Μιχάλης Μυτιληναίος

ΛΟΓΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τί είναι η Λογική; Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα. Η Λογική *δεν* είναι η μελέτη των νόμων της σκέψης, αλλά η μελέτη του τρόπου που μία πρόταση συνεπάγεται από άλλες προτάσεις. Δηλαδή η Λογική ασχολείται με τους κανόνες που χρησιμοποιούμε για να βγάζουμε σωστά συμπεράσματα.

Πρώτος ο Αριστοτέλης (350 π.χ.) μελέτησε την Λογική σαν τυπική επιστήμη. Έγραψε μιά σειρά έργα που αναφέρονται στη Λογική, με τον τίτλο «Όργανον» και για πρώτη φορά έδειξε τυπικά τους τρόπους που, από ορισμένες υποθέσεις φθάνουμε σε σωστά συμπεράσματα. Το γνωστό επιχείρημα του Αριστοτέλη

«Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός.»

είναι σωστό και η ορθότητά του δεν εξαρτάται από τον Σωκράτη ούτε από την ιδιότητα «είναι θνητός» αλλά από τη δομή των προτάσεων. Αυτό φαίνεται γιατι το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να μας δώσει το σχήμα

«Κάθε Α είναι Θ.
Το Σ είναι Α.
Άρα το Σ είναι Θ.»

που είναι δείγμα ορθού συλλογισμού για οποιαδήποτε Α, Σ, και Θ. Στη Λογική συνεπώς μας ενδιαφέρουν οι «αποδείξεις» (επιχειρήματα, συλλογισμοί). Στις «αποδείξεις» δεν μας ενδιαφέρει το περιεχόμενο, αλλά η μορφή. Ο Αριστοτέλης διατύπωσε ορισμένες αρχές, όπως την *αρχή της ταυτότητας* (κάθε πράγμα συμπίπτει με τον εαυτό του), την *αρχη της μη – αντίφασης* και την *αρχη της απόκλεισης του τρίτου* (κάθε πράγμα ή έχει μία ιδιότητα ή δεν την έχει).

Μετά τον Αριστοτέλη η Λογική παρέμεινε στάσιμη για είκοσι περίπου αιώνες. Κατά τον μεσαίωνα και την αναγέννηση υπηρξε μία σχολαστικιστική απασχόληση με την Λογική και μόνο με τον Leibniz και τον Boole στα μέσα του περασμένου αιώνα η Λογική συνδέεται με τα μαθηματικά, και η κατάσταση αλλάζει.

Η μεγάλη ανάπτυξη της Λογικής έχει επιτελεσθεί τα τελευταία εκατό χρόνια. Αναπτύχθηκε στα τέλη του περασμένου αιώνα από τους Frege, Peano, Russell και Whitehead που επεξεργάσθηκαν τις σχέσεις μαθηματικών – λογικής. Στις πρώτες δεκαετίες του αιώνα μας ανοίχτηκαν οι δρόμοι για τη σύγχρονη (μαθηματική) λογική με τη δουλειά των Hilbert, Gödel, Tarski, Skolem κ.ά. Η Λογική στη σημερινή εποχή χρησιμοποιεί μαθηματικές μεθόδους. Στη δεκαετία του '30 η λογική συνδέθηκε με την έννοια της *υπολογισιμότητας* δηλαδή με την έννοια του υπολογισμού, και κατά συνέπεια μετά την δεκαετία του '40 και με τους υπολογιστές για τη σχεδίασή τους και για θεωρητικά αποτελέσματα επ' αυτών. Στη σημερινή εποχή τέλος, είναι συνδεδεμένη στενά με τα μαθηματικά αλλά και με κλάδους της επιστήμης υπολογιστών όπως τεχνητή νοημοσύνη, έμπειρα συστήματα και λογική σχεδίαση. Εν γένει είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επιστήμη των υπολογιστών. Είναι ο πιό θεμελιακός κλάδος των μαθηματικών επειδή στηρίζει όλη τη μαθηματική σκέψη (αναλύει την μαθηματική σκέψη με μαθηματικό τρόπο). Ο προτασιακός λογισμός και η άλγεβρα Boole είναι τομείς της μαθηματικής λογικής που πάντοτε συμπεριλαμβάνονται στο πρόγραμμα ενός τμήματος πληροφορικής, επειδή έχουν σημασία για τη σχεδίαση κυκλωμάτων. Ο Κατηγορηματικός λογισμός είναι επέκταση του προτασιακού και μας δινει μιά πιό πλούσια γλώσσα. Μ' αυτή τη γλώσσα μελετάμε την ορθότητα προγραμμάτων. Το να αποδείξουμε ότι ένα πρόγραμμα είναι σωστό είναι συνήθως μιά μη τετριμμένη δουλειά αλλά πολύ σπουδαία. Χρησιμοποιώντας τον κατηγορηματικό λογισμό μπορούμε να ελέγξουμε προγράμματα.

Όπως είπαμε παραπάνω η μαθηματική (ή συμβολική ή τυπική) Λογική είναι λογική που χρησιμοποιεί μαθηματικές μεθόδους. Τότε όμως δεν είναι απλά εργαλείο για τα μαθηματικά αλλά μέρος των μαθηματικών. Εδώ φαίνεται να υπάρχει ένας φαύλος κύκλος.

Οι μαθηματικές μέθοδοι προϋποθέτουν την λογική, συνεπώς μελετούμε τη λογική με τη βοήθεια της λογικής;

Η απάντηση είναι «ναί». Η διάκριση μεταξύ λογικών εννοιών που μελετούμε και λογικών εννοιών που προϋποθέτουμε σαν εργαλείο μελέτης, γίνεται με τη βοήθεια της «γλώσσας». Η γλώσσα της υπό μελέτη λογικής είναι ένα καθορισμένο σύνολο συμβόλων, ενώ η γλώσσα με την οποία περιγράφουμε την πρώτη, η *μεταγλώσσα* όπως λέγεται, είναι η κοινή ελληνική μαζί με κάποια σύμβολα σαφώς διάφορα από εκείνα της γλώσσας.

Τη γλώσσα που μελετάμε, τη λέμε και «γλώσσα – αντικείμενο».

Ολόκληρη η λογική διασχίζεται από μία αντίθεση: την αντίθεση ανάμεσα στις *σημασιολογικές* έννοιες και τις *συντακτικές* έννοιες. Οι πρώτες είναι όσες έχουν σχέση με τη σημασία, δηλαδή την αλήθεια ή το ψεύδος των προτάσεων, όπως τιμή αλήθειας, μοντέλο, αποτίμηση κ.τ.λ. Οι δεύτερες σχετίζονται με τη σύνταξη των προτάσεων, τον μηχανικό τρόπο παραγωγής τους από άλλες, και τέτοιες είναι κυρίως οι έννοιες απόδειξη, αξίωμα, αποδεικτικός κανόνας κ.τ.λ. Τις περισσότερες φορές σε μιά σημασιολογική έννοια αντιστοιχεί μία συντακτική και αντίστροφα με αποτέλεσμα να υπάρχουν δύο συμπληρωματικοί τρόποι αντιμετώπισης των προβλημάτων. Τα θεωρήματα πληρότητας μας εγγυώνται την ισοδυναμία των δύο προσεγγίσεων (σημασιολογικής και συντακτικής).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΛΟΓΙΚΗ

Υπάρχει μία γενικά κοινή άποψη στη σημερινή εποχή ότι η λογική δεν είναι και τόσο σπουδαία για τη ζωή μας και είναι μόνο θεωρητικού χαρακτήρα και καμμιάς πρακτικής σημασίας. Η λογική όμως είναι τεράστιας πρακτικής σημασίας. Όλοι θέλουμε να αποκτήσουμε «αληθείς» απόψεις για τους εαυτούς μας και τον κόσμο γύρω μας. Και αυτό γιατί αλληλεπιδρούμε με το περιβάλλον και πρέπει να ενδιαφερόμαστε για το κατά πόσο οι πεποιθήσεις μας αντανακλούν πιστά τον κόσμο. Δεν μπορούμε να είμαστε αδιάφοροι για την αλήθεια των πεποιθήσεών μας ή να νομίζουμε ότι η αλήθεια των απόψεών μας είναι υπόθεση του πώς αισθανόμαστε για τα πράγματα και όχι του πως τα πράγματα είναι. Σ' αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα θα ήταν καταστροφικό για τον άνθρωπο.

Οι τεχνικές της τυπικής λογικής δεν μπορούν να μας πουν ποιές πεποιθήσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς. Η αλήθεια είναι συνήθως υπόθεση του πώς ο κόσμος είναι και η λογική δεν μας το λέει αυτό. Οι τεχνικές όμως που θα αναπτύξουμε μπορούν να μας βοηθήσουν να αποφασίσουμε αν οι πεποιθήσεις ή εικασίες που μας ενδιαφέρουν συγκροτούν ένα συνεπές σύνολο. Μια ομάδα πεποιθήσεων είναι ένα *συνεπές* (μη - αντιφατικό) σύνολο αν και μόνον αν είναι δυνατόν όλα τα μέλη του συνόλου να είναι αληθή ταυτόχρονα. Διαφορετικά λέμε ότι έχουμε ένα *ασυνεπές* (αντιφατικό) σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι κάποιος πιστεύει τα παρακάτω:

1) Όλα τα άλογα είναι ζώα.
2) Όλα τα ζώα έχουν ένα μόνο κεφάλι.
3) Ο Ντορής (άλογο) είναι άλογο.
4) Ο Ντορής δεν έχει κεφάλι.

Βλέπουμε ότι δεν μπορούν όλες οι παραπάνω προτάσεις να είναι αληθείς συγχρόνως. Όποιος τις πιστεύει όλες έχει αντιφατικές απόψεις και τουλάχιστον μία ψευδή πεποίθηση. Οι αντιφάσεις δεν είναι προφανείς. Με τις τεχνικές όμως που θα αναπτύξουμε, ανακαλύπτουμε τις μη προφανείς αντιφάσεις. Βέβαια η λογική συνήθως δεν μπορεί να μας πει πώς θα λύσουμε μία ασυνέπεια. Κάποια από τα μέλη του ασυνεπούς συνόλου πρέπει να απορριφθούν για να μην παραλογιζόμαστε. Αλλά ποιές προτάσεις θα απορριφθούν, θα μας το πει η εμπειρία μας και η επιστήμη.

Προσπαθούμε μ' αυτό τον τρόπο να δώσουμε τους λόγους που υποστηρίζουν τις απόψεις μας. Ένας από τους στόχους της λογικής είναι η ανάπτυξη τυπικών τεχνικών για την εκτίμηση επιχειρημάτων.

Η Λογική λοιπόν μας βοηθάει να ανακαλύπτουμε αντιφάσεις και να εκτιμούμε επιχειρήματα.

Στη Λογική ενδιαφερόμαστε πρωταρχικά για προτάσεις που είναι αληθείς ή ψευδείς. Αν μία πρόταση είναι αληθής λέμε ότι έχει τιμή αλήθειας Α, διαφορετικά τιμή αλήθειας Ψ. Βέβαια όλες οι προτάσεις που έχουν νόημα δεν είναι αληθείς ή ψευδείς π.χ. οι προτάσεις:

θα πάμε σινεμά το βράδυ;

Τρώγε υγιεινές τροφές.

δεν είναι ούτε αληθείς ούτε ψευδείς. Στη λογική ενδιαφερόμαστε για τις *αποφαντικές* προτάσεις, δηλαδή αυτές που είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς.

Μιά σπουδαία χρήση της γλώσσας είναι να μας προμηθεύσει με επιχειρήματα για πεποιθήσεις. Σ' ένα επιχείρημα δίνουμε τους λόγους μας για μία εικασία. Ας υποθέσουμε ότι ο φίλος μας ο Δημήτρης διαβάζει πάρα πολύ και θα πετύχει στις εξετάσεις. Αν κάποιος μας προκαλέσει για τον Δημήτρη, αμφισβητώντας ότι θα πετύχει στις εξετάσεις τότε λέμε:

Όποιος διαβάζει πολύ, θα πετύχει στις εξετάσεις. Ο Δημήτρης θα πετύχει στις εξετάσεις επειδή διαβάζει πολύ.

Συνήθως αυτό το γράφουμε:

Όποιος διαβάζει πολύ θα πετύχει στις εξετάσεις.

Ο Δημήτρης διαβάζει πολύ.
Άρα ο Δημήτρης θα πετύχει στις εξετάσεις.

Ένα *επιχείρημα* (συλλογισμός) είναι ένα σύνολο προτάσεων μία από τις οποίες (*το συμπέρασμα*) υποστηρίζεται από τις υπόλοιπες (τις υποθέσεις).

Πρέπει να γράφουμε ένα επιχείρημα σε κανονικό τύπο όπως παραπάνω, γιατί αν δεν μπορούμε να πούμε καθαρά ποιές είναι οι υποθέσεις και ποιό το συμπέρασμα, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε ως προς την ορθότητα το επιχείρημα.

Παραφράζοντας ένα επιχείρημα χρειάζεται να προσέχουμε τις λέξεις-κλειδιά που δηλώνουν ποιές προτάσεις χρησιμοποιούνται σαν υποθέσεις και ποιά για συμπέρασμα.

Οι παρακάτω λέξεις (φράσεις) μας δηλώνουν υποθέσεις: *επειδή, γιατί, διότι, για τον λόγο ότι.* Ενώ οι: *συνεπώς, έτσι, συνεπάγεται, άρα, σαν αποτέλεσμα,* μας δηλώνουν συμπέρασμα.

Ας θέσουμε σε κανονικό τύπο το παρακάτω επιχείρημα:

«Είναι σωστό ότι οι άνθρωποι πρέπει να αξιολογούν την ψυχή παρά το σώμα, γιατί η τελειότης της ψυχής διορθώνει την κατωτερότητα του σώματος, ενώ η φυσική δύναμη χωρίς την ευφυΐα δεν κάνει τίποτα για να βελτιώσει το πνεύμα» (Δημόκριτος). Έχουμε λοιπόν:

Η τελειότης της ψυχής διορθώνει την κατωτερότητα του σώματος.
Η φυσική δύναμη χωρίς ευφυΐα δεν βελτιώνει το πνεύμα.
Είναι σωστό, οι άνθρωποι να αξιολογούν την ψυχή παρά το σώμα.

Ας θεωρήσουμε το επιχείρημα:

Όλοι οι ανάπηροι έχουν ταλέντο.
Ο Μ είναι ανάπηρος.
Άρα ο Μ έχει ταλέντο.

Το παραπάνω επιχείρημα παρουσιάζει προβλήματα. Μπορεί κάποιος νας μας πει ότι κάποιος που είναι ανάπηρος δεν έχει ταλέντο και άρα η πρώτη πρόταση είναι ψευδής.

Δεχόμενοι ότι ένα επιχείρημα είναι «καλό» αν όλες του οι υποθέσεις είναι αληθείς, τότε το παραπάνω επιχείρημα δεν είναι καλό. Αν δεχτούμε όμως ότι ένα επιχείρημα είναι «καλό» εάν αληθείς υποθέσεις συνεπάγονται αληθές συμπέρασμα, τότε το επιχείρημα είναι καλό.

Ένα επιχείρημα λέγεται *έγκυρο* αν και μόνον αν *δεν* είναι δυνατόν οι υποθέσεις να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Ας σημειώσουμε ότι ένα έγκυρο επιχείρημα μπορεί να έχει:

1) Όλες τις υποθέσεις αληθείς και το συμπέρασμα αληθές.
2) μία ή περισσότερες υποθέσεις ψευδείς και αληθές συμπέρασμα.
3) μία ή περισσότερες υποθέσεις ψευδείς και ψευδές συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Η γλώσσα του προτασιακού λογισμού

Θα μελετήσουμε μέσω μιάς γλώσσας την λογική των προτάσεων. Το πρώτο λοιπόν που θα πρέπει να κάνουμε είναι να εισαγάγουμε σύμβολα για να μετατρέψουμε τα σχήματα συλλογισμών σε συνδυασμούς συμβόλων. Η προσπάθεια συμβολισμού θα στραφεί στο χώρο των αποφάνσεων και όχι σ' ολόκληρο το χώρο της φυσικής μας γλώσσας. Σύμβολα θα χρησιμοποιούμε για τις αποφαντικεές προτάσεις, δηλαδή προτάσεις που θα μπορούν να είναι αληθείς ή ψευδείς. Αν τώρα για κάθε πρόταση που συναντούμε θέτουμε κι ένα διαφορετικό σύμβολο, είναι φανερό ότι σε τίποτα δεν θα βελτιώσουμε την κατάσταση. Άρα θα πρέπει να βρούμε ένα ελάχιστο σύνολο προτάσεων από τις οποίες συντίθενται όλες οι άλλες. Κάποιες προτάσεις είναι τόσο απλές που δεν μπορούν να διασπασθούν σε απλούστερες. Αυτές τις απλές προτάσεις θα τις λέμε και ατομικές και κάθε άλλη πρόταση θα συντίθεται από ατομικές μέσω των συνδέσμων *και, ή, όχι, εάν - τότε, εάν και μόνον εάν.* Παρ' όλο που ορισμένοι από τους συνδέσμους παραπάνω δεν είναι σύνδεσμοι με την γραμματική έννοια, χρησιμοποιούμε αυτήν την ονομασία. Επίσης από όλους τους συνδέσμους της φυσικής γλώσσας διαλέγουμε αυτούς εδώ, γιατί οι άλλοι δεν μας χρειάζονται ή αντικαθίστανται ικανοποιητικά απ' αυτούς που θα εισαγάγουμε.

Θα τυποποιήσουμε τη λογική των προτάσεων εισάγοντας σύμβολα για τις απλές προτάσεις, σύμβολα για τους συνδέσμους και παρενθέσεις. Έτσι θα φτιάξουμε μία γλώσσα - αντικείμενο μελέτης και θα τη μελετήσουμε μέσω της μεταγλώσσας που είναι η φυσική γλώσσα που μιλάμε.

Η γλώσσα αυτή (αντικείμενο) είναι μια χονδροειδής απομίμηση της φυσικής μας γλώσσας με το πλεονέκτημα ότι είναι απόλυτα σαφής, αυστηρή και ακριβής.

Κάτι το οποίο είναι σημαντικό είναι ότι οι βασικοί δομικοί λίθοι για να κτίσουμε αυτή τη γλώσσα – αντικείμενο είναι οι (απλές) προτάσεις, ολόκληρες σαν συμπαγείς οντότητες. Δηλαδή δεν μας ενδιαφέρει η εσωτερική δομή των (απλών) προτάσεων, αλλά μόνο το πώς συνδέονται εξωτερικά μεταξύ τους.

Το πλήθος των απλών προτάσεων δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο γιατί πάντα θέλουμε να έχουμε διαθέσιμες απλές προτάσεις. Θα εισαγάγουμε ένα αριθμήσιμο πλήθος από σύμβολα για τις απλές προτάσεις. Η γλώσσα-αντικείμενο δεν έχει γράμματα με τα οποία φτιάχνονται λέξεις και στη συνέχεια προτάσεις, αλλά μόνο σύμβολα – προτάσεις που με τη χρήση των συνδέσμων φτιάχνουμε νέες προτάσεις.

Ορισμός: Η γλώσσα Γ του προτασιακού λογισμού αποτελείται από τα παρακάτω σύμβολα:

i) $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ (αριθμήσιμο πλήθος), που λέγονται *προτασιακές μεταβλητές*.

ii) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ που λέγονται *λογικοί σύνδεσμοι*

iii) παρενθέσεις (,) (αριστερή, δεξιά παρένθεση).

Το όνομα των συνδέσμων είναι:

$\neg$: λέγεται *άρνηση* και (θα σημαίνει) «όχι».

$\wedge$: λέγεται *σύζευξη* και (θα σημάινει) «καί»

$\vee$: λέγεται *διάζευξη* και θα σημαίνει «ή»

$\rightarrow$: λέγεται *συνεπαγωγή* και θα σημαίνει «αν - τότε»

$\leftrightarrow$: λέγεται *ισοδυναμία* και θα σημαίνει «αν και μόνον αν»

Οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ λέγονται διθέσιοι ενώ ο $\neg$ μονοθέσιος. Το σύνολο των πρατασιακών μεταβλητών συμβολίζεται με Μ(Γ). Οι σύνδεσμοι και οι παρενθέσεις λέγονται λογικά σύμβολα, και έχουν καθορισμένο νόημα ενώ οι μεταβλητές μπορούν να ερμηνευτούν με διαφόρους τρόπους.

Μία πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της Γ λέγεται *έκφραση* της Γ. Π.χ. $\rightarrow (p_1, p_2 \rightarrow p_1 \wedge \neg \vee$ είναι εκφράσεις της Γ.

Οι προτάσεις της Γ είναι ένα υποσύνολο των εκφράσεων που κατασκευάζονται με ορισμένους κανόνες σχηματισμού.

Ορισμός: Το σύνολο των *προτασιακών τύπων* (προτάσεων) Τ(Γ) της γλώσσας Γ ορίζεται ως εξής:

1) κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι προτασιακός τύπος Μ (Γ) $\subseteq$ Τ(Γ).
2) Αν ϕ, $\psi \in$ Τ (Γ) τότε $(\neg\phi)$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\leftrightarrow\psi)$ ανήκουν στο σύνολο Τ (Γ).
3) Δεν υπάρχουν άλλοι προτασιακοί τύποι πέρα απ' αυτούς που δίνονται μέσω 1) και 2).

Οι εκφράσεις p_5, $\big(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)\big)$, $\big((p_2 \leftrightarrow p_4) \rightarrow p_1\big)$ είναι προτασιακοί τύποι.

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι διατυπωμένος στη μεταγλώσσα, και αναφέρεται σε αντικείμενα της Γ. Επίσης ότι οι «σύνδεσμοι» χρησιμοποιούνται και στη μεταγλώσσα. Απλά θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και π.χ. τον σύνδεσμο «και» που συμβολίσαμε στη Γ με $\wedge$, στη μεταγλώσσα θα γράφουμε «και».

Οι παρενθέσεις χρησιμεύουν για τη τήρηση της προτεραιότητας κατά την εφαρμογή των συνδέσμων. Π.χ. οι προτασιακοί τύποι $\big((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3\big)$ και $\big(p_1 \wedge (p_2 \rightarrow p_3)\big)$ είναι διαφορετικοί. Συχνά οι παρενθέσεις που περιέχει ένας προτασιακός τύπος είναι πάρα πολλές. Γι' αυτό παραλείπουμε μερικές σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

α) Οι εξωτερικές παρενθέσεις ενός προτασιακού τύπου παραλείπονται.
β) Το $\neg$ έχει προτεραιότητα έναντι όλων των άλλων.
γ) Τα $\wedge$, $\vee$ έχουν προτεραιότητα έναντι των $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
δ) Τα $\wedge$, $\vee$ είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.
ε) Τα $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

Χρησιμοποιούμε τα p, q, r σαν συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο Μ (Γ). Τα σύμβολα ϕ, ψ που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε προτασιακούς τύπους *δεν* είναι σύμβολα της Γ αλλά της μεταγλώσσας.

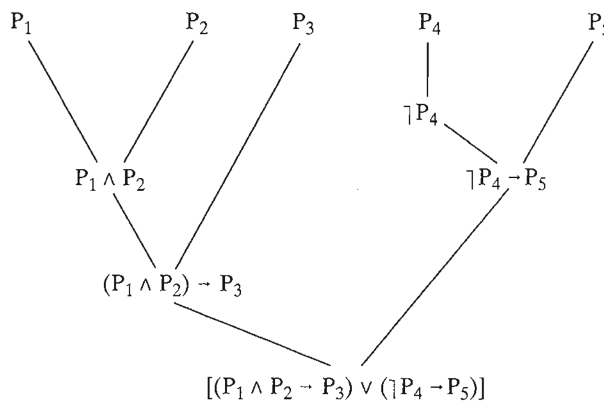
Αν Ε (Γ) είναι το σύνολο των εκφράσεων της Γ, οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ μπορούν να θεωρηθούν διμελείς πράξεις μέσα στο Ε (Γ) και ο $\neg$ μονομελής πράξη.

Δηλαδή π.χ.: $\rightarrow$: Ε (Γ) $\times$ Ε (Γ) $\rightarrow$ Ε (Γ), τέτοια ώστε $\rightarrow$ (α, β) = (α $\rightarrow$ β).

Ο ορισμός που δώσαμε παραπάνω για τους προτασιακους τύπους της Γ, μας δίνει ένα αλγόριθμο μέσω του οποίου μπορούμε να αποφασίσουμε αν μία έκφραση είναι ή όχι προτασιακός τύπος. Η διαδικασία είναι η εξής:

Δίνεται η έκφραση α. Εξετάζουμε αν είναι της μορφής $\alpha = p_i$ ή $\alpha = \phi_1 \wedge \phi_2$ ή $\alpha = \phi_1 \vee \phi_2$ ή $\alpha = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ ή $\alpha = \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ ή $\alpha = \neg\phi$. Αν όχι η α δεν είναι προτασιακός τύπος. Αν ναι στις πέντε τελευταίες περιπτώσεις κάνουμε το ίδιο με τις ϕ_1, ϕ_2 και ϕ.

Είναι προφανές λοιπόν ότι σε κάθε προτασιακό τύπο αντιστοιχεί ένα δένδρο, ένα διάγραμμα δηλαδή που δείχνει πώς κατασκευάζεται ο τύπος αυτός από προτασιακές μεταβλητές με τη βοήθεια των συνδέσμων π.χ. στο προτασιακό τύπο $\left[\left((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3\right) \vee (\neg p_4 \rightarrow p_5)\right]$ αντιστοιχεί το παρακάτω δένδρο.



Η τελευταία παρατήρηση οφείλεται στο ότι ο ορισμός των προτασιακών τύπων είναι *επαγωγικός*, δηλαδή γίνεται κατά βήματα και το κάθε βήμα στηρίζεται στα προηγούμενα.

Υπάρχει αναλογία μεταξύ του N του συνόλου των φυσικών αριθμών και του Τ (Γ). Το N ορίζεται σαν το ελάχιστο σύνολο που περιέχει το 0 και είναι κλειστό ως προς την πράξη s της διαδοχής $\left(s\,(n) = n + 1\right)$.

Έχουμε λοιπόν την αναλογία:

Φυσικοί αριθμοί	**Προτασιακοί τύποι**
$0 \in N$	$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \in T(\Gamma)$
$n \in N \Longrightarrow n+1 \in N$	$\phi, \psi \in T(\Gamma) \begin{cases} \Longrightarrow \phi \wedge \psi,\ \phi \vee \psi,\ \phi \to \psi,\ \phi \leftrightarrow \psi \in T(\Gamma) \\ \Longrightarrow \neg\phi \in T(\Gamma) \end{cases}$

Στον παραπάνω ορισμό του N στηρίζεται η μέθοδος της επαγωγής και των επαγωγικών αποδείξεων.

Η ύπαρξη του συνόλου T (Γ) στηρίζεται στο θεώρημα αναδρομής για το σύνολο N:

«Αν A τυχόν σύνολο, $\alpha \in A$ και $g : A \to A$, τότε υπάρχει:

$$f: N \to A \text{ τέτοια ώστε } \left\{ \begin{array}{ll} f(0) = \alpha & \text{και} \\ f(n+1) = g\big(f(n)\big) & \text{για κάθε } n \in N \end{array} \right\}$$

Επειδή το T (Γ) ορίστηκε επαγωγικά, και με βάση την αναλογία που αναφέραμε μεταξύ N και T (Γ), όταν θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι οι προτασιακοί τύποι έχουν μια ιδιότητα, εφαρμόζουμε επαγωγή στο T (Γ), όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: (Αρχή της επαγωγής στο T(Γ))

Έστω A (φ) μια ιδιότητα της μεταγλώσσας που αναφέρεται στους προτασιακούς τύπους της Γ. Αν

i) $A(p_i)$ ισχύει για κάθε $i = 1, 2, \ldots$

ii) $A(\phi)$ και $A(\psi)$ συνεπάγονται $A(\neg\phi)$, $A(\phi \wedge \psi)$, $A(\phi \vee \psi)$ $A(\phi \to \psi)$, $A(\phi \leftrightarrow \psi)$,

τότε η $A(\phi)$ ισχύει για κάθε $\phi \in T(\Gamma)$

Ασκήσεις

1) Να δειχθεί ότι κάθε πρόταση περιέχει άρτιο αριθμό παρενθέσεων.
2) Δείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος περιέχει τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων.

