία και στην αλληλεπίδραση μεταξύ των εμπλεκομένων μερών. Η αυτενέργεια των μαθητών/τριών και η ανταλλαγή ιδεών αποτελούν μοχλό ανάπτυξης της σκέψης και συντελούν στην οικοδόμηση της γνώσης, χωρίς την άμεση παρέμβαση της εκπαιδευτικού, η οποία λειτουργεί επικουρικά και περιορίζεται στον ρόλο εμψυχώτριας και συντονίστριας.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Η πρώτη δραστηριότητα, με το λογισμικό Kidspiration, θα βοηθήσει τα παιδιά να ανακαλέσουν την πρότερη γνώση, σχετικά με τα σχήματα και το όνομά τους και θα τα προετοιμάσει ψυχολογικά για τη διαδικασία της μάθησης. Η δεύτερη δραστηριότητα είναι μια απλή αντιστοίχιση στο λογισμικό Hot Potatoes, όπου οι μαθητές/τριες βλέπουν μισά σχήματα και πρέπει να αναγνωρίσουν το άλλο μισό και να τα αντιστοιχίσουν. Για την τρίτη δραστηριότητα θα χρειαστεί διαδικτυακή σύνδεση. Στον ιστότοπο http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=4192 θα γίνουν πειραματισμοί και δοκιμές, μετά από υποθέσεις που θα κάνουν τα παιδιά, με σκοπό την ανακαλυπτική μάθηση. Και η τέταρτη δραστηριότητα απαιτεί διαδικτυακή σύνδεση. όπου τα παιδιά θα μετακινήσουν τα σχήματα που έχουν προσθέσει προηγουμένως και θα διαπιστώσουν ότι όσο πλησιάζει ή απομακρύνεται κάθε σχήμα του δεξιού παραθύρου από τον άξονα συμμετρίας, τόση απόσταση δημιουργείται και στο αριστερό παράθυρο. Με την πέμπτη δραστηριότητα, με τη χρήση λογισμικού θα υπάρχουν έτοιμες συμμετρικές και μη συμμετρικές εικόνες. Σε αυτά θα χαράξουν άξονες συμμετρίας (κάθετους ή οριζόντιους). Στο τελικό στάδιο, αυτό της (αυτο)αξιολόγησης, Θα συν-δεθούν στον ιστότοπο όπου καλούνται να ‘αποδείξουν’ ότι είναι πλέον σε θέση να αναγνωρίζουν το άλλο μισό μιας αρκετά σύνθετης συμμετρικής εικόνας, βλέποντας μόνο το ένα μέρος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Burger, W., & Shaugnessy, M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, Research in Mathematics Education, Vol. 17.

Clements, D. H. (1998). Geometric and Spatial Thinking in Young Children.

Donoghue, M.J., Ree, R.H. & Baun, D.A. (1998). Phylogeny and the evolution of flower symmetry in the Asteridae. Trends in Plant Science, 3, 311-314

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1990). Symmetry in Mathematics Learning. In ZDM – International Reviews on Mathematics Education, 22(2), 53-59

Kidder, R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. Journal for Research in Mathematics Education, 7 (1), 40-52.

Kuchemann, D. (1980). Children's Difficulties with Single Reflections and Rotations. Mathematics in School, 9(2), 12-13.

Leikin, R., Berman, A. & Zaslavsky, O. (2000). Learning through teaching: The case of symmetry. Mathematics Education Research Journal. 12, 16-34.

Moyer, P. S. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 47(2), 175-197.

https://curriculum.gov.mt/en/Assessment/Assessment-of-earning/Documents/assessment_of_for_as_learning.pdf

Trigueros, M., Lozano, M.D.,& Sandoval, I. (2014). Integrating technology in the primary school mathematics classroom: The role of the teacher. Springer, Dordrecht

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γαγάτσης, Α., Ντίνας, Α. (1994). Αντιλήψεις των Ελλήνων μαθητών και καθηγητών για την αξονική συμμετρία.

ΙΕΠ (2017). Περιγραφική αξιολόγηση: Θεωρητικό Πλαίσιο και Μεθοδολογία

Υπουργείο παιδείας και Πολιτισμού. (2018). Ενιαίο σύστημα αξιολόγησης μαθητή/μαθήτριας

Μαστρογιάννης, Α. Κορδάκη, Μ. (2007). Αμφίπλευρη Συμμετρία: αντιλήψεις μαθητών δημοτικού. 2ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, Αλεξανδρούπολη.

Σκουμπουρδή, Χρ., Βαϊτσίδη, Γ. (2019). Η διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (12), 8 – 22.

webliography

web 2.0 Η δεύτερη γενιά του διαδικτύου http://www.netschoolbook.gr/epimorfosi/web20about.html

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ Β' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΤΑΞΗ

Κατερίνα Παυλίδου

Αλεξάνδρα Σταυριανουδάκη

Εκπαιδευτικός ΠΕ70, ΠΕ86 &Υποψήφια Διδακτόρισσα Π.Τ.Δ.Ε Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Εκπαιδευτικός ΠΕ70 & Διδακτόρισσα Π.Τ.Δ.Ε Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

pavlidou.kat@gmail.com

Stavrian@uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν διδακτικό σενάριο αποτελεί πρόταση διδασκαλίας βασικών αρχών στατιστικής στη Β' τάξη Δημοτικού, η οποία αποσκοπεί στον μαθηματικό εγραμματισμό των μαθητών/τριών μέσα από την καλλιέργεια των μεγάλων ιδεών της μαθηματικής δομής, της απόδειξης, της γενίκευσης και της μεταβολής. Παρουσιάζονται δραστηριότητες, που αφορούν στην διαχείριση πληροφοριών μέσα από διαδικασίες συλλογής, οργάνωσης, παρουσίασης, ερμηνείας και μοντελοποίησης δεδομένων. Τα σημαντικότερα μαθησιακά οφέλη που καταγράφηκαν είναι η ενίσχυση στρατηγικών υποθέσεων, διερευνήσεων και καταγραφών καθώς και η κριτική επίγνωση του τρόπου αξιοποίησης των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το παρόν διδακτικό σενάριο σχεδιάστηκε σε ακολουθία με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών και σε αρμονία με βιώματα της καθημερινής ζωής, μέσα από συγχώνευση δεδομένων του φυσικού και κοινωνικού περιβάλλοντος με την εσωτερική εμπειρία, τη σκέψη και το συναίσθημα.

Βασικοί στόχοι είναι οι μαθητές να:

1. διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα.
2. συλλέγουν κατηγορικά δεδομένα μέσω μικρών ερευνών στο οικείο περιβάλλον τους και τα οργανώνουν χρησιμοποιώντας χειραπτικά υλικά και καταμέτρηση με γραμμές.

ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

Κοινωνικο-πολιτισμικές δεξιότητες

Αναφορικά με τις **κοινωνικο-πολιτισμικές δεξιότητες**, μέσα από την εφαρμογή που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε επιδιώχθηκε η ενίσχυση των μαθητών/τριών στην ερμηνεία καταστάσεων στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά και η κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις.

Κοινωνικο-συναισθηματικές δεξιότητες

Οι **κοινωνικο-συναισθηματικές δεξιότητες** που καλλιεργούνται μέσα από το παρόν διδακτικό σενάριο αφορούν αρχικά στην ανάπτυξη θετικών κινήτρων και αυτοπεποίθησης, στην εστίαση στις θετικές πτυχές των εμπειριών και στην υπομονή και επιμονή που απαιτείται για την αντιμετώπιση οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης.(Οδηγός Εκπαιδευτικού, σελ.12-13).

Δεξιότητες Στατιστικής

Η Στατιστική παιδεία είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση του περιβάλλοντος. Στατιστικοί πίνακες και γραφήματα προβάλλονται συνεχώς από τα μέσα ενημέρωσης.

ΠΙΘΑΝΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Τα παιδιά από την ηλικία των 7 ετών είναι σε θέση να κάνουν ερμηνείες που στηρίζονται σε δεδομένα που διαβάζουν από τα διαγράμματα, ωστόσο, δυσκολεύονται να εντοπίσουν σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα δεδομένα και να βγάλουν συμπεράσματα.

Αναφορικά με τις προαπαιτούμενες γνώσεις, οι μαθητές είναι σημαντικό να έχουν κατακτήσει την έννοια και την διαδικασία της ταξινόμησης που διδάσκεται από την προσχολική ηλικία. Όταν κανείς ταξινομεί παίρνει αποφάσεις για το πώς θα κατηγοριοποιήσει την πληροφορία.

ΟΙ ΕΠΙΛΕΧΘΕΙΣΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Επιλέχθηκαν από τους/τις εκπαιδευτικούς ως διδακτική προσέγγιση η **επίλυση προβλήματος**. Στους μαθητές δόθηκαν παραδείγματα εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών μέσω της χρησιμοποίησης τους και κλήθηκαν να εφαρμόσουν προκειμένου να επιλύσουν «προβληματικές» καταστάσεις που τους τέθηκαν. Οι μαθητές/τριες σε ζεύγη εμπλέκονται ενεργά σε διαδικασίες μάθησης και κατασκευάζουν προοδευτικά την μαθηματική γνώση (άντληση πληροφοριών από ραβδογράμματα και εικονογράμματα), εξηγώντας και τεκμηριώνοντας τα συμπεράσματά τους.

Επιλέχθηκε η διδακτική προσέγγιση της **διερευνητικής μάθησης**. Οι μαθητές βρίσκονται σε ρόλο ερευνητή όπου ανακαλύπτουν, δημιουργούν και συνθέτουν νέα εργαλεία.

ΟΙ ΕΠΙΛΕΧΘΕΙΣΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Δραστηριότητα 1: «Ταιριάζουμε????»

Μέσα από την δραστηριότητα επιδιώκεται οι μαθητές/τριες να:

1. διατυπώνουν ερωτήματα τα οποία μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα.
2. αντλούν πληροφορίες από πίνακα και ραβδογράμματα.
3. «διαβάζουν» γραφήματα
4. εξαγάγουν συμπεράσματα από τα δεδομένα που παρουσιάζονται.
5. διατυπώνουν απόψεις

Οι μαθητές/τριες χωρίζονται σε ομάδες και η κάθε ομάδα διατυπώνει γραπτά ένα ερώτημα προκειμένου να γνωρίσουν τις προτιμήσεις των συμμαθητών τους: «Ποιο είναι το αγαπημένο σου (π.χ. χρώμα, μουσικό όργανο, αριθμό αδερφιών κ.λπ.) με περιορισμένο εύρος απαντήσεων».

Οι μαθητές γράφουν την απάντηση της συγκεκριμένης ερώτησης σε ένα χαρτί προκειμένου να συλλέξουν τα δεδομένα για το συγκεκριμένο ερώτημα και στη συνέχεια το τοποθετούν σε ένα καλάθι. Στην συνέχεια, τους δίνεται ένας πίνακας όπου καταγράφουν τις απαντήσεις.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2: «ΖΑΛΙΣΤΗΚΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ!!»

Μέσα από την δραστηριότητα επιδιώκεται οι μαθητές/τριες χωρισμένοι σε ομάδες να:

1. διεξάγουν μια μικρή έρευνα.
2. διατυπώσουν ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών
3. αποφασίζουν τον τρόπο που θα συλλέξουν δεδομένα.
4. καταγράφουν και να οργανώνουν τις πληροφορίες που έχουν συλλέξει με βάση κριτήρια που θέτουν.
5. σχηματοποιούν τα αποτελέσματα τους σε ραβδόγραμμα.
6. συγκρίνουν τα δεδομένα καταγραφής με τη χρήση ραβδογράμματος.

Οι μαθητές/τριες χωρίζονται σε τρεις ομάδες και κάθε ομάδα καλείται να επιλέξει μία από τις τρεις κάρτες στις οποίες αποτυπώνονται ρόδες (4,2,και 6).

Δίνεται στην κάθε ομάδα καρτέλα καταγραφής των οχημάτων που πρέπει να καταγράψουν. Στη συνέχεια, καλούμαι τους μαθητές να κάνουν το πρώτο τους ραβδόγραμμα μέσα σε έναν κύλινδρο που έχουμε κατασκευάσει από πλαστικοποιημένο διάφανο χαρτί. Κατόπιν, γράφουμε στην κορυφή του κυλίνδρου τον αριθμό που αντιστοιχεί. Θα ακολουθήσει συζήτηση για το πιο όχημα κινείται περισσότερο στο δρόμο ή πόσα περισσότερα αυτοκίνητα μετρήσαμε απ΄ ότι μηχανάκια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

ΙΕΠ (2017). Περιγραφική αξιολόγηση: Θεωρητικό Πλαίσιο και Μεθοδολογία

Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (2021). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό, Αθήνα: ΙΕΠ.

Πόταρη, Δ. (2016). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό): Οδηγός για τον εκπαιδευτικό: «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση (2021). Αθήνα: ΙΕΠ.

Σκουμπουρδή, Χρ., Βαϊτσίδη, Γ. (2019). Η διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (12), 8 – 22.

Van de Walle, J., Lovin H. L., Karp S.K. & Bay-Williams M.J. (2017). Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του. (Επιμ.). Τριανταφυλλίδης. Αθήνα: Gutenberg.

Ξενόγλωσση

Dakin, S.C & Herbert, A.M. (1998). The spatial region of integration for visual symmetry detection. The Royal Society

Kidder, R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. Journal for Research in Mathematics Education, 7 (1), 40-52.

Kuchemann, D. (1980). Children's Difficulties with Single Reflections and Rotations. Mathematics in School, 9(2), 12-13.

Leikin, R., Berman, A. & Zaslavsky, O. (2000). Learning through teaching: The case of symmetry. Mathematics Education Research Journal. 12, 16-34.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. Journal for Research in Mathematics Education, 5-9, 83-92.

Moyer, P. S. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 47(2), 175-197.

https://curriculum.gov.mt/en/Assessment/Assessment-of-Learning/Documents/assessment_of_for_as_learning.pdf

Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο- Μια Εξελικτική Διδασκαλία- J.A. Van De Walle Ng, O. L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. ZDM, 47(3), 421-434.

Schultz, K. & Austin, J. (1983). Directional effects in transformation tasks. Journal for Research in Mathematics Education, 14 (2), 95-101.

ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ

Παρασκευή Καμπορούδη[1], Σοφία Χατζηλεοντιάδου[2]

[1]1ο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Αλεξανδρούπολης, [2]ΠΤΔΕ, ΔΠΘ

pkamporoudi@gmail.com, schatzil@eled.duth.gr

Η παρούσα εργασία αφορά μία διδακτική πρόταση που συνδυάζει το μάθημα των μαθηματικών με τη ρομποτική. Μέσα από αυτήν επιχειρείται να μελετηθεί πώς η χρήση της ρομποτικής μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να μυήσει τους μαθητές στη χρήση συμβολικής γλώσσας, διευρύνοντας έτσι τα εργαλεία που χρησιμοποιεί και εμπλουτίζοντας τους τρόπους μάθησης και διδασκαλίας στα μαθηματικά. Αναδεικνύονται δυνατότητες και προβληματισμοί, καθώς και η σημασία της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού στην περιοχή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ψηφιακός και ο πληροφορικός γραμματισμός αποτελούν εγγενές μέρος του νέου προγράμματος σπουδών ΤΠΕ και Πληροφορικής (ΙΕΠ, 2021) του Δημοτικού σχολείου και ολοκληρώνονται όταν περιλαμβάνουν πρακτικές ανάπτυξης της υπολογιστικής σκέψης (ΥΣ). Βασικές συνιστώσες της ΥΣ είναι η αλγοριθμική και προγραμματιστική σκέψη. Η αξιοποίηση ρομποτικών κατασκευών σε περιβάλλον οπτικού προγραμματισμού για την επίλυση προβλημάτων μπορεί να συμβάλλει σε αυτήν την κατεύθυνση. Στον τομέα των μαθηματικών η αλγεβρική σκέψη (ΑΣ) περιλαμβάνει την αναπαράσταση, τη γενίκευση και την τυποποίηση καταστάσεων. Βασική προϋπόθεση για να καταφέρει ένας μαθητής να αναπτύξει την αλγεβρική σκέψη αποτελεί η καλλιέργεια της γλώσσας και του συμβολισμού, έτσι ώστε να είναι σε θέση να περιγράψει καταστάσεις, να στηρίξει και να εκφράσει τον τρόπο σκέψης του. Ωστόσο, σύμφωνα με τους Lins & Kaput (2004), μία από τις βασικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι ο συμβολισμός, ο οποίος συναντάται στην πρώιμη άλγεβρα. Η αξιοποίηση προγραμματιστικών περιβαλλόντων, όπως της ρομποτικής, στο μάθημα των μαθηματικών αποτελεί μια πρόκληση για τον εκπαιδευτικό ΠΕ70, καθώς σε τέτοια μαθηματικά έργα αλληλοδιαπλέκονται η ΥΣ και η ΑΣ. Πρόκειται για δύο συστήματα με δικούς τους συμβολισμούς που, ανάλογα με το έργο μπορεί να έχουν κοινά ή/και διαφορετικά χαρακτηριστικά, γεγονός που επηρεάζει το μαθησιακό αποτέλεσμα αναφορικά με τα μαθηματικά (Bråting & Kilhamn, 2021). Έρευνες έχουν δείξει ότι η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού αποτελεί ουσιώδες κομμάτι για τη βελτίωση της σχολικής επίδοσης (Bolam, 2000), υπήρξε δε αναγκαία στην περίπτωση της αξιοποίησης της ρομποτικής στην τάξη των μαθηματικών όπως περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Το πλαίσιο

Η εν λόγω διδακτική πρόταση αποτέλεσε μέρος μιας καινοτόμου δράσης που διεξήχθη στο 1ο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Αλεξανδρούπολης

κατά το σχολικό έτος 2022-2023, σε συνεργασία με τη δεύτερη συν-συγγραφέα της παρούσας εργασίας. Η δράση αφορούσε την επαγγελματική ανάπτυξη των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών ΠΕ70 στην αξιοποίηση της ρομποτικής στην εκπαιδευτική διαδικασία (μεταξύ των οποίων και η πρώτη συν-συγγραφέας της παρούσας εργασίας, στο εξής (Ε)). Ειδικότερα, ενισχύθηκε η Τεχνολογική Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (Technological Pedagogical Content Knowledge, TPACK) των εκπαιδευτικών, προκειμένου να επιτευχθούν μαθησιακοί στόχοι με την αξιοποίηση της ρομποτικής (Mishra & Koehler, 2006).

Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα εργασία αναφέρεται σε μία διδακτική πρόταση που πραγματοποιήθηκε στο παραπάνω πλαίσιο σε 20 μαθητές της Ε' Δημοτικού στο μάθημα των μαθηματικών. Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν το ρομποτικό πακέτο LEGO® Education SPIKE™ Prime Set με το οποίο ήταν εξοικειωμένοι οι μαθητές μέσω του μαθήματος πληροφορικής (όσον αφορά τον προγραμματισμό της κίνησης και στροφής).

Στόχος και ζητήματα εστίασης

Σύμφωνα με το νέο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο (ΙΕΠ, 2021) στο θεματικό πεδίο της Άλγεβρας και ειδικότερα στη θεματική ενότητα «Αλγεβρική παράσταση», οι μαθητές αναπτύσσουν την αλγεβρική κατανόηση μεταξύ άλλων, μέσω της μελέτης μεταβλητών. Επίσης, στην αντίστοιχη τροχιά, μεταξύ άλλων, περιλαμβάνεται η χρήση του γράμματος ως μεταβλητής. Από την άλλη μεριά, στο θεματικό πεδίο της Γεωμετρίας και ειδικότερα στη θεματική ενότητα «Γεωμετρία» εντάσσονται τα επίπεδα σχήματα και στη θεματική ενότητα «Μετρήσεις» η μέτρηση της περιμέτρου τους. Ωστόσο, η έννοια *μεταβλητή* φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές στο πλαίσιο της πρώιμης άλγεβρας (Bush & Karp, 2013).

Στόχος της διδακτικής παρέμβασης ήταν η αλγεβρική διατύπωση της περιμέτρου κανονικών επίπεδων σχημάτων με χρήση μεταβλητής, μέσω της αξιοποίησης εκπαιδευτικής ρομποτικής. Ζητήματα ειδικότερης εστίασης αφορούσαν τον τρόπο ένταξης της ρομποτικής.

Διεξαγωγή της διδακτικής πρότασης

Πραγματοποιήθηκαν δύο δίωρες διδασκαλίες, στις οποίες τα παιδιά ήταν χωρισμένα σε 7 ομάδες των τριών (η μία των δύο). Προκειμένου να διερευνηθούν οι πρότερες γνώσεις των μαθητών ζητήθηκαν 1. Να υπολογίσουν την περίμετρο ενός μη κανονικού τετραπλεύρου με δοσμένες πλευρές, 2(α) να υπολογίσουν την περίμετρο ενός τετραγώνου με δοσμένη πλευρά και 2(β) να διατυπώσουν έναν γενικό κανόνα (τύπο), ο οποίος θα

υπολογίζει την περίμετρο οποιουδήποτε τετραγώνου. Όλοι οι μαθητές στο ζητούμενο 1 έκαναν άθροιση των μηκών των πλευρών, καθώς ήταν εξοικειωμένοι με την έννοια της περιμέτρου. Στο 2(α) οι περισσότεροι σημείωσαν το γινόμενο 4 επί το μήκος της πλευράς, ενώ στο 2(β) δεν ήξερε κανένας να απαντήσει. Στη συνέχεια, ζητήθηκε να προγραμματίσουν το ρομπότ ώστε να διαγράψει δύο μη κανονικά σχήματα (τρίγωνο και τετράπλευρο) με δοσμένες πλευρές και στο τέλος της κίνησής του να εμφανίζει (write) την περίμετρό του. Οι μοίρες στροφής του ρομπότ δίνονταν στους μαθητές, καθώς το συγκεκριμένο θέμα δεν ήταν αντικείμενο της παρέμβασης. Στη συνέχεια, ζητήθηκε να προγραμματίσουν όπως παραπάνω το ρομπότ ώστε κινούμενο να διαγράφει ένα τετράγωνο πλευράς 12,67εκ. Ενώ στον υπολογισμό της περιμέτρου οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν το γινόμενο (όπως στο 2(α)), στον προγραμματισμό της κίνησης του ρομπότ υιοθέτησαν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Στη συνέχεια, τους ζητήθηκε να μικρύνουν τον κώδικα, αναμένοντας να χρησιμοποιήσουν την εντολή «repeat» (την οποία δε γνώριζαν), ώστε να επαναλαμβάνεται η κίνηση. Παρά τη δυσκολία ορισμένων μαθητών, σε επίπεδο ομάδας όλες κατάφεραν να το κάνουν εντοπίζοντας την εντολή μέσα από πειραματισμό. Ακολούθως οι μαθητές ερωτήθηκαν πώς θα μπορούσε ο κώδικας αυτός να χρησιμοποιηθεί σε κάθε τετράγωνο, ανεξαρτήτως του μήκους της πλευράς του. Με αυτόν τον τρόπο η Ε προσπάθησε, με κατάλληλες ερωτήσεις, να οδηγήσει τα παιδιά στην αφαίρεση. Έτσι, ξεκίνησε μία συζήτηση μεταξύ των μαθητών για το μήκος της πλευράς, η οποία είναι διαφορετική σε κάθε τετράγωνο. Όταν όμως έσβηναν από τον κώδικα τον αριθμό που αντιστοιχεί στην πλευρά, το ρομπότ δεν μπορούσε να κινηθεί, ούτε εμφάνιζε την περίμετρο. Στο σημείο αυτό η ολομέλεια της τάξης αντιλήφθηκε ότι έπρεπε να αντικατασταθεί η τιμή της πλευράς, ενώ το 4 μένει σταθερό. Έτσι δημιουργήθηκε πρόσφορο έδαφος για συζήτηση γύρω από την έννοια της μεταβλητής. «*Αρχικά την είπαμε «πλευρά» και στη συνέχεια «π», εξηγώντας ότι είναι πιο εύκολο να διαχειριστούμε ένα γράμμα αντί μια λέξη»* (Ε). Στη συνέχεια απαιτήθηκε καθοδήγηση για την ολοκλήρωση του προγραμματισμού. Ακολούθησε εφαρμογή στο κανονικό πεντάγωνο, αντικαθιστώντας το 4 με το 5 στον κώδικα (με τις μοίρες στροφής δοσμένες από την Ε). Σε post-test οι περισσότεροι μαθητές σημείωσαν την περίμετρο ενός κανονικού επταγώνου ως γινόμενο 7 επί π.

ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ

Από τη διδακτική παρέμβαση η Ε συνειδητοποίησε το γεγονός ότι η αξιοποίηση της ρομποτικής εισήγαγε στο μάθημα ένα σύστημα με τον δικό

του συμβολισμό που απαιτεί ΥΣ. Κοινά στοιχεία ανάμεσα στην ΥΣ και την ΑΣ αναδείχθηκαν η αναγνώριση και γενίκευση κανονικοτήτων, γεγονός που υποστήριξε την εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητής «π» στην περίπτωση του τετραγώνου και στη συνέχεια στην αφαίρεση μέσω της εντολής repeat. Η Ε αναρωτήθηκε κατά πόσο η επιτυχής γενίκευση υπολογισμού της περιμέτρου ως προς οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο στηρίχθηκε στην ονομασία του πολυγώνου. Πιθανή εισαγωγή νέας μεταβλητής, θα αναδείκνυε μια άλλη χρήση, αυτή του μετρητή του πλήθους των επαναλήψεων (repeat) της κίνησης του ρομπότ κατά «π». Γενικότερα η Ε προβληματίστηκε ως προς το εάν οι δυσκολίες των παιδιών είχαν να κάνουν με την ελλιπή κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου ή τη μη επαρκή γνώση των εντολών. Είναι σαφές ότι απαιτείται περισσότερη εμβάθυνση στο θέμα, αλλά η μικρή διδακτική παρέμβαση κατέστησε τη μετατόπιση της Ε ως προς τις πτυχές του TPACK εμφανή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bolam, R. (2000). Emerging policy trends: some implications for continuing professional development. *Journal of In-service Education, 26*(2), 267–280. https://doi.org/10.1080/13674580000200113

Bråting, K. & Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(2), 170-185. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1779012

Bush, S. & Karp, K. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behaviour*, *32*(3), 613–632. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002

ΙΕΠ (2021). https://iep.edu.gr/el/nea-programmata-spoudon-arxiki-selida

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*, 45-70. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_4

Mishra, P. & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Ο ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΟΧΑΙΩΝ ΑΤΥΧΗΜΑΤΩΝ

Κασκαντάμης Μιχάλης[1] , Μπογιατζή Κατερίνα[2]

[1] Ζάννειο Πρότυπο Γυμνάσιο , [2] ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

mijalis.atenas@gmail.com , kbogiatz@math.uoa.gr

Μέσα στο αυξανόμενο ενδιαφέρον των ερευνητών για μια Κριτική Μαθηματική Εκπαίδευση αναδεικνύονται τα οφέλη από την ενασχόληση των μαθητών με θέματα ενταγμένα σε ένα κοινωνικοεπιστημονικό πλαίσιο. Τέτοια θέματα, όπως τα τροχαία ατυχήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υποστηρίξουν τους μαθητές να αναπτύξουν κριτική σκέψη, να αναπτύξουν επιχειρήματα και να πάρουν αποφάσεις για μια ολοκληρωμένη γνώση και κοινωνικά υπεύθυνη δράση. Στο πρόβλημα που δόθηκε με τα τροχαία ατυχήματα οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να ακολουθήσουν τα στάδια του Στατιστικού κύκλου έρευνας που οδήγησε στη λήψη αποφάσεων βασισμένων σε δεδομένα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αξία της Στατιστικής στην εκπαίδευση έχει στόχο την προετοιμασία των μαθητών να γίνουν οι πολίτες στις σημερινές κοινωνίες που βασίζονται στην πληροφόρηση και προέρχεται από τις βασικές πρακτικές που συνθέτουν τη στατιστική διαδικασία: να θέσουν ερωτήσεις, να συλλέξουν σχετικά δεδομένα, να αναλύσουν τα δεδομένα στο πλαίσιο ενός προβλήματος (Franklin et al., 2007) και στη συνέχεια να πουν την ιστορία που «λένε» τα δεδομένα. Ο κύκλος της στατιστικής έρευνας (ΣΚΕ) είναι ένας χρήσιμος τρόπος για να ληφθεί υπόψη ο κύκλος των εμπλεκόμενων βημάτων κατά τη διεξαγωγή μιας στατιστικής έρευνας και περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια: πρόβλημα, σχέδιο, δεδομένα, ανάλυση και συμπέρασμα (Wild & Pfannkuch, 1999).

Το πρόβλημα: Φανταστείτε ότι ζείτε σε μια μικρή πόλη. Σε αυτήν την πόλη, οι αριθμοί των ανθρώπων που τραυματίστηκαν ή σκοτώθηκαν από ατυχήματα στο δρόμο έχουν αυξηθεί τα τελευταία τέσσερα χρόνια. Η δουλειά σας είναι να διερευνήσετε τι θα μπορούσε να γίνει. Έχετε προϋπολογισμό 100.000 £ για να δαπανήσετε για τη μείωση των θανάτων και των σοβαρών τραυματισμών στο δρόμο. Πρέπει να σχεδιάσετε τον πιο αποτελεσματικό τρόπο δαπανών των χρημάτων και να φτιάξετε μία πρόταση που θα την παρουσιάσετε στο δημοτικό συμβούλιο της πόλης. (Assessing the Case Studies (bowlandmaths.org.uk))

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στάδιο ΣΚΕ	Ενέργειες των μαθητών
Διατύπωση Προβλήματος:	Το πρόβλημα διατυπώνεται από το σενάριο , οι μαθητές μπορούν να το διαπιστώσουν στην μελέτη των δεδομένων και να το τεκμηριώσουν με αριθμητικά δεδομένα ή ποσοστά. «*Φανταστείτε ότι ζείτε σε μια μικρή πόλη. Σε αυτήν την πόλη, οι αριθμοί των ανθρώπων που τραυματίστηκαν ή σκοτώθηκαν από ατυχήματα στο δρόμο έχουν αυξηθεί τα τελευταία τέσσερα χρόνια»*
Σχεδιασμός:	Διερεύνηση της κατάστασης στην πόλη, ψάχνουν με την βοήθεια του λογισμικού αιτίες και σημεία που συμβαίνουν πολλά ατυχήματα, έχουν πλήρη ελευθερία να χειριστούν τα δεδομένα με όποιον τρόπο θέλουν, σχεδιάζουν την δική τους έρευνα. «*Η δουλειά σας είναι να διερευνήσετε τι θα μπορούσε να γίνει για αυτήν την κατάσταση»*
Δεδομένα :	Το σενάριο δίνει πάρα πολλά δεδομένα καθώς το πρόβλημα των τροχαίων ατυχημάτων είναι πολυπαραγοντικό. «*Βρείτε στον Χάρτη της πόλης το σημείο του ατυχήματος και προσπαθήστε να δώσετε ονομασία σε κάποιους δρόμους του χάρτη. Ελέγξτε στον χάρτη σας τι άλλο βρίσκεται εκεί κοντά»*
Ανάλυση:	Οι μαθητές αποφασίζουν ποια δεδομένα θα χρησιμοποιήσουν και με ποιον τρόπο για να αναπτύξουν την δική τους υπόθεση. «*Πού γίνονται τα περισσότερα ατυχήματα; Πότε συμβαίνουν; Σε ποιους συμβαίνουν τα σοβαρά ατυχήματα; Ποιες είναι οι αιτίες;»*
Συμπεράσματα:	Αφού έχουν περάσει από όλα τα προηγούμενα στάδια του κύκλου πρέπει να παρουσιάσουν τα συμπεράσματά τους και τις προτάσεις τους, τις αποφάσεις που πήραν για τα μέτρα που θεωρούν ότι πρέπει να υιοθετήσει το δημοτικό συμβούλιο.

Μετά από την διερεύνηση των μαθητών με το συγκεκριμένο σενάριο προκύπτουν πολύ ενδιαφέρουσες εργασίες και ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας των μαθητών και ενημέρωση της λήψης αποφάσεων από τα δεδομένα του προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). Guidelines and assessment for instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, *67*(3), 223-248. https://doi.org/10.1111/j.1751- 5823.1999.tb00442.x

Η ΓΙΑΓΙΑ, Ο ΚΟΥΜΠΑΡΑΣ ΚΑΙ Ο ΣΟΦΟΣ ΙΝΔΟΣ

Δούδης Δημήτρης

3ο Γενικό Λύκειο Αλεξανδρούπολης

doudis@gmail.com

Η παρούσα διδακτική πρόταση αφορά μια δίωρη διδασκαλία στις ακολουθίες της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στη μετάβαση από την Αριθμητική στην Γεωμετρική πρόοδο. Αφορμή ήταν το διδακτικό σενάριο που σχεδιάστηκε στο πλαίσιο της επιμόρφωσης στα Νέα Προγράμματα Σπουδών την Άνοιξη του 2023, ενώ υλοποιήθηκε ακολούθως και στην σχολική τάξη, συγκεκριμένα στο τμήμα Α1 της Α' Λυκείου του 3ου Γενικού Λυκείου Αλεξανδρούπολης κατά το σχολικό έτος 2023-2024. Η διδασκαλία αυτή ήταν η δεύτερη δειγματική στο πλαίσιο του θεσμού του συντονιστή Γνωστικού Πεδίου των μαθηματικών (ΠΕ03) και την παρακολούθησαν συνάδελφοι μαθηματικοί του σχολείου.

ΠΡΟΤΑΣΗ/ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ

Το ασφυκτικό χρονικό πλαίσιο στην Άλγεβρα της Α' Λυκείου, σε συνδυασμό με τη σπουδαιότητα του κεφαλαίου των συναρτήσεων που έπεται (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2023), έχει ως αποτέλεσμα το αντίστοιχο κεφάλαιο των ακολουθιών να διδάσκεται συνήθως εν τάχει και να αγνοείται μέρος του διδακτικού πλούτου που αυτές κρύβουν. Η παρούσα διδασκαλία έχει ως στόχους (α) την αλλαγή του τρόπου εργασίας των μαθητών από ατομικό σε ομαδοσυνεργατικό, (β) την πρόκληση ενδιαφέροντος με τη χρήση κατάλληλων έργων και την ενεργή συμμετοχή όσο το δυνατόν περισσότερων μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία, (γ) τη χρήση της αριθμητικής προόδου (Α.Π.) –που έχει διδαχθεί και χρησιμοποιηθεί σε ασκήσεις εμπέδωσης στο προηγούμενο μάθημα– σε πραγματικά προβλήματα, (δ) την αναζήτηση διαφορετικής κανονικότητας που θα οδηγήσει στη γεωμετρική πρόοδο (Γ.Π.), (ε) τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων των προόδων, την αλγεβρική –τύποι και σχέσεις–, την λεκτική –εκφώνηση προβλημάτων– και την γεωμετρική –απεικόνιση τιμών σε καρτεσιανό επίπεδο– και τέλος (στ) τη συνειδητοποίηση της διαφοράς τάξης μεγέθους στους όρους μιας Α.Π. και μιας Γ.Π. μέσω γραφημάτων.

Η σύνδεση προβλημάτων της πραγματικής ζωής που μοντελοποιούνται από κανονικότητες μετατρέπει την ενότητα αυτή σε ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στον εκπαιδευτικό για την ανάδειξη της σημασίας και αξίας των

μαθηματικών γενικότερα. Άλλωστε, τα μαθηματικά είναι παντού αν ξέρεις που να κοιτάξεις (Steven Strogatz, 2021). Παράλληλα, η ενασχόληση με κατάλληλα μαθηματικά έργα κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική, καθώς μπορεί να επηρεάσει όχι μόνο το μαθηματικό περιεχόμενο που μαθαίνεται, αλλά και το πώς οι μαθητές βιώνουν τα μαθηματικά (Henningsen & Stein, 1997. Pepin, 2009).

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Στους 27 μαθητές του Α1 τμήματος δόθηκε ένα φύλλο εργασίας με κορμό δύο μαθηματικά έργα: «*η γιαγιά και ο κουμπαράς*» και «*ο Ινδός σοφός και ο βασιλιάς*», και εργάστηκαν σε ομάδες των τεσσάρων. Ο εκπαιδευτικός, στην παρούσα προσέγγιση, κατά τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας, αλλάζει ρόλο· παύει να είναι η αυθεντία και μετατρέπεται σε συνεργάτη των μαθητών, καθώς περιφέρεται μεταξύ των ομάδων, διευκολύνοντας και ενθαρρύνοντας τους μαθητές, εάν και όταν του ζητηθεί (Κυνηγός, 2010). Με αφορμή το πρώτο έργο, οι περισσότερες ομάδες αναγνώρισαν στο πρόβλημα μια Α.Π. και τοποθέτησαν τις τιμές που υπολόγισαν στην πορεία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ακόμη, στην παρούσα πρόταση, δίνεται έμφαση στη διαφοροποιημένη διδασκαλία, καθώς το ανομοιογενές επίπεδο των μαθητών καλύπτεται μέσα από επιπλέον δραστηριότητα μεγαλύτερης δυσκολίας που απαιτεί τον τύπο του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας Α.Π., με την οποία κατάφεραν να ασχοληθούν ορισμένες μόνο ομάδες. Στο δεύτερο έργο, οι μαθητές αντιμετώπισαν παρόμοια ερωτήματα αλλά σε ένα ίσως πιο ενδιαφέρον πλαίσιο και κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν ένα ακόμα προβλήματος μέσω μοντελοποίησης, αλλά με μια κανονικότητα που δεν είχαν έως τώρα συναντήσει, την γεωμετρική πρόοδο. Ήταν μικρότερος ο αριθμός των ομάδων που οδηγήθηκαν στον τύπο του ν-οστού όρου της Γ.Π., αλλά οι περισσότεροι παρατήρησαν την πολύ πιο απότομη/μεγάλη αύξηση των μεγεθών. Σε αυτό τους βοήθησε η γραφική αναπαράσταση. Η συζήτηση στην ολομέλεια που ακολούθησε κατά τη διάρκεια της δεύτερης διδακτικής ώρας, είχε εξαιρετικό ενδιαφέρον, καθώς εκεί οι ομάδες, επιλέγοντας κάθε φορά εκπρόσωπο, παρουσίασαν τα ευρήματά καθώς και τα συμπεράσματά τους, ενώ στο τέλος, ο εκπαιδευτικός βοήθησε τους μαθητές να διατυπώσουν τον ορισμό της Γ.Π., τα βασικά χαρακτηριστικά της, τις ομοιότητες και τις διαφορές από την Α.Π.. Η αποτελεσματικότητα της διδακτικής αυτής πρότασης αποτιμήθηκε μέσω διαμορφωτικής αξιολόγησης των μαθητών η οποία περιλάμβανε το βαθμό συμμετοχής στις ομάδες εργασίας, το ρόλο τους στην ολομέλεια καθώς και ένα φύλλο ατομικής αξιολόγησης που δόθηκε στο τέλος.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η αλλαγή του τρόπου εργασίας των μαθητών, από ατομικό σε ομαδοσυνεργατικό, σε συνδυασμό με τη χρήση κατάλληλων μαθηματικών έργων προς διαπραγμάτευση, ευνόησε φανερά τόσο τη διάθεσή τους όσο και το βαθμό συμμετοχής τους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις ευνοούν την πολλαπλή νοηματοδότηση από τον κάθε μαθητή και συνεπώς την σε βάθος κατάκτηση των νέων εννοιών. Τέλος, η μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων με τη βοήθεια της Αριθμητικής και Γεωμετρικής Προόδου (Πρόγραμμα σπουδών, 2021), απαντά στο συχνό ερώτημα των μαθητών «*πού μας χρειάζονται τα μαθηματικά στην πραγματική ζωή;*» και συμβάλει στην αλλαγή στάσης τους απέναντι στα μαθηματικά. Η εφαρμογή της διδακτικής αυτής πρότασης στην τάξη ανέδειξε τα παραπάνω θετικά στοιχεία της, ενώ η χρήση και τρίτης διδακτικής ώρας κρίνεται ιδιαίτερα επωφελής, αν και πρακτικά είναι αρκετά δύσκολο να βρεθεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., & Δαμιανού, Χ. (2023). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Κυνηγός, Χ. (Επιμ.) (2010). Υλικό για την Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης. Τεύχος 4, Κλάδος ΠΕ03 (2η έκ.). Πάτρα: ΙΤΥ

Πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Λυκείου. (2021). Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 524-549.

Pepin, B. (2009). 'Negativity' and learner identity: Classroom tasks, the 'minus sign' and classroom environments in English, French and German classrooms. In J. Maass & W. Schloeglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education—New research results* (pp. 179–196). Rotterdam: Sense Publishers.

Steven Strogatz. (2021). Η ΧΑΡΑ ΤΟΥ Χ, ΜΙΑ ΞΕΝΑΓΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΑΠΟ ΤΟ ΕΝΑ ΜΕΧΡΙ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ. Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J., & da Ponte, J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program. International Electronic *Journal of Mathematics Education*, 15 (2)

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΣΤ΄ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΕΣΤΡΑΜΜΕΝΗΣ ΤΑΞΗΣ

Μπούτση Δήμητρα

Εκπαιδευτικός ΠΕ70

dboutsi.did@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αυξανόμενη τάση ανάπτυξης της τεχνολογίας σε πολλούς τομείς της καθημερινότητας του ανθρώπου, δεν θα μπορούσε να μην επηρεάσει την εκπαίδευση. Όλο και περισσότεροι μαθητές ασχολούνται με την τεχνολογία, παίζοντας διαδραστικά παιχνίδια με τους φίλους τους από το σπίτι, κουβεντιάζοντας σε μέσα κοινωνικής δικτύωσης (Μουζάκης, κ.α., 2017) ή ακόμα και συμμετέχοντας στην εκπαιδευτική διαδικασία μέσω της σύγχρονης ή ασύγχρονης εξ αποστάσεως εκπαίδευση, όταν αυτό απαιτείται.

Με στόχο τη δημιουργία ενός περιβάλλοντος μάθησης που θα προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα γεφυρώσει την εξέλιξη της τεχνολογίας με την τυπική εκπαιδευτική διαδικασία, ακολουθήθηκε το διδακτικό μοντέλο της ανεστραμμένης τάξης για τη διδασκαλία των Εξισώσεων σε μαθητές ΣΤ’ τάξης δημοτικού.

Η περίπτωση της ανεστραμμένης τάξης αποτελεί ένα εναλλακτικό διδακτικό μοντέλο που εντάσσεται στη μαθησιακή προσέγγιση της «μεικτής μάθησης», με απώτερο σκοπό να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών, μιας και ο τρόπος που αλληλεπιδρούν με τον κόσμο γύρω τους πολλές φορές απέχει κατά πολύ από τον τρόπο με τον οποίο συμμετέχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η προσέγγιση της «μεικτής μάθησης» χωρίζει την ενασχόληση των μαθητών με το εκάστοτε διδακτικό αντικείμενο σε δύο μέρη: τη θεωρητική επεξεργασία της ύλης/ του περιεχομένου μέσω κυρίως του διαδικτύου, σε χρόνο που επιλέγουν οι ίδιοι μαθητές και στη δια ζώσης διαπραγμάτευση της ύλης μέσω δραστηριοτήτων στην τάξη (Μακροδήμος, Παπαδάκης, & Κουτσούμπα, 2017).

Σύμφωνα με έρευνες, η μέθοδος της ανεστραμμένης τάξης στη διδασκαλία των Μαθηματικών φαίνεται να έχει αρκετή απήχηση στους μαθητές, μιας και αποδέχονται περισσότερο την πρακτική παρακολούθησης μέρους της ύλης στο σπίτι, κυρίως μέσω ψηφιακών μαθημάτων, και την ανάπτυξη δραστηριοτήτων με διερευνητικό και εποικοδομητικό χαρακτήρα στην τάξη (Μουζάκης, κ.α, 2017). Η παρακολούθηση ψηφιακών μαθημάτων και η προτροπή προς τους μαθητές να αναζητήσουν από διάφορες πηγές

(σχολικό εγχειρίδιο, διαδίκτυο) πληροφορίες και δεδομένα που αφορούν στη διδασκόμενη ενότητα–τους βοηθούν να αποκτήσουν μια πρώτη εμπειρία με το γνωστικό αντικείμενο, ενεργοποιούν το ενδιαφέρον τους, κινητοποιούν τα γνωστικά τους σχήματα και δημιουργούν τη βάση για την παραγωγή συλλογισμών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στην τάξη των Μαθηματικών (Clark, 2015). Επιπρόσθετα, η ενεργή εμπλοκή των μαθητών σε διερευνητικές δραστηριότητες, που καλλιεργούν τη συνεργασία, την αυτονομία, την αυτοπεποίθηση και το μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών, προωθείται μέσω της αναστροφής των διδακτικών δραστηριοτήτων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Η παρούσα διδακτική πρόταση διερευνά τη συμβολή της μεθόδου της ανεστραμμένης τάξης στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών με τα Μαθηματικά ειδικά στην κρίσιμη φάση της μετάβασής τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Ως μελέτη περίπτωσης επελέγη η ενότητα «Εξισώσεις» από το εγχειρίδιο της Στ΄ τάξης όπου οι μαθητές εισάγονται με εμφατικό τρόπο στη στοιχειώδη άλγεβρα, με την εισαγωγή του άγνωστου όρου, το σχηματισμό εξίσωσης από ένα λεκτικό πρόβλημα και την επίλυση εξισώσεων. Επιπλέον, ενθαρρύνονται να αναγνωρίσουν την αξία της Άλγεβρας και να μυηθούν έγκαιρα στην αλγεβρική σκέψη προκειμένου να διευκολυνθούν κατά τη φοίτησή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, μέσω της έγκαιρης και πρόωρης έκθεσής τους σε στοιχειώδεις αλγεβρικές έννοιες (Blanton, et al. 2017).

Στόχος της διδακτικής παρέμβασης είναι να ανιχνεύσει τα ενδεχόμενα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικά οφέλη που θα αποκομίσουν οι τελειόφοιτοι μαθητές του Δημοτικού Σχολείου (α) ως προς την κατανόηση μιας κρίσιμης ενότητας των Μαθηματικών για τη μετάβασή τους από τη μαθηματική εκπαίδευση του Δημοτικού Σχολείου σε αυτήν του Γυμνασίου και (β) ως προς την ενίσχυση της ενεργής συμμετοχής και της αυτονομίας τους στη μαθησιακή διαδικασία. Έλαβε χώρα σε Δημοτικό Σχολείο ημιαστικής περιοχής του Ν. Έβρου. Διδάχθηκαν πέντε κεφάλαια που αποτελούσαν τη διδακτέα ύλη της ενότητας των Εξισώσεων και συμμετείχαν 13 μαθητές, ενός τμήματος της ΣΤ’ τάξης του σχολείου.

