

411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I

Εργασία 1

1. Να λυθούν με τη μέθοδο αλλαγής συντεταγμένων οι ΜΔΕ:

(i) $x^2 u_x + y^2 u_y = 2xy$

(ii) $u_t + t^2 u_x = 4u$

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα Cauchy) με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών:

$$\begin{cases} (x+2)u_x + 2yu_y = 2u, & x > -1, y > 0, \\ u(-1, y) = \sqrt{y}. \end{cases}$$

3. Να εξετάσετε αν η ΜΔΕ

$$uu_x + u_y = 1$$

έχει μοναδική κλασική λύση για τα ακόλουθα αρχικά δεδομένα:

(i) $x = s, y = s, z = \frac{s}{2}, s \in [0, 1]$

(ii) $x = \frac{s^2}{2}, y = s, z = s, s \in [0, 1]$

(iii) $x = s^2, y = 2s, z = s, s \in [0, 1]$

4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (προβλήματος Cauchy):

$$\begin{cases} u_t + (\cos u) u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} \pi/2, & x > 0 \\ -\pi/2, & x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

5. Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες ΜΔΕ, να βρεθούν οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές καμπύλες και οι κανονικές μορφές τους:

(i) $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$

(ii) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

(iii) $u_{xx} - 2x u_{yy} = 0$