

# **Δράσεις εκπαιδευτικού που υποστηρίζουν τη διερευνητική μάθηση κατά την επίλυση ανοιχτού προβλήματος**

**Μελέτη περίπτωσης**

**Μούντζια Αθηνά**

**ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ**

## **Εισαγωγή**

Η διερευνητική μάθηση είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών καθώς υπάρχουν μελέτες που έχουν δείξει ότι είναι αποτελεσματική. Η διερευνητική μάθηση δεν αναφέρεται απαραίτητα σε μεγάλες δραστηριότητες για μεγάλο χρονικό διάστημα, αλλά μπορεί να είναι για παράδειγμα μια επιπρόσθετη ερώτηση που ζητάει αιτιολόγηση απ' τους μαθητές ή μια εργασία που επιτρέπει στους μαθητές να ακολουθήσουν τη δική τους μέθοδο (Maab & Artigue, 2013). Ακόμα, πολύ χρήσιμες στην τάξη των μαθηματικών είναι οι προκλητικές δραστηριότητες όπως τα προβλήματα και οι διερευνήσεις (da Ponte & Quaresma, 2016). Επιπλέον, η ενεργητική μάθηση αυξάνει κατά μέσο όρο τους βαθμούς και την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών στα μαθηματικά (Freeman et al., 2014).

Η παρούσα μελέτη επικεντρώνεται στα στοιχεία που προωθούν τη διερευνητική μάθηση μέσω της δραστηριότητας που ανατίθεται στους μαθητές ενός ανοιχτού προβλήματος και δίνει έμφαση στις δράσεις της εκπαιδευτικού. Ο τρόπος με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί μέσα στη σχολική τάξη αντιμετωπίζουν και διαχειρίζονται τα ανοιχτά μαθηματικά προβλήματα είναι ένα σημαντικό θέμα διερεύνησης διότι μέσα από αυτήν τη διαχείριση, η διδασκαλία μπορεί να αναιρέσει ή να υποστηρίξει τα διερευνητικά χαρακτηριστικά. Όπως αναφέρουν οι Maab και Artigue (2013), παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει μεγάλη και αντιπροσωπευτική μελέτη σε όλες τις ευρωπαϊκές χώρες, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις σε πολλές αίθουσες διδασκαλίας, ότι η διδασκαλία των μαθηματικών παραμένει σε μεγάλο βαθμό βασισμένη στη μετάδοση και δεν βασίζεται στην έρευνα.

Ο Chan (2005) μέσα από έρευνά του, συμπεραίνει ότι η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων απαιτεί καλή επικοινωνία μεταξύ των μελών της σχολικής τάξης για να δημιουργηθεί σκέψη και κατανόηση των μαθηματικών ιδεών σε σχέση με το πρόβλημα. Μια τέτοια επικοινωνία προωθεί τη μεταγνώση και τη μάθηση. Επίσης,

υποστηρίζει ότι ο καθηγητής είναι ένας σημαντικός και καθοριστικός παράγοντας για την εμπλοκή των μαθητών μέσω της σκαλωσιάς και της ενθάρρυνσης.

Η γεωμετρία είναι ένα μάθημα το οποίο απαιτεί ιδιαίτερη διαχείριση στην τάξη των μαθηματικών. Οι Leung K. C. I, Ding, Leung A. Y. L. και Wong (2014) επισημαίνουν ότι την απόδειξη της ισότητας τριγώνων είναι δύσκολο και να τη διδάξουν οι εκπαιδευτικοί και να τη μάθουν οι μαθητές. Επιπλέον, οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι όταν ζητείται να συγκρίνουμε δύο τρίγωνα, αυτόματα μετράμε τα μεγέθη, όμως υπάρχουν πιο αφηρημένες τοπολογικές ισοδυναμίες για τη σύγκριση των τριγώνων, είτε για την ισότητα είτε για την ομοιότητα.

