Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: Μαθηματικά και Μαθηματική Εκπαίδευση: Όραμα και γενικοί στόχοι του Προγράμματος Σπουδών

Τα μαθηματικά αναγνωρίζονται ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού, εξαιτίας του ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν και της σημαντικής, ως συνέπεια, συνεισφοράς τους στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης. Αυτή η παρατήρηση αιτιολογεί την κεντρική θέση που κατέχουν τα μαθηματικά διαχρονικά στα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) όλων των εκπαιδευτικών συστημάτων, καθιστώντας την επιτυχημένη σχολική μαθητεία σε αυτά καθοριστικό παράγοντα **της γνωστικής** και της **ακαδημαϊκής ανάπτυξης**, της **επαγγελματικής ανέλιξης** και της **κοινωνικής επιτυχίας** κάθε πολίτη και κατ' επέκταση την εξέλιξη των κοινοτήτων στις οποίες αυτός συμμετέχει.

Αντικείμενο των μαθηματικών είναι η μελέτη δομών και σχέσεων, η κατανόηση των οποίων χαρακτηρίζει αυτό που ονομάζουμε μαθηματικό τρόπο σκέψης και συλλογισμού. Βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης είναι η εξειδίκευση (διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων), η γενίκευση – αφαιρετικότητα (αναζήτηση ευρύτερων κανονικοτήτων και σχέσεων), η δημιουργία υποθέσεων και εικασιών, η χρήση συνδέσεων μεταξύ εννοιών και αναπαραστάσεων (η οπτικοποίηση αποτελεί μέρος αυτής) και η αναζήτηση της αιτιολόγησης (Lobato et al., 2012). Η μαθηματική σκέψη προϋποθέτει γενικές συλλογιστικές ικανότητες και γνώση ευρετικών στρατηγικών. Ορισμένες θεωρήσεις της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης επικεντρώνουν στο διαμεσολαβητικό ρόλο των εργαλείων, καθώς και στην αντιμετώπισή της ως διαδικασία που αναδεικνύεται ή παράγεται στα πλαίσια της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Cole, 1996; Fish & Persaud, 2012). Σε αυτήν την προσέγγιση η μαθηματική σκέψη και πράξη ταυτίζονται με τη συμμετοχή σε έναν μαθηματικό διάλογο, δηλαδή, γίνεται αντιληπτή ως ένα είδος μαθηματικής επικοινωνίας με τους άλλους και το εαυτό (Sfard, 2008).

Σύμφωνα με τα παραπάνω η **μαθηματική σκέψη** προϋποθέτει την ικανότητα διαχείρισης των βασικών δομικών στοιχείων των μαθηματικών καθώς και των τρόπων τεκμηρίωσης και 'νομιμοποίησης' του **μαθηματικού συλλογισμού**. Οι μαθηματικοί συλλογισμοί καθιστούν φανερές τις σχέσεις των **μαθηματικών οντοτήτων** και των μεταξύ τους συνδέσεων, δηλαδή, τη θέση τους σε ένα **δίκτυο ιδεών** που δομείται στη βάση **διαφανών, αυστηρά και λογικά καθορισμένων** συνδέσεων. Η συνεκτικότητα και η συνοχή που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική επιστήμη και συνεισφέρουν στην ισχύ και στο εύρος των εφαρμογών της οφείλεται σε αυτή ακριβώς τη διαπίστωση.

Τα μαθηματικά στο παρόν ΠΣ γίνονται αντιληπτά ως **ανθρώπινο δημιούργημα** που μπορεί να προσφέρει σε όλους τους μαθητές και τις μαθήτριες τις γνώσεις και τα εργαλεία ώστε να γίνουν **ενεργοί, χειραφετημένοι** και **κριτικοί πολίτες** του αύριο που θα είναι σε θέση να λειτουργούν δυναμικά και αποτελεσματικά τόσο ως άτομα όσο και ως μέλη μιας συνεχώς μεταβαλλόμενης κοινωνίας.

Το νέο ΠΣ για τα μαθηματικά υποστηρίζει τη **γνωστική-ατομική** και την **κοινωνικο-πολιτισμική-συμμετοχική** προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών, αντιμετωπίζοντάς τις ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση. Λαμβάνοντας υπόψη τη συζήτηση και την έρευνα που διεξάγεται διεθνώς αναφορικά με τις αρχές που θα πρέπει να διέπουν ένα σύγχρονο ΠΣ για τα μαθηματικά, το παρόν κείμενο υιοθετεί την άποψη ότι, σε μια τάξη των μαθηματικών η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο. Οι δύο αυτές προσεγγίσεις μάθησης εναλλάσσονται λειτουργώντας συνδυαστικά και πολλαπλασιαστικά η μια προς την άλλη διαμορφώνοντας δυο κεντρικά συνεργαζόμενα δίπολα: **μάθηση και μαθητής** και **μάθηση και διδασκαλία.** Τα δύο αυτά δίπολα δρουν αλληλεπιδραστικά και αλληλο-συμπληρωματικά το ένα με το άλλο.

Το ΠΣ, αναγνωρίζοντας την κρισιμότητα της μαθηματικής γνώσης σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δράσης, επενδύει στη δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης που δίνουν τη δυνατότητα, αφ' ενός, στο να δημιουργούνται συνδέσεις μεταξύ της γνώσης του περιεχομένου των μαθηματικών και της εφαρμογής των εννοιών και των διαδικασιών που το χαρακτηρίζουν και, αφετέρου, στο να οδηγούν στην ανάπτυξη **υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικών ικανοτήτων διατύπωσης και επίλυσης ολοένα και πιο περίπλοκων προβλημάτων, στη διαμόρφωση στάσεων και πεποιθήσεων** που βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα στα μαθηματικά όπως και εκτός αυτών. Κινούμενο προς αυτή την κατεύθυνση, το ΠΣ για τα μαθηματικά αναγνωρίζει ως σημαντική **την ανάδειξη των μαθηματικών πρακτικών ταυτόχρονα με τη μάθηση του μαθηματικού περιεχομένου.** Οι διαδικασίες μάθησης που λαμβάνουν χώρα στην τάξη των μαθηματικών συνδέονται στενά με την έννοια του **μαθηματικού γραμματισμού.** Ο μαθηματικός γραμματισμός αφορά την ικανότητα κάποιου α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και β) να αναλύει και ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Ταυτόχρονα, το ΠΣ επιδιώκει να προσφέρει ευκαιρίες για **πολλαπλούς τρόπους συμμετοχής στη μαθηματική δραστηριότητα** μέσα στη σχολική τάξη αναδεικνύοντας τα μαθηματικά που είναι **"χρήσιμα"** που όμως **"παραμένουν μαθηματικά"** δηλαδή πλούσια σε μαθηματικά νοήματα.

Το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών αναγνωρίζει ότι η μάθηση των μαθηματικών είναι μια δυναμική, σταδιακή και συνεχής διαδικασία στην οποία ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καθοριστικός και καίριας σημασίας. Επιπρόσθετα στοχεύει σε όλους τους μαθητές, λαμβάνοντας υπόψη τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι μαθητές νοηματοδοτούν τις εμπειρίες τους και τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες στις τάξεις των μαθηματικών, αλλά και τις διαφορετικές τους κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές τους αφετηρίες. Το ΠΣ υποστηρίζει διδακτικές στρατηγικές **συμπερίληψης** και **διαφοροποίησης** αναγνωρίζοντας ότι οι μαθητές διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο και τον ρυθμό που μαθαίνουν, τα ενδιαφέροντά τους, τις προηγούμενες γνώσεις και τις εμπειρίες τους, την κουλτούρα τους και τη γλώσσα τους. Συνεπώς, ο κάθε μαθητής και μαθήτρια, ανάλογα με τις γνωστικές ή άλλες ανάγκες του, προσκαλείται να εμπλακεί σε έργα μάθησης που οδηγούν σε αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα, η οποία προσφέρει προκλήσεις ανάπτυξης της μαθηματικής τους σκέψης και ταυτόχρονα συμβολής τους στη συλλογική συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος μέσα από τη συμμετοχή τους στα δρώμενα της τάξης. Το ΠΣ υιοθετεί την προσέγγιση της **πολιτισμικά ευαίσθητης μαθηματικής διδασκαλίας,** που συνδέεται με την επίγνωση των πολιτισμικών αξιών, παραδόσεων και διδακτικών προσεγγίσεων διαφόρων εθν(οτ)ικών ομάδων.

Οι **γενικοί στόχοι μάθησης (**δηλαδή οι ακριβείς περιγραφές της τελικής επιδίωξης των έργων μάθησης της μαθηματικής εκπαίδευσης) που εμπεριέχουν την **προοπτική** και τις **αξίες του αντικειμένου της μάθησης των Μαθηματικών στο Νέο ΠΣ** περιγράφονται παρακάτω. Συγκεκριμένα, το νέο ΠΣ φιλοδοξεί να προσφέρει σε όλους τους μαθητές την ευκαιρία να είναι σε θέση, μέσα από την συμμετοχή τους στα μαθήματα, να:

- **εκτιμούν και αποδίδουν αξία στα μαθηματικά** μέσα από τη συνειδητοποίηση της φύσης της μαθηματικής γνώσης και των κρίσιμων/μεγάλων ιδεών της που συνδέουν και ενοποιούν τα επιμέρους πεδία της μαθηματικής επιστήμης με τρόπους που συμβάλλουν σε μια βαθύτερη και πιο ισχυρή κατανόησή της.

- **αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές**, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.

• **αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων**, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία για να διαχειριστούν κατάλληλα μέσα από προσεγγίσεις διερεύνησης αλλά και μαθητείας, αλλαγές, κρίσεις και προκλήσεις στον ακαδημαϊκό, προσωπικό, επαγγελματικό και κοινωνικό περιβάλλον δράσης τους. Τα διάφορα ‘εργαλεία’ ενέχουν πολλαπλές ερμηνείες και είναι απαραίτητα για έναν ενεργό διάλογο με το περιβάλλον.

• **αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης** και εκτιμούν τα μαθηματικά ως προσπελάσιμο και ενδιαφέρον πεδίο μελέτης.

• **χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους.** Στην κατεύθυνση αυτή συλλέγουν, αναλύουν, οργανώνουν και αξιολογούν δεδομένα ελέγχοντας τις πηγές προέλευσής τους και υπερασπίζονται τις απόψεις τους. Έτσι δρουν ως υπεύθυνοι πολίτες στους χώρους δράσης τους, συμβάλλοντας δυναμικά στην δημοκρατική και ισότιμη ανάπτυξη των κοινωνιών σε μικρο- και μακρο- επίπεδο.

• **κατανοούν και είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τον μαθηματικό λόγο (mathematical discourse)** εντοπίζοντας κρίσιμες μαθηματικές ιδέες, αναλύοντας και ερμηνεύοντας διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα. Μια τέτοια προσέγγιση βοηθά του μαθητές να αναπτύσσουν πολυτροπικές προσεγγίσεις στην επικοινωνία και να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα με ακρίβεια και ευελιξία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : Θεματικά πεδία και βασικό μαθηματικό περιεχόμενο

Τα τρία θεματικά πεδία που περιλαμβάνει το ΠΣ είναι:

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Ι: Αριθμός-Άλγεβρα και Ανάλυση,

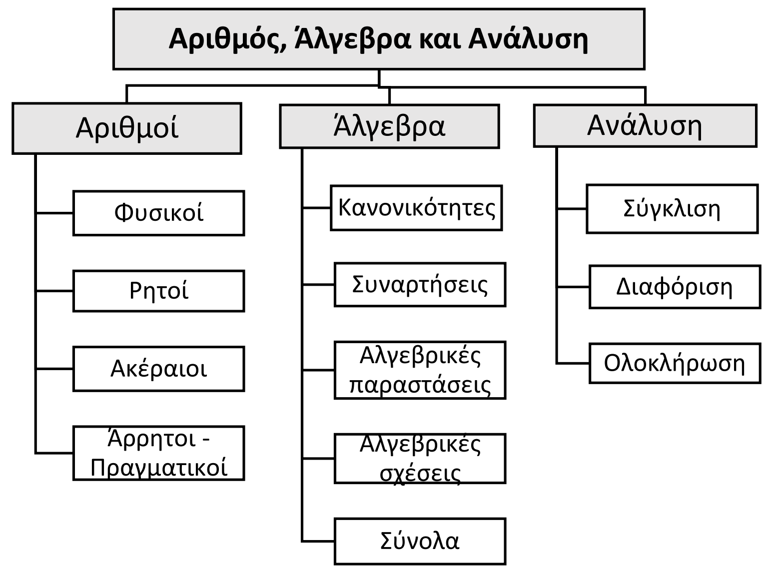
ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΙΙ: Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΙΙΙ: Στοχαστικά μαθηματικά

Στα σχήματα 1.1, 1.2 και 1.3 παρουσιάζονται οι βασικές θεματικές ενότητες ανά κάθε θεματικό πεδίο.

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Ι: Αριθμός, Άλγεβρα και Ανάλυση

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους μαθητές στην από την υποχρεωτική εκπαίδευση έως και το Λύκειο περιλαμβάνει την αξιοποίηση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής αριθμητικής γνώσης για τη μοντελοποίηση καταστάσεων, την επίλυση προβλημάτων και την επικοινωνία με τους άλλους. Η μάθηση των αριθμών περιλαμβάνει τη μελέτη των φυσικών, των κλασματικών και δεκαδικών (που αργότερα ενοποιούνται ως ρητοί) και με την εισαγωγή των αρνητικών προσήμων, των ακέραιων και αργότερα (στο Γυμνάσιο) των άρρητων. Τέλος, με την εισαγωγή των μιγαδικών ολοκληρώνεται η ανάλυση και μελέτη των βασικών συνόλων αριθμών.



Σχήμα 1.1: Θεματικές ενότητες του Θεματικού Πεδίου Ι: Αριθμός-Άλγεβρα και Ανάλυση.

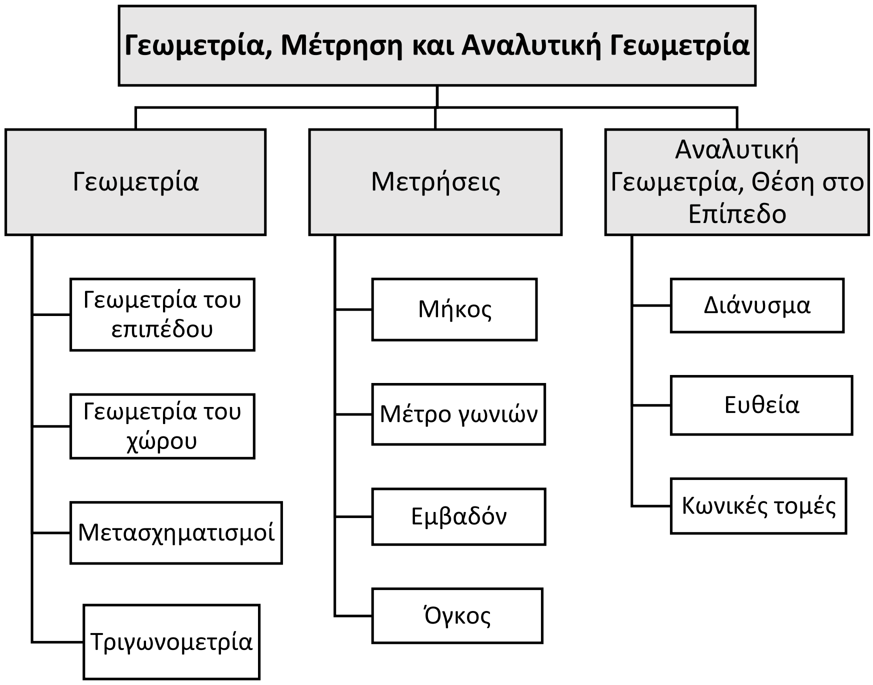
Τα στοιχεία και οι κανόνες της άλγεβρας αποτελούν αφαιρέσεις των αντίστοιχων στοιχείων και κανόνων της αριθμητικής, δηλαδή αποτελούν αφαιρέσεις αφαιρέσεων και επομένως η κατανόησή τους έχει ιδιαίτερες απαιτήσεις. Οι μαθητές αναπτύσσουν την αλγεβρική κατανόηση τους μέσα από την μελέτη μεταβλητών, κανονικοτήτων, εξισώσεων, ανισοτήτων και επίλυση προβλημάτων που η επίλυση τους βασίζεται στα παραπάνω εργαλεία. Παράλληλα με την εισαγωγή των συναρτήσεων και την έννοια της συμμεταβολής χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις και αλγεβρικές σχέσεις.

