ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
411. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι
12 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

- Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με $3+\frac{1}{2}$ μονάδες.
- Να αναφέρετε στο γραπτό σας αν έχετε πάρει μέρος στην προαιρετική ενδιάμεση εξέταση.

I. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & \text{στο} \quad (0,2)\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,t) = 0, & \text{στο} \quad \{0\}\times(0,\infty), \\ u_x(x,t) = 0, & \text{στο} \quad \{2\}\times(0,\infty), \\ u(x,t) = \begin{cases} x, & \text{στο} \quad [0,1]\times\{0\}, \\ 2-x, & \text{στο} \quad [1,2]\times\{0\}. \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

i. Λύστε το πρόβλημα (1).

ii. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της λύσης με τη μέθοδο της ενέργειας.

II. i. Δεδομένου ότι η συνάρτηση $u(x,y) = f(x/y)$ είναι αρμονική, βρείτε τη γενική λύση της Σ.Δ.Ε. που ικανοποιεί η f.

ii. Υπολογίστε το όριο $\lim_{y\to 0} u(x,y)$.

iii. Δίνεται το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = 0, & \text{στο} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,y) = h(x), & \text{στο} \quad \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases} \tag{2}$$

Δείξτε ότι η απάντηση στο ii. συμφωνεί με τον τύπο

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(s)}{(x-s)^2+y^2}\mathrm{d}s. \tag{3}$$

III. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & \text{στο} \quad \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u(x,t) = \phi(x), & \text{στο} \quad \mathbb{R}\times\{0\}, \\ u_t(x,t) = \psi(x), & \text{στο} \quad \mathbb{R}\times\{0\}. \end{cases} \tag{4}$$

i. Δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης $u_{tt} = 4u_{xx}$ στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, δίνεται ως

$$u(x,t) = F(x+2t) + G(x-2t),$$

όπου F, G αυθαίρετες C^2 συναρτήσεις.

ii. Αποδείξτε τον τύπο του d'Alembert για τη λύση του προβλήματος (4).

iii. Δεδομένου ότι $\phi(x) = x^3$ και $\psi(x) = \sin x$, λύστε το πρόβλημα (4).

iv. Υπολογίστε το διάστημα εξάρτησης του σημείου $\Gamma\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ για τις ϕ, ψ του προηγούμενου ερωτήματος και σχεδιάστε την περιοχή εξάρτησης.