ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία με τίτλο:

«Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ολοκληρώματος»

Κυριακοπούλου Κωνσταντίνα

Δ201015

Επιβλέπων Καθηγητής:

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Αθήνα

Σεπτέμβριος,2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Ζαχαριάδης Θεοδόσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	…………….
2)Φαρμάκη Βασιλική	Καθηγήτρια	………..…
3)Γιαννακούλιας Ευστάθιος	Ομότιμος Καθηγητής	………..…

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον κ.Γιαννακούλια για όλη την βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας. Κυρίως για το χρόνο που αφιέρωσε και για την υπομονή του να ακούει και να λύνει τις πολλές απορίες μου.

Θέλω να ευχαριστήσω επίσης τον κ.Ζαχαριάδη και την κ.Φαρμάκη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους αλλά και για τα πολύ ωραία μαθήματα που διδάσκουν στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα.
Είναι και οι τρεις εξαιρετικοί!

Θα ήταν μεγάλη παράλειψη να μην γράψω τις ευχαριστίες μου στη Διονυσία Μπακογιάννη που ήταν πάντα πρόθυμη να με βοηθήσει σε ότι χρειάστηκα.

Σε προσωπικό επίπεδο ευχαριστώ το σύζυγό μου Κώστα για τη δύναμη που μου έδινε να συνεχίσω και τους γονείς μου για τη βοήθεια που μου παρείχαν.

Στη Δανάη και τον Κώστα

Περίληψη

Η σύγχρονη έννοια του ολοκληρώματος αποτελεί το προϊόν μιας διανοητικής περιπέτειας δεκάδων αιώνων. Σ' αυτήν την πορεία υπήρχαν λάθη στις αποδείξεις που παρέμεναν για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία σύντομη ιστορική ανασκόπηση της εξέλιξης της έννοιας του ολοκληρώματος, ξεκινώντας από τους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων των αρχαίων Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων και τη μέθοδο της εξάντλησης των Ευδόξου – Αρχιμήδη και φτάνοντας έως και το 19^{ο} αιώνα στον αυστηρό ορισμό του ολοκληρώματος κατά Riemann.

Σκοπός είναι να φανεί η κοπιαστική προσπάθεια πολλών από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς μέσα από τους αιώνες μέχρι να φτάσουν στην αυστηρή θεμελίωση αυτής της έννοιας.

Λέξεις κλειδιά: ολοκλήρωμα , ιστορική ανασκόπηση, μέθοδος εξάντλησης, αυστηρος ορισμός

Abstract

The modern concept of the integral is the product of an intellectual adventure tens of centuries. This route was full of mistakes which remain for long periods.

This thesis presents a brief historical overview of the development of the concept of the integral, starting from the geometrical calculations areas and volumes of the ancient Egyptians and Babylonians and the method of exhaustion of Eudoxus - Archimedes up to and including the 19th century to the strict definition of the integral in Riemann.

The purpose is to show the laborious effort of many of the leading mathematicians through the centuries to reach the strict basis of this concept.

Key words: integral, historical overview, method of exhaustion, strict definition

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Οι αρχές του Ολοκληρωτικού Λογισμού πρέπει να αναζητηθούν στους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων της αρχαιότητας. Οι ιστορικές αρχές των μαθηματικών εννοιών μπορούν να ανιχνευθούν σε χώρες που θεωρούνται πηγές του πολιτισμού όπως η Κίνα, η Ινδία, η Αίγυπτος και η Μεσοποταμία. Από Αιγυπτιακούς παπύρους και κείμενα των αρχαίων Βαβυλωνίων που διασώθηκαν πληροφορούμαστε ότι 2500 χρόνια πριν γνώριζαν πως να βρίσκουν εμβαδόν του τριγώνου, του ορθογωνίου, του τραπεζίου και με αρκετή προσέγγιση το εμβαδόν του κύκλου. Οι Αιγύπτιοι ήταν σε θέση να υπολογίζουν το εμβαδόν στοιχειωδών επιπέδων σχημάτων κόβοντας το επίπεδο σχήμα σε τρίγωνα και ανακατανέμοντας τα κομμάτια ώστε να καταλήξουν σε ένα ή περισσότερα ορθογώνια. Η έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού, που εμφανίστηκε με τη μορφή της ανακατανομής, και που ήταν απαραίτητη για τον καθορισμό εμβαδών και όγκων ευθυγράμμων σχημάτων θα αποτελέσει το θεμέλιο για την ανάπτυξη του ολοκληρωτικού λογισμού (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, 1999).

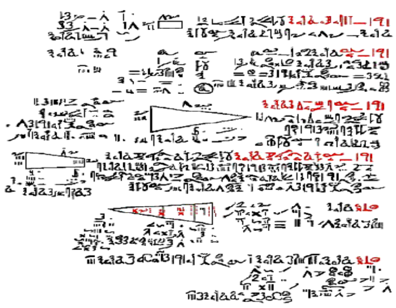
Τα μαθηματικά των Αιγυπτίων

Ο Αιγυπτιακός πολιτισμός αναπτύχθηκε σε μία χρονική περίοδο 2.000 περίπου χρόνων από το 3.000 έως το 1.100 π.Χ. Τα μαθηματικά των Αιγυπτίων δεν είχαν επιστημονική μορφή, αλλά τα ασκούσαν επαγγελματικά οι Αιγύπτιοι γραφείς. Σ' αυτά ήταν ενοποιημένα αριθμητική και γεωμετρία και διαπραγματεύονταν με προβλήματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων. Η αιγυπτιακή γεωμετρία δεν ήταν επιστήμη με την ελληνική έννοια του όρου, αλλά απλώς εφαρμοσμένη αριθμητική. Στα γεωμετρικά προβλήματα ζητείται να υπολογιστούν εμβαδά ή όγκοι. Σε όλες όμως τις περιπτώσεις πρέπει να είναι γνωστοί οι κανόνες στους οποίους βασίζονται οι υπολογισμοί. Η συστηματική όμως παραγωγή των κανόνων αυτών δεν εμφανίζεται πουθενά. Συχνά χρησιμοποιούνται μόνο προσεγγιστικοί τύποι. Κατά τον Solomon Gandz, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δεν είχαν 'Γεωμετρία της Γωνίας' και δεν ήταν γνωστός ούτε καν ο όρος γωνία. Δεν υπάρχει αναφορά σε μέτρηση γωνιών, ούτε οι όροι της ορθής και της οξείας γωνίας. Υπολόγιζαν όμως σωστά το εμβαδόν τριγώνου βρίσκοντας πρώτα το μισό της βάσης του (τετραγωνισμός του τριγώνου) και στη συνέχεια πολλαπλασίαζαν το αποτέλεσμα με το ύψος αυτού. Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τραπεζίου πολλαπλασίαζαν το ημιάθροισμα των βάσεων αυτού με το ύψος. Στην περίπτωση τυχαίου τετραπλεύρου εκτελούσαν πολλαπλασιασμό των ημιαθροισμάτων των ζευγών των απέναντι πλευρών, κάτι που ασφαλώς είναι εσφαλμένο, αφού ισχύει μόνο στην περίπτωση του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Επίσης υπολόγιζαν το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζοντας τις δύο διαστάσεις του. Γνώριζαν επίσης να υπολογίζουν τον όγκο κυλίνδρου, ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και πιθανόν της πυραμίδας.

Οι πηγές των Αιγυπτιακών Μαθηματικών

Πάπυρος του Rhind

Ένα από τα φημισμένα Αιγυπτιακά κείμενα ήταν ο πάπυρος του Rhind. Ανακαλύφθηκε στα ερείπια της αρχαίας πόλης των Θηβών το 1855μ.Χ.Ο Πάπυρος του Rhind είναι μια συλλογή 84 προβλημάτων. Οφείλει την ονομασία του στον Σκοτσέζο δικηγόρο A.H. Rhind (Ριντ, 1833-1863), ο οποίος τον αγόρασε το 1858 στο Λούξορ. Ο πάπυρος αντιγράφτηκε περί το 1650 π.Χ. από τον γραφέα A'h-Mose (στα ελληνικά αποδίδεται συνήθως ως Άχμες ή Αχμής, είναι πιθανό πάντως να πρόκειται για το γνωστό - από αναφορές Ελλήνων συγγραφέων - όνομα Άμασις), και προέρχεται από ένα πρωτότυπο που χρονολογείται από το 1850 π.Χ. Τα ιερογλυφικά στον πάπυρο αποκρυπτογραφήθηκαν στο τέλος του 19ουαιώνα, πριν την αποκρυπτογράφηση της σφηνοειδούς γραφής των Βαβυλωνιακών πινακίδων. Σήμερα φυλάσσεται στο Βρετανικό Μουσείο του Λονδίνου. Σκοπός του συγγραφέα είναι να μυήσει τον αναγνώστη στα μυστικά των αριθμών και στην τέχνη των υπολογισμών με κλάσματα , θέμα ιδιαίτερα χρήσιμο σε ποικίλα πρακτικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνταν οι υπάλληλοι του κράτους. Ωστόσο ανάμεσα σε αυτά υπάρχουν και ορισμένα καθαρά θεωρητικά θέματα, από τα οποία κατασκευάζονται ασκήσεις που εντάσσονται στη δύσκολη τέχνη του λογισμού με κλάσματα.

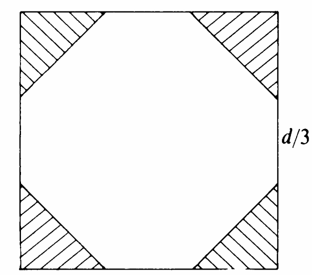


Πάπυρος του Rhind

Στο πρόβλημα 50 του παπύρου υπάρχει το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού ενός κυκλικού αγρού διαμέτρου d.

Η λύση του δίνεται υπό μορφή οδηγιών: «Αφαίρεσε το $\frac{1}{9}$ της διαμέτρου. Το υπόλοιπον είναι 8. Πολλαπλασίασε το 8, οκτώ φορές. Το αποτέλεσμα είναι 64. Το εμβαδόν επομένως είναι 64». Με άλλα λόγια οι Αιγύπτιοι γραφείς χρησιμοποιούσαν τον τύπο $E = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$. Η σχέση αυτή δίνει την προσεγγιστική τιμή 3.1605... για τον αριθμό π.

Η πολύ καλή αυτή προσέγγιση του π επιτεύχθηκε πιθανότατα από την τριχοτόμηση κάθε πλευράς του τετραγώνου του περιγεγραμμένου σε κύκλο διαμέτρου d, αποκόπτοντας τις 4 γωνίες του όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Το εμβαδόν του προκύπτοντος οκταγώνου βρίσκεται αν από το εμβαδόν d^2 του τετραγώνου αφαιρέσουμε το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων ορθογωνίων τριγώνων που έχουν κάθετες πλευρές ίσες με $\frac{d}{3}$.Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από την ισότητα :

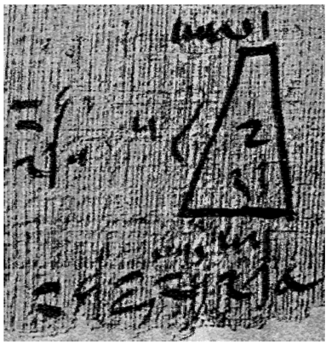
$$E = d^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{9} = d^2 - \frac{2d^2}{9} = \frac{7}{9}d^2 = \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \simeq \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Η σχέση $E=\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2$ δίνει $E=\frac{256}{81}\left(\frac{d}{2}\right)^2$ και άρα $\pi=\frac{256}{81}\simeq 3{,}1605$.

Αποδεικνύεται ότι αυτός ο εμπειρικός τύπος ισοδυναμεί με το να πάρουμε το

$\pi=\left(\frac{4}{3}\right)^4 \simeq 3.16049$ (Eves, 1989).

Ο Gillings (1982) διατυπώνει το εύλογο ερώτημα για τον τρόπο με τον οποίον ο γραφέας κατέληξε στο συγκεκριμένο τύπο και συμπληρώνει ότι το ποσοστό απόκλισης από την τιμή του εμβαδού που θα υπολογίζαμε σήμερα (λαμβάνοντας την τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων προσέγγιση του π) δεν υπερβαίνει το 0,6%.
Οι τύποι που βρέθηκαν στον πάπυρο Rhind είναι η πρώτη καταγεγραμμένη απόπειρα «τετραγωνισμού του κύκλου», δηλαδή η προσπάθεια κατασκευής ενός τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με αυτό ενός κύκλου. Επιπλέον, ιστορικοί της μαθηματικής επιστήμης αναφέρουν συχνά ότι οι Αιγύπτιοι θεωρούσαν την τιμή του π ίση με $\frac{256}{81}$. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν συγκεκριμένα στοιχεία που να δείχνουν ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν συλλάβει το π ως μια σταθερά, πόσο μάλλον ότι προσπάθησαν να το υπολογίσουν. Προφανώς τους ενδιέφερε να βρουν μόνο τη σχέση του κύκλου με το τετράγωνο , για να είναι σε θέση να μετρούν με ακρίβεια εκτάσεις και κτίρια.

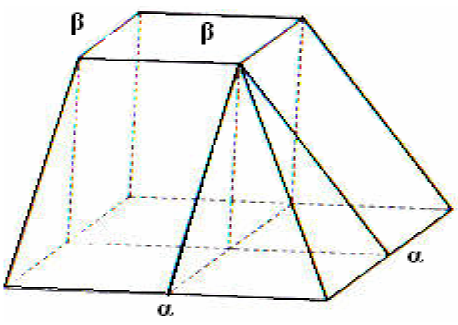


Πάπυρος της Μόσχας

Η δεύτερη σημαντική πηγή μας για τα αιγυπτιακά μαθηματικά είναι ο πάπυρος της Μόσχας. Γράφτηκε στη διάρκεια της 13^{ης} δυναστείας (1783-1640 π.Χ), πιστεύεται όμως ότι το σωζόμενο κείμενο κατάγεται από ένα πρωτότυπο που ανάγεται πιθανώς στην ίδια εποχή με το πρωτότυπο του παπύρου Rhind.Είναι γραμμένο στην ιερατική γραφή. Αγοράστηκε το 1893 από τον Ρώσο ευγενή Golenischev που είχε διατελέσει καθηγητής αιγυπτιολογίας του Καΐρου. Το 1912 ο Golenischev δάνεισε στο Μουσείο της Μόσχας την ιδιόκτητη συλλογή αρχαιοτήτων που είχε αποκτήσει κατά την πολυετή παραμονή του στην Αίγυπτο. Μετά την επανάσταση του 1917 το νέο σοβιετικό καθεστώς απαλλοτρίωσε τη συλλογή και μεταβίβασε την κυριότητά της στο κράτος. Σήμερα ο πάπυρος φυλάσσεται στο Μουσείο Καλών Τεχνών «Πούσκιν» της Μόσχας καταχωρισμένος με τον αριθμό 4676. Ο πάπυρος περιλαμβάνει 25 προβλήματα. Ένα από αυτά τα προβλήματα είναι η εύρεση του όγκου της κόλουρης πυραμίδας (πρόβλημα 14) που παρουσιάζουμε παρακάτω:

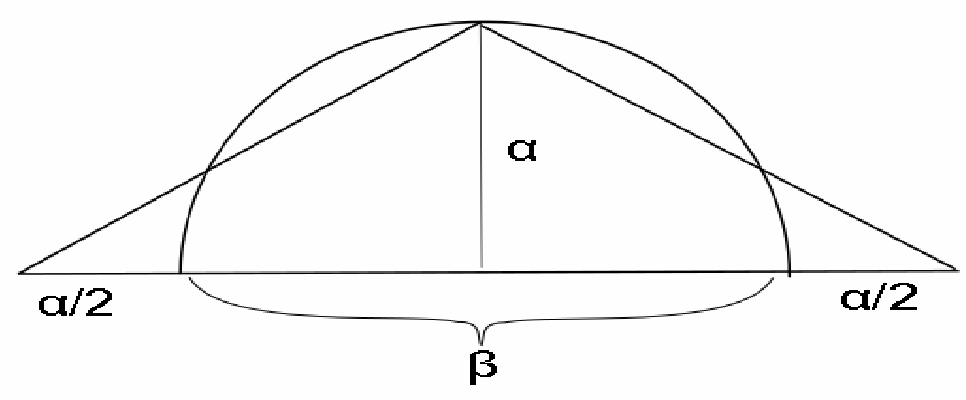
Πρόβλημα 14 του πάπυρου της Μόσχας:

Υπολογισμός του όγκου κόλουρης πυραμίδας, της οποίας η πάνω επιφάνεια είναι τετράγωνο με μήκος πλευράς 2 , η κάτω επιφάνεια τετράγωνο με μήκος πλευράς 4 και με ύψος 6 όπως φαίνεται στο σχήμα:



Το κείμενο είναι ως εξής : "Έχεις μια κόλουρη πυραμίδα με 6 στο ύψος , 4 στη βάση και 2 στην κορυφή. Πάρε το τετράγωνο του 4, αποτέλεσμα 16. Διπλασίασε το 4, αποτέλεσμα 8. Πάρε το τετράγωνο του 2, αποτέλεσμα 4. Πρόσθεσε το 16 και το 8 και το 4, αποτέλεσμα 28. Πάρε το 1/3 του 6, αποτέλεσμα 2. Πάρε το 28 δύο φορές, αποτέλεσμα 56. Δες, είναι 56. Θα το βρείς σωστό". Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι στα επεξηγηματικά προβλήματα της αρχαιότητας υπήρχε η συνήθεια να περιγράφεται μία γενική διαδικασία και οι συγκεκριμένοι αριθμοί που χρησιμοποιούνταν ήταν απλά τυχαίοι. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε μια κόλουρη πυραμίδα της οποίας η κάτω βάση είναι τετράγωνο πλευράς α=4, η πάνω βάση τετράγωνο πλευράς β=2 και το ύψος της είναι υ=6..Σύμφωνα με το πρόβλημα καταλήγουν στον τύπο: $V=\frac{\upsilon}{3}\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$.

Εν γένει η Γεωμετρία των Αιγυπτίων αφορά στη μέτρηση στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων και εμφανίζεται με τη μορφή κανόνων αριθμητικής επίλυσης στοιχειωδών γεωμετρικών προβλημάτων πρακτικής κατ' εξοχήν σημασίας. Οι υπολογισμοί όγκων για παράδειγμα, εμφανίζονται σε προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του σιταριού σε αποθήκη με δεδομένο σχήμα. Πολλές λύσεις γίνονταν με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους και με άλλους εμπειρικούς κανόνες. Γ ι' αυτό πολλές φορές ήταν εξαιρετικά άκομψες. Σε ένα έργο με τίτλο *Αριθμητική σε Εννιά Κεφάλαια* που τοποθετείται στο 2ο π.Χ. αιώνα, αλλά εξαιτίας της καταστροφής των βιβλίων από φωτιά στα 213 π.Χ. θεωρείται ανάπλαση πολύ παλαιότερης εργασίας, υπάρχει ένας αρχαίος κινέζικος τύπος που δίνει το εμβαδόν ενός τμήματος του κύκλου .



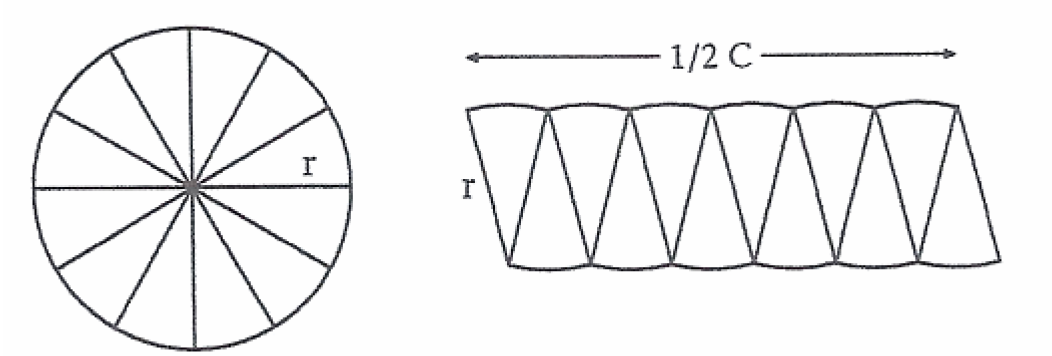
Έστω β η χορδή και α το ύψος (δηλαδή η απόσταση ανάμεσα στο μέσο της χορδής και στο μέσο του τόξου του τμήματος) του κυκλικού τμήματος. Αν από το μέσο του τόξου του τμήματος φέρουμε τέμνουσες που τέμνουν τις προεκτάσεις της β, έτσι ώστε κάθε προέκταση να είναι ίση με το μισό του α, τότε οπτικά παρατηρούμε ότι το κυκλικό τμήμα έχει εμβαδόν προσεγγιστικά ίσο με αυτό του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραμμή β και τις δύο τέμνουσες. Αν θεωρήσουμε ότι τα εμβαδά είναι πράγματι ίσα, τότε βρίσκουμε τον παλιό κινέζικο τύπο $E=\frac{\alpha\cdot(\beta+\alpha)}{2}$ για το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος. Αν ο τύπος αυτός εφαρμοστεί σε ημικυκλικό τμήμα αποδεικνύεται ότι ο τύπος ισοδυναμεί με το να πάρουμε π=3, μία προσέγγιση του π που συναντάμε συχνά στα αρχαία μαθηματικά (Eves, 1989).

Βαβυλωνιακά μαθηματικά

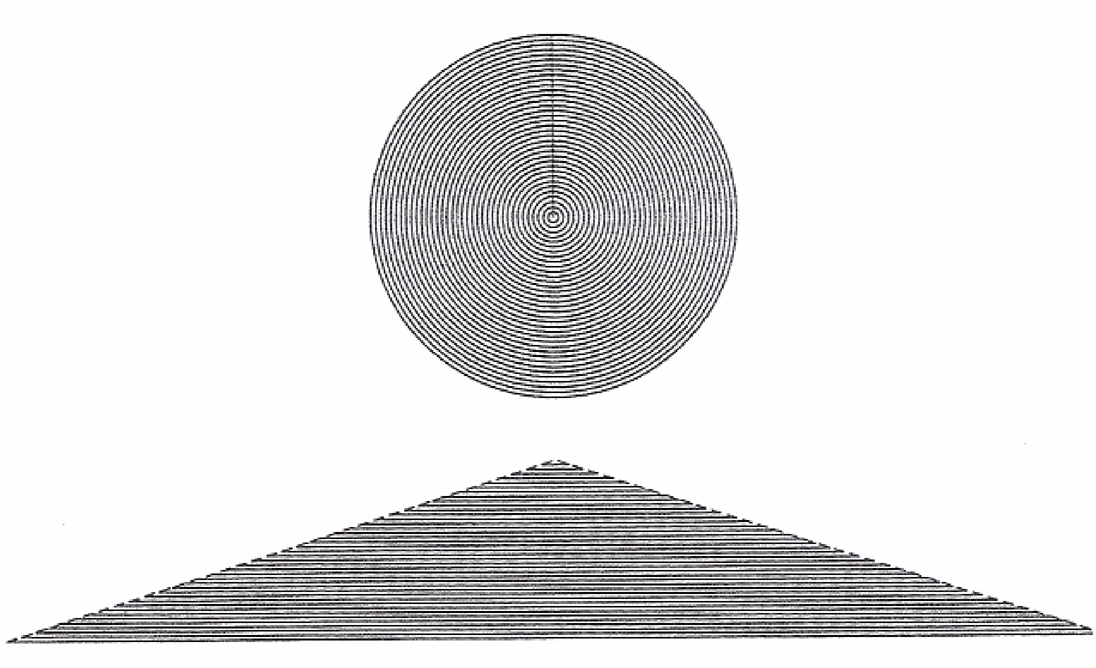
Τα ίδια περίπου ισχύουν και για τους αρχαίους Βαβυλώνιους, γνωστούς για τις μεγάλες μηχανικές κατασκευές τους, που ανέπτυξαν τα μαθηματικά λόγω αναγκών που προέκυψαν από τη συγκεκριμένη ενασχόλησή τους. Στους Βαβυλώνιους αποδίδεται και το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης το οποίο μέχρι και σήμερα χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς, όπως η μέτρηση του χρόνου.Το αριθμητικό αυτό σύστημα θέσης για πρώτη φορά επέτρεπε μία συνοπτική και σαφή αναπαράσταση των αριθμών, χωρίς περιορισμό μεγέθους. Λέγεται ότι το παρέλαβαν από τους Σουμέριους, τους επινοητές της σφηνοειδούς γραφής, στη νότια Μεσοποταμία. Ήταν βέβαια ατελές γιατί έλειπε το μηδέν. Επίσης είχαν συντάξει πολλούς πίνακες για πολλαπλασιασμό, εύρεση τετραγώνων και τετραγωνικών ριζών και είχαν και γνώση ειδικών περιπτώσεων του Πυθαγορείου θεωρήματος. Είναι βέβαιο ότι δεν γνώριζαν το Πυθαγόρειο θεώρημα ως μία πρόταση με γενική ισχύ. Υπολόγιζαν εμβαδά ορθογωνίων τριγώνων, ορθογωνίων παραλληλογράμμων και ορθογωνίων τραπεζίων καθώς και όγκους πρισμάτων και κυλίνδρων πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος. Αξίζει να υπογραμμίσουμε εδώ ότι η γνώση όλων αυτών των υπολογισμών συνεπάγεται την κατανόηση της έννοιας της καθετότητας και επομένως του ύψους. Όμως οι υπολογισμοί εμβαδών, για παράδειγμα τριγώνων ή τετραπλεύρων, δεν αναφέρουν αν τα τρίγωνα ή τα τετράπλευρα είναι ορθογώνια και συνεπώς αν οι τύποι που έδωσαν ήταν οι σωστοί για τα σχήματα που θεωρούσαν. Το μήκος c της περιφέρειας του κύκλου το θεωρούσαν ίσο με το τριπλάσιο της διαμέτρου d του κύκλου, δηλαδή $c=3d$ και όπως προκύπτει από τη σχέση αυτή θεωρούσαν ότι $\pi=3$. Έχει γραφτεί ότι η χρήση του τροχού στη γεωργία και την κεραμική, ήταν αυτή που προξένησε το κίνητρο για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου. Αυτό αποτέλεσε και την αφετηρία για τον προσδιορισμό των καμπυλόγραμμων εμβαδών. Για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου χρησιμοποίησαν, όπως και οι Κινέζοι, τον τύπο $E=(c/2)\cdot(d/2)$, όπου c συμβολίζει το μήκος της περιφέρειας του κύκλου και d τη διάμετρό του. Χρησιμοποιούσαν και τον τύπο

$E=\frac{c^2}{12}$ που προκύπτει από τον προηγούμενο τύπο με αντικατάσταση του d με το $\frac{c}{3}$. Επίσης υπολόγιζαν το εμβαδόν του κύκλου όπως και το εμβαδόν του τριγώνου που έχει βάση την ημιπεριφέρεια και ύψος τη διάμετρο d του κύκλου, δηλαδή $E=\frac{1}{2}\cdot\frac{3d}{2}\cdot d=\frac{3}{4}d^2$. Σε κανένα όμως βαβυλωνιακό κείμενο δεν υπάρχει η έννοια της ακτίνας ή του κέντρου του κύκλου.

Το πως οι Βαβυλώνιοι και οι Κινέζοι ανακάλυψαν τον τύπο $E=(c/2)\cdot(d/2)$ και συνεπώς συνέδεσαν τον υπολογισμό του εμβαδού με αυτό είναι ένα ερωτηματικό. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι θεώρησαν τη διαίρεση του κύκλου σε τομείς και κατόπιν επανατοποθέτησαν αυτούς σε ένα προσεγγιστικό ορθογώνιο.



Μια άλλη εκδοχή υπάρχει σε Μεσαιωνικές αναφορές . Σύμφωνα με αυτήν ο κύκλος κατασκευάζεται με τη βοήθεια ομόκεντρων κύκλων με «απειροελάχιστα» λεπτές κλωστές.



Αν διαιρεθεί ο κύκλος από το κέντρο προς την περιφέρεια και ξεδιπλωθεί αυτός σε ένα τρίγωνο, η βάση του τριγώνου είναι η αρχική περιφέρεια και το ύψος του θα είναι η ακτίνα. Τότε έπεται άμεσα ο τύπος του εμβαδού (Katz, 2013).

Οι πηγές των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών

Τις τελευταίες δεκαετίες εμπλουτίστηκαν σημαντικά οι γνώσεις μας για τα βαβυλωνιακά μαθηματικά. Αυτό οφείλεται στις αξιόλογες ανακαλύψεις των Neugebauer και F.Thureau-Dngin οι οποίοι αποκρυπτογράφησαν ένα μεγάλο αριθμό πήλινων πινακίδων. Οι μαθηματικές πλάκες που έχουν μεταφραστεί από κείμενα σφηνοειδούς γραφής είναι σχεδόν πεντακόσιες. Οι πινακίδες αυτές βρίσκονται διασκορπισμένες σε συλλογές διαφόρων μουσείων της Ευρώπης και στο αρχαιολογικό μουσείο της Βαγδάτης, καθώς και στα πανεπιστήμια Yale, Columbia και Pensylvania των Ηνωμένων Πολιτειών. Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθηματικών κειμένων ανήκει στην Παλαιοβαβυλωνιακή περίοδο, δηλαδή είναι κείμενα σύγχρονα με τη δυναστεία των Χαμουραμπί και έτσι χοντρικά ανήκουν στην περίοδο 1800 έως 1600 π.Χ. Η δεύτερη ομάδα που είναι και πολύ μικρότερη είναι σελευκιδική, δηλαδή χρονολογείται στους τρεις τελευταίους αιώνες π.Χ. Τα μαθηματικά κείμενα κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες: στα κείμενα των πινάκων και στα κείμενα των προβλημάτων. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει μεγάλη ποικιλία κειμένων που όλα τους αφορούν λιγότερο ή περισσότερο άμεσα τη διατύπωση ή τη λύση αλγεβρικών ή γεωμετρικών προβλημάτων. Δεν είναι καθόλου σίγουρο αν τα τρίγωνα ή τα τραπεζοειδή είναι ορθογώνια σχήματα ή όχι. Αν τα κείμενα αναφέρουν το πλάτος και το μήκος ενός τέτοιου σχήματος, μόνο από τα συμφραζόμενα μπορεί κανείς να προσδιορίσει τι ακριβώς σημαίνουν οι δύο όροι. Γνωστή είναι μία πολύ χονδρική προσέγγιση του κύκλου που αντιστοιχεί στη χρήση της τιμής π=3. Αρκετά προβλήματα που αφορούν κυκλικά τμήματα δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως, φαίνεται όμως πολύ πιθανόν να ήταν γνωστές καλύτερες προσεγγίσεις του π και να χρησιμοποιούνταν σε περιπτώσεις που η χονδρική προσέγγιση θα οδηγούσε σε καθαρά λαθεμένο αποτέλεσμα όπως και στην περίπτωση των στοιχειωδών εμβαδών. Παρόμοιες σχέσεις ήταν γνωστές και για τους όγκους. Στα κείμενα προβλημάτων υπάρχουν ολόκληρα τμήματα αφιερωμένα στο σκάψιμο αγωγών, στα φράγματα και σε όμοια έργα και μας αποκαλύπτουν ακριβείς ή προσεγγιστικούς τύπους για τους αντίστοιχους όγκους. Δεν έχουμε όμως παραδείγματα ενασχόλησης με αυτά τα αντικείμενα από καθαρά γεωμετρική σκοπιά.

Σε ανασκαφές που έγιναν το 1936, γάλλοι αρχαιολόγοι βρήκαν μία ομάδα μαθηματικών πινακίδων στα Σούσα, πρωτεύουσα της αρχαίας Ελάμ, πάνω από 200 μίλια ανατολικά της Βαβυλώνας. Το 1950, δημοσιεύτηκε στα πρακτικά της ακαδημίας του Άμστερνταμ από τον E.M.Bruins μια προκαταρκτική αναφορά. Σε μία από αυτές τις πινακίδες υπάρχει κείμενο που δίνει τη σχέση της περιμέτρου C_6 του κανονικού εξαγώνου προς την περιφέρεια C του περιγεγραμμένου κύκλου :

C_6=0;57,36.C , όπου $0;57,36=0+\frac{57}{60}+\frac{36}{60^2}$.

Επειδή $C_6=\frac{3}{\pi}C$, έχουμε ότι $\pi \simeq 3;7,30=3\frac{1}{8}$

Οι μαθηματικές γνώσεις όλων αυτών των λαών κατά την προελληνική περίοδο ήταν συνυφασμένες με τη γενικότερη κοινωνική, πολιτικοοικονομική και πολιτιστική ανάπτυξή τους, και ουσιαστικά πρόκειται για συλλογή εμπειρικών μεθόδων αναγκαίων για την εκτέλεση έργων και διαδικασιών που θα βοηθούσαν σε αυτήν την ανάπτυξη. Το γεγονός ότι οι μέθοδοι αυτές που ανέπτυξαν έμειναν σε πρακτικό επίπεδο και δεν απέκτησαν μορφή κανόνων, δηλαδή θεωρητική βάση, οφείλεται κατά κύριο λόγο στη δομή της κοινωνίας τους, καθώς οι βαθιές θεοκρατικές δομές που ίσχυαν, είχαν ως αποτέλεσμα την μη περαιτέρω εξέλιξη της κατεχόμενης γνώσης.

Παρόλη όμως την ανάπτυξη μεθόδων λοιπόν, οι οποίες προσεγγίζουν αρκετά καλά τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, διαφόρων σχημάτων και στερεών, ούτε οι Βαβυλώνιοι ούτε οι Αιγύπτιοι έφθασαν στη μαθηματική αφαίρεση, στη διατύπωση υποθέσεων και συμπερασμάτων, μαθηματικών προτάσεων και θεωρημάτων. Δεν φαίνεται πουθενά ο σαφής διαχωρισμός του προσεγγιστικού από τον ακριβή υπολογισμό. Ο Peet (1931) αναφέρει ότι η απλή παράθεση αριθμητικών παραδειγμάτων δεν αποτελεί συνεισφορά στην επιστημονική φύση των μαθηματικών. Θεωρεί ότι η ανθρωπότητα οφείλει τα μέγιστα στους Έλληνες , οι οποίοι εισήγαγαν την αποδεικτική διαδικασία. Ο Otto Neugebauer (2003) που ήταν βαθύς μελετητής των βαβυλωνιακών κειμένων αναφέρει ότι παρά την αριθμητική και αλγεβρική ικανότητά τους οι Βαβυλώνιοι δεν έθεσαν κανέναν αλγεβρικό συμβολισμό και τα περιεχόμενα των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών παραμένουν στο επίπεδο των στοιχειωδών Μαθηματικών. Τα Μαθηματικά κατά την άποψή του ποτέ δεν πέρασαν το κατώφλι των προεπιστημονικών σκέψεων.

Ανακεφαλαιώνοντας, τα μαθηματικά που αναφέραμε πραγματεύονταν με συγκεκριμένα προβλήματα και οι λύσεις προέκυπταν ως είδος συνταγών, βάσει οδηγιών. Σε όλα όμως τα ανατολικά μαθηματικά δεν υπάρχει η αποδεικτική διαδικασία. Παρόλα αυτά κατά τους ιστορικούς τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά ήταν εκείνα που αποτέλεσαν τη βάση, το θεμέλιο των ελληνικών μαθηματικών στα οποία εμφανίζεται η δημιουργία μεθόδου μελέτης αφηρημένων γεωμετρικών εννοιών με την εισαγωγή λογικών αποδείξεων.

Αρχαίοι Έλληνες

Στα Μαθηματικά οι Έλληνες διαλογίστηκαν με όλη την δυνατή ακρίβεια και παρέδωσαν στο ανθρώπινο γένος τα πρότυπα της τέχνης της απόδειξης
Leibniz

Οι πρώιμες μαθηματικές και φιλοσοφικές ενασχολήσεις

Οι Ίωνες φιλόσοφοι

Αν θελήσει κάποιος να εξετάσει την εξέλιξη των Ελληνικών μαθηματικών, σίγουρα θα καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα δομικά υλικά τους προϋπήρχαν σε παλαιότερους πολιτισμούς, αλλά εκείνο που άλλαξε ήταν η μορφή τους. Η νέα μορφή εμφανίστηκε τον $6^{ο}$ π.Χ. αιώνα. Ο αιώνας αυτός υπήρξε σταθμός στην ιστορία της ανθρωπότητας. Εμφανίστηκαν οι μεγάλοι στοχαστές Βούδας, Ζαρατούστρα, Κομφούκιος, Λάο Τσε και στα παράλια της Ιωνίας, στις εύπορες εμπορικές πόλεις της, οι Ίωνες φιλόσοφοι. Έως τότε οι άνθρωποι προσπαθούσαν να εντοπίσουν μια κανονικότητα στον κόσμο που τους περιέβαλε, με σκοπό να κατανοήσουν την προέλευσή τους. Στην αρχή έδιναν μυθολογικές εξηγήσεις, και όσα μυθολογικά φαινόμενα αποτελούσαν απειλή για την επιβίωσή τους, τα απέδιδαν στην επιρροή εξωκοσμικών δυνάμεων. Οι Ίωνες φιλόσοφοι άρχισαν να απομακρύνονται από τη μυθολογική εικόνα του κόσμου και αφιερώθηκαν στην ανακάλυψη των μηχανισμών της φύσης. Ο Θαλής και οι υπόλοιποι Ίωνες φιλόσοφοι, Αναξίμανδρος και Αναξιμένης, προσπάθησαν να ανακαλύψουν με τη λογική, την απλότητα και τη σταθερότητα που υπήρχε κάτω από τη φαινομενική πολυπλοκότητα και σύγχυση του σύμπαντος (Γιαννακούλιας, 2007).

Η φιλοσοφία ξεκίνησε με το Θαλή (640-546π.Χ.). Γεννημένος στη Μίλητο υπήρξε ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας. Ο Θαλής ισχυρίστηκε ότι η αρχή των όντων ήταν το νερό. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Θαλής επισκέφθηκε πρώτα την Αίγυπτο και εισήγαγε το αντικείμενο της γεωμετρίας στην Ελλάδα. Διατύπωσε πολλές προτάσεις ο ίδιος και δίδαξε στους διαδόχους του τις αρχές στις οποίες στηρίζονται πολλές άλλες. Η μέθοδός του είναι αλλού γενική και αλλού εμπειρική (Heath, 1981). Ο Διογένης ο Λαέρτιος και οι μεταγενέστεροί Πλίνιος και Πλούταρχος αναφέρουν ότι μετρούσε το ύψος των πυραμίδων της Αιγύπτου παρατηρώντας τα μήκη των σκιών τους τη στιγμή που η σκιά ενός κατακόρυφου ραβδιού ισούται με το ύψος του. Ο ιστορικός Ηρόδοτος διηγείται την ιστορία της πρόβλεψης της έκλειψης του ηλίου από το Θαλή (Boyer & Merzbach, 1997). Η γεωμετρία των Αιγυπτίων όπως έχουμε ήδη αναφέρει ήταν ένα σύνολο από εμπειρικούς κανόνες για τη μέτρηση των εκτάσεων του εδάφους. Οι Έλληνες έμαθαν από τους Αιγυπτίους τους κανόνες υπολογισμού εμβαδών και αλλά ήταν οι πρώτοι που σκέφτηκαν να τους αποδείξουν. Ο πρώτος που θέλησε να στηρίξει τη γεωμετρία σε νόμους σκέψης καθολικής αποδοχής και εφαρμογής ήταν ο Θαλής.

Οι Πυθαγόρειοι

Σε αντίθεση με τους Ίωνες φιλοσόφους που προσπάθησαν να εξηγήσουν τον κόσμο με όρους υλικών στοιχείων, ο Πυθαγόρας (572-497 π.Χ.) είδε την ουσία της πραγματικότητας μέσα από την μαγεία των μαθηματικών. Αναζητώντας τους αιώνιους νόμους του σύμπαντος οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν με τη γεωμετρία , την αριθμητική, την αστρονομία και τη μουσική. Το τετράπτυχο αυτό αποτελούσε το φημισμένο «Τετραόδιο» (λατινικά «Quadrivium»). Η πυθαγόρεια άποψη για το σύμπαν βασιζόταν στην πεποίθηση ότι η ποικιλία του ανθρώπινου είδους και της ύλης οφειλόταν στους αριθμούς. Από τη στιγμή που, κατά τους Πυθαγορείους, τα πάντα συντίθονταν από αριθμούς, η εξήγηση για την ύπαρξη ενός αντικειμένου βρισκόταν σε αυτούς. Ο κόσμος Πυθαγορείων ήταν δομημένος με βάση τους αριθμούς και επειδή αριθμοί γι' αυτούς ήταν οι ακέραιοι ήταν δομημένος κατά τρόπο ρητό. Η πίστη τους για τη διακριτότητα του κόσμου ήταν τόσο μεγάλη, ώστε στις γεωμετρικές τους κατασκευές και αποδείξεις δεν χρησιμοποιούσαν συνεχή μεγέθη, αλλά παρίσταναν τα γεωμετρικά σχήματα με μικρούς λίθους (χαλίκια).Διατύπωσαν την υπόθεση ότι όλα τα αντικείμενα ήταν φτιαγμένα από σημεία ή μονάδες ύπαρξης. Τα φυσικά αντικείμενα τα θεωρούσαν συνδυασμούς αυτών των σημείων, που αντιστοιχούσαν στις διάφορες γεωμετρικές μορφές. Το σημείο ήταν γι' αυτούς αδιαίρετο, με διάσταση και η γραμμή είναι ένα σύνολο μονάδων (μικρών σφαιρών) με ίδιο μέγεθος και πάχος. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα να είναι σύμμετρα, να έχουν δηλαδή κοινή μονάδα μέτρησης (Γιαννακούλιας, 2007).

Η βαθιά ριζωμένη πυθαγόρεια πίστη ότι η φύση του κόσμου δομείται κατά τρόπο ρητό και ότι οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος δεν μπορεί παρά να είναι σχέσεις λόγων θετικών ακεραίων αριθμών, προσέκρουσε στο αδιέξοδο της ανακάλυψης της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγορείους αποτελεί αναμφισβήτητα ένα γεγονός σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών και ταυτόχρονα μια πολύ μεγάλη νίκη του ανθρώπινου νου. Ίσως το κίνητρο γι' αυτήν την ανακάλυψη να ήταν το ενδιαφέρον τους για το γεωμετρικό μέσο (α:β=β:γ) που ήταν και το σύμβολο της αριστοκρατίας. Το ερώτημα για το ποιος είναι ο γεωμετρικός μέσος των δύο ιερών συμβόλων 1 και 2 οδηγεί στη μελέτη του λόγου της πλευράς και της διαγωνίου του τετραγώνου (Struik, 1993). Έτσι η πλευρά και η διαγώνιος δεν είχαν καμία κοινή μονάδα μέτρησης. Το συμπέρασμα αυτό είχε σοβαρές επιπτώσεις με την έννοια πως η διαδικασία σύγκρισης δύο μεγεθών μπορεί να μην είχε τέλος. Από αυτό το γεγονός προήλθαν στο προσκήνιο οι άρρητοι αριθμοί και οι άπειρες διαδικασίες που συνεπάγονται. Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών μοιραία οδήγησε σε αναθεώρηση μιας κεντρικής έννοιας των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, της έννοιας της αναλογίας. Η απόδειξη των γεωμετρικών θεωρημάτων που αφορούσαν αναλογίες και κατά συνέπεια η θεωρία των ομοίων σχημάτων, αμφισβητήθηκαν εφόσον δεν υπήρχε κοινό μέτρο μεταξύ σύμμετρων και ασύμμετρων μεγεθών. Τα διάφορα θεωρήματα έπρεπε να αποδειχθούν και στη γενικότερη περίπτωση που τα μεγέθη ήταν ασύμμετρα, και έτσι παρουσιάστηκε αναπόφευκτα η πρώτη κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών, που χρειάστηκε αρκετά χρόνια για να ξεπεραστεί. Η κρίση αυτή ξεπεράστηκε γύρω στο 370 π.Χ. με τη θεωρία λόγων του Ευδόξου που θα δούμε παρακάτω.

Τα παράδοξα του Ζήνωνα

Το Πυθαγόρειο δόγμα «οι αριθμοί αποτελούν όλο το σύμπαν» βρισκόταν τώρα αντιμέτωπο με ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα. Δεν ήταν όμως το μοναδικό, γιατί η σχολή αντιμετώπιζε και επιχειρήματα που διατύπωναν οι γειτονικοί Ελεάτες, ένα ανταγωνιστικό φιλοσοφικό κίνημα. Η γενική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι κάθε μέγεθος, π.χ. μία γραμμή , μπορεί να σχηματιστεί από άπειρο πλήθος άλλων μεγεθών, (δηλαδή η αντίληψη των Πυθαγορείων για την πολλαπλότητα) επικρίθηκε από τον Παρμενίδη (515-440 π.Χ.) αρχηγό της Ελεατικής σχολής ο οποίος πίστευε στην ολότητα δηλαδή ότι κάθε μέγεθος είναι μία μοναδική οντότητα και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε άλλα μικρότερα μεγέθη. Σύμφωνα με τον Παρμενίδη, η λογική αποτελεί τον μοναδικό δρόμο αναγνώρισης του απολύτου όντος, ενώ δεν υφίσταται πραγματική μεταβολή, παρά μόνο φαινομενική. Ο πιο γνωστός από τους οπαδούς του Παρμενίδη ήταν ο Ζήνωνας ο Ελεάτης , ο οποίος προσπάθησε να βρει επιχειρήματα που να αποδεικνύουν την ασυνέπεια στις έννοιες της πολλαπλότητας και της διαιρετότητας. Διατύπωσε την εξής αντίρρηση στην άποψη των Πυθαγορείων για την πολλαπλότητα: *Αν μία γραμμή μπορεί να διαιρεθεί σε άπειρο πλήθος σημείων, τότε ή κάθε σημείο θα έχει συγκεκριμένο μήκος οπότε η γραμμή θα έχει άπειρο μήκος, αφού σχηματίζεται από άπειρα τέτοια σημεία, ή κάθε σημείο δεν θα έχει μήκος , οπότε η γραμμή δεν θα έχει μήκος.* Λέγοντας γραμμή εννοούμε και ευθύγραμμο τμήμα. Για να ενισχύσει την άποψή του ότι κάθε ποσότητα είναι αδιαίρετη, ο Ζήνων διατύπωσε μερικά παράδοξα. Οχτώ από τα παράδοξα του Ζήνωνα σώζονται μέσα στα έργα του Αριστοτέλη . Τέσσερα από αυτά έχουν σχέση με τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας, του αθροίσματος των απείρων όρων σειράς και της παραγώγου. Θα περιγράψουμε τα πρώτα δύο. Το πρώτο παράδοξο που ονομάζεται *παράδοξο της διχοτομίας* έχει ως εξής:

Για να διανύσει κάποιος μια απόσταση ΑΒ θα πρέπει να διανύσει πρώτα την απόσταση AA_1 = ΑΒ/2, στη συνέχεια την απόσταση A_1A_2 =ΑΒ/4 και την A_2A_3 = ΑΒ/8 και ούτω καθ' εξής. Αυτό εμφανίζεται ως αδύνατο γιατί κάποιος πρέπει να περάσει από άπειρο πλήθος σημείων για να διανύσει μια πεπερασμένη απόσταση ΑΒ. Πρέπει δηλαδή να πραγματοποιηθούν άπειρες το πλήθος μεταβάσεις. Επίσης το άθροισμα άπειρου πλήθους τμημάτων εμφανίζεται να είναι ένα πεπερασμένο τμήμα.

Το δεύτερο παράδοξο, γνωστό και ως παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας είναι το εξής:

Σ' έναν αγώνα δρόμου ανάμεσα στον γοργοπόδαρο Αχιλλέα και σε μια χελώνα δίνεται προβάδισμα ενός σταδίου στη χελώνα. Ο Ζήνωνας υποστηρίζει ότι ο Αχιλλέας ανεξάρτητα από την ταχύτητά του, δεν θα μπορέσει ποτέ να φτάσει τη χελώνα διότι στη καταδίωξη που γίνεται ο Αχιλλέας πρέπει πρώτα να φτάσει στο σημείο από όπου ξεκίνησε η χελώνα και άρα η χελώνα έχει πάντα ένα προβάδισμα.

Τα δύο παράδοξα σχετίζονται με την οντολογική φύση του συνεχούς και την ανθρώπινη αδυναμία, να πραγματώσει με τις αισθήσεις τις, άπειρες διαδικασίες σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Τα παράδοξα του Ζήνωνος απετέλεσαν ένα κομβικό σημείο για την γόνιμη διαπραγμάτευση των εννοιών του χρόνου και του χώρου, καθώς και για την φύση του απείρου, των απειροστών και των αδιαιρέτων. Τα επιχειρήματα του Ζήνωνα έκαναν αστήρικτη την έννοια του χρόνου, ως μίας σειράς από διαδοχικές στιγμές ή την ευθεία ως σύνολο από διαδοχικά αδιαίρετα τμήματα. Τα παράδοξα έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην παραπέρα ανάπτυξη των μαθηματικών γιατί διαμόρφωσαν την υποβόσκουσα περί ορίου αντίληψη στους υπολογισμούς και τις αποδείξεις των αρχαίων Ελλήνων. Μετά τον Ζήνωνα η έννοια του απείρου έγινε κεντρικό θέμα συζήτησης και αντιπαράθεσης των φιλοσόφων και των μαθηματικών. Οι τελευταίοι προκειμένου να αποφύγουν τις δυσκολίες που προέκυπταν από τη χρήση των απειροστών, και κάτω από την πίεση της φιλοσοφίας, έπαυσαν να χρησιμοποιούν την έννοια του απείρου και τις άπειρες διαδικασίες και μελετούσαν πεπερασμένα μεγέθη, τα οποία μπορούσαν να γίνουν οσοδήποτε μεγάλα ή μικρά επιθυμούσαν, αποφεύγοντας την άπειρη αύξηση ή ελάττωση. Είναι η περίοδος κατά την οποία το άπειρο εξαλείφεται σταδιακά από τα μαθηματικά και ταυτόχρονα αρχίζει να γίνεται κατανοητή η διαφορά ανάμεσα στο διακριτό και το συνεχές (Γιαννακούλιας, 2007).

Δημόκριτος

Μία σχολή ανταγωνιστική της σχολής του Ευδόξου η οποία δρούσε στην ίδια χρονική περίοδο, την περίοδο της κρίσης είναι η σχολή του Δημόκριτου, του θεμελιωτή της ατομικής θεωρίας. Στη σχολή του Δημόκριτου είχε εισαχθεί η έννοια του «γεωμετρικού ατόμου». Θεωρούσαν ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα , όπως και κάθε επιφάνεια και κάθε στερεό σώμα σχηματιζόταν από ένα μεγάλο-πεπερασμένο όμως- πλήθος από αδιαίρετα «άτομα» (Struik, 1993). Υποστήριζαν ότι όλα τα φαινόμενα έπρεπε να εξηγηθούν συναρτήσει απείρως μικρών και απείρως διαφορετικών (σε μέγεθος και σχήμα) αδιαπέραστων σκληρών ατόμων κινούμενων ασταμάτητα μες στο χώρο. Η δημιουργία του κόσμου μας –και απείρων άλλων- ήταν το αποτέλεσμα μιας ταξινόμησης ή πήξης ατόμων σε ομάδες με συγκεκριμένες ομοιότητες .Αυτή βέβαια δεν είναι καινούρια θεωρία γιατί την είχε διατυπώσει πρώτος ο Λεύκιππος. Είναι πιθανό η φυσική ατομική θεωρία του Λεύκιππου και του Δημόκριτου να εμπνεύστηκε από τα γεωμετρικά άτομα των Πυθαγορείων (Boyer & Merzbach, 1997).

Ο Δημόκριτος από τα Άβδηρα (περίπου 460-370 π.Χ.) θεωρείται ο πατέρας ενός υλιστικού δόγματος αλλά στην εποχή του είχε και τη φήμη του γεωμέτρη. Οι πηγές αναφέρουν ότι ταξίδεψε περισσότερο από κάθε άλλο σύγχρονό του – στην Αθήνα, στην Αίγυπτο, στη Μεσοποταμία και ίσως και στην Ινδία- αποκτώντας όσες περισσότερες γνώσεις μπορούσε. Τα δικά του όμως επιτεύγματα στα μαθηματικά ήταν τέτοια ώστε υπερηφανευόταν ότι ούτε οι αρπεδονάπτες της Αιγύπτου δεν τον ξεπερνούσαν. Έγραψε πολλά μαθηματικά έργα εκ των οποίων δεν διασώζεται κανένα (Boyer & Merzbach, 1997). Αναφέρεται πως είχε γράψει ένα βιβλίο με τίτλο *Περί Γεωμετρίης*. Το περιεχόμενό του παραμένει άγνωστο αλλά από κάποιες πληροφορίες του Πλουτάρχου φαίνεται ότι θεωρούσε τα στερεά σώματα να συντίθενται από τομές παράλληλες προς τις βάσεις τους. Αυτή ήταν μια ιδέα που αργότερα οδήγησε τον Αρχιμήδη στα γόνιμα αποτελέσματά του. Από το παραπάνω σκεπτικό μπορεί εύκολα να συμπεράνει κανείς πως δύο στερεά που αποτελούνται από ίσες παράλληλες τομές σε ίσες αποστάσεις από τις βάσεις τους έχουν ίσους όγκους. Το 1635, όπως θα δούμε ο Cavalieri θα επαναλάβει το σκεπτικό του Δημόκριτου μέσα από τη διατύπωση της αρχής που φέρει το όνομά του. Ο Δημόκριτος έκανε κάποια προσπάθεια να καταργήσει τις άπειρες διαδικασίες και να θεμελιώσει τη γεωμετρία με βάση την ατομική του θεωρία. Με την αντίληψη ότι το σημείο είναι το άτομο, το απείρως μικρό τμήμα της ύλης, το μη διαιρετό, συγκροτήθηκε και άρχισε να καταχωρείται ένα σύστημα αξιωμάτων. Εφόσον κάθε στερεό σώμα σχηματιζόταν από ένα μεγάλο-πεπερασμένο όμως- πλήθος από αδιαίρετα άτομα , για τον υπολογισμό του όγκου ενός σώματος αρκούσε να βρεθεί το άθροισμα των όγκων των ατόμων που το απαρτίζουν. Αυτό όμως ήταν αδύνατο να γίνει μετά την ανακάλυψη από τους Πυθαγόρειους της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου, γιατί η πλευρά και η διαγώνιος δεν αποτελούνταν πλέον από πεπερασμένο πλήθος αδιαίρετων ατόμων. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου ήταν η αιτία ώστε το εγχειρίδιο γεωμετρίας του Δημόκριτου να αντικατασταθεί αργότερα από τα Στοιχεία του Ευκλείδη που βασίζονταν στην ιδέα της άπειρης διαιρετότητας του χώρου (Knorr, 1975).

Ευκλείδης (περ. 330 – ; 275 ή 270 π.Χ.)

Για τη ζωή του Ευκλείδη, δεν γνωρίζουμε παρά ελάχιστα πράγματα. Ξέρουμε ότι δίδαξε στην Αλεξάνδρεια και ότι ήταν μεγαλύτερος στην ηλικία από τον Αρχιμήδη, πράγμα που σημαίνει ότι η χρονολόγηση της ακμής του «γύρω στο 300 π.Χ.» δεν πρέπει να απέχει πολύ από την αλήθεια. Ο Πρόκλος επίσης τον χαρακτηρίζει σύγχρονο του βασιλιά Πτολεμαίου Α΄, στον οποίο είχε το θάρρος να του πει κατά πρόσωπο πως δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη γεωμετρία. Ο Πάππος εξάλλου τον επαινεί για την ηθική του ακεραιότητα, την μετριοφροσύνη και την ευμενή στάση του προς όσους είναι ικανοί να προαγάγουν τη μαθηματική γνώση. Ο Στοβαίος τέλος διηγείται το ακόλουθο περιστατικό: Ένας νέος επισκέφθηκε κάποτε τον Ευκλείδη και τον παρακάλεσε να τον διδάξει γεωμετρία. Μόλις όμως έμαθε το πρώτο θεώρημα ρώτησε τον Ευκλείδη : «Και τώρα τι θα κερδίσω με το θεώρημα αυτό»; Ο Ευκλείδης γύρισε στον υπηρέτη του και του είπε : «Δως του τρεις δεκάρες, ώστε να κερδίσει κάτι από το θεώρημα που έμαθε».Αυτά είναι όσα γνωρίζουμε για τον Ευκλείδη ως άνθρωπο. Πολύ μεγαλύτερη σημασία, όμως έχει το έργο του , το οποίο ακόμα και σήμερα μαρτυρεί τα απαράμιλλα χαρίσματα του ως δασκάλου (Χριστιανίδης, 2003).

Ο κατάλογος των έργων του είναι μακρύς, εκείνο όμως που του εξασφάλισε την αθανασία είναι τα *Στοιχεία.* Τα *Στοιχεία*, μαζί με το σύνολο των πραγματειών του Αρχιμήδη, αποτελεί ένα έργο, στο οποίο τα Ελληνικά μαθηματικά διαχωρίζονται από τη φιλοσοφία και διασαφηνίζεται η σύνδεσή τους με τον φυσικό κόσμο. Η αξιωματική μέθοδος, την οποία παραθέτει, αποτελεί την βάση για την αυστηροποίηση των αποδεικτικών διαδικασιών, καθώς και το πρότυπο για το κατοπινό έργο του Αρχιμήδη αναφορικά με την αξιωματικοποίηση της στατικής και της υδροστατικής.

Τα Στοιχεία αποτελούν ένα εκ των πιο σημαντικών έργων στην ιστορία του ανθρωπίνου γένους και ένα υψίστης τελειότητας μνημείο της Ελληνικής διανόησης. Είναι το έργο που έχει γνωρίσει τις περισσότερες εκδόσεις από κάθε άλλο έργο, εκτός από τη Βίβλο, και ένας ολόκληρος κόσμος έμαθε γεωμετρία από αυτό. Για όλες τις γενεές οι οποίες ανατράφηκαν με τα

Στοιχεία, ο Ευκλείδης είναι περισσότερο ένας δάσκαλος της λογικής παρά ένας δάσκαλος της γεωμετρίας, αφού η επαγωγική μορφή των Στοιχείων προσδίδει μία γενικότερη εφαρμογή σύμμορφη με τη Λογική του Αριστοτέλη.

Τα Στοιχεία απετέλεσαν την κύρια αιτία της απόρριψης των αδιαιρέτων, αφού μια γραμμή αποτελούσε το όριο μιας επιφάνειας και όχι την συλλογή σημείων, μια επιφάνεια αποτελούσε το όριο ενός στερεού και ένα σημείο ήταν απλά το άκρο μιας γραμμής. Ο εξοβελισμός των αδιαιρέτων από το οικοδόμημα των Ελληνικών μαθηματικών δεν εμπόδισε τον Αρχιμήδη να χρησιμοποιήσει ανάλογης υφής μεθόδους, ήτοι τις μηχανικές, οι οποίες απετέλεσαν το πλέον ισχυρό εργαλείο της ευρετικής διαδικασίας των αποτελεσμάτων του.

Ιπποκράτης ο Χίος

Ο Ιπποκράτης έφτασε στη δημιουργική του ακμή στην Αθήνα μεταξύ των ετών 450 – 420 π.Χ. Είναι ο επιφανέστερος εκπρόσωπος της σχολής της Χίου. Ο Ιπποκράτης ήταν ο συγγραφέας του πρώτου διδακτικού εγχειριδίου γεωμετρίας, το οποίο έφερε τον τίτλο Στοιχεία το οποίο δυστυχώς δεν διασώθηκε. Με τη σχολή της Χίου βρισκόμαστε για πρώτη φορά εν μέσω μιας ακμάζουσας γεωμετρικής παράδοσης και με τον όρο αυτό εννοούμε ένα μεταβαλλόμενο σύνολο προβλημάτων (μεταβαλλόμενο με την έννοια ότι ορισμένα εξ’ αυτών επιλύονταν ενώ άλλα έδιναν την αφορμή να διατυπωθούν νέα), την επεξεργασία αποδεκτών μεθόδων χειρισμού αυτών των προβλημάτων και τέλος τη συναίνεση σε ορισμένα μέσα αιτιολόγησης ή εξήγησης των λύσεων των προβλημάτων. Η ιδέα της ερευνητικής παράδοσης παίρνει σάρκα και οστά κυρίως με το παράδειγμα των τριών άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας. Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης της γωνίας. Οι προσπάθειες επίλυσής τους οδήγησαν σε βαθιές και γόνιμες έρευνες. Ο Ιπποκράτης ήταν μεταξύ των πρώτων που ασχολήθηκαν με τα προβλήματα του τετραγωνισμού του κύκλου και του διπλασιασμού του κύβου. Η συμβολή του στο πρώτο συνίσταται στο ότι κατάφερε να τετραγωνίσει ορισμένους μηνίσκους. Ο μηνίσκος είναι ένα σχήμα που περιορίζεται από δύο κυκλικά τόξα άνισων ακτίνων (Χριστιανίδης, 2003).

Ο Ιπποκράτης εργάστηκε ερευνητικά πάνω στα εμβαδά των επίπεδων σχημάτων που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα είτε κυκλικά τόξα. Γνώριζε πως τα εμβαδά δύο κυκλικών τμημάτων είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χορδών τους. Το Πυθαγόρειο θεώρημα του ήταν επίσης γνωστό καθώς και οι αντίστοιχες ανισότητες που αναφέρονται σε μη ορθογώνια τρίγωνα (Struik, 1993).

Εύδοξος

Ο Εύδοξος (408-355 π.Χ.) υπήρξε ο μεγαλύτερος μετά τον Αρχιμήδη Έλληνας μαθηματικός της κλασσικής αρχαιότητας. Γεννήθηκε στην Κνίδο της Μικράς Ασίας γύρω στο 408 π.Χ.. Αφού σπούδασε δίπλα στον Πυθαγόρειο Αρχύτα τον Ταραντίνο, ταξίδεψε στην Αίγυπτο όπου μελέτησε αστρονομία. Γύρω στο 368 π.Χ. μετέβη στην Αθήνα και συνδέθηκε με τον Πλάτωνα, οι φιλοσοφικές αντιλήψεις του οποίου θα επιδράσουν σημαντικά στη διαμόρφωση των απόψεών του. Ο Εύδοξος ήταν ξακουστός όχι μόνο ως μαθηματικός αλλά, επίσης και ως ιατρός και, ιδίως ως αστρονόμος. Ήταν ακόμη έξοχος ρήτορας, φιλόσοφος και γεωγράφος. Αστειευόμενοι οι φίλοι του τον αποκαλούσαν 'Εύδοξος, ο Ένδοξος' (Van Der Waerden, 2000).

Ο Εύδοξος είναι αυτός που παρουσίασε για πρώτη φορά την έννοια του *μεγέθους*. Τα μεγέθη ήταν ποσότητες, όπως τα ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες, εμβαδά, όγκοι, χρόνος, που μπορούσαν να μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο σε αντίθεση με τους ακεραίους αριθμούς. Μέσα από το πολύπλευρο έργο του ξεχωρίζει η διατύπωση της γενικής θεωρίας λόγων, που έβγαλε τη μαθηματική κοινότητα από την κρίση που είχε δημιουργήσει η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου (Γιαννακούλιας, 2007). Αυτούσια έργα του ίδιου του Εύδοξου δυστυχώς δεν έχουν διασωθεί. Τα μαθηματικά του επιτεύγματα έχουν φθάσει σε μας μέσω των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, και συγκεκριμένα του Πέμπτου Βιβλίου, που αφορά στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και του Δωδεκάτου βιβλίου που αναφέρεται στους υπολογισμούς εμβαδών και όγκων με τη μέθοδο της εξάντλησης.(Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Η θεωρία αναλογιών του Ευδόξου είναι ουσιαστικά η ίδια ιδέα με την οποία ο Dedekind θεμελίωσε 2000 χρόνια μετά τους πραγματικούς αριθμούς. Στον Εύδοξο αποδίδει ο Αρχιμήδης τη μέθοδο της εξάντλησης , η οποία ήταν μία εκπληκτική επινόηση και την οποία έφτασαν οι Έλληνες Μαθηματικοί σε υψηλή τελειότητα. Η μέθοδος αυτή είναι ο πρόδρομος και στενός συγγενής του σημερινού Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Παραθέτουμε στη συνέχεια 3 από τους ορισμούς που περιέχονται στο Πέμπτο βιβλίο των *Στοιχείων* μαζί με κάποια σχόλια.

ΟΡ. [3]. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποιά σχέσις.

Εδώ αναφέρεται σε **ομοειδή μεγέθη**, χωρίς να τα ορίζει. Στην πράξη βλέπουμε ότι δυο μεγέθη α, β έχουν λόγο μόνο όταν είναι ομοειδή.
Για παράδειγμα τα α, β είναι ομοειδή αν είναι και τα δυο ευθύγραμμα τμήματα, ή αν είναι και τα δυο κυκλικά τμήματα. Αντίστοιχα και για τις επιφάνειες.

ΟΡ. [4].Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύνανται παλλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων υπερέχειν.

Πρόκειται για την **αρχή Αρχιμήδους - Ευδόξου ή αξίωμα της συνέχειας** και μας λέει ότι αν α και β είναι δύο μεγέθη του ίδιου είδους και το α είναι μικρότερο από το β , τότε είναι πάντοτε εφικτό να βρεθεί θετικός ακέραιος n έτσι ώστε na να είναι μεγαλύτερο από το β.

Ισοδύναμη μορφή

Έστω α>β. Κατασκευάζουμε τα 2β, 3β, …, nβ, … Αν υποθέσουμε ότι $\frac{n}{1}<\frac{\alpha}{\beta}$ για n=1, 2, … τότε το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι άνω φραγμένο από κάποιο σταθερό λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ που αποκλείεται. Αυτό σημαίνει ότι **δεν υπάρχουν απείρως μικρά μεγέθη.**

ΟΡ. [5]. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Με σημερινούς όρους αποδίδεται ως εξής:

Για δύο ζεύγη ομοειδών μεγεθών α,β και γ,δ είναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος m, n φυσικών αριθμών ισχύει μία ακριβώς από τις παρακάτω σχέσεις:

(ι) $\mu\alpha>\nu\beta \Leftrightarrow \mu\gamma>\nu\delta$

(ιι) $\mu\alpha=\nu\beta \Leftrightarrow \mu\gamma=\nu\delta$

(ιιι) $\mu\alpha<\nu\beta \Leftrightarrow \mu\gamma<\nu\delta$

Οι παραπάνω ιδιότητες εκφράζονται ισοδύναμα με τις αντίστοιχες ιδιότητες :

(ι)΄ $\left\{\frac{\nu}{\mu}:\frac{\nu}{\mu}<\frac{\alpha}{\beta}\right\}=\left\{\frac{\nu}{\mu}:\frac{\nu}{\mu}<\frac{\gamma}{\delta}\right\}$

(ιι)΄ $\left\{\frac{\nu}{\mu}:\frac{\nu}{\mu}=\frac{\alpha}{\beta}\right\}=\left\{\frac{\nu}{\mu}:\frac{\nu}{\mu}=\frac{\gamma}{\delta}\right\}$

(ιιι)’ $\left\{\frac{\nu}{\mu}:\frac{\nu}{\mu}>\frac{\alpha}{\beta}\right\}=\left\{\frac{\nu}{\mu}:\frac{\nu}{\mu}>\frac{\gamma}{\delta}\right\}$

που είναι ουσιαστικά οι τομές Dedekind.

Ο ορισμός αυτός θεωρήθηκε πολύπλοκος και δύσκολος, με την έννοια της αχρείαστης δυσκολίας, από τους μεταγενέστερους. Μάλιστα ο Γαλιλαίος τον χαρακτήριζε ως τον χειρότερο ορισμό που γνώριζε. Το πραγματικό του νόημα αποσαφηνίστηκε μόνο γύρω στα 1890 όταν ορίστηκαν με αντίστοιχο τρόπο οι πραγματικοί αριθμοί από τον Dedekind.

Η θεωρία αναλογιών του Ευδόξου είναι καθαρά γεωμετρική και η μορφή της είναι αυστηρά αξιωματική. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, η οποιαδήποτε αναφορά σε σύμμετρα και ασύμμετρα μεγέθη χαρακτηριζόταν ως περιττή. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί ευρέως τον ορισμό του Ευδόξου, ενώ η θεωρία των αναλογιών του κατέστησε δυνατή την εύρεση διαδικασιών κατασκευής των αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων, που συνδέονταν με προβλήματα εύρεσης εφαπτομένων, καθώς και τετραγωνισμών, τα οποία απασχόλησαν το σύνολο των μαθηματικών ερευνητών του 17ου αιώνος.

Μέθοδος της εξάντλησης

Η κρίση που προκάλεσε η ανακάλυψη των άρρητων μεγεθών ξεπεράστηκε χάρη στη φαντασία του Ευδόξου. Υπήρχε όμως ακόμη ένα άλυτο πρόβλημα και αυτό ήταν η σύγκριση των καμπυλόγραμμων και ευθύγραμμων σχημάτων. Και στην περίπτωση αυτή ο Εύδοξος έδωσε τη λύση με τη μέθοδο της εξάντλησης. Ας δούμε όμως πρώτα δύο σημαντικά ονόματα που συνδέονται με την προϊστορία της μεθόδου αυτής. Ο φημισμένος γεωμέτρης Ιπποκράτης ο Χίος (που άκμασε γύρω στα 450π.Χ.) και ο μεγάλος φιλόσοφος ατομιστής Δημόκριτος (460-370 π.Χ.).

Για τον Ιπποκράτη το Χίο υπάρχει η πληροφορία που αναφέρεται στο σχολιαστή Σιμπλίκιο ότι είχε αποδείξει ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους .Η απόδειξη ενός τέτοιου αποτελέσματος απαιτεί κάποια διαδικασία εξάντλησης, δηλαδή ολοκλήρωσης. Δεν γνωρίζουμε σήμερα τίποτα που να μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι ο Ιπποκράτης ο Χίος είχε στην κατοχή του ένα τέτοιου τύπου, κατ' εξοχήν Απειροστικού Λογισμού, επιχείρημα.

Η κυριότερη μαρτυρία για το Δημόκριτο, προέρχεται από την εγκυρότερη δυνατή πηγή: τον ίδιο τον Αρχιμήδη, ο οποίος στον πρόλογο της εργασία του *Προς Ερατοσθένη έφοδος* αναφέρει ότι τα αποτελέσματα που απέδειξε αργότερα ο Εύδοξος με τη μέθοδο της εξάντλησης ήταν γνωστά χωρίς απόδειξη στο Δημόκριτο. Αν λάβουμε υπ' όψει ότι ο Αρχιμήδης, σ'όλο του το έργο που είναι γνωστό σε μας, από τους προγενέστερους μαθηματικούς αναφέρεται με τρόπο που δείχνει υψηλή εκτίμηση στο έργο τους μόνο στον Εύδοξο (αρκετές φορές) και στο Δημόκριτο (μία φορά), δεν μπορούμε παρά να δεχθούμε ότι η μαθηματική συμβολή του Δημοκρίτου ήταν σημαντική.
(Νεγρεπόντης κ.α, 1999).

Οι Έλληνες γεωμέτρες έως την εποχή του Ευδόξου, είχαν διαισθητικά δεχτεί ότι τα εμβαδά απλών καμπυλόγραμμων σχημάτων ήταν γεωμετρικά μεγέθη του ίδιου τύπου, όπως και τα εμβαδά πολυγωνικών σχημάτων. Για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιούσαν δύο φυσικές ιδιότητες:

1) Την **μονοτονικότητα** : Αν ένα πολύγωνο Α περιέχεται σ' ένα καμπυλόγραμμο σχήμα Β, τότε εμβ(Α)<εμβ(Β) και

2)Την **προσθετικότητα**: Αν $Γ=Α\cup Β$ και $Α\cap Β=\varnothing$ τότε εμβ(Γ)=εμβ(Β)+ εμβ(Α)

Αυτές οι δύο ιδιότητες έπαιξαν σημαντικό ρόλο ώστε ο Εύδοξος να οδηγηθεί αργότερα στη μέθοδος της εξάντλησης. Ο Εύδοξος ήταν ο πρώτος που απέδειξε αυστηρά χρησιμοποιώντας τη μέθοδό του, προηγούμενες εικασίες του Ιπποκράτη του Χίου και του Δημόκριτου για καμπυλόγραμμα εμβαδά και όγκους στερεών. Η μέθοδος υπολογισμού καμπυλογράμμων εμβαδών συνίσταται στο γέμισμα αυτών με μία μεγάλη ακολουθία πολυγώνων . Με τη μέθοδο της εξάντλησης επιτυγχάνεται η εύρεση, με αυστηρό μαθηματικό τρόπο, εμβαδών και όγκων μέσω αλλεπάλληλων προσεγγίσεων (Γιαννακούλιας, 2007). Η μέθοδος της εξάντλησης αποτελεί τη βάση του ορισμού του ολοκληρώματος κατά Riemann. Στηρίζεται στην πρόταση X.1 των Στοιχείων του Ευκλείδη. Αποτελεί μια εφαρμογή της αρχής της συνέχειας και είναι μεγίστης σημασίας για την γένεση των άπειρων διαδικασιών.

Πρόταση Χ.1

Έστω δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς, θα απομείνει μέγεθος μικρότερο του μικρότερου από τα δύο δοθέντα αρχικά μεγέθη.

Σήμερα θα λέγαμε ότι έχουμε μία διαδικασία ορίου. Πράγματι αν $M_1, M_2, ... M_\nu$ είναι τα μεγέθη που αφαιρούνται κάθε φορά με την παραπάνω διαδικασία, τότε ορίζεται μία ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $s_1 = M_1$, $s_2 = M_1 + M_2, ...,$ $s_n = M_1 + M_2 + ... + M_\nu$. Τότε σύμφωνα με την αρχή της εξάντλησης θα υπάρχει κάποιο ν, για το οποίο η διαφορά $M - s_n$ θα είναι μικρότερη από το ε, για οποιοδήποτε ε, οσοδήποτε μικρό. Δηλαδή με σημερινή ορολογία το παραπάνω μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

Για κάθε ε>0,οσοδήποτε μικρό, θα υπάρχει $\nu_0, \nu_0 \in \mathbb{N}$,το οποίο εξαρτάται από το ε, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$\left|s_\nu - M\right| < \varepsilon, \forall \nu > \nu_0$.Δηλαδή $\lim\limits_{\nu \to \infty} s_\nu = M$

Η μέθοδος της εξάντλησης στηρίζεται στην κατασκευή άνω και κάτω φραγμάτων της ζητούμενης γεωμετρικής ποσότητας δια της κατασκευής ακολουθιών (μιας γνησίως αύξουσας και μιας γνησίως φθίνουσας) αντιστοίχων γεωμετρικών ποσοτήτων (στην περίπτωση του υπολογισμού εμβαδού, για παράδειγμα, μια γνησίως αύξουσα (α_ν) ακολουθία εμβαδών εγγεγραμμένων σχημάτων και μια γνησίως φθίνουσα (β_ν) ακολουθία εμβαδών περιγεγραμμένων σχημάτων) μεταξύ των οποίων κείται η ζητούμενη γεωμετρική ποσότητα Α η οποία επιθυμούμε να αποδείξουμε ότι ισούται με τη γνωστή εκ των προτέρων τιμή Β (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Σήμερα θα λέγαμε ότι η ζητούμενη γεωμετρική ποσότητα ευρίσκεται ως το όριο της ακολουθίας (α_ν) ή ισοδύναμα της ακολουθίας (β_ν), όμως οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί, όπως αναφέραμε παραπάνω, είχαν εξοβελίσει την έννοια του ορίου και γενικότερα τις άπειρες διαδικασίες. Εξάλλου υπήρχε η αδυναμία χρήσης αρνητικών πραγματικών αριθμών. Οι αδυναμίες αυτές, σε συνδυασμό με την εμμονή (ιδιαίτερα του Ευδόξου και αργότερα του Αρχιμήδη) σε μία απόλυτα αυστηρή αποδεικτική μέθοδο, επέβαλλαν μία αρκετά δύσκαμπτη διαδικασία. (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Κατ' αρχήν η εφαρμογή της μεθόδου είχε ως προϋπόθεση την προηγούμενη γνώση της τιμής Β που θα έπρεπε να έχει η ζητούμενη ποσότητα Α. Το πως οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί (και ιδιαίτερα ο Αρχιμήδης) έφθαναν στη γνώση της ζητούμενης τιμής Β διαισθητικά, ώστε μετά να είναι σε θέση να προσπαθήσουν να εφαρμόσουν τη μέθοδο της εξάντλησης είναι ένα ενδιαφέρον ζήτημα. Με την τιμή Β γνωστή, το χαρακτηριστικό συστατικό της αποδεικτικής μεθόδου της εξάντλησης ήταν η χρήση της ιδιότητας του Αρχιμήδη-Ευδόξου για την επίτευξη μιας διπλής απαγωγής σε άτοπο.

Περιγραφή της μεθόδου της εξάντλησης δια της χρήσης σύγχρονου συμβολισμού

Έστω μία γεωμετρική ποσότητα Α (όπως, για παράδειγμα, το εμβαδόν επιπέδου σχήματος Κ). Ζητείται να αποδειχθεί ότι Α = Β, όπου η τιμή Β είναι δεδομένα ίση με την Α (μέσω επιχειρημάτων που δεν συνιστούν αυστηρή μαθηματική απόδειξη). Κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες εμβαδών:

(Ι) Μία γνησίως αύξουσα ακολουθία α_ν εμβαδών εγγεγραμμένων (στο Κ) σχημάτων και

(ΙΙ) Μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία β_ν εμβαδών περιγεγραμμένων (στο Κ) σχημάτων. Τότε, για κάθε ν ισχύουν:

$\alpha_\nu < A < \beta_\nu$ και $\alpha_\nu < B < \beta_\nu$. Στην αρχή αποδεικνυόταν ότι:

$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \nu \in N^*:\ \beta_\nu - \alpha_\nu < \varepsilon$ (1).

Για την απόδειξη της (1) έδειχναν πρώτα ότι: $\beta_1 - \alpha_1 < \frac{1}{2}\,(\beta_0 - \alpha_0)$

$\beta_2 - \alpha_2 < \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_1)$ και ούτω καθεξής και από την αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδους επέλεγαν φυσικό αριθμό ν τέτοιο ώστε

$(\nu+1)\varepsilon>(\beta_0 - \alpha_0)$ από το οποίο συνεπάγεται ότι $\beta_\nu - \alpha_\nu < \frac{(\nu+1)}{2^\nu}\varepsilon < \varepsilon$.

Κατόπιν υπέθεταν ότι Α < Β, οπότε δια της επιλογής ενός κατάλληλου ε κατέληγαν σε άτοπο, παραδείγματος χάριν για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (B - A) και με βάση την αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδους υπάρχει φυσικός ν τέτοιος ώστε

$0 < B - A < \beta_\nu - \alpha_\nu < \varepsilon = \frac{1}{2}$ (B - A), οπότε Β < Α κάτι που είναι άτοπο. Με ανάλογα βήματα κατέληγαν σε άτοπο και στην περίπτωση όπου Β < Α, οπότε και κατέληγαν στο αιτούμενο, ήτοι Α = Β

Οι Έλληνες χρησιμοποίησαν αυτήν την ιδιότητα για να αποδείξουν θεωρήματα για τα εμβαδά και τους όγκους καμπυλόγραμμων σχημάτων. Ειδικότερα , ο Αρχιμήδης αποδίδει στον Εύδοξο την πρώτη ικανοποιητική απόδειξη του όγκου του κώνου: δηλαδή ο όγκος του κώνου ισούται με το ένα τρίτο του όγκου του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, κάτι που μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι ο Εύδοξος αναφέρθηκε πρώτος στη μέθοδο της εξάντλησης. Σημειώνουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες δεν χρησιμοποιούσαν τον όρο «μέθοδος της εξάντλησης» .Αυτός είναι ένας σύγχρονος όρος της διαδικασίας ο οποίος δόθηκε από τον Ιησουίτη μοναχό Gregoire de Saint – Vincent (1584 - 1667).

