1.1 Η γλώσσα της προτασιακής λογικής

Υποθέτουμε ότι μας δίνεται μια άπειρη ακολουθία από διαφορετικά αντικείμενα, τα οποία ονομάζουμε σύμβολα και στα οποία δίνουμε κάποια ονόματα (Πίνακας II). Υποθέτουμε επίσης ότι κανένα από αυτά τα σύμβολα δεν είναι πεπερασμένη ακολουθία άλλων συμβόλων.

Πίνακας II

Σύμβολο	**Πλήρης ονομασία**	**Σχόλια**
(	αριστερή παρένθεση	στίξη
)	δεξιά παρένθεση	στίξη
$\neg$	σύμβολο άρνησης	φυσική γλώσσα: όχι
$\wedge$	σύμβολο σύζευξης	φυσική γλώσσα: και
$\vee$	σύμβολο διάζευξης	φυσική γλώσσα: ή (μη αποκλειστικό)
$\rightarrow$	σύμβολο συνθήκης	φυσική γλώσσα: αν __, τότε __
$\leftrightarrow$	σύμβολο αμφίδρομης συνθήκης	φυσική γλώσσα: αν και μόνο αν
$\mathbf{A}_1$	πρώτο σύμβολο πρότασης	
$\mathbf{A}_2$	δεύτερο σύμβολο πρότασης	
$\ldots$		
$\mathbf{A}_n$	n-οστό σύμβολο πρότασης	
$\ldots$		

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητα κάποια διευκρινιστικά σχόλια:

1. Τα πέντε σύμβολα

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

ονομάζονται *προτασιακοί σύνδεσμοι*. Η χρήση τους περιγράφεται στην τρίτη στήλη του παραπάνω πίνακα. Οι προτασιακοί σύνδεσμοι, μαζί με τις παρενθέσεις, αποτελούν τα *λογικά σύμβολα*. Στη μετάφραση προς και από τη φυσική γλώσσα, ο ρόλος τους δεν αλλάζει ποτέ. Τα σύμβολα προτάσεων είναι οι *παράμετροι* (ή αλλιώς τα *εξωλογικά σύμβολα*). Η μετάφρασή τους δεν είναι καθορισμένη· αντιθέτως, όπως θα δείξουμε σύντομα, μπορούν να δεχθούν ποικίλες ερμηνείες.

2. Έχουμε εισαγάγει απειράριθμα σύμβολα προτάσεων. Από τη μία πλευρά, μια πιο λιτή εναλλακτική επιλογή θα ήταν να εισαγάγουμε *ένα* σύμβολο πρότασης, $\mathbf{A}$, και έναν τόνο, $'$, οπότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούμε τη δυνητικά άπειρη ακολουθία

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots$$

αντί της

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \ldots .$$

Αυτή η επιλογή έχει το πλεονέκτημα ότι μειώνει το συνολικό πλήθος των διαφορετικών συμβόλων στα εννέα. Από την άλλη πλευρά, μια *λιγότερο* λιτή εναλλακτική επιλογή θα ήταν να επιτρέψουμε ένα αυθαίρετο σύνολο από σύμβολα προτάσεων, αριθμήσιμο ή όχι. Τα περισσότερα από τα συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου θα εξακολουθούσαν να ισχύουν σε αυτήν την περίπτωση· οι εξαιρέσεις αφορούν κυρίως την Ενότητα 1.7.

3. Στην αγγλόγλωσση βιβλιογραφία, ορισμένοι λογικολόγοι προτιμούν αντί για τους όρους sentence και sentential logic (Σ.τ.Μ.: τους οποίους αποδίδουμε «πρόταση» και «προτασιακή λογική», αντίστοιχα) να χρησιμοποιούν τους όρους proposition και propositional logic. Αυτό οφείλεται στο ότι θέλουν με τον όρο «sentence» να δηλώνουν μια συγκεκριμένη φράση, και με τον όρο «proposition» να δηλώνουν τον ισχυρισμό τον οποίο αντιπροσωπεύει μια πρόταση.

4. Αν και ονομάζουμε αυτά τα αντικείμενα «σύμβολα», παραμένουμε ουδέτεροι ως προς το ποιο θα μπορούσε να είναι το ακριβές οντολογικό status των συμβόλων. Στην αριστερή στήλη του πίνακα συμβόλων μας, αναγράφονται ονόματα των συμβόλων. Παραδείγματος χάριν, το $\mathbf{A}_{243}$ είναι ένα σύμβολο, και συγκεκριμένα το 243ο σύμβολο πρότασης. (Από την άλλη πλευρά, το «$\mathbf{A}_{243}$» είναι ένα όνομα αυτού του συμβόλου. Το σύμβολο συνθήκης πιθανόν να έχει ή να μην έχει τη γεωμετρική ιδιότητα να έχει σχήμα βέλους, το όνομά του όμως, «$\rightarrow$», έχει αυτήν την ιδιότητα.) Τα ίδια τα σύμβολα μπορεί να είναι σύνολα, αριθμοί, βώλοι, ή αντικείμενα από ένα σύμπαν γλωσσικών αντικειμένων. Στην τελευταία αυτή περίπτωση, είναι πιθανό να είναι στην πραγματικότητα τα ίδια αντικείμενα με τα ονόματα που χρησιμοποιούμε για αυτά. Μια άλλη δυνατότητα, την οποία θα εξηγήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι ότι τα σύμβολα προτάσεων είναι και τα ίδια τύποι σε μια άλλη γλώσσα.

5. Έχουμε υποθέσει ότι κανένα σύμβολο δεν είναι πεπερασμένη ακολουθία άλλων συμβόλων. Αυτό που εννοούμε είναι ότι, όχι μόνο τα σύμβολα του πίνακα είναι διαφορετικά μεταξύ τους (π.χ., $\mathbf{A}_3 \neq \leftrightarrow$), αλλά και κανένα από αυτά δεν είναι πεπερασμένη ακολουθία δύο ή περισσότερων συμβόλων. Παραδείγματος χάριν, απαιτούμε ότι $\mathbf{A}_3 \neq \langle \neg, \mathbf{A}_4, \mathbf{(} \rangle$. Σκοπός αυτής της παραδοχής είναι να διασφαλιστεί ότι οι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων μπορούν να αναλυθούν με έναν και μόνο τρόπο. Αν

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$$

και καθένα εκ των a_i και b_j είναι σύμβολο, τότε $m = n$ και $a_i = b_i$. (Βλ. Κεφάλαιο 0, Λήμμα 0A, και τα σχόλια που ακολουθούν το λήμμα.)

Μια *έκφραση* είναι μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων. Μπορούμε να καθορίσουμε μια έκφραση συναρμόζοντας τα ονόματα των συμβόλων· δηλαδή, η έκφραση $(\neg\, \mathbf{A}_1)$ είναι η ακολουθία $\langle (, \neg, \mathbf{A}_1,) \rangle$. Ο συμβολισμός αυτός επεκτείνεται ως εξής:

Αν οι α και β είναι ακολουθίες συμβόλων, τότε η $\alpha\beta$ είναι η ακολουθία που περιλαμβάνει πρώτα τα σύμβολα της ακολουθίας α και κατόπιν τα σύμβολα της ακολουθίας β.

Παραδείγματος χάριν, αν οι α και β είναι οι εκφράσεις που δίνονται από τις εξισώσεις

$$\alpha = (\neg\, \mathbf{A}_1),$$
$$\beta = \mathbf{A}_2,$$

τότε η $(\alpha \to \beta)$ είναι η έκφραση

$$((\neg\, \mathbf{A}_1) \to \mathbf{A}_2).$$

Ας δούμε τώρα μερικές ενδεικτικές πιθανές μεταφράσεις προτάσεων της φυσικής γλώσσας σε εκφράσεις της τυπικής γλώσσας. Έστω $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\ldots$, $\mathbf{Z}$ τα πρώτα 26 σύμβολα προτάσεων (παραδείγματος χάριν, $\mathbf{E} = \mathbf{A}_5$.)

1. Φυσική γλώσσα: Ο ύποπτος πρέπει να αποφυλακιστεί. Μετάφραση: $\mathbf{R}$.

Φυσική γλώσσα: Τα στοιχεία που προέκυψαν είναι αποδεκτά. Μετάφραση: $\mathbf{E}$.