Η Ανάλυση, στηρίζεται στις προηγούμενες έννοιες της συνάρτησης και επικεντρώνεται στη μελέτη της έννοιας της συνάρτησης και των ειδικών χαρακτηριστικών τις οποίες έχουν ειδικές κλάσεις αυτών. Με την εισαγωγή των ορίων, της διαφόρισης και της ολοκλήρωσης είναι δυνατή η μοντελοποίηση και επίλυση σύνθετων προβλημάτων σε ένα εύρος θεμάτων.

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΙΙ: Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία

Οι έννοιες και οι διαδικασίες της Γεωμετρίας στηρίζουν την προσέγγιση πολλών μαθηματικών εννοιών: αξιοποιούνται στην επίλυση προβλήματος με την δημιουργία κατάλληλων διαγραμμάτων, στηρίζουν τη δημιουργία νοερών εικόνων, την κατανόηση συμβόλων, την κατανόηση σχηματισμών για την απόδοση αριθμητικών σχέσεων, την γραμμή των αριθμών, γραφικές παραστάσεις ή άλλες μαθηματικές διαδικασίες που στηρίζονται σε δισδιάστατες ή τρισδιάστατες διατάξεις. Τέλος, η δημιουργία και η επεξεργασία νοερών εικόνων και αναπαραστάσεων, η αντίληψη των δισδιάστατων και τρισδιάστατων καταστάσεων, η ευλυγισία στην αλλαγή οπτικών γωνιών και η χωρική μνήμη που καλλιεργούνται με την κατάλληλη διδασκαλία της Γεωμετρία έχουν μεγάλη σημασία (Clements, & Battista, 1992).

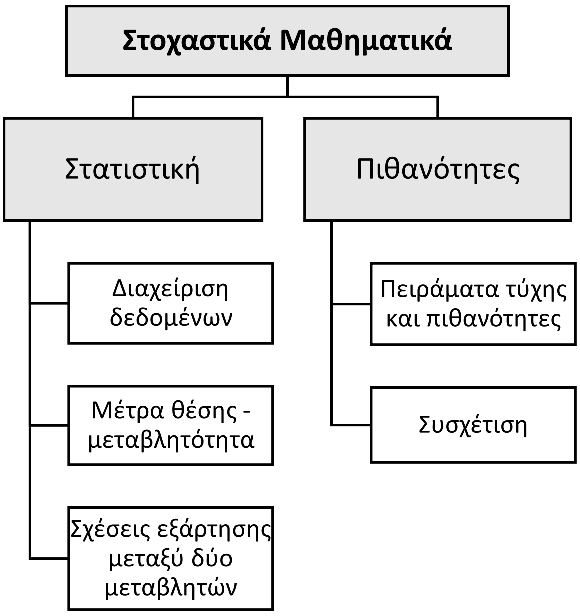
Το περιεχόμενο της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται στο Δημοτικό αποτελεί *μη τυπική Γεωμετρία*. Μεταγενέστερα στο Γυμνάσιο οι μαθητές αρχίζουν να προσεγγίζουν τις χωρικές και γεωμετρικές έννοιες σε πιο αφαιρετικό επίπεδο. Στο Λύκειο γίνεται η πλήρης ανάπτυξη της Γεωμετρίας και της μέτρησης συνδέοντας τον *χωρικό*, *γεωμετρικό* και *οπτικοποιημένο* συλλογισμό με την τυπική αποδεικτική διαδικασία.



Σχήμα 1.2: Θεματικές ενότητες του Θεματικού Πεδίου ΙΙ: Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΙΙΙ: Στοχαστικά μαθηματικά (Στατιστική -Πιθανότητες)

Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων είναι να αναπτύξει την ικανότητα του μαθητή-μελλοντικού πολίτη-να αξιολογεί κριτικά πληροφορίες, να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες. Η βασική διαφορά των Στοχαστικών Μαθηματικών από τις άλλες θεματικές περιοχές των Μαθηματικών είναι ότι μελετά προβλήματα που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα δεδομένων, δηλαδή με την διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν).



Σχήμα 1.3: Θεματικές ενότητες του Θεματικού Πεδίου ΙΙΙ: Στοχαστικά Μαθηματικά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο Η μάθηση ως διαδικασία ανάπτυξης του μαθηματικού νοήματος στην τάξη

2.1 Γνωστικό και κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο της μάθησης

Η γνωστική ψυχολογική προσέγγιση στη διερεύνηση των διεργασιών μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, που επικράτησε σχεδόν το πρώτο μισό αιώνα ανάπτυξης του πεδίου της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, χαρακτηρίζεται από το πρωτοπόρο έργο επιστημόνων όπως οι Dienes, Skemp, Fischbein, Freudenthal και Vergnaud.

Ο Dienes (1960) υποστήριξε ότι η κατανόηση των μαθηματικών δομών στηρίζεται σε πολλαπλές ενσωματώσεις και κυκλικά μοτίβα μάθησης. Η θεωρία του υποδεικνύει τέσσερις αρχές μάθησης των μαθηματικών. Την *'δυναμική αρχή',* σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι μια ενεργή διαδικασία που απαιτεί να παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αλληλεπιδράσουν (η κατανόηση μιας έννοιας περιλαμβάνει τρία στάδια, του παιχνιδιού, της δομής και της πρακτικής). Η δεύτερη αρχή είναι η '*εποικοδομητικότητα*' - οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν τις γνώσεις τους πριν αναπτύξουν αναλυτική δράση. Η αρχή της 'μαθηματικής μεταβλητότητας' υποστηρίζει ότι, όταν μεταδίδεται η γνώση, τα άσχετα γεγονότα θα πρέπει να μεταβάλλονται συστηματικά, ενώ οι σχετικές μεταβλητές να διατηρούνται ίδιες. Για παράδειγμα, κατά τη διδασκαλία του ορισμού του τριγώνου, ο εκπαιδευτικός επιβάλλεται να αλλάξει το μέγεθος, τις γωνίες και τον προσανατολισμό του τριγώνου, έτσι ώστε οι μαθητές να καταλάβουν ότι τρεις πλευρές και τρεις γωνίες ορίζουν ένα τρίγωνο. Η τελική '*αρχή της (αισθητηριακής) αντίληψης'* υποδηλώνει ότι είναι σημαντικό να χρησιμοποιούνται διαφορετικά είδη διδακτικού υλικού για τη διδασκαλία της ίδιας έννοιας ή ιδέας.

Ο Skemp (1979) εστιάζει στην έμφυτη ικανότητα των ανθρώπων να κατανοούν τα μαθηματικά μέσω (αισθητηριακής) αντίληψης, δράσης και αναστοχασμού. Ισχυρίζεται ότι η φύση των μαθηματικών εννοιών είναι ιεραρχική - για να κατανοήσει ένας μαθητής μια ανώτερη έννοια χρειάζεται να κατανοήσει πρώτα τα δομικά στοιχεία από τα οποία εξαρτάται- και ορίζει δύο τύπους μάθησης των μαθηματικών, τη συντελεστική και τη συσχετιστική. Η πρώτη αφορά σε διεργασίες μάθησης που στηρίζονται στην εφαρμογή κανόνων χωρίς κατανόηση, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στην κατανόηση των εννοιών και του συλλογισμού που συνδέονται με μια συγκεκριμένη μαθηματική γνώση. Η συντελεστική μάθηση παράγει διαδικαστική κατανόηση (γνώση του «πώς»), ενώ η συσχετιστική κατανόηση παράγει εννοιολογική κατανόηση (γνώση του «πώς» και «γιατί»). Κατά τον Skemp, και οι δύο τύποι μάθησης είναι σημαντικοί, καθώς διδάσκουν στον μαθητή τους κανόνες των μαθηματικών.

Ο Fischbein (1987) είναι περισσότερο γνωστός για τη συμβολή του στην κατανόηση του ρόλου της διαίσθησης στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών και της φύσης των γεωμετρικών εννοιών. Η βασική του θεώρηση αναφορικά με την διαίσθηση είναι ότι σε κάθε επίπεδο μαθηματικού συλλογισμού, εκτός από τις τυπικές και αλγοριθμικές πτυχές, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η διαισθητική πτυχή. Όσον αφορά τις γεωμετρικές έννοιες, τις οποίες ονόμασε σχηματικές (figural), ο Fischbein (1993) υποστήριξε πως διακρίνονται για τη διττή τους φύση, την σχηματική (figural) και την εννοιολογική (conceptual). Ενώ η σχηματική φύση αφορά σε χωρικές ιδιότητες (π.χ. σχήμα, θέση και μέγεθος), η εννοιολογική συνδέεται με αφηρημένα και θεωρητικά χαρακτηριστικά κοινά σε όλες τις έννοιες (π.χ. 'ιδεατότητα', 'αφαιρετικότητα', γενικότητα και τελειότητα). Για παράδειγμα, ένας κύκλος είναι μια σχηματική έννοια, καθώς είναι ταυτόχρονα ένα σχήμα, μια χωρική (αισθητηριακή) αναπαράσταση και μια έννοια (αφηρημένη, γενική, ιδανική). Ενώ η σχηματική όψη μιας σχηματικής έννοιας διευκολύνει νοητικές λειτουργίες με πρακτικό νόημα, όπως η τροποποίηση, η κοπή και η υπέρθεση, η εννοιολογική πτυχή διασφαλίζει το λογικό νόημα και τον εννοιολογικό έλεγχο αυτών των λειτουργιών. Αρμονία μεταξύ των δύο όψεων μιας σχηματικής έννοιας υφίσταται μόνο σε μια ιδανική κατάσταση. Πολλά λάθη που γίνονται από τους μαθητές στον γεωμετρικό συλλογισμό στην πραγματικότητα προκαλούνται από το χάσμα μεταξύ των δύο όψεων μιας σχηματικής έννοιας. Κατά τον Fischbein, η ανάπτυξη της σχηματικής έννοιας στην ιδανική μορφή δεν είναι μια φυσική διαδικασία. Χρειάζεται να συμπληρωθεί με διδακτικές καταστάσεις που θα κρατήσουν ενεργή τόσο την σχηματική όσο και την εννοιολογική πτυχή.

Ο Freudenthal (1991) υποστήριξε πως τα μαθηματικά συνιστούν μια ανθρώπινη δραστηριότητα, μέσω της οποίας το άτομο αποκτά επιστημονική θέαση του κόσμου γύρω του, μέσα από την μαθηματικοποίηση (mathematization) πραγματικών καταστάσεων σε ένα πλαίσιο που έχει νόημα για αυτό. Ωστόσο, η ανθρώπινη δραστηριότητα των μαθηματικών οφείλει ταυτόχρονα να παράγει μαθηματικά (προϊόν). Αυτό οδηγεί στο ερώτημα της ανάπτυξης μιας μαθηματικής εκπαίδευσης που ενσωματώνει και τους δύο στόχους. Ο Freudenthal πρότεινε μια σειρά από ιδέες σχετικές με τον τρόπο αντιμετώπισης αυτού του ερωτήματος, με κεντρικές αυτές της ‘καθοδηγούμενης επαν-εφεύρεσης’, των ‘επιπέδων της διαδικασίας μάθησης’ και της ‘διδακτικής φαινομενολογίας’. Η καθοδηγούμενη επαν-εφεύρεση αναφέρεται στην εκμάθηση των μαθηματικών ως μια διαδικασίας παρόμοιας με αυτήν με την οποία επινοήθηκαν τα μαθηματικά αλλά υπό την καθοδήγηση του δασκάλου ή του διδακτικού σχεδιασμού. Η καθοδηγούμενη επαν-εφεύρεση οφείλει να βιώνεται από τον μαθητή ως ‘προοδευτική μαθηματοποίηση’, δηλαδή, να ξεκινά με τη μαθηματικοποίηση της πραγματικότητας και να συνεχίζει με την ανάλυση της δικής του μαθηματικής δραστηριότητας. Έτσι, η δραστηριότητα που αναπτύσσεται σε ένα επίπεδο υπόκειται σε ανάλυση στο επόμενο, το επιχειρησιακό (operational) ζήτημα σε ένα επίπεδο γίνεται αντικείμενο του επόμενου επιπέδου. Αυτή η μετατόπιση από το ‘επιχειρησιακό’ στο επίπεδο του ‘αντικειμένου’ σχετίζεται με τη μετάβαση από τις διαδικασίες στα αντικείμενα την οποία παρατήρησε η Sfard (1995) στην ιστορία των μαθηματικών αλλά και με αυτό που ο Ernest (1991) αποκάλεσε ‘εμπραγμάτωση΄ ή υποστασιοποίηση’ (reification). Τέλος, κατά τον Freudenthal, η περιγραφή μαθηματικών εννοιών, δομών και ιδεών, που ορίζονται ως νοούμενα, προϋποθέτει τη συσχέτισή τους με φαινόμενα του φυσικού, κοινωνικού και νοητικού κόσμου. Συνεπώς, για να γίνει κατανοητή μια μαθηματική έννοια πρέπει να συνδεθεί με πραγματικές καταστάσεις και να προσεγγισθεί μέσα από διαφορετικές οπτικές (Κολέζα, 2000).

Το έργο του Vergnaud (2009) επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο η απόκτηση γνώσης επιτρέπει στον μαθητευόμενο να βάλει σε τάξη και να σταθεροποιήσει ο ίδιος την πραγματικότητα και κυρίως την επίδραση των πράξεών του στην πραγματικότητα. Η ‘θεωρία των εννοιολογικών πεδίων’ που ανέπτυξε περιγράφει πώς οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματική κατανόηση. Ειδικότερα, αναγνωρίζει πως κάθε μαθηματική έννοια είναι συνυφασμένη με τους τρόπους που συναντάται, αναπαρίσταται, αποτελεί το επίκεντρο ενός εννοιολογικού πεδίου (conceptual field) και οικοδομείται μέσα από το σύνολο των καταστάσεων και προβλημάτων μέσα στα οποία αναδεικνύεται και λειτουργεί. Συγκεκριμένα, μια μαθηματική έννοια χαρακτηρίζεται από την τριάδα (S-I-R), όπου (S) είναι το σύνολο των καταστάσεων (situations) που δίνουν νόημα στην έννοια· κάθε στοιχείο του (S) είναι μια συγκεκριμενοποίηση της έννοιας ή αποτελεί έναν από τους αντιπροσώπους της.

(I) είναι το σύνολο των αμετάβλητων λειτουργιών (operational invariants) της έννοιας, το σύνολο των ιδιοτήτων που είναι κοινές σε όλες τις καταστάσεις που συναντάται και οδηγούν στην ένταξη όλων στην ίδια εννοιολογική κατηγορία. (R) είναι το σύνολο των αναπαραστάσεων (representations) της έννοιας. Για παράδειγμα, η έννοια της συνάρτησης περιέχει το σύνολο των καταστάσεων και προβλημάτων στα οποία αυτή συγκεκριμενοποιείται (S), το σύνολο των ιδιοτήτων που κάνουν μια σχέση ανάμεσα σε σύνολα να είναι συνάρτηση (I) και το σύνολο των αναπαραστάσεών της (R) όπως f(x), $X \rightarrow Y$, γραφικές αναπαραστάσεις κ.ά.

Από την τελευταία δεκαετία του 20ου αιώνα και μετά υπήρξαν σημαντικές εξελίξεις στο γνωστικό προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης αλλά και πέρα από αυτόν που διευρύνουν τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε τη μάθηση και την διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτές οι εξελίξεις περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων: (α) *αναζήτηση μη γραμμικών θεωριών μάθησης,* όπως η θεωρία της πολυπλοκότητας (β) αυξημένη εστίαση στο *μαθηματικό συλλογισμό* και τη *μοντελοποίηση* (γ) σημαντική αύξηση της *έρευνας για τα άτυπα μαθηματικά* (δ) διερεύνηση των *κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικών πτυχών* της μαθηματικής εκπαίδευσης και (ε) αυξημένη *αξιοποίηση της τεχνολογίας.*

Η στροφή προς τις κοινωνικο-πολιτισμικές αναγνώσεις της μάθησης μετά την δεκαετία του 1980 ανέδειξε την αναγκαιότητα υιοθέτησής τους ως συμπληρωματικών προς τις γνωστικές θεωρήσεις για μια πιο ολιστική κατανόηση του φαινομένου της μάθησης (Lerman, 2000). Η αναγκαιότητα αυτή υπήρξε ιδιαίτερα εμφανής σε αντικείμενα υψηλών γνωστικών απαιτήσεων, με ευρέως αναγνωρισμένη, ωστόσο, αξία για κάθε πολίτη και κοινωνία, όπως τα μαθηματικά, η επιτυχία στα οποία συνέχισε να αποτελεί 'προνόμιο των λίγων'. Το αίτημα για ίσες ευκαιρίες πρόσβασης στη μαθηματική γνώση σε όλους τους μαθητές που προέκυψε ως συνέχεια της αναζήτησης μιας πιο 'δίκαιης' μαθηματικής εκπαίδευσης διαμόρφωσε μια νέα στροφή, *την κοινωνικο-πολιτική* (Gutierrez, 2013; Valero, 2018; Kollosche et al., 2019).