Η ισότητα των τριγώνων είναι ένα κύριο θέμα που περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο επαγωγικός συλλογισμός είναι απαραίτητος για να αιτιολογηθεί η ισότητα δύο τριγώνων. Ο βαθύτερος λόγος της αιτίας που ο ελάχιστος αριθμός συνθηκών είναι επαρκής για την ισότητα, είναι βασικός για την κατανόηση και πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να δικαιολογήσουν τον λόγο (Leung et al, 2014). Έχει λοιπόν, εξαιρετικό ενδιαφέρον να μελετηθεί εις βάθος, πώς μπορεί να εφαρμοστεί στη σχολική τάξη ένα πρόβλημα που αφορά τη σύγκριση τριγώνων με στοιχεία διερευνητικής μάθησης. Οπότε καταλήγουμε στο παρακάτω ερευνητικό ερώτημα:

Μέσα από ποιες δράσεις η εκπαιδευτικός υποστηρίζει τα διερευνητικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας της ισότητας τριγώνων μέσω της επίλυσης ενός ανοιχτού προβλήματος;

## **Θεωρητικό πλαίσιο**

Η μάθηση δεν πρέπει να αντιλαμβάνεται μόνο ως ατομική προσπάθεια, αλλά και ως συλλογικό προϊόν που προκύπτει μέσα από την κοινωνική και πολιτισμική αλληλεπίδραση (Πετροπούλου, 2018).

Οι Jackson, Shahan, Gibbons και Cobb (2012) αναφέρουν τις τρεις φάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας, η πρώτη απ' τις οποίες είναι η εισαγωγή της, η δεύτερη είναι η φάση που οι μαθητές εργάζονται για τη λύση της και η τρίτη είναι η ενορχήστρωση της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης από τον καθηγητή.

Η διερευνητική μάθηση είναι μια παιδαγωγική μέθοδος με την οποία έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές της διδασκαλίας των μαθηματικών και έχουν αναδυθεί διαφορετικές διαστάσεις της. Για τους Maab και Artigue (2013), η διερευνητική μάθηση είναι επικεντρωμένη στους μαθητές και προωθεί μια κουλτούρα στην οποία οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με τρόπους παρόμοιους με τον τρόπο λειτουργίας των μαθηματικών και των επιστημόνων. Δηλαδή οι μαθητές πρέπει να

παρατηρήσουν φαινόμενα, να κάνουν ερωτήσεις και να αναζητήσουν μαθηματικούς και επιστημονικούς τρόπους για να απαντήσουν σε αυτές τις ερωτήσεις (για παράδειγμα διεξαγωγή πειραμάτων, συστηματικός έλεγχος μεταβλητών, σχεδίαση διαγραμμάτων, υπολογισμός, αναζήτηση μοτίβων και σχέσεων και δημιουργία και απόδειξη εικασιών). Οι μαθητές στη συνέχεια συνεχίζουν να ερμηνεύουν και να αξιολογούν τις λύσεις τους και να κοινοποιούν τα αποτελέσματά τους. Αυτό σημαίνει επίσης ότι πρέπει να προσπαθήσουν να γενικεύσουν τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν και τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν και να τα συνδέσουν προκειμένου να αναπτύξουν σταδιακά μαθηματικές έννοιες.

Πρέπει να δοθεί μεγάλη έμφαση τόσο στην ενεργώ συμμετοχή και ευθύνη των εκπαιδευόμενων για την ανακάλυψη γνώσεων που είναι νέες για τους ίδιους όσο και στην διαχείριση της διδακτικής διαδικασίας από τους εκπαιδευτικούς.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε ένα τέτοιο περιβάλλον διαφέρει από τις παραδοσιακές προσεγγίσεις διδασκαλίας (Maab & Artigue, 2013):

