Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Βασιλική Φαρμάκη (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αναπλ. Καθηγήτρια	....
2) Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αναπλ. Καθηγητής	....
3) Νικόλαος Παπαναστασίου	Επίκ. Καθηγητής	....

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Ν. ΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΣΤΗ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΥΔΟΞΟΥ-ΑΡΧΙΜΗΔΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στο Νίκο.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και ιδιαίτερα την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κ. **Φαρμάκη Βασιλική** για την βοήθειά της στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου μαθηματικούς κ. **Καμπούκο Κυριάκο** και κ. **Πάλλα Παρασκευά** για την ουσιαστική τους συμπαράσταση.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κύριο θέμα που θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία είναι η μέθοδος της εξάντλησης και η εφαρμογή της από τον Εύδοξο και τον Αρχιμήδη.
Με τη μέθοδο της εξάντλησης επιτυγχάνεται η εύρεση, με αυστηρό μαθηματικό τρόπο , εμβαδών και όγκων μέσω αλλεπάλληλων προσεγγίσεων.
Εμβαδά γνώριζαν να υπολογίζουν οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι.
Συγκεκριμένα οι Αιγύπτιοι γνώριζαν να υπολογίζουν το εμβαδόν του ορθογωνίου ,του τριγώνου και του ισοσκελούς τραπεζίου . Γνώριζαν επίσης το εμβαδόν του κύκλου με βάση έναν κανόνα που αντιστοιχεί στον τύπο

$\mathrm{E} = \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right)d\right]^2$,όπου d η διάμετρος.Ο τύπος αυτός οδηγεί στην

προσεγγιστική τιμή του π= $\frac{256}{81} = 3.16$ που είναι μια ικανοποιητική

προσέγγιση.
Οι Βαβυλώνιοι είχαν εμπειρικές μεθόδους για τον ορθό υπολογισμό εμβαδών τριγώνων και τραπεζοειδών και όγκων κυλίνδρων και πρισμάτων και γνώριζαν επίσης εμπειρικά το Πυθαγόρειο θεώρημα.Το πιο αξιόλογο όμως επίτευγμα των Βαβυλωνίων ήταν η δημιουργία της άλγεβρας και η ανακάλυψη της τεχνικής για τη λύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Θεωρείται ότι σε γενικές γραμμές οι Βαβυλώνιοι προχώρησαν περισσότερο στα Μαθηματικά από τους Αιγυπτίους. Ωστόσο ,ούτε οι Βαβυλώνιοι, ούτε οι Αιγύπτιοι, έφτασαν στη μαθηματική αφαίρεση, στην αυστηρή διατύπωση υποθέσεων και συμπερασμάτων , στην αποδεικτική διαδικασία. Δεν φαίνεται πουθενά ο σαφής διαχωρισμός του προσεγγιστικού από τον ακριβή υπολογισμό.Όλα αυτά είναι δημιουργήματα του αρχαίου Ελληνικού πολιτισμού. Οι Αρχαίοι Έλληνες μέσα από την γεωμετρία επινόησαν και έφτασαν σε υψηλή τελειότητα τη μέθοδο της εξάντλησης που είναι ο πρόδρομος και στενός συγγενής του ολοκληρωτικού λογισμού (Σ.Νεγρεπόντης –Σ.Γιωτόπουλος– Ε.Γιαννακούλιας,[6]).
Δύο σημαντικά ονόματα συνδέονται με την προϊστορία αυτής της μεθόδου.
Ο μεγάλος Γεωμέτρης Ιπποκράτης ο Χίος (450πχ) και ο μεγάλος φιλόσοφος και ατομιστής Δημόκριτος (460-370πχ).

Ο Συμπλίκιος στα σχόλια του στα «Φυσικά» του Αριστοτέλη [9,60,22-60,27] αναφέρει :«Ὁ μέντοι Εὔδημος ἐν τῇ Γεωμετρικῇ ἱστορίᾳ οὐκ ἐπὶ
τετραγωνικῆς πλευρᾶς δεῖξαί φησι τὸν Ἱπποκράτην τὸν
τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμόν, ἀλλὰ καθόλου, ὡς ἄν τις εἴποι.
εἰ γὰρ πᾶς μηνίσκος τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν ἢ ἴσην ἔχει ἡμικυκλίου
ἢ μείζονα ἢ ἐλάττονα, τετραγωνίζει δ ὁ Ἱπποκράτηςκαὶ τὸν ἴσην
ἡμικυκλίου ἔχοντα καὶ τὸν μείζονα καὶ τὸν ἐλάττονα, καθόλου
ἂν εἴη δεδειχὼς ὡς δοκεῖ. ἐκθήσομαι δ τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου
κατὰ λέξιν λεγόμενα ὀλίγα τινὰ προστιθεὶς <εἰς> σαφήνειαν
ἀπὸ τῆς τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων ἀναμνήσεως διὰ τὸν ὑπομνηματικὸν
τρόπον τοῦ Εὐδήμου κατὰ τὸ ἀρχα□κὸν ἔθος συντόμους ἐκθεμένου
τὰς ἀποδόσεις. λέγει δ ὧδε ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῆς Γεωμετρικῆς ἱστορίας».
Στο κείμενο αυτό ο Συμπλίκιος εξηγεί τις προσπάθειες τετραγωνισμού των μηνίσκων που έκανε ο Ιπποκράτης εκθέτοντας κατά λέξη όσα έγραψε ο Εύδημος προσθέτοντας κάποια στοιχεία, για να τα διασαφηνίσει και να τα συνδέσει με τις προτάσεις των Στοιχείων, επειδή ο Εύδημος, όπως συνήθιζαν οι Αρχαίοι, εξέθετε συνοπτικά τα επιχειρήματά του.

Στο εδάφιο [9,61,1-61,10] ο Συμπλίκιος λέει ότι πρώτος ο Ιπποκράτης ο Χίος ανέφερε και απέδειξε ότι τα τετράγωνα των διαμέτρων έχουν ίδιο λόγο όπως οι κύκλοι.«Καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δ τετραγωνισμοὶ δόξαντες ε ναι τῶν
οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν
κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφησάν τε πρώτου καὶ κατὰ τρόπον
ἔδοξαν ἀποδοθῆναι· διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθω-
μεν. ἀρχὴν μ ν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς
αὐτοὺς χρησίμων, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν
κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει.
(τοῦτο δ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν
λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις)" ὅπερ Εὐκλείδης δεύτερον
τέθεικεν ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν Στοιχείων βιβλίῳ, τὴν πρότασιν εἰπὼν οὕτως
"οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα" ὡς
γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν, οὕτως καὶ τὰ ὅμοια τμήματα. ὅμοια».
Η απόδειξη ενός τέτοιου αποτελέσματος απαιτεί κάποια διαδικασία εξάντλησης. Σήμερα δεν γνωρίζουμε τίποτα που να μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος της εξάντλησης είχε αναπτυχθεί πλήρως πριν τον Εύδοξο.

Για τον Δημόκριτο ο Αρχιμήδης στον πρόλογο της εργασίας του «Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην Έφοδος » [84,4- 84,10] αναφέρει :

<... Διόπερ καὶ τῶν θεωρη>μάτων τούτων, ὧν Εὔδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος,	Γι' αυτό τον λόγο από τα σχετικά με τον κώνο και την πυραμίδα θεωρήματα ,την απόδειξη των οποίων πρώτος βρήκε ο Εύδοξος

ὅτι τρίτον μέρος ὁ μ ν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσιν ἐχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀπόφασιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηναμένῳ.	για εκείνα τα οποία δηλώνουν ότι ο κώνος ισούται με το 1/3 του κυλίνδρου , και η πυραμίδα του πρίσματος με τα οποία έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος σημαντική μερίδα πρέπει να αποδοθεί στον Δημόκριτο που ήταν ο πρώτος ο οποίος διατύπωσε τη σχετική με το εν λόγω σχήμα εκφώνηση έστω και χωρίς απόδειξη.

O van der Waerden[13] αναφέρει : Κατά τον Cavalieri μπορούμε να πεισθούμε ότι δύο πυραμίδες (ή κώνοι) με ίσες βάσεις και ύψη έχουν ίσους όγκους , αν τις τεμαχίσουμε σε φέτες με επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις και θεωρήσουμε αυτές τις φέτες, κατά προσέγγιση ως πρίσματα (ή κυλίνδρους). Μπορεί ο Δημόκριτος να έκανε κάτι τέτοιο. Έτσι θα μπορούσε να εξηγηθεί και η δήλωση του Πλουτάρχου , σύμφωνα με την οποία ο Δημόκριτος είχε θέσει το ακόλουθο ερώτημα:«αν οι κυκλικές τομές , οι παράλληλες προς τη βάση , που χαράσσονται σε έναν κώνο είναι ίσες ,τότε πώς είναι δυνατόν ο κώνος να διαφέρει από έναν κύλινδρο; Και εάν γίνονται μικρότερες όσο προχωρούμε προς την κορυφή , τότε η καμπύλη επιφάνεια , η οποία πρέπει να είναι λεία δεν είναι βαθμοειδής ; »
Αν λάβουμε υπόψη ότι ο Αρχιμήδης, σ' όλο του το έργο που είναι γνωστό σε μας, από τους προγενέστερους μαθηματικούς αναφέρεται με τρόπο που δείχνει υψηλή εκτίμηση στο έργο τους μόνο στον Εύδοξο και στον Δημόκριτο δεν μπορούμε παρά να δεχτούμε ότι η μαθηματική συμβολή του Δημόκριτου είναι σημαντική.
Τον $4^{ο}$ αιώνα π.χ.θα δεσπόσει η μορφή του Ευδόξου,του δημιουργού της θεωρίας λόγων - με την οποία ξεπεράστηκε η κρίση που είχε δημιουργήσει η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου του τετραγώνου - και της μεθόδου της εξάντλησης που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων .
Τον $3^{ο}$ π.χ. αιώνα τα πρόσωπα που θ' αφήσουν ανεξίτηλα την σφραγίδα τους είναι ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης .Ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του θα κάνει καταγραφή και απολογισμό όλων των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, και η επαγωγική μέθοδος περιγραφής του θα γίνει πρότυπο για τη δημιουργία της μαθηματικής θεωρίας .Τέλος ο Αρχιμήδης θα επεξεργαστεί μεθόδους για την εύρεση εμβαδών , όγκων και κέντρου βάρους ,χρησιμοποιώντας και παράλληλα βελτιώνοντας την μέθοδο της εξάντλησης στην αυστηρή απόδειξη των αποτελεσμάτων του .Οι μέθοδοί του θ' αποτελέσουν τα θεμέλια του ολοκληρωτικού λογισμού για τη δημιουργία του οποίου χρειάστηκαν να περάσουν είκοσι αιώνες(Γιαννακούλιας Ε.[2]).
Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας θα ξεκινήσουμε με την περιγραφή της ζωής και των φιλοσοφικών απόψεων του Ευδόξου, θα περιγράψουμε πως ανέπτυξε σε μεγάλο βαθμό μια θεωρία αναλογιών που ήταν εφαρμόσιμη σε οποιαδήποτε μεγέθη, θα αναφερθούμε στο Αξίωμα Ευδόξου -Αρχιμήδη και σε βασικές προτάσεις του V βιβλίου που θα χρησιμοποιήσουμε.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε με την αρχή της εξάντλησης ,όπως αυτή διατυπώνεται στην πρόταση X.1 των Στοιχείων του Ευκλείδη, θα κάνουμε μια περιγραφή των προτάσεων του XII βιβλίου και θα ασχοληθούμε με τις αποδείξεις των προτάσεων XII.2 και XII.5.Η απόδειξη στο δωδέκατο βιβλίο στηρίζεται σε δύο βάσεις :στη θεωρία των αναλογιών του πέμπτου βιβλίου και στη μέθοδο της εξάντλησης .
Η μέθοδος της εξάντλησης σε γενικές γραμμές ,και χωρίς αναφορά σε ειδικά τεχνάσματα ,είναι η ακόλουθη: με τα «αθροίσματα Riemann» (που θα ήταν ιστορικά δικαιότερο, όπως γράφει ο Bourbaki, να ονομάζονται αθροίσματα Ευδόξου- Αρχιμήδη) επιτυγχάνονται (άνω και) κάτω φράγματα της ζητούμενης γεωμετρικής ποσότητας (π.χ εμβαδού, όγκου) με τη γεωμετρική κατασκευή μιας γνήσια αύξουσας ακολουθίας β_η εμβαδών ή όγκων εγγεγραμμένων σχημάτων και μιας γνήσια φθίνουσας ακολουθίας α_η αντιστοίχων περιγεγραμμένων γεωμετρικών μεγεθών μεταξύ των οποίων κείται η ζητούμενη γεωμετρική ποσότητα Α ,η οποία επιθυμούμε να αποδείξουμε οτι ισούται με τη γνωστή εκ των προτέρων τιμή Β (Σ.Νεγρεπόντης –Σ.Γιωτόπουλος –Ε.Γιαννακούλιας [6]).

Στο τρίτο κεφάλαιο θ΄ αναφερθούμε εν συντομία στη ζωή και το έργο του πιο μεγάλου μαθηματικού της ελληνιστικής περιόδου-και όλης της αρχαιότητας – του Αρχιμήδη, θα παρουσιάσουμε τις απόψεις μελετητών για το έργο του και θα περιγράψουμε τον τετραγωνισμό της παραβολής (γεωμετρική και ευρετική μέθοδο).

Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα κάνουμε μία γενική περιγραφή της μεθόδου της εξάντλησης , θα αποδείξουμε τον τετραγωνισμό της παραβολής και τον όγκο παραβολοειδούς εκ περιστροφής με την μέθοδο της εξάντλησης, αλλά με σύγχρονη ορολογία και θα δούμε πώς ο Αρχιμήδης παρουσιάζει στην πραγματεία του « Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος » την εύρεση του όγκου του παραβολοειδούς εκ περιστροφής .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΕΥΔΟΞΟΣ-ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΜΕΓΕΘΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις φιλοσοφικές απόψεις του Ευδόξου ,στην ζωή του όπως την περιγράφει ο Διογένης ο Λαέρτιος στο 8^{o} βιβλίο του « Ζωή των Φιλοσόφων» ,θα παραθέσουμε τους πέντε πρώτους ορισμούς της γενικής θεωρίας αναλογιών του V βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη ,θα δούμε τι ίσχυε πριν την εποχή του Ευδόξου, το Αξίωμα Ευδόξου -Αρχιμήδη , καθώς και ορισμένες προτάσεις του V βιβλίου που θα χρησιμεύσουν στις παρακάτω αποδείξεις .