Οι κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες χαρακτηρίζουν τη μάθηση ως ανάπτυξη στα πλαίσια ιστορικο- κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών και αντιλαμβάνονται την κατανόηση, την σκέψη και τον συλλογισμό ως προϊόντα κοινωνικής δραστηριότητας. Η κοινωνικο-πολιτισμική προοπτική αντιμετωπίζει έτσι όλα τα νοήματα ως κοινωνικές παραγωγές, ενώ η φυσική εμπειρία ερμηνεύεται, επίσης, μέσω των τοπικών πολιτισμικών πρακτικών (Lerman, 2006, σελ. 172). *Το νόημα που κατασκευάζει ο συμμετέχων καθορίζεται από το πλαίσιο εντός του οποίου λαμβάνει χώρα η μάθηση* (Lave & Wenger, 1991; Engeström & Cole, 1997) και η παραγωγή του συνιστά μια ιδιαίτερα υποκειμενική διαδικασία.

Η κοινωνικο-πολιτισμική και, στη συνέχεια, η κοινωνικοπολιτική στροφή επέφεραν δυο σημαντικές εξελίξεις στην ανάπτυξη των ΠΣ. Η πρώτη συνδέεται με την αντιμετώπιση της μάθησης ως αλλαγής συμμετοχής σε μια πρακτική (practice) που κυριάρχησε, αναδεικνύοντας την ανάγκη ένταξης στα περιεχόμενα της μάθησης ενός ΠΣ όχι απλώς κρίσιμων διεργασιών του επιστημονικού πεδίου αναφοράς, οι οποίες έχουν κατά κανόνα γνωστικό προσανατολισμό, αλλά κρίσιμων *πρακτικών* (practices) του αντίστοιχου επιστημονικού πεδίου (Schoenfeld, 2020) που ενέχουν και κοινωνικο-πολιτισμικά στοιχεία. Η δεύτερη αλλαγή που πριμοδοτήθηκε από την κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτική στροφή αφορούσε την αναγνώριση της ανάγκης διεύρυνσης του περιεχομένου της μάθησης ενός ΠΣ με *κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά στοιχεία* της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης και δραστηριότητας (μάθησης ή άλλης), όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η μαθηματική ταυτότητα μάθησης και ο μαθηματικός γραμματισμός (Morgan, 2010; Stacey & Turner, 2015).

Η μάθηση προϋποθέτει ατομική εμπλοκή του μαθητή στην εκπαιδευτική διαδικασία και απαιτεί ενεργή δράση, ανακατασκευή της γνώσης, πειραματισμό, εξερεύνηση, ανακάλυψη. Η οικοδόμηση του μαθηματικού νοήματος επιτυγχάνεται με προσωπικό και κοινωνικό τρόπο (συνεργατική κατασκευή της ατομικής γνώσης), ενεργοποιείται μέσα από προβληματικές καταστάσεις (‘γνωστική σύγκρουση’) αλλά και με την υποστήριξη του ‘άλλου’ (‘ζώνη επικείμενης ανάπτυξης’) και υποστηρίζεται μέσω δραστηριοτήτων διερεύνησης και ανακάλυψης αλλά και συνεργατικής δράσης και μαθητείας.

2.2. Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)

Οι *γενικοί στόχοι μάθησης* εξειδικεύονται στα **Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)** τα οποία διατυπώνονται με ακρίβεια για να υποδείξουν τι και πόσο καλά πρέπει να γνωρίζουν, να κατανοούν και να είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές. Συνεπώς, τα ΠΜΑ αφορούν σε **γνώσεις, μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, καθώς και κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές** που αφενός εξειδικεύουν και συγκεκριμενοποιούν τους γενικούς στόχους μάθησης του ΠΣ και αφετέρου είναι δυνατό να αποτιμηθεί / διαπιστωθεί η επίτευξή τους στο πλαίσιο της καθημερινής διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας.

Τα ΠΜΑ συνδέονται με το μαθηματικό περιεχόμενο του ΠΣ στα τρία θεματικά πεδία που περιλαμβάνει το ΠΣ: ***Αριθμός-Άλγεβρα, Χώρος-Γεωμετρία και Στοχαστικά μαθηματικά (Στατιστική και Πιθανότητες)*** .Τα τελευταία χρόνια δίνεται ιδιαίτερη σημασία στο μετασχηματισμό της επιστημονικής σε σχολική γνώση (διαδικασίες απο- και επανα-πλαισίωσης) ώστε να μην αλλοιώνεται επιστημολογικά (να παραμένει μαθηματικά έγκυρη).

2.2.1 Γνώσεις και Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών

Η γνώση των μαθηματικών δομείται πάνω σε γνωστικά σχήματα που οργανώνονται γύρω από κεντρικές ιδέες ή αρχές που ονομάζονται ***Μεγάλες Ιδέες*** των Μαθηματικών.. Ως μεγάλη ιδέα ορίζεται μια πρόταση ή ιδέα η οποία είναι κεντρική στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών και η οποία συνδέει διαφορετικές μαθηματικές έννοιες ή οπτικές σε ένα συνεκτικό σύνολο. Οι μεγάλες ιδέες διατρέχουν διαφορετικές μαθηματικές περιοχές (Άλγεβρα, Γεωμετρία και Στοχαστικά Μαθηματικά) και κάποιες από1 αυτές μπορεί να τις συναντήσει ο μαθητής σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες. Η έννοια των «μεγάλων ιδεών» στα μαθηματικά περιγράφει έναν διαφορετικό τρόπο ταξινόμησης του μαθηματικού περιεχομένου από ότι οι θεματικές ενότητες στα παραδοσιακά Προγράμματα σπουδών.

Στο ΠΣ ως Μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών αναγνωρίζονται ***η Μαθηματική δομή****, η* ***Απόδειξη, η Γενίκευση, η Μεταβολή, η Ισοδυναμία, οι Μετασχηματισμοί και η Προσέγγιση-σύγκλιση.***

Η Μαθηματική δομή είναι ένα σύνολο (ή σύνολα) με μαθηματικά αντικείμενα ως υποσύνολα, σύνολα υποσυνόλων, σχέσεις και πράξεις, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες προϋποθέσεις (αξιώματα). Αναζητώντας τη μαθηματική δομή, εντοπίζουμε γενικές ιδιότητες σε ειδικές περιπτώσεις ως σχέσεις μεταξύ των παραπάνω στοιχείων. Η αναγνώριση της μαθηματικής δομής από τους μαθητές εκφράζει την κατανόηση του ειδικού ως μια έκφραση του γενικού όπως για παράδειγμα, την εύρεση του κανόνα μιας κανονικότητας μέσα από την αναγνώριση της δομικής μονάδας που την παράγει.

Η Απόδειξη αφορά τη συλλογιστική διαδικασία η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσα από μια σειρά διαδοχικών επιχειρημάτων/συλλογισμών καταλήγει σε ένα συμπέρασμα. Η ανάπτυξη της αποδεικτικής διαδικασίας αποσκοπεί στην εξυπηρέτηση δυο αλληλένδετων λειτουργιών: ως μέσο επεξήγησης της ορθότητας ενός ισχυρισμού και ως μέσο δικαιολόγησης της ορθότητας (πειθώ). Η Ιδέα της απόδειξης στη σχολική τάξη συνδέεται με τη χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, αναλογικών και οπτικών συλλογισμών, διαδικασίες εγκυροποίησης, ελέγχου και επαλήθευσης αλλά και δικαιολόγησης και επεξήγησης. Η πορεία την οποία ακολουθεί ο μαθητής προς την κατάκτηση της έννοιας της απόδειξης περιλαμβάνει τα ενδιάμεσα στάδια κατασκευής σχημάτων δικαιολόγησης που έχουν διαισθητική – εμπειρική βάση. Η μαθηματική επιχειρηματολογία, ως διαδικασία επιβεβαίωσης ή απόρριψης ενός ισχυρισμού, αρχικά μπορεί να περιλαμβάνει επαγωγικούς και απαγωγικούς συλλογισμούς. Σταδιακά ο παραγωγικός συλλογισμός λαμβάνει τη θέση τους και αποκρυσταλλώνεται ως η μοναδική μορφή της έγκυρης μαθηματικής απόδειξης. Ωστόσο, οι προηγούμενοι τρόποι συλλογισμών αποκτούν το ρόλο των ευρετικών, δηλαδή στρατηγικών, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν στην κατασκευή της απόδειξης.

Η Γενίκευση αφορά τη σταδιακή μετάβαση από την θεώρηση ενός αντικειμένου στην θεώρηση ενός συνόλου που περιέχει το αντικείμενο αυτό δίνοντας έμφαση όχι στην ειδική περίπτωση αλλά στη δομή αυτής και στις σχέσεις που αυτή αναπαριστά.

Η Μεταβολή συνδέεται με την αλλαγή ενός μεγέθους. Οι μεταβολές αποτελούν τη βάση αφήγησης του ζωής και του κόσμου γύρω μας. Στο πεδίο της Άλγεβρας και Ανάλυσης η μοντελοποίηση αυτών των αλλαγών αποτελεί κεντρική δραστηριότητα. Από την άλλη, η ιδέα της μεταβλητότητας συνδέεται με την ποικιλία και το εύρος των δεδομένων που αφορούν σε φαινόμενα, καταστάσεις και ποσότητες του καθημερινού κόσμου. Η Στατιστική ασχολείται με τη μοντελοποίηση αυτής της μεταβλητότητας και την προσπάθεια παραγωγής γενικεύσεων και άντλησης συμπερασμάτων από τεράστιους όγκους δεδομένων. Η ιδέα της μεταβλητότητας συνδέεται με εκείνη της αβεβαιότητας, που βρίσκεται στο επίκεντρο των Πιθανοτήτων, μέσω της διατύπωσης προβλέψεων με σκοπό τη λήψη αποφάσεων.

Η Ισοδυναμία αφορά την αμφίδρομη συσχέτιση δύο μαθηματικών αντικειμένων**. Η** ιδέα της ισοδυναμίας διατρέχει όλους τους κύκλους σπουδών στην Αριθμητική/Άλγεβρα (π.χ. ισοδύναμα κλάσματα ή ισοδύναμες αλγεβρικές παραστάσεις) αλλά και τη Γεωμετρία (π.χ. ισοδυναμία γεωμετρικών σχημάτων που αφορά γεωμετρικά σχήματα που έχουν ίσα εμβαδά)

Οι Μετασχηματισμοί αφορούν τους τρόπους με τους οποίους μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμοί ή συναρτησιακές σχέσεις ή γεωμετρικά σχήματα, μπορούν να μετατραπούν σε κάτι διαφορετικό μετά από μια μαθηματική επεξεργασία. Οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν τα αμετάβλητα και τα μεταβλητά στοιχεία του μαθηματικού αντικειμένου που υπόκειται σε έναν Μετασχηματισμό. Οι Μετασχηματισμοί συναντώνται στην Άλγεβρα αλλά κυρίως στη Γεωμετρία.

Η προσέγγιση-σύγκλιση συνδέεται με άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου στην Ανάλυση αλλά και στη Γεωμετρία.

2.2.2 Μαθηματικές και Κοινωνικο-πολιτισμικές διεργασίες και πρακτικές

Ως ***Μαθηματικές Πρακτικές*** εννοούμε τις νοητικές εκείνες διεργασίες που εμπλέκονται στην ανάπτυξη γνώσης και κατανόησης, όπως η σκέψη, η μνήμη, η επίλυση προβλήματος κ.ά. Οι μαθηματικές διεργασίες αποτελούν σημαντικές όψεις της μάθησης και της κατανόησης των μαθηματικών αλλά και της μαθηματικής πράξης. Για το λόγο αυτόν στο ΠΣ η εμπλοκή των μαθητών στις παραπάνω γνωστικές διεργασίες θεωρούνται ως *μαθηματικές πρακτικές*.

Στο ΠΣ καταγράφονται οι παρακάτω μαθηματικές πρακτικές κάθε μια από τις οποίες έχει μια μοναδική εστίαση, αλλά, ταυτόχρονα αλληλοεπιδρά με τις άλλες, όταν τίθεται σε λειτουργία:

Πρακτική συλλογισμού και επιχειρηματολογίας. Η διαδικασία του μαθηματικού συλλογισμού περιλαμβάνει τη διερεύνηση φαινομένων, τη διατύπωση και τον έλεγχο υποθέσεων και τη συγκρότηση τεκμηριωμένων επιχειρημάτων (μια μορφή των οποίων είναι η τυπική μαθηματική απόδειξη). Η ανάπτυξη συλλογισμών με σκοπό τη μαθηματική επιβεβαίωση ή κατάρριψη ενός ισχυρισμού, αποτελεί το σκελετό της τροχιάς του συλλογισμού και απόδειξης. Η έννοια του μαθηματικού συλλογισμού περιλαμβάνει τις διαδικασίες της εικασίας, γενίκευσης, δημιουργίας παραδειγμάτων, της απόδειξης, της επιχειρηματολογίας και της πειθούς (Jeannotte & Kieran, 2017). Ο μαθηματικός συλλογισμός χρησιμοποιείται-κατά την επίλυση προβλημάτων αλλά η χρήση του είναι ευρύτερη. Αποτελεί τον κορμό της επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών και συνεισφέρει ουσιαστικά στην κατανόησή τους.

Το παρόν ΠΣ υποστηρίζει την ανάπτυξη πρακτικών συλλογισμού και επιχειρηματολογίας προτείνοντας μαθηματικά έργα με υψηλή μαθηματική πρόκληση.

Πρακτική δημιουργίας συνδέσεων. Σημαντικό στοιχείο του μαθηματικού συλλογισμού και, γενικά, του μαθηματικού τρόπου σκέψης αποτελεί η ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων. Οι μαθητές κατανοούν σε βάθος τα μαθηματικά, όταν συνειδητοποιούν τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όταν συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που συγκροτείται στη βάση λογικών σχέσεων και δομών.

Το παρόν Πρόγραμμα Σπουδών παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να δημιουργούν συνδέσεις μέσα στα μαθηματικά και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου προτείνοντας μια ποικιλία μαθηματικών έργων και συνθετικών εργασιών.

Πρακτική μαθηματικής επικοινωνίας. Οι μαθητές επικοινωνούν με διάφορους τρόπους (προφορικά, εικονικά, γραπτά), για διάφορους λόγους και για διαφορετικά ακροατήρια (συμμαθητές, δάσκαλοι, γονείς). Μέσω της επικοινωνίας μπορούν, όχι μόνο να εκφρασθούν αλλά και να αναστοχασθούν πάνω στον τρόπο σκέψης τους και τον τρόπο σκέψης των συνομιλητών τους. Η από κοινού δημιουργία νοήματος επιτρέπει τη συνεργασία, τη σε βάθος κατανόηση εννοιών και διαδικασιών, την αποσαφήνιση των ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που ανταλλάσσονται.

Το Πρόγραμμα Σπουδών προσφέρει ευκαιρίες για επικοινωνία στους μαθητές, προβλέποντας σχετικές δραστηριότητες, όπου να δίνεται έμφαση στη σωστή χρήση της φυσικής και συμβολικής γλώσσας και στη σταδιακή απομάκρυνση από υποκειμενικές, άτυπες εκφράσεις για την περιγραφή μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών.

Πρακτική επιλογής και χρήσης εργαλείων. Η χρήση εργαλείων όπως ο άβακας και ο κανόνας, αποτελεί κοινή πρακτική στην ιστορία των μαθηματικών. Η χρήση τεχνουργημάτων (artefacts), απτικών και ψηφιακών, προσφέρει ευκαιρίες αποτελεσματικής διατύπωσης και διερεύνησης εικασιών και προβλημάτων, κατάλληλης αναπαράστασης μιας μαθηματικής ιδέας ή και μοντελοποίηση μιας κατάστασης. Οι μαθητές, μέσω της μετάβασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο, αναγνωρίζουν τις σχέσεις και δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης (π.χ. εικονιστικών, γεωμετρικών, συμβολικών, κ.λπ.). Είναι σαφές ότι η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ., ψηφιακών) δεν διασφαλίζει την μαθηματική κατανόηση, καθώς πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στη χρήση τους (ακόμα και σε απλές περιπτώσεις, όπως του διαβήτη ή του μοιρογνωμονίου), ενώ συχνά η λειτουργική τους ενσωμάτωση στη διαδικασία μάθησης αποδεικνύεται μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση.