Η υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης χωρίστηκε σε δυο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλάμβανε τις οδηγίες που δόθηκαν σε ένα πρώτο επίπεδο στους μαθητές για τη μελέτη-προετοιμασία του κάθε κεφαλαίου στο σπίτι και σε δεύτερο επίπεδο στους γονείς τους αναφορικά με το ρόλο που ήταν επιθυμητό να έχουν καθ’ όλη τη διάρκεια υλοποίησης της διδακτικής παρέμβασης. Το δεύτερο μέρος αφορούσε την οργάνωση της εργασίας των μαθητών στην τάξη.

Ως προς το πρώτο μέρος (μελέτη- προετοιμασία στο σπίτι), οι μαθητές παροτρύνονταν να μελετήσουν τη σχετική ενότητα από το σχολικό εγχειρίδιο και από επιλεγμένη εκπαιδευτική ιστοσελίδα (*https://anoixtosxoleio.weebly.com/*) καθώς και να παρακολουθήσουν μια σειρά βιντεομαθημάτων στην παραπάνω ιστοσελίδα. Έπειτα, καλούνταν να επιλύσουν κάποιες ενδεικτικές ασκήσεις-προβλήματα ή του Τετραδίου Εργασιών των Μαθηματικών ή από κατάλληλα διαμορφωμένα Φύλλα Εργασίας της εκπαιδευτικού της τάξης που συνδέονταν με τους στόχους κάθε κεφαλαίου. Η λύση των ασκήσεων ή προβλημάτων στο σπίτι γίνονταν με την προτροπή να συμβουλεύονται όποια πηγή θεωρούσαν ότι μπορεί να τους βοηθήσει, με την κατάλληλη υποστήριξη (συζήτηση-καθοδήγηση μελέτης) από τους γονείς τους, εφόσον το έκριναν απαραίτητο.

Ως προς το δεύτερο μέρος της διδακτικής παρέμβασης (εργασία στην τάξη) ακολουθήθηκε η μέθοδος της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Η σύνθεση των ομάδων έγινε με κριτήριο να είναι ανομοιογενείς ως προς το μαθησιακό επίπεδο των μελών τους. Στην αρχή της διδακτικής ώρας, η ολομέλεια της τάξης μαζί με την εκπαιδευτικό έλεγχαν, συζητούσαν και διόρθωναν τις ασκήσεις ή τα προβλήματα που είχαν ανατεθεί για το σπίτι. Έπειτα, οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες καλούνταν να επεξεργαστούν μια σειρά έργων στην τάξη, η επιλογή των οποίων έγινε κυρίως με κριτήριο το επίπεδο πρόκλησης του ενδιαφέροντος των μαθητών. Στο τέλος της διδακτικής ώρας, οι μαθητές ανακοίνωναν τα αποτελέσματα της δουλειάς τους στην ολομέλεια της τάξης και ακολουθούσε συζήτηση.

Μερικά από τα έργα που δόθηκαν επιλέχθηκαν από το εκπαιδευτικό υλικό SMILE *(Secondary Mathematics Independent Learning Environment)*, το οποίο έχει σχεδιαστεί για να καλλιεργήσει την αυτονομία και την αυτοπεποίθηση των μαθητών στα μαθηματικά δημιουργώντας ένα ελκυστικό μαθησιακό πλαίσιο στα σχολικά μαθηματικά, δίνοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση της επιτυχίας στο μαθητή (Σακονίδης, 2007). Επιπρόσθετα, επιλέχθηκαν έργα από θέματα εξετάσεων για τα Πρότυπα Γυμνάσια, από το διαγωνισμό μαθητών του Διεθνή Οργανισμού PISA αλλά και από την εθνική PISA. Το σύνολο των έργων που επεξεργάστηκαν οι μαθητές στην τάξη αποτέλεσε τη δεξαμενή για την αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης συνδυαστικά με το ημερολόγιο της εκπαιδευτικού, τις «Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο» του βιβλίου των Μαθηματικών και τη συμπλήρωση Κριτηρίου Αξιολόγησης που προτείνεται από το Βιβλίο Δασκάλου των Μαθηματικών Στ’ τάξης και δόθηκε στους μαθητές στο τέλος της ενότητας των Εξισώσεων.

Ο ρόλος της εκπαιδευτικού στην τάξη ήταν περισσότερο υποστηρικτικός-καθοδηγητικός, καθώς παρακολουθούσε και συντόνιζε τη δραστηριότητα των μαθητών στο πλαίσιο του διαθέσιμου χρόνου. Επίσης, καθοδηγούσε

τους μαθητές ως προς την αναζήτηση κατάλληλης πηγής (σχολικό εγχειρίδιο, Διαδίκτυο) προκειμένου να ανατρέξουν και να λύσουν ενδεχόμενες απορίες που προέκυπταν κατά την επεξεργασία των έργων στην τάξη. Τέλος, συντόνιζε τη διαλογική συζήτηση των αποτελεσμάτων των έργων με την ολομέλεια της τάξης, στο πλαίσιο της ανατροφοδότησης των μαθητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε γνωστικό επίπεδο, τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης με τη μέθοδο της ανεστραμμένης τάξης για τη διδασκαλία των εξισώσεων, όπως προκύπτουν από την ανάλυση δεδομένων του ημερολογίου της εκπαιδευτικού και του Κριτηρίου Αξιολόγησης, έδειξαν ότι οι μισοί περίπου μαθητές δυσκολεύτηκαν στη μετατροπή των λεκτικών δεδομένων ενός προβλήματος σε ισότητα με έναν άγνωστο όρο, διαπίστωση που ισχυροποιείται από τη βιβλιογραφία (Κλιάπης Π. κ.α, 2005) για τη διδασκαλία εξισώσεων και με την παραδοσιακή μέθοδο, ενώ οι περισσότεροι μαθητές ανταποκρίθηκαν με ικανοποιητικό τρόπο στην επίλυση εξισώσεων. Ωστόσο, σε κοινωνικο-πολιτισμικό επίπεδο, η διαπραγμάτευση εναλλακτικών έργων σε ομάδες οδήγησε τους περισσότερους μαθητές να συνεργαστούν εποικοδομητικά, βοηθώντας ο ένας τον άλλο και ανταλλάσσοντας ιδέες προκειμένου να κατανοήσουν τις οδηγίες των έργων, αναλαμβάνοντας από κοινού την ευθύνη επίλυσής τους. Επιπρόσθετα, η μαθησιακή ανομοιογένεια των ομάδων συνέβαλε στην ενεργό συμμετοχή μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, καθώς ανέλαβαν ρόλους (π.χ. παρουσιαστή, γραμματέα) που ολοκλήρωσαν με επιτυχία, απολαμβάνοντας την αποδοχή των συμμαθητών τους, γεγονός που συνέβαλε στην τόνωση της αυτοπεποίθησής τους.

Συμπερασματικά, η εφαρμογή της μεθόδου της ανεστραμμένης τάξης μετάθεσε σε ικανοποιητικό βαθμό την ευθύνη μάθησης στους μαθητές, ενεργοποίησε το ενδιαφέρον τους και ενίσχυσε την αυτοπεποίθηση και την αυτονομία τους, οδηγώντας τους σε ενεργή εμπλοκή στη μαθησιακή διαδικασία στα Μαθηματικά, εντός και εκτός τάξης. Επιπρόσθετα, η ομαδική εργασία και η ανταλλαγή εμπειριών με βάση την ατομική μελέτη εκτός της τάξης συνέβαλε στην ανάπτυξη δεξιοτήτων συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών. Από τη μεριά της εκπαιδευτικού, η εναλλαγή του ρόλου της από παρουσιαστή πληροφοριών σε διευκολυντή της μαθησιακής διαδικασίας μετέθεσε το επίκεντρο της μαθησιακής διαδικασίας στους μαθητές. Συνεπώς, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, ο σχεδιασμός και η υλοποίηση μιας διδασκαλίας με τη μέθοδο της ανεστραμμένης τάξης μπορεί να συμβάλει στην καλλιέργεια μιας θετικής αντιμετώπισης των Μαθηματικών από τους μαθητές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., & Stylianou, D. (2017). Implementing a framework for early algebra. In Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5to 12-Year-Olds. σσ. 27-49. Ανάκτηση από https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/object/2887341/file.pdf

Clark, K. (2015). The effects of the flipped model of instruction on student engagement and performance in the secondary mathematics classroom. *Journal of Educators Online*, *12*(1), σσ. 91-95

Μουζάκης, Χ., Κουτρουμάνος , Γ., Ζερβός, Γ., Σουδίας, Ι., & Κατσιαγιάννη, Β. (2017, November). Οι εμπειρίες από την αξιοποίηση της Ανεστραμμένης τάξης για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. *9th International Conference in Open & Distance Learning*. Ανάκτηση από https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/openedu/article/view/1031/1319

Κλιάπης, Π., Κασσώτη, Ο., & Οικονόμου, Θ. (2005). Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού, Βιβλίο Εκπαιδευτικού, *Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων*, Αθήνα

Μακροδήμος, Ν., Παπαδάκης, Σ., & Κουτσούμπα, Μ. (2017). "Flipped classroom" in primary schools: a Greek case, Ανεστραμμένη τάξη σε ελληνικό δημοτικό σχολείο. *Ελληνικό Δίκτυο Ανοικτής & εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση. 9*, σσ. 179-187. Αθήνα: Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο. doi: 10.12681/icodl.1031

Σακονίδης, Χ. (2004). Μαθηματικά σε περιβάλλον διαμορφωμένο για αυτόνομη μάθηση -*S.M.I.L.E.*, Αλεξανδρούπολη.

Ομάδες Ανταλλαγών

Η ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΟ ΜΕΛΛΟΝ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ STEM/STEAM/STEAME ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ – ΑΛΛΑΓΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Γρηγόρης Μακρίδης[1], Ελένη Παπαγεωργίου,[2]

Θωμάς Οικονόμου[3], Ελπινίκη Μαργαρίτη[4]

[1] University of National Education Commission, Κρακοβία, Πολωνία, Makrides.g@eaecnet.com

[2] Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, papageorgiou.e@cyearn.pi.ac.cy

[3] Εκπαιδευτήρια ΔΟΥΚΑΣ, t.economou@doukas.gr

[4] Εκπαιδευτήρια ΔΟΥΚΑΣ, e.margariti@doukas.gr

Ο Ευρωπαϊκός Χώρος Σχολικής και Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και Έρευνας διέρχεται μια διαδικασία μετασχηματισμού, που θα ωθήσει την Ευρώπη σε ηγετική θέση στην πορεία προς μια πράσινη ψηφιοποίηση των κοινωνιών. Το περιβάλλον μάθησης, συμπεριλαμβανομένων των μεθόδων και των χώρων, αναμένεται να αλλάξει δραστικά. Με τη γνώση των σημερινών τεχνολογιών μπορούμε μόνο να φανταστούμε το μέλλον. Όμως, η Εκπαίδευση STEAME καθιστά τον δρόμο προς τα εμπρός σχεδόν ξεκάθαρο. Στη συζήτηση αυτή θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε τη μάθηση στο μέλλον στη σχολική και τριτοβάθμια εκπαίδευση, καθώς η εξέλιξή τους θα πρέπει να αναπτυχθεί παράλληλα.

Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ STEAME ΩΣ ΦΟΡΕΑΣ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ

Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην Εκπαίδευση STEAME (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics, Entrepreneurship) ως εκπαίδευσης πεδίου, που αποτελεί το κλειδί για την απόκτηση ανταγωνιστικού πλεονεκτήματος στην παγκόσμια σκηνή, με αποτέλεσμα την παγκόσμια αλλαγή στα εκπαιδευτικά παραδείγματα που τονίζουν τη σημασία του STEAME (Kayan-Fadlelmula κ.ά., 2022). Η Εκπαίδευση STEAME διαδραματίζει σημαντικό καθοδηγητικό ρόλο στην αλλαγή του εκπαιδευτικού παραδείγματος, καθώς προσανατολίζεται στην επίλυση προβλημάτων πραγματικού κόσμου σε διάφορους τομείς, παρέχοντας δυνατότητες και ευκαιρίες στους μαθητές και στις μαθήτριες να σκέφτονται κριτικά και να βρίσκουν λύσεις σε καταστάσεις και ρεαλιστικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι σύγχρονες κοινωνίες (Martín-Páez κ.ά., 2019· Struyf κ.ά., 2019).

Η Εκπαίδευση STEAME, ως οδηγός στην αλλαγή του εκπαιδευτικού παραδείγματος, συμβάλλει στην επίτευξη των σκοπών των εκπαιδευτικών συστημάτων που θέτουν ως προτεραιότητα την προετοιμασία των νέων για τον χώρο εργασίας μέσω δυναμικών και προκλητικών περιβαλλόντων, τα οποία χαρακτηρίζονται από εξελιγμένες τεχνολογίες, κοινωνική ποικιλομορφία και μια παγκοσμιοποιημένη και ανταγωνιστική οικονομία (Kayan-Fadlelmula κ.ά., 2022). Συγκεκριμένα, η Εκπαίδευση STEAME διαμορφώνει το πλαίσιο μάθησης, ώστε οι εκπαιδευόμενοι και οι εκπαιδευόμενες να μπορέσουν να αποκτήσουν τις σημαντικές δεξιότητες που απαιτούνται για τη διαχείριση ανταγωνιστικών παγκόσμιων αγορών εργασίας, συμπεριλαμβανομένων των ακαδημαϊκών, τεχνικών και άλλων δεξιοτήτων (McGunagle & Zizka, 2020). Επίσης, αποσκοπεί στην ανάπτυξη θετικής αντίληψης των μαθητών και των μαθητριών για επαγγέλματα που σχετίζονται με τα STEM (Chan κ.ά., 2019).

Το κλειδί της επιτυχίας των κρατών, που απολαμβάνουν υψηλά διεθνή αποτελέσματα σε διαγωνισμούς και έχουν δυνατές ατζέντες STEAME, βρίσκεται στα καλά σχεδιασμένα Προγράμματα Σπουδών τους, τα οποία επικεντρώνονται στις δεξιότητες του 21ου αιώνα, συμπεριλαμβανομένων των διαδικασιών διερεύνησης και επίλυσης προβλημάτων, της κριτικής σκέψης, της δημιουργικότητας και της καινοτομίας. Επίσης, τα Προγράμματα αυτά εστιάζουν στην εννοιολογική κατανόηση της γνώσης περιεχομένου των διάφορων γνωστικών αντικειμένων και στη διεπιστημονική και διαθεματική της σύνδεσης (English & Gainsburg, 2016), καθώς επίσης και στην ανάπτυξη σύνθετων τεχνολογικών και μηχανικών δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη συμμετοχή σε μια οικονομία βασισμένη στη γνώση (Van Laar κ.ά., 2017).

Μια αναδυόμενη τάση στην Εκπαίδευση STEM/STEAM/STEAME αποτελούν και οι εφαρμογές της τεχνητής νοημοσύνης, καθώς η αξιοποίηση της τεχνολογίας AI συμβάλλει και προωθεί τη βελτίωση της διδασκαλίας και της ποιότητας μάθησης. Συγκεκριμένα, οι τεχνολογίες AI εφαρμόζονται για να μετασχηματίσουν και να προωθήσουν τον σχεδιασμό της διδασκαλίας και της μάθησης, τη διαδικασία εφαρμογής της, καθώς επίσης και την αξιολόγησή της (Chen et al., 2020). Η ανάπτυξη των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών, ώστε να ενσωματώνουν εφαρμογές της τεχνητής νοημοσύνης στην διδασκαλία τους, αποτελεί μια συνιστώσα ενός προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης για μια αποτελεσματική εκπαιδευτική αλλαγή.