- ενθαρρύνει την κατασκευή των γνώσεων των μαθητών μέσω της διερεύνησης και της εύρεσης της δικής τους πορείας προς τη λύση,
  - υποστηρίζει τη συνεργατική εργασία,
  - οι δραστηριότητες που αναθέτει στους μαθητές είναι «διασυνδεδεμένες», «προκλητικές» και τους ωθούν να κάνουν χρήση προηγούμενων γνώσεων,
    - τα προβλήματα που επιλέγει είναι ενδιαφέροντα για τους μαθητές και περιέχουν ενδιαφέρουσες μαθησιακές δυνατότητες,
      - υποστηρίζει και καθοδηγεί, όταν είναι απαραίτητο, την αυτόνομη εργασία των μαθητών,
        - διαχειρίζεται τους μαθητές όταν εργάζονται σε ομάδες και τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης,
          - ενθαρρύνει τη συζήτηση εναλλακτικών απόψεων,
            - βοηθάει τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των ιδεών τους και να τις συνδέσουν με σημαντικές μαθηματικές και επιστημονικές έννοιες και μεθόδους.

Σε αυτό το περιβάλλον, οι μαθητές δεν μένουν μόνοι στην ανακάλυψή τους, αλλά καθοδηγούνται από τον δάσκαλο που τους μαθαίνει να εργάζονται ανεξάρτητα.

Εξαιτίας των πολλών διαφορετικών προσεγγίσεων της διερευνητικής μάθησης οι Engeln, Euler και Maass (2013) δίνουν έναν ευρύ ορισμό μέσα από το σχεδιάγραμμα (Σχήμα 1):



Σχήμα 1: Πολύπλευρο μοντέλο διερευνητικής μάθησης (Engeln, Euler & Maass, 2013)

## Μεθοδολογία

Τα ερευνητικά ερωτήματα απαντώνται και αναλύονται σε βάθος αξιοποιώντας τη μέθοδο της μελέτης περίπτωσης. Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης καθώς εξετάστηκε ένα μάθημα (μία διδακτική ώρα 46 λεπτών) βίντεο από το TIMSS (The Third International Mathematics and Science Study, 1999, Video Study). Η διδασκαλία γίνεται σε μαθήτριες Γ' Γυμνασίου (8<sup>η</sup> τάξης) σε σχολείο θηλέων στην Αυστραλία. Το μάθημα που εξετάζεται στην παρούσα έρευνα είναι το 2<sup>ο</sup> από μια σειρά 12 μαθημάτων που εστιάζει στην ισότητα τριγώνων. Η μελέτη επικεντρώνεται συγκεκριμένα στις δράσεις της εκπαιδευτικού κατά τη διαδικασία της επίλυσης προβλήματος από τις μαθήτριες τόσο κατά την εισαγωγή του προβλήματος, όσο κατά την αυτόνομη εργασία των μαθητριών και έπειτα στην συζήτηση των αποτελεσμάτων.

## *Το πρόβλημα*

Δίνεται σε κάθε μαθήτρια από ένα φύλλο εργασίας με τα βήματα του προβλήματος, τα οποία εξηγεί και προφορικά η καθηγήτρια. Οι μαθήτριες καλούνται να φτιάξουν μια λίστα από όσο το δυνατόν λιγότερες οδηγίες ώστε αν τις ακολουθήσουν οι συμμαθήτριάς τους, να σχεδιάσουν ακριβώς το ίδιο τρίγωνο. Πρέπει να εργαστούν με τα εξής βήματα:

Η κάθε μαθήτρια

1. Σχεδιάζει ένα τρίγωνο χωρίς να το δουν τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας
2. Γράφει τις οδηγίες με όσο το δυνατόν περισσότερη σαφήνεια.

Στην κάθε ομάδα:

3. Μία μαθήτρια διαβάζει τις οδηγίες της
4. Οι υπόλοιπες μαθήτριες σχεδιάζουν το τρίγωνο σύμφωνα με τις οδηγίες που ακούνε
5. Κόβουν το τρίγωνο και δοκιμάζουν να δουν αν είναι ίσα
6. Η μαθήτρια αξιολογεί τις οδηγίες της
7. Αν δεν είναι ίσα, η μαθήτρια διορθώνει τις οδηγίες και επαναλαμβάνονται τα βήματα 3,4,5
8. Κολλλάει τα τρίγωνα στο φύλλο εργασίας της
9. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από πλευρές και γωνίες που οι συμμαθήτριάς σου χρειαζόταν να ξέρουν για να σχεδιάσουν το τρίγωνο; Συζητήστε το με την ομάδα και γράψτε το.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε μέλος της ομάδας.

