

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.**  
**411. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι**  
**1 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022**

Να αναφέρετε στο γραπτό σας αν έχετε πάρει μέρος στην προαιρετική ενδιάμεση εξέταση.

I. 2.5 μονάδες Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} xtu_x - x^2u_t - xtu = xt, & \text{στο } U := (\mathbb{R}_+)^2, \\ u(x, t) = e^x - 1, & \text{στο } \Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \quad (1)$$

(α') Ποια είναι η χαρακτηριστική του προβλήματος (1) που διέρχεται από δεδομένο σημείο  $(x_0, t_0) \in (\mathbb{R}_+)^2$ ;

(β') Να λυθεί το πρόβλημα (1).

II. 3.5 μονάδες Δίνεται το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & \text{στο } (0, 2) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) = 0, & \text{στο } \{0\} \times [0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{στο } \{2\} \times [0, \infty), \\ u(x, t) = 3x(x - 2), & \text{στο } [0, 2] \times \{0\}. \end{cases} \quad (2)$$

(α') Χωρίς να λύσετε, να υπολογίσετε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της λύσης του προβλήματος (2).

(β') Στη συνέχεια να λύσετε το πρόβλημα (2).

III. 2 μονάδες Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, t) = x^2 - 2, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{0\}, \\ u_t(x, t) = \cos x, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \quad (3)$$

(α') Να βρεθεί το διάστημα εξάρτησης των σημείων  $A = (0, \pi/6)$  και  $B = (\pi/4, \pi/4)$  στο επίπεδο  $xt$ .

(β') Να βρεθούν οι τιμές  $u(0, \pi/6)$  και  $u(\pi/4, \pi/4)$ .

IV. 2 μονάδες Έστω  $U$  φραγμένο χωρίο. Αν η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } U, \\ u = g, & \text{στο } \partial U, \end{cases} \quad (4)$$

υπάρχει, να αποδείξετε ότι είναι μοναδική.