3) Αποδείξτε ότι η έκφραση $((p_1 \rightarrow (p_2 \vee)) \wedge p_3)$ δεν είναι προτασιακός τύπος.

4) Βρείτε το δέντρο ανάλυσης του προτασιακού τύπου $\neg (p_1 \rightarrow (p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_3))) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4)$

2. Η σημασιολογική προσέγγιση

Τιμές αλήθειας, αποτιμήσεις, ταυτολογικές συνεπαγωγές

Οι έννοιες που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα αφορούσαν την σύνταξη και ορίστηκαν σαν ακολουθίες συμβόλων που κατασκευάζονται με ορισμένους κανόνες.

Η βασική έννοια αυτής της ενότητας είναι η έννοια του «λογικού συμπεράσματος», δηλαδή θα ορίσουμε τι σημαίνει ότι η πρόταση ψ είναι λογικό συμπέρασμα της φ. Γι' αυτό χρειαζόμαστε την έννοια της αλήθειας.

Κάθε πρόταση μπορεί να πάρει μια τιμή αλήθειας, αλήθεια (Α) ή ψεύδος (Ψ). Η ύπαρξη δύο τιμών οφείλεται στην αριστοτελική αρχή της απόκλισης του τρίτου. Μπορούμε όμως να φαντασθούμε λογική, όχι δίτιμη αλλά με τρεις τιμές, τέσσερις τιμές κ.τ.λ.

Μια ερμηνεία για τη Γ, και μάλιστα η κύρια ερμηνεία της είναι η εξής:

1) Στις προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχούμε απλές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας (ατομικές προτάσεις) Προτάσεις που δεν διασπώνται σε απλούστερες και είναι αληθείς ή ψευδείς.
2) Οι σύνδεσμοι αντιστοιχούν στις φράσεις «δεν», «και», «ή», «εάν... τότε», «... αν και μόνον αν...»
3) Οι παρενθέσεις αντιστοιχούν σε σημεία στίξεως, και δηλώνουν την αρχή και το τέλος μιας πρότασης.

Μ' αυτόν τον τρόπο οι προτασιακοί τύποι της Γ αντιστοιχούν σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας.

Η απονομή μιας τιμής αλήθειας σε κάθε πρόταση της Γ λέγεται αποτίμηση των προτασιακών τύπων, δηλαδή αποτίμηση θα είναι μια συνάρτηση υ από το Τ (Γ) στο { Α, Ψ }. Επειδή όμως το Τ (Γ) ορίσθηκε επαγωγικά παρατηρούμε ότι η υ αρκεί να ορισθεί επαγωγικά παρατηρούμε ότι η υ αρκεί να ορισθεί στο Μ (Γ) και να επεκταθεί στο Τ (Γ) με τη βοήθεια καταλλήλων απεικονίσεων.

Ορισμός: Αποτίμηση λέγεται μια συνάρτηση υ: Μ (Γ) $\rightarrow$ {Α, Ψ} όπου τα Α, Ψ λέγονται τιμές αλήθειας και αντιστοιχούν στις έννοιες «αληθής», «ψευδής».

Η απονομή μιας τιμής αλήθειας σε κάθε προτασιακό τύπο της Γ, δηλαδή η εύρεση μιας συνάρτησης $\bar{υ}$: Τ (Γ) $\rightarrow$ { Α, Ψ } όταν έχει δοθεί μια αποτίμηση υ γίνεται σύμφωνα με τους πίνακες (που λέγονται *πίνακες αλήθειας*) παρακάτω και μας υποβάλλονται από την κύρια ερμηνεία της Γ.

$\bar{υ}$ (φ)	$\bar{υ}$ (¬φ)
Α	Ψ
Ψ	Α

$\bar{υ}$ (φ)	$\bar{υ}$ (ψ)	$\bar{υ}$ (φ∧ψ)	$\bar{υ}$ (φ∨ψ)
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

$\bar{υ}$ (φ)	$\bar{υ}$ (ψ)	$\bar{υ}$ (φ $\rightarrow$ ψ)	$\bar{υ}$ (φ $\leftrightarrow$ ψ)
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Μία αποτίμηση μας δίνει μία *πλήρη* περιγραφή του πώς ο κόσμος μπορεί να είναι, γιατί γνωρίζοντας τις τιμές αλήθειας των ατομικών προτάσεων, μπορούμε να βρούμε την τιμή αλήθειας οποιασδήποτε σύνθετης πρότασης μέσω των πινάκων αλήθειας.

Δοσμένης μιάς αποτίμησης υ, επειδή το Τ (Γ) ορίστηκε επαγωγικά υπάρχει μοναδική επέκταση $\bar{υ}$ της υ με $\bar{υ}$: Τ (Γ) $\rightarrow$ {Α,Ψ}.

Η αποτίμηση *δεν* είναι αυθαίρετη απονομή τιμών αλήθειας στα στοιχεία του Τ (Γ). Αυθαίρετη είναι η απονομή μόνο για τα στοιχεία του Μ (Γ).

Σχετικά με το πώς οδηγούμαστε στον ορισμό των παραπάνω πινάκων. Αυτό προέρχεται από την κοινή αντίληψη περί αλήθειας

Κάποια επέκταση αυτής της κοινής αντίληψης χρειάζεται μόνο για τον ορισμό της αλήθειας της $\phi \to \psi$. Διαισθητικά η $\phi \to \psi$ παριστά ένα βήμα συλλογισμού. Και ένα τέτοιο βήμα είναι σωστό αν οδηγεί από αλήθεια σε αλήθεια. Αν οδηγεί από αλήθεια σε ψεύδος είναι λανθασμένο. Στην πράξη ξεκινούμε από υποθέσεις που είναι αληθινές. Συνεπώς αν η υπόθεση είναι ψευδής, δεν έχουμε κανένα λόγο να απορρίψουμε τον συλλογισμό, όπου κι αν οδηγεί.

Για παράδειγμα.

Αν ο Δημήτρης είναι στη Λάρισα, τότε είναι στην Ελλάδα.

Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής ακόμα και αν ο Δημήτρης βρίσκεται στο Λονδίνο.

Τα παραπάνω δικαιολογούν γιατί ορίζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής, όπως κάναμε παραπάνω.

Ο λόγος που υπάρχει σύγχιση σχετικά με την συνεπαγωγή, είναι ότι στην καθομιλουμένη γλώσσα, όποτε χρησιμοποιούμε «αν p τότε q», δεν υπάρχει μονοσήμαντη τιμή αλήθειας, αν δοθούν οι τιμές αλήθειας των p και q. Αυτό οφείλεται στο ότι στη συνεπαγωγή πολλές φορές υποβόσκουν αιτιακές σχέσεις. Εμείς όμως θέλουμε όλοι οι σύνδεσμοι να χρησιμοποιούνται *αληθώς – συναρτησιακά*. Δηλαδή αν κάποιος σύνδεσμος χρησιμοποιείται για να παραχθεί μία σύνθετη πρόταση από μία ή περισσότερες προτάσεις, θέλουμε η τιμή αλήθειας της σύνθετης πρότασης να είναι πλήρως αποφασισμένη από τις τιμές αλήθειας των προτάσεων που παράγουν την σύνθετη.

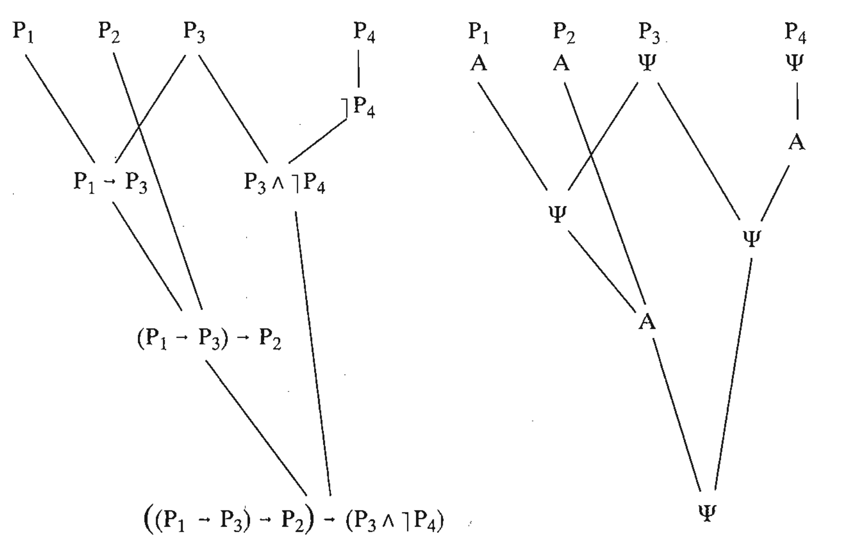
Μετά το ορισμό των στοιχειωδών αληθοπινάκων είναι φανερό ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αληθοπίνακα οποιουδήποτε προτασιακού τύπου. Αν ο ϕ περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n στις n πρώτες στήλες γράφουμε όλες τις δυνατές αποτιμήσεις των ϕ_i, ενώ στην τελευταία τις αντίστοιχες αληθοτιμές του ϕ. Ενδιάμεσα για ευκολία, υπολογίζουμε τις τιμές των διαφόρων υποτύπων του ϕ. Είναι προφανές ότι ο αληθοπίνακας ενός προτασιακού τύπου με n προτασιακές μεταβλητές θα περιέχει 2^n γραμμές όσες και οι δυνατές αποτιμήσεις (που μας ενδιαφέρουν).

Επίσης η τιμή $\bar{\upsilon}(\phi)$ εξαρτάται *μόνο* από τις τιμές $\upsilon(\phi_1)$, $\upsilon(\phi_2)$, ..., $\upsilon(\phi_n)$. Ο πίνακας αλήθειας του $\phi = (p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_3 \to p_1)$ είναι:

p_1	p_2	p_3	$p_1 \to p_2$	$\neg p_3$	$\neg p_3 \to p_1$	ϕ
Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ

Όταν έχουμε μιά αποτίμηση υ, για να βρούμε την $\bar{\upsilon}$ (φ), μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το δέντρο ανάλυσης του φ.

Παράδειγμα: Έστω υ μία αποτίμηση τέτοια ώστε $\upsilon(p_1) = \upsilon(p_2) = $ Α και $\upsilon(p_3) = \upsilon(p_4) = $ Ψ. Τότε βρίσκουμε την
$\bar{\upsilon}\big(((p_1 \to p_3) \to p_2) \to (p_3 \wedge \neg p_4)\big)$



Ορισμός: Έστω $T \subseteq T(\Gamma)$, $\phi \in T(\Gamma)$.

Αν υ μια αποτίμηση, θα λέμε ότι η υ *ικανοποιεί τον φ* ανν $\bar{\upsilon}(\phi) =$ Α, και ότι *η υ ικανοποιεί το Τ* ανν η υ ικανοποιεί κάθε στοιχείο του Τ.

Το Τ είναι *ικανοποιήσιμο* ανν υπάρχει μια αποτίμηση υ τέτοια ώστε η υ ικανοποιεί το Τ.

Υπάρχουν προτασιακοί τύποι που είναι αληθείς για όλες τις αποτιμήσεις. Αυτοί οι τύποι παίζουν ένα ιδιαίτερο ρόλο στη Λογική.

Ορισμός: Ο $\phi \in T(\Gamma)$ λέγεται *ταυτολογία* αν $\bar{\upsilon}(\phi) =$ Α για κάθε αποτίμηση υ. Ο φ λέγεται *αντίφαση* ανν ο $\neg\phi$ είναι ταυτολογία.

Για να ελέγξουμε αν ο τύπος $\phi \in T(\Gamma)$ είναι ταυτολογία κατασκευάζουμε τον αληθοπίνακά του και παρατηρούμε αν η τελευταία στήλη αποτελείται όλη από Α. Ο αληθοπίνακας (η κατασκευή του) αποτελεί έναν αλγόριθμο ελέγχου των ταυτολογιών.

Στον κατηγορηματικό λογισμό δεν υπάρχει κανένας ανάλογος αλγόριθμος.

Ορισμός: Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$, και $\phi \in T(\Gamma)$. *Το Σ ταυτολογικά συνεπάγεται τον φ* ή ο φ είναι ταυτολογικό συμπέρασμα του Σ, συμβολικά $\Sigma \models \phi$, ανν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το Σ ικανοποιεί και τον φ.

Παρατηρούμε τα εξής:

1) για κάθε $\phi \in \Sigma$ ισχύει $\Sigma \models \phi$
2) $\varnothing \models \phi$ ανν ο φ είναι ταυτολογία, γιατί κάθε αποτίμηση ικανοποιεί το $\varnothing$. Άρα φ ταυτολογία ανν $\models \phi$.
3) Αν το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε $\Sigma \models \phi$ για κάθε $\phi \in T(\Gamma)$. Αυτό γιατί κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το Σ (δηλαδή καμιά) ικανοποιεί και τον φ.
4) Αν $\Sigma = \{ \psi \}$ και $\Sigma \models \phi$, τότε γράφουμε $\psi \models \phi$ και λέμε ότι *ο ψ ταυτολογικά συνεπάγεται τον φ.*
5) Αν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$ για $\phi, \psi \in T(\Gamma)$, τότε συμβολικά γράφουμε $\phi \models\!\dashv \psi$ και λέμε ότι *οι φ, ψ, είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.*

Μερικές φορές συγχέουμε την συνεπαγωγή $\rightarrow$ και την ταυτολογική συνεπαγωγή $\models$. Είναι διαφορετικά πράγματα. Το σύμβολο $\rightarrow$ ανήκει στη Γ και παριστά μια πράξη στο $T(\Gamma)$, ενώ το σύμβολο $\models$

ανήκει στη μεταγλώσσα και παριστά μια σχέση στο Τ (Γ).

Μπορούμε να αποδείξουμε:

α) $\phi \models \phi$, $\{\phi, \phi \to \psi\} \models \psi$, $\phi \wedge \psi \models \phi$.

β) $\phi \models \psi \Longleftrightarrow \models \phi \to \psi$

γ) $\phi \models \dashv \psi \Longleftrightarrow \models \phi \leftrightarrow \psi$.

Η σχέση $\models \dashv$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο Τ (Γ).

Ένα θεώρημα που θα αποδείξουμε αργότερα λέει:

Θεώρημα Συμπάγειας: Έστω Σ άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το Σ είναι ικανοποιήσιμο.

Υπάρχει αλγόριθμος με βάση τον οποίο μπορούμε να ελέγξουμε αν $\Sigma \models \phi$, όπου το Σ πεπερασμένο. Έστω $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_\kappa\} \subseteq T(\Gamma)$ και $\phi \in T$ (Γ). Μας ενδιαφέρουν οι τιμές αλήθειας που μια αποτίμηση αντιστοιχεί στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στα στοιχεία του $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_\kappa, \phi\}$. Έστω ότι n διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές εμφανίζονται στα στοιχεία του $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_\kappa, \phi\}$. Κατασκευάζουμε πίνακα αλήθειας με 2^n σειρές και m στήλες όπου m ο αριθμός των διαφορετικών προτασιακών τύπων που εμφανίζονται στα δέντρα ανάλυσης των στοιχείων του $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_\kappa, \phi\}$. Αφού προσδιορίσουμε τις τιμές αλήθειας σε όλες τις στήλες, εξετάζουμε τις σειρές για να δούμε αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το $\{\phi_1, ..., \phi_\kappa\}$ ικανοποιεί και τον φ ή όχι.

Παραδείγματα 1) Θα δείξουμε ότι $\neg (p_1 \to p_2) \models p_1 \wedge \neg p_2$.

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$\neg (p_1 \to p_2)$	$\neg p_2$	$p_1 \wedge \neg p_2$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που ο $\neg (p_1 \to p_2)$ παίρνει την τιμή Α, και ο $p_1 \wedge \neg p_2$ παίρνει την τιμή Α.

2) Θα δείξουμε ότι ο τύπος $\neg (p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (\neg p_1) \wedge (\neg p_2)$ είναι ταυτολογία.

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$	$\neg (p_1 \vee p_2)$	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$(\neg p_1) \wedge (\neg p_2)$	$\neg (p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (\neg p_1) \wedge (\neg p_2)$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

Βλέπουμε ότι η τελευταία στήλη αποτελείται από Α, άρα ο τύπος είναι ταυτολογία $\left(\models \neg (p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (\neg p_1) \wedge (\neg p_2)\right)$.

Παραθέτουμε ένα κατάλογο από γνωστές ταυτολογίες:

$$\left.\begin{array}{l}(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg \phi \vee \psi) \\ (\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\neg (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi) \vee (\neg\psi) \\ \neg (\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi) \wedge (\neg\psi)\end{array}\right\} \text{Κανόνες του De Morgan}$$

$\neg (\neg \phi) \leftrightarrow \phi$ διπλή άρνηση

$$\left.\begin{array}{l}\phi \wedge (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \\ \phi \vee (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \vee \sigma\end{array}\right\} \text{προσεταιριστικότητα των } \wedge, \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi \\ \phi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \phi\end{array}\right\} \text{αντιμεταθετικότητα των } \wedge, \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma) \\ \phi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{επιμεριστικότητα των } \wedge, \vee \\ \text{επί των } \vee, \wedge \text{ αντίστοιχα.}\end{array}$$

$\phi \vee \neg \phi$ νόμος απόκλεισης του τρίτου

$(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi)$ νόμος αντιθετοαντιστροφής

Ασκήσεις

1) Εξετάστε αν ο κάθε ένας από τους παρακάτω προτασιακούς τύπους συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο

$(p_1 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_3))$

$[(p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)) \vee ((\neg p_1) \wedge ((\neg p_2) \wedge (\neg p_3)))]$

2) Είναι ο προτασιακός τύπος

$(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi \rightarrow \sigma)$ ταυτολογία;

3) Δείξτε ότι για $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$ καί $\phi, \psi \in T(\Gamma)$

α) $\Sigma \cup \{\phi\} \models \psi$ ανν $\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$

β) $\phi \models \dashv \psi$ ανν $\models \phi \leftrightarrow \psi$

4) Έστω ότι στον ϕ εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \wedge, \vee$. Έστω ϕ^* ο προτασιακός τύπος που παίρνουμε από τον ϕ εναλλάσσοντας τα $\wedge$, $\vee$ και αντικαθιστώντας κάθε προτασιακή μεταβλητή με την άρνησή της.

Δείξτε ότι $\neg \phi \models \dashv \phi^*$.

5) Αν p: Η ομάδα Α θα κερδίσει τουλάχιστο ένα τίτλο.

q: Η ομάδα Β θα κερδίσει τουλάχιστο ένα τίτλο.

r: Η ομάδα C θα κερδίσει τουλάχιστο ένα τίτλο.

s: Η Α έχει πολλούς τραυματισμένους παίκτες.

t: Ο καλύτερος παίκτης της Β έχει αποβληθεί.

u: Βρέχει κατά την διάρκεια των αγώνων.

Γράψτε συμβολικά στη γλώσσα Γ τις παρακάτω προτάσεις:

α) Ακριβώς μία ομάδα θα κερδίσει ένα τίτλο.

β) Το πολύ δύο από τις ομάδες θα κερδίσουν τίτλους.

γ) Εφ' όσον δεν βρέξει κατά την διάρκεια των αγώνων, και ο καλύτερος παίκτης της Β δεν έχει αποβληθεί, η Β θα κερδίσει ένα τίτλο αν κάποια από τις Α ή C κερδίσει ένα τίτλο.

δ) Αν η Α έχει πολλούς τραυματισμένους παίκτες, θα κερδίσει ένα τίτλο μόνο αν καμμιά από τις άλλες ομάδες δεν κερδίσει και δεν βρέχει κατά την διάρκεια των αγώνων.

6) Πηγαίνοντας σε μιά πόλη φτάνετε σε ένα σημείο όπου ο δρόμος διχάζεται. Εκεί υπάρχει ένας κάτοικος που άλλοτε λέει αλήθεια και άλλοτε ψέμματα, και απαντάει σε μια μόνο ερώτηση και μόνο μ' ένα «ναί» ή μ' ένα «όχι». Τί ερώτηση πρέπει να του υποβάλλετε για να μάθετε ποιός δρόμος οδηγεί στη πόλη;

7) Τρεις ύποπτοι συλλαμβάνονται για κάποιο έγκλημα.

Ο A λέει: «Ο B το έκανε. Ο C είναι αθώος».

Ο B λέει: «Αν ο A είναι ένοχος τότε και ο C είναι ένοχος».
Ο C λέει: «Δεν το έκανα εγώ. Κάποιος από τους άλλους το έκανε».
Είναι οι προτάσεις, στοιχεία ικανοποιησίμου συνόλου; Υποθέτοντας ότι όλοι είναι αθώοι, ποιός λέει ψέμματα; Υποθέτοντας ότι κάθε πρόταση που είπε ο καθένας είναι αληθής, ποιός είναι αθώος και ποιός ένοχος;

8) Δείξτε ότι οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες:

α) $\big(\phi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)\big)$

β) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to \big((\neg\phi \to \psi) \to \phi\big)$

9) Ελέξτε αν οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες:

α) $\phi \to \big((\psi \to \chi) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)\big)\big)$

β) $(\neg\phi \to \neg\psi) \leftrightarrow \big((\neg\phi \to \psi) \to \phi\big)$

10) Αποδείξτε τους γενικευμένους κανόνες του De Morgan.

$$\models \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i\right) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} (\neg\phi_i)$$

$$\models \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i\right) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} (\neg\phi_i)$$

11) Δείξτε ότι $\left.\begin{array}{l}\models \phi \\ \models \phi \to \psi\end{array}\right\} \Longrightarrow\ \models \psi$

12) Δείξτε ότι:

$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \models \phi \iff\ \models \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n \to \phi \iff$

$\models \phi_1 \to \big(\phi_2 \to (\phi_3 \to \ldots (\phi_n \to \phi) \ldots\big)$

13) $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$, $\phi \in T(\Gamma)$. Δείξτε ότι

$\Sigma \models \phi$ ανν $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ όχι ικανοποιήσιμο.

3. Επάρκεια συνδέσμων

Οι πέντε σύνδεσμοι της γλώσσας Γ του προτασιακού λογισμού εκλέχτηκαν κατά τρόπο εμπειρικό, σαν οι πιο συχνά εμφανιζόμενοι στη διατύπωση των μαθηματικών προτάσεων. Μήπως υπάρχουν και άλλοι σύνδεσμοι που τους έχουμε παραλείψει; Ας θεωρήσουμε μια γλώσσα τώρα, που έχει για σύμβολα τις προτασιακές μεταβλητές, τις παρενθέσεις και μερικούς από τους πέντε συνδέσμους, ίσως μαζί με μερικούς άλλους και η οποία συντακτικά και σημασιολογικά μοιάζει με τη Γ. Είναι αυτή η καινούργια γλώσσα πλουσιότερη, ισοδύναμη· ή φτωχότερη από τη Γ; Θα δώσουμε απάντηση στο ερώτημα.

Ορισμός: Συνάρτηση Boole με k ($k \in N$) μεταβλητές λέγεται κάθε συνάρτηση $f : \{A, \Psi\}^K \rightarrow, \{A, \Psi\}$

Τους συνδέσμους $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ μπορούμε να τους θεωρήσουμε σαν συναρτήσεις Boole, που οι τιμές τους δίνονται από τους αντίστοιχους πίνακες αλήθειας. Π.χ.

$\rightarrow : \{A, \Psi\}^2 \rightarrow \{A, \Psi\}$ με

$\rightarrow (A, A) = A$, $\rightarrow (A, \Psi) = \Psi$, $\rightarrow (\Psi, A) = A$ και

$\rightarrow (\Psi, \Psi) = A$. Γενικά λοιπόν, μπορούμε να ορίσουμε σαν n-μελή σύνδεσμο στο Τ (Γ) κάθε απεικόνιση $f: [T(\Gamma)]^n \rightarrow T(\Gamma)$ που συνοδεύεται από ένα αληθοπίνακα για τις τιμές της $f(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ ή μια συνάρτηση G_f: $\{A, \Psi\}^n \rightarrow \{A, \Psi\}$ τέτοια ώστε για αποτίμηση υ να έχουμε $\bar{\upsilon}\big(f(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)\big) = G_f\big(\bar{\upsilon}(\phi_1), \bar{\upsilon}(\phi_2), \ldots, \bar{\upsilon}(\phi_n)\big)$

Είναι προφανές ότι σε κάθε προτασιακό τύπο με k διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχεί μια συνάρτηση Boole με k μεταβλητές. Το αντίστροφο ισχύει, όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα: Αν f μια συνάρτηση Boole με n μεταβλητές, $n \geqslant 1$, τότε υπάρχει προτασιακός τύπος φ στον οποίον εμφανίζονται οι προτασιακές μεταβλητές $p_1, p_2, \ldots, p_n$ τέτοιος ώστε για κάθε αποτίμηση υ να ισχύει:

$\bar{\upsilon}(\phi) = f\big(\upsilon(p_1), \upsilon(p_2), \ldots, \upsilon(p_n)\big)$, δηλαδή ο πίνακας αλήθειας του φ περιγράφει πλήρως την f.

Απόδειξη: 1) Πεδίον τιμών της $f = \{ \Psi \}$ Τότε παίρνουμε $\phi = (p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_2) \vee \ldots \vee (p_n \wedge \neg p_n)$.

2) Διαφορετικά, δηλαδή αν πεδίο τιμών της $f \neq \{ \Psi \}$, τότε υπάρχουν k σημεία του $\{A, \Psi\}^n$ στα οποία η f παίρνει την τιμή A, $k > 0$. Τότε παίρνουμε αυτά τα σημεία.

$(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$
$(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$

$$\text{Έστω } \alpha_{ij} = \begin{cases} p_j & \text{αν } x_{ij} = A \\ \urcorner\, p_j & \text{αν } x_{ij} = \Psi \end{cases}$$

Θέτουμε $\gamma_i = \alpha_{i1} \wedge \alpha_{i2} \wedge \ldots \wedge \alpha_{in}$ και $\phi = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \ldots \vee \gamma_k$

Ο ϕ είναι ο ζητούμενος τύπος. Πράγματι, έστω υ μια αποτίμηση. Αν $\upsilon(p_1) = x_{i1}, \ldots, \upsilon(p_n) = x_{in}$ για κάποιο i, τότε $\bar{\upsilon}(\phi) = A = f(\upsilon(p_1), \upsilon(p_2), \ldots, \upsilon(p_n))$. Αν πάλι $(\upsilon(p_1), \upsilon(p_2), \ldots \upsilon(p_n)) \neq (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$, τότε $f(\upsilon(p_1), \upsilon(p_2), \ldots, \upsilon(p_n)) = \Psi = \bar{\upsilon}(\phi)$.