Επιπρόσθετα, όπως καταδεικνύουν ερευνητικά δεδομένα, η ανάγκη των εκπαιδευτικών για κατάλληλη κατάρτιση σχετικά με την Εκπαίδευση STEAME και την αποτελεσματική εφαρμογή της βασίζεται, μεταξύ άλλων, στην επαρκή επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στον σχεδιασμό και στην αποτελεσματική διδασκαλία Προγραμμάτων Σπουδών που έχουν

αναπτυχθεί στη βάση της φιλοσοφίας της Εκπαίδευσης STEM/STEAM/STEAME και ιδιαίτερα σε θέματα που αφορούν στις μεθόδους διδασκαλίας και αξιολόγησης (Aldahmash κ.ά., 2019). Ως εκ τούτου, ο σχεδιασμός προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης θεωρείται ως ένα ουσιώδες συστατικό στη διαδικασία της αλλαγής του παραδείγματος.

Στο πλαίσιο της συζήτησης θα παρουσιαστούν και θα αναλυθούν τα αποτελέσματα από διάφορα έργα χρηματοδοτούμενα από την ΕΕ, συμπεριλαμβανομένων των έργων STEAME (https://steame.eu/), STEAME-Hybrid (https://steame-hybrid.eu/), ONLIFE (https://onlife.uken.krakow.pl/), STEAME-Students, BYOD-Learning (https://byod-learning.eu/), FACILIATET-AI (https://facilitate-ai.eu/), STEAME Teacher Facilitators Academy (https://steame-academy.eu/) και άλλων. Ιδιαίτερα θα παρουσιαστούν και θα συζητηθούν τα εκπαιδευτικά προγράμματα, τα εργαλεία και οι λύσεις που προτείνονται από πολλές Ευρωπαϊκές χώρες, για να καταστεί δυνατή η αλλαγή του παραδείγματος. Οι συμμετέχοντες και οι συμμετέχουσες στο εργαστήριο θα αλληλοεπιδράσουν σε μια σειρά δραστηριοτήτων που αφορούν στις παιδαγωγικές προσεγγίσεις και τα μαθησιακά περιβάλλοντα που συμπεριλαμβάνονται στην Εκπαίδευση STEAME, μέσω μιας κριτικής θεώρησης Σχεδίων Μάθησης και Δημιουργικότητας και των εφαρμογών τους, επιδιώκοντας, αφενός, αναστοχασμό στις υφιστάμενες διδακτικές πρακτικές και, αφετέρου, την ανάδειξη ιδεών για μετασχηματισμό αυτών προς μια αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση, ώστε να καταστεί δυνατή η αλλαγή του παραδείγματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aldahmash, A. H., Alamri, N. M., & Aljallal, M. A. (2019). Saudi Arabian science and mathematics teachers' attitudes toward integrating STEM in teaching before and after participating in a professional development program. *Cogent Education*, *6*(1), 1580852.

Chan, C. K. Y., Yeung, N. C. J., Kutnick, P., & Chan, R. Y. Y. (2019). Students' perceptions of engineers: dimensionality and influences on career aspiration in engineering. *International Journal of Technology and Design Education*, *29*, 421-439.

Chen, L., Chen, P., & Lin, Z. (2020). Artificial intelligence in education: A review. *IEEE Access*, *8*, 75264-75278.

English, L. D., & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), Handbook of international research in mathematics education (3rd ed., pp. 313–335). New York: Taylor & Francis.

Kayan-Fadlelmula, F., Sellami, A., Abdelkader, N. *et al*. A systematic review of STEM education research in the GCC countries: trends, gaps and barriers. *IJ STEM Ed* 9, 2 (2022). https://doi.org/10.1186/s40594-021-00319-7.

Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F. J., & Vílchez-González, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, *103*(4), 799-822.

McGunagle, D., & Zizka, L. (2020). Employability skills for 21st-century STEM students: the employers' perspective. *Higher education, skills and work-based learning*, *10*(3), 591-606.

Struyf, A., De Loof, H., Boeve-de Pauw, J., & Van Petegem, P. (2019). Students' engagement in different STEM learning environments: integrated STEM education as promising practice? *International Journal of Science Education*, *41*(10), 1387-1407.

Van Laar, E., Van Deursen, A. J., Van Dijk, J. A., & De Haan, J. (2017). The relation between 21st-century skills and digital skills: A systematic literature review. *Computers in human behavior*, *72*, 577-588.

Xu, W., & Ouyang, F. (2022). The application of AI technologies in STEM education: a systematic review from 2011 to 2021. *International Journal of STEM Education*, *9*(1), 1-20

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ/ΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Συντονίστριες: Ειρήνη Μπιζά[1] και Έλενα Ναρδή[1]
Συν-διοργανωτές/ώτριες: Μαρία Καδιανάκη[2], Δημήτρης Καλυκάκης[3], Ιωάννης Κανέλλος[1,3], Νικόλαος Καρατάσος[2] και Ειρήνη Περυσινάκη[3]
[1]University of East Anglia, [2]Διεύθυνση Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Ηρακλείου, [3]Διεύθυνση Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Ηρακλείου

i.biza@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk, mkadianaki1@gmail.com, kalikakis1@sch.gr, i.kanellos@uea.ac.uk, nikaratasos@gmail.com, iriniper@sch.gr

Η αφόρμηση της προτεινόμενης ομάδας ανταλλαγών έρχεται από το Επιμορφωτικό Πιλοτικό Πρόγραμμα («ΕΠΠ» για συντομία) με τίτλο «Μαθηματικές διαδρομές μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο» που πραγματοποιείται από τον Νοέμβριο του 2023 μέχρι τον Απρίλιο του 2024 στο Ηράκλειο της Κρήτης. Το ΕΠΠ απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν Μαθηματικά στην ΣΤ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου αντίστοιχα και έχει ως αντικείμενο τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών. Η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο πρόγραμμα περιλαμβάνει επτά δια ζώσης τετράωρες συναντήσεις με μορφή εργαστηρίων, σχεδιασμό και εφαρμογή δραστηριοτήτων από τους εκπαιδευτικούς στην τάξη, αναστοχασμό και ανατροφοδότηση. Ο συνολικός χρόνος παρακολούθησης είναι 50 ώρες (28 ώρες δια ζώσης και 22 για προετοιμασία). Ο σχεδιασμός και ο συντονισμός των συναντήσεων γίνεται από τέσσερεις συμβούλους εκπαίδευσης της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του Ηρακλείου Κρήτης σε συνεργασία με την ομάδα MathTASK του University of East Anglia (UEA).

Θέματα μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο έχουν τεθεί στη βιβλιογραφία επανειλημμένα (π.χ. Kaur, McLoughlin & Grimes, 2022· Ναρδή, Μπαμπίλη, Μπούφη, Στουραΐτης & Τριανταφυλλίδης, 2017). Η έμφαση σε αυτά τα θέματα είναι συχνά στο μαθηματικό περιεχόμενο (π.χ. από την Αριθμητική στην Άλγεβρα) και στις μαθηματικές πρακτικές (π.χ. από τις δοκιμές και την παραγωγική επιχειρηματολογία στην επαγωγική επιχειρηματολογία και την απόδειξη). Επίσης, η έρευνα αναδεικνύει θέματα σχετικά με την αλλαγή του μαθησιακού περιβάλλοντος καθώς και

θέματα αντιλήψεων των εκπαιδευτικών (Κατσομήτρος & Τάτσης, 2022· Kaur et al., 2022· Sdrolias & Triandafillidis, 2008). Η σύγχρονη εκπαιδευτική πολιτική επιδιώκει την εξομάλυνση του περάσματος από τη μία βαθμίδα στην άλλη (Psycharis et al., 2020). Ειδικότερα στην περίπτωση των μαθηματικών, έμφαση δίνεται στη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών (π.χ. σύνδεση της Αριθμητικής με την Άλγεβρα). Συχνά οι επιμορφωτικές δράσεις για εκπαιδευτικούς σε θέματα μετάβασης αφορούν μεμονωμένα σε δασκάλους, οι οποίοι προετοιμάζουν τους μαθητές για το Γυμνάσιο, ή μεμονωμένα σε καθηγητές, οι οποίοι υποδέχονται τους μαθητές από το Δημοτικό. Δράσεις που απευθύνονται σε δασκάλους και καθηγητές μαζί είναι αξιοσημείωτες για τα θετικά τους αποτελέσματα (Psycharis et al., 2020). Μία τέτοια δράση, η οποία απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς και των δύο βαθμίδων, είναι και το ΕΠΠ που ενέπνευσε αυτή την ομάδα ανταλλαγών.

Το ΕΠΠ σχεδιάστηκε με την παραδοχή ότι δάσκαλοι και καθηγητές ανήκουν σε διαφορετικές *κοινότητες πρακτικών* (*community of practice*) το οποίο σημαίνει ότι θέτουν διαφορετικούς στόχους, έχουν διαφορετικές προτεραιότητες και χρησιμοποιούν διαφορετικά εργαλεία στον σχεδιασμό και στην πραγμάτωση των μαθημάτων τους (Wenger, 1998). Ο λόγος των εκπαιδευτικών, παιδαγωγικός και μαθηματικός, τεκμηριώνεται και ακολουθεί με συνέπεια τη βαθμίδα εντός της οποίας δρουν. Ως συνέπεια, ο λόγος στο Δημοτικό διαφέρει από αυτόν του Γυμνασίου. Όταν οι εκπαιδευτικοί της μίας βαθμίδας έχουν την ευκαιρία να αλληλοεπιδράσουν με την άλλη βαθμίδα, διαφορές και αντιφάσεις στον λόγο έχουν την ευκαιρία να αναδειχθούν και ενδεχομένως να επιλυθούν. Επιπλέον πρακτικές και των δύο βαθμίδων μπορούν να εμπλουτιστούν, να αλληλοσυμπληρωθούν και κυρίως να γίνουν αμοιβαία κατανοητές. Σε αυτό το πνεύμα, η ομάδα των εκπαιδευτικών που συμμετέχουν στο ΕΠΠ είναι και από τις δύο βαθμίδες (18 Πρωτοβάθμια και 17 Δευτεροβάθμια). Οι συναντήσεις είναι σχεδιασμένες έτσι ώστε οι εκπαιδευτικοί να έχουν την ευκαιρία να συζητούν διδακτικές καταστάσεις σχετικές με το μαθηματικό περιεχόμενο του μαθήματος, να σχεδιάζουν δραστηριότητες για την τάξη τους και να αξιολογούν μαζί με άλλους απαντήσεις μαθητών. Το πρόγραμμα αποσκοπεί στη συνεργασία και την αλληλεπίδραση ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς των δύο βαθμίδων σε επίπεδο μαθηματικού περιεχομένου και παιδαγωγικών πρακτικών με κύριο στόχο την ομαλή μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Το υλικό των συναντήσεων βασίζεται στις αρχές σχεδιασμού του προγράμματος MathTASK *(Biza, Nardi & Zachariades, 2007). Οι αρχές*

αυτές στηρίζονται σε αποτελέσματα από την έρευνα, σύμφωνα με τα οποία η εμπλοκή εκπαιδευτικών με συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις είναι πιο αποδοτική από μία θεωρητική και γενική συζήτηση. Επιπλέον, ο αναστοχασμός και η συζήτηση συγκεκριμένων διδακτικών καταστάσεων διευκολύνει τους εκπαιδευτικούς να εντοπίσουν και να ερμηνεύσουν φαινόμενα που βιώνουν στην τάξη και να αναπτύξουν τεχνικές για να τα αντιμετωπίσουν. Οι δραστηριότητες του προγράμματος MathTASK (‘*mathtasks’*) προσομοιώνουν τις δυσκολίες που ενδέχεται να εμφανιστούν στην τάξη των μαθηματικών. Τα mathtasks πάντα ξεκινούν με ένα μαθηματικό πρόβλημα και ένα συμβάν που λαμβάνει χώρα στη τάξη, όταν οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός αντιμετωπίζουν αυτό το πρόβλημα (*Μπιζά & Ναρδή, 2019*; Μπιζά κ.ά., 2022). Στο ΕΠΠ, τα mathtasks λειτουργούν ως αφόρμηση για τη θεματική της συνάντησης και για να ενεργοποιηθεί η συζήτηση και συχνά η αντιπαράθεση γύρω από αυτήν τη θεματική.

Οι μαθηματικές θεματικές που περιλαμβάνει το ΕΠΠ είναι: ιδιότητες των αριθμών και διαχείριση πληροφορίας, κλασματικοί αριθμοί και εφαρμογές, μετρήσεις και υπολογισμοί (μήκος, εμβαδόν, όγκος), μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. Κάθε θεματική έχει οργανωθεί στη βάση των αξόνων: επιχειρηματολογία, ανάπτυξη κριτικής σκέψης στα Μαθηματικά, επίλυση προβλήματος, ερωτήσεις ανάλυσης, σύνθεσης και αξιολόγησης, χειραπτικά υλικά και ψηφιακά εργαλεία.

Το θέμα της ομάδας ανταλλαγών είναι η μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο αναφορικά σε δύο άξονες προβληματισμού: (α) *τις αλλαγές στον μαθηματικό και στον παιδαγωγικό λόγο από τη μία βαθμίδα στην άλλη* και (β) *πιθανά μοντέλα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών σχετικά με τη μετάβαση από τη μία βαθμίδα στην άλλη.*

1η συνάντηση - ***«Αλλαγές στον μαθηματικό και παιδαγωγικό λόγο από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο»:*** Στη συνάντηση, θα περιγραφούν σύντομα οι στόχοι, ο σχεδιασμός και η δομή του ΕΠΠ. Θα ακολουθήσει εμπλοκή των συνέδρων με δραστηριότητες mathtask που χρησιμοποιήθηκαν στο ΕΠΠ σε ομάδες και μετά σε συλλογική συζήτηση. Οι (συν)διοργανωτές της ομάδας θα κλείσουν τη συνάντηση με παρατηρήσεις από τις δραστηριότητες του ΕΠΠ.

2η συνάντηση - ***«Πιθανά μοντέλα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών σε θέματα μετάβασης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο»:*** Η συζήτηση θα εστιάσει στον σχεδιασμό του ΕΠΠ με στόχο την αναζήτηση μοντέλων επιμόρφωσης εκπαιδευτικών των μαθηματικών και από τις δύο βαθμίδες σε θέματα μετάβασης. Συγκεκριμένα, θα γίνουν σύντομες εισηγήσεις από

(συν)διοργανωτές της ομάδας σχετικά με την εμπειρία, τα οφέλη αλλά και τις δυσκολίες εργαστηρίων αυτού του τύπου. Έπειτα θα ακολουθήσει ανοικτή συζήτηση για πιθανά μοντέλα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών τα οποία έχουν τη δυνατότητα της αμοιβαίας ανατροφοδότησης μεταξύ εκπαιδευτικών από διαφορετικές βαθμίδες.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε θερμά τους εκπαιδευτικούς που συμμετέχουν στο Επιμορφωτικό Πιλοτικό Πρόγραμμα. Η συνεισφορά του προγράμματος MathTASK στο πρόγραμμα χρηματοδοτήθηκε από το *Pro-Vice Chancellor's Impact Fund* (No ICF232402A) στο UEA.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 301–309.

Κατσομήτρος, Σ., & Τάτσης, Κ. (2022). Μαθηματική μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο: Αντιλήψεις και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου ενός εκπαιδευτικού. Στο Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *9ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 249-257). ΕΝΕΔΙΜ.

Kaur, T., McLoughlin, E., & Grimes, P. (2022). Mathematics and science across the transition from primary to secondary school: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, *9*(1), 13.