Φυσική γλώσσα: Τα στοιχεία που προέκυψαν είναι μη αποδεκτά. Μετάφραση: $(\neg\, \mathbf{E})$.

Φυσική γλώσσα: Τα στοιχεία που προέκυψαν είναι αποδεκτά, και ο ύποπτος δεν πρέπει να αποφυλακιστεί. Μετάφραση: $(\mathbf{E} \land (\neg\, \mathbf{R}))$.

Φυσική γλώσσα: Τα στοιχεία που προέκυψαν είναι αποδεκτά, ή ο ύποπτος πρέπει να αποφυλακιστεί (ή και τα δύο). Μετάφραση: $(\mathbf{E} \lor \mathbf{R})$.

Φυσική γλώσσα: Τα στοιχεία που προέκυψαν είναι αποδεκτά, ή ο ύποπτος πρέπει να αποφυλακιστεί, αλλά όχι και τα δύο. Μετάφραση: $((\mathbf{E} \lor \mathbf{R}) \land (\neg\, (\mathbf{E} \land \mathbf{R})))$. Το σύμβολο $\lor$ θα χρησιμοποιείται πάντοτε ως μετάφραση της λέξης «ή» στη μη αποκλειστική της έννοια, δηλ. «και/ή».

Φυσική γλώσσα: Τα στοιχεία που προέκυψαν είναι μη αποδεκτά, αλλά ο ύποπτος δεν πρέπει να αποφυλακιστεί. Μετάφραση: $((\neg\, \mathbf{E}) \land (\neg\, \mathbf{R}))$. Από την άλλη πλευρά, η έκφραση $((\neg\, \mathbf{E}) \lor (\neg\, \mathbf{R}))$ μεταφράζεται σε φυσική γλώσσα ως εξής: Τα στοιχεία που προέκυψαν είναι μη αποδεκτά, ή ο ύποπτος δεν πρέπει να αποφυλακιστεί.

2. Φυσική γλώσσα: Αν οι ευχές είναι άτια, τότε οι ζητιάνοι θα ιππεύσουν. Μετάφραση: $(\mathbf{W} \to \mathbf{B})$.

Φυσική γλώσσα: Οι ζητιάνοι θα ιππεύσουν, αν και μόνο αν οι ευχές είναι άτια. Μετάφραση: $(\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{W})$.

3. Φυσική γλώσσα: Αυτό το αγαθό αποτελεί πλούτο αν και μόνο αν είναι μεταβιβάσιμο, δυσεύρετο, και προκαλεί ευχαρίστηση ή αποτρέπει τον πόνο. Μετάφραση: $(\mathbf{W} \leftrightarrow (\mathbf{T} \land (\mathbf{L} \land (\mathbf{P} \lor \mathbf{Q}))))$. Στην προκειμένη περίπτωση, $\mathbf{W}$ είναι η μετάφραση του «Αυτό το αγαθό αποτελεί πλούτο». Βέβαια, στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε το $\mathbf{W}$ ως μετάφραση μιας διαφορετικής πρότασης. Δεν είμαστε όμως δεσμευμένοι σε κάποια συγκεκριμένη μετάφραση.

Μια προειδοποίηση: Μη συγχέετε μια πρόταση σε φυσική γλώσσα (Τα τριαντάφυλλα είναι κόκκινα) με μια μετάφραση αυτής της πρότασης στην τυπική γλώσσα (όπως π.χ. **R**). Πρόκειται για διαφορετικά πράγματα. Η πρόταση στη φυσική γλώσσα είναι προφανώς είτε αληθής είτε ψευδής. Η τυπική έκφραση, όμως, είναι απλώς μια ακολουθία συμβόλων. Πιθανόν σε κάποια συμφραζόμενα να ερμηνεύεται πράγματι ως αληθής (ή ψευδής) πρόταση της φυσικής γλώσσας, αλλά μπορεί σε κάποια άλλα συμφραζόμενα να έχει άλλες ερμηνείες.

Ορισμένες εκφράσεις δεν είναι δυνατόν να προκύψουν ως μεταφράσεις καμίας πρότασης της φυσικής γλώσσας, αλλά είναι απλώς άνευ νοήματος. Μια τέτοια έκφραση είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{((\rightarrow A}_3.$$

Θέλουμε να ορίσουμε ως καλά σχηματισμένους τύπους (ΚΣΤ) τις εκφράσεις που είναι «γραμματικά ορθές»· οι άνευ νοήματος εκφράσεις θα πρέπει να αποκλειστούν. Ο ορισμός θα έχει τα εξής επακόλουθα:

(α) Κάθε σύμβολο πρότασης είναι ΚΣΤ.

(β) Αν οι α και β είναι ΚΣΤ, τότε οι $\mathbf{(\neg}\,\alpha\mathbf{)}$, $\mathbf{(}\alpha \wedge \beta\mathbf{)}$, $\mathbf{(}\alpha \vee \beta\mathbf{)}$, $\mathbf{(}\alpha \rightarrow \beta\mathbf{)}$, και $\mathbf{(}\alpha \leftrightarrow \beta\mathbf{)}$ είναι επίσης ΚΣΤ.

(γ) Καμία έκφραση δεν είναι ΚΣΤ εκτός αν αυτό επιβάλλεται από κάποιο εκ των (α) και (β).

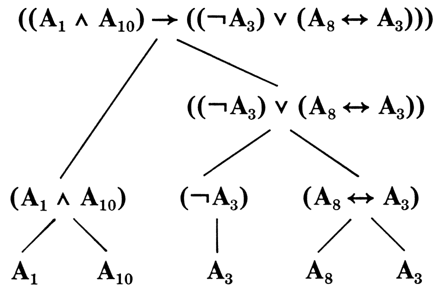
Αυτή η τρίτη ιδιότητα (περί «επιβολής») θα ήταν χρήσιμο να διατυπωθεί ακριβέστερα. *Καλά σχηματισμένος τύπος* (ή απλώς *τύπος* ή *ΚΣΤ*) είναι μια έκφραση που μπορούμε να την κατασκευάσουμε από τα σύμβολα προτάσεων εφαρμόζοντας για κάποιο πεπερασμένο πλήθος φορών τις *τυποκατασκευαστικές πράξεις* (πάνω σε εκφράσεις) οι οποίες ορίζονται μέσω των εξισώσεων

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\neg}(\alpha) &= \mathbf{(\neg}\,\alpha\mathbf{)} \\
\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha,\beta) &= \mathbf{(}\alpha \wedge \beta\mathbf{)}, \\
\mathcal{E}_{\vee}(\alpha,\beta) &= \mathbf{(}\alpha \vee \beta\mathbf{)}, \\
\mathcal{E}_{\rightarrow}(\alpha,\beta) &= \mathbf{(}\alpha \rightarrow \beta\mathbf{)}, \\
\mathcal{E}_{\leftrightarrow}(\alpha,\beta) &= \mathbf{(}\alpha \leftrightarrow \beta\mathbf{)}.
\end{aligned}$$

Παραδείγματος χάριν, η έκφραση

$$\mathbf{((A}_1 \wedge \mathbf{A}_{10}\mathbf{)} \rightarrow \mathbf{((\neg\, A}_3\mathbf{)} \vee \mathbf{(A}_8 \leftrightarrow \mathbf{A}_3\mathbf{)))}$$

είναι ΚΣΤ, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε αν εξετάσουμε το παρακάτω προγονικό της δέντρο.



Το δέντρο αυτό απεικονίζει την κατασκευή της έκφρασης από τέσσερα σύμβολα προτάσεων με πέντε εφαρμογές των τυποκατασκευαστικών πράξεων. Το συγκεκριμένο παράδειγμα δεν αποτελεί τυπική περίπτωση, καθότι χρησιμοποιεί και τις πέντε τυποκατασκευαστικές πράξεις. Ας δούμε ένα μικρότερο παράδειγμα: η έκφραση $\mathbf{A}_3$ είναι ΚΣΤ· το προγονικό της δέντρο έχει έναν μόνο κόμβο, ενώ κάθε τυποκατασκευαστική πράξη χρησιμοποιείται μηδέν φορές. Αυτό το παράδειγμα έχει το ελάχιστο δυνατό μέγεθος, καθώς δεν θεωρούμε ότι η κενή ακολουθία «κατασκευάζεται από τα σύμβολα προτάσεων».