Θα δείξουμε με ένα παράδειγμα πως βρίσκεται ο τύπος ϕ. Έστω $f: \{A, \Psi\}^3 \to \{A, \Psi\}$ τέτοια ώστε:

f (A, A, A) = Ψ	f (Ψ, A, A) = A
f (A, A, Ψ) = Ψ	f (Ψ, A, Ψ) = Ψ
f (A, Ψ, A) = A	f (Ψ, Ψ, A) = A
f (A, Ψ, Ψ) = Ψ	f (Ψ, Ψ, Ψ) = A

Προσδιορίζουμε κατ' αρχήν τα στοιχεία του $\{A, \Psi\}^3$ στα οποία η f αντιστοιχεί την τιμή A. Αυτά είναι τα: (A, Ψ, A), (Ψ, A, A), (Ψ, Ψ, A), (Ψ, Ψ, Ψ). Σε καθεμιά απ' αυτές τις τριάδες αντιστοιχούμε ένα προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι p_1, p_2, p_3 ως εξής: Αν το πρώτο στοιχείο της τριάδας είναι A τότε παίρνουμε την p_1, ενώ αν είναι Ψ παίρνουμε την $\urcorner\, p_1$. Όμοια για τα άλλα δύο στοιχεία της τριάδας και τελικά παίρνουμε την σύζευξη των τριών στοιχειωδών προτασιακών τύπων. Έτσι στην (A, Ψ, A) αντιστοιχεί ο τύπος $p_1 \wedge \urcorner\, p_2 \wedge p_3$. Η διάζευξη των προτασιακών τύπων που αντιστοιχούν στις τέσσερις τριάδες είναι ο προτασιακός τύπος

$(p_1 \wedge \urcorner\, p_2 \wedge p_3) \vee (\urcorner\, p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\urcorner\, p_1 \wedge \urcorner\, p_2 \wedge p_3) \vee (\urcorner\, p_1 \wedge \urcorner\, p_2 \wedge \urcorner\, p_3)$ του οποίου ο πίνακας αλήθειας περιγράφει πλήρως την f. Αν ο πίνακας αλήθειας του $\phi \in T(\Gamma)$ περιγράφει πλήρως τη συνάρτηση

Boole f, λέμε ότι ο ϕ αντιπροσωπεύει την f. Συνήθως υπάρχουν περισσότεροι από ένας προτασιακοί τύποι που αντιπροσωπεύουν την ίδια συνάρτηση f. Συγκεκριμένα αν ο ϕ αντιπροσωπεύει την f και κάθε άλλος ψ με $\phi \models \dashv \psi$, αντιπροσωπεύει την f.

Ορισμός: Θα λέμε ότι ο $\phi \in T(\Gamma)$ είναι σε *κανονική διαζευκτική μορφή* αν είναι διάζευξη συζεύξεων προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων προτασιακών μεταβλητών δηλαδή αν

$\phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee, \phi_n$ όπου $\phi_i = \psi_{i1} \wedge \psi_{i2} \wedge \ldots \wedge \psi_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και ψ_{ij} είναι μια προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής.

Πρόταση: Κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος μ' ένα προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή.

Απόδειξη: Έστω $\phi \in T(\Gamma)$. Τότε υπάρχει συνάρτηση Boole f που περιγράφεται πλήρως από τον ϕ. Σ' αυτή τη συνάρτηση Boole f αντιστοιχεί, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, ένας τύπος ϕ^* σε κανονική διαζευκτική μορφή που περιγράφει πλήρως την f. Θα έχουμε προφανώς $\phi \models \dashv \phi^*$.

Ας πάρουμε τώρα τους πέντε συνδέσμους και μερικούς άλλους και ας αναπτύξουμε μια νέα γλώσσα Γ', αφού δώσουμε ορισμό για τους προτασιακούς τύπους της Γ' κ.τ.λ. Έστω ϕ' ένας προτασιακός τύπος της νέας γλώσσας Γ'. Ο πίνακας αλήθειας του ϕ' περιγράφεται πλήρως από μια συνάρτηση Boole f. Σύμφωνα όμως με το θεώρημα υπάρχει τύπος ψ της Γ που αντιπροσωπεύει την f. Τότε όμως θα έχουμε $\phi' \models \dashv \psi$. Άρα η Γ' είναι σημασιολογικά ισοδύναμη με την Γ.

Αν κρατήσουμε μόνο τους $\neg$, $\vee$, $\wedge$, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, έχουμε την ίδια γλώσσα.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$. Το A είναι *επαρκές* αν κάθε προτασιακός τύπος $\phi \in T(\Gamma)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος μ' ένα τύπο που περιέχει μόνο συνδέσμους που ανήκουν στο A.

Το $\{\neg, \vee, \wedge\}$ είναι επαρκές.

Πρόταση: Το σύνολο $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκές.

Απόδειξη: Έστω $\phi \in T(\Gamma)$. Βάσει του θεωρήματος ή μάλλον της προηγούμενης πρότασης, υπάρχει ϕ^* στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg$, $\vee$, $\wedge$ τέτοιος ώστε $\phi \models \dashv \phi^*$. Αν ο ϕ^* δεν περιέχει διαζεύξεις τότε δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα. Αν περιέχει διαζεύξεις τότε για κάθε διάζευξη του ϕ^* εφαρμόζουμε την

$\psi \vee \chi \models\,\dashv \neg ((\neg\psi) \wedge (\neg \chi))$. Δηλαδή, αν $\phi^* = \phi_1 \vee \phi_2$ όπου $\phi_1 \models\,\dashv \phi_1^*$, $\phi_2 \models\,\dashv \phi_2^*$ και ϕ_1^*, ϕ_2^* περιέχουν μόνο $\neg$ και $\wedge$, τότε $\phi \models\,\dashv \phi^* \models\,\dashv \phi_1 \vee \phi_2 \models\,\dashv \phi_1^* \vee \phi_2^* \models\,\dashv \neg (\neg\phi_1^* \wedge \neg \phi_2^*)$. Άρα

$\phi \models\,\dashv \neg (\neg \phi_1^* \wedge \neg \phi_2^*)$ και ο τύπος $\neg (\neg \phi_1^* \wedge \neg \phi_2^*)$ περιέχει μόνο $\neg$ και $\wedge$.

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την αρχή της επαγωγής στο Τ(Γ), τροποποιημένη, δηλαδή επαγωγή στο Τ'(Γ) όπου Τ'(Γ) το σύνολο των τύπων στους οποίους εμφανίζονται μόνο οι $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Θα μπορούσαμε να πάρουμε μόνο τους συνδέσμους $\neg$, $\wedge$ από την αρχή και να αναπτύξουμε την γλώσσα του προτασιακού λογισμού. Αν έχουμε ένα επαρκές σύνολο συνδέσμων Α, για να βρούμε ένα προτασιακό τύπο που να περιέχει συνδέσμους μόνο από το Α και να είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με κάποιον $\phi \in T(\Gamma)$, χρησιμοποιούμε ταυτολογίες.

Ας δείξουμε ότι το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές.

Για $\phi \in T(\Gamma)$, πρώτα γνωρίζουμε ότι υπάρχει ϕ^* στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg$, $\vee$, $\wedge$, τέτοιος ώστε $\phi \models\,\dashv \phi^*$.

Αν $\phi = \neg \psi$ και $\psi \models\,\dashv \psi^*$ όπου ο ψ^* περιέχει μόνο $\neg$, $\rightarrow$ τότε $\phi = \neg \psi \models\,\dashv \neg \psi^*$ και ο $\neg \psi^*$ περιέχει μόνο $\neg$, $\rightarrow$.

Αν $\phi = p$ προτασιακή μεταβλητή τότε $\phi \models\,\dashv p$ και η p περιέψει μόνο $\neg$, $\rightarrow$ (κατά κενό τρόπο).

Αν $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ και $\phi_1 \models\,\dashv \phi_1^*$, $\phi_2 \models\,\dashv \phi_2^*$ όπου ϕ_1^* και ϕ_2^* περιέχουν μόνο $\neg$ και $\rightarrow$, τότε

$\phi = \phi_1 \vee \phi_2 \models\,\dashv \phi_1^* \vee \phi_2^* \models\,\dashv \neg \phi_1^* \rightarrow \phi_2^*$, δηλαδή

$\phi \models\,\dashv \neg \phi_1^* \rightarrow \phi_2^*$ και ο $\neg \phi_1^* \rightarrow \phi_2^*$ περιέχει μόνο $\neg$ και $\rightarrow$.

Αν $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ και $\phi_1 \models\,\dashv \phi_1^*$, $\phi_2 \models\,\dashv \phi_2^*$ όπου ϕ_1^* και ϕ_2^* περιέχουν μόνο $\neg$ και $\rightarrow$, τότε

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \models\,\dashv \phi_1^* \wedge \phi_2^* \models\,\dashv \neg (\neg \phi_1^* \vee \neg \phi_2^*) \models\,\dashv \neg (\phi_1^* \rightarrow \neg \phi_2^*)$, δηλαδή

$\phi \models\,\dashv \neg (\phi_1^* \rightarrow \neg \phi_2^*)$ και ο $\neg (\phi_1^* \rightarrow \neg \phi_2^*)$ περιέχει μόνο $\neg$ και $\rightarrow$.

Με βάση την επαγωγή στο Τ(Γ) τροποποιημένη, έπεται ότι για κάθε $\phi \in T(\Gamma)$ υπάρχει ϕ^* που περιέχει μόνο $\neg$ και $\rightarrow$, τέτοιος ώστε $\phi \models\, \dashv \phi^*$. Άρα το $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές.

Το να δείξουμε ότι ένα σύνολο συνδέσμων Α δεν είναι επαρκές είναι πιο δύσκολο. Συνήθως δείχνουμε ότι ο πίνακας αλήθειας κάθε προτασιακού τύπου που περιέχει συνδέσμους μόνο από το Α έχει κάποια ιδιομορφία. Κατόπιν βρίσκουμε ένα προτασιακό τύπο που περιέχει σύνδεσμο όχι στο Α και του οποίου ο πίνακας δεν έχει την ιδιομορφία.

Παράδειγμα: Το σύνολο $\{\wedge, \rightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.

Αρκεί να δειχθεί ότι κάποιος από τους άλλους συνδέσμους δεν μπορεί να αναχθεί στους $\wedge$, $\rightarrow$. Ας πάρουμε κάποια προτασιακή μεταβλητή p και ας θεωρήσουμε τον τύπο $\neg p$. Αν το $\{\wedge, \rightarrow\}$ ήταν επαρκές θα υπήρχε ϕ που να περιέχει τα p, $\wedge$, $\rightarrow$ και να είναι ισοδύναμος με την $\neg p$. Δηλαδή ο ϕ θα ήταν ψευδής όταν η p είναι αληθής. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε πρόταση ϕ που περιέχει το p και τους $\wedge$, $\rightarrow$ ισχύει

$\upsilon(p) = A \Longrightarrow \bar{\upsilon}(\phi) = A$. Με επαγωγή στους τύπους. Προφανές αν ϕ προτασιακή μεταβλητή. Έστω ότι ισχύει για ϕ και ψ δηλαδή

$\upsilon(p) = A \Longrightarrow \bar{\upsilon}(\phi) = \bar{\upsilon}(\psi) = A$.

Τότε όμως, $\bar{\upsilon}(\phi \wedge \psi) = \bar{\upsilon}(\phi \rightarrow \psi) = A$.

Άρα, λοιπόν η άρνηση δεν μπορεί να εκφρασθεί μέσω των $\wedge$, $\rightarrow$ και άρα το $\{\wedge, \rightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.

Υπάρχουν και άλλοι διθέσιοι σύνδεσμοι. Ο καθένας από αυτούς, περιγράφεται πλήρως από μια συνάρτηση Boole με δύο μεταβλητές. Τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν 16.

Υπάρχουν δυο από αυτούς τους διθέσιους συνδέσμους, που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Οι πίνακες αλήθειας των δίνονται παρακάτω:

$\bar{\upsilon}(\phi)$	$\bar{\upsilon}(\psi)$	$\bar{\upsilon}(\phi \downarrow \psi)$	$\bar{\upsilon}(\phi \vert \psi)$	$\bar{\upsilon}(\neg(\phi \vee \psi))$	$\bar{\upsilon}(\neg(\phi \wedge \psi))$
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Ασκήσεις

Έστω f η συνάρτηση Boole που δίνεται ως εξής:

f(A,A,A) = Ψ	f(Ψ,A,A) = A
f(A,A,Ψ) = Ψ	f(Ψ,A,Ψ) = Ψ
f(A,Ψ,A) = A	f(Ψ,Ψ,A) = A
f(A,Ψ,Ψ) = Ψ	f(Ψ,Ψ,Ψ) = Ψ

Βρείτε προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή που αντιπροσωπεύει την f. Υπάρχει σύντομος τέτοιος τύπος;

2) Αποδείξτε ότι τα $\{\overset{1/}{\to}\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{|\}$ είναι επαρκή σύνολα συνδέσμων. $\{\downarrow\}$

3) Δείξτε ότι τα $\{\leftrightarrow\}$, $\{\wedge\}$ δεν είναι επαρκή.

4) Φέρτε τους παρακάτω προτασιακούς τύπους σε κανονική διαζευκτική μορφή:

   α) $\neg(p_1 \to p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$

   β) $p_1 \to \big((p_2 \wedge \neg p_1) \vee p_3\big)$

5) Ο σύνδεσμος $\underline{\vee}$ ορίζεται ως εξής: Ο $\phi \,\underline{\vee}\, \psi$ είναι αληθής αν ακριβώς ένας από τους φ, ψ είναι αληθής.

   α) Βρείτε τον πίνακα αλήθειας του $\underline{\vee}$.

   β) Δείξτε ότι $\phi \,\underline{\vee}\, \psi = \neg\phi \,\underline{\vee}\, \neg\psi$.

   γ) Το σύνολο $\{\neg, \underline{\vee}\}$ δεν είναι επαρκές.

6) Αν $\phi = (p_1 \to \neg p_2) \wedge (p_2 \to p_1)$ και $\psi = \neg p_3 \to (p_2 \to p_3)$ δείξτε ότι $\phi \models \psi$. Μετά δείξτε ότι υπάρχει $\sigma \in T(\Gamma)$ τέτοιος ώστε $\phi \models \sigma \models \psi$, και βρείτε τον σ.

φ δεν είναι αντίφαση, φ δεν είναι ταυτολογία

4. Η Συντακτική Προσέγγιση

Αξιωματικοποίηση του Προτασιακού Λογισμού. Πληρότητα.

Έχουμε δει, ότι για να ελέγξουμε αν $\phi \models \psi$ για $\phi, \psi \in T(\Gamma)$, χρησιμοποιούμε τους πίνακες αλήθειας. Στα Μαθηματικά όμως δουλεύουμε με *αποδείξεις*. Δηλαδή αποδεικνύουμε ορισμένες προτάσεις από άλλες προτάσεις αξιώματα, με τη βοήθεια προκαθορισμένων κανόνων (αποδεικτικών).

Αυτή η προσέγγιση (μέθοδος) είναι η συντακτική και συνίσταται στην ύπαρξη:

1) μιας γλώσσας,
2) κανόνων σχηματισμού προτάσεων της γλώσσας,
3) αξιωμάτων,
4) αποδεικτικών κανόνων, που οδηγούν μηχανικά από ορισμένες προτάσεις σε άλλες, με κριτήριο την μορφή τους και μόνο.

Δηλαδή, πρέπει να έχουμε:

1) ένα σύνολο συμβόλων X.
2) ένα σύνολο T με στοιχεία πεπερασμένες ακολουθίες στοιχείων του X.
3) ένα υποσύνολο A του T και
4) ένα σύνολο K με στοιχεία διμελείς σχέσεις ανάμεσα σε υποσύνολα του T και στοιχεία του T.

Για τον προτασιακό Λογισμό έχουμε:

1) η γλώσσα του προτασιακού λογισμού αποτελείται από:
   α) προτασιακές μεταβλητές p_i, $i \in N$.
   β) τους συνδέσμους $\neg$, $\rightarrow$.
   γ) παρενθέσεις.
2) Οι προτασιακοί τύποι (προτάσεις) είναι:
   α) Τα p_i είναι προτασιακοί τύποι.
   β) Αν τα ϕ, ψ είναι προτασιακοί τύποι, τότε και τα $\neg\phi$, $\phi \rightarrow \psi$ είναι προτασιακοί τύποι.
   γ) δεν υπάρχουν άλλοι τύποι πέρα απ' αυτούς που μας δίνουν τα α), β).

   (Θα χρησιμοποιούμε και τους άλλους συνδέσμους αλλά σαν συντομογραφίες.
   i) $\phi \wedge \psi$ αντί $\neg(\phi \rightarrow \neg\psi)$
   ii) $\phi \vee \psi$ αντί $\neg\phi \rightarrow \psi$
   iii) $\phi \leftrightarrow \psi$ αντί $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$)
3) Τα αξιώματα, π.χ. της ευκλείδειας γεωμετρίας, είναι προτάσεις που ισχύουν σε όλους τους Ευκλείδειους χώρους. Γενικά, τα αξιώματα μιας θεωρίας ισχύουν σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας. Στην περίπτωση του προτασιακού λογισμού τα αξιώματά μας θα πρέπει να είναι αληθείς προτάσεις ως προς όλες τις αποτιμήσεις,

συνεπώς θα πρέπει να είναι ταυτολογίες. Η επιλογή των συγκεκριμένων ταυτολογιών για αξιώματα γίνεται με πρακτικά κριτήρια (πόσο μας εξυπηρετούν να εξάγουμε από τα αξιώματα άλλους σημαντικούς τύπους). Το σύνολο των αξιωμάτων πρέπει να είναι μικρό και βολικό.

Τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού είναι

(ΑΣ1) $\phi \to (\psi \to \phi)$
(ΑΣ2) $\big(\phi \to (\psi \to \sigma)\big) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \sigma)\big)$
(ΑΣ3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to \big((\neg\phi \to \psi) \to \phi\big)$

Παρατηρούμε ότι τα ΑΣ1, ΑΣ2, ΑΣ3 *δεν* είναι αξιώματα αλλά αξιωματικά σχήματα, αφού οι ϕ, ψ, σ δεν είναι συγκεκριμένοι προτασιακοί τύποι, αλλά μεταβλητές που τρέχουν στο Τ(Γ). Δηλαδή τα ΑΣ1, ΑΣ2 και ΑΣ3 είναι αξιώματα για κάθε ϕ, ψ, $\sigma \in$ Τ (Γ). Το κάθε σχήμα παριστά μια απειρία αξιωμάτων. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε αν ο $\phi \in$ Τ(Γ) είναι αξιώμα ή όχι.

4) Ο μοναδικός αποδεικτικός κανόνας του προτασιακού λογισμού, δεχόμαστε ότι είναι ο Modus Ponens (M.P.) και λέει, από τους ϕ και $\phi \to \psi$ παράγεται ο ψ, δηλαδή·

$$\frac{\phi,\ \phi \to \psi}{\psi}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω παραγωγή του ψ είναι τελείως μηχανική π.χ. από τους $(\neg\phi \to \psi) \to \neg(\phi \wedge \psi)$, $\neg\phi \to \psi$ παράγεται ο $\neg(\phi \wedge \psi)$, και από τους $\neg\neg\phi \to (\phi \to \psi)$, $\neg\neg\phi$ παράγεται ο $\phi \to \psi$.

Ορισμός: Έστω $\Sigma \subseteq$ Τ (Γ) και $\phi \in$ Τ (Γ). *Τυπική απόδειξη του ϕ από το Σ* λέγεται μία πεπερασμένη ακολουθία προτασιακών τύπων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ τέτοια ώστε, $\phi_n = \phi$ και κάθε ϕ_i είναι:

α) ή αξίωμα

β) ή προτασιακός τύπος του Σ

γ) ή παράγεται με τον Μ.Ρ. απο δύο προηγούμενους προτασιακούς τύπους της ακολουθίας, δηλαδή υπάρχουν $j, k < i$ τέτοια ώστε $\phi_j = \phi_k \to \phi_i$.

Λέμε ότι ο ϕ παράγεται ή αποδεικνύεται από το Σ ή ότι το Σ τυπικά αποδεικνύει τον ϕ, και γράφουμε $\Sigma \vdash \phi$, αν υπάρχει μία τυπική απόδειξη του ϕ από το Σ. Αν $\Sigma = \{\psi\}$ τότε γράφουμε $\psi \vdash \phi$. Αν $\Sigma = \emptyset$, δηλαδή αν ο ϕ παράγεται μόνο από τα αξιώματα, θα λέμε ότι ο ϕ είναι *τυπικό θεώρημα* και θα γράφουμε $\vdash \phi$.

Πρόταση:

i) Αν $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \subseteq T$ τότε $T \vdash \phi$. Επίσης $\vdash \phi \Longrightarrow T \vdash \phi$.

ii) Αν $B \vdash \phi$ τότε $B_o \vdash \phi$ για κάποιο πεπερασμένο $B_o \subseteq B$.

iii) Αν $B \vdash \phi$ και $B \vdash \phi \rightarrow \psi$ τότε $B \vdash \psi$.

Απόδειξη:

i) Αν $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ είναι τυπική απόδειξη του ϕ από το Σ, προφανώς $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ είναι και τυπική απόδειξη του ϕ από το T.

ii) Αν $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ είναι τυπική απόδειξη του ϕ από το B και $B_o = B \cap \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ τότε η $\phi_1, \phi_2,..., \phi_n$ είναι τυπική απόδειξη του ϕ από το B_o.

Αυτό μας δείχνει ότι οι τυπικές αποδείξεις συνδέονται με την έννοια του πεπερασμένου. Δηλαδή ακόμα και αν το B είναι άπειρο, μόνο πεπερασμένες το πλήθος υποθέσεις (στοιχεία του B) θα χρησιμοποιήσω σε μία τυπική απόδειξη. Οι τυπικές αποδείξεις έχουν πεπερασμένο μήκος.

iii) Αν $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ είναι τυπική απόδειξη του ϕ και $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k$ είναι τυπική απόδειξη του $\phi \rightarrow \psi$, τότε η $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_k, \psi$ είναι τυπική απόδειξη του ψ από το B.

Αξίζει να τονισθεί η διαφορά μεταξύ τυπικών θεωρημάτων και θεωρημάτων. Ένα τυπικό θεώρημα είναι έκφραση της τυπικής μας γλώσσας, ενώ ένα θεώρημα είναι έκφραση της μεταγλώσσας. Επίσης διαφορά υπάρχει μεταξύ τυπικής απόδειξης και απόδειξης.

Όπως αναφέραμε παραπάνω το μήκος κάθε τυπικής απόδειξης είναι πεπερασμένο. Αν $\Sigma \vdash \phi$ τότε υπάρχει μία τυπική απόδειξη του ϕ από το Σ. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι οπωσδήποτε υπάρχει *μόνο μία*. Άρα, αν $\Sigma \vdash \phi$ δεν σημαίνει ότι θα έχουμε μονοσήμαντη τυπική απόδειξη του ϕ από το Σ.

Στα αξιώματα χρησιμοποιούμε μόνο τους συνδέσμους $\neg$, $\rightarrow$ γιατί όπως ξέρουμε το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές.

Παραδείγματα: α) $\vdash \phi \to \phi$.

Έχουμε

1. $\big(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)\big) \to \big((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)\big)$

ΑΣ2 γιά $\phi = \phi$, $\psi = (\phi \to \phi)$, $\sigma = \phi$

2. $\phi \to \big((\phi \to \phi) \to \phi \big)$ ΑΣ1 για $\phi = \phi$ και $\psi = \phi \to \phi$
3. $\big(\phi \to (\phi \to \phi) \big) \to (\phi \to \phi)$ 1, 2, Μ.Ρ.
4. $\phi \to (\phi \to \phi)$ ΑΣ1 για $\phi = \phi$, $\psi = \phi$
5. $\phi \to \phi$ 3, 4, Μ.Ρ.

Το υπόδειγμα που ακολουθούμε, είναι ότι δίπλα από κάθε προτασιακό τύπο γράφουμε πως προκύπτει. Η τυπική απόδειξη είναι η ακολουθία των προτασιακών τύπων 1-5. Αν θέλουμε να δείξουμε $\Sigma \vdash \phi$, ξεκινάμε με απαρίθμηση των *υποθέσεων*, δηλαδή στοιχείων του Σ.

β) $\{\phi \to \psi, \psi \to \sigma\} \vdash \phi \to \sigma$

1. $\phi \to \psi$ υπόθεση
2. $\psi \to \sigma$ υπόθεση
3. $(\psi \to \sigma) \to \big(\phi \to (\psi \to \sigma) \big)$, ΑΣ1 για $\phi = \psi \to \sigma$ και $\psi = \phi$
4. $\phi \to (\psi \to \sigma)$, 2, 3, Μ.Ρ.
5. $\big(\phi \to (\psi \to \sigma)\big) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \sigma) \big)$ ΑΣ2
6. $(\phi \to \psi) \to (\phi \to \sigma)$ 4, 5, Μ.Ρ.
7. $\phi \to \sigma$ 1, 6, Μ.Ρ.

γ) $\{\phi \to (\psi \to \sigma), \psi \} \vdash \phi \to \sigma$

1. $\phi \to (\psi \to \sigma)$ υπόθεση
2. ψ υπόθεση
3. $\big(\phi \to (\psi \to \sigma) \big) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \sigma) \big)$ ΑΣ2
4. $(\phi \to \psi) \to (\phi \to \sigma)$ 1, 3, Μ.Ρ.
5. $\psi \to (\phi \to \psi)$ ΑΣ1
6. $\phi \to \psi$ 2, 5, Μ.Ρ.
7. $\phi \to \sigma$ 4, 6, Μ.Ρ.

δ) $\neg\neg \phi \vdash \phi$

1. $\neg\neg \phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$ ΑΣ1 για $\phi = \neg\neg\phi$ και $\psi = \neg\phi$)
2. $(\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to \big((\neg\phi \to \neg\phi) \to \phi\big)$ ΑΣ3 για $\phi = \phi$ και $\psi = \neg\phi$
3. $\neg\phi \to \neg\phi$ από το *α)* παραπάνω
4. $\neg\neg\phi \to \big((\neg\phi \to \neg\phi) \to \phi\big)$ *β)*, 1, 2
5. $\neg\neg\phi \to \phi$ *γ)* 3, 4.

Η κατασκευή μιας τυπικής απόδειξης δεν είναι εύκολη δουλειά. Θα αποδείξουμε ένα θεώρημα που μας διευκολύνει. Για να δείξουμε ότι $\Sigma \vdash \phi$ πολλές φορές αρκεί να δείξουμε ότι μια τυπική απόδειξη υπάρχει, του ϕ από το Σ, αντί να κατασκευάσουμε αναλυτικά τα βήματα της τυπικής απόδειξης.

Θεώρημα απαγωγής: Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma)$ και $\phi, \psi \in T(\Gamma)$ $T \cup \{\phi\} \vdash \psi \Longleftrightarrow T \vdash \phi \to \psi$. Για $T = \emptyset$ έχουμε $\phi \vdash \psi \Longleftrightarrow \vdash \phi \to \psi$.