Μπιζά, Ε., & Ναρδή, Ε. (2019). MathTASK και CAPTeaM: Συγκεκριμένες καταστάσεις από την τάξη ως έναυσμα για διδακτικό αναστοχασμό. Στο Κ. Χρίστου (Επ.), *8ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 758-760). ΕΝΕΔΙΜ.

Μπιζά, Ε., κ.ά. (2022). Μοντέλα επιμόρφωσης για την ανατροφοδότηση από την έρευνα στη διδακτική πράξη της διδασκαλίας των μαθηματικών και αντίστροφα. Στο Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *9ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 280-282). ΕΝΕΔΙΜ.

Ναρδή, Ε., Μπαμπίλη, Α., Μπούφη, Α., Στουραΐτης, Κ., & Τριανταφυλλίδης, Τ. (2017). Μεταβάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση (πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια, τριτοβάθμια): Επιστημολογικές, ψυχολογικές, παιδαγωγικές και θεσμικές διαστάσεις. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (Επιμ.). *7ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 85-105). ΕΝΕΔΙΜ

Psycharis, G., Trgalová, J., Alturkmani, M. D., Kalogeria, E., Latsi, M., & Roubin, S. (2020). Studying primary and secondary teachers' collaborative design of resources for algebra. In H. Borko & D. Potari (Eds.), *ICMI Study 25 - Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups* (pp. 668-675). University of Lisbon.

Sdrolias, K. A., & Triandafillidis, T. A. (2008). The Transition to Secondary School Geometry: Can There Be a 'Chain of School Mathematics'? *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 159–169.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity.* Cambridge University Press.

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ: ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΙΑΣ 'ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ' ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κλώθου Άννα[1], Πετρίδου Αντωνία[2], Αποστολίδου Πελαγία[3] [4]Καραβοκύρη Βιργινία, [5]Κούσουλα Γεωργία, Κυριμαλάκη Σουλτάνα[6], Χατζοπούλου Λαμπρινή[7]

[1]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, [2]4ο ΔΣ Αλεξανδρούπολης, [3,7]1ο ΔΣ Αλεξανδρούπολης , [4,6]1ο Πειραματικό ΔΣ Αλεξανδρούπολης, [5]ΔΣ Ν. Χηλής

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών αποτελεί μια σημαντική πρόκληση για κάθε 'μεταρρύθμιση' που επιχειρείται στην μαθηματική εκπαίδευση και συνδέεται με επιμέρους δράσεις της ζωής τους, καθώς και με την ευρύτερη κοινωνική τους δράση, αλλά και με την ίδια την εργασία που προσφέρουν στο σχολείο. Το ερευνητικό ενδιαφέρον για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά έχει στραφεί, μεταξύ άλλων, στην συμμετοχή σε 'κοινότητες' μέσω των οποίων 'επικοινωνούν' εμπειρίες από την τάξη και συνεργάζονται με εκπαιδευτικούς ή/και ερευνητές για να αναστοχαστούν και να τροποποιήσουν τις διδακτικές τους πρακτικές (Erickson, Hosmer & Scanlan, 2023). Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών είναι σημαντικό να πραγματοποιείται στο σχολικό περιβάλλον ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να δοκιμάσουν και να επικυρώσουν τις ιδέες τους, στις δικές τους αίθουσες διδασκαλίας (Porcenaluk, O'Neachtain & Connolly, 2023). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται χρόνο και ευκαιρίες να συζητήσουν διδακτικές καταστάσεις που προκύπτουν καθημερινά στην τάξη, στην προσπάθειά τους να αξιοποιήσουν νέες διδακτικές πρακτικές. Η συζήτηση και γενικότερα η συνεργασία μεταξύ ερευνητών και εκπαιδευτικών φαίνεται ότι είναι αποτελεσματική όταν δημιουργηθεί κλίμα εμπιστοσύνης στην κοινότητα και οι σχέσεις των μελών της θεωρηθούν ισότιμες. Η συζήτηση για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών έχει αναδείξει τρεις κρίσιμες διαστάσεις της: *το 'περιεχόμενό' της επαγγελματικής ανάπτυξης* (συζητήσεις, αναστοχασμός, προβληματισμοί, αποφάσεις των εκπαιδευτικών κ.ά.), *τις 'κοινότητες'* στις οποίες ανήκουν οι εκπαιδευτικοί (μικρές ομάδες, κοινότητες διερεύνησης, δίκτυα εκπαιδευτικών, κ.ά.) και *το 'περιβάλλον'* (το πλαίσιο μέσα στο οποίο διενεργείται η επαγγελματική ανάπτυξη) (Goos, 2014). Εστιάζοντας στην διάσταση των '*κοινοτήτων'*, η διερεύνηση του τρόπου συγκρότησης/ανάπτυξης της συγκεκριμένης κοινότητας διερεύνησης (μικρο-επίπεδο), συμβάλλει στην κατανόηση (α) της δυναμικής των κοινοτήτων διερεύνησης που διαμορφώνουν γενικότερα οι εκπαιδευτικοί (μακρο-επίπεδο) και (β) του τρόπου με τον οποίο οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται την επαγγελματική τους ανάπτυξη.

Οι εργασίες της Ομάδας Ανταλλαγών έχουν ως στόχο να αναδείξουν την λειτουργία μιας ‘κοινότητας διερεύνησης’, η οποία συγκροτήθηκε από εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τα Μαθηματικά, τους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται την συμμετοχή τους, καθώς και τις δυνατότητες επαγγελματικής τους ανάπτυξης μέσω αυτής, με βάση τα χαρακτηριστικά που καθορίζουν τον τρόπο συμμετοχής τους στην κοινότητα και υιοθετώντας την προσέγγιση της “κριτικής ευθυγράμμισης”, όπως την όρισε η Jaworski (2006). Οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν στην κοινότητα έχουν 10-35 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, είναι στην πλειονότητά τους γυναίκες και έχουν προσωπικό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και την διδασκαλία τους. Οι εκπαιδευτικοί ενεπλάκησαν διαδοχικά σε δράσεις συγκρότησης της «κοινότητας διερεύνησης», όπως: (α) *πιλοτική εφαρμογή του Νέου Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά κατά το χρονικό διάστημα 2011-2012*, στο πλαίσιο της οποίας σχεδίασαν και παρατήρησαν μαθήματα μαθηματικών και αναστοχάστηκαν σε σχέση με τις διδακτικές τους πρακτικές, αξιοποιώντας την προσέγγιση Lesson Study, (β) *δημιουργία ομάδας “αυτομόρφωσης”* με στόχο την ενδυνάμωση των εκπαιδευτικών στο να σχεδιάζουν την διδασκαλία τους, να κάνουν τεκμηριωμένες επιλογές και να αποκτήσουν συνολική ‘εικόνα’ της μαθηματικής πορείας των μαθητών τους, (γ) *συμμετοχή στο Ευρωπαϊκό πρόγραμμα Mascil* (Mathematics and Science for life), που αφορούσε την εκπαίδευση και την επαγγελματική εξέλιξη εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (γενική και επαγγελματική). Βασικός στόχος του προγράμματος ήταν η αξιοποίηση στην τάξη διερευνητικών τρόπων μάθησης (Inquiry Based Learning) και η σύνδεσή τους με τον χώρο εργασίας, (δ) *συγκρότηση ομάδας για την συνέχιση-υποστήριξη της αξιοποίησης του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών στην διδασκαλία των Μαθηματικών*, κατά τα σχολικά έτη 2016-2017 και 2017-2018, σε συνεργασία με το Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δημοκριτείου Πανεπιστημίου Θράκης, στην θεματική των Φυσικών αριθμών (2016-2017) και της Γεωμετρίας και των Μετρήσεων (2017-2018), (ε) *διεύρυνση της ομάδας* που διαμορφώθηκε στο 1ο Πειραματικό Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης με την συμμετοχή εκπαιδευτικών από άλλα σχολεία της περιοχής με στόχο τον αναστοχασμό και την εξέλιξη των διδακτικών τους πρακτικών στα μαθηματικά, (στ) *επιμόρφωση/πιλοτική εφαρμογή* του επικαιροποιημένου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (2021-2022 και 2022-2023).

Για την περιγραφή και την κατανόηση της συγκρότησης και της λειτουργίας της συγκεκριμένης κοινότητας διερεύνησης στα μαθηματικά, καθώς και του τρόπου με τον οποίο τα μέλη της κατανοούν την συμμετοχή τους και τις δυνατότητες επαγγελματικής ανάπτυξης αξιοποιήθηκε μεθοδολογικά η μελέτη περίπτωσης. Ενδεικτικές δράσεις επαγγελματικής

ανάπτυξης που πραγματοποιήθηκαν ήταν: **Η δράση 'Lesson study'**: Βιντεοσκόπηση μαθημάτων μαθηματικών, παρατήρηση των εκπαιδευτικών που διδάσκουν, τήρηση ημερολογίου στις συναντήσεις με την ομάδα των εκπαιδευτικών, ηχογράφηση των συναντήσεων και αναστοχασμός. **Η δράση 'Γεωμετρία-Μέτρηση'**: Αξιοποίηση της έρευνας-δράση, κατά το σχολικό έτος 2017-2018, και συνεργασία εκπαιδευτικού της έκτης τάξης με εκπαιδευτικούς των υπόλοιπων τμημάτων της έκτης τάξης για μία ώρα την εβδομάδα, (συνολικά 3 ώρες την εβδομάδα), στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας. Αντικείμενο της συνεργασίας αποτέλεσε ο σχεδιασμός, η υλοποίηση, η συστηματική παρατήρηση και ο επανασχεδιασμός των διδακτικών προσεγγίσεων που αφορούσαν την θεματική της Γεωμετρίας και των Μετρήσεων στην έκτη τάξη. Η δράση συνεχίστηκε και το 2018-2019, με το ίδιο πλαίσιο συνεργασίας. **Η δράση 'facilitator':** Αναζήτηση 'βελτιωτικών' παρεμβάσεων και προσεγγίσεις της διερευνητικής μάθησης και της επίλυσης προβλήματος ως βασικός προσανατολισμός της διδακτικής πράξης των εκπαιδευτικών του 1ου Πειραματικού Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης στο πλαίσιο της κοινότητας διερεύνησης για τα μαθηματικά (2018-2019). Τα μέλη της κοινότητας δεσμεύτηκαν σε μια κοινή δράση που αφορούσε την εξέλιξη των διδακτικών τους πρακτικών για την διδασκαλία των μαθηματικών, μοιράζονταν σχεδόν το ίδιο ρεπερτόριο και είχαν δημιουργήσει μια κοινή 'ιστορία', η οποία ξεκινούσε με την συμμετοχή των παλαιών μελών που εφάρμοσαν πιλοτικά το Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά (2011) και αναπτύχθηκε με την αλληλεπίδραση παλαιών και νέων μελών που συμμετείχαν σταδιακά στην κοινότητα. Οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν κάθε μήνα σε τρίωρες συναντήσεις με ερευνητές στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενώ υπήρχε συνεχής συνεργασία με εκπαιδευτικό του σχολείου, η οποία λειτουργούσε ως 'διευκολυντής' (facilitator) για οτιδήποτε προέκυπτε στο καθημερινό μάθημα των μαθηματικών. **Η δράση 'Ιστολόγιο'**: δημιουργία ιστολογίου (http://mathscommunity.weebly.com/) για την υποστήριξη της κοινότητας διερεύνησης στην διδασκαλία των μαθηματικών με διδακτικές προτάσεις και εκπαιδευτικό υλικό. Οι παραπάνω ενδεικτικές δράσεις περιελάμβαναν συνεργασίες μεταξύ εκπαιδευτικών και μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών, στο πλαίσιο των οποίων οι ερευνητές λειτουργούσαν υποστηρικτικά και ως 'κριτικοί φίλοι'. Από τις δράσεις που πραγματοποιήθηκαν, αναπτύχθηκε συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών, οι οποίοι οδηγήθηκαν σε αναστοχασμό σε σχέση με τις διδακτικές τους ενέργειες και σε αμφισβήτηση της αποτελεσματικότητάς τους. Η ανάγκη που δημιουργήθηκε για αναζήτηση εναλλακτικών οδών μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών είχε ως αποτέλεσμα την διατύπωση μιας σειράς προβληματισμών/ προτάσεων σχετικά με το είδος

και το περιεχόμενο της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, καθώς και της επαγγελματικής τους ανάπτυξης.

Οι συνεδρίες της Ομάδας Ανταλλαγών έχουν οργανωθεί ως εξής:

1η συνεδρία: παρουσίαση του περιεχομένου (ενδεικτικά) των δράσεων επαγγελματικής ανάπτυξης (παρουσιάσεις διάρκειας 10 λεπτών)

«*Δράσεις επαγγελματικής ανάπτυξης στα Μαθηματικά: προκλήσεις και προβληματισμοί*» Ά. Κλώθου & Α. Πετρίδου

«*Χωρικές έννοιες: Από την επιπεδοχώρα στο καρτεσιανό επίπεδο*» Π. Αποστολίδου, Σ. Κυριμαλάκη & Λ. Χατζοπούλου

«*Γεωμετρικές Έννοιες και σχήματα. Από τον γεωμετρικό περίπατο στην ταξινόμηση παραλληλογράμμων*» Β. Καραβοκύρη & Γ. Κούσουλα

Συζήτηση διάρκειας 30 λεπτών: κριτική θεώρηση των θεμάτων που αναδείχθηκαν σε αλληλεπίδραση με τους/τις συμμετέχοντες/ουσες και οργάνωση της 2ης συνεδρίας.

2η συνεδρία: συζήτηση σε ομάδες με βάση το περιεχόμενο που διαμορφώθηκε στην 1η συνεδρία (40 λεπτά), συζήτηση στην ολομέλεια και διατύπωση συμπερασμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Erickson, M., Hosmer, S.K., Scanlan, M. (2023). *Etienne Wenger: A Social Learning Theorist*. In: Geier, B.A. (eds) The Palgrave Handbook of Educational Thinkers. Palgrave Macmillan, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81037-5_215-1

Goos, M. (2014). Researcher teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM*, 46(2), 189-200. Doi:10.1007/s11858-013-0556-9.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a model of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 187-211.

Porcenaluk, S., O'Neachtain, A., & Connolly, C. (2023). Reimagining a framework for teachers' continuous professional development during curriculum reform. *Irish Educational Studies*, *42*(4), 931–948. https://doi.org/10.1080/03323315.2023.2250765

Ερευνητικά Προγράμματα

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ STEM ΣΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Δέσποινα Πόταρη & Γιώργος Ψυχάρης

*Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ

dpotari@math.uoa.gr; gpsych@math.uoa.gr

The ICSE Teacher Academy είναι ένα ερευνητικό πρόγραμμα στο πλαίσιο του EU's Teacher Academy. Ο στόχος του προγράμματος είναι να δημιουργήσει μια κοινότητα πρακτικής από ερευνητές/εκπαιδευτές εκπαιδευτικών καθώς και από εν ενεργεία και μελλοντικούς STEM εκπαιδευτικούς σε ευρωπαϊκό επίπεδο. Η κοινότητα αυτή περιλαμβάνει εκπαιδευτικούς και ερευνητές από 13 Ευρωπαϊκές χώρες στην οποία οργανώνονται δράσεις τόσο σε εθνικό όσο και σε διεθνές επίπεδο. Οι δράσεις περιλαμβάνουν α) διεθνή σεμινάρια εκπαίδευσης εκπαιδευτικών στα οποία συμμετέχουν εκπαιδευτικοί από τις συμμετέχουσες στο πρόγραμμα χώρες, β) δύο διεθνή θερινά σχολεία, γ) παρατήρηση μαθημάτων στην τριτοβάθμια εκπαίδευση από εκπαιδευτές εκπαιδευτικών που προσφέρονται στις συμμετέχουσες χώρες (job shadowing), και δ) επιμορφωτικές δράσεις σε εθνικό επίπεδο.

