ΕΚΜΑΙΕΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΜΕΣΩ ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Αγγελική Γκάγκαρη

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος χρήσης ανοιχτών προβλημάτων στην τάξη για την προώθηση της μαθηματικής συζήτησης αποτελεί μια παιδαγωγική στρατηγική που στοχεύει στην παραγωγή δημιουργικών μαθηματικών δραστηριοτήτων που διεγείρουν την περιέργεια και τη συνεργασία των μαθητών. Ειδικότερα, σύμφωνα με τους Kwon, Park & Park, (2006) και Silver et al., (1996), η μαθηματική δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά συνδέεται συνήθως με την παραγωγή νέας γνώσης, την ευέλικτη λύση προβλημάτων και την προβληματοθεσία (problem posing).

Η συγκεκριμένη μέθοδος επίλυσης, που αποκαλείται «μέθοδος ανοιχτής προσέγγισης», αναπτύχθηκε στην Ιαπωνία τη δεκαετία του ‘70 ενώ τον ίδιο καιρό περίπου η ιδέα της χρήσης ανοικτών προβλημάτων στη διδασκαλία ξεκίνησε και στο Ηνωμένο Βασίλειο. Από τις αρχές της δεκαετίας του '80, η ιδέα της χρήσης ανοικτών προβλημάτων στην τάξη διαδιδόταν σε όλο τον κόσμο και η έρευνα για τις δυνατότητές και τα πλεονεκτήματά της ήταν έντονη σε πολλές χώρες (Κόσυβας, 1996 – Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 1999 – Ρίζος, 2005).

Ωστόσο, οι τρόποι με τους οποίους θα ενταχθούν αυτού του είδους οι δραστηριότητες στη σχολική τάξη ποικίλλουν. Σημαντικός παράγοντας επιλογής κατάλληλου τρόπου είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού, δηλαδή το πως αποφασίζει να διαχειριστεί την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος, ποιος θα ναι ο δικός του ρόλος και ποιος αυτός των μαθητών, όπως αναφέρουν οι Christiansen και Walther (1986). Υποστηρίζουν ότι τα ανοιχτά προβλήματα, ως κομμάτι διδασκαλίας, βοηθούν τους μαθητές τόσο να ανακαλέσουν και να αξιολογήσουν παλιότερες γνώσεις όσο και να δημιουργήσουν νέες. Επίσης, σύμφωνα με τους Bransford, Brown, & Cocking (1999) οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα μέσω επίλυσης και συζήτησης στη τάξη δραστηριοτήτων με ανοιχτά προβλήματα, τα οποία εστιάζουν σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο, σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία, όπου οι μαθητές απλά «ακούνε» την λύση.

Η παρούσα εργασία αφορά την αλληλεπίδραση των μαθητών με ένα ανοιχτό πρόβλημα υψηλής μαθηματικής πρόκλησης, το οποίο έχει ως στόχο τη δημιουργία νέας γνώσης, και μελετά το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης αυτής. Συγκεκριμένα, το ερευνητικό ερώτημα που θέτουμε είναι το εξής:

> ΕΕ: Μπορούν οι μαθητές με τη βοήθεια ενός ανοιχτού προβλήματος να οδηγηθούν στη παραγωγή νέας γνώσης;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο Κόσυβας (1995) με στόχο την καλύτερη κατανόηση του ρόλου των προβλημάτων, τα ταξινομεί με κριτήριο τους επιδιωκόμενους μαθησιακούς στόχους. Διακρίνει τις εξείς κατηγορίες:

- Προβλήματα που προορίζονται να εμπλέξουν τα παιδιά στην κατασκευή ή ανακάλυψη νέων γνώσεων/εννοιών.
- Προβλήματα ή ασκήσεις εφαρμογής.
- Προβλήματα που αποσκοπούν στην επέκταση του πεδίου χρησιμοποίησης μιας διδαγμένης έννοιας (προβλήματα μεταφοράς).
- Προβλήματα πιο πολύπλοκα στα οποία τα παιδιά θα πρέπει να συνδυάσουν πολλές κατηγορίες γνώσεων (προβλήματα σύνθεσης ή ολοκλήρωσης).
- Προβλήματα μοντελοποίησης.
- Προβλήματα που αποσκοπούν στην αποκάλυψη του βαθμού και του τρόπου κατάκτησης των γνώσεων (προβλήματα παιδαγωγικής αξιολόγησης).
- Ανοιχτά προβλήματα.