Αυτό το πρόβλημα θεωρείται ανοιχτό αφού υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι επίλυσης και προσέγγισης από τις μαθήτριες. Οι διδασκαλίες που πλαισιώνονται από ανοιχτά χαρακτηριστικά και διερευνητικές ερωτήσεις και έχουν συλλογικές φάσεις οι οποίες παρέχουν ευκαιρίες για διαπραγμάτευση μαθηματικών εννοιών και κατασκευή νέων γνώσεων παρέχονται σε «διερευνητικές τάξεις» (Maaß & Artigue, 2013). Το πρόβλημα έχοντας ως στόχο την αναζήτηση και την εύρεση των λιγότερων δυνατών οδηγιών, δίνει ευκαιρίες στις μαθήτριες να διερευνήσουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και να κάνουν συνδέσεις μέσα από την χάραξη της δικής τους στρατηγικής λύσης και σε συνδυασμό με την συζήτηση στην ομάδα τους και στην ολομέλεια της τάξης.

## Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε αρχικά με ανοιχτή κωδικοποίηση με τεχνικές grounded (Charmaz, 2006) στην απομαγνητοφώνηση του βίντεο κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της επίλυσης προβλήματος. Στη συνέχεια, έγινε κατηγοριοποίηση αυτών των κωδικών αναζητώντας κωδικούς που ήταν συνηθέστεροι, πιο αποκαλυπτικοί και πιο κοντά στο ερευνητικό ερώτημα. Οι κωδικοί από τα δεδομένα σε αυτήν την φάση οδήγησαν στον διαχωρισμό των δράσεων της εκπαιδευτικού στις τρεις φάσεις της επίλυσης προβλήματος (εισαγωγή, αυτόνομη εργασία μαθητών και συζήτηση) όπου η κάθε φάση περιλαμβάνει τις δικές της κατηγορίες. Τέλος, αυτές οι κατηγορίες που προέκυψαν συνδέθηκαν και συγκρίθηκαν με την προσέγγιση της διερευνητικής μάθησης των Engeln, Euler και Maass (2013).

## Αποτελέσματα

### *Η εισαγωγή του προβλήματος*

Η εκπαιδευτικός εξηγώντας το πρόβλημα και τα βήματα που περιλαμβάνει, φαίνεται να δίνει έμφαση στα χαρακτηριστικά του ίδιου του προβλήματος που αφορούν:

A) Στην συνεργασία, διαμορφώνοντας την τάξη βάζοντας τους μαθητές να χωριστούν σε ομάδες, διασφαλίζοντας ότι θα ενοείται ο διάλογος μεταξύ των μελών της ομάδας και τα βήματα του προβλήματος που απαιτούν συνεργασία.

«Ένα άτομο, για παράδειγμα η Λ. εδώ, θα διαβάζει τις οδηγίες της και οι άλλες δύο (της ομάδας) θα ακολουθούν τις οδηγίες της. (...) Δεν θα πρέπει να βλέπετε τι έχει κάνει, αλλά να ακολουθείτε τις οδηγίες.»

B) Στην πρόκληση. Η εκπαιδευτικός πριν ακόμα εξηγήσει τα βήματα του προβλήματος, τους αναφέρει τον στόχο του δίνοντας κίνητρο στις μαθήτριες να εμπλακούν και να χρησιμοποιήσουν τις προηγούμενες γνώσεις τους (ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν όλες τις αντίστοιχες γωνίες και τις αντίστοιχες πλευρές ίσες) για να φέρουν εις πέρας αυτό που τις ζητήθηκε.

