

ΕΚΠΑ - Τμήμα Μαθηματικών
411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
Ακαδ. έτος 2024-25

Ασκήσεις.

1. Θεωρούμε την ΜΔΕ $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$, $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $(a(x, y), b(x, y))$ περιγράφονται από τη σχέση $\xi(x, y) = c$ όπου $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία C^1 συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της ΜΔΕ είναι $u(x, y) = f(\xi(x, y))$ όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση.
[Υπόδειξη: Αλλαγή μεταβλητών.]

2. Να βρεθεί λύση της ΜΔΕ $u_x + u_y + 2u = 0$ για την οποία ισχύει $u(x, y) = x + 1$ επί της ευθείας $2x + y + 1 = 0$.
3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t - xtu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = x - y, & x \in \mathbb{R}, y > 1 \\ u(x, 1) = 1 + x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. Ναδειχθεί ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

δεν έχει λύσεις παρά μόνο αν η g είναι σταθερή. Ναδειχθεί επίσης ότι αν η g είναι σταθερή τότε το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

6. Να βρεθεί γενικευμένη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $g(x) = 1 + x$ για $x < 1$ και $g(x) = x$ για $x > 1$.

7. Να βρεθεί γενικευμένη λύση εντροπίας του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

8. (i) Να βρεθούν οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. (ii) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. Έστω $l > 0$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών Sturm-Liouville L_D και L_N με τύπο

$$L_D u = L_N u = -u''$$

και συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} \text{για τον } L_D : & u(0) = u(l) = 0, & (\text{συνοριακές συνθήκες Dirichlet}) \\ \text{για τον } L_N : & u'(0) = u'(l) = 0, & (\text{συνοριακές συνθήκες Neumann}). \end{cases}$$

10. Έστω $u \in C^2([-1, 1] \times [0, +\infty))$ λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & x \in (-1, 1), t > 0, \\ u(-1, t) = 0, & t > 0, \\ u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

όπου ϕ συνεχής συνάρτηση με $\phi(1) = \phi(-1) = 0$. Χωρίς χρήση σειρών Fourier αποδείξτε ότι αν η $\phi(x)$ είναι άρτια συνάρτηση τότε $u(x, t) = u(-x, t)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $t > 0$.

11. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

12. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^t \sin(2x), & x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

13. Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη και $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ναδειχθεί ότι αν $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 dx < +\infty$ τότε υπάρχει $c > 0$ ώστε $|u(x, t)| \leq c/t^{1/4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$.

14. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα για την εξίσωση θερμότητας

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x > 0, \end{cases}$$

όπου $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$. Θεωρώντας κατάλληλη επέκταση της g βρείτε έναν ολοκληρωτικό τύπο για τη λύση του παραπάνω προβλήματος.

15. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Λέμε ότι μία συνεχής συνάρτηση $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα μέσης τιμής αν για κάθε $(x_0, y_0) \in D$ υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε αν $0 < r < r_0$ τότε

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(x_0, y_0, r)} u(x, y) ds \quad (\text{επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον κύκλο } S(x_0, y_0, r)).$$

(i) Δείξτε ότι αν μία C^2 συνάρτηση $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα μέσης τιμής τότε είναι αρμονική. (ii) Έστω (u_n) ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο D και u μία C^2 συνάρτηση στο D . Δείξτε ότι αν η ακολουθία (u_n) συγκλίνει στην u ομοιόμορφα (δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $|u_n(x, y) - u(x, y)| < \epsilon$ για κάθε $(x, y) \in D$), τότε και η u είναι αρμονική συνάρτηση.

16. Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } U, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{στο } \partial U, \end{cases}$$

όπου $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο με ομαλό σύνορο και $f \in C(U)$, $g \in C(\partial U)$. (i) Βρείτε μία ολοκληρωτική συνθήκη που σχετίζει τις f, g η οποία είναι αναγκαία για την ύπαρξη λύσης και συμπεράνετε ότι το πρόβλημα δεν έχει εν γένει λύση. (ii) Χρησιμοποιώντας μεθόδους ενέργειας αποδείξτε ότι δύο οποιεσδήποτε λύσεις του παραπάνω προβλήματος διαφέρουν κατά μία σταθερά.

17. Έστω ο δακτύλιος $D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στον } D, \\ u(x, y) = 1 + x, & \text{στον κύκλο } \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}, \\ u(x, y) = 0, & \text{στον κύκλο } \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

[Υπόδειξη: εφαρμόστε χωρισμό μεταβλητών]