Σημειώνεται ότι ο παραπάνω κατάλογος είναι ενδεικτικός γιατί είναι αδύνατο να κατηγοριοποιηθούν όλα τα προβλήματα και κάποια προβλήματα μπορούν να ανήκουν σε περισσότερες από μία κατηγορίες.

Ο Pehkonen (1995) για πρώτη φορά όρισε δύο κατηγορίες προβλημάτων (Εικόνα 1): τα κλειστά (closed problems) και τα ανοιχτά προβλήματα (open-ended problems). Συγκεκριμένα, ένα κλειστό πρόβλημα έχει πολύ ξεκάθαρους στόχους και δεν επιτρέπει την ανάπτυξη «αποκλίνουσας» σκέψης, δηλαδή έναν τύπο ελεύθερης πνευματικής διεργασίας που βασίζεται στη φαντασία (Guilford, 1959). Ένα πρόβλημα είναι «κλειστό» αν η κατάσταση εκκίνησης και η τελική του κατάστασή, ο στόχος του, είναι κλειστές, δηλαδή εξηγούνται με σαφήνεια. Εάν η κατάσταση εκκίνησης ή / και η κατάσταση στόχου είναι ανοικτές, δηλαδή δεν είναι κλειστές, έχουμε ένα ανοιχτό πρόβλημα. Επομένως, ένα πρόβλημα που είναι «ανοιχτό» σε σχέση είτε με την εισαγωγή του είτε με τους στόχους του και είναι συνεπώς ανοικτό σε αποκλίνουσες σκέψεις, μπορεί να θεωρηθεί ανοιχτό πρόβλημα. Υπό αυτή την έννοια, ένα ανοιχτό πρόβλημα ορίζεται ως ένα πρόβλημα που μπορεί να έχει ένα πολύ ξεκάθαρο αρχικό πλαίσιο αλλά είναι ανοιχτό σε πολλές διαφορετικές πιθανές λύσεις. Γενικά, ένα ανοιχτό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που επιδέχεται διαφορετικές λύσεις. Αυτός ο τίτλος περιλαμβάνει πολλά προβλήματα που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το ύφος τους όμως όλα έχουν ένα κοινό στοιχείο, ότι «σπάνε» το στερεότυπο ότι κάθε πρόβλημα έχει μια σωστή λύση. Ως ανοικτά προβλήματα θεωρούνται και τα «μη σαφώς διατυπωμένα προβλήματα». Ένα «μη σαφώς διατυπωμένο πρόβλημα» είναι ένα πρόβλημα που δεν προσδιορίζει με σαφήνεια τι ζητά.

Τελική κατάσταση (στόχος) / Κατάσταση εκκίνησης (υποθέσεις)	Κλειστή (μια μοναδική λύση)	Ανοιχτή (πολλαπλές λύσεις ή/και διαφορετικούς τρόπους λύσης)
Κλειστή (σαφώς διατυπωμένη)	**ΚΛΕΙΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ**	ΑΝΟΙΚΤΟ
Ανοιχτή (ασάφεια στη διατύπωση)	ΑΝΟΙΚΤΟ	ΑΝΟΙΚΤΟ

Εικόνα 1: Η ταξινόμηση των προβλημάτων ανάλογα με τις καταστάσεις εκκίνησης και στόχου (Pehkonen, 1997)