Αυτό το είδος κατασκευής, όπου παίρνει κανείς κάποιους βασικούς δομικούς λίθους (στην προκειμένη περίπτωση τα σύμβολα προτάσεων) και επιβάλλει «κλειστότητα» ως προς κάποιες πράξεις (στην προκειμένη περίπτωση ως προς πέντε πράξεις), ανακύπτει συχνά στη λογική και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Στην Ενότητα 1.4, θα εξετάσουμε αυτό το είδος κατασκευής σε ευρύτερο πλαίσιο.

Μπορούμε να αναπτύξουμε περισσότερο την έννοια της «κατασκευής» ως εξής: Ορίζουμε ως *κατασκευαστική ακολουθία* μια πεπερασμένη ακολουθία εκφράσεων $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ τέτοια ώστε για κάθε $i \leq n$ να ισχύει τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} &\varepsilon_i \ \text{είναι ένα σύμβολο πρότασης} \\ &\varepsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\varepsilon_j) \ \text{για κάποια} \ j < i \\ &\varepsilon_i = \mathcal{E}_\Box(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \ \text{για κάποια} \ j < i, k < i \end{aligned}$$

όπου $\Box$ είναι ένας από τους δυαδικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Οι καλά σχηματισμένοι τύποι μπορούν να οριστούν ως εκείνες οι εκφράσεις α για τις οποίες υπάρχει κάποια κατασκευαστική ακολουθία που τελειώνει με α. Μπορούμε να θεωρούμε ότι η ε_i είναι η έκφραση του σταδίου i της κατασκευαστικής διαδικασίας.

Για να πάρουμε μια κατασκευαστική ακολουθία για το προηγούμενο παράδειγμά μας

$$((\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_{10}) \rightarrow ((\neg\, \mathbf{A}_3) \vee (\mathbf{A}_8 \leftrightarrow \mathbf{A}_3)))$$

απλώς συμπτύσσουμε το προγονικό δέντρο σε μια γραμμική διάταξη.

Από αυτού του είδους την κατασκευή απορρέει μια *αρχή επαγωγής*. Λέμε ότι ένα σύνολο S είναι *κλειστό* ως προς μια διθέσια συνάρτηση f ανν για κάθε $x \in S$ και $y \in S$ έχουμε ότι $f(x, y) \in S$, και αντίστοιχα για μονοθέσιες συναρτήσεις, κ.ο.κ.

Αρχη επαγωγης Εάν το S είναι ένα σύνολο από ΚΣΤ που περιέχει όλα τα σύμβολα προτάσεων και είναι κλειστό ως προς τις πέντε τυποκατασκευαστικές πράξεις, τότε το S είναι το σύνολο *όλων* των ΚΣΤ.

Πρωτη αποδειξη. Έστω ένας τυχαίος ΚΣΤ α. Ο τύπος αυτός είναι κατασκευασμένος από σύμβολα προτάσεων με εφαρμογή των τυποκατασκευαστικών πράξεων για κάποιο πεπερασμένο πλήθος φορών. Διατρέχοντας προς τα πάνω το αντίστοιχο προγονικό δέντρο, διαπιστώνουμε ότι κάθε έκφραση στο δέντρο ανήκει στο S. Τελικά (δηλαδή μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων) διαπιστώνουμε στην κορυφή του δέντρου ότι $\alpha \in S$. ⊣

Δευτερη αποδειξη. Χρησιμοποιούμε ξανά το ίδιο σκεπτικό, αλλά χωρίς τα δέντρα. Έστω ένας τυχαίος ΚΣΤ α. Ο τύπος αυτός είναι το τελευταίο μέλος κάποιας κατασκευαστικής ακολουθίας $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$. Εφαρμόζοντας τη συνήθη ισχυρή αριθμητική επαγωγή ως προς τον αριθμό i, αντιλαμβανόμαστε ότι κάθε $\varepsilon_i \in S$, $i \leq n$.

Δηλαδή, υποθέτουμε ως επαγωγική υπόθεση ότι $\varepsilon_j \in S$ για κάθε $j < i$. Κατόπιν επιβεβαιώνουμε ότι $\varepsilon_i \in S$, εξετάζοντας τις διάφορες περιπτώσεις. Επομένως, με ισχυρή επαγωγή ως προς i, έπεται ότι $\varepsilon_i \in S$ για κάθε $i \leq n$. Εν προκειμένω, το τελευταίο μέλος α ανήκει στο S. ⊣

Η αρχή αυτή θα χρησιμοποιηθεί κατά κόρον στις επόμενες σελίδες. Στο ακόλουθο παράδειγμα χρησιμοποιείται για να δειχθεί ότι ορισμένες εκφράσεις *δεν* είναι ΚΣΤ.

Παραδειγμα. Οποιαδήποτε έκφραση με περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις δεν είναι ΚΣΤ.

Αποδειξη. Η κεντρική ιδέα είναι ότι ξεκινάμε με σύμβολα προτάσεων (τα οποία έχουν μηδέν αριστερές και μηδέν δεξιές παρενθέσεις), και κατόπιν εφαρμόζουμε τυποκατασκευαστικές πράξεις, οι οποίες προσθέτουν παρενθέσεις μόνο συμμετρικά, δηλαδή κατά ζεύγη «ομολόγων». Το σκεπτικό αυτό μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: Το σύνολο των «ισοσκελισμένων» ΚΣΤ (δηλαδή αυτών που έχουν ισάριθμες αριστερές και δεξιές παρενθέσεις) περιέχει όλα τα σύμβολα προτάσεων και είναι κλειστό ως προς τις τυποκατασκευαστικές πράξεις. Συνεπώς, η αρχή της επαγωγής μας διασφαλίζει ότι όλοι οι ΚΣΤ είναι ισοσκελισμένοι. ⊣

Ένα χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων τυποκατασκευαστικών πράξεων που έχουμε ορίσει είναι ότι μόνο *διευρύνουν*, και δεν *συρρικνώνουν* ποτέ. Δηλαδή, η έκφραση $\mathcal{E}_\square(\alpha, \beta)$ περιλαμβάνει πάντοτε ως τμήμα ολόκληρη την ακολουθία α (καθώς και ολόκληρη την ακολουθία β), συν άλλα σύμβολα. Ειδικότερα, έχει μεγαλύτερο μήκος τόσο από την α όσο και από τη β.

Αυτό το ειδικό χαρακτηριστικό θα απλουστεύσει το πρόβλημα του να προσδιορίσουμε, για κάποιον δεδομένο ΚΣΤ φ, το *πώς* ακριβώς κατασκευάστηκε. Όλοι οι «δομικοί λίθοι» περιλαμβάνονται στην ακολουθία φ, δηλαδή αποτελούν τμήματά της. Παραδείγματος χάριν, αν ο φ δεν περιέχει το σύμβολο $\mathbf{A}_4$, τότε μπορεί να κατασκευαστεί χωρίς να χρησιμοποιηθεί καθόλου το $\mathbf{A}_4$ (βλ. Άσκηση 4.)

Ασκήσεις

1. Παραθέστε τρεις προτάσεις σε φυσική γλώσσα μαζί με τη μετάφραση της καθεμίας στην τυπική μας γλώσσα. Οι προτάσεις θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε να έχουν ενδιαφέρουσα δομή, και καθεμία από τις μεταφράσεις θα πρέπει να περιλαμβάνει 15 ή περισσότερα σύμβολα.
2. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν ΚΣΤ μήκους 2, 3 ή 6, αλλά ότι οποιοδήποτε άλλο θετικό μήκος είναι δυνατό.
3. Έστω ένας ΚΣΤ α· έστω c το πλήθος των θέσεων του α όπου εμφανίζονται δυαδικοί σύνδεσμοι ($\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$)· έστω s το πλήθος των θέσεων του α όπου εμφανίζονται σύμβολα προτάσεων. (Παραδείγματος χάριν, αν ο α είναι $\mathbf{(A \to (\neg\, A))}$, τότε $c = 1$ και $s = 2$.) Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγής, δείξτε ότι $s = c + 1$.
4. Έστω ότι έχουμε μια κατασκευαστική ακολουθία που λήγει στην έκφραση φ, και ότι η φ δεν περιέχει το σύμβολο $\mathbf{A}_4$. Ας υποθέσουμε ότι διαγράφουμε από την κατασκευαστική ακολουθία όλες τις εκφράσεις που περιέχουν το $\mathbf{A}_4$. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα παραμένει επιτρεπτή κατασκευαστική ακολουθία.
5. Ας υποθέσουμε ότι ο α είναι ένας ΚΣΤ που δεν περιέχει το σύμβολο της άρνησης, $\neg$.
   (α) Δείξτε ότι το μήκος του α (δηλ. το πλήθος των συμβόλων στη συμβολοσειρά) είναι περιττό.
   (β) Δείξτε ότι περισσότερα από το ένα τέταρτο των συμβόλων είναι σύμβολα προτάσεων.

