Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:

Βαθμοί

1α (0.5)	1β (1.5)	2 (2)	3 (2)	Σύνολο (6)

Καλη Επιτυχια

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 1

(α) [0.5 μονάδα] Να ορίσετε πότε ένας τύπος ϕ της προτασιακής λογικής είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου τύπων Σ.

Απάντηση: Όταν κάθε απονομή αληθοτιμών που ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του Σ ικανοποιεί και τον ϕ.

(β) [1.5 μονάδα] Να αποδείξετε προσεκτικά ότι ένας τύπος ϕ είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου $\Sigma \cup \{\psi\}$ **αν και μόνον αν** ο $(\psi \to \phi)$ είναι ταυτολογική συνέπεια του Σ.

Απάντηση:
Ευθύ. Υποθέτουμε ότι ο ϕ είναι ταυτολογική συνέπεια του $\Sigma \cup \{\psi\}$. Για να αποδείξουμε ότι ο $(\psi \to \phi)$ είναι ταυτολογική συνέπεια του Σ, θεωρούμε απονομή a που ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του Σ. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (α) Η a δεν ικανοποιεί τον ψ, τότε από τις ιδιότητες της συνεπαγωγής συμπεραίνουμε ότι η a ικανοποιεί τον $(\psi \to \phi)$. (b) Η a ικανοποιεί τον ψ. Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι η a ικανοποιεί τον ϕ. Επομένως από τις ιδιότητες της συνεπαγωγής συμπεραίνουμε ότι η a ικανοποιεί τον $(\psi \to \phi)$.
Αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι ο $(\psi \to \phi)$ είναι ταυτολογική συνέπεια του Σ. Για να αποδείξουμε ότι ο ϕ είναι ταυτολογική συνέπεια του $\Sigma \cup \{\psi\}$, θεωρούμε απονομή a που ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του $\Sigma \cup \{\psi\}$. Τότε η a ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του Σ. Άρα από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι η a ικανοποιεί τον $(\psi \to \phi)$. Επιπλέον, η a ικανοποιεί τον ψ, άρα από τις ιδιότητες της συνεπαγωγής συμπεραίνουμε ότι a ικανοποιεί τον ϕ.

Θέμα 2 [2 μονάδες]. Αν $f : X \mapsto Y$ συνάρτηση και $A \subseteq X$, τότε με $f[A]$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$. Αν επίσης $B \subseteq X$, με $A \setminus B$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{x \in A \mid x \notin B\}$. Αληθεύει ότι $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Απάντηση: Δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα: Θεωρήστε $X = \{1, 2\}, A = \{1, 2\}, B = \{1\}, Y = \{1\}$ και $f(1) = f(2) = 1$. Τότε $A \setminus B = \{2\}, f[A] = f[B] = \{1\}$ και $f[A \setminus B] = f[\{2\}] = \{1\}$ ενώ $f[A] \setminus f[B] = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$.

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 3 [2 μονάδες]. Έστω R μία μεταβατική διμελής σχέση σε ένα σύνολο A. Να αποδείξετε ότι η σχέση

$$S = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) \in R \text{ και } (y, x) \in R\}$$

είναι επίσης μεταβατική.

Απάντηση: Έστω ότι $(x, y) \in S$ και $(y, z) \in S$. Τότε από τον ορισμό της S συμπεραίνουμε ότι $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ και $(y, z) \in R$ και $(z, y) \in R$. Από τη μεταβατικότητα της R και από ότι $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ συμπεραίνουμε ότι

$$(x, z) \in R. \tag{1}$$

Επίσης από τη μεταβατικότητα της R και από ότι $(y, x) \in R$ και $(z, y) \in R$ συμπεραίνουμε ότι

$$(z, x) \in R. \tag{2}$$

Το ζητούμενο συνάγεται από τις (1) και (2) και τον ορισμό της S.

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο