411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Εργασία 2η

1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (προβλήματος Cauchy):

$$\begin{cases} u_t + (\cos u)\, u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} -\pi/2, & x > 0 \\ -\pi/4, & x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Τι είδους πρόβλημα είναι το παραπάνω και ποιες συνθήκες εξετάζουμε;

Λύση:
Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα Riemann, δηλαδή μια εξίσωση της μορφής $u_t + (F(u))_x = 0$, με $F(u) = \sin u$, και σταθερά αρχικά δεδομένα που έχουν μία ασυνέχεια. Στο διάστημα $[u^{\Delta}, u^{A}] = \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ η F είναι κυρτή αφού $F''(u) = -\sin u > 0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$. Επειδή $-\dfrac{\pi}{4} = u^A > u^{\Delta} = -\dfrac{\pi}{2}$, η λύση εντροπίας του προβλήματος είναι της μορφής

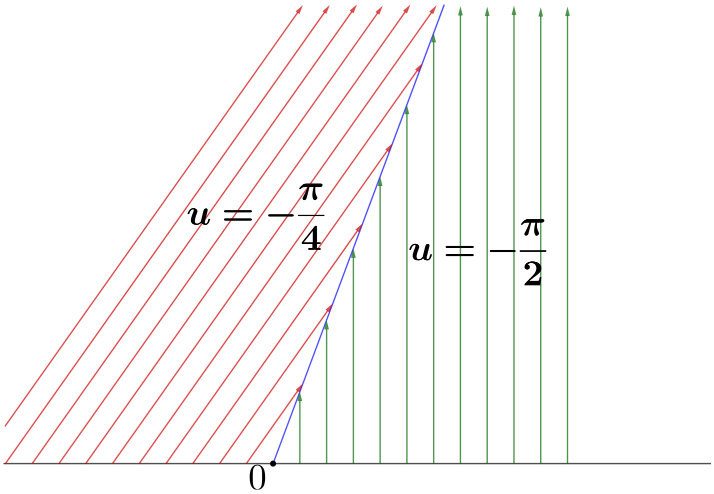
$$u(x,t) = \begin{cases} u^A, & \dfrac{x}{t} < m, \\ \\ u^{\Delta}, & \dfrac{x}{t} > m, \end{cases}$$

όπου m δίνεται από τη συνθήκη Rankine-Hugoniot

$$m = \frac{F(u^A) - F(u^{\Delta})}{u^A - u^{\Delta}} = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\pi},$$

δηλαδή οι τιμές $-\dfrac{\pi}{4}$ και $-\dfrac{\pi}{2}$ διαχωρίζονται από ένα κρουστικό κύμα με σταθερή ταχύτητα $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$. Συνεπώς, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$u(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & \dfrac{x}{t} < \dfrac{4-2\sqrt{2}}{\pi}, \\ \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{x}{t} > \dfrac{4-2\sqrt{2}}{\pi}, \end{cases}$$



Σχήμα 1: Αν a η παράγωγος της F, τότε $a(u) = \cos x$ και για να σχεδιάσουμε τις χαρακτηριστικές ευθείες της u από διαφορετικές πλευρές της ευθείας ασυνέχειας (μπλε) εφαρμόζουμε τη γνωστή σχέση $x = a(u(x,0))t + \xi$, δηλαδή έχουμε τις χαρακτηριστικές ευθείες $x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)t + \xi$ από αριστερά (κόκκινες) και $x = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)t + \xi$ από δεξιά (πράσινες).

2. Να βρεθεί ο χρόνος θραύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (προβλήματος Cauchy)

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{u^3}{3}\right)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} -k\left(1 - e^{x}\right), & x \le 0 \\ -k\left(1 - e^{-x}\right), & x > 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

Λύση:

Λύνοντας με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών έχουμε:

$$\begin{aligned} x - u^2 t &= c_1, \\ u &= c_2, \end{aligned}$$

όπου θέτοντας $g_1(x,t,u) := u,\ g_2(x,t,u) := x - u^2 t$ βλέπουμε ότι $\nabla g_1 \times \nabla g_2 \neq 0$ για $u \neq 0$, άρα οι επιφάνειες $g_1 = c_1$ και $g_2 = c_2$ τέμνονται, οπότε οι τομές τους (δηλ. οι χαρακτηριστικές καμπύλες) δίνονται από τη σχέση

$$g_1 = G(g_2),\ G \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u = G\left(x - u^2 t\right),$$

δηλαδή

$$u(x,t) = G\left(x - [u(x,t)]^2 t\right). \tag{1}$$

Για $t = 0$: $G(x) = u(x,0),\ x \in \mathbb{R}$.