   Υπόδειξη: Δείξτε, μέσω επαγωγής, ότι το μήκος είναι της μορφής $4k + 1$ και ότι το πλήθος των συμβόλων προτάσεων είναι $k + 1$.

1.2 Απονομή αληθοτιμών

Θέλουμε να ορίσουμε τι σημαίνει για έναν ΚΣΤ της γλώσσας μας να έπεται λογικά από άλλους ΚΣΤ. Παραδείγματος χάριν, ο $\mathbf{A}_1$ θα πρέπει να έπεται από τον $\mathbf{(A_1 \wedge A_2)}$. Διότι, ανεξάρτητα από το πώς μεταφράζονται οι παράμετροι $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ ξανά σε φυσική γλώσσα, αν η μετάφραση του $\mathbf{(A_1 \wedge A_2)}$ είναι αληθής, τότε η μετάφραση του $\mathbf{A}_1$ θα πρέπει να είναι αληθής. Η έννοια όλων των δυνατών μεταφράσεων ξανά σε φυσική γλώσσα, όμως, είναι λόγω της ασάφειάς της μη λειτουργική. Ευτυχώς, το πνεύμα αυτής της έννοιας μπορεί να εκφραστεί με απλό και ακριβή τρόπο.

Καθορίζουμε άπαξ και δια παντός ένα σύνολο $\{F, T\}$ από *αληθοτιμές* που αποτελείται από δύο διαφορετικά σημεία:

$$\begin{array}{ll} F, & \text{που ονομάζεται } \textit{ψεύδος}, \\ T, & \text{που ονομάζεται } \textit{αλήθεια}. \end{array}$$

(Δεν έχει σημασία τι είναι τα ίδια αυτά τα σημεία· θα μπορούσαν κάλλιστα να είναι οι αριθμοί 0 και 1.) Ορίζουμε ως *απονομή αληθοτιμών* (ή αλλιώς *αληθοτιμοδοσία*) v για ένα σύνολο $\mathcal{S}$ από σύμβολα προτάσεων μια συνάρτηση

$$v : \mathcal{S} \to \{F, T\}$$

η οποία απονέμει σε κάθε σύμβολο του $\mathcal{S}$ είτε το T είτε το F. Αυτές οι απονομές αληθοτιμών θα χρησιμοποιηθούν αντί των μεταφράσεων σε φυσική γλώσσα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

(Σε αυτό το σημείο δεσμευόμαστε στη *δίτιμη* λογική. Μπορεί κανείς να μελετήσει επίσης την τρίτιμη λογική, όπου υπάρχει ένα σύνολο από τρεις δυνατές αληθοτιμές. Και, προφανώς, δεν είναι παρά ένα μικρό επιπλέον βήμα να επιτρέψει κανείς 512 ή $\aleph_0$ αληθοτιμές· ή να θέσει ως σύνολο των αληθοτιμών το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$, ή κάποιον άλλο κατάλληλο χώρο. Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση όπου οι αληθοτιμές σχηματίζουν μια «πλήρη άλγεβρα Boole», όπως λέγεται. Ωστόσο, η πιο σημαντική περίπτωση ήταν ανέκαθεν η δίτιμη λογική, οπότε θα περιοριστούμε σε αυτήν.)

Έστω $\overline{\mathcal{S}}$ το σύνολο των ΚΣΤ που μπορούν να κατασκευαστούν από το $\mathcal{S}$ μέσω των πέντε τυποκατασκευαστικών πράξεων. (Το $\overline{\mathcal{S}}$ μπορεί επίσης να οριστεί ως το σύνολο των ΚΣΤ των οποίων τα σύμβολα προτάσεων ανήκουν όλα στο $\mathcal{S}$· βλ. τα σχόλια στο τέλος της προηγούμενης ενότητας.) Θέλουμε μια επέκταση $\overline{v}$ της v,

$$\overline{v} : \overline{\mathcal{S}} \to \{F, T\},$$

η οποία να απονέμει την ορθή αληθοτιμή σε κάθε ΚΣΤ του $\overline{\mathcal{S}}$. Η συνάρτηση αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

0. Για κάθε $A \in \mathcal{S}$, $\overline{v}(A) = v(A)$. (Συνεπώς, η $\overline{v}$ είναι επέκταση της v.)

Για οποιουσδήποτε α, β που ανήκουν στο $\overline{\mathcal{S}}$:

1. $\overline{v}((\neg\, \alpha)) = \begin{cases} T & \text{αν} \quad \overline{v}(\alpha) = F, \\ F & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

2. $\overline{v}((\alpha \wedge \beta)) = \begin{cases} T & \text{αν} \quad \overline{v}(\alpha) = T \quad \text{και} \quad \overline{v}(\beta) = T, \\ F & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

3. $\overline{v}((\alpha \vee \beta)) = \begin{cases} T & \text{αν} \quad \overline{v}(\alpha) = T \quad \text{ή} \quad \overline{v}(\beta) = T \ \text{(ή και τα δύο)}, \\ F & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

4. $\overline{v}((\alpha \rightarrow \beta)) = \begin{cases} F & \text{αν} \quad \overline{v}(\alpha) = T \quad \text{και} \quad \overline{v}(\beta) = F, \\ T & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

5. $\overline{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \begin{cases} T & \text{αν} \quad \overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta), \\ F & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

Οι συνθήκες 1–5 παρατίθενται σε αναλυτική μορφή στον Πίνακα III. Σε αυτό ακριβώς το σημείο είναι που υπεισέρχεται στις τυπικές ενέργειές μας το επιδιωκόμενο νόημα του συμβόλου π.χ. της σύζευξης. Παρατηρήστε ιδιαίτερα το επιδιωκόμενο νόημα του συμβόλου $\rightarrow$. Οποτεδήποτε απονέμεται στον α η τιμή F, ο $(\alpha \rightarrow \beta)$ θεωρείται «αληθής εν κενώ» και του απονέμεται η τιμή T. Για αυτόν και για τους άλλους συνδέσμους, είναι σίγουρα δυνατό να αναρωτηθεί κανείς αν έχουμε σκεφτεί με ακρίβεια το σύνηθες νόημα των «αν ..., τότε», «ή», κ.λπ., στον καθημερινό μας λόγο. Ωστόσο, το βασικό μας μέλημα είναι περισσότερο οι μαθηματικές αποφάνσεις παρά οι λεπτές αποχρώσεις του καθημερινού λόγου.

Πίνακας III

α	β	$(\neg\,\alpha)$	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Παραδείγματος χάριν, θα μπορούσαμε να μεταφράσουμε την πρόταση «Αν λες αλήθεια, τότε ο ανηψιός μου είναι πίθηκος» μέσω του τύπου $(\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M})$. Οποτεδήποτε ψεύδεστε, απονέμουμε σε αυτόν τον τύπο την τιμή T. Απονέμοντας την τιμή T, δεν ισχυριζόμαστε βέβαια ότι υπάρχει κάποια αιτιακή σύνδεση ανάμεσα στην ειλικρίνειά σας και τα τυχόν πιθηκοειδή χαρακτηριστικά του ανηψιού μου. Η συγκεκριμένη πρόταση είναι μια *υπό συνθήκη* δήλωση. Βεβαιώνει κάτι σχετικά με έναν συγγενή μου υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει μια ορισμένη *συνθήκη* – ότι λέτε την αλήθεια. Οποτεδήποτε δεν ισχύει αυτή η συνθήκη, η δήλωση είναι αληθής εν κενώ.