1.ΕΥΔΟΞΟΣ

Καταρχήν, θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε κάποια χαρακτηριστικά της ζωής και των απόψεων του Ευδόξου .
O van der Waerden [13] λέγει:
«Ο Εύδοξος γύρω στο 365 π.χ. επέστρεψε και πάλι στην Αθήνα από την Αίγυπτο μαζί με τους μαθητές του . Την εποχή εκείνη είχε αποκτήσει λαμπρή φήμη. Συζητούσε με τον Πλάτωνα για φιλοσοφικά θέματα , για τις ιδέες και για το υπέρτατο αγαθό. Είχε την άποψη ότι οι ιδέες είναι παρούσες στα αισθητά ,είναι «αναμεμιγμένες» με τα αισθητά , καθορίζοντας έτσι το χαρακτήρα τους. Δίδασκε, επίσης ότι η ηδονή, η απόλαυση, είναι το άριστο αγαθό. Ο Πλάτων, όμως δεν συμφωνούσε με τις απόψεις περί ιδεών του Ευδόξου. Χαρακτηριστικός είναι ο Πλατωνικός διάλογος «Φίληβος »όπου ο van der Waerden ισχυρίζεται ότι ο Πλάτων επικρίνει τις απόψεις του Ευδόξου σχετικά με την ηδονή. Ο ισχυρισμός του Διογένη του Λαέρτιου ότι ο Εύδοξος και ο Πλάτων ήταν εχθροί είναι περίπου βέβαιο ότι είναι υπερβολικός , αλλά το ίδιο ακριβώς ισχύει και με το τον αντίθετο ισχυρισμό του Στράβωνα ,ότι ο Εύδοξος ήταν μεταξύ των «Πλάτωνος εταίρων. Ο Εύδοξος ήταν επίσης πολύ καλός αστρονόμος. Κατασκεύασε ένα εξαιρετικά μεγαλοφυές πλανητικό σύστημα επηρεασμένος από τον Πλάτωνα ο οποίος πρότεινε το πρόβλημα με τις ομαλές κυκλικές κινήσεις που θα εξηγούσαν τις φαινόμενες κινήσεις των πλανητών. Σύμφωνα με αυτό το σύστημα, η σφαιρική γη ήταν ακίνητη στο κέντρο και από το κέντρο αυτό περιστρέφονταν 27 ομόκεντρες σφαίρες.»

Ας δούμε τώρα πως περιγράφει στο 8^{o} βιβλίο με την Ζωή των Φιλοσόφων [86- 91] ο Διογένηs ο Λαέρτιος την ζωή του Ευδόξου :

Εὔδοξος Αἰσχίνου Κνίδιος ἀστρολόγος, γεωμέτρης, ἰατρός, νομοθέτης.οὗτος τὰ μ ν γεωμετρικὰ Ἀρχύτα διήκουσε, τὰ δ' ἰατρικὰ Φιλιστίωνος (Wellmann 3) τοῦ Σικελιώτου, καθὰ Καλλι μαχος ἐν τοῖς Πίναξί (Pfeiffer 429) φησι. Σωτίων δ' ἐν ταῖς Διαδοχαῖς λέγει καὶ Πλάτωνος αὐτὸν ἀκοῦσαι. γενόμενον γὰρ ἐτῶν τριῶν που καὶ εἴκοσι καὶ στενῶς διακείμενον κατὰ κλέος τῶν Σωκρατικῶν εἰς Ἀθήνας ἀπᾶραι σὺν Θεομέδοντι τῷ ἰατρῷ, τρεφόμενον ὑπ' αὐτοῦ· οἱ δέ, καὶ παιδικὰ ὄντα· καταχθέντα δ' εἰς τὸν Πειραιᾶ ὁσημέραι ἀνιέναι Ἀθήναζε καὶ ἀκούσαντα τῶν σοφιστῶν αὐτόθι ὑποστρέφειν. δύο δὴ μῆνας διατρίψαντα οἴκαδ' ἐπανελθεῖν καὶ πρὸς τῶν φίλων ἐρανισθέντα εἰς Αἴγυπτον ἀπᾶραι μετὰ Χρυσίππου τοῦ ἰατροῦ, συστατικὰς φέροντα παρ' Ἀγησιλάου πρὸς Νεκτάναβιν· τὸν δ τοῖς ἱερεῦσιν αὐτὸν συστῆσαι. καὶ τέτταρας μῆνας πρὸς ἐνιαυτῷ διατρίψαντ' αὐτόθι ξυρόμενόν θ' ὑπήνην καὶ ὀφρὺν τὴν Ὀκταετηρίδα κατά τινας συγγράψαι. ἐντεῦθέν τε γενέσθαι ἐν Κυζίκῳ καὶ τῇ Προποντίδι σοφιστεύοντα· λλὰ καὶ παρὰ Μαυσωλὸν ἀφικέσθαι. ἔπειθ' οὕτως ἐπανελθεῖν Ἀθήναζε, πανὺ πολλοὺς περὶ ἑαυτὸν ἔχοντα μαθητάς, ὥς φασί τινες, ὑπ ρ τοῦ Πλάτωνα λυπῆσαι, ὅτι τὴν ἀρχὴν αὐτὸν παρεπέμ-ψατο. τιν ς δέ φασι κα συμπόσιον ἔχοντι τῷ Πλάτωνι αὐτὸν τὴν ἡμικύκλιον κατάκλισιν πολλῶν ὄντων, εἰσηγήσασθαι. φησὶ δ' αὐτὸν Νικόμαχος ὁ Ἀριστοτέλους (Arist. EN 1172b9) τὴν ἡδονὴν λέγειν τὸ ἀγαθόν.	Ο Εύδοξος ήταν γιος του Αισχίνη και καταγόταν από την Κνίδο. Ήταν αστρονόμος, γεωμέτρης νομοθέτης. Δάσκαλό του στη γεωμετρία είχε τον Αρχύτα και στην ιατρική τον Φιλιστίωνα τον Σικελιώτη όπως λέει ο Καλλίμαχος στους'' Πίνακες''. Ο Σωσίων στις ''Διαδοχές'' λέει ότι υπήρξε και μαθητής του Πλάτωνα. Όταν ήταν περίπου 23 χρόνων επειδή ένιωθε περιορισμένος, επηρεασμένος από τη δόξα των Σωκρατικών, αναχώρησε για την Αθήνα μαζί με τον γιατρό Θεομέδοντα, που του εξασφάλιζε τα προς το ζην. Αποβιβάστηκε στον Πειραιά και καθημερινά πήγαινε στην Αθήνα, άκουγε τους σοφιστές και γύριζε πάλι πίσω. Έμεινε εκεί 2 μήνες και στη συνέχεια επέστρεψε στην πατρίδα του. Με την βοήθεια των φίλων του αναχώρησε για την Αίγυπτο μαζί με τον γιατρό Χρύσιππο, έχοντας συστατικές επιστολές από τον Αγησίλαο για τον Νεκτάναβι που τον σύστησε στους ιερείς. Εκεί έμεινε ένα χρόνο ξύρισε τα γένια και συνέγραψε την «Οκταετηρίδα». Από κει πήγε στην Κύζικο και στην Προποντίδα για να διδάξει ως σοφιστής. Πήγε επίσης και στην αυλή του Μαυσώλου. Κατόπιν ξαναγύρισε στην Αθήνα έχοντας πάρα πολλούς μαθητές για να λυπήσει, όπως λένε μερικοί τον Πλάτωνα επειδή από την αρχή δεν του είχε δώσει σημασία. Κάποιοι μάλιστα λένε ότι στην διάρκεια ενός συμποσίου του Πλάτωνα, όπου ήταν πολλοί ο Εύδοξος πρότεινε να βάζουν τα ανάκλιντρα σε ημικύκλιο. Ο Νικόμαχος του Αριστοτέλη λέει πως αυτός θεωρούσε την ηδονή αγαθό.

ἀπεδέχθη δὴ ἐν τῇ πατρίδι μεγαλοτίμως ὥς τό γε περὶ αὐτοῦ ψήφισμα γενόμενον δηλοῖ. ἀλλὰ καὶ παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἐπιφανέστατος ἐγένετο, γράψας τοῖς ἰδίοις πολίταις νόμους, ὥς φησιν Ἕρμιππος ἐν τετάρτῃ Περὶ τῶν ἑπτὰ σοφῶν (FHG iii. 40), καὶ ἀστρολογούμενα καὶ γεωμετρούμενα καὶ ἕτερ' ἄττα ἀξιόλογα.	Στην πατρίδα του τον δέχτηκαν με μεγάλες τιμές όπως φαίνεται από το ψήφισμα που έγινε γι' αυτόν. Αλλά και μεταξύ των Ελλήνων ξεχώρισε, θεσπίζοντας νόμους για τους συμπολίτες του, όπως λέει ο Έρμιππος στο τέταρτο «Περί των εφτά σοφών», και γράφοντας για αστρονομία γεωμετρία και άλλα αξιόλογα.
Ἔσχε δ καὶ θυγατέρας τρεῖς, Ἀκτίδα, Δελφίδα, Φιλτίδα. φησὶ δ' αὐτὸν Ἐρατοσθένης ἐν τοῖς Πρὸς Βάτωνα (FGrH 241 F 22) καὶ Κυνῶν διαλόγους συνθεῖναι· οἱ δέ, γεγραφέναι μ ν Αἰγυπτίους τῇ αὐτῶν φωνῇ, τοῦτον δ μεθερμηνεύσαντα ἐκδοῦναι τοῖς Ἕλλησι. τούτου διήκουσε Χρύσιππος ὁ Ἐρίνεω Κνίδιος τά τε περὶ θεῶν καὶ κόσμου καὶ τῶν μετεωρολογουμένων, τὰ δ' ἰατρικὰ παρὰ Φιλιστίωνος τοῦ Σικελιώτου.	Είχε και τρείς κόρες, την Ακτίδα τη Δελφίδα και τη Φιλτίδα. Ο Ερατοσθένης στα προς Βάτωνα λέει πως είχε συνθέσει και «Κυνών διαλόγους ». Άλλοι λένε πως τούτοι οι διάλογοι είχαν γραφτεί από Αιγύπτιους στη δική τους γλώσσα και πως ο Εύδοξος τους μετέφρασε και τους δημοσιοποίησε στους Έλληνες. Ο Κνίδιος Χρύσιππος του Ερίνεου παρακολούθησε τις ομιλίες του για τους θεούς, το σύμπαν και τα ουράνια φαινόμενα ενώ τα ιατρικά θέματα τα γνώρισε από τον Φιλιστίωνα τον Σικελιώτη.
Κατέλιπε δ καὶ ὑπομνήματα κάλλιστα. τούτου γέγονε παῖς Ἀρισταγόρας, οὗ Χρύσιππος Ἀεθλίου μαθητής,.	Άφησε εξαίρετα υπομνήματα. Είχε και έναν γιο, τον Αρισταγόρα του οποίου γιος ήταν ο Χρύσιππος, μαθητής του Αεθλίου.
Ὁ δ' αὐτός φησι τὸν Κνίδιον Εὔδοξον ἀκμάσαι κατὰ τὴν τρίτην καὶ ἑκατοστὴν Ὀλυμπιάδα, εὑρεῖν τε τὰ περὶ τὰς καμπύλας γραμμάς. ἐτελεύτησε δ τρίτον ἄγων καὶ πεντηκοστὸν ἔτος.	Ο Κνίδιος Εύδοξος άκμασε κατά την εκατοστή Τρίτη Ολυμπιάδα και ανακάλυψε τα σχετικά με τις καμπύλες γραμμές.
Τοῦτον ἀντὶ Εὐδόξου Ἔνδοξον ἐκάλουν διὰ τὴν λαμπρότητα τῆς φήμης.	Πέθανε πενήντα τριών χρονών. Λόγω της μεγάλης του φήμης τον ονόμασαν Ένδοξο αντί για Εύδοξο.

Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι ο Εύδοξος ήταν πολύ μεγάλος μαθηματικός ίσως ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας μετά τον Αρχιμήδη και αυτό φαίνεται από την αναφορά των έργων του. Θεωρία λόγων (V βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη), μέτρηση εμβαδών και όγκων (XII βιβλίο των Στοιχείων). Με αυτά τα έργα θα ασχοληθούμε παρακάτω.

2. ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΜΕΓΕΘΩΝ ΣΤΟ V ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Το **V** βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη αποδίδεται στον Εύδοξο. Σ' ένα ανώνυμο σχόλιο στο V βιβλίο αναφέρεται.
« Τοῦτο τὸ βιβλίον Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου τοῦ μαθηματικοῦ τοῦ κατὰ τοὺς Πλάτωνος χρόνους γεγονότος ε ναι λέγεται, ἐπιγέγραπται δ ὅμως Εὐκλείδου.» (Σχόλιο V.3,1-3)

Εκεί, ο Εύδοξος, ανέπτυξε ακόμα περισσότερο την έννοια του λόγου για οποιαδήποτε μεγέθη. Όμως ας δούμε τι ίσχυε πριν την εποχή του Ευδόξου. Η πρώτη θεωρία αναλογιών ίσχυε για την περίπτωση των αριθμών και των συμμέτρων μεγεθών. Η θεωρία αυτή ανήκει στους Πυθαγόρειους. Ο ορισμός που αποτέλεσε τη βάση αυτής της θεωρίας είναι ο εξής:.

Ορισμός

΄Εστω Α και Β δύο σύμμετρα μεγέθη και Γ,Δ δύο άλλα σύμμετρα μεγέθη, όχι κατ΄ανάγκη ομοειδή προς τα Α,Β. Τότε Α/Β=Γ/Δ αν και μόνο αν το Α είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ή το ίδιο μέρος ή τα ίδια μέρη του Β όπως το Γ είναι του Δ.

