ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Ε.Κ.Π.Α.

411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

13 Ιουνίου 2018

Άριστα = **10** μονάδες

Θ1 (**1.5 μον.**) Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2u(x,y) = 0\,,\ x, y \in \mathbb{R}\,;$$

$$u(x,y) = x + 1\,,\ \text{ επί της }\ 2x + y + 1 = 0\,.$$

Θ2 (**2.5 μον.**) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0\ ;\ u(x,0) = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

(α) Να δοθεί ο ορισμός της ασθενούς λύσης του.

(β) Να λυθεί όταν

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0\,, \\ 1 - x, & 0 \le x \le 1\,, \\ 0, & x > 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

(γ) Στην περίπτωση που

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0\,, \\ 1, & x \ge 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

δεν ισχύει η μοναδικότητα των λύσεων. Να βρεθεί μια λύση τύπου «κύματος αραίωσης» και μια τύπου «κρουστικού κύματος». Τι συμβαίνει όταν επιβληθεί η συνθήκη εντροπίας;

Θ3 (**2 μον.**) Έστω Ω φραγμένο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με επαρκώς ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, n το (εξωτερικό) κάθετο διάνυσμα στο σύνορο, $g \in C(\partial\Omega)$ και k σταθερά. Έστω u_1 και u_2 λύσεις του προβλήματος Neumann:

$$\Delta u + k\,u = 0\,,\ \text{στο }\ \Omega\ ;\ \frac{\partial u}{\partial n} = g\,,\ \text{ επί του }\ \partial\Omega\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

(i) Όταν $k = 0$, ισχύει ότι $u_1 - u_2 = c$ στο $\overline{\Omega}$, όπου c σταθερά.

(ii) Όταν $k < 0$, ισχύει ότι $u_1 = u_2$ στο $\overline{\Omega}$.

Θ4 (**1.5 μον.**) Έστω $f \in C^2\left([0, +\infty)\right)$, με $f(0) = f''(0) = 0$ και c θετική σταθερά. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0\ &;\ x \in (0, +\infty)\,,\ t \in (-\infty, +\infty)\,, \\ u(x,0) = f(x)\ &;\ x \in [0, +\infty)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\ &;\ x \in [0, +\infty)\,, \\ u(0,t) = 0\ &;\ t \in (-\infty, +\infty)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{\Theta 5}}$ **(1.5 μον.)** Έστω k και L θετικές σταθερές και f επαρκώς ομαλή συνάρτηση, που ικανοποιεί κατάλληλες συνθήκες συμβιβαστότητας στο $-L$ και στο L. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \;\; ; \; x \in (-L, L)\,, \; t > 0\,,$$

$$u(x,0) = f(x) \;\; ; \; x \in [-L, L]\,,$$

$$u(-L,t) = u(L,t) \;\; ; \; t \geq 0\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) \;\; ; \; t \geq 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{\Theta 6}}$ **(2 μον.)** Έστω k, μ, L θετικές σταθερές και f επαρκώς ομαλή συνάρτηση, με $f(0) = f(L) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (0, L)$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \mu\, u(x,t) \;\; ; \; x \in (0, L)\,, \; t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \;\; ; \; x \in [0, L]\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \;\; ; \; t \geq 0\,.$$

Έστω

$$E(t) := \int_0^L u^2(x,t)\,dx\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0\,.$$

Καλή Επιτυχία!