Ασκήσεις - Πιθανότητες ΙΙ

Άσκηση 1 *Δείξτε ότι σ-άλγεβρα ⇒ άλγεβρα ⇒ δακτύλιος.*
Να εξετάσετε αν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές.

Άσκηση 2 *Μία οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{D}$ λέγεται λ-κλάση αν ισχύουν τα εξής:* (i) $\mathcal{D}\neq\emptyset$, (ii) $\mathcal{D}$ *κλειστή στα συμπληρώματα,* (iii) $\mathcal{D}$ *κλειστή στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις (δηλαδή αν (A_n) στην $\mathcal{D}$ ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, τότε $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$).*
Να δείξετε ότι: $\mathcal{D}$ λ-κλάση ⇔ $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin.

Άσκηση 3 *Βρείτε αντιπαράδειγμα στον παρακάτω ισχυρισμό:*
Ένωση κλάσεων Dynkin $\not\Longrightarrow$ κλάση Dynkin.

Άσκηση 4 *Δίνονται δύο υποσύνολα $\emptyset \subsetneqq A, B \subsetneqq X$ με $A \neq B$.*
Να περιγραφούν η $\sigma(\{A,B\})$ και η $\delta(\{A,B\})$, όταν (i) $A \cap B = \emptyset$ *και* (ii) $A \cap B \neq \emptyset$.

Άσκηση 5 (Θεώρημα π-λ) *Έστω $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, όπου $\mathcal{C}$ είναι* π-σύστημα. *Τότε $\delta(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$.*
Στο παραπάνω Θεώρημα να γίνει η απόδειξη των βημάτων B1 και B2 (στις Σημειώσεις), είτε με τις κλασικές συνθήκες της κλάσης Dynkin, είτε με τις ισοδύναμες συνθήκες ως λ-κλάση.

Άσκηση 6 *Βρείτε (A_n) στο $\mathcal{P}(X)$ τέτοια ώστε:*
$\emptyset \subsetneqq \bigcap_n A_n \subsetneqq \liminf A_n \subsetneqq \limsup A_n \subsetneqq \bigcup_n A_n \subsetneqq X$.

Άσκηση 7 *Αν (A_n) στην $\mathcal{P}(X)$ και $\mathbb{1}_A$ η δείκτρια συνάρτηση του A στο X, να δείξετε ότι:*

(i) (a) $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}$, $\quad (b)$ $\liminf \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$

(ii) Συμπεράνετε ότι $A_n \longrightarrow A \Longleftrightarrow \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma} \mathbb{1}_A$.

Άσκηση 8 *Να δειχθεί ότι:*

(i) Η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα. Βρείτε διαφορετικές αριθμήσιμες οικογένειες $\mathcal{C}$:
$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(ii) Αν (X, d) είναι διαχωρίσιμος μ.χ, τότε να δείξετε ότι η $\mathcal{B}(X)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Συμπεράνετε το (i).

Άσκηση 9 *Έστω X αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Ορίζουμε μία σχέση $x \sim y \iff x$ και y περιέχονται ακριβώς στα ίδια σύνολα $A \in \mathcal{A}$.*

(i) *Δείξτε ότι η παραπάνω σχέση, αποτελεί σχέση ισοδυναμίας στο X.*

(ii) *Δείξτε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι στοιχεία της $\mathcal{A}$.*

(iii) *Συμπεράνετε ότι η $\mathcal{A}$ παράγεται απο διαμέριση και κάντε μία αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.*

(iv) *Μπορεί η $\mathcal{A}$ να έχει αριθμησίμως άπειρο πλήθος στοιχείων;*

(v) *Δείξτε, χωρίς την υπόθεση ότι το X είναι αριθμήσιμο, ότι κάθε άπειρη σ-άλγεβρα είναι υπεραριθμήσιμη.*

Άσκηση 10 *Έστω $(X, \mathcal{P}(X))$ μ.χ., και $\emptyset \subsetneq B \subset X$. Να εξετάσετε αν οι συνολοσυναρτήσεις δ_B, δ'_B με*

$$\delta_B(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } B \subset A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{και} \quad \delta'_B(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } A \cap B \neq \emptyset \\ 0, & \text{αν } A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

αποτελούν μέτρα που γενικεύουν το μέτρο Dirac.

Άσκηση 11 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου. Να δείξετε ότι*

(i) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

(ii) $\mu(A \cup B \cup \Gamma) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\Gamma) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap \Gamma) - \mu(B \cap \Gamma) + \mu(A \cap B \cap \Gamma)$

(iii) *Γενικεύστε για κάθε $n \geq 2$*

Άσκηση 12 *(συνδυασμοί μέτρων)*

(i) *Αν $(\lambda_i)_{i \in I}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, με I αριθμήσιμο και $(\mu_i)_{i \in I}$ μέτρα σε μ.χ. $(X, \mathcal{A})$, τότε να δείξετε ότι η συνολοσυνάρτηση $\mu := \sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i$ είναι μέτρο στον $(Q, \mathcal{A})$.*

(ii) *Συμπεράνετε ότι τα $\mu + \nu$, $\lambda\mu$, $\sum \mu_n$ είναι μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$, αν τα μ, ν, μ_n είναι μέτρα και $\lambda \geq 0$.*

(iii) *Πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα επαγόμενα μέτρα των διακριτών τυχαίων μεταβλητών που γνωρίζουμε από τις Πιθανότητες I;*