Απόδειξη: ($\Longleftarrow$) Έστω $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n$ μια τυπική απόδειξη του $\phi \to \psi$ από το T. Έχουμε τότε $\phi_n = \phi \to \psi$. Αν θέσουμε $\phi_{n+1} = \phi$ και $\phi_{n+2} = \psi$, τότε προφανώς η ακολουθία $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}, \phi_{n+2}$ είναι μια τυπική απόδειξη του ψ από το $T \cup \{\phi\}$

($\Longrightarrow$) Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ μια τυπική απόδειξη του ψ από το $T \cup \{\phi\}$. Τότε $\phi_n = \psi$. Θα δείξουμε ότι $T \vdash \phi \to \phi_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και άρα $T \vdash \phi \to \psi$. Αυτό θα γίνει με επαγωγή στο i. Το ϕ_1 είναι αξίωμα ή $\phi_1 \in T$ ή $\phi_1 = \phi$. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} & T \vdash \phi_1 \\ \vdash \phi_1 \to (\phi \to \phi_1) & \Longrightarrow T \vdash \phi_1 \to (\phi \to \phi_1), \qquad \text{ΑΣ1} \end{array}\right\} \Longrightarrow T \vdash \phi \to \phi_1$$

Αν $\phi_1 = \phi$ τότε $\vdash \phi_1 \to \phi_1 \Longrightarrow \vdash \phi \to \phi_1 \Longrightarrow T \vdash \phi \to \phi_1$. Έστω ότι $T \vdash \phi \to \phi_k$ για κάθε $\kappa < i$. Το ϕ_i είναι αξίωμα ή $\phi_i \in T$ ή $\phi = \phi_i$, ή υπάρχουν $j, m < i$ τέτοια ώστε $\phi_j = \phi_m \to \phi_i$. Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις κάνουμε ότι και παραπάνω στο βασικό βήμα της επαγωγής. Στην τελευταία περίπτωση αφού $j, m < i$ από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $T \vdash \phi \to (\phi_m \to \phi_i)$ και $T \vdash \phi \to \phi_m$. Θα έχουμε λοιπόν μια τυπική απόδειξη του $\phi \to (\phi_m \to \phi_i)$ από το T, έστω την $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\lambda$ και μια τυπική απόδειξη του $\phi \to \phi_m$ από το T έστω την $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mu$. Κατασκευάζουμε τώρα μια τυπική απόδειξη από το T.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \psi_1 \\ 2.\ \psi_2 \\ .\quad . \\ .\quad . \\ .\quad . \\ .\quad . \\ \lambda.\ \psi_\lambda = \phi \to (\phi_m \to \phi_i) \end{array}\right\}\ \text{τυπική απόδειξη από το T}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda+1.\ \sigma_1 \\ \lambda+2.\ \sigma_2 \\ .\quad . \\ .\quad . \\ .\quad . \\ .\quad . \\ \lambda+\mu.\ \sigma_\mu = \phi \to \phi_m \end{array}\right\}\ \text{τυπική απόδειξη από το T}$$

$\lambda + \mu + 1.\ \big(\phi \to (\phi_m \to \phi_i)\big) \to \big((\phi \to \phi_m) \to (\phi \to \phi_i)\big)$ ΑΣ2

$\lambda + \mu + 2.\ (\phi \to \phi_m) \to (\phi \to \phi_i)$ $\qquad \lambda, \lambda + \mu + 1$, M.P.

$\lambda + \mu + 3.\ \phi \to \phi_i$ $\qquad \lambda + \mu, \lambda + \mu + 2$, MP

Συνεπώς $T \vdash \phi \to \phi_i$. Επομένως με βάση την αρχή της επαγωγής στο N, $T \vdash \phi \to \phi_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και άρα $T \vdash \phi \to \phi_n$ ή $T \vdash \phi \to \psi$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απαγωγής θα δείξουμε:

ότι ε) $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$, ζ) $\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$. Για το ε) αρκεί να δείξουμε $\phi \vdash \neg\neg\phi$.

1. ϕ υπόθεση
2. $\phi \to (\neg\neg\neg\phi \to \phi)$ ΑΣ1
3. $\neg\neg\neg\phi \to \phi$ 1, 2, MP
4. $\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi$ από το δ) προηγουμένως
5. $(\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi) \to \big((\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi\big)$ ΑΣ3 για $\phi = \neg\neg\phi$ και $\psi = \phi$
6. $(\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi$ 4, 5, MP
7. $\neg\neg\phi$ 3, 6 MP.

Για το ζ) αρκεί να δείξουμε $\phi \to \psi \vdash \neg \psi \to \neg \phi$

1. $\phi \to \psi$ υπόθεση
2. $\neg\neg \phi \to \phi$ από το δ)
3. $\psi \to \neg\neg \psi$ από το ε).
4. $\neg\neg \phi \to \neg\neg \psi$ από το θ) για 1, 2, 3.
5. $(\neg\neg \phi \to \neg\neg \psi) \to ((\neg\neg \phi \to \neg \psi) \to \neg \phi)$ ΑΣ3 για $\phi = \neg \phi$, $\psi = \neg \psi$.
6. $(\neg\neg \phi \to \neg \psi) \to \neg \phi$ 4, 5, MP
7. $\neg \psi \to (\neg\neg \phi \to \neg \psi)$ ΑΣ1
8. $\neg \psi \to \neg \phi$ από θ) για 6,7.

Ορισμός: Ένα σύνολο $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$ λέγεται *συνεπές* (μή αντιφατικό) αν δεν υπάρχει προτασιακός τύπος $\phi \in T(\Gamma)$ τέτοιος ώστε $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \vdash \neg \phi$. Διαφορετικά το Σ λέγεται *ασυνεπές* (αντιφατικό).

Η συνέπεια είναι η πιο στοιχειώδης ιδιότητα για ένα σύνολο (μή τετριμμένο) προτασιακών τύπων. Από αντιφατικό σύνολο, όλα μπορούν να αποδειχθούν.

Πρόταση: Αν $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$ και Σ ασυνεπές τότε $\Sigma \vdash \psi$ για κάθε $\psi \in T(\Gamma)$

Απόδειξη: Έστω Σ ασυνεπές και $\phi \in T(\Gamma)$ τέτοιος ώστε $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \vdash \neg \phi$. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{ll} \vdash \phi \to (\neg \psi \to \phi) & \text{ΑΣ1} \\ \vdash (\neg \psi \to \phi) \to (\neg \phi \to \neg\neg \psi) & \text{από το ζ)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \vdash \phi \to (\neg \phi \to \neg\neg \psi)$ από το θ). Άρα,

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash \phi \\ \Sigma \vdash \neg \phi \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Sigma \\ \text{ασυνεπές} \end{array} \\ \Sigma \vdash \phi \to \quad (\neg\phi \to \neg\neg\psi) \end{array}\right\} \Longrightarrow \Sigma \vdash \neg\neg \psi \text{ εφαρμογή δύο φορές Μ.Ρ.}$$

Ξέρουμε όμως ότι $\vdash \neg\neg\psi \to \psi$ από το δ). Συνεπώς

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash \neg\neg\psi \\ \Sigma \vdash \neg\neg\psi \to \psi \end{array}\right\} \Longrightarrow \Sigma \vdash \psi \text{ και αυτό, για κάθε}$$

$\psi \in T(\Gamma)$.

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με τα θεωρήματα της εγκυρότητας και πληρότητας. Αυτά τα θεωρήματα μας λένε ότι η σημασιολογική προσέγγιση και η συντακτική προσέγγιση είναι ισοδύναμες, στον προτασιακό λογισμό. Συγκεκριμένα, θα δούμε ότι το να συμπεράνουμε προτασιακό τύπο από άλλους συντακτικά και σημασιολογικά είναι το ίδιο πράγμα. Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι τα αξιώματα επιλέχθηκαν σωστά.

Θεώρημα εγκυρότητας: Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$ και $\phi \in T(\Gamma)$.

α) $\Sigma \vdash \phi \Longrightarrow \Sigma \models \phi$

β) Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε είναι συνεπές.

Το θεώρημα εγκυρότητας είναι ή το α) ή το β). Αποδεικνύεται ότι τα α) και β) είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη του α). Έστω $\Sigma \vdash \phi$. Τότε υπάρχει τυπική απόδειξη του ϕ από το Σ. Έστω $\phi_1, \ldots, \phi_n$ μία τέτοια τυπική απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\Sigma \models \phi_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ άρα και $\Sigma \models \phi$ αφού $\phi_n = \phi$. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο i. Ο ϕ_1 είναι αξίωμα ή $\phi_1 \in \Sigma$. Αν ϕ_1 αξίωμα τότε ϕ_1 ταυτολογία, οπότε $\Sigma \models \phi_1$, αν $\phi_1 \in \Sigma$ τότε πάλι $\Sigma \models \phi_1$. Έστω $\Sigma \models \phi_\kappa$ για κάθε $\kappa < i$. Αν ο ϕ_i είναι αξίωμα ή $\phi_i \in \Sigma$, τότε όπως προηγούμενα $\Sigma \models \phi_i$. Διαφορετικά, υπάρχουν $j, m < i$ τέτοια ώστε $\phi_j = \phi_m \rightarrow \phi_i$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \models \phi_m \rightarrow \phi_i \\ \Sigma \models \phi_m \end{array}\right\}. \text{ Άρα } \Sigma \models \phi_i. \text{ Επομένως } \Sigma \models \phi.$$

Αν $\Sigma = \emptyset$, έχουμε $\vdash \phi \Longrightarrow \models \phi$, δηλαδή κάθε τυπικό θεώρημα είναι ταυτολογία. Στην παραπάνω απόδειξη δεχτήκαμε ότι κάθε αξίωμα είναι ταυτολογία και ότι ο Μ.Ρ. οδηγεί από ταυτολογίες σε ταυτολογίες.

Αναφέρουμε τώρα το θεώρημα της πληρότητας χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα της πληρότητας: Αν $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$, $\phi \in T(\Gamma)$, τότε

α) $\Sigma \models \phi \Longrightarrow \Sigma \vdash \phi$

β) Σ συνεπές $\Longrightarrow$ Σ ικανοποιήσιμο.

(Αν $\Sigma = \emptyset$, τότε $\models \phi \Longrightarrow \vdash \phi$).

Το θεώρημα της πληρότητας του προτασιακού λογισμού είναι ή το α) ή το β). Αποδεικνύεται ότι τα α) και β) είναι ισοδύναμα. Συνδυάζοντας τα θεωρήματα πληρότητας και εγκυρότητας έχουμε:

Θεώρημα: α) $\Sigma \models \phi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \phi$

β) Σ ικανοποιήσιμο $\Longleftrightarrow$ Σ συνεπές

για $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$ και $\phi \in T(\Gamma)$.

Αν $\Sigma = \emptyset$ τότε έχουμε

$\models \phi \iff \vdash \phi$ δηλαδή κάθε ταυτολογία είναι τυπικό θεώρημα και αντίστροφα.

Με βάση το τελευταίο θεώρημα μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα της συμπάγειας που έχουμε αναφέρει. Έστω Σ άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων, τέτοιο που κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο, αλλά το ίδιο το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Τότε $\Sigma \models p_1 \wedge \neg p_1$ και από το θεώρημα της πληρότητας θα έχουμε $\Sigma \vdash p_1 \wedge \neg p_1$, άρα και $\Sigma' \vdash p_1 \wedge \neg p_1$ για κάποιο πεπερασμένο $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Τώρα από το θεώρημα εγκυρότητας θα ισχύει $\Sigma' \models p_1 \wedge \neg p_1$ που είναι άτοπο επειδή το Σ' (σαν πεπερασμένο υποσύνολο του Σ) είναι ικανοποιήσιμο. (Αν **B** ικανοποιήσιμο τότε δεν μπορούμε να έχουμε $\mathbf{B} \models p \wedge \neg p$).

Με βάση το τελευταίο θεώρημα, ξέρουμε ότι υπάρχει αλγόριθμος για να αποφασίζουμε αν ο φ αποδεικνύεται τυπικά από ένα πεπερασμένο $T \subseteq T(\Gamma)$ ή όχι. Είναι ο αλγόριθμος για ν' αποφασίζουμε αν $\mathbf{T} \models \phi$ ή όχι.

Στον κατηγορηματικό λογισμό, παρ' όλο που και εκεί ισχύει το θεώρημα της πληρότητας και το θεώρημα της εγκυρότητας, δεν υπάρχει αλγόριθμος για να ελέγξουμε την αντίστοιχη σχέση, αν ισχύει ή όχι.

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα

   α) $\vdash \neg \phi \to (\phi \to \psi)$

   β) $\vdash (\neg \psi \to \neg \phi) \to (\phi \to \psi)$

   γ) $\vdash \phi \to \big(\neg \psi \to \neg (\phi \to \psi)\big)$

   δ) $\vdash (\phi \to \psi) \to \big((\neg \phi \to \psi) \to \psi\big)$

2) Δείξτε ότι τα αξιώματα είναι ταυτολογίες και ότι ο κανόνας M.P. μας οδηγεί από ταυτολογίες σε ταυτολογίες.
3) Δείξτε ότι τα α) και β) είναι ισοδύναμα στο θεώρημα της εγκυρότητας.
4) Δείξτε ότι α) $\Longrightarrow$ β), όπου α) και β) όπως στο θεώρημα της πληρότητας.

5) α) Δείξτε ότι $\Sigma \vdash \phi_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \Sigma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$

β) $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \psi \Longleftrightarrow \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n \to \psi \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \vdash \phi_1 \to \big(\phi_2 \to (\ldots (\phi_n \to \psi)\ldots\big)$

6) Για κάθε $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$ έστω $\overline{\Sigma} = \{\phi \mid \Sigma \vdash \phi\}$. Δείξτε ότι αν $\Sigma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ και $T = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots\}$ όπου $\psi_1 = \phi_1$ και $\psi_{n+1} = \phi_n \to \phi_{n+1}$, για $n \geqslant 1$, τότε $\overline{\Sigma} = \overline{T}$.

7) Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι συνεπή:

α) $\{p_1 \to p_2, p_1 \wedge p_3 \to p_2 \wedge p_4, p_1 \wedge p_3 \wedge p_5 \to p_2 \wedge p_4 \wedge p_6, \ldots\}$

β) $\{p_1 \to \neg p_2, p_2 \to \neg p_3, p_3 \to \neg p_4, \ldots\}$

γ) $\{p_1 \to p_2, \neg p_1 \wedge p_3 \to p_4, \neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge p_5 \to p_6, \ldots\}$

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Οι ιδέες του προτασιακού λογισμού είναι όμοιες με εκείνες της άλγεβρας Boole, που είναι μια άλγεβρα επί της αλφαβήτου 0 και 1. Η άλγεβρα Boole αποτελεί τη βάση της ανάλυσης και του σχεδιασμού των ψηφιακών ηλεκτρονικών κυκλωμάτων. Τα κυκλώματα αυτά είναι ικανά να αποθηκεύσουν αναπαραστάσεις των δυαδικών ψηφίων 0 και 1, και μπορούν να εκτελέσουν απλές πράξεις επ' αυτών των τιμών. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε αυτά τα κυκλώματα από την λογική πλευρά μόνο.

Στη λογική μια πρόταση είναι ή αληθής ή ψευδής, και αυτό μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά με 1 ή 0 αντίστοιχα. Πολλά φυσικά συστήματα μπορούν να παρασταθούν ή τυποποιηθούν από μία δίτιμη λογική. Για παράδειγμα σ' ένα ηλεκτρικό σύστημα ένα φως είναι *αναμένο* ή *σβηστό* και ένας διακόπτης είναι *ανοικτός* ή *κλειστός*. Η κατάσταση ενός υπολογιστή περιγράφεται από το σύνολο των δυαδικών ψηφίων που είναι αποθηκευμένα στη μνήμη του.

Τα μαθηματικά της λογικής των δυο καταστάσεων, που λέγονται άλγεβρα του Boole, αναπτύχθηκαν από τον μαθηματικό George Boole το 1840 περίπου. Μετά αυτά τα μαθηματικά εφαρμόστηκαν στα κυκλώματα με διακόπτες από τον Claude Shannon, έναν αμερικάνο μαθηματικό στην δεκαετία του 1930. Χρησιμοποίησε άλγεβρα του Boole με δυο στοιχεία, επειδή ενδιαφερόταν σε δίκτυα διακοπτών που μπορούν να είναι ή *ανοικτοί* ή *κλειστοί*.

Ορισμός: Μια *άλγεβρα Boole* είναι ένα σύνολο με δυο στοιχεία, που θα συμβολίζουμε με 0 και 1, μαζί με δυο πράξεις (συναρτήσεις) την *πρόσθεση* $+$ και τον πολλαπλασιασμό $\cdot$, για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

$0 + 0 = 0 \qquad 0 \cdot 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1 \qquad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

$1 + 1 = 1 \qquad 1 \cdot 1 = 1$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω κανόνες είναι οι ίδιοι με εκείνους του προτασιακού λογισμού, αν 1 και 0 αντικατασταθούν με Α και Ψ και οι πράξεις + και · αντικατασταθούν με V και Λ. Φυσικά εδώ θεωρούμε τους συνδέσμους V και Λ σαν πράξεις επί του {Α, Ψ}, δηλαδή V: $\{А, Ψ\}^2 \rightarrow \{А, Ψ\}$

Λ: $\{А, Ψ\}^2 \rightarrow \{А, Ψ\}$ και οι τιμές

αυτών των συναρτήσεων δίνονται από τους πίνακες αλήθειας. Μια *μεταβλητή* του Boole είναι ένα σύμβολο α, β, γ που παίρνει μια από τις τιμές 0 ή 1.

Μια *έκφραση* του Boole είναι μια παράσταση που περιέχει μεταβλητές του Boole, τις τιμές 0,1 και τις πράξεις + και ·. Εδώ υποθέτουμε ότι η παράσταση «έχει νόημα», και δεν είναι απλά μια ακολουθία από σύμβολα.

Συνάρτηση του Boole, είναι μια συνάρτηση f: $\{0, 1\}^n \rightarrow \{\theta, 1\}$ (μια n-θέσια συνάρτηση Boole, ή μια συνάρτηση Boole με n μεταβλητές).

Π.χ. οι $f(x, y) = (x \cdot y) + x$ και

$g(x, y, z) = (xy) + (yz)$ είναι συναρτήσεις Boole. Η f είναι συνάρτηση Boole δύο μεταβλητών και η g είναι τριών μεταβλητών.

Επειδή μια συνάρτηση Boole εκφράζεται μέσω μεταβλητών που παίρνουν μια από τις δυο τιμές 1 ή 0, κάθε συνάρτηση Boole είναι πλήρως ορισμένη αν δοθεί ένας πίνακας αλήθειας γι' αυτήν. Αν f είναι μια συνάρτηση Boole με n μεταβλητές, ο πίνακας αλήθειας της θα περιέχει 2^n γραμμές. Η κατάσταση εδώ είναι παρόμοια με την χρήση των πινάκων αλήθειας στον προτασιακό λογισμό. Έστω λοιπόν η συνάρτηση

$$g(x, y, z) = (xy) + (yz)$$

Ο πίνακας αλήθειας της είναι:

x	y	z	xy	yz	xy + yz
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Ο πίνακας αλήθειας της $f(x,y,z) = (x+y) \cdot (x+z)$ και της $h(x, y, z) = x + (yz)$ είναι οι παρακάτω.

Παρατηρούμε ότι $f(x, y, z) = h(x, y, z)$ για κάθε $x, y, z \in \{0, 1\}$. Όταν έχουμε δύο συναρτήσεις Boole f_1, f_2 και $f_1 = f_2$ για κάθε $(x_1, x_2,..., x_n) \in \{0, 1\}^n$ στο πεδίο ορισμού τους, λέμε ότι οι δύο συναρτήσεις είναι *ίσες*, δηλαδή αν f_1, f_2 δυο συναρτήσεις Boole με n μεταβλητές και πεδίο ορισμού $\{0, 1\}^n$, θα λέμε ότι είναι *ίσες* ($f_1 = f_2$) αν

$f_1(x_1, x_2,..., x_n) = f_2(x_1, x_2,..., x_n)$ για κάθε $(x_1, x_2,..., x_n) \in \{0, 1\}^n$

x	y	z	x + y	x + z	(x + y) · (x + z)	y · z	x + (y · z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Όταν κατασκευάζουμε λογικά κυκλώματα είναι συχνά αναγκαίο να κατασκευάσουμε το κύκλωμα που εκτελεί την δοθείσα συνάρτηση με το μικρότερο κόστος. Για να πετύχουμε σ' αυτό, απαιτείται να βρούμε μια συνάρτηση ίση προς την δοθείσα, η οποία ελαχιστοποιεί τον αριθμό των τελεστών (πράξεων) που χρησιμοποιούνται. Έτσι, ενώ οι παραπάνω συναρτήσεις f και h είναι ίσες, η f περιέχει τρεις τελεστές και η h δύο τελεστές. Άρα η συνάρτηση h μπορεί να παρασταθεί χρησιμοποιώντας λιγότερη λογική.

Όπως είδαμε οι πράξεις + και · αντιστοιχούν στους συνδέσμους ∨ και ∧ ορισμένους επί των τιμών Α και Ψ. Υπάρχει και μια τρίτη πράξη στην άλγεβρα Boole που αντιστοιχεί στο σύνδεσμο ¬, και λέγεται *συμπλήρωμα*. Θα την συμβολίζουμε με μια παύλα – δηλ. αν x μια παράσταση Boole τότε το συμπλήρωμά της θα συμβολίζεται με $\bar{x}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε

άλγεβρα Boole		*Λογική*
+	⟹	∨
·	⟹	∧
–	⟹	¬

Γνωρίζουμε ότι στο προτασιακό λογισμό για ένα τύπο p, υπάρχει άλλος p′ με τον ίδιο πίνακα αληθειας τέτοιος ώστε ο p′ να περιέχει μόνο τους συνδέσμους ¬ και ∧. Αντίστοιχα πράγματα ισχύουν στην άλγεβρα Boole. Οι βασικές αλγεβρικές ιδιότητες της άλγεβρας Boole είναι:

1) $\left.\begin{array}{l} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{array}\right\}$ αντιμεταθετικοί νόμοι

2) $\left.\begin{array}{l} x + (y + z) = (x + y) + z \\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \end{array}\right\}$ προσεταιριστικοί νόμοι

3) $\left.\begin{array}{l} x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \end{array}\right\}$ επιμεριστικοί νόμοι

4) $\left.\begin{array}{l} x \cdot \bar{x} = 0 \\ x + \bar{x} = 1 \\ \bar{\bar{x}} = x \end{array}\right\}$ νόμοι για το συμπλήρωμα

$$\left.\begin{aligned} &5)\ x + 0 = x \qquad & x + 1 = 1 \\ &\quad x \cdot 0 = 0 & x \cdot 1 = x \end{aligned}\right\} \text{νόμοι του 0 και 1}$$

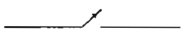
$$\left.\begin{aligned} &6)\ x + x = x \\ &\quad x \cdot x = x \end{aligned}\right\} \text{νόμοι του αδύναμου}$$

$$\left.\begin{aligned} &7)\ x + (x \cdot y) = x \\ &\quad x \cdot (x + y) = x \end{aligned}\right\} \text{νόμοι απορρόφησης}$$

$$\left.\begin{aligned} &8)\ \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_n \\ &\quad \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \ldots + \bar{x}_n \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{νόμοι} \\ \text{του De Morgan}\end{array}$$

Όλοι οι παραπάνω νόμοι μπορούν να αποδειχθούν με πίνακες αλήθειας. Οι περισσότεροι από αυτούς είναι γνωστοί από τον προτασιακό λογισμό μέσω της αντιστοιχίας που αναφέρεται παραπάνω.

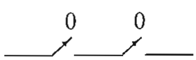
Η πιο απλή συσκευή που υπακούει στους νόμους της άλγεβρας Boole είναι ένας *διακόπτης*. Ένας διακόπτης σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα μπορεί να είναι ή *ανοικτός* ή *κλειστός:*



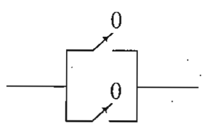
ανοικτός
κατάσταση = 0

κλειστός
κατάσταση = 1

Οι διακόπτες μπορούν να συνδεθούν μαζί για να σχηματίσουν δίκτυα όπως



και οι δύο ανοικτοί



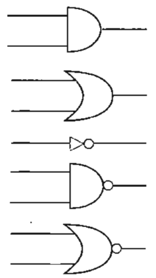
και οι δύο ανοικτοί

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι έχουμε σύνδεση εν σειρά ενώ στη δεύτερη εν παραλλήλω. Επίσης η πρώτη περίπτωση μας δίνει μία εικόνα του $\wedge$ ή της $\cdot$ συνάρτησης, καθώς και οι δύο διακόπτες πρέπει να είναι κλειστοί για να είναι η είσοδος συνδεδεμένη με την έξοδο, ενώ η δεύτερη περίπτωση αναπαριστά τον $\vee$ ή την $+$ συνάρτηση, επειδή αρκεί ένας από τους δύο διακόπτες να είναι κλειστός για να έχουμε την είσοδο συνδεδεμένη με την έξοδο.

Μία *λογική πύλη* είναι ένα ηλεκτρονικό κομμάτι που εκτελεί μία πράξη Boole όταν δοθούν μία ή περισσότερες είσοδοι. Όταν λέμε μία πράξη Boole εννοούμε μία συνάρτηση Boole και ανάλογα πόσων μεταβλητών είναι αυτή η συνάρτηση, θα έχουμε αντίστοιχες εισόδους.

Ένα *ψηφιακό κύκλωμα,* αποτελείται από ένα δίκτυο από λογικές πύλες. Οι στοιχειώδεις πύλες είναι οι παρακάτω:

Συμβολισμός



Όνομα

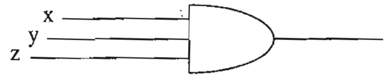
και πύλη ($\cdot$, $\wedge$)
ή πύλη ($+$, $\vee$)
όχι πύλη ($\bar{\ }$, $\neg$)
όχι – και πύλη ($\overline{(x \cdot y)}$, $|$)
όχι – ή πύλη ($\overline{(x + y)}$, $\downarrow$)

Οι πίνακες αλήθειας για τις δύο τελευταίες πύλες είναι

x	y	$\overline{(x \cdot y)} = x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

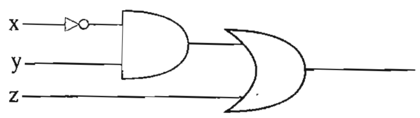
x	y	$\overline{(x + y)} = x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Μπορούμε να έχουμε μία n-θέσια λογική πύλη (πύλη με n εισόδους), από τον προσεταιρικό νόμο π.χ. έχουμε την



για την παράσταση $x \cdot y \cdot z$.

Επίσης μπορούμε να συνδυάσουμε λογικές πύλες π.χ. η

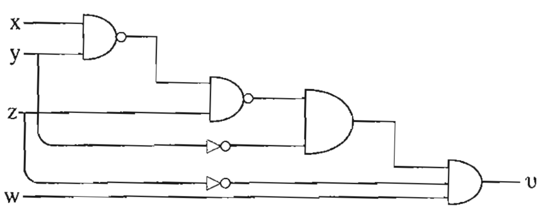


συμβολίζει την

συνάρτηση Boole, $(\overline{x} \cdot y) + z$

Στο κεφάλαιο του προτασιακού λογισμού αποδείξαμε ότι κάθε συνάρτηση Boole (κάθε προτασιακός τύπος) μπορεί να έχει τον ίδιο πίνακα αλήθειας με άλλον στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι ($\neg$, $\vee$, $\wedge$) ή ο σύνδεσμος $\downarrow$. Το ίδιο ισχύει και για τα κυκλώματα. Κάθε κύκλωμα μπορεί να μετασχηματισθεί σε άλλο που να έχει μόνο όχι-και πύλες ή μόνο όχι-ή πύλες, ή μόνο *όχι* και *καί πύλες*.

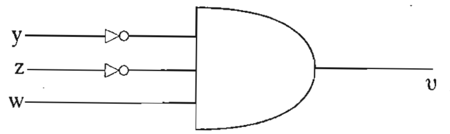
Συνδυαστική λογική είναι η λογική της οποίας οι έξοδοι εξαρτώνται μόνο από τις εισόδους στο κύκλωμα. Αυτά τα κυκλώματα δεν περιέχουν στοιχεία αποθήκευσης ή μνήμης επειδή οι έξοδοι δεν μπορούν να εξαρτώνται από προηγούμενες ενέργειες. Γι' αυτό στην συνδυαστική λογική χρησιμοποιούμε πίνακες αλήθειας. Έστω τώρα ότι έχουμε το κύκλωμα:



Έχουμε $\upsilon = (\overline{\overline{x \cdot y} \cdot z} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z} \cdot w =$
$= (\overline{\overline{x \cdot y}} + \bar{z}) \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot w = (xy + \bar{z})\, \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot w =$
$= x \cdot y \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot w + \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot w = x \cdot 0 \cdot \bar{z} \cdot w + \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot w =$
$= \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot w = \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot w.$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στο παραπάνω κύκλωμα αντιστοιχεί μία συνάρτηση Boole, η οποία μετά από μετασχηματισμούς χρησιμοποιώντας τους νόμους της άλγεβρας Boole (ιδιαίτερα τους επιμεριστικούς νόμους και τους νόμους του De Morgan) γίνεται απλούστερη δηλαδή έχει λιγότερες πράξεις.