Υπολογίζουμε την u_x από την (1):

$$u_x = \frac{G'(w)}{1 + 2tG(w)G'(w)},$$

όπου $w = x - u^2 t$ και

$$G'(x) = \begin{cases} ke^{x}, & x < 0 \\ -ke^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

ενώ δεν υπάρχει το $G'(0)$ αφού $k = G'(0^-) \neq G'(0^+) = -k,\ k \in \mathbb{R}^+$.
Η u_x απειρίζεται όταν
$$t = -\frac{1}{2G(w)\,G'(w)}.$$
Επειδή $t > 0,\ \ G(w)\,G'(w) < 0$. Αρκεί επομένως να βρούμε την ελάχιστη τιμή της
$$t(x) = -\frac{1}{2G(x)\,G'(x)}.$$
Έστω x_m η θέση όπου η $t(x)$ έχει ελάχιστο (ή infimum). Τότε
$$t(x_m) \le t(x),\ \forall x \Rightarrow G(x_m)\,G'(x_m) \le G(x)\,G'(x).$$
Ορίζουμε $p(x) = G(x)\,G'(x)$. Τότε αναζητάμε το x τέτοιο ώστε
$$p'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_m = \ln\frac{1}{2}, & x < 0 \\ x_m = -\ln\frac{1}{2}, & x > 0. \end{cases}$$
Συνεπώς
$$p(x_m) = \begin{cases} -\frac{k^2}{4}, & x < 0 \\ \frac{k^2}{4}, & x > 0. \end{cases}$$
Άρα το ολικό ελάχιστο είναι το $\min\{-\frac{k^2}{4}, \frac{k^2}{4}\} = -\frac{k^2}{4}$, απ'όπου έπεται ότι ο χρόνος θραύσης είναι
$$t(x_m) = -\frac{1}{2p(x_m)} = \frac{2}{k^2}.$$

3. Δίνεται το ΠΣΤ:
$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(x,0) = x(x-1), & x \in [0,1], \\ u(x,1) = 0, & x \in [0,1], \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & y \in [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$
   (i) Τι είδους ΜΔΕ είναι η παραπάνω;
   (ii) Χωρίς να λύσετε, να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της λύσης του ΠΣΤ (2).
   (iii) Στη συνέχεια, να λύσετε το ΠΣΤ (2).

Λύση:

   (i) Η παραπάνω ΜΔΕ είναι η εξίσωση Laplace (ελλειπτικού τύπου).
   (ii) Η λύση του ΠΣΤ (2) είναι αρμονική συνάρτηση και ως τέτοια, σύμφωνα με το Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου (βλ. Θεώρημα 6.9 των σημειώσεων) λαμβάνει την ελάχιστη τιμή τη στο σύνορο. Έτσι
$$u(x,y) \ge u_{min} = \min\{0, h_{min}\},$$

όπου $h_{min} = \min\limits_{x\in[0,1]} h(x) = \min\limits_{x\in[0,1]} [x(x-1)]$.

Έχουμε

$$h'(x) = \left(x^2 - x\right)' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

και

$$h''(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in [0,1],$$

δηλαδή η h είναι κυρτή σε όλο το πεδίο ορισμού της. Άρα

$$h_{min} = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

και έτσι η ελάχιστη τιμή της λύσης του ΠΣΤ (2) είναι $u_{min} = -\dfrac{1}{4}$.

(iii) Θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών ακολουθώντας τα βήματα της ενότητας 6.2.1 των σημειώσεων. Εδώ αναφέρεται η λύση ενδεικτικά. Γνωρίζουμε από την ενότητα αυτή ότι η λύση του ΠΣΤ, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet $u(x,0) = h(x), u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0$, για την εξίσωση του Laplace σε ένα ορθογώνιο δίνεται από τη σχέση

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh[n\pi(1-y)], \quad (x,y) \in [0,1]^2$$

(βλ. σχέση (6.15) των σημειώσεων για $a = b = 1$), όπου

$$b_n = 2\int_0^1 [x(x-1)] \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{(n\pi)^3}[(-1)^n - 1].$$

Άρα η λύση του ΠΣΤ (2) είναι

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3 \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh[n\pi(y-1)], \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ οι συντελεστές Fourier b_n μηδενίζονται. Συνεπώς, η λύση u του προβλήματος (2) γράφεται και στη μορφή

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi x] \sinh[(2n+1)\pi(y-1)]}{(2n+1)^3 \sinh[(2n+1)\pi]}, \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$

Η μοναδικότητά της λύσης μπορεί να αποδειχθεί είτε με τη μέθοδο της ενέργειας είτε με την αρχή μεγίστου (υποθέτουμε δύο λύσεις u_1 και u_2 και λύνουμε το πρόβλημα για την $w = u_1 - u_2$, βλ. Ενότητα 6.2.4 των σημειώσεων).

4. Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & (x,t) \in (0,3) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{6} + 4\sin\dfrac{5\pi x}{6}, & x \in [0,3], \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(3,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Τι είδους ΜΔΕ είναι η παραπάνω;

<u>Λύση:</u>
Η παραπάνω ΜΔΕ είναι η εξίσωση διάχυσης-θερμότητας (παραβολικού τύπου).