Το ΠΣ και το υποστηρικτικό υλικό ενθαρρύνουν την ανάπτυξη από τους μαθητές της ικανότητας να επιλέγουν χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία και στρατηγικές που θα τους επιτρέψουν να ασκήσουν αυθεντική μαθηματική δράση (όπως είναι η αποτελεσματική διατύπωση και διερεύνηση εικασιών και προβλημάτων, η κατάλληλη αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας και η μοντελοποίηση μιας κατάστασης). **Πρακτική επίλυσης προβλήματος.** Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα, όταν τους δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουν οι ίδιοι μαθηματικές ιδέες μέσω επίλυσης προβλημάτων, καθώς η εμπλοκή τους στη συγκεκριμένη διαδικασία τούς βοηθά να ‘‘κατασκευάσουν’’ προοδευτικά τη μαθηματική τους γνώση, εμβαθύνοντας εννοιολογικά σε αυτήν και συνειδητοποιώντας τη λειτουργική της πτυχή αλλά και την πολιτισμική και ιστορική της διάσταση. Επομένως, η επιλογή έργων που τους εμπλέκουν σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος αποτελεί κομβικό σημείο για τη μάθηση των μαθηματικών. Επιπλέον, είναι σημαντικό οι μαθητές να διατυπώνουν/ κατασκευάσουν και να λύνουν και προβλήματα που έχουν διαμορφώσει οι ίδιοι. Η διατύπωση/ κατασκευή προβλήματος ενισχύει το επίπεδο της δημιουργικότητας των μαθητών και τους προσφέρει ευκαιρίες ενεργητικής συμμετοχής στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Το παρόν ΠΣ δίνει έμφαση στην πρακτική επίλυσης προβλημάτων προτείνοντας μια ποικιλία προβλημάτων και συνθετικών εργασιών και προτρέπει τον εκπαιδευτικό να εμπλέκει τους μαθητές σε πρακτικές κατασκευής προβλήματος.

Πρακτική μοντελοποίησης. Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία επιλογής και χρήσης κατάλληλων μαθηματικών και στατιστικών για την ανάλυση εμπειρικών καταστάσεων, την καλύτερη κατανόησή τους και τη βελτίωση των λήψης αποφάσεων. Κατά τη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων μπορούν να χρησιμοποιούνται ψηφιακά εργαλεία για δημιουργία υποθέσεων, διερεύνηση συνεπειών και έλεγχο των προβλέψεων με βάση τα δεδομένα. Η μαθηματική μοντελοποίηση γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ της πραγματικής ζωής των μαθητών και των μαθηματικών. Δημιουργεί κίνητρα για την ενασχόληση με τα Μαθηματικά και προσδίδει στα μαθηματικά επιπλέον το ρόλο περιγραφής και κατανόησης των πραγματικών καταστάσεων ζωής. Η εκτεταμένη χρήση μαθηματικών μοντέλων στην κοινωνία καθιστούν επιτακτικές τις ικανότητες κατανόηση της χρήσης, ανάπτυξης και ελέγχου μοντέλων, καθώς και του τρόπου με τον οποίο τα μοντέλα χρησιμοποιούνται στη λήψη αποφάσεων, για τη διατήρηση και περαιτέρω ανάπτυξη ενεργών και αυτόνομων πολιτών.

Το παρόν ΠΣ δίνει έμφαση στην ανάπτυξη πρακτικών μοντελοποίησης μιας και στα προτεινόμενα μαθηματικά έργα καθώς στις συνθετικές εργασίες, οι μαθητές καλούνται οι ίδιοι να διαμορφώσουν, να διερευνήσουν και να αξιολογήσουν μαθηματικά μοντέλα με τη χρήση χειραπτικών ή/και ψηφιακών εργαλείων.

Πρακτική μεταγνωστικής ενημερότητας. Οι μεταγνωστικές διεργασίες περιλαμβάνουν το συνειδητό έλεγχο της μάθησης, το σχεδιασμό και την επιλογή στρατηγικών, την παρακολούθηση της ανάπτυξης της γνώσης, τη διόρθωση των λαθών, την ανάλυση της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών και την αλλαγή των στρατηγικών όταν αυτό είναι απαραίτητο. Ένα άτομο διαθέτει μεταγνωστική ικανότητα όταν έχει συνείδηση της γνωστικής του διαδικασίας και μπορεί να ελέγχει, να ρυθμίζει και να αξιολογεί τον τρόπο σκέψης του Οι μεταγνωστικές διεργασίες επιτρέπουν ευελιξία στη σκέψη και δυνατότητα προσαρμογής σε νέες μη οικείες καταστάσεις.

Το παρόν ΠΣ υποστηρίζει την πρακτική μεταγνωστικής ενημερότητας με μια ποικιλία μαθηματικών έργων και συνθετικών εργασιών

Οι ***κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές*** είναι κρίσιμες διεργασίες χωρίς κατά κανόνα γνωστικό προσανατολισμό, αλλά πρακτικές (practices) που ενέχουν ταυτόχρονα γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικό-πολιτικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης και δραστηριότητας (μάθησης ή άλλης), όπως η επικοινωνία, η αλληλεπίδραση, ο λόγος (discourse), η συμπερίληψη, η μαθηματική ταυτότητα μάθησης και ο μαθηματικός γραμματισμός.

Οι **κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές** αφορούν σε δεξιότητες και ικανότητες των μαθητών:

- Να ερμηνεύουν καταστάσεις στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό τους βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά

- Να αναπτύσοσυν κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις
- Να αποδίδουν αξία στις ιδέες των άλλων, να επιχειρηματολογούν και να λαμβάνουν αποφάσεις που στηρίζονται στο διάλογο και στη διαπραγμάτευση
- Να κατανοούν τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού, καθώς και την αξία της για την ανθρώπινη δραστηριότητα διαχρονικά.
- Να είναι μαθηματικά εγγράμματοι, δηλαδή να μπορούν να αναλύουν, να ερμηνεύουν τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά αλλά και να επεμβαίνουν στο κοινωνικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά. Ένα "μαθηματικά εγγράμματο" άτομο αντιλαμβάνεται ότι οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για να οργανώσουν τα φαινόμενα του περιβάλλοντος και διαθέτει την ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο- και εξω-μαθηματικών καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο.

Στις κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές εντάσσονται και οι ***κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές.*** *Αφορούν σε* πρότυπα αναγνώρισης και διαχείρισης συναισθημάτων και συμπεριφορών, διαμόρφωσης και διατήρησης θετικών σχέσεων, λήψης υπεύθυνων αποφάσεων και επίλυσης προκλητικών καταστάσεων και, τέλος, διατύπωσης και επιτυχούς διεκπεραίωσης θετικών στόχων. Η ανάπτυξη κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών στο σχολείο συμβάλλει στην ισορροπημένη συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Οι κοινωνικό-συναισθηματικές δεξιότητες μάθησης υποβοηθούν τους μαθητές στην μελέτη των μαθηματικών καθώς συντελούν στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης, την αντιμετώπιση των προκλήσεων και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Αυτό με τη σειρά του τους επιτρέπει να βελτιωθούν και να αποδείξει τις γνώσεις, τις έννοιες και τις δεξιότητες των μαθηματικών σε μια ποικιλία καταστάσεων. Οι κοινωνικό-συναισθηματικές δεξιότητες μάθησης βοηθούν κάθε μαθητή να αναπτύξει μια θετική ταυτότητα ως ικανός μαθητής μαθηματικών.

Οι μαθητές μέσω αυτών των πρακτικών:

- Αναπτύσσουν θετικά κίνητρα, αυτοπεποίθηση, εστίαση στις θετικές πτυχές των εμπειριών, υπομονή και επιμονή στην αντιμετώπιση οποιασδήποτε μαθηματικής κατάστασης
- Εκτιμούν την ομορφιά και την κομψότητα των μαθηματικών
- Αναπτύσσουν πνεύμα περιέργειας και αγάπη για τα μαθηματικά
- Αναπτύσσουν και ασκούν δεξιότητες που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων σεβόμενοι την διαφορετικότητα στη σκέψη και έκφραση
- Αξιοποιούν δεξιότητες αξιολόγησης, ελέγχου και αυτογνωστικής ρύθμισης της προόδου τους προκειμένου να οικοδομήσουν ισχυρές ταυτότητες μαθητευομένων των μαθηματικών.
- Αναγνωρίζουν και διαχειρίζονται διαφορετικού τύπου, ποιότητα και έντασης συναισθήματα και το άγχος με τρόπο αποτελεσματικό για τους ίδιους και τη μάθηση.

2.2.3. Μαθηματικές Ικανότητες, μαθηματικές δεξιότητες και στάσεις

Ο βαθμός επίτευξης των ΠΜΑ καταγράφεται μέσα από τις **ικανότητες, τις δεξιότητες** (συνδέονται κυρίως με θέματα γνώσεων και μαθηματικών πρακτικών) και τις **στάσεις** (συνδέονται κυρίως με κοινωνικο-πολιτισμικές-πρακτικές) που αναπτύσσει ο μαθητής.

Μαθηματική ικανότητα (competence). Αφορά τον βαθμό επίτευξης γνώσεων και μαθηματικών πρακτικών. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει συνδυασμό δυνατοτήτων/ικανοτήτων επικοινωνίας, μαθηματικοποίησης, αναπαράστασης, συλλογισμού και επιχειρηματολογίας, στρατηγικής σκέψης και, τέλος, χρήσης συμβόλων, τυπικής και τεχνικής γλώσσας, καθώς και πράξεων/λειτουργιών.

Δεξιότητα (Skill). Υποδηλώνει την εξειδίκευση που αναπτύσσεται στη διάρκεια μια κατάρτισης ή μιας εμπειρίας. Ειδικότερα, η μαθηματική δεξιότητα αναφέρεται συνήθως στην επιτέλεση και εφαρμογή διαδικαστικού τύπου ενεργειών, όπως η εκτέλεση ενός αλγορίθμου ή μιας προκαθορισμένης τεχνικής. Βασικό χαρακτηριστικό κάθε δεξιότητας είναι ότι όποιος την ασκεί πρέπει να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του αντίστοιχου έργου και αυτό προϋποθέτει την επιλογή και εφαρμογή κατάλληλης στρατηγικής. Μια δεξιότητα δεν μπορεί να εξηγηθεί με λόγια, μπορεί μόνο να επιδειχθεί. Έτσι, ο μόνος τρόπος εκμάθησης μιας δεξιότητας είναι μέσω μαθητείας και πραγματοποιείται κατά την εμπλοκή των μαθητών σε επιλεγμένες μαθηματικές πρακτικές όπως η πρακτική επιλογής και χρήσης κατάλληλων εργαλείων**.**

Στάση (attitude). Γενικά, αφορά σε τρόπους δράσης, 'αισθάνεσθαι', σκέψης που δείχνουν τη διάθεση, τη γνώμη κ.ά. ενός ατόμου για κάποιον ή κάτι. Από ψυχολογική σκοπιά, πρόκειται για μια νοητική και συναισθηματική οντότητα που κληρονομεί ή χαρακτηρίζει ένα άτομο, η οποία οριοθετείται μέσω εμπειριών. Ειδικότερα η στάση στα μαθηματικά (mathematical attitudes) αφορά στις συναισθηματικές αντιδράσεις που περιλαμβάνουν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα μέτριας έντασης και λογικής σταθερότητας. Διακρίνονται τρεις διαστάσεις στη στάση απέναντι στα μαθηματικά: συναισθηματική διάθεση, όραμα των μαθηματικών και αντιληπτή ικανότητα. Οι στάσεις αφορούν κυρίως τον βαθμό επίτευξης των κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών.

2.3. Ο μαθητής και η συγκρότηση της μαθησιακής του ταυτότητας στα μαθηματικά

Όλο και πιο συχνά τα τελευταία χρόνια η διευκόλυνση της ατομικής εμπλοκής των μαθητών στις διαδικασίες μάθησης της τάξης αντιμετωπίζεται μέσα από την οπτική της διαφοροποιημένης μάθησης και διδασκαλίας (Tolminson, 2001). Επιπρόσθετα, η ενθάρρυνση της συμμετοχής όλων των μαθητών στη συλλογική συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη τείνει να προσεγγίζεται σήμερα μέσα από τη θέαση της ετερότητας και της συμπερίληψης (Civil, Hunter & Crespo, 2019). Και οι δύο αυτές προσεγγίσεις αναγνωρίζουν ότι ο εκπαιδευτικός, αφενός, αποδέχεται και εκτιμά τις ανάγκες του κάθε μαθητή και, αφετέρου, προσαρμόζει το μάθημά του σε αυτές.

Η αναγνώριση των γνωστικών και πολιτισμικών ιδιαιτεροτήτων κάθε μαθητή συνδέεται με τις ευκαιρίες που προσφέρονται για ισότιμη συμμετοχή στη σχολική κοινότητα (Andersson, Valero & Meaney, 2015; Roos, 2019), ενώ η αίσθηση αποδοχής (η μη αποδοχής) αναπόφευκτα συνδέεται με τη συγκρότηση της μαθησιακής του ταυτότητας στα μαθηματικά (Hunter & Hunter, 2017). Παρότι συχνά η μάθηση αντιμετωπίζεται ακόμη και σήμερα ως μια διαδικασία πρόσκτησης πληροφοριών και ανάπτυξης δεξιοτήτων, διεθνώς αναγνωρίζεται όλο και περισσότερο η ανάγκη για την ανάδειξη των ταυτοτήτων που διαμορφώνουν οι μαθητές και οι μαθήτριες στο πλαίσιο της μαθηματικής τους εκπαίδευσης. Ταυτότητες που τις διαμορφώνουν σε μια εποχή που αυξάνεται αλλά συνάμα διαφοροποιείται η προσβασιμότητα σε διαφορετικούς τύπους γνώσεων. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο λοιπόν, η εκμάθηση του ακαδημαϊκού περιεχομένου δε μπορεί να διαχωριστεί από την ανάπτυξη αξιών, στόχων, κοινωνικών ρόλων και κοσμοθεωρήσεων των μαθητών και των μαθητριών (Kaplan & Flum, 2012). Αυτό που είμαστε, αυτό που κάνουμε κι αυτό που μπορούμε να γίνουμε μετασχηματίζεται από τη μάθηση. Το περιβάλλον της σχολικής τάξης αποτελεί ένα πλαίσιο δραστηριοτήτων, (επαν)οικοδόμησης ιδεών και αλληλεπίδρασης με συνομηλίκους και ενήλικες. Η μαθηματική γνώση που κατασκευάζεται εντός του πλαισίου (συν)διαμορφώνει τις πιθανές ταυτότητες των μαθητών και των μαθητριών.

Ο όρος ταυτότητα παραπέμπει συνειρμικά σε μια προσωπική αναπαράσταση του εαυτού με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Σε αυτό το προσωπικό επίπεδο η ταυτότητα αναφέρεται στην ομοιότητα που έχουμε με τον εαυτό μας, περιγράφοντας εκείνα τα χαρακτηριστικά που ορίζουν τη μοναδικότητά μας ως άτομο. Παρότι τα χαρακτηριστικά αυτά εξελίσσονται δυναμικά στο πέρασμα του χρόνου, δεν αμφισβητούμε ότι αύριο θα είμαστε στον πυρήνα το ίδιο άτομο με εκείνο που ήμασταν και εχθές. Αυτή η προσωπική αναπαράσταση του εαυτού μας μπορεί να αποκτήσει ουσιοκρατική υφή, προσδίδοντας στη ταυτότητά μια αναλλοίωτη υπόσταση που απλώς εκτυλίσσεται στο πέρασμα των χρόνων. Εκτός όμως από το προσωπικό επίπεδο της ταυτότητας υπάρχει και το κοινωνικό, το δημόσιο. Στο δημόσιο επίπεδο η ταυτότητα αναφέρεται στην ομοιότητα που έχουμε με συγκεκριμένους άλλους, και συνακόλουθα στις διαφορές μας από διαφορετικούς άλλους. Παρότι κάθε άτομο έχει ξεχωριστά χαρακτηριστικά ήδη από τη γέννησή του, τα χαρακτηριστικά που κυρίως χρησιμοποιούμε για να αυτοπροσδιοριστούμε κατασκευάζονται και επικοινωνούνται μέσα σε ένα κοινωνικό συγκείμενο (Darragh & Radovic, 2018; Finke & Sökefeld, 2021).

Κατά αναλογία με τα προηγούμενα, η μαθητική μαθηματική ταυτότητα δεν είναι στατική. Αντίθετα, κατασκευάζεται αφενός μέσα από τη συνεχή διαπραγμάτευση της συμμετοχής σε μαθηματικές πρακτικές και αφετέρου από την παραγωγή μαθηματικού λόγου μέσα και έξω από τη σχολική τάξη.

Από τις πρώτες τάξεις της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και ιδίως στις μεγαλύτερες, το σχολικό περιβάλλον είναι ασυνήθιστα τελετουργικό και περιοριστικό. Οι παραδοσιακές διδακτικές επιλογές διαιωνίζουν αντιλήψεις ότι τα μαθηματικά αποτελούν διαδικαστική υπόθεση ακολουθώντας προκαθορισμένες διαδρομές. Έτσι, οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν αναπτύσσουν τη συνεκτική νοηματοδότηση των μαθηματικών τους εμπειριών και χάνουν την ικανότητά τους στην αυτενέργεια (agency). Αποτέλεσμα αυτών των ενεργειών είναι οι μαθητές και οι μαθήτριες να απορρίπτουν τα μαθηματικά από τα πρώιμα στάδια ανάπτυξης της μαθηματικής τους ταυτότητας.