Η συνάρτηση όμως $\upsilon = \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot w$ εκτελείται και από το απλοποιημένο κύκλωμα παρακάτω. Ένα συνδυαστικό κύκλωμα λοιπόν μπορεί να αναλυθεί με τη χρήση άλγεβρας Boole ή αληθοπινάκων.



Δοσμένης μιας συνάρτησης Boole, θέλουμε να κατασκευάσουμε κύκλωμα που να εκτελεί την δοθείσα συνάρτηση χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό πυλών. Συνήθως μας δίνεται ένας πίνακας αλήθειας (για μια συνάρτηση) ή μια λογική έκφραση και μας ζητείται να φτιάξουμε το *φθηνότερο* κύκλωμα που την εκτελεί, συχνά και με περιορισμούς για τον τύπο των πυλών που θα χρησιμοποιήσουμε.

Φθηνότερο κύκλωμα σημαίνει ότι το κύκλωμα έχει τον ελάχιστο αριθμό πυλών. Πρώτα αρχίζουμε παράγοντας τον πίνακα αλήθειας, αν δεν δίνεται, και μετά εκφράζοντας την συνάρτηση με ένα ειδικό τρόπο. Ας το εξηγήσουμε με ένα παράδειγμα. Θέλουμε να σχεδιάσουμε το κύκλωμα που θα μας δίνει τον παρακάτω πίνακα αλήθειας.

x	y	z	w
0	0	0	0
0	0	1	1 $\Longrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$
0	1	0	0
0	1	1	1 $\Longrightarrow \bar{x} \cdot y \cdot z$
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 $\Longrightarrow x \cdot y \cdot \bar{z}$
1	1	1	1 $\Longrightarrow x \cdot y \cdot z$

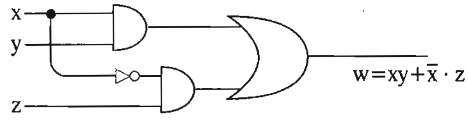
Εφαρμόζουμε το θεώρημα που ξέρουμε από τον προτασιακό λογισμό ότι κάθε συνάρτηση Boole έχει τον ίδιο πίνακα αλήθειας με προτασιακό τύπο γραμμένο σε κανονική διαζευκτική μορφή. Πρώτα λοιπόν βρίσκουμε τις αποτιμήσεις που η συνάρτηση παίρνει την τιμή 1 και κατασκευάζουμε τα γινόμενα $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$, $\bar{x} . y \cdot z$, $x \cdot y \cdot \bar{z}$, $x \cdot y \cdot z$. Σύμφωνα με το θεώρημα μια συνάρτηση με πίνακα αλήθειας τον παραπάνω θα είναι η:

$$w = f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,z + \bar{x}\,y\,z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z.$$

Τώρα εφαρμόζοντας τους νόμους της άλγεβρας Boole προσπαθούμε να απλοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση για την w, δηλαδή να βρούμε μια άλλη ισοδύναμη με την w αλλά με λιγότερες πράξεις. Οι νόμοι που εφαρμόζονται περισσότερο και είναι οι πιο σημαντικοί σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι οι *επιμεριστικοί νόμοι* και οι *νόμοι De Morgan*. Βρίσκουμε προσθεταίους στο άθροισμα w *που διαφέρουν ως προς μια μεταβλητή μόνο* και εφαρμόζουμε τους επιμεριστικούς νόμους. Έχουμε:

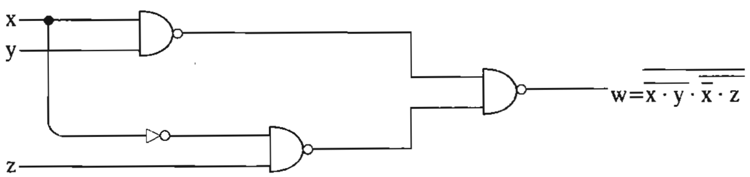
$$w = \bar{x} \cdot z\,(\bar{y} + y) + xy\,(\bar{z} + z) = \bar{x} \cdot z + x \cdot y$$

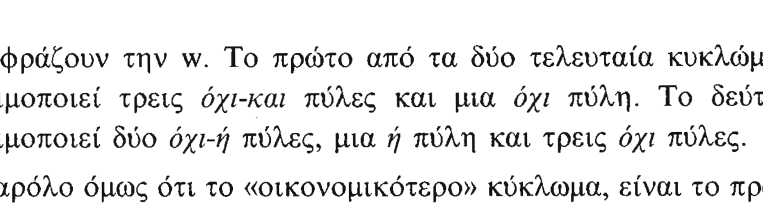
Το κύκλωμα που αντιστοιχεί στην w είναι το παρακάτω:



Δηλαδή το κύκλωμα αυτό κάνει ότι ακριβώς και η w. Έχουμε χρησιμοποιήσει δύο *και* πύλες μια *ή* πύλη και μια *όχι* πύλη. Αλλά,

$w = xy + \bar{x}\cdot z = \overline{\overline{xy + \bar{x}z}} = \overline{\overline{xy}\cdot\overline{\bar{x}\cdot z}} = \overline{(\bar{x}+\bar{y})} + \overline{(x+\bar{z})}$. Άρα και τα κυκλώματα





εκφράζουν την w. Το πρώτο από τα δύο τελευταία κυκλώματα χρησιμοποιεί τρεις *όχι-και* πύλες και μια *όχι* πύλη. Το δεύτερο χρησιμοποιεί δύο *όχι-ή* πύλες, μια *ή* πύλη και τρεις *όχι* πύλες.

Παρόλο όμως ότι το «οικονομικότερο» κύκλωμα, είναι το πρώτο που αντιστοιχεί στην $w = xy + \bar{x}z$, επειδή ένα *όχι-και ολοκληρωμένο κύκλωμα,* περιέχει τέσσερις όχι-και πύλες ο σχεδιαστής θα επιλέξει το κύκλωμα που αντιστοιχεί στην $w = \overline{\overline{x\cdot y}\cdot\overline{\bar{x}\cdot z}}$ γιατί χρησιμοποιεί ένα μόνο ολοκληρωμένο κύκλωμα ενώ τα άλλα χρησιμοποιούν τουλάχιστον δύο ολοκληρωμένα κυκλώματα.

Στην αρχή, ένας σχεδιαστής προσπαθούσε να σχεδιάσει το κύκλωμα με τις λιγότερες πύλες, που εκτελεί μια συνάρτηση Boole. Αργότερα στόχος του σχεδιαστή ήταν να ελαττώσει τον αριθμό των πυλών που θα χρησιμοποιούσε. Τέλος σήμερα, επειδή τα μέρη ενός κυκλώματος δεν κοστίζουν ακριβά ο σχεδιαστής προσπαθεί να περιορίσει τα έξοδα του χρόνου σχεδίασης, να ελαττώσει το κόστος του χρόνου σχεδίασης. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί περισσότερο δομημένα σχήματα όπως PLA και ROM. Ακολουθιακή λογική ακολουθούν τα κυκλώματα των οποίων οι έξοδοι *δεν* εξαρτώνται μόνον από τις παρούσες εισόδους, αλλά και από την περασμένη ιστορία του κυκλώματος. Ακολουθιακή λογική και ακολουθιακά κυκλώματα δεν θα μελετήσουμε σ' αυτό το μάθημα.

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Πρωτοβάθμιες γλώσσες

Για να αναπτύξουμε τον Κατηγορηματικό λογισμό, είναι χρήσιμο να ξέρουμε την διαφορά μεταξύ *ενικού όρου* και *κατηγορήματος* στην ελληνική γλώσσα. Ένας *ενικός όρος* είναι μία λέξη ή φράση που δηλώνει κάποιο πράγμα. Έχουμε δύο ειδών ενικούς όρους, κύρια ονόματα και οριστικές περιγραφές. Παραδείγματα του πρώτου είδους είναι: «Γιώργος», «Νίκος Χατζάκης», «Ναπολέων», «Μέγας Αλέξανδρος». Παραδείγματα του δευτέρου είδους είναι: «Ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός», «Ο εραστής της Μαρίας» και «Ο κύριος που πίνει τον καφέ του στη θεράντα». *Κατηγορήματα* μπορούμε να έχουμε από προτάσεις αφαιρώντας ένα ή περισσότερους ενικούς όρους. Έστω η πρόταση

Η Λάρισα είναι μεταξύ Αθήνας και Θεσσαλονίκης. Μπορούμε από την παραπάνω πρόταση να έχουμε τα παρακάτω κατηγορήματα:

_____ είναι μεταξύ Αθήνας και Θεσσαλονίκης.

Η Λάρισα είναι μεταξύ _____ και Θεσσαλονίκης.

Η Λάρισα είναι μεταξύ Αθήνας και _______

_____ είναι μεταξύ _____ και Θεσσαλονίκης.

_____ είναι μεταξύ Αθήνας και _______

Η Λάρισα είναι μεταξύ _____ και _______

_____ είναι μεταξύ _____ και _______

Ένα κατηγόρημα με μία παύλα λέγεται μονομελές κατηγόρημα, με δύο παύλες διμελές, με τρεις τριμελές και με n παύλες n-μελές. Για να δηλώσουμε ένα κατηγόρημα χρησιμοποιούμε μεταβλητές. Δηλαδή στις παύλες βάζουμε μεταβλητές, π.χ. το τελευταίο κατηγόρημα που περιγράψαμε παραπάνω γράφεται και: $\underline{x}$ είναι μεταξύ $\underline{y}$ και $\underline{z}$.

Στον κατηγορηματικό λογισμό χρησιμοποιούμε μικρά λατινικά γράμματα, σαν *σταθερές*, και τα χρησιμοποιούμε στη θέση των ενικών όρων της ελληνικής. Για κατηγορήματα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφάβητου.

Παραδείγματος χάρη έστω:

Mxyz: x είναι μεταξύ y και z

a: Λάρισα

b: Αθήνα

c: Θεσσαλονίκη

Τότε η παραπάνω πρόταση «Η Λάρισα είναι μεταξύ Αθήνας και Θεσσαλονίκης» γράφεται συμβολικά Mabc όπου M ένα τριμελές κατηγόρημα.

Ένα άλλο παράδειγμα. Έστω η πρόταση

«Αν ο Βασίλης δεν αγαπά την Δήμητρα, τότε δεν αγαπά την Ελένη». Αν θέσουμε

Lxy: ο x αγαπά τον y

a: Βασίλης

b: Δήμητρα

c: Ελένη

τότε η παραπάνω πρόταση συμβολίζεται:

$\neg$ Lab $\rightarrow$ $\neg$ Lac.

Στον κατηγορηματικό λογισμό έχουμε και *ποσοδείκτες* τους $\forall$ και $\exists$. Τον $\forall$ λέμε *καθολικό ποσοδείκτη* και τον $\exists$ *υπαρξιακό ποσοδείκτη*. Τον καθολικό τον χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε «κάθε ένα» και τον υπαρξιακό για να συμβολίσουμε το «υπάρχει ένα», «κάποιο». Π.χ. για

Lxy: ο x αγαπά τον y

a: Δήμητρα

αν θέλουμε να συμβολίσουμε την πρόταση «Όλοι αγαπούν την Δήμητρα» ή την «ο καθένας αγαπά τη Δήμητρα» ή την «Για κάθε άνθρωπο, αυτός αγαπά την Δήμητρα» ο συμβολισμός θα είναι ($\forall$x) Lxa. Η πρόταση «Κάποιος αγαπά την Δήμητρα», ή «Υπάρχει άνθρωπος που αγαπά την Δήμητρα» ή «Υπάρχει τουλάχιστον ένας που αγαπά τη Δήμητρα» συμβολίζεται με ($\exists$x) Lxa.

Οι προτάσεις με ποσοδείκτες που συναντούμε πιο συχνά είναι της μορφής:

Κάθε P είναι Q

Κανένα P δεν είναι Q

Μερικά P είναι Q

Μερικά P δεν είναι Q

Υποθέτοντας ότι τα P και Q είναι κατηγορήματα μονομελή, οι παραπάνω προτάσεις συμβολικοποιούνται ως εξής:

$(\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big)$

$(\neg \exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ ή $(\forall x)\big(P(x) \to \neg Q(x)\big)$

$(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$

$(\exists x)\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$

Το $(\forall x)$ το διαβάζουμε «κάθε x είναι τέτοιο ώστε .... x ....». Το x επομένως «τρέχει» πάνω σε κάποιο σύνολο και αυτό εξαρτάται από την περίπτωση. Αυτό το σύνολο λέγεται το σύμπαν της συζήτησης.

Μπορούμε να έχουμε πολλούς ποσοδείκτες σε μία πρόταση. Στο κατηγορηματικό λογισμό θεωρούμε και την ισότητα σαν πρωτογενή σχέση, δηλαδή ένα διμελές κατηγόρημα που σημαίνει «το x είναι το ίδιο με το y».

Η συμπερασματολογία του προτασιακού λογισμού είναι πολύ φτωχή. Αυτό οφείλεται στο ότι ένα συμπέρασμα $\phi \vdash \psi$ είναι έγκυρο μόνο αν στηρίζεται στην *εξωτερική σύνδεση* των φ, ψ, και όχι από την *εσωτερική δομή* των προτάσεων. Π.χ. ο κλασσικός συλλογισμός τους Αριστοτέλη

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί. (p)

Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος (q)

Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός (r)

δεν μπορεί να δικαιολογηθεί στον προτασιακό λογισμό γιατί έχουμε $p \wedge q \vdash r$. Αν αναλύσουμε τις προτάσεις p, q, r βλέπουμε ότι συναντούμε *κατηγορήματα* (ιδιότητες), *αντικείμενα* (σταθερές) (φορείς ιδιοτήτων) και *ποσοδείκτες*.

Για να γράψουμε λοιπόν αναλυτικά τις προτάσεις, χρειαζόμαστε *σταθερές* (σύμβολα για πράγματα), τους συνδέσμους που ξέρουμε, τις παρενθέσεις και σύμβολα για κατηγορήματα. Εξάλλου στα μαθηματικά χρειαζόμαστε και μία ειδική κατηγορία σχέσεων τις *συναρτή-*

σεις ή *πράξεις*, για τις οποίες χρησιμοποιούμε ξεχωριστά σύμβολα f, g, h,...

Ο συλλογισμός του Αριστοτέλη γίνεται:

$$\left.\begin{array}{c}(\forall x)\ \big(P(x)\ \rightarrow Q(x)\big)\\ P(\alpha)\\ \hline Q(\alpha)\end{array}\right\}$$

όπου P(x): x είναι άνθρωπος

Q(x): x είναι θνητός

α: Σωκράτης.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για καλύτερη ανάλυση χρειάζεται να ξεκινήσουμε από την *εσωτερική δομή* των προτάσεων και όχι να θεωρήσουμε τις προτάσεις ως αναλοίωτους, βασικούς δομικούς λίθους όπως κάναμε στον προτασιακό λογισμό.

Στον κατηγορηματικό λογισμό εκτός των παραπάνω συμβόλων, εμφανίζεται και η γνωστή μας *ισότητα.*

Τα σύμβολα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

α) Τα *λογικά σύμβολα* που περιέχονται σε κάθε γλώσσα του κατηγορηματικού λογισμού και αυτά είναι οι σύνδεσμοι, οι ποσοδείκτες, η ισότητα, οι μεταβλητές και οι παρενθέσεις και

β) τα *μη λογικά σύμβολα* που ποικίλουν από γλώσσα σε γλώσσα και αυτά είναι οι σχέσεις, οι συναρτήσεις και οι σταθερές.

Ο όρος *πρωτοβάθμια* δηλώνει ότι η γλώσσα διαθέτει *μεταβλητές μόνο για αντικείμενα* και όχι μεταβλητές για σχέσεις ή συναρτήσεις ή σύνολα σχέσεων κ.τ.λ.

Γλώσσες με τέτοιου είδους μεταβλητές για αντικείμενα ανώτερης τάξης, λέγονται *γλώσσες ανώτερης τάξης*.

Ορισμός: Μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 περιλαμβάνει

α) τα λογικά σύμβολα:

i) συνδέσμων: $\neg$, $\rightarrow$ (άρνηση, συνεπαγωγή)

ii) ποσοδείκτη (καθολικός): $\forall$

iii) ισότητας: =

iv) μεταβλητών: x_1, x_2,..., x_n,... (σε αριθμήσιμο πλήθος)

v) παρενθέσεων: (,), και

β) μή λογικά σύμβολα:

vi) P_i, $i \in I$ κατηγορηματικά σύμβολα.

vii f_j, $j \in J$ συναρτησιακά σύμβολα.

viii) c_k, $k \in K$ σταθερές

όπου I, J, K κάποια σύνολα δεικτών.

Επειδή τα λογικά σύμβολα ανήκουν σε κάθε γλώσσα, μια οποιαδήποτε πρωτοβάθμια γλώσσα προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα μή λογικά της σύμβολα γι' αυτό γράφουμε $\Gamma_1 = < (P_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (c_k)_{k\in K} >$. Κάθε κατηγορηματικό σύμβολο P συνοδεύεται από ένα φυσικό αριθμό n (το P_i από τον n_i) και σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το P είναι *n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο.* Κάθε συναρτησιακό σύμβολο f συνοδεύεται από ένα φυσικό αριθμό m (το f_j από τον m_j) και σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το f είναι *m-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο.* Τα λογικά σύμβολα, λέγονται έτσι γιατί έχουν καθορισμένο νόημα, ενώ τα μη λογικά μπορούν να ερμηνευτούν με διαφόρους τρόπους. Αργότερα θα εισαγάγουμε και τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$.

Παραδείγματα: 1) Η γλώσσα της ισότητας $\Gamma_1^{=} = \emptyset$. Δεν διαθέτει καθόλου μη λογικά σύμβολα.

2) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\kappa\lambda}$ του κατηγορηματικού λογισμού έχει μόνο κατηγορηματικά σύμβολα και σταθερές.

$\Gamma_1^{\kappa\lambda} = < (P_i)_{i\in N}, (c_k)_{k\in N} >$

Για κάθε $n\in N$ υπάρχουν $P_{n1}, P_{n2}, P_{n3}, \ldots, P_{nm}, \ldots$ n-μελή κατηγορηματικά σύμβολα που ανήκουν στο $\{P_1, P_2, \ldots\}$

3) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\sigma} = <\in>$ έχει μόνο ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, το $\in$.

4) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\alpha\rho} = < <, s, +, \cdot, 0 >$ της αριθμητικής έχει
ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $<$
ένα μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο s
δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $+, \cdot$
μια σταθερά 0

5) Η γλώσσα των αλγεβρών Boole $\Gamma_1^{B} = < -, +, \cdot, 0, 1 >$ έχει
ένα μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο $-$
δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $+, \cdot$,
και δύο σταθερές 0, 1.

Σε όσα θα πούμε παρακάτω με $Γ_1$ θα συμβολίζουμε γενικά μια πρωτοβάθμια γλώσσα.

Ορισμός: *Έκφραση* της $Γ_1$ λέγεται μια πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της $Γ_1$.

Οι ακολουθίες $= x_2 \forall x_1, (x_2 \rightarrow \forall$ είναι εκφράσεις της $Γ_1$. Το σύνολο των εκφράσεων της $Γ_1$ συμβολίζεται με Ε ($Γ_1$). Οι όροι της $Γ_1$ διευρύνουν τις σταθερές και τις μεταβλητές σαν φορείς ιδιοτήτων. Το σύνολο των μεταβλητών της $Γ_1$ συμβολίζεται με Μ ($Γ_1$), δηλαδή $Μ (Γ_1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots\}$.

Ορισμός: Έστω $Γ_1$ μια πρωτοβάθμια γλώσσα. Το σύνολο Ο ($Γ_1$) των *όρων* της $Γ_1$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

i) $Μ (Γ_1) \subseteq Ο (Γ_1)$ (κάθε μεταβλητή είναι όρος)

ii) $Σ (Γ_1) \subseteq Ο (Γ_1)$, όπου Σ ($Γ_1$) το σύνολο των σταθερών της $Γ_1$ (κάθε σταθερά είναι όρος)

iii) Αν $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Ο (Γ_1)$ και f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο της $Γ_1$, τότε και $ft_1t_2 \ldots t_n \in Ο (Γ_1)$.

Παραδείγματα: 1) Στη γλώσσα $Γ_1^{θσ}$, οι μόνοι όροι είναι οι μεταβλητές γιατί δεν υπάρχουν συναρτησιακά σύμβολα, ούτε σταθερές δηλαδή

$$Ο (Γ_1^{θσ}) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots\}$$

2) Στη γλώσσα $Γ_1^{αρ}$, οι εκφράσεις

$$+ \big(s(s(0)), \cdot (x_1, s(x_2))\big),$$
$$\cdot \big(+ (x_1, x_2), \cdot (x_1, s(0))\big)$$

είναι όροι της $Γ_1^{αρ}$, δηλαδή στοιχεία του Ο ($Γ_1^{αρ}$) ενώ οι εκφράσεις:

$+ \big(s (s (x_1))\big), s \big(x_1, + (x_2, x_1)\big)$ δεν είναι όροι.

3) Στη γλώσσα $Γ_1^{B}$, οι εκφράσεις:

$+ \big(0, \cdot (x_1, x_2)\big), \cdot \big(+ (x_1,0), \cdot (1, x_2)\big)$ είναι στοιχεία του Ο ($Γ_1^{B}$).

Παρατηρούμε, ότι επειδή το Ο ($Γ_1$) ορίσθηκε επαγωγικά για τυχούσα πρωτοβάθμια γλώσσα $Γ_1$, υπάρχει αλγόριθμος που ελέγχει αν μια έκφραση της $Γ_1$ είναι όρος ή όχι.

Ορισμός: Το σύνολο $T(\Gamma_1)$ των *τύπων* της Γ_1 ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

i) Αν $t_1, t_2 \in O(\Gamma_1)$ τότε $(t_1 = t_2) \in T(\Gamma_1)$

ii) Αν $t_1, t_2, \ldots, t_n \in O(\Gamma_1)$ και P n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1, τότε $(Pt_1t_2\ldots t_n) \in T(\Gamma_1)$.

iii) Αν $\phi, \psi \in T(\Gamma_1)$ τότε $(\neg \phi) \in T(\Gamma_1)$,

$(\phi \rightarrow \psi) \in T(\Gamma_1)$

iv) Αν $\phi \in T(\Gamma_1)$ και $x_i \in M(\Gamma_1)$ τότε $\big((\forall x_i)\ \phi\big) \in T(\Gamma_1)$.

Ένας τύπος λέγεται *ατομικός* αν είναι της μορφής i) ή ii) παραπάνω. Το σύνολο των ατομικών τύπων της Γ_1 συμβολίζουμε με $AT(\Gamma_1)$. Το σύνολο $O(\Gamma_1)$ είναι το ελάχιστο σύνολο που ικανοποιεί τις συνθήκες i), ii) και iii) του ορισμού του, καθώς επίσης το $T(\Gamma_1)$ είναι το ελάχιστο σύνολο που ικανοποιεί τις συνθήκες i), ii), iii) και iv) του ορισμού του.

Παραδείγματα: 1) Στη γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ οι εκφράσεις

$x_1 \in x_2$, $(\forall x_1)\ (x_1 \in x_2 \rightarrow x_1 = x_2)$, $\forall x_1\ \exists x_2\ (x_2 \in x_1)$

είναι τύποι, στοιχεία δηλαδή του $T(\Gamma_1^{\theta\sigma})$, ενώ οι εκφράσεις $\big((\forall x_1)\ (\neg\, x_1) \rightarrow x_2\big)$, $\neg\,(\forall x_1)\ \big(x_1 \rightarrow (x_2 \in x_1)\big)$ δεν είναι τύποι της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$.

2) Στη γλώσσα $\Gamma_1^{\alpha\rho}$, οι εκφράσεις

$$< (x_1, x_2),\ (\forall x_1)\ \big(+ \big(x_1, s(s(0))\big) = \cdot\ \big(x_2, s(x_1)\big)\big)$$

είναι τύποι της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$, ενώ οι εκφράσεις

$$(\forall x_1)\ \big(x_1 \rightarrow s\big(s(0)\big)\big),\ \neg\ \big(+\ \big(0, s(s(x_1))\big)\big)$$

δεν είναι τύποι της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$.

3) Στη γλώσσα Γ_1^{B} οι εκφράσεις

$$(\forall x_1)\ \big[\big(+\ (0, x_1) = \cdot\ (x_2, 1)\big) \rightarrow (\bar{x}_1 = \bar{x}_2)\big],$$

$\neg\ \big[(x_1 = \bar{x}_2) \rightarrow (0 = \bar{x}_2)\big]$ είναι στοιχεία του $T(\Gamma_1^{B})$.

Παρατηρούμε ότι επειδή το $T(\Gamma_1)$ ορίσθηκε επαγωγικά για τυχούσα πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1, υπάρχει αλγόριθμος που ελέγχει αν μια έκφραση της Γ_1, είναι τύπος ή όχι. Συγκεκριμένα κάθε $\phi \in T(\Gamma_1)$ θα έχει ένα δένδρο ανάλυσης, που θα δείχνει πως ο ϕ κατασκευάσθηκε από ατομικούς τύπους, με τη βοήθεια συνδέσμων, παρενθέσεων και του ποσοδείκτη.

Μερικοί από τους τύπους της Γ_1 θα έχουν συγκεκριμένο νόημα, ενώ οι υπόλοιποι θα έχουν νόημα από προϋποθέσεις.

Ορισμός: 1) Στον τύπο $(\forall x)\phi$, ο τύπος ϕ λέγεται *εμβέλεια* του αντίστοιχου ποσοδείκτη.

2) *η $x \in M$ (Γ_1) εμφανίζεται ελεύθερη στον $\phi \in T(\Gamma_1)$*, ανν

i) ο ϕ είναι ατομικός και ο x εμφανίζεται στον ϕ.

ii) ο ϕ είναι της μορφής $(\neg\, \psi)$ και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.

iii) ο ϕ είναι της μορφής $(\psi \rightarrow \chi)$ και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ ή στον χ.

iv) ο ϕ είναι της μορφής $(\forall y)\ \psi$, όπου $x \neq y$ και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.

3) Η x είναι *δεσμευμένη* στον ϕ ανν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ.

4) Ο ϕ είναι *πρόταση* ανν κάθε μεταβλητή, είναι δεσμευμένη στον ϕ.

Συμβολίζουμε με $\Pi(\Gamma_1)$ το σύνολο των προτάσεων της πρωτοβάθμιας γλώσσας Γ_1.

Παραδείγματα: 1) Στη γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ο τύπος

$(\forall x_1)\ (\forall x_2)\ (x_2 \in x_1)$ είναι πρόταση.

2) Στη γλώσσα $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ οι τύποι

$(\forall x_1)\ \big(< (0,\, x_1)\big)$, $(\forall x_1)\ \big[(x_1 = s(0)) \rightarrow (\ + (x_1,\, x_1) = s(x_1))\big]$

είναι προτάσεις, στοιχεία του $\Pi(\Gamma_1^{\alpha\rho})$.

Η x εμφανίζεται ελεύθερη στον $(\forall x)\ Q(x) \rightarrow\ P(x)$, και δεσμευμένη στον $(\forall x)\ \big(Q(x) \rightarrow\ P(x)\big)$. Μία μεταβλητή μπορεί να εμφανίζεται ελεύθερη σ' ένα τύπο και ταυτόχρονα να είναι δεσμευμένη σ' ένα υπότυπό του.

