βλ. τη (2.16).

Από τη (2.16′) έπεται αμέσως ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\tag{2.17} \begin{cases} u_t + cu_x = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

είναι

$$\tag{2.18} u(x,t) = \varphi(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t-\sigma), \sigma)\, d\sigma, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Παρατήρηση 2.3 (Ομαλότητα λύσεων.) Για να είναι η λύση u του προβλήματος αρχικών τιμών (2.17) για τη μη ομογενή εξίσωση συνεχώς παραγωγίσιμη, συνθήκη απαραίτητη ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση, ο μη ομογενής όρος f πρέπει να είναι αναγκαστικά συνεχής συνάρτηση, αφού $u_t + cu_x = f(x,t)$. Η συνέχεια, όμως, της f δεν είναι αρκετή, ως ικανή συνθήκη, για να εξασφαλιστεί συνεχής παραγωγισιμότητα της u, υποθέτοντας ότι η αρχική τιμή φ είναι αρκετά ομαλή. Αυτό είναι εμφανές από τον τύπο (2.18) και ειδικότερα από τον δεύτερο όρο στο δεξιό μέλος του, στον οποίο απαιτείται τουλάχιστον παραγωγισιμότητα της f. Ανακεφαλαιώνοντας, υπό την προϋπόθεση ότι η φ είναι αρκετά ομαλή, η συνέχεια και η συνεχής παραγωγισιμότητα της f, αντίστοιχα, αποτελούν αναγκαία και ικανή συνθήκη, αντίστοιχα, για να είναι η u συνεχώς παραγωγίσιμη. Καμμία από αυτές τις δύο συνθήκες δεν μπορεί να βελτιωθεί· για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στις Ασκήσεις 2.12 και 2.13. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει απόκλιση μίας τάξης παραγωγισιμότητας μεταξύ της ικανής και της αναγκαίας συνθήκης. Αυτό είναι ένα φαινόμενο καθαρά των ΜΔΕ, με την έννοια ότι δεν εμφανίζεται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, ο αναγνώστης μπορεί να το συγκρίνει με τη διαφορική εξίσωση

$$y' = f(t,y),$$

στην οποία φαίνεται καθαρά ότι η ομαλότητα της αναγκαίας συνθήκης συμπίπτει με την αντίστοιχη της ικανής συνθήκης. □

Ασκήσεις

2.8 Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases} \xi := ax + bt \\ \eta := x - ct \end{cases}$$

με $b \neq -ca$ για να επιλύσετε την εξίσωση μεταφοράς $u_t + cu_x = 0$.

2.9 Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases} \xi := bx + at \\ \eta := ax - bt \end{cases}$$

για να επιλύσετε την εξίσωση $au_t + bu_x + cu = 0$, όπου a, b και c μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί. Επιλύστε την ίδια εξίσωση χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $u = \mathrm{e}^{-\frac{c}{b}x}v$.

2.10 Θεωρούμε τη ΜΔΕ $3u_y + u_{xy} = 0$.

α) Ποιου τύπου είναι αυτή η εξίσωση;

β) Θέτοντας $v := u_y$, προσδιορίστε τη γενική της λύση.

γ) Τι μπορείτε να πείτε σχετικά με ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης της ΜΔΕ για την οποία ισχύει

$$u(x,0) = \mathrm{e}^{-3x}, \quad u_y(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

2.11 Θεωρούμε μια μη ομογενή ΜΔΕ πρώτης τάξης της μορφής $u_t + cu_x = h(x + ct)$, όπου $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και c ένας πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής

$$u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

όπου f και g συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, η g αυθαίρετη και η f τέτοια ώστε $f' = \frac{1}{2c}h$. Σημειώστε ότι η u είναι άθροισμα δύο οδευόντων κυμάτων, που ταξιδεύουν με ταχύτητα c, ένα αυθαίρετο, το g, που ταξιδεύει προς τα δεξιά και οφείλεται στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση, και ένα με προκαθορισμένη παράγωγο, το f, που ταξιδεύει προς τα αριστερά και οφείλεται στη συγκεκριμένη μορφή του μη ομογενούς όρου. Ιδιαίτερα, δηλαδή, μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$u(x,t) = f(x + ct).$$

Οδηγηθείτε στο συμπέρασμα με δύο τρόπους:

α) Με την αλλαγή μεταβλητών $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ και $U(\xi, \eta) := u(x,t)$, γράψτε κατ' αρχάς την εξίσωση στη μορφή $2cU_\xi(\xi, \eta) = h(\xi)$.