Τα διεθνή σεμινάρια προσφέρονται σε δύο εξάμηνα διαδικτυακά και έχουν δομηθεί σε 4 ενότητες διάρκειας δύο ωρών.

1. Τάσεις στην εκπαίδευση STEM: διεπιστημονικές προσεγγίσεις διερευνητικής μάθησης, περιβάλλον και κοινωνικο-επιστημονικά ζητήματα.

2. Διαφορετικότητα και συμπερίληψη στο STEM.

3. STEM σε μια ψηφιακή εποχή.

4. Καινοτόμες μορφές αξιολόγησης στην εκπαίδευση STEM.

Τα σεμινάρια δίνουν έμφαση στην εμπλοκή των εκπαιδευτικών σε δραστηριότητες σε συνεργασία με εκπαιδευτικούς από διαφορετικές χώρες.

Η παρατήρηση μαθημάτων στο Πανεπιστήμιο που προσφέρουν οι εκπαιδευτικές εκπαιδευτικών έχει ως στόχο τον αναστοχασμό και την ανατροφοδότηση με στόχο τη βελτίωση των μαθημάτων αλλά και στην εφαρμογή διδακτικών πρακτικών που εντοπίστηκαν σε άλλες χώρες.

Στο πρόγραμμα συμμετέχουν επιστημονικές ομάδες από 13 ευρωπαϊκές χώρες. Ο συντονιστής του προγράμματος είναι το Πανεπιστήμιο του Freiburg. Από την Ελλάδα συμμετέχει το Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ.

Η ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ‘ΜΕΤΡΑΕΙ’: ΕΡΕΥΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΜΠΕΙΡΙΩΝ ΓΙΑ ΝΕΟΥΣ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΥΣ/ΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ (ACTINPRISON)

Βασιλική Χρυσικού, Γιάννης Φόβος, Χαρούλα Σταθοπούλου

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

vchrysikou@gmail.com, ifovos@gmail.com, hastath@uth.gr

Το πρόγραμμα ACTinPRISON [1] στοχεύει στη διεύρυνση των εκπαιδευτικών εμπειριών νεαρών παραβατών. Ο καινοτόμος σχεδιασμός του χρησιμοποιεί διαλογικές μεθόδους για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη εναλλακτικών μορφών εκπαίδευσης για νεαρούς κρατούμενους. Αναγνωρίζοντας την ανάγκη οι εκπαιδευτικοί να κατανοήσουν καλύτερα τη ζωή κοινωνικά αποκλεισμένων νέων—συχνά πολλαπλώς αποκλεισμένων—το πρόγραμμα φέρνει μαζί ως συνεργάτες υποψήφιους εκπαιδευτικούς με νεαρούς κρατούμενους δημιουργώντας κοινούς χώρους ισότιμης αλληλεπίδρασης, μάθησης και αμοιβαίας ενδυνάμωσης. Υιοθετώντας μια κοινωνικοπολιτική θεώρηση με στόχο μετασχηματιστικές διαδικασίες, οι στόχοι του ACTinPRISON είναι: (α) ο σχεδιασμός, η εφαρμογή και η αξιολόγηση διδακτικών δραστηριοτήτων —και άλλων διαδραστικών δράσεων— σε μια δυναμική και αλληλεπιδραστική διαδικασία χρησιμοποιώντας καινοτόμες πρακτικές (δραματοποίηση, ΤΠΕ, κ.ά.); (β) ο περιορισμός της υπάρχουσας βίας μεταξύ νεαρών κρατουμένων ενισχύοντας τη διαπολιτισμική τους ευαισθητοποίηση σε κοινούς χώρους αλληλεπίδρασης με υποψήφιους εκπαιδευτικούς, (γ) η συμβολή στην ενδυνάμωσή τους και στην ευαισθητοποίηση των υποψήφιων εκπαιδευτικών σχετικά με τη διαφορετικότητα, και (δ) η ανάπτυξη ενός θεωρητικού πλαισίου για την εκπαίδευση στις φυλακές που ενσωματώνει εναλλακτικές μορφές εκπαίδευσης, φωνές νεαρών κρατουμένων και κοινές εμπειρίες που δύναται τελικά να οδηγήσουν στη βιώσιμη κοινωνική τους επανένταξη. Η επιλεγμένη μεθοδολογία, για την επίτευξη των στόχων, είναι ένας συνδυασμός Κριτικής Επικοινωνιακής Μεθοδολογίας και Συμμετοχικής Έρευνας Δράσης, ενώ χρησιμοποιούνται καινοτόμες παιδαγωγικές προσεγγίσεις για την ανάπτυξη διδακτικών δραστηριοτήτων μέσα στο σχολείο της φυλακής, σε κοινούς χώρους ισότιμης αλληλεπίδρασης νεαρών κρατούμενων και υποψήφιων δασκάλων. Το έργο φαίνεται να έχει επίδραση αφενός στην ευαισθητοποίηση των μελλοντικών εκπαιδευτικών μέσω της δράσης στο πεδίο σχετικά με τα δικαιώματα, τις συνθήκες διαβίωσης, καθώς και τα κυρίαρχα στερεότυπα και προκαταλήψεις για

τους περιθωριοποιημένους πληθυσμούς, ενισχύοντας έτσι την προσωπική και επαγγελματική τους ταυτότητα. Αφετέρου, φαίνεται να έχει ήδη κοινωνικοπολιτικό αντίκτυπο τόσο σε θεσμικό επίπεδο επηρεάζοντας το προσωπικό των φυλακών αλλά και τη ζωή των νεαρών κρατουμένων μετά την αποφυλάκισή τους, δημιουργώντας τις προϋποθέσεις για την ομαλή επανένταξή τους στην κοινωνία.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1.

Το ερευνητικό έργο υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ.) στο πλαίσιο της Δράσης «2η Προκήρυξη ερευνητικών έργων ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ. για την ενίσχυση των μελών ΔΕΠ και Ερευνητών/τριών» (Αριθμός Έργου: 4164).

Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ STEAM ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΔΙΚΑΙΟΣΥΝΗ ΚΑΙ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΉ ΣΤΑ ΚΟΙΝΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ

Διονυσία Μπακογιάννη, Χρυσαυγή Τριανταφύλλου

*Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ

dbakogianni@math.uoa.gr , chtriantaf@math.uoa.gr

Το Erasmus+ project Data Science Education in STEAM for Civic Engagement and Social Justice from the Early Years (DataScEd4CiEn) **(2023-2026)** στοχεύει στην ευαισθητοποίηση και την προετοιμασία των εκπαιδευτικών που διδάσκουν STEAM πεδία με σκοπό να συμπεριλάβουν στη διδασκαλία τους προβλήματα που να βασίζονται στην Επιστήμη των Δεδομένων (Data Science) και να αφορούν θέματα κοινωνικής ευαισθητοποίησης. Η συνεχώς αυξανόμενη ανάπτυξη των μεγάλων δεδομένων έχει αυξήσει τη ζήτηση για μια νέα γενιά Επιστημόνων των Δεδομένων που μπορούν να προβλέπουν ανάγκες και να αναπτύσσουν βέλτιστες λύσεις (Schintler & McNeely, 2023). Η εισαγωγή στην εφαρμοσμένη επιστήμη των δεδομένων από μικρή ηλικία, που προωθείται από το DataScEdCiEn, θα συμβάλει στη δημιουργία μιας νέας γενιάς υψηλά καταρτισμένων επιστημόνων δεδομένων (Irizarry, 2020). Επιπλέον, θα ετοιμάσει καλύτερα όλους τους μαθητές για την αγορά εργασίας, καθώς ο εγγραμματισμός της επιστήμης των δεδομένων γίνεται όλο και πιο σημαντικός για κάθε επάγγελμα (Mund, 2022). Θα προωθήσει επίσης την ανθεκτικότητα της κοινότητας, ετοιμάζοντας τους μαθητές για να εκπληρώσουν τον ρόλο τους ως ενεργά, υπεύθυνα, σκεπτόμενα μέλη της κοινωνίας.

Στο DataScEd4CiEn συμμετέχουν 6 επιστημονικές ομάδες από 5 Ευρωπαϊκές χώρες. Ο συντονιστής του προγράμματος είναι το Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο της Κύπρου. Από την Ελλάδα συμμετέχει το Μαθηματικό Τμήμα του ΕΚΠΑ.

Βιβλιογραφία

Mund, S. (2022). *Defining and Measuring Data Literacy for the 21 st Century* (Doctoral dissertation, New York University).

Schintler, L. A., & McNeely, C. L. (2023). Social Justice, Digitalization, and Health and Well-Being in the Pandemic City. In *Pandemic and the City* (pp. 279-305). Cham: Springer International Publishing.

Irizarry, R. A. (2020). The role of academia in data science education. *Harvard Data Science Review*, 2(1), 10-1162.

ΠΡΟΩΘΗΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Διονυσία Μπακογιάννη, Δέσποινα Πόταρη,

*Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ

dbakogianni@math.uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr

Το Erasmus+ project Promoting Data Science Education for Teacher Education at the University and Professional development level (DataSETUP) (2023-2026) στοχεύει στην προώθηση της εκπαίδευσης στην Επιστήμη των Δεδομένων (Data Science) στα σχολεία, ενισχύοντας τις επαγγελματικές γνώσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών στον τομέα της εκπαίδευσης στην Επιστήμη των Δεδομένων. Για να επιτύχει αυτόν τον στόχο, το έργο αποσκοπεί στην ενσωμάτωση της Επιστήμης των Δεδομένων στα προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών στην Τριτοβάθμια.

Με την εισαγωγή της Εκπαίδευσης στην Επιστήμη των Δεδομένων στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στο πανεπιστημιακό επίπεδο, το έργο επικεντρώνεται σε πεδία εφαρμογής όπως το STEAM και ετοιμάζει τους φοιτητές για τους μελλοντικούς τους ρόλους ως ενεργοί πολίτες (Makar, Fry & English, 2023). Ο ρόλος τους είναι ιδιαίτερα σημαντικός καθώς θα λειτουργήσουν ως πιθανοί πολλαπλασιαστές στη δική τους τάξη (Ridgway, 2016). Το έργο θα βελτιώσει την ενσωμάτωση της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία και τη μάθηση της Επιστήμης των Δεδομένων χρησιμοποιώντας απλά, αλλά ισχυρά εργαλεία για την οπτικοποίηση των δεδομένων, τα οποία προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές τη δυνατότητα να εξερευνήσουν συγκεκριμένες τάσεις και φαινόμενα σε μεγάλα πολυμεταβλητά σύνολα δεδομένων και να αποκτήσουν μια πρώτη προσέγγιση στις μεθόδους μάθησης της μηχανής. Τέλος, το έργο θα καταστήσει αυτούς τους πόρους διαθέσιμους και σε άλλους εκπαιδευτικούς και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών μέσα από την ανάπτυξη κατάλληλης πλατφόρμας.

Στο DataScEd4CiEn συμμετέχουν 6 επιστημονικές ομάδες από 5 Ευρωπαϊκές χώρες. Ο συντονιστής του προγράμματος είναι το Πανεπιστήμιο Μύνστερ της Γερμανίας. Από την Ελλάδα συμμετέχει το Μαθηματικό Τμήμα του ΕΚΠΑ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Makar, K., Fry, K., & English, L. (2023). Primary students' learning about citizenship through data science. *ZDM–Mathematics Education*, 1-13.

Ridgway, J. (2016). Implications of the data revolution for statistics education. *International Statistical Review*, 84(3), 528-549.

ΑΝΑ-ΒΙΩΝΟΝΤΑΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕΣΩ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΑΦΗΓΗΣΗΣ (RE-EXPERIENCING MATHEMATICS THROUGH DIGITAL STORYTELLING· REMEDIATE)

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος[1], Φραγκίσκος Καλαβάσης[2], Μιχαήλ Μεϊμάρης[1], Θαρρενός Μπράτιτσης[3], Κωνσταντίνος Τάτσης[4], Γεώργιος Κουτρομάνος[1], Ρέα Κακάμπουρα[1], Μαρία Γιακουμή[1], Παναγιώτα Κασκαούτη[1], Παναγιώτης Ψώμος[1], Ιωάννα Λόξα[1]

[1]Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, [2]Πανεπιστήμιο Αιγαίου, [3]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, [4]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

moutsiosrent@primedu.uoa.gr, mmeimaris@media.uoa.gr, kalabas@aegean.gr, bratitsis@uowm.gr, koutro@primedu.uoa.gr, ktatsis@uoi.gr, rkakamp@primedu.uoa.gr, ppsomos@primedu.uoa.gr, magiakou@primedu.uoa.gr, jkaskaouti@primedu.uoa.gr, gioloxa@gmail.com

Πώς μπορούμε να εκπαιδεύσουμε έναν μελλοντικό δάσκαλο και μια μελλοντική δασκάλα να διδάξει κάτι που τον/την κάνει να νιώθει συναισθηματικά και γνωστικά άβολα (τουλάχιστον); Η αρνητική συναισθηματική σχέση των μελλοντικών εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με τα μαθηματικά καταγράφεται διεθνώς (Bekdemir, 2010), η οποία μπορεί να συνδέεται με το γεγονός ότι σε διάφορες χώρες αναμένεται να διδάξουν μαθηματικά, χωρίς να αναγνωρίζονται θεσμικά ή να αυτοπροσδιορίζονται ως μαθηματικοί και, άρα, υπάρχει μια εγγενής σύγκρουση μεταξύ της επιστημονικής και της επαγγελματική τους ταυτότητας (Reid et al, 2008). Η ψηφιακή αφήγηση επιτρέπει την ανάπτυξη μιας θετικής συναισθηματικής σχέσης με τη μαθησιακή διαδικασία (Meimaris, 2017). Σε προηγούμενη έρευνα (Moutsios-Rentzos κ.ά., 2019, υπό έκδοση), χρησιμοποιήθηκε η Ψηφιακή Αφήγηση για τη στήριξη μελλοντικών εκπαιδευτικών στον θετικό μετασχηματισμό της συναισθηματικής τους σχέσης με τα μαθηματικά. Στο ερευνητικό έργο REMEDIATE [1] επεκτείνουμε το πεδίο εφαρμογής για να συμπεριλάβουμε γνωστικές πτυχές (με μαθηματικά περιεχόμενα που θα σχετίζονται με το περιεχόμενο των αφηγήσεων). Σε αυτό το πλαίσιο, το REMEDIATE έχει σχεδιαστεί για να στηρίξει την αναστοχαστική ανακατασκευή της σχέσης φοιτητών και φοιτητριών ενός Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης με τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Η πολυτροπική έκφραση μέσω ψηφιακών αφηγήσεων των προσωπικών εμπειριών και συναισθηματικών σχέσεων συνυφασμένων με συγκεκριμένα μαθηματικά περιεχόμενα που αναφέρονται στις αφηγήσεις αναμένεται να στηρίξει την αντιμετώπιση γνωστικών και

συναισθηματικών δυσκολιών με τα μαθηματικά. Στο επίκεντρο της προσέγγισής μας βρίσκεται η υπόθεση ότι η συναισθηματική τους σχέση με τα μαθηματικά είναι συχνά μια «τραυματική» σχέση που χρειάζεται μια «θεραπευτική» διαδικασία για *να* αντιμετωπιστεί (Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά., υπό έκδοση). Βάσει αυτού, των χαρακτηριστικών του πληθυσμού αναφοράς, και των επτά βημάτων για τη δημιουργία ψηφιακών αφηγήσεων του Lambert (2013), οργανώθηκε ένας σχεδιασμός πέντε συνιστωσών (ψηφιακή αφήγηση, συναισθηματική σχέση, γνωστική σχέση, ατομικοί αναστοχασμοί, συλλογικοί αναστοχασμοί· αντλώντας από Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά., 2019), με στόχο οι μελλοντικοί και μελλοντικές εκπαιδευτικοί να βιώσουν εκ νέου τα μαθηματικά ως μια κοινωνικο-πολιτισμική δραστηριότητα με αναφορικότητα στην καθημερινή ζωή.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η χρηματοδότηση του έργου είναι από το ΕΛΙΔΕΚ στο πλαίσιο της Υποδράσης 1 της Προκήρυξης «Χρηματοδότηση της Βασικής Έρευνας (Οριζόντια υποστήριξη όλων των Επιστημών), Εθνικό Σχέδιο Ανάκαμψης και Ανθεκτικότητας (Ελλάδα 2.0)» (Αριθμός Πρότασης: 15512).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 311–328.