Για την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων, οι μαθητές, που εργάζονται μεμονωμένα ή σε ομάδες, αναμένεται να εφαρμόσουν τη δική τους μεθοδολογία δεδομένου ότι τα προβλήματα αυτά έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να έχουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις ή να μπορεί να φτάσει κάποιος σε μια απάντηση με περισσότερους από έναν τρόπους, όπως υποστηρίζει ο London (1993). Παράλληλα, ο Krutetskii (1976) αναφέρει ότι τα προβλήματα με πολλές λύσεις επιτρέπουν την εξέταση της ευελιξίας της μαθηματικής σκέψης των ατόμων μέσα από τη διερεύνηση της μετακίνησης από τη μια νοητική διεργασία στην άλλη. Η εύρεση διαφορετικών τρόπων χαρακτηρίζει τη δημιουργικότητα της μαθηματικής σκέψης (Γαγάτσης κ. ά., 2009), ενώ ταυτόχρονα ορισμένες λύσεις μπορεί να είναι περισσότερο ευρηματικές από άλλες (πιο κομψές σύντομες, αποτελεσματικές). Έτσι στους μαθητές, οι οποίοι μαθαίνουν δουλεύοντας με τέτοιες δραστηριότητες (Sullivan, Clarke, and Wallbridge (1991)) θα προκληθούν διάφορα επίπεδα γνωστικής ανάπτυξης σύμφωνα με τον Freedman (1994). Συμπερασματικά, ανάλογα με το είδος του δεδομένου προβλήματος αναπτύσσεται και άλλο είδος μαθηματικής σκέψης από τους μαθητές.

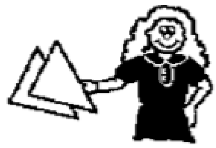
Η συγκεκριμένη σύνδεση προβλήματος και μαθηματικής σκέψης αναγνωρίστηκε από τον Nohda. Ειδικότερα, τονίζει πως μία «μέθοδος ανοιχτής προσέγγισης» στη διδασκαλία, η οποία συνδυάζει ανοιχτά προβλήματα και προβλήματα που έχουν πολλούς τρόπους επίλυσης, αναπτύσσει ταυτόχρονα την κριτική και τη δημιουργική σκέψη, δεδομένου ότι οι πολλές διαφορετικές λύσεις οφείλονται στην δυνατότητα διαφορετικής ερμηνείας τους από τον εκπαιδευόμενο. Με αυτό το τρόπο αναπτύσσεται η ευρηματικότητα και η ευελιξία του μαθητή (Silver, 1997). Συνεπώς, τα άτομα δεν προσλαμβάνουν και αποθηκεύουν πληροφορίες, αλλά δημιουργούν ερμηνείες με βάση τις νέες εμπειρίες στις οποίες εκτίθενται (Perkins, 1991a). Σύμφωνα με έρευνες που έχουν διεξαχθεί οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης ενός προβλήματος βελτιώνουν την ποιότητα του μαθήματος και βοηθούν τους μαθητές στην κατανόηση και στην ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών (Stenmark, 1989; Lajoie, 1995; Silver & Kenney, 1995; Yackel & Cobb, 1996; Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain & Whitenack, 1997; Boaler, 1998; Stigler & Hiebert, 1999). Για παράδειγμα, η Boaler (1998) έδειξε ότι οι μαθητές, οι οποίοι έμαθαν μαθηματικά μέσω ανοιχτών δραστηριοτήτων κατανόησαν εννοιολογικά το αντικείμενο, ενώ οι μαθητές που διδάχτηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο κατανόησαν μεθοδολογικά το αντικείμενο. Άρα, στη διδασκαλία των μαθηματικών η λύση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις συνδέεται με τη βαθύτερη κατανόηση και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού (Polya, 1973; Schoenfeld, 1985). Δηλαδή, βλέπουμε ότι το άτομο δρα ως επιστήμονας που επιχειρεί να ερμηνεύσει τον κόσμο γύρω του με βάση προσωπικά φίλτρα: εμπειρίες, στόχους και πεποιθήσεις (Jonassen, 1990, Perkins, 1991a, Cole, 1992, Solomon, 1994).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πλαίσιο