Παράλληλα με τις διδακτικές επιλογές, σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν και οι ενέργειες των συμμετεχόντων στο κοινωνικό συγκείμενο μιας σχολικής τάξης. Οι ενέργειές τους δηλώνουν τι είναι τα μαθηματικά για την κοινωνία, τι χαρακτηριστικά έχει η μαθηματική ικανότητα και επομένως τι χαρακτηριστικά (πρέπει) να αναπτύξει όποιος μαθαίνει μαθηματικά. Στερεότυπες δηλώσεις όπως «τα μαθηματικά είναι παντού», «τα μαθηματικά είναι δύσκολα» και «τα μαθηματικά είναι για λίγους», οι οποίες διαχρονικά κινούνται στα όρια ενός αστικού μύθου, δημιουργούν περαιτέρω συνδηλώσεις για την ουσία των μαθηματικών ως σχολικό μάθημα και ως πειθαρχία. Άλλες δηλώσεις όπως «λύνει γρήγορα τις ασκήσεις», «κάνει όλες τις πράξεις στο μυαλό του», «γνωρίζει τους ορισμούς απ' έξω/νεράκι», δημιουργούν ένα στερεότυπο πρότυπο για την ενασχόληση με τα μαθηματικά που συνδέεται με ένα άλλο πρότυπο, αυτό του καλού μαθητή και της καλής μαθήτριας στα μαθηματικά.

Η επίδραση όλων αυτών των κοινωνικών παραμέτρων στη διαμόρφωση μιας μαθητικής μαθηματικής ταυτότητας είναι καταλυτική. Ο καθορισμός του φυσικού, χρονικού και διαπροσωπικού πλαισίου μιας σχολικής τάξης κατασκευάζει τελικά τις μορφές ύπαρξης (ways of being) εντός και εκτός της σχολικής τάξης αναφορικά με την κοινωνική δραστηριότητα της ενασχόλησης με τα μαθηματικά (Boaler & Greeno, 2000; Faircloth, 2012; Radovic, et al., 2017). Ένας μαθητής ή μια μαθήτρια μπορεί να εντάξει μια τέτοια ετικέτα όπως «τα μαθηματικά είναι δύσκολα» στην απόδοση της δικής του ταυτότητας ή μπορεί να προσπαθήσει συνειδητά να δημιουργήσει την ταυτότητά του σε αντίθεση προς αυτήν. Μια ταυτότητα η οποία (μπορεί να) εκφράζεται και αναγνωρίζεται δημόσια. Η ταυτότητα επομένως εκτός από τις προσωπικές εννοιολογήσεις ενός ατόμου αφορά και στις κοινωνικές θέσεις, το κύρος και τους ρόλους που μπορεί να αναλάβει το άτομο, οι οποίοι με τη σειρά τους πληροφορούν τους γύρω του για τους κανόνες και τις αμοιβαίες προσδοκίες για αλληλεπίδραση (Σακονίδης, 2017; Graven & Heyd-Metzuyanim, 2019; Vågan, 2011).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Ο εκπαιδευτικός, η διδασκαλία και οι διδακτικές πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών

3.1. Διαμόρφωση και διαχείριση περιβαλλόντων μάθησης

Η μαθηματική εκπαίδευση του αυριανού πολίτη που οραματίζεται ένα ΠΣ διαμορφώνεται με βάση τα εκάστοτε επιστημονικά αλλά και κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά δεδομένα, από-πλαισιώνεται και επανα-πλαισιώνεται από (επίσημους και ανεπίσημους) πόρους (resources), λόγους (discourses) και πρακτικές (practices) που συνοδεύουν την πορεία του από την αρχική συγκρότησή του έως την αξιοποίησή του στην σχολική τάξη. Σε αυτήν τη διαρκή και πολύπλοκη πορεία μετασχηματισμού κεντρικό ρόλο διαδραματίζουν τα ***περιβάλλοντα μάθησης και η διδακτική διαχείριση***, καθώς αποτελούν τη 'σκηνή' όπου οι στόχοι μάθησης 'τίθενται σε εφαρμογή στην πράξη'.

Το νέο ΠΣ θεωρεί ότι η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών οφείλει να τροφοδοτείται με στοιχεία από τις σύγχρονες θεωρητικές προσεγγίσεις και τα ερευνητικά δεδομένα με οδηγό την ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού και τη μύηση των μαθητών στα χαρακτηριστικά της μαθηματικής επιστήμης. Σε αυτήν την κατεύθυνση, κεντρική θέση στο σχεδιασμό, την υλοποίηση και την αξιολόγηση της διδακτικής πράξης κατέχουν δομήματα που προέρχονται από διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις και διαθέτουν ισχυρό ερευνητικό αλλά και επαγγελματικό έρεισμα. Στα δομήματα αυτά ανήκουν οι έννοιες της *'**ενεργής μάθησης**'* και της '***γνωστικής σύγκρουσης***' (κονστρουκτιβιστική παράδοση), οι έννοιες της *'**δομής**'* και της '**ανακαλυπτικής**' ή της *'**μάθησης που βασίζεται στη διερεύνηση**'* (δομιστική παράδοση), οι έννοιες της ***'διαμεσολάβησης', 'συμμετοχής'/'επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης'***, *'**ζώνη επικείμενης ανάπτυξης**, '**σκαλωσιάς'/scaffolding*** (ιστορικο-κοινωνικο-πολιτισμική παράδοση) και οι έννοιες της '***μαθητείας'/'πλαισιοθετημένης μάθησης'***. Το ποια δομήματα και με ποιο τρόπο θα αξιοποιηθούν ή /και θα προταχθούν στην εκπαιδευτική πράξη είναι επιλογή του εκπαιδευτικού.

Ο Πίνακας υποδεικνύει προσανατολισμούς της διδακτικής πράξης στην τάξη που αφορούν τους εταίρους της μάθησης (μαθητή και εκπαιδευτικό).

Πίνακας: Κεντρικά Χαρακτηριστικά και Βασικές Αρχές Σχεδιασμού Περιβαλλόντων Μάθησης στο πλαίσιο του νέου ΠΣ

Περιβάλλοντα ατομικής οικοδόμησης της γνώσης	*Μαθητής & μάθηση*: Ο μαθητής μαθαίνει συμμετέχοντας ενεργά και αυτόνομα στην οικοδόμηση νοήματος μέσα από προσωπική διαπραγμάτευση και επανεξέταση των ατομικών του γνώσεων και εμπειριών *κατά τη διάδρασή του με τους συμμετέχοντες και το περιβάλλον του*, καλούμενος να διαχειριστεί και να παρακολουθήσει τις δικές του διαδικασίες κατασκευής νοήματος, αναλαμβάνοντας ο ίδιος την ευθύνη για τα μάθησή του (Cleary & Zimmerman, 2004).
	Εκπαιδευτικός & διδασκαλία: Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να θέτουν ερωτήματα και να διατυπώνουν τα συμπεράσματά τους, θέτει ανοιχτές ερωτήσεις και προσφέρει ιδέες και συμβουλές για να ξεπεραστούν δυσκολίες χωρίς να 'προδίδει' με ρητό τρόπο τις τελικές απαντήσεις (Pratt, 2008; Hmelo-Silver et al., 2007).
	Έργα και δραστηριότητες: Σχεδιασμός μαθηματικών έργων που βασίζονται στις εμπειρίες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών.

Περιβάλλοντα διερευνητικής/ ανακαλυπτικής μάθησης	*Μαθητής & μάθηση*: Οι μαθητές υποστηρίζονται να σκέφτονται και να δρουν επιστημονικά, υιοθετώντας ενεργό ρόλο ερευνητή με στόχο την «ανακάλυψη» αρχών, νόμων και κανόνων και την οικοδόμηση ουσιαστικής κατανόησης για το πρόβλημα που διερευνά. Καλούνται να θέτουν ερωτήσεις, να κάνουν προβλέψεις, να αναζητούν και να μελετούν πηγές πληροφοριών, να αναζητούν μαθηματικούς τρόπους διερεύνησης για να απαντήσουν στις ερωτήσεις τους, να ερμηνεύουν, να αξιολογούν και να επικοινωνούν αποτελεσματικά τις λύσεις και τα συμπεράσματά τους (Dorier, & Maass, 2020). *Εκπαιδευτικός & διδασκαλία*: Ο εκπαιδευτικός έχει ρόλους ενορχηστρωτή των μαθησιακών διαδικασιών, διευκολυντή και συμβούλου (facilitator) κατά τη διερεύνηση. Εστιάζει στην επιλογή έργων, στο σχεδιασμό της εξερεύνησής τους στην τάξη και στο είδος των δραστηριοτήτων που προωθούν και επηρεάζουν αποφασιστικά τη μάθηση, παρέχει σκαλωσιές για τη μάθηση των μαθητών, υιοθετεί προσεγγίσεις που προάγουν την περιέργεια, την ανάληψη πρωτοβουλιών, την διαπραγμάτευση, την αλληλεπίδραση και την επικοινωνία, καθώς και την ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών επίλυσης. *Έργα & Δραστηριότητες*: Μαθηματικά έργα που ενθαρρύνουν τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών.
Περιβάλλοντα επίλυσης προβλήματος	*Μαθητής & μάθηση*: Ο μαθητής μαθαίνει συμμετέχοντας ενεργά στην διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με σαφή μαθηματική στόχευση. Αξιοποιεί μαθηματικές γνώσεις, δεξιότητες και ικανότητες που ανέπτυξε για να διαμορφώσει κατάλληλες στρατηγικές. Συζητά με τους άλλους εταίρους της μάθησης για την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών που υιοθετεί (Hmelo-Silver, 2004), βελτιώνοντας έτσι ανώτερες γνωστικές λειτουργίες του (Blumenfeld et al., 1996; Vye et al., 1997). *Εκπαιδευτικός & διδασκαλία*: Ο εκπαιδευτικός δρα ως διευκολυντής και σύμβουλος της εργασίας των μαθητών. Περιορίζεται στην καθοδήγηση της συζήτησης στην τάξη – χωρίς ωστόσο να παρέχει λύσεις και πληροφορίες – στην ενθάρρυνση της σκέψης, στην παροχή ανατροφοδότησης και στην αξιολόγηση συνεργατικά με τους μαθητές. *Έργα & Δραστηριότητες*: Προβλήματα όσο γίνεται πιο αυθεντικά συνδεόμενα με τα βιώματα των μαθητών και το πιθανό μελλοντικό τους περιβάλλον, που διαθέτουν ικανοποιητικούς βαθμούς ελευθερίας και με βαθμό πολυπλοκότητας που θέτει προκλήσεις, παρακινεί και συμβαδίζει με τα ενδιαφέροντα των μαθητών.
Περιβάλλοντα συμμετοχικής/ συνεργατικής μάθησης	*Μαθητής & μάθηση*: Εστίαση στη συνεργασία των μαθητών κατά την διαδικασία κατασκευής του μαθηματικού νοήματος Μέσα από τις κοινωνικές διαπραγματεύσεις και τις αλληλεπιδράσεις αναδεικνύονται διαφορετικές απόψεις οι οποίες βοηθούν στην αποσαφήνιση των παρανοήσεων, στον εντοπισμό μη

	αποτελεσματικών λύσεων και στην επικοινωνία σχετικά με το μαθησιακό περιεχόμενο (Loyens & Gijbels, 2008). *Εκπαιδευτικός & διδασκαλία*: Ο δάσκαλος έχει το ρόλο του διαμεσολαβητή. Ενθαρρύνει τους μαθητές να αναλαμβάνουν την κυριότητα και να αισθάνονται την ευθύνη του μαθηματικού περιεχομένου (Stender, & Kaiser, 2015). *Έργα & Δραστηριότητες*: Σχεδιασμός μαθηματικών έργων που υποστηρίζουν τη συνεργασία των μαθητών και αξιοποιούν πολλαπλούς πόρους και εργαλεία.
Περιβάλλοντα μαθητείας	*Μαθητής & μάθηση*: Ο μαθητής αναπτύσσει γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες και διαδικασίες μέσω καθοδηγούμενης συμμετοχής σε αυθεντικές μαθησιακές εμπειρίες υπό την εποπτεία έμπειρου ατόμου (Dennen & Burner, 2008). Η καθοδηγούμενη συμμετοχή συνιστά κρίσιμο χαρακτηριστικό της γνωστικής μαθητείας και συχνά παρέχεται σιωπηλά. Η καθοδήγηση της συμμετοχής, για να είναι επιτυχής, πρέπει να πραγματοποιείται εντός της ζώνης εγγύτερης ανάπτυξης του μαθητή (ZPD). Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με έργα λίγο πιο δύσκολα από το ό, τι μπορούν να επιτύχουν μόνοι τους και αναζητούν τη συνεργασία με άλλους για την διεκπεραίωσή τους (Rogoff, 1990, p. 16). Η συνεργασία με άλλους πιο έμπειρους αναμένεται να οδηγήσει με τον χρόνο σε μετακίνηση από μια θέση παρατήρησης σε μια ενεργό πρακτική. *Εκπαιδευτικός & διδασκαλία*: Ο εκπαιδευτικός δρα ως μέντορας, ως διαμεσολαβητής και ως προπονητής (coach). Φροντίζει να παρέχει στους μαθητές εμπειρίες που συνδέουν επαρκώς τη 'θεωρία' με την πρακτική μέσα από προσομοιώσεις αυθεντικής πρακτικής που καθιστούν ορατές στους μαθητές καθιερωμένες διαδικασίες, ώστε να μπορούν να τις παρατηρήσουν και στη συνέχεια να ασκηθούν σε αυτές (Collins et al., 1989). *Έργα & Δραστηριότητες*: Αυθεντικές εργασίες προσομοίωσης πραγματικών καταστάσεων, η πολυπλοκότητα και η ποικιλομορφία των οποίων αυξάνει με την πάροδο του χρόνου, καθώς ο εκπαιδευόμενος γίνεται πιο έμπειρος.

3.2. Επιλογή μαθηματικών έργων και διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να αποσαφηνίσουμε και να διαχωρίσουμε το μαθηματικό έργο από τη μαθηματική δραστηριότητα. Το μαθηματικό έργο είναι το έργο ή η εργασία που αναθέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές ενώ η μαθηματική δραστηριότητα αφορά τη δράση που προκύπτει στην πορεία εκπόνησης του μαθηματικού έργου που έχει ανατεθεί.

Μια κεντρική διδακτική πρακτική του εκπαιδευτικού είναι η επιλογή του μαθηματικού έργου συνδέεται άμεσα, αλλά όχι αποκλειστικά, με τις μαθηματικές πρακτικές που θα αναπτύξει ο μαθητής. Ο εκπαιδευτικός δεν περιορίζει τις επιλογές του σε έργα που εστιάζουν στην εφαρμογή αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων μα επιλέγει έργα που πλησιάζουν στα ενδιαφέροντα ή τις εμπειρίες των μαθητών, έργα που αντλούν προβληματισμούς από πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας, τα οποία επιδέχονται διαφορετικές μεθόδους επίλυσης και απαιτούν τεκμηριωμένες επεξηγήσεις και παραδοχές (Kwon, Park & Park, 2006; Schoenfeld, 2016; Sullivan, 2003) και γενικότερα που εμπλέκουν τους μαθητές στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού (Artigue, 2012).

Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη. Τα μαθηματικά έργα διαφοροποιούνται ως προς το μαθηματικό τους περιεχόμενο (π.χ. άλγεβρα ή στοχαστικά μαθηματικά), ως προς την οργάνωση που απαιτούν (ατομικά ή ομαδικά), ως προς τη χρήση εργαλείων που προτείνουν (π.χ. χειραπτικά ή ψηφιακά) και το είδος τους. Το είδος του μαθηματικού έργου μπορεί να αφορά τις γνωστικές απαιτήσεις του και τη συνθετότητά του (π.χ. απομνημόνευση ή διερεύνηση;), το πλαίσιό του (π.χ. αυθεντικό ή μαθηματικό;), τις δράσεις που ενθαρρύνει (π.χ. απόδειξη ή γεωμετρική κατασκευή;) και τις μαθηματικές γνωστικές διεργασίες/πρακτικές που ενδυναμώνει. Οι τελευταίες δύο κατηγορίες συνδέονται άμεσα με τη μαθηματική δραστηριότητα που θα αναπτύξει ο μαθητής (Τζεκάκη, 2011). Γενικότερα, ως μαθηματική δραστηριότητα εννοούμε τις μαθηματικές δράσεις τις οποίες αναπτύσσει ο μαθητής (π.χ. αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, αναγνώριση και αναζήτηση κανονικοτήτων και μαθηματικής δομής, αναζήτηση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων), αξιοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων (φυσικών, όπως ένα μοιρογνωμόνιο ή νοητικών, όπως μια γραφική παράσταση) με σκοπό να διαχειριστεί και να απαντήσει στο μαθηματικό έργο που του έθεσε ο εκπαιδευτικός. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι η απλή εμπλοκή των μαθητών με ένα μαθηματικό έργο (π.χ. επίλυση εξίσωσης), δεν είναι αρκετό για να θεωρηθεί ότι ο μαθητής αναπτύσσει μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα. Μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν μια ποικιλία μαθηματικών πρακτικών που θα τους οδηγήσουν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως απόδειξη και γενίκευση ή ισοδυναμία και μετασχηματισμοί) και τα αντίστοιχα μαθηματικά νοήματα (Τζεκάκη, 2014).