Σε αδρές γραμμές, μπορούμε να θεωρούμε ότι ένας υπό συνθήκη τύπος $(\alpha \rightarrow \beta)$ εκφράζει την *υπόσχεση* ότι εάν ισχύει μια συγκεκριμένη συνθήκη (δηλ. ότι ο α είναι αληθής), τότε ο β είναι αληθής. Εάν η συνθήκη α δεν ισχύει τελικά, τότε η υπόσχεση παραμένει απαραβίαστη, ανεξαρτήτως του β.

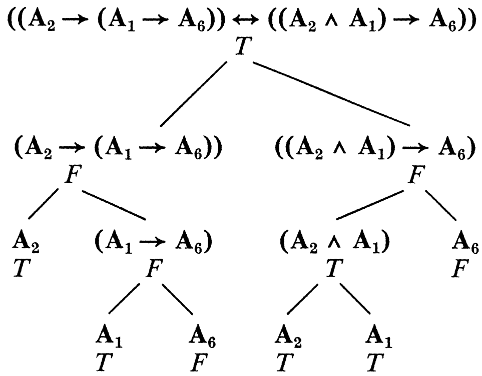
Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της $\overline{v}$. Έστω ότι ο α είναι ο ΚΣΤ

$$((\mathbf{A}_2 \rightarrow (\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \rightarrow \mathbf{A}_6))$$

και έστω v η εξής απονομή αληθοτιμών για το σύνολο $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_6\}$:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{A}_1) &= T, \\ v(\mathbf{A}_2) &= T, \\ v(\mathbf{A}_6) &= F. \end{aligned}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη $\overline{v}(\alpha)$. Μπορούμε να εξετάσουμε το δέντρο που απεικονίζει την κατασκευή του α:

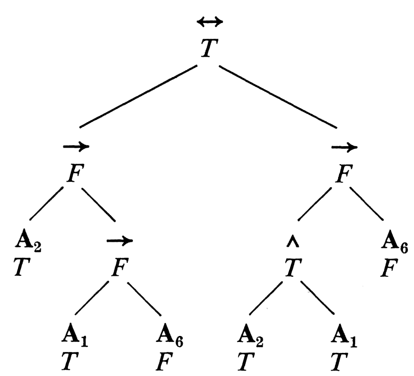


Εργαζόμενοι από κάτω προς τα πάνω, μπορούμε να απονείμουμε σε κάθε κόμβο β του δέντρου την τιμή $\overline{v}(\beta)$. Συνεπώς, ως πρώτο βήμα υπολογίζουμε τις τιμές

$$\overline{v}((\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_6)) = F \quad \text{και} \quad \overline{v}((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1)) = T.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε την τιμή $\overline{v}((\mathbf{A}_2 \to (\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_6))) = F$, κ.ο.κ. Τελικά, στην κορυφή του δέντρου φτάνουμε στην τιμή $\overline{v}(\alpha) = T$.

Στην πραγματικότητα, ο υπολογισμός αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολύ λιγότερο γράψιμο. Κατ' αρχάς, μπορούμε να σχεδιάσουμε το δέντρο στην ακόλουθη πιο λιτή μορφή:



Ακόμη και αυτό το δέντρο μπορεί να συμπιεστεί σε μία μόνο γραμμή (με αποκατάσταση των παρενθέσεων):

$$\begin{array}{l}((\mathbf{A}_2 \to (\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \land \mathbf{A}_1) \to \mathbf{A}_6)).\\ \quad T \;\; F \;\; T \;\; F \, F \qquad T \qquad T \; T \, T \quad F \; F\end{array}$$

Θεωρημα 12Α Για οποιαδήποτε απονομή αληθοτιμών v για ένα σύνολο $\mathcal{S}$ υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $\overline{v} : \overline{\mathcal{S}} \to \{F, T\}$ η οποία ικανοποιεί τις προαναφερθείσες συνθήκες 0-5.

Η πλήρης απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα αναφανεί στις επόμενες δύο ενότητες (1.3 και 1.4). Το θεώρημα θα πρέπει όμως ήδη να φαίνεται εξαιρετικά εύλογο, ιδιαίτερα υπό το φως του παραπάνω παραδείγματος. Για την απόδειξη της ύπαρξης της $\overline{v}$, το καθοριστικό στοιχείο θα είναι στην πράξη η μοναδικότητα των δέντρων που αναφέρθηκαν στο παράδειγμα.

Λέμε ότι μια απονομή αληθοτιμών v *ικανοποιεί* τον φ ανν $\overline{v}(\varphi) = T$. (Βέβαια, για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το πεδίο ορισμού της v να περιλαμβάνει όλα τα σύμβολα προτάσεων του φ.) Έστω τώρα ένα σύνολο Σ από ΚΣΤ (που θεωρούνται υποθέσεις) και ένας άλλος ΚΣΤ τ (που θεωρείται ένα ενδεχόμενο συμπέρασμα).

Ορισμος. Το Σ *συνεπάγεται ταυτολογικά* τον τ (σε συμβολική γραφή, $\Sigma \models \tau$) ανν κάθε απονομή αληθοτιμών για τα σύμβολα προτάσεων του Σ και του τ που ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ ικανοποιεί και τον τ.

Ο ορισμός αυτός αντανακλά τη διαισθητική μας αντίληψη ότι ένα συμπέρασμα έπεται από ένα σύνολο υποθέσεων εάν η παραδοχή ότι οι υποθέσεις είναι αληθείς εγγυάται ότι το συμπέρασμα είναι αληθές.

Υπάρχουν διάφορες ειδικές περιπτώσεις της έννοιας της ταυτολογικής συνεπαγωγής που θα πρέπει να αναφέρουμε. Ας δούμε κατ' αρχάς την ειδική περίπτωση όπου το Σ είναι το κενό σύνολο $\varnothing$. Παρατηρούμε ότι είναι αληθές εν κενώ ότι κάθε απονομή αληθοτιμών ικανοποιεί όλα τα μέλη του $\varnothing$. (Πώς θα μπορούσε να μην ισχύει αυτό; Μόνο αν υπήρχε κάποιο μη ικανοποιούμενο μέλος του $\varnothing$, πράγμα άτοπο.) Επομένως, έχουμε ότι $\varnothing \models \tau$ ανν όλες οι απονομές αληθοτιμών (για τα σύμβολα προτάσεων του τ) ικανοποιούν τον τ. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο τ είναι *ταυτολογία* (σε συμβολική μορφή, $\models \tau$). Παραδείγματος χάριν, όπως βρήκαμε σε ένα πρόσφατο παράδειγμα, ο ΚΣΤ $((\mathbf{A}_2 \to (\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \land \mathbf{A}_1) \to \mathbf{A}_6))$ ικανοποιείται από μία από τις οκτώ δυνατές απονομές αληθοτιμών για το σύνολο $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_6\}$. Στην πραγματικότητα ικανοποιείται και από τις άλλες επτά, και συνεπώς είναι ταυτολογία.

Μια άλλη ειδική περίπτωση είναι αυτή όπου δεν υπάρχει καμία απονομή αληθοτιμών που να ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ. Τότε, για οποιονδήποτε τ, είναι αληθές εν κενώ ότι $\Sigma \models \tau$. Παραδείγματος χάριν,

$$\{\mathbf{A}, (\neg\, \mathbf{A})\} \models \mathbf{B}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση δεν υπεισέρχεται καμία μυστηριώδης αρχή· έχουμε απλά ένα παραπροϊόν των ορισμών μας.

Παραδειγμα. $\{\mathbf{A}, (\mathbf{A} \to \mathbf{B})\} \models \mathbf{B}$. Υπάρχουν τέσσερεις απονομές αληθοτιμών για το σύνολο $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα, μόνο μία από αυτές ικανοποιεί αμφότερους τους **A** και **(A→B)**, και συγκεκριμένα η v για την οποία $v(\mathbf{A}) = v(\mathbf{B}) = T$. Αυτή η v ικανοποιεί και τον **B**.

Αν το Σ είναι το μονομελές σύνολο $\{\sigma\}$, τότε αντί για «$\{\sigma\} \models \tau$» γράφουμε «$\sigma \models \tau$». Αν έχουμε ότι $\sigma \models \tau$ και $\tau \models \sigma$, τότε λέμε ότι οι σ και τ είναι *ταυτολογικά ισοδύναμοι* (σε συμβολική μορφή, $\sigma \models\!\!\!= \tau$). Παραδείγματος χάριν, στην Ενότητα 1.0 είδαμε τους ΚΣΤ **(¬ (C ∨ K))** και **((¬ C) ∧ (¬ K))** ως εναλλακτικές μεταφράσεις μιας πρότασης σε φυσική γλώσσα. Πλέον μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

Μπορούμε ήδη να διατυπώσουμε ένα μη τετριμμένο γεγονός του οποίου η απόδειξη θα δοθεί παρακάτω (στην Ενότητα 1.7).

Θεωρημα της συμπαγειας Έστω Σ ένα άπειρο σύνολο από ΚΣΤ τέτοιο ώστε, για οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο Σ_0 του Σ, υπάρχει απονομή αληθοτιμών που ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ_0. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει απονομή αληθοτιμών που ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ.

Το θεώρημα αυτό μπορεί να αναδιατυπωθεί απλούστερα ως εξής: Εάν όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του Σ είναι ικανοποιήσιμα, τότε και το ίδιο το Σ είναι ικανοποιήσιμο. (Οι αναγνώστες που γνωρίζουν κάποια στοιχεία γενικής τοπολογίας ας προσπαθήσουν να ανακαλύψουν πού οφείλεται η ονομασία «θεώρημα της συμπάγειας»· το θεώρημα όντως βεβαιώνει τη συμπάγεια ενός συγκεκριμένου τοπολογικού χώρου. Μπορούν λοιπόν να αποδείξουν οι ίδιοι το θεώρημα, μέσω του θεωρήματος του Tychonoff για τους χώρους γινομένων.)

Πίνακες αληθοτιμών

Υπάρχει μια συστηματική διαδικασία, την οποία θα παρουσιάσουμε αμέσως παρακάτω, για να ελεγχθεί, για δεδομένους ΚΣΤ $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, και τ, εάν ισχύει ή όχι ότι

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \models \tau.$$

Ειδικότερα (όταν $k = 0$), η διαδικασία αυτή διαγιγνώσκει εάν κάποιος δεδομένος ΚΣΤ είναι ή δεν είναι ταυτολογία.

Παραδείγματος χάριν, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$(\neg\, (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \models ((\neg\, \mathbf{A}) \vee (\neg\, \mathbf{B})).$$

Για τον σκοπό αυτό, εξετάζουμε όλες τις απονομές αληθοτιμών για το σύνολο $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$. Υπάρχουν τέσσερεις τέτοιες απονομές· εν γένει, για ένα σύνολο από n σύμβολα προτάσεων υπάρχουν 2^n απονομές αληθοτιμών. Οι τέσσερεις απονομές μπορούν να παρατεθούν σε έναν πίνακα:

A	**B**
T	T
T	F
F	T
F	F

Στη συνέχεια, μπορούμε να επεκτείνουμε τον πίνακα συμπεριλαμβάνοντας τους τύπους $(\neg\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ και $((\neg\,\mathbf{A}) \vee (\neg\,\mathbf{B}))$. Για κάθε τύπο υπολογίζουμε τα T και F με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως, γράφοντας την αληθοτιμή κάτω από τον σωστό σύνδεσμο (Πίνακας IV). (Οι δύο ακραίες αριστερές στήλες του Πίνακα IV είναι στην πραγματικότητα περιττές.) Όπως μπορούμε να δούμε από αυτόν τον πίνακα, όλες οι απονομές αληθοτιμών που ικανοποιούν τον $(\neg\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ –τρεις τον αριθμό– ικανοποιούν και τον $((\neg\,\mathbf{A}) \vee (\neg\,\mathbf{B}))$. Μάλιστα ισχύει και το αντίστροφο, και συνεπώς

$$(\neg\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \models\!\!\!\dashv ((\neg\,\mathbf{A}) \vee (\neg\,\mathbf{B})).$$

Πίνακας IV

A	**B**	$(\neg\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$	$((\neg\,\mathbf{A}) \vee (\neg\,\mathbf{B}))$
T	T	$\boldsymbol{F}\,T\,T\,T$	$F\,T\,\boldsymbol{F}\,F\,T$
T	F	$\boldsymbol{T}\,T\,F\,F$	$F\,T\,\boldsymbol{T}\,T\,F$
F	T	$\boldsymbol{T}\,F\,F\,T$	$T\,F\,\boldsymbol{T}\,F\,T$
F	F	$\boldsymbol{T}\,F\,F\,F$	$T\,F\,\boldsymbol{T}\,T\,F$

Για να δείξουμε ότι $(\neg\,(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})) \not\models ((\neg\,\mathbf{A})\wedge(\neg\,\mathbf{B}))$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τον σχετικό πίνακα όπως παραπάνω. Ωστόσο, αρκεί μία γραμμή του πίνακα για να αποδείξουμε ότι υπάρχει πράγματι απονομή αληθοτιμών η οποία ικανοποιεί τον $(\neg\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ αλλά δεν ικανοποιεί τον $((\neg\,\mathbf{A}) \wedge (\neg\,\mathbf{B}))$.

Όσο πιο γενικά εφαρμόσιμη είναι μια διαδικασία, τόσο λιγότερο αποδοτική ενδέχεται να είναι. Παραδείγματος χάριν, για να δείξουμε ότι

$$\models ((\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))),$$

θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του πίνακα αληθοτιμών. Θα χρειαζόμασταν όμως οκτώ γραμμές (για τις οκτώ δυνατές απονομές αληθοτιμών για το σύνολο $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$). Σε αυτήν τη συγκεκριμένη περίπτωση, μπορούμε με λίγη εξυπνάδα να μειώσουμε την ανιαρή εργασία:

$$
\begin{array}{l}
((\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))). \\
\;T\;T \qquad\qquad T \;\; T\;T \quad T\;T\;T \\
\;F\;F\;F\;F \quad\; T \;\; F\;F\;F\;F\;F \\
\;F\;T\;T\;T\;T \;\; T \;\; F\;T\;T\;T\;F\;T\;T
\end{array}
$$

Στην πρώτη γραμμή υποθέσαμε μόνο ότι $v(\mathbf{A}) = T$. Δεδομένου ότι αυτή η πληροφορία αρκεί για να υπολογίσουμε T για τον ΚΣΤ, σε όλες τις παρακάτω γραμμές υποθέτουμε ότι $v(\mathbf{A}) = F$. Στη δεύτερη γραμμή υποθέτουμε ότι $v(\mathbf{B}) = F$· και πάλι αυτή η πληροφορία μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε T για τον ΚΣΤ. Επομένως, μπορούμε πλέον να περιοριστούμε στην περίπτωση $v(\mathbf{B}) = T$. Δεδομένου ότι η έκφραση είναι συμμετρική ως προς τα **B** και **C**, μπορούμε να υποθέσουμε περαιτέρω ότι $v(\mathbf{C}) = T$. Έτσι, απομένει μόνο η τρίτη γραμμή, με την οποία η εργασία μας έχει ολοκληρωθεί.

Ένα παράδειγμα αποφυγής ενός πίνακα με 16 γραμμές είναι το εξής: Έστω η ακόλουθη ταυτολογία:

$$
\begin{array}{l}
((((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \to \mathbf{R}) \to \mathbf{S}) \to ((\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \to \mathbf{S})). \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; T \qquad\qquad\quad T\;T \\
\quad\; F \quad\; T \quad\; F\;F\;T \\
\;T\;T\;T\;\;R\;R\;\bar{R}\;F\;T\;\;T\;R\;R\;\bar{R}\;F
\end{array}
$$

Στην πρώτη γραμμή χειριζόμαστε την περίπτωση όπου $v(\mathbf{S}) = T$. Στη δεύτερη γραμμή χειριζόμαστε την περίπτωση όπου $v(\mathbf{P}) = F$ ή $v(\mathbf{Q}) = F$. Η τρίτη γραμμή περιλαμβάνει τις δύο εναπομένουσες δυνατότητες, όπου R είναι η αληθοτιμή που απονέμεται στο **R** και $\overline{R}$ είναι η αντίθετη τιμή.

