Εργοδική Θεωρία (2018–2019) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

1. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $U_T f := f\circ T$ ο αντίστοιχος τελεστής Koopman. Έστω επίσης $M(X,\mathscr{B})$ ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων $f\colon X\to\mathbb{C}$. Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του τελεστή $U_T\colon M(X,\mathscr{B})\to M(X,\mathscr{B})$ έχει αναγκαστικά μέτρο ένα· συγκεκριμένα, δείξτε ότι, αν $U_T f=\lambda f$, μ-σχεδόν παντού, για κάποιο $\lambda\in\mathbb{C}$ και κάποια μετρήσιμη $f\colon X\to\mathbb{C}$ που δεν είναι μ-σχεδόν παντού ίση με μηδέν, τότε $|\lambda|=1$.
[*Υπόδειξη*: Άσκηση 1 Φυλλαδίου 2.]

2. Θεωρείστε το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ με $X=\mathbb{T}^2$, $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathbb{T}^2)$ την σ-άλγεβρα Borel του $\mathbb{T}^2$, μ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{T}^2$ και $T\colon X\to X$ τον μετασχηματισμό

$$T(x,y)=\big(x+2y \pmod 1\ ,\ 3x+4y \pmod 1\big).$$

Εξετάστε κατά πόσο το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ είναι mixing (ασθενώς ή ισχυρά).

3. Έστω $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in[0,1)^d$. Θεωρείστε το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,T_\alpha)$ με $X=\mathbb{T}^d$, $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathbb{T}^d)$ την σ-άλγεβρα Borel του $\mathbb{T}^d$, μ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{T}^d$ και $T_\alpha\colon X\to X$ τον μετασχηματισμό $T_\alpha(x)=x+\alpha \pmod 1$, $x=(x_1,\dots,x_d)$, δηλαδή

$$T_\alpha(x_1,\dots,x_d)=\big(x_1+\alpha_1 \pmod 1),\dots,x_d+\alpha_d \pmod 1\big).$$

Βρείτε για ποιες (αν κάποιες) τιμές του α το σύστημα είναι ασθενώς mixing.

4. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $k\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ είναι ασθενώς mixing (ισχυρά mixing) ανν το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,T^k)$ είναι ασθενώς mixing (ισχυρά mixing).

5. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Δείξτε ότι το σύστημα είναι ισχυρά mixing ανν $\langle U_T^n f,g\rangle\to\langle f,\mathbf{1}_X\rangle\langle\mathbf{1}_X,g\rangle$ $(n\to\infty)$ για όλες τις f και g σε ένα πυκνό υποσύνολο του $L^2(X,\mathscr{B},\mu)$.
[Για $f,g\in L^2(X,\mathscr{B},\mu)$, όπου $(X,\mathscr{B},\mu)$ ένας χώρος μέτρου, $\langle f,g\rangle := \int_X f\bar{g}\,\mathrm{d}\mu$. Επίσης $\mathbf{1}_X$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου X, δηλαδή η ταυτοτικά ένα συνάρτηση.]

6. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα ασθενώς mixing σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Δείξτε ότι για κάθε $f\in L^2(X,\mathscr{B},\mu)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^{k^2} \xrightarrow[(n\to\infty)]{L^2} \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

[*Υπόδειξη*: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι, για $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha k^2}\xrightarrow{(n\to\infty)}0$.]

7. (α) Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα ασθενώς mixing σύστημα που διατηρεί το μέτρο, $f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k\alpha} f\circ T^k=0 \qquad \mu\text{-σχεδόν παντού.}$$

(β) Δείξτε επίσης ότι, για $\alpha \in \mathbb{R}$ άρρητο και $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μία 1-περιοδική, Borel μετρήσιμη συνάρτηση με $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k\alpha} f(2^k x) = 0 \qquad \text{για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

8. Έστω $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ ένα αντιστρέψιμο σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $B \in \mathscr{B}$ με $\mu(B) > 0$. Έστω $N_B(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}\colon T^n(x) \in B\}$, για $x \in X$, όπου $\inf \varnothing = +\infty$. Έστω ακόμη

$$A := B \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} T^{-m}(B) \right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} T^{m}(B) \right) = B \cap \overline{\lim_m} T^{-m}(B) \cap \overline{\lim_m} T^{m}(B)$$

και $T_A\colon A \to A$ με

$$T_A(x) = T^{N_B(x)}(x), \qquad x \in A,$$

ο επαγώμενος μετασχηματισμός. Έστω, τέλος, $\mathscr{B}_A = \{A \cap C\colon C \in \mathscr{B}\}$ και μ_A το μέτρο $\mu_A(C) := \mu(C)/\mu(A)$ στον μετρήσιμο χώρο $(A, \mathscr{B}_A)$. Θεωρώντας γνωστό ότι το $(A, \mathscr{B}_A, \mu_A, T_A)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο, δείξτε ότι είναι αντιστρέψιμο.