Λύσεις Πιθανότητες ΙΙ - Ιούλιος 2017 (ενδεικτικές + σύντομες)

Θέμα 1 :

$$\mathcal{A} = \{ \emptyset, X, \{i,j\}, i,j \in \{1,2,3,4\}, i \neq j \}$$

α) $\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A}$ όχι κλειστή στις πεπερ. ενώσεις $\Rightarrow \mathcal{A}$ όχι άλγεβρα $\Rightarrow \mathcal{A}$ όχι σ-άλγεβρα.

- άμεσο ότι είναι λ-κλάση $\Leftrightarrow$ κλάση Dynkin

(ο μόνος έλεγχος ιδιοτήτων που χρειαζόταν)

β) • Επιλέγουμε οποιαδήποτε 3 στοιχεία από τα δισύνολα, που ανά δύο δεν είναι συμπληρωματικά, π.χ.

$$\mathcal{C} = \{ (1,2), (1,3), (1,4) \}$$

Τότε $\boxed{\mathcal{A} = \delta(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C})}$ (*)

Επειδή αναγκαστικά πρέπει να περιέχονται σε κλάση Dynkin (ή λ-κλάση) και τα συμπληρωματικά, μαζί με $\emptyset$ και X καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι η αντίστοιχη κλάση Dynkin ή λ-κλάση η παραγόμενη από το $\mathcal{C}$.

• Γεννήτορας με 2 στοιχεία δε μπορεί να υπάρξει, αφού τότε προκύπτει εύκολα, ότι καταλήγουμε σε κλάσεις Dynkin (ή λ-κλάσεις) της μορφής $\{\emptyset, X\}$, $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ ή $\{\emptyset, A, B, A^c, B^c, X\}$ που έχουν το πολύ 6 στοιχεία.

γ) Επειδή άλγεβρα $\equiv$ σ-άλγεβρα, όταν $|X| < +\infty$, αρκεί να σκεφτόμαστε με οποιαδήποτε από τις δύο.

$|\mathcal{A}| = 8$ και $|\mathcal{P}(X)| = 2^4 = 16$. Επειδή κάθε (σ-)άλγεβρα έχει πληθάριθμο δύναμη του 2 (γνωστή Άσκηση), και προφανώς $\mathcal{A} \subsetneq \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}(X)$, αναγκαστικά $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X)$.

• Καταλήγουμε στο ίδιο αν απαιτήσουμε κλειστότητα στις ενώσεις.

Θέμα 2 :

α) Έστω A_n = " εμφανίζεται άρτιος στη n-οστή ρίψη "

A = " ακριβώς 5 φορές εμφανίζεται άρτιος "

Τότε $\limsup A_n$ = " άπειρες φορές εμφανίζεται άρτιος "

$(\limsup A_n)^c$ = " πεπερ. πλήθος φορών εμφανίζεται άρτιος ", και

άρα $A \subset (\limsup A_n)^c \; (= \liminf A_n^c)$.

Όμως $P(A_n) = \frac{1}{2}, \forall n \Rightarrow \sum_{n\geq 1} P(A_n) = +\infty$ και (A_n) ανεξάρτητα ενδεχόμενα $\xrightarrow{2^{ο} \text{ Λήμμα B-C}}$

$$P(\limsup A_n) = 1 \implies P(A) = 0$$

β) <u>πολλές δυνατές λύσεις</u>, π.χ.

*. " εκφώνησης " ≡ " άπειρες φορές εμφαν. άρτιος και άπειρες φορές εμφαν. περιττός ".

Άρα $P(\text{" εκφώνησης "}) = P(\limsup A_n \cap \limsup A_n^c)$

Όμως από α) $P(\limsup A_n) = 1$, και ομοια $P(\limsup A_n^c) = 1$.

Άρα $P(\text{" εκφώνησης "}) = 1$

**. Αν $B_1 = A_1^c A_2$, $B_2 = A_3^c A_4, \dots$ $B_n = A_{2n-1}^c A_{2n}, \dots$

Τότε η (B_n) είναι ακολουθία <u>ανεξ. ενδεχομένων</u>, και

αν A = " εκφώνησης ", τότε $\limsup B_n \subsetneq A$.

όμως $P(B_n) = P(A_{2n-1}^c A_{2n}) = P(A_{2n-1}^c) P(A_{2n}) = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\sum P(B_n) = +\infty \xrightarrow{2^{ο} \text{Λ. B-C.}} P(\limsup B_n) = 1 \Rightarrow P(A) = 1.$$

***. με συμπληρωματικό ενδεχόμενο, κ.τ.λ.

γ) Αν (X_n) οι ενδείξεις στην n-οστή δοκιμή, τότε

ποσοστό φορών που η ένδειξη ≤ 3 σε n-δοκιμες. $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_n \leq 3\}}}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{2}$

$= E(1_{\{X_n \leq 3\}}) = P(X_n \leq 3)$, από I.N.M.A. στην $(1_{\{X_n \leq 3\}})$ α.ι.τ.μ.

(α' λύση) $P(X=i) = \frac{1}{6}, \; 1 \le i \le 6$ (διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1,2,\dots,6\}$)

Έχουμε $E(X) = \frac{7}{2}$ και $Var(X) < +\infty$ (αυτό αρκεί).

Άρα $E(Y_n) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7 \Rightarrow E(S_n') = 7n$.