Στη μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου, για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε την ύπαρξη απείρως μικρών ποσοτήτων, αλλά μπορούμε να φτάσουμε σε ένα μέγεθος, όσο μικρό θέλουμε, με συνεχιζόμενη διαίρεση κάποιου δοθέντος μεγέθους. Ο Εύδοξος και οι μεταγενέστεροι έλληνες μαθηματικοί ποτέ δεν θεώρησαν ότι η διαδικασία στη μέθοδο της εξάντλησης συνεχίζεται επ' άπειρον, μέχρις ότου εξαντληθεί πλήρως το αρχικό μέγεθος, αλλά πάντα υπήρχε μία ποσότητα που έμενε και η οποία μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή επιθυμούσαν. Θα μπορούσε επομένως κανείς να ισχυριστεί, ότι η μέθοδος της εξάντλησης, εισήγαγε για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών την έννοια του ορίου (Γιαννακούλιας, 2007).

Η μέθοδος όμως είχε ένα μειονέκτημα: Για να αποδειχθεί κάποιο αποτέλεσμα έπρεπε να είναι ήδη γνωστό. Είναι δηλαδή μια αυστηρή αποδεικτική μέθοδος αλλά όχι ευρετική. Θα λέγαμε ότι μοιάζει πολύ με τη μέθοδο της επαγωγής.

Ένα πολύ καλό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου της εξάντλησης στην αποδεικτική διαδικασία αποτελεί η πρόταση XII.2 των Στοιχείων.

Πρόταση XII.2

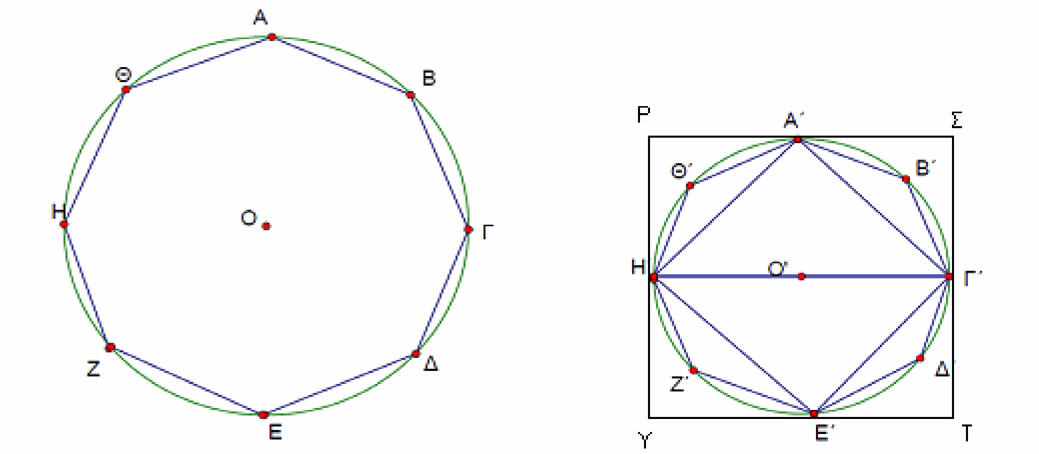
Τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Απόδειξη (σε σύγχρονη γλώσσα)

Έστω ότι για τα εμβαδά Ε,ε των δύο κύκλων ισχύει ότι : $\frac{E}{\varepsilon} \neq \frac{d^2}{d'^2}$.

Θα υπάρχει τότε κύκλος με εμβαδόν Ε΄ ≠ ε ώστε $\frac{E}{E'} = \frac{d^2}{d'^2}$ (1).

Έστω ότι Ε΄<ε. Εγγράφουμε στον κύκλο εμβαδού ε τετράγωνο Α΄Γ΄Ε΄Η΄. Ισχύει εμβ(Α΄Γ΄Ε΄Η΄)>$\frac{\varepsilon}{2}$ διότι αν ΡΣΤΥ είναι το περιγεγραμμένο στον κύκλο τετράγωνο, τότε ισχύουν: (ΡΣΤΥ)= 2 (Α΄Γ΄Ε΄Η΄) και ε < (ΡΣΤΥ). Θεωρούμε τα μέσα των τόξων Α΄Γ΄, Γ'Ε΄, Ε΄Η΄, Η΄Α΄ και κατασκευάζουμε το οκτάγωνο Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄Η΄Θ΄. Το καθένα από τα σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι μεγαλύτερο από του μισό του αντίστοιχου κυκλικού τμήματος διότι το διπλάσιο κάθε τριγώνου είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο , το οποίο είναι μεγαλύτερο από το κυκλικό τμήμα.



Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία διχοτομώντας κάθε φορά τα τόξα. Συμβολίζουμε με ε^* το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που θα απομείνουν και με (P_2) το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου στον κύκλο εμβαδού ε. Με εφαρμογή της αρχής της εξάντλησης στα μεγέθη ε, ε-Ε΄ θα είναι ε^*<ε-Ε΄ και έτσι (ε-Ε΄)+(P_2)>ε, οπότε (P_2)>Ε΄.

Στον κύκλο εμβαδού Ε κατασκευάζουμε πολύγωνο εμβαδού (P_1) όμοιο με το πολύγωνο (P_2).Τότε σύμφωνα με την XII.1 των Στοιχείων (Δύο όμοια πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλους είναι ανάλογα των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων αυτών) θα ισχύει :

$$\frac{(H\Gamma)^2}{(H\Gamma')^2}=\frac{d^2}{d'^2}=\frac{(P_1)}{(P_2)}$$ (2). Από τις (1) και (2) παίρνουμε

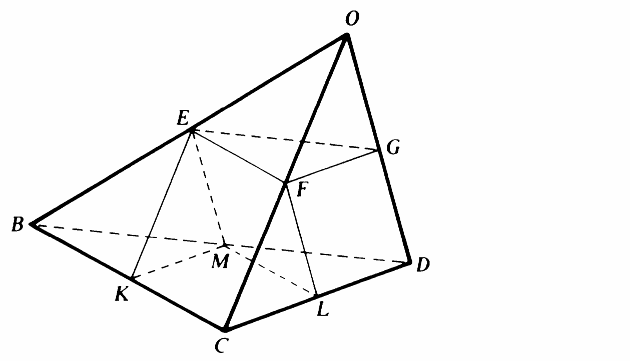
$$\frac{E}{E'}=\frac{(P_1)}{(P_2)} \Leftrightarrow \frac{E}{(P_1)}=\frac{E'}{(P_2)}$$, άτοπο αφού $E>(P_1)$ και $E'<(P_2)$

Η περίπτωση Ε΄>ε ανάγεται στην προηγούμενη με εναλλαγή των δύο κύκλων. Άρα Ε΄=ε.

Η παραπάνω απόδειξη σύμφωνα με τον Van Der Waerden (2000) εμπεριέχει με πλήρη αυστηρότητα, τη σύγχρονη έννοια του ορίου, γιατί τα εγγεγραμμένα πολύγωνα προσεγγίζουν τον κύκλο με την ακριβή σημασία του όρου, με τη σημασία δηλαδή ότι η διαφορά τους μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε επιφάνεια.

Όγκοι κώνων και πυραμίδων

Αν P είναι είτε μία τριγωνική πυραμίδα είτε ένας κυκλικός κώνος, τότε ο όγκος δίνεται από τον τύπο $v(P)=\frac{1}{3}Ah$, όπου h είναι το ύψος και A το εμβαδόν της βάσης. Σύμφωνα με τον Αρχιμήδη, τα δύο αποτελέσματα που περιγράφονται από αυτόν τον τύπο είχαν ανακαλυφθεί από τον Δημόκριτο, αλλά αποδείχθηκαν πρώτα από τον Εύδοξο. Εδώ θα συζητήσουμε την πραγμάτευσή του από τον Ευκλείδη στο βιβλίο XII των Στοιχείων.



Ο υπολογισμός του όγκου μιας πυραμίδας βασίζεται στην ανάλυση μίας αυθαίρετης πυραμίδας με τριγωνική βάση σε δύο πρίσματα και δύο όμοιες πυραμίδες , όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Τα σημεία E,F,G,K,L,M είναι τα μέσα των έξι ακμών της πυραμίδας OBCD. Είναι προφανές ότι οι πυραμίδες OEFG και EBKM είναι όμοιες με την OBCD και είναι συμπίπτουσες μεταξύ τους. Το κρίσιμο σημείο αυτής της ανάλυσης είναι ότι το άθροισμα των όγκων των δύο πρισμάτων EKMFCL και MLDEFG είναι μεγαλύτερο από το μισό του όγκου της αρχικής πυραμίδας OBCD. Αυτό είναι αληθές γιατί:

$v(OEFG)=v(FKCL)<v(EKMFCL)$

και

$v(EBKM)=v(GMLD)<v(MLDEFG)$.

Αν συμβολίσουμε με h το ύψος και με A το εμβαδόν της βάσης BCD της πυραμίδας OBCD, τότε $v(MLDEFG)=\frac{1}{8}Ah$, γιατί το ύψος του πρίσματος είναι $\frac{1}{2}h$ και το εμβαδόν της βάσης MLD είναι $\frac{1}{4}A$.

Επίσης, v(EKMFCL)= $\frac{1}{8}Ah$, γιατί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου KCLM είναι $\frac{1}{2}A$, και το πρίσμα EKMFCL είναι το μισό ενός παραλληλεπιπέδου με βάση KCLM και ύψος $\frac{1}{2}h$. Συνεπώς το άθροισμα των όγκων των δύο μικρότερων πρισμάτων είναι $\frac{1}{4}Ah$.

Αν διαμερίσουμε τώρα κάθε μία από τις πυραμίδες OEFG και EBKM σε δύο μικρότερες πυραμίδες και δύο πρίσματα. Τότε το άθροισμα των όγκων των τεσσάρων προκυπτόντων μικρότερων πρισμάτων είναι μεγαλύτερο από το μισό του αθροίσματος των όγκων των πυραμίδων OEFG και EBKM. Επειδή αυτές οι δύο νέες πυραμίδες και οι δύο έχουν ύψος $\frac{1}{2}h$ και εμβαδόν βάσης $\frac{1}{4}A$, προκύπτει ότι το άθροισμα των όγκων των τεσσάρων μικρότερων πρισμάτων είναι:

$$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{A}{4}\cdot\frac{h}{2}=\frac{Ah}{4^2}.$$

Μετά από n βήματα επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, παίρνουμε νιοστή διαμέριση της αρχικής πυραμίδας. Στο κ βήμα έχουμε 2^k υποδιαιρεμένες μικρές πυραμίδες , και έτσι 2^k ζευγάρια μικρότερων πρισμάτων. Κάθε μία από τις 2^k πυραμίδες έχει ύψος $\frac{h}{2^k}$ και εμβαδόν βάσης $\frac{A}{4^k}$, οπότε το άθροισμα των όγκων των 2^k ζευγαριών των μικρότερων πρισμάτων είναι $2^k\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{A}{4^k}\cdot\frac{h}{2^k}=\frac{Ah}{4^{k+1}}$.

Τελικά, αν P συμβολίζει την ένωση όλων των πρισμάτων που επιτυγχάνουμε σε όλα τα βήματα αυτής της νιοστής διαμέρισης , προκύπτει ότι:

$$v(P)=Ah(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^{n+1}}). \qquad (*)$$

Επιπλέον, επειδή σε κάθε βήμα το άθροισμα των όγκων των πρισμάτων είναι μεγαλύτερο από το μισό του αθροίσματος των όγκων των πυραμίδων που λαμβάνονται στο προηγούμενο βήμα, από την αρχή του Ευδόξου έχουμε ότι δοθέντος ε>0, V-v(P)<ε αν το n είναι αρκούντως μεγάλο, και V=v(OBCD).

Αυτή η κατασκευή είναι η βάση για την Ευκλείδεια απόδειξη της πρότασης XII.5.

Δοθέντων δύο τριγωνικών πυραμίδων με το ίδιο ύψος και βάσεις εμβαδών A_1 *και* A_2*, ο λόγος των όγκων τους* V_1 *και* V_2 *είναι ίσος με αυτόν των εμβαδών των βάσεών τους,* $\frac{V_1}{V_2}=\frac{A_1}{A_2}$.(**)

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη της (**) είναι μία διπλή εις άτοπον απαγωγή σχεδόν ταυτόσημη με αυτήν που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος στα εμβαδά των κύκλων.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $\frac{V_1}{V_2}<\frac{A_1}{A_2}$ ή $V_2>\frac{V_1A_2}{A_1}$=S και έστω ε= V_2- S. Συμβολίζουμε με P_2 την ένωση όλων των πρισμάτων που λαμβάνονται σε μία με n-βήματα- διαμέριση της δεύτερης πυραμίδας , με το n αρκούντως μεγάλο ώστε V_2-v(P_2)<ε=V_2-S, και έτσι v(P_2)>S. Τότε από την (*) προκύπτει ότι αν P_1 είναι η παρεμφερής ένωση των πρισμάτων που λαμβάνονται σε μία με n-βήματα- διαμέριση της πρώτης πυραμίδας, τότε:

$$\frac{v(P_1)}{v(P_2)}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{V_1}{S}.$$

Έτσι $\frac{S}{v(P_2)}=\frac{V_1}{v(P_1)}>1$ γιατί το P_1 περιέχεται γνήσια στην πρώτη πυραμίδα.

Όμως η S>v(P_2) είναι μία αντίφαση, άρα η υπόθεση $\frac{V_1}{V_2}<\frac{A_1}{A_2}$ είναι λανθασμένη.

Ανταλλάσσοντας τους ρόλους των δύο πυραμίδων, βρίσκουμε ότι η υπόθεση $\frac{V_1}{V_2}>\frac{A_1}{A_2}$ είναι επίσης λανθασμένη. Έτσι προκύπτει $\frac{V_1}{V_2}=\frac{A_1}{A_2}$ (Edwards, 1979).

Αρχιμήδης

Ο Αρχιμήδης (287-212π.Χ) ήταν η πιο σημαντική μορφή των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Ίσως το γεγονός ότι διασώζονται για τη ζωή του περισσότερες μαρτυρίες από όσες διασώζονται για τη ζωή οποιουδήποτε άλλου αρχαίου έλληνα μαθηματικού να μην είναι απλή σύμπτωση αλλά να οφείλεται, ακριβώς στην εκτίμηση με την οποία οι επόμενες γενεές περιέβαλλαν το πρόσωπό του. Βασικά χαρακτηριστικά του επιστημονικού του έργου είναι τα ακόλουθα:

1.Η πρόσληψη των 'απειροστικών' μεθόδων του Ευδόξου (μέθοδος εξάντλησης) και η επιτυχής εφαρμογή τους για την εύρεση εμβαδών και όγκων καμπυλόγραμμων σχημάτων .

2.Η ανάπτυξη ευρετικών μεθόδων βάσει των οποίων ήταν σε θέση να γνωρίζει πολλά μαθηματικά αποτελέσματα προτού ακόμη τα αποδείξει με αυστηρό (κατά κανόνα γεωμετρικό) τρόπο. Ευρετικές μεθόδους χρησιμοποιούσαν ασφαλώς και άλλοι Έλληνες μαθηματικοί, ο Αρχιμήδης όμως διαφοροποιείται από εκείνους ως προς το ότι δεν δίσταζε να κοινοποιεί τις ευρετικές μεθόδους του, ενώ ένα άλλο στοιχείο που τον χαρακτηρίζει είναι ότι δεν απαξιούσε να εκτελεί περίπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς και να παραθέτει τα αποτελέσματά τους.

3.Η επεξεργασία μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή φυσικών φαινομένων της στατικής και της υδροστατικής και η επινόηση μηχανικών κατασκευών των οποίων η λειτουργία βασίζεται στην εφαρμογή φυσικών αρχών (Χριστιανίδης, 2003).

Ο άγγλος ιστορικός T.L.Heath (1981) περιέγραψε με τα παρακάτω λόγια τα έργα του Αρχιμήδη: «Αποτελούν χωρίς εξαίρεση, πρότυπα μαθηματικής γραφής. Το βαθμιαίο ξετύλιγμα του σχεδίου επίθεσης, η αριστοτεχνική διάταξη των προτάσεων, η αυστηρή απάλειψη κάθε στοιχείου που δεν είναι άμεσα σχετιζόμενο, η τελειότητα του όλου συνδυάζονται ώστε να προκαλέσουν μία βαθειά εντύπωση, σχεδόν ένα αίσθημα δέους στον αναγνώστη. Δεν υπάρχει όπως σε όλα τα μεγάλα ελληνικά μαθηματικά αριστουργήματα, καμία ένδειξη για τη μέθοδο με την οποία ευρέθηκαν τα αποτελέσματα. Είναι βέβαια σαφές ότι δεν ανακαλύφθηκαν με τα βήματα που οδηγούν σ' αυτά τα αποτελέσματα στο τελειωμένο έργο. Αν τα γεωμετρικά έργα ήταν τα μόνα που είχαν σωθεί, ο Αρχιμήδης πράγματι θα μας φαίνονταν, όπως είπε ο Wallis, ότι «δίνει την εντύπωση ότι έχει σκοπό να καλύψει όλα τα ίχνη των ερευνών του, σαν να είναι απρόθυμος να αποδώσει στην αιωνιότητα τα μυστικά της μεθόδου του, ενώ συγχρόνως επιθυμεί να αποσπάσει από αυτήν τα αποτελέσματά του».

Λίγα λόγια για τη ζωή του

Ο Αρχιμήδης ήταν γιος του αστρονόμου Φειδία (όπως ο ίδιος αναφέρει στο έργο του Ψαμμίτης), ο οποίος είχε γράψει μια πραγματεία για τις διαμέτρους του ηλίου και της σελήνης. Δεν είναι γνωστό αν είχε αριστοκρατική καταγωγή. Συνδεόταν όμως με τους ανώτερους κύκλους της αυλής των Συρακουσών και ήταν φίλος με το βασιλιά Ιέρωνα και το διάδοχό του Γέλωνα. Από ένα απόσπασμα του Διόδωρου φαίνεται ότι έζησε κάποιο χρονικό διάστημα στην Αίγυπτο, και η παραμονή του εκεί του έδωσε την ευκαιρία για την ανακάλυψη του αποκαλούμενου αρχιμήδειου κοχλία ως μέσου άντλησης νερού που χρησιμοποιήθηκε επίσης στα αδαμαντορυχεία της Ισπανίας. Φαίνεται να είναι βέβαιο ότι είχε σχέσεις με την Αλεξανδρινή σχολή της Αιγύπτου. Ειδικότερα είχε επιστημονική επαφή με τον Ερατοσθένη της Κυρηνείας , διευθυντή της Βιβλιοθήκης της Αλεξανδρείας και με τον διάδοχο του Ευκλείδη στην Αλεξανδρινή Σχολή, Κόνωνα τον Σάμιο. Στον Κόνωνα ο Αρχιμήδης , συνήθιζε να στέλνει τις πραγματείες του πριν από την δημοσίευση τους ενώ στον Ερατοσθένη έστειλε το έργο του « Η Μέθοδος» με μια εισαγωγική επιστολή η οποία παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον καθώς και το περίφημο Βοεικό πρόβλημα, ένα εξαιρετικά πολύπλοκο πρόβλημα που οδηγεί σε εξίσωση τύπου Pell $t^2 - 4.729.494u^2 = 1$, με τη βοηθητική συνθήκη ότι το u είναι πολλαπλάσιο του 9304. Οι λύσεις της εξίσωσης αποτελούνται από πολύ μεγάλους αριθμούς (Van Der Waerden, 2000).

Έχουν καταγραφεί πολλά ανέκδοτα σχετικά με τον Αρχιμήδη από τους μεταγενέστερους ρωμαίους ιστορικούς. Ένα από αυτά που μας δείχνει πόσο αποκοβόταν από το περιβάλλον του όταν ήταν συγκεντρωμένος σε κάποιο πρόβλημα είναι το ανέκδοτο του τυράννου Ιέρωνα με κάποιον ύποπτο χρυσοχόο. Ο Ιέρωνας παρήγγειλε σε έναν χρυσοχόο ένα χρυσό στέμμα. Όταν πήρε ο τύραννος το στέμμα φοβήθηκε μήπως ο χρυσοχόος είχε αντικαταστήσει μέρος του χρυσού με ασήμι. Καθώς δεν ήθελε να χαλάσει το στέμμα για να ξεκαθαρίσει το ζήτημα αυτό, ανέφερε το πρόβλημα στον Αρχιμήδη, ο οποίος μια μέρα ενώ βρισκόταν στα λουτρά της πόλης βρήκε το κλειδί της λύσης ανακαλύπτοντας τον πρώτο νόμο της υδροστατικής: Κάθε σώμα που βυθίζεται σε υγρό που ισορρροπεί δέχεται τόση άνωση, όσο είναι το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα. Μέσα στη χαρά της ανακάλυψής του ο Αρχιμήδης, βγήκε από το λουτρό και ξεχνώντας να ντυθεί, έτρεξε σπίτι μέσα από τους δρόμους της πόλης φωνάζοντας Εύρηκα! Εύρηκα! (Eves, 1989).

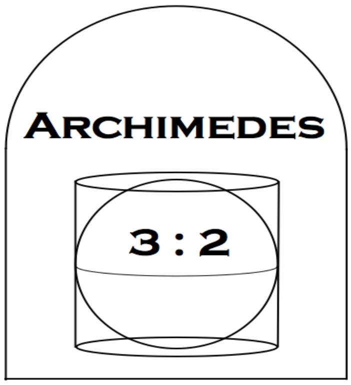
Όταν επρόκειτο να γίνει η καθέλκυση της περίφημης νηός «Συρακοσία», ενός τεχνολογικού θαύματος εφοδιασμένου με κάθε είδους πολυτέλεια, το οποίο ο βασιλιάς Ιέρων είχε παραγγείλει να ναυπηγηθεί για το συνάδελφό του Πτολεμαίο, αντιμετώπισαν δυσκολία και κάλεσαν τον Αρχιμήδη να τους συμβουλεύσει. Αυτός σχεδίασε έναν μηχανισμό τον οποίο μπορούσε να χειριστεί ακόμα και ένας άνθρωπος μόνος του. Ο ίδιος ο βασιλιάς καθήλκυσε το πλοίο και αναφώνησε: «Από τώρα και στο εξής τον Αρχιμήδη θα τον πιστεύουμε ότι και αν λέει». Σε μία παρόμοια περίσταση λέγεται ότι ο Αρχιμήδης είπε το περίφημο « Δώστε μου ένα μέρος να σταθώ και θα κινήσω τη Γη».

Ο Αρχιμήδης έπαιξε σημαντικό ρόλο κατά την πολιορκία των Συρακουσών από τους Ρωμαίους. Επινόησε και κατασκεύασε πολεμικές μηχανές (καταπέλτες, βαλλιστρίδες, κάτοπτρα κλπ.) τόσο αποτελεσματικές ώστε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα να εμποδίζεται η άλωση της γενέτειράς του. Περιγράφονται καταπέλτες με ρυθμιζόμενα βεληνεκή, βληκτικοί πόλοι τοποθετημένοι πάνω σε βάσεις με τροχούς που μεταφέρονταν γρήγορα σε κάθε σημείο των τειχών της πόλης και από εκεί έριχναν τεράστια βάρη εναντίον εχθρικών πλοίων, και τεράστιοι κινητοί γερανοί που σήκωναν πλοία των κατακτητών από τη θάλασσα και τα έκαναν κομμάτια. Το ανέκδοτο ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε μεγάλους συγκλίνοντες φακούς για να βάλει φωτιά στα πανιά εχθρικών πλοίων διατυπώθηκε αργότερα, αλλά μπορεί να είναι αλήθεια (Εξαρχάκος, 1994).

Τελικά, οι Συρακούσες κατελήφθησαν από το Ρωμαίο στρατηγό Μάρκο Κλαύδιο Μάρκελλο, το φθινόπωρο του 212 π.Χ. , μετά από τρία χρόνια πολιορκίας ύστερα από προδοσία. Ο Αρχιμήδης σκοτώθηκε κατά την άλωση της πόλης από Ρωμαίο στρατιώτη, την ώρα που –όπως αναφέρουν κάποιες μαρτυρίες και όπως η παράδοση διέσωσε-προσπαθούσε να λύσει κάποιο μαθηματικό πρόβλημα στην άμμο. Πάρα πολλοί συγγραφείς αναφέρονται στην ώρα του θανάτου του Αρχιμήδη.. Ως προς τις λεπτομέρειες του γεγονότος υπάρχουν διάφορες εκδοχές.

Ο θάνατος του Αρχιμήδη.
Ψηφιδωτό, πιθανώς της σχολής του Ραφαήλ.

Ο Αρχιμήδης έγινε διάσημος και απέκτησε φήμη δαιμόνιας μεγαλοφυΐας λόγω των μηχανικών του κατασκευών. Ο ίδιος όμως δεν τις θεωρούσε έργα άξια σπουδής και, όπως αναφέρει ο Πλούταρχος, οι περισσότερες από αυτές τις κατασκευές ήταν πάρεργα γεωμετρικών παιχνιδιών. Θεωρούσε ότι η ενασχόληση με τα μηχανικά και με τις πρακτικές εφαρμογές είναι αγενής και βάναυση. Διέθετε την νοητική του προσπάθεια μόνο σε αυτά που θεωρούσε ευγενή και αγαθά, δηλαδή τα καθαρά θεωρητικά μαθηματικά. Παρά λοιπόν το πλήθος των μηχανικών κατασκευών του που του χάρισαν δόξα, δεν θέλησε να αφήσει κανένα σύγγραμμα για αυτές, λόγω της άποψής του ότι η ενασχόληση με τις πρακτικές ανάγκες είναι υποδεέστερη. Ο Πάππος επικαλούμενος τον Κάρπο τον Αντιοχέα, αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης συνέγραψε μόνο ένα σύγγραμμα για μηχανικές κατασκευές, το Περί σφαιροποιίας , γιατί (όπως εξηγεί) αγάπησε τόσο πολύ την (καθαρή) γεωμετρία που δεν ήθελε να εισάγει και να χρησιμοποιήσει σε αυτήν οτιδήποτε εξωτερικό, προερχόμενο από την εμπειρία Η σχετική απάθεια με την οποία αντιμετώπιζε ο Αρχιμήδης τις διάφορες εφευρέσεις του, όσο εντυπωσιακές και αν ήταν και η αγωνία του μήπως οι μεταγενέστεροι τον μνημονεύουν περισσότερο για αυτές και λιγότερο για τη μαθηματική του συνεισφορά αντικατοπτρίζεται με τον καλύτερο τρόπο στο αίτημα που παρέδωσε στους φίλους του και συγγενείς του σχετικά με το τι πρέπει να αναγράφει ο τάφος του : έναν κύλινδρο που να είναι περιγεγραμμένος μιας σφαίρας μαζί με το λόγο που φέρει ο κύλινδρος προς τη σφαίρα.



Τα έργα του Αρχιμήδη

Η έκταση των έργων του Αρχιμήδη είναι πολύ μεγάλη και περιλαμβάνει εκτός από τους διάφορους κλάδους των Μαθηματικών και πολλούς τομείς της ανθρώπινης γνώσης όπως Φυσική, Αστρονομία, Μηχανική, Τεχνολογία. Σήμερα στο ευρύτερο κοινό ο Αρχιμήδης είναι γνωστός κυρίως από τις μηχανικές του ανακαλύψεις και τις εργασίες του που έχουν σχέση με τη Φυσική, τη Μηχανική και την Υδροστατική, καθώς και τις εκπληκτικές του τεχνολογικές κατασκευές. Όμως το μεγαλύτερο έργο του και γι αυτόν το πιο σημαντικό, ανήκει στην περιοχή των καθαρών Μαθηματικών. Το μαθηματικό έργο που άφησε, ήταν εκπληκτικά μεγάλο σε ποιότητα και έκταση και είχε τεράστιες δυνατότητες εφαρμογής. Διακρίνεται από πρωτοτυπία σκέψης, αυστηρότητα και μεθοδικότητα και αποτέλεσε το θεμέλιο πάνω στο οποίο στηρίχτηκαν οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί για να δημιουργήσουν και να οικοδομήσουν τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό.

Ο Αρχιμήδης φέρεται ως συγγραφέας περισσότερων από 30 έργα , από τα οποία σώζονται σήμερα, ολόκληρα ή εν μέρει περίπου τα μισά. Τα έργα αυτά είχαν γραφτεί προς χάριν των συναδέλφων του επαγγελματιών μαθηματικών και μηχανικών του δεύτερου μισού του $3^{ου}$ π.Χ. αιώνα και επομένως απευθύνονταν από τη φύση τους σε ένα περιορισμένο ακροατήριο. Η διάσωση των έργων του Αρχιμήδη, λοιπόν, ήταν ευθύς εξαρχής εξαιρετικά επισφαλής και εξαρτώνταν από έναν πολύ περιορισμένο αριθμό λογίων οι οποίοι κυρίως στους πρώτους αιώνες επιδείκνυαν ενδιαφέρον για το ένα ή το άλλο από τα έργα του. Ορισμένα από τα συγγράμματά που σώζονται είναι γνωστά μόνο από αραβικές ή λατινικές μεταφράσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα, ενώ και εκείνα ακόμη που διασώζονται στην ελληνική γλώσσα δεν σώζονται όλα στην αρχική σικελική (δωρική) διάλεκτο, στην οποία έγραφε ο Αρχιμήδης. Συγκεκριμένα, τέσσερα έργα σώζονται μεταγραμμένα στην αττική διάλεκτο, σε μια μεταγραφή που έγινε πολλούς αιώνες μετά το θάνατο του Αρχιμήδη. Τα ανωτέρω στοιχεία είναι ενδεικτικά της δαιδαλώδους διαδρομής που ακολούθησε στην πορεία των αιώνων η παράδοση των χειρογράφων του Αρχιμήδη, μέχρι να φτάσουμε στην τρίτομη έκδοση των Απάντων του, η οποία συνοδεύεται από την έκδοση των αρχαίων ελληνικών σχολίων επ' αυτών, κατά τα έτη 1910-1915, από τον Johann Ludwig Heiberg (Γιόχαν Λούντβιχ Χάιμπεργκ,1854-1928), διακεκριμένο καθηγητή των ελληνικών στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης. Σήμερα, έναν αιώνα μετά την έκδοση του Heiberg, γράφεται ένα νέο, πολύ πλούσιο κεφάλαιο σ' αυτή την πολυκύμαντη ιστορία, με την ανάγνωση νέων κειμένων του Αρχιμήδη, τα οποία έρχονται για πρώτη φορά στο φως από την αφάνεια στην οποία ήσαν καταδικασμένα για περισσότερα από 1.000 χρόνια.


ARCHIMEDIS
OPERA OMNIA
CUM COMMENTARIIS EUTOCII
J. L. HEIBERG
VOLUMEN II
LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI

Ο δεύτερος τόμος της έκδοσης των
Απάντων του Αρχιμήδη από τον
Heiberg (Λειψία,1913)
Ο συγκεκριμένος τόμος περιέχει
τις πραγματείες που ήρθαν στο φως
με την ανακάλυψη του Παλίμψηστου.

Οι γνώσεις μας για το έργο του Αρχιμήδη διευρύνθηκαν πολύ από νέες ανακαλύψεις που έγιναν στη διάρκεια του 20ού αιώνα. Η σπουδαιότερη από αυτές ήταν η ανακάλυψη του παλίμψηστου κώδικα των Ιεροσολύμων, ο οποίος περιείχε κάποια κείμενα που έως τότε δεν ήταν γνωστά. Η εξιστόρηση της ανακάλυψης δίνεται από τον Γ.Χριστιανίδη ως εξής:

Το έτος 1899 ο ιστοριοδίφης Αθανάσιος Παπαδόπουλος-Κεραμεύς (1856-1912) σημείωνε στον τέταρτο τόμο του καταλόγου των χειρογράφων των ανά τον κόσμο βιβλιοθηκών του Πατριαρχείου των Ιεροσολύμων την ύπαρξη ενός παλίμψηστου χειρογράφου μαθηματικού περιεχομένου, το οποίο ανήκε στη βιβλιοθήκη του μετοχίου του Παναγίου Τάφου στην Κωνσταντινούπολη, όπου ήταν καταχωρισμένο ως *Κώδιξ ιεροσολυμιτικός*, υπ' αριθ. 355. Παρέθεσε μάλιστα και ένα μικρό δείγμα του μαθηματικού κειμένου που μπόρεσε να διαβάσει. Ο Παπαδόπουλος πρόσθεσε επίσης την πληροφορία ότι το χειρόγραφο περιέχει μια επιγραφή του 16ου αιώνα, η οποία αναφέρει ότι ανήκε στη μονή του Αγίου Σάββα. Η επιγραφή αυτή δεν διασώζεται σήμερα.

Παλίμψηστα λέγονται τα χειρόγραφα των οποίων έχει αποξεσθεί το αρχικώς γραμμένο κείμενο για να γραφεί νέο. Στο εν λόγω παλίμψηστο είχε γραφεί λειτουργικό ευχολόγιο (δηλαδή ένα λειτουργικό βιβλίο της ορθόδοξης εκκλησίας, που περιέχει το τελετουργικό τυπικό των διαφόρων ακολουθιών και τις ανάλογες κατά περίσταση ευχές) κάτω όμως από αυτό διακρίνονταν τα ίχνη γραφής κάποιου μαθηματικού συγγράμματος. Σήμερα γνωρίζουμε ότι το χειρόγραφο βρισκόταν στο μετόχιο τουλάχιστον από το 1846, δεδομένου ότι μνημονεύεται σε περιηγητικό βιβλίο με τίτλο *Reise in der Orient* (*Ταξίδια στην Ανατολή)*, που εκδόθηκε εκείνο το έτος στη Λειψία από τον Γερμανό λόγιο και μελετητή της Βίβλου Konstantin von Tischendorf (Κονσταντίν φον Τίσε-ντορφ, 1815-1874), ο οποίος είναι γνωστός κυρίως για την ανακάλυψη του περίφημου Codex Sinaiticus (Σιναϊτικός κώδικα) της Βίβλου. Ο Tischendorf είχε επισκεφθεί την Πατριαρχική Βιβλιοθήκη, όπως αναφέρει τη βιβλιοθήκη του μετοχίου, όπου εντόπισε το παλίμψηστο χειρόγραφο, από το οποίο μάλιστα αφαίρεσε ένα φύλλο που πουλήθηκε αργότερα από τους κληρονόμους του και ανήκει σήμερα στη Βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου του Κέμπριτζ. Φαίνεται ότι πρόθεση του ήταν από το φύλλο αυτό να ταυτοποιήσει το μαθηματικό περιερχόμενο του παλίμψηστου χειρογράφου προκειμένου να το πουλήσει σε ενδιαφερόμενους αγοραστές - ένας σκοπός που δύσκολα συμβιβάζεται με τις θεολογικές ανησυχίες του. Πάντως, ούτε ο Tischendorf ούτε μισό αιώνα αργότερα ο Παπαδόπουλος-Κεραμεύς μπόρεσαν να αναγνωρίσουν το κείμενο του Αρχιμήδη που περιείχε το χειρόγραφο.

Τη δημοσίευση του Παπαδόπουλου παρατήρησε ο Γερμανός ιστορικός των μαθηματικών Hermann Schone (Χέρμαν Σένε), ο οποίος είναι γνωστός από τις εκδόσεις έργων του Ήρωνα στον οίκο Τόυμπνερ. Ο Schone την ανακοίνωσε στον Heiberg, ο οποίος αναγνώρισε αμέσως (από το δείγμα που είχε δημοσιευτεί) ότι πρόκειται για κείμενο του Αρχιμήδη. Ο Heiberg προσπάθησε αρχικά να επιτύχει διά της διπλωματικής οδού τη μεταφορά του χειρογράφου στην Κοπεγχάγη. Επειδή όμως τα διαβήματα του δεν τελεσφόρησαν, αναγκάστηκε να μεταβεί ο ίδιος στην Κωνσταντινούπολη. Πράγματι, το 1906 μετέβη στην Κωνσταντινούπολη, όπου μελέτησε το χειρόγραφο, διαπίστωσε ότι περιείχε έργα του Αρχιμήδη και αποκρυπτογράφησε μεγάλο μέρος του κειμένου χρησιμοποιώντας έναν απλό μεγεθυντικό φακό. Τα κείμενα που αναγνώρισε ο Heiberg ότι περιείχε ο κώδικας ήταν το Περί σφαίρας και κυλίνδρου, το Περί ελίκων, τμήματα από το Κύκλου μέτρησις και το 'Επιπέδων ισορροπιών, τμήματα από το δεύτερο βιβλίο του *Οχουμένων*, τα οποία μέχρι τότε ήσαν γνωστά μόνο από τη λατινική μετάφραση του Γουλιέλμου του Μέρμπεκε, καθώς και τη μέχρι τότε άγνωστη αρχή του Στομαχιού. Όμως, το σπουδαιότατο εύρημα που ήλθε στο φως με το Παλίμψηστο ήταν η πραγματεία Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς *Ερατοσθένη έφοδος*, την ύπαρξη της οποίας γνωρίζαμε έως τότε από δύο μόνο πηγές: από το λήμμα για τον μαθηματικό και αστρονόμο της Ύστερης Ελληνιστικής Περιόδου Θεοδόσιο (περιέχεται στο βυζαντινό λεξικό της Σούδας, όπου αναφέρεται ότι ο Θεοδόσιος έγραψε ένα σχόλιο στην πραγματεία αυτή), καθώς και από τρεις αναφορές που περιέχονται στα *Μετρικά του Ήρωνα.* Η ανακάλυψη του Heiberg έκανε γνωστή για πρώτη φορά την ίδια την πραγματεία του Αρχιμήδη, έστω κι αν στο χειρόγραφο δεν περιέχεται ολόκληρο το κείμενο της.

Καρπός αυτής της πρώτης επαφής του Heiberg με το χειρόγραφο ήταν ένα άρθρο που δημοσιεύθηκε το 1907 στο γερμανικό περιοδικό Hermes. Ο

Heiberg εξέτασε εκ νέου το χειρόγραφο το 1908. Κατόπιν, επιμελήθηκε τη νέα βελτιωμένη -και θεωρούμενη μέχρι πρόσφατα οριστική- κριτική έκδοση των έργων του Αρχιμήδη.

Η έρευνα που γίνεται αυτόν τον καιρό γύρω από τον κώδικα έχει φέρει στο φως μερικά άκρως εντυπωσιακά στοιχεία για την ιστορία του. Ο κώδικας γράφτηκε κατά το τρίτο τέταρτο του 10ου αιώνα, πιθανώς στην Κωνσταντινούπολη. Περιείχε τουλάχιστον τα επτά έργα του Αρχιμήδη που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Αργότερα, ο κώδικας μετατράπηκε σε παλίμψηστο. Πότε και πού έγινε αυτό; Ποιος ήταν ο υπεύθυνος γι' αυτή την πράξη; Στα ερωτήματα αυτά μέχρι πρότινος δεν υπήρχε απάντηση. Όμως, το Μάρτιο του τρέχοντος έτους μια ομάδα επιστημόνων του Synchrotron Radiation Laboratory (SSRL) του Πανεπιστημίου του Στάνφορντ κατόρθωσε να διαβάσει σε μια σελίδα του χειρογράφου κάτι που κανείς έως τότε δεν είχε κατορθώσει: την ταυτότητα του μοναχού που έσβησε το κείμενο του Αρχιμήδη και έγραψε επάνω από αυτό το λειτουργικό ευχολόγιο. Το όνομα του μοναχού ήταν Ιωάννης Μύρωνας. Ο Μύρωνας ολοκλήρωσε το έργο της μετατροπής του χειρογράφου του Αρχιμήδη σε εκκλησιαστικό κείμενο στις 14 Απριλίου 1229 στην Ιερουσαλήμ.

Μετά τη μετατροπή του σε λειτουργικό βιβλίο, ο κώδικας μεταφέρθηκε στη μονή του Αγίου Σάββα (Λαύρα του Αγίου Σάββα), το ελληνορθόδοξο μοναστήρι που, κατά την παράδοση, ιδρύθηκε το έτος 483 από τον Άγιο Σάββα και αναδείχθηκε γρήγορα σ' ένα πολύ σημαντικό πνευματικό κέντρο. Βρίσκεται στην έρημο της Ιουδαίας, μεταξύ της Βηθλεέμ και της Νεκράς Θάλασσας. Η μονή είχε ένα πολύ καλά οργανωμένο βιβλιογραφικό εργαστήριο (scriptorium) και η βιβλιοθήκη της, το έτος 1834, περιείχε περισσότερα από 1.000 χειρόγραφα. Δεν γνωρίζουμε πότε ακριβώς το χειρόγραφο του Αρχιμήδη μεταφέρθηκε στη μονή του Αγίου Σάββα. Θεωρείται βέβαιο ότι αυτό έγινε πριν από το 16ο αιώνα. Είναι βέβαιο επίσης ότι έως τα μέσα της δεκαετίας του 1840 το χειρόγραφο είχε μεταφερθεί στο μετόχι του Παναγίου Τάφου στην Κωνσταντινούπολη, όπου το βρήκε ο Tischendorf.

Ακόμη πιο σκοτεινή είναι η ιστορία του χειρογράφου από την εποχή που το μελέτησε ο Heiberg και μετά. Ιδιαιτέρως, πλήρες σκοτάδι καλύπτει την περίοδο έως τα πρώτα χρόνια της δεκαετίας 1920-1930, οπότε, κάτω από άγνωστες συνθήκες, πέρασε σ' έναν Γάλλο ιδιώτη. Το Πατριαρχείο των Ιεροσολύμων ισχυρίζεται βάσιμα ότι το χειρόγραφο εκλάπη, δεδομένου ότι το μετόχι δεν είχε καμία αρμοδιότητα να εκποιεί χειρόγραφα της βιβλιοθήκης του χωρίς άδεια από τον ίδιο τον Πατριάρχη, και τέτοια άδεια για πώληση του κώδικα του Αρχιμήδη δεν δόθηκε ποτέ. Έκτοτε, το χειρόγραφο παρέμενε στη συλλογή της γαλλικής οικογένειας, ώσπου στα τέλη του 1998 δόθηκε προς δημοπρασία στον οίκο δημοπρασιών Christie's (Κρίστις). Η δημοπρασία έγινε στις 29 Οκτωβρίου 1998 στη Νέα Υόρκη και το χειρόγραφο πωλήθηκε έναντι 2.200.050 δολαρίων σε Αμερικανό συλλέκτη, του οποί ου η ταυτότητα παραμένει άγνωστη Τον Ιανουάριο του 1999 ο νέος ιδιοκτήτης παρέδωσε το χειρόγραφο στο Walters Art Museum (Μουσείο Τεχνών Βάλτερς) της Βαλτιμόρης για συντήρηση, επεξεργασία και επιστημονική μελέτη. Έκτοτε, έχει αρχίσει ένα πολύ σημαντικό έργο -χρηματοδοτούμενο εν μέρει από τον ίδιο τον ιδιοκτήτη- γύρω από το χειρόγραφο, με θεαματικά και ανέλπιστα, θα έλεγε κανείς, αποτελέσματα (Χριστιανίδης , 2007).

Τα σωζόμενα συγγράμματα του Αρχιμήδη

1) Περί σφαίρας και κυλίνδρου (2 βιβλία).
2) Κύκλου μέτρησις.
3) Περί κωνοειδέων και σφαροειδέων.
4) Περί ελίκων.
5) Επιπέδων ισορροπιών (2 βιβλία). Το έργο εμφανίζεται επίσης σε διάφορα χειρόγραφα με τους τίτλους Κέντρα βαρών επιπέδων και Μηχανικά.
6) Ψαμμίτης.
7) Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής.
8) Οχουμένων (2 βιβλία). (Ελλιπές. Μέρη του έργου σώζονται στη λατινική)
9) Στομάχιον. (Σώζεται μικρό απόσπασμα)
10) Περί των μηχανικών θεωρημάτων, προς Ερατοσθένη έφοδος. (Ελλιπές)
11) Βιβλίον λημμάτων. (Σώζεται στην αραβική)
12) Πρόβλημα βοεικόν.
13) Κατασκευή της πλευράς του εις κύκλον εγγεγραμμένου κανονικού επταγώνου. (Σώζεται στην αραβική)
14) Περί των επιψαυόντων κύκλων. (Σώζεται στην αραβική)
15) Ωρολόγιον. (Σώζεται στην αραβική)
16) Αρχαί της γεωμετρίας. (Σώζεται στην αραβική)

Τα απολεσθέντα συγγράμματα του Αρχιμήδη

1) Περί τριγώνων
2) Περί τετράπλευρων
3) Περί 13 ημικανονικών πολυέδρων
4) Αριθμητικά
5) Περί ζυγών
6) Κεντροβαρικά
7) Πλινθίδες και κύλινδροι
8) Κατοπτρικά
9) Ισοπεριμετρικά
10) Στοιχεία των μηχανικών (σώζεται μέρος υπό τον τίτλον Μηχανικά)
11) Ισορροπία
12) Σφαιροποιία (κατασκευή πλανηταρίων)
13) Στοιχεία επί των στηρίξεων (Στατική) (Πηγή διά τά υπ' αριθμ. 1-13 ελληνική. Ιδέ τόμ. Α', μέρος Α', σελ. 30-32,
14) Περί παραλλήλων γραμμών
15) Περί βαρύτητος και ελαφρότητος
16) Περί κοίλον παραβολικών καυστικών κατόπτρων
17) Προοπτική (Πηγή διά τά to' αριθμ. 14-17 αραβική. 'Ιδέ τόμ. Α', μέρος Α', σελ. 32)
18) Επισίδια Βιβλία
19) Βαρυουλκός, Υδροσκοπίαι, Πνευματική
20) Καύσις διά των κατόπτρων
21) Περί Αρχιτεκτονικής
22) Περί δρομόμετρων (Πηγή διά τά to' αριθμ. 11-22 ελληνική. 181 τόμ. Α', μέρος Α',σελ. 32*33)
23) Στοιχεία των Μαθηματικών
24) Περί τής διαμέτρου
25) Συγγράμματα εν επιτομή (Πηγή διά τά υπ' αριθμ. 2325,

αραβική.   Ιδέ τόμ. Α', μέρος Α',σελ. 33-34)

26) Λήμματα β' (Πηγή ό ίδιος ο Αρχιμήδης. Περί Όχουμένων, βιβλ . β', θεώρ. 6,σελ, 315)

27) Περί τετραγωνισμού του κύκλου

28) Δεδομένα Πηγή διά τα υπ' αριθμ. 27, 28, H. Suter, Das Methenatik Verzeichnis in FIHRIST κ.λ.π.)

Συμφωνα με τον Bell ο Αρχιμήδης δεν συνέθεσε ένα αριστούργημα αλλά πολλά. Η αυστηρά λιτή, λογική του έκθεση δεν δίνει καμία υπόδειξη για τη μέθοδο με την οποία έφθασε στα θαυμαστά του αποτελέσματα. Στο παλίμψηστο όμως περιέχεται η ΄χαμένη' πραγματεία του Αρχιμήδη που την απηύθυνε στον φίλο του Ερατοσθένη: *Περί των Μηχανικών Θεωρημάτων Προς Ερατοσθένη Έφοδος*. Σ' αυτήν ο Αρχιμήδης εξηγεί πως συγκρίνοντας ποικιλοτρόπως ένα σχήμα ή στερεό με άγνωστο εμβαδόν ή όγκο, με ένα γνωστό, οδηγούνταν στη γνώση αυτού που αναζητούσε. Στη συνέχεια ήταν σχετικά εύκολο για αυτόν να προχωρήσει και σε μαθηματική απόδειξη. Με λίγα λόγια χρησιμοποιούσε τη Μηχανική για να φτάσει στα Μαθηματικά..

Ο Αρχιμήδης αξιοποίησε με τη μεγαλύτερη δυνατή αυστηρότητα τη μέθοδο της εξάντλησης και έδωσε τις πιο πολλές, τις πιο πρωτότυπες και τις πιο εκπληκτικές εφαρμογές της σε προβλήματα απειροστικού λογισμού. Ας δούμε τη μεθοδολογία αυτή σε τρεις από τις πραγματείες του Αρχιμήδη:

ι)Κύκλου Μέτρησις, ιι) Τετραγωνισμός της Παραβολής και ιιι) Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου.

Κύκλου Μέτρησις

Ιστορικά από τα πού παλιά χρόνια είχαν γίνει προσπάθειες για τη μέτρηση της γήινης διαμέτρου. Από παρατηρήσεις προέκυψε ότι ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρό του παραμένει σταθερός για όλους τους κύκλους. Ο σταθερός αυτός αριθμός συμβολίστηκε με το γράμμα π από τα αρχικά της λέξης περίμετρος. Ήταν γνωστό ότι το εμβαδόν του κύκλου δινόταν από τον τύπο $E = \pi_1 r^2$ για κάποια σταθερά π_1, και το μήκος της περιφέρειας από τον τύπο $S = \pi_2 \cdot d$, όπου d η διάμετρός του. Δεν είναι βέβαιο ποιος ήταν ο πρώτος που σκέφτηκε ότι $\pi_1 = \pi_2$.Εκείνος που έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη ήταν ο Αρχιμήδης στην εργασία του Κύκλου Μέτρησις (Edwards, 1979).

Το σωζόμενο έργο του Αρχιμήδη Κύκλου Μέτρησις περιλαμβάνει τρία θεωρήματα :

Α)Αν σε κύκλο περιγραφεί τετράγωνο, τότε , ο λόγος του εμβαδού του κύκλου προς το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $\frac{11}{14}$

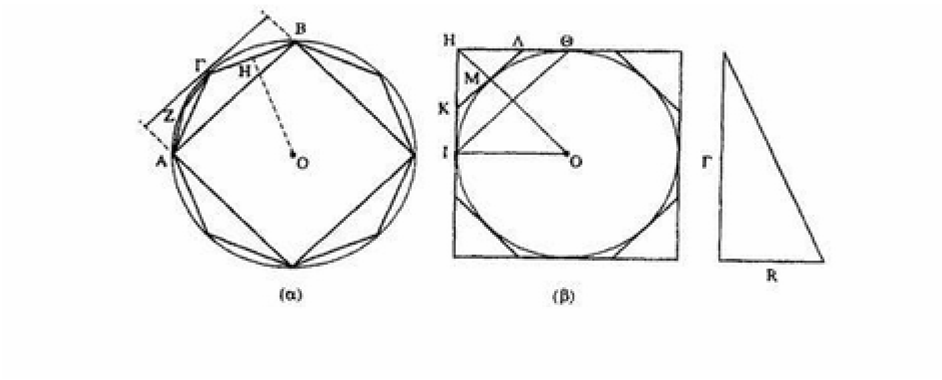
Β)Ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου (το π) είναι μικρότερος του $3\frac{1}{7}$ και μεγαλύτερος του $3\frac{10}{71}$

Γ)Το εμβαδόν του κύκλου ισούται με το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετος είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και η άλλη ίση με την περιφέρεια αυτού.

Στην απόδειξη της τρίτης πρότασης χρησιμοποιεί τη μέθοδο της εξάντλησης για να συγκρίνει ευθύγραμμα τμήματα με καμπυλόγραμμα. Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος υπολογίζεται από τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σχημάτων που προσεγγίζουν την καμπύλη, καθώς το πλήθος των πλευρών τους ολοένα αυξάνεται. Επίσης στην απόδειξη αυτή αποδεικνύεται για πρώτη φορά ότι ο κύκλος ισούται με ένα ευθύγραμμο σχήμα οπότε και είναι εφικτός ο τετραγωνισμός του. Ωστόσο η κατασκευή του ισοδύναμου αυτού τριγώνου είναι όπως γνωρίζουμε αδύνατη με ευκλείδειο τρόπο. Η απόδειξη σε σύγχρονη ορολογία είναι η εξής:

Έστω Ο το κέντρο του κύκλου με εμβαδόν Ε. Εγγράφουμε στον κύκλο τετράγωνο με εμβαδόν E_1.Τότε $E_1 > \frac{1}{2}E$. Θέτουμε: $x = E - E_1$.

Εγγράφουμε στον κύκλο κανονικό οκτάγωνο, όπως φαίνεται στο σχήμα (α) και έστω E_2 το εμβαδόν του.



Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΒ είναι μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του κυκλικού τμήματος ΑΓΒ, οπότε αν x_2 είναι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων τριγώνων που σχηματίζονται από την εγγραφή του κανονικού οκταγώνου, θα ισχύει :

$x_2 = 4(AB\Gamma) > \frac{1}{2}(E - E_1)$.

Στη συνέχεια εγγράφουμε στον κύκλο κανονικό δεκαεξάγωνο με εμβαδόν E_3.

Έστω $x_3 = 8(AZ\Gamma)$. Τότε $x_3 > \frac{1}{2}(E - E_2)$.

Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία εγγράφοντας στον κύκλο κάθε φορά ένα κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών από τον αριθμό των πλευρών που έχει εγγραφεί προηγουμένως και παρατηρούμε ότι :

Από το εμβαδόν Ε του κύκλου αφαιρούμε αρχικά το εμβαδόν $E_1 = x_1$ του τετραγώνου με $E_1 > \frac{1}{2}E$. Στη συνέχεια από τη διαφορά $E - E_1$ αφαιρούμε το x_2 με $x_2 > \frac{1}{2}(E - E_1)$. Από τη διαφορά $(E - E_1) - x_2 = E - E_2$ αφαιρούμε το εμβαδόν x_3 με $x_3 > \frac{1}{2}(E - E_2)$ κ.ο.κ. Άρα μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της εξάντλησης.

Επειδή:

x_2=4(ΑΒΓ)=E_2-E_1, x_3=8(ΑΖΓ)=E_3-E_2,....., x_ν=E_ν–$E_{\nu-1}$, θέτοντας E_1=x_1, θα έχουμε τις διαφορές Ε-E_1,(Ε-E_1)-x_2=Ε-E_2,(Ε-E_2)-x_3=Ε-E_3,......,Ε-E_ν. Επομένως εφαρμόζοντας τη μέθοδο της εξάντλησης μπορούμε να κάνουμε τη διαφορά Ε-E_ν όσο θέλουμε μικρή.

Στη συνέχεια περιγράφουμε στον κύκλο τετράγωνο εμβαδού E_1'. Τότε Ε< E_1' και Ε>$\frac{1}{2}E_1'$. Έστω Μ το μέσον του τόξου ΙΘ (σχήμα β). Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Μ, η οποία τέμνει τις πλευρές ΗΙ και ΗΘ του τετραγώνου στα σημεία Κ και Λ. Τότε η ΚΛ είναι κάθετη στην ΟΗ και άρα ΗΛ>ΜΛ=ΛΘ και το εμβαδόν του τριγώνου ΗΚΛ είναι μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του καμπυλόγραμμου σχήματος ΗΙΜΘ.

Θέτουμε x_2'=4(ΗΚΛ) και E_2'το εμβαδόν του κανονικού οκταγώνου περιγεγραμμένο στον κύκλο (σχήμα (β)). Τότε x_2'= E_1'-E_2' και

x_2' =4(ΗΚΛ)> $\frac{1}{2}$(E_1'-Ε).

Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία περιγράφοντας στον κύκλο πολύγωνα που το καθένα έχει πλευρές διπλάσιες από το προηγούμενό του. Αν συμβολίσουμε με E_1',E_2',.....,E_ν' τα εμβαδά αυτών των πολυγώνων και εφαρμόσουμε τη μέθοδο της εξάντλησης , τότε μπορούμε να κάνουμε τη διαφορά E_ν'- Ε όσο θέλουμε μικρή.

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι Ε=E_τ, όπου E_τείναι το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές R και Γ.

Έστω ότι Ε> E_τ.Αν Ε- E_τ=ε, τότε κάνουμε τη διαφορά Ε- E_ν μικρότερη του ε και έχουμε :

Ε-E_ν<ε=Ε- E_τ, οπότε E_τ<E_ν.

Όμως το εμβαδόν του πολυγώνου με ν πλευρές είναι $E_\nu = \frac{1}{2}\Pi_\nu \cdot \delta_\nu$, όπου Π_ν είναι η περίμετρος του εγγεγραμμένου πολυγώνου και δ_ν η απόσταση της πλευράς του από το κέντρο Ο του κύκλου. Επειδή $\Pi_\nu < \Gamma$ και $\delta_\nu < R$, θα είναι $E_\nu = \frac{1}{2}\Pi_\nu \cdot \delta_\nu < \frac{1}{2}\Gamma \cdot R = E_\tau$, το οποίο είναι αντίθετο στη σχέση $E_\tau < E_\nu$.

Έστω ότι $E < E_\tau$. Αν $E_\tau - E = \varepsilon$, τότε κάνουμε τη διαφορά $E_\nu' - E$ μικρότερη από το ε και έχουμε:

$E_\nu' - E < \varepsilon = E_\tau - E$, το οποίο δίνει $E_\nu' < E_\tau$.

Αλλά $E_\nu' = \frac{1}{2}\Pi_\nu' \cdot \delta_\nu'$, όπου Π_ν' η περίμετρος του περιγεγραμμένου πολυγώνου και δ_ν' η απόσταση της πλευράς από το κέντρο Ο του κύκλου. Επειδή $\Pi_\nu' > \Gamma$ και $\delta_\nu' > R$, θα είναι $E_\nu' = \frac{1}{2}\Pi_\nu' \cdot \delta_\nu' > \frac{1}{2}\Gamma \cdot R = E_\tau$ το οποίο είναι αντίθετο με τη σχέση $E_\nu' < E_\tau$.

Αποδείχθηκε ότι το εμβαδόν του κύκλου δεν μπορεί να είναι ούτε μικρότερο ούτε μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου. Επομένως :

$E = E_\tau = \frac{1}{2}\Gamma \cdot R = \frac{1}{2}(2\pi R) \cdot R = \pi R^2$.

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου, ο Αρχιμήδης ακολουθεί μία χρονοβόρα αλλά ασφαλή διαδικασία. Εγγράφει στον κύκλο πολύγωνα, αρχικά ένα τετράγωνο, μετά ένα οκτάγωνο, κατόπιν ένα δεκαεξάγωνο και στη συνέχεια κανονικά πολύγωνα , που το καθένα έχει διπλάσιο αριθμό πλευρών από το προηγούμενό του. Έτσι δημιουργεί μία ακολουθία εμβαδών

$E_1, E_2, E_3, ..., E_\nu, ...$ με $E_1 < E_2 < E_3 < .... < E_\nu < ...$ και τέτοια ώστε η διαφορά $E - E_\nu$ να μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή. Δηλαδή έχουμε μία ακολουθία εμβαδών , αύξουσα, άνω φραγμένη από το εμβαδόν Ε του κύκλου (εφόσον αυτό υπάρχει) και τέτοια ώστε :

Για κάθε ε >0 οσοδήποτε μικρό , θα υπάρχει κάποιος δείκτης ν_0, ο οποίος εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε να ισχύει $|E - E_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu > \nu_0$.

Με σύγχρονο συμβολισμό θα λέγαμε ότι $\lim\limits_{n->\infty} E_{\nu}$ =E.

Ο Αρχιμήδης δεν αρκείται όμως στην ακολουθία αυτή , αλλά συνεχίζει τη διαδικασία περιγράφοντας στον κύκλο κανονικά πολύγωνα, αρχικά ένα τετράγωνο και στη συνέχεια κανονικά πολύγωνα που το καθένα έχει διπλάσιο αριθμό πλευρών από το προηγούμενό του. Δημιουργεί έτσι μία δεύτερη ακολουθία εμβαδών :

$E_1', E_2', E_3', ..., E_{\nu}', ...$ με $E_1' > E_2' > E_3' > .... > E_{\nu}' > ...$ κάτω φραγμένη από το εμβαδόν Ε του κύκλου, και τέτοια ώστε η διαφορά E_{ν}'-E να μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή.

Έτσι ο Αρχιμήδης δημιούργησε δύο ακολουθίες (E_{ν}) και (E_{ν}'), την πρώτη αύξουσα με άνω φράγμα το Ε και τη δεύτερη φθίνουσα με κάτω φράγμα το Ε όπως δείχνουμε στο παρακάτω σχήμα:

Όλη αυτή η διαδικασία είναι αυτή που χρησιμοποιούμε σήμερα για να αποδείξουμε ότι το εμβαδόν Ε του κύκλου υπάρχει και είναι το κοινό όριο των δύο παραπάνω ακολουθιών. Δηλαδή:

E= $\lim\limits_{n->\infty} E_{\nu} = \lim\limits_{n->\infty} E_{\nu}'$.

Ο Αρχιμήδης για να αποφύγει την χρήση της έννοιας του ορίου, καθώς η έννοια αυτή ήταν άγνωστη στους αρχαίους Έλληνες, συγκρίνει το εμβαδόν Ε του κύκλου με το εμβαδόν E_{τ} του ορθογωνίου τριγώνου και με τη βοήθεια της μεθόδου της εξάντλησης και των παραπάνω ακολουθιών αποδεικνύει ότι οι περιπτώσεις E_{τ}<Ε και E_{τ}>Ε είναι αδύνατες. Άρα Ε=E_{τ}.

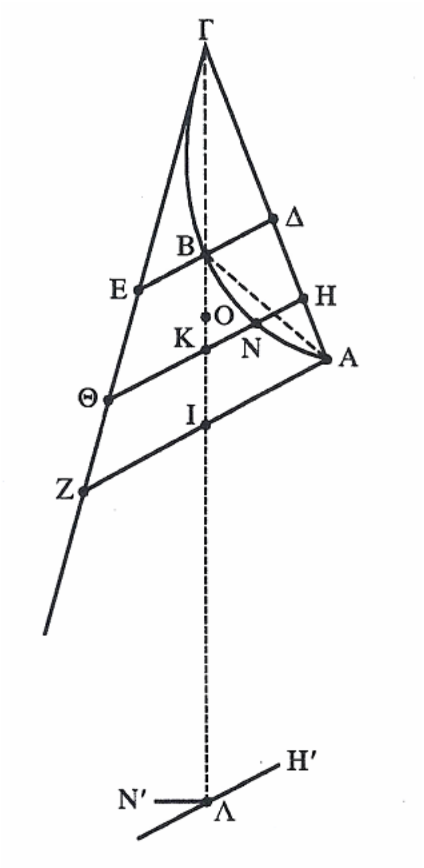
Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο Αντιφών ο σοφιστής ($5^{ος}$ με $4^{ος}$ π.Χ. αιώνας) είχε υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου κατασκευάζοντας μόνο την ακολουθία $E_1, E_2, E_3, ..., E_{\nu}, ...$των εγγεγραμμένων πολυγώνων. Ο Αρχιμήδης δεν αρκέστηκε στην ακολουθία αυτή, αλλά κατασκεύασε και την ακολουθία των περιγεγραμμένων πολυγώνων. Έτσι κάνει την απόδειξη πλήρη, αποδεικνύοντας ακόμα και την ύπαρξη του εμβαδού Ε.

Ανεξάρτητα επομένως από το αν ο Αρχιμήδης αναφέρεται ή όχι στην έννοια του ορίου ακολουθίας, η διαδικασία που ακολουθεί οδηγεί στον καθορισμό αυτής της έννοιας. Η έννοια του ορίου ακολουθίας είναι από τις βασικές έννοιες του ολοκληρωτικού λογισμού (Εξαρχάκος, 1993).

Τετραγωνισμός της παραβολής

Έστω το τμήμα ΑΒΓ που περιέχεται μεταξύ της ευθείας και της παραβολής ΑΒΓ. Ας τμηθεί η ΑΓ στο μέσον, στο Δ, ας αχθεί η ΔΒΕ παράλληλη προς τη διάμετρον και ας αχθούν οι ΑΒ, ΒΓ. Λέγω ότι το τμήμα ΑΒΓ είναι ένα και ένα τρίτο του τριγώνου ΑΒΓ.(Το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος είναι ίσον με τα 4/3 του εμβαδού του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και την ίδια κορυφή).

Απόδειξη (μηχανική)



Έστω το παραβολικό τμήμα ΑΒΓ και Δ το μέσον της ΑΓ. Η διάμετρος ΔΒΕ της παραβολής από το Δ (δηλαδή μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονά της) τέμνει την εφαπτομένη της παραβολής στο Γ, στο σημείο Ε. Σε αυτό το σημείο ο Αρχιμήδης αναφέρεται στα κωνικά του Ευκλείδη και ισχυρίζεται ότι ΒΔ=ΕΒ, δίχως αυτή η απόδειξη του Ευκλείδη να είναι γνωστή. Από το Α φέρνει την ΑΖ // ΔΕ που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ι. Από τα όμοια τρίγωνα

ΓΖΑ και ΓΕΔ και την ισότητα ΒΔ=ΕΒ προκύπτει ότι ΖΙ=ΙΑ. Στη συνέχεια προεκτείνει την ΙΓ κατά τμήμα ΙΛ=ΙΓ (1).

Αν ΗΚΘ είναι τυχαία διάμετρος της παραβολής, από τα όμοια τρίγωνα ΓΘΗ και ΓΖΑ και την ισότητα ΖΙ=ΙΑ προκύπτει ότι ΘΚ=ΚΗ. Στη συνέχεια συγκρίνει το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος με το εμβαδόν του τριγώνου ΓΖΑ. Θεωρεί *το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος ως άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων* , όπως του ΝΗ, και *το εμβαδόν του τριγώνου* ΑΖΓ *ως άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων* (Kline, 1972) όπως του ΘΗ. Ισχυρίζεται ότι :

ΗΘ:ΗΝ=ΑΓ:ΑΗ=ΙΓ:ΚΙ=ΙΛ:ΚΙ και άρα

$\text{ΙΛ}\cdot\text{ΗΝ}=\text{ΚΙ}\cdot\text{ΘΗ}$. (2)

Θεωρεί το τμήμα ΓΛ ως μοχλό με υπομόχλιο το σημείο Ι και βραχίονες, τα τμήματα ΙΛ,ΙΚ. Εφαρμόζει το νόμο ισορροπίας των μοχλών, σύμφωνα με τον οποίον, αν δύο βάρη B_1, B_2 εφαρμοστούν στα σημεία Κ, Λ και Ι είναι το σημείο στήριξης, αυτά ισορροπούν όταν:

$\frac{B_1}{B_2}=\frac{\text{ΙΛ}}{\text{ΚΙ}}$. (3)

Ο Αρχιμήδης θεωρεί τα ΝΗ και ΗΘ βάρη τα οποία τα τοποθετεί στα σημεία Λ και Κ αντίστοιχα.. Αυτά θα ισορροπούν λόγω των (2) και (3). Όμως κάθε ευθεία όπως το ΘΗ, συγκεντρώνεται στο μέσον του που είναι και το κέντρο βάρους του ευθύγραμμου τμήματος. Έτσι συμπεραίνει ότι το άθροισμα όλων των ευθειών όπως το ΘΗ, που το καθένα τοποθετείται στο κέντρο βάρους του ισοδυναμεί με το τρίγωνο ΓΖΑ τοποθετημένο στο κέντρο βάρους του.

Στην πραγματεία του *«Επί της ισορροπίας των επιπέδων»* είχε αποδείξει ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου θα είναι το σημείο Ο επί της ευθείας ΓΙ ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$\text{ΙΟ}=\frac{1}{3}\cdot\text{ΙΓ}$. (4)

Από το νόμο ισορροπίας των μοχλών προκύπτει ότι

$\text{ΙΟ}\cdot$εμβ(ΓΖΑ)=$\text{ΙΛ}\cdot$εμβ(παραβολικού τμήματος) και από την (4) είναι

$\frac{1}{3} \cdot$ ΙΓ $\cdot$ εμβ(ΓΖΑ)=ΙΛ $\cdot$ εμβ(παραβολικού τμήματος).

Όμως ΙΓ=ΙΛ άρα $\frac{1}{3} \cdot$ εμβ(ΓΖΑ)= εμβ(παραβολικού τμήματος).

Είναι εμβ(ΓΖΑ)=2εμβ(ΓΙΑ)=2 $\cdot$ εμβ(ΑΒΓ)=4εμβ(ΑΒΓ).

Έτσι εμβ(παραβολικού τμήματος)=4/3 $\cdot$ εμβ(ΑΒΓ) (Γιαννακούλιας, 2007)

Η ευρετική μέθοδος του Αρχιμήδη ήταν αυτή της ισορροπίας. Για τον υπολογισμό των εμβαδών ή των όγκων έκοβε την επιφάνεια ή το σώμα σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό, λεπτών, παράλληλων μεταξύ των λωρίδων (ταινιών), που τα φανταζόταν να είναι κρεμασμένα από το άκρο ενός δοσμένου μοχλού, ώστε να ισορροπεί με ένα σχήμα με γνωστό το κέντρο βάρους του . Στην ουσία ο Αρχιμήδης ισορροπούσε το γνωστό εμβαδόν με έναν άγνωστο, οπότε η θέση του υπομόχλιου καθόριζε τη σχέση των μεγεθών τους (Γιαννακούλιας,2007).

Είναι πολύ σημαντικό να σημειώσουμε ότι ο Αρχιμήδης δεν αναγνωρίζει το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε με την εφαρμογή αυτής της μεθόδου ως έγκυρο, αυστηρά αποδεδειγμένο αποτέλεσμα. Θεωρεί ότι η μέθοδος είναι απλώς ευρετική. Αποσκοπεί στην ανακάλυψη και μόνον του αποτελέσματος. Δεν είναι μέθοδος απόδειξης. Γι αυτό και σε μία άλλη πραγματεία με τον τίτλο *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής* (δηλαδή *Τετραγωνισμός παραβολής*) επανέρχεται στο ίδιο θεώρημα και δίνει δύο αποδείξεις, μία μηχανική και μία γεωμετρική.

Το ερώτημα που εγείρεται φυσιολογικά είναι το εξής. Γιατί ο Αρχιμήδης θεωρεί ότι η περιγραφείσα ευρετική μέθοδος δεν είναι επαρκής για να θεωρηθεί το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε έγκυρο από μαθηματικής πλευράς; Ο Χριστιανίδης (2003) αναφέρει:

«Μια αποκωδικοποίηση της μεθόδου δείχνει ότι αυτή χαρακτηρίζεται από την χρησιμοποίηση δύο διαφορετικού χαρακτήρα επιχειρημάτων.

1. Πρώτα –πρώτα χρησιμοποιεί συλλογισμούς από τη Μηχανική και πιο συγκεκριμένα από την Στατική. Θεωρεί τα γεωμετρικά σχήματα κρέμονται από τη φάλαγγα ενός νοητού ζυγού με τρόπο ώστε ο ζυγός να ισορροπεί και διατυπώνει τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να υπάρχει αυτή η ισορροπία.

2. Επιπλέον θεωρεί ότι ένα επίπεδο σχήμα δομείται από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται σε ορισμένη διεύθυνση και έχουν τα άκρα τους στην περιφέρεια του σχήματος. Ένα επίπεδο σχήμα λοιπόν, μπορεί να αποδομηθεί σε τέτοιες παράλληλες χορδές με ορισμένα μήκη και να δομηθεί εκ νέου από αυτές. Το άθροισμα των ευθυγράμμων τμημάτων δίνει την επιφάνεια του σχήματος. Θα ονομάσουμε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα «ΑΔΙΑΙΡΕΤΑ». Η αντίληψη αυτή επεκτείνεται και στην περίπτωση των σχημάτων του χώρου, τα οποία είναι δυνατόν να αποδομηθούν σε παράλληλες επίπεδες τομές.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα δύο επιχειρήματα τα οποία χρησιμοποιούνται στη συλλογιστική που αναπτύσσει ο Αρχιμήδης κατά την εφαρμογή της μεθόδου προκύπτει αβίαστα το συμπέρασμα ότι: Η έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας της μεθόδου οφείλεται κατά τον Αρχιμήδη αποκλειστικά και μόνο στην χρήση των αδιαιρέτων. Αντίθετα η χρησιμοποίηση αντλημένων από την Μηχανική (στατική) επιχειρημάτων δεν δημιουργεί απολύτως κανένα πρόβλημα. Άλλωστε η μία από τις δύο αυστηρές αποδείξεις του ίδιου θεωρήματος που δίνει ο Αρχιμήδης στον τετραγωνισμό ορθογωνίου κώνου τομής είναι Μηχανικού χαρακτήρα.

Το πρόβλημα λοιπόν βρίσκεται στη χρήση των αδιαιρέτων. Πράγματι η αποδόμηση ενός σχήματος επιπέδου σε «αδιαίρετα »[ή ενός στερεού σε παράλληλες επίπεδες τομές] και η εν συνεχεία αναδόμησή του από όλα αυτά δίνει αφορμή να εμφανιστεί αμέσως ένα παράδοξο.

Συγκεκριμένα: Για να μπορεί να εφαρμοστεί η συνθήκη ισορροπίας του ζυγού , οι γραμμές στις οποίες αποδομείται το επίπεδο σχήμα πρέπει, προφανώς να έχουν βάρος. Αν θεωρηθεί όμως ότι το εκάστοτε σχήμα συγκροτείται από άπειρες γραμμές (ο Αρχιμήδης μιλάει για « όλες» τις γραμμές) κάθε γραμμή πρέπει να έχει κατ ΄ανάγκη μηδενικό πάχος και άρα, μηδενικό βάρος. Διαφορετικά αν δηλαδή το πάχος των γραμμών δεν ήταν μηδενικό, το καμπύλο τμήμα της περιφέρειας του παραβολικού χωρίου δεν θα ήταν στην πραγματικότητα καμπύλο αλλά βαθμοειδές.

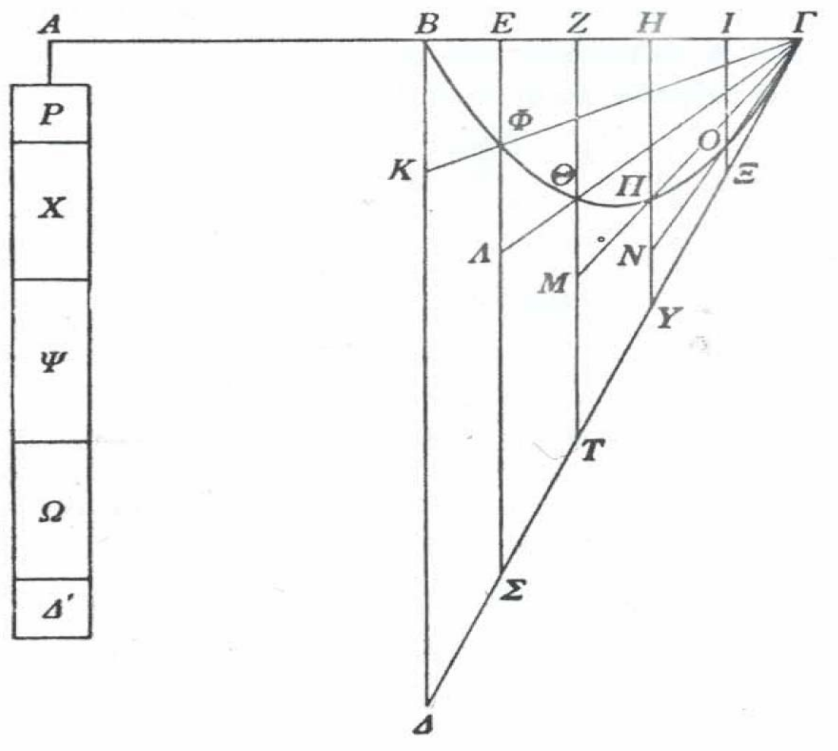
Αυτό είναι το μαθηματικό παράδοξο που υπάρχει στην περιγραφείσα μέθοδο. Ο Αρχιμήδης έχει πλήρη επίγνωση του προβλήματος αυτού και γι αυτό θεωρεί ότι η μέθοδος δεν είναι στέρεα θεμελιωμένη από μαθηματικής απόψεως και επομένως δεν μπορεί να εκληφθεί ως αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος. Η μέθοδος είναι γι αυτόν μόνο ευρετική.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο Αρχιμήδης, όπως και πριν από αυτόν ο Δημόκριτος, χρησιμοποίησαν μεθόδους που κατά πάσα πιθανότητα ενέπνευσαν αργότερα τον Cavalieri να αναπτύξει τη θεωρία των αδιαίρετων σωμάτων για τον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων σχημάτων και όγκων στερεών (Γιαννακούλιας, 2007).

Μηχανική απόδειξη

Ο παραγωγικός συλλογισμός είναι ουσιαστικά ο ίδιος όπως στη Μέθοδο, ο Αρχιμήδης όμως τον μετατρέπει σε αυστηρή απόδειξη με τη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης.

Έστω ένα παραβολικό χωρίο το οποίο σχηματίζεται από μία ευθεία κάθετη στον άξονα, την ΒΓ. Χωρίζουμε την ΒΓ σε πέντε ίσα μέρη και ονομάζουμε τα σημεία αυτά Ε, Ζ, Η και Ι αντίστοιχα. Από τα σημεία αυτά γράφουμε ευθείες παράλληλες στον άξονα τις ΕΦ, ΖΘ, ΗΠ και ΙΟ όπου Φ, Θ, Π και Ο τα σημεία τομής των ευθειών αυτών με το παραβολικό χωρίο. Στην συνέχεια, γράφουμε την εφαπτομένη του παραβολικού χωρίου στο σημείο του Γ και επιπλέον γράφουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα με αρχή το σημείο Β. Η ευθεία αυτή τέμνει την προέκταση της εφαπτομένης στο σημείο Δ. Αντίστοιχα, οι ευθείες ΕΦ, ΖΘ, ΗΠ και ΙΟ τέμνουν την εφαπτομένη στα σημεία Σ, Τ, Υ και Ξ. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζονται οι παράλληλες στον άξονα ευθείες: ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ,ΙΞ.



Τώρα, ενώνουμε το σημείο Γ με τα σημεία Φ, Θ, Π και Ο και προεκτείνουμε τις ευθείες αυτές που σχηματίστηκαν. Έτσι, η προέκταση της ΓΦ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Κ, η προέκταση της ΓΘ τέμνει την ΕΣ στο σημείο Λ, η προέκταση της ΓΠ τέμνει την ΖΤ στο σημείο Μ και τέλος η προέκταση της ΓΟ τέμνει την ΗΥ στο σημείο Ν. Σε αυτό εδώ το σημείο διατυπώνεται η άποψη σύμφωνα με την οποία το τρίγωνο ΒΓΔ είναι μικρότερο από το τριπλάσιο του αθροίσματος των τραπεζίων ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ, ΝΗΙΟ και του τριγώνου ΞΙΓ και μεγαλύτερο από το τριπλάσιο του αθροίσματος των τραπεζίων ΦΕΖΘ, ΘΖΗΠ, ΠΗΙΟ και του τριγώνου ΙΟΓ.