«Αυτό που θα κάνετε είναι να ανακαλύψετε τους κανόνες για την ισότητα δύο τριγώνων και θα προσπαθήσετε να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό κανόνων που χρειάζεται.»

Γ) Στον αναστοχασμό, καλώντας τις μαθήτριες να ελέγχουν συνεχώς είτε με δοκιμές είτε «κοιτάζοντας πίσω» και εκτιμώντας τις απαντήσεις τους, να τις διαμορφώνουν μέχρι να φτάσουν στο τελικό αποτέλεσμα τους.

«...θα πρέπει να ψάξετε και να δείτε αν είναι ακριβώς ίδια (εννοεί τα τρίγωνα που σχεδίασαν οι συμμαθήτριες με το τρίγωνο στο οποίο αναφέρονται οι οδηγίες). Αν δεν είναι, πρέπει να πάτε πίσω και να αλλάξετε τις οδηγίες ώστε τελικά να δουλεύουν»

«... πρέπει να αποφασίσετε τι χρειάζεστε για το ελάχιστο αριθμό βημάτων ...»

Δ) Στην ανοιχτότητα. Η εκπαιδευτικός παροτρύνει τις μαθήτριες να βρουν τις δικές τους μεθόδους και λύσεις.

«...θα φτιάξετε τις δικές σας οδηγίες, εξαρτάται από το τι θα σχεδιάσετε (...) θα φτιάξετε το δικό σας τρίγωνο.»

«... μπορεί να καταλήξετε σε εντελώς διαφορετικούς τρόπους.»

### *Αυτόνομη εργασία των μαθητριών*

Η εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της αυτόνομης εργασίας των μαθητριών γυρίζει συνεχώς πάνω από τις ομάδες και παρακολουθεί σε ποια φάση βρίσκονται, απαντάει σε τυχόν ερωτήσεις των μαθητριών, καθοδηγεί όταν κρίνει απαραίτητο με τρόπους που θα αναφερθούν στη συνέχεια και τέλος παρατηρεί τις απαντήσεις που προκύπτουν.

Όσον αφορά στις ερωτήσεις των μαθητριών, η εκπαιδευτικός απαντάει κλειστά σε ερωτήσεις που δεν αφορούν το στόχο του προβλήματος και με ανοιχτή καθοδήγηση ή παρότρυνση για διερεύνηση σε αντίθετη περίπτωση.

Μ: «Χρειάζεται να κάνω μέτρηση. (...) Να γράψω για παράδειγμα 5 μονάδες οτιδήποτε;» - Ε: «Ναι αυτό θα κάνεις»

Μ: «Το δικό μου είναι σωστό;» - Ε: «Εξαρτάται, αν έχουν σχεδιάσει το ίδιο τρίγωνο τότε δουλεύει. Αν όχι, θα το αλλάξεις. Εντάξει; Πρέπει να δοκιμάσεις.»

Η καθοδήγηση της εκπαιδευτικού η οποία γίνεται κυρίως μέσω ερωτήσεων, διαχωρίζεται σε τρεις κατηγορίες δράσεων:

#### 1) Διευκρινίσεις

Οι διευκρινίσεις της καθηγήτριας πολλές φορές αφορούν την διαδικασία και τα βήματα του προβλήματος που πρέπει να ακολουθήσουν και άλλες φορές αποτελούν ερωτήσεις που κάνει στις μαθήτριες σχετικά με τις απαντήσεις που έχουν δώσει όταν δεν είναι σαφείς ή καλά διατυπωμένες σε μαθηματική γλώσσα. Κάποιες φορές επίσης -για την δεύτερη περίπτωση- οι διευκρινίσεις έχουν στόχο να φέρουν οι μαθήτριες τις απαντήσεις τους πιο κοντά στη μαθηματική γλώσσα και την ορολογία των κριτηρίων της ισότητας τριγώνων.

