

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών
Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I
10 Ιουνίου 2025

1. [2μ] Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} xy u_x + u_y = 1, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεδομένη διαφορίσιμη συνάρτηση.

2. [2μ] Να βρεθεί γενικευμένη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $f(x) = x + 2$ για $x < 0$ και $f(x) = x + 1$ για $x > 0$.

3. [2μ] Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο με ομαλό σύνορο και έστω $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω $k \in \mathbb{R}$ και έστω u_1, u_2 λύσεις του προβλήματος Neumann

$$\begin{cases} \Delta u + ku = 0, & \text{στο } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι: (i) Αν $k = 0$ τότε οι u_1, u_2 διαφέρουν κατά μία σταθερά. (ii) Αν $k < 0$ τότε $u_1 = u_2$.

4. [2μ] Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα στο άνω μισό του μοναδιαίου δίσκου

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1, y > 0, \\ u(x, y) = 0, & y = 0, \\ u(x, y) = 4y^3 - 3y, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε πολικές συντεταγμένες (οπότε $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$).]

5. [2μ] Έστω $u(x, t)$ λύση του μη γραμμικού προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x^2, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = -x^2. & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι $u(0, t) = -\frac{1}{2} \ln(1 + 4t)$ για κάθε $t > 0$. [Υπόδειξη: Θέσετε $w = e^u$.]

6. [2μ] Έστω ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_t(0, t) = u_x(0, t), & t > 0, \\ u_t(L, t) = -2u_x(L, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 < x < L, \end{cases}$$

όπου ϕ, ψ ομαλές συναρτήσεις. Να αποδειχθεί ότι η ολική ενέργεια $E(t) = \int_0^L (u_t^2 + u_x^2) dx$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Διάρκεια 2 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Δίνεται ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ και $\sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.