Ο Αρχιμήδης στην προσπάθειά του να αποδείξει τον ισχυρισμό αυτό προέκτεινε την ευθεία ΓΒ και πήρε πάνω σε αυτήν ένα σημείο, το Α τέτοιο ώστε ΒΑ = ΒΓ. Θεωρώντας ως μοχλό το ΑΓ και με υπομόχλιο στο Β, τοποθέτησε τα εμβαδά Ρ, Χ, Ψ, Ω και Δ΄ στο άκρο Α του βραχίονα όπου εκεί ισορροπούσαν με τα τραπέζια ΔΒΕΣ, ΣΕΖΤ, ΤΖΗΥ, ΥΗΙΞ και το τρίγωνο ΞΙΓ αντίστοιχα. Επομένως, το άθροισμα όλων αυτών των εμβαδών θα ισορροπεί με το τρίγωνο ΒΓΔ και αυτό συνεπάγεται ότι θα ισούται με το 1/3 του εμβαδού του.

Από ιδιότητες της παραβολής, τις οποίες ο Αρχιμήδης δεν παραθέτει αφού τις θεωρεί γνωστές, ισχύει ότι:

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΕ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΕ}} = \frac{\text{ΕΣ}}{\text{ΕΦ}} = \frac{\text{τραπέζιο(ΔΒΕΣ)}}{\text{τραπέζιο(ΚΒΕΦ)}},$$

αφού $\dfrac{\text{τραπέζιο(ΔΒΕΣ)}}{\text{τραπέζιο(ΚΒΕΦ)}} = \dfrac{\dfrac{(\text{ΔΒ}+\text{ΕΣ})}{2}\cdot\text{ΒΕ}}{\dfrac{(\text{ΚΒ}+\text{ΕΦ})}{2}\cdot\text{ΒΕ}} = \dfrac{\text{ΔΒ}+\text{ΕΣ}}{\text{ΚΒ}+\text{ΕΦ}}$ και από ιδιότητες αναλογιών είναι: $\dfrac{\text{ΕΣ}}{\text{ΕΦ}} = \dfrac{\text{ΔΒ}}{\text{ΚΒ}} = \dfrac{\text{ΕΣ}+\text{ΔΒ}}{\text{ΕΦ}+\text{ΚΒ}}$.

Όμοια παίρνει:

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΖ}} = \frac{\text{τραπέζιο(ΣΕΖΤ)}}{\text{τραπέζιο(ΛΕΖΘ)}}$$

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΗ}} = \frac{\text{τραπέζιο(ΤΖΗΥ)}}{\text{τραπέζιο(ΜΖΗΠ)}}$$

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΙ}} = \frac{\text{τραπέζιο(ΥΗΙΞ)}}{\text{τραπέζιο(ΝΗΙΟ)}}$$

Εάν λοιπόν τα τραπέζια ΔΒΕΣ, ΣΕΖΤ, ΤΖΗΥ και ΥΗΙΞ είναι τοποθετημένα έτσι ώστε να κρατιούνται από τις δεξιές κορυφές τους Ε, Ζ, Η και Ι τότε θα ισορροπούν με τα τραπέζια ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ αντίστοιχα όταν αυτά κρατιούνται από το Α.

Όμως εάν, αντί από αυτά τα σημεία, κρατιούνται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ και ΙΓ τότε θα ισορροπούν με τα Ρ, Χ, Ψ και Ω αντίστοιχα. Δηλαδή, τα εμβαδά Ρ, Χ, Ψ και Ω θα είναι μικρότερα από τα τραπέζια ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ. Άρα, το άθροισμα των εμβαδών Ρ, Χ, Ψ, Ω και Δ΄ θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των τραπεζίων ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ και του τριγώνου ΙΞΓ.

Αφού όμως το άθροισμα των εμβαδών Ρ, Χ, Ψ, Ω και Δ΄ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του τριγώνου ΒΓΔ τότε το $\frac{1}{3}$ αυτού του τριγώνου θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των τραπεζίων ΚΒΕΦ, ΛΕΖΘ, ΜΖΗΠ και ΝΗΙΟ και του τριγώνου ΙΞΓ έξω από το παραβολικό χωρίο. Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς σκέψη, αποδεικνύει ότι το $\frac{1}{3}$ του τριγώνου ΒΓΔ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τραπεζίων ΦΕΖΘ, ΘΖΗΠ, ΠΗΙΟ και του τριγώνου ΙΓΟ, εσωτερικά της παραβολής. Έτσι ολοκληρώνεται το μηχανικό μέρος της απόδειξης.

Η διαφορά ανάμεσα στην πρώτη σειρά των τραπεζίων και το τρίγωνο και στη δεύτερη, ισούται με το άθροισμα των τραπεζίων ΒΦ,ΦΘ,ΘΠ,ΠΟ και του τριγώνου ΓΟΞ, από το εσωτερικό του οποίου περνά η παραβολή. Αλλά αυτό το άθροισμα ισούται ακριβώς με το τρίγωνο ΒΓΚ, το οποίο είναι οσοδήποτε μικρό μέρος τριγώνου ΒΓΔ (στην περίπτωσή μας το 1/5).

Τώρα ακολουθεί η απόδειξη με τη «μέθοδο της εξάντλησης» την οποία μπορούμε να παρουσιάσουμε ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος το συμβολίζουμε με s και το $\frac{1}{3}$ του τριγώνου ΒΓΔ με z. Ο Αρχιμήδης τοποθετεί το s μεταξύ των εμβαδών s_1 και s_2 και αποδεικνύει, χρησιμοποιώντας όπως συνήθιζε έναν από τους μηχανικούς του τρόπους, ότι και το z είναι μεταξύ των δύο αυτών εμβαδών s_1 και s_2. Για τα εμβαδά αυτά ισχύει ότι η διαφορά τους s_1 - s_2 είναι ίση με ένα οσοδήποτε μικρό μέρος του τριγώνου ΒΓΔ. Δηλαδή ισχύουν οι τρεις παρακάτω σχέσεις:

1) $s_1 > s > s_2$

2) $s_1 > z > s_2$

3) $s_1 - s_2 = \varepsilon$

Έστω ότι το s είναι μεγαλύτερο από το z, δηλαδή έστω ότι $s > z$. Διαλέγουμε ένα ε μικρότερο από την διαφορά s - z, δηλαδή $\varepsilon < s - z$.

Τότε ισχύει ότι: $s - z > \varepsilon$ => λόγω της (3)

$s - z > s_1 - s_2$ =>

$s > z + (s_1 - s_2)$ => λόγω της (2)

$s > s_2 + (s_1 - s_2)$ =>

$s > s_1$.

Η τελευταία σχέση στην οποία καταλήξαμε έρχεται σε αντίθεση με την σχέση (1) και δεν μπορεί να ισχύει. Άρα, οδηγηθήκαμε σε άτοπο.

Έστω τώρα ότι το s είναι μικρότερο από το z, δηλαδή έστω ότι $s < z$.

Διαλέγουμε ένα ε μικρότερο από την διαφορά s - z, δηλαδή $\varepsilon < z - s$. Τότε ισχύει ότι: $z - s > \varepsilon$ => (λόγω της 3)

$z - s > s_1 - s_2$ =>

$z > s + (s_1 - s_2)$ => (λόγω της 2)

$z > s_2 + (s_1 - s_2)$ =>

$z > s_1$

Η τελευταία σχέση στην οποία καταλήξαμε έρχεται σε αντίθεση με την σχέση (2) και δεν μπορεί να ισχύει. Άρα, οδηγηθήκαμε σε άτοπο (Van der Waerden, 2000).

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τις δύο αυτές αποδείξεις .Στην πρώτη απόδειξη το εμβαδόν Ε «σαρώνεται» με ευθύγραμμα τμήματα (που δεν συμφωνεί με τη σύγχρονη άποψη για το ολοκλήρωμα), ενώ στη δεύτερη το Ε «εγκλωβίζεται» ανάμεσα στα δύο εμβαδά E_1, E_2 που αντιστοιχεί στο σημερινό ορισμό του ολοκληρώματος με το άνω και κάτω άθροισμα. Επίσης στην πρώτη απόδειξη δεν ανακύπτει θέμα για άμεση ή έστω έμμεση αναφορά στο όριο, ενώ στη δεύτερη το τελευταίο βήμα της απόδειξης υποκαθιστά μια διαδικασία ορίου που εμφανίζεται στο προσκήνιο ακριβώς επειδή η διαδικασία στηρίζεται στη διαδοχική διαίρεση του ΒΓ σε όλο και περισσότερα ίσα μεταξύ τους τμήματα και σε κάθε διαίρεση η διαφορά του κάτω από το άνω άθροισμα είναι ένα άθροισμα εμβαδών πεπερασμένου πλήθους τραπεζίων ή τριγώνων που ισούται με ένα εμβαδόν το οποίο το οποίο «τείνει στο μηδέν» όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων διαίρεσης του ΒΓ

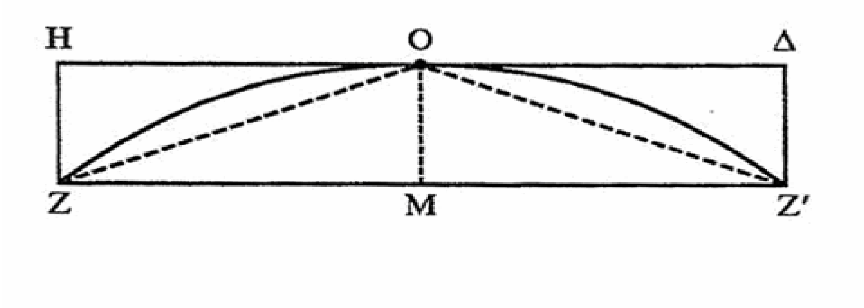
.

Γεωμετρική απόδειξη

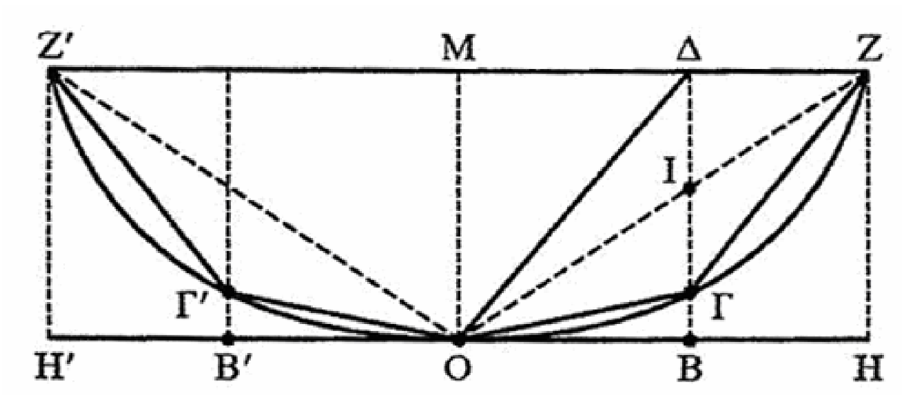
(με τη μέθοδο της εξάντλησης)

Ισχυρισμός: Το εμβαδόν Ε του παραβολικού τμήματος είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του (ΖΟΖ΄).

Θεωρούμε την κορυφή Ο του τριγώνου ΖΟΖ΄ να συμπίπτει με την κορυφή του παραβολικού τμήματος.



Από το σχήμα προκύπτει άμεσα ότι $\left(Z\overset{\triangle}{\mathrm{O}}Z'\right) > \frac{\mathrm{E}}{2}$



Από τα μέσα Β , Β΄ των ΟΗ , ΟΗ΄ αντίστοιχα φέρνουμε παράλληλες στον άξονα της παραβολής που την τέμνουν στα σημεία Γ, Γ΄ αντίστοιχα. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΒΙ και ΟΒΔ προκύπτει ότι : $\mathrm{BI} = \frac{\mathrm{ZH}}{2} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{2}$

Θα αποδείξουμε ότι $(\mathrm{ZO\Gamma}) + (\mathrm{Z'O\Gamma'}) = \frac{1}{4}(\mathrm{ZOZ'})$ (εμβαδά τριγώνων).

Πράγματι, $y_{\Delta} = y_{Z} = x_{H}{}^{2} = \left(2x_{B}\right)^{2}$ εφόσον το Β είναι μέσο του ΟΗ και άρα $y_{\Delta} = 4x_{B}{}^{2}$.

Εφόσον $y_{\Gamma} = x_{B}{}^{2}$, $y_{\Delta} = 4\,y_{\Gamma}$ και άρα ΒΔ=4ΒΓ.Τότε ΒΓ=$\frac{1}{4}$ΒΔ.

Από τις ισότητες ΒΙ=$\frac{ΒΔ}{2}$,ΒΓ=$\frac{ΒΔ}{4}$ έπεται ότι ΒΓ=$\frac{ΒΙ}{2}$ και άρα ΙΓ=ΓΒ και ΙΔ=$\frac{ΒΔ}{2}$=2ΙΓ.

Τα τρίγωνα ΔΙΖ , ΙΓΖ έχουν το ίδιο ύψος ΔΖ (με κορυφή Ζ) οπότε

$\frac{(ΔΙΖ)}{(ΙΓΖ)} = \frac{ΔΙ}{ΙΓ} = \frac{2ΙΓ}{ΙΓ} = 2$, άρα (ΔΙΖ)=2(ΙΓΖ) .

Παρόμοια (ΔΙΟ)=2(ΙΓΟ), άρα (ΖΟΔ)=2(ΖΟΓ) και έτσι 2(ΖΟΔ)=4(ΖΟΓ).

Εφόσον Β είναι το μέσον της ΟΗ και ΒΔ // ΖΗ θα είναι ΜΔ = ΔΖ και (Δ Ο Ζ)=(Μ Ο Δ) γιατί τα τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις ΜΔ, ΔΖ και ίδιο ύψος. Τότε

(Δ Ο Ζ)+(Μ Ο Δ)=2(Δ Ο Ζ)=(Ο Μ Ζ)=$\frac{(ΖΟΖ')}{2}$ και

(Ζ Ο Γ)=$\frac{1}{2}$(Ζ Ο Δ)=$\frac{1}{8}$(Ζ Ο Ζ΄).

Επίσης (Ζ΄ Ο Γ΄)=$\frac{1}{8}$(Ζ Ο Ζ΄).Άρα (Ζ Ο Γ)+ (Ζ΄ Ό Γ΄)=$\frac{1}{4}$ (Ζ Ο Ζ΄)

Το εμβαδόν των τριγώνων ΖΟΓ, Ζ΄ΟΓ΄, αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο, πως είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου παραβολικού χωρίου στο οποίο είναι εγγεγραμμένα. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία προσθέτοντας συνεχώς τρίγωνα στο εναπομείνον μέρος του παραβολικού τμήματος παρατηρούμε ότι κάθε φορά το εμβαδόν των τριγώνων που προσθέτουμε σε κάθε βήμα είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού των τριγώνων που προσθέτουμε στο προηγούμενο βήμα. Οπότε το άθροισμα s_n όλων αυτών των τριγώνων είναι

s_n =(ΖΟΖ΄) +ε_1+ε_2+.........=(ΖΟΖ΄)+$\frac{1}{4}$(ΖΟΖ΄)+$\frac{1}{4^2}$(ΖΟΖ΄)+....+$\frac{1}{4^{n-1}}$(ΖΟΖ΄)=

$$=(ZOZ')\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+..........+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+........\right]$$

Ο Αρχιμήδης στη συνέχεια υπολόγισε το άθροισμα της παραπάνω γεωμετρικής προόδου. Φυσικά δεν μίλησε για άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου αφού αυτό ήταν ακόμα άγνωστο αλλά χρησιμοποίησε την πρόταση: «Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου, (α_ν ,ν=1,2,....), με λόγο $\frac{1}{4}$ συν το $\frac{1}{3}$ του ν-οστού όρου ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του πρώτου όρου».

Η απόδειξη δόθηκε από τον Αρχιμήδη για ν=5.Ας δούμε τη γενική περίπτωση:

Είναι :

$\alpha_1 = \alpha_1$

$\alpha_2 + \frac{1}{3}\ \alpha_2 = \frac{4}{3}\ \alpha_2 = \frac{1}{3}\ \alpha_1$

$\alpha_3 + \frac{1}{3}\ \alpha_3 = \frac{4}{3}\ \alpha_3 = \frac{1}{3}\ \alpha_2$

.

.

$\alpha_\nu + \frac{1}{3}\ \alpha_\nu = \frac{4}{3}\ \alpha_\nu = \frac{1}{3}\alpha_{\nu-1}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu + \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{\nu-1}) + \frac{1}{3}\ \alpha_\nu = \alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_3 .... + \alpha_{\nu-1})$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu) + \frac{1}{3}\alpha_\nu = \frac{4}{3}\alpha_1$$

Άρα $s_n = (ZOZ')\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\nu}\right) = (ZOZ')\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{\nu+1}}\right)$

Στη συνέχεια απέδειξε την $E = \frac{4}{3}(ZOZ')$ με «απαγωγή σε άτοπο».

Έστω ότι $E > \frac{4}{3}(ZOZ')$, οπότε $E - \frac{4}{3}(ZOZ') > 0$. Αν $E - \frac{4}{3}(ZOZ') = \varepsilon$, τότε επειδή $(ZOZ') > \frac{E}{2}$ και γενικά το εμβαδόν κάθε τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου παραβολικού χωρίου στο οποίο είναι εγγεγραμμένο εφαρμόζεται η αρχή του Ευδόξου, οπότε υπάρχει ν έτσι ώστε να ισχύει

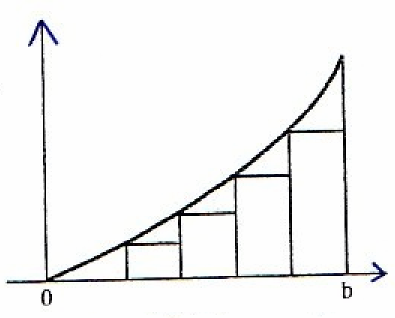
Ε-s_n <ε=Ε- $\frac{4}{3}$(ZOZ΄). Τότε $s_n > \frac{4}{3}$(ZOZ΄), άτοπο αφού s_n =(ZOZ΄)$\left(1-\frac{1}{4^{\nu+1}}\right)\cdot\frac{4}{3}$

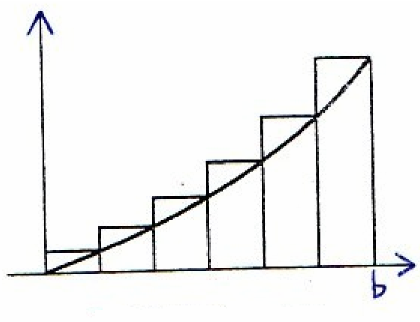
Όμοια απορρίπτουμε την υπόθεση ότι Ε<$\frac{4}{3}$(ZOZ΄).Άρα Ε=$\frac{4}{3}$(ZOZ΄).

Το άθροισμα $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+.........+\left(\frac{1}{4}\right)^n+......$ μπορούμε σήμερα να το υπολογίσουμε με τον γνωστό τύπο Σ=$\frac{\alpha}{1-\omega}$ ο οποίος μας δίνει το άθροισμα των άπειρων όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου. Για α=1 και ω= $\frac{1}{4}$ είναι Σ= $\frac{4}{3}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην απόδειξη αυτή με τη μέθοδο της «απαγωγής σε άτοπο» παρακάμφθηκε η αναγκαιότητα εύρεσης ενός ορίου($\frac{1}{4^{\nu+1}}\to 0$).Σχολιάζοντας αυτό το μέρος της απόδειξης του Αρχιμήδη , ο van der Waerden (2000) σημειώνει τα εξής: «Είναι φανερό ότι οι αποκλίσεις (estimations), οι οποίες εμφανίζονται κατά την άθροιση άπειρων σειρών και κατά τις πράξεις με όρια , τα ‘εψιλοντικά’ , όπως έχει επικρατήσει να ονομάζονται οι υπολογισμοί με ένα οσοδήποτε μικρό ε , ήταν για τον Αρχιμήδη ανοικτό βιβλίο. Από την άποψη αυτή η σκέψη του είναι εντελώς μοντέρνα».

Υπολογισμός Παραβολικού χωρίου

Σε σύγχρονη ορολογία η απόδειξη του Αρχιμήδη για τον τετραγωνισμό της παραβολής περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο:





Προσέγγιση με έλλειψη προσέγγιση με υπεροχή

Κόβουμε το σχήμα με κατακόρυφες λωρίδες και έτσι το άθροισμα των εσωτερικών ορθογωνίων είναι μικρότερο από το ζητούμενο εμβαδό, ενώ το άθροισμα των εξωτερικών ορθογωνίων είναι μεγαλύτερο από αυτό.

Αυξάνοντας το πλήθος των κατακόρυφων λωρίδων παρατηρούμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών ορθογωνίων αυξάνει ενώ αυτό των εξωτερικών ελαττώνεται. Ο Αρχιμήδης παρατήρησε ότι μπορούσε να βρει μια προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού με οποιοδήποτε βαθμό ακριβείας, αν κατασκεύαζε ένα επαρκές σύνολο από λωρίδες.

Για την διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \ldots\ldots, \frac{nb}{n}\right\}$ το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών ορθογωνίων είναι $\Sigma_n = \frac{b^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots. + n^2\right)$ ενώ των εσωτερικών είναι $\sigma_n = \frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots. + (n-1)^2\right]$

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ και

$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{8} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ για $n \geq 1$.

Από την ανισότητα $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ **(1)**

προκύπτει

$$[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]\frac{b^3}{n^3}<\frac{b^3}{3}<[1^2+2^2+\ldots+n^2]\frac{b^3}{n^3}$$ οπότε

έχουμε $\sigma_n<\frac{b^3}{3}<\Sigma_n \quad ,(n\geq 1)$. **(2)**

Ισχυρισμός : Ο αριθμός $b^3/3$ είναι ο μοναδικός αριθμός που ικανοποιεί την σχέση **(2).**

Έστω αντίθετα ότι υπάρχει και ένας άλλος αριθμός φ με την ιδιότητα

$\sigma_n<\varphi<\Sigma_n$ για κάθε $n\in N$.

Από την **(1)** έχουμε ότι

$1^2+2^2+\ldots.+n^2<\frac{n^3}{3}+n^2$ και πολλαπλασιάζοντας με b^3/n^3 παίρνουμε

$$\frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots.+n^2\right)<\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{n}\Rightarrow \Sigma_n<\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{n} \qquad \textbf{(3)}$$

Επίσης, καθώς ισχύει

$$\frac{n^3}{3}-n^2<\left(1^2+2^2+\ldots.+n^2\right)-n^2\Rightarrow\frac{n^3}{3}-n^2<1^2+2^2+\ldots.+(n-1)^2$$

και πολλαπλασιάζοντας με b^3/n^3 παίρνουμε $\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{n}<\sigma_n$ **(4)**

Από τις **(3)** και **(4)** έχουμε $\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{n}<\varphi<\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{n}$ **(5)** για κάθε $n\in N$.

Αν $\varphi>\frac{b^3}{3}$ τότε $\varphi-\frac{b^3}{3}>0$ και από την **(5)** προκύπτει ότι

$$\left(\varphi-\frac{b^3}{3}<\frac{b^3}{n}\ ,\ \forall n\in N\right)\Rightarrow\left(n<\frac{b^3}{\varphi-\frac{b^3}{3}}\ \forall n\in N\right)$$ πράγμα άτοπο

αφού το σύνολο N δεν είναι άνω φραγμένο.

Με παρόμοιο τρόπο η ανισότητα $\varphi < \frac{b^3}{3}$ οδηγεί πάλι σε άτοπο.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $\Sigma_n - \sigma_n = \frac{b^3}{n}$, άρα η διαφορά $\Sigma_n - \sigma_n$ γίνεται αυθαίρετα μικρή καθώς το n αυξάνει (από την ιδιότητα Ευδόξου – Αρχιμήδη) και άρα $E = \lim_{n\to\infty} \Sigma_n = \frac{b^3}{3}$.

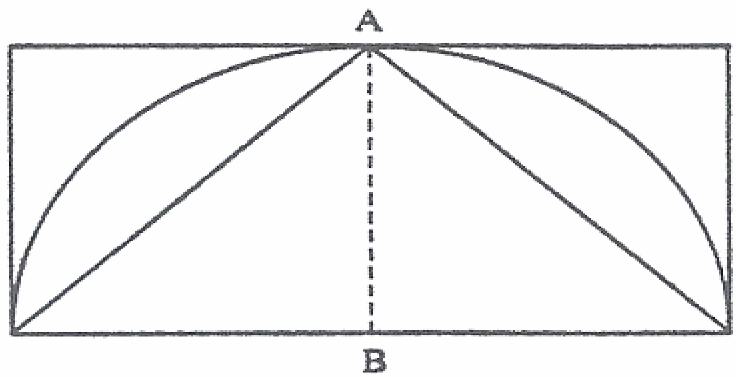
Στο σημείο αυτό σωστό είναι να παρατηρήσουμε ότι το παραβολικό τμήμα στο παραπάνω σχήμα δεν είναι ακριβώς το ίδιο μ' εκείνο που θεώρησε ο Αρχιμήδης, καθώς και οι λεπτομέρειες στους συλλογισμούς που ακολουθούν δεν είναι ομοιότυπες μ' εκείνες που χρησιμοποίησε αυτός. Οι ιδέες όμως ουσιαστικά ανήκουν στον Αρχιμήδη και αυτό που παρουσιάσαμε εδώ μπορεί να θεωρηθεί ως η μέθοδος της εξάντλησης σε σύγχρονη διατύπωση (Apostol,1962).

Περί σφαίρας και κυλίνδρου

Η εργασία «*Περί σφαίρας και κυλίνδρου»* αποτελείται από δύο βιβλία και περιέχει συνολικά 60 προτάσεις, οι οποίες αναφέρονται σε εμβαδά και όγκους εκ περιστροφής και στις μεταξύ τους σχέσεις.

Το κεντρικό θέμα του πρώτου βιβλίου είναι η απόδειξη ότι, αν ένας κώνος είναι εγγεγραμμένος σε ένα ημισφαίριο και αυτό είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύλινδρο, τότε οι όγκοι των στερεών αυτών έχουν λόγους 1:2:3.Δηλαδή αν περιστρέψουμε το παρακάτω σχήμα κατά τον άξονα ΑΒ και V_1, V_2, V_3 είναι οι όγκοι του κώνου, του ημισφαιρίου και του κυλίνδρου που παράγονται, τότε θα ισχύουν οι αναλογίες:

$V_1 : V_2 = 1:2$, $V_1 : V_3 = 1:3$, $V_2 : V_3 = 2:3$



Ο Αρχιμήδης αναφέρει πως ο Εύδοξος έχει αποδείξει τις προτάσεις :

-*Αν ένας κώνος και ένας κύλινδρος έχουν την ίδια βάση και ίσα ύψη, τότε*

$$V_{\kappa\omega\nu.} = \frac{1}{3} V_{\kappa\upsilon\lambda.}$$

-*Αν μία πυραμίδα και ένα πρίσμα έχουν ίδια βάση και ίσα ύψη τότε*

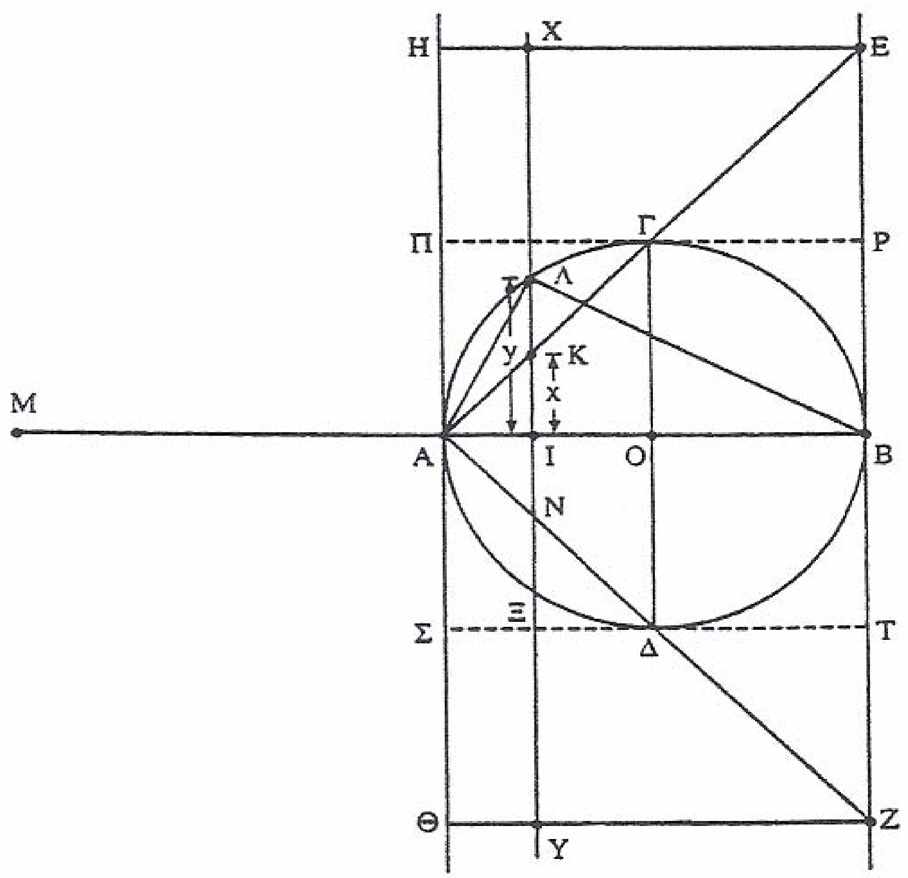
$$V_{\pi\upsilon\rho.} = \frac{1}{3} V_{\pi\rho\iota\sigma\mu.}$$

Με τη βοήθεια αυτών των προτάσεων ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι :

Ο όγκος κώνου εγγεγραμμένου σε ημισφαίριο ισούται με το $\frac{1}{4}$ του όγκου της σφαίρας και ο όγκος σφαίρας εγγεγραμμένης σε κύλινδρο ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του όγκου του κυλίνδρου.

Ο Αρχιμήδης έδωσε πρώτα τη μηχανική απόδειξη αυτής της πρότασης και μετά τη γεωμετρική. Θα δώσουμε τη μηχανική απόδειξη του Αρχιμήδη, γιατί πιστεύουμε ότι η διαδικασία που ακολουθεί είναι όμοια με τη διαδικασία που ακολουθούμε σήμερα για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Έστω κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R. Φέρνουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ και τις εφαπτομένες ΕΖ και ΗΘ του κύκλου στα σημεία Β και Α αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι ευθείες ΑΓ και ΑΔ τέμνουν την εφαπτομένη ΕΖ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι γωνΒΑΓ=γωνΒΑΖ=45^o, άρα θα είναι και γωνΒΕΑ=γωνΒΖΑ=45^o. Επομένως ΕΒ=ΒΖ=ΑΒ=2R. Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΕΖΘΗ και φέρουμε ΧΥ κάθετη ευθεία στην ΑΒ στο σημείο Ι , η οποία τέμνει την ΑΓ στο Κ, την περιφέρεια στο Λ και την ΗΕ στο Χ. Θέτουμε ΑΙ=x και ΙΛ=y.

Από τα τρίγωνα ΑΛΒ και ΑΙΛ έχουμε $(\mathrm{A\Lambda})^2=(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{AI})$ ή $(\mathrm{A\Lambda})^2=2\mathrm{R}x$ και

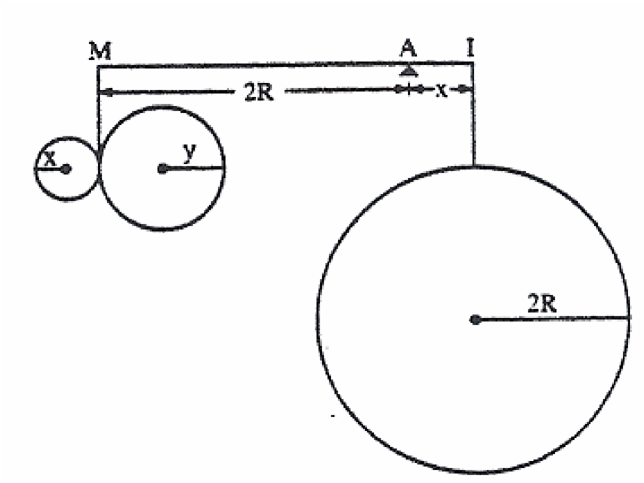
$(\mathrm{A\Lambda})^2=(\mathrm{AI})^2+(\mathrm{I\Lambda})^2=x^2+y^2$. Επομένως $x^2+y^2=2\mathrm{R}x$ (1)

Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΜ=ΑΒ=2R και περιστρέφουμε όλο το σχήμα γύρω από τη ΒΜ. Τότε ο κύκλος δημιουργεί μία σφαίρα ακτίνας R.Το τρίγωνο ΑΕΖ δημιουργεί κώνο ακτίνας 2R και ύψους επίσης 2R.Το ορθογώνιο ΕΖΘΗ δημιουργεί έναν κύλινδρο ακτίνας 2R και ύψους επίσης 2R.

Κατά την περιστροφή, το επίπεδο που σχηματίζει η ευθεία ΧΥ τέμνει τον κύλινδρο κατά έναν κύκλο ακτίνας 2R , τη σφαίρα κατά κύκλο ακτίνας ΙΛ=y και τον κώνο κατά κύκλο ακτίνας ΙΚ. Επειδή γωνΙΑΚ = 45^o και η ΙΚ είναι κάθετη στην ΑΙ, θα είναι ΙΚ=ΑΙ=x.Από τη σχέση (1) έχουμε:

$\pi x^2+\pi y^2=\pi(2\mathrm{R})x$ ή $\dfrac{\pi x^2+\pi y^2}{\pi(2\mathrm{R})^2}=\dfrac{x}{2\mathrm{R}}$ (2)

Η αναλογία (2) μας λέει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κύκλων με ακτίνες x και y προς το εμβαδόν του κύκλου με ακτίνα 2R, ισούται με την απόσταση του Α από το Ι προς την απόσταση του Α από το Μ. Δηλαδή αν θεωρήσουμε τα βάρη των κυκλικών δίσκων ανάλογα προς τις επιφάνειές τους και πάρουμε μία ζυγαριά με σημείο στήριξης το Α και βραχίονα ΜΙ, τότε θέτοντας τους δύο κύκλους ακτίνων x και y στο Μ και τον κύκλο ακτίνας 2R στο Ι (βλ.παρακάτω σχήμα) η ζυγαριά θα ισορροπεί. Και αυτό ισχύει για οποιαδήποτε θέση της ευθείας ΧΥ.



Αν επομένως θεωρήσουμε ότι το σημείο Ι διατρέχει την ΑΒ και οι κύκλοι με ακτίνες ΙΚ=x και ΙΛ=y και ΙΧ=2R που κάθε φορά δημιουργούνται σχηματίζουν τον κώνο, τη σφαίρα και τον κύλινδρο αντίστοιχα , επειδή το κέντρο βάρους του κυλίνδρου είναι το Ο, θέτοντας x=R από τη σχέση (2) θα έχουμε:

$$\frac{V_{\kappa\omega\nu.} + V_{\sigma\varphi.}}{V_{\kappa\upsilon\lambda.}} = \frac{1}{2} \text{ ή } 2\left(V_{\kappa\omega\nu.} + V_{\sigma\varphi.}\right) = V_{\kappa\upsilon\lambda.} \quad (3)$$

όπου $V_{\kappa\omega\nu.}$ είναι ο όγκος του κώνου που παράγεται από την περιστροφή του τριγώνου ΑΕΖ περί την ΑΒ και $V_{\kappa\upsilon\lambda.}$ είναι ο όγκος του κυλίνδρου που παράγεται από την περιστροφή περί την ΑΒ του ορθογωνίου ΕΖΘΗ.

Ισχύει όμως ότι (ΟΓ)=$\frac{1}{2}$(ΕΒ),άρα $V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_{\kappa\omega\nu.}$ όπου V_1 ο όγκος του κώνου που παράγεται από την περιστροφή περί την ΑΒ του τριγώνου ΑΓΔ

Δηλαδή $V_1 = \frac{1}{8} V_{\kappa\omega\nu.}$ ή $V_{\kappa\omega\nu.} = 8V_1$ (4)

Έστω τώρα W ο όγκος του κυλίνδρου που παράγεται από την περιστροφή περί την ΑΒ του ορθογωνίου ΠΡΤΣ.

Τότε $W = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \frac{1}{4} \cdot V_{\kappa\upsilon\lambda.}$ ή $V_{\kappa\upsilon\lambda.} = 4W$ (5)

Αν στη σχέση (3) θέσουμε $V_{σφ.}$=V και αντικαταστήσουμε τα $V_{κων.}$ και $V_{κυλ.}$ με τις αντίστοιχες τιμές τους , όπως αυτές προκύπτουν από τις σχέσεις (4) και (5), θα έχουμε: 2(8V_1+V)=4W ή 8V_1+V=2W (6)

Συμβολίζουμε με V_3 τον όγκο του κυλίνδρου που παράγεται κατά την περιστροφή περί την ΑΒ του ορθογωνίου ΠΓΔΣ. Θα είναι: $V_3=\frac{1}{2}W$.

Επειδή ο κώνος και ο κύλινδρος με όγκους V_1 και V_3 έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, θα ισχύει η σχέση $V_1=\frac{1}{3}V_3$. Άρα W=2V_3=6V_1 (7)

Θέτοντας την (7) στην (6) παίρνουμε V=4V_1. Άρα 3V=12V_1=2W, που δίνουν τις αναλογίες : V_1:V=1:4 και V:W=2:3 , οπότε το θεώρημα αποδείχθηκε.

Αν τώρα περιοριστούμε στα στερεά που παράγονται με την περιστροφή του σχήματος ΠΓΔΣ περί την ΑΟ, τότε το τρίγωνο ΑΓΔ θα δημιουργήσει έναν κώνο όγκου V_1, το ημικύκλιο θα δημιουργήσει ένα ημισφαίριο όγκου $V_2=\frac{1}{2}V$ και το ορθογώνιο ΠΓΔΣ θα δημιουργήσει κύλινδρο όγκου V_3.Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε τις αναλογίες :

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{\frac{1}{2}V}=2\cdot\frac{V_1}{V}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.Δηλαδή $V_1:V_2$=1:2

$\frac{V_2}{V_3}=\frac{\frac{1}{2}V}{\frac{1}{2}W}=\frac{V}{W}=\frac{2}{3}$. Δηλαδή $V_2:V_3$=2:3

Επειδή ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη θα είναι $V_1:V_3$=1:3.

Για τις αναλογίες αυτές ο Αρχιμήδης έλεγε ότι οι όγκοι του κώνου, της σφαίρας και του κυλίνδρου που παράγονται με την παραπάνω διαδικασία, έχουν λόγο 1:2:3.

Από τη σχέση V:W=2:3 , γνωρίζοντας ότι ο όγκος W του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση $W=\pi R^2\cdot(2R)$ (αφού ο κύλινδρος έχει βάση με ακτίνα R και ύψος 2R) υπολόγισε τον όγκο V της σφαίρας , όπως αναφέρει στην εργασία του *Έφοδος* γράφοντας : $V=\frac{2}{3}W=\frac{2}{3}\cdot\pi R^2\cdot(2R)=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Επειδή η απόδειξη που εκθέτουμε παραπάνω είναι μηχανική, ο Αρχιμήδης δεν τη θεωρεί ως πλήρη απόδειξη, γι αυτό δίνει και τη γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος αυτού. Στο τέλος της πρότασης 1 στο έργο του «*Η Μέθοδος»* ο Αρχιμήδης λέει: «*Το θεώρημα που διατύπωσα εδώ δεν έχει πλήρως αποδειχτεί με τη μηχανική διαδικασία που ακολούθησα. Όμως έχω τώρα σοβαρές ενδείξεις ότι το θεώρημα είναι αληθές. Βλέποντας ότι το θεώρημα δεν έχει αποδειχτεί, αλλά υποψιαζόμενος ότι πραγματικά ισχύει, έχω δώσει μία πλήρη γεωμετρική απόδειξη στο θεώρημα αυτό, την οποία εγώ ο ίδιος ανακάλυψα»*

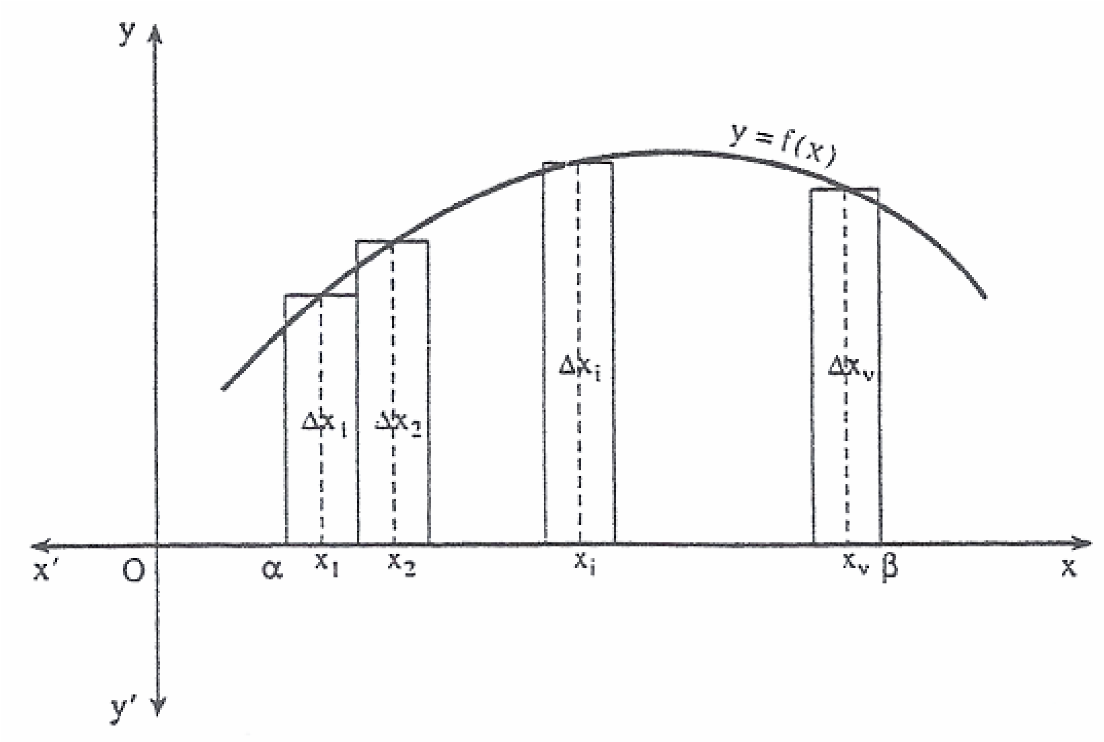
Μετά την απόδειξη της παραπάνω αναλογίας, λέει ο Αρχιμήδης, *ξεκινώντας από το γεγονός ότι το εμβαδόν κύκλου ισούται με το εμβαδόν τριγώνου το οποίο έχει βάση ίση με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου και ύψος ίσο με την ακτίνα του κύκλου, συμπέρανα ότι ο όγκος της σφαίρας ισούται με τον όγκο του κώνου, ο οποίος έχει βάση ίση με την επιφάνεια της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.* Έτσι αν $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ είναι ο όγκος της σφαίρας και Ε το εμβαδόν της επιφάνειάς της, η σχέση $V=V_{κων.}=\frac{1}{3}ER$ δίνει $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}ER$ ή $E=4\pi R^2$.

Όπως είδαμε στα παραπάνω παραδείγματα, αλλά και όπως μπορούμε να δούμε και σε άλλες κομψές αποδείξεις που έχει κάνει ο Αρχιμήδης, η μέθοδος την οποία ακολουθεί και η οποία είναι γνωστή ως μέθοδος της ισορροπίας στηρίζεται στην ιδέα ότι :

Για να υπολογίσουμε ένα εμβαδόν, κόβουμε την επιφάνειά του σε έναν πολύ μεγάλο αριθμό από λεπτές επίπεδες λωρίδες παράλληλες μεταξύ τους και το άθροισμα αυτών των επίπεδων λωρίδων το ισορροπούμε με ένα σχήμα του οποίου γνωρίζουμε το κέντρο βάρους και την επιφάνειά του.

Για να υπολογίσουμε έναν όγκο, κόβουμε το στερεό σε έναν πολύ μεγάλο αριθμό από λεπτές φέτες παράλληλες μεταξύ τους και το άθροισμα αυτών των κομματιών το ισορροπούμε με ένα στερεό, του οποίου γνωρίζουμε τον όγκο και το κέντρο βάρους.

Σήμερα για να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ μιας συνεχούς συνάρτησης y=f(x) ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία.



Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης y=f(x), τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=β, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Χωρίζουμε την επιφάνεια σε έναν μεγάλο αριθμό έστω ν, λεπτών ορθογωνίων λωρίδων με πλάτη $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_\nu$ αντίστοιχα. Μέσα σε κάθε λωρίδα και για κάθε τετμημένη $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ επιλέγουμε την αντίστοιχη τεταγμένη $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_\nu)$.Βρίσκουμε τα εμβαδά αυτών των λεπτών ορθογωνίων επιφανειών και παίρνουμε το άθροισμα:

$f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_\nu)\,\Delta x_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i)\Delta x_i$.

Το εμβαδόν δίνεται από τη σχέση Ε= $\lim\limits_{\substack{\Delta x_{i \to 0} \\ \forall i}} \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i)\Delta x_i, \nu \to \infty$.

Αυτό το Ε έχει οριστεί ως το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Είναι δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\Delta x_{i \to 0} \\ \forall i}} \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i)\Delta x_i, \nu \to \infty$.

Από όλα όσα αναφέραμε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε χωρίς διάθεση υπερβολής ότι αν τη μέθοδο της εξάντλησης και τη μέθοδο της ισορροπίας που τόσο συχνά και τόσο εύστοχα χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης, τις αναδιατυπώσουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του ορίου και σύγχρονο συμβολισμό, οι μέθοδοι αυτές θα μπορούσαν να αναπτυχθούν σε πλήρη θεωρία του απειροστικού λογισμού, όπως αυτή που έχει διαμορφωθεί σήμερα (Εξαρχάκος, 1993).

Το εμβαδόν της έλλειψης

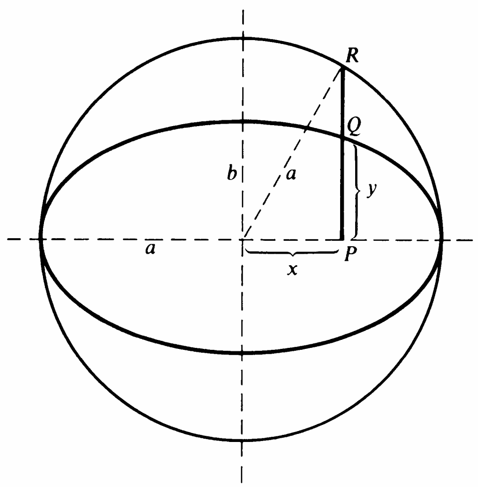
Μολονότι ο Αρχιμήδης δεν μπορούσε να υπολογίσει το εμβαδόν ενός αυθαίρετου τμήματος μιας έλλειψης , έδειξε (στο Περί Κωνοειδέων και Σφαιροειδέων) ότι το εμβαδόν ολόκληρης της έλλειψης με μεγάλο και μικρό άξονα α και b αντίστοιχα είναι

A=παb (*),

μία γενίκευση του τύπου για το εμβαδόν του κύκλου (ο κύκλος ακτίνας r γίνεται έλλειψη με α=b=r).

Η απόδειξη του Αρχιμήδη για την (*) βασίζεται στην παρακάτω χαρακτηριστική ιδιότητα της έλλειψης. Ο κύκλος ακτίνας α , που περιγράφεται γύρω από την έλλειψη όπως στο σχήμα 1 , ονομάζεται *βοηθητικός κύκλος*. Δοθέντος ενός σημείου P στον μεγάλο (οριζόντιο άξονα) της έλλειψης, έστω Q το σημείο πάνω στην έλλειψη και R το σημείο στον κύκλο πάνω από το P.

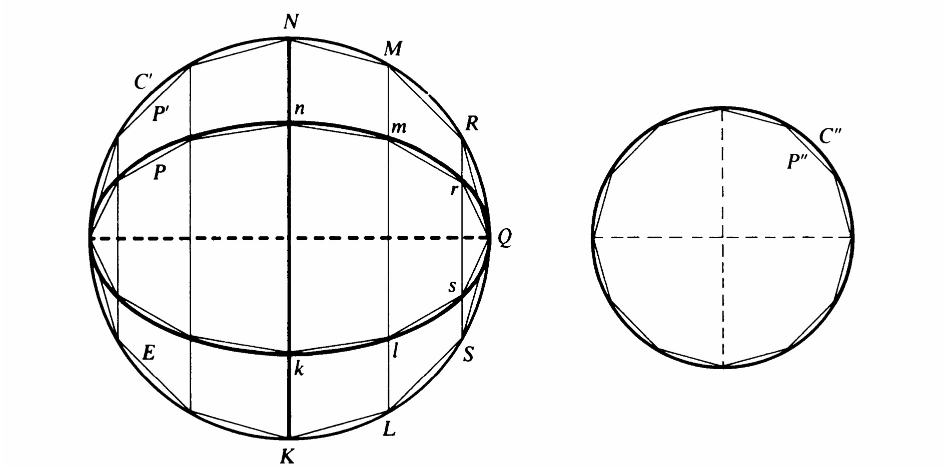
Τότε $\frac{PQ}{PR}=\frac{b}{\alpha}$. (1)



Σχήμα 1

Αυτό είναι προφανές από την εξίσωση ορθογώνιων συντεταγμένων: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ για την έλλειψη, η οποία δίνει PQ=y=$\frac{b}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}=\frac{b}{\alpha}PR$.

Για να αποδείξουμε την (*), ξεκινάμε με μία έλλειψη Ε με μεγάλο και μικρό άξονα α και b, και με βοηθητικό κύκλο C΄. Έστω C΄΄ να είναι ο κύκλος ακτίνας $r=\sqrt{\alpha b}$, ώστε α(C΄΄)=παb (βλέπε σχ.2). Θέλουμε να αποδείξουμε ότι α(Ε)=α(C΄΄).



Σχήμα 2

Υποθέτοντας ότι α(Ε)<α(C΄΄), έστω P΄΄ να είναι ένα κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο στον C΄΄, το οποίο έχει πλήθος πλευρών ένα πολλαπλάσιο του 4, και με απέναντι άκρα στην οριζόντια διάμετρο του C΄΄ ως κορυφές, έτσι ώστε α(P΄΄)>α(Ε). (2)

Αν P΄είναι ένα όμοιο κανονικό πολύγωνο που εγγράφεται στο βοηθητικό κύκλο C΄ , τότε $\frac{\alpha(P'')}{\alpha(P')}=\frac{r^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha b}{\alpha^2}=\frac{b}{\alpha}$.   (3)

Έστω τώρα P το πολύγωνο που εγγράφεται στην έλλειψη Ε του οποίου οι κορυφές είναι τομές με την Ε με τις κάθετες από τις κορυφές του P΄ στον οριζόντιο άξονα της Ε. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα πολύγωνα P και P΄ ως ενώσεις των αντίστοιχων ζευγαριών τριγώνων όπως Qrs και QRS, και των αντίστοιχων ζευγαριών τραπεζίων όπως klmn και KLMN. Η χαρακτηριστική ιδιότητα (1) της έλλειψης συνεπάγεται ότι $\frac{lm}{LM}=\frac{kn}{KN}=\frac{rs}{RS}=\frac{b}{\alpha}$, και έτσι προκύπτει :

$$\frac{\alpha(klmn)}{\alpha(KLMN)}=\frac{\alpha(Qrs)}{\alpha(QRS)}=\frac{b}{\alpha}.$$

Συνεπώς με σύγκριση κατά ζεύγη των τριγώνων και τραπεζίων που απαρτίζουν το P με αυτών που απαρτίζουν το P΄, βλέπουμε ότι:

$$\frac{\alpha(P)}{\alpha(P')} = \frac{b}{\alpha}. \quad (4)$$

Όμως οι (3),(4) συνεπάγονται ότι α(P)=α(P΄΄), το οποίο αντιτίθεται στην (2) γιατί το P είναι εγγεγραμμένο στην E. Έτσι το α(C΄΄) δεν είναι μεγαλύτερο από το α(E).

Υποθέτοντας στη συνέχεια ότι α(C΄΄)<α(E), ξεκινάμε με ένα πολύγωνο P όπως αυτό επάνω το οποίο εγγράφεται στην έλλειψη E, έτσι ώστε α(P)>α(C΄΄).

Έστω τώρα P΄ το εγγεγραμμένο πολύγωνο στον βοηθητικό κύκλο C΄ του οποίου οι κορυφές είναι τομές με τον C΄κάθετων γραμμών που διέρχονται από τα ζεύγη των κορυφών του P , και έστω P΄΄ είναι το όμοιο πολύγωνο που εγγράφεται στον κύκλο C΄΄.

Με ίδιους υπολογισμούς όπως στην πρώτη περίπτωση βρίσκουμε ότι $\frac{\alpha(P)}{\alpha(P')} = \frac{b}{\alpha} = \frac{\alpha(P'')}{\alpha(P')}$.

Τότε όμως α(P΄΄)=α(P)>α(C΄΄), το οποίο είναι αντίφαση γιατί το P΄΄ είναι εγγεγραμμένο στον C΄΄. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη διπλής εις άτοπον απαγωγής και έτσι α(E)=α(C΄΄)=παb.

Στην ουσία ο Αρχιμήδης έχει απλώς δώσει μία αυστηρή απόδειξη με τη μέθοδο της εξάντλησης του διαισθητικού προφανούς γεγονότος ότι το εμβαδόν της έλλειψης είναι $\frac{b}{\alpha}$ φορές το εμβαδόν $\pi\alpha^2$ του βοηθητικού κύκλου, η οποία αντιστοιχεί στην παρατήρηση ότι ο κύκλος μετατρέπεται σε έλλειψη συρρικνώνοντας την κατακόρυφη διάσταση του κατά τον παράγοντα $\frac{b}{\alpha}$ (Edwards, 1979).

Σχόλια για το έργο του Αρχιμήδη

Στο έργο του Αρχιμήδη συναντώνται όλα εκείνα τα γενικά χαρακτηριστικά της μεθόδου της εξάντλησης. Συγκεκριμένα, στον τετραγωνισμό της παραβολής δεν καταφεύγει στη χρήση ορίου προκειμένου να εξαγάγει το αποτέλεσμα, αλλά δουλεύει με τη διπλή απαγωγή σε άτοπο. Επιπλέον, ο Αρχιμήδης επεκτείνει την μέθοδο της εξάντλησης δια του εγκλεισμού της καμπύλης ή επιφανείας (στην κατεύθυνση υπολογισμού εμβαδών επιφανειών και όγκων στερεών αντίστοιχα) από εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα, που κατόπιν συμπιέζει έτσι, ώστε στο τέλος να συμπίπτουν και επομένως να συμπίπτει με αυτά και το περιεχόμενο σχήμα απλοποιώντας, με αυτόν τον τρόπο, τη διαδικασία της ζητούμενης μέτρησης, αποφεύγοντας, όμως, την παραμικρή αναφορά στην έννοια του ορίου.

Η μηχανική απόδειξη του τετραγωνισμού της παραβολής αποτελεί το ακριβές ισοδύναμο της διαδικασίας ολοκλήρωσης. Αποδεικνύεται ότι το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο, στο παραβολικό τμήμα, χωρίο (αποτελούμενα από τραπέζια με βάσεις παράλληλες στη διάμετρο της παραβολής) φράσσουν κάτω και άνω την τιμή του εμβαδού του τμήματος. Επίσης παρέχει το ισοδύναμο της διαδικασίας προσδιορισμού του εμβαδού του παραβολικού χωρίου δια της χρήσεως του ορίου, ήτοι μέσω της θεώρησης άπειρου πλήθους τραπεζίων απείρως μικρού ύψους.

Ο Van der Waerden (2000) θεωρεί ότι ο Αρχιμήδης δεν ήταν εξοικειωμένος με την έννοια του ολοκληρώματος στο βαθμό που ο ίδιος δεν κατάλαβε ότι αυτή αποτελούσε την βάση των εκάστοτε γεωμετρικών ερμηνειών (εμβαδά επιπέδων σχημάτων, όγκοι στερεών). Η διαφορετικότητα των μεθόδων του σε έργα όπου οι υπολογισμοί είχαν μία και την αυτή κατάληξη (δηλαδή τον υπολογισμό του ιδίου ολοκληρώματος) αποτελεί ένδειξη του ότι οι μέθοδοί του ήταν άμεσα εξαρτώμενες από την γεωμετρική ερμηνεία του εκάστοτε προβλήματος. Πάντως, ο σημαντικός αυτός ιστορικός των μαθηματικών θεωρεί ότι η αυστηρότητα η οποία διέπει τις αποδεικτικές διαδικασίες του

Αρχιμήδη τον καθιστά «*….πρoάγγελο του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού*».

Στην ίδια γραμμή με τον Van der Waerden κινείται και ο Boyer (1959), ο οποίος θεωρεί ως εντελώς λανθασμένη την χρέωση της σύλληψης του ολοκληρώματος στον Αρχιμήδη, καθώς η εν λόγω έννοια απουσίαζε παντελώς από την γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων. Ο ίδιος πάντως θεωρεί ότι οι αποδεικτικές τεχνικές του Αρχιμήδη απετέλεσαν το μεγαλύτερο κίνητρο στην περαιτέρω εξέλιξη των νεωτέρων μεθόδων ανάλυσης.

Τέλος, αναφερόμενος στο γεωμετρικό έργο του Αρχιμήδη, ο Heath (1981) παραθέτει την άποψη του Chasles, σύμφωνα με την οποία οι μελέτες που αποτελούν το έργο αυτό και αποτελούν τη συνέχεια του Βιβλίου XII των Στοιχείων «*γέννησαν τον Απειροστικό Λογισμό, που συνελήφθη* (διανοητικά) *και τελειοποιήθηκε διαδοχικά από τους Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz και Newton*».

Τα μαθηματικά μετά τον Αρχιμήδη και μέχρι τον 14^{ο} αιώνα

Γενικά

Την ίδια περίπου εποχή με τον Αρχιμήδη έζησε και ένας άλλος σπουδαίος μαθηματικός , ο Απολλώνιος που ολοκλήρωσε με αξιοθαύμαστο τρόπο τη θεωρητική μελέτη των κωνικών τομών. Στα χρόνια που ακολούθησαν δυστυχώς δεν παρατηρήθηκε καμία πρόοδος στα ελληνικά μαθηματικά. Υπό την επίδραση των αναγκών της αστρονομίας αναπτύχθηκε ένας νέος κλάδος των μαθηματικών η τριγωνομετρία και αργότερα η θεωρία αριθμών με το έργο του Διόφαντου. Σύμφωνα με την άποψη πολλών ερευνητών, τα Ελληνικά μαθηματικά της ύστερης αρχαιότητος καταποντίσθηκαν τόσο εξαιτίας της περιπλοκότητας όσο και της δυσκολίας κατανόησης, οι οποίες εντελώς φυσιολογικά συνόδευσαν την ανάπτυξή τους.

Στη διάρκεια της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας, στο ανατολικό τμήμα της η επιστήμη άκμασε σαν ένα κράμα ελληνιστικών και ανατολικών στοιχείων. Οι Ρωμαίοι χρησιμοποίησαν τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις, αλλά ο χειρισμός τους δεν ξέφυγε από το επίπεδο συρραφών και δεν χρεώνεται σε αυτούς καμία ουσιώδης πρωτότυπη συνεισφορά στο οικοδόμημα της μαθηματικής γνώσης. Όταν οι βάρβαροι εισέβαλλαν και κατέκτησαν τις επαρχίες της αυτοκρατορίας κάθε ενδιαφέρον για τα μαθηματικά χάθηκε. Στο Βυζάντιο όμως διασώθηκαν σημαντικά χειρόγραφα όπως και στην Περσία και την Ινδία. Τους Ινδούς απασχολούσαν κυρίως οι αριθμητικοί υπολογισμοί. Αντιμετώπιζαν χωρίς διάκριση ρητούς και άρρητους και έλυναν αριθμητικά προβλήματα χωρίς τη βοήθεια της γεωμετρίας. Αυτή η απελευθέρωση της αριθμητικής από τη γεωμετρία ήταν ένα στοιχείο που αργότερα βοήθησε στην ανάπτυξη της ανάλυσης. Με τις έννοιες όμως του απειροστικού λογισμού δεν ασχολήθηκαν σοβαρά, αλλά πέτυχαν ένα σημαντικό επίτευγμα, το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα. Μετά τον 4^{ο} μ.Χ. αιώνα άρχισε να καλλιεργείται η ελληνική παράδοση σε μία σχολή αράβων επιστημόνων, οι οποίοι μετέφρασαν στα αραβικά τους Έλληνες κλασσικούς, Απολλώνιο, Αρχιμήδη, Ευκλείδη και Αριστοτέλη. Οι Άραβες μαθηματικοί, παρότι δεν ασχολήθηκαν με τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού, εν τούτοις με τις μεταφράσεις τους εξοικειώθηκαν, όχι μόνο με την αρχαία ελληνική κληρονομιά, αλλά και με τη γραπτή παράδοση των Βαβυλωνίων. Στις αραβικές χώρες τα μαθηματικά θα ακμάσουν ιδιαίτερα κατά την περίοδο 800 έως 1200 μ.Χ. συνεχίζοντας με βάση την ελληνική παράδοση (Γιαννακούλιας, 2007). Η Ελληνική επιστήμη αρχίζει να καθίσταται βαθμιαία γνωστή στη Δύση μόλις τον 12ο αιώνα και το ρόλο του συνδέσμου έχουν τα έργα των μεταφραστών αραβικών και ελληνικών κειμένων στο Τολέδο της Ισπανίας και στη Νότια Ιταλία. Το 12ο αιώνα ανακαλύπτονται εκ νέου τα έργα των αρχαίων Ελλήνων με σημαντικότερα αυτών τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, τα *Κωνικά* του Απολλωνίου, τα *Πνευματικά* του Ήρωνα, το *De pondoroso et levi* (ψευδο–Ευκλείδεια πραγματεία με αντικείμενο τους μοχλούς και την ισορροπία) και ένα μέρος των πραγματειών του Αρχιμήδους, *Περί Οχουμένων* και *Κύκλου Μέτρησις*. Το 13ο αιώνα η Δύση έρχεται σε επαφή με τον Αριστοτέλη δια των μεταφράσεων των έργων του, *Φυσικά* και *Περί ουρανού* καθώς και της ψευδο-Αριστοτελικής πραγματείας *Μηχανικά* (η οποία αποδίδεται στον Στράτωνα, διάδοχο του Θεοφράστου στην Περιπατητική Σχολή).

Την ίδια εποχή ξεκίνησε μία μεγάλη συζήτηση και εκτεταμένες μελέτες γύρω από την έννοια του απείρου, τη φύση του συνεχούς και την ύπαρξη των αδιαιρέτων. Οι έρευνες για το άπειρο και τα προβλήματα που αφορούσαν την κίνηση θα θέσουν τις λογικές βάσεις του απειροστικού λογισμού και οι διαλογισμοί αυτοί παρότι ήταν περισσότερο φιλοσοφικού παρά μαθηματικού περιεχομένου, θα ασκήσουν αργότερα μεγάλη επίδραση στους επινοητές του απειροστικού λογισμού (Γιαννακούλιας, 2007).

Η αραβική ηγεμονία

Το πρώτο μισό του έβδομου αιώνα ένας νέος πολιτισμός ξεπήδησε από την Αραβία. Υπό την εμπνευσμένη καθοδήγηση του προφήτη Μωάμεθ, η νέα μονοθεϊστική θρησκεία του Ισλάμ αναπτύχθηκε και γρήγορα την ασπάστηκαν οι κάτοικοι της αραβικής χερσονήσου. Σε λιγότερο από έναν αιώνα μετά την κατάληψη της Μέκκας από τον Μωάμεθ το 630, οι ισλαμικές στρατιές είχαν κατακτήσει τεράστιες εκτάσεις καθώς διέδιδαν τη νέα θρησκεία πρώτα στις έως τότε πολυθεϊστικές φυλές της Μέσης Ανατολής και έπειτα στους πιστούς των άλλων θρησκειών (Katz, 2013). Οι Άραβες έως το 750 μ.Χ. είχαν υποτάξει τις Ινδίες , την Περσία, τη Μεσοποταμία, τη Συρία, την Αίγυπτο, τη Βόρειο Αφρική και ένα μεγάλο μέρος της Ισπανίας και του Μαρόκου. Ο πρώτος αιώνας της μουσουλμανικής αυτοκρατορίας δεν έχει να παρουσιάσει κανένα επιστημονικό κατόρθωμα, γιατί οι Άραβες δεν είχαν ακόμα αναπτύξει πνευματικά ενδιαφέροντα και ο υπόλοιπος κόσμος βρισκόταν σε άσχημη κατάσταση. Το δεύτερο ήμισυ του 8^{ου} αιώνα όμως ήρθαν στη Βαγδάτη σοφοί από τη Συρία, το Ιράν και τη Μεσοποταμία , συμπεριλαμβανομένων Εβραίων και νεστοριανών χριστιανών (Boyer& Merzbach, 1997). Η Βαγδάτη γίνεται ένα νέο κοσμοπολίτικο μέρος , μία νέα Αλεξάνδρεια όπου μελετώνται οι αρχαίες επιστήμες της Ελλάδας , της Ινδίας και της Μεσοποταμίας χάρη στους τρεις προστάτες της μάθησης al-Manṣūr (Αλ Μανσούρ), Hārūn al-Rashīd (Χαρούν Αλ Ρασίντ) και al-Ma’mūn (Αλ Μαμούν). Ο χαλίφης Hārūn al-Rashīd που κυβέρνησε από το 786 έως το 809 ίδρυσε μία νέα βιβλιοθήκη στη Βαγδάτη. Τα χειρόγραφά της τα συνέλεξε από τις διάφορες ακαδημίες της Εγγύς Ανατολής που τις είχαν ιδρύσει λόγιοι που είχαν φύγει κυνηγημένοι από τις αρχαίες ακαδημίες της Αθήνας και της Αλεξάνδρειας. Τα χειρόγραφα αυτά περιείχαν πολλά από τα κλασσικά ελληνικά μαθηματικά και επιστημονικά έργα.(Katz, 2013). Την περίοδο εκείνη μεταφράστηκε μέρος των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Οι Άραβες όμως ενέδωσαν στο πάθος τους για μεταφράσεις, όταν χαλίφης ήταν ο al-Ma’mūn (809-933). Με δική του απόφαση μεταφράστηκαν στα αραβικά όλα τα ελληνικά έργα που μπορούσαν να βρεθούν συμπεριλαμβανομένης και της *Μεγίστης* του Πτολεμαίου και όλων των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (Boyer& Merzbach,1997).

Al-Khwārizmī

Ο al-Ma'mūn ίδρυσε στη Βαγδάτη ένα «Σπίτι της Σοφίας» ανάλογο με το αρχαίο Μουσείο στην Αλεξάνδρεια. Ανάμεσα στους καθηγητές ήταν ένας μαθηματικός και αστρονόμος, ο Abū ʿAbdallāh Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Μωάμεθ Ιμπν Μούσα Αλ Χβαρίζμι) του οποίου το όνομα έμελλε να γίνει γνωστό αργότερα, στη Δυτική Ευρώπη, όσο αυτό του Ευκλείδη. Ο σοφός αυτός που πέθανε λίγο πριν το 850, έγραψε πάνω από έξι αστρονομικά και μαθηματικά έργα. Εκτός από αστρονομικούς πίνακες και μελέτες για τον αστρολάβο και το ηλιακό ρολόι, έγραψε δύο βιβλία αριθμητικής και άλγεβρας που έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών (Boyer,1997). Το όνομα του al-Khwārizmī έχει γίνει γνωστό πλέον σε όλες τις γλώσσες εξαιτίας της αριθμητικής του. Από τον τίτλο του πιο σημαντικού του έργου, Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala, προέρχεται ο όρος *άλγεβρα,* διότι αργότερα η Ευρώπη, από το βιβλίο αυτό γνώρισε τον κλάδο των μαθηματικών που φέρει αυτό το όνομα. Το βιβλίο αυτό ήταν για την άλγεβρα ότι ήταν τα Στοιχεία του Ευκλείδη για τη γεωμετρία-η καλύτερη στοιχειώδης, βέβαια, μελέτη ως τα σύγχρονα χρόνια.

Thabit ibn-Qurra

Ο Thabit ibn-Qurra (826-901) ίδρυσε μία σχολή μεταφραστών και σε αυτόν οφείλουμε τις μεταφράσεις στα αραβικά των έργων του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Πτολεμαίου και του Ευτόκιου. Έχοντας μεταφράσει στα αραβικά την πραγματεία του Αρχιμήδη *Περί Σφαίρας και κυλίνδρου* και εμπνευσμένος από αυτήν έγραψε μία μελέτη με τίτλο *Βιβλίο για τη μέτρηση της κωνικής τομής της επονομαζόμενης παραβολής.*

Έχοντας ήδη μεταφράσει την πραγματεία *Περί Σφαίρας και κυλίνδρου* γνωρίζει το αποτέλεσμα του Αρχιμήδη πως το παραβολικό τμήμα ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου ίδιας βάσης και ύψους, αλλά εκείνος χρησιμοποιεί μία άλλη μέθοδο, την μέθοδο των «αθροισμάτων».Η θεωρούμενη παραβολή από τον Qurra ορίζεται, με τη σημερινή μαθηματική γλώσσα, ως $y^2 = px$ και ο τετραγωνισμός της παραβολής ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^{\alpha} \sqrt{px}dx$. Η λύση του δεν είναι σύντομη. Βασίζεται σε 15 λήμματα Στη συνέχεια ένας ανιψιός του ο Imbrahim Thabit ibn-Qurra (908-946) βρήκε έναν νέο τρόπο για τον τετραγωνισμό της παραβολής. (Youshkevitch, 1976).

Abu Sahl Wigan ibnRustem Al Kuhi

Ένας άλλος μαθηματικός είναι ο Abu Sahl Wigan ibn Rustem Al Kuhi ο οποίος έδρασε στην αυλή της Βαγδάτης κατά το δεύτερο μισό του 10^{ου} αιώνα. Είναι συγγραφέας πολλών έργων αστρονομικών και μαθηματικών. Ένα από αυτά το οποίο πραγματεύεται τις καμπύλες που γεννώνται από την προβολή της σκιάς ενός στύλου επί του γηπέδου αποδεικνύει ότι ο συγγραφέας είχε βαθειά γνώση των κωνικών τομών. Ένα άλλο πραγματεύεται γεωμετρικά κυβικά ζητήματα μεταξύ των οποίων την τριχοτόμηση της γωνίας. Τέλος ένα άλλο έχει ως θέμα τον κυβισμό του ελλειπτικού παραβολοειδούς.(Loria, 1971).

Ibn Haytam

Ο Al –Haitham (965-1039) γνωστός στη δύση ως Alhazen, ένας από τους μεγαλύτερους άραβες μαθηματικούς, γεννήθηκε στη Βασόρα του σημερινού Ιράκ και πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Αίγυπτο, όπου τον είχε καλέσει ο χαλίφης al-Hakim για να εργαστεί σε ένα αντιπλημμυρικό έργο του Νείλου. Μολονότι το έργο ουδέποτε ολοκληρώθηκε , ο Alhazen παρήγαγε στην Αίγυπτο το σημαντικότερο επιστημονικό έργο του την *Οπτική* σε επτά βιβλία. Η *Οπτική* μεταφράστηκε στα λατινικά στις αρχές του δέκατου τρίτου αιώνα και μελετήθηκε και σχολιάστηκε επανειλημμένα στην Ευρώπη τους επόμενους αιώνες. Μέσα από το έργο του φαίνεται ότι κατέχει πλήρως τόσο τη στοιχειώδη όσο και την ανώτερη Γεωμετρία των Ελλήνων (Katz, 2013).

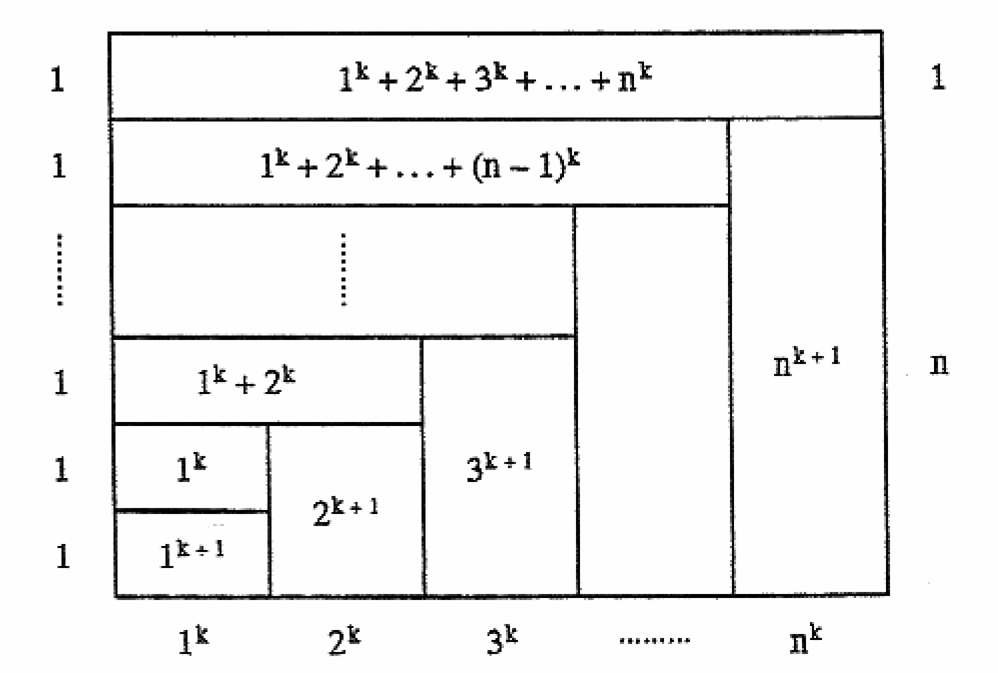
Ο Alhazen υπολόγισε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$ γύρω από τον οριζόντιο άξονα y=1.Ο όγκος αυτός γνωρίζουμε σήμερα ότι ισούται με :

$$V=\pi\cdot\int_0^1\left(1-x^2\right)^2dx=\pi\cdot\int_0^1 dx - 2\pi\cdot\int_0^1 x^2dx+\pi\cdot\int_0^1 x^4dx=\frac{8}{15}\pi$$

Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα $\int_0^1 dx$ και $\int_0^1 x^2dx$ είχαν υπολογιστεί από τον Αρχιμήδη. Το τελευταίο όμως ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^4dx$ απαιτεί τη γνώση του αθροίσματος $1^4+2^4+....n^4$ που δεν βρίσκεται στον Αρχιμήδη. Ο Alhazen υπολόγισε αυτό το άθροισμα με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου

$$\left(1^k+2^k+.....+n^k\right)\cdot\left(n+1\right)=\left(1^{k+1}+2^{k+1}+.....+n^{k+1}\right)+1^k+\left(1^k+2^k\right)+....+\left(1^k+2^k+....+n^k\right)$$

που ανακάλυψε εποπτικά με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος :



Εφαρμόζοντας τον αναδρομικό τύπο για κ=0,1,2,3 προκύπτουν αντίστοιχα οι ισότητες:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \quad \text{και}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{4} + \frac{3n^2}{10} + \frac{n}{30}$$

Θεωρητικά μπορούμε να προχωρήσουμε σ' αυτούς τους υπολογισμούς όσο θέλουμε και να υπολογίσουμε όλα τα αθροίσματα αυτής της μορφής και κατά συνέπεια με σύγχρονη ορολογία τα αντίστοιχα ολοκληρώματα πολυωνυμικών συναρτήσεων, αν και είναι σαφές ότι η πολυπλοκότητα των υπολογισμών αυξάνεται. Ο αναδρομικός τύπος του Alhazen έχει το πλεονέκτημα να παράγει μόνος του όλους τους τύπους για τα αθροίσματα δυνάμεων των πρώτων φυσικών αριθμών , ενώ οι συνήθεις αποδείξεις μερικών τέτοιων περιπτώσεων με επαγωγή έχουν το μειονέκτημα ότι η απόδειξη μπορεί να προχωρήσει μόνο όταν γνωρίζουμε τι ακριβώς θέλουμε να αποδείξουμε. Ο τύπος του Alhazen έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του ολοκληρώματος και αποτέλεσε, υπό κάποια έννοια, το αλγεβρο-υπολογιστικό συμπλήρωμα που έλειπε από τον Αρχιμήδη (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Ο Alhazen άφησε ποικιλία έργων μαθηματικών, αστρονομικών και φιλοσοφικών. Του ίδιου συγγραφέα είναι επίσης γνωστή μία πραγματεία για τον τετραγωνισμό του κύκλου, η οποία όμως καθώς αποτελεί μία ανάπλαση παλαιών παρατηρήσεων που οφείλονται στον Ιπποκράτη τον Χίο, δεν προσθέτει τίποτα το αξιόλογο στα όσα γνωρίζουμε για το περίφημο πρόβλημα και μάλλον μειώνει παρά αυξάνει τη φήμη του συγγραφέως (Loria, 1971).

Al Kaschi

Ένας άλλος μαθηματικός ο Al-Kaschi (1380-1429) έγραψε πολλά έργα στα αραβικά και στα περσικά συνεισφέροντας πολλά και στην αστρονομία. Είναι αξιοσημείωτη η ακρίβεια των υπολογισμών του ειδικά αυτών που αφορούν την επίλυση εξισώσεων με τη μέθοδο Horner την οποία ίσως να έμαθε από τους Κινέζους. Ο AlKaschi κατέχει εξέχουσα θέση στην ιστορία των δεκαδικών κλασμάτων. Ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τα εξηνταδικά κλάσματα για να δείξει ότι οι δεκαδικοί είναι εξίσου σημαντικοί στα προβλήματα που απαιτούν μεγάλη ακρίβεια. Εξέφρασε το 2π στη μορφή 6,2831853071795865 την οποία ως τα τέλη του δέκατου έκτου αιώνα κανένας μαθηματικός δεν μπόρεσε να πλησιάσει. Με το θάνατο του AlKaschi σηματοδοτείται το τέλος των αραβικών μαθηματικών εφόσον η πολιτιστική κατάρρευση του μουσουλμανικού κόσμου ήταν πολύ πιο έντονη από την πολιτική αποσύνθεση της αυτοκρατορίας (Boyer& Merzbach, 1997).

$16^{ος}$-$17^{ος}$ αιώνας

Εισαγωγή

Με την έλευση του $13^{ου}$ αιώνα όλα σχεδόν τα σημαντικά έργα της ελληνικής επιστήμης είχαν πλέον μεταφραστεί στα λατινικά. Ειδικότερα καθοριστική κρίνεται η πρώτη έκδοση των έργων του Αρχιμήδη με τα ελληνικά πρωτότυπα και βελτιωμένη μετάφραση που έγινε από τον Thomas Gechauff (Venatorius) το 1544 στη Βασιλεία της Ελβετίας. Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλο, Γιαννακούλια (1999) η μετάφραση των έργων του Αρχιμήδη στα λατινικά είχε μία τεράστια επίδραση στην μαθηματική εξέλιξη της Ευρώπης σε δύο στάδια. Από τη στιγμή εκείνη μέχρι περίπου το 1675, το μεταφρασμένο έργο του Αρχιμήδη επηρέασε με τρόπο καθοριστικό την εξέλιξη των μαθηματικών στην Ευρώπη. Σε πρώτο στάδιο προκάλεσε το ενδιαφέρον των μαθηματικών της εποχής, και την μελέτη, με τις μεθόδους του Αρχιμήδη, διαφόρων προβλημάτων ολοκλήρωσης, υπολογισμού εμβαδών και όγκων, και κέντρου βάρους. Σε δεύτερη φάση επηρέασε την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού από την αρχή του 17ου αιώνα. Η διαπίστωση του N. Bourbaki (1976) εκφράζει επιγραμματικά τη μεγάλη συμβολή του Συρακούσιου: «στα κείμενα των ιδρυτών του απειροστικού λογισμού μέχρι το 1670 ένα όνομα εμφανίζεται ασταμάτητα, το όνομα του Αρχιμήδη. Πολλοί τον μεταφράζουν και τον σχολιάζουν, όλοι από τον Fermat μέχρι τον Barrow τον αναφέρουν ζηλεύοντάς τον και όλοι δηλώνουν ότι στα έργα του βρίσκουν ένα πρότυπο και μία πηγή έμπνευσης».