«Λέγοντας ‘οριζόντια’ εννοείς την γωνία, έτσι;»

## 2) Μεταγνωστικές ερωτήσεις

Γυρίζοντας πάνω από τις ομάδες η εκπαιδευτικός, για να προκαλέσει τον αναστοχασμό και τη σκέψη των μαθητριών, τη δημιουργία συνδέσεων με μαθηματικές έννοιες και να καθοδηγήσει τις μαθήτριες να βελτιώσουν τις λύσεις τους, χρησιμοποιεί μεταγνωστικές ερωτήσεις για την περιγραφή της στρατηγικής τους και της διαδικασίας σκέψης τους και για την εκτίμηση των αποτελεσμάτων τους.

«...και πώς θα γνωρίζεις τι μέγεθος είναι η γωνία;»

«... κατέληξες με όλες τις γωνίες ίσες αλλά τι τους είπες να σχεδιάσουν γωνίες ή πλευρές;»

« Άρα αποφάσισες ότι αυτό ήταν σημαντικό ή το μήκος της γραμμής ήταν σημαντικό;»

«... χρειάστηκαν όλες αυτές τις οδηγίες για να ολοκληρώσουν το τρίγωνό σου;»

## 3) Πρόσκληση για διερεύνηση

Η καθηγήτρια προτρέπει συνεχώς να ελέγξουν τις απαντήσεις τους, να δοκιμάσουν τρόπους να τις βελτιώσουν ακόμα και να βρουν και άλλες λύσεις πέρα από την πρώτη που απάντησαν.

«...δες αν μπορείς να σκεφτείς το ίδιο τρίγωνο αν είχες δώσει διαφορετικές οδηγίες...»

### *Συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης*

Κατά την τελευταία φάση της παρουσίασης των τεσσάρων αποτελεσμάτων δεν γίνεται κάποιος παραγωγικός διάλογος, ούτε πλούσια συζήτηση πάνω στις προσπάθειες των μαθητριών. Ωστόσο, η καθηγήτρια περιγράφει η ίδια τις δύο από τις τέσσερις λύσεις και οι άλλες περιγράφονται από δύο μαθήτριες μετά από παρότρυνση της καθηγήτριας καταλήγοντας πάντα με την καθηγήτρια να λέει το συμπέρασμα χρησιμοποιώντας την μαθηματική ορολογία που απαιτεί η ισότητα τριγώνων («Άρα, τρεις πλευρές»). Η σειρά με την οποία παρουσιάστηκαν οι απαντήσεις ήταν από τις πιο συχνές ως αυτήν που δεν απάντησε καμία. Οι ερωτήσεις που έκανε η καθηγήτρια ήταν σύντομες, δεν έδινε περιθώρια για συζήτηση και είχαν στόχο να κάνουν παρατηρήσεις οι μαθήτριες πάνω στα συμπεράσματα: «...παρατηρήσατε πού είναι η γωνία;», «...αν όριζα τις τρεις γωνίες θα έπαιρνα ίσα τρίγωνα;».



## Συζήτηση/ Συμπεράσματα

Η δραστηριότητα στην παρούσα περίπτωση χαρακτηρίζεται «ανοιχτή» και με μεγάλη μαθηματική πρόκληση, δεν είναι συνηθισμένη στις αίθουσες της Αυστραλίας αλλά παρέχει την δυνατότητα να κάνουν εικασίες οι μαθήτριες, να δικαιολογήσουν την στρατηγική που επιλέγουν και να κάνουν συνδέσεις με τις προηγούμενες γνώσεις τους. Η παρατήρηση των δράσεων της εκπαιδευτικού έδωσε χρήσιμα συμπεράσματα για την διεξαγωγή ανοιχτών και διερευνητικών προβλημάτων στην τάξη των μαθηματικών. Για να γίνει κατανοητή μια δραστηριότητα πρέπει να προσδιοριστεί το πρόβλημα και οι ευκαιρίες που άδραξε το άτομο κατά τη διάρκεια της πραγματοποίησής του, οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε αποφάσεις που διατηρούν ή αλλάζουν τελικά τον αρχικό σχεδιασμό του προβλήματος (Schoenfeld, 2010). Έχει σημασία πότε η εκπαιδευτικός διαλέγει να πραγματοποιήσει το πρόβλημα ώστε να αποτελεί μια πρόκληση για τους μαθητές αλλά και να μπορούν κάνοντας χρήση των προηγούμενων γνώσεών τους, να εργαστούν πάνω σε αυτό. Ενώ υπάρχουν μελέτες που υποστηρίζουν τη χρήση ανοιχτών προβλημάτων για την προσέλκυση μαθητών, άλλες υποστηρίζουν ότι η χρήση τέτοιων προβλημάτων πρέπει να βασίζεται στις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών (Bennett & Desforjes, 1988). Τέλος, φαίνεται ότι η διαχείριση του προβλήματος από την καθηγήτρια δεν καταστέλλει την ανοιχτότητά του.