Η δεύτερη θεωρία αναλογιών είναι η ανθυφαιρετική θεωρία λόγων, η οποία ίσχυε και σε ομογενή ασύμμετρα μεγέθη .Ο ορισμός που αποτέλεσε τη βάση αυτής της θεωρίας είναι ο εξής:

Ορισμός

΄Εστω Α,Β ένα ζεύγος ομογενών μεγεθών με Α>Β
και Γ,Δ ένα άλλο ζεύγος ομογενών μεγεθών με Γ>Δ .
Τότε Α/Β=Γ/Δ αν και μόνο αν Ανθ(Α,Β)=Ανθ(Γ,Δ)

Για τον πιο πάνω ορισμό δεν υπάρχει καμία αναφορά σε κείμενο της αρχαιότητας.Η αποκάλυψή του είναι έργο των ιστορικών των μαθηματικών H. G. Zeuthen, E. Dijksterhuis και κυρίως του O. Becker. Η θεμελιώδης μαρτυρία που οδήγησε τους παραπάνω ιστορικούς στη διατύπωση της θέσης για την ύπαρξη αυτού του ορισμού είναι ένα χωρίο από τα Τοπικά του Αριστοτέλη (158b29-35) που αναφέρει: ἄλλων τῶν ὁρισμοῦ δεομένων. ἔοικε δ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν **ἀνταναίρεσιν** ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος.
Δηλαδή
Φαίνεται ότι και στα μαθηματικά μερικές προτάσεις δεν είναι εύκολο να αποδειχτούν λόγω έλλειψης ορισμού, όπως για παράδειγμα ότι η ευθεία που τέμνει ένα παραλληλόγραμμο και είναι παράλληλη προς τη μια πλευρά αυτού διαιρεί ομοίως και την πλευρά και το χωρίο. Μόλις όμως διατυπωθεί ο

ορισμός το λεγόμενο γίνεται αμέσως φανερό. Διότι τα χωρία και οι γραμμές έχουν την ίδια **ανταναίρεση**, και αυτός είναι ο ορισμός του αυτού του λόγου. Ο Αλέξανδρος ο Αφροδισιέας στα σχόλιά του στα Τοπικά.(545,15-19) αναφέρει: ἔστι δ ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ᾧ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις· αὐτὸς δ τὴν ἀνθυφαίρεσιν ἀνταναίρεσιν εἴρηκε. τὰ δ' ἀνάλογον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα καὶ ὁμοίως ἔχειν πρὸς ἄλληλα λέγεται· διὸ ε πεν ἔστι δ ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος ἀντὶ τοῦ 'ἔστι δ ὁρισμὸς τοῦ ἀνάλογον'.
«ότι ανταναίρεση σημαίνει ανθυφαίρεση και μεγέθη είναι ανάλογα όταν έχουν την ίδια ανθυφαίρεση ».
Ο συνδυασμός αυτού του χωρίου με το χωρίο από τα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη (Α5, 74a 18-25) αποκτά ιστορική διάσταση. Το χωρίο αυτό λέει : τὸ **ἀνάλογον** ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ᾗ ἀριθμοὶ καὶ ᾗ γραμμαὶ καὶ ᾗ στερεὰ καὶ ᾗ χρόνοι, ὥσπερ ἐδείκνυτό ποτε χωρίς, ἐνδεχόμενόν γε κατὰ πάντων μιᾷ ἀποδείξει δειχθῆναι· ἀλλὰ διὰ τὸ μὴ ε ναι ὠνομασμένον τι ταῦτα πάντα ἕν, ἀριθμοί μήκη χρόνοι στερεά, καὶ εἴδει διαφέρειν ἀλλήλων, χωρὶς ἐλαμβάνετο. νῦν δ καθόλου δείκνυται· οὐ γὰρ ᾗ γραμμαὶ ἢ ᾗ ἀριθμοὶ ὑπῆρχεν, ἀλλ' ᾗ τοδί, ὃ καθόλου ὑποτίθενται ὑπάρχειν. Δηλαδή το θεώρημα της εναλλαγής των όρων σε μια αναλογία παλαιότερα το αποδείκνυαν ξεχωριστά για αριθμούς για γραμμές για στερεά και για χρόνους ενώ τώρα είναι δυνατόν να αποδειχτεί με μια απόδειξη για όλα. Άρα αφού το θεώρημα της εναλλαγής αποδεικνύεται με τον ορισμό του Ευδόξου για όλα τα μεγέθη σε μία απόδειξη, αυτό σημαίνει ότι υπήρχε παλαιότερα κάποια άλλη θεωρία αναλογιών για ασύμμετρα μεγέθη. Σύμφωνα με τα παραπάνω χωρία αυτή δεν είναι άλλη παρά η ανθυφαιρετική θεωρία λόγων που βασίζεται στον ανθυφαιρετικό ορισμό (Θεαίτητος)

Η τρίτη θεωρία αναλογιών είναι του Ευδόξου
Το V βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη περιέχει την θεωρία λόγων του Ευδόξου. Παραθέτουμε τους πέντε πρώτους ορισμούς .

Α Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

Β. Πολλαπλάσιον δ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

Γ. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

Δ. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Ε. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται ε ναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Ο **ορισμός** (ε) μας λέει ότι για δύο ζεύγη ομοειδών μεγεθών Α,Β και Γ,Δ , Α/Β=Γ/Δ μόνο αν για οιουσδήποτε δύο φυσικούς αριθμούς μ,ν ισχύει μία των παρακάτω τριών σχέσεων:

i) μΑ>νΒ και συγχρόνως μΓ>νΔ

i i) μΑ=νΒ και συγχρόνως μΓ=νΔ

iii) μΑ<νΒ και συγχρόνως μΓ<νΔ

Ο ορισμός αυτός κρίθηκε αρνητικά από πολλούς, μάλιστα λέγεται ότι ο Γαλιλαίος τον χαρακτήρισε ως τον χειρότερο ορισμό που γνώριζε. Καταβλήθηκαν πολλές προσπάθειες, έως ότου οδηγηθούμε σε μία αποδεκτή ερμηνεία από τον Thomas Heath[4], το 1906.Αυτή έχει ως εξής :

«το κλάσμα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ χωρίζει το πλήθος των θετικών ρητών $\frac{\nu}{\mu}$ σε τέτοιους, ώστε $\mu\mathrm{A} > \nu.\mathrm{B}$ και $\mu\mathrm{A} \le \nu.\mathrm{B}$. Η τομή –κατά την σύγχρονη ορολογία του Dedekind- προσδιορίζει το ρητό ή ασύμμετρο αριθμό $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$. Το κλάσμα $\frac{\Gamma}{\Delta}$ χωρίζει ομοίως το πλήθος των θετικών ρητών $\frac{\nu}{\mu}$ σε τέτοιους, ώστε: $\mu.\Gamma > \nu.\Delta$ και $\mu.\Gamma \le \nu.\Delta$.Η τομή προσδιορίζει το ρητό ή ασύμμετρο αριθμό $\frac{\Gamma}{\Delta}$.Εάν οι δύο αυτές τομές συμπίπτουν, τότε θα έχουμε : $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Εάν η πρώτη είναι μεγαλύτερη της δεύτερης ,τότε θα έχουμε $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} > \frac{\Gamma}{\Delta}$».

Η σημαντική έλλειψη του παραπάνω ορισμού από τους Έλληνες είναι η αντίστροφη διατύπωση, δηλαδή ότι κάθε τέτοια τομή παράγει έναν πραγματικό αριθμό και σ' αυτό ακριβώς το σημείο ο Dedekind κάνει την απαραίτητη προσθήκη , για την πλήρη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. (Ε.Σταμάτης [8]).

Ορισμός

Ένα σύνολο $\mathrm{A} \subset \mathrm{Q}$ λέγεται **τομή Dedekind**, αν

i) $\mathrm{A} \neq \varnothing$.

ii) $\mathrm{A} \neq \mathrm{Q}$.

iii)Αν $r \in \mathrm{A}$ και $q \in \mathrm{Q}$: $q<r$ τότε $q \in \mathrm{A}$

iv) Το Α δεν έχει μέγιστο στοιχείο , δηλαδή $\forall r \in \mathrm{A}, \exists\ r' \in \mathrm{A} : r < r'$

2.1 ΑΞΙΩΜΑ ΕΥΔΟΞΟΥ- ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Ο τέταρτος ορισμός του V βιβλίου αναφέρει ότι όταν δοθούν δύο άνισα μεγέθη Α<Β του ίδιου είδους τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε n.A>B .

Η ιδιότητα αυτή έμεινε γνωστή μεταγενέστερα ως η ιδιότητα των Αρχιμήδη – Εύδοξου ή σαν το αξίωμα συνέχειας.

Ο Αρχιμήδης σε δύο πραγματείες του αναφέρει τούτο ως λήμμα.
ι) Στην πραγματεία του «περί σφαίρας και κυλίνδρου» το διατυπώνει ως εξής:

Ἔτι δ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπι- φανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.	Ακόμη δε και στις άνισες γραμμές και στις άνισες επιφάνειες και στα άνισα στερεά, είναι δυνατόν η διαφορά των λαμβανομένη πολλές φορές να υπερβεί ολόκληρο το μεγαλύτερο μέγεθος

ιι) Στον πρόλογο της πραγματείας «τετραγωνισμός της παραβολής» (σελ.2 165,6 – 165,26), ο Αρχιμήδης αναφέρει το «λήμμα» που υποθέτει και είναι γνωστό σήμερα με το όνομα « Αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδη» ως εξής:

τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν ε μεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. Κέχρηνται δ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τᾶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρώ- μενοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, ἔτι δ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρη- μένῳ λῆμμά τι λαμβάνοντες ἔγραφον. Συμβαίνει δ τῶν	Η υπεροχή, κατά την οποία το μεγαλύτερο από δύο δοθέντα μεγέθη υπερέχει ,είναι δυνατόν λαμβανομένη πολλές φορές να υπερβεί το δοθέν (μεγαλύτερο) πεπερασμένο μέγεθος . ΄Αλλωστε το λήμμα αυτό είχαν χρησιμοποιήσει και οι προηγούμενοι γεωμέτρες, διότι με αυτό αποδείκνυαν ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων μεταξύ τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου των διαμέτρων τους[XII.2] και ότι ο λόγος των όγκων δύο σφαιρών μεταξύ τους ισούται με την τρίτη δύναμη του λόγω των διαμέτρων τους[XII.18]. Επίσης χρησιμοποιώντας ένα λήμμα παρόμοιο με το προαναφερθέν απέδειξαν ότι κάθε πυραμίδα είναι το ένα τρίτο πρίσματος που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος με την πυραμίδα[XII.7], καθώς και ότι κάθε κώνος ισούται με το ένα τρίτο κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος με τον κώνο.[XII.10]. Συμβαίνει επίσης τα παραπάνω

προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων.	θεωρήματα να μην είναι λιγότερο αποδεκτά από τα άλλα που έχουν αποδειχτεί χωρίς τη βοήθεια αυτού του λήμματος, εμένα μου αρκεί να φθάσουν να γίνουν εξ ίσου αξιόπιστα με εκείνα και αυτά που εκδίδω τώρα. .

Κατά τον Ε. Σταμάτη [7] το αξίωμα της συνέχειας το ορθότερο είναι να μνημονεύεται ως αξίωμα του Αναξαγόρα και όχι ως αξίωμα του Εύδοξου ή του Αρχιμήδους. Εις το έργο του Αναξαγόρα «περί φύσεως» υπάρχει το εξής απόσπασμα :«οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι τὸ μὴ οὐκ ε ναι)– ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον. καὶ ἴσον ἐστὶ τῶι σμικρῶι πλῆθος, πρὸς ἑαυτὸ δ ἕκαστόν ἐστι καὶ μέγα καὶ σμικρόν»(διότι κατά την θεώρηση του μικρού δεν δυνάμεθα να ισχυριστούμε ότι υπάρχει το μικρότατο, αλλά πάντοτε μικρότερο απ' αυτό, (διότι το υπάρχον δεν μπορεί να παύσει να υπάρχει οσονδήποτε μικρό και αν θεωρηθεί) αλλά και για το μεγάλο υπάρχει πάντοτε μεγαλύτερο).
Την ονομασία αξίωμα μετρήσεως του Αρχιμήδους χρησιμοποιεί ο D. Hilbert εις την πραγματείαν του « Αρχές της Γεωμετρίας».
Ο Έλληνας μαθηματικός Κων. Καραθεοδωρής το ονομάζει θεώρημα του Αρχιμήδους, το αποδίδει όμως στον Εύδοξο και το διατυπώνει ως εξής: « Εάν ε και α είναι δύο τυχόντες πεπερασμένοι θετικοί αριθμοί, τότε η ακολουθία ε, 2ε, 3ε, 4ε .... περιέχει αριθμούς ,οι οποίοι υπερβαίνουν τον α » (Ε. Σταμάτη [7]).

Παρακάτω θα αναφέρουμε συνοπτικά μερικές πολύ χρήσιμες προτάσεις του V βιβλίου που θα φανούν πολύ σημαντικές στα επόμενα κεφάλαια.

Πρόταση 11:

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.	Αν α/β = γ/δ και γ/δ = ε/ζ τότε α/β = ε/ζ

Πρόταση 12:

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἕν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.	Αν α/α' = β/β' = γ/γ' = … τότε α/α' = (α+β+γ+…) / (α'+β'+γ'+…)

Πρόταση 16:

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.	Αν α/β = γ/δ τότε α/γ = β/δ.

Πρόταση 17:

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Αν α/β = γ/δ τότε (α-β)/β = (γ-δ)/δ.

Πρόταση 18:

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Αν α/β = γ/δ τότε (α+β)/β = (γ+δ)/δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Οι Έλληνες γεωμέτρες έως την εποχή του Ευδόξου ,είχαν διαισθητικά δεχτεί ότι τα εμβαδά απλών καμπυλόγραμμων σχημάτων ήταν γεωμετρικά μεγέθη του ίδιου τύπου, όπως και τα εμβαδά πολυγωνικών σχημάτων. Για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιούσαν δύο φυσικές ιδιότητες.

1) Την μονοτονία : Αν ένα πολύγωνο Α περιέχεται σ’ ένα καμπυλόγραμμο σχήμα Β ,τότε εμβ(Α)<εμβ(Β) και

2)Την προσθετικότητα: Αν $Γ=Α\cup Β$ και Α,Β ξένα μεταξύ τους τότε εμβ(Γ)=εμβ(Β)+ εμβ(Α)
Αυτές οι δύο ιδιότητες έπαιξαν σημαντικό ρόλο ώστε ο Εύδοξος να οδηγηθεί αργότερα σε μία μέθοδο υπολογισμού εμβαδών καμπυλόγραμμων σχημάτων ,που σήμερα είναι γνωστή ως η «μέθοδος της εξάντλησης ».(Ε.Γιαννακούλιας[2]).
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την πρόταση Χ.1 των Στοιχείων ,η οποία αποτελεί την Αρχή της εξάντλησης , θα δούμε συνοπτικά τα συμπεράσματα των προτάσεων του XII βιβλίου και θα αποδείξουμε τις προτάσεις XII.2 και XII.5 με σύγχρονη ορολογία.

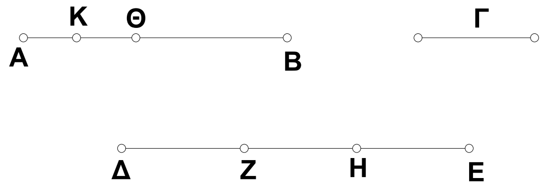
1. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

Η αρχή της εξάντλησης διατυπώνεται στην πρόταση Χ.I των βιβλίων των Στοιχείων του Ευκλείδη. Αποτελεί μια εφαρμογή της αρχής της συνέχειας και είναι μεγίστης σημασίας για την γένεση των άπειρων διαδικασιών.
Ας δούμε πώς η πρόταση ΧΙ διατυπώνεται και αποδεικνύεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη .

ΠΡΟΤΑΣΗ Χ.1

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ	**Έστω δύο άνισα μεγέθη. Αν απ’ το μεγαλύτερο αφαιρέσουμε ένα μέγεθος μεγαλύτερο απ’ το μισό του**

καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους	**και απ' αυτό που μένει ένα μέγεθος μεγαλύτερο απ' το μισό του και αν αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς θα μείνει ένα μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο από το μικρότερο αρχικό μέγεθος.**



Εστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ	'Εστω δύο μεγέθη άνισα τα ΑΒ,Γ των οποίων μεγαλύτερο το ΑΒ
λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους	λέγω, ότι,εάν από το ΑΒ αφαιρεθεί μεγαλύτερο από το μισό και από το υπόλοιπο μεγαλύτερο του μισού και τούτο γίνεται πάντα, τότε θα μείνει μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του μεγέθους Γ
Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτ τοῦ ΑΒ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μ ν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δ ΑΒ μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μ ν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ	Διότι το Γ πολλαπλασιαζόμενο θα γίνει κάποτε μεγαλύτερο του ΑΒ. Ας πολλαπλασιαστεί και έστω το ΔΕ πολλαπλάσιο του Γ και του ΑΒ μεγαλύτερο και ας διαιρεθεί το ΔΕ σε ίσα προς το Γ μεγέθη τα ΔΖ , ΖΗ , ΗΕ , και ας αφαιρεθεί από το ΑΒ μεγαλύτερο του μισού το ΒΘ, από δε το ΑΘ μεγαλύτερο του μισού το ΘΚ

καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν.	και τούτο ας γίνεται πάντοτε έως ότου οι διαιρέσεις του ΑΒ να γίνουν ισοπληθείς με τις διαιρέσεις του ΔΕ
Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μ ν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δ τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ,	Έστω λοιπόν οι διαιρέσεις ΑΚ , ΚΘ, ΘΒ, ισοπληθείς προς τις διαιρέσεις ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ και επειδή το ΔΕ>ΑΒ και αφαιρεθεί από μεν το ΔΕ λιγότερο του μισού το ΕΗ από δε το ΑΒ μεγαλύτερο του μισού το ΒΘ, το υπόλοιπο άρα το

λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστιν.	ΗΔ θα είναι μεγαλύτερο του υπολοίπου ΘΑ.
καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μ ν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δ ΘΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν.	και επειδή το ΗΔ>ΘΑ και αφαιρέθει από μεν του ΗΔ το μισό ΗΖ , από δε του ΘΑ μεγαλύτερο του μισού το ΘΚ, άρα το υπόλοιπο ΔΖ είναι μεγαλύτερο του υπολοίπου ΑΚ.
. ἴσον δ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.	Είναι δε ΔΖ=Γ. Άρα και το Γ>ΑΚ. Μικρότερο άρα το ΑΚ του Γ.
Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. –ὁμοίως δ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα	Απομένει άρα από το μέγεθος ΑΒ το μέγεθος ΑΚ, το οποίο είναι μικρότερο του δοθέντος μικροτέρου μεγέθους Γ ο.ε.δ. καθ' όμοιο τρόπο γίνεται η απόδειξη όταν τα αφαιρούμενα είναι μισά

ΣΧΟΛΙΑ

1) Η πρόταση Χ.1 χρησιμοποιείται στα Στοιχεία του Ευκλείδη στην απόδειξη της Χ.2 και σε πολλές προτάσεις του XII βιβλίου.

2) Ο van der Waerden [13] αποδίδει στον Θεαίτητο την Χ.1. Συγκεκριμένα αναφέρει:

«Στο δέκατο βιβλίο χρησιμοποιείται αποκλειστικά στην απόδειξη της πρότασης Χ.2: Εάν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο ,και το εκάστοτε υπόλοιπο ουδέποτε καταμετρεί το προηγούμενο αυτού, τα μεγέθη θα είναι ασύμμετρα.

Η απόδειξη της πρότασης είναι αρκετά κομψή μπορεί να γίνει όμως και χωρίς την χρήση της Χ.1, ως εξής : αν τα μεγέθη Α και Β είχαν κοινό μέτρο Ε ,τότε τα υπόλοιπα που προκύπτουν από την ανθυφαίρεση θα ήταν πάντοτε πολλαπλάσια του Ε και, μάλιστα, σταθερά ελαττούμενα πολλαπλάσια , οπότε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων η ακολουθία των υπολοίπων θα έφτανε στο τέλος . Κατά συνέπεια η Χ.1 δεν είναι προαπαιτούμενη της Χ.2 . Αλλά τότε, ποιον σκοπό εξυπηρετεί η Χ.1; Χρειάζεται για την ανθυφαιρετική απόδειξη της πρότασης : αν Α/Γ=Β/Γ , τότε Α=Β η οποία με τη σειρά της χρειαζόταν, για να θεμελιωθεί η θεωρία των αναλογιών. Ο Θεαίτητος άρχισε προφανώς το βιβλίο του με μια έκθεση της θεωρίας των αναλογιών με βάση τον ορισμό μέσω της ανταναίρεσης . Ακολουθώντας τη συνηθισμένη μέθοδο , άρχισε με λήμματα τα οποία θα του χρειάζονταν αργότερα .Σ' αυτά περιλαμβάνεται η Χ.1»

3) Με σύγχρονη ορολογία στην πρόταση X.1 αποδεικνύεται ότι, αν για μια ακολουθία (α_ν) θετικών όρων ισχύει $\alpha_{\nu+1} \le \frac{1}{2}\alpha_\nu \quad \forall \nu \in \mathrm{N}^*$, τότε για οποιονδήποτε θετικό αριθμό $\varepsilon, \exists \ \rho \in \mathrm{N}^*$, ώστε $\alpha_\rho < \varepsilon$.

Η σχέση μάλιστα $\alpha_{\nu+1} \le \frac{1}{2}\alpha_\nu \quad \forall \nu \in \mathrm{N}^*$ δίνεται εκεί έμμεσα ως εξής :

$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \omega_\nu$ με $\omega_\nu \ge \frac{1}{2}\alpha_\nu \quad \forall \nu \in \mathrm{N}^*$

Τότε ισχύει $\alpha_{\nu+1} \le \alpha_\nu - \frac{\alpha_\nu}{2} = \frac{1}{2}\alpha_\nu \quad \forall \nu \in \mathrm{N}^*$. Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι $\alpha_\nu \le \frac{1}{2^{\nu-1}}\alpha_1 \le \frac{\alpha_1}{\nu} \quad \forall \nu \in \mathrm{N}^*$ οπότε για να είναι $\alpha_\rho < \varepsilon$ αρκεί $\frac{\alpha_1}{\rho} < \varepsilon$ ή $\rho \cdot \varepsilon > \alpha_1$ που εξασφαλίζεται από το Αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδη.

2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ ΣΤΟ XII ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Στο XII βιβλίο διατυπώνονται και αποδεικνύονται 18 συνολικά προτάσεις τα βασικά συμπεράσματα των οποίων έχουν συνοπτικά ως εξής. Αρχικά στην πρόταση 2, αποδεικνύεται ότι δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των τετραγώνων των διαμέτρων τους . Ας σημειωθεί ότι με σημερινούς όρους ,το εμβαδόν κύκλου λαμβάνεται ως όριο της ακολουθίας (E_{2^η}) που ορίζουν τα εμβαδά των εγγεγραμμένων στον κύκλο κανονικών πολυγώνων με 2^η πλευρές .
Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι δύο πυραμίδες (τριγωνικές αρχικά και μετά πολυγωνικές) με ίσα ύψη είναι ανάλογες των βάσεων τους , για να καταλήξουμε στην πρόταση 7 , απ' όπου προκύπτει το θεμελιώδες συμπέρασμα, σύμφωνα με το οποίο κάθε τριγωνικό πρίσμα διαιρείται σε τρεις ίσες (ισοδύναμες) τριγωνικές πυραμίδες . Έτσι ο λόγος δύο όμοιων τριγωνικών πυραμίδων ανάγεται σε λόγο παραλληλεπιπέδων, για να αποδειχτεί τελικά ότι ισούται με τον κύβο του λόγου των ομολόγων ακμών τους (πρόταση 8).
Ακολουθεί η σύγκριση κώνου και κυλίνδρου με ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Αρχικά αποδεικνύεται ότι, αν δύο κώνοι (ή κύλινδροι) έχουν ίσα ύψη, τότε είναι ανάλογοι των βάσεων τους (πρόταση 11).
Ακολούθως αποδεικνύεται ότι δύο όμοιοι κώνοι (ή κύλινδροι) είναι ανάλογοι των κύβων των διαμέτρων των βάσεων τους (πρόταση 12).
Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι δύο κύλινδροι (ή κώνοι) με ίσες βάσεις είναι ανάλογοι των υψών τους , καταλήγοντας στο ότι δύο ίσοι κύλινδροι (ή κώνοι) έχουν ύψη αντιστρόφως ανάλογα των βάσεων τους αλλά και αντίστροφα (πρόταση15)
Με σημερινούς όρους ο όγκος V ενός κυλίνδρου και ο όγκος V΄ ενός κώνου λαμβάνονται ως όρια των ακολουθιών (V_{2^η}) και(V'_{2^η}) που ορίζονται από τους όγκους των εγγεγραμμένων πρισμάτων και πυραμίδων αντιστοίχως με βάσεις κανονικά πολύγωνα με 2^η πλευρές .

Το κεφάλαιο τελειώνει με την πρόταση 18 στην οποία αποδεικνύεται ότι δύο σφαίρες είναι ανάλογες των κύβων των διαμέτρων τους . Της απόδειξης αυτής προηγείται η εξής πρόταση , αν δοθούν δύο ομόκεντρες σφαίρες τότε υπάρχει δυνατότητα να εγγράψουμε στη μεγάλη σφαίρα πολύεδρο που να μην έχει κοινά σημεία με την μικρή σφαίρα .
Το χαρακτηριστικό γνώρισμα του XII βιβλίου είναι η χρήση της μεθόδου της εξάντλησης που εφαρμόζεται στις προτάσεις 2,3,4,5,10, 12,16,17,18. Το XII. βιβλίο των στοιχείων αποδίδεται στον Εύδοξο σύμφωνα κυρίως με τα λεγόμενα του Αρχιμήδη.

1) Στον πρόλογο του βιβλίου του «περί σφαίρας και κυλίνδρου» (κεφάλαιο 1, 9,1-9,11), ο Αρχιμήδης, έπειτα από την αναφορά των αποτελεσμάτων σχετικά με την επιφάνεια της σφαίρας και του όγκου και της επιφάνειας ενός ορθού κυλίνδρου με ύψος ίσο με την διάμετρο της σφαίρας αναφέρει ότι:
[διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός
τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ
δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ **Εὐδόξου** περὶ τὰ στερεὰ
θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσ-
ματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος
ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου
τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον·
καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ
σχήματα, πολλῶν πρὸ **Εὐδόξου** γεγενημένων ἀξίων
λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι
μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι.]
"έχοντας τώρα ανακαλύψει ότι οι ιδιότητες που αναφέραμε είναι αληθινές σ' αυτά τα σχήματα, δεν αισθάνομαι κανένα δισταγμό να τις παραθέσω δίπλα με τις προηγούμενες ανακαλύψεις μου και με αυτές των θεωρημάτων του Ευδόξου στα στερεά που έχουν θεμελιωθεί, συγκεκριμένα ότι «κάθε πυραμίδα είναι το ένα τρίτο του πρίσματος με την ίδια βάση και ίσο ύψος» (XII.7) και κάθε κώνος είναι το ένα τρίτο του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος (XII.10). Αυτές οι ιδιότητες ήταν άγνωστες στους ικανούς γεωμέτρες που έζησαν πριν τον Εύδοξο και δεν παρατηρήθηκαν από κανέναν, αν και προϋπάρχουν φυσικώς στα σχήματα."

2)Στην πραγματεία "Αρχιμήδους περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος" (σελ.3, 84,4-84,7), ο Αρχιμήδης λέγει ότι:
[ὧν **Εὔδοξος** ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν,
περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος
ὁ μ ν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δ πυραμὶς τοῦ πρίσματος,
τῶν βάσιν ἐχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον]
"Πρώτος ο Εύδοξος απέδειξε ότι ο κώνος είναι το τρίτο μέρος του κυλίνδρου και η πυραμίδα του πρίσματος με την ίδια βάση και ίσο ύψος."
Από τα αναφερθέντα συμπεραίνουμε ότι οι βασικές προτάσεις του XII. βιβλίου είναι του Ευδόξου.
Στο XII. Βιβλίο παρουσιάζεται η ανάγκη να ορισθεί το εμβαδόν του κύκλου με βάση το εμβαδόν πολυγώνου ή ο όγκος κυλίνδρου(και κώνου) με βάση τον όγκο πρίσματος(πυραμίδας).Επίσης παρουσιάζεται η ανάγκη να συγκριθούν πυραμίδα και πρίσμα που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Σε αυτές τις

περιπτώσεις καταφεύγουμε στην αξιοθαύμαστη μέθοδο του Ευδόξου, τη μέθοδο της εξάντλησης .

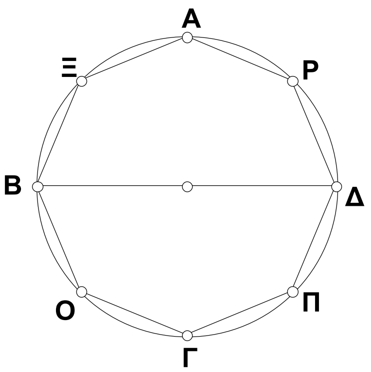
Οι Αρχαίοι Έλληνες είχαν συνειδητά εξοβελίσει την έννοια του ορίου και του απείρου από τις αποδεικτικές τους διαδικασίες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να καταφεύγουν σε αξιοθαύμαστες μεν, αλλά αρκετά δύσκαμπτες μεθόδους πέραν της εντυπωσιακής πράγματι διαδικασίας που ακολουθούσαν για να υποψιαστούν εκ των προτέρων την τιμή Β κάποιας κατά κανόνα γεωμετρικής ποσότητας Α την οποία προσπαθούσαν να υπολογίσουν(Ευκλείδη Στοιχεία, [12])

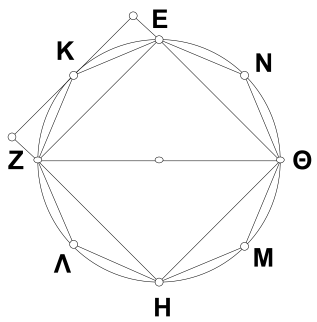
Το χαρακτηριστικό γνώρισμα του XII. βιβλίου είναι η χρήση της μεθόδου της εξάντλησης που εφαρμόζεται στις προτάσεις 2,3,,5,10, 12,16,17,18. Εμείς στη παρούσα εργασία θα αναφερθούμε στις προτάσεις 2 και 5.

2.1 ΠΡΟΤΑΣΗ XII.2

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Οι κύκλοι είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των διαμέτρων τους.





Εστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δ αὐ τῶν [ἔστωσαν] αἱ ΒΔ,ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον.	Έστω οι κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δε αυτών οι ΒΔ,ΖΘ. Λέγω ότι ο κύκλος ΑΒΓΔ προς τον κύκλο ΕΖΗΘ είναι όπως το τετράγωνο του ΒΔ προς το τετράγωνο του ΖΘ.
Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ	Αν το τετράγωνο του ΒΔ δεν είναι προς το τετράγωνο του ΖΘ όπως ο κύκλος ΑΒΓΔ προς τον κύκλο ΕΖΗΘ, τότε όπως είναι το τετράγωνο του ΒΔ προς το τετράγωνο του ΖΘ θα είναι

τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον.	και ο κύκλος ΑΒΓΔ προς έναν μικρότερο ή μεγαλύτερο κύκλο ΕΖΗΘ.
ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ.	Έστω $ΒΔ^2 / ΖΘ^2$ = (κυκ.ΑΒΓΔ) / (Σ) όπου Σ είναι η περιοχή εκείνη με εμβαδό μικρότερο του κύκλου ΕΖΗΘ.
καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ·	Εγγράφουμε το τετράγωνο ΕΖΗΘ στον κύκλο ΕΖΗΘ.
τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, τοῦ δ περι- γραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος·	Τότε το εγγραφόμενο τετράγωνο είναι μεγαλύτερο από το μισό του κύκλου ΕΖΗΘ, επειδή εάν από τα σημεία Ε,Ζ,Η,Θ, φέρουμε εφαπτόμενες στον κύκλο ,το τετράγωνο Ε ,Ζ ,Η ,Θ είναι το μισό του περιγραφομένου περί τον κύκλο τετραγώνου,του δε περιγραφέντος τετραγώνου ο κύκλος είναι μικρότερος .
ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμί- σεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.	Ώστε το εγγραφόμενο τετράγωνο στον ΕΖΗΘ κύκλο είναι μεγαλύτερο από το μισό του κύκλου ΕΖΗΘ.
. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπλη- ρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλ- ληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου·	Διχοτομούμε τα τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, και ΘΕ στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αντιστοίχως και θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, και ΝΕ. Κάθε ένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ είναι μεγαλύτερο από το μισό του κυκλικού τμήματος που το περιέχει, τόσο ώστε αν από τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν φέρουμε εφαπτόμενες στον κύκλο και συμπληρώσουμε τα παραλληλόγραμμα πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ κάθε ένα από τα τρίγωνα είναι το μισό από το παραλληλόγραμμο που το περιέχει. Αλλά το τμήμα του κύκλου που απομένει είναι μικρότερο του παραλληλογράμμου.
· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου.	Ώστε κάθε ένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ,ΖΛΗ,ΗΜΘ,ΘΝΕ είναι μεγαλύτερο από το μισό του τμήματος του κύκλου που το περιέχει.

τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περι- φερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου	Έτσι, διχοτομώντας τα εναπομείναντα τόξα και ενώνοντας τα ευθύγραμμα τμήματα και πράττοντας τούτο συνεχώς θα μείνουν τελικά κάποια κυκλικά τμήματα που θα είναι μικρότερα από την επιφάνεια που ο κύκλος ΕΖΗΘ υπερέχει του Σ. (Χ.1)
. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων,ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.	Διότι εδείχθη στο πρώτο θεώρημα του δεκάτου βιβλίου ότι ,αν έχουμε δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί κάτι μεγαλύτερο του μισού και απ’ αυτό που απομένει κάτι μεγαλύτερο του μισού ,και αν αυτό γίνεται επ’ άπειρο,θα απομείνει μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικροτέρου μεγέθους .
. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου.	Έστω ότι έχουν μείνει κυκλικά τμήματα του κύκλου ΕΖΗΘ όπως παραπάνω, τα ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, και ΝΕ τα οποία έχουν εμβαδό μικρότερο απ’ την επιφάνεια που υπερέχει ο κύκλος ΕΖΗΘ από την Σ. Επομένως : (ΕΖΗΘ)>(ΕΚΖΛΗΜΘΝ)>(Σ)
ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛ ΗΜΘΝ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετρά- γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον·	Έστω ότι εγγράφουμε στον κύκλο ΑΒΓΔ ένα πολύγωνο όμοιο προς το ΕΚΖΛΗΜΘΝ, το ΑΞΒΟΓΠΔΡ. Τότε $ΒΔ^2$ / $ΖΘ^2$ = (ΑΞΒΟΓΠΔΡ) / (ΕΚΖΛΗΜΘΝ)(ΧΙΙ.1) Αλλά και $ΒΔ^2$ /$ΖΘ^2$ = (κυκλ.ΑΒΓΔ) / (Σ)
· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον·	(κυκλ.ΑΒΓΔ) / (Σ) = = (ΑΞΒΟΓΠΔΡ) / (ΕΚΖΛΗΜΘΝ)
ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον	Αρα (κυκλ.ΑΒΓΔ) / (ΑΞΒΟΓΠΔΡ) = = (Σ) / (ΕΚΖΛΗΜΘΝ) (V.16)

πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον.	
μείζων δ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μείζων δ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.	Όμως (κυκλ.ΑΒΓΔ) >(ΑΞΒΟΓΠΔΡ) Οπότε και (Σ) > (ΕΚΖΛΗΜΘΝ) το οποίο είναι άτοπο αφού εξ' υποθέσεως (Σ) < (ΕΚΖΛΗΜΘΝ).
. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.	Επομένως δεν ισχύει ότι όπως είναι το τετράγωνο του ΒΔ προς το τετράγωνο του ΖΘ είναι ο κύκλος ΑΒΓΔ προς μια επιφάνεια μικρότερη του ΕΖΗΘ.
ὁμοί- ως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.	Όμοια δεν ισχύει ότι ο κύκλος ΕΖΗΘ προς μια επιφάνεια μικρότερη του κύκλου ΑΒΓΔ είναι όπως το τετράγωνο του ΖΘ προς το τετράγωνο του ΒΔ.
Λέγω δή, ὅτι οὐδ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.	Λέγω ,ότι δεν ισχύει ότι το $ΒΔ^2$ /$ΖΘ^2$ είναι όπως ο κύκλος (ΑΒΓΔ)προς ένα χωρίο μεγαλύτερο του κύκλου(ΕΖΗΘ)
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ. ἀνάπαλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.	Έστω $ΒΔ^2$ / $ΖΘ^2$ = (κυκλ.ΑΒΓΔ) / (Σ) όπου Σ είναι μια επιφάνεια μεγαλύτερη του κύκλου ΕΖΗΘ.
. ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χω- ρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.	Αλλά (Σ) / (κυκλ.ΑΒΓΔ) = = (κυκλ.ΕΖΗΘ) / (Τ) όπου Τ μια επιφάνεια μικρότερη του κύκλου ΑΒΓΔ. Συνεπώς $ΖΘ^2$ /$ΔΒ^2$ = (κυκλ.ΕΖΗΘ)/(Τ) το οποίο είναι άτοπο
οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη	Επομένως δεν ισχύει ότι το τετράγωνο του ΒΔ προς το τετράγωνο του ΖΘ είναι όπως ο κύκλος ΑΒΓΔ προς μια επιφάνεια μεγαλύτερη του κύκλου

δέ, ὅτι οὐδ πρὸς ἔλασσον·	ΕΖΗΘ,εδείχθη ότι δεν ισχύει ούτε για μικρότερο
ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν δια-μέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι	Άρα από τις δυο περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι $ΒΔ^2$ / $ΖΘ^2$ = (κυκλ.ΑΒΓΔ) / (κυκλ.ΕΖΗΘ).ο.ε.δ.Άρα **οι κύκλοι είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των διαμέτρων τους**.

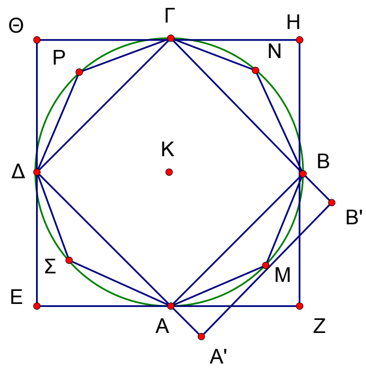
Λῆμμα	Λήμμα
Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.	Λέγω τώρα ότι (Σ)/(κυκλ.ΑΒΓΔ)=(κυκλ.ΕΖΗΘ)/Τ όπου Σ μια επιφάνεια μεγαλύτερη του κύκλου ΕΖΗΘ και Τ μια επιφάνεια μικρότερη του κύκλου ΑΒΓΔ. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει. Λέω ότι το χωρίο Τ είναι μικρότερο του κύκλου ΑΒΓΔ.
Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. λέγω, ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.	Ας γίνει (Σ) / (κυκλ.ΑΒΓΔ) = = (κυκλ.ΕΖΗΘ) /(Τ) Λέω ότι το χωρίο Τ είναι μικρότερο του κύκλου ΑΒΓΔ.
ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον, ἐναλλάξ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύ-κλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου	Τότε (Σ) / (κυκλ.ΑΒΓΔ) = = (κυκλ.ΕΖΗΘ) / (Τ) εναλλάξ είναι (Σ) / (κυκλ.ΕΖΗΘ) = = (κυκλ.ΑΒΓΔ) / (Τ) (V.16) Είναι δε μεγαλύτερο το χωρίο Σ του κύκλου ΕΖΗΘ. Άρα και ο κύκλος ΑΒΓΔ είναι μεγαλύτερος του χωρίου Τ(V.14)
ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον·	Επομένως είναι (Σ)/ (κυκλ.ΑΒΓΔ)= (κυκλ.ΕΖΗΘ) / (Τ) .
ὅπερ ἔδει δεῖξαι	Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Ας εξετάσουμε τώρα την απόδειξη XII.2 με σύγχρονη ορολογία.
Απαραίτητη για την απόδειξη της , είναι η πρόταση (XII.1) η οποία αναφέρει :
Δύο όμοια πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλους είναι ανάλογα των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων αυτών.

Στήν απόδειξη της πρότασης 2 βασικό ρόλο έπαιξε επίσης η ακόλουθη θεμελιώδης παρατήρηση που θα την αναφέρουμε ως Γενικό Λήμμα.

Γενικό Λήμμα.
Αν δοθεί αριθμός ε>0 και κύκλος Κ , τότε υπάρχει εγγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο E_ν ,ώστε η διαφορά του από τον κύκλο να είναι μικρότερη του ε, δηλαδή Κ- E_ν <ε.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



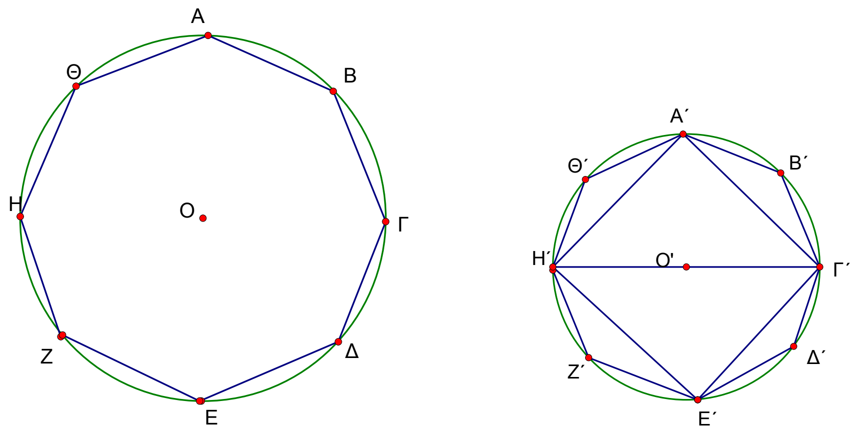
Θεωρούμε το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ και το περιγεγραμμένο τετράγωνο ΕΖΗΘ στον κύκλο Κ.
Προφανώς το ΑΒΓΔ είναι ίσο με το μισό του ΕΖΗΘ , άρα μεγαλύτερο από Κ/2. Αφαιρώντας λοιπόν από τον κύκλο το τετράγωνο ΑΒΓΔ , ουσιαστικά του αφαιρούμε ποσότητα μεγαλύτερη από το Κ/2.

Αν θεωρήσουμε το εγγεγραμμένο κανονικό οκτάγωνο
ΑΜΒΝΓΡΔΣΑ και το αφαιρέσουμε από τον κύκλο ,
τότε αφαιρούμε ουσιαστικά από το προηγούμενο υπόλοιπο ,
$\upsilon_1 = \mathrm{K} - \mathrm{E}_4$,τα τρίγωνα ΑΜΒ, ΒΝΓ,ΓΡΔ,ΔΣΑ.
Όμως, σχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο ΑΑ΄Β΄Β με την πλευρά Α΄Β΄ εφαπτομένη του κύκλου στο Μ, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου ΑΒΒ΄Α΄, κατά συνέπεια μεγαλύτερο από το κυκλικό τμήμα ΑΜΒΑ.

Αφαιρώντας λοιπόν τα τρίγωνα ΜΑΒ, ΝΒΓ,ΡΓΔ, ΣΔΑ από το υπόλοιπο υ_1 , αφαιρούμε ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του υ_1 και βρίσκουμε υπόλοιπο $\upsilon_2 = \mathrm{K} - \mathrm{E}_8$.
Η διαδικασία αυτή σύμφωνα με την πρόταση X.1, θα μας οδηγήσει σε υπόλοιπο $\upsilon_\mu = \mathrm{K} - \mathrm{E}_{2^{\mu+1}}$ μικρότερο από τον αριθμό ε.

Απόδειξη πρότασης 2(XII.2)

Θεωρούμε τους κύκλους K, K' με ακτίνες ρ, ρ' και κέντρα Ο, Ο΄ αντίστοιχα.



Αρκεί να

δείξουμε ότι $\frac{K}{K'} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$

α) Έστω $\frac{K}{K'} \neq \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$. Τότε $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S}$ όπου $S \neq K'$

Έστω αρχικά $S < K'$
Αν θεωρήσουμε τον αριθμό $\varepsilon = K' - S > 0$ τότε σύμφωνα με το γενικό Λήμμα που αναφέρθηκε στην αρχή της απόδειξης, θα υπάρχει πολύγωνο E'_ν εγγεγραμμένο στον κύκλο K' τέτοιο, ώστε, $K' - \mathrm{E}'_\nu < \varepsilon$.

Άρα $K' - \mathrm{E}'_\nu < K' - S$ οπότε $\mathrm{E}'_\nu > S$ (1)

Αν E_ν είναι το αντίστοιχο κανονικό πολύγωνο το εγγεγραμμένο στον κύκλο K

τότε, λόγω της πρότασης 1 θα έχουμε $\frac{\mathrm{E}_\nu}{\mathrm{E}'_\nu} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S}$.