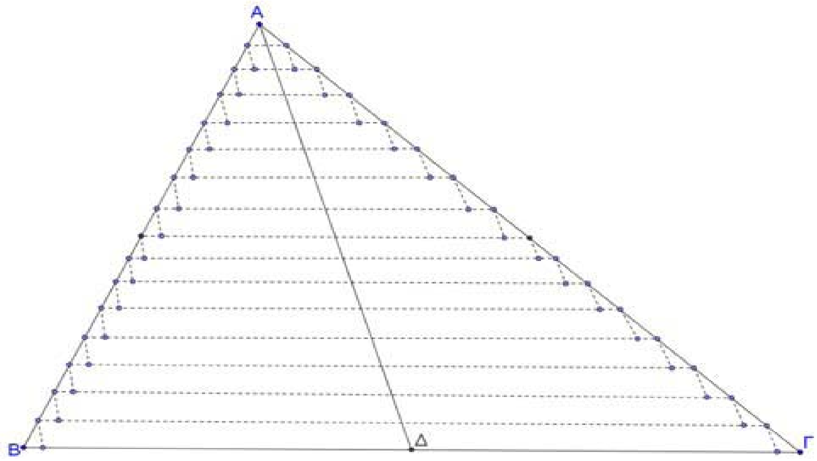
Παρά το γεγονός ότι τα επιτεύγματα του Αρχιμήδη αποτελούσαν την κύρια έμπνευση για την επανέναρξη της μαθηματικής προόδου, είχε έρθει το πλήρωμα του χρόνου για την ανάπτυξη νέων μεθόδων, οι οποίες θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην έρευνα των προβλημάτων εμβαδών και όγκων με μεγαλύτερη ευκολία από ότι μπορούσε η μέθοδος της εξάντλησης με τις αποδείξεις της διπλής εις άτοπον απαγωγής. Ενώ συνεχίζουν να θεωρούν τις αρχιμήδειες αποδείξεις ως το απόλυτο μοντέλο αυστηρότητας και ακρίβειας, το αναγεννησιακό μαθηματικό μυαλό ενδιαφέρεται περισσότερο για γρήγορα νέα αποτελέσματα και μεθόδους ταχείας ανακάλυψης σε σχέση με τις αυστηρές απαιτήσεις της αυστηρής απόδειξης (Edwards, 1979). Έτσι, ενώ το κίνητρο στην αρχαία Ελλάδα για την εξέλιξη των μαθηματικών ήταν φιλοσοφικό και θεωρητικό, κατά τον 17^{o} αιώνα το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη των μαθηματικών ήταν η αναζήτηση της γνώσης που θα χρησίμευε για τη θεμελίωση της επερχόμενης τεχνολογικής ανάπτυξης. Πολλά θεμελιώδη μαθηματικά που χρησιμοποιούσαν τις έννοιες του απειροστικού λογισμού προέρχονταν από τη μελέτη της αστρονομίας, της μηχανικής, της φυσικής (την ταχύτητα, την κίνηση των πλανητών) με στόχο όχι μόνο θεωρητικό αλλά σε μεγάλο βαθμό την αύξηση των πρακτικών γνώσεων σε μία εποχή που χαρακτηρίζονταν από την κινητικότητα, την ανάπτυξη του εμπορίου και της ναυσιπλοΐας. Σύμφωνα με τους Νεγρεπόντη κ.α.(1999) υπήρχε και κάποιο μαθηματικό υπόβαθρο για τη διαφοροποίηση αυτή στη μαθηματική σκέψη. Οι αρχαίοι Έλληνες, πιθανότατα επηρεασμένοι από τα παράδοξα του Ζήνωνα, είχαν απορρίψει κάθε άπειρη διαδικασία και έννοια ορίου, τουλάχιστον στην επίσημη εκδοχή τους. Κατά το Μεσαίωνα τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και ιδιαίτερα του Αρχιμήδη δεν ήταν προσιτά και μεταφρασμένα και γι’ αυτό υπήρχε η ευχέρεια να αναπτυχθούν πιο ελεύθερες και πολύ λιγότερο μαθηματικά ακριβείς αντιλήψεις για τις άπειρες διαδικασίες, αντιλήψεις που προετοίμασαν το έδαφος για την αποδοχή των απειροστικών διαδικασιών κατά τον 17^{o} αιώνα. Έτσι, κατά τον 17ο αιώνα οι απειροστικές διαδικασίες γίνονται αποδεκτές και αποτελούν πλέον ένα από τα πιο ισχυρά όπλα στη φαρέτρα ενός μαθηματικού. Κομβικά σημεία για τις εξελίξεις είναι η ανακάλυψη από τον Francois Viète (γνωστότερο ως Vieta, 1540-1603) της συμβολικής άλγεβρας το 1591 και της αναλυτικής γεωμετρίας από τους Κατρέσιο (Renè Descartes, 1596-1650) και Pierre de Fermat (1601-1665) στη διάρκεια της δεκαετίας του 1630.

Το 1558 ο F.Commandino εξέδωσε τα έργα του Αρχιμήδη και μ’ αυτό τον τρόπο κατέστησε προσιτή στους μαθηματικούς την αρχαία μέθοδο ολοκλήρωσης. Ο υπολογισμός του κέντρου βάρους έγινε τότε και πάλι το αγαπημένο θέμα των επιστημόνων που ασχολούνταν με τη μελέτη του έργου του. Η επαφή του Commandino με το έργο του Αρχιμήδη τον οδηγεί να γράψει μια πραγματεία που σε ύφος θυμίζει τον μεγάλο Συρακούσιο με τίτλο *Βιβλίο κέντρου βάρους στερεών*.

Ανάμεσα στους μελετητές του έργου του Αρχιμήδη ξεχωρίζουν ο φλαμανδός μηχανικός Simon Stevin που έγραψε για το κέντρο βάρους και την υδραυλική, ο ιταλός Luca Valerio που έγραψε για το κέντρο βάρους και τον τετραγωνισμό της παραβολής και ο Γκιυλντέν Paul Guildin (Γκιυλντέν) που στο έργο του *Βαρυκεντρική* βρίσκουμε το θεώρημα για την κεντροειδή καμπύλη, το οποίο φέρει το όνομά του, αν και είχε ήδη παρουσιαστεί από τον Πάππο. Οι Stevin και Valerio ήταν οι πρώτοι που με άμεση προσφυγή στο όριο, στην έννοια του οποίου δεν αναφέρονται, τείνουν να αποφύγουν τη διπλή αντίφαση της μεθόδου της εξάντλησης. Και οι δύο επηρέασαν όπως θα δούμε παρακάτω τους Kepler, Cavalieri και Gregoire de Saint Vincent.

Simon Stevin

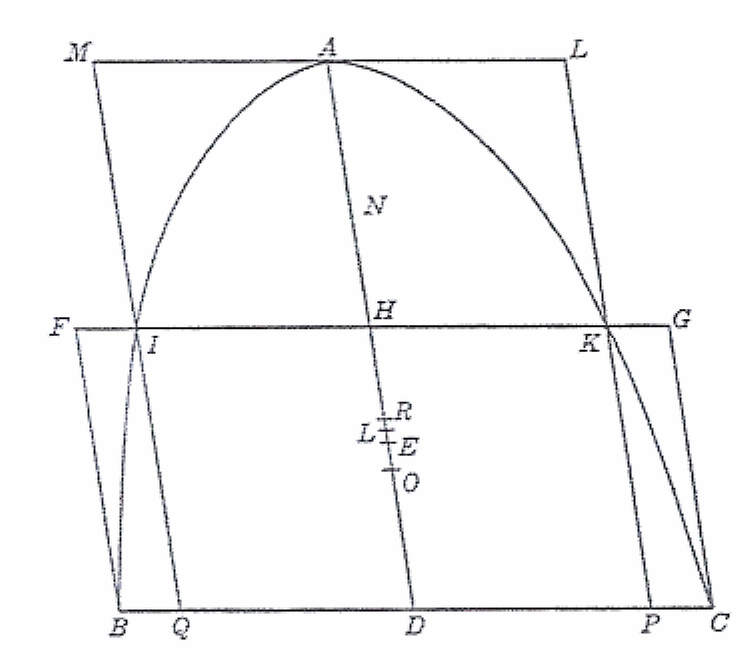
Ο Simon Stevin (1548-1620) γεννήθηκε στη Φλαμανδία (Βέλγιο) αλλά έζησε την ενήλικη ζωή του στην Ολλανδία. Ασχολήθηκε με την άλγεβρα, τη γεωμετρία, την οπτική και τη φυσική. Εισήγαγε το δεκαδικό σύστημα για την αναπαράσταση των κλασμάτων και επινόησε το παραλληλόγραμμο των δυνάμεων. Έγραψε τις πραγματείες του στα φλαμανδικά, θεωρώντας ότι είναι μία εξαιρετικά εύχρηστη γλώσσα για τη σπουδή των θετικών επιστημών. Διακρίθηκε τόσο ως μαθηματικός, όσο και ως μηχανικός (αν και εκείνη την εποχή τα όρια των δύο επιστημών δεν ήταν διακριτά) κυρίως στη στατική και την υδροστατική. Όμως καθώς τα φλαμανδικά δεν ήταν μια γλώσσα αρκετά διαδεδομένη, το έργο του παρέμενε άγνωστο μέχρι να μεταφραστεί στα γαλλικά και τα λατινικά. Μολονότι ο Stevin ήταν μεγάλος θαυμαστής των θεωρητικών μελετών του Αρχιμήδη τα γραπτά του διακατέχονται από μία πρακτικότητα η οποία είναι χαρακτηριστική της αναγεννησιακής περιόδου αλλά όχι της κλασσικής αρχαιότητας. Μελετώντας μεθόδους για τον υπολογισμό εμβαδών διαφοροποιήθηκε από τον Αρχιμήδη, χρησιμοποιώντας μόνο εγγεγραμμένα σχήματα, και ενώ για τον Αρχιμήδη η διαφορά των εμβαδών των χρησιμοποιούμενων σχημάτων μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή, αλλά ποτέ δεν έπαυε να υπάρχει, για τον Stevin αυτή η διαφορά γινόταν ολοένα και μικρότερη και στο άπειρο εξαφανιζόταν. Την εποχή που έζησε ο Stevin η εύρεση του κέντρου βάρους ενός σχήματος με μαθηματικό τρόπο ήταν απαραίτητη για την εκτίμηση της ευστάθειας που χρησίμευε στην αρχιτεκτονική και τη ναυπηγική. Ο Stevin ορίζει το κέντρο βάρους, ως το σημείο από το οποίο αν αναρτηθεί το στερεό να ισορροπεί και στο δεύτερο βιβλίο του Στατική (1586) αποδεικνύει ότι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου βρίσκεται στη διάμεσό του: Στο τρίγωνο εγγράφουμε μερικά παραλληλόγραμμα, ίσου ύψους, των οποίων οι πλευρές είναι ανά ζεύγη παράλληλες προς τη μία μεριά του τριγώνου και της αντίστοιχης διαμέσου , όπως στο παρακάτω σχήμα.



Το κέντρο βάρους των εγγεγραμμένων σχημάτων θα βρίσκεται πάνω στη διάμεσο, όπως γνωρίζουμε από την Αρχιμήδεια αρχή που λέει ότι τα αμφίπλευρα συμμετρικά σχήματα ισορροπούν. Μπορούμε όμως να εγγράψουμε στο τρίγωνο έναν άπειρο αριθμό τέτοιων παραλληλογράμμων και όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο αριθμός παραλληλογράμμων τόσο μικρότερη θα είναι η διαφορά ανάμεσα στο εγγεγραμμένο σχήμα και το τρίγωνο. Εφόσον η διαφορά αυτή μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε, το κέντρο βάρους του τριγώνου βρίσκεται επίσης πάνω στη διάμεσο.

O Stevin θεωρούσε ότι η προσέγγιση του σε αυτού του είδους τα προβλήματα ήταν μια ενδιαφέρουσα τροποποίηση της μεθόδου του Αρχιμήδη. Αυτό φαίνεται στην απόδειξη που δίνει στην πρόταση που αφορά το κέντρο βάρους κωνοειδούς τμήματος, όπου προχωρεί περισσότερο από τη μέθοδο της εξάντλησης, καθώς οι διαδοχικές διαιρέσεις γίνονται μικρότερες από μία δοσμένη ποσότητα οσοδήποτε μικρή.

«Περί το τμήμα ABC περιγράφει δύο κυλινδρικά τμήματα FGCB και MLKI .



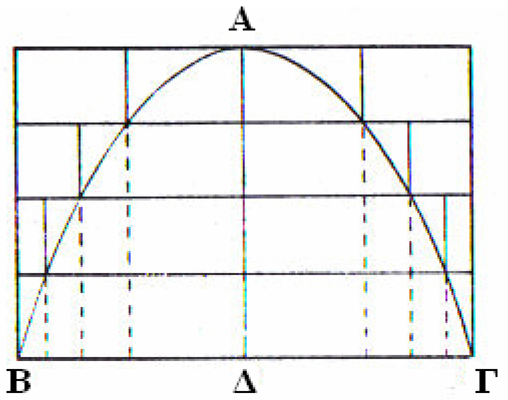
Από την αρχή της ισορροπίας των αμφίπλευρων συμμετρικών σχημάτων τα κέντρα βάρους αυτών των κυλινδρικών τμημάτων βρίσκονται στο μέσον των αξόνων τους AH και HD, στα σημεία N και O αντίστοιχα. Και το κέντρο βάρους ολόκληρου του περιγεγραμμένου σχήματος βρίσκεται στο R, με NR=2RO.Έστω E σημείο τέτοιο ώστε AE=2ED. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ER=$\frac{1}{12}$AD.Αν στη συνέχεια περιγραφούν γύρω από το τμήμα ABC τέσσερα κυλινδρικά τμήματα ίσου ύψους, το κέντρο βάρους αυτού του περιγεγραμμένου σχήματος βρίσκεται ότι θα κείται πάνω από το E, στο σημείο L, τέτοιο ώστε EL=$\frac{1}{24}$AD. Διπλασιάζοντας διαδοχικά τον αριθμό αυτών των κυλίνδρων, το κέντρο βάρους του περιγεγραμμένου σχήματος παραμένει πάντα πάνω από το E και θα διαφέρει από το E κατά $\frac{1}{48}\text{AD}, \frac{1}{96}\text{AD}$ κ.ο.κ. Έτσι το κέντρο βάρους κατεβαίνει, πλησιάζει το E όλο και πιο κοντά. Με τα σύγχρονα μαθηματικά θα συμπεράνουμε ότι το E είναι το όριο του κέντρου βάρους του περιγεγραμμένου σχήματος και επομένως και του κέντρου βάρους του κωνοειδούς τμήματος. Ο Stevin πάντως, μόνο μετά από προσεκτική παρατήρηση φθάνει στο συμπέρασμα ότι όμοια το κέντρο βάρους του ανάλογου εγγεγραμμένου σχήματος κατά τον ίδιο τρόπο πλησιάζει το Ε.

Η απόδειξη η οποία δίνεται από τον Stevin, στην παραπάνω πρόταση με τους όρους της ακολουθίας $\frac{1}{12},\frac{1}{24},\frac{1}{48},\frac{1}{96}....$ μπορεί να συγκριθεί με αυτήν που χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης στον τετραγωνισμό της παραβολής στην οποία εμφανίζεται το άθροισμα $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+.....$

Αν και με την ακολουθία φθάνει τόσο κοντά στην έννοια του ορίου, διστάζει να την σχηματοποιήσει και να την κατονομάσει. Η μεγαλοφυΐα του Αρχιμήδη αποφεύγει αυτόν τον σκόπελο με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, ενώ ο Stevin χρησιμοποιεί την μέθοδο των δύο ακολουθιών, οι οποίες πλησιάζουν το σημείο από πάνω και κάτω. Θα πρέπει να τονίσουμε πως το έργο του Stevin αποτελεί ίσως την πιο σημαντική φάση μεταξύ του έργου του Αρχιμήδη και της δημιουργίας του απειροστικού λογισμού κατά τον $17^{ο}$ αιώνα. Η μεθοδολογία του θα βρει την δικαίωσή της, πενήντα χρόνια μετά, στη θεωρία των αδιαιρέτων του Cavalieri (Φίλη, 2010).

Luca Valerio

Ο ιταλός Luca Valerio (1552-1618) με το έργο του *Για το κέντρο βάρους των στερεών* (1604) συνεχίζει την ίδια προαναφερθείσα προσπάθεια για τη μελέτη των στερεών. Μια σημαντική γενίκευση συναντάμε στη $6^η$ πρόταση όπου ο ιταλός καθηγητής θεωρεί ένα κυρτό επίπεδο σχήμα περικλειόμενο από μία καμπύλη όπου έχουν εγγραφεί και περιγραφεί παραλληλόγραμμα. Τότε διατυπώνει πως γενικά η διαφορά των εμβαδών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σχημάτων ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου στη βάση.



Έστω ΒΑΓ τυχόν επίπεδο σχήμα όπου η ΑΔ είναι διάμετρος και ΒΓ είναι χορδή και οι χορδές παράλληλες προς την ΒΓ βαίνουν ελαττωμένες προς το Α. Για τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα έχουμε:

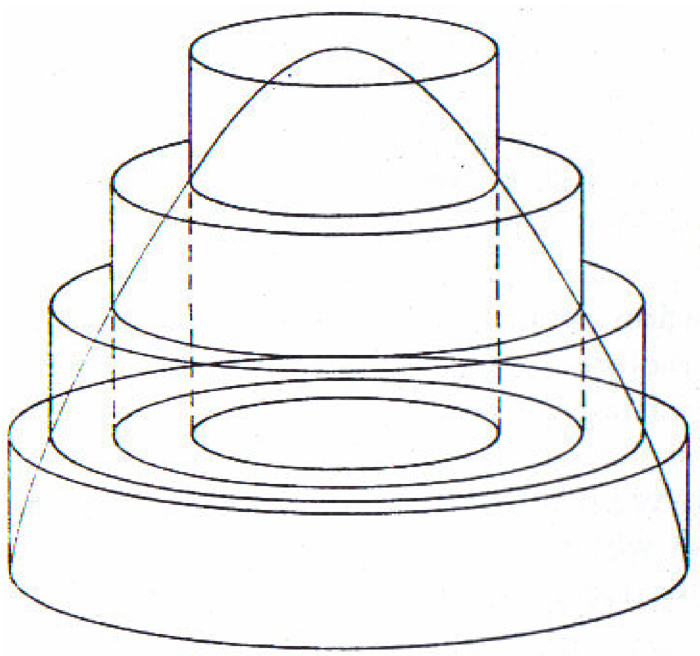
$$I_n = i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_n$$

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n$$

και $C_n - I_n = (c_1 - i_1) + (c_2 - i_2) + ... + (c_n - i_n) = c_n$

Με την κατάλληλη επιλογή του n αυτή η διαφορά μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα οσοδήποτε μικρή. Όμως ο Valerio δεν είναι σε θέση να διατυπώσει το εμβαδόν της καμπύλης ως το όριο των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σχημάτων, όταν ο αριθμός των παραλληλογράμμων πηγαίνει στο άπειρο.

Στην 11η πρόταση ο Valerio επεκτείνει αυτό το θεώρημα σε όγκους στερεών με κυκλικές ή ελλειπτικές βάσεις λαμβάνοντας τις διαφορές $(c_1 - i_1),(c_2 - i_2),(c_3 - i_3),...$ και θέτοντας αυτά το ένα μέσα στο άλλο, όπως ένα σύνολο κουτιών που μπαίνει το ένα μέσα στο άλλο (βλέπε σχήμα).



Αν και ο Valerio δεν προσπαθεί να ορίσει τα εμβαδά και τους όγκους που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο με τη μέθοδο των ορίων, η χρήση που κάνει αυτός αυτών των προτάσεων δείχνει ότι είναι σε θέση, με κατάλληλη επιλογή του n, $|C_n - I_n| < ε$, όπου ε είναι μία τυχούσα ποσότητα, οσοδήποτε μικρή, να συμπεράνει ότι το περικλειόμενο από την καμπύλη (ή την επιφάνεια) εμβαδόν ή όγκος είναι γενικά ίσο με το κοινό όριο, δηλαδή:

$\lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} C_n = E$ (αντίστοιχα V) (Baron, 1969).

Συνεπεία τούτου, παύει να θεωρεί ως απαραίτητη την κατασκευή αμφοτέρων των ακολουθιών σχημάτων (εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων) και χρησιμοποιεί μόνο τη μια εκ των δυο.

Στο βιβλίο ΙΙ αποπειράται την κατασκευή μιας γεωμετρικής θεωρίας ορίων προκειμένου να απαλλαγεί από τις αποδείξεις που περιέχουν την απαγωγή σε άτοπο. Ο στόχος του αφορούσε στη διατύπωση των καταλλήλων συνθηκών, που θα τον οδηγούσαν στο συμπέρασμα ότι το όριο του πηλίκου δυο μεταβλητών ισούται με το πηλίκο των ορίων τους, δηλαδή: $\lim\limits_{n} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\lim\limits_{n} \alpha_n}{\lim\limits_{n} \beta_n}$.

Στα χέρια του Gregoire Saint-Vincent (1537-1612), οι μέθοδοι του Αρχιμήδη καθώς και οι αντηχήσεις τους στα έργα των Stevin και Valerio θα καρπίσουν.
Οι προσπάθειες των επιστημόνων που αναφέραμε, οι οποίοι ωθούμενοι και από πρακτικούς λόγους (κατασκευή γοτθικών ναών, οχυρωματικά έργα κ.α.) προχώρησαν στη συστηματική μελέτη του κέντρου βάρους στερεών, θα βοηθήσουν την επόμενη γενιά των μαθηματικών να συνεχίσει τις έρευνες για τη δημιουργία του απειροστικού λογισμού (Φίλη, 2010). Μάλιστα η M.Baron στο βιβλίο της *Οι απαρχές του ολοκληρωτικού λογισμού* (1969) σημειώνει πως «όλο αυτό το έργο του 17^{ου} αιώνα μπορεί να θεωρηθεί ως το υστερόγραφο των ελληνικών μαθηματικών παρά ως μέρος του κυρίου ρεύματος ανάπτυξης του 17^{ου} αιώνα.»

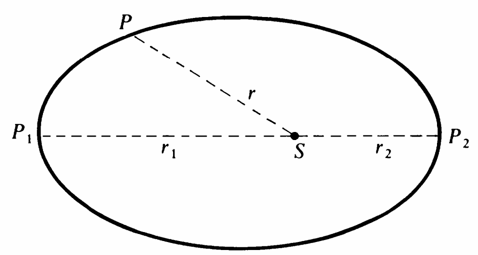
Η εισαγωγή της ελεύθερης χρήσης των απειροστών

Johannes Kepler

Μεταξύ των πρώτων μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα που επιχείρησαν να εγκαταλείψουν την αποδεικτική μέθοδο των αρχαίων ελλήνων και να εισάγουν την ελεύθερη χρήση των απειροστών, για τον υπολογισμό των εμβαδών και όγκων, ήταν ο Johannes Kepler (1571-1630). Ο Kepler σπούδασε θεολογία, μαθηματικά και αστρονομία στο πανεπιστήμιο του Tübingen κατά την περίοδο 1589-1594, και υπήρξε μεταξύ των ηγετών της «εξέγερσης» ενάντια στην εκκλησιαστική κυριαρχία, που για αιώνες είχε σταθεί εμπόδιο στη γόνιμη επιστημονική πρόοδο. Από τη μελέτη των έργων των αρχαίων ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων ιδιαίτερη επίδραση δέχθηκε από τους Πυθαγόρειους και τον Αρχιμήδη. Επηρεασμένος βαθιά από την κοσμοθεωρία των Πυθαγορείων άρχισε μία μεταφυσική έρευνα για τις αρμονίες που βρίσκονταν πίσω από τα ορατά φαινόμενα και εκφράζονταν με απλές αριθμητικές σχέσεις, που συνιστούσαν τη φύση των πραγμάτων και την αρμονική του κόσμου, η οποία φαινόταν στην κίνηση των πλανητών και την μουσική. Η γεωμετρία για τον Kepler αποτελούσε το πρότυπο της φυσικής δημιουργίας και ήταν έμφυτη στο νου (Γιαννακούλιας, 2007).

Ένα ζήτημα που τον απασχόλησε ιδιαίτερα ήταν η μορφή του σχήματος της τροχιάς των πλανητών. Οι έλληνες φιλόσοφοι πίστευαν ότι η κυκλική κίνηση ήταν το ιδανικό σχήμα και τα ουράνια σώματα μπορούσαν να κινούνται μόνο σε κυκλική τροχιά. Η αντίληψη αυτή διατηρήθηκε και στη θεωρία του Κοπέρνικου. Ο Kepler έφτασε στο συμπέρασμα ότι αυτή η άποψη ήταν λαθεμένη. Γύρω στα 1600 με την καθοδήγηση του Δανού αστρονόμου Tycho Brahe, καθώς μελετούσε τις κινήσεις του Άρη έκανε μία σημαντική ανακάλυψη: Ο Άρης στην κίνησή του γύρω από τον ήλιο δεν διαγράφει περιφέρεια κύκλου, αλλά έλλειψη. Το 1604 κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι τροχιές όλων των πλανητών ήταν ελλειπτικές. Άρχισε τότε να μελετάει τον Απολλώνιο που είχε διερευνήσει πλήρως την έλλειψη γεωμετρικά. Το 1609 ανακοίνωσε τους πρώτους δύο νόμους για την αστρονομία: (1) οι πλανήτες κινούνται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτικές τροχιές με τον ήλιο στη μία εστία, και (2) η ακτίνα που συνδέει τον πλανήτη με τον ήλιο κατά την περιστροφή του γύρω από αυτόν διαγράφει σε ίσα χρονικά διαστήματα ίσα εμβαδά. Οι νόμοι του Kepler αποτέλεσαν τα μαθηματικά μοντέλα με τα οποία άρχισε η κυριαρχία της δυναμικής του ηλιακού συστήματος, και έδωσαν μία πλήρη απάντηση σε ερωτήσεις που βασάνισαν αρκετούς διανοητές, όπως τον Εύδοξο, τον Αρίσταρχο, τον Πτολεμαίο και τον Κοπέρνικο.

Ο δεύτερος νόμος , που δημοσιεύτηκε το 1609, προέκυψε από έναν περίεργο συνδυασμό παραγόμενων λαθών. Ο Kepler αρχικά συνήγαγε από αστρονομικές παρατηρήσεις ότι όταν ένας πλανήτης βρίσκεται σε οποιαδήποτε από τις αψίδες του, (στα πλησιέστερα και στα πιο απομακρυσμένα σημεία στην τροχιά του από τον ήλιο), η ταχύτητά του v είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασής του r από τον ήλιο. Έτσι αν v_1 και v_2 είναι οι ταχύτητές του στο αφήλιο P_1 και στο περιήλιο P_2 (σχήμα 1), τότε υπάρχει μία σταθερά κ τέτοια ώστε $v_1 = \frac{k}{r_1}$ και $v_2 = \frac{k}{r_2}$. (1)



Σχήμα 1

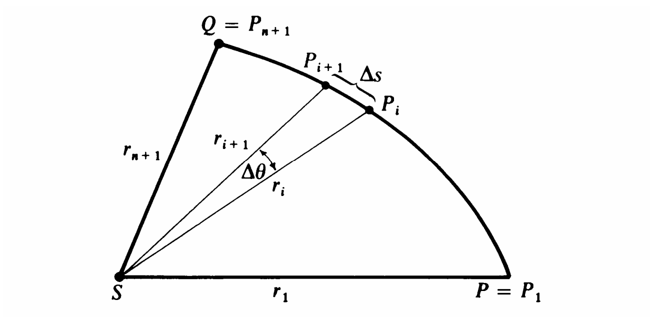
Επομένως φιλοδοξούσε να αποδείξει ότι αυτό ισχύει σε κάθε σημείο P της τροχιάς,

$$v = \frac{k}{r} \qquad (2).$$

Όμως αυτό το 'θεώρημα' είναι εσφαλμένο- στην πραγματικότητα η ταχύτητα στο P είναι αντιστρόφως ανάλογη (όπως αποδεικνύεται) προς την κάθετη απόσταση από το S στην εφαπτομένη της έλλειψης στο P (η απόσταση αυτή είναι ίση με r μόνο στις αψίδες όπου η εφαπτομένη και το διάνυσμα ακτίνας τυχαίνει να είναι σε κάθετη διεύθυνση).

Παρ' όλα αυτά ο Kepler προχώρησε με βάση την εσφαλμένη σχέση (2).

Προκειμένου να υπολογίσει το χρόνο t που απαιτείται για να διασχίσει ένα τόξο PQ της τροχιάς του διαίρεσε το τόξο σε ένα μεγάλο αριθμό υποτόξων ίσων μηκών Δs (σχήμα 2)



Σχήμα 2

Αν r_i είναι η απόσταση SP_i από τον ήλιο έως το αρχικό σημείο P_i στο ιοστό υποτόξο P_iP_{i+1}, v_i η ταχύτητα στο P_i, και t_i ο απαιτούμενος χρόνος για να διασχίσει ο πλανήτης αυτό το υποτόξο, τότε η (2) δίνει:

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{v_i} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s \qquad (3)$$

Έτσι η (εσφαλμένη) σχέση $v=\frac{k}{r}$ συνεπάγεται ότι ο χρόνος είναι ανάλογος προς το άθροισμα των ακτίνων $\sum_1^n r_i$.

Σε αυτό το σημείο ο Kepler υποθέτει λανθασμένα ότι το ίδιο άθροισμα είναι ανάλογο προς την επιφάνεια SPQ, λέγοντας:

Επειδή γνώριζα ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός σημείων στην τροχιά και συνεπώς ένας άπειρος αριθμός αποστάσεων (από τον ήλιο) σκέφτηκα πως το άθροισμα αυτών των αποστάσεων περιέχεται στο εμβαδόν της τροχιάς. Θυμάμαι πως με τον ίδιο τρόπο ο Αρχιμήδης διαίρεσε τον κύκλο σε έναν άπειρο αριθμό τριγώνων (Kostler, 1968).

Η σκέψη του εδώ θυμίζει την ευρετική παραγωγή της επιφάνειας του κύκλου τον πέμπτο αιώνα π.Χ από τους Έλληνες (μάλλον από τον Αρχιμήδη). Αν το i-κομμάτι ή αδιαίρετο της επιφάνειας ήταν ένα τρίγωνο με βάση r_i και ύψος Δs, τότε θα προέκυπτε ότι:

$$A \cong \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s \qquad (4)$$

και αυτό σε συνδυασμό με την (3)θα έδινε ότι

A=ht (h=k/2). (5)

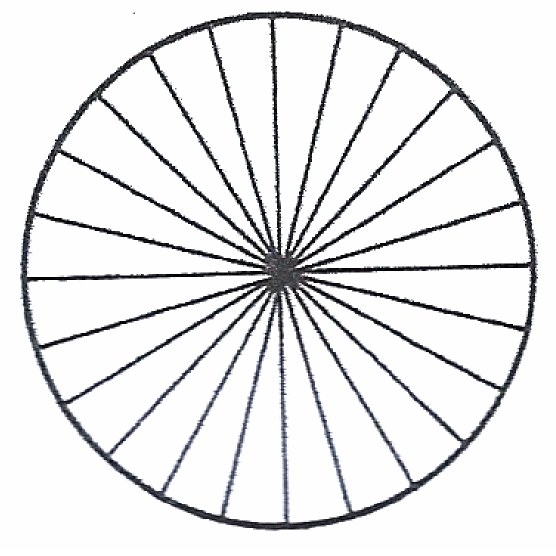
Με αυτόν τον τρόπο ο Kepler συνήγαγε το δεύτερο (σωστό) νόμο, ότι η περιοχή που σαρώνεται είναι ανάλογη προς το χρόνο που παρήλθε.

Ο Kepler πουθενά δεν ισχυρίζεται πως η μέθοδός του είναι αυστηρή, αντίθετα δηλώνει πως «μπορούμε να λάβουμε απόλυτες και τέλειες αποδείξεις από τα ίδια τα βιβλία του Αρχιμήδη» (Edwards, 1979).

Πολλά αστρονομικά προβλήματα με τα οποία ασχολήθηκε απαιτούσαν τον υπολογισμό τριγωνομετρικών ολοκληρωμάτων, που σε κάποιες περιπτώσεις μη μπορώντας να επινοήσει θεωρητικές μεθόδους αναγκάστηκε να προσφύγει σε αριθμητικές, προσεγγιστικές αθροίσεις. Για παράδειγμα σε ένα από τα προβλήματα σχετικά με τη θεωρία του πλανητικού μαγνητισμού, στο οποίο η «σφαίρα» του πλανήτη θεωρείται ως μαγνήτης, μετά από πολλές προσπάθειες καθορισμού των σχέσεων μεταξύ ελκτικών και απειροστικών δυνάμεων, τελικά καταλήγει στο συμπέρασμα ότι πρέπει να χωρίσει το τόξο σε άπειρα μικρά ίσα μέρη και να βρει το άθροισμα των χορδών των τόξων. Έτσι καταλήγει στο συμπέρασμα, το οποίο με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με $\int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta = 1-\cos\alpha$. Σε κάποιο άλλο πρόβλημα αδυνατεί να λύσει το ελλειπτικό ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^{\alpha} r d\theta$, όπου $r = k\sqrt{1+2r\cos\theta+e^2}$ και χωρίζει το τόξο σε διάστημα 1^o, υπολογίζει τις τιμές του r και αθροίζει.

Ο Kepler συνέβαλε με το έργο του στη δημιουργία του απειροστικού λογισμού. Όμως για τις ιδέες του γι αυτή την καινούρια επιστήμη επηρεάστηκε πολύ από τον δάσκαλό του τον καρδινάλιο Nicolaus von Cusa (1401-1464).Ο θεϊκός Cusanus, όπως τον αποκαλεί ο Kepler με τις ιδέες του για το άπειρο και τα απειροστά θα οδηγήσει τον ονομαστό αστρονόμο να διατυπώσει το 1615 τις απόψεις του στο έργο του *Καινούρια στερεομετρία των κρασοβάρελων* όπου υπάρχει μία αξιοθαύμαστη συλλογή απειροστικών μεθόδων για τον υπολογισμό όγκων εκ περιστροφής. Το έργο αυτό υπαγορεύτηκε από πρακτικές ανάγκες, για τον καθορισμό δηλαδή καλύτερων αναλογιών στα βαρέλια καθώς τότε στην Αυστρία διακινούνταν μέσω του Δούναβη μεγάλες ποσότητες οίνου. Το βιβλίο αυτό αποτελείται από τρία μέρη. Το πρώτο περιέχει στερεομετρικά προβλήματα στο πνεύμα του Αρχιμήδη, μαζί με ένα συμπλήρωμα που περιέχει 92 στερεά, που δεν εξέτασε ο μεγάλος Συρακούσιος, στο δεύτερο ασχολείται με τη μέτρηση των κρασοβάρελων και το τρίτο μέρος περιλαμβάνει γενικές εφαρμογές. Στο έργο του αυτό, ο Kepler χρησιμοποιεί ελεύθερα τα απειροστά και εισάγει στην καθημερινή γλώσσα τη λέξη και την έννοια του απείρου (Φίλη, 2010).

Με το έργο του άνοιξε ένα αχανές πεδίο διαλογισμού γύρω από τη φύση των απειροστών. Θεωρούσε ότι ο κύκλος αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό τριγώνων, με κοινή κορυφή το κέντρο του και με άπειρα μικρές βάσεις στην περιφέρειά του, καθιστώντας με αυτόν τον τρόπο οικείες τις έννοιες του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού. Υπολόγισε το εμβαδόν του κύκλου παρατηρώντας ότι τα ύψη των απείρως λεπτών τριγώνων (βλ.σχήμα) ισούνται με την ακτίνα.



Αν ονομάσουμε τις απείρως μικρές βάσεις, που βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια $b_1, b_2, b_3, ... b_n, ...$ τότε το εμβαδόν του κύκλου- δηλαδή το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων- θα είναι $\frac{1}{2}b_1 r + \frac{1}{2}b_2 r + \frac{1}{2}b_3 r + ... + \frac{1}{2}b_n r + ...$ ή $\frac{1}{2}r\left(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...\right)$. Εφόσον το άθροισμα των b είναι η περιφέρεια C το εμβαδόν E του κύκλου θα δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}Cr$, το γνωστό αρχαίο θεώρημα που ο Αρχιμήδης είχε αποδείξει πιο προσεκτικά. Με ανάλογο τρόπο υπολόγισε το εμβαδόν της έλλειψης, ένα αποτέλεσμα του Αρχιμήδη που δε διασωζόταν (Boyer& Merzbach, 1997).

Στις αποδείξεις του υπεισέρχεται με αόριστο τρόπο και η έννοια της συνέχειας εφόσον δεν διέκρινε καμία διαφορά μεταξύ πολυγώνου και κύκλου. Κατά τον Kepler οι επιφάνειες ή οι όγκοι υπολογίζονταν με τη βοήθεια απείρων στοιχείων ίδιας διάστασης. Εφάρμοσε μία γενική μέθοδο προσεγγιστικού υπολογισμού εμβαδών και όγκων με κατάλληλες σχεδιασμένες τομές. Κάποιες φορές όμως υπεισέρχονταν στους υπολογισμούς του και τα αδιαίρετα. Στις περιπτώσεις αυτές πρότεινε μία ατομιστική θεωρία γεωμετρικών σχημάτων , σύμφωνα με την οποία τα σχήματα αυτά θα μπορούσαν να θεωρηθούν ότι συντίθενται από έναν άπειρο αριθμό αδιαίρετων μονάδων, δηλαδή ότι οι γραμμές ήταν ένα άθροισμα σημείων, οι επιφάνειες άθροισμα γραμμών και τα στερεά άθροισμα επιφανειών. Έτσι ταύτιζε το απειροστό εμβαδόν με μία γραμμή και το όλον εμβαδόν με ένα άθροισμα γραμμών. Η μέθοδός του στη στερεομετρία συνίσταται στην τομή του στερεού σε άπειρο αριθμό κομματιών (αδιαίρετα στερεά), μεγέθους και σχήματος κατάλληλου για τη λύση ειδικού προβλήματος. Έτσι για τον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας, θεώρησε ότι η σφαίρα αποτελείται από άπειρο αριθμό κώνων που είχαν την κορυφή τους στο κέντρο της σφαίρας και τις βάσεις, απειροστού μεγέθους, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας την οποία και κάλυπταν. Τον κάθε κώνο τον θεώρησε ως άθροισμα πολύ λεπτών κυκλικών δίσκων υπολογίζοντας με αυτόν τον τρόπο τον όγκο τους.

Αν και δεν υπάρχουν άμεσες ανταλλαγές μεταξύ Kepler και Γαλιλαίου σχετικά με το θέμα των απειροστών, η έκδοση της *Καινούριας στερεομετρίας των κρασοβάρελων* επέδρασε στον Γαλιλαίο και στον μαθητή του Cavalieri ωθώντας τους να αναπτύξουν τις έρευνές τους.

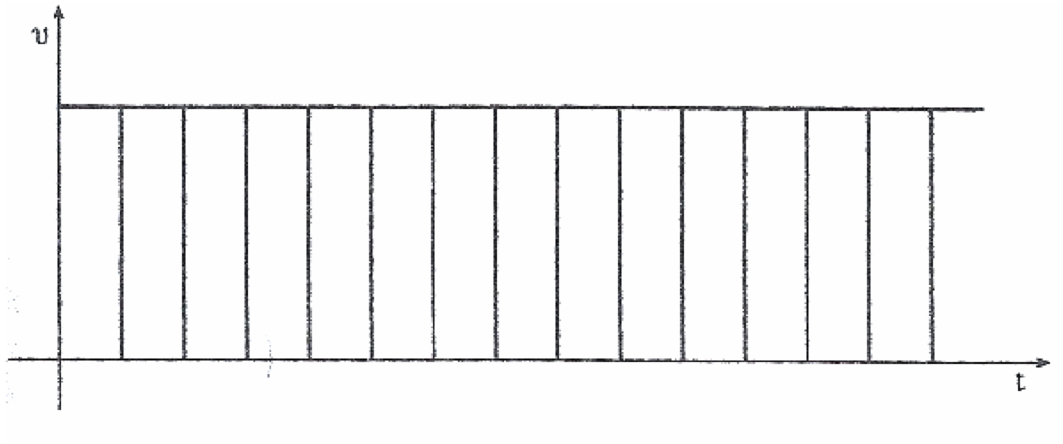
Galileo-Galilei

Ο Galileo-Galilei (Γαλιλαίος , 1564-1642) γεννήθηκε στην Πίζα της Ιταλίας. Το 1581 εγγράφεται στο πανεπιστήμιο για να σπουδάσει ιατρική, πολύ γρήγορα όμως γοητεύεται από τα μαθηματικά και ιδιαίτερα από τη μαθηματική περιγραφή φυσικών φαινομένων που είχε δώσει στα κείμενά του ο Αριστοτέλης. Έτσι 1776 χρόνια μετά το θάνατο του Αρχιμήδη, εμφανίζεται ως ο καλύτερός του μαθητής με επαναστατικές ιδέες. Είναι αυτός που τολμά να κάνει αυτό που δεν τόλμησαν οι αρχαίοι Έλληνες, να θέσει σε κίνηση τη στατική και να συνδέσει το διάστημα με το χρόνο, θεμελιώνοντας μία νέα επιστήμη, τη Μηχανική (Γιαννακούλιας, 2007). Η είσοδός του στην επιστημονική κοινότητα έγινε με τις έρευνες για τα κέντρα βάρους, στην προσπάθεια του να τελειοποιήσει εκείνες που είχε κάνει ο Frederico Commandino για τις στερεομετρικές μελέτες του Αρχιμήδη. Η μελέτη των έργων του Αρχιμήδη έπαιξε σημαντικό ρόλο στις μελέτες του περί των «αδιαιρέτων» οι οποίες είχαν αντικείμενο τη σύσταση της ύλης. Παρ' όλο που ο Γαλιλαίος δεν εξήγησε ποτέ συστηματικά τις ιδέες του για τις απειροστικές μεθόδους, στο μνημειώδες έργο του *Διάλογοι και μαθηματικές αποδείξεις για δύο καινούριες επιστήμες* (1638) παρουσιάζονται οι απόψεις του οι οποίες προβάλλονται στα έργα των μαθητών του Cavalieri και Torricelli. Στο έργο του αυτό όπου ο Γαλιλαίος θεμελιώνει την καινούρια Μηχανική, τον βλέπουμε ως Salviati να συζητά με τον Sagredo και να εξετάζει μερικές από τις βασικές δυσκολίες τις οποίες συναντάμε στη μελέτη του απείρου και του απειροστού. Δίνει το πρώτο παράδειγμα απειροσυνόλου, θέτοντας το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών σε ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα μέρος του π.χ. τα τέλεια τετράγωνα των θετικών ακεραίων (Struik, 1993).

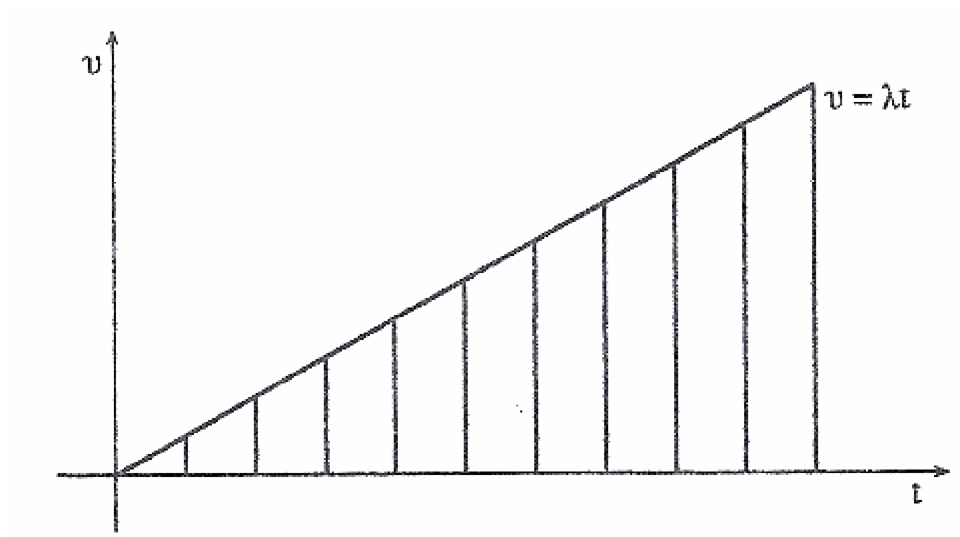
Στον Γαλιλαίο οφείλουμε τη νέα μηχανική για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων, την απαρχή της θεωρίας ελαστικότητας και μία εμπνευσμένη υπεράσπιση του κοπερνίκειου συστήματος. Πάνω απ' όλα οφείλουμε στον Γαλιλαίο –περισσότερο από όσο σε κάθε σύγχρονό του- ότι το πνεύμα που επικράτησε τότε στην επιστήμη βασιζόταν σε μία αρμονία πειράματος και θεωρίας, με έμφαση στην εντατική χρήση μαθηματικών. Στις εργασίες του Γαλιλαίου στηρίχθηκε αργότερα ο Newton για την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού.

Ο Γαλιλαίος το 1604 διατύπωσε το νόμο για την πτώση των σωμάτων αλλά τον εξέφρασε βερμπαλιστικά. Σε επιστολή του προς τον φίλο του Paulo Sapri γράφει: «Οι αποστάσεις που διανύει ένα σώμα που κινείται με φυσική κίνηση είναι ανάλογες με τα τετράγωνα των χρόνων». Δεν κατάφερε όμως να τον εκφράσει στη μορφή: $s=\frac{1}{2}gt^2$ γιατί η άλγεβρα δεν ήταν ακόμη προσαρμοσμένη στην περιγραφή συνεχώς μεταβαλλόμενων μεγεθών. Το έργο του *Διάλογοι και μαθηματικές αποδείξεις για δύο καινούριες επιστήμες* ήταν αυτό που έδωσε στη σύγχρονη επιστήμη τους πρώτους νόμους της. Στην εργασία του αυτή θεώρησε το χρόνο σαν μία αφηρημένη παράμετρο των φυσικών γεγονότων. Αυτό του έδωσε τη δυνατότητα να επιτύχει εκείνο που δεν μπόρεσαν να κάνουν οι αρχαίοι Έλληνες: να εκφράσει ποσοτικά την κίνηση με αριθμούς. Στην εργασία του παρουσιάζεται παντού η έννοια της συνάρτησης, μέσα όμως από συναρτησιακές σχέσεις που προέκυπταν και διατυπώνονταν με τη μέθοδο των αναλογιών. Θεωρώντας ότι τα μαθηματικά ήταν ο ουσιαστικότερος οδηγός για την ερμηνεία της φύσης αναζήτησε μία νέα περιγραφή της μέσα από τη χρήση της μαθηματικής αφαίρεσης.

Ο Γαλιλαίος ήταν γνώστης των γεωμετρικών μεθόδων των αρχαίων Ελλήνων, αλλά γνώριζε επίσης και τις μετατροπές των μεθόδων τους από τους Kepler και Valerio, στον οποίο αναφερόταν αρκετές φορές στο βιβλίο του *Διάλογοι και μαθηματικές αποδείξεις για δύο καινούριες επιστήμες* ως το μεγάλο γεωμέτρη και το νέο Αρχιμήδη της εποχής του. Στο έργο του αυτό θεώρησε το εμβαδόν με παρόμοιο τρόπο όπως ο Kepler. Έδωσε μία εξήγηση της ομοιόμορφης κίνησης και της ταχύτητας με τον ισχυρισμό πως στην περίπτωση που η ταχύτητα υ είναι σταθερή και ίση με την επιτάχυνση g, και s=gt=υt είναι η απόσταση που διανύεται στο χρονικό διάστημα [0,t], τότε η απόσταση s παριστάνεται από το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει βάση ίση με t και ύψος το g.



Στο σημείο αυτό ξέφυγε από την αυστηρότητα του Ευκλείδη, εφόσον ισχυρίστηκε ότι το ορθογώνιο είναι το άθροισμα των καθέτων, κάθε μία από τις οποίες είναι ίση με την ταχύτητα υ, την απόσταση δηλαδή που διανύεται στη μονάδα του χρόνου. Μελετώντας το πρόβλημα της ομοιόμορφα επιταχυνόμενης κίνησης, υπέθεσε ότι η ταχύτητα υ είναι ανάλογη προς το χρόνο t, δηλαδή υ=λt. Το άθροισμα όλων των καθέτων κάτω από τη γραμμή υ=λt, που είναι η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια, για τον Γαλιλαίο ισούται με την ολική απόσταση που διανύθηκε.



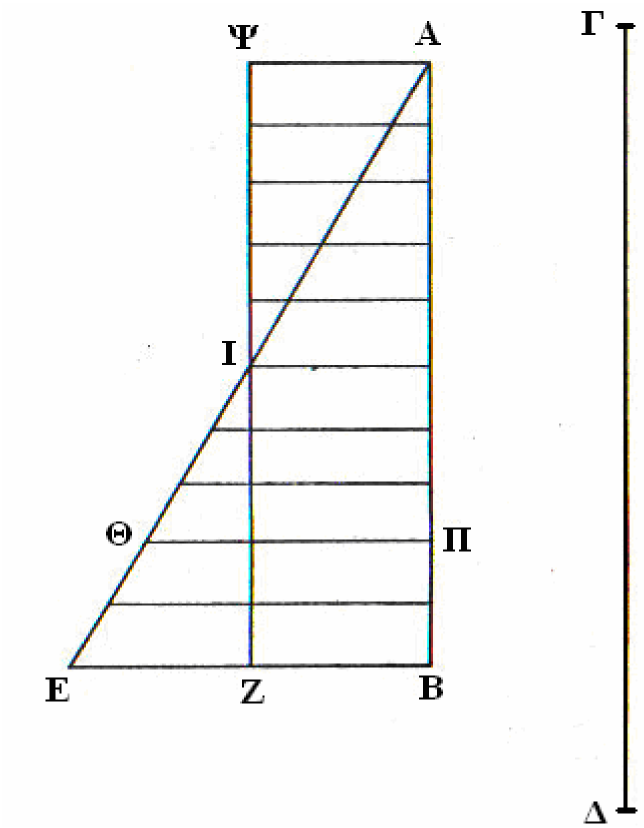
Κάθε γραμμή τη θεώρησε , αφ' ενός σαν μία τοπική ταχύτητα σε μία χρονική στιγμή, και αφ' ετέρου (ταυτόχρονα) σαν μία απειροστή απόσταση που διανύεται, αν πολλαπλασιαστεί με ένα πολύ μικρό διάστημα. Έτσι προκύπτει ότι $s=\frac{1}{2}t\cdot\lambda t=\frac{1}{2}\lambda t^2$.Ο Γαλιλαίος επομένως οραματίστηκε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^t \lambda x dx$ του οποίου την τιμή θεώρησε ίση με $\frac{1}{2}\lambda t^2$.

Ισχυρίστηκε όμως ότι η ταχύτητα της κίνησης $s=\frac{1}{2}\lambda t^2$ όφειλε να ισούται με $υ=\lambda t$, δηλαδή ίση με την παράγωγο της συνάρτησης s αν μιλήσουμε με σύγχρονη ορολογία. Έτσι η σχέση που υπάρχει μεταξύ ολοκληρώματος και παραγώγου φαίνεται να έχει γίνει αντιληπτή για πρώτη φορά μέσα όμως από μία θολή εικόνα των πραγμάτων (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Γαλιλαίος απέδειξε γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Ταχύτητας: *Η μέση ταχύτητα ενός κινητού που κινείται με ομαλώς μεταβαλλόμενη κίνηση ισούται με την ταχύτητα που έχει το κινητό κατά τη χρονική στιγμή* $\frac{1}{2}t$, *όπου t ο χρόνος της κίνησής του.*

Στην πρόταση αυτή δίνει την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία:

Έστω ότι το ΑΒ αντιπροσωπεύει τον χρόνο στον οποίο ένα κινητό, ξεκινώντας από την ηρεμία και κινούμενο με ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση διανύει το διάστημα ΓΔ. Έστω ότι το κινητό ξεκινά από τη θέση Α και στη θέση Β η ταχύτητά του αντιπροσωπεύεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. Τότε οι ευθείες που είναι παράλληλες προς την ΒΕ θα αντιπροσωπεύουν τις ταχύτητες του κινητού κατά τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Βέβαια, οι γραμμές αυτές θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύουν αντίστοιχες χρονικές στιγμές ή απειροστές αυξήσεις του διαστήματος που διανύεται από το κινητό.



Έτσι οι κινήσεις σε μία ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση μπορεί να αντιπροσωπεύονται από τις παράλληλες στο τρίγωνο ΑΒΕ, ενώ ταυτόχρονα οι παράλληλες στο ορθογώνιο ΑΒΖΨ αντιπροσωπεύουν τις αντίστοιχες κινήσεις σε μία ομαλή κίνηση του κινητού. Αλλά το άθροισμα όλων των παραλλήλων που περιέχονται στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι ίσο με το άθροισμα αυτών που περιέχονται στο ορθογώνιο ΑΒΖΨ, όπου $BZ=\frac{1}{2}BE$, αφού τα εμβαδά των δύο σχημάτων είναι ίσα μεταξύ τους. Άρα η απόσταση που καλύπτει στο χρόνο ΓΔ με ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση, θα ισούται με την απόσταση που καλύπτεται στον ίδιο χρόνο με σταθερή ταχύτητα ίση με το μισό της τελικής ταχύτητας.

Στην παραπάνω ερμηνεία ο Γαλιλαίος χρησιμοποιεί αρκετές έννοιες του απειροστικού λογισμού, έστω και αν μερικές από αυτές δεν τις ονομάζει. Εκφράζει την έννοια του απειροστού, όταν λέει ότι οι χρονικές στιγμές αντιπροσωπεύονται από τις γραμμές. Εκφράζει την έννοια του αδιαιρέτου όταν λέει ότι η μικρή αύξηση αύξηση της απόστασης αντιπροσωπεύεται από τις γραμμές. Εκφράζει την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας του κινητού στο σημείο Ι και εκφράζει την έννοια του αθροίσματος απείρων όρων ακολουθίας όταν λέει ότι το άθροισμα των παραλλήλων που περιέχονται στο τρίγωνο ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου και το άθροισμα των παραλλήλων που περιέχονται στο ορθογώνιο ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου (Εξαρχάκος, 1993).

Αδιαίρετα του Cavalieri

Η συστηματική χρήση των απειροστικών τεχνικών για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων έγινε γνωστή από δύο σημαντικά βιβλία γραμμένα από τον Bonaventura Cavalieri (1598-1647) -το *Geometria indivisibilibus continuorun nova quadam ratione promota* (*Γεωμετρία μέσω μιας μέχρι τώρα άγνωστης μεθόδου, των αδιαιρέτων των συνεχών*) το 1635 και το *Exercitationes geometricae sex* (Έξι γεωμετρικές ασκήσεις) το 1647. Ο Cavalieri διαβάζοντας τη *Στερεομετρία* του Kepler και έχοντας κατά νου τις αρχαίες και τις μεσαιωνικές απόψεις αποφάσισε, μετά από την ενθάρρυνση του Γαλιλαίου, να οργανώσει τις σκέψεις του για τα απειροστά και να τις καταγράψει σε ένα βιβλίο. Ο Cavalieri ήταν μέλος μιας θρησκευτικής τάξης (Ιησουάτης και όχι Ιησουίτης όπως συχνά αναφέρεται) και έζησε στο Μιλάνο και τη Ρώμη πριν γίνει καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Bologna το 1629. Έγραψε για πολλά θέματα των αφηρημένων και εφαρμοσμένων μαθηματικών όπως γεωμετρία, τριγωνομετρία, αστρονομία και οπτική.

Το όνομά του Cavalieri έχει ταυτισθεί με τη θεωρία των αδιαιρέτων (άτμητων) την οποία διατύπωσε επίσημα το 1635 στο έργο του *Geometria indivisibilibus* καθώς και στο έργο του *Exercitationes geometricae sex.* Η θεωρία των αδιαιρέτων μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή της τελικής φάσης η οποία οδήγησε στη δημιουργία του απειροστικού λογισμού από τους Newton και Leibniz. Μάλιστα ο Γαλιλαίος για να τον υποστηρίξει αναφέρει πως μετά τον Αρχιμήδη ελάχιστοι έχουν εμβαθύνει τόσο στην κατανόηση της γεωμετρίας. Η Baron (1969) αναφέρει πως ο Cavalieri είχε πολύ νωρίτερα συλλάβει την θεωρία του. Ήδη από το 1627 κυκλοφορούσε χειρόγραφη στους διανοούμενους της εποχής του, στον Ciampoli, στον οποίο θα την αφιερώσει, και σε αρκετούς άλλους, αλλά δίσταζε να την δημοσιεύσει, γιατί, καθώς ο Γαλιλαίος ενδιαφερόταν για θέματα απείρου και απειροστού, ίσως ο μαθητής του να πίστευε ότι πρόκειται να δημοσιεύσει κάποια μελέτη. Μάλιστα ο Cavalieri έγραψε δύο φορές στον Γαλιλαίο αναγγέλοντάς του την πρόθεσή του να γράψει μία πραγματεία για τα αδιαίρετα.

Ο Γαλιλαίος είχε ήδη χρησιμοποιήσει τα αδιαίρετα στη φυσική. Ο Cavalieri όμως προχώρησε πιο πέρα και έκανε τα αδιαίρετα βάση μιας γεωμετρικής μεθόδου απόδειξης που θα γινόταν ιδιαίτερα ελκυστική. Ο Cavalieri σε κανένα σημείο του έργου του δεν ορίζει το αδιαίρετο. Απλά χρησιμοποιεί τον όρο 'αδιαίρετα' για να χαρακτηρίσει τα απειροστά στοιχεία που χρησιμοποιεί στη μέθοδό του. Κάθε αδιαίρετο με την κίνησή του παράγει το επόμενο ανώτερης διάστασης συνεχές. Έτσι το σημείο κινούμενο δημιουργεί μια γραμμή. Μια γραμμή κινούμενη παράγει ένα επίπεδο και ένα επίπεδο με την κίνησή του παράγει ένα στερεό. Συνεπώς το επίπεδο απαρτίζεται από ένα άπειρο πλήθος παράλληλων γραμμών που ισαπέχουν μεταξύ τους, και το στερεό από ένα άπειρο πλήθος ισαπεχόντων παράλληλων επιπέδων. Αυτά αποτελούν τις αδιαίρετες ευθείες και επιφάνειες αντίστοιχα. Έτσι, κατά τον Cavalieri το εμβαδόν αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό ισαπεχόντων ευθύγραμμων τμημάτων και ο όγκος από ένα άπειρο πλήθος ισαπεχόντων παράλληλων επιπέδων. Δηλαδή το σημείο είναι το αδιαίρετο της γραμμής, η γραμμή είναι το αδιαίρετο του επιπέδου και το επίπεδο είναι το αδιαίρετο του στερεού σχήματος. (Γιαννακούλιας, 2007). Σύμφωνα με τον Boyer ο Cavalieri μολονότι εκείνη την εποχή δεν ήταν σε θέση να το καταλάβει, ακολουθούσε αξιοσέβαστα ίχνη, γιατί αυτό ακριβώς είναι το είδος της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιούσε στη Μέθοδο, η οποία είχε χαθεί τότε.Ο Cavalieri όμως σε αντίθεση με τον Αρχιμήδη δεν ένιωθε τύψεις για τα κενά της λογικής που βρίσκονταν πίσω από αυτές τις διαδικασίες.

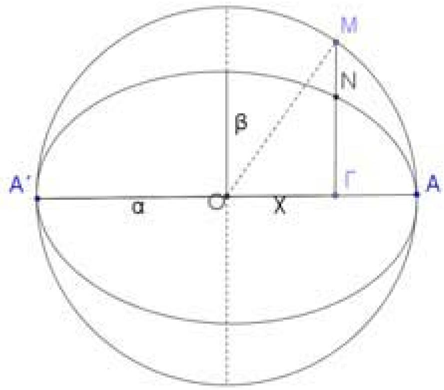
Ο Cavalieri διατύπωσε τη μέθοδό του της σύγκρισης δύο γεωμετρικών σχημάτων μέσω της σύγκρισης των αδιαιρέτων τους. Η διατύπωση περιέχεται στο παρακάτω θεώρημα που έχει μείνει γνωστό ως η αρχή του Cavalieri.

Θεώρημα (*Αρχή του Cavalieri)*

(ι)Αν δύο επίπεδα σχήματα έχουν ίσα ύψη και περιέχονται μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών και τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που αποκόπτονται από ευθεία παράλληλη προς τις αρχικές έχουν σταθερό λόγο, τότε τον ίδιο λόγο θα έχουν και τα εμβαδά των επιπέδων σχημάτων.

(ιι)Αν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη και αν οι τομές υπό επιπέδων παραλλήλων προς τις βάσεις και σε ίσες αποστάσεις από αυτές βρίσκονται σε σταθερό λόγο, τότε οι όγκοι των στερεών έχουν επίσης τον ίδιο λόγο.

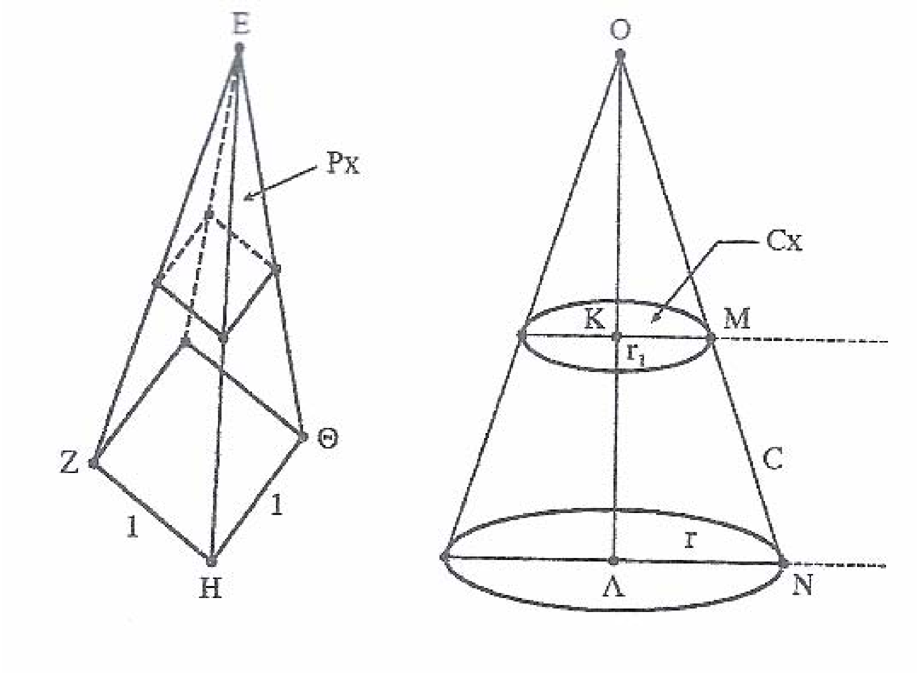
Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της έλλειψης με τη βοήθεια του εμβαδού κύκλου που θεωρείται γνωστό.



Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων σχεδιάζουμε την έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=\alpha^2$ (σχήμα).

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ του κύκλου (για ευκολία στους υπολογισμούς επιλέγουμε το Μ να βρίσκεται στο πρώτο τεταρτοκύκλιο) και φέρνουμε το τμήμα ΜΓ κάθετο προς την ΑΑ΄ που τέμνει την έλλειψη στο Ν. Αν ΟΓ=*x*, τότε ΜΓ=$y_M=\sqrt{\alpha^2-x^2}$ και ΝΓ=$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2}$.Τότε ο λόγος των αντίστοιχων τεταγμένων είναι ίσος με $\frac{\beta}{\alpha}$ και άρα και οι αντίστοιχες κάθετες χορδές της έλλειψης και του κύκλου θα έχουν τον ίδιο λόγο. Αν συμβολίσουμε με Ε και ε το εμβαδόν της έλλειψης και του κύκλου αντίστοιχα, τότε από την αρχή του Cavalieri προκύπτει ότι $\frac{E}{\varepsilon}=\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε Ε=$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\varepsilon$=$\frac{\beta}{\alpha}\cdot(\pi\alpha^2)$=παβ.

Μία άλλη εφαρμογή αφορά την απόδειξη του τύπου που δίνει τον όγκο ορθού κυκλικού κώνου. Θεωρούμε ορθό κυκλικό κώνο με ακτίνα βάσης r και ύψος h και ένα κανονικό τετράεδρο ακμής ZH=1 και ύψους h.



Αν C_x, P_x είναι οι τομές σε ύψος x, από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΟΚΜ και ΟΛΝ προκύπτει η αναλογία $\frac{x}{h}=\frac{r_1}{r}\Rightarrow r_1=\frac{xr}{h}$ και το εμβαδόν της τομής C_x είναι Ε(C_x)=πr_1^2=$\frac{\pi x^2 r^2}{h^2}$.

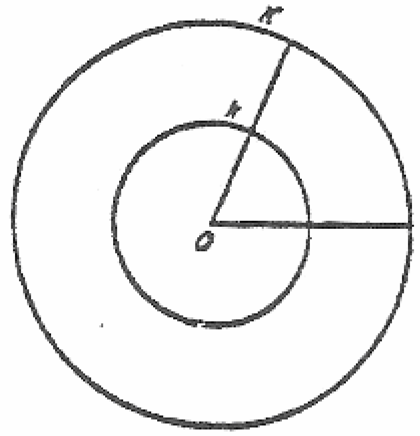
Παρόμοια προκύπτει ότι το εμβαδόν της τομής P_x είναι Ε(P_x)=$\frac{x^2}{h^2}$.

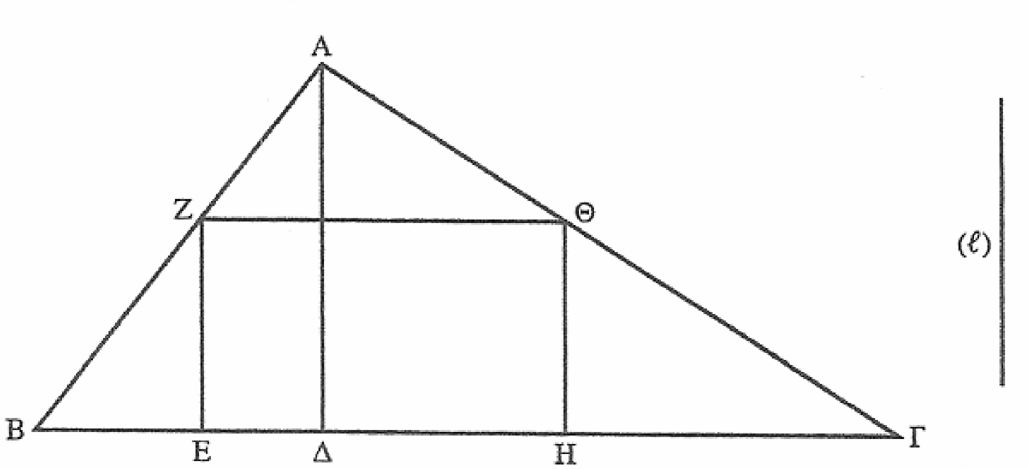
Τότε $\frac{E(C_x)}{E(P_x)}=\frac{\frac{\pi r^2 x^2}{h^2}}{\frac{x^2}{h^2}}$=π$r^2$.Από την αρχή του Cavalieri θα είναι :

$$\frac{V(C)}{V(P)} = \pi r^2 \text{ και αφού } V(P) = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot h = \frac{1}{3} h \text{, έπεται ότι :}$$

$V(C) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (Γιαννακούλιας, 2007).

Οι αρχές του Cavalieri βέβαια υπόκεινται σε αυστηρή κριτική και μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα όπως π.χ. στις δύο παρακάτω περιπτώσεις :





Στην περίπτωση των κύκλων είναι $\frac{OK}{Ok}=2$ αλλά $\frac{E_1}{E_2} = 4$.

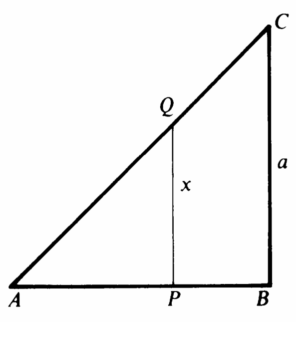
Στην περίπτωση του τριγώνου όταν το ύψος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο εμβαδά Α και Β που δεν είναι ίσα παίρνουμε στο Α κάθετες όμοια με το Β. Από τη 2η αρχή παίρνουμε ότι τα εμβαδά Α και Β θα είναι ίσα αφού οι κάθετες είναι ίσες, κάτι που δεν συμβαίνει. Έχουμε λοιπόν εσφαλμένα συμπεράσματα για τις παραπάνω περιπτώσεις.

Ο Cavalieri στο έργο του *Έξι Ασκήσεις Γεωμετρίας* προσπαθεί να δώσει μιαν απάντηση. Ισχυρίζεται ότι για να είναι συγκρίσιμες δύο «απειρότητες» πρέπει να είναι του ίδιου είδους. Στα δύο τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ με κοινό ύψος ΑΔ τα αντίστοιχα ύψη δεν είναι ίσα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι ΖΕ και ΘΗ να μην είναι συγκρίσιμες γιατί μεταξύ δύο τομών του ενός τριγώνου μπορεί να υπάρχουν περισσότερα αδιαίρετα απ’ όσα θα υπάρχουν μεταξύ των αντιστοίχων τομών του άλλου τριγώνου.

Εκτός από την τεχνική του να συγκρίνει δύο στερεά συγκρίνοντας τις διατομές τους , ο Cavalieri επινόησε μία μέθοδο για τον υπολογισμό του όγκου ενός μόνο στερεού με τη βοήθεια των διατομών του. Αυτή η μέθοδος βασιζόταν σε μία τυπική διαδικασία υπολογισμού η οποία μπορεί να αναφερθεί ως «άθροισμα των γραμμών» σε ένα τρίγωνο οι οποίες είναι παράλληλες προς τη βάση του. Αυτή η διαδικασία παρότι δεν είναι αυστηρή, οδήγησε τον Cavalieri σε ένα αποτέλεσμα ισοδύναμο με το βασικό ολοκλήρωμα

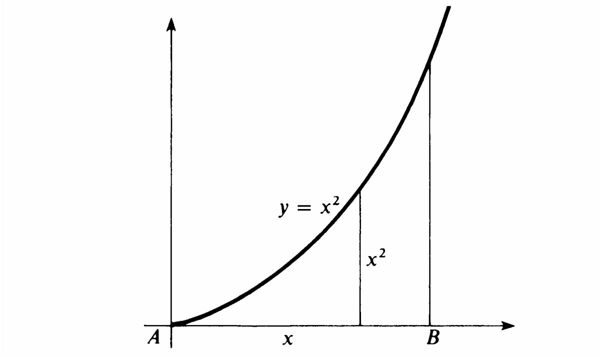
$$\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \quad . \qquad (1) \qquad \text{(Edwards, 1979).}$$

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το τρίγωνο ABC με βάση και ύψος α και χαρακτηριστική κάθετη τομή PQ μήκους x, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σύμφωνα με τη θεωρία των αδιαιρέτων του Cavalieri το τρίγωνο είναι το άθροισμα όλων αυτών των τμημάτων , οπότε μπορούμε να γράψουμε α(τριγ.ABC)= $\sum_{A}^{B} x$, μία συνοπτική περιγραφή για ότι είπε ο Cavalieri με λεπτομερή γεωμετρική ορολογία. Αν P είναι μία πυραμίδα με κορυφή A και η βάση της είναι ένα τετράγωνο πλευράς BC, τότε η διατομή της σε μία απόσταση x από την κορυφή έχει εμβαδόν x^2, οπότε ομοίως γράφουμε

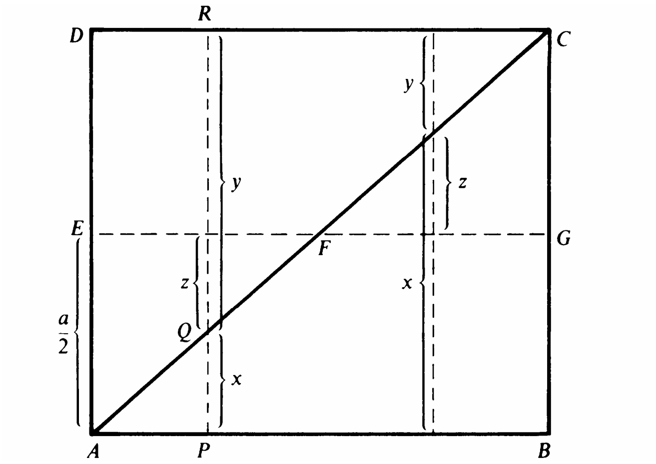
v(P)= $\sum_{A}^{B} x^2$, θεωρώντας την πυραμίδα ως άθροισμα των διατομών της. Το ίδιο άθροισμα των τετραγώνων των γραμμών στο τρίγωνο, αντιπροσωπεύει επίσης το εμβαδόν υπό την παραβολή $y=x^2$, αφού η τυπική διατομή της έχει μήκος x^2.



Αν Q είναι το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή της παραβολής γύρω από τη βάση AB, τότε η διατομή της σε απόσταση x από την κορυφή A έχει εμβαδόν πx^4, οπότε γράφουμε v(Q)= $\sum_{A}^{B} \pi x^4 = \pi \sum_{A}^{B} x^4$.

Αυτά τα παραδείγματα υποδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο μία μεγάλη ποικιλία προβλημάτων εμβαδών και όγκων μπορεί να επιλυθεί με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών αθροισμάτων των δυνάμεων των γραμμών σε ένα τρίγωνο.

Για να περιγράψουμε τη μέθοδο του Cavalieri για τον υπολογισμό αυτών των χαρακτηριστικών αθροισμάτων ξεκινάμε με ένα τετράγωνο ABCD με μήκος πλευράς α, χωρισμένο σε δύο τρίγωνα από τη διαγώνιό του AC. Αν RP είναι μία τυχαία τομή και QP=x και QR=y, τότε x+y=α.



Το ευθύγραμμο τμήμα QP=x είναι μία από «όλες τις γραμμές» στην κατεύθυνση της BC.Το εμβαδόν του τριγώνου ABC διαγράφεται λοιπόν από την κίνηση του QP από το A μέχρι την BC. Με $\sum_{A}^{B} x$ συμβολίζει το εμβαδόν του τριγώνου ABC οπότε, $\sum_{A}^{B} \alpha = \sum_{A}^{B}(x+y) = \sum_{A}^{B} x + \sum_{A}^{B} y = 2\sum_{A}^{B} x$, αφού λόγω συμμετρίας θα είναι :

$\sum_{A}^{B} x = \sum_{A}^{B} y$. Άρα $\sum_{A}^{B} x = \frac{1}{2}\alpha^2$ (2)

αφού το $\sum_{A}^{B} \alpha$ παριστάνει το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α, οπότε $\int_0^\alpha x dx = \frac{1}{2}\alpha^2$.

Για το $\sum_{A}^{B} x^2$ έχουμε $\sum_{A}^{B} \alpha^2 = \sum_{A}^{B}(x+y)^2 = 2\sum_{A}^{B} x^2 + 2\sum_{A}^{B} xy$ αφού πάλι λόγω συμμετρίας θα είναι $\sum_{A}^{B} x^2 = \sum_{A}^{B} y^2$.Αν τώρα πάνω στην RP πάρουμε τμήμα z τέτοιο ώστε x=$\frac{\alpha}{2}$-z και y=$\frac{\alpha}{2}$+z, τότε xy=$\frac{\alpha^2}{4} - z^2$ παίρνουμε τελικά $\sum_{A}^{B} \alpha^2 = 4\sum_{A}^{B} x^2 - 4\sum_{A}^{B} z^2$. Εδώ το $\sum_{A}^{B} z^2$ είναι άθροισμα των τετραγώνων των γραμμών AEF και CFG. Αλλά το άθροισμα των z^2 σε ένα από αυτά τα τρίγωνα αντιπροσωπεύει τον όγκο μιας πυραμίδας με διαστάσεις μισές από αυτές της πυραμίδας της οποίας ο όγκος είναι $\sum_A^B x^2$. Έτσι

$\sum_A^B z^2 = 2\cdot\frac{1}{8}\sum_A^B x^2 = \frac{1}{4}\sum_A^B x^2$, οπότε τελικά παίρνουμε:

$$\sum_A^B x^2 = \frac{1}{3}\sum_A^B \alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha^3 \qquad (3)$$

αφού το $\sum_A^B \alpha^2$ αντιπροσωπεύει τον όγκο ενός κύβου ακμής α. Άρα $\int_0^\alpha x^2 dx = \frac{\alpha^3}{3}$.

Για το άθροισμα των κύβων των γραμμών έχουμε:

$$\sum_A^B \alpha^3 = \sum_A^B (x+y)^3 = \sum_A^B x^3 + 3\sum_A^B x^2 y + 3\sum_A^B xy^2 + \sum_A^B y^3$$

$\sum_A^B \alpha^3 = 2\sum_A^B x^3 + 6\sum_A^B x^2 y$ (λόγω συμμετρίας). (**)

Για να υπολογίσουμε το $\sum_A^B x^2 y$ κάνουμε το ακόλουθο τέχνασμα:

$$\sum_A^B \alpha^3 = \alpha\sum_A^B \alpha^2 = \alpha(2\sum_A^B x^2 + 2\sum_A^B xy) = \alpha(\frac{2}{3}\sum_A^B \alpha^2 + 2\sum_A^B xy) = \frac{2}{3}\sum_A^B \alpha^3 + 2\sum_A^B (x+y)xy$$

$\sum_A^B \alpha^3 = \frac{2}{3}\sum_A^B \alpha^3 + 4\sum_A^B x^2 y$ (λόγω συμμετρίας).

Επομένως $\sum_A^B x^2 y = \frac{\sum_A^B \alpha^3}{12}$ και με αντικατάσταση αυτού του αποτελέσματος στην (**) παίρνουμε $\sum_A^B x^3 = \frac{1}{4}\sum_A^B \alpha^3 = \frac{1}{4}\alpha^4$ (4)

Οι τύποι (2),(3),(4) είναι οι πρώτες εφαρμογές του γενικού τύπου

$\sum_A^B x^n = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$ που είναι ισοδύναμος με το $\int_0^\alpha x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$.