Έχουμε τα παρακάτω θεωρήματα, ανάλογα όπως έχουμε την αρχή της επαγωγής στο $T(\Gamma)$ στον προτασιακό λογισμό.

Θεώρημα (Αρχή της επαγωγής στο $O(\Gamma_1)$)

Έστω Γ_1 μία πρωτοβάθμια γλώσσα και έστω $A(t)$ μια ιδιότητα της μεταγλώσσας που αναφέρεται στους όρους της $Γ_1$. Αν έχουμε:

i) $A(x_i)$ για κάθε $x_i \in M(Γ_1)$

ii) $A(c)$ για κάθε $c \in Σ(Γ_1)$, και

iii) Υποθέτοντας ότι οι $t_1, t_2, \ldots, t_n$ έχουν την ιδιότητα δηλαδή ότι $A(t_1), A(t_2), \ldots, A(t_n)$ $\big(t_1, t_2, \ldots, t_n \in O(Γ_1)\big)$ συνεπάγεται ότι $A(ft_1t_2 \ldots t_n)$ για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f της $Γ_1$.

Τότε $A(t)$ για κάθε $t \in 0(Γ_1)$.

Θεώρημα: (Αρχή της επαγωγής στο $T(Γ_1)$)

$Γ_1$ πρωτοβάθμια γλώσσα και έστω $A(\phi)$ μια ιδιότητα της μεταγλώσσας που αναφέρεται στους τύπους της $Γ_1$. Αν έχουμε:

i) $A(\phi)$ για κάθε ατομικό τύπο $\phi \in AT(Γ_1)$

ii) Υποθέτοντας ότι για $\phi, \psi \in T(Γ_1)$
$A(\phi)$ και $A(\psi)$, συνεπάγεται ότι
$A(\neg \phi)$, $A(\phi \rightarrow \psi)$ και $A(\forall x \phi)$ για $x \in M(Γ_1)$.

Τότε $A(\chi)$ για κάθε $\chi \in T(Γ_1)$.

Τα παραπάνω θεωρήματα οφείλονται στον επαγωγικό τρόπο με τον οποίο ορίσθηκαν τα $O(Γ_1)$ και $T(Γ_1)$.

Εισάγουμε τους συνδέσμους τώρα, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, και τον ποσοδείκτη $\exists$, ως εξής:

γράφουμε $(\phi \wedge \psi)$ αντί $\big(\neg (\phi \rightarrow (\neg \psi))\big)$
$(\phi \vee \psi)$ αντί $\big((\neg \phi) \rightarrow \psi\big)$
$(\phi \leftrightarrow \psi)$ αντί $\big(\neg ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg (\psi \rightarrow \phi)))\big)$
$\exists x \phi$ αντί $\big(\neg \forall x (\neg \phi)\big)$

Γράφουμε επίσης

$t_1 = t_2$	αντί	$= (t_1, t_2)$
$t_1 \neq t_2$	»	$\neg (t_1 = t_2)$
$t_1 \in t_2$	»	$\in (t_1, t_2)$
$t_1 \notin t_2$	»	$\neg (t_1 \in t_2)$
$t_1 + t_2$	»	$+ (t_1, t_2)$
$t_1 \cdot t_2$	»	$\cdot (t_1, t_2)$
$t_1 < t_2$	»	$< (t_1, t_2)$

Όπως στον προτασιακό λογισμό παραλείπουμε παρενθέσεις σύμφωνα με τους κανόνες:

1) Οι εξωτερικές παρενθέσεις παραλείπονται.
2) Τα σύμβολα $\neg$, $\forall$, $\exists$ θεωρούνται ισχυρότερα από τα υπόλοιπα σύμβολα.
3) Τα $\wedge$, $\vee$ είναι ισχυρότερα από τα $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Ασκήσεις

1) Αν Lxy σημαίνει «ο x αγαπά τον y» και το σύμπαν της συζήτησης είναι όλοι οι άνθρωποι, γράψτε συμβολικά τις προτάσεις:
   α) Κάποιος αγαπά κάποιον.
   β) Ο καθένας αγαπά κάποιον.
   γ) Κάποιος τους αγαπά όλους.
   δ) Όλοι αγαπούν όλους.
   ε) Κανένας δεν τους αγαπά όλους.
2) Στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων διατυπώστε τις προτάσεις:
   α) Δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία.
   β) Υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία.
   γ) Για κάθε δύο σύνολα υπάρχει η ένωση και η τομή τους.
   δ) Για κάθε σύνολο υπάρχει το δυναμοσύνολό του.
3) Έστω $\Gamma_1^{\delta} = \, < \, < \, >$ η γλώσσα της διάταξης με ένα μόνο διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, το $<$.
   Σ' αυτή τη γλώσσα διατυπώστε τις προτάσεις.
   α) Η διάταξη είναι ολική.
   β) Η διάταξη είναι πυκνή.
4) Στη γλώσσα της αριθμητικής $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ διατυπώστε τις προτάσεις:
   α) Δεν υπάρχει μέγιστος φυσικός αριθμός.
   β) Υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός.
   γ) Το δύο είναι ο μόνος άρτιος πρώτος αριθμός.
   δ) Υπάρχουν ακριβώς δύο πρώτοι μεταξύ ένα και τέσσερα.
5) Βρείτε τα δέντρα ανάλυσης των τύπων:
   $(\forall x_1)\big(P\,(x_1) \rightarrow (\exists x_2)\ Q\,(x_2)\big)$
   $\forall x_1 \exists x_2\ P(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_2\ \forall x_1\ P(x_1, x_2)$
   $(\forall x)\ (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \forall x \psi)$

6) Ποιές μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες σε κάθε ένα από τους παρακάτω τύπους; Ποιοί απ' αυτούς είναι προτάσεις;
$\forall x_1\, Q(x_1) \wedge Q(x_1)$, $\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists y\, P(y)$
$P(x) \rightarrow \forall y\, Q(y, x)$, $\exists x\, \big(P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)\big)$
$(x_1 = x_2) \vee (x_1 \neq x_2)$.
7) Αποδείξτε ότι κάθε τύπος της Γ_1 έχει τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων.
8) Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχούν στις προτάσεις:
«Υπάρχει σύνολο με ακριβώς δύο στοιχεία».
«Κάθε σύνολο είναι στοιχείο άλλου συνόλου».
9) Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ που αντιστοιχούν στις προτάσεις:
«Υπάρχει φυσικός που δεν είναι ο επόμενος κανενός άλλου φυσικού»
«Δύο φυσικοί έχουν γινόμενο μεγαλύτερο από το άθροισμά τους».

2. *Η σημασιολογική πλευρά*

Δομές, αλήθεια, Μοντέλα

Θα μελετήσουμε τώρα τη σημασιολογική πλευρά μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Διαφορετικές πρωτοβάθμιες γλώσσες έχουν διαφορετικές κύριες (standard) ερμηνείες, συμφωνούν όμως όσον αφορά τα λογικά σύμβολα. Η ερμηνεία των λογικών συμβόλων είναι:

1) Τα $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ αντιστοιχούν στις φράσεις «δεν» «και», «ή», «εάν... τότε», «... αν και μόνον αν...».
2) Τα (,) αντιστοιχούν σε σημεία στίξεως.
3) Το $=$ αντιστοιχεί στη φράση «ισούται με».
4) Τα $\forall$, $\exists$ αντιστοιχούν στις φράσεις «για κάθε», «υπάρχει».

Η κύρια ερμηνεία των μή λογικών συμβόλων της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ είναι η εξής: Το $\in$ αντιστοιχεί στη φράση «ανήκει» και οι μεταβλητές αντιστοιχούν σε σύνολα. Με αυτή την ερμηνεία οι τύποι της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ αντιστοιχούν σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που αναφέρονται στη θεωρία συνόλων.

Η κύρια ερμηνεία των μή λογικών συμβόλων της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ είναι:
1) οι μεταβλητές αντιστοιχούν σε φυσικούς αριθμούς.

2) Το $<$ αντιστοιχεί στη φράση «μικρότερος από».

3) Το s αντιστοιχεί στη φράση «επόμενος του».

4) Τα $+$, $\cdot$ αντιστοιχούν στις φράσεις «συν», «επί».

5) Το 0 αντιστοιχεί στη φράση «μηδέν».

Με αυτή την ερμηνεία οι τύποι της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ αντιστοιχούν σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που αναφέρονται στη θεωρία αριθμών. Π.χ. η πρόταση $\forall x \, \exists y \, (y = s(x))$ αντιστοιχεί στην πρόταση «για κάθε φυσικό αριθμό, υπάρχει φυσικός που ισούται με τον επόμενο του πρώτου». Σύμφωνα με την κύρια ερμηνεία της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$, ο τύπος της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση «Δύο σύνολα είναι ίσα ανν έχουν τα ίδια στοιχεία» είναι:

$$\forall x \, \forall y \, [x = y \leftrightarrow \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y)]$$

Επίσης σύμφωνα με την κύρια ερμηνεία της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$, ο τύπος της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ που αντιστοιχεί στην πρόταση «Υπάρχει φυσικός που δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού» είναι: $\exists x \, \forall y \, (\neg \, (x = s \, (y)))$.

Για να αποκτήσουν σημασία οι όροι και οι τύποι μιας γλώσσας, πρέπει να αποκτήσουν σημασία τα σύμβολά της. Οι σύνδεσμοι έχουν τη γνωστή τους σημασία που ξέρουμε. Οι ποσοδείκτες αντιστοιχούν στις εκφράσεις «υπάρχει x», «για κάθε x» αλλά γίνονται σαφείς όταν καθορίσουμε ένα *σύνολο ερμηνείας* τους A, έτσι ώστε να σημαίνουν «υπάρχει x του A» «για κάθε x του A» αντίστοιχα. Κατόπιν τα μή λογικά σύμβολα θα αντιστοιχηθούν σε συγκεκριμένα αντικείμενα μιας δομής πάνω στο σύνολο A. Τα σύμβολα σταθερών θα συμβολίσουν ορισμένα στοιχεία του A, τα κατηγορηματικά σύμβολα θα συμβολίσουν κάποιες σχέσεις στο A και τα συναρτησιακά σύμβολα κάποιες συναρτήσεις του A.

Οι γλώσσες που μελετάμε λέγονται πρωτοβάθμιες γιατί οι μεταβλητές παίρνουν τιμές από ένα σύνολο, δηλαδή οι τιμές των μεταβλητών είναι στοιχεία ενός συνόλου.

Ορισμός: Μια *δομή* $\mathcal{A}$ για τη γλώσσα Γ_1 αποτελείται από τα εξής:

α) ένα μή κενό σύνολο, που καλείται *σύμπαν* της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $|\mathcal{A}|$. Σ' αυτό το σύνολο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές.

β) μια n-μελή σχέση P^{α} ($P^{\alpha} \subseteq |\alpha|^n$) επί του $|\alpha|$, για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P της Γ_1.

γ) μια m-θέσια συνάρτηση f^{α} ($f^{\alpha}: |\alpha|^m \to |\alpha|$) του $|\alpha|$, για κάθε m-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f της Γ_1.

δ) ένα στοιχείο $c^{\alpha} \in |\alpha|$, για κάθε σταθερά c της Γ_1.

Μπορούμε να θεωρήσουμε μια δομή α για την Γ_1, σαν μια συνάρτηση που αποδίδει σημασία στα μή λογικά σύμβολα της Γ_1.

$\forall \overset{\alpha}{\Longrightarrow} |\alpha|$,

$\left.\begin{array}{l}\text{P n-μελές κατηγορηματικό}\\ \text{σύμβολο}\end{array}\right\} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \begin{array}{l}P^{\alpha}\text{ n-μελής σχέση}\\ \text{στο } |\alpha|,\\ (P^{\alpha} \subseteq |\alpha|^n)\end{array}$

$\left.\begin{array}{l}\text{f m-θέσιο συναρτησιακό}\\ \text{σύμβολο}\end{array}\right\} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \begin{array}{l}f^{\alpha}\text{ m-θέσια συνάρτηση}\\ f^{\alpha}: |\alpha|^m \to |\alpha|\end{array}$

c σταθερά $\overset{\alpha}{\Longrightarrow} c^{\alpha} \in |\alpha|$

Παραδείγματα: 1) Η δομή η_σ για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\eta_\sigma| = N$

β) στο $\in$ αντιστοιχεί η σχέση

$\in^{\eta_\sigma} = \{(m, n) \mid m < n\} \subseteq N^2$

2) Η δομή R_σ^* για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ορίζεται ως εξής:

$|R_\sigma^*| = R$ και

$\in^{R_\sigma^*} = \{(\alpha, b) \mid b < \alpha\} \subseteq R^2$

3) Η standard δομή η για την $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ ορίζεται ως εξής:

$|\eta| = N$

στο $<$ αντιστοιχεί η συνήθης σχέση στο N

στα s, +, · αντιστοιχούν οι συνήθεις συναρτήσεις

στο N (s $\Longrightarrow$ + 1).

στο 0 αντιστοιχεί το $0 \in N$.

4) Η δομή η^* για την $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\eta^*| = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$

β) $<^{\eta^*} = \{(-m, -n) \mid n < m\} \subseteq |\eta^*|^2$

$$\gamma)\ \left.\begin{array}{l} s^{\eta^*}\ (-n) = -n-1 \\ +^{\eta^*}(-m, -n) = -(m+n) \\ .^{\eta^*}(-m, -n) = -(mn) \end{array}\right\}$$

δ) στο 0, $0^{\eta^*} = 0$.

5) Η δομή $\mathcal{B}$ για Γ_1^B ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{B}| = \{A, \Psi\}$

β) $-^{\mathcal{B}}(x) = \neg x$ δηλαδή $-^{\mathcal{B}}: \{A, \Psi\} \to \{A, \Psi\}$

με $-^{\mathcal{B}}(A) = \Psi$ και $-^{\mathcal{B}}(\Psi) = A$

$+^{\mathcal{B}}: \{A, \Psi\}^2 \to \{A, \Psi\}$ με

$+^{\mathcal{B}}(A, A) = A$, $+^{\mathcal{B}}(A, \Psi) = A$

$+^{\mathcal{B}}(\Psi, A) = A$, $+^{\mathcal{B}}(\Psi, \Psi) = \Psi$

$.^{\mathcal{B}}: \{A, \Psi\}^2 \to \{A, \Psi\}$ με

$.^{\mathcal{B}}(A, A) = A$, $.^{\mathcal{B}}(A, \Psi) = \Psi$

$.^{\mathcal{B}}(\Psi, A) = \Psi$, $.^{\mathcal{B}}(\Psi, \Psi) = \Psi$

γ) $0^{\mathcal{B}} = \Psi$ και $1^{\mathcal{B}} = A$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε γλώσσα μπορούμε να έχουμε πάρα πολλές (άπειρες το πλήθος) δομές για αυτή τη γλώσσα. Τις δομές τις συμβολίζουμε με *γοτθικά* κεφαλαία $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$,... Το δίπολο γλώσσα-δομή είναι η πιο σημαντική έκφραση της γνωστής αντίθεσης σύνταξη-ερμηνεία. Κάθε γλώσσα χρειάζεται μία δομή για να αποκτήσει σημασία και κάθε δομή περιγράφεται από μία γλώσσα. Παρατηρούμε επίσης ότι μερικές προτάσεις μιας γλώσσας μπορεί να είναι αληθείς σε μία δομή και ψευδής σε άλλη δομή, π.χ. η πρόταση $\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x \in z \wedge z \in y)$ είναι αληθής στη δομή R^*_σ της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$, και ψευδής στη δομή η_σ της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η αλήθεια εδώ θα ορισθεί στα πλαίσια μιας δομής. Με άλλα λόγια οι δομές μιας Γ_1 είναι διαφορετικοί κόσμοι.

Ορισμός: Έστω $\mathcal{A}$ μία δομή για την Γ_1.

Αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ λέγεται κάθε συνάρτηση

$\upsilon: M(\Gamma_1) \to |\mathcal{A}|$

$M(\Gamma_1)$ τό σύνολο των μεταβλητών της Γ_1.

Επειδή το $O(\Gamma_1)$ ορίσθηκε αναδρομικά, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε αποτίμηση υ στην $\mathcal{A}$ υπάρχει επέκταση της υ,

$\bar{\upsilon}: O(\Gamma_1) \to |\mathcal{A}|$ τέτοια ώστε:

i) $\bar{\upsilon}\ (x_i) = \upsilon\ (x_i)$, για κάθε $x_i \in M\ (\Gamma_1)$.

ii) $\bar{\upsilon}\ (c) = c^{\alpha}$, για κάθε $c \in \Sigma\ (\Gamma_1)$.

iii) $\bar{\upsilon}\ (ft_1\ t_2 \ldots t_n) = f^{\alpha}\left(\bar{\upsilon}\ (t_1), \bar{\upsilon}\ (t_2), \ldots, \bar{\upsilon}\ (t_n)\right)$.

για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f της Γ_1.

Αν υ μία αποτίμηση στη $\mathcal{a}$ για την Γ_1, η *τιμή* του $t \in 0\ (\Gamma_1)$ για την υ στην $\mathcal{a}$, είναι το $\bar{\upsilon}\ (t) \in |\ \mathcal{a}\ |$.

Αν υ είναι αποτίμηση στην $\mathcal{a}$ και $\alpha \in |\ \mathcal{a}\ |$, τότε η $\upsilon\ (x|\alpha)$ είναι η αποτίμηση που αντιστοιχεί το α στην x και συμφωνεί με την υ για όλες τις άλλες μεταβλητές, δηλαδή

$\upsilon\ (x|\alpha)\ (x) = \alpha$ και $\upsilon\ (x|\alpha)\ (y) = \upsilon\ (y)$ για κάθε $y \neq x$.

Παραδείγματα: Ας θεωρήσουμε την δομή η^* για την $\Gamma_1^{\alpha\rho}$, και μια αποτίμηση υ στην η^* τέτοια ώστε

$\upsilon\ (x_1) = -2$, $\upsilon\ (x_2) = -1$, $\upsilon\ (x_3) = 0$. Τότε

$\bar{\upsilon}\left(+\ (x_1, \cdot\ (x_2, x_3))\right) = +^{\eta^*}\left(\bar{\upsilon}\ (x_1), \bar{\upsilon}\ (\ \cdot\ (x_2, x_3))\right) =$

$= +^{\eta^*}\left(\upsilon\ (x_1), \cdot^{\eta^*}(\bar{\upsilon}\ (x_2), \bar{\upsilon}\ (x_3)\ )\ \right) =$

$= +^{\eta^*}\left(-2, \cdot^{\eta^*}\ (-1,0)\ \right) = +^{\eta^*}\ (-2,0) = -2.$

Επίσης $\bar{\upsilon}\left(\cdot(+\ (x_1, s\ (x_3)\ ), \cdot\ (s\ (0), x_2))\right) =$

$= \cdot^{\eta^*}\left(\bar{\upsilon}\ (+\ (x_1, s\ (x_3)\ )), \bar{\upsilon}\ (\ \cdot\ (s\ (0), x_2)\ )\ \right) =$

$= \cdot^{\eta^*}\left(+^{\eta^*}\ (\bar{\upsilon}\ (x_1), \bar{\upsilon}\ (s\ (x_3))), \cdot^{\eta^*}\ (\bar{\upsilon}\ (s\ (0)\ ), \bar{\upsilon}\ (x_2))\right) =$

$= \cdot^{\eta^*}\ (+^{\eta^*}\ (-2, s^{\eta^*}\ (\bar{\upsilon}\ (x_3)\ )\ ), \cdot^{\eta^*}\ (s^{\eta^*}\ (\bar{\upsilon}\ (0)), -1)) =$

$= \cdot^{\eta^*}\left(+^{\eta^*}\ (-2, -1), \cdot^{\eta^*}\ (-1, -1)\ \right) = \cdot^{\eta^*}\ (-3, -1) = -3.$

Επίσης αν $\mathcal{B}$ η γνωστή δομή για την Γ_1^{B} και μία αποτίμηση υ στην $\mathcal{B}$ τέτοια ώστε $\upsilon\ (x_1) = A$

$\upsilon\ (x_2) = A$, $\upsilon\ (x_3) = \Psi$ τότε για τον $t = \overline{+\ (x_1, x_2 \cdot x_3)}$

έχουμε $\bar{\upsilon}\ (t) = \bar{\upsilon}\left(\overline{+\ (x_1, x_2 \cdot x_3)}\right) = -^{\mathcal{B}}\left(\bar{\upsilon}(+\ (x_1, x_2 \cdot x_3))\right)$

$= -^{\mathcal{B}}\left(+^{\mathcal{B}}\ (\bar{\upsilon}\ (x_1), \bar{\upsilon}\ (x_2 \cdot x_3)\ )\right) = -^{\mathcal{B}}\left(+^{\mathcal{B}}\ (A, \cdot^{\mathcal{B}}\ (\bar{\upsilon}\ (x_2), \bar{\upsilon}\ (x_3)))\right) =$

$= -^{\mathcal{B}}\left(+^{\mathcal{B}}\ (\ A, \cdot^{\mathcal{B}}\ (A, \Psi)\ )\ \right) = -^{\mathcal{B}}\left(+^{\mathcal{B}}(A, \Psi)\ \right) =$

$= -^{\mathcal{B}}(A) = \Psi.$

Ένα μεταθετικό διάγραμμα παρακάτω, μας δίνει καλύτερη εικόνα για το ορισμό της τιμής του $t \in O(\Gamma_1)$ για την υ στην $\mathcal{a}$.

$$
\begin{tikzcd}
O(\Gamma_1) \arrow[r, "\bar{\upsilon}"] \arrow[d, "f"'] & |\mathfrak{a}| \arrow[d, "f^{\mathfrak{a}}"] \\
O(\Gamma_1) \arrow[r, "\bar{\upsilon}"] & |\mathfrak{a}|
\end{tikzcd}
$$

Εδώ θεωρούμε ότι το $n = 1$, δηλαδή το f είναι μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο.

$t \in O(\Gamma_1) \Longrightarrow f(t) \in O(\Gamma_1) \Longrightarrow \bar{\upsilon}(ft) \in |\mathfrak{a}|$

$t \in O(\Gamma_1) \Longrightarrow \bar{\upsilon}(t) \in |\mathfrak{a}| \Longrightarrow f^{\mathfrak{a}}\big(\bar{\upsilon}(t)\big) \in |\mathfrak{a}|$

Ορισμός: (Tarski): Έστω $\mathfrak{a}$ δομή για τη Γ_1 και υ αποτίμηση στην $\mathfrak{a}$. $\phi \in T(\Gamma_1)$.

Θα λέμε ότι *ο φ αληθεύει για την υ στην* $\mathfrak{a}$ και θα γράφουμε

$\mathfrak{a} \models \phi\,[\upsilon]$

(Ισοδύναμα θα λέμε ότι η $\mathfrak{a}$ ικανοποιεί τον φ για την υ) ανν

i) $\bar{\upsilon}(t_1) = \bar{\upsilon}(t_2)$, αν ο φ είναι της μορφής $t_1 = t_2$

ii) $\big(\bar{\upsilon}(t_1), \bar{\upsilon}(t_2), \ldots, \bar{\upsilon}(t_n)\big) \in P^{\mathfrak{a}}$, αν ο φ είναι της μορφής $Pt_1\, t_2 \ldots t_n$ όπου P n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1 και $t_1, t_2, \ldots, t_n$, όροι της Γ_1.

iii) δεν ισχύει $\mathfrak{a} \models \psi\,[\upsilon]$, αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$.

iv) αν $\mathfrak{a} \models \psi\,[\upsilon]$ τότε $\mathfrak{a} \models \chi\,[\upsilon]$ αν ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$.

v) για κάθε $\alpha \in |\mathfrak{a}|$: $\mathfrak{a} \models \psi\,[\upsilon(x|\alpha)]$, αν ο φ είναι της μορφής $\forall x\psi$.

Αν ο φ δεν αληθεύει στην $\mathfrak{a}$ για την υ, τότε γράφουμε

$\mathfrak{a} \not\models \phi\,[\upsilon]$.

Αν $T \subseteq T(\Gamma_1)$, θα λέμε ότι το T *αληθεύει για την υ στην* $\mathfrak{a}$ ανν κάθε στοιχείο του T αληθεύει για την υ στην $\mathfrak{a}$. Προφανώς έχουμε:

$\mathfrak{a} \models \phi \wedge \psi\,[\upsilon]$ ανν $(\mathfrak{a} \models \phi\,[\upsilon]$ και $\mathfrak{a} \models \psi\,[\upsilon])$

$\mathfrak{a} \models \phi \vee \psi\,[\upsilon]$ ανν $(\mathfrak{a} \models \phi\,[\upsilon]$ ή $\mathfrak{a} \models \psi\,[\upsilon])$

$\mathfrak{a} \models \phi \leftrightarrow \psi\,[\upsilon]$ ανν $[(\mathfrak{a} \models \phi\,[\upsilon]$ και $\mathfrak{a} \models \psi\,[\upsilon])$ ή $(\mathfrak{a} \not\models \phi[\upsilon]$ και $\mathfrak{a} \not\models \psi[\upsilon])]$

$\mathfrak{a} \models \exists x\psi\,[\upsilon]$ ανν υπάρχει $\alpha \in |\mathfrak{a}|$: $\mathfrak{a} \models \psi\,[\upsilon(x|\alpha)]$

iii) $\mathfrak{a} \models \neg\psi[\upsilon] \Leftrightarrow$ δεν ισχύει $\mathfrak{a} \models \phi[\upsilon]$

iv) $\mathfrak{a} \models \psi \to \chi[\upsilon] \Leftrightarrow (\mathfrak{a} \models \psi[\upsilon] \Rightarrow \mathfrak{a} \models \chi[\upsilon])$

όπου $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1 και υ αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.

Παραδείγματα:

1) Έστω η_σ η δομή για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ και υ αποτίμηση στην η_σ τέτοια ώστε $\upsilon(x_1) = 2$, $\upsilon(x_2) = 0$, $\upsilon(x_3) = 1$.
Τότε $\eta_\sigma \models (x_1 \in x_2 \to x_1 \in x_3)[\upsilon]$ γιατί $\eta_\sigma \not\models x_1 \in x_2 [\upsilon]$ επειδή $(\upsilon(x_1), \upsilon(x_2)) = (2, 0) \notin \in^{\eta_\sigma}$. Επίσης $\eta_\sigma \not\models x_1 \in x_3 [\upsilon]$.
2) Αν θεωρήσουμε τη δομή η^* για την $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ και μια αποτίμηση υ στην η^* τέτοια ώστε $\upsilon(x_2) = -1$ τότε $\eta^* \models \forall x_1 (x_1 \cdot x_2 = x_1)[\upsilon]$. Αυτό ισχύει γιατί για κάθε $n \in N$ ισχύει $(-n) \cdot^{\eta^*} (-1) = -n$ δηλαδή $\eta^* \models (x_1 \cdot x_2 = x_1)[\upsilon(x_1 | n)]$. Αν πάρουμε μία αποτίμηση u τώρα, τέτοια που $u(x_2) = 0$, τότε $\eta^* \not\models \forall x_1 (x_1 \cdot x_2 = x_1)[u]$, αφού δεν ισχύει $(-n) \cdot^{\eta^*} 0 = -n$ για κάθε $n \in N$.

Είναι προφανές ότι αν αληθεύει ένας τύπος για μία αποτίμηση υ στη δομή $\mathcal{A}$ ή όχι εξαρτάται από τις τιμές που δίνει η υ μόνο στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο αυτό. (Για να αποδειχθεί αυτό χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής για το Τ (Γ_1)). Άρα, αν δυο αποτιμήσεις στη $\mathcal{A}$ συμπίπτουν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον φ τότε ο φ αληθεύει και για τις δύο αποτιμήσεις ή για καμμιά τους. Συνεπώς μία πρόταση της Γ_1 αληθεύει για όλες τις αποτιμήσεις στην $\mathcal{A}$ ή για καμμιά τους.