Η πειραματική διδασκαλία έχει λάβει χώρα σε ένα σχολείο θηλέων της Αυστραλίας. Συγκεκριμένα το πρόβλημα δόθηκε σε μία 26μελή τάξη Β' Γυμνασίου (8th grade). Το μάθημα αυτό αποτελεί το δεύτερο από τα δώδεκα, που θα αφιερωθούν συνολικά στην ισότητα τριγώνων και διαρκεί 47 λεπτά. Η πρώτη δραστηριότητα περιείχε 10 ερωτήσεις επανάληψης του προηγούμενου μαθήματος, για τις οποίες δούλεψε η κάθε μαθήτρια μόνη της. Η δεύτερη δραστηριότητα ήταν ένα ανοιχτό πρόβλημα για την κατασκευή ίσων τριγώνων, στην οποία οι μαθήτριες χωρίστηκαν σε ομάδες 4 ατόμων. Για αυτή τη δραστηριότητα η καθηγήτρια έδωσε σε κάθε μαθήτρια ένα φύλλο εργασίας (Εικόνα 2) και είχαν στη διάθεση τους μολύβι, μοιρογνωμόνιο, διαβήτη, χάρακα, ψαλίδι και κόλλα.

Congruence Group Work



Task:

You need to produce a list of instructions so that anyone following them will construct exactly the same triangle.

You will need:

Protractor, compass, ruler, scissors, glue, pencil

Steps:

Each person in the group is to:

1. Construct a triangle on the next page, without showing your group.
2. Write down the steps that you did as clearly as you can.

As a Group take turns to:

3. Read your instructions to your group.
4. The other students in the group must follow the instructions and then draw your triangle on the coloured page.
5. Cut out the triangles and check if they are congruent.
6. Evaluate your instructions.
7. If the triangles are not congruent, change the instructions to make them clearer and repeat steps 3, 4 and 5.
8. Paste the final triangles from your group on the following page.
9. What was the minimum number of sides or angles that your friends needed to know, to construct your triangle? Discuss with your group. Write them down.

Repeat for each person in your group.

Εικόνα 2: Το φύλλο εργασίας για τη 2η Δραστηριότητα

Το Πρόβλημα

Το πρόβλημα (Εικόνα 3) που ανατέθηκε ήταν να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο και να καταγράψουν τα βήματα, που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για να κατασκευάσει το ίδιο τρίγωνο. Στη συνέχεια, οι υπόλοιπες μαθήτριες της κάθε ομάδας ακολουθώντας τα βήματα που κατέγραψε η συμμαθήτρια τους θα κατασκευάσουν ένα τρίγωνο, το οποίο θα ελέγξουν αν είναι ίσο με το αρχικό.

Congruence Group Work

Task:

You need to produce a list of instructions so that anyone following them will construct exactly the same triangle.

You will need:

Protractor, compass, ruler, scissors, glue, pencil

Steps:

Each person in the group is to:

1. Construct a triangle on the next page, without showing your group.
2. Write down the steps that you did as clearly as you can.

Εικόνα 3: Το πρόβλημα

Σύμφωνα με τις κατηγοριοποιήσεις κατά Κόσυβα, το πρόβλημα αυτό ανήκει σε αυτά που προορίζονται να εμπλέξουν τα παιδιά στην κατασκευή ή ανακάλυψη νέων γνώσεων/εννοιών (Arsac,Germain,Mante,1991) και στα ανοικτά. Κατά τον Pehkonen, είναι ένα ανοικτό πρόβλημα με κατάσταση εκκίνησης κλειστή και τελική κατάσταση ανοικτή (Εικόνα 1).

