αριθμό. Θα λέγαμε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει (έχει όριο το 0 καθώς το n τείνει στο άπειρο) ενώ η (b_n) δεν συγκλίνει. Με άλλα λόγια, θέλουμε να εκφράσουμε αυστηρά την πρόταση:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν για *μεγάλες τιμές του* n ο a_n είναι *κοντά στον* a».

Αυτό που πρέπει να κάνουμε σαφές είναι το νόημα των φράσεων «κοντά» και «μεγάλες τιμές». Για παράδειγμα, αν κάποιος θεωρεί ότι η απόσταση 1 είναι ικανοποιητικά μικρή, τότε η (a_n) έχει όλους τους όρους της κοντά στον $1/2$. Επίσης, αν κάποιος θεωρεί ότι η φράση «μεγάλες τιμές» σημαίνει «αρκετές μεγάλες τιμές», τότε η (b_n) έχει αρκετούς όρους κοντά στον 1 αλλά και αρκετούς όρους κοντά στον -1. Συμφωνούμε να λέμε ότι:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του a βρίσκονται τελικά όλοι οι όροι της (a_n)».

Η έννοια της *περιοχής* ενός πραγματικού αριθμού a ορίζεται αυστηρά ως εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ το ανοικτό διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ με κέντρο τον a και ακτίνα ε είναι μια περιοχή του a (η ε*–περιοχή* του a). Χρησιμοποιώντας την έννοια της ε–περιοχής και την έννοια του τελικού τμήματος μιας ακολουθίας, καταλήγουμε στο εξής:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν κάθε ε–περιοχή του a περιέχει κάποιο τελικό τμήμα της (a_n)».

Παρατηρώντας ότι $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ αν και μόνο αν $|x-a| < \varepsilon$, μπορούμε να δώσουμε τον εξής αυστηρό ορισμό.

Ορισμός 2.2.1 (όριο ακολουθίας). Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η (a_n) **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό a αν ισχύει το εξής:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(\varepsilon)$ με την ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0(\varepsilon)$, τότε $|a_n - a| < \varepsilon$.

Αν η (a_n) συγκλίνει στον a, γράφουμε $\lim a_n = a$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ή, πιο απλά, $a_n \to a$.

Παρατήρηση 2.2.2. Στον παραπάνω ορισμό, ο δείκτης n_0 εξαρτάται κάθε φορά από το ε. Όσο όμως μικρό κι αν είναι το ε, μπορούμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ ώστε όλοι οι όροι a_n που έπονται του a_{n_0} να βρίσκονται«ε-κοντά» στον a. Σκεφτείτε την προσπάθεια επιλογής του $n_0(\varepsilon)$ σαν ένα επ' άπειρον παιχνίδι με έναν αντίπαλο ο οποίος επιλέγει ολοένα και μικρότερο $\varepsilon > 0$.

Για να εξοικειωθούμε με τον ορισμό θα αποδείξουμε ότι η $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ ενώ η $b_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει (σε κανέναν πραγματικό αριθμό).

(α) Η $a_n = \frac{1}{n}$ συγκλίνει στο 0: Θεωρούμε τυχούσα ε–περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$ του 0. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Ο μικρότερος τέτοιος φυσικός

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to \ell$ και $\gamma_n \to \ell$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί n_1, n_2 ώστε

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \text{ αν } n \geq n_1 \quad \text{και} \quad |\gamma_n - \ell| < \varepsilon \text{ αν } n \geq n_2.$$

Ισοδύναμα,

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \text{ αν } n \geq n_1 \quad \text{και} \quad \ell - \varepsilon < \gamma_n < \ell + \varepsilon \text{ αν } n \geq n_2.$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Αν $n \geq n_0$, τότε

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq \gamma_n < \ell + \varepsilon$$

δηλαδή, αν $n \geq n_0$ έχουμε $|b_n - \ell| < \varepsilon$. Με βάση τον ορισμό, $b_n \to \ell$. □

Παρατηρήσεις 2.2.5. (α) Βεβαιωθείτε ότι έχετε καταλάβει τη διαδικασία απόδειξης: αν θέλουμε να δείξουμε ότι $t_n \to t$, πρέπει για αυθαίρετο (μικρό) $\varepsilon > 0$ – η απόδειξη ξεκινάει με την φράση «έστω $\varepsilon > 0$» – να βρούμε φυσικό n_0 (που εξαρτάται από το ε) με την ιδιότητα: $n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |t_n - t| < \varepsilon$.

