ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Ε.Κ.Π.Α.

411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

28 Σεπτεμβρίου 2018

Άριστα = **10** μονάδες

Θ1 (**1.5 μον.**) Θεωρούμε τον κυκλικό τομέα $\mathcal{K} = \{(r, \theta) : 0 < \theta < \beta \,,\, 0 < r < a\}$. Να βρεθεί η αρμονική συνάρτηση που επί των ευθύγραμμων πλευρών του $\partial\mathcal{K}$ ικανοποιεί την ομογενή συνθήκη Dirichlet

$$u(r, 0) = 0 = u(r, \beta)\,,$$

ενώ επί της καμπυλόγραμμης πλευράς του $\partial\mathcal{K}$ ικανοποιεί τη μη ομογενή συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = h(\theta)\,.$$

Θ2 (**2 μον.**) Έστω g επαρκώς ομαλή συνάρτηση, με $g(0) = g(1) = 0$ και $g(x) > 0$ για $x \in (0, 1)$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \;\;,\;\; x \in (0, 1)\,,\;\; t > 0$$

$$v(x, 0) = g(x) \;\;,\;\; x \in [0, 1]\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0 \;\;,\;\; t \geq 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t\to\infty} \left(\int_0^1 v^2(x, t)\, dx \right) = 0\,.$$

Θ3 (**3 μον.**) Δίνεται η εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \;\;,\;\; x \in (0, 1),\, t > 0\,,$$

με

$$u(x, 0) = 4\,x\,(1 - x) \;\;,\;\; x \in [0, 1] \;\;\text{και}\;\; u(0, t) = u(1, t) = 0 \;\;,\;\; t \geq 0\,.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι $0 < u(x, t) < 1$, για $x \in (0, 1)$ και $t > 0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι $u(x, t) = u(1 - x, t)$, για $x \in [0, 1]$ και $t \geq 0$.

(γ) Με χρήση της ενεργειακής μεθόδου, να αποδειχθεί ότι το $\int_0^1 u^2(x, t)\, dx$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του t.

$\boxed{\Theta 4}$ **(1.5 μον.)** Δίνεται η μ.δ.ε.

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2\,x^2\,\frac{\partial u}{\partial y} - u = x^2\,\mathrm{e}^x.$$

(α) Να βρεθεί η γενική της λύση.

(β) Να βρεθεί ειδική λύση, που επί της καμπύλης $y = x^2 + 4$ ισούται με $\sin x$.

(γ) Να βρεθεί ειδική λύση, που επί της καμπύλης $y = x^2 + 4$ ισούται με $x\,(\mathrm{e}^x - 1)$.

(δ) Να βρεθεί ειδική λύση, που επί της καμπύλης $y = x^2 + 4x$ ισούται με $\cos x$.

$\boxed{\Theta 5}$ **(3 μον.)** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\ ,\ x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0\,, \\ 1, & 0 \le x \le 1\,, \\ 0, & x > 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

$\boxed{\text{Καλή Επιτυχία!}}$