Ερευνητικά δεδομένα

Η έρευνα βασίστηκε σε αρχεία του TIMSS (Γεωμετρία), τα οποία περιλάμβαναν τον σχεδιασμό του προβλήματος και τη διδακτική παρέμβαση βιντεοσκοπημένη. Απομαγνητοφώνησα τα αρχεία αυτά και κατέγραψα τις απαντήσεις των μαθητριών από τα στιγμιότυπα και τη συζήτηση στη τάξη. Αυτά αποτέλεσαν και τα ερευνητικά μου δεδομένα. Δεδομένα, επίσης, αποτέλεσαν και οι γραπτές απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας και τα σχήματα τους στην προσπάθεια να λύσουν το πρόβλημα.

Ανάλυση των δεδομένων

Τα δεδομένα που αναλύθηκαν, επιλέχθηκαν με βάση την ποικιλία των απαντήσεων και την διαφορετική πορεία επίλυσης του προβλήματος. Αρχικά, στην ανάλυση εξετάστηκαν όλες οι απαντήσεις των μαθητών για να εντοπιστεί αν οι μαθήτριες οδηγήθηκαν στη δημιουργία νέας γνώσης, δηλαδή στην καταγραφή κάποιου κριτηρίου ισότητας τριγώνων, και με ποιον τρόπο οδηγήθηκαν εκεί. Στη συνέχεια, έγινε ομαδοποίηση των απαντήσεων, με βάση το κριτήριο ισότητας τριγώνων που είχαν καταγράψει, ανεξαρτήτως από τα όργανα και τον τρόπο κατασκευής. Τέλος, για την ανάλυση των δεδομένων της συζήτησης που ακολούθησε στη τάξη, αναζητήσαμε τα στοιχεία που επαληθεύουν τις προγενέστερες έρευνες που παρουσιάσαμε παραπάνω, ως προς την ανάπτυξη δημιουργικής, κριτικής και αποκλίνουσας σκέψης μέσω της διδασκαλίας με τη χρήση ανοιχτών προβλημάτων.

Συγκεκριμένα, τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, τα οποία αναμέναμε να εντοπίσουμε στις απαντήσεις, ήταν τα εξείς:

1. A-A-S (γωνία-πλευρά-γωνία): Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
2. S-A-S (πλευρά-γωνία-πλευρά): Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.
3. S-S-S (όλες τις πλευρές ίσες): Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

4. R-H-S: Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία πλευρά ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αποδείχθηκε ότι η μαθηματική δραστηριότητα που κλήθηκαν να λύσουν οι μαθήτριες ήταν υψηλού γνωστικού επιπέδου καθώς όλες οι μαθήτριες ασχολήθηκαν και ανέπτυξαν τις δικές τους ιδέες, αναζήτησαν ιδιότητες, σχέσεις και κανόνες που ισχύουν για τις μαθηματικές έννοιες που επικαλέστηκαν. Τέλος, αντιστοίχησαν τις απαντήσεις τους σε γενικευμένες προτάσεις και σε μαθηματικούς συλλογισμούς. Όλες οι μαθήτριες οδηγήθηκαν στην διατύπωση ενός κριτηρίου ισότητας. Το 42% των απαντήσεων που δόθηκαν αντιστοιχούσαν στο κριτήριο R-H-S, 25% στο S-S-S, 25% στο S-A-S και τέλος το 8% στο A-A-S.

Για το κριτήριο R-H-S οι μαθήτριες σχεδίασαν εξαρχής ένα τρίγωνο ειδικής μορφής (ορθογώνιο) χρησιμοποιώντας κανόνα και μοιρογνωμόνιο. Σχήμα οικείο και απλό για τις μαθήτριες αφού αισθάνονται πιο άνετα να το χειριστούν και να το περιγράψουν. Επίσης, τα υπόλοιπα μέλη των ομάδων τους που κλήθηκαν να ακολουθήσουν τις οδηγίες κατέληξαν σε ίσα τρίγωνα με το αρχικό. Συνεπώς, βλέπουμε πως οι μαθήτριες βασιζόμενες στις υπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις τους δημιούργησαν μία νέα.