(β) Ίσως έχετε ήδη παρατηρήσει ότι οι πρώτοι m όροι ($m = 2, 10$ ή και 10^{10}) δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση ή μη μιας ακολουθίας. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 2.1.6 δείξτε τα εξής:

1. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία $(b_n) = (a_{m+n-1})$ συγκλίνει, και μάλιστα $\lim_n a_n = \lim_n a_{m+n-1}$.

2. Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες που διαφέρουν σε πεπερασμένους το πλήθος όρους: υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq m$. Αν η (a_n) συγκλίνει στον a τότε η (b_n) συγκλίνει κι αυτή στον a.

Ορισμός 2.2.6. Η ακολουθία (a_n) λέγεται **φραγμένη** αν μπορούμε να βρούμε κάποιον $M > 0$ με την ιδιότητα

$$|a_n| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 2.2.7. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } |a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

και εύκολα ελέγχουμε ότι $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (διακρίνετε περιπτώσεις: $n \leq n_0$ και $n > n_0$). Άρα, η (a_n) είναι φραγμένη. □

2.2β′ Ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο

Ορισμός 2.2.8. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(α) Λέμε ότι $a_n \to +\infty$ (η ακολουθία τείνει στο $+\infty$) αν για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(M)$ ώστε

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } a_n > M.$$

(β) Λέμε ότι $a_n \to -\infty$ (η ακολουθία τείνει στο $-\infty$) αν για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(M)$ ώστε

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } a_n < -M.$$

Παρατήρηση 2.2.9. Χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «τείνει» στο $\pm\infty$: συμφωνούμε πως μια ακολουθία (a_n) **συγκλίνει** μόνο αν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a (ο οποίος λέγεται και **όριο** της (a_n)). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα λέμε ότι η ακολουθία **αποκλίνει**.

2.2γ′ Η άρνηση του ορισμού

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με την ακριβή διατύπωση της άρνησης του ορισμού του ορίου. Θυμηθείτε ότι:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν κάθε ε–περιοχή του a περιέχει κάποιο τελικό τμήμα της (a_n)».

Επομένως, η (a_n) **δεν συγκλίνει στον** a αν υπάρχει περιοχή $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ του a η οποία δεν περιέχει κανένα τελικό τμήμα της (a_n). Ισοδύναμα,

> «η (a_n) δεν συγκλίνει στον a αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: κάθε τελικό τμήμα $(a_m, a_{m+1}, \ldots)$ της (a_n) έχει τουλάχιστον έναν όρο που δεν ανήκει στο $(a - \varepsilon, a+\varepsilon)$».

Παρατηρήστε ότι αν $(a_m, a_{m+1}, \ldots)$ είναι ένα τελικό τμήμα της (a_n) τότε: το $(a_m, a_{m+1}, \ldots)$ δεν περιέχεται στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \geq m$ ώστε $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, δηλαδή $|a_n - a| \geq \varepsilon$. Καταλήγουμε λοιπόν στην εξής πρόταση:

> «η (a_n) δεν συγκλίνει στον a αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_n - a| \geq \varepsilon$».

Άσκηση 2.2.10. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον a αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε άπειροι το πλήθος όροι της (a_n) ικανοποιούν την $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon.$$

Άρα, $\sqrt[k]{a_n} \to 0$.

(β) $a_n \to a > 0$: Θυμηθείτε ότι αν $x, y \geq 0$ τότε

$$|x^k - y^k| = |x - y|(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}) \geq |x - y|y^{k-1}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα με $x = \sqrt[k]{a_n}$ και $y = \sqrt[k]{a}$ βλέπουμε ότι

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a^{k-1}}}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για τον θετικό αριθμό $\varepsilon_1 = \sqrt[k]{a^{k-1}}\cdot\varepsilon$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|a_n - a| < \sqrt[k]{a^{k-1}} \cdot \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a^{k-1}}} < \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$. □

Πρόταση 2.3.11. *Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν $a_n \to a$, $b_n \to b$, τότε $a \leq b$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a > b$. Αν θέσουμε $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει

$$|a_n - a| < \frac{a-b}{2} \Longrightarrow a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

και για κάθε $n \geq n_2$ ισχύει

$$|b_n - b| < \frac{a-b}{2} \Longrightarrow b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$b_n < \frac{a+b}{2} < a_n,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 2.3.12. *Αν $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν $a_n \to a$, τότε $m \leq a \leq M$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις σταθερές ακολουθίες $b_n = m$, $\gamma_n = M$ και εφαρμόζουμε την προηγούμενη Πρόταση. □

Παρατηρήστε ότι $\theta := \frac{\rho+1}{2} < 1$ και

$$0 \leq a_n \leq \theta^n \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Αφού $0 < \theta < 1$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \theta^n = 0$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $a_n \to 0$.

