

Σχετικά με το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} xy u_x + u_y = 1, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

ειπώθηκε στο μάθημα ότι δεν μπορεί να γίνει απαλοιφή της παραμέτρου s από τις χαρακτηριστικές εξισώσεις. Αυτό δεν είναι σωστό. Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις είναι

$$\frac{dx}{ds} = xy$$

$$\frac{dy}{ds} = 1$$

$$\frac{dz}{ds} = 1.$$

Από αυτές προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy} \quad (\text{όπως ειπώθηκε στο μάθημα})$$

και

$$\frac{dz}{dy} = 1 \quad (\text{αυτό δεν ειπώθηκε στο μάθημα}).$$

Λύνοντας παίρνουμε

$$xe^{-\frac{y^2}{2}} = c_1, \quad z - y = c_2$$

έχουμε δηλαδή βρει δύο αναλλοίωτες ποσότητες, ποσότητες δηλαδή οι οποίες παραμένουν σταθερές κατά μήκος κάθε χαρακτηριστικής καμπύλης.

Τα δύο σημεία που μας ενδιαφέρουν είναι το $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ και το $(\bar{x}, 0, u(\bar{x}, 0)) = (\bar{x}, 0, g(\bar{x}))$. Έχουμε λοιπόν

$$x_0 e^{-\frac{y_0^2}{2}} = \bar{x}, \quad u(x_0, y_0) - y_0 = g(\bar{x}).$$

Προκύπτει έτσι ότι

$$u(x_0, y_0) = y_0 + g(x_0 e^{-\frac{y_0^2}{2}}).$$

Άρα η λύση του προβλήματος (1) είναι

$$u(x, y) = y + g(xe^{-\frac{y^2}{2}}).$$