Στο παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να αντιληφθούμε κατ' ευθείαν ότι πρόκειται για ταυτολογία. Όσο ισχυρότερος ο «πρόγονος» (ή έκφραση στο αριστερό μέλος), τόσο ασθενέστερη η υπό συνθήκη έκφραση. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) &\models \mathbf{P}, \\
(\mathbf{P} \to \mathbf{R}) &\models ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \to \mathbf{R}), \\
(((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \to \mathbf{R}) \to \mathbf{S}) &\models ((\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \to \mathbf{S}).
\end{aligned}
$$

Το ζήτημα της ανάπτυξης αποτελεσματικών διαδικασιών που μειώνουν τη μηχανική εργασία είναι σημαντικό για την απόδειξη θεωρημάτων μέσω υπολογιστή. Σε ορισμένα από τα προγράμματα αυτού του είδους πιθανόν να απαιτείται να ελεγχθούν ΚΣΤ της προτασιακής λογικής που περιλαμβάνουν χιλιάδες σύμβολα προτάσεων. Οι πίνακες αληθοτιμών είναι απαγορευτικά δύσχρηστοι για τέτοιες περιπτώσεις. Το πρόβλημα της ανάπτυξης μεθόδων υψηλής αποδοτικότητας αποτελεί ένα από τα πεδία της τρέχουσας έρευνας στην επιστήμη υπολογιστών.

Παρέκβαση. Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του πίνακα αληθοτιμών –στην πλήρη ανάπτυξή της– σε έναν ΚΣΤ με n σύμβολα προτάσεων, θα πρέπει να καταστρώσουμε έναν πίνακα με 2^n γραμμές. Το πρόβλημα είναι ότι, καθώς αυξάνεται το n, το 2^n αυξάνεται «εκθετικά». Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να καταστρώσουμε τον πίνακα με ρυθμό ένα εκατομμύριο γραμμές το δευτερόλεπτο. (Προφανώς, υποθέτουμε ότι εργαζόμαστε με τη βοήθεια υπολογιστή.) Επομένως, αν $n = 80$ λογού χάριν, θα χρειαστούμε «μόνο» 2^{80} microsecond για να σχηματίσουμε τον πλήρη πίνακα. Πόσο είναι αυτό το χρονικό διάστημα; Αν το μετατρέψουμε σε έτη, έχουμε ότι τα 2^{80} microsecond είναι περίπου 38 δισεκατομμύρια έτη. Για σύγκριση, η ηλικία του σύμπαντος είναι περίπου 15 δισεκατομμύρια έτη. Δηλαδή το διάστημα των 2^{80} microsecond είναι μεγαλύτερο από όλη την ιστορία του σύμπαντος!

Υπάρχει άραγε ταχύτερη μέθοδος; Θα μπορούσε άραγε να υπάρξει κάποια γενική μέθοδος η οποία, για οποιονδήποτε δεδομένο ΚΣΤ α με n σύμβολα προτάσεων, να προσδιορίζει εάν ο α είναι ταυτολογία ή όχι σε μόνο $10n^5$ microsecond (ή σε κάποια άλλη συνάρτηση του n που να αυξάνεται πολυωνυμικά, αντί για εκθετικά); (Για $n = 80$, τα $10n^5$ microsecond αντιστοιχούν σε μόλις 9 ώρες.) Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα παραμένει άγνωστη, αλλά η επικρατούσα πεποίθηση είναι ότι είναι αρνητική. Το ερώτημα αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα «P έναντι NP», το σημαντικότερο άλυτο πρόβλημα της θεωρητικής επιστήμης υπολογιστών στις μέρες μας.

Ορισμένες επιλεγμένες ταυτολογίες

1. Προσεταιριστικός και μεταθετικός νόμος για τα $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$.
2. Επιμεριστικοί νόμοι:

$$((\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}))).$$
$$((\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))).$$

3. Άρνηση:

$$((\neg\, (\neg\, \mathbf{A})) \leftrightarrow \mathbf{A}).$$
$$((\neg\, (\mathbf{A} \to \mathbf{B})) \leftrightarrow (\mathbf{A} \wedge (\neg\, \mathbf{B}))).$$
$$((\neg\, (\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge (\neg\, \mathbf{B})) \vee ((\neg\, \mathbf{A}) \wedge \mathbf{B}))).$$

Νόμοι του De Morgan:

$$((\neg\, (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \leftrightarrow ((\neg\, \mathbf{A}) \vee (\neg\, \mathbf{B}))).$$
$$((\neg\, (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \leftrightarrow ((\neg\, \mathbf{A}) \wedge (\neg\, \mathbf{B}))).$$

4. Άλλες:

Αποκλειόμενος μέσος:	$(\mathbf{A} \vee (\neg\, \mathbf{A}))$.
Άτοπο:	$(\neg\, (\mathbf{A} \wedge (\neg\, \mathbf{A})))$.
Αντιθετοαντίστροφο:	$((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow ((\neg\, \mathbf{B}) \to (\neg\, \mathbf{A})))$.
Εξαγωγή:	$(((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{C}) \leftrightarrow (\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})))$.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κανείς από τους παρακάτω δύο τύπους δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο:
$$(\mathbf{A} \leftrightarrow (\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C})),$$
$$((\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \vee ((\neg\, \mathbf{A}) \wedge ((\neg\, \mathbf{B}) \wedge (\neg\, \mathbf{C})))).$$
Υπόδειξη: Αρκούν δύο απονομές αληθοτιμών, δεν χρειάζονται οκτώ.

2. (α) Είναι ο τύπος $(((\mathbf{P} \to \mathbf{Q}) \to \mathbf{P}) \to \mathbf{P})$ ταυτολογία;
   (β) Ορίστε τον τύπο σ_k αναδρομικά ως εξής: $\sigma_0 = (\mathbf{P} \to \mathbf{Q})$ και $\sigma_{k+1} = (\sigma_k \to \mathbf{P})$. Για ποιες τιμές του k είναι ο σ_k ταυτολογία; (Το σκέλος (α) αντιστοιχεί στην τιμή $k = 2$.)

3. (α) Προσδιορίστε αν ο τύπος $((\mathbf{P} \to \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{Q} \to \mathbf{P}))$ είναι ταυτολογία ή όχι.
   (β) Προσδιορίστε αν ο τύπος $((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \to \mathbf{R})$ συνεπάγεται ταυτολογικά τον τύπο $((\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \vee (\mathbf{Q} \to \mathbf{R}))$.

4. Δείξτε ότι ισχύουν τα εξής:
   (α) $\Sigma; \alpha \models \beta$ ανν $\Sigma \models (\alpha \to \beta)$.
   (β) $\alpha \models\dashv \beta$ ανν $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

   (Υπενθυμίζουμε ότι $\Sigma; \alpha$ είναι το $\Sigma \cup \{\alpha\}$, δηλαδή το σύνολο Σ μαζί με το ένα πιθανώς νέο μέλος α.)

5. Αποδείξτε ή καταρρίψτε καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:
   (α) Αν $\Sigma \models \alpha$ ή $\Sigma \models \beta$, τότε $\Sigma \models (\alpha \vee \beta)$.
   (β) Αν $\Sigma \models (\alpha \vee \beta)$, τότε $\Sigma \models \alpha$ ή $\Sigma \models \beta$.

6. (α) Δείξτε ότι αν οι v_1 και v_2 είναι απονομές αληθοτιμών που συμπίπτουν σε όλα τα σύμβολα προτάσεων του ΚΣΤ α, τότε $\overline{v}_1(\alpha) = \overline{v}_2(\alpha)$. Χρησιμοποιήστε την αρχή της επαγωγής.
   (β) Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύνολο από σύμβολα προτάσεων το οποίο περιλαμβάνει τα σύμβολα του Σ και του τ (και ενδεχομένως περισσότερα). Δείξτε ότι $\Sigma \models \tau$ ανν κάθε απονομή αληθοτιμών για το $\mathcal{S}$ η οποία ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ ικανοποιεί επίσης τον τ. (Αυτό προκύπτει εύκολα από το σκέλος (α). Το βασικό σημείο του σκέλους (β) είναι ότι δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για το αν

έχουμε λάβει το *απολύτως* ακριβές πεδίο ορισμού μιας απονομής αληθοτιμών· αρκεί το πεδίο ορισμού να είναι αρκετά μεγάλο. Παραδείγματος χάριν, μια δυνατότητα θα ήταν να χρησιμοποιούμε πάντοτε απονομές αληθοτιμών πάνω στο σύνολο *όλων* των συμβόλων προτάσεων. Το μειονέκτημα αυτής της επιλογής είναι ότι αυτά τα αντικείμενα είναι άπειρα, και το πλήθος τους είναι πολύ μεγάλο –υπεραριθμήσιμα μεγάλο.)