Lambert, J. (2013). *Digital storytelling: Capturing lives, creating community*. Routledge.

Meimaris, M. (2017). Intergenerational Digital Storytelling: Research and Applications of Digital Storytelling in Greece. In G. Jamissen, P. Hardy, Y., Nordkvelle, & H. Pleasants (Eds.), *Digital Storytelling in Higher Education* (pp. 355-370). Palgrave Macmillan.

Moutsios-Rentzos, A., Kalavasis, F., & Meimaris, M. (2019). "My relationship with mathematics": Multimodal realisations and realities. In A. Moutsios-Rentzos, M. Meimaris, & A. Giannakoulopoulos (Eds.), *Proceedings of the International Digital Storytelling Conference "Current Trends in Digital Storytelling: Research & Practices"* (pp. 186–194). UNESCO Club of Zakynthos.

Moutsios-Rentzos, A., Kalavasis, F., Meimaris, M., & Kritikos, G. (υπό έκδοση). "My relationship with mathematics": a digital storytelling-centered investigation with pre-service teachers.

Reid, A., Dahlgren, L. O., Petocz, P., & Dahlgren, M. A. (2008). Identity and engagement for professional formation. *Studies in Higher Education*, *33*(6), 729–742.

Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΟΦΘΑΛΜΙΚΗΣ ΙΧΝΗΛΑΤΗΣΗΣ (EYE-TRACKING) ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΑΙΤΙΩΔΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ ΤΑΧΕΙΑΣ ΑΥΤΟΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΚΑΤΟΝΟΜΑΣΙΑΣ (RAPID AUTOMATIZED NAMING, RAN) ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΥΧΕΡΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΔΥΣΛΕΞΙΑ

Γεωργία Ανδρέου[1], Γαρυφαλιά Χαριτάκη[2], Μαρία Γκαντάκη[3]

[1] Καθηγήτρια Παιδαγωγικού Τμήματος Ειδικής Αγωγής και Μέλος του Συμβουλίου Διοίκησης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, andreou@sed.uth.gr

[2] Καθηγήτρια-Σύμβουλος Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και Μεταδιδάκτωρ Ερευνήτρια Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, charitaki.garyfalia@ac.eap.gr

[3] Υποψήφια Διδάκτορας Παιδαγωγικού Τμήματος Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, mariagkantaki90@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν ερευνητικό πρόγραμμα ανήκει στους Τομείς Τεχνολογιών Αιχμής: Προηγμένα Υλικά [*Key Enabling Technologies (KETs): Advanced materials*] και χρηματοδοτήθηκε μέσω του *Έργου: «Γραφείο Μεταφοράς Τεχνολογίας του Ειδικού Λογαριασμού Κονδυλίων Έρευνας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας», Ειδική δράση: Ωρίμανση Ερευνητικών Αποτελεσμάτων «Proof of Concept»*.

Στόχοι ερευνητικού προγράμματος:

Τα τελευταία χρόνια το διεθνές ερευνητικό ενδιαφέρον έχει στραφεί στην αξιοποίηση της τεχνολογίας eye-tracker για τη βελτίωση των εκπαιδευτικών διαδικασιών, αλλά και την χαρτογράφηση των νοητικών αναπαραστάσεων (Hutzler & Wimmer, 2004; JothiPrabha, Bhargavi, & Deepa Rani, 2023; Strohmaier, et al., 2020). Ωστόσο, παρά το προαναφερθέν γεγονός, στην Ελλάδα παραμένουν ανεπαρκή τα διαθέσιμα ερευνητικά δεδομένα. Έτσι, δεν είναι απολύτως σαφές εάν οι αναγνωστικές δυσκολίες των ατόμων με δυσλεξία προκαλούνται μόνο εξαιτίας ελλειμμάτων φωνολογικής επεξεργασίας ή αν εδράζονται και σε ελλείμματα μη φωνολογικής φύσης, όπως για παράδειγμα αυτά της

οπτικής επεξεργασίας (Jones et al., 2008; Jones et al., 2009; Wolf & Bowers, 1999). Επίσης, δεν είναι σαφώς καθορισμένος ο αντίκτυπος των δυσκολιών οπτικής επεξεργασίας στην αριθμητική ευχέρεια των ατόμων με δυσλεξία (Wilson et al., 2015).

Επιπροσθέτως, οι εγγενείς δυσκολίες των φοιτητών με δυσλεξία δύναται να επηρεάσουν την μετέπειτα επαγγελματική τους ανάπτυξη και αποκατάσταση. Η ανάπτυξη τεχνολογιών ικανών να αντισταθμίζουν σε ένα βαθμό τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, αλλά και η ενσωμάτωση τεχνολογιών eye-tracking, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, σε υπάρχουσες εκπαιδευτικές εφαρμογές θα μπορούσε να συνδράμει τους φοιτητές στην επαγγελματική τους ανάπτυξη.

Μέθοδος:

Καθώς, η παρούσα έρευνα εστιάζεται στη διερεύνηση της αιτιολογικής βάσης των εγγενών δυσκολιών των ατόμων με δυσλεξία αναφορικά με την ανάγνωση και την αριθμητική ευχέρεια, επιλέχθηκε η μέθοδος του πειραματικού σχεδίου.

Συμμετέχοντες:

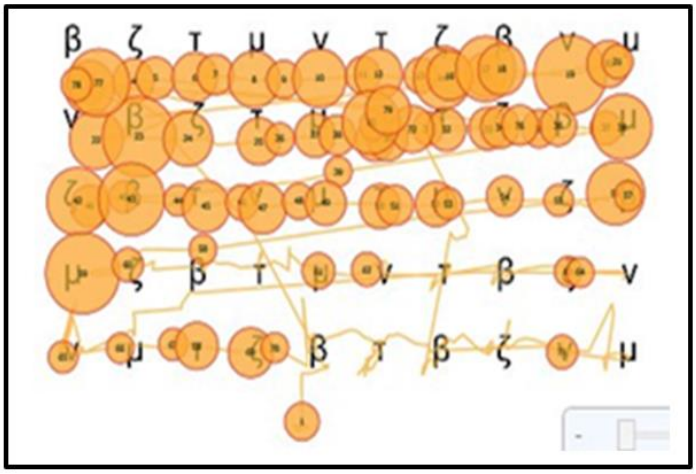
Οι συμμετέχοντες στην πιλοτική μελέτη ήταν 11 φοιτήτριες/τές με δυσλεξία και 11 φοιτήτριες/τές χωρίς δυσλεξία, ηλικίας 17-23 ετών, οι οποίοι ήταν όλοι ελληνόφωνοι. Η πειραματική διαδικασία πραγματοποιήθηκε στο Εργαστήριο Δίγλωσσης Εκπαίδευσης του Παιδαγωγικού Τμήματος Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και χρησιμοποιήθηκε eye tracker τύπου Tobii X2-60Hz. Η ομάδα των φοιτητών/τριών με δυσλεξία περιλάμβανε συμμετέχοντες που είχαν επίσημη διάγνωση δυσλεξίας κατά τη πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Εργαλεία:

Η RAN συνδέεται με διαδικασίες που συμβάλλουν στην αναγνωστική και αριθμητική ευχέρεια και μπορούν να διακρίνουν δυσλεξικούς από μη δυσλεξικούς αναγνώστες. Η μέτρηση της RAN μέσω eye tracker απαιτεί (α) αποδέσμευση από προηγούμενα ερεθίσματα, (β) μετακίνηση της προσοχής στο επόμενο ερέθισμα και (γ) ανάδειξη της νέας περιοχής του κειμένου (Jones & Wolf, 2007). Η τεχνολογία οφθαλμικής ιχνηλάτησης δύναται να παρέχει προηγμένα υλικά-δεδομένα αναφορικά με τα παραπάνω, τα οποία καθίσταται αδύνατο να συλλεχθούν με εναλλακτικές μεθοδολογίες που να μην αξιοποιούν τεχνολογίες αιχμής.

Αποτελέσματα:

Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν ότι η *διάρκεια πρώτης εστίασης (FFD)* και η *μέση διάρκεια εστίασης (AveFD)* ήταν μεγαλύτερες και για τις δύο ομάδες σε γράμματα όπου υπήρχε ο παράγοντας "σύγχυσης" (confusable), από ό,τι σε γράμματα που δεν συγχέονταν εύκολα (non-confusable) στη συνθήκη αρχικού φωνήματος (Onset). Αυτά τα ευρήματα δείχνουν ότι η σύγχυση (confusability) φαίνεται να προσθέτει μια επιπλέον διάσταση, η οποία επιβαρύνει την επεξεργασία εκ μέρους των συμμετεχόντων. Αναφορικά με τις μετρήσεις της *συνολικής διάρκειας εστίασης* (*Time Spent Gaze*), τα ευρήματα έδειξαν ότι οι αναγνώστες με δυσλεξία ήταν πιο αργοί από τους αναγνώστες χωρίς δυσλεξία κατά την επεξεργασία και την κατονομασία των γραμμάτων σε όλες τις συνθήκες.



Ενδεικτικά, στην παραπάνω εικόνα μπορούμε να δούμε την οφθαλμική ιχνηλάτηση σε ένα έργο ταχείας κατονομασίας γραμμάτων. Οι κύκλοι αναπαριστούν εστιάσεις των οφθαλμών. Το μέγεθος του κύκλου είναι ανάλογο με τη διάρκεια της εστίασης. Πιο συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερος είναι ο κύκλος, τόσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια εστίασης, αντανακλώντας τις δυσκολίες του αναγνώστη στην κατονομασία του γράμματος. Οι γραμμές αναπαριστούν γρήγορες κινήσεις των οφθαλμών μεταξύ των εστιάσεων, οι μικρότερες γραμμές αντικατοπτρίζουν τις δυσκολίες του αναγνώστη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Hutzler, F., & Wimmer, H. (2004). Eye movements of dyslexic children when reading in a regular orthography. *Brain and Language, 89(*1), 235-242. doi:10.1016/S0093-934X(03)00401-2

Jones, M. W., Branigan, H. P., & Kelly, M. L. (2009). Dyslexic and non-dyslexic reading fluency: Rapid automatized naming and the importance of continuous lists. *Psychonomic Bulletin & Review, 16*(3), 567-572. doi:10.3758/PBR.16.3.567

Jones, M. W., Obregón, M., Kelly, M. L., & Branigan, H. P. (2008). Elucidating the component processes involved in dyslexic and non-dyslexic reading fluency: An eye-tracking study. *Cognition, 109*(3), 389-407. doi:10.1016/j.cognition.2008.10.005

JothiPrabha, A., Bhargavi, R., & Deepa Rani, V. B. (2023). Prediction of dyslexia severity levels from fixation and saccadic eye movement using machine learning. *Biomedical Signal Processing and Control, 79*, doi:10.1016/j.bspc.2022.104094.

Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A., & Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics, 104*, 147-200. doi:10.1007/s10649-020-09948-1

Wilson, A. J., Andrewes, S. G., Struthers, H., Rowe, V. M., Bogdanovic, R., & Waldie, K. E. (2015). Dyscalculia and dyslexia in adults: Cognitive bases of comorbidity. *Learning and Individual Differences, 37*, 118-132. doi:10.1016/j.lindif.2014.11.017

Wolf, M., & Bowers, P. G. (1999). The double deficit hypothesis for the Developmental Dyslexia. *Journal of Educational Psychology, 9*(3), 415-438. doi:10.1037/0022-0663.91.3.415

TEACH4INTEGRATION

Χαρούλα Σταθοπούλου, Χαράλαμπος Σακονίδης

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

hastath@uth.gr, xsakonid@eled.duth.gr

Το Πρόγραμμα «Εκπαίδευση για την Ένταξη», είναι ένα δωρεάν και μοριοδοτούμενο πρόγραμμα για εκπαιδευτικούς και στελέχη της εκπαίδευσης που εμπλέκονται στην εκπαίδευση παιδιών με προσφυγικό/μεταναστευτικό υπόβαθρο. Πρόκειται για μια συνεργασία του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και του Πανεπιστημίου Κρήτης με το Γραφείο της UNICEF στην Ελλάδα, με την υποστήριξη του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού και υπό την εποπτεία του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Υλοποιείται στο πλαίσιο του «Όλα τα Παιδιά στην Εκπαίδευση», μια πρωτοβουλία της UNICEF σε συνεργασία με το Υπουργείο Μετανάστευσης και Ασύλου με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

Το πρόγραμμα έχει ως βασικό στόχο τη βελτίωση των δεξιοτήτων και ικανοτήτων των εκπαιδευτικών σε πεδία όπως η διδασκαλία της ελληνικής ως δεύτερης γλώσσας, η ψυχοκοινωνική υποστήριξη και ένταξη των μαθητών προσφύγων, η διαφοροποιημένη διδασκαλία, η διδασκαλία στα μη γλωσσικά μαθήματα—όπως για παράδειγμα τα μαθηματικά—η χρήση εργαλείων εντατικής εκμάθησης, η ανάπτυξη συμμετοχικών-βιωματικών δραστηριοτήτων μάθησης, η διαχείριση της τάξης και η δυναμική της ομάδας, η ηλεκτρονική και εξ αποστάσεως εκπαίδευση, ώστε να ανταποκρίνονται με μεγαλύτερη επάρκεια στις προκλήσεις που αναδύονται στο πεδίο και να εφαρμόζουν αποτελεσματικά εκπαιδευτικές πρακτικές που προωθούν την ένταξη, ενδυναμώνουν τους μαθητές και οδηγούν στη σχολική επιτυχία.

Το πρόγραμμα υλοποιείται με μεικτή μεθοδολογία (διά ζώσης και εξ αποστάσεως) και αποτελείται από 16 Θεματικές Ενότητες. Κάθε επιμορφούμενος/η οφείλει να παρακολουθήσει συνολικά 12 Θεματικές Ενότητες από τις οποίες 9 είναι κοινές και 3 είναι επιλογής. Εμείς εμπλεκόμαστε στη θεματική ενότητα 15 με τίτλο «Μαθηματική εκπαίδευση και ετερότητα».

Οι βασικοί άξονες στο υλικό που μοιραζόμαστε με τις/τους επιμορφούμενους αφορούν: α) στη δημιουργία ρωγμών αν όχι στη

μετατόπιση της αντίληψης ότι τα μαθηματικά είναι μια γνώση ανεξάρτητη πολιτισμικού πλαισίου β) στην επίγνωση ότι η μαθηματική εκπαίδευσης χαρακτηρίζεται όχι μόνο από γνωστικές αλλά και από κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές συνιστώσες γ) στην αναγνώριση και τον αναστοχασμό του μακρο- και μικρο- επίπεδου της μαθηματικής εκπαίδευσης μαθητών πέραν της κυρίαρχης ομάδας, και δ) στη διερεύνηση βασικών παραμέτρων της διδακτικής πράξης και της συγκρότησης του μαθηματικού νοήματος στην τάξη των μαθηματικών, εστιάζοντας σε συμπεριληπτικές οπτικές.