Κυρίαρχη στρατηγική της εκπαιδευτικού αποτελεί η συνεχής προτροπή των μαθητριών να χαράξουν τις δικές τους μεθόδους μέσα από συνεχή διερεύνηση και αναστοχασμό. Οι μαθητές τελικά κλήθηκαν να ερμηνεύουν, να αξιολογούν και να διορθώνουν την λύση τους μέχρι να αποφασίσουν την τελική τους απάντηση και τους δόθηκε η ευκαιρία να σκεφτούν και περισσότερες από μια απαντήσεις. Η συνεργασία υποστηρίχθηκε καθ' όλη τη διάρκεια της αυτόνομης εργασίας των μαθητριών καθώς απαιτούνταν για τις δοκιμές των οδηγιών της κάθε μαθήτριας και τη συζήτηση μεταξύ των μελών της ομάδας. Αυτά τα χαρακτηριστικά συμφωνούν με εκείνα που διέπουν μια διερευνητική μάθηση σύμφωνα με τους Engeln, Euler και Maass (2013).

Η καθηγήτρια παρόλο που επαναλαμβάνοντας πολύ συχνά τις περιγραφές των μαθητριών χρησιμοποιώντας την γεωμετρική ορολογία, δεν φαίνεται να επιμένει και να απαιτεί τον λόγο των μαθητριών να είναι αυστηρά μαθηματικός, γεγονός που ίσως βοηθάει την ανοιχτή σκέψη των μαθητριών και την εφευρετικότητά τους. Μόνο στην τρίτη φάση του προβλήματος παρουσιάζει την μαθηματική ορολογία που θα πρέπει να χρησιμοποιείται έχοντας όμως καταλήξει σαν συμπέρασμα σε αυτήν και δεν δίνεται σαν a priori θεωρία που πρέπει να χρησιμοποιείται.

## Βιβλιογραφία

- Bennett, N., & Desforjes, C. (1988). Matching classroom tasks to students' attainments. *The Elementary School Journal*, 88(3), 221-234.
- Chan, E. C. M. (2005). Using open-ended mathematics problems: A classroom experience (Primary).
- Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. sage.
- da Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in mathematics*, 93(1), 51-66.
- Engeln, K., Euler, M., & Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: A comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM*, 45(6), 823-836.
- Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23), 8410-8415.
- Jackson, K. J., Shahan, E. C., Gibbons, L. K., & Cobb, P. A. (2012). Launching complex tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(1), 24-29.
- Leung, K. C. I., Ding, L., Leung, A. Y. L., & Wong, N. Y. (2014, April). Prospective Teachers' Competency in Teaching how to Compare Geometric Figures: The Concept of Congruent Triangles as an Example. In *Proceedings of the KSME 2014 Spring Conference on Mathematics Education held at Hankuk Univ. of Foreign Studies, Seoul* (pp. 130-791).
- Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM*, 45(6), 779-795.
- Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York, NY: Rutledge
- Πετροπούλου, Γ. (2018). *Η διδασκαλία των μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση* (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).