Στη βάση αυτού του αποτελέσματος θα μπορούσε να γράψει άμεσα το εμβαδόν υπό την παραβολή y=x^n (με n θετικό ακέραιο) στο μοναδιαίο διάστημα

Α=$\sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}$, και τον όγκο του στερεού που προκύπτει με περιστροφή αυτής της επιφάνειας ως προς τον άξονα x΄x

$$V=\pi\sum_{0}^{1}x^{2n}=\frac{\pi}{2n+1}\ .$$

Αυτή η ενοποίηση και γενίκευση των προηγούμενων αποτελεσμάτων αποτέλεσε ένα γιγάντιο βήμα στην ανάπτυξη των αλγοριθμικών διαδικασιών του λογισμού (Edwards, 1979).

Παρατηρούμε ότι στα επιχειρήματα του Cavalieri απουσιάζει το άπειρο και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι επικεντρωνόταν στην αντιστοιχία μεταξύ των αδιαιρέτων των δύο συγκρινόμενων σχημάτων και όχι στο σύνολο των αδιαιρέτων που απάρτιζαν τα σχήματα (Γιαννακούλιας, 2007). Στον $17^{ο}$ αιώνα ο Cavalieri αποτελεί ένα «μεμονωμένο σημείο» καθώς είναι ο μόνος που προσπαθεί να επεκτείνει τη θεωρία των μεγεθών του Ευδόξου σε ποσότητες με άπειρα στοιχεία, χωρίς καθόλου να τον απασχολεί η σύσταση του συνεχούς, συνδέοντας έτσι την καινούρια εποχή με την αρχαιοελληνική παράδοση. Η *Γεωμετρία* του αν και δεν είχε άμεση επίδραση, γίνεται η αφορμή να παρουσιαστούν αρκετές μελέτες οι οποίες θα προετοιμάσουν το έδαφος για τη δημιουργία του απειροστικού λογισμού. Τα αδιαίρετα έγιναν τα απειροστά, τα οποία κατά τον Cauchy είναι μια μεταβλητή ποσότητα με όριο το μηδέν. Τον $19^{ο}$ αιώνα ο απειροστικός λογισμός θα θεμελιωθεί πάνω στη έννοια του ορίου (Φίλη, 2010).

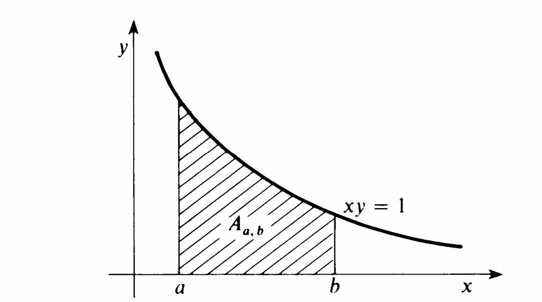
Gregoire de Saint-Vincent

Το 1647 εκτός από το *Exercitationes geometricae sex* του Cavalieri δημοσιεύτηκε και μία άλλη σημαντική εργασία από τον Ιησουίτη Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) με τον τίτλο «*Opus Geometricum quadraturae circuli et Sectionum coni*» (γεωμετρική εργασία για τον τετραγωνισμό του κύκλου και των κωνικών τομών). Σε αυτήν περιλαμβάνονταν θεωρήματα που αφορούσαν τον κύκλο, το τρίγωνο, τα παράδοξα του Ζήνωνα, αθροίσματα γεωμετρικών σειρών και κωνικές τομές. Ένα μεγάλο μέρος του έργου αυτού είχε ολοκληρωθεί πριν από την εποχή που ο Fermat ασχολιόταν με τις εφαπτομένες και τα εμβαδά, ίσως την περίοδο 1622-1625, αλλά δεν δημοσιεύτηκε παρά μόνο το 1647. Ο Gregoire γεννήθηκε στο Βέλγιο και ήταν ένας Ιησουίτης δάσκαλος στη Ρώμη και στην Πράγα και στη συνέχεια ανέλαβε να διδάξει στην αυλή του Φιλίππου IV στην Ισπανία. Εξαιτίας των ταξιδιών του αποχωριζόταν συχνά τα χαρτιά του και για το λόγο αυτό καθυστέρησε τόσο η δημοσίευση του *Opus Geometricum* (Boyer, 1997). Σκοπός του βιβλίου αυτού ήταν ο τετραγωνισμός του κύκλου. Το βιβλίο αυτό , που αποτελείτο από 1200 σελίδες, προκάλεσε το ενδιαφέρον όλων των διαπρεπών μαθηματικών της εποχής εκείνης. Τέσσερα χρόνια μετά τη δημοσίευσή του, ο Christian Huygens ανακάλυψε το λάθος του Gregoire προς μεγάλη απογοήτευση του τελευταίου.

Η προμετωπίδα του *Opus Geometricum*
του Gregoire de St.Vincent

Ο Gregoire αφού μελέτησε τα έργα των Αρχιμήδη, Γαλιλαίου, Valerio, Stevin και Kepler, εργάστηκε ανεξάρτητα από τον Cavalieri, αλλά παρουσίασε τις μεθόδους του ταυτόχρονα με αυτόν κατά τη διετία 1625-1626. Διαφοροποιήθηκε από τους Stevin και Valerio χρησιμοποιώντας στο *Opus*, αντί για άπειρα το πλήθος παραλληλόγραμμα, απείρως λεπτά ορθογώνια, και στη θέση των πολυγώνων με n- το πλήθος πλευρές που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης, θεώρησε εγγεγραμμένα πολύγωνα με άπειρο πλήθος πλευρών. Ενώ όμως ο Αρχιμήδης έκανε υποδιαιρέσεις μέχρις ότου το σφάλμα της προσέγγισης γινόταν μικρότερο από κάποια ποσότητα, στη μέθοδο του Gregoire το πλήθος των πλευρών των εγγεγραμμένων σχημάτων αυξανόταν έως ότου «εξαντληθεί» το σχήμα στο οποίο ήταν εγγεγραμμένα. Στα κείμενα του Gregoire και των μαθητών του εμφανίστηκε για πρώτη φορά ο όρος *εξάντληση* για τη μέθοδο του Αρχιμήδη. Ο Gregoire θεωρούσε ότι η καμπύλη δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα τέρμα, ένα όριο, και όχι μία προσέγγιση ενός εγγεγραμμένου ή περιγεγραμμένου σχήματος. Αυτό συντέλεσε ώστε να στραφεί στην κατεύθυνση, που έθεσε τον απειροστικό λογισμό στη σωστή βάση, γιατί η άπειρη υποδιαίρεση του οδηγούσε στην έννοια του ορίου μιας άπειρης γεωμετρικής προόδου. Τον $17^{ο}$ αιώνα οι μέθοδοι ολοκλήρωσης γεωμετρικών σειρών έπαιξαν ένα σημαντικό ρόλο για την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού και όπως ήταν φυσικό η μελέτη της γεωμετρικής σειράς κίνησε το ενδιαφέρον των μαθηματικών. Ο Gregoire έδωσε μία πλήρη περιγραφή της άθροισης γεωμετρικών σειρών στο *Opus Geometricum*. Το άθροισμά τους μπορούσε να προσεγγιστεί από ένα μεγάλο πλήθος όρων της αντίστοιχης γεωμετρικής προόδου που προέκυπτε από τη σειρά , με την έννοια ότι για κάθε δοσμένο μέγεθος μπορούσε να θεωρήσει ένα αρκετά μεγάλο πλήθος όρων της προόδου ώστε το άθροισμά τους να διαφέρει από το άθροισμα της σειράς λιγότερο από το δοθέν μέγεθος (Baron, 1969).

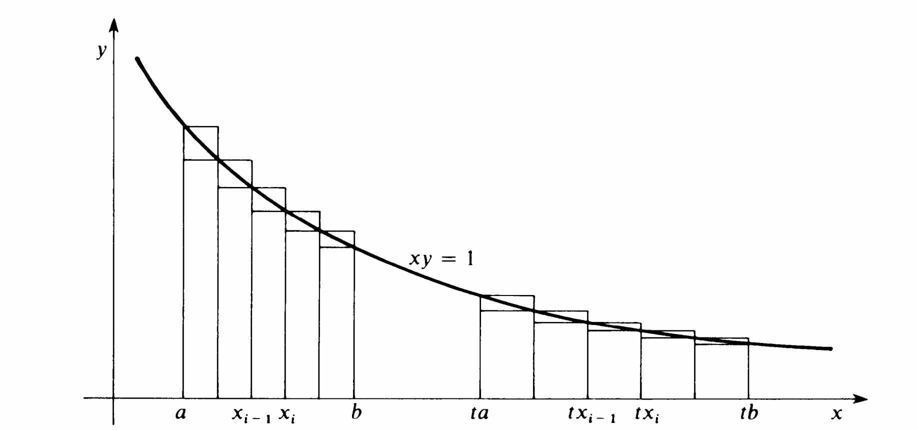
Το 1647 ο Gregoire ανακάλυψε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ της λογαριθμικής συνάρτησης και της ορθογώνιας υπερβολής xy=1.Αν [a,b] είναι ένα κλειστό διάστημα στο θετικό άξονα συμβολίζουμε $A_{a,b}$ το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται πάνω από το διάστημα αυτό και κάτω από την υπερβολή xy=1.



Αυτό που ανακάλυψε ο Gregoire μπορεί να διατυπωθεί ως εξής;

Αν t>0, τότε $A_{ta,tb} = A_{a,b}$. (1)

Πράγματι αν θέσουμε a=$x_0 < x_1 < .... < x_{i-1} < x_i < .... < x_n = b$ να είναι ισαπέχοντα σημεία που υποδιαιρούν το διάστημα [a,b] σε ένα μεγάλο αριθμό n υποδιαστημάτων. Σε αυτά τα υποδιαστήματα κατασκευάζουμε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα ορθογώνια όπως φαίνεται στο σχήμα (2).



Σχήμα (2)

Τότε τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα ορθογώνια στο i-υποδιάστημα του [a,b] έχουν βάση $\frac{b-a}{n}$ και ύψη $\frac{1}{x_i}$ και $\frac{1}{x_{i-1}}$ αντίστοιχα. Επομένως

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_i} \le A_{a,b} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_{i-1}} \qquad (2)$$

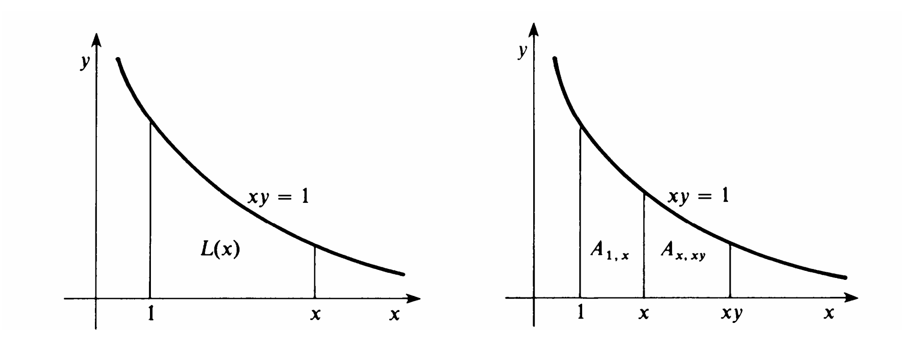
Τα σημεία ta= $tx_0 < tx_1 < .... < tx_{i-1} < tx_i < .... < tx_n = tb$ ομοίως υποδιαιρούν το διάστημα [ta,tb] σε n ίσα υποδιαστήματα. Τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα ορθογώνια στο i-υποδιάστημα $[tx_{i-1}, tx_i]$ του [ta,tb] έχουν βάση $\frac{tb-ta}{n}$ και ύψη $\frac{1}{tx_i}$ και $\frac{1}{tx_{i-1}}$ αντίστοιχα. Ως εκ τούτου τα εμβαδά τους είναι ίσα με εκείνα των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων ορθογωνίων στο $[x_{i-1}, x_i]$.Άρα

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_i} \le A_{ta,tb} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_{i-1}} \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει η αλήθεια της (1).

Όταν διάβασε το *Opus Geometricum* ο Βέλγος Ιησουίτης A.A.de Sarasa παρατήρησε ότι η εξίσωση (1) συνεπάγεται ότι το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την υπερβολή έχει τη λογαριθμική ιδιότητα.

Πράγματι αν θέσουμε $L(x) = \begin{cases} A_{1,x} \alpha\nu x \ge 1 \\ -A_{x,1}, \alpha\nu 0 < x < 1 \end{cases}$, τότε



Σχήμα 3

η L(x) ικανοποιεί τη λογαριθμική ιδιότητα. L(xy)=L(x)+L(y). (4)

Για παράδειγμα αν x και y είναι και τα δύο μεγαλύτερα του 1, τότε

$L(xy)=A_{1,xy}$

$=A_{1,x}+A_{x,xy}$ (σχ.3)

$=A_{1,x}+A_{1,y}$ (από τη σχέση (1)), και άρα

$L(xy)=L(x)+L(y)$.

Καθώς η συνάρτηση εμβαδού της υπερβολής L(x) «μοιάζει με λογάριθμο» , αυτό παρέχει μία αντιστοίχηση μεταξύ αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων, οπότε είναι αναμενόμενο να αναρωτηθούμε για τη σχέση της με τη λογαριθμική συνάρτηση. Είναι πράγματι L(x)=logx , αν και αυτή η σχέση δεν είχε πλήρως διευκρινιστεί έως την εποχή του Euler το $19^{ο}$ αιώνα.

Πάντως χρησιμοποιώντας λίγο λογισμό μπορούμε να ‘ξεσκεπάσουμε’ τη συνάρτηση L(x) υπολογίζοντας την παράγωγό της ως εξής:

$$L'(x)=\lim_{h->0}\frac{L(x+h)-L(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h->0}\frac{1}{h}L\left(1+\frac{h}{x}\right)= \quad \text{(από την (4))}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h->0}\frac{x}{h}L\left(1+\frac{h}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{k->0}\frac{1}{k}L(1+k)= \qquad \text{, όπου } k=\frac{h}{x}$$

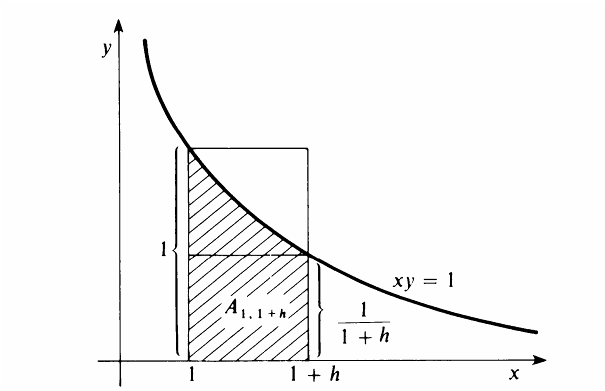
$$=\frac{1}{x}\lim_{k->0}\frac{L(1+k)-L(1)}{k} \quad \text{(γιατί } L(1)=0)$$

$$=\frac{L'(1)}{x}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε την τιμή $L'(1)=\lim_{h->0}\frac{L(1+h)}{h}=\lim_{h->0}\frac{A_{1,1+h}}{h}$.

Με τη βοήθεια του σχήματος (4) βλέπουμε ότι $\frac{h}{1+h}\leq A_{1,1+h}\leq h$, συνεπώς

$$\frac{1}{1+h}\leq\frac{A_{1,1+h}}{h}\leq 1.$$



Σχήμα 4

Παίρνοντας το όριο καθώς h→0 είναι φανερό ότι $L'(1)=1$, άρα $L'(x)=\frac{1}{x}$.

Καθώς οι L(x), logx έχουν την ίδια παράγωγο $\frac{1}{x}$, και την ίδια τιμή L(1)=log1=0 , στο x=1, προκύπτει ότι L(x)=logx.

Οι προσπάθειες υπολογισμού των εμβαδών αυτών ήταν ένα από τα κίνητρα της εμφάνισης και της μελέτης των δυναμοσειρών, που από το 1660 θα παίξουν έναν ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού (Edwards, 1979).

Ο Gregoire μαζί με τους Cavalieri, Fermat και Καρτέσιο ήταν αυτοί που προετοίμασαν το έδαφος στους Newton, Leibniz για την «ανακάλυψη» του απειροστικού λογισμού. Τα λόγια του Leibniz αποτελούν την καλλίτερη μαρτυρία για τη σπουδαιότητα του έργου του: «Κατά τη μελέτη του λογισμού πήρα ουσιαστική βοήθεια και από τις πολυάριθμες έξυπνες ιδέες του πατέρα Gregoire de Saint Vincent» (Calinger, 1999).

Η εμφάνιση του συγγράμματος του Cavalieri παρακίνησε ένα σημαντικό αριθμό μαθηματικών, σε διάφορες χώρες, να μελετήσουν προβλήματα σχετικά με απειροστά. Τα θεμελιακά προβλήματα άρχισαν τότε να αντιμετωπίζονται κατά τρόπο περισσότερο αφηρημένο και αυτό ωφέλησε τη γενικότητα. Το πρόβλημα της εφαπτομένης, που συνίσταται στην αναζήτηση μεθόδων για την εύρεση της εφαπτομένης δοσμένης καμπύλης σε ένα ορισμένο σημείο, έπαιρνε μία ολοένα εξέχουσα θέση δίπλα στα αρχαία προβλήματα τα σχετικά με όγκους και βαρύκεντρα. Σε αυτή την έρευνα διακρίνονταν δύο τάσεις : μία αλγεβρική και μία γεωμετρική. Οι οπαδοί του Cavalieri, όπως ο Torricelli και ο

Barrow -ο δάσκαλος του Νεύτωνα- προτιμούσαν την ελληνική μέθοδο της γεωμετρικής συλλογιστικής , δίχως όμως να ενδιαφέρονται πολύ να είναι συνεπείς με την αυστηρότητά της . Ο Huygens διαπνεόταν επίσης από κάποια μεροληψία υπέρ της ελληνικής γεωμετρίας. Υπήρχαν άλλοι, όπως οι Fermat, Descartes και Wallis, με φανερά αντίθετη τάση˙εφόδιο για τη μελέτη του θέματος ήταν γι αυτούς η νέα άλγεβρα. Όλοι οι συγγραφείς εκείνης της περιόδου, από το 1630 μέχρι το 1660 περιορίζονταν, ουσιαστικά σε ζητήματα σχετικά με αλγεβρικές καμπύλες και ειδικά με εκείνες που αντιστοιχούν στην εξίσωση $a^m \cdot y^n = b^n \cdot x^m$. Έφτασαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο σε τύπους ισοδύναμους με τον $\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$, όπου ο m έπαιρνε πρώτα θετικές ακέραιες τιμές, ύστερα και αρνητικές ακέραιες καθώς και κλασματικές. Μερικές φορές παρουσιάζονταν στις μελέτες τους και καμπύλες όχι αλγεβρικές όπως η κυκλοειδής που την εξέτασαν ο Descartes και ο Pascal (Struik, 1993).

Την εποχή εκείνη άρχισαν να εμφανίζονται πολλά χαρακτηριστικά γνωρίσματα του απειροστικού λογισμού. Προσδιόριζαν εφαπτόμενες, όγκους και κεντροειδείς, αλλά το ότι η ολοκλήρωση και η διαφόριση μπορούσαν να αντιμετωπιστούν ως αντίστροφα προβλήματα δεν το είχαν καθαρά συλλάβει. Αυτό συνειδητοποιήθηκε μονάχα το 1670, όταν ο Barrow εξήγησε αυτόν τον συσχετισμό, αν και τον παρουσίασε με γεωμετρική μορφή κάπως δυσνόητη.

Η σχολαστική σκέψη είχε εισχωρήσει στην αναζήτηση νέων μεθόδων όχι μόνο διαμέσου των μεθόδων του Cavalieri αλλά και με τα έργα των Gregoire de Saint-Vincent και των μαθητών και συνεργατών του Guldin και Tacquet.Οι άνθρωποι αυτοί εμπνέονταν τόσο από το πνεύμα της εποχής τους, όσο και από τα μεσσαιωνικά σχολαστικά κείμενα για τη φύση του συνεχούς και το πλάτος των εννοιών.

Αυτή η πυρετώδης δραστηριότητα που είχαν αναπτύξει οι μαθηματικοί, σε μία περίοδο, όπου δεν υπήρχαν επιστημονικά περιοδικά, οδήγησε στη δημιουργία επιστημονικών κύκλων συζητήσεων και σε συνεχή αλληλογραφία. Μερικές προσωπικότητες απέκτησαν κύρος χρησιμεύοντας ως κέντρο επιστημονικών ανταλλαγών. Ο πιο γνωστός από αυτούς ήταν ο μινορίτης πατέρας Mersenne, του οποίου το όνομα ως μαθηματικού έχει επιζήσει στους αριθμούς του Mersenne. Με αυτόν αλληλογραφούσαν οι Descartes, Fermat, Desargues, Pascal και πολλοί άλλοι επιστήμονες. Οι όμιλοι συζητήσεων , που τους αποτελούσαν άνθρωποι ευρυμαθείς, αποκρυσταλλώθηκαν σε ακαδημίες. Αυτές δημιουργήθηκαν σαν αντιπολίτευση, κατά κάποιον τρόπο στα πανεπιστήμια, όπου κυριαρχούσε το πνεύμα της σχολαστικής περιόδου – με μερικές εξαιρέσεις, όπως το πανεπιστήμιο του Λέιντεν- και περίθαλπαν τη μεσσαιωνική τάση να παρουσιάζεται η γνώση με προκαθορισμένες μορφές. Οι νέες ακαδημίες αντίθετα εκφράζανε το καινούριο πνεύμα έρευνας (Struik, 1993).

Αριθμητικοί τετραγωνισμοί

Όπως έχουμε αναφέρει ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τους παρακάτω τύπους για τα αθροίσματα ακεραίων και των τετραγώνων τους,

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

και

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \qquad (2)$$

προκειμένου να έχει αποτελέσματα τετραγωνισμών ισοδύναμα με τα ολοκληρώματα

$$\int_0^\alpha x dx=\frac{\alpha^2}{2} \quad \text{και} \quad \int_0^\alpha x^2 dx=\frac{\alpha^3}{3}.$$

Στην πραγματικότητα αυτό που χρειάζεται για αυτούς τους τετραγωνισμούς είναι οι άμεσες συνέπειες

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2}=\frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}=\frac{1}{3},$$

των τύπων (1) και (2).

Δύο δεκαετίες μετά την έκδοση του πρώτου βιβλίου του Cavalieri το 1635, οι Γάλλοι μαθηματικοί Fermat, Pascal και Roberval έδωσαν περισσότερο ή λιγότερο αυστηρές αποδείξεις στον τύπο (εικασία) του Cavalieri:

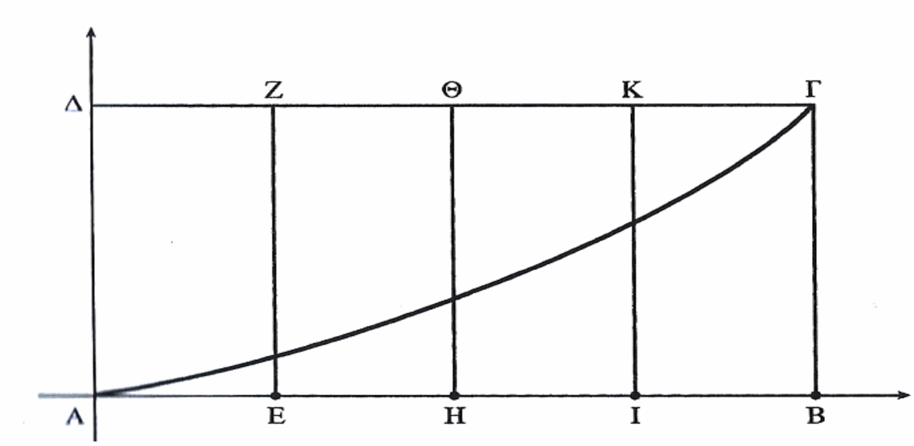
$\int_0^a x^m dx=\frac{a^{m+1}}{m+1}$, για το εμβαδόν υπό την γενικευμένη παραβολή $y=x^m$, όπου m θετικός ακέραιος.

Roberval

Στην ηπειρωτική Ευρώπη του $17^{ου}$ αιώνα ήταν λίγοι οι επαγγελματίες μαθηματικοί. Ένας από αυτούς ήταν ο Gilles Persone de Roberval (1602-1675). Ο Roberval γεννήθηκε στη Beauvais αλλά από το 1625, μέχρι και το θάνατό του έζησε στο Παρίσι. Εκεί συνδέθηκε με τον Mersenne, μέσω του οποίου γνωρίστηκε με πολλούς σημαντικούς επιστήμονες. Δίδαξε μαθηματικά στο Βασιλικό κολλέγιο και από το 1665, με την ίδρυση της Ακαδημίας των επιστημών έγινε ένα από τα πρώτα μέλη της. Το έργο του το σχετικό με τον απειροστικό λογισμό είναι πολύ σημαντικό, αλλά, δυστυχώς ένα μεγάλο μέρος του δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του, χωρίς να μνημονεύονται οι συγκεκριμένες χρονολογίες κατά τις οποίες έγιναν οι διάφορες ανακαλύψεις του. Επειδή πολλά από τα στοιχεία που παρουσιάζει και αρκετές από τις μεθόδους που χρησιμοποιεί σχετίζονται με αυτές που εμφανίζονται στα έργα των Cavalieri, Torricelli και Descartes, προκλήθηκαν αμφισβητήσεις και φιλονικίες ως προς την προτεραιότητα και την πατρότητα των ανακαλύψεων.

Ο Roberval είχε μελετήσει τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Θεωρούσε τον Αρχιμήδη θεϊκό. Ωστόσο ο ίδιος παραδεχόταν ότι ο Αρχιμήδης δεν ήταν ο μόνος από τον οποίο είχε επηρεαστεί. Πραγματικά μελετώντας το έργο του Roberval διαπιστώνει κανείς τις επιδράσεις που δέχτηκε από τα έργα των συγχρόνων του Stevin, Valerio, Cavalieri, Kepler, Torricelli και Fermat (Εξαρχάκος,1993).

Για κάποιους ιστορικούς ο Roberval θεωρείται ότι ανακάλυψε ανεξάρτητα από τον Cavalieri τη μέθοδο των αδιαιρέτων. Στην πραγματικότητα όμως πίστευε στην άπειρη διαιρετότητα των γραμμών, των επιφανειών και των όγκων, ώστε να μην υπάρχουν στοιχειώδη τμήματα. Η άποψή του δεν φαίνεται να συμπίπτει με αυτήν του Cavalieri. Ο Roberval ξεκαθάρισε ότι οι γραμμές δεν αποτελούνται από απείρως πολλά σημεία, όπως θεωρούσε ο Cavalieri αλλά από άθροισμα απείρου πλήθους μικρών αδιαιρέτων κομματιών. Μια επιφάνεια δεν αποτελείται από γραμμές αλλά συντίθεται από μικρά κομμάτια επιφανειών, και ένα στερεό από μικρά κομμάτια στερεών, και όλα αυτά τα απειροστά κομμάτια τα θεωρούσε να είναι τα αδιαίρετα (Wren και Garrett, 1935). Τους ισχυρισμούς του εξήγησε με παραδείγματα. Σε ένα από αυτά βρίσκει το λόγο των εμβαδών του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ του σχήματος και του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

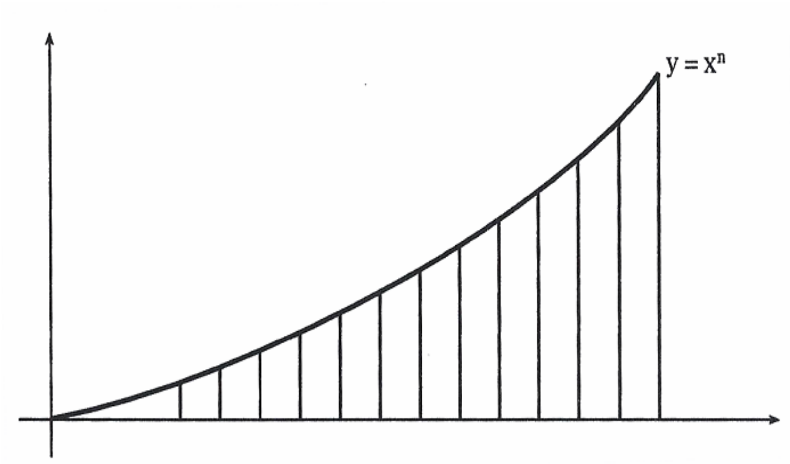


Για τον υπολογισμό αυτού του λόγου χώρισε την ΑΒ σε ένα απείρως μεγάλο αριθμό ίσων τμημάτων ΑΕ=ΕΗ=ΗΙ=... .. και θεώρησε τα αντίστοιχα «απειροστά» ορθογώνια. Τότε εμβ(ΑΒΓ):εμβ(ΑΒΓΔ)=(άθροισμα όλων των απειροστών ορθογωνίων του ΑΒΓ):(άθροισμα των απειροστών ορθογωνίων του ΑΒΓΔ). Τα απειροστά ορθογώνια ορίστηκαν όμως από τις υποδιαιρέσεις του ΑΒ. Εφόσον όλα αυτά έχουν βάση ίση με ΑΕ, αυτή διαγράφεται και προκύπτει ο λόγος :

εμβ(ΑΒΓ):εμβ(ΑΒΓΔ)=

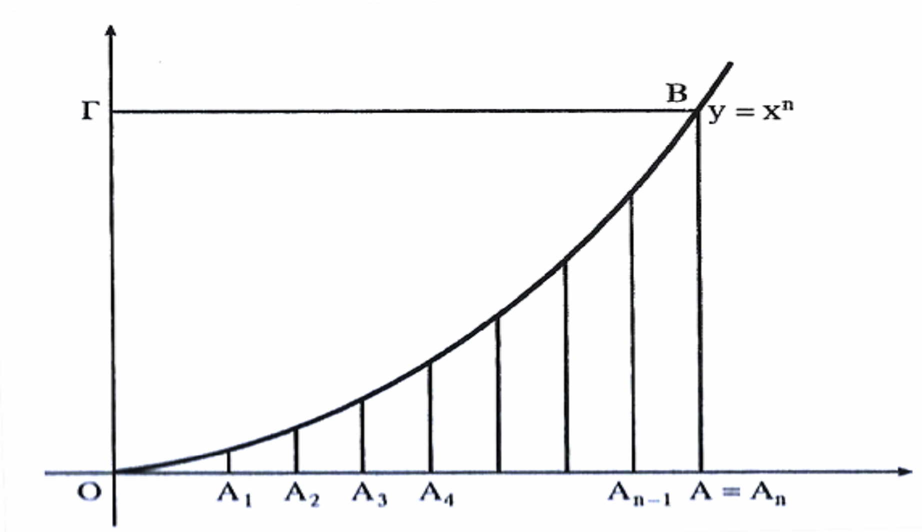
=(όλες οι γραμμές του ΑΒΓ): (όλες οι γραμμές του ΑΒΓΔ), όπου με τον όρο όλες οι γραμμές χαρακτηρίζει το άθροισμα των τεταγμένων. Με βάση αυτή την αντίληψη θεώρησε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περιέχεται υπό την καμπύλη $y = x^m$, στο διάστημα [0,1], να αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό *απείρως στενών* ορθογώνιων λωρίδων.

Το εμβαδόν αυτό μπορούσε κατά τον Roberval να προσεγγιστεί από την τιμή $\frac{0^m + 1^m + 2^m + ... + (n-1)^m}{n^{m+1}}$, και καθώς το n γινόταν απείρως μεγάλο ο λόγος αυτός έτεινε στην τιμή $\frac{1}{m+1}$.



Με βάση το παραπάνω σκεπτικό ξεκίνησε εκείνη την εποχή μία νέα μέθοδος υπολογισμού εμβαδών, όγκων και άλλων ποσοτήτων, με τροποποιήσεις της μεθόδου της εξάντλησης. Αρχίζει να υιοθετείται μια συστηματική διαδικασία με την χρησιμοποίηση ορθογωνίων σε κάθε περίπτωση αντί της χρήσης οποιουδήποτε ευθύγραμμου σχήματος που θεωρείτο κατάλληλο, όπως γινόταν μέχρι τότε (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Roberval υπολόγισε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου υπό την παραβολή $y = x^2$ στο [0,1].



Χώρισε το τμήμα ΟΑ σε n ίσα τμήματα και με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής ιδιότητας της παραβολής υπολόγισε το λόγο των εμβαδών, του μέρους του επιπέδου που βρίσκεται υπό την παραβολή και του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΑΒΓ:

εμβ(ΟΑΒ):εμβ(ΟΑΒΓ)=$\frac{1^2+2^2+.....+n^2}{n\cdot n^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$.

Για n «απείρως μεγάλο» θεώρησε τους δύο τελευταίους όρους αμελητέους, τους διέγραψε, και κατέληξε στην ισότητα:

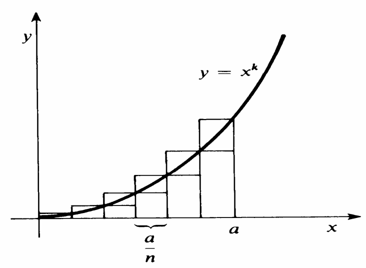
εμβ(ΟΑΒ)=$\frac{1}{3}$ εμβ(ΟΑΒΓ)

Η νέα μέθοδος βασίζεται και πάλι στην προσέγγιση καμπυλόγραμμων σχημάτων από ευθύγραμμα σχήματα, όπως και στη μέθοδο της εξάντλησης. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι αντί της έμμεσης απόδειξης που χρησιμοποιείτο στη μέθοδο της εξάντλησης με τη διπλή απαγωγή σε άτοπο, στη μέθοδο που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα γίνεται χρήση μιας πρώτης προσέγγισης της έννοιας του ορίου (καθώς το *n* γίνεται άπειρο το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει το εμβαδόν του χωρίου). Το πρόβλημα είναι ότι η έννοια του ορίου έχει μόλις αρχίσει να αναπτύσσεται και επομένως είναι ακόμα ασαφής με αποτέλεσμα την έλλειψη αυστηρότητας στις αποδείξεις στις οποίες χρησιμοποιείται (Γιαννακούλιας, 2007).

O Roberval αρχικά ονόμασε τη μέθοδό του «*Μία μέθοδος του απείρου*», αργότερα όμως ένεκα της φήμης που είχαν αποκτήσει τα αδιαίρετα του Cavalieri χρησιμοποίησε και αυτός τη λέξη αδιαίρετα στην πραγματεία του «Traite des Indivisibles», οποία δημοσιεύτηκε το 1693 μετά το θάνατό του. Θεωρείται όμως ότι είχε γραφτεί το 1643 περίπου. Το έργο αυτό αρχίζει με τον υπολογισμό του π, δηλαδή τον υπολογισμό του λόγου της περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρό του. Κάνει τον τετραγωνισμό της παραβολής, υπολογίζει το εμβαδόν κυκλικής κογχοειδούς, προσδιορίζει τους λόγους των όγκων μιας σφαίρας ή ενός σφαιροειδούς προς τον όγκο του περιγεγραμμένου κυλίνδρου ή του εγγεγραμμένου κώνου και βρίσκει τις γνωστές μας σχέσεις. Υπολογίζει τις επιφάνειες κάτω από διάφορες καμπύλες, όπως την υπερβολή, την κυκλοειδή, το παραβολοειδές διαφόρων βαθμών και βρίσκει τους όγκους και τα κέντρα βάρους διάφορων στερεών σωμάτων (Εξαρχάκος,1993). Ο Roberval προσπαθώντας να αποδείξει ότι είχε ανακαλύψει τη μέθοδό του ανεξάρτητα από τον Cavalieri, σε επιστολή του προς τον Torricelli, το 1647, διατύπωσε την άποψη ότι κάποιοι ζηλόφθονοι προς τον Cavalieri μαθηματικοί λανθασμένα ισχυρίστηκαν ότι ο Cavalieri είχε σκεφτεί πως μία επιφάνεια συντίθεται από γραμμές . Αυτό κατά τη γνώμη του ήταν δίχως νόημα και ασφαλώς ο Cavalieri με τα αδιαίρετα του επιπέδου σχήματος εννοούσε απειροστά ορθογώνια. Έτσι εισήγαγε την ιδέα ότι η θεωρία αδιαιρέτων του Cavalieri βασιζόταν στα απειροστά και τη συσχέτισε με αριθμητικές μεθόδους. Ήταν ένας από αυτούς που συνέβαλε στην ιδέα ότι «όλες οι γραμμές» όφειλαν να εννοηθούν ως ένα άθροισμα. Οι ιδέες αυτές του Roberval θα ασκήσουν μεγάλη επίδραση στο μεγάλο δάσκαλο της αριθμητικής ολοκλήρωσης Blaise Pascal.

Κάθε μία από τις αποδείξεις των Fermat, Pascal, Roberval για τον τύπο $\int_0^\alpha x^k dx = \frac{\alpha^{k+1}}{k+1}$ έκανε χρήση του ορίου $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ (*), συνάγοντας το άθροισμα των κ-στών δυνάμεων των πρώτων n ακεραίων , προκειμένου να αντικαταστήσουν τα διαισθητικά επιχειρήματα του Cavalieri με όρους γεωμετρικών αδιαιρέτων, με σαφείς αριθμητικούς υπολογισμούς.

Προκειμένου να δούμε γιατί το αριθμητικό όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ συνεπάγεται τον τύπο εμβαδού $\int_0^\alpha x^k dx = \frac{\alpha^{k+1}}{k+1}$, διαμερίζουμε το διάστημα [0,α] σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{\alpha}{n}$, και κατασκευάζουμε τα συνήθη εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα P_n και Q_n .



Τα P_n είναι ορθογώνια που έχουν βάση $\frac{\alpha}{n}$ και ύψη $\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k, \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^k, ..., \left(\frac{(n-1)\alpha}{n}\right)^k$ και τα Q_n αποτελούνται από ορθογώνια με βάση $\frac{\alpha}{n}$ και ύψη $\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k, \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^k, ..., \left(\frac{n\alpha}{n}\right)^k$. Αθροίζοντας τα εμβαδά αυτών των ορθογωνίων, βρίσκουμε πως:

$$\alpha(P_n) = \frac{\alpha^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + ... + (n-1)^k)$$

και

$$\alpha(Q_n) = \frac{\alpha^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + ... + n^k).$$

Συμβολίζοντας με S την περιοχή κάτω από την καμπύλη $y = x^k$ και πάνω από το διάστημα [0,α], βλέπουμε ότι:

$$\alpha^{\kappa+1}\frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}} - \frac{\alpha^{k+1}}{n} < \alpha(S) < \alpha^{\kappa+1}\frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το n τείνει στο άπειρο, προκύπτει από την (*), ότι $\alpha(S) = \frac{\alpha^{k+1}}{k+1}$.

Pierre de Fermat

Ο Fermat (1601-1665) συγκαταλέγεται μεταξύ των μεγαλύτερων μαθηματικών του 17ου αιώνα. Σπούδασε νομικά στην Τουλούζη και για κάποια χρονική περίοδο άσκησε το επάγγελμα του δικαστή. Η αγάπη του για τα μαθηματικά τον έστρεψαν στη μελέτη των έργων του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Διόφαντου και του Viete. Αυτή η προσπάθεια του Fermat σηματοδότησε την αφετηρία για την αναλυτική γεωμετρία. Ανεξάρτητα από τον Καρτέσιο επινόησε την αναλυτική γεωμετρία το 1629. Ο Fermat συνέβαλε στην ανάπτυξη της Άλγεβρας, θεωρείται ως ο θεμελιωτής της Θεωρίας Αριθμών και ως ο επιστήμονας του οποίου η συμβολή στην ανακάλυψη και ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού είναι μεγάλη. Στην προσπάθειά του να λύσει προβλήματα με μέγιστα και ελάχιστα, ερεύνησε τρόπους χάραξης εφαπτομένης σε διάφορες καμπύλες, όπως στην κισσοειδή του Διοκλέους, στην κογχοειδή του Νικομήδους, στην κυκλοειδή και την τετραγωνίζουσα. Τη μέθοδο που ακολουθεί για τη χάραξη τέτοιων εφαπτομένων, καθώς και για τον υπολογισμό των μεγίστων και ελαχίστων την αναλύει ο ίδιος σε κάποιο γράμμα που έστειλε στον Roberval το 1629, το οποίο δημοσιεύτηκε το 1644 στο *"Herigones Cursus Mathematicus"*.

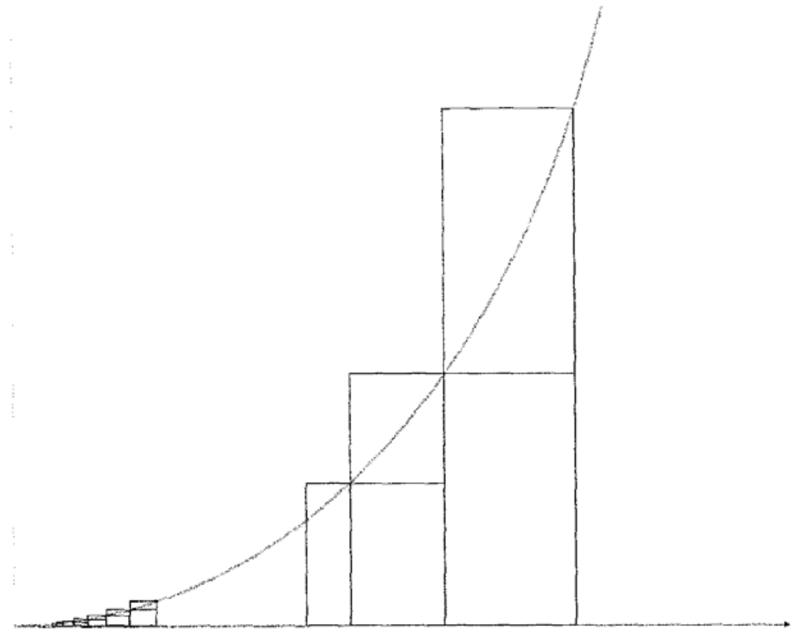
Ο Fermat όπως και πολλοί άλλοι γεωμέτρες της εποχής είχαν μελετήσει τις παραβολές ανωτέρας τάξης $y^n = \alpha x$. Όχι μόνο γνώριζε μία μέθοδο για να βρίσκει την εφαπτομένη σε καμπύλες της μορφής $y = x^m$ αλλά, ακόμη, κάποια εποχή, μετά το 1629, ανακάλυψε ένα θεώρημα για το εμβαδόν κάτω από αυτές τις καμπύλες – το θεώρημα που δημοσίευσε ο Cavalieri το 1635 και το 1647. Φαίνεται ότι για την εύρεση του εμβαδού, ο Fermat αρχικά χρησιμοποιούσε τύπους για τα αθροίσματα δυνάμεων των ακεραίων ή ανισώσεις της μορφής

$1^m+2^m+3^m+....+n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m+2^m+3^m+....+n^m + (n-1)^m$ για να αποδείξει το αποτέλεσμα για όλες τις θετικές ακέραιες τιμές του m.Αυτό και μόνο ήταν μία πρόοδος ως προς το έργο του Cavalieri, ο οποίος περιορίστηκε στις περιπτώσεις από m=1 έως m=9.

Σε ένα σημείωμά του προς τον Cavalieri το 1646 αναφέρεται σε ένα γενικό κανόνα τετραγωνισμού παραβολών ανώτερης τάξης και κάνει τον κυβισμό του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα της τυχαίας παραβολής. Στο βιβλίο του *Περί μετασχηματισμού και απλοποιήσεως των εξισώσεων καμπύλων* ασχολείται με τον τετραγωνισμό παραβολών και υπερβολών ανώτερου βαθμού, με εφαρμογή του λήμματος στο οποίο παρουσιάζει τον υπολογισμό του αθροίσματος S, των απείρων όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$.

Με σύγχρονους όρους θα γράφαμε $\frac{\alpha_1}{S-\alpha_1} = \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}}$, δηλαδή το γνωστό $S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$, το οποίο του επιτρέπει να κάνει χρήση γεωμετρικών και όχι αριθμητικών προόδων που έκανε ο Αρχιμήδης.

Έτσι πρότεινε μία καλλίτερη μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού κάτω από τις καμπύλες $y = x^m$ η οποία μπορούσε να εφαρμοστεί για ακέραιες και για ρητές τιμές του m. Έστω η καμπύλη $y = x^m$ και έστω ότι ζητείται το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη από x=0 έως x=α. Ο Fermat διαίρεσε το διάστημα από x=0 έως x=α σε απείρως πολλά υποδιαστήματα θεωρώντας σημεία με τετμημένες α, αΕ, αE^2,αE^3,..., όπου το Ε είναι μικρότερο από τη μονάδα. Στα σημεία αυτά έβρισκε τις αντίστοιχες τεταγμένες της καμπύλης και προσπαθούσε να βρει το εμβαδόν με τη βοήθεια των διαδοχικά σχηματιζόμενων περιγεγραμμένων ορθογωνίων.



Τα εμβαδά των διαδοχικών περιγεγραμμένων ορθογωνίων, ξεκινώντας από το μεγαλύτερο, δίνονται από τους όρους γεωμετρικής της προόδου

$\alpha^m(\alpha\text{-}\alpha E)$, $\alpha^m E^m(\alpha E\text{-}\alpha E^2)$, $\alpha^m E^{2m}(\alpha E^2\text{-}\alpha E^3)$,....

Το άθροισμα των άπειρων όρων αυτής της γεωμετρικής προόδου είναι

$$S(E)=\frac{\alpha^{m+1}(1-E)}{1-E^{m+1}}=\frac{\alpha^{m+1}}{1+E+E^2+.....+E^m}$$

Καθώς το E τείνει στο 1,δηλαδή καθώς τα ορθογώνια γίνονται στενότερα, το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων πλησιάζει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη. Θέτοντας E=1 στον παραπάνω τύπο για το άθροισμα των ορθογωνίων, έχουμε $S(1)=\dfrac{\alpha^{m+1}}{m+1}$ για το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y=x^m$ από x=0 έως x=α, και με σύγχρονους όρους :

$$\int_0^\alpha x^m dx=\frac{\alpha^{m+1}}{m+1}.$$

Για να δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για ρητές κλασματικές τιμές $\frac{p}{q}$, θέτουμε $m=\frac{p}{q}$. Τότε το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου είναι $S(E)=\alpha^{\frac{(p+q)}{q}}\left(\frac{1-E^{q}}{1-E^{p+q}}\right)=\alpha^{\frac{(p+q)}{q}}\left(\frac{1+E+E^{2}+....+E^{q-1}}{1+E+E^{2}+.....+E^{p+q-1}}\right)$.

Οπότε για E=1, είναι $S=\frac{q}{p+q}\alpha^{\frac{(p+q)}{q}}$.

Αν σύμφωνα με το σύγχρονο συμβολισμό, θέλουμε να βρούμε το $\int_{\alpha}^{b} x^{n}dx$, αρκεί μόνο να παρατηρήσουμε ότι αυτό είναι $\int_{0}^{b} x^{n}dx - \int_{0}^{\alpha} x^{n}dx$.

Ο Fermat χρησιμοποίησε μία παρόμοια διαδικασία για αρνητικές τιμές του n (εκτός της n=-1), με τη μόνη διαφορά ότι θεώρησε το Ε μεγαλύτερο της μονάδας και ότι έτεινε στη μονάδα από τα δεξιά. Το εμβαδόν που βρήκε ήταν αυτό κάτω από την καμπύλη από x=α έως το άπειρο. Για να υπολογίσει, κατόπιν το $\int_{\alpha}^{b} x^{-n}dx$ αρκέστηκε να παρατηρήσει ότι αυτό ισούται με $\int_{\alpha}^{\infty} x^{-n}dx$ - $\int_{b}^{\infty} x^{-n}dx$ (Boyer& Merzbach, 1997). Η παραπάνω διαδικασία αποτυγχάνει για n =-1. Η περίπτωση όμως αυτή διευθετήθηκε όπως είδαμε από τον Gregoire Saint Vincent.

Ο Fermat ενδιαφερόταν για πολλές πτυχές της απειροστικής ανάλυσης- τετραγωνισμούς, όγκους, μήκη καμπύλων, κέντρα βάρους. Μεταξύ άλλων αναφέρουμε την απόδειξη θεωρήματος στο οποίο το εμβαδόν μιας κισσοειδούς ισούται με το τριπλάσιο του εμβαδού του γεννήτορα κύκλου. Στο έργο του *Veterum geometria promota in septem de cycloidi libris (Η γεωμετρία των Αρχαίων προαγόμενη σε επτά βιβλία περί κυκλοειδέων)* του Ιησουίτη Antoine de la louvere, αποδεικνύει ανώνυμα σε ένα παράρτημα ότι το πρόβλημα της ευθειοποίησης της κοινής παραβολής είναι ισοδύναμο με τον τετραγωνισμό της συνηθισμένης υπερβολής , το οποίο μπορεί να εκφραστεί με σύγχρονους όρους ως ολοκλήρωμα λογαρίθμων (Loria, 1971).

O Fermat δεν μπόρεσε να αντιληφθεί και να αποδείξει την αντίστροφη σχέση που υπήρχε μεταξύ του προβλήματος της εφαπτομένης και αυτού του εμβαδού, και εργαζόμενος διαισθητικά στερήθηκε της έννοιας του ορίου. Παρόλα αυτά οι τετραγωνισμοί του, οι μέθοδοι υπολογισμού των ακροτάτων και η χάραξη της εφαπτομένης, που οδηγούν στον υπολογισμό της παραγώγου με τη βοήθεια των απειροστών, οδήγησαν αργότερα τους Laplace, Lagrange και Fourier να τον θεωρήσουν ως τον αληθινό εφευρέτη του διαφορετικού λογισμού (Γιαννακούλιας, 2007).


Library of Congress

Blaise Pascal

Από τους σημαντικότερους μαθηματικούς και φιλόσοφους εκείνης της εποχής ήταν και ο Blaise Pascal (1623-1662). Η ανακάλυψη των δικών του μεθόδων ολοκλήρωσης ήταν απόρροια του ισχυρού ενδιαφέροντός του για την θεωρία αριθμών, το οποίο με τη σειρά του δημιουργήθηκε από την επιρροή την οποία άσκησε στον ίδιο η συναναστροφή του με τους Fermat και Roberval. Αν και οι τεχνικές τις οποίες ανέπτυξε στο συγκεκριμένο πεδίο δεν ήταν πρωτότυπες, εντούτοις, αντίθετα με τους μυστικοπαθείς Fermat και Roberval, δημοσίευσε το έργο του καταφέρνοντας παράλληλα μέσω της διαυγούς και ξεκάθαρης σκέψης του να ρίξει φως στην εννοιολογική βάση τέτοιου είδους μεθόδων, ενώ άσκησε σημαντική επιρροή στις πρώιμες σπουδές του Leibniz. Μέσα από τις εργασίες του φαίνεται καθαρά ότι πλησίασε στη σύγχρονη έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στο πρώιμο έργο του Potestatum numericarum summa (Αριθμητικών τιμών άθροισμα), ο Pascal ασχολείται με αθροίσματα της μορφής $\alpha_1^{\ k}+\alpha_2^{\ k}+...+\alpha_n^{\ k}$, όπου οι $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Στόχος του είναι ο υπολογισμός του εμβαδού καμπυλόγραμμων χωρίων, κάτι που φαίνεται και από την δήλωσή του : *Αυτοί που ξέρουν κάτι από τη θεωρία των αδιαιρέτων θα είναι ικανοί να δουν αμέσως ότι τα παραπάνω αποτελέσματα τους δίνουν τη δυνατότητα να τετραγωνίσουν μία παραβολή οποιασδήποτε τάξης και μία απειρία άλλων καμπύλων* (Baron, 1969). Η διαδικασία που ακολουθεί οδηγεί στο όριο $\lim\limits_{n->\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^1 x^k dx=\frac{1}{k+1}$.

Οι μελέτες του για τον υπολογισμό του εμβαδού υπό την παραβολή $y = x^m$ στο διάστημα [0,α], δηλαδή για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^{\alpha} x^m dx$, σε σύγχρονη ορολογία, τον οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι ο εν λόγω υπολογισμός αναγόταν στον υπολογισμό των αθροισμάτων της μορφής $1^m + 2^m + ... + n^m$. Το 1654, με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής και του διωνυμικού αναπτύγματος απέδειξε τον τύπο $\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + A(n)$ (1)

όπου ο βαθμός του A(n) είναι μικρότερος του m. Στο σημείο αυτό όμως κάνει μία διαγραφή χωρίς να δίνει αυστηρή δικαιολόγηση. Ισχυρίζεται πως για αρκετά μεγάλα n, οι μικρότερες δυνάμεις του n παραλείπονται, στη σύγκρισή τους με τον όρο $\frac{n^{m+1}}{m+1}$ στον τύπο (1) (Γιαννακούλιας, 2007). Κατά τον Boyer (1997): *« η διαγραφή ποσοτήτων με τον τρόπο που την χρησιμοποίησε ο Pascal, έχει χαρακτηριστεί ως η βασική αρχή του διαφορικού λογισμού, και παρά το γεγονός ότι η αιτιολογία της διαγραφής δεν ήταν αυστηρά θεμελιωμένη, εν τούτοις άσκησε αργότερα μεγάλη επίδραση στη μορφοποίηση των απόψεων του Leibniz, ο οποίος αποδέχτηκε σαν βασική αρχή στο λογισμό του, ότι οι διαφορές υψηλότερης τάξης μπορούν να παραλείπονται»*. Αυτή η άποψη συναντάται και στον Euler που θεωρεί τα διαφορικά ίσα με το μηδέν, αλλά και στον Newton που «εξαφανίζει» τις *στιγμές* του, διότι τις θεωρούσε ασήμαντες ώστε να αλλοιώσουν το αποτέλεσμα (Cajori, 1991).

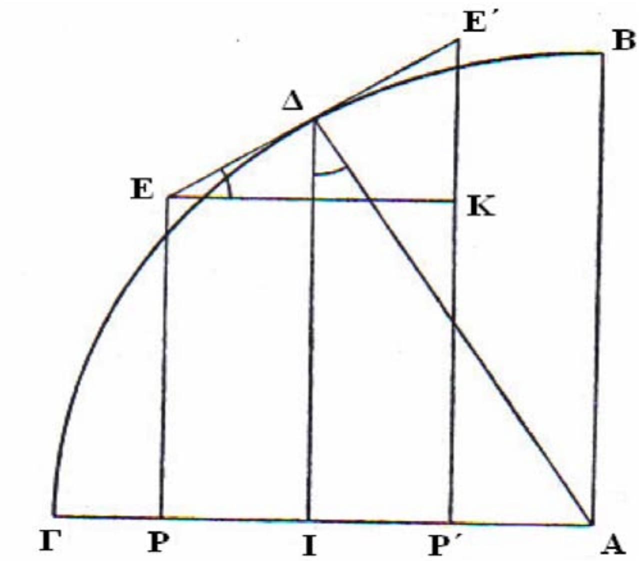
Ο Pascal εφάρμοσε το σκεπτικό του για τον υπολογισμό του εμβαδού, του μέρους του επιπέδου που βρισκόταν υπό την καμπύλη $y = x^m$, στο διάστημα [0,α]. Υποδιαίρεσε την επιφάνεια σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό n, ορθογώνιων λωρίδων με πλάτος $h = \frac{\alpha}{n}$. Τότε το εμβαδόν υπό την καμπύλη είναι

ε= $\left(h^m + (2h)^m + ... + (nh)^m\right) \cdot h = h^{m+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^m \cong \frac{(nh)^{m+1}}{m+1} = \frac{\alpha^{m+1}}{m+1}$ (Edwards, 1979).

Ο Pascal μελέτησε και χρησιμοποίησε τη μέθοδο των αδιαιρέτων. Πίστευε ότι την είχε βελτιώσει, ώστε να είναι σε θέση να την εφαρμόσει για την επίλυση προβλημάτων που αφορούσαν, την κυκλοειδή, τον υπολογισμό εμβαδών από καμπύλες, όπως η παραβολή και οι σπείρες, καθώς και τον υπολογισμό των κέντρων βάρους. Το 1659 δημοσιοποίησε ανεπίσημα κάποιες επιστολές με τίτλο «*Διάφορες ανακαλύψεις του A.Dettonville στη γεωμετρία*» στις οποίες αναφερόταν στον υπολογισμό εμβαδών, όγκων, μήκους τόξων και κέντρων βάρους. Σε αυτές εξηγούσε ότι τα αδιαίρετα ενός επιπέδου σχήματος αποτελούσαν μία απειρότητα απειροστών ορθογωνίων, των οποίων το άθροισμα διαφέρει από το σχήμα μόνο κατά μία ποσότητα μικρότερη από δοσμένη ποσότητα. Πίστευε πως όσα αποδεικνύονταν με τους κανόνες των αδιαιρέτων, θα μπορούσαν επίσης να αποδειχθούν με την αυστηρότητα της μεθόδου των αρχαίων Ελλήνων (Γιαννακούλιας, 2007).

Το 1629 διατύπωσε μία πρόταση με τίτλο «*Traite des sinus du quart de cercle» (Πραγματεία για τα ημίτονα του τεταρτοκυκλίου)*. Σε αυτή διαφαίνεται το σκεπτικό του για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Ο Leibniz διαβάζοντας αργότερα αυτήν την πραγματεία είπε ότι ο Pascal βρέθηκε πολύ κοντά στην ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού. Ο Pascal χρησιμοποιεί ένα είδος χαρακτηριστικού τριγώνου για την εξαγωγή μιας σειράς αποτελεσμάτων ισοδυνάμων με τριγωνομετρικά ολοκληρώματα διαμέσου της διαίρεσης τόξου κύκλου σε ίσα μέρη.

Αποδεικνύει ότι το άθροισμα των ημιτόνων τυχαίου τόξου του τεταρτοκυκλίου ισούται με το γινόμενο της ακτίνας με το μήκος της βάσης που περιέχεται μεταξύ των ακραίων ημιτόνων.



Για την απόδειξη του ισχυρισμού στο τυχαίο σημείο Δ του τεταρτοκυκλίου φέρνει μία εφαπτομένη και επιλέγει σημείο Ε αυθαίρετα ώστε ΕΕ΄ πολύ μικρό και φέρνει τις κάθετες ΔΙ, ΕΡ στην ΑΓ. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΙΔ, ΕΚΕ΄ προκύπτει ότι $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\mathrm{I}}=\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{EK}}$, άρα $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\mathrm{I}}=\frac{\mathrm{EE'}}{\mathrm{PP'}}$, οπότε $\Delta\mathrm{I}\cdot\mathrm{EE'}=\Delta\mathrm{A}\cdot\mathrm{PP'}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PP'}$.

Αν θέσουμε ΔΙ=y, ΑΔ=ρ,Δx=PP΄ και Δs=EE΄ και θεωρήσουμε τα Δs, Δx ως «αδιαίρετα» και αθροίσουμε το αποτέλεσμα του Pascal σε σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται από την ισότητα: $\int y\,ds=\int \rho\,dx$ (Ι).

Εφόσον το 2πyds είναι το εμβαδόν μιας απειροστής περιοχής του ημισφαιρίου ακτίνας ρ που επιτυγχάνεται από την περιστροφή του τεταρτοκυκλίου περί τον x- άξονα, το εμβαδόν Ε του ημισφαιρίου θα είναι Ε=$\int 2\pi y\,ds=2\pi\int y\,ds$ και από την (Ι) έχουμε Ε=$2\pi\int_0^\rho \rho\,dx=2\pi\rho^2$ και άρα το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας ρ θα είναι $4\pi\rho^2$.

Αν και η κατ' αυτόν τον τρόπο χρήση του χαρακτηριστικού τριγώνου θα μπορούσε να τον οδηγήσει στην διαπίστωση του αντιστρόφου μεταξύ εφαπτομένης και τετραγωνισμού, εντούτοις ο Pascal δεν επέδειξε ενδιαφέρον για τις μεθόδους των εφαπτομένων. Αν το είχε κάνει πιθανότατα να είχε φτάσει πρώτος στην έννοια του ορίου, στο πηλίκο μεταβολών, και να είχε ανακαλύψει τη σημασία του για τον καθορισμό της εφαπτομένης και των τετραγωνισμών πριν από τους Newton και Leibniz. Κατά την άποψη του D’ Alembert, οι μελέτες του Pascal έδωσαν μία πολύ καλή προσέγγιση του ολοκληρωτικού λογισμού και αποτέλεσαν το σύνδεσμο μεταξύ των μεθόδων του Αρχιμήδη και αυτών του Newton (Γιαννακούλιας, 2007).

Η ολοκλήρωση των κλασματικών δυνάμεων

Ο τετραγωνισμός καμπύλων του τύπου $y = x^k$ με k όχι απαραίτητα θετικό ακέραιο αντιμετωπίστηκε συστηματικά για πρώτη φορά από τον John Wallis (1616-1703), ο οποίος ήταν Σαβιλιανός καθηγητής γεωμετρίας στην Οξφόρδη. Στην πραγματικότητα οι ρητοί και αρνητικοί εκθέτες εισήχθησαν από τον Wallis στο έργο του *Arithmetica Infinitorum* (Απειροστική Αριθμητική) το 1655, το οποίο είχε μία μεγάλη επίδραση στις πρώϊμες μαθηματικές ενασχολήσεις του Newton.

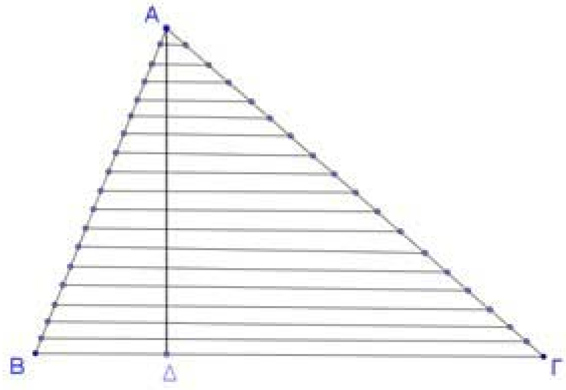
Ο Wallis μολονότι μελέτησε μαθηματικά όταν φοιτούσε στο Κέμπριτζ, το μεγαλύτερο μέρος του πρώτου μισού της ζωής του το αφιέρωσε προετοιμαζόμενος για εκκλησιαστική σταδιοδρομία. Παρόλα αυτά το ενδιαφέρον του για διάφορα επιστημονικά ερωτήματα τον οδήγησε να λάβει μέρος στη δεκαετία του 1640 στο Λονδίνο στις άτυπες συναντήσεις εκείνης της ομάδας των ανδρών που το 1662 συγκρότησαν τη Βασιλική Εταιρεία. Οι εβδομαδιαίες αυτές συναντήσεις ήταν αφιερωμένες στη συζήτηση «Φιλοσοφικών Ερωτημάτων», ανάμεσα στα οποία συμπεριλαμβάνονταν θέματα αστρονομίας, γεωμετρίας, ανατομίας και μηχανικής, που εκείνη την εποχή μελετώνταν τόσο στην Αγγλία, όσο και στην Ευρώπη. Το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά εμφανίστηκε γύρω στα 1647. Δύο χρόνια αργότερα καταλαμβάνει τη Σεβιλιανή έδρα των μαθηματικών στην Οξφόρδη που κενώθηκε επειδή ο προηγούμενος κάτοχός της βρέθηκε στη λανθασμένη πλευρά στον αγγλικό εμφύλιο πόλεμο. Στην Οξφόρδη ο Wallis συνέγραψε τα μαθηματικά έργα του, στα οποία πέρα από την *Aritmetica infinitorum (Απειροστική Αριθμητική)* περιλαμβάνονται διατριβές στην Άλγεβρα, τις κωνικές τομές και τη μηχανική.

Ο Wallis συνήγαγε τους ίδιους τύπους «ολοκλήρωσης» με τον Fermat. Ήταν ο πρώτος μαθηματικός που κατόρθωσε να ερμηνεύσει τους κλασματικούς εκθέτες και να τους χρησιμοποιήσει με συνέπεια. Είχε διαβάσει για το έργο του Cavalieri αλλά ουδέποτε μπόρεσε να βρει κάποιο από τα βιβλία του. Έτσι, αν και χρησιμοποιούσε τα αδιαίρετα στην *Aritmetica infinitorum* του 1655, υιοθέτησε μία προσέγγιση διαφορετική από εκείνη του

Cavalieri (Katz, 2013). Πρόθεσή του ήταν να προχωρήσει πέρα από το σημείο στο οποίο είχε φτάσει ο Cavalieri με τη γεωμετρία των αδιαιρέτων , αντικαθιστώντας τα γεωμετρικά επιχειρήματα με αλγεβρικά, βασιζόμενος στην αναλυτική γεωμετρία των Καρτέσιου-Fermat. Η πορεία που ακολούθησε τον οδήγησε στην επιτυχία. Ήταν ο πρώτος που κατόρθωσε να επεκτείνει την άλγεβρα σε μία αληθινή ανάλυση. Οι μέθοδοι βέβαια με τις οποίες γινόταν η ατέρμονη διαδικασία ήταν συχνά χονδροειδείς , χρησιμοποιώντας κανόνες που ίσχυαν για πεπερασμένες διαδικασίες και στην περίπτωση των απείρων. Παρόλο όμως που οι ιδέες του και οι αποδείξεις που έδινε δεν διακρίνονταν για τη μαθηματική τους αυστηρότητα , εν τούτοις συνετέλεσαν στην περαιτέρω θεμελίωση του απειροστικού λογισμού. Η πορεία του Wallis, ώστε η αριθμητική να απελευθερωθεί από τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις έμεινε γνωστή ως η *αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας* (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Wallis διαφοροποιείται από τον Cavalieri κατά το ότι θεωρεί ότι μια επίπεδη επιφάνεια αποτελείται από άπειρο πλήθος παραλληλογράμμων με άπειρα μικρό ύψος και όχι από ένα άπειρο πλήθος γραμμών. Έτσι η γραμμή, την οποία θεωρεί ως παραλληλόγραμμο με απειροστό ύψος, είναι διασταλτή και έχει ικανοποιητικό πάχος ώστε με έναν άπειρο πολλαπλασιασμό να μπορεί να συγκριθεί με το ύψος του σχήματος στο οποίο έχει εγγραφεί. Με τον τρόπο αυτό παρακάμπτει το πρόβλημα του πάχους του αδιαιρέτου που αντιμετώπιζε ο Cavalieri. Υποστηρίζει ότι η αύξηση της επιφάνειας επιτυγχάνεται με τη διαστολή των απειροστών παραλληλογράμμων και όχι με την παράθεση νέων γραμμών. Αυτό ελάχιστα διαφέρει από την έννοια της γέννησης των ποσοτήτων που αποτέλεσε τη βάση για τη θεωρία των ροών (fluxions) του Newton.

Ένα παράδειγμα της δουλειάς του Wallis και της προσπάθειας που καταβάλλει να μετατοπίσει το βάρος της επιχειρηματολογίας του από γεωμετρικά σε αλγεβρικά επιχειρήματα είναι ο τρόπος που υπολογίζει το εμβαδόν τριγώνου.



Θεώρησε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΒΓ=α και ύψος ΑΔ=υ αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό παραλληλογράμμων, με απειροστά ύψη που το καθένα ήταν ίσο με $\frac{1}{\infty}\upsilon$, και ισχυρίστηκε ότι το κάθε *παραλληλόγραμμο με το απειροστό ύψος μπορούσε να θεωρηθεί ως μία γραμμή.* Παρατήρησε ότι τα εμβαδά των παραλληλογράμμων, αρχίζοντας από την κορυφή Α και πηγαίνοντας προς τη βάση ΒΓ, σχημάτιζαν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το μηδέν. Τότε από τον τύπο που δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου πήρε την ισότητα $\Sigma = \frac{0+\alpha_\nu}{2}\cdot\nu = \alpha_\nu \cdot \frac{\nu}{2}$ (1)

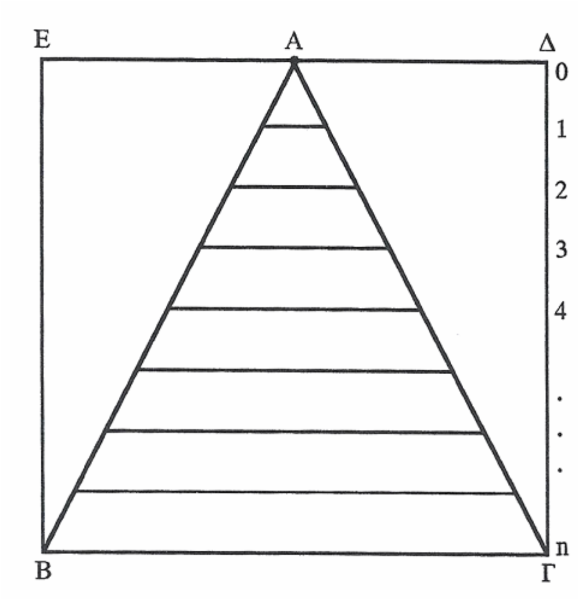
Την τελευταία ισότητα την επέκτεινε και για άπειρο πλήθος όρων. Εφόσον το εμβαδόν του τελευταίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με $\alpha\cdot\frac{1}{\infty}\upsilon$ από την (1) προκύπτει ο τύπος που δίνει το εμβαδόν τριγώνου

$E=\alpha\cdot\frac{1}{\infty}\upsilon\cdot\frac{\infty}{2}=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon$

Στο *Aritmetica infinitorum* ο Wallis χρησιμοποιεί το οριακό άθροισμα των ακεραίων δυνάμεων φυσικών αριθμών προκειμένου να αριθμητικοποιήσει τις μεθόδους του Cavalieri και με αυτόν τον τρόπο να προσδιορίσει εμβαδά κάτω από καμπύλες και όγκους στερεών χωρίς τη χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων. Ξεκίνησε από τα παρακάτω γεωμετρικά συμπεράσματα του Cavalieri :

(ι) Σε κάθε τρίγωνο και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που προκύπτουν από την τομή ενός κώνου (δια μέσω του άξονά του) και του αντίστοιχου περιγεγραμμένου κυλίνδρου, ο λόγος του αθροίσματος των γραμμών που αποτελούν το τρίγωνο προς το άθροισμα των γραμμών που αποτελούν το ορθογώνιο, είναι ίσος με $\frac{1}{2}$. Προφανώς ισχύει εμβ(ΑΒΓ)= $\frac{1}{2}$ εμβ(ΒΓΔΕ).

(Α είναι μέσον της ΕΔ).



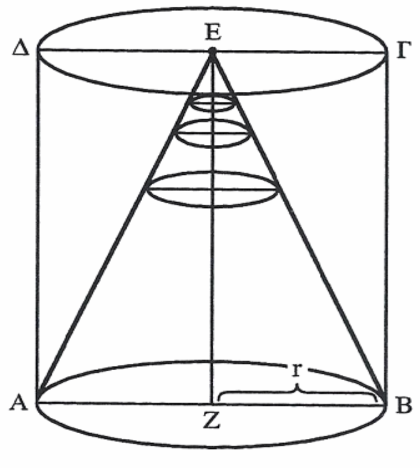
Σύμφωνα με τη μέθοδο των αδιαιρέτων το τρίγωνο ΑΒΓ έχει έναν άπειρο αριθμό αδιαιρέτων (τετμημένων), των οποίων τα μήκη είναι 0,1,2,...,n, δηλαδή βρίσκονται σε μία αριθμητική πρόοδο της οποίας ο μεγαλύτερος όρος είναι η βάση του τριγώνου. Εφόσον το άθροισμα των γραμμών του τριγώνου ισούται με το εμβαδόν του, και το άθροισμα των παραλλήλων ευθειών του ορθογωνίου ισούται επίσης με το εμβαδόν του , έχουμε ότι :

$$\frac{1}{2}=\text{εμβ(ΑΒΓ):εμβ(ΒΓΔΕ)}=\frac{0+1+2+....+n}{n+n+n+...+n}.$$

Ο Wallis παρατήρησε ότι $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2}$

και την παρατήρηση αυτή τη γενίκευσε: «*Αν αθροίσουμε μία σειρά με πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος όρων , οι οποίοι βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το μηδέν , τότε το άθροισμα θα έχει λόγο προς το άθροισμα της σειράς, που αποτελείται από το ίδιο πλήθος όρων, καθένας των οποίων ισούται με το μεγαλύτερο όρο της πρώτης σειράς, ίσο με* $\frac{1}{2}$.

(ιι)Το άθροισμα των κύκλων (αδιαίρετα) που αποτελούν ένα κώνο έχει λόγο προς το άθροισμα των κύκλων που απαρτίζουν τον περιγεγραμμένο κύλινδρο ίσο με $\frac{1}{3}$.



Γεωμετρικά προκύπτει άμεσα ότι $\frac{V_{\text{κώνου}}}{V_{\text{κυλινδρ.}}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \upsilon}{\pi r^2 \upsilon}=\frac{1}{3}$.

Από τη θεωρία των αδιαιρέτων του Cavalieri

$$\frac{\pi 0^2+\pi 1^2+....+\pi n^2}{\pi n^2+\pi n^2+...+\pi n^2}=\frac{0^2+1^2+2^2+....+n^2}{n^2+n^2+n^2+...+n^2}=\frac{1}{3}.$$

Με δεδομένα τα δύο συμπεράσματα ο Wallis προσπάθησε να αποδείξει την εικασία του Cavalieri, στο μοναδιαίο διάστημα, που σε σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται από την ισότητα:

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_n \frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} \left(= \frac{1^{k+1}}{k+1} \right)$$

Εφάρμοσε γι αυτό μια μορφή μαθηματικής επαγωγής , ατελούς όμως γιατί από ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων που επαλήθευε έφθανε στο γενικό συμπέρασμα.

Για παράδειγμα , για την απόδειξη της ισότητας $\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \ldots + n^2} = \frac{1}{3}$,

εξέτασε το λόγο για δύο αριθμούς $\frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$,

Στη συνέχεια για τρεις και για τέσσερις αντίστοιχα,

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 6}$$

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 6}$$

και γενικεύοντας βρήκε την ισότητα $\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \ldots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \cdot n}$.

Διατύπωσε τότε τον ισχυρισμό, πως αν η διαδικασία συνεχιστεί επ’ άπειρον, τότε το $\frac{1}{6 \cdot n}$ στο άπειρο γίνεται ίσο με $\frac{1}{\infty}$=0, και ο λόγος των τετραγώνων, που σε σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται με το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 dx$, θα ισούται ακριβώς με την οριακή τιμή $\frac{1}{3}$.

Για την περίπτωση k=3 εργάστηκε ανάλογα.

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 2}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{2^3+2^3+2^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 3}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{2^3+2^3+2^3+3^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 4}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}{2^3+2^3+2^3+3^3+4^3+5^3}=\frac{225}{750}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}$$

....

οπότε συμπέρανε ότι

$\frac{0^3+1^3+2^3+....+n^3}{n^3+n^3+n^3+....+n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot n}$, και άρα για μεγάλα n , δηλαδή για n→ ∞ έχουμε

$\lim\limits_{n->\infty}\frac{0^3+1^3+2^3+....+n^3}{n^3+n^3+n^3+....+n^3}=\frac{1}{4}$, και χωρίς περαιτέρω απόδειξη συμπέρανε ότι

$$\lim_{n->\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+....+n^k}{n^k+n^k+n^k+...+n^k}=\frac{1}{k+1} \qquad (1)$$

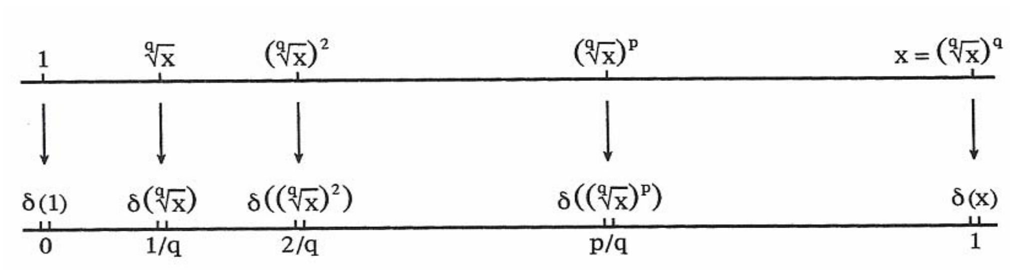
για όλες τις μη αρνητικές τιμές του k. O Wallis στη συνέχεια προσπάθησε να γενικεύσει την εικασία του Cavalieri που εκφράζεται σε σύγχρονο συμβολισμό από την ισότητα: $\int_0^{\alpha} x^k dx = \frac{\alpha^{k+1}}{k+1}$, για k θετικό ακέραιο, και στην περίπτωση που ο k ήταν θετικός ρητός αριθμός.

Από την ισότητα $\lim_{n->\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + ... + n^k}{n^k + n^k + n^k + ... + n^k} = \frac{1}{k+1}$ παρατήρησε ότι στη συνάρτηση $\varphi(x)=x^k$ αντιστοιχεί ο εκθέτης k. Απ' αυτή την παρατήρηση συμπέρανε πως σε κάθε συνάρτηση g για την οποία υπάρχει το $\lim_{n->\infty} \frac{g(0)+g(1)+...+g(n)}{g(n)+g(n)+....+g(n)}$ αντιστοιχεί ένας αριθμός, ο δείκτης δ(g) της g , που ορίζεται από την ισότητα:

$$\lim_{n->\infty} \frac{g(0)+g(1)+...+g(n)}{g(n)+g(n)+....+g(n)} = \frac{1}{\delta(g)+1}.$$

Στην περίπτωση που οι θετικές ακέραιες δυνάμεις της συνάρτησης $g(x)= x^k$ αποτελούσαν γεωμετρική πρόοδο, παρατήρησε ότι η ακολουθία των αντιστοίχων δεικτών ήταν μία αριθμητική πρόοδος. Από αυτήν την παρατήρηση οδηγήθηκε στο συμπέρασμα πως το ίδιο θα συνέβαινε και στην περίπτωση της γεωμετρικής προόδου

$$1, \sqrt[q]{x}, \left(\sqrt[q]{x}\right)^2, \left(\sqrt[q]{x}\right)^3, ..., \left(\sqrt[q]{x}\right)^p, ..., x.$$

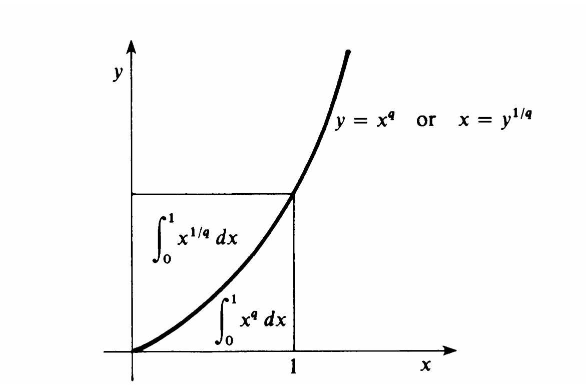


(Εφόσον το μήκος του διαστήματος ισούται με 1 και τα q σημεία είναι όροι αριθμητικής προόδου θα πρέπει ο λόγος να είναι ίσος με $\frac{1}{q}$). Ισχυρίστηκε ότι $\delta(x^k)=k$ και άρα $\delta\left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right)=\frac{p}{q}$. Για πρώτη φορά λοιπόν ο Wallis συμβόλισε την παράσταση $\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ με $x^{\frac{p}{q}}$.

Έτσι προκύπτει ότι $\lim\limits_{n->\infty}\frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p+\left(\sqrt[q]{1}\right)^p+\left(\sqrt[q]{2}\right)^p+...+\left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p+\left(\sqrt[q]{n}\right)^p+\left(\sqrt[q]{n}\right)^p+...+\left(\sqrt[q]{n}\right)^p}=\frac{1}{\frac{p}{q}+1}=\frac{q}{p+q}$

(Γιαννακούλιας, 2007).

Παρ' όλες τις προσπάθειες που κατέβαλλε όμως δεν μπόρεσε να δώσει μία αυστηρή απόδειξη για την παραπάνω σχέση. Το μόνο που κατάφερε ήταν να επαληθεύσει τον ισχυρισμό του για την περίπτωση όπου p=1.
Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει από το παρακάτω σχήμα



ότι $\int_0^1 x^{\frac{1}{q}}dx+\int_0^1 x^q dx=1$. Άρα $\int_0^1 x^{\frac{1}{q}}dx=1-\frac{1}{q+1}=\frac{1}{\frac{1}{q}+1}$, που θέλαμε.

Η εικασία του Wallis ότι $\int_0^{\alpha} x^{\frac{p}{q}} dx = \dfrac{\alpha^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} = \dfrac{q}{p+q}\alpha^{\frac{p+q}{q}}$, όπου $\dfrac{p}{q}$ είναι ένας θετικός ρητός αριθμός αποδείχθηκε αργότερα από τον Fermat (όπως έχουμε δει) και από τον Torricelli (Edwards, 1979).

Από τις μελέτες του ο Wallis σχημάτισε την άποψη ότι ισχύει ο γενικός κανόνας «το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της $y = px^{\nu}$, τον άξονα x΄x και την κάθετη στον x΄x στο σημείο Α με ΟΑ=x δίνεται από την σχέση $E = \dfrac{1}{\nu+1} px^{\nu+1}$ και ισχυρίστηκε ότι ισχύει για ν όχι μόνο θετικούς ακεραίους αλλά και για πραγματικούς (θετικούς, αρνητικούς, ρητούς, άρρητους) εκτός της περίπτωσης ν= -1.

Την $y = px^{\nu}$ την ονόμασε <u>αρχική συνάρτηση</u> ή <u>κανονική συνάρτηση,</u> ενώ την $E = \dfrac{1}{\nu+1} px^{\nu+1}$ την ονόμασε <u>συνάρτηση εμβαδού</u> της $y = px^{\nu}$. Επεκτείνοντας τον κανόνα του ο Wallis μπόρεσε να υπολογίσει τις συναρτήσεις εμβαδού και στις περιπτώσεις όπου οι αρχικές συναρτήσεις ήταν ένα αλγεβρικό άθροισμα συναρτήσεων της μορφής px^{ν}.

Επειδή γνώριζε την ανάπτυξη του διωνύμου $(x+\alpha)^{\nu}$, με $\nu \in \mathbb{N}$ συνάγεται ότι ο Wallis μπορούσε να υπολογίσει τη συνάρτηση εμβαδού και στην περίπτωση που η αρχική συνάρτηση είχε τη μορφή $(x+\alpha)^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Προσπαθώντας να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου με μοναδιαία ακτίνα εργάστηκε ως εξής:

Από την $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ υπολόγισε τα εμβαδά για τις συναρτήσεις $(1-x^2)^0$, $(1-x^2)^1, (1-x^2)^2, (1-x^2)^3$ και βρήκε ότι:

<u>Αρχική συνάρτηση</u>	<u>Εμβαδόν</u>
$\left(1-x^2\right)^0$	1
$\left(1-x^2\right)^1$	$\frac{2}{3}$
$\left(1-x^2\right)^2$	$\frac{8}{15}$
$\left(1-x^2\right)^3$	$\frac{48}{105}$

Στη συνέχεια ισχυρίστηκε ότι, αφού η συνάρτηση $\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ βρίσκεται μεταξύ των συναρτήσεων $\left(1-x^2\right)^0$ και $\left(1-x^2\right)^1$ η αντίστοιχη επιφάνεια πρέπει να βρίσκεται μεταξύ 1 και $\frac{2}{3}$. Έτσι προσπαθώντας να υπολογίσει αυτήν την τιμή (με παρεμβολές) κατόρθωσε να αποδείξει ότι :

$\frac{\pi}{4}=\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}$ και άρα το εμβαδόν του κύκλου δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια αφού ο π είναι άρρητος. Ο Wallis δηλώνει ότι η σχέση (σε σύγχρονο συμβολισμό) $\int_0^x pt^{\nu}dt=\frac{1}{\nu+1}px^{\nu+1}$ ισχύει για ρητούς, άρρητους και ότι την επέκταση της ισχύος της από τους ρητούς στους πραγματικούς την έκανε με τη μέθοδο της επαγωγικής μεθόδου και τη μέθοδο της παρεμβολής.

Ανάμεσα στις παρατηρήσεις του ήταν και μία, κατά την οποία, ενώ υπολόγιζε το $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$, προήγγειλε ένα μέρος της δουλειάς του Euler για τη συνάρτηση- γάμμα. OWallis γνώριζε από τη δουλειά των Cavalieri, Fermat και άλλων ότι αυτό το ολοκλήρωμα αντιπροσωπεύει το εμβαδόν που ορίζεται από το ημικύκλιο $y=\sqrt{x-x^2}$ και ότι, κατά συνέπεια, αυτό το εμβαδόν ισούται με $\frac{\pi}{8}$. Πως μπορεί όμως κανείς να βρει την απάντηση μέσα από έναν άμεσο υπολογισμό του ολοκληρώματος με απειροστικές μεθόδους; Ο Wallis δεν μπορούσε να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα αλλά η μέθοδός του της επαγωγής και της παρεμβολής τον οδήγησε σε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Μετά από τον υπολογισμό του $\int_0^1 \left(x-x^2\right)^n dx$ για διάφορες θετικές τιμές του n, ο Wallis κατέληξε , χρησιμοποιώντας ατελή επαγωγή, στο συμπέρασμα ότι η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος είναι $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Υποθέτοντας ότι αυτός ο τύπος ισχύει για όλες τις κλασματικές τιμές του n , ο Wallis κατέληξε ότι $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}$.

Άρα $\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}!\right)^2$ ή $\frac{1}{2}!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.Πρόκειται για ειδική περίπτωση της συνάρτησης βήτα του Euler, $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}\left(1-x\right)^{n-1}dx$, όπου $m=\frac{3}{2}$ και $n=\frac{3}{2}$.

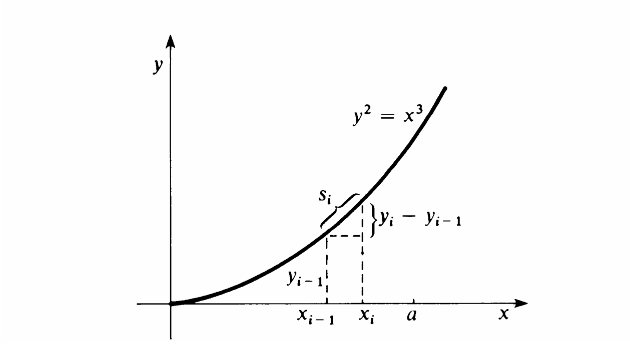
Ο Thomas Hobbes (1588-1679) ήταν από τους κυριότερους επικριτές της αριθμητικοποίησης της γεωμετρίας από τον Wallis. Χαρακτήρισε την *Aritmetica infinitorum* σαν «μία ανώμαλη συλλογή συμβόλων». Ο Hobbes όμως διέθετε μεγαλύτερη μαθηματική έπαρση παρά ικανότητα. Επέμενε μάλιστα πως είχε τετραγωνίσει τον κύκλο και είχε λύσει τα άλλα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας. Ο Wallis ήταν σε θέση να αγνοήσει τον Hobbes και να προχωρήσει σε άλλες ανακαλύψεις (Boyer& Merzbach, 1997).

Η ευθειοποίηση καμπύλης και το θεμελιώδες θεώρημα

Οι χρήσεις των αδιαιρέτων και της αριθμητικής του απείρου υπήρξαν μία φυσική και κάθε άλλο παρά αυστηρή πρώϊμη εισαγωγή στην θεωρία της ολοκλήρωσης. Οι τεχνικές των αδιαιρέτων, παρόλο που στερούνταν αυστηρής απόδειξης, αντιμετωπίζονταν ευρύτατα, στα μέσα του 17ου αιώνα, ως προφανείς και εύλογες , με τα πρακτικά πλεονεκτήματά τους, να είναι εύκολα και γρήγορα εφαρμόσιμες σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Ο μεγάλος όμως κίνδυνος που υπήρχε στις αποδείξεις των αδιαιρέτων ήταν η μη επινόηση ενός ικανοποιητικού συμβολισμού, που θα διευκόλυνε τη χρήση τους και η υπάρχουσα, καθολικά αποδεκτή λογική αντιμετώπιση, μπορούσε, λόγω της χαλαρότητας της έκφρασης, να οδηγήσει σε μία «φυσιολογική» αλλά εσφαλμένη εφαρμογή της μεθόδου (Γιαννακούλιας, 2007).

Είδαμε ότι ο τετραγωνισμός κάποιων καμπυλόγραμμων σχημάτων όπως π.χ. παραβολοειδών τμημάτων ανάγεται στην αρχαιότητα. Ωστόσο για πολύ καιρό πίστευαν ότι ένα τμήμα μιας αλγεβρικής καμπύλης δεν θα μπορούσε ποτέ να έχει το ίδιο μήκος με ένα κατασκευάσιμο ευθύγραμμο τμήμα. Δηλαδή το πρόβλημα της ευθειοποίησης-της κατασκευής ενός ευθύγραμμου τμήματος ίσου με το μήκος μιας δοθείσας καμπύλης- φαινόταν αδύνατο για αλγεβρικές καμπύλες. Όμως στα τέλη της δεκαετίας του 1650 οι απειροστικές τεχνικές που εφαρμόστηκαν απέδειξαν ότι αυτή η απαισιοδοξία ήταν αδικαιολόγητη (Edwards, 1979).

Η πρώτη ευθειοποίηση καμπύλης ήταν αυτή της ημικυβικής παραβολής $y^2 = x^3$ το 1657 από τον Άγγλο William Neil (ο οποίος ήταν τότε είκοσι χρονών και έκτοτε δεν ξανακούστηκε κάτι από αυτόν). Προκειμένου να περιγράψουμε τη διαδικασία που έκανε για τον υπολογισμό του μήκους του τμήματος αυτής της καμπύλης που κείται στο διάστημα [0,α] , υποδιαιρούμε αυτό το διάστημα σε έναν πολύ μεγάλο αριθμό n απειροστών διαστημάτων , εκ των οποίων το i-στο διάστημα να είναι το $[x_{i-1}, x_i]$.



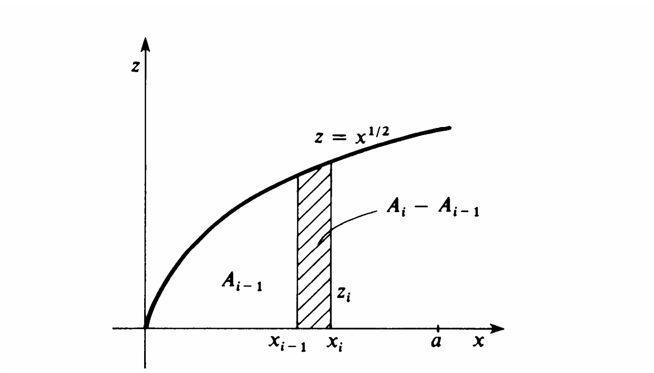
Αν το s_i εκφράζει το μήκος του (σχεδόν ευθύγραμμου) τμήματος της καμπύλης $y = x^{\frac{3}{2}}$, το οποίο ενώνει τα σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) και (x_i, y_i) τότε

$$s \cong \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \right]^{1/2}, \qquad \text{(A)}$$

οπότε το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \right]^{1/2}. \qquad \text{(B)}$$

Προκειμένου να υπολογίσει το άθροισμα (B) ο Neil εισήγαγε μία βοηθητική καμπύλη, την παραβολή $z = x^{\frac{1}{2}}$.



Αν A_i εκφράζει το εμβαδόν κάτω από αυτήν την παραβολή στο διάστημα $[0, x_i]$, τότε γνωρίζουμε από το γενικό αποτέλεσμα τετραγωνισμού

$\int_0^{\alpha} x^{\frac{p}{q}} dx = \dfrac{\alpha^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} = \dfrac{q}{p+q} \alpha^{\frac{p+q}{q}}$, ότι $A_i = \dfrac{2x_i^{\frac{3}{2}}}{3}$. Έτσι λαμβάνουμε

$$y_i - y_{i-1} = x_i^{\frac{3}{2}} - x_{i-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\left(A_i - A_{i-1}\right).$$

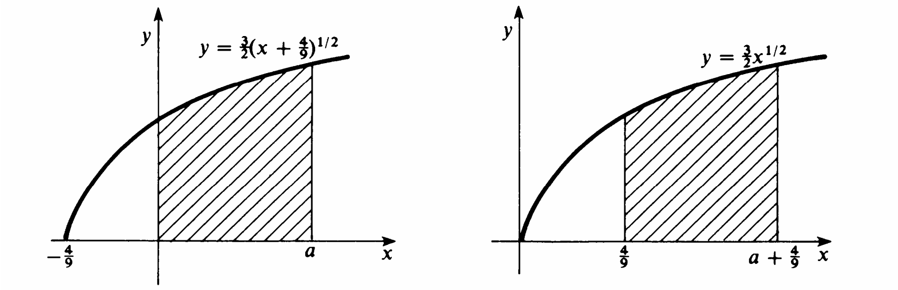
Άρα $y_i - y_{i-1} \cong \frac{3}{2} z_i \left(x_i - x_{i-1}\right)$ (Γ)

προσεγγίζοντας τη λωρίδα της επιφάνειας στο $[x_{i-1}, x_i]$, με ένα ορθογώνιο ύψους $z_i = x_i^{\frac{1}{2}}$. Ο συνδυασμός των (Β) και (Γ) δίνει :

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right) \cong \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{9}{4} z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2} \left(x_i + \frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \left(x_i - x_{i-1}\right) \qquad (\Delta)$$

Σε αυτό το σημείο αναγνωρίζουμε το άθροισμα στην (Δ) ως αυτό που δίνει (στο όριο) το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής $y = \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{2}}$ που βρίσκεται πάνω από το διάστημα [0,α]. Μεταφράζοντας αυτό είναι το ίδιο με το εμβαδόν του τμήματος της παραβολής $y = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2}$ που βρίσκεται στο διάστημα $\left[\frac{4}{9}, \alpha + \frac{4}{9} \right]$.



Από το γενικό τετραγωνικό αποτέλεσμα παίρνουμε έτσι :

$$s=\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\alpha+\frac{4}{9}\right)^{3/2}-\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}\right]=\frac{(9\alpha+4)^{3/2}-8}{27}.$$

Είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε τη διαδικασία του Neil με πιο γενικούς όρους. Για να υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης ύλης $y=f(x)$ στο διάστημα [0,α], χρειαζόμαστε αρχικά μία βοηθητική καμπύλη z=g(x) της οποίας το εμβαδόν A_i στο $[0,x_i]$ είναι $A_i=\int_0^{x_i} g(x)dx=f(x_i)=y_i$. (Ε)

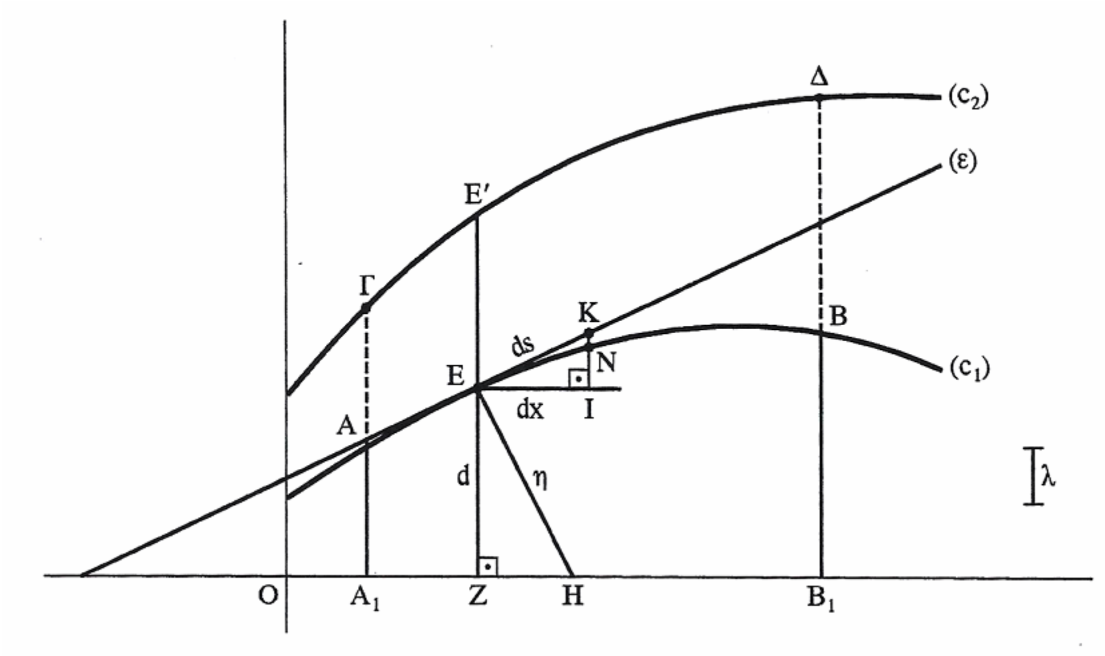
Τότε προκύπτει ότι $y_i-y_{i-1}=A_i-A_{i-1}\cong g(x_i)(x_i-x_{i-1})$, οπότε τα «χαρακτηριστικά τρίγωνα» δίνουν $s\cong\sum_{i=1}^{n}\left[1+\left(g(x)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(x_i-x_{i-1})$,

$$s=\int_0^{\alpha}\sqrt{1+\left[g(x)\right]^2}\,dx.$$

Με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, βλέπουμε ότι η κατάλληλη επιλογή της βοηθητικής καμπύλης (για να δώσει την (Ε)) είναι η g(x)=f΄(x). Έτσι ένας συνδυασμός τετραγωνισμών και εφαπτομένων μέσω του χαρακτηριστικού τριγώνου φαίνεται στην κατασκευή του Neil για την ειδική περίπτωση f(x)=$x^{3/2}$ (Edwards, 1979).

Στα δύο επόμενα χρόνια ακολούθησαν η ευθειοποίηση της κυκλοειδούς από τον Christopher Wren (1632-1723), αρχιτέκτονα του καθεδρικού ναού του Αγίου Παύλου και άλλων οικοδομημάτων του Λονδίνου, και η αναγωγή της ευθειοποίησης της παραβολής στην εύρεση εμβαδού κάτω από την υπερβολή από τον Huygens. Ωστόσο πιο γενική μέθοδος οφείλεται στον Hendrick van Heuraet (1634-1660;) και δημοσιεύτηκε στη λατινική έκδοση της *Γεωμετρίας* του Descartes από τον van Schooten (1659) (Katz, 2013).

Ο van Heuraet άρχιζε την εργασία του «De transmutatione curvarum linearum in rectas» (περί του μετασχηματισμού των καμπύλων σε ευθείες γραμμές), δείχνοντας ότι το πρόβλημα της κατασκευής ενός ευθυγράμμου τμήματος, ίσου με το μήκος ενός δοσμένου τόξου, ισοδυναμούσε με την εύρεση του εμβαδού υπό κάποια καμπύλη.



Στο τυχαίο σημείο Ε μιας καμπύλης (c_1) άγεται η εφαπτομένη (ε), η κάθετος ΕΖ=d στον οριζόντιο άξονα, και η κάθετος ΕΗ=η στην καμπύλη (c_1) στο σημείο της Ε. Ο van Heuraet δημιούργησε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ της (c_1) και μιας νέας καμπύλης (c_2) (την οποίαν ήθελε να προσδιορίσει). Στο τυχαίο σημείο Ε της (c_1) αντιστοιχούσε ένα σημείο Ε΄ της (c_2) που καθοριζόταν από την αναλογία : $E'Z : \lambda = \eta : d$ (1)

θεωρώντας ένα αυθαίρετο, αλλά σταθεροποιημένο, ευθύγραμμο τμήμα μήκους λ. Ας είναι Κ ένα σημείο της (ε) απείρως γειτονικό προς το Ε. Στο απειροστό τρίγωνο ΕΚΙ, το ΕΚ μπορεί να θεωρηθεί ότι ταυτίζεται με το τόξο ΕΝ. Τότε από την ομοιότητα των τριγώνων ΕΚΙ και ΕΖΗ προκύπτει η αναλογία:

$\eta : d = EK : EI.$ (2)

Από τις (1), (2) θα είναι $E'Z : \lambda = EK : EI$

και σε σύγχρονο συμβολισμό: $E'Z : \lambda = ds : dx \Leftrightarrow \lambda ds = E'Z \cdot dx.$

Αθροίζοντας τα στοιχειώδη τόξα που αντιστοιχούν στο διάστημα με άκρα τα σημεία $A_1 B_1$ προκύπτει : λ(μήκος τόξου ΑΒ) = εμβ ($A_1 B_1 \Delta\Gamma$) (3)

Ο van Heuraet, από την (3) κατέληξε στο συμπέρασμα, πως αν μπορούσε να βρει την εξίσωση της (c_2) από αυτήν της (c_1), τότε θα μπορούσε να υπολογίσει το μήκος του τόξου (Γιαννακούλιας, 2007).

Evangelista Torricelli

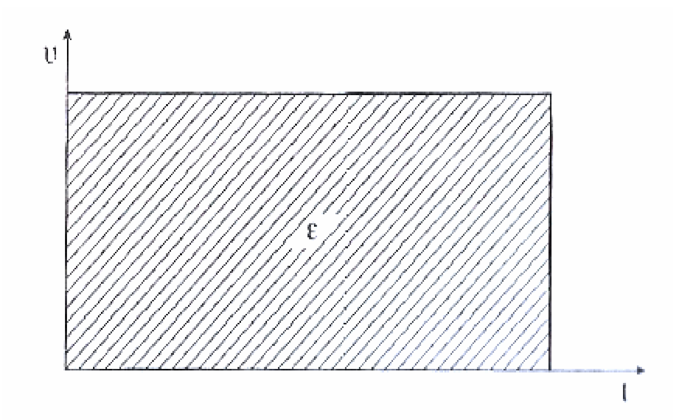
Η θεωρία των αδιαιρέτων του Cavalieri γενικεύτηκε από το φίλο του Evangelista Torricelli(1608-1647). O Torricelli γεννήθηκε στη Modigliana της Faenza (Μοντιλιάνα της Φαγεντίας). Ήταν εξέχων μαθηματικός και φυσικός. Μελέτησε τη μέθοδο των αδιαιρέτων και ήταν ο πρώτος που μετά το δάσκαλό του μπόρεσε να την κατανοήσει και να την εφαρμόσει σε μία μεγάλη ποικιλία προβλημάτων. Μάλιστα ξεπέρασε ακόμη και το δάσκαλό του στην ευκρίνεια και την ευελιξία χρήσης αυτής της μεθόδου καθώς γενίκευσε τη μέθοδο αυτή. Η γενίκευση της μεθόδου επέτρεπε την ανάλυση ενός επίπεδου σχήματος όχι μόνο σε ένα άπειρο πλήθος παράλληλων τμημάτων, αλλά και σε καμπύλα αδιαίρετα τμήματα.

O Torricelli ήταν από τους πολλά υποσχόμενους μαθηματικούς του δέκατου έβδομου αιώνα-ο οποίος πολλές φορές ονομάζεται και αιώνας της μεγαλοφυίας. Σε ηλικία 20 χρονών βρέθηκε στη Ρώμη να σπουδάζει μαθηματικά υπό τον Casteli. Η σύντομη γνωριμία του με το γηραιό και τυφλό Γαλιλαίο, ξύπνησε στο νέο επιστήμονα το ενδιαφέρον για τη φυσική και πιθανότατα σήμερα τον θυμόμαστε ως εφευρέτη του βαρόμετρου και όχι ως μαθηματικό. Μετά το θάνατο του Γαλιλαίου μετέβη στη Φλωρεντία όπου σπούδασε μαθηματικά, αστρονομία και φυσική. Οι αποδείξεις που δίνονταν στη μέθοδο των αδιαιρέτων δεν τον ικανοποιούσαν, και συχνά τις συμπλήρωνε με δικές του που ήταν πιο κοντά στις αποδείξεις του Αρχιμήδη και του Valerio. Το 1644 γράφει το "Opera geometrica". Σ' αυτό επέκτεινε τις αρχές της δυναμικής στα ρευστά και εφάρμοσε τις μεθόδους του Cavalieri σε διάφορα σχήματα. Η εργασία του αυτή συντέλεσε σε μέγιστο βαθμό για την εξάπλωση της μεθόδου των αδιαιρέτων στην υπόλοιπη Ευρώπη. Στην παράγραφο που είχε τίτλο «De dimensione parabolae» παρουσίασε 21 διαφορετικά προβλήματα τετραγωνισμού παραβολής. Στα δέκα από αυτά χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης και στα υπόλοιπα 11 τη μέθοδο των αδιαιρέτων. Το αξιοπερίεργο όμως είναι πως μία από αυτές τις αποδείξεις είχε γίνει με το μηχανικό τρόπο απόδειξης που είχε δοθεί από τον Αρχιμήδη στον τετραγωνισμό της παραβολής που εκείνη την εποχή δεν ήταν γνωστή (Andersen, 1985).

Το 1641 απέδειξε ότι ο όγκος στερεού που γεννιέται από την περιστροφή απειρομήκους τόξου ισοσκελούς υπερβολής γύρω από μία ασύμπτωτη , είναι πεπερασμένος (Εξαρχάκος,1993). Πίστευε μάλιστα πως ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε ότι ένα σχήμα με άπειρες διαστάσεις μπορεί να έχει πεπερασμένο μέγεθος˙από αυτή όμως την άποψη ίσως τον πρόλαβε το έργο του Fermat για τα εμβαδά κάτω από τις παραβολές περισσότερων διαστάσεων ή ίσως ο Roberval και σίγουρα ο Oresme το 14^{o} αιώνα (Boyer, 1997). Η απόδειξη αυτή περιέχεται στο έργο του "Opera Geometrica". Στο ίδιο έργο υπάρχουν προβλήματα που ασχολούνται με τη χάραξη εφαπτομένων σε επίπεδες καμπύλες ,αποδεικνύεται ο τετραγωνισμός της παραβολής με πολλούς τρόπους και δίνεται ο τετραγωνισμός της κυκλοειδούς, καθώς και ο κυβισμός του κοχλιωτού στερεού (κοχλίας) (Εξαρχάκος, 1993). Όλα αυτά αποδεικνύουν με πόση άνεση και ασφάλεια χειριζόταν τις αρχαίες απειροστικές μεθόδους, εφαρμόζοντας αυτές τόσο σε γνωστά όσο και σε άγνωστα σχήματα (Loria, 1971).

Η χάραξη εφαπτομένων σε σημεία επίπεδων καμπύλων στηρίζεται από τον Torricelli στη μέθοδο σύνθεσης δύο κινήσεων ενός κινητού. Από τη διαδικασία που ακολουθεί για τη χάραξη αυτών των εφαπτομένων, φαίνεται να έχει επηρεαστεί από τις αντίστοιχες μεθόδους του Galileo και του Cavalieri (Εξαρχάκος, 1993). Οι έννοιες του χρόνου, της ταχύτητας, της απόστασης και της στιγμιαίας ταχύτητας σχετίζονταν με τη μελέτη των καμπύλων. Το σχήμα της καμπύλης όριζε την κίνηση και η κίνηση με τη σειρά της όριζε την καμπύλη. Η στιγμιαία ταχύτητα συνδέθηκε με την εφαπτομένη της καμπύλης και η συνολική κίνηση ή διανυθείσα απόσταση παριστανόταν από το εμβαδόν υπό την καμπύλη. Ο Torricelli ήταν από τους πρώτους που χρησιμοποίησε έννοιες της κίνησης για να ορίσει εμβαδά χωρίων που περικλείονταν από καμπύλες, καθώς και τροχιές κινούμενων σημείων. Γύρω στο 1644 συνέλαβε την ιδέα της χρησιμοποίησης της κινηματικής για τη χάραξη της εφαπτομένης σε διάφορες καμπύλες. Θεώρησε την καμπύλη ως την τροχιά ενός κινούμενου σημείου, του οποίου η κίνηση ήταν το αποτέλεσμα δύο απλούστερων κινήσεων, με γνωστές τις κατευθύνσεις και τα μεγέθη ταχυτήτων τους. Η κατεύθυνση της συνισταμένης κίνησης, με εφαρμογή του κανόνα παραλληλογράμμου έδινε και την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης. Την ιδέα αυτή την εφάρμοσε πρώτα στην περίπτωση της παραβολής στην οποία χρησιμοποίησε τις κινηματικές μελέτες του Γαλιλαίου. Η μέθοδος που ανέπτυξε ο Torricelli περιείχε την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας και συνεπώς υπέκρυπτε την έννοια του ορίου. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αδιαιρέτων και τη σύνθεση κινήσεων κατάφερε να φτάσει σε χρήσιμα αποτελέσματα που αποτέλεσαν αξιοσημείωτες προβλέψεις οι οποίες αργότερα ανακαλύφθηκαν με τη βοήθεια του λογισμού.

Από μεσαιωνικές μελέτες και τις εργασίες του Γαλιλαίου είχε προκύψει πως η κίνηση ενός σημείου, κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής με σταθερή ταχύτητα υ, μπορούσε να παρασταθεί σε άξονες υ-t, ταχύτητας – χρόνου.



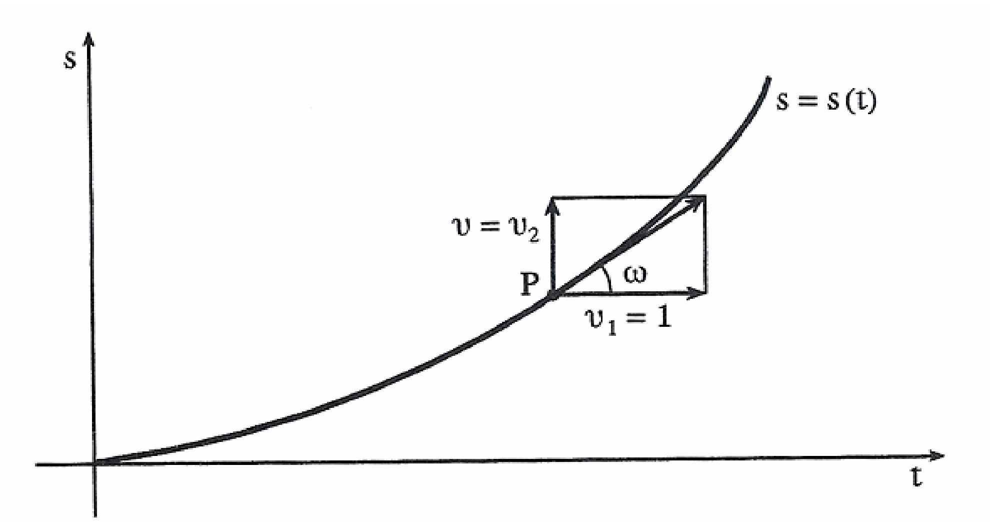
Η απόσταση s που διανύοταν από το κινητό προέκυπτε από τον τύπο s=υt.

Κατέληξαν λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου, με διαστάσεις υ και t, ήταν ίσο με την απόσταση s. Η περίπτωση κατά την οποία η ταχύτητα του κινούμενου σημείου μεταβαλλόταν συναρτήσει του χρόνου αντιμετωπίστηκε με τη βοήθεια των αδιαιρέτων. Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν ήταν πως η συνολική απόσταση που διατρέχει το κινητό , ήταν και σ' αυτή την περίπτωση ίση, με το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη και τους άξονες υ-t, ταχύτητα—χρόνου.

Στην περίπτωση που η ταχύτητα του κινητού δινόταν από τη σχέση $\upsilon = t^n$, το συνολικό διάστημα που διανυόταν από ένα κινητό που ξεκινούσε από την ηρεμία έδινε και το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που όριζε η καμπύλη $\upsilon = t^n$, ο άξονας t του χρόνου και η κάθετη ευθεία στον άξονα του χρόνου, τη χρονική στιγμή t.Από την εικασία του Cavalieri το εμβαδόν δινόταν από την σχέση:

$$S = E = \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad (1)$$

O Torricelli γύρω στα 1646 θεώρησε την ίδια κίνηση σε άξονες s-t διαστήματος –χρόνου, όπου το κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης με δύο ταχύτητες, μία παράλληλη προς τον άξονα των ταχυτήτων και μία παράλληλη προς τον άξονα των διαστημάτων. Υπέθεσε την παράλληλη κίνηση προς τον άξονα t των ταχυτήτων ομοιόμορφη, με ταχύτητα $\upsilon_1 = 1$ και την παράλληλη προς τον άξονα s των διαστημάτων με ταχύτητα $\upsilon_2 = \upsilon = t^n$.Από την κινηματική μέθοδο της χάραξης της εφαπτομένης η συνισταμένη του παραλληλογράμμου των διανυσμάτων καθόριζε την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο P.



Η κλίση της εφαπτομένης υπολογίστηκε από το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος:

εφω=$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}=\frac{\upsilon_2}{1}=\upsilon_2=\upsilon$.

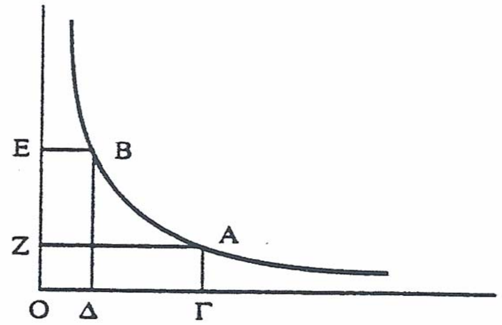
Δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης, στο γράφημα απόστασης – χρόνου, ισούται με την ταχύτητα του κινητού σημείου, η οποία ταχύτητα στο γράφημα ταχύτητας-χρόνου (υ-t), είναι η τεταγμένη στον αντίστοιχο χρόνο. Τότε:

$$\upsilon = s' = \left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)' = t^n. \qquad (2)$$

Με σύγχρονο συμβολισμό η παραπάνω σχέση γράφεται:

$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t x^n dx\right)=\frac{dE}{dt}=\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)'=t^n$, που εκφράζει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Παρατηρούμε ότι οι ισότητες (1) και (2) είναι η καθεμία η συνεπαγωγή της άλλης. Αυτό υπαινίσσεται ότι το εμβαδόν υπό την καμπύλη y=t^n ισούται με $\frac{t^{n+1}}{n+1}$ και η εφαπτομένη στην y=$\frac{t^{n+1}}{n+1}$ έχει κλίση ίση με t^n. Έτσι εμφανίζεται σε εμβρυακή μορφή το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Ο Torricelli παρότι έφθασε κοντά στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, δεν κατόρθωσε να το δει στη γενικότητά του (Baron, 1969).

Ο Torricelli απέδειξε την ισότητα $\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$ και στην περίπτωση που ο ν είναι οποιοσδήποτε ρητός αριθμός διαφορετικός από το -1. Την πρόταση αυτή έχει αποδείξει και ο Fermat, όπως είδαμε και γι αυτό γεννήθηκε μία διαμάχη μεταξύ τους για το ποιος την απέδειξε πρώτος. Όμως οι δύο αυτές αποδείξεις διαφέρουν ουσιωδώς και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μία έγινε ανεξάρτητα από την άλλη. Η απόδειξη που έδωσε ο Fermat είναι αλγεβρική, ενώ του Torricelli είναι καθαρά γεωμετρική και στηρίζεται στη μέθοδο της εξάντλησης.



Ο Torricelli θεωρώντας την υπερβολή $x^{\mu} \cdot y^{\nu} = \kappa$ απέδειξε με τη χρησιμοποίηση εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σχημάτων και τη μέθοδο της εξάντλησης, ότι ο λόγος των εμβαδών των καμπυλόγραμμων τετραπλεύρων ΑΒΔΓ και ΑΒΕΖ είναι ίσος προς $\frac{\nu}{\mu}$. Αυτό ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} x^{-\frac{\mu}{\nu}} dx$ (Εξαρχάκος, 1993).

Επίσης ένα από τα προβλήματα με τα οποία ασχολήθηκε, πριν τον πρόωρο θάνατό του το 1647, ήταν αυτό στο οποίο σχεδίασε την καμπύλη, που περιγράφει η εξίσωση x=logy , ίσως την πρώτη γραφική παράσταση μιας λογαριθμικής συνάρτησης , τριάντα χρόνια μετά το θάνατο του ανακαλύψαντα τους λογαρίθμους, ως υπολογιστικό εργαλείο. Ο Torricelli βρήκε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη, την ασύμπτωτή της και μία τεταγμένη, καθώς και τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται, αν περιστρέψουμε την επιφάνεια γύρω από τον άξονα x΄x (Boyer, 1997). Ασχολήθηκε ακόμα με το πρόβλημα του προσδιορισμού του κέντρου βάρους του κυκλικού τομέα και απέδειξε με δύο τρόπους, τον κλασσικό και τη μέθοδο των αδιαιρέτων, ότι βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της αντίστοιχης γωνίας και σε απόσταση από το κέντρο του κύκλου, η οποία δίνεται από τον τύπο: $\frac{2}{3}\cdot(\text{ακτίνα})\cdot\frac{\text{χορδή}}{\text{τόξο}}$. Λέγεται ότι ο τύπος αυτός συντάχθηκε κατά τη στιγμή του πρόωρου θανάτου του (Loria, 1971).

Αξιολογώντας το έργο του και από το γεγονός ότι η θεωρία των αδιαιρέτων του Cavalieri διαδόθηκε και έγινε γνωστή από το "Opera geometrica", μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι ο Torricelli υπήρξε ένας από τους πιο δημιουργικούς εργάτες των μαθηματικών, και όχι μόνον, που συνέβαλαν σε μεγάλο βαθμό στη δημιουργία του απειροστικού λογισμού. Αξίζει να αναφερθεί ότι το έργο του παρέμεινε αδημοσίευτο έως και το 1918 και ένεκα τούτου η σημαντική του συνεισφορά δεν έχει αναγνωρισθεί πλήρως ακόμη και σήμερα

Isaac Barrow

Ο Barrow όπως και ο Torricelli οδηγήθηκε στη διαισθητική αντίληψη της αντίστροφης σχέσης μεταξύ των προβλημάτων της εφαπτομένης και του τετραγωνισμού, δηλαδή μεταξύ της διαφόρισης και της ολοκλήρωσης (θεμελιώδες θεώρημα) μέσω της γεωμετρίας.

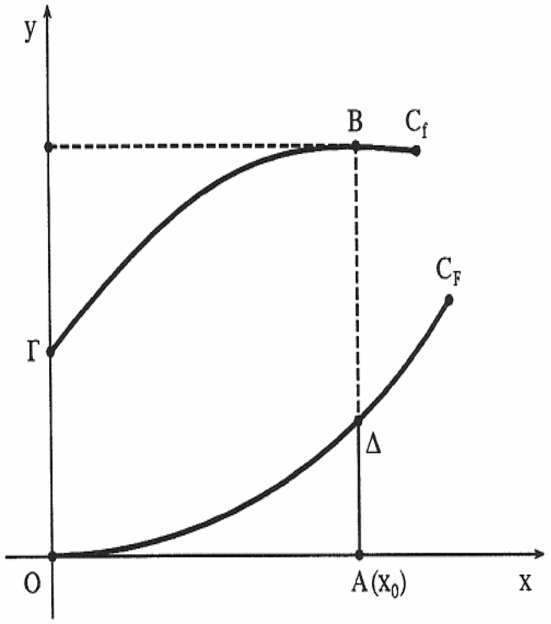
Ο Isaac Barrow (1630-1677) ήταν καθηγητής μαθηματικών στη Λουκασιανή έδρα του Cambridge από το 1663. Αμέσως μετά την περάτωση των σπουδών του στα κολέγια Charterhouse, Felsted και Trinity του Cambridge και για λόγους οι οποίοι άπτονταν της θρησκείας ταξίδεψε στο εξωτερικό για μια τριετία και επισκέφθηκε διάφορες πόλεις όπως το Παρίσι, τη Φλωρεντία, τη Σμύρνη, την Κωνσταντινούπολη και τη Βενετία. Αν και κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου τα μαθηματικά δεν μονοπώλησαν το ενδιαφέρον του, εντούτοις η αλληλογραφία του με το Cambridge προδίδει ότι έλαβε πολλά ερεθίσματα από την επικοινωνία την οποία είχε με επιφανείς μαθηματικούς της εποχής του τόσο από τη Γαλλία όσο και την Ιταλία (Baron, 1969). Μετά την επιστροφή του στην Αγγλία κατέλαβε την έδρα των Ελληνικών στο Cambridge και παράλληλα δίδαξε αστρονομία και Γεωμετρία στο κολέγιο Gresham του ίδιου πανεπιστημίου. Το 1664 διορίστηκε καθηγητής Γεωμετρίας στο Cambridge και κατείχε αυτή τη θέση επί έξι συναπτά έτη, οπότε τον διαδέχθηκε ο μαθητής και φίλος του Isaac Newton.Ο Barrow, όντας συντηρητικός στα μαθηματικά, απέρριψε το φορμαλισμό της άλγεβρας και από αυτήν την άποψη το έργο του έρχεται σε αντίθεση με αυτό του Wallis. Θεωρούσε ότι η άλγεβρα έπρεπε να ήταν τμήμα της λογικής και όχι των μαθηματικών, μία άποψη που δύσκολα συνέβαλε στις αναλυτικές ανακαλύψεις. Θαύμαζε τους αρχαίους και επόπτευσε την έκδοση των έργων του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και του Αρχιμήδη (Boyer& Merzbach, 1997). Το 1669 έγραψε την πραγματεία του «*Lectiones Geometricae»* (γεωμετρικές διαλέξεις), στη διόρθωση των οποίων βοήθησε και ο Newton.Το έργο αυτό δημοσιεύτηκε το 1670.

Στο πρώτο μάθημα των «*Lectiones Geometricae»* εξετάζεται η φύση του χρόνου και της κίνησης, μεγέθη τα οποία μετρούν το ένα το άλλο, τα θεωρεί δηλαδή μαθηματικά μεγέθη. Για τον Barrow ο χρόνος αποτελείται από την απλή άθροιση διαδοχικών στιγμών είτε από τη συνεχή ροή (flux) μιας μόνο στιγμής. Ενώ η ευθεία γραμμή είναι το ίχνος του σημείου το οποίο κινείται μπροστά και μπορεί να θεωρηθεί ως το ίχνος μιας στιγμής, συνεχώς ρέουσας. Έτσι ο χρόνος μπορεί να παρασταθεί από μία ευθεία γραμμή.

Στο δεύτερο μάθημα ο Barrow θεωρεί τη δημιουργία καμπύλων και επιφανειών με σύνθετη κίνηση. Μια καμπύλη παράγεται δια της κινήσεως σημείου κατά μήκος ευθείας γραμμής, ενώ συγχρόνως η γραμμή κινείται παραλλήλως στον εαυτό της. Ένας κώνος παράγεται δια της περιστροφής ευθυγράμμου τμήματος γύρω από ένα άκρο του, ενώ ένας κύκλος από την περιστροφή ευθύγραμμου τμήματος στο επίπεδο (Baron, 1969). Έτσι ξαναβρίσκουμε εδώ τις ιδέες του Cavalieri. Η έννοια των αδιαιρέτων συνδέει τις έννοιες της κίνησης στον Barrow με την παράθεση σημείων. «Η μέθοδος των αδιαιρέτων», σημειώνει ο Barrow, είναι η πιο ταχεία από τις άλλες και όχι λιγότερο βέβαιη και αληθής όταν εφαρμόζεται σωστά».

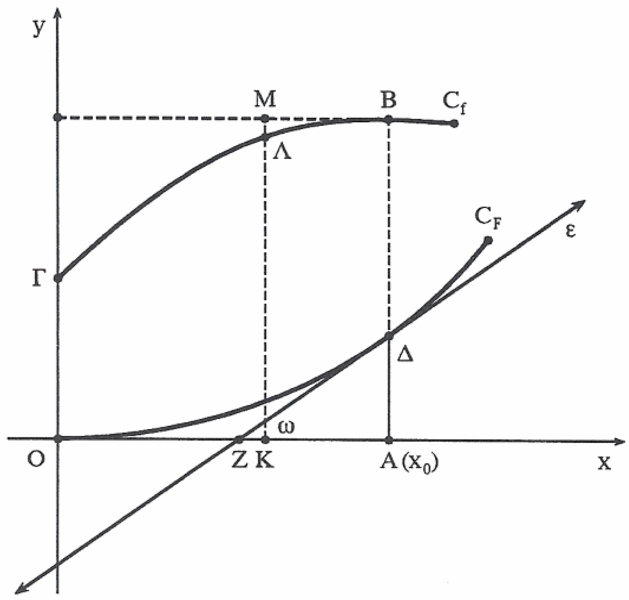
Στο τρίτο μάθημα παρουσιάζει τις καμπύλες τις παραγόμενες από τη σύνθεση ευθύγραμμης και παράλληλης κίνησης ή περιστροφικών καμπύλων οι οποίες παράγονται κινηματικά. Στα υπόλοιπα μαθήματα ο Barrow δίνει περισσότερο βάρος στις γεωμετρικές αποδείξεις και με συστηματικό τρόπο παρουσιάζει τα θεωρήματα τα οποία σχετίζονται με εφαπτομένες, τόξα, επιφάνειες, εμβαδά.

Αν και οι έννοιες του χρόνου και της κίνησης συνδεδεμένες με τα αδιαίρετα, παραπέμπουν σε μεσαιωνικές θεωρήσεις, η ιδιοφυΐα του Barrow διαφαίνεται στο ότι είχε κατανοήσει την αντίστροφη σχέση που συνδέει τη διαφόριση με την ολοκλήρωση (Φίλη, 2010). Ο Barrow γνώριζε τις παρατηρήσεις τόσο του Gregoire de Saint-Vincent, όσο και του Torricelli, που οδηγούσαν σε μία εμβρυακή μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος, αλλά ξεκίνησε μία προσπάθεια να τις γενικεύσει, χωρίς να συνδέει τις καμπύλες με την κίνηση. Στο «*Lectiones Geometricae»* έδωσε μία γεωμετρική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος. Δίχως να αναφερθεί σε καμπύλες, που ορίζονταν κινηματικά, θεώρησε μία θετική και αύξουσα συνάρτηση, με γράφημα C_f, και τη συνάρτηση εμβαδού y=F(x), που σε κάθε τιμή x_0 της μεταβλητής x αντιστοιχεί το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από το γράφημα C_f της f, τους άξονες Ox, Oy και την κάθετη ευθεία στον άξονα Ox, στο σημείο Α, με τετμημένη x_0. Ισχυρίζεται στη συνέχεια ότι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Δ, με τετμημένη x_0, ισούται με την τιμή $f(x_0)$ (Γιαννακούλιας, 2007).



Ο ισχυρισμός του ισοδυναμεί με την ισότητα $\frac{A\Delta}{AZ} = AB$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού θεώρησε το παρακάτω σχήμα (με ελαφρά τροποποίηση).



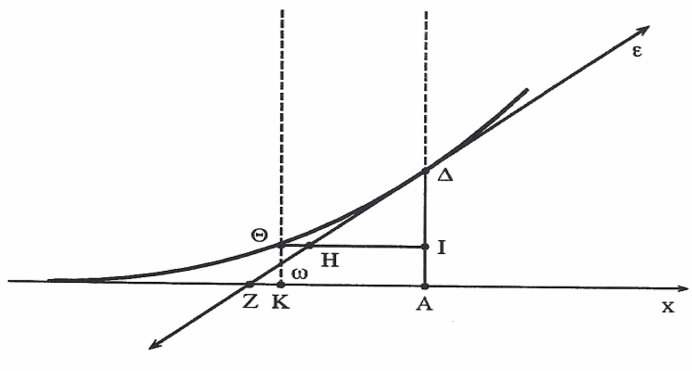
Προφανώς $F(x_0)$=ΑΔ=εμβ(ΟΑΒΓ)=$\int_0^{x_0} f(t)dt$ (σε σύγχρονο συμβολισμό).

Εφόσον εφω=$\frac{A\Delta}{AZ}$ προσπάθησε να αποδείξει την ισοδυναμία:

$\frac{A\Delta}{AZ} = AB \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = AZ$.

Θεώρησε σημείο Ζ στον x-άξονα, τέτοιο ώστε $\frac{A\Delta}{AB} = AZ$ (1)

και έδειξε ότι η ΔΖ είναι εφαπτομένη στο γράφημα της C_f στο σημείο Δ. Για την απόδειξη θεώρησε τυχαίο σημείο Η της ΖΔ και έφερε την $IH \perp A\Delta$. Θέτοντας Θ, το σημείο τομής με το γράφημα C_f, ισχυρίστηκε ότι ΗΙ<ΘΙ. (2)



Από την (2) συνεπάγεται ότι το Η είναι εξωτερικό σημείο του C_f και επομένως η ΔΖ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με το γράφημα C_f και άρα ΔΖ είναι εφαπτομένη στο γράφημα C_f. Θυμίζουμε ότι η έννοια της εφαπτομένης για τον Barrow είναι η ίδια με τη θεώρηση του Fermat, δηλαδή η εφαπτομένη συναντά την καμπύλη μόνο σε ένα σημείο και σε κανένα άλλο.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού του ο Barrow θεώρησε τα τρίγωνα ΔΗΙ και ΔΖΑ. Από την ομοιότητα των τριγώνων προκύπτει η αναλογία

$\frac{\Delta I}{IH} = \frac{\Delta A}{ZA} = AB$ (ένεκα της (1))

Εφόσον $\Delta I = IH \cdot AB$ (3)

και $\Delta I = A\Delta - AI = A\Delta - \Theta K =$ $F(x_0)$-$F(x)$=εμβ(ΟΑΒΓΟ)-εμβ(ΟΚΛΓΟ)= εμβ(ΑΒΛΚ)<εμβ(ΑΒΜΚ)=$AK \cdot AB = \Theta I \cdot AB$.

Άρα με τη βοήθεια της (3) παίρνουμε ότι :

$IH \cdot AB < \Theta I \cdot AB \Leftrightarrow IH < \Theta I$.

James Gregory

Ο επόμενος σημαντικός μαθηματικός της εποχής αυτής ήταν ο James Gregory. Ο Gregory (1638-1675) γεννήθηκε στη Σκωτία. Αφού σπούδασε στο Κολέγιο Marischal στο Aberdeen έφυγε από τη Σκωτία το 1663 και έζησε τα επόμενα πέντε χρόνια στην Padua, μελετώντας τον Stefano degli Angeli, μαθητή του Torricelli. Εκεί συνέγραψε και τα δύο πρώτα μαθηματικά έργα του. Το 1668 κατέλαβε την έδρα των μαθηματικών στο St.Andrews, όπου δίδασκε κυρίως στοιχειώδη μαθηματικά. Η αλληλογραφία του με τον John Collins, ο οποίος βρισκόταν στο Λονδίνο και έπαιζε στα βρετανικά μαθηματικά το ρόλο που πριν από μία γενιά έπαιζε ο Mersenne στη Γαλλία, ήταν η μοναδική επαφή του με τον υπόλοιπο μαθηματικό κόσμο. Το 1673 αναγκάστηκε να εγκαταλείψει το St.Andrews για πολιτικούς λόγους, αλλά πολύ σύντομα κατόρθωσε να γίνει καθηγητής στο Εδιμβούργο. Δυστυχώς τον Οκτώβριο του 1675 έχασε την όρασή του από αποπληκτική προσβολή και λίγο αργότερα πέθανε (Katz, 2013).

Τα πολλά έργα του Angeli αναφέρονταν όλα σχεδόν στις απειροστικές μεθόδους, τονίζοντας τον τετραγωνισμό των γενικευμένων σπειρών, παραβολών και υπερβολών. Είναι πολύ πιθανόν ότι ο Gregory στην Ιταλία έμαθε να εκτιμά τη δύναμη της ανάπτυξης των συναρτήσεων σε απειροσειρές και των άπειρων διαδικασιών γενικότερα .Έτσι το 1667 δημοσίευσε στην Padua ένα έργο με τίτλο *Vera circuli et hyperbolae quadratura,* το οποίο περιλάμβανε πολύ σημαντικές προτάσεις της απειροστικής ανάλυσης.

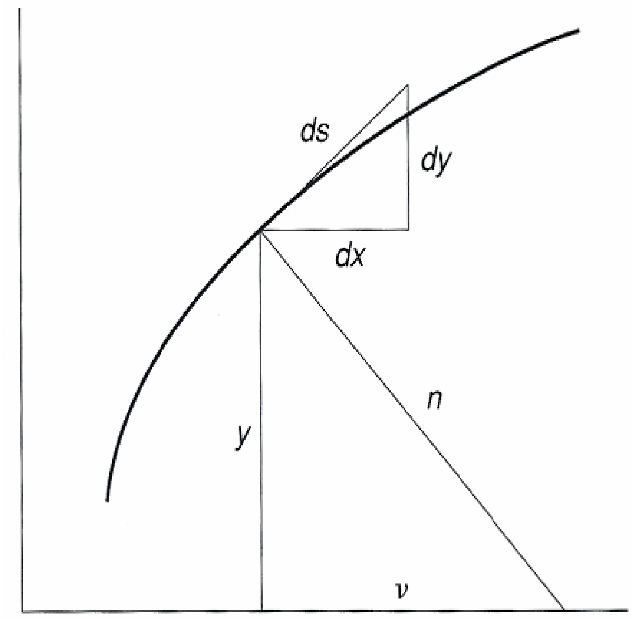
Κατ' αρχήν ο Gregory επέκτεινε τον αρχιμήδειο αλγόριθμο ώστε να περιλαμβάνει τον τετραγωνισμό ελλείψεων και υπερβολών. Ξεκίνησε με ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο εμβαδού α_0 και ένα περιγεγραμμένο τετράπλευρο εμβαδού A_0. Διπλασιάζοντας διαδοχικά τον αριθμό των πλευρών αυτών των σχημάτων, σχημάτισε την ακολουθία $\alpha_0, A_0, \alpha_1, A_1, \alpha_2, A_2, \alpha_3, A_3, \ldots$.. και έδειξε ότι ο α_n είναι ο γεωμετρικός μέσος των δύο ακριβώς προηγούμενων όρων και ο A_n είναι ο αρμονικός μέσος των δύο προηγούμενων όρων. Έτσι είχε δύο ακολουθίες- αυτή των εγγεγραμμένων εμβαδών και αυτή των περιγεγραμμένων εμβαδών- οι οποίες συνέκλιναν στο εμβαδόν της κωνικής τομής˙τις χρησιμοποίησε για να προσεγγίσει με μεγάλη επιτυχία, τους ελλειπτικούς και υπερβολικούς τομείς. Ο Gregory προσπάθησε ανεπιτυχώς να αποδείξει το αδύνατο του τετραγωνισμού του κύκλου με αλγεβρικές μεθόδους, χρησιμοποιώντας την παραπάνω διαδικασία. Ο Huygens, που θεωρείται ο σημαντικότερος μαθηματικός της εποχής, πίστευε ότι το π μπορούσε να εκφραστεί αλγεβρικά και έτσι δημιουργήθηκε μία διαφωνία ως προς την αξιοπιστία των μεθόδων του Gregory. Το θέμα της υπερβατικότητας του π ήταν δύσκολο να λυθεί και έτσι χρειάστηκαν δύο ακόμη αιώνες για να δοθεί απάντηση, υπέρ της άποψης του Gregory (Boyer& Merzbach, 1997).

Στο τέλος του 1668 δημοσίευσε μία εργασία με τίτλο «*Geometriae pars universalis*» (το καθολικό μέρος της Γεωμετρίας), στην οποία έδινε μία εκτεταμένη γεωμετρική ανάλυση των εργασιών της εποχής του που αφορούσαν, το κέντρο βάρους, την ευθειοποίηση, προβλήματα εφαπτομένων , τετραγωνισμούς και υπολογισμούς όγκων και επιφανειών εκ περιστροφής. Από την εποχή που βρισκόταν στη Padua είχε πληροφορηθεί ότι το τοξεφx εξέφραζε το εμβαδόν υπό την καμπύλη $y=\frac{1}{1+x^2}$. Ο Gregory χρησιμοποιώντας την ισότητα $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ και εφαρμόζοντας τους κανόνες που είχαν επινοήσει οι Cavalieri, Wallis, έφθασε στο ανάπτυγμα της σειράς τοξεφx, που σε σύγχρονο συμβολισμό δίνεται από την ισότητα:

τοξεφx=$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots$ (σειρά Gregory) (Turnbull, 1932).

Ο Gregory στηριζόμενος στη μελέτη του van Heuraet, που αφορούσε το πρόβλημα του μήκους τόξου, κατόρθωσε να πλησιάσει και στην ανακάλυψη της αντίστροφης σχέσης που υπήρχε μεταξύ των προβλημάτων της εφαπτομένης και του εμβαδού. Η ιδέα του ήταν να θεωρήσει το εμβαδόν υπό μία καμπύλη, ως συνάρτηση μιας μεταβλητής, κατασκευάζοντας μία νέα καμπύλη, της οποίας η τεταγμένη σε κάθε σημείο x να είναι ίση με το εμβαδόν υπό την αρχική καμπύλη, που περικλειόταν μεταξύ ενός δοσμένου σημείου και του σημείου x.

Θεώρησε μία μονότονα αύξουσα συνάρτηση $y=y(x)$ και δύο άλλες καμπύλες που σχετίζονται με αυτήν, την $n(x)=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ και την $u(x)=c\cdot\frac{n}{y}=c\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, όπου c είναι δοθείσα σταθερά. Κατασκευάζοντας το διαφορικό τρίγωνο dx,dy,ds, σε ένα δοθέν σημείο, ο Gregory αποδεικνύει λόγω της ομοιότητάς του με το τρίγωνο που σχηματίζουν η τεταγμένη y, η υποκάθετος ν, και η κάθετος n, ότι $y : n = dx : ds = c : u$ και επομένως ότι $udx = cds$ και $ndx = yds$.



Αθροίζοντας την πρώτη εξίσωση κατά μήκος της καμπύλης, ο Gregory αποδεικνύει ότι το μήκος του τόξου $\int ds$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του εμβαδού κάτω από την καμπύλη $\frac{1}{c}u(x)$.Το άθροισμα της δεύτερης εξίσωσης επιτρέπει στον Gregory να δείξει ότι το εμβαδόν κάτω από την $n=n(x)$ είναι ίσο, με προσέγγιση σταθερού πολλαπλασίου, με το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της αρχικής καμπύλης γύρω από τον άξονα των x. Ο Gregory αποδεικνύει και τα δύο αυτά αποτελέσματα με έναν προσεκτικά διατυπωμένο αρχιμήδειο συλλογισμό και με διπλή *εις άτοπον απαγωγή*.

Έχοντας δείξει ότι το μήκος τόξου μπορεί να υπολογιστεί μέσω ενός εμβαδού, ο Gregory θέτει το αντίστροφο πρόβλημα και πραγματοποιεί έτσι ένα θεμελιώδες βήμα προς τα εμπρός. Μπορούμε να βρούμε μία καμπύλη $u(x)$ που ο λόγος του μήκους τόξου της προς το εμβαδόν κάτω από μία δοθείσα καμπύλη y(x) να είναι σταθερός; Σε σύγχρονο συμβολισμό ο Gregory αναζητά μία καμπύλη τέτοια ώστε $c\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^x y\,dx$.

Αλλά αυτό σημαίνει ότι $c^2\left(1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) = y^2$, δηλαδή ότι $\frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{c}\right)\sqrt{y^2-c^2}$.

Δηλαδή ο Gregory πρέπει να προσδιορίσει μία καμπύλη u, τέτοια ώστε η κλίση της εφαπτομένης της να ισούται με μία δοθείσα συνάρτηση. Θέτοντας $z=\sqrt{y^2-c^2}$, ορίζει απλώς ως u(x) το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $\frac{z}{c}$ από την αρχή ως το x. Αυτό που πρέπει να αποδείξει κατόπιν είναι ότι η κλίση της εφαπτομένης σε αυτήν την καμπύλη δίνεται από την $\frac{z}{c}$. Αυτό που ουσιαστικά αποδεικνύει, και πάλι με την *εις άτοπον απαγωγή* είναι ότι η ευθεία που ενώνει ένα σημείο K επί της καμπύλης u με το σημείο του άξονα που απέχει $\frac{cu}{z}$ από την τετμημένη x του σημείου K είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο K.

Η θεμελιώδης πρόοδος που επιτέλεσε ο Gregory ήταν, λοιπόν, να περάσει από την έννοια του εμβαδού κάτω από μία ορισμένη καμπύλη και ανάμεσα σε δύο δοθείσες τιμές του x στην έννοια του εμβαδού ως συνάρτησης μίας μεταβλητής. Με άλλα λόγια κατασκεύασε μία νέα καμπύλη της οποίας η τεταγμένη σε οποιαδήποτε τιμή του x ήταν ίση με το εμβαδόν κάτω από την αρχική καμπύλη από ένα σταθερό σημείο ως το x. Από τη στιγμή που ενέσκυψε η ιδέα αυτή δεν ήταν δύσκολο να κατασκευαστεί η εφαπτομένη σε αυτή τη νέα καμπύλη και να αποδειχθεί ότι η κλίση της στο x ήταν πάντοτε ίση με την αρχική τεταγμένη (Katz, 2013).

Δυστυχώς ο πρόωρος θάνατός του δεν του επέτρεψε να ανακαλύψει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Μέσα από το έργο του προκύπτει ότι χειρίστηκε τις ατέρμονες διαδικασίες με μεγάλη πρωτοτυπία. Η πλειονότητα των ιστορικών διατυπώνει την άποψη, πως αν είχε ζήσει περισσότερο, ίσως να είχε συμπεριληφθεί στους επινοητές του απειροστικού λογισμού, δίπλα στους Newton και Leibniz (Struik, 1993).

Το έργο των Barrow και Gregory μπορεί να θεωρηθεί η κορύφωση όλων των μεθόδων υπολογισμού εμβαδών και εφαπτομένων του δέκατου έβδομου αιώνα. Αλλά κανείς από τους δυο αυτούς άνδρες δεν στάθηκε ικανός, στα 1670, να μεταπλάσει τις μεθόδους αυτές σε ένα υπολογιστικό εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. Ωστόσο, στα πέντε χρόνια που προηγούνται αυτής της χρονολογίας, ο Ισαάκ Νεύτων, χωρίς να επικοινωνεί ουσιαστικά με κανέναν από το δωμάτιο που διέμενε στο Cambridge, είχε επιδοθεί με όλες του τις δυνάμεις στην προσπάθεια να συστηματοποιήσει και να επεκτείνει το έργο όλων των προκατόχων του στο αντικείμενο που αποκαλούμε σήμερα απειροστικό λογισμό.

Η ανακάλυψη του Απειροστικού Λογισμού

Η δημιουργία ενιαίου λογισμού

Οι μαθηματικοί του πρώτου μισού του $17^{ου}$ αιώνα κληρονόμησαν μία κατηγορία σημαντικών προβλημάτων και έκαναν μία αξιόλογη προσπάθεια για τη λύση τους. Έτσι, έγινε δυνατή η λύση διάφορων προβλημάτων σχετικά με τα μέγιστα και τα ελάχιστα, η χάραξη εφαπτομένης σε συγκεκριμένα σημεία καμπύλων, ο υπολογισμός επιφανειών και όγκων, η εύρεση του κέντρου βάρους. Δεν είχε όμως δοθεί ένας ικανοποιητικός ορισμός της εφαπτομένης και δεν είχε κατανοηθεί η σχέση της προς άλλες γεωμετρικές έννοιες, όπως ήταν αυτή του εμβαδού. Έλειπε επίσης μία γενική τεχνική και δεν είχε εκτιμηθεί η σχέση που υπήρχε μεταξύ των κλάσεων των διάφορων προβλημάτων. Η αναζήτηση λοιπόν στράφηκε προς την κατεύθυνση της δημιουργίας ενός λογισμού, ενιαίου, λειτουργικού, με κατάλληλη ορολογία, συμβολισμό και αναλυτικούς κανόνες, ο οποίος να προσφέρει μία γενική τεχνική για τη λύση διαφόρων προβλημάτων. Αυτό βέβαια θα μπορούσε να γίνει από ανθρώπους που γνώριζαν καλά τόσο τη γεωμετρική μέθοδο των αρχαίων Ελλήνων και του Cavalieri, όσο και την αλγεβρική μέθοδο των Καρτέσιου, Fermat και Wallis. Τη δεκαετία 1660-1670 οι Isaac Newton και Gottfried Leibniz θα «ανακαλύψουν» τον απειροστικό λογισμό εργαζόμενοι ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλο. Με τη λέξη «ανακάλυψη» εννοούμε ότι :

(ι) ενέταξαν όλες τις μέχρι τότε υπάρχουσες μεθόδους σε δύο γενικές έννοιες, την παράγωγο και το ολοκλήρωμα

(ιι)επινόησαν συμβολισμούς που κατέστησαν εύκολη τη χρήση αυτών των εννοιών και

(ιιι) «ανακάλυψαν» και απέδειξαν το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, που φανερώνει ότι οι διαδικασίες εύρεσης της κλίσης της εφαπτομένης (διαφόριση) και του εμβαδού (ολοκλήρωση) είναι αμοιβαία αντίστροφες (Γιαννακούλιας, 2007).

Η υπολογιστική δύναμη αυτού του νέου εργαλείου , που σχετίζει τη διαφόριση με το ολοκλήρωμα, του Απειροστικού Λογισμού και η χρησιμότητά του στις φυσικές εφαρμογές, είχε τόση εκθαμβωτική αποτελεσματικότητα, ιδίως σε σχέση με την ακαμψία που χαρακτήριζε τη μέθοδο της εξάντλησης και όλων των συναφών μεθόδων ολοκλήρωσης, που είχαν αναπτυχθεί μέχρι τότε, ώστε σύντομα επικράτησε, δημιουργώντας ένα απότομο και πολυσήμαντο ρήγμα σε μία παράδοση ανάπτυξης της Ολοκλήρωσης δύο χιλιάδων ετών (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Isaac Newton

Ο Isaac Newton (1642-1727), σύμφωνα με τον βιογράφο του Richard Westfall (1980), ήταν «μία από τις ελάχιστες υπέρτατες μεγαλοφυϊες που διαμόρφωσαν τις κατηγορίες της ανθρώπινης νόησης, ένας άνθρωπος που τελικά δεν ανάγεται στα κριτήρια με τα οποία κατανοούμε τους συνανθρώπους μας». Ο Newton γεννήθηκε πρόωρα την ημέρα των Χριστουγέννων του 1642, τη χρονιά που πέθανε ο Γαλιλαίος. Ο πατέρας του είχε πεθάνει πριν γεννηθεί ο φιλάσθενος Isaac και η μητέρα του ξαναπαντρεύτηκε όταν το αγόρι ήταν τριών χρονών. Το αγόρι το μεγάλωσε η γιαγιά του και πήγαινε στο σχολείο της γειτονιάς. Ένας θείος του από τη μεριά της μητέρας του, και απόφοιτος του Cambridge, αναγνώρισε τις σπάνιες ικανότητες του ανιψιού του και έπεισε τη μητέρα του να στείλει το παιδί στο Cambridge. Έτσι, ο νεαρός Newton άρχισε να παρακολουθεί το κολέγιο Trinity το 1661.Στις αρχές του πρώτου χρόνου των σπουδών του αγόρασε και διάβασε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και λίγο αργότερα διάβασε το *Clavis* του Oughtred, ένα δημοφιλές βιβλίο που περιείχε βασικά στοιχεία της αριθμητικής και της άλγεβρας, τη *Γεωμετρία* του Descartes στη λατινική έκδοση του van Schooten μαζί με τις εκατοντάδες σελίδες σχολίων, την *Οπτική* του Kepler, τα άπαντα του Viete, και την *Arithmetica infinitorum* του Wallis. Το *Arihmetica* επηρέασε καταλυτικά τον Newton στην κατεύθυνση των δικών του πρώιμων ερευνών στις απειροσειρές. Το γενικό θεώρημα του διωνύμου, ο τετραγωνισμός του κύκλου και της ορθογωνίου υπερβολής ήταν τα άμεσα αποτελέσματα των μεθόδων παρεμβολής στα οποία στηρίχθηκε ο Newton τηρώντας κατά γράμμα το έργο του Wallis στην κατεύθυνση του τετραγωνισμού του κύκλου Στην παραπάνω παιδεία πρέπει να προσθέσουμε τις διαλέξεις του καθηγητή Barrow, τις οποίες παρακολουθούσε ο Newton μετά το 1663. Γνώρισε ακόμη το έργο του Γαλιλαίου, του Fermat,του Cavalieri, του Stevin, του Huygens και άλλων. Αναγνωρίζοντας την αξία των έργων του έλεγε: «Αν κατάφερα να προχωρήσω πιο πέρα από τους άλλους είναι γιατί πάτησα σε ώμους γιγάντων» (Boyer& Merzbach, 1997).

Έως τα τέλη του 1664 φαίνεται ότι ο Newton είχε κατακτήσει όλη τη μαθηματική γνώση και ήταν έτοιμος να συνεισφέρει πλέον ο ίδιος. Οι πρώτες του ανακαλύψεις, που χρονολογούνται γύρω στους πρώτους μήνες του 1665, ήταν αποτέλεσμα της ικανότητάς του να εκφράζει συναρτήσεις ως απειροσειρές- ακριβώς το ίδιο πράγμα που έκανε και ο Gregory στην Ιταλία εκείνη την εποχή, αλλά ο Newton δεν ήταν σε θέση να το γνωρίζει. Ο Newton άρχισε ακόμη να σκέπτεται, το 1665, πάνω στο ρυθμό μεταβολής ή fluxion συνεχώς μεταβαλλόμενων μεγεθών ή ρευστών ποσοτήτων, όπως μήκη , εμβαδά, όγκοι, αποστάσεις, θερμοκρασίες. Από εκείνη την εποχή ο Newton συνέδεε τα δύο αυτά προβλήματα- των απειροσειρών και των ρυθμών μεταβολής- και τα ονόμαζε «η μέθοδός μου».

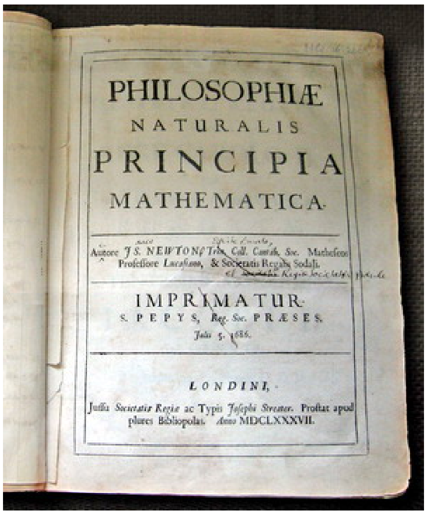
Το διάστημα 1665-1666 αμέσως μετά την αποφοίτηση του Newton, το κολέγιο Trinity έκλεισε εξαιτίας της πανούκλας και ο Newton επέστρεψε σπίτι του συνεχίζοντας να μελετά. Το αποτέλεσμα ήταν η πιο παραγωγική περίοδος στην ιστορία των μαθηματικών, γιατί στο διάστημα αυτών των μηνών , ο Newton έκανε τέσσερις από τις κύριες ανακαλύψεις του: (ι)το θεώρημα του διωνύμου, (ιι)τον απειροστικό λογισμό, (ιιι) το νόμο της βαρύτητας και (ιν) τη φύση των χρωμάτων (Boyer & Merzbach). Επίσης είχε μία σημαντική συνεισφορά στη μελέτη της οπτικής. Το 1667 επέστρεψε στο Cambridge και την επόμενη χρονιά τελείωσε τη διδακτορική του διατριβή. Ήταν η χρονιά που κατασκεύασε το πρώτο κατοπτρικό τηλεσκόπιο, και η χρονιά που ο δάσκαλος Barrow με μία χειρονομία, ίσως μοναδική στα πανεπιστημιακά χρονικά, παραιτήθηκε από τη Λουκασιανή έδρα, για να τον διαδεχθεί ο μαθητής του σε μία ένδειξη θαυμασμού και εκτίμησης στο μαθηματικό ταλέντο του και τις μεγάλες ερευνητικές του δυνατότητες (Γιαννακούλιας, 2007). Ως καθηγητής γνωρίζουμε ότι δεν είχε την αναμενόμενη ίσως αναγνώριση, καθώς, όπως μάς πληροφορεί ο Χάμφρεϊ Νεύτων, ανιψιός του Ισαάκ, «...τόσο λίγοι πήγαιναν να τον ακούσουν, και ακόμη λιγότεροι τον καταλάβαιναν, που πολλές φορές, κατά κάποιο τρόπο ελλείψει ακροατηρίου, διάβαζε στους τοίχους».

Sir Isaac Newton

Ο Newton είχε τη συνήθεια να μην δημοσιεύει το έργο του την εποχή της ανακάλυψης, σε αντίθεση με το Leibniz, αλλά περιοριζόταν να το γνωστοποιεί, υπό τη μορφή επιστολών, σε κάποιους φίλους του. Έτσι η πρώτη δημοσίευση του λογισμού του έγινε το 1687, στη μνημειώδη εργασία του «*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*» (μαθηματικές αρχές της φιλοσοφίας της φύσης). Στο έργο αυτό έδωσε στους νόμους της φυσικής τη μορφή μαθηματικών εξισώσεων, οι οποίες συσχέτισαν όχι μόνο τα διάφορα μεγέθη αλλά και τους ρυθμούς με τους οποίους μεταβάλλονταν. Οι προτάσεις στο *Principia*, που αφορούσαν ταχύτητες, επιταχύνσεις, εφαπτομένες και καμπυλότητες ήταν διατυπωμένες φορμαλιστικά, στη γεωμετρική γλώσσα των αρχαίων Ελλήνων. Έχει υποστηριχθεί ότι ένας λόγος χρησιμοποίησης της γεωμετρικής γλώσσας οφειλόταν στο γεγονός, ότι ο απειροστικός λογισμός ήταν άγνωστος στην πλειονότητα των συγχρόνων του και επειδή τα αποτελέσματα του ήταν σε αντίθεση με την επικρατούσα φιλοσοφία της εποχής του, υπήρχε ο κίνδυνος να αμφισβητηθεί. Παρ' όλα αυτά οι αποδείξεις των προτάσεών του διαβάζονταν με αρκετή δυσκολία, γιατί ήταν σύντομα διατυπωμένες και παραλείπονταν οι ενδιάμεσοι συλλογισμοί (Γιαννακούλιας, 2007).

Στο *Principia*, ο Newton παρουσίασε τρεις μεθόδους ερμηνείας του νέου λογισμού. Η πρώτη σχετίζεται με τα απειροστά και χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη του εργασία που είχε τίτλο «*De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*» (Ανάλυση εξισώσεων με απειράριθμους όρους), η οποία αρχικά κυκλοφόρησε μεταξύ των φίλων του το 1669 αλλά δημοσιεύτηκε το 1711.Σε αυτή χρησιμοποίησε το απείρως μικρό με τρόπο παρόμοιο με εκείνο των Fermat και Barrow, και με τη βοήθεια του διωνυμικού θεωρήματος κατόρθωσε να επεκτείνει το πεδίο εφαρμογής τους. Η δεύτερη μέθοδος σχετίζεται με τις ροές (fluxions) και εμφανίστηκε στην εργασία του «*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*» (μέθοδος των ροών και των απείρων σειρών) το 1671, αλλά δημοσιεύτηκε το 1739, 19 χρόνια μετά το θάνατό του. Σε αυτήν παρουσίασε τις νέες έννοιες του *ρέοντος (fluent)* και της *ροής (fluxion).* Η τρίτη μέθοδος σχετίζεται με τους *πρώτους και εσχάτους λόγους* (όρια). Παρουσιάστηκε το 1676 στην εργασία του «*De quadratura curvarum*» (τετραγωνισμός καμπύλης), αλλά δημοσιεύτηκε το 1704 (Calinger,1999).

Το *Principia* ήταν το έργο που καθόρισε τη μελέτη της φυσικής για τα επόμενα διακόσια χρόνια. Εξασφάλισε τη φήμη του Newton και ουσιαστικά οδήγησε στο διορισμό του ως Master of the Mint το 1696 και πρόεδρο της Βασιλικής Εταιρείας το 1703. Στη θέση αυτή παρέμεινε μέχρι το θάνατό του. Πέθανε στις 20 Μαρτίου το 1727 και τάφηκε στις 28 Μαρτίου στο Westminster. Στον τάφο του υπάρχει χαραγμένη στα λατινικά η χαρακτηριστική φράση: «*Εδώ αναπαύεται ότι ήταν θνητό στον Isaac Newton*».



Το θεώρημα του διωνύμου

Το γεγονός ότι η έκφραση του μεγαλύτερου μέρους των νόμων του σύμπαντος απαιτούσε συναρτήσεις, οι οποίες ξεπερνούσαν τα όρια της άλγεβρας, ήταν ένα πρόβλημα που έπρεπε να αντιμετωπιστεί οπωσδήποτε. Η επίλυση του προβλήματος έγινε από τον Newton, το 1655. Η ιδέα του ήταν πως κάθε συνάρτηση θα μπορούσε να αναπτυχθεί, κατά μοναδικό τρόπο, με τη χρήση ενός γενικευμένου πολυωνύμου, δηλαδή ως σειρά δυνάμεων του x, με τον ίδιο τρόπο που κάθε ρητός ή άρρητος μπορούσε να εκφραστεί μονοσήμαντα από ένα δεκαδικό ανάπτυγμα (πεπερασμένο ή άπειρο). Η εφαρμογή των μεθόδων του νέου λογισμού στις υπερβατικές ή μηχανικές συναρτήσεις έκανε επιτακτική τη δυνατότητα έκφρασης τέτοιων συναρτήσεων, μέσω απείρων σειρών, ώστε να είναι επιτρεπτή η διαφόριση ή ολοκλήρωση όρο με όρο (Katz, 2013). Το κεντρικό γεγονός, σε αυτή τη διαδικασία νομιμοποίησης της χρήσης των απείρων σειρών, ήταν η ανακάλυψη της διωνυμικής σειράς από τον Newton.