(β) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\rho-1}{2} > 0$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\sqrt[n]{a_n} > \rho - \varepsilon = \frac{\rho+1}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\theta := \frac{\rho+1}{2} > 1$ και

$$a_n \geq \theta^n \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Αφού $\theta > 1$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \theta^n = +\infty$. Έπεται ότι $a_n \to +\infty$. □

Παρατήρηση 2.4.9. Αν $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ τότε το κριτήριο δεν δίνει συμπέρασμα. Για παράδειγμα, $\sqrt[n]{n} \to 1$ και $n \to \infty$, όμως $\sqrt[n]{1/n} \to 1$ και $1/n \to 0$.

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται η εξής Πρόταση.

Πρόταση 2.4.10. *Έστω (a_n) ακολουθία με μη αρνητικούς όρους.*
(α) *Αν υπάρχει $0 < \rho < 1$ ώστε $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \to 0$.*
(β) *Αν υπάρχει $\rho > 1$ ώστε $\sqrt[n]{a_n} \geq \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \to +\infty$.* □

2.5 Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών

2.5α΄ Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών

Ορισμός 2.5.1. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η (a_n) είναι

(i) *αύξουσα*, αν $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *φθίνουσα*, αν $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) *γνησίως αύξουσα*, αν $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iv) *γνησίως φθίνουσα*, αν $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις λέμε ότι η (a_n) είναι **μονότονη**.

Παρατηρήσεις 2.5.2. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι αν η (a_n) είναι αύξουσα τότε

$$n \leq m \Longrightarrow a_n \leq a_m.$$

Δείξτε το με επαγωγή: σταθεροποιήστε το n και δείξτε ότι αν $a_n \leq a_m$ τότε $a_n \leq a_{m+1}$. Αντίστοιχο συμπέρασμα ισχύει για όλους τους άλλους τύπους μονοτονίας.

(β) Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι αύξουσα και κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία είναι φθίνουσα.

(γ) Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, για παράδειγμα από τον πρώτο της όρο a_1. Συνεπώς, μια αύξουσα ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι άνω φραγμένη.

Εντελώς ανάλογα, κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη, για παράδειγμα από τον πρώτο της όρο a_1. Συνεπώς, μια φθίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένη.

Η διαίσθηση υποδεικνύει ότι αν μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη, τότε πρέπει να συγκλίνει. Για παράδειγμα, αν η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε οι όροι της συσσωρεύονται στο ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα δώσουμε αυστηρή απόδειξη γι' αυτό:

Θεώρημα 2.5.3 (σύγκλιση μονότονων ακολουθιών). *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα. Το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό (για παράδειγμα, $a_1 \in A$) και άνω φραγμένο διότι η (a_n) είναι (άνω) φραγμένη. Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του. Έστω $a = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a - \varepsilon < a$, ο $a - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του A που είναι μεγαλύτερο από τον $a - \varepsilon$. Με άλλα λόγια, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a - \varepsilon < a_{n_0}.$$

Αφού η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_{n_0} \leq a_n$ και επειδή ο a είναι άνω φράγμα του A, $a_n \leq a$. Δηλαδή, αν $n \geq n_0$ τότε

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$$

Έπεται ότι $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $a_n \to a$. □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται τα εξής:

(i) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε τείνει στο $+\infty$.

(iii) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε τείνει στο $-\infty$.

Ας δούμε για παράδειγμα την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού: Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, ο M δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n(n+2)}.$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι

$$\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+1},$$

το οποίο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έπεται ότι $a_n < b_n < b_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $a_n < (1+1)^2 = 4$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, η φθίνουσα ακολουθία (b_n) είναι κάτω φραγμένη: $b_n > a_n > a_1 = 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, οι (a_n) και (b_n) συγκλίνουν. Έχουν μάλιστα το ίδιο όριο: αφού $b_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ονομάζουμε e το κοινό όριο των (a_n) και (b_n). Έχουμε ήδη δεί ότι $2 < e < 4$. Για να προσεγγίσουμε την τιμή του ορίου καλύτερα, παρατηρούμε ότι, για παράδειγμα, αν $n \geq 5$ τότε $a_5 < a_n < e < b_n < b_5$, και συνεπώς,

$$2.48832 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 < e < \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.985984.$$

Δηλαδή, $2 < e < 3$. □

2.5γ′ Αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων

Μια σημαντική εφαρμογή του Θεωρήματος 2.5.3 είναι η «αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων»:

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω $[a_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$ μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων. Τότε,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Αν επιπλέον $b_n - a_n \to 0$, τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό (είναι μονοσύνολο).