Θα λύσουμε το πρόβλημα (3) με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών ακολουθώντας τα βήματα της ενότητας 7.2 των σημειώσεων. Εδώ αναφέρεται η λύση ενδεικτικά. Αναζητούμε μη μηδενικές λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,, \tag{4}$$

με $X(0) = 0$ και $X'(0) = 0$ για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Για λύσεις αυτής της μορφής, η εξίσωση διάχυσης γίνεται

$$X(x)\,T'(t) = 2X''(x)\,T(t)\,.$$

Διαιρώντας την τελευταία σχέση δια $2X(x)\,T(t)$ έχουμε κατά τα γνωστά

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{σταθερά}.$$

Λύνουμε το πρόβλημα Sturm-Liouville (βλ. Παράδειγμα 5.44 των σημειώσεων) και θέτοντας $\lambda = \beta^2,\ \beta > 0$ έχουμε

$$X(x) = c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)\,.$$

Αφού $X(0) = 0$, τότε $c_2 = 0$, και αφού $X'(3) = 0$, τότε $\beta c_1 \cos(3\beta) = 0$, που ικανοποιείται για $\beta = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6, \ldots$

Λόγω γραμμικότητας, το άθροισμα των λύσεων δύο προβλημάτων με ΜΔΕ και συνοριακές συνθήκες όπως του (3), και αρχικές συνθήκες τον πρώτο και τον δεύτερο όρο της δοθείσας αρχικής συνθήκης, αντίστοιχα, θα μου δώσει τη λύση του προβλήματος (3).

Για $\beta = \pi/6$ ($\lambda = \pi^2/36$) έχουμε $X(x) = \sin(\pi x/6)$ και η $T(t)$ πρέπει να ικανοποιεί την ΣΔΕ $T'(t) = -\pi^2 T(t)/18$. Έτσι έχουμε $T(t) = e^{-\pi^2 t/18}$ και από την (4) έχουμε τη λύση

$$u_1(x,t) = e^{-\pi^2 t/18} \sin(\pi x/6)\,,$$

που ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης, τις συνοριακές συνθήκες και έχει ως αρχική τιμή τον πρώτο όρο της δοθείσας αρχική τιμής.

Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και με τον δεύτερο όρο και να πάρουμε

$$u_2(x,t) = 4e^{-25\pi^2 t/18} \sin(5\pi x/6)\,,$$

που ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης, τις συνοριακές συνθήκες και έχει ως αρχική τιμή το δεύτερο όρο της δοθείσας αρχική τιμής. Έτσι το άθροισμα

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = e^{-\pi^2 t/18} \sin(\pi x/6) + 4e^{-25\pi^2 t/18} \sin(5\pi x/6)\,,$$

είναι η λύση του ΠΑΣΤ (3). Η μοναδικότητά της λύσης αποδεικνύεται όπως και στην προηγούμενη άσκηση (βλ. Ενότητα 7.3 των σημειώσεων).

5. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \sin x + \theta + \dfrac{\phi - \theta}{\pi} x, & x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = \theta, \quad u(\pi,t) = \phi, & t \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

(i) Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών (5) με αλλαγή μεταβλητής.

(ii) Αν αντί των παραπάνω συνοριακών συνθηκών, ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0,$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που περιγράφει την ολική ενέργεια στο διάστημα την χρονική στιγμή t

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [u(x,t)]^2 \,\mathrm{d}x$$

είναι φθίνουσα. Είναι η συνάρτηση E γνησίως φθίνουσα;

Λύση:

(i) Εισάγουμε τον μετασχηματισμό $w(x,t) = u(x,t) - \left[\theta + \dfrac{\phi - \theta}{\pi} x\right]$ και λύνουμε το ΠΑΣΤ ως προς w:

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ w(x,0) = \sin x, & x \in [0,\pi], \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Θα λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών ακολουθώντας τα βήματα της ενότητας 7.2.1 των σημειώσεων. Εδώ αναφέρεται η λύση ενδεικτικά. Γνωρίζουμε από την ενότητα αυτή ότι η λύση του ΠΑΣΤ, με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet για την εξίσωση διάχυσης-θερμότητας μπορεί να δοθεί από τη σχέση

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty)$$

(βλ. σχέση (7.14) των σημειώσεων για $l = \pi$, $k = 1$), που ικανοποιεί την ΜΔΕ και τις συνοριακές συνθήκες. Για να ικανοποιεί η λύση αυτή και την αρχική συνθήκη πρέπει να ισχύει

$$w(x,0) = \sin x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sin x,$$

που ισχύει για $b_1 = 1$ και $b_n = 0$ για $n > 1$. Συνεπώς, η ζητούμενη λύση του ΠΑΣΤ (5) είναι

$$u(x,t) = e^{-t} \sin x + \theta + \frac{\phi - \theta}{\pi} x, \quad (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty).$$

Η μοναδικότητα της λύσης αποδεικνύεται όπως στην προηγούμενη άσκηση.

(ii) Παραγωγίζοντας την ενέργεια έχουμε

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[u(x,t)]^2\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^{\pi} u(x,t)\,u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} u(x,t)\,u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= u(x,t)\,u_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}[u_x(x,t)]^2\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi}[u_x(x,t)]^2\,\mathrm{d}x \le 0
\end{aligned}
$$

άρα η συνάρτηση E είναι φθίνουσα.