Ο Newton ανακάλυψε το θεώρημα του διωνύμου το 1664 ή το 1665 και το περιέγραψε σε δύο γράμματά του το 1676 προς τον Henry Oldenburg, το γραμματέα της Βασιλικής Ακαδημίας. Το δημοσίευσε, δε, στην *Άλγεβρά* του ο Wallis το 1685 (αποδίδοντας το στο Newton). Το διώνυμο του Newton γράφεται με πιο οικείο τρόπο στη μορφή

$$\left(P+PQ\right)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{m}{n}}{k}Q^{k}\right],$$

με $\binom{\frac{m}{n}}{k}=\frac{1}{k!}\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{m}{n}-k+1\right).$

Το P+PQ εκφράζει την ποσότητα της οποίας αναζητούμε τη ρίζα , τη δύναμη ή τη ρίζα της δύναμης. Για παράδειγμα:

$$\left(\alpha^{2}+\beta^{3}\right)^{\frac{4}{3}}=\alpha^{\frac{8}{3}}+\frac{4}{3}\beta^{3}\alpha^{\frac{2}{3}}+\frac{2\beta^{6}}{9\alpha^{\frac{4}{3}}}-\frac{4\beta^{9}}{81\alpha^{\frac{10}{3}}}+\ldots$$

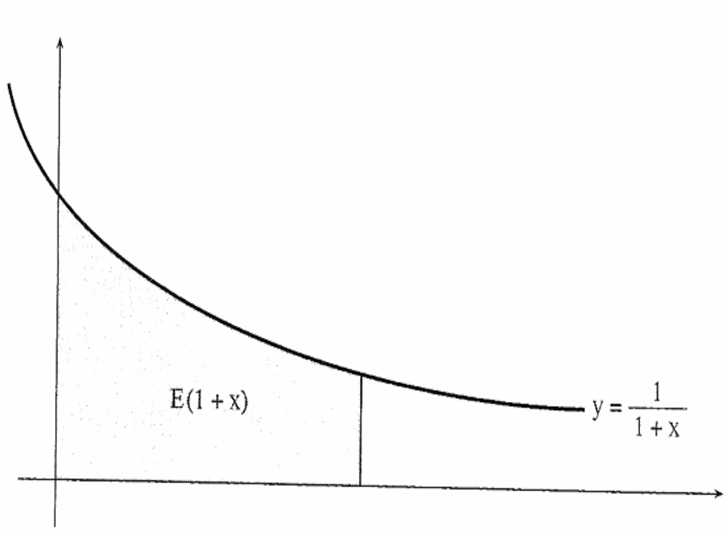
Ο Newton ουδέποτε απέδειξε αυτό το θεώρημα. Ωστόσο ήταν τελείως πεισμένος για την ορθότητά του, επειδή του παρείχε σε πολλές περιπτώσεις την ίδια απάντηση που συνήγαγε με άλλες μεθόδους. Παραδείγματος χάριν, παρατήρησε ότι η σειρά που συνήγαγε από τη διαίρεση 1/(1+x) ήταν η ίδια που συνήγαγε με το διωνυμικό θεώρημα με εκθέτη -1:

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3+...=1\text{-}x+x^2-x^3+...$$

Έτσι ο τετραγωνισμός της υπερβολής $y=\frac{1}{1+x}$ που ήταν προβληματικός με τη μέθοδο της εξάντλησης ή με τη μέθοδο των αδιαιρέτων μπορούσε πλέον να επιτευχθεί με ολοκλήρωση όρο με όρο της γεωμετρικής σειράς :

$\frac{1}{1+x}=1\text{-}x+x^2-x^3+...$ που προέκυπτε με απλή διαίρεση των όρων του κλάσματος $\frac{1}{1+x}$. Με τη βοήθεια αυτής, γύρω στα 1667, ο Newton υπολόγισε το εμβαδόν E(1+x) του χωρίου υπό την υπερβολή $y=\frac{1}{1+x}$.

$$E(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$



Επίσης γνωρίζοντας ότι το εμβαδόν κάτω από την $y=\frac{1}{1+x}$ ήταν ο λογάριθμος του 1+x υπολόγισε τους λογάριθμους των $1\pm0{,}1$, $1\pm0{,}2$, $1\pm0{,}3$ με ακρίβεια 50 τουλάχιστον δεκαδικών ψηφίων. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ταυτότητες, αλλά και τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων μπόρεσε να υπολογίσει τους λογάριθμους πολλών θετικών ακεραίων (Katz, 2013).

Μέσα από το θεώρημα του διωνύμου ο Newton ανακάλυψε ότι η ανάλυση με τις απειροσειρές είχε την ίδια εσωτερική συνέπεια και υπάκουε στους ίδιους γενικούς κανόνες με την άλγεβρα των πεπερασμένων μεγεθών. Οι απειροσειρές δεν έπαιζαν μόνο προσεγγιστικό ρόλο, αλλά ήταν εναλλακτικές μορφές των συναρτήσεων στις οποίες αντιστοιχούσαν (Boyer, 1997). Βέβαια όταν αναφερόμαστε σήμερα σε δυναμοσειρές θέτουμε πάντοτε το ερώτημα της σύγκλισης .Φαίνεται ότι ο Newton δεν ανησυχούσε πολύ για το ερώτημα αυτό. Αντιλαμβανόταν όμως τουλάχιστον διαισθητικά τους περιορισμούς των μεθόδων του. Παραδείγματος χάριν κατά την πορεία των υπολογισμών με τους οποίους βρήκε το εμβαδόν κάτω από την υπερβολή $y = \frac{1}{1+x}$, παρατήρησε ότι οι λιγοστοί πρώτοι όροι αυτής της λογαριθμικής σειράς «θα είναι χρήσιμοι και αρκούντως ακριβείς με την προϋπόθεση ότι το x είναι αρκετά μικρότερο από το [1]» (Katz, 2013).

Το θεμελιώδες θεώρημα

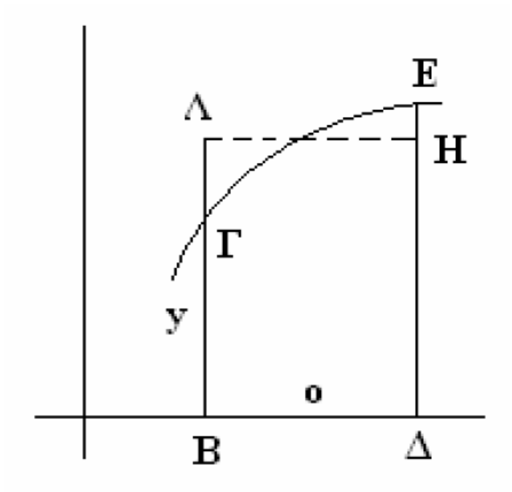
Τον Οκτώβριο του 1666 συγκέντρωσε τα αποτελέσματα των ερευνών του σε ένα χειρόγραφο που έμεινε γνωστό ως «The October 1666 tract on fluxions» (η μπροσούρα του Οκτωβρίου για τις ροές). Σε αυτήν την εργασία περιγράφεται ο υπολογισμός των εμβαδών με αντιδιαφόριση. Ιστορικά είναι η πρώτη εμφάνιση του θεμελιώδους θεωρήματος υπό τη μορφή $\frac{dE}{dx}=y$ όπου το E παριστάνει το εμβαδόν υπό την καμπύλη y=f(x), επιτυγχάνοντας με αυτόν τον τρόπο μία αλγοριθμική προσέγγιση υπολογισμού εμβαδών. Στο χειρόγραφο αυτό ο Newton χρησιμοποίησε την ιδέα ενός απείρως μικρού ορθογωνίου, της *στιγμής* (moment) του εμβαδού με τη βοήθεια του οποίου προχώρησε στον τετραγωνισμό καμπυλών (Edwards, 1979) .

Έστω μία καμπύλη με συνάρτηση εμβαδού $E(x)=\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)\alpha x^{\frac{\kappa+\lambda}{\kappa}}$, τότε για την μεταβολή της τετμημένης κατά μια απειροστή ποσότητα *ο* το νέο εμβαδόν (το οποίο έχει αυξηθεί κατά το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων y και *ο*) θα ισούται με Ε(x) + *ο*·y = Ε (x + *ο*) άρα $E(x)+o\cdot y=\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)\alpha(x+o)^{\frac{\kappa+\lambda}{\kappa}}$, οπότε με τη χρήση του διωνυμικού θεωρήματος , της διαίρεσης των δύο μελών της εξαγόμενης ισότητας με το *ο* και την απαλοιφή των όρων που περιέχουν το *ο* λαμβάνουμε $y=\alpha x^{\frac{\lambda}{\kappa}}$.

Αντίστροφα για την καμπύλη με εξίσωση $y=\alpha x^{\frac{\lambda}{\kappa}}$, η συνάρτηση εμβαδού θα είναι $E(x)=\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)\alpha x^{\frac{\kappa+\lambda}{\kappa}}$.

Μια απλή εφαρμογή των παραπάνω είναι η ακόλουθη:

Έστω καμπύλη y=f(x) και Ε=Ε(x) η συνάρτηση του εμβαδού επιφανείας υπό την C_f που αντιστοιχεί στο σημείο με τετμημένη x. Αν Ε(x)=x^3, τότε η αύξηση του x κατά μία απειροστή ποσότητα «*ο*» θα επιφέρει μία μεταβολή του εμβαδού ίση προς το στοιχειώδες εμβαδόν του σχήματος ΒΔΕΓ.



Έστω σημείο Λ τέτοιο ώστε ΒΛ=υ και (ΒΔΕΓ)=(ΒΔΗΛ)=$\upsilon \cdot o$.Όταν η ΒΔ μειώνεται επ' άπειρον, τότε το «o» μηδενίζεται και υ=y, οπότε η επιφάνεια αυξάνεται κατά $y \cdot o$.

Τότε θα έχουμε:

$y \cdot o$ =(E+ $y \cdot o$)-E=(x+ o)^3-x^3=3x^2o+3xo^2 +o^3.

Στο σημείο αυτό διαιρεί με την «αύξηση o» και παίρνει το λόγο

$\frac{yo}{o}$=3x^2 +3x$\cdot o$+o^2 .

Απαλοίφει όλους τους όρους που έχουν ως παράγοντα το o και καταλήγει στην ισότητα : y=3x^2 .

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ισούται με την κλίση της εφαπτομένης. Κατόπιν, επιτυγχάνει την εύρεση της επιφανείας μέσω μιας διαδικασίας αντίστροφης της διαφόρισης. Ο προσδιορισμός, λοιπόν, της επιφανείας δοθείσης καμπύλης y επιτυγχάνεται μέσω μιας διαδικασίας η οποία είναι αντίστροφη αυτής της διαφόρισης και καλείται αόριστο ολοκλήρωμα (Edwards, 1979). Για πρώτη χρονολογικά φορά υπολογίζεται το εμβαδόν επιφανείας μέσω του λόγου μεταβολής σε ένα και μοναδικό σημείο (Boyer& Merzbach, 1997). Έως και το συγκεκριμένο έργο του Newton οι τετραγωνισμοί αποτελούσαν διαδικασίες που ήταν ανάλογες του ορισμένου ολοκληρώματος και αφορούσαν στην εύρεση του ορίου ενός αθροίσματος. Ο Newton προσδιόρισε πρώτα τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και κατόπιν βρήκε την συνάρτηση εμβαδού μέσω της διαδικασίας του αορίστου ολοκληρώματος. (Γιαννακούλιας, 2007).

Στην εργασία αυτή υπάρχουν πολλά σημαντικά στοιχεία όπως :

(ι)Εφαρμόζεται για πρώτη φορά μέθοδος εύρεσης εμβαδού από το διαφορικό της

(ιι)Η μέθοδος είναι γενική και εφαρμόζεται σε ένα μεγάλο αριθμό από καμπύλες

(ιιι)Η διαφόριση και η ολοκλήρωση αντιμετωπίζονται ως αντίστροφες διαδικασίες

(ιν)Το εμβαδόν μιας επιφάνειας γνωστής καμπύλης υπολογίζεται με διαδικασίες αορίστου ολοκληρώματος και όχι ως όριο αθροίσματος άπειρου αριθμού εμβαδών (ορισμένο ολοκλήρωμα).

Στην παραπάνω εργασία ασκήθηκε αυστηρή κριτική για τον τρόπο που χρησιμοποιούσε την απειροστή ποσότητα *ο* και για το τι ακριβώς αντιπροσώπευε αυτό το σύμβολο, καθώς και για τις διαδικασίες υπολογισμών που ακολουθούσε, οι οποίες δεν ήταν απόλυτα σαφείς. Ο Newton προσπάθησε να ξεκαθαρίσει τα πράγματα, αλλά δεν τα κατάφερε. Στη εργασία του «*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*» θεώρησε ότι οι μεταβλητές ποσότητες γεννώνται από συνεχή κίνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων και όχι από αθροίσματα άπειρου πλήθους απειροστών σημείων, όπως είχε παρουσιαστεί στο *De* Analysi. Εδώ υποστηρίζει ότι μία γραμμή γεννιέται από την κίνηση ενός σημείου, μία επιφάνεια από την κίνηση μιας γραμμής και ένα στερεό από την κίνηση μιας επιφάνειας. Στην εργασία του αυτή ο Newton εισάγει μια νέα ορολογία και ένα χαρακτηριστικό συμβολισμό, που έχουν ως εξής:

Αφού η γραμμή γεννιέται από την κίνηση ενός σημείου, θεωρεί ότι η γραμμή γεννιέται από μία «ρευστή ποσότητα» x, την οποία ονόμασε *ρέον (fluent)*. Την ταχύτητα με την οποία η γραμμή αυτή γεννιέται, την ονόμασε *ροή του ρέοντος (fluxion)* και τη συμβόλισε με $\dot{x}$.Το απείρως μικρό μήκος κατά το οποίο αυξάνεται ένα ρέον σε έναν απείρως μικρό χρόνο, το ονόμασε *στιγμή του* *ρέοντος (moment of fluent)* και το συμβόλισε με $\dot{x}o$. Τη ροή του $\dot{x}$ τη συμβόλισε με $\ddot{x}$ και χρησιμοποίησε ανάλογους συμβολισμούς για ροές μεγαλύτερης τάξης. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ορολογία και το συμβολισμό, οικοδόμησε μία θεωρία και δημιούργησε μία μέθοδο λύσης προβλημάτων Ανάλυσης που είναι πολύ κοντά σε αυτή που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Π.χ. για να βρει τη ροή (παράγωγο) της συνάρτησης $y = 2x^2 - 5x + 1$, εργαζόταν ως εξής:

Αντικαθιστούσε το x με το $x+\dot{x}o$ και το y με το $\dot{y}o$ και έπαιρνε:

$y+\dot{y}o=2(x+\dot{x}o)^2-5(x+\dot{x}o)+1$ ή

$y+\dot{y}o=2x^2+4x\dot{x}o+2\dot{x}o^2-5x-5\dot{x}o+1$ ή

$\dot{y}o=4x\dot{x}o+2\dot{x}o^2-5\dot{x}o$, αφού $y = 2x^2 - 5x + 1$.

Στη συνέχεια θεωρούσε ότι οι όροι που έχουν το $\dot{x}o$ σε δύναμη μεγαλύτερη της πρώτης αγνοούνται. Έτσι , $\dot{y}o=4x\dot{x}o-5\dot{x}o$.

Διαιρούσε με το $\dot{x}o$ και έπαιρνε το λόγο $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}=4x-5$.

Με σύγχρονο συμβολισμό θα είχαμε : $\frac{dy}{dx} = 4x - 5$ (Εξαρχάκος, 1993).

Ανάλογη διαδικασία ακολουθούσε για να βρει τη ροή διάφορων πεπλεγμένων συναρτήσεων. Για παράδειγμα:

Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$ της καμπύλης $x^3-\alpha x^2+\alpha xy-y^3=\alpha$.

Αντικαθιστούσε το x με το $x+\dot{x}o$ και το y με το $y+\dot{y}o$ και έπαιρνε:

$(x+\dot{x}o)^3-\alpha(x+\dot{x}o)^2+\alpha(x+\dot{x}o)(y+\dot{y}o)-(y+\dot{y}o)^3=0$.

Εκτελεί τις πράξεις, αγνοεί τους όρους που έχουν ως παράγοντες δυνάμεις των $\dot{x}o$ ή $\dot{y}o$ με εκθέτη μεγαλύτερο της μονάδας, καθώς και τους όρους που έχουν παράγοντα το $\dot{x}o \cdot \dot{y}o$ και βρίσκει:

$3x^2 \cdot \dot{x}o - 2\alpha \cdot x \cdot \dot{x}o - \alpha \cdot y \cdot \dot{x}o + \alpha \cdot x \cdot \dot{y}o - 3 \cdot y^2 \cdot \dot{y}o = 0.$

Διαιρεί όλους τους όρους με $\dot{x}o$ και τελικά παίρνει $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{3x^2 - 2\alpha x - \alpha y}{3y^2 - \alpha}$.

Στην ίδια εργασία λύνει προβλήματα και των δύο κατευθύνσεων. Δηλαδή αν δοθεί μια σχέση μεταξύ δύο ρεόντων, να βρεθεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ των ροών τους και αντίστροφα. Και αυτή η εργασία συνάντησε σοβαρή κριτική κυρίως ως προς την εξαφάνιση των όρων που περιέχουν δυνάμεις του $\dot{x}o$ και $\dot{y}o$ με εκθέτη μεγαλύτερο της μονάδας. Οι εξηγήσεις που έδωσε ο Newton δεν ήταν απόλυτα σαφείς (Εξαρχάκος,1993). Στην προσπάθειά του να δικαιολογήσει τη διαγραφή των απείρως μικρών όρων, αισθάνθηκε την ανάγκη να εισάγει την έννοια του ορίου. Στην εργασία του *De quadratura curvarum* θέλησε να αποφύγει και τις απείρως μικρές ποσότητες και τις ρευστές ποσότητες, αντικαθιστώντας τες με ένα δόγμα «πρώτων και τελικών λόγων». Έβρισκε τον «πρώτο λόγο των εν τω γίγνεσθαι αυξήσεων» και τον «τελικό λόγο των απειροστών αυξήσεων» ως εξής: έστω ότι ζητάμε το λόγο των μεταβολών του x και x^n. Έστω επίσης *o* η αύξηση στο x και $(x+o)^n - x^n$ η αντίστοιχη αύξηση στο x^n. Τότε ο λόγος των αυξήσεων θα είναι

$$1:\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \ldots\right].$$

Για να βρούμε τον πρώτο και τον τελικό λόγο εξαφανίζουμε το *o*, και παίρνουμε το λόγο $1:\left(nx^{x-1}\right)$. Εδώ ο Newton είναι πολύ κοντά στην έννοια του ορίου. Η μόνη ένσταση που έχουμε να κάνουμε είναι η χρήση της λέξης «εξαφανίζουμε». Υπάρχει όντως λόγος ανάμεσα σε δύο αυξήσεις που έχουν εξαφανισθεί; Ο Newton δεν ξεκαθάρισε αυτό το ερώτημα, το οποίο συνέχιζε να βασανίζει τους μαθηματικούς καθ' όλη τη διάρκεια του $18^{ου}$ αιώνα (Boyer& Merzbach, 1997).

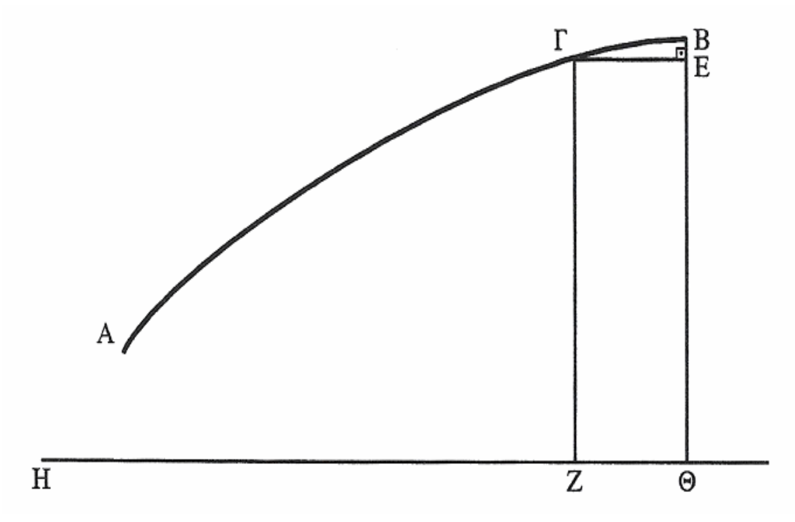
Υπολογισμός μήκους τόξου και εμβαδών καμπυλόγραμμων σχημάτων

Στην εργασία του «*De Methodi's serierum et Fluxionum*» το 1671 περιέγραψε με αρκετές λεπτομέρειες την τεχνική των απείρων σειρών για τη λύση αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτήν έλυσε και κάποια προβλήματα εύρεσης μεγίστων και ελαχίστων. Στην ίδια εργασία κατασκεύασε πίνακες ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των οποίων υπολόγισε το εμβαδόν διαφόρων χωρίων που φράσσονταν από το γράφημα συγκεκριμένων καμπυλών. Η πρώτη είσοδος στον πίνακά του είναι απλή- το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = \alpha x^{n-1}$ ισούται με $\frac{\alpha}{n}x^n$- αλλά οι άλλες είναι αρκετά πιο περίπλοκες. Στην ακόλουθη περικοπή από τον πίνακα του Newton, η συνάρτηση z στα δεξιά αναπαριστά το εμβαδόν κάτω από τη συνάρτηση y στα αριστερά:

$y = \dfrac{\alpha x^{n-1}}{\left(b + cx^n\right)^2}$	$z = \dfrac{\left(\alpha / nb\right)x^n}{b + cx^n}$
$y = \alpha x^{n-1}\sqrt{b + cx^n}$	$z = \dfrac{2\alpha}{3nc}\left(b + cx^n\right)^{\frac{3}{2}}$
$y = \alpha x^{2n-1}\sqrt{b + cx^n}$	$z = \dfrac{2\alpha}{nc}\left(-\dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{b}{c} + \dfrac{1}{5}x^n\right)\left(b + cx^n\right)^{\frac{3}{2}}$
$y = \dfrac{\alpha x^{2n-1}}{\sqrt{b + cx^n}}$	$z = \dfrac{2\alpha}{nc}\left(-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{b}{c} + \dfrac{1}{3}x^n\right)\sqrt{b + cx^n}$

Συγκρίνοντας τον πλήρη πίνακα του Newton με έναν σύγχρονο πίνακα ολοκληρωμάτων, παρατηρούμε ότι δεν συμπεριλαμβάνει υπερβατικές συναρτήσεις, ημίτονα , συνημίτονα ή ακόμη και λογάριθμους. Μολονότι ο Newton γνώριζε τις δυναμοσειρές των συναρτήσεων αυτών, ουδέποτε τις πραγματεύτηκε ισότιμα με τις αλγεβρικές συναρτήσεις. Δεν έκανε αλγεβρικές πράξεις με το ημίτονο, το συνημίτονο ή το λογάριθμο, συνδυάζοντάς τες σε πολυώνυμα και άλλες αλγεβρικές εκφράσεις. Ωστόσο επέκτεινε τον πίνακά του σε συναρτήσεις που τα ολοκληρώματά τους σήμερα θα εκφράζονταν μέσω υπερβατικών συναρτήσεων εκφράζοντας τα ολοκληρώματά τους μέσω των εμβαδών περιοχών φραγμένων από ορισμένες κωνικές τομές, που μπορούσε να υπολογίσει χρησιμοποιώντας την τεχνική των δυναμοσειρών. Παραδείγματος χάριν, δοθείσης της $y = x^{n-1}/\left(\alpha + bx^n\right)$, έγραφε ότι το εμβαδόν z μπορεί να εκφραστεί ως 1/n φορές το εμβαδόν κάτω από την υπερβολή $v = 1/\left(\alpha + bu\right)$, όπου $u = x^n$. Υπήρχαν ωστόσο καμπύλες, για τις οποίες ο πίνακάς του δεν δίνει απαντήσεις ˙λόγου χάριν για καμπύλες σαν την κυκλοειδή, που ορίζονται γεωμετρικά. Στην περίπτωση αυτή ο Newton εργάζεται γεωμετρικά (Katz, 2013).

Υπάρχουν ακόμη πολλά σε αυτήν την εργασία του συμπεριλαμβανομένων τεχνικών που ισοδυναμούν με τους σημερινούς κανόνες της αντικατάστασης, της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, όπως επίσης και με τη μέθοδο προσδιορισμού του μήκους καμπύλης. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του στοιχειώδους (απειροστού) τόξου ΒΓ της καμπύλης του παρακάτω σχήματος περιγράφεται από τον Newton με την ακόλουθη διαδικασία.



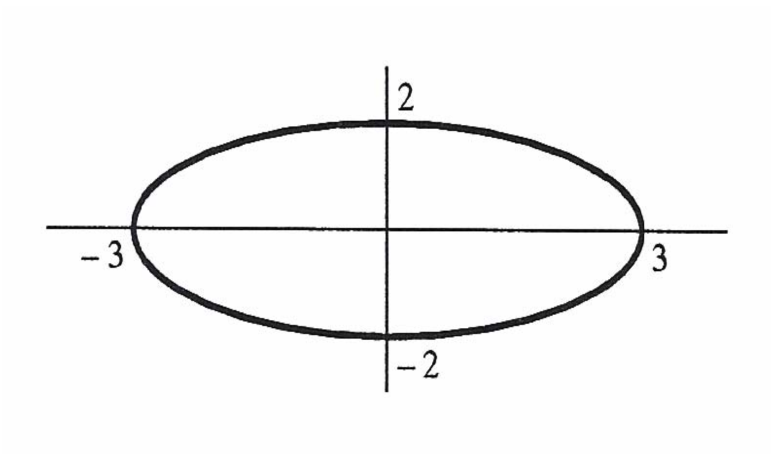
Αν το σημείο Ζ μετακινηθεί στην πολύ κοντινή του θέση Θ, στον απειροστό χρόνο t, με μία ταχύτητα (fluxion) $\dot{s}$, θα είναι ΖΘ=ΓΕ=$\dot{s}\cdot t$. Τότε το σημείο Ε θα κινηθεί ταυτόχρονα κατά το μήκος ΕΒ=$\dot{u}\cdot t$, όπου $\dot{u}$ είναι η ταχύτητα του Γ. Από το χαρακτηριστικό τρίγωνο ΓΒΕ προκύπτει ότι :

$$\sqrt{\Gamma E^2 + BE^2} = \Gamma B \Leftrightarrow \sqrt{\left(\dot{s}\right)^2 \cdot t^2 + \left(\dot{u}\right)^2 \cdot t^2} = \dot{u}\, t \text{, οπότε } \sqrt{\left(\dot{s}\right)^2 + \left(\dot{u}\right)^2} = \dot{u} \qquad (1)$$

που σε σύγχρονο συμβολισμό αποδίδεται από τον τύπο:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}.$$

Με εφαρμογή του παραπάνω τύπου μπόρεσε να υπολογίσει το μήκος τόξου της έλλειψης: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



Από την εξίσωση της έλλειψης προκύπτει ότι:

$y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} = \sqrt{\frac{36-4x^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}$. Θεωρώντας $\dot{x}=1$ η (1) δίνει :

$$\dot{u} = \sqrt{1+\dot{y}^2} = \sqrt{\frac{4+\left(\frac{4}{9}+\frac{16}{81}\right)x^2}{4+\frac{4}{9}x^2}} = \left[1 + \frac{2}{81}x^2 + \frac{16}{9^4}x^4 + \frac{122}{7\cdot 9^6}x^6 + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη προκύπτει το μήκος u της έλλειψης:

$$u = x + \frac{2}{243}x^3 + \frac{16}{5\cdot 9^4}x^5 + \frac{122}{7^2\cdot 9^6}x^7 + \ldots$$

Στη συνέχεια απέδειξε τα αναπτύγματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημίτονο, συνημίτονο και της εκθετικής συνάρτησης. Με τη βοήθεια του διωνυμικού θεωρήματος βρήκε το ανάπτυγμα του τόξου ημx:

τοξημx= $x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5}{112}x^7+...$ και υπολόγισε το εμβαδόν της κυκλοειδούς.

Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στο έργο του Newton. Δίχως υπερβολή χρειάστηκαν αρκετές δεκάδες χρόνια για να το αφομοιώσουν οι μαθηματικοί της εποχής εκείνης. Το έργο αυτό χαρακτηρίστηκε από τους μεγάλους, μεταγενέστερους μαθηματικούς, ως ένα από τα πιο υπέροχα δημιουργήματα που παρήγαγε ποτέ ο ανθρώπινος νους (Γιαννακούλιας, 2007).

Gottfried Wilhelm Leibniz

Ο δεύτερος από τους επινοητές του λογισμού, ο Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) γεννήθηκε στη Λειψία. Όταν ήταν νέος έμαθε μόνος του λατινικά και ασχολήθηκε με τους λατίνους κλασσικούς και τα θεολογικά έργα που περιείχε η βιβλιοθήκη του πατέρα του. Το 1661 γράφτηκε στο πανεπιστήμιο της Λειψίας όπου μελέτησε κυρίως φιλοσοφία. Πήρε πτυχίο το 1663, μάστερ το 1664 και μολονότι ετοίμασε μία διατριβή για το διδακτορικό του στα Νομικά, το πανεπιστήμιο αρνήθηκε να του αποδώσει τον τίτλο, το πιθανότερο εξαιτίας κάποιων πολιτικών προβλημάτων που αντιμετώπιζε η σχολή. Έτσι εγκατέλειψε τη Λειψία και πήρε τον τίτλο του διδάκτορα από το πανεπιστήμιο Altdorf της Νυρεμβέργης το 1667.

Στο μεταξύ ο Leibniz είχε έρθει σε επαφή με τα ανώτερα μαθηματικά κατά τη διάρκεια μιας σύντομης διαμονής του στο Πανεπιστήμιο της Ιένα το 1663 και είχε αρχίσει να επεξεργάζεται το έργο που πίστευε ότι θα ήταν η πιο σημαντική συνεισφορά του στη φιλοσοφία: η ανάπτυξη ενός αλφαβήτου της ανθρώπινης σκέψης, ενός τρόπου να αναπαρασταθούν όλες οι θεμελιώδεις έννοιες συμβολικά και μιας μεθόδου να συνδυαστούν αυτά τα σύμβολα για να αναπαρίστανται πιο περίπλοκες έννοιες. Μολονότι ο Leibniz ουδέποτε ολοκλήρωσε αυτό το σχέδιο, οι αρχικές του ιδέες περιέχονται στην *Dissertatio de arte combinatorial (Διατριβή περί της συνδυαστικής τέχνης)* του 1666 στην οποία ανέπτυξε για ίδιο όφελος το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, όπως επίσης και διάφορες σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες που περιελάμβανε. Το ενδιαφέρον του για την ανεύρεση κατάλληλων συμβόλων για την αναπαράσταση των σκέψεων και για τους τρόπους συνδυασμού των, ωστόσο, ήταν αυτό που ουσιαστικά τον οδήγησε στην επινόηση των συμβόλων που χρησιμοποιούμε σήμερα στον Απειροστικό Λογισμό (Katz, 2013). Έλαβε κάποια γνώση περί των αδιαιρετικών μεθόδων γύρω στα 1667 δια της ανάγνωσης των έργων του Cavalieri και Leotaud με τίτλους *Geometria indivisibilibus* και *Examen circuli quadraturae* αντίστοιχα. Το έργο του *Hypothesis physica nova*το οποίο συνέγραψε μία πενταετία αργότερα προδίδει μία ασαφή άποψη περί αδιαιρετικών μεθόδων.

Σύντομα αφότου ο Leibniz ολοκλήρωσε τις πανεπιστημιακές του σπουδές, υπηρέτησε ως διπλωμάτης αρχικά για τον Εκλέκτορα του Mainz και για το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του ως σύμβουλος του Δούκα του Ανόβερου. Ο Leibniz ταξίδευε πολύ εξαιτίας της επαγγελματικής του θέσης. Το 1672 επισκέφθηκε το Παρίσι ελπίζοντας να ξεχάσουν τα επιθετικά σχέδιά τους εναντίον της Γερμανίας και φροντίζοντας να στρέψει την προσοχή τους σε έναν «ιερό πόλεμο» εναντίον της Αιγύπτου (κάτι που υιοθέτησε αργότερα ο Ναπολέων). Εκεί συνάντησε τον Huygens, ο οποίος εισήγαγε τον Leibniz στην αιχμή της μαθηματικής έρευνας ενθαρρύνοντάς τον να μελετήσει έργα όπως η έκδοση της *Γεωμετρίας* του Descartes από τον van Schooten, τα κείμενα του Pascal που περιείχαν το διαφορικό τρίγωνο το *Arithmetica Infinitorum* του Wallis και το *Opus Geometrica του* Gregoire de Saint Vincent (Boyer& Merzbach, 1997). Το 1673, μία πολιτική αποστολή τον έφερε στο Λονδίνο όπου και συνάντησε τον Oldenburg και τους Collins, Hooke και Wallis και έγινε μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας. Κατά τη διάρκεια της παραμονής του προμηθεύτηκε και ένα αντίτυπο των *Lectiones geometricae* του Barrow, απ' όπου είχε την ευκαιρία να μελετήσει την μέθοδό του για τη χάραξη της εφαπτομένης και αυτήν των τετραγωνισμών. Αυτό το γεγονός χρησιμοποιήθηκε αργότερα στη μεταγενέστερη διαμάχη του με το Newton σχετικά με την προτεραιότητα της ανακάλυψης του Απειροστικού Λογισμού, από τους αντιπάλους του που τον κατηγόρησαν για λογοκλοπή από τον Barrow. Το 1674 με τη μεσολάβηση του Oldenburg ήλθε σε επικοινωνία, μέσω αλληλογραφίας, με τον Newton. Το περιεχόμενο των επιστολών τους αφορούσε τη διαφόριση και τον τετραγωνισμό καμπύλων. Σε αυτές όμως κανείς δεν εξηγεί στον άλλο τον τρόπο εργασίας του. Η αλληλογραφία αυτή θα διακοπεί το 1677 (Γιαννακούλιας, 2007).

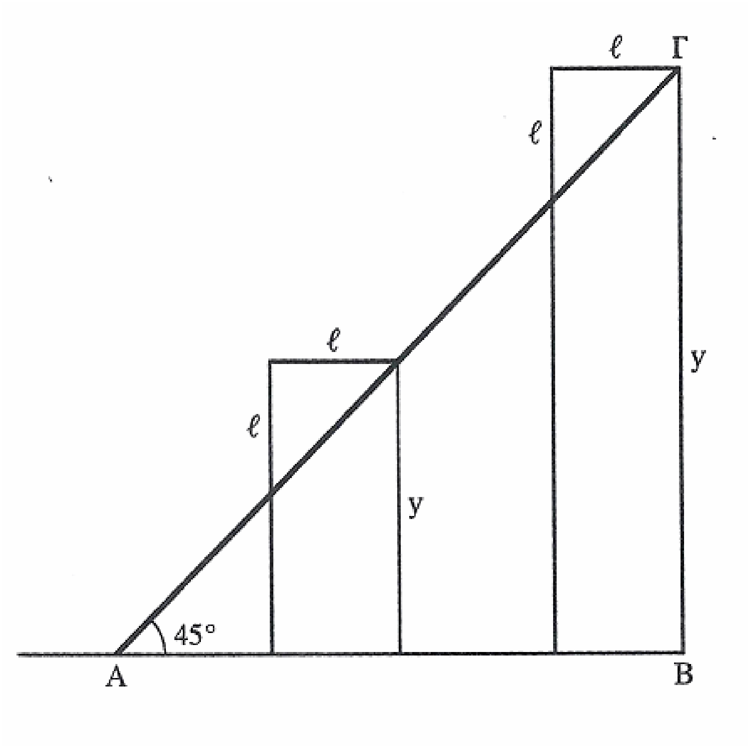
Ήδη, από το 1673 ήταν ενήμερος του ενδιαφέροντος ευθέος και αντιστρόφου προβλήματος εύρεσης εφαπτομένων σε καμπύλη . Ήταν επίσης σίγουρος ότι η αντίστροφη μέθοδος ήταν ισοδύναμη με την εύρεση εμβαδών και όγκων με αθροίσεις.

Αθροίσματα και διαφορές

Η συστηματική ανάπτυξη των ιδεών του Leibniz αρχίζει το 1675. Το αρχικό αντικείμενο μελέτης του ήταν οι ακολουθίες αριθμών. Από μία άπειρη ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σχημάτισε την ακολουθία των αθροισμάτων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $s_n=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και την ακολουθία διαφορών $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $\delta_n=\alpha_{n+1}-\alpha_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Παρατήρησε ότι $s_{n+1}-s_n=\alpha_{n+1}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή ότι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξαναδίνουν τους όρους της αρχικής ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Παρόμοια τα αθροίσματα των διαδοχικών όρων της $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δίνουν ως αποτέλεσμα τη διαφορά $\alpha_{n+1}-\alpha_1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αυτό τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι τελεστές άθροισης και διαφοράς ήταν αμοιβαία αντίστροφοι. Η σπουδαιότητα των αποτελεσμάτων αυτών έγκειτο σε αυτό που σήμαινε η δυνατότητα άθροισης ακολουθιών διαφορών όταν η ιδέα αυτή μεταφερόταν στη μελέτη καμπύλων. Η επινόηση αυτής της συσχέτισης της θεωρίας των ακολουθιών, με προβλήματα που αφορούσαν καμπύλες, προέκυψε από το γεγονός, ότι συχνά ήταν χρήσιμη η προσέγγιση της καμπύλης από ένα πολύγωνο. Έτσι ο Leibniz θεώρησε μία καμπύλη ορισμένη σε ένα διάστημα χωρισμένο σε υποδιαστήματα και ύψωσε σε κάθε σημείο x_i της υποδιαίρεσης τις τεταγμένες y_i. Εάν σχηματίσει κανείς την ακολουθία $\{\delta y_i\}$ των διαφορών αυτών των τεταγμένων, το άθροισμα τους, $\sum_i \delta y_i$, ισούται με τη διαφορά y_n-y_0 της αρχικής από την τελική τεταγμένη. Παρόμοια, εάν σχηματίσει κανείς την ακολουθία $\{\Sigma y_i\}$, όπου $\Sigma y_i=y_0+y_1+\ldots+y_i$, η ακολουθία των διαφορών $\{\delta\Sigma y_i\}$ ισούται με την αρχική ακολουθία των τεταγμένων. Ο Leibniz επέκτεινε τους δύο αυτούς κανόνες και στην περίπτωση που υπάρχουν άπειρες το πλήθος τεταγμένες. Θεώρησε ότι η καμπύλη ήταν ένα πολύγωνο με άπειρες το πλήθος πλευρές, από κάθε κορυφή του οποίου έφερε την τεταγμένη προς τον άξονα. Εάν συμβολίσουμε την απειροστή διαφορά των τεταγμένων με dy και εάν το άθροισμα των άπειρων το πλήθος τεταγμένων το συμβολίσουμε με $\int y$, ο πρώτος κανόνας μετασχηματίζεται στον $\int dy = y$, ενώ ο δεύτερος γίνεται $d\int y = y$. Γεωμετρικά, ο πρώτος σημαίνει απλά ότι το άθροισμα των διαφορικών (των απειροστών διαφορών) σε ένα τμήμα ισούται με το τμήμα. (Ο Leibniz υποθέτει εδώ ότι η αρχική τετμημένη είναι το 0). Ο δεύτερος κανόνας δεν έχει προφανή γεωμετρική ερμηνεία , επειδή το άθροισμα άπειρων το πλήθος πεπερασμένων όρων μπορεί να απειρίζεται. Έτσι ο Leibniz αντικατέστησε την πεπερασμένη τεταγμένη y με το απειροστό εμβαδόν ydx , όπου dx ήταν το απειροστό τμήμα του άξονα των x που προσδιορίζεται από τα σημεία τομής των πλευρών του απειρόπλευρου πολυγώνου. Συνεπώς το $\int ydx$ μπορούσε να ερμηνευθεί ως το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και ο κανόνας $d\int ydx = ydx$ σήμαινε απλά ότι οι διαφορές ανάμεσα στους όρους της ακολουθίας των εμβαδών $\int ydx$ είναι οι ίδιοι οι όροι ydx (Katz, 2013).

Ο Leibniz επανειλημμένα τόνιζε ότι στο λογισμό του οι τετραγωνισμοί προκύπτουν από *αθροίσματα «διαφορικών εμβαδών»* και όχι ως *αθροίσματα γραμμών*, και αυτό οριοθετεί τη θεμελιώδη διαφορά μεταξύ του λογισμού του και των μεθόδων των αδιαιρέτων, που θεωρούσαν τους τετραγωνισμούς ως το άθροισμα των τεταγμένων ($\int y$) (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Leibniz θεώρησε απαραίτητο να αναπτύξει μια κατάλληλη γλώσσα και συμβολισμό για την αναπαράσταση των ιδεών του. Μετά από αρκετές δοκιμές κατέληξε στα dx και dy για τις μικρότερες δυνατές διαφορές (διαφορικά) στα x και y, μολονότι αρχικά είχε χρησιμοποιήσει τα x/d και y/d για να διατηρήσει τις διαστάσεις. Αρχικά χρησιμοποιούσε για το άθροισμα τη συντόμευση omn της λατινικής λέξης omnia (άθροισμα) και το γράμμα 1 για το dy, αλλά αργότερα χρησιμοποίησε το σύμβολο $\int y$ και λίγο αργότερα το $\int ydx$. Το 1673 ισχυρίζεται ότι $\text{omn}\cdot yl = \frac{y^2}{2}$. Για την απόδειξή της θεώρησε τη συνάρτηση y=x.



Από το σχήμα προκύπτει ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι το άθροισμα των yl (για «μικρό» l) και είναι $\frac{y^2}{2}$.Τον Οκτώβριο του 1675 ο Leibniz παρήγαγε με γεωμετρικά επιχειρήματα ότι :

(1) $\quad$ omnxl=xomnl-omn$\cdot$omn$\cdot$l , όπου l είναι η διαφορά των τιμών δύο διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας και x ο αριθμός των όρων. Για εμάς η εξίσωση (1) σημαίνει ότι:

$\int xdy = xy - \int ydx$.

Θέτει κατόπιν στην (1) το l να είναι x και επιτυγχάνει :

omn $\cdot x^2$=xomn$\cdot$x-omn$\cdot$omn$\cdot$x, όμως ισχυρίζεται ότι omn$\cdot$x=$\frac{x^2}{2}$ (εφόσον έχει αποδείξει ότι omn$\cdot$yl=$\frac{y^2}{2}$) και άρα omn$\cdot x^2 = x\cdot\frac{x^2}{2}$-omn$\cdot\frac{x^2}{2}$ από την οποία οδηγείται στην ισότητα omn$\cdot x^2 = \frac{x^3}{3}$.

Στο χειρόγραφό του της 29ης Οκτωβρίου 1675 ο Leibniz αποφασίζει και γράφει $\int$ αντί του omn και συνεπώς $\int l = \text{omn}\cdot l$ και $\int x = \frac{x^2}{2}$ (Kline, 1972).

Αντίθετα ο Νεύτων και πολλοί άλλοι χρησιμοποιούσαν για το ολοκλήρωμα το συμβολισμό □f(x) που παραπέμπει στον τετραγωνισμό της παραβολής. Ο Leibniz βέβαια ποτέ δεν θεώρησε ικανοποιητικό τον όρο ολοκλήρωμα που εισηγήθηκε ο Jacob Bernoulli και επέμεινε πάντα στον όρο άθροισμα. Το σύμβολο $\int$ είναι απλά μία επιμηκυμένη μορφή του γράμματος S, του αρχικού γράμματος της λατινικής λέξης *summa*, ενώ το d είναι το πρώτο γράμμα της λατινικής λέξης *differentia*. Η εύρεση των εφαπτομένων απαιτούσε τη χρήση του *calculus differentialis* και ο τετραγωνισμός απαιτούσε τη χρήση του *calculus summatorius* ή *calculus integralis*.Από αυτές τις φράσεις προέκυψαν οι “differential calculus” και “integral calculus”.

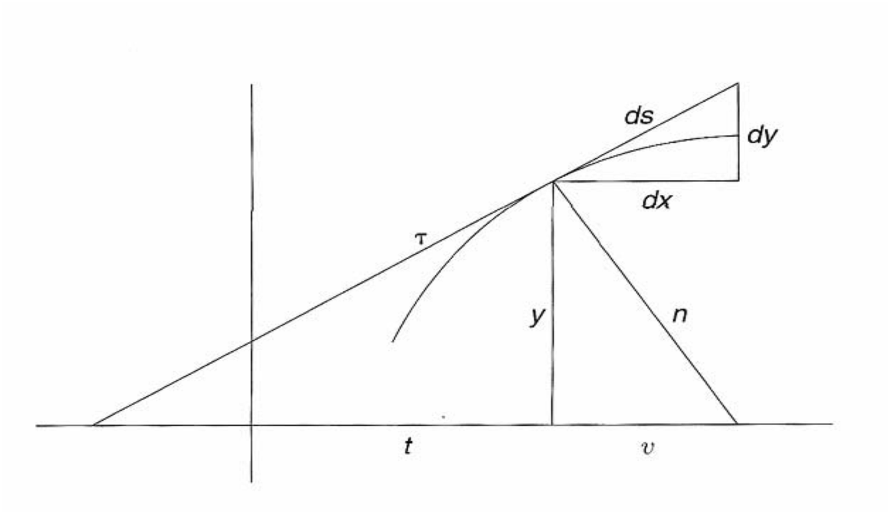
Το διαφορικό τρίγωνο

Το Νοέμβριο του 1675 ο Leibniz ισχυρίζεται ότι η ολοκλήρωση ως αθροιστική διαδικασία είναι αντίστροφη της διαφόρισης. Αυτή η ιδέα υπάρχει στις εργασίες του Newton ο οποίος έβρισκε εμβαδά με αντιδιαφόριση , αλλά για πρώτη φορά εκφράζεται ως σχέση μεταξύ άθροισης και διαφόρισης από το Leibniz. Παρά το αναμφισβήτητο του ισχυρισμού του υπήρχε πρόβλημα στο πως θα μπορούσε να πάρει κανείς εμβαδόν από κάτι που έγραφε ως άθροισμα $\sum ydx$, δηλαδή πως θα μπορούσε να πάρει εμβαδόν υπό μία καμπύλη από ένα σύνολο ορθογωνίων.

Αυτή βέβαια η δυσκολία βασάνισε όλους τους μαθηματικούς του $17^{ου}$ αιώνα .Μη διαθέτοντας μια καθαρή έννοια ορίου ή ακόμη καθαρή έννοια του εμβαδού, ο Leibniz σκεπτόταν αυτό κάποιες φορές ως άθροισμα ορθογωνίων τόσο μικρών και τόσο πολυάριθμων ώστε η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος και του αληθινού εμβαδού υπό την καμπύλη θα μπορούσε να παραλειφθεί, και κάποιες άλλες φορές ως άθροισμα των τεταγμένων ή των y-τιμών. Η τελευταία έννοια του εμβαδού ήταν συνήθως ειδικότερα μεταξύ των αδιαιριστών οι οποίοι θεωρούσαν ότι η τελευταία μονάδα του εμβαδού και η y- τιμή ήταν ίδιες.

Σε σχέση με τη διαφόριση, αφού αναγνώρισε ότι τα dy, dx ήταν αυθαίρετα μικρές ποσότητες ο Leibniz είχε ακόμα να υπερνικήσει τη θεμελιώδη δυσκολία ότι ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι απολύτως η παράγωγος με τη δική μας έννοια. Αυτός βάσισε το επιχείρημά του πάνω στο χαρακτηριστικό τρίγωνο, το οποίο είχαν χρησιμοποιήσει ο Pascal και ο Barrow.

Το διαφορικό τρίγωνο, το απειροστό ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα ds του οποίου συνδέει δύο γειτονικές κορυφές του απειρόπλευρου πολυγώνου που αναπαριστά μία δοθείσα καμπύλη, είναι όμοιο με το τρίγωνο που συνθέτουν η τεταγμένη y, η εφαπτομένη τ, και η υφαπτομένη t, και επομένως $ds:dy:dx=τ:y:t$. Ο ίδιος αναφέρει (Leibniz, 1849-1863) ότι γύρω στο 1673 μελετώντας το έργο του Pascal με τίτλο «Traité des sinus du quart de cercle» αντιλήφθηκε κάτι που δεν είχε αντιληφθεί ο ίδιος ο Pascal. Ότι δηλαδή ο καθορισμός της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης εξαρτάται από το λόγο των διαφορών της συνάρτησης και της μεταβλητής καθώς οι διαφορές αυτές γίνονται απείρως μικρές.

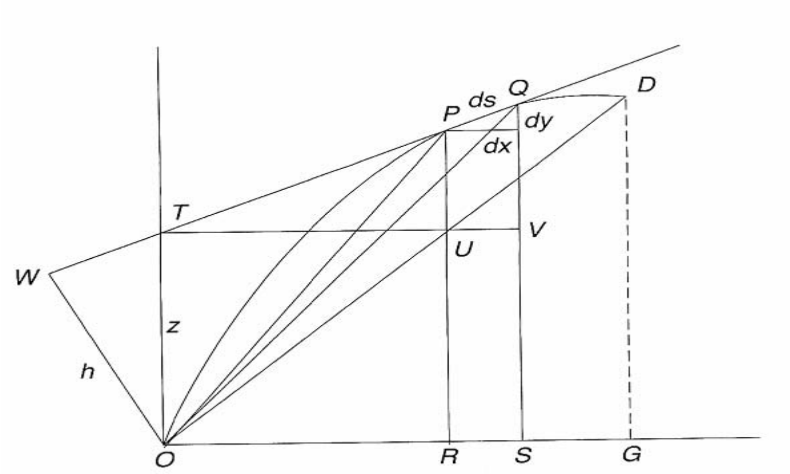


Ο Pascal είχε χρησιμοποιήσει το διαφορικό τρίγωνο σε έναν κύκλο ακτίνας r για να δείξει ότι, στην ορολογία του Leibniz, yds=rdx. O Leibniz αντιλήφθηκε ότι ο κανόνας αυτός μπορούσε να γενικευθεί σε κάθε καμπύλη αν αντικαθιστούσε την ακτίνα με την κάθετη γραμμή n, επειδή το τρίγωνο που συνέθεταν η τεταγμένη, η κάθετος και η υποκάθετος ν ήταν όμοιο με το διαφορικό τρίγωνο. Επομένως y:dx=n:ds ή yds=ndx. Καθώς το 2πyds μπορεί να ερμηνευθεί ως εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή του ds γύρω από τον άξονα των x, ο τύπος αυτός αντικατέστησε τον υπολογισμό του εμβαδού μιας επιφάνειας εκ περιστροφής με τον υπολογισμό ενός εμβαδού. Ομοίως ο Leibniz παρατήρησε ότι dx:dy=y:ν ή ydy=νdx .Επειδή αντιλήφθηκε ότι το $\int ydy$ αναπαριστούσε ένα τρίγωνο που το εμβαδόν του ήταν $\frac{1}{2}b^2$, όπου b ήταν η τελική τιμή της τεταγμένης y, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι $\int \nu dx = \frac{1}{2}b^2$. Επομένως για να υπολογίσει το εμβαδόν κάτω από μία καμπύλη με τεταγμένη z αρκούσε να βρει μία καμπύλη y που η υποκάθετός της ν ήταν ίση με z. Αλλά επειδή $\nu = y\frac{dy}{dx}$, αυτό ισοδυναμούσε με την επίλυση της εξίσωσης $y\frac{dy}{dx}=z$. Με άλλα λόγια ένα πρόβλημα υπολογισμού εμβαδού είχε αναχθεί σε ότι ο Leibniz αποκαλούσε αντίστροφο πρόβλημα εφαπτομένων (Katz, 2013).

Το θεώρημα του μετασχηματισμού (Transmutation)

Τον Ιούλιο του 1674 ο Leibniz έγραψε στον Oldenburg για την ανακάλυψη ενός πολύ ενδιαφέροντος θεωρήματος που έμεινε γνωστό ως «The Transmutation theorem» (θεώρημα μετασχηματισμού). Με τη βοήθεια αυτού του θεωρήματος ο Leibniz μπόρεσε να υπολογίσει τα εμβαδά καμπυλόγραμμων σχημάτων, χρησιμοποιώντας τόσο απειροστά ορθογώνια, όσο και απειροστά τρίγωνα.

Στην καμπύλη OPQD, όπου τα P και Q είναι απείρως κοντά, κατασκεύασε το τρίγωνο OPQ. Επεκτείνοντας το PQ=ds στην εφαπτομένη της καμπύλης, φέρνοντας το OW κάθετο στην εφαπτομένη, και θέτοντας h και z όπως στο παρακάτω σχήμα, έδειξε, χρησιμοποιώντας την ομοιότητα του τριγώνου TWO και του διαφορικού τριγώνου, ότι dx:h=ds:z ή ότι zdx=hds.

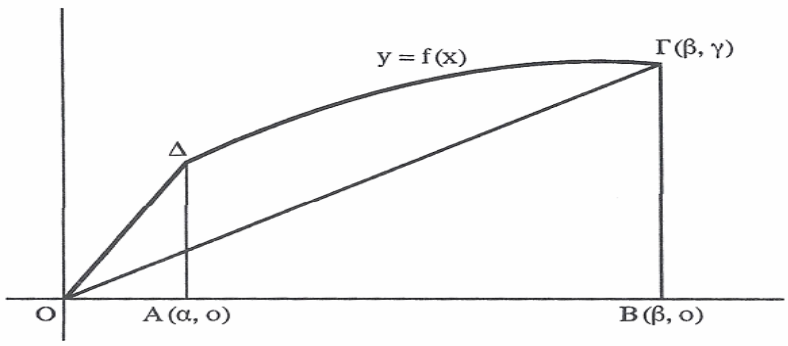


Η αριστερή πλευρά της δεύτερης εξίσωσης είναι το εμβαδόν κάτω από το ορθογώνιο UVRS, ενώ η δεξιά πλευρά είναι δύο φορές το εμβαδόν του τριγώνου OPQ. Έπεται ότι το άθροισμα όλων των τριγώνων, δηλαδή το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη OPQD και την ευθεία OD είναι ίσο με το ήμισυ του εμβαδού κάτω από την καμπύλη που η τεταγμένη της είναι z, ή ότι $\frac{1}{2}\int zdx = \int ydx - \frac{1}{2} OG \cdot GD$. Εάν $OG = x_0$ και $GD = y_0$, το θεώρημα του μετασχηματισμού του Leibniz μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

$$\int ydx = \frac{1}{2}\left(x_0 y_0 + \int zdx\right).$$

Επειδή $z=y\text{-}PU=y-x\frac{dy}{dx}$ και επειδή ο Leibniz μπορούσε να υπολογίζει εφαπτομένες με τους κανόνες του Hudde ή του Sluse (κανόνες οι οποίοι παρείχαν γενικούς αλγόριθμους με τους οποίους μπορεί κανείς να κατασκευάσει τις εφαπτόμενες σε καμπύλες που ορίζονταν από πολυωνυμικές εξισώσεις), το θεώρημα του μετασχηματισμού του επέτρεπε να υπολογίζει το εμβαδόν κάτω από την αρχική καμπύλη με την προϋπόθεση ότι το $\int zdx$ υπολογιζόταν από το $\int ydx$ (Katz, 2013).

Αν το σχήμα έχει την παρακάτω μορφή, το θεώρημα μετασχηματισμού δίνεται από την ισότητα: $\int_{\alpha}^{\beta} ydx = \frac{1}{2}\left(\left[xy\right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} zdx\right)$ (Γιαννακούλιας, 2007).



Με την αντικατάσταση $z=y-x\frac{dy}{dx}$ παίρνουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες: $\int_{\alpha}^{\beta} ydx = \left[xy\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} xdy$.

Η σημασία του θεωρήματος μετασχηματισμού έγκειται στο ότι συνέδεσε το πρόβλημα τετραγωνισμού με την κατασκευή της εφαπτομένης. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τη γενικευμένη παραβολή $\left(\frac{y}{\alpha}\right)^m = \left(\frac{x}{b}\right)^n$, από την κατασκευή της εφαπτομένης προκύπτει ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{mx}$.

Τότε : $z=y-x\frac{dy}{dx}=y-\frac{ny}{mx}=\left(\frac{m-n}{m}\right)y$

και άρα $\int_0^x zdx = \int_0^x \left(\frac{m-n}{m}\right) ydx = \frac{m-n}{m} \int_0^x ydx$.

Όμως $\int_0^x ydx = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} \int_0^x zdx \Leftrightarrow \int_0^x zdx = 2\int_0^x ydx - xy$.

Έτσι $\frac{m-n}{m} \int_0^x ydx = 2\int_0^x ydx - xy$ από όπου παίρνουμε: $\int_0^x ydx = \frac{m}{m+n} xy$.

Το θεώρημα του μετασχηματισμού οδήγησε το Leibniz στον αριθμητικό τετραγωνισμό του κύκλου δηλαδή στο ανάπτυγμα του $\frac{\pi}{4}$.

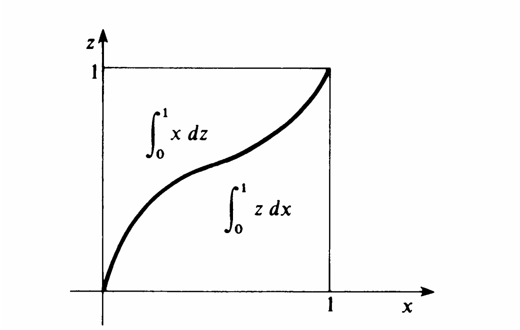
Θεώρησε τον κύκλο $(x-1)^2 + y^2 = 1$ και από το θετικό κλάδο βρήκε ότι :

$z = y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \Leftrightarrow x = \frac{2z^2}{1+z^2}$.

Από το θεώρημα μετασχηματισμού προκύπτει ότι :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 ydx = \frac{1}{2}\left(\left[x\sqrt{2x-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 zdx\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \int_0^1 xdz\right)\right]$$

(εφόσον $\int_0^1 xdz + \int_0^1 zdx = 1$)



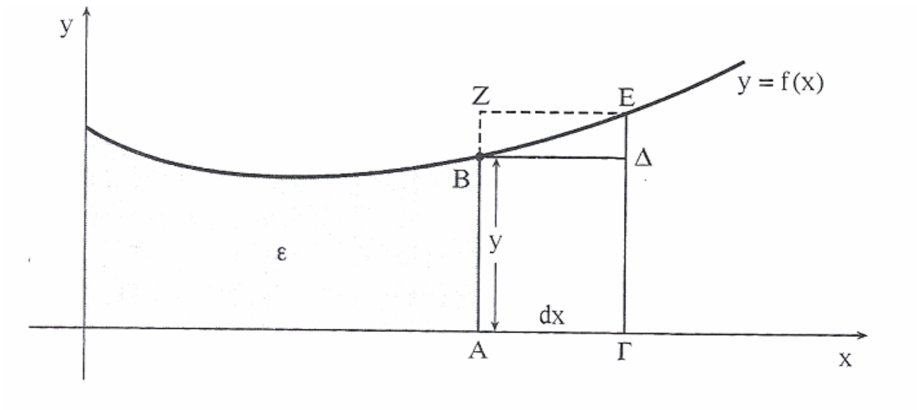
Άρα $\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 z^2\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots\right)dz$ και με ολοκλήρωση όρο προς όρο πήρε την

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad \text{(σειρά Leibniz)}$$

Το θεμελιώδες θεώρημα

Το 1686 δημοσίευσε στο Acta Eruditorum ένα άρθρο με τίτλο «De Geometria recondita et analysi indivisibilium atque Infinitorum» στο οποίο αναφέρεται κυρίως σε θέματα ολοκληρωτικού λογισμού. Σε αυτήν ορίζει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και αποδεικνύει ότι η ολοκλήρωση και η διαφόριση είναι αντίστροφες διαδικασίες. Δίνει κανόνες ολοκλήρωσης και λύνει διάφορα προβλήματα τόσο της διαφόρισης όσο και της ολοκλήρωσης.

Σε άρθρο του που δημοσιεύτηκε το 1702 στο Acta Eruditorum ο Leibniz ασχολείται με την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων στις οποίες ο παρονομαστής αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων (Loria, 1971). Για τον υπολογισμό του εμβαδού ε, του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x) τους άξονες x΄x, και y΄y και την ευθεία AB, αυξάνει την τετμημένη x του σημείου A κατά απειροστή ποσότητα dx, στην οποία αντιστοιχεί μία απειροστή αύξηση dy της y. Αν dε το στοιχειώδες εμβαδόν (ΑΓΕΒ) από το σχήμα προκύπτει ότι :



ΓΕ= y+dy, ydx<εμβ(ΑΓΕΒ)<(y+dy)dx και

$$y < \frac{d\varepsilon}{dx} < y + dy\,.$$

Καθώς το dx τείνει στο μηδέν και το dy θα τείνει στο μηδέν, και άρα $\frac{d\varepsilon}{dx} = y$.

Από την τελευταία ισότητα και την $\varepsilon = \int d\varepsilon = \int y dx$ προκύπτει τότε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού:

$\frac{d\varepsilon}{dx} = y \Rightarrow \frac{d}{dx}\int y dx = y$.

(Ο Leibniz εργαζόταν με συνεχείς συναρτήσεις).

Στην εργασία του 1686 παρουσιάζει κάποια παραδείγματα με σκοπό να πείσει τη μαθηματική κοινότητα για τη δυναμική των μεθόδων του. Δίνει μεγάλη έμφαση στον τύπο $\int v dx = \int y dy$ (*), τονίζοντας ότι είναι πολύ σημαντικός γιατί μετατρέπει τετραγωνισμούς σε αντίστροφα προβλήματα εφαπτομένων. Προς επιβεβαίωση του παραπάνω ισχυρισμού δείχνει ότι ο υπολογισμός του εμβαδού $\int_0^1 x^n dx$ υπό την καμπύλη $z = x^n$ ανάγεται στην εύρεση μιας καμπύλης y=f(x) με υποκάθετη την $v = x^n$, που σε συνδυασμό με την (*) δίνει την ισότητα

$\int_0^1 x^n dx = \int y dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(f(1))^2$ με την υπόθεση ότι f(0)=0.

Θεωρώντας την καμπύλη υπό τη μορφή $y = px^k$ συμπεραίνει ότι

$v = y\frac{dy}{dx} = px^k \cdot pk \cdot x^{k-1} = p^2 \cdot k \cdot x^{2k-1} = x^n$.

Είναι $p^2 \cdot k = 1$ και 2k-1=n , άρα $k = \frac{n-1}{2}, p^2 = \frac{2}{n+1}, f(1) = p \cdot 1^k = p$.

Το συμπέρασμα είναι ότι $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{2}(f(1))^2 = \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

(Γιαννακούλιας, 2007).

Τη θεωρία που ανέπτυξε ο Leibniz με βάση την προηγούμενη διαδικασία την ονόμασε αρχικά «Αθροιστικό Λογισμό» (calculus summatorium). Αργότερα μετά από πρόταση των Johann και Jacob Bernoulli ο αθροιστικός λογισμός ονομάστηκε ολοκληρωτικός λογισμός (calculus integralis).

Με τα έργα του εισάγει και αναπτύσσει μία νέα θεωρία διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Καθιερώνει μία νέα ορολογία και ένα πρωτοποριακό συμβολισμό. Καθορίζει κανόνες διαφόρισης και ολοκλήρωσης ώστε να είναι γενικοί κανόνες. Αποδεικνύει ότι η διαφόριση και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες διαδικασίες.

Ήδη στις αρχές της δεκαετίας του 1690 ο Leibniz είχε επινοήσει τις περισσότερες από τις ιδέες που συμπεριλαμβάνονται στα σύγχρονα εγχειρίδια του απειροστικού λογισμού αλλά ουδέποτε έγραψε μια πλήρη, παρουσίαση του υλικού αυτού. Αν θελήσει κάποιος να συγκρίνει το λογισμό του Leibniz με το σημερινό απειροστικό λογισμό, ο μεν λογισμός του Leibniz αφορά μεταβλητές, οι οποίες διατρέχουν μια άπειρη ακολουθία απείρως κοντινών τιμών, ενώ ο σύγχρονος λογισμός πραγματεύεται με συναρτήσεις. Μία δεύτερη διαφορά εστιάζεται στο γεγονός ότι ο διαφορικός λογισμός του Leibniz αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή μία νέα απειροστή μεταβλητή, το διαφορικό, ενώ ο σύγχρονος διαφορικός λογισμός αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση, μια νέα συνάρτηση, την παράγωγό της. Ο Leibniz κατόρθωσε να δημιουργήσει ένα ολοκληρωμένο, μεθοδικό και λειτουργικό λογισμό καθιερώνοντας μια νέα ορολογία και ένα απλό λειτουργικό συμβολισμό (Γιαννακούλιας, 2007).

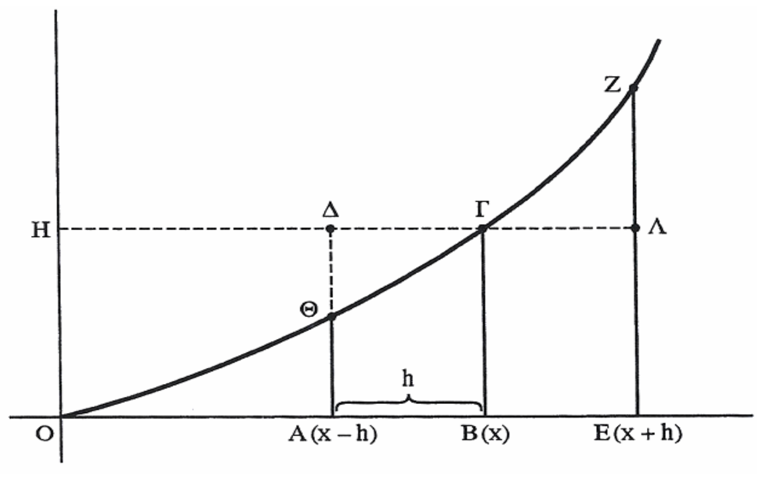
Όμως και η θεωρία του Leibniz γνώρισε αρκετές επικρίσεις. Αρκετές κριτικές καθώς και την απόρριψη δέχθηκε από το 1695-1700 από τον B.Niewentijt. Παρόλο που οι αντιρρήσεις του έχουν μία μάλλον φιλοσοφική παρά μαθηματική χροιά, εντούτοις υπογραμμίζουν την έλλειψη αυστηρής θεμελίωσης. Εκφράζει τις επιφυλάξεις του για την ιδιότητα του αθροίσματος των απείρων ποσοτήτων που είναι πεπερασμένο. Ακόμα αμφιβάλλει για το νόημα και την ύπαρξη διαφορικών μεγαλύτερης τάξης. Στις επικρίσεις του Niewentijt, ο Leibniz αμύνεται και απαντά. Η μέθοδός του διαφέρει από τη μέθοδο του Αρχιμήδη μόνο στα μέσα έκφρασης τα οποία χρησιμοποιεί, υπογραμμίζει όμως πως η δική του είναι ανώτερη. Όσον αφορά τις λέξεις «άπειρο» και «απειροστό» η σημασία τους είναι ότι μπορούμε απλά να πάρουμε τις ποσότητες τόσο μεγάλες όσο και τόσο μικρές θέλουμε από κάθε καθορισμένο αριθμό. Ο καινούριος αυτός κλάδος των μαθηματικών έπρεπε να περιμένει μέχρι το 19^{ο} αιώνα για να αποκτήσει όλη του την αυστηρότητα , όλη του την ακρίβεια και κυρίως να αποκτήσει στέρεη θεμελίωση (Φίλη, 2010).

Η διαμάχη των Newton-Leibniz

Στο σημείο αυτό αξίζει να πούμε λίγα λόγια για τη διαμάχη του Leibniz και του Newton αναφορικά με το ποιος πρωτοανακάλυψε τον απειροστικό λογισμό. Πρέπει να γίνει σαφές ότι μολονότι οι δύο άνδρες ανακάλυψαν ουσιαστικά τους ίδιους κανόνες και τις ίδιες μεθόδους που σήμερα συνολικά αποκαλούμε απειροστικό λογισμό, η προσέγγιση ήταν τελείως διαφορετική. Ο Newton προσέγγιζε το λογισμό μέσω των ιδεών της ταχύτητας και της απόστασης, ενώ ο Leibniz μέσω των διαφορών και των αθροισμάτων. Παρ' όλα αυτά, καθώς η εργασία του Νεύτωνα δεν είχε δημοσιευθεί έως τις αρχές του 18ου αιώνα, αν και ήταν γνωστή στην Αγγλία πολύ νωρίτερα, οι επιτυχίες του Leibniz και των αδελφών Bernoulli στην εφαρμογή της εκδοχής τους για το λογισμό οδήγησε ορισμένους Άγγλους μαθηματικούς να κατηγορήσουν το Leibniz για λογοκλοπή, ιδίως επειδή είχε μελετήσει μέρος από το υλικό του Newton στις σύντομες επισκέψεις του στο Λονδίνο τη δεκαετία του 1670 και είχε λάβει δύο επιστολές από το Νεύτωνα μέσω του Henry Oldenburg , του γραμματέα της Βασιλικής Εταιρείας στον οποίο ο Νεύτωνας είχε ανακοινώσει ορισμένα από τα αποτελέσματά του. Αντιστρόφως, ακριβώς επειδή δεν είχε δημοσιεύσει, οι Bernoulli κατηγόρησαν το Newton για λογοκλοπή από το Leibniz. Το 1711, η Βασιλική Εταιρεία, της οποίας προήδρευε ο ίδιος ο Newton, όρισε μία επιτροπή για να ερευνήσει τις κατηγορίες. Φυσικά η επιτροπή κατέληξε ότι οι κατηγορίες εναντίον του Leibniz ήταν αληθινές. Το ατυχές επακόλουθο αυτής της διαμάχης ήταν ότι οι άγγλοι και οι λοιποί ευρωπαίοι μαθηματικοί έπαψαν ουσιαστικά να ανταλλάσσουν ιδέες. Όσον αφορά το λογισμό, οι Άγγλοι υιοθέτησαν το συμβολισμό και τις μεθόδους του Newton, ενώ στην ηπειρωτική Ευρώπη οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν εκείνες του Leibniz. Στη συνέχεια αποδείχθηκε ότι ήταν ευκολότερο να εργάζεται κανείς με το συμβολισμό και το λογισμό του Leibniz. Η ανάλυση προόδευσε ταχύτερα στην ηπειρωτική Ευρώπη. Η αγγλική μαθηματική κοινότητα στέρησε από τον εαυτό της τη μεγάλη πρόοδο που έγινε εκεί για ολόκληρο σχεδόν το 18ο αιώνα, κάτι που είχε ως αποτέλεσμα την τελική καταστροφή της (Katz, 2013).

Colin Maclaurin και το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού

Ο Maclaurin (1698-1746) ήταν ίσως ο πιο σημαντικός Βρετανός μαθηματικός της γενιάς που ακολούθησε τον Newton. Γεννήθηκε στη Σκωτία και σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Γλασκώβης, το οποίο άρχισε να παρακολουθεί σε ηλικία έντεκα ετών. Έγινε καθηγητής μαθηματικών στο Aberdeen όταν ήταν δεκαεννέα χρόνων και έξι χρόνια αργότερα δίδασκε στο Πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου (Boyer& Merzbach, 1997). Ο Maclaurin, δημοσίευσε το 1742 ένα βιβλίο με τίτλο *«Treatise on Fluxions»(πραγματεία για τις ροές)* με σκοπό να απαντήσει στην κριτική που άσκησε οχτώ χρόνια νωρίτερα ο George Berkeley (1685-1753) στα θεμέλια της θεωρίας των ροών του Newton. Η πραγματεία αυτή αποτέλεσε το μέσον με το οποίο διαδόθηκαν οι Νευτώνειες αντιλήψεις για το λογισμό, και κάποιες επεκτάσεις του στην υπόλοιπη Ευρώπη, καθώς και το συνδετικό κρίκο μεταξύ των μεθόδων του Newton και του Leibniz. Το πρώτο βιβλίο της πραγματείας αυτής παρουσιάζει τα θεμέλια του νευτώνειου λογισμού από γεωμετρική σκοπιά. Αλλά στο δεύτερο βιβλίο της, ο σκοπός του Maclaurin είναι διαφορετικός και σ' αυτό αποβλέπει να δείξει τόσο τους κανόνες που ακολουθούν οι ροές, όσο και τις εφαρμογές τους με τρόπο αλγεβρικό και αλγοριθμικό. Έτσι ο Maclaurin παρέχει λεπτομέρειες από όλο το πεδίο των προβλημάτων στα οποία εφαρμοζόταν ο απειροστικός λογισμός. Συζητά τα μέγιστα, τα ελάχιστα και τα σημεία καμπής, υπολογίζει εφαπτόμενες και ασύμπτωτες, υπολογίζει καμπυλότητες. Επίσης υπολογίζει εμβαδά κάτω από καμπύλες που δίνονται από την y συναρτήσει του x, δείχνοντας ότι η ροή ενός τέτοιου εμβαδού είναι $y \cdot \dot{x}$ και χρησιμοποιώντας μία από τις ποικίλες μεθόδους για να υπολογίσει τη ρέουσα αυτής της παράστασης. Παρόμοια υπολογίζει όγκους και εμβαδά επιφανειών στερεών που παράγονται από περιστροφή υπολογίζοντας πρώτα τις ροές τους. Για να μελετήσει τη βαρυτική έλξη των ελλειψοειδών χρησιμοποίησε μία στοιχειώδη μορφή της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (Katz, 2013). Ο Maclaurin υπερασπίστηκε τη χρήση των ορίων έναντι αυτής των απειροστών, και κατά γενική ομολογία των ιστορικών επηρέασε τον D'Alembert ώστε να προσεγγίσει τη θεμελίωση του λογισμού με βάση την έννοια του ορίου. Στην πραγματεία του για τις ροές ανακαλύπτει κανείς με έκπληξη να αναπτύσσονται οι βασικές μέθοδοι μελέτης του απειροστικού λογισμού που επικράτησαν κατά το 18^{o} και 19^{o} αιώνα. Η μία αφορούσε την μελέτη των (πραγματικών) συναρτήσεων με τη χρήση αναπαραστάσεων με δυναμοσειρές, και η δεύτερη συνδέθηκε με τις εργασίες του Cauchy που έγιναν τη διετία 1820-1821 και βασιζόταν στην άλγεβρα των ανισοτήτων, τη σημερινή ε-δ τεχνική των αποδείξεων. Χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ανισότητες απέδειξε μία ειδική περίπτωση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού. Θεώρησε μία ειδική συνάρτηση και έδειξε ότι η ροή του εμβαδού υπό την καμπύλη με εξίσωση y=f(x) έχει την τιμή f(x). Η απόδειξή του βασίστηκε στα επιχειρήματα που ο Newton είχε εκθέσει στο «DeAnalysi», σύμφωνα με τα οποία ο λόγος μεταβολής του εμβαδού υπό την καμπύλη μετράται με το ύψος της καμπύλης, αλλά η απόδειξή του έγινε σε αυστηρότερα πλαίσια. Αν και τα επιχειρήματά του Maclaurin ήταν αλγεβρικά, εν τούτοις οι έννοιες που περιέχουν μοιάζουν με εκείνες που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες στην μέθοδο της εξάντλησης. Αν το εμβαδόν υπό την καμπύλη ισούται με x^{n}, τότε η τεταγμένη της καμπύλης ισούται με $y = nx^{n-1}$, που ως γνωστόν είναι η ροή της x^{n}. Το διάγραμμα του Maclaurin, για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι παρόμοιο με αυτό που ο Newton είχε παρουσιάσει στο «DeAnalysi».



Ο Maclaurin ισχυρίζεται ότι η ταυτόχρονη αύξηση των x,y συνεπάγεται την ανισότητα: $x^n - (x-h)^n < yh < (x+h)^n - x^n$ (1)

την οποία διατύπωσε λεκτικά. Βέβαια η (1) προκύπτει άμεσα εφόσον το εμβαδόν υπό την καμπύλη $y = x^n$, για το μέρος του επιπέδου, που φράσσεται δεξιά από την ευθεία που είναι παράλληλη προς τον κατακόρυφο άξονα και σε απόσταση d=x από αυτόν ισούται με x^n.

Τότε: $x^n - (x-h)^n$ =εμβ(ΑΒΓΘ)<εμβ(ΑΒΓΔ)=hy<εμβ(ΒΕΖΓ)= $(x+h)^n - x^n$.

Έχοντας αποδείξει την ανισότητα :

$nN^{n-1}(M-N) < M^n - N^n < nM^{n-1}(M-N)$ (2)

ο Maclaurin έθεσε x-h στη θέση του N και x στη θέση του M στην στην $nN^{n-1}(M-N) < M^n - N^n$ και με την αντικατάσταση h=M-N κατέληξε στην ανισότητα $n \cdot (x-h)^{n-1} \cdot h < x^n - (x-h)^n$.

Παρόμοια με N=x και M=x+h στην ανισότητα $M^n - N^n < nM^{n-1}$ πήρε την ανισότητα $(x+h)^n - x^n < n(x+h)^{n-1}h$.

Σε συνδυασμό με την (1) συμπέρανε ότι $n \cdot (x-h)^{n-1} \cdot h < yh < n(x+h)^{n-1}h$ από την οποία προκύπτει η ανισότητα:

$n \cdot (x-h)^{n-1} < y < n(x+h)^{n-1}$. (3)

Σε σύγχρονη ορολογία, από την (3) με μετάβαση στο όριο καθώς h→0 έχουμε ότι $y = nx^{n-1}$.

Ο Maclaurin, ένεκα της έλλειψης της σύγχρονης έννοια του ορίου, ακολούθησε τη μέθοδο της εξάντλησης, χρησιμοποιώντας τη διπλή αντίφαση, όχι γεωμετρικά, αλλά με έναν αλγεβρικό τρόπο. Για $y \neq nx^{n-1}$ έθεσε $y = nx^{n-1} + r$, για κάποιο r>0. Η επιλογή όμως του h ώστε $y = n(x+h)^{n-1}$, και με $h = \left(x^{n-1} + \frac{r}{n}\right)^{\frac{1}{n}-1}$ οδηγεί σε άτοπο, γιατί αντίκειται στην (3).Η περίπτωση του r<0 αντιμετωπίζεται παρόμοια και με κατάλληλη επιλογή του h. Συνεπώς $y = nx^{n-1}$ (Γιαννακούλιας, 2007).

Το έργο του Maclaurin είναι επίσης γνωστό στους σημερινούς φοιτητές για μια έννοια του λογισμού που δεν οφείλεται σε εκείνον, τη σειρά Maclaurin. Η σειρά Maclaurin που εμφανίζεται στο *Treatise on Fluxions* το 1742 είναι μόνο μία ειδική περίπτωση της σειράς Taylor, που δημοσίευσε ο Brook Taylor (1685-1731) στα 1715 στο έργο του *Methodus incrementorum directa et inversa.* Η σειρά αυτή είναι η :

$f\left(x+\alpha\right)=f\left(\alpha\right)+f'(\alpha)x+f''(\alpha)\frac{x^2}{2}+f'''(\alpha)\frac{x^3}{3}+...+f^{(n)}\left(\alpha\right)\frac{x^n}{n!}+...$. Αν σε αυτό το ανάπτυγμα αντικαταστήσουμε το α με το 0 έχουμε τη σειρά Maclaurin. Ο James Gregory γνώριζε νωρίτερα τη σειρά Taylor καθώς και ο Jean Bernoulli, χωρίς όμως να το γνωρίζει ο Taylor. Επίσης η σειρά Maclaurin είχε κάνει την εμφάνισή της στο *Methodus differentialis* του Stirling πάνω από δώδεκα χρόνια πριν τη δημοσιεύσει ο Maclaurin (Boyer& Merzbach, 1997).

Bernoulli

Ο καινούριος κλάδος των μαθηματικών μετά τα έργα του Newton και του Leibniz, αποκρυσταλλώθηκε με τη μορφή που δημιουργεί ο Leibniz και άρχισε να διδάσκεται από το 1713 στο Πανεπιστήμιο της Halle από τον Chr.Wolff (1679-1754). Οι πρώτοι οπαδοί εμφανίζονται και είναι οι αδελφοί Jacob και Johann Bernoulli (Φίλη, 2010).