Με την έννοια αυτή, στη μαθηματική δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός εστιάζει στο ‘πως δρά’ ο μαθητής ενώ κάποια βασικά ερωτήματα που μπορεί να τον απασχολούν είναι: ‘τι είδους μαθηματικό έργο να δώσω στους μαθητές ώστε να αναπτύξουν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα’; ‘με ποιο τρόπο μπορώ να διαφοροποιήσω το μαθηματικό έργο ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες όλων των μαθητών της τάξης;’ ‘τι είδους εργαλεία θα δώσω στους μαθητές ώστε να τους υποστηρίξω στην ανάπτυξη μαθηματικών δράσεων;’ ‘πώς θα αξιολογήσω αν μια δράση που ανέπτυξαν οι μαθητές είναι μαθηματική δράση;’ ‘πώς θα μπορέσω να διαχειριστώ διδακτικά το μαθηματικό έργο (π.χ. τι είδους ερωτήσεις να θέσω; τι είδους επεκτάσεις να κάνω;) ώστε να μην καταλήξουν οι μαθητές σε μια τετριμμένη μαθηματική δραστηριότητα;’.

Ενδεικτικά, στη βιβλιογραφία προτείνονται τρία στάδια αξιοποίησης ενός μαθηματικού έργου στη σχολική τάξη καθώς και ο ρόλος που έχει ο εκπαιδευτικός σε κάθε ένα στάδιο (Trevisan et al., 2020). Στο πρώτο στάδιο της εισαγωγής του μαθηματικού έργου στην τάξη, ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν το πλαίσιο του έργου και αν κρίνει απαραίτητο και το μαθηματικό του περιεχόμενο. Παράλληλα, ενθαρρύνει τους μαθητές στη χρήση κατάλληλων εργαλείων (π.χ. χειραπτικών, ψηφιακών, οπτικών αναπαραστάσεων) για την υποστήριξη της εμπλοκής όλων των μαθητών (González, & Eli, 2017). Στο δεύτερο στάδιο της αυτόνομης εργασίας, οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή σε ομάδες, ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά μαζί τους για να διαγνώσει τις ανάγκες τους και λαμβάνει αποφάσεις για τον τρόπο δράσης του που μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με την ομάδα/μαθητή που εκτελεί την αυτόνομη εργασία. Στο τρίτο στάδιο της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης, οι μαθητές παρουσιάζουν τους τρόπους και τις στρατηγικές που ανέπτυξαν και έτσι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που παρουσιάστηκαν (Dooley, 2009; Stein et al., 2008).

3.3. Διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού

3.3.1 Η διδακτική διαχείριση της συμβολής των μαθητών

Μια κεντρική διδακτική πρακτική του εκπαιδευτικού είναι η διαχείριση του λάθους των μαθητών. Στις σύγχρονες θεωρίες τα λάθη δεν αποτελούν εκδηλώσεις μιας γνωστικής, προσωπικής κατάστασης του μαθητή. Αντίθετα, αντιμετωπίζονται ως αναπόσπαστο κομμάτι της μαθησιακής διαδικασίας και 'εφαλτήριο' κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου από τα ίδια τα παιδιά (Borasi, 1987). Τα λάθη των μαθητών μπορεί να είναι 'μικρογραφίες' λαθών που εμφανίστηκαν στην ιστορία των Μαθηματικών και οφείλονται στην ίδια τη φύση του μαθηματικού αντικειμένου, αλλά και λανθασμένες αντιλήψεις ή παρανοήσεις/ασθενείς εννοιολογήσεις σχετικές με μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες (Drews et al., 2005).

Σύμφωνα με την προηγούμενη οπτική, η διδακτική διαχείριση του λάθους αποκτά ιδιαίτερη σημασία. Οι πρακτικές εποικοδομητικής διδακτικής διαχείρισης του λάθους μπορούν να περιλαμβάνουν α) την ηθελημένη εισαγωγή τους στη διδασκαλία, είτε με κατάλληλες ερωτήσεις ώστε να αναδειχθούν οι λανθασμένες αντιλήψεις/παρανοήσεις των μαθητών, είτε παρουσιάζοντας λάθη φανταστικών μαθητών προς συζήτηση στην τάξη; β) στην περίπτωση λάθους, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους ή/και να τον συγκρίνουν με αυτόν των συμμαθητών τους, και γ) τη διαμόρφωση κλίματος ασφάλειας ώστε οι μαθητές να μην ρισκάρουν να εκφράσουν τις όποιες αντιλήψεις τους, εσφαλμένες ή μη (Bray, 2013).

3.3.2 Οι δράσεις επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης στην τάξη

Οι δράσεις επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης στην τάξη που επιλέγει ο εκπαιδευτικός καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό και το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας που θα αναπτύξουν οι μαθητές. Ενδεικτικά, ο εκπαιδευτικός α) απευθύνει κυρίως ερωτήσεις ανοιχτού τύπου που αποσκοπούν να εκφράσουν οι μαθητές τις ιδέες και τις απόψεις τους, β) ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν στη συζήτηση αναπτύσσοντας επιχειρήματα, τεκμηριώνοντας τους ισχυρισμούς τους ή/και ανασκευάζοντας τους ισχυρισμούς και τα επιχειρήματα των συμμαθητών τους, γ) ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τους συλλογισμούς και τα επιχειρήματά τους και αυτό αφενός βοηθά τους μαθητές στο να διερευνήσουν τυχόν λάθη και παρανοήσεις τους αφετέρου βοηθά και τον ίδιο τον εκπαιδευτικό να κατανοήσει τη σκέψη των μαθητών, δ) υποστηρίζει τη συνοχή της συζήτησης ανακεφαλαιώνοντας ό,τι έχει ειπωθεί θέτοντας νέα ερωτήματα, ε) προωθεί την επικοινωνία ανάμεσα στους μαθητές της τάξης υποστηρίζοντας τις μεταξύ τους συζητήσεις οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να δημιουργήσουν νέες ερωτήσεις (Cengiz et al., 2011; Chapin et al., 2009) και (στ) διαχειρίζεται διδακτικά πολλαπλές εξηγήσεις και χρησιμοποιεί τις ιδέες των μαθητών σαν πηγές επέκτασης της συζήτησης και της μαθηματικής τους κατανόησης (Sherin, 2002; da Ponte & Quaresma, 2016). Με τις παραπάνω πρακτικές ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει ταυτόχρονα τη μαθηματική πρόκληση και διαμορφώνει μια θετική κουλτούρα μάθησης θέτοντας υψηλές προσδοκίες για όλους τους μαθητές (Potari & Jaworski, 2002)

3.4. Οι Πόροι του εκπαιδευτικού στο νέο ΠΣ

Η έννοια των πόρων του εκπαιδευτικού (mathematics teacher resources), πέραν των παραδοσιακών πόρων που είναι τα σχολικά εγχειρίδια και τα συνοδευτικά βιβλία του μαθητή (τετράδια εργασιών, λύσεις ασκήσεων κ.λπ.), αναφέρεται σε ένα οργανωμένο και συνεκτικό σύνολο υποστηρικτικών υλικών που συνοδεύει ένα πρόγραμμα σπουδών. Συστατικό στοιχείο του συνόλου αυτού αποτελεί η συστηματική οργάνωση των μερών του ώστε να εκφράζουν τις γενικές αρχές του ΠΣ μέσα από αλληλένδετη σειρά ενός πλαισίου αρχών, μέσων και υλικών.

Ένα σύστημα πόρων έχει ταυτόχρονες και διαφορετικές λειτουργίες: μπορεί να απευθύνεται στους δασκάλους και στους μαθητές και ταυτόχρονα να διαμεσολαβεί μεταξύ τους, μπορεί να έχει στοιχεία που αφορούν στη διδασκαλία στην τάξη, στους στόχους που τίθενται κ.λπ.

Οι πόροι μπορεί να παρέχονται μαζί με το ΠΣ ή να προέρχονται από μια ποικιλία (εξωτερικών του ΠΣ) πηγών: διαφορετικά συμπληρωματικά ή βοηθητικά εγχειρίδια, άλλες πηγές πρωτογενών υλικών, ψηφιακοί πόροι από άλλους (ιδιωτικούς και δημόσιους) παρόχους είναι μερικοί από τις δυνατές επιλογές πόρων που έχει σήμερα ένας μαθητή ή εκπαιδευτικός.

Ως πόροι του ΠΣ για τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοούνται όλα τα έντυπα και ψηφιακά τεχνουργήματα (artefacts) που έχουν σχεδιαστεί για να υποστηρίξουν το πρόγραμμα διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών. Σε αυτούς συμπεριλαμβάνονται πόροι που αναπτύσσονται και χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς (και μαθητές) όταν αλληλοεπιδρούν στο πλαίσιο της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών. Επίσης, συμπεριλαμβάνονται τα συνοδευτικά του κείμενα του ΠΣ όπως ο οδηγός του εκπαιδευτικού, το ψηφιακό υλικό, οι ενδεικτικές δραστηριότητες και οι συνθετικές εργασίες.

Το ψηφιακό υλικό αναφέρεται σε δημιουργία και χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών, εφαρμογών σε διαδραστικά περιβάλλοντα καθώς και επικοινωνία μέσω του ιστού (όπως πλατφόρμες, wikis ή άλλα εργαλεία δικτύωσης). Οι ψηφιακοί πόροι αποτελούν τεχνουργήματα (artefacts) τα οποία εργαλειοποιούνται είτε μέσω της μεταβολής της πρακτικής και των σχημάτων που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός (instrumentation) είτε μέσω του μετασχηματισμού των ίδιων των πόρων (instrumentalization) από τον εκπαιδευτικό. Αυτό οδηγεί στη λεγόμενη εργαλειακή ενορχήστρωση (Trouche, 2004), κατά την οποία ο δάσκαλος ενορχηστρώνει τη χρήση των ψηφιακών πόρων με τρόπο που να ανταποκρίνεται στο διδακτικό σχεδιασμό του. Η λειτουργία των χειραπτικών και ψηφιακών μέσων επηρεάζει σε επιστημολογικό, γνωστικό και σε επίπεδο σημαινόμενου τη διδασκαλία. Ως αποτέλεσμα, ενισχύεται η μαθησιακή διαδικασία και ταυτόχρονα εμπλουτίζεται η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών που τα χειρίζονται (Bartolini Bussi & Maschietto, 2008). Παράλληλα όταν οι πόροι παρέχουν τη δυνατότητα δικτύωσης, συντελούν στη δημιουργία εικονικών κοινοτήτων μάθησης, μεταξύ μαθητών, δασκάλων ή και μεικτών οι οποίες προάγουν .

Ο **οδηγός του εκπαιδευτικού** στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού ώστε να μπορέσει να υλοποιήσει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη φιλοσοφία του ΠΣ. Ο οδηγός δεν δίνει στον εκπαιδευτικό "συνταγές" για το τι θα κάνει στην τάξη του αλλά προσπαθεί να τον βοηθήσει να:

- κατανοήσει τον εκπαιδευτικό προσανατολισμό του νέου ΠΣ και να αναγνωρίσει τις αλλαγές τόσο στο περιεχόμενο όσο και στις διδακτικές προσεγγίσεις που αυτό εισάγει,
- συνειδητοποιεί τις διδακτικές επιλογές του καθώς και το αποτέλεσμα που αυτές μπορούν να έχουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών,
- αναγνωρίζει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε μαθηματική ενότητα και να τα συνδέει με αυτά που οι μαθητές αναμένεται να έχουν επιτύχει στις προηγούμενες τάξεις ή θα επιτύχουν στις επόμενες,
- πειραματίζεται με νέες διδακτικές προσεγγίσεις δίνοντας του παραδείγματα διαχείρισης που θα επιστρέψουν την πραγματοποίηση των διδακτικών του στόχων που διαμορφώνει με βάση το ΠΣ.

Οι **προτεινόμενες δραστηριότητες και οι συνθετικές εργασίες** έχουν σκοπό να αναδείξουν τις βασικές αρχές και κατευθύνσεις του ΠΣ μέσα από την συνοπτική παράθεση διαφορετικών προτεινόμενων δραστηριοτήτων και συνθετικών εργασιών. Έτσι ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθηθεί να σχεδιάζει αποτελεσματικότερα τη διδασκαλία του αξιοποιώντας τα παραδείγματα που του προτείνονται.

Οι πόροι του ΠΣ περιλαμβάνουν τα κείμενα του ΠΣ και τα συνοδευτικό του υλικό όπως ο οδηγός του εκπαιδευτικού , το ψηφιακό υλικό, οι ενδεικτικές δραστηριότητες και οι συνθετικές εργασίες. Η χρήση των παρεχόμενων πόρων που κάνει ο εκπαιδευτικός είναι κομβικής σημασίας για τη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης και επομένως συντελεί στην επαγγελματική εξέλιξη του εκπαιδευτικού και τη βελτίωση της ποιότητας της παρεχόμενης εκπαίδευσης (Gueudet & Trouche 2009). Οι προσφερόμενοι πόροι οφείλουν να ικανοποιούν κάποιες βασικές αρχές, όπως το να διευκολύνουν την καθημερινή διδακτική πράξη ως προς την επίτευξη συγκεκριμένων διδακτικών στόχων, ως προς το περιεχόμενο (διδακτικά και γνωστικά), και ως προς τη δυνατότητα μετασχηματισμού και μεταφοράς τους σε κάθε κατάσταση (Jameau & Le Hénaff, 2018; Van Steenbrugge et al., 2018).

Υιοθετούμε την συμμετοχική οπτική σύμφωνα με την οποία οι πόροι επηρεάζουν αλλά και διαμορφώνονται από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διδακτική πράξη: ο δάσκαλος επιλέγει τους κατάλληλους πόρους ή εμπλουτίζει τους προσφερόμενους, τους ερμηνεύει, τους προσαρμόζει και τους ανασκευάζει σύμφωνα με τους στόχους και τους μαθητές του σε μια δυναμική και διαλεκτική σχέση που μεταβάλλεται διαρκώς (Remillard & Heck, 2014). Κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας του μαθήματος, ο εκπαιδευτικός επεξεργάζεται τους διαθέσιμους πόρους διαβάζοντας, ερμηνεύοντας και αποτιμώντας το περιεχόμενό τους. Κατά τη φάση της εφαρμογής στην τάξη, ο εκπαιδευτικός μπορεί να τροποποιήσει ή να εμπλουτίσει τους χρησιμοποιούμενους πόρους (Brown & Harris, 2009).

Οι στάσεις και οι πρακτικές των εκπαιδευτικών σχηματοποιούν την εφαρμογή των πόρων αλλά ταυτόχρονα το περιεχόμενο και τα χαρακτηριστικά των πόρων επηρεάζουν τους εκπαιδευτικούς μεταβάλλοντας τις διδακτικές τους συνήθειες και πεποιθήσεις. Ο μετασχηματισμός και η οικειοποίηση των πόρων είναι διαδικασίες που είναι αλληλένδετες και πραγματοποιούνται μέσα στο συνεχές φάσμα της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί προσαρμόζουν τους πόρους στις ανάγκες και τις συνήθειες τους. Αυτή η διαδικασία εξατομίκευσης του σχεδιασμού και ερμηνείας των πόρων συνεχίζεται και κατά τη διάρκεια της χρήση τους μέσα στη τάξη, υπάρχει δηλαδή ένας διαρκής μετασχηματισμός πριν και κατά την διάρκεια της διδακτικής πράξης.

Έτσι σταδιακά ο εκπαιδευτικός σχηματίζει ένα δικό του «σύστημα πόρων» το οποίο προεκτείνει και αναδιαμορφώνει το αρχικό προσφερόμενο προς αυτόν (Trouche et al., 2018). Οι πόροι δημιουργούν ένα διδακτικό περιβάλλον (milieau) στο οποίο ανακαλύπτεται/κατασκευάζεται/διαμεσολαβείται η μαθηματική γνώση και αποτελούν τη βάση δημιουργίας ενός δεύτερου επίπεδου πόρων (οι αντιδράσεις των μαθητών, οι απαντήσεις και οι διάλογοι που διαμείβονται), το οποίο είναι εξίσου σημαντικό για την αποτίμηση της διδασκαλίας και μάθησης.

Το παρόν ΠΣ πέρα από τους πόρους που το συνοδεύουν, δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να επεκτείνει ή να συνδυάσει τους παρεχόμενους πόρους με άλλους εξωτερικούς πόρους που κρίνει κατάλληλους. Οι πόροι που θα προσφερθούν, θα χρησιμοποιηθούν και θα εξελιχθούν από τους μαθητές και εκπαιδευτικούς δημιουργώντας ένα διαρκές επεκτεινόμενο σύνολο πόρων.

3.5. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη διαμόρφωση της μαθηματικής κουλτούρας στην τάξη

Η στροφή προς τις κοινωνικο-πολιτισμικές αναγνώσεις της μάθησης των μαθηματικών φώτισε αναπόφευκτα την ανάγκη ανάδειξης και μελέτης συνιστωσών της κουλτούρας της τάξης των μαθηματικών, εκείνων των προτύπων διεπαφής με άλλα λόγια που σχηματίζουν την κανονικότητα της ζωής σε μια σχολική τάξη τα οποία επιδρούν στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (McNeal & Simon, 2000; Nickson, 1994).

Η κουλτούρα είναι όλα όσα κατέχουν, σκέφτονται και πράττουν οι άνθρωποι ως μέλη μιας συλλογικότητας, δηλαδή τα υλικά αγαθά, οι ιδέες, οι αξίες, οι στάσεις και τα πρότυπα συμπεριφοράς τους (Ferraro & Andreatta, 2014). Αυτές οι συνιστώσες είναι αλληλένδετες στο βαθμό που καθίσταται δύσκολο να τις διαχωρίσουμε στις καθημερινές της εκφάνσεις της κουλτούρας. Η φύση του γνωστικού αντικειμένου, η προσωπική ή η κοινωνική του αξία, ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται και οι ρόλοι των δασκάλων και των μαθητών κατά τη διδασκαλία του, οικοδομούν την κουλτούρα της σχολικής τάξης των μαθηματικών και παράγει αντιλήψεις, συμπεριφορές και στάσεις γύρω από το διδακτικό αντικείμενο και τη διδασκαλία του. Η κουλτούρα αυτή γίνεται έμμεσα αντιληπτή παρατηρώντας την σχολική τάξη «από μέσα» και γνωρίζοντας τους κανόνες της, τον τρόπο που διαπραγματεύεται και οικοδομεί τη γνώση, τις αξίες και στάσεις στις οποίες στηρίζεται, αλλά ταυτόχρονα τις παράγει και αναπαράγει. Με άλλα λόγια η κουλτούρα της σχολικής τάξης των μαθηματικών δεν μπορεί να παρατηρηθεί άμεσα αλλά καθορίζεται από αόρατους μα υπαρκτούς κανόνες και εμπειρίες που εκπαιδευτικοί και μαθητές φέρνουν μαζί τους και επηρεάζουν τις ενέργειες και τις μεταξύ τους σχέσεις (Feiman-Nemser & Floden, 1986; Nickson, 1994).

Μέσα σε μια σχολική τάξη τα διαθέσιμα αντικείμενα και τα τεχνουργήματα, οι γνώσεις και οι εμπειρίες των συμμετεχόντων, οι αντιλήψεις, οι φιλοδοξίες και τα συναισθήματά τους, καθώς και η φύση των προτύπων επικοινωνίας όπως επιτελούνται μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών, δημιουργούν διαφορετικές κουλτούρες και—επομένως—διαφορετικές πλαισιώσεις για την ενίσχυση της μάθησης των μαθηματικών. Μια αυστηρά δομημένη, ατομικοποιημένη, μετωπική διδασκαλία οικοδομεί μια κουλτούρα που προβάλλει τα μαθηματικά ως μια συλλογή από εννοιολογικά αδιαφανείς διαδικασίες και επιφυλάσσει για τους μαθητές τον ρόλο του καταναλωτή αυτών των διαδικασιών μέσω της εξάσκησης και της απομνημόνευσης. Αντίθετα, μια διδασκαλία που βασίζεται στην διερεύνηση, τη διαπραγμάτευση και τη συζήτηση εκτιμά και υποστηρίζει για τους μαθητές ρόλους που επικεντρώνονται στην κατανόηση συνδεδεμένων μαθηματικών γνώσεων και σχέσεων που κατασκευάζονται ενεργά μέσω της αλληλεπίδρασης με άλλους.

Αυτό όμως σημαίνει ότι κάθε κοινωνία, από την απλούστερη ως την πιο σύνθετη μορφή της, αναπτύσσει έστω κάποιον βαθμό, διαφορετική κουλτούρα από τις υπόλοιπες παρότι συσχέτιση της κουλτούρας με τη σχολική τάξη των μαθηματικών μπορεί να οδηγήσει στην παρανόηση ότι αυτή είναι κοινή για όλες τις σχολικές τάξεις (Nickson, 1994). Επομένως η κουλτούρα των μαθηματικών διαφοροποιείται από τάξη σε τάξη ανάλογα με τις αλληλοσυσχετίσεις των συνιστωσών που τη συνθέτουν. Επιπρόσθετα η κουλτούρα μιας τάξης μαθηματικών δεν παραμένει σταθερή. Καμιά κουλτούρα δεν παραμένει στατική στο πέρασμα του χρόνου, με τις αλλαγές να συντελούνται από εσωτερικούς ή εξωτερικούς παράγοντες (Angier & Povey, 1999). Ένα τεχνούργημα ή μια νέα χρήση ενός οικείου αντικειμένου, μια ιδέα ή ένα πρότυπο συμπεριφοράς, μπορούν να διαφοροποιήσουν τους κανόνες και τις πρακτικές μιας σχολικής τάξης. Επιπρόσθετα, οι τελευταίοι διαμορφώνονται από το ευρύτερο πλαίσιο στο όποιο η τάξη είναι ενσωματωμένη, δηλαδή το σχολείο, την τοπική κοινότητα, τις οδηγίες και τις αρχές του προγράμματος σπουδών καθώς και τους πόρους που το συνοδεύουν (De Corte et al., 2010).

Έχουν υιοθετηθεί διάφορες μεταφορές για να παρουσιάσουν τον ρόλο του εκπαιδευτικού στην τάξη. Μια μεταφορά/από αυτές τον αναγνωρίζει ως ‘ενορχηστρωτή’ (Drijvers, et al., 2010; Smith, et al., 2009) μιας και συντονίζει τη συμμετοχή των μαθητών στις συζητήσεις στην ολομέλεια της τάξης. Μια άλλη μεταφορά παρουσιάζει των εκπαιδευτικό ως ‘διακριτικό βοηθό και πλοηγό’ που υποστηρίζει και πλοηγεί την προσοχή των μαθητών σε θέματα μάθησης (Lin, 2000). Επίσης, ο Radford (2014) για να δώσει έμφαση στην αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού-μαθητών που ‘δουλεύουν μαζί’ για να πετύχουν ένα κοινό στόχο, την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, παρομοιάζει τη σχέση αυτή με τη σχέση ‘μαέστρου-ορχήστρας’ (Radford, 2014, p. 11). Ακριβώς όπως ο μαέστρος ο οποίος μπορεί να γνωρίζει τη 10η Συμφωνία του Σοστακόβιτς από την πρώτη νότα έως την τελευταία χρειάζεται την ορχήστρα για να δώσει ζωή στις νότες και να γίνουν αντικείμενο των αισθήσεών μας, έτσι και ο εκπαιδευτικός μπορεί να έχει άριστη μαθηματική γνώση αλλά μόνο αλληλεπιδρώντας με τους μαθητές αυτή η γνώση μπορεί να γίνει αντικείμενο μάθησης.

Παρότι οι παραπάνω μεταφορές αδυνατούν να αποδώσουν όλες τις πτυχές του ρόλου του εκπαιδευτικού στην τάξη, δείχνουν ότι ο ρόλος του είναι πολυδιάστατος και απαιτητικός. Η βασική προϋπόθεση είναι να μετασχηματίσει τη μαθηματική γνώση σε σχολική μαθηματική γνώση.

Στο πλαίσιο αυτό, εκτός της γνώσης του μαθηματικού περιεχομένου, ο εκπαιδευτικός διακρίνει τις βασικές μαθηματικές ιδέες που κωδικοποιούνται σε μια διδακτική ενότητα μέσα στο ευρύτερο δίκτυο μαθηματικών εννοιών. Με αυτό τον τρόπο θα μπορέσει να επικεντρώσει διδακτικά το ενδιαφέρον του στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και τα αντίστοιχα μαθηματικά νοήματα. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός οργανώνει και διαχειρίζεται τη μαθησιακή διαδικασία αναπτύσσοντας στρατηγικές διαφοροποίησης και συμπερίληψης, προσαρμόζοντας για παράδειγμα τη μαθηματική πρόκληση σύμφωνα με τις ανάγκες των μαθητών. Επιπρόσθετα ενισχύει τις συναισθηματικές πτυχές της μάθησης, όπως την αυτοεκτίμηση και αυτοπεποίθηση των μαθητών, ενώ αξιοποιεί την ετερότητα των μαθητών στην αλληλεπίδραση και την επικοινωνία στην τάξη. Ταυτόχρονα με τα προηγούμενα, ο εκπαιδευτικός έχει την ευθύνη του σχεδιασμού (ή επανα-σχεδιασμού) των μαθηματικών έργων (Trigueros et al., 2014), αλλά και της επικύρωσης και της αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης των μαθητών (Morgan, 2000). Όλα τα παραπάνω θέτουν νέες προκλήσεις για τον εκπαιδευτικό καθώς χρειάζεται όχι μόνο να σχεδιάσει και να οργανώσει τη μαθησιακή διαδικασία αλλά και να ερμηνεύσει μη αναμενόμενες καταστάσεις και να δράσει άμεσα και ανάλογα. Εξάλλου, μπορεί η μάθηση να είναι μια διαδικασία που αναπτύσσεται και εξελίσσεται σε βάθος χρόνου, η διδασκαλία όμως διαδραματίζεται σε πραγματικό χρόνο και αυτό θέτει καθημερινές προκλήσεις για τον κάθε εκπαιδευτικό.

3.6 Η αξιολόγηση για τη μάθηση ως κεντρική συνιστώσα της διδακτικής πράξης

Η *αξιολόγηση* συμβάλλει στην εξέλιξη της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών και των μαθητριών και υποστηρίζει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων για τη διδασκαλία και τη μάθηση (NCTM, 2014). Η αξιολόγηση δεν συνιστά μια διακριτή συνιστώσα της διδασκαλίας, αλλά συμπεριλαμβάνει τις διδακτικές πρακτικές και αναδεικνύει τις κατανοήσεις που έχουν επιτευχθεί.

Οι μορφές αξιολόγησης εντάσσονται γενικότερα σε δύο κυρίως κατευθύνσεις, την τελική και τη διαμορφωτική. Η *τελική* αξιολόγηση συνιστά μια αποτίμηση αθροιστικού χαρακτήρα, η οποία υποστηρίζει ελάχιστα τις διδακτικές αποφάσεις ή τον εντοπισμό παρανοήσεων, καθώς λειτουργεί αποσπασματικά. Με τη *διαμορφωτική* αξιολόγηση καθορίζεται το “σημείο” στο οποίο το άτομο τοποθετείται γνωστικά σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, ενώ η τοποθέτηση αυτή ερμηνεύεται και αξιοποιείται για τη λήψη αποφάσεων και για τον επανασχεδιασμό της διδασκαλίας. Βασικές πτυχές της διαμορφωτικής αξιολόγησης αποτελούν (α) ο προσδιορισμός του “σημείου” στο οποίο τοποθετείται γνωστικά το άτομο, (β) ο καθορισμός των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΠΜΑ), (γ) η επιλογή τρόπων επίτευξης των ΠΜΑ και (δ) ο σχεδιασμός για μελλοντική δράση (van de Walle, 2017).

Με βάση την προβληματική που αναπτύχθηκε παραπάνω, υιοθετείται η προσέγγιση της αξιολόγησης που στοχεύει στη μάθηση (assessment for learning) και ανατροφοδοτεί μαθητές και εκπαιδευτικούς. Η *αξιολόγηση για τη μάθηση* αξιοποιεί το σύνολο των διαδικασιών αξιολόγησης, τόσο τις διαμορφωτικές όσο και τις αθροιστικές, ενώ πραγματοποιείται περισσότερες από μία φορές κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Στην αξιολόγηση για τη μάθηση, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την αξιολόγηση ως εργαλείο διερεύνησης της γνώσης και των ικανοτήτων των μαθητών, των παρανοήσεων, των προκαταλήψεων ή των ελλειμμάτων που μπορεί να έχουν (Black, 2015).

Τα *εργαλεία αξιολόγησης* που προτείνονται στο πλαίσιο της αξιολόγησης με στόχο τη μάθηση δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να παράγει δεδομένα ώστε να αποκτήσει μια συνολική θέαση της μαθησιακής πορείας και της διδασκαλίας και να λάβει τεκμηριωμένες αποφάσεις για την ενίσχυση της μάθησης και την εξέλιξη της διδασκαλίας. Σε αυτή την κατεύθυνση η αξιολόγηση, η διδασκαλία και η μάθηση αλληλοτροφοδοτούνται.

Η προσέγγιση της αξιολόγησης για τη μάθηση υιοθετεί μια κυκλική αντίληψη *σύνδεσης της αξιολόγησης με τις διδακτικές πρακτικές* του εκπαιδευτικού. Ειδικότερα, η αξιολογική διαδικασία θεωρείται πλήρως ενσωματωμένη στη διδασκαλία και αναπτύσσεται σε τέσσερα στάδια: α) Σχεδιασμός της αξιολόγησης & διατύπωση προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων, β) Παραγωγή δεδομένων με χρήση πολλαπλών εργαλείων, γ) Ερμηνεία δεδομένων & εξαγωγή συμπερασμάτων, δ) Αξιοποίηση αποτελεσμάτων και λήψη αποφάσεων.

Η κριτική διερεύνηση της μάθησης και της διδασκαλίας, ο σχεδιασμός, η μάθηση μέσα από τη διδακτική πρακτική και η ανάπτυξη αναστοχαστικών διαδικασιών ως μέρος του επανασχεδιασμού της διδασκαλίας και της αξιολόγησης συνιστούν ένα πλαίσιο ανάπτυξης των διδακτικών πρακτικών αλλά και του ίδιου του εκπαιδευτικού (Κλώθου & Σακονίδης, 2015).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Ο εκπαιδευτικός ως κριτικά αναστοχαζόμενος επαγγελματίας

4.1 Ο εκπαιδευτικός ως συνδιαμορφωτής του ΠΣ

Ανεξάρτητα από τους πόρους που αξιοποιούν, οι εκπαιδευτικοί συνδιαμορφώνουν μαζί με τους μαθητές αυτό που τελικά διδάσκεται μέσα στη σχολική τάξη. Στο συγκεκριμένο κοινωνικό πολιτισμικό συγκείμενο της σχολικής τάξης, η καθημερινή διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να ιδωθεί ως μια δυναμική διαδικασία υλοποίησης του προγράμματος σπουδών. Μέσα από αυτή την οπτική, αναγνωρίζουμε ότι η ανάπτυξη του ΠΣ αρχίζει με το σχεδιασμό του μα δεν τελειώνει με την εκτύπωση των σχολικών βιβλίων, αφού συνεχίζεται μέσα στη σχολική τάξη (Remillard & Heck, 2014).

Μέσω αυτής της οπτικής αναγνωρίζουμε ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού δεν εξαντλείται σε εκείνον του ιμάντα μεταβίβασης ενός ΠΣ που ανέπτυξαν κάποιοι ειδικοί μακριά από τη σχολική τάξη. Αντίθετα, θεωρούμε τον εκπαιδευτικό ως έναν επιστήμονα/επαγγελματία που σχεδιάζει τη διδασκαλία του με ευαισθησία απέναντι στις γνωστικές, συναισθηματικές, κοινωνικές ανάγκες των μαθητών του, τα διαφορετικά ενδιαφέροντα και τις ικανότητές τους, το διαφορετικό γλωσσικό, μαθησιακό, πολιτισμικό και κοινωνικό τους υπόβαθρο. Ο εκπαιδευτικός επεξεργάζεται τους στόχους της διδασκαλίας του και επιλέγει, τροποποιεί και δημιουργεί το υλικό και τα εργαλεία που εξυπηρετούν αυτούς τους στόχους (Choppin, 2011).