Όμως ισχύει $\frac{S}{E'_\nu} = \frac{K}{E_\nu} > 1$, αφού $K > E_\nu$. Άρα θα έχουμε $S > E'_\nu$ (2)

Οι σχέσεις (1),(2) οδηγούν σε άτοπο, δηλαδή δεν μπορεί να ισχύει $S < K'$.

β) Έστω τώρα ότι $S > K'$. Τότε από τη σχέση $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S}$ παίρνουμε

$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = \frac{S}{K}$. Αν ισχύει $\frac{S}{K} = \frac{K'}{T}$, τότε θα έχουμε και $\frac{K}{T} = \frac{S}{K'} > 1$ αφού $S > K'$. Άρα $K > T$ (από το λήμμα που ακολουθεί).

Επομένως $\left(\dfrac{\rho'}{\rho}\right)^2 = \dfrac{K'}{T}$ με $T < K.$

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση (α) και με τους ίδιους όπως πριν συλλογισμούς οδηγεί στις σχέσεις $E_\nu > T$ και $E_\nu < T$ που αντιφάσκουν.

Επομένως δεν μπορεί να ισχύει $S > K'$.

Τελικά, ισχύει $S = K'$ οπότε $\dfrac{K}{K'} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

Λήμμα

Αν ένα χωρίο S είναι μεγαλύτερο ενός κύκλου K, τότε ο λόγος του S προς έναν άλλο κύκλο K' είναι ίσος με το λόγο του K προς ένα χωρίο Τ μικρότερο του κύκλου K'.

Δηλαδή ,αν $S > K$ και $\dfrac{S}{K'} = \dfrac{K}{T}$, τότε $T < K'$.

Πράγματι από την $\dfrac{S}{K'} = \dfrac{K}{T}$ προκύπτει $\dfrac{K'}{T} = \dfrac{S}{K} > 1$ αφού $S > K$.

Άρα $T < K'$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στα Στοιχεία του Ευκλείδη και στην πρόταση 2 που προηγήθηκε ,για να αποδειχθεί η σχέση $\dfrac{K}{K'} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$, αποδείχτηκε ότι οι σχέσεις $\dfrac{K}{K'} < \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$ και $\dfrac{K}{K'} > \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$ οδηγούν σε άτοπο .

Η πορεία όμως της απόδειξης που ακολουθείται στην περίπτωση $\dfrac{K}{K'} < \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$ και βασίζεται στο Λήμμα, δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση $\dfrac{K}{K'} > \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

Για το λόγο αυτό , η σχέση $\dfrac{K}{K'} > \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$ γράφεται ως $\dfrac{K'}{K} < \left(\dfrac{\rho'}{\rho}\right)^2$ και τότε εφαρμόζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε πάνω στον κύκλο Κ αντί του Κ΄.

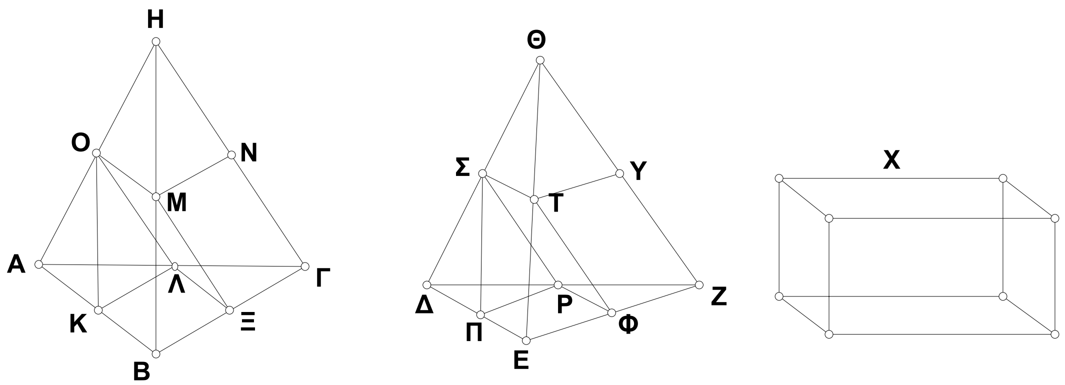
Αν θέλουμε να αποδείξουμε την δεύτερη περίπτωση ανεξάρτητα απο την πρώτη ,πρέπει να περιγράψουμε διαδοχικά πολύγωνα στους κύκλους , όπως έκανε ο Αρχιμήδης στην μέτρηση του κύκλου.

Ας δούμε τώρα πώς αποδεικνύεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη η πρόταση XII.5

2.2 ΠΡΟΤΑΣΗ XII.5

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Οι πυραμίδες με το ίδιο ύψος που έχουν τριγωνικές βάσεις είναι μεταξύ τους όπως οι βάσεις.



Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μ ν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δ τὰ Η, Θ σημεῖα·	Έστω πυραμίδες με ίσο ύψος οι οποίες έχουν τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ βάσεις και τα σημεία Η,Θ κορυφές.
λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.	Λέγω ότι (ΑΒΓ) / (ΔΕΖ) = πυρ.(ΑΒΓ,Η) / πυρ.(ΔΕΖ,Θ).
Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον.	Διότι εάν δεν είναι (ΑΒΓ)/(ΔΕΖ)= πυρ.(ΑΒΓ,Η) / πυρ.(ΔΕΖ,Θ) , θα είναι η βάση ΑΒΓ προς τη βάση ΔΕΖ όπως η πυρ(ΑΒΓ,Η) προς κάτι μικρότερο της πυρ.(ΔΕΖ,Θ)ή προς κάτι μεγαλύτερο
ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Χ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα·	(ΑΒΓ) / (ΔΕΖ) = =πυρ.(ΑΒΓ,Η)/Χ, όπου πυρ.(ΔΕΖ,Θ) > Χ. Έστω ότι η πυραμίδα ΔΕΖΘ έχει διαιρεθεί σε δύο ίσες μεταξύ τους

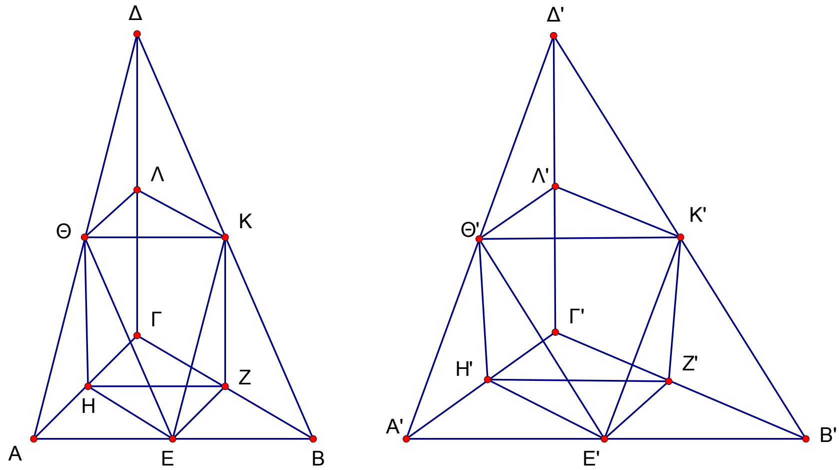
	πυραμίδες και όμοιες με την αρχική και σε δύο ίσα πρίσματα.
τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.	Τότε τα δύο πρίσματα είναι μεγαλύτερα από το μισό ολόκληρης της πυραμίδας (XII.3).
καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυρα- μίδος, αἵ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ΔΕ ΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ.	Έστω ότι οι πυραμίδες που προέκυψαν από την προηγούμενη διαίρεση ότι διαιρούνται όμοια και ότι αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου οι πυραμίδες που θα απομείνουν από τη συνεχή διαίρεση της πυραμίδας ΔΕΖΘ να είναι μικρότερες από το στερεό που υπερέχει η πυραμίδα ΔΕΖΘ του Χ (Χ.1).
λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕ ΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. Διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι·	Έστω ότι έχουν μείνει οι πυραμίδες ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ, τότε τα υπόλοιπα πρίσματα της πυραμίδας ΔΕΖΘ είναι μεγαλύτερα του στερεού Χ. Ας διαιρεθεί και η πυραμίδα ΑΒΓΗ όμοια και με τον ίδιο αριθμό φορών όπως η πυραμίδα ΔΕΖΘ.
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα.	Τότε είναι (ΑΒΓ) / (ΔΕΖ) = (πρίσματα στην ΑΒΓΗ) / (πρίσματα στην ΔΕΖΘ) (XII.4).
ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυρα- μὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν·	Τότε είναι (ΑΒΓ) / (ΔΕΖ) = (πρίσματα στην ΑΒΓΗ) / (πρίσματα στην ΔΕΖΘ) (XII.4).
καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσ- ματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα·	και άρα πυρ.(ΑΒΓ,Η) / Χ = (πρίσματα στην ΑΒΓΗ) / (πρίσματα στην ΔΕΖΘ)
ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσ- ματα.	εναλλάξ τώρα είναι πυρ.(ΑΒΓ,Η) / (πρίσματα στην ΑΒΓΗ) = = Χ / (πρίσματα στην ΔΕΖΘ)
μείζων δ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμά- των· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυρα-	Είναι όμως πυρ.(ΑΒΓ,Η) > (πρίσματα στην ΑΒΓΗ) και αρα το στερεό Χ μεγαλύτερο των πρισμάτων της πυραμίδας ΔΕΖΘ.

μίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.	Δηλαδή Χ > (πρίσματα στην ΔΕΖΘ) είναι όμως και μικρότερο που είναι άτοπο.
οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὔ- τως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυρα- μίδος στερεόν.	Άρα πυρ.(ΑΒΓ,Η) / Χ $\neq$ (.ΑΒΓ) / (ΔΕΖ) ,
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμί- δος στερεόν.	Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι (ΔΕΖ)/ (ΑΒΓ) $\neq$ πυρ.(ΔΕΖ,Θ)/Χ όπου Χ< πυρ.(ΑΒΓ,Η)
Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ·	Λέγω τώρα ότι πυρ.(ΑΒΓ,Η) / Χ $\neq$ (ΑΒΓ) /(ΔΕΖ) , όπου Χ > πυρ.(ΔΕΖ,Θ).
ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα	Αν ισχύει τότε (ΔΕΖ) /(ΑΒΓ) = Χ / πυρ.(ΑΒΓ,Η)
. ὡς δ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη·	θα είναι όμως Χ / πυρ.(ΑΒΓ,Η) = πυρ.(ΔΕΖ,Θ) / Υ, όπου Υ < πυρ.(ΑΒΓ,Η) (ΧΙΙ.2, Λήμμα)
καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη.	Και άρα (ΔΕΖ) /(ΑΒΓ) = πυρ.(ΔΕΖ,Θ) / Υ που είναι άτοπο. Υ < πυρ.(ΑΒΓ,Η)
. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖ- ζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν.	Δεν είναι άρα η βάση ΑΒΓ προς τη βάση ΔΕΖ όπως η πυρ.(ΑΒΓ,Η)προς κάτι μεγαλύτερο της πυρ.(ΔΕΖ,Θ),εδείχθη δε ούτε προς μικρότερο
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Άρα (ΑΒΓ) / (ΔΕΖ) = πυρ.(ΑΒΓ,Η) / πυρ.(ΔΕΖ,Θ). ο.ε. δ.

Πριν δούμε την απόδειξη της πρότασης αυτής με σύγχρονη ορολογία θα αναφέρουμε ορισμένες χρήσιμες προτάσεις .

Πρόταση 3(XII.3)

Κάθε τριγωνική πυραμίδα διαιρείται σε δύο πυραμίδες ίσες και όμοιες προς την αρχική και σε δύο ισοδύναμα πρίσματα .Το άθροισμα των δύο αυτών πρισμάτων υπερβαίνει το μισό της πυραμίδας .



Δηλαδή η πυραμίδα (ΑΒΓ.Δ) διαιρείται σε δύο πυραμίδες (ΘΛΚ.Δ), (ΑΗΕ.Θ) ίσες και όμοιες προς την αρχική και σε δύο ισοδύναμα πρίσματα (ΘΗΕ-ΚΖΒ), (ΗΓΖ-ΘΛΚ).Το άθροισμα των δύο αυτών πρισμάτων είναι μεγαλύτερο του μισού της πυραμίδας .

Λήμμα
Αν θεωρήσουμε και δεύτερη πυραμίδα που να έχει το ίδιο ύψος με την (ΑΒΓ.Δ),την (Α΄Β΄Γ΄.Δ΄), και θεωρήσουμε τα αντίστοιχα μέσα των ακμών της , τότε τα πρίσματα (ΚΛΘ-ΖΓΗ) και (Κ΄Λ΄Θ΄-Ζ΄Γ΄Η΄)είναι ανάλογα των βάσεων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.

Πρόταση 4 (XII.4)

Το άθροισμα των πρισμάτων στα οποία διαιρέθηκε η πυραμίδα (ΑΒΓ.Δ) και το άθροισμα των πρισμάτων στα οποία διαιρέθηκε (Α΄Β΄Γ΄.Δ΄) σύμφωνα με την πρόταση 3 και το Λήμμα που ακολούθησε, είναι ανάλογα των βάσεων τους .

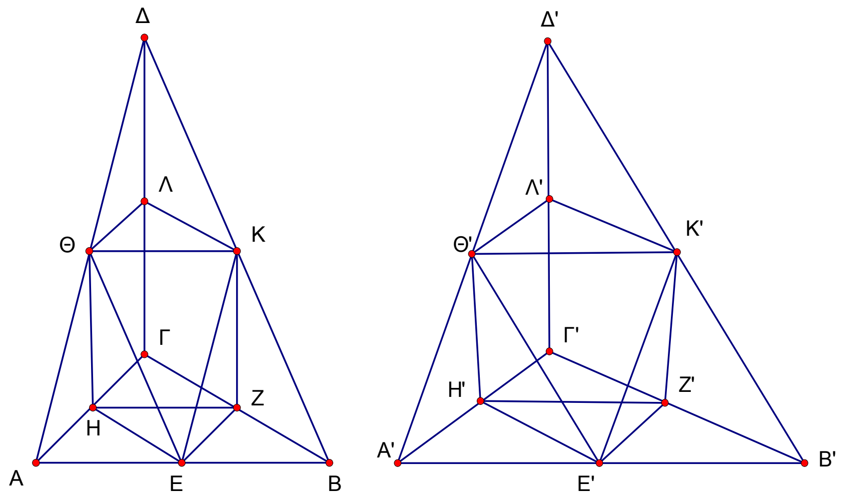
Δηλαδή $\dfrac{(\mathrm{K\Lambda\Theta - Z\Gamma H}) + (\mathrm{EH\Theta - BZK})}{(\mathrm{K'\Lambda'\Theta' - Z'\Gamma'H'}) + (\mathrm{E'H'\Theta' - B'Z'K'})} = \dfrac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})}$

Πρόταση 5(XII.5)

Αν δύο τριγωνικές πυραμίδες έχουν ίσα ύψη τότε είναι ανάλογες των βάσεων τους .