Ο Jacob είχε σπουδάσει θεολογία, ο Johann ιατρική. Όταν όμως δημοσιεύτηκαν οι εργασίες του Leibniz στα *Πεπραγμένα των Σοφών*, αποφάσισαν και οι δύο να γίνουν μαθηματικοί. Υπήρξαν οι πρώτοι σημαντικοί μαθηματικοί από αυτούς που λογίζονται μαθητές του Leibniz. Το 1687 ο Jacob αποδέχτηκε την έδρα των μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας, από όπου δίδαξε έως το θάνατό του, το 1705. Το 1695 ο Johann έγινε καθηγητής στο Groningen. Ύστερα από τον θάνατο του αδερφού του, τον διαδέχτηκε στην έδρα του, στη Βασιλεία, και παρέμεινε εκεί σαράντα τρία χρόνια (Struik, 1993). Ο Johann Bernoulli υπήρξε μέλος των ακαδημιών των επιστημών στο Παρίσι, το Βερολίνο, το Λονδίνο, την Αγία Πετρούπολη και στην Μπολώνια. Στη δεκαετία του 1720, όταν πλέον ο Leibniz είχε πεθάνει και ο Newton ήταν ανενεργός στα μαθηματικά, ο Johann ένεκα της μαθηματικής του δραστηριότητας και επινοητικότητας ήταν γνωστός ως ο Αρχιμήδης της εποχής του (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Jacob άρχισε να αλληλογραφεί με το Leibniz το 1687. Μετά τα δύο αδέρφια σε συνεχή ανταλλαγή ιδεών με το Leibniz και μεταξύ τους –συχνά υπήρχε έντονη αντιζηλία του ενός με τον άλλο- άρχισαν να ανακαλύπτουν τους θησαυρούς που περιείχε το πρωτοπόρο και θαρραλέο εγχείρημα του Leibniz. Ο κατάλογος των εξαγομένων τους είναι μακρύς. Περιέχει όχι μόνο το περισσότερο υλικό που βρίσκεται σήμερα στα στοιχειώδη βιβλία διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, αλλά και επιλύσεις πολλών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Struik, 1993).

Ο Jacob δημοσίευσε το 1690 στο Acta Eruditorum μία εργασία του με τίτλο «*Analysis Problematis antehac propos»*, στην οποία για πρώτη φορά αναφέρεται ο όρος *Calculus integralis (ολοκληρωτικός λογισμός)* σε αντικατάσταση του όρου *αθροιστικός λογισμός* που έως τότε χρησιμοποιούσε ο Leibniz. Η μεγάλη συνεισφορά του Jacob στο λογισμό δεν ήταν κυρίως η διατύπωση θεωριών, αλλά η επιδέξια ανάλυση σημαντικών προβλημάτων. Είχε τη γνώμη ότι η χρήση του απείρου δεν ήταν επαρκώς πειστική και ήταν πολύ απομακρυσμένη από τη γνώμη των αρχαίων. Υποστήριζε πως το *απείρως μικρό* δεν έπρεπε να θεωρείται ως ένα προσδιορισμένο μέγεθος, αλλά ως δημιούργημα της φαντασίας μας, «μια αέναη ροή προς το τίποτα», όπως χαρακτηριστικά έγραφε (Γιαννακούλιας, 2007). Στις συνεισφορές του Jacob περιλαμβάνονται επίσης η χρήση πολικών συντεταγμένων, η μελέτη της αλυσοειδούς καμπύλης (η οποία είχε εξεταστεί από τον Huygens και άλλους), ο λημνίσκος (1694) και η λογαριθμική έλικα. Το 1690 βρήκε τη λεγόμενη ισοχρονική καμπύλη, απαντώντας έτσι στο πρόβλημα που είχε προτείνει ο Leibniz το 1687: Να προσδιοριστεί η καμπύλη που διαγράφει σώμα, το οποίο πέφτει ισοταχώς-πρόκειται για ημικυβική παραβολή. Ο Jacob ενδιαφέρθηκε επίσης για ισοπεριμετρικά προβλήματα (1701) και αυτό τον οδήγησε σε πρόβλημα λογισμού των μεταβολών. Επίσης ήταν από τους πρώτους μελετητές της πιθανοθεωρίας (Struik, 1993).

Το Σεπτέμβριο του 1694 ο Johann σε άρθρο του στο Acta Eruditorum με τίτλο «Effectiones omnium quadra turam…» χρησιμοποίησε μία μέθοδο που ήταν περίπου η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη, με τη βοήθεια της οποίας κατέληξε, δίχως να αναγνωρίσει την πλήρη σημασία της, σε μία τροποποιημένη μορφή της σειράς Taylor.

Ο Johann έγραφε:

«Αν ένα στοιχείο του χώρου, μία καμπύλη ή κάποιο άλλο πράγμα μπορεί να εκφραστεί ως ndz, όπου n είναι μια ποσότητα που εκφράζεται από μεταβλητές και ποσότητες, τότε

$$\int ndz = nz - \frac{z^2 dn}{1\cdot 2\cdot dz} + \frac{z^3 d^2 n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dz^2} - \frac{z^4 d^3 n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot dz^3} + \ldots$$

Η απόδειξη γινόταν με την ανάπτυξη σε σειρά του ndz:

$$ndz = ndz + zdn - zdn - \frac{z^2 ddn}{1\cdot 2\cdot dz} + \frac{z^2 ddn}{1\cdot 2\cdot dz} - \frac{z^3 d^3 n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dz^2} + \frac{z^3 d^3 n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dz^2} - \ldots$$

και ολοκλήρωση των όρων κατά ζεύγη.

Στον ολοκληρωτικό λογισμό θεωρούσε ως παραλληλόγραμμο το σχήμα που οριζόταν από ένα απείρως μικρό τμήμα της καμπύλης, τις τεταγμένες των άκρων του, και την αντίστοιχη διαφορά των τετμημένων. Παρά το γεγονός όμως ότι θεωρούσε μια επιφάνεια ως το άθροισμα τέτοιων διαφορικών εμβαδών, δεν όρισε το ολοκλήρωμα σαν ένα άθροισμα αυτού του είδους, όπως είχε κάνει ο Leibniz, αλλά ως αντίστροφο του διαφορικού με την πρόσθεση μιας κατάλληλα επιλεγμένης σταθεράς. Αυτός ο ορισμός παρέμεινε σε χρήση καθ' όλη τη διάρκεια του 18ου αιώνα. Στο Johann οφείλεται η ολοκλήρωση των περισσότερων γνωστών συναρτήσεων, καθώς και η διαφόριση και ολοκλήρωση των εκθετικών συναρτήσεων. Ήταν ο πρώτος που εφάρμοσε το χωρισμό των μεταβλητών σε μία διαφορική εξίσωση και έδωσε τον ακόλουθο ορισμό συνάρτησης απελευθερωμένο από γεωμετρικά στοιχεία: «Συνάρτηση είναι μια ποσότητα που αποτελείται με οποιοδήποτε τρόπο από μεταβλητή ποσότητα και από σταθερές». Ο ορισμός αυτός παρέμεινε αμετάβλητος έως τον 19ο αιώνα (Γιαννακούλιας, 2007).

Οι αδελφοί Bernoulli και ο Euler υπήρξαν οι πρωτεργάτες που τελειοποίησαν τον Λογισμό σε τέτοιο βαθμό ώστε ένας μέσος άνθρωπος να είναι σε θέση να τον χρησιμοποιήσει για την ανακάλυψη αποτελεσμάτων που οι μέγιστοι των αρχαίων Ελλήνων δεν θα μπορούσαν να βρουν ποτέ (Bell, 2000).

Euler

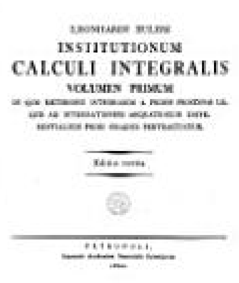
Από τη Βασιλεία προήλθε επίσης ο πιο παραγωγικός μαθηματικός του 18[ου] αιώνα- αν όχι όλων των εποχών-ο Leonard Euler (1707-1783). Ο πατέρας του είχε σπουδάσει μαθηματικά με καθηγητή τον Jacob Bernoulli και ο Leonard είχε καθηγητή τον Johann. Όταν το 1725 ο Νικόλαος, γιος του Johann, ταξίδεψε στην Πετρούπολη, ο νεαρός Euler τον ακολούθησε και παρέμεινε στην εκεί Ακαδημία έως το 1741.Από το 1741 έως το 1766 ο Euler βρισκόταν στην Ακαδημία του Βερολίνου, υπό την ειδική προστασία του Φρειδερίκου του μεγάλου. Από το 1766 έως το 1783 ήταν και πάλι στην Πετρούπολη υπό την αιγίδα της αυτοκράτειρας Αικατερίνης. Η ζωή αυτού του ακαδημαϊκού του 18[ου] αιώνα είχε σχεδόν αποκλειστικά αφιερωθεί στην ενασχόληση με θέματα θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, που αναφέρονταν σε ποικίλα πεδία. Παρόλο που έχασε το ένα μάτι το 1735 και το άλλο το 1766, τίποτα δεν μπορούσε να σταματήσει την τεράστια παραγωγικότητά του. Ο τυφλός Euler με τη βοήθεια μιας μνήμης-φαινόμενο, συνέχισε να εργάζεται και τις ανακαλύψεις του τις υπαγόρευε. Στη διάρκεια της ζωής του δημοσιεύτηκαν 530 βιβλία και εργασίες του. Όταν πέθανε βρέθηκαν στα κατάλοιπά του πολλά χειρόγραφα. Αυτά εκδόθηκαν από την ακαδημία της Πετρούπολης στα επόμενα σαράντα επτά χρόνια. Ανέβηκε έτσι ο αριθμός των εργασιών του σε 771, αλλά οι έρευνές του Ένεστραιμ συμπλήρωσαν τον κατάλογο, φτάνοντάς τον στον αριθμό 886 (Struik, 1993).

Οι συνεισφορές του Euler έχουν αφήσει τη σφραγίδα τους σε όλα τα πεδία των μαθηματικών που υπήρχαν στον καιρό του. Τα εξαγόμενά του τα εμφάνιζε άλλοτε με άρθρα, ποικίλης έκτασης, και άλλοτε διαμέσου διδαχτικών βιβλίων, που συνήθως ήταν ογκώδη. Είχε συγγράψει εντυπωσιακό πλήθος τέτοιων βιβλίων, όπου ταξινομούσε και κωδικοποιούσε το υλικό που είχε συγκεντρωθεί στη διάρκεια των αιώνων. Σε πολλά θέματα, η παρουσίασή τους από τον Euler κατέληξε να αποβεί σχεδόν η οριστική. Παράδειγμα η σημερινή μας τριγωνομετρία, στην οποία επικράτησε η δική του αντίληψη για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, που τους θεώρησε ως λόγους και ο δικός του εύχρηστος συμβολισμός. Αυτά τα αποτελέσματα τα παρουσίασε στην

Introductio in analysin infinitorum (Εισαγωγή στην ανάλυση των απειροστών)(1748) (Struik, 1993). Το καταπληκτικό κύρος των διδακτικών του βιβλίων διευθέτησε για πάντα πολλά αμφισβητούμενα ζητήματα συμβολισμού στην άλγεβρα και τον απειροστικό λογισμό. Οι Lagrange, Laplace και ο Gauss γνώριζαν τα έργα του Euler και ακολουθούσαν τις θέσεις του σε όλες τις δικές τους εργασίες (Struik, 1993)

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Euler στο *Introductio* δίνει τον ορισμό για την έννοια της συνάρτησης ως «κάθε αναλυτική έκφραση που αποτελείται από τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες» Από την εποχή εκείνη και μετά η έννοια της συνάρτησης έπαιξε βασικό ρόλο στην ανάλυση. Την ύπαρξή της ανέφερε έμμεσα η αναλυτική γεωμετρία των Fermat και Descartes καθώς και ο απειροστικός λογισμός των Newton και Leibniz (Boyer, 1997). Πριν τον Euler ο απειροστικός λογισμός μελετούσε τις ιδιότητες των καμπυλών, ενώ μετά από αυτόν διαπραγματευόταν ιδιότητες των «συναρτήσεων». Η αλλαγή ήταν μεγάλη και προκάλεσε μια μεγάλη αλλαγή στο μαθηματικό τοπίο.

Ένα άλλο εκτεταμένο και πλούσιο διδακτικό βιβλίο του Euler ήταν το *Institutiones calculi differentialis (Αρχές του διαφορικού λογισμού)*(1755), που το ακολούθησαν οι τρεις τόμοι του *Institutiones calculi integralis (Αρχές του ολοκληρωτικού λογισμού)*(1768-74). Το τελευταίο μέρος της τριλογίας του Euler για την ανάλυση, *Institutiones calculi integralis,* αρχίζει με έναν ορισμό του ολοκληρωτικού λογισμού. Είναι η μέθοδος της εύρεσης, από μία δοθείσα σχέση διαφορικών ορισμένων μεγεθών, των ίδιων των μεγεθών. Δηλαδή για τον Euler όπως και για τον Johann Bernoulli, η ολοκλήρωση είναι μάλλον το αντίστροφο της διαφόρισης παρά ο υπολογισμός εμβαδού. Έτσι το πρώτο μέρος αφορά τεχνικές ολοκλήρωσης (δηλαδή την εύρεση αντιπαραγώγων) διαφόρων συναρτήσεων, ενώ το υπόλοιπο βιβλίο αφορά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.


INSTITUTIONUM
CALCULI INTEGRALIS
VOLUMEN PRIMUM

Ο Euler ξεκινά με αποτελέσματα όπως $\int \alpha x^n dx = \frac{\alpha}{n+1}x^{n+1} + C$ για $n \neq -1$ και $\int \frac{\alpha dx}{x} = \alpha \ln x + C = \ln cx^{\alpha}$,και μετά πραγματεύεται λεπτομερώς την τεχνική των κλασμάτων που μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε ρητές συναρτήσεις. Ασχολείται με διάφορες τεχνικές αντικατάστασης για την ολοκλήρωση συναρτήσεων που εμπεριέχουν τετραγωνικές ρίζες, αλλά δεν εκθέτει την τριγωνομετρική αντικατάσταση που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ένα κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην ολοκλήρωση με τη βοήθεια απείρων σειρών, μέθοδο που προτιμούσε ο Newton, ένα άλλο είναι αφιερωμένο στην ολοκλήρωση κατά μέρη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που η συνάρτηση περιέχει αλγορίθμους και εκθετικά, και ένα τρίτο μελετά αναγωγικούς τύπους για τις τριγωνομετρικές δυνάμεις. Ο Euler χρησιμοποιεί ακόμη και τις αντικαταστάσεις $\cos\varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ και $\sin\varphi = \frac{2x}{1+x^2}$ για να μετασχηματίσει ρητές συναρτήσεις που εμπεριέχουν ημίτονα και συνημίτονα σε συνήθεις ρητές συναρτήσεις.

Το κυρίως σώμα του κειμένου αφορά μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Ο Euler επιλύει τη γενική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης dy+Pydx=Qdx (ή σε σημερινή ορολογία την y΄+Py=Q) χωρίζοντας τις μεταβλητές και καταλήγει στη γενική λύση :

$y = e^{-\int Pdx}\int e^{\int Pdx}Qdx$, αποτέλεσμα το οποίο είχε αποδείξει το 1734. Δείχνει πως ολοκληρώνεται το Pdx+Qdy στην περίπτωση που είναι «ακριβές» διαφορικό , δηλαδή ισχύει $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Συζητά πως μπορεί να βρεθεί ο παράγων ολοκλήρωσης εάν το Pdx+Qdy δεν είναι ακριβές. Ασχολείται με διάφορες περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων υψηλότερων της δευτέρας τάξης, συμπεριλαμβανομένων των γραμμικών με σταθερούς συντελεστές. Τέλος ολοκληρώνει το βιβλίο του μελετώντας μερικές διαφορικές εξισώσεις. Αλλά αν και το αρχικό κίνητρο για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων είναι η προσπάθεια να λυθούν προβλήματα φυσική, ο Euler δεν αναφέρει τίποτε γι αυτά στο κείμενό του.

Ο *Ολοκληρωτικός λογισμός, ο Διαφορικός λογισμός* και η *Εισαγωγή* είναι κείμενα της καθαρής ανάλυσης , αφού μάλιστα ο Euler δεν ασχολείται καν με γεωμετρικές εφαρμογές. Το γεγονός αυτό ίσως εξηγεί τις σημαντικές διαφορές ανάμεσα στο έργο του Euler και ένα σύγχρονο εγχειρίδιο απειροστικού λογισμού. Λόγου χάριν, στο *Διαφορικό λογισμό* δεν αναφέρονται εφαπτόμενες, κάθετες ευθείες ή εφαπτόμενα επίπεδα, ούτε μελετάται η καμπυλότητα – ενώ όλα αυτά είναι θέματα που ο Euler κατείχε πλήρως το 1740 και εμφανίζονται μόνο σε ορισμένα γεωμετρικά έργα του. Το ακόμη εκπληκτικότερο είναι ότι στον *Ολοκληρωτικό λογισμό* δεν υπάρχουν υπολογισμοί εμβαδών, ούτε ύλη που αφορά μήκη καμπυλών, όγκους ή εμβαδά επιφανειών εκ περιστροφής. Συνεπώς δεν περιέχεται σε αυτόν το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού που είναι βασικό στα σύγχρονα εγχειρίδια. Δεν υπολογίζεται ούτε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Ο Euler σίγουρα γνώριζε τη χρήση των αντιπαραγώγων στον υπολογισμό εμβαδών και μάλιστα είχε χρησιμοποιήσει τέτοιες ιδέες σε διάφορα άρθρα. Από την άλλη, αφού στο έργο του δεν ορίζεται με σαφήνεια το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ως συνάρτηση, δεν μελετά ούτε την παράγωγο μιας τέτοιας συνάρτησης εμβαδού.

Παρά τα κενά που ο σημερινός αναγνώστης μπορεί να βρει στα έργα του Euler για τον απειροστικό λογισμό, αυτά έμελλε να ασκήσουν μεγάλη επίδραση ως το τέλος του αιώνα χάρις στην ολοκληρωμένη έκθεση και τη σαφή εξήγηση της ύλης που ο Euler και οι προγενέστεροί του είχαν αναπτύξει. Όλοι οι μαθηματικοί του δεύτερου μισού του δέκατου όγδοου αιώνα αναφέρονταν διαρκώς στα έργα του Euler.Τα χρόνια του επόμενου αιώνα ωστόσο οι ανάγκες των φοιτητών άρχισαν να αλλάζουν . Οι νέοι φοιτητές που άρχιζαν τη μελέτη των επιστημών μετά την Γαλλική Επανάσταση, ενέπνευσαν τη συγγραφή νέων κειμένων, κειμένων που αντικατέστησαν εκείνα του Euler και υπήρξαν οι άμεσοι πρόγονοι των σημερινών (Katz, 2013).

Ο Lagrange και το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού

Ο Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) γεννήθηκε στο Τορίνο, αλλά η οικογένειά του είχε γαλλική καταγωγή. Σε ηλικία δεκαεννιά ετών έγινε καθηγητής μαθηματικών στη σχολή πυροβολικού στο Τορίνο. Το 1766, όταν ο Euler έφυγε από το Βερολίνο, ο Φρειδερίκος ο Μεγάλος κάλεσε το Lagrange στο Βερολίνο και τον διόρισε στη θέση του Euler. Ο Lagrange παρέμεινε στο Βερολίνο έως το θάνατο του Φρειδερίκου (1786) και μετά έφυγε για το Παρίσι, όπου πέρασε το υπόλοιπο της ζωής του, δημοσιεύοντας εκεί, το 1788, το σπουδαιότερο έργο του , την *Αναλυτική Μηχανική*. Το έργο αυτό επέκτεινε τη μηχανική των Νεύτωνα, Bernoulli και Euler και έδινε έμφαση στο γεγονός ότι τα προβλήματα της μηχανικής ήταν δυνατόν να λυθούν εν γένει με την αναγωγή τους στη θεωρία των απλών και μερικών διαφορικών εξισώσεων. Κατά τη διάρκεια της Γαλλικής Επανάστασης έλαβε ενεργό μέρος στη μεταρρύθμιση για τα μέτρα και τα σταθμά. Αργότερα έγινε καθηγητής, πρώτα στην Ecole Normal (1795) και έπειτα στην Ecole Polytechnique (1797).

Ο Lagrange ήταν εκείνος που επιχείρησε να ορίσει με ακρίβεια την παράγωγο απαλείφοντας κάθε αναφορά σε απειροστά, ροές, μηδενικά και όρια που για όλα τους πίστευε ότι δεν είχαν οριστεί με σαφήνεια. Ο Lagrange κατόρθωσε να ολοκληρώσει την αναγωγή του λογισμού στην καθαρή αλγεβρική ανάλυση με το να τυποποιήσει την ιδέα που οι περισσότεροι από τους προγενέστερούς του χρησιμοποιούσαν χωρίς κανέναν ενδοιασμό, την ιδέα ότι κάθε συνάρτηση μπορούσε να αναπαρασταθεί ως δυναμοσειρά. Για τον Lagrange εάν $y=f(x)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε το $f(x+i)$, όπου i απροσδιόριστο, μπορεί «μέσω της θεωρίας των σειρών» να αναπτυχθεί στη δυναμοσειρά ως προς i:

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\dots$$

όπου p,q,r,… είναι νέες συναρτήσεις του x ανεξάρτητες από το i. Ο Lagrange έδειξε ότι ο λόγος dy/dx μπορεί να ταυτιστεί με το συντελεστή p(x) της πρώτης δύναμης του i στο ανάπτυγμα αυτό. Είχε επομένως ένα νέο ορισμό αυτής της βασικής έννοιας του λογισμού. Αφού η συνάρτηση p «παράγεται» από την αρχική συνάρτηση f , ο Lagrange την ονόμασε *function derive* (από εδώ προέρχεται ο αγγλικός όρος *derivative*) και τη συμβόλισε με $f'(x)$. Παρόμοια η παράγωγος της $f'(x)$ συμβολίζεται με $f''(x)$ κ.ο.κ. Ο Lagrange έδειξε με ευκολία ότι $q=\frac{1}{2}f'', r=\frac{1}{6}f''',...$

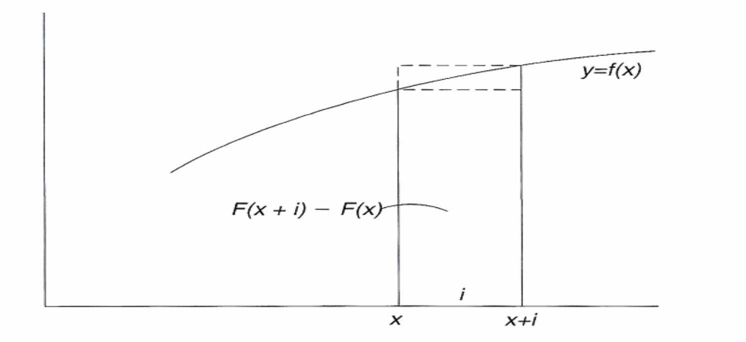
Ο Lagrange χρησιμοποιεί επίσης μία κάπως διαφορετική μορφή του αναπτύγματος που περιέχει ότι σήμερα αποκαλείται υπόλοιπο κατά Lagrange στη σειρά του Taylor. Ακριβέστερα δείχνει ότι για κάθε θετικό ακέραιο n, μπορούμε να γράψουμε :

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2f''(x)}{2}+...+\frac{i^nf^{(n)}(x)}{n!}+\frac{i^{n+1}f^{(n+1)}(x+j)}{(n+1)!}$$

για κάποια τιμή j ανάμεσα στο 0 και το i . Ο Lagrange ισχυριζόταν ότι αυτή η μορφή του επέτρεπε να συναγάγει εκ νέου όλα τα βασικά αποτελέσματα του απειροστικού λογισμού, χωρίς καμία αναφορά σε απειροστά , ροές ή όρια .

Ένα από αυτά τα βασικά αποτελέσματα είναι το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, το οποίο δηλώνει ότι εάν η F(x) αναπαριστά το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη y=f(x) που διέρχεται από μία ορισμένη τεταγμένη, τότε $F'(x)=f(x)$. (Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι ο Lagrange δεν είχε ορίσει το εμβαδόν. Υπέθετε απλώς ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη y=f(x) είναι ένα καλά ορισμένο μέγεθος). Ο Lagrange ξεκινά την απόδειξή του που θυμίζει την απόδειξη του ίδιου αποτελέσματος για συναρτήσεις – δυνάμεις του Maclaurin , παρατηρώντας ότι η διαφορά F(x+i)-F(x) αναπαριστά το τμήμα του εμβαδού ανάμεσα στις τετμημένες x και x+i. Ακολουθώντας την υπόδειξη του Euler ότι σε ένα κείμενο ανάλυσης δεν πρέπει να υπάρχουν διαγράμματα, ο Lagrange γράφει ότι ακόμη και χωρίς διάγραμμα μπορεί κανείς εύκολα να πειστεί ότι εάν η f(x) είναι αύξουσα, τότε

$if(x)<F(x+i)-F(x)<if(x+i)$, ενώ αν η f(x) είναι φθίνουσα οι ανισώσεις αλλάζουν φορά.



Αναπτύσσοντας τώρα τόσο το f(x+i) όσο και το F(x+i), ο Lagrange καταλήγει στην $f(x+i) = f(x) + if'(x+j)$

και στην $F(x+i) = F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j)$

όπου 0<j<i (αν και η τιμή του j μπορεί να μην είναι η ίδια στα δύο αναπτύγματα). Έπεται ότι if(x) < $iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j)$ < if(x)+$i^2f'(x+j)$ και άρα ότι : $\left|i\left[F'(x) - f(x)\right] + \frac{i^2}{2}F''(x+j)\right| < i^2 f'(x+j)$, όπου η απόλυτη τιμή είναι απαραίτητη για να συμπεριληφθεί τόσο η περίπτωση που είναι αύξουσα, όσο και εκείνη που η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Ο Lagrange συμπέρανε ότι αφού η ανισότητα ισχύει ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το i, πρέπει F΄(x)=f(x). Υπολόγισε ακόμα ότι εάν το αποτέλεσμα δεν ήταν ορθό, η ανισότητα δεν θα ίσχυε για $i < \dfrac{F'(x) - f(x)}{f'(x+j) - \frac{1}{2}F''(x+j)}$.

Για να ολοκληρώσει την απόδειξή του ο Lagrange απάλειψε την υπόθεση ότι η f είναι μονότονη στο διάστημα [x,x+i]. Διότι αν δεν είναι, τότε η f έχει ελάχιστο ή μέγιστο στο διάστημα αυτό και το i μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε το ακρότατό της να βρίσκεται εκτός του νέου διαστήματος [x,x+i] (Katz, 2013).

19ος αιώνας και η αυστηροποίηση του λογισμού

Η επιστήμη με τη βοήθεια του απειροστικού λογισμού, όπως θεμελιώθηκε με τις εργασίες των Newton, Leibniz, Euler και Lagrange, καθώς και άλλων σημαντικών μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα, κατόρθωσε να λύσει ποικίλα προβλήματα, από τον υπολογισμό της τροχιάς ενός βλήματος μέχρι την πρόβλεψη για τις κινήσεις των πλανητών. Παρ' όλα αυτά, οι θεμελιώδεις έννοιες με τις οποίες επιτεύχθηκαν αυτά τα αποτελέσματα δεν είχαν οριστεί με αυστηρό τρόπο. Ο απειροστικός λογισμός εκείνης της εποχής βασιζόταν στην έννοια της απειροστής ποσότητας, μιας έννοιας που ήταν αιωρούμενη στα όρια της ύπαρξης και της ανυπαρξίας, κάτι σαν το μηδέν, αλλά όχι πραγματικό μηδέν. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνταν ιδίως από τους φοιτητές άρχισαν να οδηγούν σε λάθη και παράδοξα. Όπως ήταν φυσικό άρχισαν οι αμφισβητήσεις και η προτροπή του D'Alembert «προχωρείτε και η πίστη σας θα έλθει» δεν ικανοποιούσε τους ταλαντούχους φοιτητές (Vilenkin, 1997). Στο τέλος του 18^{ου} αιώνα είχε σχηματιστεί ένας τεράστιος αριθμός από τύπους με αμφισβητούμενα θεωρήματα και εντελώς ασαφές πεδίο εφαρμογής. Επιπλέον υπήρχαν θεμελιώδεις έννοιες, όπως αυτές της παραγώγου και του ολοκληρώματος, που εξακολουθούσαν να παραμένουν δίχως ένα κατάλληλο ορισμό (Γιαννακούλιας, 2007). Με τον ερχομό του 19^{ου} αιώνα και υπό την επιρροή της βιομηχανικής αλλά και της γαλλικής επανάστασης παρατηρήθηκε μία αναδιάρθρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλη την ευρωπαϊκή ήπειρο. Δημοκρατικές ιδέες διαμόρφωσαν την ακαδημαϊκή κοινότητα και τα πανεπιστήμια αναμόρφωσαν τα προγράμματα σπουδών τους. Οι μαθηματικοί έπαυσαν να περιφέρονται σε βασιλικές αυλές και σαλόνια ευγενών και άρχισαν να ασχολούνται, πέρα από την έρευνα και με τη διδασκαλία στα πανεπιστήμια (Struik, 1993). Άρχισε να αυξάνει το ενδιαφέρον για το πως έπρεπε να διδάσκονται οι μαθηματικές ιδέες στους φοιτητές, αλλά και για την αυστηρότητα (Katz, 2013). Ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα και από τους πρωτεργάτες της κίνησης γα την αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του απειροστικού λογισμού ήταν ο Cauchy.

Cauchy

Ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) ήταν ο πιο παραγωγικός μαθηματικός του $19^{ου}$ αιώνα. Γεννημένος στο Παρίσι, τη χρονιά που ξέσπασε η Γαλλική Επανάσταση σπούδασε μηχανικός στην Ecole Polytechnique από το 1805 έως το 1807. Ενώ εργαζόταν ως μηχανικός στρατού από το 1810 έως το 1813, έδειξε τόσο μεγάλο ενδιαφέρον για τα καθαρά μαθηματικά ώστε ο Laplace και ο Lagrange τον ενθάρρυναν να εγκαταλείψει το επάγγελμα του μηχανικού. Με τη βοήθειά τους εξασφάλισε μία θέση διδασκαλίας στην Ecole Polytechnique και αρκετά χρόνια αργότερα στο College de France. Όταν εκδόθηκαν τα βιβλία του για την ανάλυση, έγινε ένα από τα πιο σεβαστά μέλη της γαλλικής μαθηματικής κοινότητας (Katz, 2013). Η θεμελίωση του απειροστικού λογισμού από τον Cauchy βρίσκεται στα έργα του *Cours d'analyse (Μαθήματα ανάλυσης)*(1821) και *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal (Περίληψη των μαθημάτων που δόθηκαν στην βασιλική πολυτεχνική σχολή)* (1823).

Ο Cauchy ανέπτυξε τον απειροστικό λογισμό με βάση την έννοια του ορίου, έτσι όπως συνήθως κάνουμε σήμερα. Μολονότι η έννοια του ορίου είχε συζητηθεί πολύ νωρίτερα, ακόμη και από τον Νεύτωνα, ο Cauchy ήταν ο πρώτος που μετέφρασε την κάπως αόριστη έννοια μιας συνάρτησης που προσεγγίζει μια ορισμένη τιμή σε αριθμητικούς όρους με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη των ορίων. Ο Cauchy χρησιμοποίησε την έννοια του ορίου για να ορίσει τη συνέχεια (με τη σημερινή έννοια) και τη σύγκλιση των ακολουθιών τόσο αριθμών όσο και συναρτήσεων (Katz, 2013). Επίσης όρισε την παράγωγο συνάρτησης με τη βοήθεια της έννοιας του ορίου(Struik, 1993).

Η μελέτη του ολοκληρώματος από τον Cauchy άνοιξε τελείως νέες κατευθύνσεις. Ας θυμηθούμε ότι το ολοκλήρωμα κατά το $17^{ο}$ αιώνα αποτελούσε ένα ισχυρό εργαλείο για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Το εμβαδόν ενός σχήματος υπολογιζόταν από ένα άπειρο άθροισμα απειροστών (γραμμών που είχαν μηδενικό εμβαδόν) και η ολοκλήρωση ήταν ένα νέο είδος πρόσθεσης απείρων, απειροστών αντικειμένων, που έδινε ως άθροισμα μια πεπερασμένη ποσότητα. Μέχρι τους Newton και Leibniz η ολοκλήρωση και η παραγώγιση θεωρούνταν δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους διαδικασίες. Μετά από αυτούς και μέχρι το 19^{ο} αιώνα η ολοκλήρωση χαρακτηρίζεται ως η αντίστροφη της παραγώγισης. Αυτό οφειλόταν κυρίως στο Newton, ο οποίος χρησιμοποίησε αναπτύγματα σειρών για να βρει τις αντιπαραγώγους κάποιων συναρτήσεων, απλοποιώντας με αυτόν τον τρόπο τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος . Στην αρχή ο Newton υπολόγισε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που βρίσκεται υπό την καμπύλη $y=\alpha x^{\frac{m}{n}}$, αλλά γρήγορα η ειδική περίπτωση του θεμελιώδους θεωρήματος, επεκτάθηκε και σε πεπερασμένα αθροίσματα συναρτήσεων αυτής της μορφής και κατόπιν σε συναρτήσεις των οποίων οι αντιπαράγωγοι δεν υπολογίζονταν άμεσα, αλλά οι συναρτήσεις αυτές μπορούσαν να αναπτυχθούν σε σειρές, η ολοκλήρωση των οποίων όρο με όρο οδηγούσε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Σε περιπτώσεις , όπως για παράδειγμα η συνάρτηση e^{-x^2}, όπου μια αντιπαράγωγος δεν ήταν γνωστή, ή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν αναπτυσσόταν σε σειρά, ώστε να ολοκληρωθεί όρο με όρο, οι μαθηματικοί ήταν αναγκασμένοι να υπολογίσουν τα ολοκληρώματα προσεγγιστικά. Στην πορεία όμως παρουσιάστηκαν διάφορα παράδοξα, όπως ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} x^{-1}dx = \ln(1) - \ln(-1)$ που οδήγησε στο παράδοξο το αριστερό μέλος της ισότητας να παριστάνει έναν πραγματικό αριθμό, ενώ το δεξιό έναν φανταστικό (Phillips,1984).

Ο Fourier σε μία εργασία του με τίτλο *«Theorie analytique de la chaleur» (αναλυτική θεωρία της θερμότητας)* που δημοσίευσε το 1822 ισχυρίστηκε ότι κάθε συνάρτηση f: $(-m_1 m) \to \mathbb{R}$ μπορεί να παρασταθεί στο διάστημα αυτό από σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων:

$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{m} + \beta_n \eta\mu\frac{n\pi x}{m}\right)$, όπου οι συντελεστές α_n, β_n υπολογίζονται με ολοκλήρωση όρο με όρο (την ισχύ της οποίας δεν εξέτασε) από τους τύπους:

$$\alpha_n = \frac{1}{m}\int_{-m}^{m} f(t)\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi t}{m}dt \qquad \text{και} \qquad \beta_n = \frac{1}{m}\int_{-m}^{m} f(t)\eta\mu\frac{n\pi t}{m}dt.$$

Τα α_n και β_n είναι γνωστά σήμερα ως συντελεστές Fourier στο διάστημα ($-m_1m$). Με την εργασία του Fourier άνοιξε ο δρόμος για τη μελέτη και τη γενίκευση της έννοιας του ολοκληρώματος, καθώς συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{m} + \beta_n\eta\mu\frac{n\pi x}{m}\right)$ δεν παριστάνονταν ως αθροίσματα αλγεβρικών συναρτήσεων και κατά συνέπεια δεν μπορούσαν να βρεθούν οι αντιπαράγωγοί τους (Γιαννακούλιας, 2007).

O Cauchy όρισε το ολοκλήρωμα ανεξάρτητα από την παράγωγο. Στο *Résumé* τόνισε ότι ήταν επιβεβλημένο να αποδειχθεί πρώτα η ύπαρξη του ολοκληρώματος και κατόπιν να γίνει η χρήση του. Θεώρησε μία συνεχή συνάρτηση f:[x_0,X] $\to \mathbb{R}$ και υποδιαίρεσε το διάστημα αυτό σε n υποδιαστήματα μέσω των σημείων $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ =X. Με αυτή τη διαμέριση P του [x_0,X] συνδέει το προσεγγιστικό άθροισμα S= $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ (1)

που αποκτάται από την άθροιση των εμβαδών των ορθογωνίων βασισμένων στα υποδιαστήματα της διαμέρισης, με βάση [x_{i-1}, x_i] και ύψος f(x_{i-1}). Θέλει να ορίσει το $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ ως το όριο του προηγούμενου αθροίσματος καθώς το μέγιστο των μηκών $x_i - x_{i-1}$ των υποδιαστημάτων προσεγγίζει το μηδέν. Προφανώς η ύπαρξη αυτού του ορίου πρέπει να αποδειχθεί. Για το σκοπό αυτό λέει:

«Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι εάν οι αριθμητικές τιμές (μήκη) αυτών των στοιχείων (υποδιαστημάτων) γίνουν πολύ μικρές και ο αριθμός n πολύ μεγάλος ο τρόπος της υποδιαίρεσης θα έχει μόνο μία ανεπαίσθητη επίδραση στην τιμή του S» (Edwards, 1979).

Για να το αποδείξει αυτό χρησιμοποιεί το παρακάτω στοιχειώδες αριθμητικό αποτέλεσμα από το Cours D' analyse: Εάν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ είναι θετικοί αριθμοί και $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι αυθαίρετοι αριθμοί, τότε $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = \overline{\alpha}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n\right)$, όπου $\overline{\alpha}$ είναι μία «μέση τιμή» των $a_1, a_2, ..., a_n$, δηλαδή $\overline{\alpha}$ κείται μεταξύ του μικρότερου και του μεγαλύτερου από αυτούς. Με $\alpha_i = x_i - x_{i-1}$ και $a_i = f(x_{i-1})$ από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει $S = f(x_0 + \theta(X - x_0))(X - x_0)$ (*) για κάποιο θ στο (0,1), γιατί από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής κάθε μέσος όρος των αριθμών $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})$ είναι μία τιμή της συνεχούς συνάρτησης f σε κάποιο σημείο του διαστήματος.

Τώρα θεωρεί μία εκλέπτυνση P΄ της προηγούμενης διαμέρισης P δηλαδή κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης P΄ βρίσκεται σε κάποιο υποδιάστημα της P. Τότε το αντίστοιχο άθροισμα S΄ μπορεί να γραφτεί ως $S' = S_1' + S_2' + ... + S_n'$, όπου S_i' είναι το άθροισμα αυτών των όρων του S΄ που αντιστοιχούν στα υποδιαστήματα του P΄ που βρίσκονται στο i-στο υποδιάστημα του P. Τότε η (*) εφαρμοσμένη σε αυτό το i-στό υποδιάστημα δίνει :

$S' = f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$ για κάποιο θ_i στο (0,1), i=1,2,...,n έτσι,

$$S' = \sum_{I=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \qquad (2)$$

Αν γράψουμε $\varepsilon_i = f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right) - f\left(x_{i-1}\right)$ για κάθε i=1,2,…,n τότε από τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει

$S' - S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = \overline{\varepsilon}(X - x_0)$ (3) για κάποιο μέσο όρο $\overline{\varepsilon}$ των ε_i.

Ο Cauchy συμπεραίνει από την τελευταία σχέση ότι «δεν θα μεταβάλλει κανείς αισθητά την τιμή του S που υπολογίζεται με μια μέθοδο διαίρεσης (διαμέριση) στην οποία τα στοιχεία (υποδιαστήματα) της διαφοράς $X - x_0$ έχουν πολύ μικρές αριθμητικές τιμές , αν περάσει κανείς σε μία δεύτερη μέθοδο διαίρεσης στην οποία κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία υποδιαιρεθεί σε πολλά άλλα». Εδώ είναι που παραβλέπει την ανάγκη να αποδείξει ότι η συνεχής συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[x_0, X]$, δηλαδή ότι δοθέντος ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε $|f(x') - (x'')| < \varepsilon$ για όποια x', x'' στο $[x_0, X]$ με $|x' - x''| < \delta$.

Γνωρίζοντας αυτό οι αριθμοί ε_i που ορίστηκαν με την προηγούμενη σχέση μπορούσαν να γίνουν όσο μικροί θέλαμε επιλέγοντας τη P με επαρκώς μικρά υποδιαστήματα.

Έστω τώρα P_1 και P_2 αυθαίρετες διαμερίσεις του $[x_0,X]$ και έστω P΄ η κοινή εκλέπτυνση που παίρνουμε συγχωνεύοντας τα σημεία των διαμερίσεων P_1 και P_2. Εάν S_1,S_2 και S είναι τα αντίστοιχα προσεγγιστικά αθροίσματα τότε η (3) δίνει :

$S'-S_1=\overline{\varepsilon_1}(X-x_0)$ και $S'-S_2=\overline{\varepsilon_2}(X-x_0)$ και έτσι $S_1-S_2=(\overline{\varepsilon_2}-\overline{\varepsilon_1})(X-x_0)$

Γι αυτό το λόγο η διαφορά μεταξύ των S_1 και S_2 μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή επιλέγοντας P_1 και P_2 με επαρκώς μικρά υποδιαστήματα.

Ο Cauchy συνοψίζει την κατάσταση ως εξής *: Ας θεωρήσουμε προς το παρόν ότι θεωρεί κανείς ταυτόχρονα δύο μεθόδους διαίρεσης της διαφοράς ($X-x_0$) σε κάθε μία από τις οποίες τα στοιχεία της διαφοράς έχουν πολύ μικρές αριθμητικές τιμές. Θα είναι ικανός να συγκρίνει αυτές τις δύο μεθόδους με μια τρίτη με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο, είτε από την πρώτη είτε από τη δεύτερη μέθοδο να σχηματίζεται από την ένωση διαφόρων στοιχείων της τρίτης. Προκειμένου να ικανοποιείται αυτή η προϋπόθεση θα επαρκεί ότι κάθε τιμή του x τοποθετούμενη εναλλάξ στις δύο πρώτες μεθόδους μεταξύ των ορίων* x_0 *και X να χρησιμοποιείται στην τρίτη και θα αποδείξει κανείς ότι μεταβάλλει την τιμή S πολύ λίγο περνώντας από την πρώτη ή τη δεύτερη μέθοδο στην τρίτη. Γι αυτό το λόγο όταν τα στοιχεία της διαφοράς* $X-x_0$ *γίνουν απείρως μικρά, η μέθοδος διαίρεσης δεν έχει παρά μία ανεπαίσθητη επίδραση στην τιμή του S. Και αν κανείς κάνει τις αριθμητικές τιμές αυτών των στοιχείων να μειώνονται επ' αόριστον, αυξάνοντας το πλήθος τους, η τιμή του S θα καταλήξει να είναι αισθητά σταθερή ή με άλλα λόγια, θα καταλήξει επιτυγχάνοντας ένα συγκεκριμένο όριο το οποίο θα εξαρτάται μόνο από τη μορφή της συνάρτησης f(x) και από τις ακραίες τιμές* x_0 *και X που εκχωρούνται στη μεταβλητή x. Αυτό το όριο είναι που ονομάζει κανείς ορισμένο ολοκλήρωμα»* (Edwards, 1979). Το ολοκλήρωμα αυτό το συμβόλισε με $\int_{x_0}^{X} f(t)dt$, έναν συμβολισμό που είχε προτείνει ο Fourier σε αντικατάσταση του συμβολισμού $\int f(x)dx\Big|_{x=x_0}^{x=X}$ που είχε υιοθετήσει ο Euler. Για πρώτη φορά το σύμβολο « $\int$ » θεωρείται πλέον ως όριο αθροίσματος και παύει να θεωρείται ως άθροισμα, όπως το είχε θεωρήσει ο Leibniz (Γιαννακούλιας, 2007).

Έχοντας ορίσει λοιπόν το ολοκλήρωμα ως όριο αθροισμάτων, ο Cauchy μπορούσε εύκολα πια να αποδείξει το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα, ότι δηλαδή $\int_{x_0}^{X} f(t)dt = (X - x_0)\cdot f\left[x_0 + \theta(X - x_0)\right]$, όπου $0 \le \theta \le 1$, όπως επίσης και την προσθετική ιδιότητα για την ολοκλήρωση σε διαδοχικά διαστήματα .Μετά απέδειξε εύκολα το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού: *Εάν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x_0, X]$, $x \in [x_0, X]$ και εάν $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$, τότε $F'(x) = f(x)$.*

Η απόδειξη έγινε με τον εξής τρόπο:

$F(x+\beta)-F(x) = \int_{x_0}^{x+\beta} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\beta} f(x)dx = (x+\beta-x)f(x+\theta\beta) = \beta f(x+\theta\beta)$ για κάποιο $\theta \in [0,1]$, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Τότε $\frac{F(x+\beta)-F(x)}{\beta} = f(x+\theta\beta)$, και εφόσον η f είναι συνεχής $\lim_{\beta\to 0}\frac{F(x+\beta)-F(x)}{\beta} = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ (Kline, 1972).

Αυτή ήταν η πρώτη απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού πάνω σε αυστηρή βάση, δίχως να βασίζεται στη διαισθητική έννοια του εμβαδού. Στη συνέχεια αφού απέδειξε ότι όλες οι αρχικές συναρτήσεις της f διαφέρουν κατά σταθερά, όρισε το αόριστο ολοκλήρωμα της f:

$\int f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + c$ και στην περίπτωση που η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη, δηλαδή παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο απέδειξε ότι :

$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx$ =f(β)-f(α) (Γιαννακούλιας, 2007).

Μία από τις αρχικές υποθέσεις του Cauchy για την ύπαρξη του ορισμένου ολοκληρώματος ήταν η f(x) να είναι συνεχής στο διάστημα της ολοκλήρωσης. Ο Cauchy όμως κατανόησε ότι ο ορισμός του είχε νόημα ακόμη και αν η συνθήκη αυτή γινόταν ελαστικότερη. Έδειξε λοιπόν ότι εάν η f(x) έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών σε ένα δοθέν διάστημα, το ολοκλήρωμα μπορούσε και πάλι να οριστεί υποδιαιρώντας το διάστημα σε υποδιαστήματα με άκρα τα σημεία ασυνέχειας και ορίζοντας το ολοκλήρωμα με ένα επιπρόσθετο επιχείρημα ορίου. Για παράδειγμα, για μια συνάρτηση f(x) συνεχή στο (α,b], ο Cauchy ορίζει $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$. Με παρόμοιο τρόπο όρισε τα ολοκληρώματα σε μη φραγμένα διαστήματα (Katz, 2013).

Η αυστηρότητα του Cauchy δεν εδραίωσε μόνο τα προγενέστερα συμπεράσματα σε ένα στέρεο θεμέλιο, αλλά έδωσε επίσης ένα πλαίσιο για πάρα πολλά νέα συμπεράσματα, μερικά από τα οποία δεν μπορούσαν καν να διατυπωθούν πριν από το έργο του (Γιαννακούλιας, 2007).


RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL,
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
TOME PREMIER.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.
1823.

Η συμβολή του Dirichlet

Ο Lejeune Dirichlet (1805-1859) υπήρξε ο πρώτος μαθηματικός που προκάλεσε την προσοχή των συγχρόνων του, για να παρακινηθούν και να επιχειρήσουν να επεκτείνουν την έννοια του ολοκληρώματος, ώστε να συμπεριληφθούν στην ευρύτερη κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και αυτές που είχαν άπειρο πλήθος ασυνεχειών.

Εκείνη την εποχή είχαν δημιουργηθεί κάποια ερωτηματικά σχετικά με την εγκυρότητα των συμπερασμάτων της εργασίας του Fourier. Ένα από αυτά αφορούσε τον προσδιορισμό εκείνης της κλάσης των συναρτήσεων f, για τις οποίες το ανάπτυγμα της σειράς Fourier συγκλίνει προς την f(x) για όλα τα x του πεδίου ορισμού τους. Ο Fourier είχε υποστηρίξει, χωρίς να το αποδείξει, ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε συνάρτηση f (Γιαννακούλιας, 2007). Μία σειρά Fourier δεν συγκλίνει πάντοτε στην τιμή μιας συνάρτησης από την οποία προέρχεται. Ο Dirichlet βρήκε συνθήκες που ήταν ικανές να εγγυηθούν τη σύγκλισή της. Ειδικότερα έδειξε ότι εάν η συνάρτηση f(x) που ορίζεται στο [-π,π] είναι συνεχής και φραγμένη σε αυτό εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών και επιπλέον παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διαφορετικές τιμές σε αυτό, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει για κάθε x στο (-π,π) στην οριακή τιμή $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\left[f(x-\varepsilon) + f(x+\varepsilon) \right]$. Η τιμή αυτή ισούται με f(x) αν η f είναι συνεχής στο x. Το αποτέλεσμα ίσχυε και στα άκρα εάν θεωρούσε κανείς, όπως ο Fourier ότι η f(x) ήταν γεωμετρικά περιοδική έξω από το δοθέν διάστημα. Ο Dirichlet επέλεξε τις συνθήκες του έτσι ώστε να μπορεί να ολοκληρώσει γινόμενα της δοθείσας συνάρτησης με τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε ορισμένα διαστήματα. Και ο νέος ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος από τον Cauchy εγγυόταν μόνο την ύπαρξη ολοκληρώματος για συναρτήσεις με πεπερασμένες μόνο κατά το πλήθος ασυνέχειες. Ο Dirichlet αντιλήφθηκε τις δυσκολίες να επεκτείνει το αποτέλεσμά του σε συναρτήσεις με άπειρες κατά το πλήθος ασυνέχειες σε ένα δοθέν διάστημα. Μάλιστα έδωσε ένα παράδειγμα συνάρτησης που δεν ικανοποιούσε τις συνθήκες του (Katz, 2013). Η συνάρτηση ήταν η $D(x) = \begin{cases} c, \alpha\nu x \in Q \\ d \neq c, \alpha\nu x \notin Q \end{cases}$, η οποία έμεινε γνωστή ως συνάρτηση του Dirichlet. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής για καμία τιμή του x. Προηγουμένως είχε δώσει έναν καινούριο ορισμό συνάρτησης: *Αν μία μεταβλητή y σχετίζεται με μία μεταβλητή x έτσι ώστε οποιαδήποτε αριθμητική τιμή και αν πάρει το x, το y παίρνει μία μοναδική τιμή, σύμφωνα με έναν κανόνα, τότε το y είναι μία συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x.* Ο ορισμός αυτός βρίσκεται πολύ κοντά στη σύγχρονη άποψη της αντιστοίχησης ανάμεσα σε δύο σύνολα αριθμών, αλλά οι έννοιες του συνόλου και του πραγματικού αριθμού δεν είχαν ακόμη καθιερωθεί (Boyer, 1997). Μάλιστα για τον Dirichlet δεν ήταν απαραίτητο να διατυπωθεί κάποια αναλυτική έκφραση για τη συνάρτηση (Γιαννακούλιας, 2007).

Με τον ορισμό της συνάρτησης έτσι όπως είχε δοθεί από τον Dirichlet, η συνάρτηση D ήταν αδύνατο να σχεδιαστεί , και αυτό συνετέλεσε ώστε η ανάλυση να προσπεράσει τη γεωμετρία. Το εμβαδόν κάτω από αυτή την καμπύλη είναι απροσδιόριστο, και έτσι από τη στιγμή που οι συντελεστές Fourier λαμβάνονταν με ολοκλήρωση (δηλαδή υπολογίζοντας το εμβαδόν), θα ήταν αδύνατος ο υπολογισμός των όρων της σειράς Fourier της D. Η συνάρτηση D υπήρξε το πρώτο παράδειγμα συνάρτησης, ασυνεχούς σε ένα άπειρο πλήθος σημείων, και έγινε αντικείμενο αντιπαράθεσης σχετικά με την ολοκληρωσιμότητά της (με την έννοια του Cauchy).

Ο βασικός στόχος του Dirichlet, αυτός της επέκτασης του ολοκληρώματος Cauchy σε μία κλάση συναρτήσεων με άπειρο πλήθος ασυνεχειών και κατά συνέπεια η διεύρυνση της κλάσης των συναρτήσεων που είχαν αναπαράσταση με σειρές Fourier δεν επιτεύχθη από τον Dirichlet αλλά από το μαθητή του, το Riemann (Γιαννακούλιας, 2007).

Riemann

Ο Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), δευτερότοκος γιος ενός ιερέα, γεννήθηκε στην πόλη Breselenz στην Γερμανία το 1826. Το μαθηματικό του ταλέντο φάνηκε από νωρίς όταν ως μαθητής γυμνασίου διάβασε με σχετική ευκολία τη θεωρία αριθμών του Legendre και το λογισμό του Euler. Το 1846 εγγράφεται ως φοιτητής της φιλοσοφίας και της θεολογίας στο πανεπιστήμιο του Göttingen, γρήγορα όμως αλλάζει κατεύθυνση και εγγράφεται ως φοιτητής μαθηματικών στο ίδιο πανεπιστήμιο. Την επόμενη χρονιά μεταβαίνει στο φημισμένο πανεπιστήμιο του Βερολίνου όπου δίδασκαν διαπρεπείς μαθηματικοί όπως οι Dirichlet, Steiner και Jacobi. Έχοντας μελετήσει Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απόλλώνιο, Newton και Leibniz, παρακολούθησε τα μαθήματα του Dirichlet, που αφορούσαν τη θεωρία αριθμών, διαφορικές εξισώσεις και το ορισμένο ολοκλήρωμα. Το 1854 ο Riemann υπέβαλλε τρεις διατριβές για υφηγεσία στο πανεπιστήμιο του Gottingen, σχετικά με τις μιγαδικές συναρτήσεις, τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες και τις τριγωνομετρικές σειρές. Η διατριβή που αφορούσε τις τριγωνομετρικές σειρές είχε τίτλο : *"Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (Σχετικά με την αναπαράσταση μιας συνάρτησης με τριγωνομετρικές σειρές).* Σκοπός του Riemann σε αυτήν ήταν η ανακάλυψη ικανών και αναγκαίων συνθηκών , ώστε μία συνάρτηση να αναπαρίσταται από μία σειρά Fourier. Το πρώτο βήμα αφορούσε την επέκταση του ολοκληρώματος Cauchy σε μία ευρύτερη κλάση συναρτήσεων ώστε να διευρυνθεί το σύνολο των συναρτήσεων για τις οποίες γινόταν εφικτός ο ορισμός των συντελεστών Fourier (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Riemann αρχικά θέτει το ερώτημα: «Τι καταλαβαίνει κανείς από το $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$;», στο οποίο αμέσως απαντά ως ακολούθως:

Για υποστηρίξουμε αυτό παίρνουμε μία ακολουθία τιμών $x_1, x_2, x_3 ..., x_n$ *μεταξύ των α και b κατ' αύξουσα σειρά και για συντομία θέτουμε* $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ *καθώς και γνήσια θετικά κλάσματα με* ε_i*. Τότε η τιμή του αθροίσματος :*

$S=\delta_1 f(\alpha+\varepsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2)+\delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3)+...+\delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$ *θα εξαρτάται από την επιλογή των διαστημάτων* δ_i *και τις ποσότητες* ε_i. *Αν αυτό έχει την ιδιότητα, για κάθε επιλογή των* δ_i *και* ε_i *να τείνει σε ένα σταθερό όριο Α καθώς τα* δ_i *γίνονται απείρως μικρά, τότε αυτή η τιμή ονομάζεται* $\int_\alpha^b f(x)dx$. *Αν δεν έχει αυτή την ιδιότητα τότε το* $\int_\alpha^b f(x)dx$ *είναι άνευ νοήματος.*

Έτσι ο Riemann επιλέγει ένα αυθαίρετο σημείο $\overline{x_i}=x_{i-1}+\varepsilon_i\delta_i$ στο ι-στό υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$ της διαμέρισής του, i=1,2,…,n και ορίζει το ολοκλήρωμα ως:

$$\int_\alpha^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})(x_i-x_{i-1}) \qquad (1),$$

όπου το δ υποδηλώνει το μέγιστο των μηκών δ_i των υποδιαστημάτων της διαμέρισης [α,b]. Αυτή είναι μία άμεση γενίκευση του ορισμού του Cauchy,

$$\int_\alpha^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1}).$$

Ο Riemann έχει απλώς αντικαταστήσει το αρχικό σημείο x_{i-1} του Cauchy με ένα αυθαίρετο σημείο $\overline{x_i}$ του $[x_{i-1},x_i]$, και ισχυρίζεται (αν υπάρχει το ολοκλήρωμα) ότι τα προσεγγιστικά αθροίσματα τα οποία σχετίζονται με αυτόν τον τρόπο με μία διαμέριση προσεγγίζουν μία σταθερή τιμή (το ολοκλήρωμα) καθώς η νόρμα δ πλησιάζει το μηδέν, ανεξάρτητα από την επιλογή των σημείων $\overline{x_i}$.

Στη συνέχεια λέει: *Ας προσδιορίσουμε την έκταση της ισχύος αυτής της έννοιας και ας ρωτήσουμε: Σε ποιες περιπτώσεις είναι ολοκληρώσιμη μία συνάρτηση και σε ποιες όχι;»* (Riemann, 1892). Ξεκινώντας με μία φραγμένη συνάρτηση f και μία διαμέριση P του [α,b], θεωρεί την ολική ταλάντωση D(P)= $D_1\delta_1+D_2\delta_2+...+D_n\delta_n$ της f(x) σε σχέση με την P, όπου $\delta_i=x_i-x_{i-1}$ και το D_i εκφράζει τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και μικρότερης τιμής της f(x)στο i-στό υποδιάστημα $[x_{i-1},x_i]$. Παραβλέποντας την εξέταση της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, την δέχεται και θεωρεί ότι το ολοκλήρωμα (1) υπάρχει αν και μόνο αν $D(P)\to 0$ καθώς η νόρμα $\delta\to 0$,

$$\lim_{\delta\to 0}(D_1\delta_1+D_2\delta_2+...+D_n\delta_n)=0. \qquad (2)$$

Στη συνέχεια ο Riemann ορίζει $\Delta=\Delta(d)$ τη μέγιστη τιμή της ολικής ταλάντωσης D(P) για όλες τις διαμερίσεις P με νόρμα $\delta\le d$. Τότε η $\Delta(d)$ είναι προφανώς μία φθίνουσα συνάρτηση του d, και η είναι ολοκληρώσιμη στο [α,b]αν και μόνο αν $\lim_{d\to 0}\Delta(d)=0$.Δοθέντος σ>0 και μίας διαμέρισης P συμβολίζει με s=S(σ,P) το άθροισμα των μηκών δ_i αυτών των υποδιαστημάτων της P για τα οποία η ταλάντωση D_i είναι μεγαλύτερη του σ. Και τώρα δίνει την ακόλουθη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ολοκληρώματος μια φραγμένης συνάρτησης:

Αν η f(x) είναι φραγμένη για $x\in$ *[α,b], τότε το* $\int_\alpha^b f(x)dx$ *υπάρχει, αν και μόνο αν δοθέντος σ>0, προκύπτει ότι η s(σ,P) πλησιάζει το μηδέν καθώς η νόρμα της διαμέρισης P πλησιάζει το μηδέν.*

Δηλαδή δοθέντος σ>0 και ε>0 , υπάρχει d>0 έτσι ώστε για κάθε διαμέριση P με νόρμα δ<d , το άθροισμα s των μηκών αυτών των υποδιαστημάτων της P , στα οποία η ταλάντωση της f είναι μεγαλύτερη του σ, είναι μικρότερο του ε.

Για να δούμε ότι αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία για την ολοκληρωσιμότητα της f παρατηρούμε ότι

$\sigma s< D_1\delta_1+D_2\delta_2+...+D_n\delta_n\le\Delta(d)$ αν δ<d, γιατί $D_i>\sigma$ στα υποδιαστήματα που έχουν συνολικό μήκος s. Γι αυτό s(σ,P)<Δ(d)/σ, το οποίο προσεγγίζει το μηδέν καθώς $d\to 0$, με το σ σταθερό, υποθέτοντας ότι το $\int_\alpha^b f(x)dx$ υπάρχει.

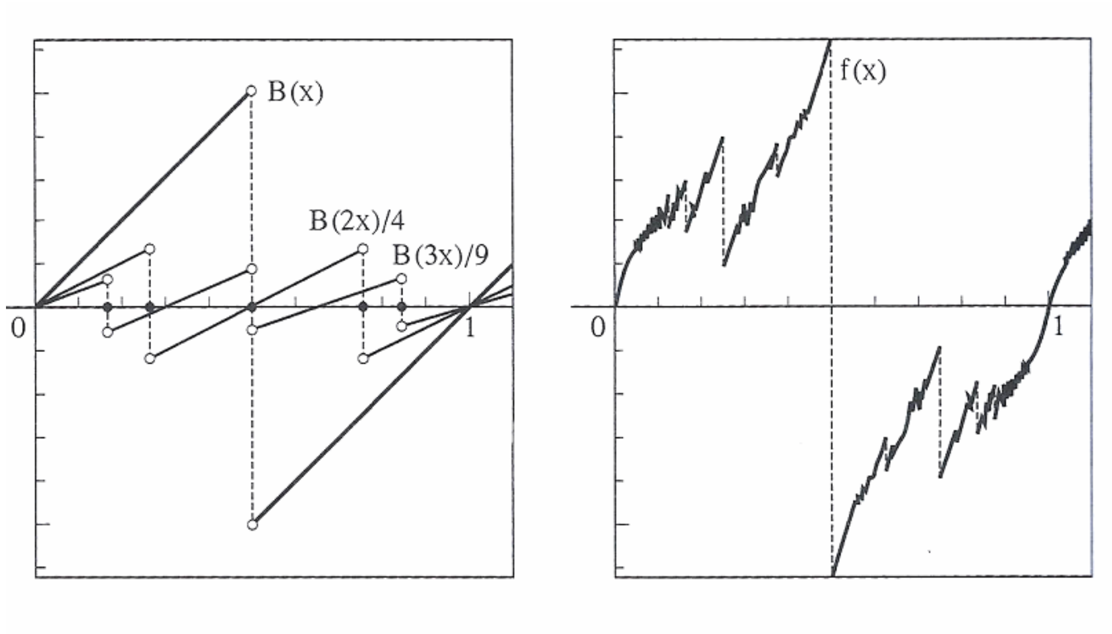
Για να δούμε γιατί η παραπάνω συνθήκη είναι ικανή για την ολοκληρωσιμότητα, έστω ότι δίνονται σ>0, και ε>0, και διαλέγουμε d>0 όπως παραπάνω.Αν η νόρμα της διαμέρισης P είναι μικρότερη του d, τότε αυτά τα υποδιαστήματα στα οποία η ταλάντωση της f(x) είναι μεγαλύτερη του σ, συνεισφέρουν στην D(P) ένα ποσοστό λιγότερο από την D_ε (γιατί τα μήκη τους δίνουν άθροισμα s<ε), όπου D είναι η ταλάντωση της f(x) στο [α,b]. Τα υπόλοιπα υποδιαστήματα συνεισφέρουν στην D(P) ένα ποσό το πολύ σ(b-α). Έτσι D(P)<Dε+σ(b-α),

οπότε η D(P) μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε παίρνοντας το ε και το σ αρκούντως μικρά. Έτσι η συνθήκη (2) ικανοποιείται, άρα το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ υπάρχει.

Το θεώρημα του Riemann υποδηλώνει ότι το $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ υπάρχει αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.στο [α,b]. Σε αυτή την περίπτωση, δοθέντος σ>0, υπάρχει d>0 τέτοιο ώστε η ταλάντωση της f(x) να είναι μικρότερη του σ σε κάθε υποδιάστημα με μήκος μικρότερο του d. Γι αυτό s(σ,P)=0 αν η νόρμα της διαμέρισης P είναι μικρότερη του d (Edwards, 1979).

Το παραπάνω κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann επέτρεψε να ανήκουν στην κλάση των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων κάποιες συναρτήσεις που είναι «πολύ ασυνεχείς». Το 1854 για να αποδείξει τις δυνατότητες που έκρυβε η δική του θεωρία ολοκλήρωσης πρότεινε το ακόλουθο παράδειγμα συνάρτησης που ενώ είναι ασυνεχής σε κάθε διάστημα, εν τούτοις είναι ολοκληρώσιμη:

$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B(kx)}{k^2}$, όπου B(x)=$\begin{cases} x-[x], \alpha\nu x \neq \frac{k}{2} \\ 0, \alpha\nu x = \frac{k}{2} \end{cases}$, και [x] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x.



Για $x=\frac{p}{2n}$, όπου p ακέραιος , πρώτος προς το 2n, η f(x) είναι ασυνεχής και παρουσιάζει άλμα με τιμή ίση με $\frac{p^2}{8n^2}$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις η f είναι συνεχής. Η f είναι ολοκληρώσιμη και η $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι συνεχής σε κάθε x του πεδίου ορισμού της , αλλά δεν παραγωγίζεται στα σημεία ασυνέχειας της f, που είναι άπειρα το πλήθος σε κάθε διάστημα, οσοδήποτε μικρό (Hairer-Wanner, 2000).

Ο ορισμός του Riemann για το ολοκλήρωμα, ήταν ο πιο γενικός που θα μπορούσε να βασιστεί άμεσα στην αυθεντική επινόηση του Cauchy για τα προσεγγιστικά αθροίσματα που σχετίζονται με διαμερίσεις του διαστήματος ολοκλήρωσης σε υποδιαστήματα. Παρόλα αυτά τις τελευταίες τρεις δεκαετίες του δέκατου ένατου αιώνα, αυτός ο ορισμός αναδιατυπώθηκε με διάφορους τρόπους, οι οποίοι εξηγούσαν καλύτερα την έννοια του ολοκληρώματος και άνοιξαν το δρόμο για σημαντικές πρόσθετες γενικεύσεις στις αρχές του εικοστού αιώνα.

Στα μέσα του 1870 διάφοροι συγγραφείς ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο εισήγαγαν τα ονομαζόμενα άνω και κάτω αθροίσματα Riemann για τη φραγμένη συνάρτηση f στο διάστημα [α,b],

$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})$ και $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})$, όπου P είναι μία διαμέριση του [α,b] σε n υποδιαστήματα, δηλ. $P=\{\alpha=t_0<t_1<...<t_n=b\}$ και $M_i=\sup\{f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ και $m_i=\inf\{ f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$. Σήμερα αυτά τα αθροίσματα συνήθως καλούνται αθροίσματα Darboux (Edwards, 1979).

<u>Λήμμα</u>

Αν P΄ είναι μία λεπτότερη διαμέριση της P (δηλαδή κάθε σημείο της P ανήκει στην P΄, άρα $P \subset P'$), τότε

$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P)$

<u>Απόδειξη</u>

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει καθώς

$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})=U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P της f.

Για την απόδειξη της πρώτης ανισότητας αρκεί να θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου η P΄ περιέχει ακριβώς ένα σημείο επιπλέον της P. Η γενική περίπτωση προκύπτει από την ειδική με πεπερασμένη επαγωγή (στα σημεία της P΄ που δεν ανήκουν στην P). Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $L(f,P) \leq L(f,P')$ στην περίπτωση όπου $P'=P \cup \{t\}$, με $t \notin P$.

Έστω $P=\{\alpha=t_0<t_1<...<t_n=b\}$. Υπάρχει μοναδικός δείκτης $i \leq k \leq n$, ώστε $t_{k-1}<t<t_k$ και $P'=\{\alpha=t_0<t_1<...<t_{k-1}<t<t_k<...<t_n=b\}$.

Θέτουμε $m'=\inf\{f(x): t_{k-1} \leq x \leq t\}$ και $m''=\inf\{f(x);\ t \leq x \leq t_k\}$.

Έχουμε $m_k(f) \leq m'$ και $m_k(f) \leq m''$, και άρα

$L(f,P')-L(f,P)= m'(t-t_{k-1})+m''(t_k-t)-m_k(f)(t_k-t_{k-1})=$

$$=(m'-m_k(f))(t-t_{k-1})+(m''-m_k(f))(t_k-t)\geq 0.$$

Η απόδειξη της τρίτης ανισότητας είναι ανάλογη της πρώτης ανισότητας (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι το άνω και κάτω άθροισμα U(f,P) και L(f,P) προσεγγίζουν τα όρια U και L αντίστοιχα, καθώς η νόρμα δ της διαμέρισης P πλησιάζει το μηδέν , ανεξάρτητα από το αν η φραγμένη συνάρτηση f είναι ή όχι ολοκληρώσιμη.

Το 1880 ο Vito Volterra (1860-1940) εισήγαγε τους όρους «άνω ολοκλήρωμα» και «κάτω ολοκλήρωμα» για το U και το L, μαζί με τον περιγραφικό συμβολισμό:

$U=\int_{\alpha}^{-b} f(x)dx$ και $L=\int_{-\alpha}^{b} f(x)dx$

και ο Giuseppe Peano (1858-1932) παρατήρησε ότι αυτά τα άνω και κάτω ολοκληρώματα θα μπορούσαν εύκολα να οριστούν ως το μεγαλύτερο κάτω και το μικρότερο άνω φράγμα για το άνω και κάτω άθροισμα Riemann, αντίστοιχα, για όλες τις διαμερίσεις P του διαστήματος [α,b],

$\int_{\alpha}^{-b} f(x)dx = \inf_{P} U(f,P)$ και $\int_{-\alpha}^{b} f(x)dx = \sup_{P} L(f,P)$.

Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το άνω και το κάτω ολοκλήρωμα είναι ίσα, δηλαδή $\int_{\alpha}^{-b} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{b} f(x)dx$ (Edwards, 1979).

Ο κοινός αριθμός $\int_{\alpha}^{-b} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{b} f(x)dx$ είναι το ολοκλήρωμα (Riemann) της f στο [α,b] και συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$.

Από το δέκατο έβδομο αιώνα η έννοια του ολοκληρώματος είχε πάντα ως κίνητρο την έννοια του εμβαδού. Ιδιαίτερα αν το O_f δηλώνει το σύνολο των τεταγμένων μιας μη αρνητικής συνάρτησης f στο διάστημα- το σύνολο όλων των σημείων (x,y), με $\alpha \le x \le b$ και $0 \le y \le f(x)$ – πίστευαν ότι η τιμή του ολοκληρώματος έπρεπε να είναι η περιοχή $\alpha(O_f)$. Ωστόσο πριν από τα τέλη του 19ου αιώνα ήταν τελείως διαισθητική και δεν βασιζόταν σε κανέναν αυστηρό ορισμό. Ο πρώτος επίσημος μαθηματικός ορισμός του εμβαδού δόθηκε από τον Peano σε ένα βιβλίο που εκδόθηκε το 1887. Ξεκινώντας με τον Εύδοξο και τη μέθοδο της εξάντλησης ήταν πάντα προφανές ότι το εμβαδόν ενός επίπεδου συνόλου S, είναι το άνω φράγμα των εμβαδών όλων των πολυγώνων που περιέχονται στο S, και το και το κάτω φράγμα όλων των πολυγώνων που περιέχουν το S (φυσικά το εμβαδόν του πολυγώνου λαμβάνεται με την ανάλυσή του σε τρίγωνα). Για τον Peano αυτή η αρχαία ιδέα ήταν το σημείο εκκίνησης για τον ορισμό του εμβαδού. Όρισε το *εσωτερικό εμβαδόν* $\alpha_i(S)$ του S ως το ελάχιστο άνω φράγμα των εμβαδών όλων των πολυγώνων που περιέχονται στο S, και το *εξωτερικό εμβαδόν* $\alpha_0(S)$, ως το μέγιστο κάτω φράγμα των εμβαδών των πολυγώνων που περιέχουν το S. Είναι προφανές ότι $\alpha_i(S) \leq \alpha_0(S)$, αλλά μπορεί να μην ισχύει η ισότητα. Για παράδειγμα αν S είναι το σύνολο όλων των σημείων (x,y) στο μοναδιαίο τετράγωνο $0 \leq x,y \leq 1$ έτσι ώστε οι αριθμοί x και y να είναι και οι δύο άρρητοι , τότε $\alpha_0(S)=1$, το εμβαδόν του ορθογωνίου, ενώ $\alpha_i(S)=0$ καθώς μόνο εκφυλισμένα πολύγωνα περιέχονται στο S (Edwards, 1979).

Με το ορισμό του Peano για το εσωτερικό και εξωτερικό εμβαδόν ήταν εύκολο να αποδειχθεί ότι:

$\int_{\underline{\alpha}}^{b} f(x)dx = \alpha_i(O_f)$ και $\int_{\alpha}^{\bar{b}} f(x)dx = \alpha_0(O_f)$ (I), για κάθε μη αρνητική συνάρτηση f στο [α,b]. Στην περίπτωση όπου $\alpha_i(S)=\alpha_0(S)$, η κοινή τιμή είναι το εμβαδόν α(S) του S. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε η (I) δίνει:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \alpha(O_f).$$

Σε αυτό το σημείο η έννοια του ολοκληρώματος είχε κάνει πλήρη κύκλο, επιστρέφοντας στο αρχικό της κίνητρο (Edwards, 1979).

Το τελευταίο ουσιαστικό βήμα για την αποκατάσταση του κυρίαρχου ρόλου της ολοκλήρωσης στην Πραγματική και γενικότερα στη Μαθηματική Ανάλυση (που όπως είδαμε χρειάστηκε όλο τον 19^{ο} αιώνα και μέρος του 20^{ου}) έγινε από το γάλλο Henri Lebesque (1857-1941) που αποτελεί τη σύγχρονη θεωρία ολοκλήρωσης (κατά Lebesque) και μέτρου.

Ξένη Βιβλιογραφία

Andersen K., (1985). Cavalieri's method of Indivisibles, Archive for History of Exact sciences, 31.

Apostol Tom M., (1962). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, τόμος Ι, εκδόσεις Ατλαντίς.

Baron, M. E., (1969). The Origins of the Infinitesimal Calculus, Oxford, Pergamon Press.

Bell E.T., (2000). Οι μαθηματικοί, τόμος Ι, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Bourbaki N., (1976). Eléments de Mathématiques. Fonctions d'une variable réelle, Paris Hermann.

Boyer Carl B.- Merzbach Uta C., (1997). Ιστορία των Μαθηματικών, (2η έκδοση), απόδοση στα ελληνικά: Κουσουλάκου Β., επιστημονική επιμέλεια: Πνευματικός Γ., Εκδόσεις Γ.Α.Πνευματικού., Αθήνα.

Boyer, C.B., (1959) The History of the Calculus and its Conceptual Development,New York, Dover Publications.

Cajori F., (1991). History of mathematics, 5d, ed, Chelsea, New York.

Calinger R, (1999). A contextual history of mathematics, prentice Hall, London.

Clawson,C, (2005). Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών, απόδοση στα ελληνικά: Αλεξοπούλου Ε., επιστημονική επιμέλεια: Φραντζής Χ., εκδόσεις Κέδρος.

Davis, P.J. & Hersch, R., (1981). Η Μαθηματική Εμπειρία. εκδόσεις Τροχαλία.

Edwards C.H., (1979). The Historical Development of the Calculus, SpringerVerlag, New York.

Eves H., (1997). Foundations and funtamental concepts of Mathematics. Dover.

Eves H., (1989). Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, τόμος Ι, απόδοση στα ελληνικά: Κωνσταντινίδης Μ.-Λιλής Ν., εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

Gillings,R.J., (1982). Mathematics in the time of Pharaohs, New York, Dover Publications.

Hairer E.- Wanner G., (2000). Analysis by its history ,Springer, New York.

Heath, T.L., (1981).A History of Greek Mathematics, New York, Dover Publications.

Katz, J.V., (2013). Ιστορία των μαθηματικών, Απόδοση στα ελληνικά : Χατζηκυριάκου Κ., επιστημονική επιμέλεια: Χριστιανίδης Γ., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Kline M., (1972). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, Fair Lawn, Nj.

Knorr,W.R. (1975).The Evolution of the Euclidean Elements ,Dordrecht and Boston: D.Reidel.

Kostler A.,(1968). The Sleepwalker, New York, Macmillan.

Leibniz G.W., The early mathematical manuscripts, ή Mathematische Schriften, C.I.Gerhard, Ascher-Schmidt, Berlin-Halle, 1849-1863.

Loria, G., (1971). Ιστορία των μαθηματικών , 4 τόμοι, απόδοση στα ελληνικά: Κωβαίος Κ.Μ., Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, εκδόσεις Παπαζήση,Αθήνα.

Neugebauer,O.,(2003). Οι Θετικές Επιστήμες στην αρχαιότητα, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.

Peet,T.E., (1931). 'Mathematics in Ancient Egypt', Bulletin of the John Rylans Library,Vol.15,No.2, Manchester.

Phillips E.,(1984). An Introduction to Analysis and Integration theory, Dover Publication, New York

Riemann B., (1892). Uber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Mathematische Werke. Leibzig:Teubner

Shapiro, S. (2000). Thinking about mathematics. Oxford University press.

Struik, D. J., (1993). Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών,(2η έκδοση), απόδοση στα ελληνικά:Φρεντίνου- Νικολακοπούλου Α., εκδόσεις Δαίδαλος-Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.

Turnbull H. W.,(1932). James Gregory: A study in the early history of interpolation, Proc Edinburgh Math Soc 3(2), 151-178.

Van Der Waerden B.L.,(2000). Η αφύπνιση της επιστήμης, απόδοση στα ελληνικά: Χριστιανίδης Γ., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Vilenkin N., (1997). Αναζητώντας το άπειρο, απόδοση στα ελληνικά: Μουζακίτης Α.-Μπούκης Γ., εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα.

Westfall R., (1980). Never at Rest, Cambridge University Press, p.191

Wilder, R. (1986). Η εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, απόδοση στα ελληνικά: Ψυχογιός Δ., εκδόσεις Κουτσουμπός Π., Αθήνα.

Wren F.L.- Garrett J.A., (1935). The Development of the fundamental concepts of Infinitesimal analysis, Amer. Math. Monthly 5.

Youschkevitch A.P. (1976). Les mathématiques arabes (VIIe-XVe siecles) Paris Vrin 1976.

Ελληνική Βιβλιογραφία

Γιαννακούλιας Ε., (2007). Απειροστικός Λογισμός, Η ιστορική εξέλιξη από τον 5ο π.Χ έως και τον 19ο αιώνα, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Εξαρχάκος Θ.Ε., (1996). «Βαβυλωνιακά Μαθηματικά: Ανακάλυψη, αποκρυπτογράφηση, χρονολόγηση και τρόποι ερμηνείας των βαβυλωνιακών μαθηματικών κειμένων.» 13ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας.

Εξαρχάκος Θ.Ε., (1993). Εισαγωγή στα Μαθηματικά, τόμος Β, Αθήνα

Εξαρχάκος Ι., (1994). Το έργο του Αρχιμήδη και η συμβολή του στην εξέλιξη των Μαθηματικών, της Μηχανικής και της Τεχνολογίας, Διδακτορική Διατριβή, ΕΚΠΑ.,σ.58

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., (1999). Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Νεγρεπόντης Σ., (2011). Σημειώσεις του μαθήματος Δ14 Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών - Στοιχεία Ευκλείδη.

Φαρμάκη Β., (2010). Σημειώσεις του μαθήματος Δ26 Μαθηματική Ανάλυση

Φίλη Χ., (2010). Οι Αρχαιοελληνικές Καταβολές των Σύγχρονων Μαθηματικών, εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα..

Χριστιανίδης Γ., (2003). Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Χριστιανίδης Γ., (2007). Συνέντευξη στο περιοδικό GEO.

Σταμάτης Ε. Σ., (1970-1974) Αρχιμήδους Άπαντα, 3 τόμοι, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

Σταμάτης Ε. Σ., (1972). Επιστημονικαί Εργασίαι και Άρθρα, 2 τόμοι, Αθήνα .