7. Βρίσκεστε σε μια χώρα που κατοικείται από ανθρώπους που είτε λένε πάντοτε αλήθεια είτε λένε πάντοτε ψέματα. Καθώς κατευθύνεστε προς την πρωτεύουσα της χώρας, φτάνετε σε μια διχάλα του δρόμου, και πρέπει να πληροφορηθείτε ποιος από τους δύο κλάδους οδηγεί στον προορισμό σας. Στη διασταύρωση υπάρχει ένας ντόπιος, ο οποίος όμως έχει χρόνο να απαντήσει μόνο σε μια ερώτηση τύπου «ναι ή όχι». Ποια ερώτηση θα του υποβάλλατε προκειμένου να μάθετε ποιον κλάδο πρέπει να ακολουθήσετε; *Υπόδειξη*: Φτιάξτε έναν πίνακα.

8. (Αντικατάσταση) Έστω μια ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ από ΚΣΤ. Για κάθε ΚΣΤ φ έστω φ^* το αποτέλεσμα της αντικατάστασης του συμβόλου πρότασης $\mathbf{A}_n$ με τον α_n, για κάθε n.

   (α) Έστω v μια απονομή αληθοτιμών για το σύνολο όλων των συμβόλων προτάσεων· ορίζουμε ως u την απονομή αληθοτιμών για την οποία $u(\mathbf{A}_n) = \overline{v}(\alpha_n)$. Δείξτε ότι $\overline{u}(\varphi) = \overline{v}(\varphi^*)$. Χρησιμοποιήστε την αρχή της επαγωγής.

   (β) Δείξτε ότι αν ο φ είναι ταυτολογία, τότε το ίδιο ισχύει και για τον φ^*. (Παραδείγματος χάριν, μία από τις επιλεγμένες ταυτολογίες που αναφέραμε παραπάνω είναι η $\mathbf{((A \land B) \leftrightarrow (B \land A))}$. Αν χρησιμοποιήσουμε αντικατάσταση σε αυτήν, συμπεραίνουμε ότι ο τύπος $\mathbf{((}\alpha \land \beta\mathbf{)} \leftrightarrow \mathbf{(}\beta \land \alpha\mathbf{))}$ είναι ταυτολογία, για οποιουσδήποτε ΚΣΤ α και β.)

9. (Δυϊκότητα) Έστω α ένας ΚΣΤ στον οποίο τα μόνα σύμβολα συνδέσμων είναι τα $\land$, $\lor$, και $\neg$. Έστω α^* το αποτέλεσμα που προκύπτει αν εναλλαγούν τα $\land$ και $\lor$ και αντικατασταθεί κάθε σύμβολο πρότασης με την άρνησή του. Δείξτε ότι ο α^* είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $\mathbf{(}\neg\, \alpha\mathbf{)}$. Χρησιμοποιήστε την αρχή της επαγωγής. *Σχόλιο*: Έπεται ότι αν $\alpha \models\!\!\!= \beta$ τότε $\alpha^* \models\!\!\!= \beta^*$.

10. Λέμε ότι ένα σύνολο Σ_1 από ΚΣΤ είναι *ισοδύναμο* με ένα σύνολο Σ_2 από ΚΣΤ ανν για κάθε ΚΣΤ α έχουμε ότι $\Sigma_1 \models \alpha$ ανν $\Sigma_2 \models \alpha$. Ένα σύνολο Σ είναι *ανεξάρτητο* ανν κανένα μέλος του Σ δεν συνεπάγεται ταυτολογικά από τα υπόλοιπα μέλη του Σ. Δείξτε ότι ισχύουν τα εξής.

   (α) Ένα πεπερασμένο σύνολο από ΚΣΤ έχει ανεξάρτητο ισοδύναμο υποσύνολο.

   (β) Ένα άπειρο σύνολο δεν έχει απαραιτήτως ανεξάρτητο ισοδύναμο υποσύνολο.

   *(γ) Έστω $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$· δείξτε ότι υπάρχει ανεξάρτητο ισοδύναμο σύνολο Σ'. (Σύμφωνα με το σκέλος (β), εν γένει δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι $\Sigma' \subseteq \Sigma$.)

11. Δείξτε ότι μια απονομή αληθοτιμών v ικανοποιεί τον ΚΣΤ

$$(\cdots(\mathbf{A}_1 \leftrightarrow \mathbf{A}_2) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \mathbf{A}_n)$$

αnν $v(\mathbf{A}_i) = F$ για άρτιο πλήθος από i, $1 \leq i \leq n$. (Βάσει του προσεταιριστικού νόμου για το σύμβολο αμφίδρομης συνθήκης $\leftrightarrow$, οι θέσεις των παρενθέσεων δεν έχουν καθοριστική σημασία.)

12. Υπάρχουν τρεις ύποπτοι για έναν φόνο: Ο Αντρέας, ο Βασίλης και ο Γιώργος. Ο Αντρέας λέει: «Δεν το έκανα εγώ. Το θύμα γνώριζε από παλιά τον Βασίλη. Ο Γιώργος όμως τον μισούσε.» Ο Βασίλης λέει: «Δεν το έκανα εγώ. Ούτε καν γνώριζα το θύμα. Εκτός αυτού, όλη εκείνη την εβδομάδα έλειπα σε ταξίδι.» Ο Γιώργος λέει: «Δεν το έκανα εγώ. Εκείνη την ημέρα είδα και τον Αντρέα και τον Βασίλη στο κέντρο της πόλης με το θύμα· ένας από αυτούς πρέπει να το έκανε.» Υποθέστε ότι οι δύο αθώοι λένε την αλήθεια, αλλά ο ένοχος πιθανόν να λέει ψέματα. Ποιος είναι ο δολοφόνος;

13. Μια διαφήμιση σε ένα περιοδικό σχετικά με το τένις αναφέρει τα εξής: «Αν δεν παίζω τένις, βλέπω τένις. Και αν δεν βλέπω τένις, διαβάζω για το τένις.» Υποθέτουμε ότι ο ομιλών δεν μπορεί να ασχολείται ταυτόχρονα με περισσότερες από μια εκ των παραπάνω δραστηριοτήτων. Τι κάνει ο ομιλών; (Μεταφράστε τις δοθείσες προτάσεις στην τυπική μας γλώσσα· εξετάστε τις δυνατές απονομές αληθοτιμών.)

14. Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο όλων των συμβόλων προτάσεων, και ας υποθέσουμε ότι $v : \mathcal{S} \to \{F, T\}$ είναι μια απονομή αληθοτιμών. Δείξτε ότι υπάρχει *το πολύ* μία επέκταση $\overline{v}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες 0-5 οι οποίες αναφέρθηκαν στην αρχή αυτής της ενότητας. (Ας υποθέσουμε ότι αμφότερες οι $\overline{v}_1$ και $\overline{v}_2$ είναι τέτοιες επεκτάσεις. Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαγωγής, δείξτε ότι $\overline{v}_1 = \overline{v}_2$.)

15. Από τους παρακάτω τρεις τύπους, ποιος συνεπάγεται ταυτολογικά ποιον;

    (α) $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$

    (β) $(\neg\, ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\neg\, (\mathbf{B} \to \mathbf{A}))))$

    (γ) $(((\neg\, \mathbf{A}) \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee (\neg\, \mathbf{B})))$

1.3 Ένας αλγόριθμος συντακτικής ανάλυσης

Σκοπός μας σε αυτήν την ενότητα είναι να αποδείξουμε ότι οι παρενθέσεις που έχουμε χρησιμοποιήσει αρκούν για να αρθεί κάθε ασάφεια στην ανάλυση ΚΣΤ. (Η ύπαρξη της επέκτασης $\overline{v}$ μιας απονομής αληθοτιμών v θα βασιστεί σε αυτήν την έλλειψη ασάφειας.[1])

[1]Οι αναγνώστες που έχουν ήδη αποδεχθεί την ύπαρξη της $\overline{v}$ μπορούν να παραλείψουν σχεδόν ολόκληρη αυτήν την ενότητα. Η τελευταία υποενότητα, σχετικά με την παράλειψη παρενθέσεων, εξακολουθεί να είναι απαραίτητη.