Στο πλαίσιο αυτού του ρόλου ο εκπαιδευτικός έχει έναν αυξημένο βαθμό ελευθερίας τον οποίο καλείται να ασκήσει καθώς μετασχηματίζει τους στόχους και τις προθέσεις του Προγράμματος Σπουδών σε γεγονότα μέσα στην τάξη του, προσαρμόζοντας τα υλικά στους μαθητές του και, αντιστρόφως, υποστηρίζοντας την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών του σύμφωνα με το ΠΣ. Για να ανταποκριθεί σε αυτό το πολυδιάστατο έργο της συνδιαμόρφωσης του ΠΣ, ο εκπαιδευτικός ενημερώνεται για τα συμπεράσματα της εκπαιδευτικής έρευνας και αντλεί διδακτικό υλικό από τα ΠΣ, τα σχολικά βιβλία, τις δεξαμενές ψηφιακού υλικού και από άλλες πηγές.

Ο εκπαιδευτικός που συντονίζει τη διδασκαλία του με τη φιλοσοφία και τους στόχους του προγράμματος σπουδών αναστοχάζεται στις διδακτικές του πρακτικές και τις βελτιώνει, υιοθετώντας ιδέες και προσεγγίσεις του ΠΣ που μπορούν να του φανούν χρήσιμες. Η ενσωμάτωση των ιδεών του ΠΣ στην πράξη της διδασκαλίας είναι μια διαδικασία ενεργούς εμπλοκής και διαρκών βελτιώσεων από την πλευρά των διδασκόντων. Η γνώση των τρόπων χρήσης των υλικών ενός ΠΣ διευκολύνει την τροποποίηση, προσαρμογή και εμπλουτισμό των υλικών διευκολύνοντας την επιδίωξη για διαφοροποίηση και συμπερίληψη όπου αυτές απαιτούνται.

4.2. Η επαγγελματική εξέλιξη του εκπαιδευτικού

Συνεπώς ο εκπαιδευτικός ως επαγγελματίας αναπτύσσεται συνεχώς. Η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού δεν συνδέεται μόνο με την ενημέρωσή του για τις σύγχρονες εξελίξεις στο πεδίο της εκπαιδευτικής έρευνας αλλά κυρίως με τον συνεχή κριτικό αναστοχασμό του για τη διδασκαλία του. Ο αναστοχασμός του εκπαιδευτικού αποτελεί μέρος της ίδιας της διδασκαλίας και πραγματώνεται μέσα από τη συνεργασία μεταξύ ομοτίμων/συναδέλφων. Αυτή η συνεργασία μπορεί να πάρει διαφορετικές μορφές και σχήματα και οδηγεί στον από κοινού σχεδιασμό και την κριτική διερεύνηση της διδασκαλίας με συστηματικό τρόπο (Jaworski, 2006).

4.3 Η μαθηματική ταυτότητα του εκπαιδευτικού

Η σχολική τάξη αποτελεί μια κοινότητα με εκπαιδευόμενους, όπου η μάθηση περιλαμβάνει διαδικασίες κοινωνικοποίησης σε κοινότητες πρακτικής. Υπό αυτό το πρίσμα, η μάθηση γίνεται συνώνυμη της διαδικασίας με την οποία οι μαθητές και οι μαθήτριες ταυτίζουν τους εαυτούς τους με συγκεκριμένες ομάδες επιστημόνων, μέσω της σταδιακής υιοθέτησης των πρακτικών που αυτοί χρησιμοποιούν (Kaplan & Flum, 2012; Schoenfeld, 2020). Η απόσταση όμως μεταξύ των πρακτικών των ερευνητών των μαθηματικών και των μαθησιακών εμπειριών στις βαθμίδες της υποχρεωτικής εκπαίδευσης είναι μεγάλη, όπως μεγάλη είναι και η απόσταση της επικρατούσας δημόσιας εικόνας των ερευνητών των μαθηματικών από την πραγματικότητα. Οι αντιλήψεις αυτές σκιαγραφούν τον ερευνητή ή την ερευνήτρια των μαθηματικών ως ένα ασυγκίνητο, μοναχικό, σχεδόν μονόχνοτο άτομο που προσπαθεί να δώσει λύσεις σε άλυτα προβλήματα.

Η ενασχόληση με τα μαθηματικά, εκτός από τη διάσταση που αφορά στο περιεχόμενο της πειθαρχίας αυτής καθαυτής, ενέχει επίσης γνωσιακές, κοινωνικές και συναισθηματικές διαστάσεις. Όσον αφορά στο μαθηματικό περιεχόμενο αυτό καθαυτό, οι ‘μαθηματικοί’ αναγνωρίζουν πρότυπα που μπορεί να οδηγούν στην κατασκευή γενικεύσεων, διατυπώνουν υποθέσεις, χρησιμοποιούν παραδείγματα για να τις ελέγξουν και να τις ανασκευάσουν, γενικεύουν, αποδεικνύουν και αναγνωρίζουν κάθε φορά τις παραμέτρους και τα όρια μέσα στα οποία ισχύουν οι εικασίες τους. Επίσης οι ‘μαθηματικοί’ οργανώνουν και επικοινωνούν τις σκέψεις τους κινητοποιώντας διαφορετικούς τρόπους και αναπαραστατικά εργαλεία. Συνεργάζονται και μοιράζονται τις σκέψεις τους με άλλους και άλλες μαθηματικούς, μαθαίνοντας με αυτόν τον τρόπο ο ένας ή η μια από τον άλλον ή την άλλη. Παρότι επιζητούν και απολαμβάνουν την αυτενέργεια και τον πειραματισμό στις αναζητήσεις τους, ταυτόχρονα αποδέχονται τους κανόνες που πηγάζουν από την επιστήμη τους. Μια άλλη σημαντική συνιστώσα της δουλειάς των μαθηματικών είναι η αναζήτηση συνδέσεων μεταξύ των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημών. Τέλος, η πρακτική της ενασχόλησης με τα μαθηματικά συνοδεύεται από απολαύσεις μα και απογοητεύσεις, όπως κάθε προσπάθεια κατασκευής νέας γνώσης (Grootenboer & Jorgensen, 2009; Moschkovich, 2015).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ *(ξενόγλωσση)*

Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Education.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Basingstoke: Falmer Press.

Fischbein, E. (1983), 'Intuition and analytical thinking in Mathematics Education', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 2, 68-74.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. http://dx.doi.org/10.1007/BF01273689

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*: *China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (1995). Symbolizing mathematical reality into being. Paper presented at the Symposium on '*Symbolizing, communication, and modelling'*. Nashville: Vanderbilt University.

Skemp, R. (1979). Goals of learning and qualities of understanding. *Mathematics Teaching*, 88, 44–49.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, *52*(2), 83-94.

Andersson, A., Valero, P., & Meaney, T. (2015). "I am [not always] a maths hater": Shifting students' identity narratives in context. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 143-161.

Angier, C., & Povey, H. (1999). One teacher and a class of school students: Their perception of the culture of their mathematics classroom and its construction. *Educational Review, 51*(2), 147-160.

Artigue, M. (2012). What is inquiry-based mathematics education (IBME). *Inquiry in mathematics education*. Fibonacci project, 3-13.

Black, P. (2015). Formative assessment–an optimistic but incomplete vision. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 22*(1), 161-177.

Blumenfeld, P. C., Marx, R. W., Soloway, E., & Krajcik, J. (1996). Learning with peers: From small group cooperation to collaborative communities. *Educational researcher, 25*(8), 37-39.

Boaler, J., & Greeno, G. J. (2000). Identity, agency and knowing in mathematics worlds. In: Boaler, J. (Ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171–200). Greenwood Press, Westport/London.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 2-8.

Bray, W. S. (2013). How to leverage the potential of mathematical errors. *Teaching children mathematics, 19(*7), 424-431.

Brown, G. T., & Harris, L. R. (2009). Unintended consequences of using tests to improve learning: How improvement-oriented resources heighten conceptions of assessment as school accountability. *Journal of MultiDisciplinary Evaluation, 6*(12), 68-91.

Cengiz, N., Kline, K. & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 355-374.

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn (*2nd ed.). Sausalito, CA: Math Solutions.

Choppin, J. (2011) Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14,* 331–353. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9170-3

Civil, M., Hunter, R., & Crespo, S. (2019). Mathematics teachers committed to equity: A review of teaching practices. *International Handbook of Mathematics Teacher Education,* Vol.1, 243-273.

Cleary, T. J., & Zimmerman, B. J. (2004). Self‐regulation empowerment program: A school‐based program to enhance self‐regulated and self‐motivated cycles of student learning. *Psychology in the Schools, 41*(5), 537-550.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 420-464.

Cole, M. (1996). *Cultural psychology*. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, MA.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453–494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

da Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in mathematics, 93*(1), 51-66

Darragh, L., & Radovic, D. (2018). Mathematics learner identity. *Encyclopedia of mathematics education,* 1-4.

De Corte, E., Op 't Eynde, P., Depaepe, F., & Verschaffel, L. (2010). The reflexive relation between students 'mathematics-related beliefs and the mathematics classroom culture. In L. D. Bendixen & F. C. Feucht (Eds.), *Personal epistemology in the classroom: Theory, research, and implications for practice* (pp. 292 – 327). Cambridge, England: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511691904.010

Dennen, V. P., & Burner, K. J. (2008). The cognitive apprenticeship model in educational practice. *Handbook of research on educational communications and technology,3*, 425-439.

Dooley, T. (2009). A teacher's role in whole-class mathematical discussion: Facilitator of performance etiquette? In V. Durand-Guerrier, S. Souryn Lavergne and F. Arzarello (Eds.), *6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) (pp. 894 - 903). Lyon, France: INRP.

Dorier, J. L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 384-388.

Drews, D., Dudgeon, J., Hansen, A., Lawton, F., & Surtees, L. (Eds.). (2005). *Children' s Errors in Mathematics*: *Understanding Common Misconceptions in Primary Schools*. SAGE.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics, 75(2),* 213-234.

Engeström, Y., & Cole, M. (1997). *Situated cognition in search of an agenda*. NA.

Faircloth, B. S. (2012). “Wearing a mask” vs. connecting identity with learning. *Contemporary Educational Psychology, 37*(3): 186-194. https://doi:10.1016/j.cedpsych.2011.12.003

Feiman–Nemser, S., & Floden, R. E. (1986). In MC Wittrock. *Handbook of research on teaching*, 505-526.

Ferraro, G., & Andreatta, S. (2014). *Cultural anthropology: An applied perspective*. Cengage Learning.

Finke, P. & Sökefeld, M. (2021). Identity in Anthropology. In Callan H. (Ed.). *The International Encyclopedia of Anthropology*. https://doi.org/10.1002/9781118924396.wbiea2142

Fish, M. & Persaud, A. (2012). (Re)presenting critical mathematical thinking through sociopolitical narratives as mathematics texts. In: Hickman H, Porfilio BJ (eds) *The new politics of the textbook*. Sense Publishers, Rotterdam, pp 89–110

González, G. & Eli, J. A. (2017). Prospective and in-service teachers’ perspectives about launching a problem. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(2), 159–201.

Graven, M., Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Mathematics identity research: the state of the art and future directions. *ZDM Mathematics Education, 51*: 361–377. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01050-y

Grootenboer, P., & Jorgensen R. (2009). Towards a theory of identity and agency in coming to learn mathematics. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 5(3): 255-266.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational studies in mathematics*, *71*(3), 199-218.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education [Special issue]. Journal for Research in Mathematics Education, 44 (1), 37–68.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller, and. *Educational psychologist*, *42*(2), 99-107.

Hunter, R., & Hunter, J. (2017). Maintaining a cultural identity while constructing a mathematical disposition as a Pāsifika learner. *Handbook of Indigenous education*, 1-19.

Jameau, A., & Le Hénaff, C. (2018). Resources for Science teaching in a foreign language. In *Proceedings of the Re (s) sources 2018 international conference* (pp. 79-82).

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education, 9*(2), 187-211.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16.

Kaplan, A., & Flum, H. (2012). Identity formation in educational settings: A critical focus for education in the 21st century. *Contemporary Educational Psychology, 37*: 171–175. https://doi:10.1016/j.cedpsych.2012.01.005

Kollosche, D., Marcone, R., Knigge, M., Penteado, M. G., & Skovsmose, O. (Eds.). (2019). *Inclusive mathematics education: state-of-the-art research from Brazil and Germany*. Springer.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. Asia Pacific Education Review, 7(1), 51-61.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated Learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport, CT and London: Ablex Publishing.

Lerman, S. (2006). Cultural psychology, anthropology and sociology: The developing 'strong' social turn. In J. Maass & W. Schloglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 171-188). Rotterdam. Holland: Sense.

Lin, F. L. (2000). Making sense of mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 183-190.

Lobato J, Hohensee C., Rhodehamel B. & Diamond J (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: the case of quadratic functions. *Math Think Learn 14*(2):85–119.

Loyens, S. M., & Gijbels, D. (2008). Understanding the effects of constructivist learning environments: Introducing a multi-directional approach. *Instructional science, 36*(5), 351-357.

McNeal, B., & Simon, M. A. (2000). Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(4), 475-509.

Morgan, C. (2000). Better assessment in mathematics education? A social perspective. In J. Boaler (Ed.) *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, Westport, CT: Ablex.

Morgan, C. (2010). Making sense of curriculum innovation and mathematics teacher identity. In C. Kanes (Ed.), *Elaborating professionalism: Studies in practice and theory* (pp. 107–122). Dordrecht: Springer.

Moschkovich, J. N. (2015). Scaffolding student participation in mathematical practices. *ZDM*, *47*(7), 1067-1078.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nickson, M. (1994). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity? In *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 7-35). Springer, Dordrecht.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(4), 351-380.

Pratt, S. (2008). Complex constructivism: Rethinking the power dynamics of “understanding”. *Journal of the Canadian Association for Curriculum Studies, 6*(1).

Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In *Proceedings of the Joint Meeting of PME* (Vol. 38, pp. 1-20).

Radovic, D., Black, L., Salas, C. E., & Williams, J. (2017). Being a girl mathematician: Diversity of positive mathematical identities in a secondary classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(4), 434-464.

Remillard, J. T., & Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM, 46*(5), 705-718.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context*. New York: Oxford University Press.

Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics, 100*(1), 25-41.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38.7.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM, 52*, 1163-1175.

Sfard A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press, Cambridge.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of mathematics teacher education, 5*(3), 205-233.

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(9), 548-556.

Stacey, K. & Turner, R. (2015). *Assessing Mathematical Literacy (The PISA experience*). Dordrecht: Springer.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stender, P., & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *ZDM, 47*(7), 1255-1267.

Sullivan, P. A. (2003). The potential of open-ended mathematics tasks for overcoming barriers to learning. In Annual conference of the *Mathematics Education Research Group of Australasia 2003* (pp. 813-816). Deakin University.

Tomlinson, C. A. (2001). *How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms* (2nd Ed). Alexandria, VA: ASCD.

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J., & da Ponte, J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(2).

Trigueros, M., Lozano, M. D., & Sandoval, I. (2014). Integrating technology in the primary school mathematics classroom: The role of the teacher. In *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 111-138). Springer, Dordrecht.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning, 9*(3), 281-307.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Open educational resources: A chance for opening mathematics teachers' resource systems?. In *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources* (pp. 3-27). Springer, Cham.

Vågan, A. (2011) Towards a Sociocultural Perspective on Identity Formation in Education, *Mind, Culture, and Activity, 18*(1): 43-57. https://doi: 10.1080/10749031003605839

Valero, P. (2018). Human Capitals: School Mathematics and the Making of the Homus Oeconomicus. *Journal of Urban Mathematics Education,* Vol. 11, No. 1&2, pp. 103–117.

Van de Walle, A. J., Karp, S.K., Bay-Williams, M.J. (2017). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Melbourne: P.Ed. Custom Books.

Van Steenbrugge, H., Remillard, J., Krzywacki, H., Hemmi, K., Koljonen, T., & Machalow, R. (2018). Understanding teachers' use of instructional resources from a cross-cultural perspective: the cases of Sweden and Flanders. In *Proceedings of the re (s) sources 2018 international conference* (pp. 117-121).

Vye, N. J., Goldman, S. R., Voss, J. F., Hmelo, C., & Williams, S. (1997). Complex mathematical problem solving by individuals and dyads. *Cognition and Instruction, 15*(4), 435-484.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ *(ελληνόγλωσση)*

Κλώθου, Ά., & Σακονίδης, Χ. (2015). Η αξιολόγηση στα μαθηματικά: όψεις της νοηματοδότησης των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (8), 55-86.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Σακονίδης, Χ. (2017). Η μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών της μουσουλμανικής μειονότητας στη Θράκη: κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παράμετροι. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 10*: 27-54. https://doi:https://doi.org/10.12681/enedim.15217

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). *Πρακτικά 4ου Συνέδριου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 51-66. Ιωάννινα, ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Τζεκάκη, Μ. (2014). Μαθηματική Δραστηριότητα μέσα στο Παιχνίδι και στο Εκπαιδευτικό Υλικό. *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνέδριου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες*, 60.