Ορισμός: Έστω $\phi \in \Pi(\Gamma_1)$, $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ και $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1. Θα λέμε ότι

i) *η φ αληθεύει στην* $\mathcal{A}$ ή *η φ είναι αληθής στην* $\mathcal{A}$ ή *η* $\mathcal{A}$ *είναι μοντέλο της φ* και θα γράφουμε $\mathcal{A} \models \phi$, ανν η φ αληθεύει για κάθε αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.
ii) *η φ είναι ψευδής στην* $\mathcal{A}$ και γράφουμε $\mathcal{A} \not\models \phi$, ανν η φ δεν είναι αληθής στην $\mathcal{A}$. υπάρχει αποτίμηση που δεν αληθεύει
iii) Η $\mathcal{A}$ *είναι μοντέλο του Π*, ανν $\mathcal{A} \models \phi$ για κάθε $\phi \in \Pi$.

Παράδειγμα: θα δείξουμε ότι η πρόταση
$\exists x \forall y (x + y = y)$ είναι αληθής στη δομή η για την $\Gamma_1^{\alpha\rho}$. Έστω υ τυχούσα αποτίμηση στην η. Τότε
$\eta \models \exists x \forall y (x + y = y)[\upsilon]$ ανν (υπάρχει $m \in N$: $\eta \models \forall y (x + y = y)[\upsilon(x | m)]$) ανν (υπάρχει $m \in N$ τέτοιο που για κάθε $n \in N$

$\eta \models (x + y = y)\ [\upsilon\ (x \mid m)\ (y \mid n)]\big)$ ανν $\big($υπάρχει m ∈ N τέτοιο που για κάθε n ∈N:

$\overline{\upsilon\ (x \mid m)\ (y \mid n)}\ (x + y) = \overline{\upsilon\ (x \mid m)\ (y \mid n)}\ (y)\ \big)$ ανν $\big($υπάρχει m ∈ N τέτοιο που για κάθε n ∈ N $m + n = n\big)$ που είναι αληθές.

Τώρα θα δώσουμε τον ορισμό της έκφρασης «ο φ είναι λογικό συμπέρασμα από το Σ».

Ορισμός: Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1)$. Θα λέμε ότι

i) *Το Σ συνεπάγεται λογικά τον φ* ή ότι *ο φ είναι λογικό συμπέρασμα από το Σ*, και θα γράφουμε $\Sigma \models \phi$, ανν για κάθε δομή $\mathcal{a}$ και κάθε αποτίμηση υ στην $\mathcal{a}$, αν αληθεύει το Σ για την υ στην $\mathcal{a}$, τότε αληθεύει και ο φ για την υ στην $\mathcal{a}$.

$$\Sigma \models \phi \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{για κάθε } \mathcal{a} \text{ και κάθε } \upsilon \\ \left. \begin{array}{l} \mathcal{a} \models \psi\ [\upsilon] \\ \text{για κάθε } \psi \in \Sigma \end{array} \right\} \Longrightarrow \mathcal{a} \models \phi\ [\upsilon] \end{array} \right\}$$

ii) *O $\phi \in T(\Gamma_1)$ είναι έγκυρος* ανν για κάθε δομή $\mathcal{a}$ και κάθε αποτίμηση υ στην $\mathcal{a}$, ο φ αληθεύει για την υ στην $\mathcal{a}$.

Έχουμε για κάθε $\phi \in T(\Gamma_1)$

$\varnothing \models \phi$ ανν ο φ είναι έγκυρος. Γράφουμε σ' αυτή την περίπτωση $\models \phi$. Οι έγκυροι τύποι λοιπόν αντιστοιχούν στις ταυτολογίες. Όπως και στον προτασιακό λογισμό ορίζουμε «ο φ συνεπάγεται λογικά τον ψ» και «οι φ, ψ είναι λογικά ισοδύναμοι»

$$\phi \models \psi \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{για κάθε } \mathcal{a} \text{ και κάθε } \upsilon \\ \mathcal{a} \models \phi\ [\upsilon] \Longrightarrow \mathcal{a} \models \psi\ [\upsilon] \end{array} \right\}$$

$$\phi \models\!\dashv \psi \Longleftrightarrow \{\ \phi \models \psi \text{ και } \psi \models \phi\ \}$$

Γράφουμε $\Pi \models \phi$ για $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ και $\phi \in \Pi(\Gamma_1)$ ανν κάθε μοντέλο του Π είναι και μοντέλο του φ.

Παραδείγματα: Έστω P μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο.

1) $\forall x\ P(x) \models P(y)$

Έστω μία δομή $\mathcal{a}$ και υ μία αποτίμηση στην $\mathcal{a}$ τέτοια που $\mathcal{a} \models \forall x\ P(x)\ [\upsilon]$. Τότε για κάθε $\alpha \in |\ \mathcal{a}\ |$:
$\mathcal{a} \models P(x)\ [\upsilon\ (x|\alpha)]$, δηλαδή για κάθε $\alpha \in |\ \mathcal{a}\ | : \alpha \in P^{\mathcal{a}}$.

Προφανώς έχουμε $\upsilon(y) \in P^{\mathcal{a}}$, οπότε $\mathcal{a} \models P(y)\ [\upsilon]$.

2) $P(x) \not\models \forall x\ P(x)$

Έστω $\mathcal{A}$ η δομή με $|\mathcal{A}| = \{\alpha, b\}$ και $P^{\mathcal{A}} = \{\alpha\}$.

Επίσης έστω υ μία αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $\upsilon(x) = \alpha$. Τότε $\mathcal{A} \models P(x)\,[\upsilon]$, αφού $\upsilon(x) = \alpha \in P^{\mathcal{A}}$, αλλά $\mathcal{A} \not\models \forall x P(x)\,[\upsilon]$, αφού $b \notin P^{\mathcal{A}}$.

3) Θα δείξουμε ότι $\models \forall x\, P(x) \rightarrow \exists y\, P(y)$

Έστω $\mathcal{A}$ δομή και υ μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $\mathcal{A} \models \forall x\, P(x)\,[\upsilon]$.

Τότε για κάθε $\alpha \in |\mathcal{A}|$: $\mathcal{A} \models P(x)\,[\upsilon(x|\alpha)]$ δηλαδή για κάθε $\alpha \in |\mathcal{A}|$: $\alpha \in P^{\mathcal{A}}$. Έστω b τυχόν στοιχείο του $|\mathcal{A}|$. Τότε $b \in P^{\mathcal{A}}$ και συνεπώς

$\mathcal{A} \models P(y)\,[\upsilon(y|b)]$. Άρα υπάρχει $\alpha \in |\mathcal{A}|$:

$\mathcal{A} \models P(y)\,[\upsilon(y|\alpha)]$ οπότε $\mathcal{A} \models \exists\, y\, P(y)\,[\upsilon]$.

Στον προτασιακό λογισμό είδαμε ότι αν δοθεί ένα πεπερασμένο $\Sigma \subseteq T(\Gamma)$ και τυχών $\phi \in T(\Gamma)$, μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\Sigma \models \phi$ ή όχι και συνεπώς λόγω του θεωρήματος πληρότητας, αν $\Sigma \vdash \phi$ ή όχι.

Στον κατηγορηματικό λογισμό δεν υπάρχει κάτι τέτοιο, γιατί οι περιπτώσεις που πρέπει να εξετασθούν είναι άπειρες, αφού υπάρχουν άπειρες δομές για την Γ_1. Μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα: i) $\models x = x$

ii) $\models x = y \rightarrow y = x$

iii) $\models x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

iv) $\models (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow t\,(\vec{x}) = t(\vec{y})$,
για κάθε όρο $t \in T(\Gamma_1)$ και $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

v) $\models \vec{x} = \vec{y} \rightarrow \big(\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi(\vec{y})\big)$,
για κάθε τύπο $\phi \in T(\Gamma_1)$.

Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε το:

Λήμμα: Για κάθε $\phi, \psi \in T\,(\Gamma_1)$ ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

1) $\neg\,(\forall x)\,\phi \models\!\!\!\dashv (\exists x)\,\neg\phi$ } γενικευμένοι κανόνες
2) $\neg\,(\exists x)\,\phi \models\!\!\!\dashv (\forall x)\,\neg\phi$ } του De Morgan
3) $\forall x\, \forall y\, \phi \models\!\!\!\dashv \forall y\, \forall x \phi$ } αντιμετάθεση ποσοδεικτών
4) $\exists\, x\, \exists y \phi \models\!\!\!\dashv \exists y\, \exists x \phi$ } του ίδιου είδους

5) $\forall x\phi \models\dashv \phi$
6) $\exists x\phi \models\dashv \phi$ } αν x όχι ελεύθερη μεταβλητή στον ϕ

7) $\forall x\,(\phi\wedge\psi) \models\dashv (\forall x\phi) \wedge (\forall x\psi)$
8) $\exists x\,(\phi\vee\psi) \models\dashv (\exists x\phi) \vee (\exists x\psi)$ } επιμεριστικότητα των $\forall,\exists$ επί των $\wedge$, $\vee$ αντίστοιχα

9) $\forall x\,(\phi \vee \psi) \models\dashv (\forall x\phi) \vee \psi$
10) $\exists x\,(\phi\wedge\psi) \models\dashv (\exists x\phi) \wedge\psi$ } αν η x δεν είναι ελεύθερη στον ψ

11) $\forall x\phi \models\dashv \forall y\phi$
12) $\exists x\phi \models\dashv \exists y\phi$ } αν η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται στον ϕ.

Τέλος αποδεικνύεται η πρόταση:

Πρόταση:

1) $\phi \models\dashv \psi \Longrightarrow \neg\phi \models\dashv \neg\psi$

2) $\left.\begin{array}{l}\phi \models\dashv \phi' \\ \psi \models\dashv \psi'\end{array}\right\} \Longrightarrow \phi \to \psi \models\dashv \phi' \to \psi'$

3) $\phi \models\dashv \psi \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall x\phi \models\dashv \forall x\psi \text{ και} \\ \exists x\phi \models\dashv \exists x\psi\end{array}\right\}$

Αν στη θέση των ϕ, ψ, σ στις ταυτολογίες του προτασιακού λογισμού, βάλουμε τύπους της Γ_1, τότε αυτό που προκύπτει είναι έγκυροι τύποι της Γ_1.

Ορισμός: Ο τύπος $\phi \in T(\Gamma_1)$ είναι σε *κανονική μορφή* αν έχει τη μορφή
$\phi = Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\psi$, όπου $Q_i = \forall$ ή $\exists$ και ο τύπος ψ δεν έχει ποσοδείκτες.

Πρόταση: Για κάθε τύπο $\phi \in T(\Gamma_1)$ υπάρχει λογικά ισοδύναμος ϕ' σε κανονική μορφή.

Απόδειξη: Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στους τύπους

1) Για ατομικούς τύπους ισχύει, γιατί κάθε τύπος χωρίς ποσοδείκτες είναι σε κανονική μορφή.
2) Αν ο α είναι ισοδύναμος με τον α' σε κανονική μορφή, τότε ο $\forall x\alpha$ είναι ισοδύναμος με τον $\forall x\alpha'$ που είναι σε κανονική μορφή

$$\alpha \models\dashv \alpha' \Longrightarrow \forall x\alpha \models\dashv \forall x\alpha'$$

3) Αν $\alpha \models\dashv \alpha'$, όπου ο α' είναι σε κανονική μορφή, τότε ο $\neg\,\alpha$ είναι

ισοδύναμος με τον $\neg\, \alpha'$ που γράφεται σε κανονική μορφή. Π.χ.
$\neg\, \forall x\ \exists y\ \exists z\ \beta \models\ \dashv\ \exists\ x\ \forall y\ \forall z\ \neg\, \beta$

4) Τέλος για την περίπτωση $\alpha \to \beta$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \models\ \dashv \alpha' \\ \beta \models\ \dashv \beta' \end{array}\right\}$$

και οι α', β', είναι σε κανονική μορφή. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε μεταβλητή που δεσμεύεται από ποσοδείκτη σε έναν από τους τύπους α', β' δεν υπάρχει στον άλλο. Μετά εφαρμόζουμε τις:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha \to \forall x \beta) \models\ \dashv \forall\ x\ (\alpha \to \beta) \\ (\alpha \to \exists x \beta) \models\ \dashv \exists\ x\ (\alpha \to \beta) \end{array}\right\} \text{για x όχι ελεύθερη στον } \alpha$$

$\neg \alpha \vee \forall x \beta = \forall x (\neg \alpha \vee \beta) = \forall x (\alpha \to \beta)$

$\neg \alpha \vee \exists x \beta = \exists x (\neg \alpha \vee \beta) = \exists x (\alpha \to \beta)$

$$\left.\begin{array}{l} (\forall x \alpha \to \beta) \models\ \dashv \exists\ x\ (\alpha \to \beta) \\ (\exists x \alpha \to \beta) \models\ \dashv \forall\ x\ (\alpha \to \beta) \end{array}\right\} \text{για x όχι ελεύθερη στον } \beta$$

$\neg(\forall x \alpha) \vee \beta = (\exists x \neg \alpha) \vee \beta = \exists x (\neg \alpha \vee \beta) = \exists x (\alpha \to \beta)$

$\neg(\exists x \alpha) \vee \beta = (\forall x \neg \alpha) \vee \beta = \forall x (\neg \alpha \vee \beta) = \forall x (\alpha \to \beta)$

για να κατασκευάσουμε ένα τύπο σε κανονική μορφή ισοδύναμο με τον $\alpha' \to \beta'$ (και άρα και με τον $\alpha \to \beta$).

Παραδείγματα:

1) $\forall\ x\ \exists\ y\ \phi \to \exists\ z\ \psi \models\ \dashv\ \exists\ x\ \forall\ y\ \exists\ z\ (\phi \to \psi)$ όπου οι x και y δεν συμβαίνουν στον ψ και η z δεν υπάρχει στον φ.

2) $\forall x \phi\ (x) \to \forall x \psi(x) \models\ \dashv\ \forall x \phi(x) \to \forall y \psi(y) \models\ \dashv$
$\exists x\ \forall y\ \big(\phi\ (x) \to \psi(y)\big)$

εδώ επανάληψη

Ασκήσεις

1) Θεωρούμε τους τύπους της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$
$(x_1 \in x_2) \vee (x_1 \in x_3)$, $(x_1 \in x_2) \wedge (x_2 \in x_3) \to (x_1 \in x_3)$,
$(\exists x_2)\ (x_2 \notin x_1, \wedge\ x_2 \notin x_3)$

Έστω υ μια αποτίμηση στη δομή η_σ, τέτοια που $\upsilon(x_1) = 2$, $\upsilon(x_2) = 4$ και $\upsilon(x_3) = 7$. Ποιοι από τους παραπάνω τύπους αληθεύουν για την υ στη η_σ;

$|\eta_\sigma| = N$

$\in_{m,n} \mid m < n$

2) Έστω υ μια αποτίμηση στη δομή η^* για την $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ τέτοια που $\upsilon(x_1)$

$\eta^* \mid = \ldots$

$= -3$, $\upsilon(x_2) = -4$, $\upsilon(x_3) = 0$. Προσδιορίστε τις τιμές των παρακάτω όρων για την υ στην η^*:

$s\big(s(x_1) + s(s(x_2))\big) + (x_1 \cdot x_3)$, $x_2 \cdot \big(x_1 + s(s(x_3))\ \cdot 0\big)$

Ποιοί από τους παρακάτω τύπους αληθεύουν για την υ στην η^*;

$x_3 < \big(x_1 + s(x_2)\big)$, $\exists x_1 \big(s(s(0)) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2\big)$

$\forall x_1 (x_1 < 0 \rightarrow x_3 < x_2)$

3) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ είναι αληθείς στη δομή η για την $\Gamma_1^{\alpha\rho}$;

$\exists x (x + x = 0)$, $\forall x (x = x) \vee \exists y (y \neq y)$,

$\forall x (x \neq x) \rightarrow \forall x \forall y (x + y = y + x)$

4) Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1)$. Δείξτε ότι για κάθε ϕ, ψ:

i) $\Sigma \cup \{\phi\} \models \psi$ ανν $\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$

ii) $\phi \models\dashv \psi$ ανν $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

5) Δείξτε ότι α) $\exists x \forall y P(x, y) \models \forall y \exists x P(x, y)$

και β) $\forall y \exists x P(x, y) \not\models \exists x \forall y P(x, y)$.

όπου P διμελές κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1.

6) Δείξτε ότι για κάθε ϕ, ψ

$\{\forall x (\phi \rightarrow \psi), \forall x \phi\} \models \forall x \psi$.

7) Δείξτε ότι αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ, τότε

$\phi \models \forall x \phi$

8) Έστω $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ τέτοιο που για κάθε $\phi \in \Pi(\Gamma_1)$:

$\Pi \models \phi$ ή $\Pi \models \neg \phi$. Έστω $\mathfrak{a}$ ένα μοντέλο του Π. Αποδείξτε ότι για κάθε $\phi \in \Pi(\Gamma_1)$:

$\mathfrak{a} \models \phi$ ανν $\Pi \models \phi$.

9) Δείξτε ότι:

$(\forall x \phi) \vee (\forall x \psi) \models \forall x (\phi \vee \psi)$

$\exists x (\phi \wedge \psi) \models (\exists x \phi) \wedge (\exists x \psi)$

$\exists x \forall y \phi \models \forall y \exists x \phi$

$\forall x (\phi \rightarrow \psi) \models \forall x \phi \rightarrow \forall x \psi$

$(\exists x \phi \rightarrow \exists x \psi) \models \exists x (\phi \rightarrow \psi)$

Οι αντίστροφες λογικές συνεπαγωγές των παραπάνω δεν ισχύουν.

10) Αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ, δείξτε ότι:

$\models (\forall x \phi \rightarrow \psi) \rightarrow \big(\exists x (\phi \rightarrow \psi)\big)$

$\models (\exists x \phi \rightarrow \psi) \rightarrow \big(\forall x (\phi \rightarrow \psi)\big)$

$\models (\psi \to \forall\, x\, \phi) \to \big(\forall\, x\, (\psi \to \phi)\big)$
$\models (\psi \to \exists\, x\, \phi) \to \big(\exists\, x\, (\psi \to \phi)\big)$

11) Δώστε κανονικές μορφές στους τύπους:
$\forall\, x\, \phi \to \exists\, x\, \phi$, $\forall\, x\, [\phi \wedge (\forall\, y\, \psi) \to \big(\exists\, z\, \sigma(z)\big)]$
$\exists\, x\, \phi \to \forall\, x\, \phi$, $\forall\, x\, [\phi \to \big(\forall\, y\, (x = y \wedge \phi)\big)]$
όπου οι ϕ, ψ, σ δεν περιέχουν ποσοδείκτες και
οι ελεύθερες μεταβλητές του ϕ είναι η x
οι ελεύθερες μεταβλητές του ψ είναι η y
οι ελεύθερες μεταβλητές του σ είναι η z

12) Στη γλώσσα της αριθμητικής διατυπώστε την σχέση $x|y$: ο x διαιρεί τον y. Έστω τώρα η δομή a για τη γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ με $|\mathit{a}| = N$ και $\epsilon^{a} = | = \{(\alpha, b) \mid \alpha \mid b\} \subseteq N^2$.
Εξετάστε ποια από τα παρακάτω αξιώματα ισχύουν στην
$\mathit{a} = < N, \epsilon^{a} > = < |\mathit{a}|, | >$.

$\exists\, x\, \forall\, y\, (y \notin x)$ ΟΧΙ
$\forall\, z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$ ΝΑΙ
$\forall\, x\, \forall y\, \exists\, z\, (z = \{x, y\})$ ΟΧΙ
$\forall x\, \exists y\, \big(y = P(x)\big)$ ΝΑΙ

13) Έστω $\mathit{a} = < N, < >$, $\mathit{b} = < Z, < >$, $\gamma = < Q, < >$, $\varDelta = < R, < >$ τα διατεταγμένα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, ρητών και πραγματικών. Θεωρούμε όλες τις παραπάνω δομές για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$.
α) Βρείτε ϕ της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ όπου $\phi \in \Pi\, (\Gamma_1^{\theta\sigma})$ τέτοια ώστε $\mathit{b} \models \phi$ και $\mathit{a} \models \neg\, \phi$.
β) βρείτε $\psi \in \Pi\, (\Gamma_1^{\theta\sigma})$ τέτοια ώστε $\gamma \models \psi$ και $\mathit{b} \models \neg\, \psi$.
γ) Μπορούμε να βρούμε $\sigma \in \Pi\, (\Gamma_1^{\theta\sigma})$ τέτοια ώστε $\varDelta \models \sigma$ και $\gamma \models \neg\, \sigma$;

14) Αν $\Gamma_1^{\theta\sigma}$, βρείτε δομές a και b για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ με $|\mathit{a}|$ και $|\mathit{b}|$ πεπερασμένα, έτσι ώστε $\mathit{a} \models \phi$ και $\mathit{b} \models \neg\, \phi$ όπου
$\phi = (\exists\, x)\, \forall\, y\, (x \in y \vee x = y \vee y \in x)$

15) Έστω $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ η γλώσσα της θεωρίας συνόλων και η_σ η γνωστή δομή για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$.
α) Ποιο στοιχείο του N παίζει το ρόλο του κενού συνόλου;
β) Πώς ερμηνεύεται στην η_σ η σχέση $\subseteq$;

γ) Αν $n \in N$, ποιο στοιχείο του N παίζει το ρόλο του δυναμοσυνόλου $P(n)$;

δ) Ποια από τα παρακάτω αξιώματα της θεωρίας συνόλων ισχύουν στην η_σ:

i) $\exists\, x\, \forall\, y\, (y \notin x)$

ii) $\forall z\, (z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow x = y$

iii) $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$

iv) $\forall\, x\, \forall\, y\, \exists\, z\, \big(z = \{x, y\}\big)$

16) Δείξτε ότι καμμιά από τις παρακάτω προτάσεις δεν συνεπάγεται λογικά από τις άλλες:

$\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, \big(Pxy \rightarrow (Pyz \rightarrow Pxz)\big)$

$\forall\, x\, \forall\, y\, \big(Pxy \rightarrow (Pyx \rightarrow x = y)\big)$

$\forall\, x\, \exists\, y\, Pxy \rightarrow \exists\, x\, \forall y\, Pxy$

17) Αν η γλώσσα μας Γ_1, περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P, και $\alpha = (|\alpha|, P^{\alpha})$ μια δομή για την Γ_1, βρείτε πρόταση σ τέτοια ώστε η δομή α είναι μοντέλο της σ ανν το $|\alpha|$ έχει ακριβώς δύο στοιχεία. Επίσης βρείτε πρόταση φ τέτοια ώστε η α είναι μοντέλο της φ ανν η $P^{\alpha} \subseteq |\alpha|^2$ είναι συνάρτηση. Τέλος βρείτε πρόταση ψ τέτοια ώστε η α είναι μοντέλο της ψ ανν η P^{α} είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση.

18) Για την κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις βρείτε ένα τύπο που να ορίζει αυτή τη σχέση, στη δομή $(N, +, \cdot)$

$\{0\}, \{1\}, \{(m, n) \mid n = m + 1\} \subseteq N^2$

$\{(m, n) \mid m < n\} \subseteq N^2$

3. Η Συντακτική Προσέγγιση του Κατηγορηματικού Λογισμού

Αξιωματικοποίηση του πρωτοβάθμιου Κ.Λ. Πληρότητα

Υπάρχει κάτι ανάλογο με τους πίνακες αλήθειας, για τις πρωτοβάθμιες γλώσσες; Δηλαδή κάποιος σημασιολογικός αλγόριθμος που να ελέγχει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων αν ένας τυχών τύπος είναι ή όχι έγκυρος; Η απάντηση είναι αρνητική (Church 1936). Δεν υπάρχει κανενός είδους αλγόριθμος (ούτε σημασιολογικός ούτε συντακτικός) γι' αυτό το σκοπό.

Έτσι η συντακτική περιγραφή είναι πιο επιτακτική στον Κ.Λ.

Ορισμός: Θα λέμε ότι *ο φ είναι γενίκευση του ψ* ανν ο φ είναι ο ψ ή ο φ είναι της μορφής $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\ \psi$. Ένα αξιωματικό σύστημα για τον κατηγορηματικό λογισμό, θα αποτελείται από ένα σύνολο συμβόλων, ένα σύνολο τύπων, σύνολο αξιωμάτων και τέλος ένα σύνολο αποδεικτικών κανόνων:

1) Το σύνολο των συμβόλων είναι το σύνολο των συμβόλων της γλώσσας Γ_1 (τυχαία γλώσσα).
2) Τ (Γ_1) είναι το σύνολο των τύπων.
3) Το σύνολο K_1 των αποδεικτικών κανόνων είναι το ίδιο με το σύνολο των αποδεικτικών κανόνων στον προτασιακό λογισμό, δηλαδή έχει ένα και μόνο ένα στοιχείο τον κανόνα Μ.Ρ.
4) Το σύνολο A_1 των αξιωμάτων ισούται με την ένωση δύο ξένων συνόλων Λ_1 και M_1.

   Τα στοιχεία του Λ_1 λέγονται *λογικά αξιώματα*, περιγράφουν τον ρόλο των λογικών συμβόλων της Γ_1, είναι στοιχεία του $T(\Gamma_1)$, και είναι γενικεύσεις τύπων της ακόλουθης μορφής.

ΑΣ1 $\boxed{\phi}$

όπου φ είναι τύπος που παίρνουμε αν σε μια ταυτολογία αντικαταστήσουμε όλες τις προτασιακές μεταβλητές με τύπους της Γ_1, π.χ.

$$\big(\forall x\ P(x)\big) \wedge \big(\exists y\ Q(x, y)\big) \rightarrow \big(\exists y\ Q(x, y)\big) \wedge \big(\forall x\ P(x)\big)$$

ΑΣ2 $\boxed{\forall x \phi \rightarrow \phi^x_t}$

όπου η x είναι *αντικαταστάσιμη από τον t στον φ* και ϕ^x_t είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον φ αντικαθιστώντας την x, όπου εμφανίζεται ελεύθερη στον φ, με t.

ΑΣ3 $\boxed{\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \forall x \psi)}$

ΑΣ4 $\boxed{\phi \rightarrow \forall x \phi}$

όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ.

ΑΣ5 $\boxed{x = x}$

ΑΣ6 $\boxed{x = y \rightarrow (\phi \rightarrow \phi^*)}$

όπου φ ατομικός τύπος και φ* ο τύπος που παίρνουμε από τον φ αντικαθιστώντας την x (σε μερικές ή όλες τις εμφανίσεις της) με y.

Τα στοιχεία του M_1 λέγονται *μή λογικά αξιώματα* και περιγράφουν το ρόλο των μή λογικών συμβόλων της Γ_1. Άλλα επομένως θα είναι τα μή λογικά αξιώματα ενός αξιωματικού συστήματος για την θεωρία συνόλων και άλλα ενός για την αριθμητική.

Τα μή λογικά αξιώματα για την αριθμητική είναι:

$\forall x \big(s(x) \neq 0)\big)$
$\forall x\, \forall y \big(s(x) = s(y) \rightarrow x = y\big)$
$\forall x\, (x + 0 = x)$
$\forall x\, \forall y \big(x + s(y) = s(x + y)\big)$
$\forall x\, (x \cdot 0 = 0)$
$\forall x\, \forall y \,\big((x \cdot s(y)\big) = x \cdot y + x\big)$
$\forall x_1, \forall x_2 \ldots \forall x_n\, [\phi(0, \vec{x}) \wedge \forall y \big(\phi(y, \vec{x}) \rightarrow \phi(s(y), \vec{x})\big) \rightarrow \forall y\, \phi(y, \vec{x})]$
όπου $\phi(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τύπος της $\Gamma_1^{\alpha\rho}$ τέτοιος που οι μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον φ είναι ανάμεσα στις $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Τα παραπάνω αξιώματα λέγονται αξιώματα του Peano, και το τελευταίο (που είναι αξιωματικό σχήμα) αντιστοιχεί στην αρχή της επαγωγής για τους φυσικούς.