Student A:

1. *Took my set square and drew a straight line with 9cm for the base*
2. *I then made the 90^o set square along the line the end of the corner and drew a straight line up 6.2cm*
3. *I then joined the both ends up with the right-angle triangle*

Οι μαθήτριες που κατέληξαν στο κριτήριο S-S-S φάνηκε πως ακολούθησαν περισσότερα βήματα από τα υπόλοιπα κριτήρια. Μπορεί να μην ήταν ο βέλτιστος τρόπος όμως γίνεται αντιληπτό πως οι μαθήτριες αυτές έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια του κύκλου και είναι σε θέση να κάνουν πιο δημιουργικές κατασκευές μόνο με κανόνα και διαβήτη. Βασίζονται σε προηγούμενες γνώσεις και αξιοποιούν μαθηματικές ιδιότητες του κύκλου για να οδηγηθούν στη νέα γνώση.

Student B:

1. *Draw an 8cm line*
2. *Make a radius of 5cm*
3. *Place the point of the compass at the right end of the line and draw a circle*
4. *Make a 7cm radius and drew a circle from the left end of the line*
5. *Join where the point…*

Οι μαθήτριες που ανέπτυξαν τα κριτήρια S-A-S και A-A-S δεν ακολούθησαν έναν κοινό τρόπο κατασκευής όπως στα δύο προηγούμενα κριτήρια, αλλά υπήρχε ποικιλία κατασκευών με κανόνα-μοιρογνωμόνιο ή με κανόνα-διαβήτη. Επίσης, παρατηρήθηκε πως οι προηγούμενες γνώσεις σε συνδυασμό με την κατασκευαστική διαδικασία, χρησιμοποιώντας οικεία για τις μαθήτριες μέσα και έννοιες, οδήγησαν στην κατασκευή νέας γνώσης.

Student C (S-A-S):

1. *AB 10cm line*
2. *Angle of 60^o at A*
3. *Draw a line of 5cm from A…*

Student D (A-A-S):

1. *Draw AB 10cm line*
2. *Angle of 60^o at A*
3. *Angle of 37^o at B…*

Τέλος, στη συζήτηση που πραγματοποιήθηκε με όλη τη τάξη και στην οποία παρουσιάστηκαν οι απαντήσεις των μαθητριών διαπιστώθηκε ότι ένα ανοιχτό πρόβλημα συμβάλλει στην ενίσχυση της αποκλίνουσας σκέψης Guilford (1959).Ειδικότερα, στο πλαίσιο αναζήτησης διαφορετικών κριτηρίων ισότητας τριγώνων, οι μαθήτριες παρουσίασαν πολλές νέες ιδέες (πρωτοτυπία-originality) και ανέπτυξαν διαφορετικές στρατηγικές για την αντιμετώπιση τους (ευελιξία-flexibility). Μάλιστα ορισμένες χρησιμοποίησαν αυτή τη νέα γνώση και βελτίωσαν τις αρχικές τους απαντήσεις. Επιβεβαιώνοντας με αυτόν τον τρόπο τα αποτελέσματα της έρευνας της Boaler (1998).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέσω της παραπάνω μελέτης επιβεβαιώσαμε τα αποτελέσματα των προγενέστερων ερευνών ως προς το πώς μπορούν να επωφεληθούν οι μαθητές από την διδασκαλία με ανοιχτά προβλήματα και να απαντηθεί θετικά το ερευνητικό ερώτημα της εργασίας. Βλέπουμε ότι η διδασκαλία με ανοιχτά προβλήματα επιτρέπει στους μαθητές να «εξερευνήσουν» τις μαθηματικές έννοιες με έναν τρόπο που τα κλειστά προβλήματα δεν το υποστηρίζουν. Συγκεκριμένα, είδαμε ότι αναπτύσσεται η εις βάθος κατανόηση όταν οι μαθητές αγωνίζονται να ξεπεράσουν δυσκολίες και δεν βασίζονται σε στείρα απομνημόνευση ή προκαθορισμένους κανόνες. Επιπρόσθετα, οι μαθητές συμμετέχουν περισσότερο ενεργητικά στο μάθημα και εκφράζουν τις ιδέες τους πιο συχνά, διότι η λύση ανοιχτών προβλημάτων παρέχει ελεύθερο και ενθαρρυντικό περιβάλλον, στο οποίο η ύπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει ευκαιρία στον κάθε μαθητή να φτάσει στη δική του σωστή απάντηση. Τέλος, οι μαθητές έχουν περισσότερες ευκαιρίες να κάνουν συνειδητή χρήση της μαθηματικής τους γνώσης και των δεξιοτήτων τους. Με αυτόν τον τρόπο παρέχεται η ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης νέας γνώσης.

Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψιν, μπορούμε να καταλήξουμε σε δύο γενικές παρατηρήσεις. Πρώτον, αν ο στόχος της διδακτικής των Μαθηματικών είναι να ενισχύσουμε την μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών και να επιτευχθεί η εννοιολογική κατανόηση του αντικειμένου τότε είναι απαραίτητο να σταματήσουμε την συνήθεια της παραδοσιακής διδακτικής προσέγγισης, κατά την οποία ο καθηγητής μιλάει και οι μαθητές ακούνε ("knowledge delivery" από τον καθηγητή στους μαθητές). Δεύτερον, η διδακτική των Μαθηματικών πρέπει να εστιάζεται στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης, όπου οι μαθητές είναι ελεύθεροι να πειραματιστούν με τις δικές τους πιθανές λύσεις και να καταλήξουν στην δημιουργία νέας γνώσης.

Όπως αναφέρει άλλωστε και ο Polya «Μπορείς να μάθεις περισσότερα λύνοντας ένα πρόβλημα με πολλούς τρόπους, παρά λύνοντας πολλά προβλήματα με έναν μόνο τρόπο». Τέλος, μπορούμε να θέσουμε ερωτήματα για περαιτέρω διερεύνηση σε σχέση με τον τρόπο ενσωμάτωσης της Διδακτικής των Μαθηματικών με ανοικτό πρόβλημα σε ένα αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών που καλείται να ανταπεξέλθει στους ταχείς ρυθμούς και στις απαιτήσεις της σύγχρονης εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. Université Claude Bernard Lyon I.

Bingolbali, E. (2011). Multiple Solutions to Problems in Mathematics Teaching: Do Teachers Really Value Them?. *Australian Journal of Teacher Education*, *36*(1), 18-31.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for research in mathematics education*, 41-62.

Freedman, R. L. H. (1994). *Open-ended questioning: A handbook for educators*. Addison Wesley Publishing Company.

Krutetskii, V.A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (Translated by Teller, J.; edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup). Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, *7*(1), 51-61.

London, R. (1993). A Curriculum of Nonroutine Problems.

Nohda, N. (1986). A Study of" Open-Approach" Method in School Mathematics. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, *5*, 119-31.

Pehkonen, E. (2007). Problem solving in mathematics education in Finland. *WG2, Topic*, *8*, 9.

Pehkonen, E. (1997). *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom. Research Report 176*. University of Helsinki, Dept. of Teacher Education, PO Box 38 (Ratakatu 6A), Helsinki 00014, Finland.

Pehkonen, E. (1995). Using open-ended problem in mathematics. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 27(2), 67-71

Polya, G. (1973). How to solve it 2nd. *New Jersey: Princeton University*.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 9-34.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, *29*(3), 75-80.

Sullivan, P., Bourke, D., & Scott, A. (1997). Learning mathematics through exploration of open-ended tasks: Describing the activity of classroom participants. *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, 88-105.

Sullivan, P., Warren, E., & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics education research journal*, *12*(1), 2-17.

Κόσυβας Γ. (2012). Πρακτικά του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.), 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο.

Κόσυβας, Γ. (1995). Προσεγγίσεις της έννοιας και του ρόλου του ανοιχτού προβλήματος στην διδασκαλία των μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ*, (43), 11-34.