Απόδειξη

Συμβολίζουμε με V, V' τις τριγωνικές πυραμίδες Δ.ΑΒΓ και Δ΄.Α΄Β΄Γ΄και με b, b΄τις βάσεις τους ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄αντίστοιχα . Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{V}{V'}=\frac{b}{b'}$



Έστω ότι είναι $\frac{V}{V'}\neq\frac{b}{b'}$ τότε θα ισχύει $\frac{b}{b'}=\frac{V}{X}$ με $X\neq V'$

Α) Αρχικά υποθέτουμε ότι : $X<V'$. Τότε από προηγούμενη πρόταση αφαιρώντας από την πυραμίδα V' δύο πρίσματα ίσα με το Η΄Γ΄Ζ΄-Θ΄Λ΄Κ΄, αφαιρούμε ουσιαστικά ποσότητα μεγαλύτερη από $\frac{V'}{2}$.

Αν εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία στις πυραμίδες Α΄Η΄Ε΄. Θ΄ και Θ΄Κ΄Λ΄. Δ΄που απέμειναν ,τότε θα αφαιρέσουμε από αυτές ποσότητα μεγαλύτερη απο το μισό τους .

Επομένως σύμφωνα με το Γενικό Λήμμα για $\varepsilon=V'-X>0$ και για $\mathrm{P}_1',\mathrm{P}_2',....\mathrm{P}_\nu'$ τα πρίσματα που αφαιρέσαμε από την V΄,

θα υπάρχει κάποιο υπόλοιπο $V'-(\mathrm{P}_1'+\mathrm{P}_2'+....\mathrm{P}_\nu')<\varepsilon$.

Δηλαδή $V'-(\mathrm{P}_1'+\mathrm{P}_2'+....\mathrm{P}_\nu')<V'-X$, άρα $X<(\mathrm{P}_1'+\mathrm{P}_2'+....\mathrm{P}_\nu')$.(**1**)

Αν $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,.....,\mathrm{P}_\nu$ είναι τα αντίστοιχα πρίσματα που αφαιρούμε από την V , τότε τα πρίσματα. $\mathrm{P}_\kappa,\mathrm{P}_\kappa',\kappa=1,2,....,\nu,$ που είναι τριγωνικά και έχουν βάσεις όμοιες με τις b,b' ,έχουν ίσα ύψη , οπότε θα ισχύει

$\frac{\mathrm{P}_\kappa}{\mathrm{P}_\kappa'}=\frac{b}{b'}$. για $\kappa=1,2,....,\nu,$

Έτσι , τελικά θα έχουμε $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_1'}=\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_2'}$ = . . .= $\frac{\mathrm{P}_\nu}{\mathrm{P}_\nu'}=\frac{b}{b'}$

Άρα θα είναι και

$$\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_\nu}{P_1' + P_2' + \dots + P_\nu'} = \frac{b}{b'} = \frac{V}{X}$$

$$\text{οπότε } \frac{X}{P_1' + P_2' + \dots + P_\nu'} = \frac{V}{P_1 + P_2 + \dots P_\nu} > 1$$

αφού $V > P_1 + P_2 + \dots P_\nu$ επομένως θα ισχύει η σχέση
$X > P_1' + P_2' + \dots P_\nu'$ (**2**)

Οι σχέσεις (1), (2) όμως οδηγούν σε άτοπο , άρα δεν μπορεί να ισχύει $X < V'$

Β) Έστω $X > V'$. Τότε $\frac{b'}{b} = \frac{X}{V}$

Αν $\frac{X}{V} = \frac{V'}{T}$ τότε $\frac{V}{T} = \frac{X}{V'} > 1$ αφού $X > V'$.

Άρα $V > T$.

Επομένως $\frac{b'}{b} = \frac{V'}{T}$ με $T < V$.

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση και οδηγεί

στις σχέσεις $T < P_1 + P_2 + \dots P_\nu$ και $T > P_1 + P_2 + \dots P_\nu$, οι οποίες αντιφάσκουν .
Επομένως δεν μπορεί να ισχύει ούτε η σχέση $X > V'$.

Άρα έχουμε $\frac{b}{b'} = \frac{V}{V'}$

Πρέπει λοιπόν να ισχύει $X = V'$ ο.ε.δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ - ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Χρειάστηκε να περάσει περισσότερο από ένας αιώνας από την εποχή που έζησε ο Εύδοξος (408-355π.χ.) για να εμφανιστεί ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287-212 π.χ.) ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας και από τους μεγαλύτερους όλων των εποχών. Στο κεφάλαιο αυτό στην αρχή θα παρουσιάσουμε εν συντομία τη ζωή του Αρχιμήδη και θα εκθέσουμε τις απόψεις διαφόρων μελετητών για το έργο του.
Στα προηγούμενα είδαμε ότι για ν' αποδειχτεί ένα αποτέλεσμα με την μέθοδο της εξάντλησης πρέπει αυτό να είναι γνωστό από πριν. Ένεκα τούτου οι μαθηματικοί το αναζητούσαν πρώτα με άλλη μέθοδο, περισσότερο δοκιμαστική και λιγότερο αυστηρή.
Στη συνέχεια θα δούμε πώς ο Αρχιμήδης εφεύρε το εμβαδόν της παραβολής με την μέθοδο της ισορροπίας και πώς απέδειξε αυτό με γεωμετρικό τρόπο.

1. ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Η πιο εξέχουσα φυσιογνωμία , από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας , είναι ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος . Από όλους χωρίς αμφισβήτηση θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών . Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε το 287 π.χ. Ήταν γιος του αστρονόμου Φειδία και είχε στενές σχέσεις ,ίσως και συγγενικές με τον βασιλιά Ιέρωνα και με τον γιο του Γέλωνα. Από ένα απόσπασμα του Διόδωρου φαίνεται ότι έζησε κάποιο χρονικό διάστημα στην Αίγυπτο , και η παραμονή του εκεί του έδωσε την ευκαιρία για την ανακάλυψη του αποκαλούμενου αρχιμήδειου κοχλία ως μέσου άντλησης νερού. Φαίνεται να είναι βέβαιο ότι είχε σχέσεις με την Αλεξανδρινή σχολή της Αιγύπτου . Ειδικότερα είχε επιστημονική επαφή με τον Ερατοσθένη της Κυρηνείας , διευθυντή της Βιβλιοθήκης της Αλεξανδρείας και με τον διάδοχο του Ευκλείδη στην Αλεξανδρινή Σχολή, Κόνωνα τον Σάμιο. Στον Κόνωνα ο Αρχιμήδης , συνήθιζε να στέλνει τις πραγματείες του πριν από την δημοσίευση τους ενώ στον Ερατοσθένη έστειλε το έργο του« Η Μέθοδος» με μια εισαγωγική επιστολή η οποία παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον , καθώς και το περίφημο Βοεικό πρόβλημα (van der Waerden [13]).

Τα έργα του Αρχιμήδη είναι πολλά και αναφέρονται σε πολλούς τομείς της επιστήμης . Δεν είναι όμως το πλήθος εκείνο που αφήνει έκθαμβο τον αναγνώστη των έργων του , όσο το περιεχόμενο των μαθηματικών αληθειών που δίνει. Οι πιο σημαντικές συνεισφορές του Αρχιμήδη στα μαθηματικά ανήκουν στον τομέα που αποκαλούμε σήμερα «ολοκληρωτικό λογισμό».Ασχολείται με θεωρήματα για τα εμβαδά επιπέδων σχημάτων και τους όγκους στερεών σωμάτων . Στο βιβλίο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησης »παρέχονται προσεγγίσεις για το μήκος της περιφέρειας του κύκλου .Τις βρίσκει εγγράφοντας και περιγράφοντας στον κύκλο κανονικά πολύγωνα . Φτάνοντας διαδοχικά σε πολύγωνα 96 πλευρών καταλήγει στο ότι το π είναι περίπου ίσο με $3\frac{1}{7}$.Στο «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» ,βρίσκει με τι ισούται το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας (το εκφράζει λέγοντας ότι η επιφάνεια της σφαίρας είναι τετραπλάσια από την επιφάνεια ενός μέγιστου κύκλου της) ,επίσης πόσος είναι ο όγκος της σφαίρας (αποδεικνύοντας ότι ο όγκος της είναι ίσος με τα 2/3 του όγκου του περιγεγραμμένου στη σφαίρα κυλίνδρου). Στον «τετραγωνισμό ορθογωνίου κώνου τομής »δίνεται η έκφραση του εμβαδού ενός παραβολικού τμήματος. Στο βιβλίο «Περί ελίκων»συναντάμε την «έλικα του Αρχιμήδη»και διάφορους υπολογισμούς εμβαδών. Στο βιβλίο περί «Κωνοειδέων και σφαιροειδέων»,δίνονται οι όγκοι μερικών επιφανειών δευτέρου βαθμού που προκύπτουν από περιστροφή. Το όνομα του Αρχιμήδη έχει επίσης συνδεθεί με το θεώρημά του που αναφέρεται στην απώλεια βάρους των σωμάτων όταν βυθιστούν σε υγρό. Το θεώρημα αυτό βρίσκεται στο βιβλίο του «Περί οχουμένων» , το οποίο αποτελεί μία πραγματεία πάνω στην Υδροστατική. Όλα αυτά τα έργα του Αρχιμήδη διαπνέονται από μία εκπληκτική πρωτοτυπία σκέψης , συνδυασμένη με αυστηρότητα στις αποδείξεις και μεγάλη ικανότητα στην τεχνική των υπολογισμών.(D. Struik[14]).

Ο Γ. Χριστιανίδης [15] αναφερόμενος στο επιστημονικό έργο του Αρχιμήδη το συνοψίζει στα ακόλουθα:
1).Στην προσοικείωση των «απειροστικών» μεθόδων του Ευδόξου και στην επιτυχή εφαρμογή τους για την απόδειξη των τύπων που δίνουν τα εμβαδά και τους όγκους πολλών σχημάτων.
2) Στην ανάπτυξη ευρετικών μεθόδων βάσει των οποίων ήταν σε θέση να γνωρίζει πολλά μαθηματικά αποτελέσματα προτού τα αποδείξει με αυστηρό (γεωμετρικό) τρόπο.
Ευρετικές μεθόδους χρησιμοποιούσαν ασφαλώς και οι άλλοι Έλληνες μαθηματικοί, ο Αρχιμήδης όμως διαφοροποιείται από εκείνους ως προς το ότι δεν δίσταζε να κοινοποιεί τις ευρετικές μεθόδους του ενώ ένα άλλο στοιχείο που τον χαρακτηρίζει είναι ότι δεν απαξιούσε να εκτελεί περίπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς και να παραθέτει τα αποτελέσματα τους.
3) Τέλος ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος μαθηματικός στην Ιστορία που επεξεργάστηκε μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή φυσικών φαινομένων, ενώ διακρίθηκε επίσης στην επινόηση διαφόρων μηχανικών κατασκευών , η λειτουργία των οποίων βασίζεται στην εφαρμογή φυσικών αρχών .
Ο Heath[3] αναφέρει για τον γενικό χαρακτήρα των έργων του Αρχιμήδη τα εξής :«Όλες χωρίς εξαίρεση οι πραγματείες είναι μνημεία μαθηματικής

του , σαν να είναι απρόθυμος ν’ αποδώσει στην αιωνιότητα τα μυστικά της μεθόδου του , ενώ συγχρόνως επιθυμεί ν’ αποσπάσει απ’ αυτήν την επιδοκιμασία για τ’ αποτελέσματα του».
Ο Wallis θα διαψευστεί όμως αργότερα όταν ο Δανός φιλόλογος J.L .Heiberg θ’ ανακάλυπτε το 1906 στην Κωνσταντινούπολη ένα παλίμψηστο χειρόγραφο στο οποίο ήταν γραμμένο το πιο εκπληκτικό έργο του Αρχιμήδη που είχε τίτλο :«Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην Εφοδος ».
Απευθυνόμενος προς τον Ερατοσθένη περιγράφει συστηματικά όχι την απόδειξη αλλά πως συνέλαβε τα σημαντικά του αποτελέσματα ,και εκεί αποκαλύπτεται ότι στην πραγματικότητα ακολουθούσε μια μέθοδο απειροστικού λογισμού όμοια μ’ εκείνη των αδιαιρέτων την οποία ανακάλυψε 2000 χρόνια αργότερα ο Cavalieri.

2. Ο ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Η εργασία αυτή αρχίζει με μία επιστολή του Αρχιμήδη προς τον Δοσίθεο , στην οποία αναφέρει:

«᾿Ακούσας Κόνωνα μ ν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδ ν
ἐπιλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τὶν δ Κόνωνος γνώριμον
γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον ε μεν τοῦ μ ν τετε-
λευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημες ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς
γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος,
ἐπροχειριξάμεθα δ ἀποστεῖλαί τοι γράψαντες, ὡς Κόνωνι
γράφειν ἐγνωκότες ἦμες, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ
πρότερον μ ν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δ ὑφ' ἁμῶν
τεθεώρηται, πρότερον μ ν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα
δ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν.»

Λυπήθηκα για τον θάνατο του Κόνωνα που υπήρξε φίλος μου και ταυτόχρονα εξαίρετος μαθηματικός και σκέφτηκα να στείλω σε σένα γραπτώς ,όπως σκόπευα να κάνω με τον Κόνωνα, κάποια γεωμετρικά θεωρήματα που δεν είχα εξετάσει μέχρι τώρα, τα οποία όμως εξέτασα και τα οποία βρήκα πρώτα με τη μηχανική , αλλά έπειτα τα απέδειξα και με τη γεωμετρία.
Σε μία άλλη όμως πραγματεία του με τίτλο
‘’ Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην
έφοδος ‘’απευθυνόμενος στον Ερατοσθένη λέει :

῾Ορῶν δέ σε, καθάπερ λέγω,	Βλέποντας μάλιστα όπως έχω

σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ' ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν	ξαναπεί ,να είσαι φιλέρευνος , να κατέχεις τα φιλοσοφικά ζητήματα και να ξέρεις να εκτιμάς τη μαθηματική θεώρηση στα καινούρια προβλήματα, έκρινα σωστό να σου γράψω και στο ίδιο βιβλίο να αναπτύξω τις χαρακτηριστικές ιδιότητες μιας μεθόδου που θα σου δώσει τη δυνατότητα να προσεγγίζεις κάποιες μαθηματικές προτάσεις μέσω της μηχανικής.
Τοῦτο δ πέπεισμαι χρήσιμον ε ναι οὐδ ν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων	Είμαι βέβαιος οτι αυτό είναι εξ ίσου χρήσιμο και στην απόδειξη αυτών των θεωρημάτων
Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως	Άλλωστε κάποιες ιδιότητες που στην αρχή μου αποκαλύφθηκαν με τη μηχανική στη συνέχεια αποδείχθηκαν με τη γεωμετρία , διότι η προσέγγιση που γίνεται με τη μέθοδο αυτή δεν επιδέχεται απόδειξης.
ε ναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητει	Είναι ευκολότερο να οδηγηθείς στην απόδειξη ,εάν έχεις αποκτήσει εκ των προτέρων κάποια γνώση του πράγματος ,παρά αν ψάχνεις κάτι για το οποίο δεν έχεις την παραμικρή ιδέα.