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν αποκλείεται να έχουμε $M_1 = \varnothing$, να μην έχει δηλαδή το αξιωματικό σύστημα καθόλου μή λογικά αξιώματα. Έστω Γ_1 μια πρωτοβάθμια γλώσσα. Μελετώντας το αξιωματικό σύστημα με $M_1 = \varnothing$ ουσιαστικά μελετάμε όλα τα αξιωματικά συστήματα που έχουν φυσικά για υπόβαθρο την ίδια πρωτοβάθμια γλώσσα. Στο εξής θ' ασχοληθούμε *αποκλειστικά με το αξιωματικό σύστημα* $< \Gamma_1, T\ (\Gamma_1), A_1 = \Lambda_1, K_1 >$ δηλαδή το αξιωματικό σύστημα με σύμβολα, τα σύμβολα μιας γλώσσας Γ_1, τους τύπους $T(\Gamma_1)$, τα αξιώματα $A_1 = \Lambda_1$ *(μόνο τα λογικά αξιώματα)* και αποδεικτικούς κανόνες μόνο τον MP.

Πρέπει να πούμε μερικά λόγια για το ΑΣ2. Η ιδέα είναι *«αν κάθε αντικείμενο έχει την ιδιότητα φ τότε και το συγκεκριμένο αντικείμενο t έχει την φ»*. Πρέπει όμως να προσέξουμε μήπως κάποιο κομμάτι του t είναι ασυμβίβαστο με κάποιο κομμάτι του φ, δηλαδή δεν πρέπει κάποια μεταβλητή που εμφανίζεται στον t, να δεσμευτεί από κάποιον ποσοδείκτη του φ. Για παράδειγμα, αν $\phi = \neg \forall y\ (x = y)$ και $t = y$ τότε $\phi^x_t = \neg \forall y\ (y = y)$ οπότε η $\forall x \phi \rightarrow \phi^x_t$ είναι η πρόταση

$$\forall x \neg \forall y\ (x = y) \rightarrow \neg \forall y\ (y = y)$$

η οποία είναι ψευδής σχεδόν σ' όλες τις δομές για τη Γ_1. Πράγμα που δεν συμβιβάζεται με το γεγονός ότι θέλουμε έγκυρους τύπους για αξιώματα.

Ορισμός: Θα λέμε ότι, *η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον φ*, ανν

i) ο φ είναι ατομικός, ή

ii) ο φ είναι της μορφής $\neg \psi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ, ή

iii) ο φ είναι της μορφής $\psi \rightarrow \chi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ και στον χ, ή

iv) ο φ είναι της μορφής $\forall\ y\ \psi$ και

α) η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall y\ \psi$ ή

β) η y δεν εμφανίζεται στον t και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ.

Έχουμε λοιπόν περιγράψει πλήρως το αξιωματικό σύστημα $< \Gamma_1, T(\Gamma_1), A_1 = \Lambda_1, K_1 >$

Ορισμός: Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1)$ και $\phi \in T(\Gamma_1)$. *Απόδειξη* (τυπική απόδειξη) *του φ από το Σ* λέγεται μία πεπερασμένη ακολουθία τύπων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ τέτοια ώστε $\phi_n = \phi$ και για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, ο ϕ_i είναι:

i) ή αξίωμα

ii) ή τύπος του Σ

iii) ή προκύπτει από δύο προηγούμενους τύπους μέσω M.P., δηλαδή υπάρχουν $j, k < i$ έτσι ώστε $\phi_j = \phi_k \rightarrow \phi_i$.

θα συμβολίζουμε $\Sigma \vdash \phi$ και θα λέμε ότι το Σ *τυπικά αποδεικνύει* τον ϕ, αν υπάρχει μία τυπική απόδειξη του ϕ από το Σ. Αν ο ϕ αποδεικνύεται τυπικά από το κενό σύνολο, τότε θα λέμε ότι ο ϕ είναι *τυπικό θεώρημα* και θα το συμβολίζουμε με $\vdash \phi$.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα τυπικής απόδειξης στο αξιωματικό σύστημα $< \Gamma_1, T(\Gamma_1), \mathcal{A}_1 = \Lambda_1, K_1 >$.

Θέλουμε $\vdash \forall x \left(P(x) \rightarrow \exists y\, P(y)\right)$

1. $\forall x \left[\left(\forall y \neg P(y) \rightarrow \neg P(x)\right) \rightarrow \left(P(x) \rightarrow \neg \forall y \neg P(y)\right)\right]$ ΑΣ1

2. $\forall x \left[\left(\forall y \neg P(y) \rightarrow \neg P(x)\right) \rightarrow \left(P(x) \rightarrow \neg \forall y \neg P(y)\right)\right] \rightarrow$
$\left[\forall x \left(\forall y \neg P(y) \rightarrow \neg P(x)\right) \rightarrow \forall x \left(P(x) \rightarrow \neg \forall y \neg P(y)\right)\right]$ ΑΣ3

3. $\forall x \left(\forall y \neg P(y) \rightarrow \neg P(x)\right) \rightarrow \forall x \left(P(x) \rightarrow \neg \forall y \neg P(y)\right)$ 1, 2, M.P.

4. $\forall x \left(\forall y \neg P(y) \rightarrow \neg P(x)\right)$ αντικατάσταση; ΑΣ2

5. $\forall x \left(P(x) \rightarrow \neg \forall y \neg P(y)\right)$ 3, 4, M.P.

Στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε συχνά την εξής μέθοδο απόδειξης: Αν θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε x έχει μια ιδιότητα, δείχνουμε ότι ένα τυχόν x έχει αυτή την ιδιότητα. Παραθέτουμε το σχετικό θεώρημα (μεταθεώρημα) χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα γενίκευσης: Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \vdash \phi$ και η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T, τότε, $T \vdash \forall x \phi$.

Ο περιορισμός ότι η x δεν είναι ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T, είναι απαραίτητος γιατί π.χ. αν $T = \{P(x)\}$ και $\phi = P(x)$ τότε ισχύει $T \vdash \phi$, αλλά δεν ισχύει $T \vdash \forall x \phi$ (διότι $P(x) \not\models \forall x\, P(x)$ και το θεώρημα της πληρότητας που θα δούμε αργότερα $T \vdash \psi \Longrightarrow T \models \psi$).

Όπως στον προτασιακό λογισμό μπορούμε να αποδείξουμε το:

Θεώρημα απαγωγής: Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Τότε για κάθε ϕ, ψ: $T \cup \{\phi\} \vdash \psi \Longleftrightarrow T \vdash \phi \rightarrow \psi$.

Πόρισμα του παραπάνω είναι το:

Θεώρημα αντιθετοαντιστροφής: Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και για κάθε ϕ, ψ:

$$T \cup \{\phi\} \vdash \neg \psi \Longleftrightarrow T \cup \{\psi\} \vdash \neg \phi$$

Απόδειξη: ($\Longrightarrow$) Έστω ότι $T \cup \{\phi\} \vdash \neg \psi$. Τότε βάση του θεωρήματος απαγωγής, $T \vdash \phi \to \neg \psi$. Η παρακάτω τυπική απόδειξη μας δείχνει ότι $T \vdash \psi \to \neg \phi$:

$$\left.\begin{array}{ll} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \lambda. & \phi \to \neg \psi \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη από T}$$

$\lambda + 1.\ (\phi \to \neg \psi) \to (\psi \to \neg \phi)$ ΑΣ1

$\lambda + 2.\ \psi \to \neg \phi$ $\lambda, \lambda+1$, Μ.Ρ.

και πάλι μέσω του θεωρήματος απαγωγής έχουμε $T \cup \{\psi\} \vdash \neg \phi$.

($\Longleftarrow$) Παρόμοια.

Ορισμός: Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Θα λέμε ότι

α) Το T είναι *συνεπές* ανν δεν υπάρχει τύπος φ τέτοιος που $T \vdash \phi$ και $T \vdash \neg \phi$.

β) Το T είναι *αντιφατικό* ανν το T ασυνεπές.

ίσον είναι

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν το T είναι αντιφατικό τότε $T \vdash \psi$ για κάθε $\psi \in T(\Gamma_1)$. Πράγματι, έστω ότι για κάποιο τύπο φ ισχύουν: $T \vdash \phi$ και $T \vdash \neg \phi$.

$\phi \to (\neg\phi \to \psi)$

$T \vdash \phi$

$T \vdash \neg\phi$

Τότε χρησιμοποιώντας το λογικό αξίωμα $\phi \to (\neg \phi \to \psi)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη του ψ από το T, για τυχόντα τύπο ψ.

M.P

Θεώρημα της σε άτοπο απαγωγής: Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε φ: αν το $T \cup \{\phi\}$ αντιφατικό $\Longrightarrow T \vdash \neg \phi$.

Απόδειξη: Έστω το $T \cup \{\phi\}$ αντιφατικό. Τότε για κάποιο ψ: $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ και $T \cup \{\phi\} \vdash \neg \psi$. Άρα λόγω του θεωρήματος απαγωγής

$$T \vdash \phi \to \psi \text{ και } T \vdash \phi \to \neg \psi.$$

Χρησιμοποιώντας το λογικό αξίωμα

$(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \neg \psi) \to \neg \phi)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη που δείχνει ότι $T \vdash \neg \phi$.

$\exists x \quad \neg\forall x \neg$ Εδώ πρόβλημα

Ας δούμε μ' ένα παράδειγμα πως χρησιμοποιούμε τα παραπάνω θεωρήματα.

Παράδειγμα: $\vdash \exists x \forall y \phi \rightarrow \forall y \exists x \phi$.

Βάσει του θεωρήματος απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι:
$\exists x \forall y \phi \vdash \forall y \exists x \phi$
Βάσει του θεωρήματος γενίκευσης αρκεί $\exists x \forall y \phi \vdash \exists x \phi$
$\neg \forall x \neg \forall y \phi \vdash \exists x \phi$ ή
$\neg \forall x \neg \forall y \phi \vdash \neg \forall x \neg \phi$.

Τέλος, λόγω του θεωρήματος αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \neg \phi \vdash \neg\neg \forall x \neg \forall y \phi$. Αλλά ο τύπος $\neg\neg \forall x \neg \forall y \phi \leftrightarrow \forall x \neg \forall y \phi$ είναι αξίωμα, οπότε $\boxed{\text{αρκεί}}$ να δείξουμε $\forall x \neg \phi \vdash \forall x \neg \forall y \phi$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα γενίκευσης πάλι, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \neg \phi \vdash \neg \forall y \phi$, δηλαδή ότι το σύνολο $\{\forall x \neg \phi, \forall y \phi\}$ είναι αντιφατικό. Έχουμε όμως ότι η τυπική απόδειξη.

1. $\forall x \neg \phi$ υπόθεση
2. $\forall x \neg \phi \rightarrow \neg \phi$ ΑΣ2
3. $\neg \phi$ 1, 2, Μ.Ρ.

μας εξασφαλίζει ότι $\{ \forall x \neg \phi, \forall y \phi \} \vdash \neg \phi$. Όμοια δείχνουμε ότι $\{\forall x \neg \phi, \forall y \phi\} \vdash \phi$ οπότε έπεται το ζητούμενο.

Γενικά, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι $T \vdash \phi$ ακολουθούμε την εξής τακτική:

I. Αν ο ϕ είναι της μορφής $\psi \rightarrow \chi$, τότε αρκεί, σύμφωνα με το θεώρημα απαγωγής, να δείξουμε ότι $T \cup \{\psi\} \vdash \chi$.

II. Αν ο ϕ είναι της μορφής $\forall x \psi$ όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T, τότε αρκεί, σύμφωνα με το θεώρημα γενίκευσης, να δείξουμε ότι $T \vdash \psi$.

III. Αν ο ϕ είναι της μορφής $\neg \psi$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

α) Αν ο ψ είναι της μορφής $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash \psi_1$ και $T \vdash \neg \psi_2$. Πράγματι:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{αν} & T \vdash \psi_1 \\ \text{και} & T \vdash \neg \psi_2 \end{array}\right\} \text{ χρησιμοποιώντας το αξίωμα}$$

$\psi_1 \to (\neg \psi_2 \to \neg(\psi_1 \to \psi_2))$, δείχνουμε ότι $T \vdash \phi$.

β) Αν ο ψ είναι της μορφής $\neg\chi$ τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash \chi$, αφού ο $\chi \to \neg\neg\chi$ είναι αξίωμα.

γ) Αν ο ψ είναι της μορφής $\forall x \chi$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash \neg \chi^x_t$ για κάποιον όρον t τέτοιον που η x να είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον χ. Πράγματι, έχοντας δείξει ότι $T \vdash \neg \chi^x_t$, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα

$\forall x\chi \to \chi^x_t$, και $(\forall x\chi \to \chi^x_t) \to (\neg\chi^x_t \to \neg\forall x\chi)$ μπορούμε να δείξουμε ότι $T \vdash \phi$.

Παραδείγματα: 1) $\vdash (\phi \to \forall x\, \psi) \leftrightarrow \forall x\, (\phi \to \psi)$ όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι $T \vdash \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash \phi_1 \to \phi_2$ και $T \vdash \phi_2 \to \phi_1$ αφού ο τύπος $(\phi_1 \to \phi_2) \to ((\phi_2 \to \phi_1) \to (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2))$ είναι αξίωμα. Εδώ λοιπόν αρκεί να δείξουμε ότι:

$\vdash (\phi \to \forall x\psi) \to \forall x\, (\phi \to \psi)$ και
$\vdash \forall x\, (\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi)$

Για το πρώτο, λόγω του θεωρήματος γενίκευσης και του θεωρήματος απαγωγής, αρκεί να δείξουμε

ότι $\{\phi \to \forall x\psi, \phi\} \vdash \psi$.

Αυτό όμως δείχνει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1. $\phi \to \forall x\psi$	υπόθεση
2. ϕ	»
3. $\forall x\psi$	1, 2, M.P.
4. $\forall x\psi \to \psi$	ΑΣ2
5. ψ	3, 4, M.P.

τι κάνει στο ψ;

Για το δεύτερο κομμάτι, πάλι λόγω του θεωρήματος απαγωγής και του θεωρήματος γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\{\forall x\, (\phi \to \psi), \phi\} \vdash \psi$, πράγμα που δείχνει η τυπική απόδειξη:

1. $\forall x\, (\phi \to \psi)$	υπόθεση
2. ϕ	»
3. $\forall x\, (\phi\to\psi) \to (\phi\to\psi)$	ΑΣ2
4. $\phi \to \psi$	1, 3, M.P.
5. ψ	2, 4, M.P.

2) Θα δείξουμε ότι αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο ϕ, τότε

$\vdash (\exists x\psi \to \phi) \leftrightarrow \forall x\,(\psi \to \phi)$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$\vdash (\exists x\psi \to \phi) \to \forall x\,(\psi \to \phi)$ και

$\vdash \forall x\,(\psi \to \phi) \to (\exists x\psi \to \phi)$ δηλαδή ότι

$\vdash (\neg\,\forall x\,\neg\,\psi \to \phi) \to \forall x\,(\psi \to \phi)$ και

$\vdash \forall x\,(\psi \to \phi) \to (\neg\,\forall x\,\neg\,\psi \to \phi)$. Για το πρώτο κομμάτι αρκεί να δείξουμε ότι $\{\neg\,\forall x\,\neg\,\psi \to \phi,\ \psi\} \vdash \phi$. Επειδή ο τύπος $\neg\neg\,\phi \to \phi$ είναι αξίωμα, αρκεί να δείξουμε ότι

$\{\neg\,\forall x\,\neg\,\psi \to \phi,\ \psi\} \vdash \neg\neg\,\phi$. Λόγω του θεωρήματος αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$\{\neg\,\forall x\,\neg\,\psi \to \phi,\ \neg\,\phi\} \vdash \neg\,\psi$, πράγμα που δείχνεται από την παρακάτω τυπική απόδειξη:

1. $\neg\,\forall x\,\neg\,\psi \to \phi$ υπόθεση
2. $\neg\,\phi$ »
3. $(\neg\,\forall x\,\neg\,\psi \to \phi) \to (\neg\,\phi \to \forall x\,\neg\,\psi)$ ΑΣ1
4. $\neg\,\phi \to \forall x\,\neg\,\psi$ 1, 3, Μ.Ρ.
5. $\forall x\,\neg\,\psi$ 2, 4, Μ.Ρ.
6. $\forall x\,\neg\,\psi \to \neg\,\psi$ ΑΣ2 αντικατάσταση μ[illegible]
7. $\neg\,\psi$ 5, 6 Μ.Ρ.

Όμοια δουλεύουμε για το δεύτερο κομμάτι.

3) $\vdash \forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x)$

Λόγω του θεωρήματος γενίκευσης και του θεωρήματος απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι $x=y \vdash y=x$. Αυτό δείχνεται ως εξής:

1. $x = y$ υπόθεση
2. $x = y \to (x = x \to y = x)$ ΑΣ6
3. $x = x \to y = x$ 1, 2 Μ.Ρ. γιατί να δείχνουν αυτό!
4. $x = x$ ΑΣ5
5. $y = x$ 3, 4, Μ.Ρ.

Υπάρχουν και δυο ακόμη θεωρήματα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Το ότι μια σταθερά σε πολλές περιπτώσεις παίζει τον ίδιο ρόλο με ελεύθερες μεταβλητές αποτελεί την βάση για το:

Θεώρημα γενίκευσης σταθερών: Έστω ότι $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \vdash \phi$ και η c δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του T, τότε υπάρχει y που δεν εμφανίζεται στον ϕ τέτοια ώστε $T \vdash \forall y\ \phi^c_y$. ϕ^c_y είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον ϕ αντικαθιστώντας την c με την y παντού. Πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος είναι το:

Θεώρημα υπαρξιακής σταθεροποίησης: Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \cup \{\phi^x_c\} \vdash \psi$ και η c δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του $T \cup \{\phi, \psi\}$, τότε $T \cup \{\exists x\ \phi\} \vdash \psi$.

Η συντακτική και η σημασιολογική προσέγγιση μιας απόδειξης είναι ισοδύναμες και στον κατηγορηματικό λογισμό.

Ορισμός: Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$ θα λέμε ότι *το T είναι ικανοποιήσιμο* ανν υπάρχει μια δομή $\mathcal{A}$ και μια αποτίμηση υ τέτοια που το T αληθεύει για την υ στην $\mathcal{A}$.

Θεώρημα εγκυρότητας: Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε ϕ:

α) Αν $T \vdash \phi \Longrightarrow T \models \phi$

β) Αν το T είναι ικανοποιήσιμο τότε είναι μη αντιφατικό.

Απόδειξη: α) Παίρνουμε σαν δεδομένο ότι τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι τύποι και ότι ο MP διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή. Έστω λοιπόν ότι $T \vdash \phi$. Τότε υπάρχει μία ακολουθία τύπων ϕ_1, ϕ_2, ..., $\phi_n = \phi$ που αποτελεί τυπική απόδειξη από το T. Με επαγωγή στο i, θα δείξουμε ότι $T \models \phi_i$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.

1ο) $i = 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

i) $\phi_1 \in \Lambda_1$. Τότε ο ϕ_1 είναι έγκυρος και συνεπώς $T \models \phi_1$.

ii) $\phi_1 \in T$. Τότε $T \models \phi_1$.

2ο) Έστω ότι $T \models \phi_k$ για κάθε $1 < k < i \leqslant n$. Θα δείξουμε ότι $T \models \phi_i$.

Έχουμε δύο περιπτώσεις

i) $\phi_i \in \Lambda_1 \cup T$, τότε όπως προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι $T \models \phi_i$.

ii) ο ϕ_i προκύπτει ως άμεση συνέπεια των $\phi_\lambda = \phi_j \rightarrow \phi_i$, ϕ_j, $j, \lambda < i$ (μέσω MP).

Λόγω επαγωγικής υπόθεσης, ισχύει $T \models \phi_j$ και $T \models \phi_j \rightarrow \phi_i$. Άρα $T \models \phi_i$ αφού ο MP διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή. Επομένως $T \models \phi$.

β) Έστω ότι το T είναι ικανοποιήσιμο, αλλά αντιφατικό. Τότε για κάποιο ϕ: $T \vdash \phi$ και $T \vdash \neg \phi$.

Λόγω όμως του α) θα ισχύει τότε $T \models \phi$ και $T \models \neg \phi$.

Έστω $\mathcal{A}$ δομή και υ αποτίμηση στην $\mathcal{A}$, τέτοια που το T αληθεύει για την υ στην $\mathcal{A}$. Τότε $\mathcal{A} \models \phi\ [\upsilon]$ και $\mathcal{A} \models \neg \phi\ [\upsilon]$, *άτοπο.*

Το παρακάτω σημαντικό θεώρημα αποδείχτηκε από τον K. Gödel (1930).

Θεώρημα πληρότητας κατηγορηματικού λογισμού:

Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε ϕ:

α) Αν $T \models \phi$ τότε $T \vdash \phi$.

β) Αν το T είναι μη αντιφατικό, τότε είναι ικανοποιήσιμο.

Όπως στον προτασιακό λογισμό, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της πληρότητας και το θεώρημα της εγκυρότητας αποδεικνύουμε το:

Θεώρημα συμπάγειας: Έστω T άπειρο σύνολο τύπων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο.

Θα λέμε ότι μια δομή είναι πεπερασμένη, εννοώντας ότι το σύμπαν της είναι πεπερασμένο σύνολο. Για κάθε φυσικό $n > 1$ υπάρχει πρόταση ϕ_n της Γ_1 που εκφράζει «*υπάρχουν τουλάχιστον n πράγματα*», δηλαδή κάθε δομή $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \phi_n$ ανν η $\mathcal{A}$ έχει τουλάχιστον n στοιχεία.

Π.χ. $\phi_2 = \exists x_1\ \exists x_2\ (x_1 \neq x_2)$

$\phi_3 = \exists x_1\ \exists x_2\ \exists x_3\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_3 \neq x_1)$.

Επίσης για κάθε φυσικό $n > 0$ υπάρχει μία πρόταση ψ_n της Γ_1 που εκφράζει «*υπάρχουν ακριβώς n πράγματα*» δηλαδή για κάθε δομή $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A} \models \psi_n$ ανν η $\mathcal{A}$ έχει ακριβώς n στοιχεία.

Υπάρχουν λοιπόν σύνολα προτάσεων, π.χ. το $\{\psi_2\}$ που κάθε μοντέλο τους είναι πεπερασμένο.

Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα, αν ένα σύνολο προτάσεων Π έχει μόνο πεπερασμένα μοντέλα, τότε υπάρχει ένα φράγμα για το μέγεθός τους.

Θεώρημα: Έστω $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$. Αν για κάθε $n \in N$ υπάρχει $m \in N$, $m > n$, τέτοιο που το Π έχει ένα μοντέλο με m στοιχεία, τότε το Π έχει ένα άπειρο μοντέλο.

Απόδειξη: θεωρούμε το σύνολο προτάσεων

$$\Pi^* = \Pi \cup \{\phi_n \mid n \in N, n > 1\}$$

Λόγω της υπόθεσης, κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Π^* είναι ικανοποιήσιμο. Συνεπώς λόγω του θεωρήματος συμπάγειας το Π^*

είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ τέτοια που $\mathcal{A} \models \Pi^*$.

Προφανώς $\mathcal{A} \models \Pi$ και η $\mathcal{A}$ είναι άπειρη, αφού έχει τουλάχιστον n στοιχεία για κάθε $n \in N$.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το:

Θεώρημα: Δεν υπάρχει σύνολο προτάσεων Π τέτοιο που μία δομή είναι μοντέλο του Π ανν είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη: Έστω ότι $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ τέτοιο που για κάθε δομή $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \Pi$ ανν $\mathcal{A}$ πεπερασμένη. Τότε το Π έχει πεπερασμένα μοντέλα όσο μεγάλα θέλουμε και συνεπώς λόγω του προηγουμένου θεωρήματος, έχει ένα άπειρο μοντέλο. Το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Ασκήσεις

1) Ποιοί από τους παρακάτω τύπους είναι λογικά αξιώματα;
   $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$
   $\forall y \left[\forall x \left(P(x) \rightarrow P(x)\right) \rightarrow \left(P(c) \rightarrow P(c)\right)\right]$
2) Δείξτε ότι για $\phi, \psi \in T(\Gamma_1)$:
   i) $\vdash \forall x\phi \rightarrow \exists x\phi$
   ii) $\vdash \phi \rightarrow \psi \Longrightarrow \vdash \forall x\phi \rightarrow \forall x\psi$
3) Δείξτε ότι για τυχόντα μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P, Q:
   $\{Q(x), \forall y \left(Q(y) \rightarrow \forall z P(z)\right)\} \vdash \forall x P(x)$
4) Δείξτε ότι
   i) $\vdash \forall x \forall y \forall z \left(x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)\right)$
   ii) $\vdash \forall y_1 \forall y_2 \forall z_1 \forall z_2 \left[y_1 = z_1 \rightarrow \left(y_2 = z_2 \rightarrow \left(P(y_1, y_2) \rightarrow P(z_1, z_2)\right)\right)\right]$
5) Δείξτε ότι για τυχόν διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P:
   $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \forall x P(y, x)$
6) Δείξτε ότι τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι τύποι και ότι ο κανόνας M.P. διατηρεί την λογική συνεπαγωγή.
7) Δείξτε ότι το δεύτερο μέρος του θεωρήματος εγκυρότητας είναι ισοδύναμο με το πρώτο.
8) Δείξτε ότι τα δυο μέρη του θεωρήματος πληρότητας του Κ.Λ. είναι ισοδύναμα.
9) Δείξτε ότι:
   $\vdash \exists x (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\phi \vee \exists x\psi$

$\vdash \forall x\phi \vee \forall x\psi \rightarrow \forall x\, (\phi \vee\psi)$

$\vdash \exists x\, (\phi \wedge \psi) \rightarrow \exists x\phi \wedge \exists x\psi$

$\vdash \forall x\, (\phi\wedge\psi) \leftrightarrow \forall x\phi\wedge \forall x\psi$

$\vdash \forall x\, (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\phi \rightarrow \exists x\psi)$

10) Είναι αληθινή η ισοδυναμία $\vdash \phi\, (x) \Longleftrightarrow\ \vdash \forall x\ \phi(x)$;

11) Έστω $\Gamma_1^\delta = < < >$ η γλώσσα της διάταξης με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο το $<$, και έστω ϕ_n ο τύπος $x_n < x_{n+1}$ για κάθε $n\in N$. Δείξτε ότι το σύνολο $\Sigma = \{\phi_n \mid n\in N\}$ είναι συνεπές.

12) Αν τα σύνολα Σ_1, Σ_2 δεν έχουν κοινό μοντέλο, δείξτε ότι υπάρχει ϕ τέτοιος ώστε $\Sigma_1 \vdash \phi$ και $\Sigma_2 \vdash \neg\, \phi$.

Βιβλιογραφία

1) H. B. Enderton: «A mathematical introduction to logic», Academic Press.
2) A. G. Hamilton: «Logic for Mathematicians», Cambridge University Press.
3) E. Mendelson: «Introduction to Mathematical Logic», Van Nostrand Reinhold Co.
4) S. Kleene: «Mathematical Logic», Wiley and Sons, INC.,
5) R. D. Dowsing, V. J. Rayward-Smith, C. D. Walter: «A first Course in formal Logic and its applications in Computer Science», Blackwell Scientific Publications.
6) Αθ. Τζουβάρας: «Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής», Θεσσαλονίκη 1987.