Από το Κ.Ο.Θ. $P(S_{2n} > 7n) = P(S_n' > E(S_n')) =$

$$P\left(\frac{S_n' - E(S_n')}{\sqrt{n \cdot 2\, Var(X)}} > 0 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\underset{N(0,1)}{Z} > 0) = \frac{1}{2}.$$

** (β' λύση)

$$\lim_{n\to\infty} P(S_{2n} > 7n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_{2n}}{2n} > \frac{7}{2} \right).$$

Παρατηρώντας ότι η $\left(\frac{S_{2n}}{2n}\right)$ είναι υπακολουθία της $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ μπορούμε να δουλέψουμε με την τελευταία και να συμπεράνουμε το αποτέλεσμα για την υπακολουθία. Παρόμοια όπως παραπάνω

$\frac{S_n}{n} = \overline{X}_n$, και έχουμε $\frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{Var(\overline{X}_n)}} = \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \frac{7}{2}}{\sqrt{Var(X)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$.

άρα $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{7}{2} \right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \frac{7}{2}}{\sqrt{Var(X)}} > 0 \right) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_{2n}}{2n} > \frac{7}{2} \right) = \lim_{n\to\infty} P(S_{2n} > 7n) = \frac{1}{2}$$

Θέμα 3

α) $E(X_n) = 1\cdot p + (-1)(1-p) = 2p-1$.

Απο I.N.M.A. (οι (X_n) α.ι.τ.μ. και φραγμένες)

- $\overline{X_n} \xrightarrow{a.s} E(X_n) = 2p-1$. $(0<p<1)$
- $S_n = n \cdot \frac{S_n}{n} = n\cdot \overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} +\infty$ (αν $p>\frac{1}{2}$), $\xrightarrow{a.s} -\infty$ (αν $p<\frac{1}{2}$)
- $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $X_n \in \{-1, 1\}$.

Η $(X_{(n)})$ είναι αύξουσα και άρα συγκλίνει $\forall \omega \in \Omega$.

Προφανως $X_{(n)}(\omega) \longrightarrow 1$, αν $\exists n_0 \in \mathbb{N} : X_{n_0}(\omega) = 1$

$\longrightarrow -1$, αν $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n(\omega) = -1$.

* (α' τροπος)

$$P\left(\lim X_{(n)} = -1\right) = P\left(\bigcap_n \{X_n = -1\}\right) = P\Big(\bigcap_n \underbrace{\Big(\bigcap_{1\le k\le n} \{X_k = -1\}\Big)}_{\text{φθίνουσα}}\Big)$$

$$= \lim_n P\left(\bigcap_{1\le k\le n} \{X_k = -1\}\right) \overset{\text{ανεξ+ισον.}}{=} \lim_n (1-p)^n = 0$$

$$\Rightarrow P\left(\lim X_{(n)} = 1\right) = 1 \quad \text{ή} \quad X_{(n)} \xrightarrow{a.s.} 1.$$

** (β' τροπος).

$$\{\lim X_{(n)} = 1\} = \bigcup_n \{X_n = 1\} \supset \limsup_n \{X_n = 1\}$$

Απο 2ο Λήμ. B-C παίρνουμε εύκολα $P\left(\limsup_n \{X_n = 1\}\right) = 1$.

$\Rightarrow$ το ζητούμενο.

β) $M_{S_n}(t) = E\left(e^{tS_n}\right) \overset{\text{ανεξ+ισον.}}{=} M_X(t)^n$, $\forall$.

$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = P(X=1)e^t + P(X=-1)e^{-t} = pe^t + (1-p)e^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow M_{S_n}(t) = \left(pe^t + (1-p)e^{-t}\right)^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

γ) θεωρία

δ) *. $M_{S_n}(t) < +\infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (αρκεί ε-περιοχή γύρω απο το 0)

Η $h(z) = \left(pe^z + (1-p)e^{-z}\right)^n$, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$

και $h(t) = M_{S_n}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ απο γνωστή Πρόταση, $\phi_X(t) = h(it)$. Άρα

$$\phi_{S_n}(t) = \left(p e^{it} + (1-p) e^{-it}\right)^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 4

α) $\Rightarrow$) Έστω $X_n \xrightarrow{\sigma} X$. Τότε κάθε υπακολουθία (Y_n) της (X_n) συγκλίνει στη X ως προς σ, και άρα το ευθύ είναι άμεσο.

$\Leftarrow$) Αν $X_n \not\xrightarrow{\sigma} X$, τότε $\exists\, \varepsilon > 0$ και (Y_n) υπακ. της (X_n) : $\sigma(Y_n, X) \geq \varepsilon$, $\forall n \geq 1$.

Κάθε υπακολ. (Z_n) της (Y_n) θα ικανοποιεί την παραπάνω σχέση και άρα $Z_n \not\xrightarrow{\sigma} X$. Αυτό είναι άτοπο, λόγω της υπόθεσης.

β) <u>Θεωρία</u>

για το ($\Leftarrow$ είναι παρόμοιο όπως το $\Leftarrow$ του α).

Αν $X_n \not\xrightarrow{P} X$, τότε $\exists\, \varepsilon > 0$ και (Y_n) υπακ. της (X_n) :

$$P\left(|Y_n - X| > \varepsilon\right) \geq \delta \quad \text{για κάποιο } \delta > 0.$$

Τότε <u>κάθε</u> υπακ. (Z_n) της (Y_n) ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, και άρα $Z_n \not\xrightarrow{P} X \Rightarrow Z_n \not\xrightarrow{a.s.} X$, άτοπο απο υπόθεση.

γ) Αν η $\xrightarrow{a.s.}$ είναι μετρικοποιήσιμη, τότε εκφράζεται μέσω μιας σ (μετρικής) όπως στο α). Όμως λόγω του β) καταλήγουμε στο ότι $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$, το οποίο γνωρίζουμε ότι δεν ισχύει, αφού $X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X$. και έτσι φτάναμε σε άτοπο.

Θέμα 5 :

α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ ζ) Λ η) Σ

θ) Σ ι) Λ κ) Σ λ) Λ μ) Σ ν) Σ ξ) Σ ο) Σ