Απόδειξη. Από την $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ έπεται ότι

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα.

Από την $[a_n, b_n] \subseteq [a_1, b_1]$ βλέπουμε ότι

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η (a_n) είναι άνω φραγμένη από τον b_1 και η (b_n) είναι κάτω φραγμένη από τον a_1.

Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a_n \to a \quad \text{και} \quad b_n \to b.$$

Αφού $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η **Πρόταση 2.3.11** δείχνει ότι $a \leq b$. Επίσης, η μονοτονία των $(a_n), (b_n)$ δίνει

$$a_n \leq a \quad \text{και} \quad b \leq b_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

όπου συμφωνούμε ότι $[a, b] = \{a\} = \{b\}$ αν $a = b$. Ειδικότερα,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Ισχύει μάλιστα ότι

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Πράγματι, αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ τότε $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $a = \lim_n a_n \leq x \leq \lim_n b_n = b$. Δηλαδή, $x \in [a, b]$.

Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $b_n - a_n \to 0$, έχουμε

$$b - a = \lim_n b_n - \lim_n a_n = \lim_n (b_n - a_n) = 0.$$

Δηλαδή, $a = b$. Άρα το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό: τον $a (= b)$. □

Παρατήρηση 2.5.6. Η υπόθεση ότι τα κιβωτισμένα διαστήματα του Θεωρήματος 2.5.5 είναι *κλειστά* δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, θεωρήστε τα ανοικτά διαστήματα $(a_n, b_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Έχουμε

$$(0, 1) \supseteq \left(0, \frac{1}{2}\right) \supseteq \cdots \supseteq \left(0, \frac{1}{n}\right) \supseteq \left(0, \frac{1}{n+1}\right) \supseteq \cdots,$$

όμως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\emptyset.$$

Αλιώς, θα υπήρχε $x>0$ που θα ικανοποιούσε την $x<\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αυτό είναι αδύνατο, λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας.

2.5δ′ Αναδρομικές ακολουθίες

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με ένα παράδειγμα αναδρομικής ακολουθίας. Η τεχνική που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη της σύγκλισης αναδρομικών ακολουθιών βασίζεται συχνά στο θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών.

Παράδειγμα 2.5.7. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που έχει πρώτο όρο τον $a_1=1$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ για $n\geq 1$. Θα δείξουμε ότι η (a_n) συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Απόδειξη. Από τον τρόπο ορισμού της (a_n) είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της είναι θετικοί (δείξτε το αυστηρά με επαγωγή).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταφέρει να δείξουμε ότι $a_n\to a$ για κάποιον $a\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$a_{n+1}\to a \quad \text{και} \quad \sqrt{1+a_n}\to\sqrt{1+a}.$$

Αφού $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$, από τη μοναδικότητα του ορίου ο a πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $a=\sqrt{1+a}$, δηλαδή $a^2-a-1=0$. Συνεπώς,

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{ή}\ a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Όμως, το όριο της (a_n), αν υπάρχει, είναι μη αρνητικό. Άρα, $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Μένει να δείξουμε την ύπαρξη του ορίου. Παρατηρούμε ότι $a_2=\sqrt{2}>1=a_1$. Μια ιδέα είναι λοιπόν να δείξουμε ότι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Τότε, από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η (a_n) συγκλινει (και το όριο της είναι ο $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

(α) Δείχνουμε με επαγωγή ότι $a_{n+1}\geq a_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έχουμε ήδη ελέγξει ότι $a_2>a_1$. Υποθέτοντας ότι $a_{m+1}\geq a_m$, παίρνουμε

$$a_{m+2}=\sqrt{1+a_{m+1}}\geq\sqrt{1+a_m}=a_{m+1},$$

δηλαδή έχουμε δείξει το επαγωγικό βήμα.

(β) Τέλος, δείχνουμε με επαγωγή ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη. Από τη στιγμή που έχουμε δείξει ότι η (a_n) είναι αύξουσα, θα έπρεπε να μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το «υποψήφιο όριο» $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι άνω φράγμα της (a_n). Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $a_n<2$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έχουμε $a_1=1<2$ και αν $a_m<2$ τότε $a_{m+1}=\sqrt{1+a_m}<\sqrt{1+2}=\sqrt{3}<2$. □