β) Σύμφωνα με τη (2.16′) έχουμε

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u(x-ct,0) + \int_0^t h(x - c(t-\sigma) + c\sigma)\, d\sigma \\
&= u(x-ct,0) + \int_0^t h(x - ct + 2c\sigma)\, d\sigma \\
&= u(x-ct,0) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\, ds \\
&= u(x-ct,0) + f(x+ct) - f(x-ct).
\end{aligned}
$$

2.12 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.17) και υποθέτουμε, για ευκολία, ότι η αρχική τιμή φ μηδενίζεται ταυτοτικά, $\varphi = 0$. Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση που ο μη ομογενής όρος f είναι ένα οδεύον κύμα, με ταχύτητα α, $f(x,t) = h(x - \alpha t)$. Τότε, η (2.18) δίνει

$$u(x,t) = \int_0^t h(x - ct + (c-\alpha)\sigma)\, d\sigma.$$

Επομένως, αν η ταχύτητα α του οδεύοντος κύματος h είναι c, $\alpha = c$, δηλαδή η f είναι σταθερή κατά μήκος των χαρακτηριστικών της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, τότε

$$u(x,t) = th(x-ct).$$

Βεβαιωθείτε τώρα ότι, για θετικό t, η u είναι τόσο ομαλή όσο και η h, αλλά όχι περισσότερο, ιδιαίτερα, δηλαδή, ότι η ικανή συνθήκη στην Παρατήρηση 2.3 δεν μπορεί να βελτιωθεί.

Στην περίπτωση που η ταχύτητα α του οδεύοντος κύματος h είναι διαφορετική του c, αποδείξτε ότι η u είναι άθροισμα δύο οδευόντων κυμάτων, με ταχύτητες α και c, αντίστοιχα· συγκεκριμένα

$$u(x,t) = g(x - \alpha t) - g(x - ct),$$

όπου g τέτοια ώστε $g' = \frac{1}{c-\alpha} h$. (Για την περίπτωση $\alpha = -c$ βλ. Άσκηση 2.11.) Ιδιαίτερα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η u είναι μία φορά περισσότερο από την h συνεχώς παραγωγίσιμη, οπότε ούτε η αναγκαία συνθήκη στην Παρατήρηση 2.3 μπορεί να βελτιωθεί.

2.13 Δώστε μια βέλτιστη αναγκαία και μια βέλτιστη ικανή συνθήκη ομαλότητας του μη ομογενούς όρου f για να είναι η λύση u του προβλήματος αρχικών τιμών (2.17), στην περίπτωση $\varphi = 0$, k φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.
[*Υπόδειξη*: Συνδυάστε την Παρατήρηση 2.3 και την Άσκηση 2.12.]

2.14 Προσδιορίστε κατ' αρχάς τη γενική λύση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u = u(x,t)$, της εξίσωσης $u_t + 2u_x + 3u = 0, x, t \in \mathbb{R}$, και εν συνεχεία προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + 3u = 0 & \text{στον } \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.15 Προσδιορίστε τη λύση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u = u(x,t)$, του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + 4u = e^{x-2t} & \text{στον } \mathbb{R}^2, \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{στον } \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = x^2$.

***2.16** (Η εξίσωση μεταφοράς σε πολλές διαστάσεις.) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι οι λύσεις $u(x,t) = u(x_1, \dots, x_n, t)$ της εξίσωσης μεταφοράς

$$u_t + c \cdot \nabla u = u_t + c_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + c_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

είναι της μορφής $u(x,t) = f(x - tc) = f(x_1 - c_1 t, \dots, x_n - c_n t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, με μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Προσδιορίστε τη λύση $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}, u = u(x,t)$, του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + c \cdot \nabla u = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(\cdot,0) = \varphi & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

όπου $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δεδομένη, ομαλή συνάρτηση.

Αποδείξτε επίσης ότι οι λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης $u_t + c \cdot \nabla u = f(x,t)$ είναι της μορφής

$$u(x,t) = u(x - tc, 0) + \int_0^t f(x + (\sigma - t)c, \sigma)\, d\sigma,$$

βλ. τη (2.16′).

2.3 Η κυματική εξίσωση στην πραγματική ευθεία

Από τώρα και στο εξής, σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την κυματική εξίσωση. Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε την κυματική εξί-