Στην συνέχεια ο Αρχιμήδης εξηγεί τους λόγους που θέλησε να αναλύσει και να δημοσιεύσει αυτή τη μέθοδο .

Ἡμῖν δ συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδομένου
θεωρήματος τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι·
ἠβουλήθην δ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα
μ ν καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπ ρ αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν
κενὴν φωνὴν καταβεβλῆσθαι, ἅμα δ καὶ πεπεισμένος
εἰς τὸ μάθημα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρείαν· ὑπο-
λαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ
τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω
ἡμῖν συνπαραπεπτωκότα εὑρήσειν.

Πρώτος λογος

Επειδή είχε γίνει αναφορά σε αυτήν παλαιότερα δεν ήθελε να σκεφτούν κάποιοι ότι λέει κούφια λόγια.

Δεύτερος λόγος

Επειδή πίστευε ότι αρκετοί ερευνητές τωρινοί ή μελλοντικοί θα μπορέσουν να ανακαλύψουν με τη βοήθεια της μεθόδου αυτής και νέα θεωρήματα τα οποία μέχρι τότε δεν ήταν δυνατόν να διατυπωθούν.

Εμείς εδώ θα ασχοληθούμε με το πρώτο θεώρημα που συνέλαβε μέσω της μηχανικής ο Αρχιμήδης ,ότι δηλαδή κάθε τμήμα παραβολής ισοδυναμεί με τα 4/3 τριγώνου που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το τμήμα.

2.1 ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ (ευρετική μέθοδος)

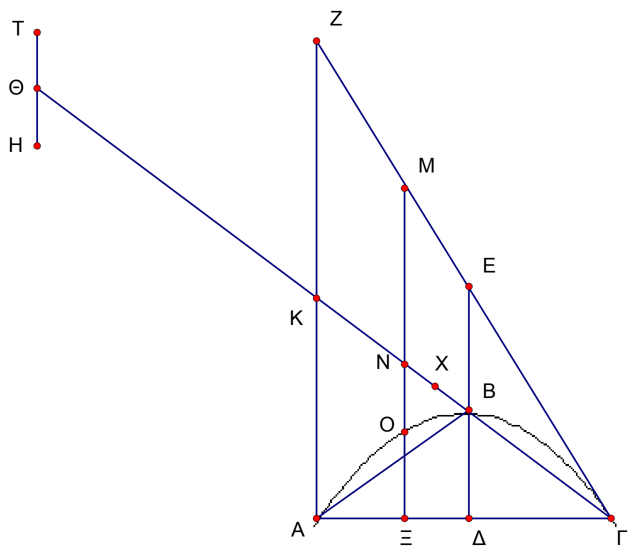
ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Ἔστω τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ, καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ.

Λέγω ὅτι ἐπίτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Έστω το τμήμα ΑΒΓ το περιεχόμενο υπό της ευθείας ΑΓ και της παραβολής ΑΒΓ .Ας τμηθεί η ΑΓ στο μέσον, στο σημείο Δ , ας αχθεί η ΔΒΕ παράλληλη προς τη διάμετρο και ας αχθούν οι ΑΒ, ΒΓ .
Λέγω ότι το τμήμα ΑΒΓ είναι ένα και ένα τρίτο του τριγώνου ΑΒΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Φέρουμε από το Α την παράλληλη προς την διάμετρο ΒΔ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο τέμνει την εφαπτομένη στο σημείο Γ της καμπύλης και Κ το σημείο στο οποίο τέμνει τη ΒΓ.

Έστω επίσης, Ε το σημείο στο οποίο η ΒΔ τέμνει την ΓΖ . Από τυχόν σημείο Ξ της ΑΓ φέρουμε στη ΒΔ παράλληλη η οποία τέμνει την καμπύλη στο Ο, τη ΒΓ στο Ν και τη ΓΖ στο Μ.

Τέλος προεκτείνουμε την ΚΓ κατά μήκος ΚΘ=ΚΓ

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί στο σημείο αυτό δύο ιδιότητες της παραβολής.
$1^η$ Ιδιότητα

ΒΔ=ΒΕ
Απ' αυτήν συμπεραίνει ότι ΚΑ =ΚΖ και ΝΞ=ΝΜ

$2^η$ Ιδιότητα
$\frac{ΟΞ}{ΞΜ} = \frac{ΑΞ}{ΑΓ}$ απ' αυτήν συνάγει ότι $\frac{ΟΞ}{ΞΜ} = \frac{ΑΞ}{ΑΓ} = \frac{ΚΝ}{ΚΓ} = \frac{ΚΝ}{ΚΘ}$

Στο σημείο αυτό ο Αρχιμήδης έχοντας υπ' όψιν τη συνθήκη ισορροπίας του ζυγού κάνει τον εξής συλλογισμό.

«Εάν πάρουμε την ΤΗ ίση προς την ΞΟ θα ισορροπήσει η ΤΘΗ με την ΜΞ, διότι η ΘΝ τέμνεται σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα των βαρών ΤΗ ,ΜΞ και είναι $\frac{ΚΝ}{ΚΘ} = \frac{ΤΗ}{ΞΜ}$ ».

Αν τώρα φανταστούμε ότι το τρίγωνο ΑΓΖ συγκροτείται από όλες τις παράλληλες προς την ΞΜ ευθείες , ομοίως και το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ θα αποτελείται από όλες τις παράλληλες προς την ΟΞ ευθείες .

Αν μεταφέρουμε όλες αυτές τις τελευταίες ευθείες περί το σημείο Θ, το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ θα ανασυγκροτηθεί γύρω από το Θ (δηλαδή με το Θ ως κέντρο βάρους) και θα ισορροπεί με το τρίγωνο ΑΖΓ.

Έστω Χ το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΖΓ .
Θεωρούμε την ευθεία ΘΓ ως φάλαγγα ενός ζυγού εφαρμοζόμενη στο σημείο Κ.
Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο ζυγός ισορροπεί όταν τοποθετήσουμε το μεν παραβολικό χωρίο ΑΒΓ στο άκρο Θ της φάλαγγας (έτσι ώστε το Θ να είναι το κέντρο βάρους), το δε τρίγωνο ΑΖΓ στο σημείο Χ της φάλαγγας .
Από τη συνθήκη ισορροπίας του ζυγού έχουμε.

$$\frac{(\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o \mathrm{A\Gamma Z})}{(\tau\mu\eta\mu\alpha \mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{K\Theta}}{\mathrm{KX}}$$

Αλλά $\frac{\mathrm{K\Theta}}{\mathrm{KX}} = \frac{\mathrm{K\Gamma}}{\mathrm{KX}} = \frac{3}{1}$

Άρα

$$\frac{(\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o \mathrm{A\Gamma Z})}{(\tau\mu\eta\mu\alpha \mathrm{AB\Gamma})} = \frac{3}{1}$$

και επομένως (τρίγωνο ΑΖΓ)= 3(τμήμα ΑΓΒ)

Ισχύει όμως

(τρίγωνο ΑΖΓ)=2(τρίγωνο ΑΓΚ)= 4(τρίγωνο ΑΒΓ)

Άρα συμπεραίνουμε ότι 4(τρίγωνο ΑΒΓ)= 3(τμήμα ΑΓΒ)

Δηλαδή (παραβολικό χωρίο ΑΒΓ)= $\frac{4}{3}$ (τριγώνου ΑΓΒ)

Αυτό είναι το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγει η πρόταση 1 και αυτή είναι η μέθοδος δια της οποίας ο Αρχιμήδης οδηγήθηκε σε αυτό.

Η ευρετική μέθοδος του Αρχιμήδη ήταν αυτή της ισορροπίας . Για τον υπολογισμό των εμβαδών ή των όγκων έκοβε την επιφάνεια ή το σώμα σ' ένα πολύ μεγάλο αριθμό, λεπτών παραλλήλων μεταξύ των ταινιών, που τα φανταζόταν να είναι κρεμασμένα από το άκρο ενός δοσμένου μοχλού , ώστε να ισορροπεί μ' ένα σχήμα με γνωστό το κέντρο βάρους του .
Στην ουσία ο Αρχιμήδης ισορροπούσε ένα γνωστό εμβαδόν μ' ένα άγνωστο , οπότε η θέση του υπομοχλίου καθόριζε τη σχέση των μεγεθών τους (Howard Eves[5]).

Ο Αρχιμήδης όμως στην πραγματεία του « προς Ερατοσθένην έφοδος» (88 16- 22) αναφέρει:

Τοῦτο δὴ διὰ μ ν τῶν νῦν εἰρημένων οὐκ ἀποδέδεικται, ἔμφασιν δέ τινα πεποίηκε τὸ συμπέρασμα ἀληθ ς ε ναι· διόπερ ἡμεῖς ὁρῶντες μ ν οὐκ ἀποδεδειγμένον	Βεβαίωs αυτό δεν αποδείχτηκε με τα όσα ειπώθηκαν , αλλά δόθηκε η εντύπωση ότι το συμπέρασμα είναι αληθές. Για αυτό τον λόγο και εμείs βλέποντας ότι δεν αποδείχτηκε

ὑπονοοῦντες δ τὸ συμπέρασμα ἀληθ ς ε ναι, τάξομεν τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν ἐκδο-. θεῖσαν πρότερον.	και υποθέτοντας οτι το συμπέρασμα είναι αληθές θα δώσουμε με τη σειρά της την γεωμετρική απόδειξη που βρήκαμε και δημοσιεύσαμε παλαιότερα

Γι' αυτό σε μία άλλη πραγματεία με τίτλο τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής (δηλαδή τετραγωνισμός παραβολής) επανέρχεται στο ίδιο θεώρημα και δίνει δύο αυστηρές αποδείξεις την μια μηχανική και την άλλη γεωμετρική.

Το ερώτημα που εγείρεται φυσιολογικά είναι το εξής .
Γιατί ο Αρχιμήδης θεωρεί οτι η περιγραφείσα ευρετική μέθοδος δεν είναι επαρκής για να θεωρηθεί το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε έγκυρο από μαθηματικής πλευράς ;
Ο Γ . Χριστιανίδης [15]αναφέρει:
«Μια αποκωδικοποίηση της μεθόδου δείχνει ότι αυτή χαρακτηρίζεται από την χρησιμοποίηση δύο διαφορετικού χαρακτήρα επιχειρημάτων.
1. .Πρώτα –πρώτα χρησιμοποιεί συλλογισμούς από τη Μηχανική και πιο συγκεκριμένα από την Στατική . Θεωρεί τα γεωμετρικά σχήματα να κρέμονται από τη φάλαγγα ενός νοητού ζυγού με τρόπο ώστε ο ζυγός να ισορροπεί και διατυπώνει τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να υπάρχει αυτή η ισορροπία .
2. Επιπλέον θεωρεί ότι ένα επίπεδο σχήμα δομείται από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται σε ορισμένη διεύθυνση και έχουν τα άκρα τους στην περιφέρεια του σχήματος . Ένα επίπεδο σχήμα λοιπόν, μπορεί να αποδομηθεί σε τέτοιες παράλληλες χορδές με ορισμένα μήκη και να δομηθεί εκ νέου από αυτές. Το άθροισμα των ευθυγράμμων τμημάτων δίνει την επιφάνεια του σχήματος. Θα ονομάσουμε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα «ΑΔΙΑΙΡΕΤΑ» Η αντίληψη αυτή επεκτείνεται και στην περίπτωση των σχημάτων του χώρου , τα οποία είναι δυνατόν να αποδομηθούν σε παράλληλες επίπεδες τομές.
Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα δύο επιχειρήματα τα οποία χρησιμοποιούνται στη συλλογιστική που αναπτύσσει ο Αρχιμήδης κατά την εφαρμογή της μεθόδου προκύπτει αβίαστα το συμπέρασμα ότι:Η έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας της μεθόδου οφείλεται κατά τον Αρχιμήδη αποκλειστικά και μόνο στην χρήση των αδιαιρέτων. Αντίθετα η χρησιμοποίηση αντλημένων από την Μηχανική (στατική) επιχειρημάτων δεν δημιουργεί απολύτως κανένα πρόβλημα Άλλωστε η μία από τις δύο αυστηρές αποδείξεις του ίδιου θεωρήματος που δίνει ο Αρχιμήδης στον τετραγωνισμό ορθογωνίου κώνου τομής είναι Μηχανικού χαρακτήρα.

Το πρόβλημα λοιπόν βρίσκεται στη χρήση των αδιαιρέτων

Πράγματι η αποδόμηση ενός σχήματος επιπέδου σε «αδιαίρετα »[ή ενός στερεού σε παράλληλες επίπεδες τομές] και η εν συνεχεία αναδόμηση του από όλα αυτά δίνει αφορμή να εμφανιστεί αμέσως ένα παράδοξο.
ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ
Για να μπορεί να εφαρμοστεί η συνθήκη ισορροπίας του ζυγού , οι γραμμές στις οποίες αποδομείται το επίπεδο σχήμα πρέπει, προφανώς

να έχουν βάρος .Αν θεωρηθεί όμως ότι το εκάστοτε σχήμα συγκροτείται από άπειρες γραμμές (ο Αρχιμήδης μιλάει για « όλες» τις γραμμές) κάθε γραμμή πρέπει να έχει κατ ΄ανάγκη μηδενικό πάχος και άρα, μηδενικό βάρος . Διαφορετικά αν δηλαδή το πάχος των γραμμών δεν ήταν μηδενικό , το καμπύλο τμήμα της περιφέρειας του παραβολικού χωρίου δεν θα ήταν στην πραγματικότητα καμπύλο αλλά βαθμοειδές .
Αυτό είναι το μαθηματικό παράδοξο που υπάρχει στην περιγραφείσα μέθοδο. Ο Αρχιμήδης έχει πλήρη επίγνωση του προβλήματος αυτού και γι΄ αυτό θεωρεί ότι η μέθοδος δεν είναι στέρεα θεμελιωμένη από μαθηματικής απόψεως και επομένως δεν μπορεί να εκληφθεί ως αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος Η μέθοδος είναι γι¨ αυτόν μόνο ευρετική.

Όπως είδαμε ο Αρχιμήδης αλλά και πριν απ ‘ αυτόν ο Δημόκριτος χρησιμοποίησαν μεθόδους που κατά πάσα πιθανότητα ενέπνευσαν αργότερα τον Cavalieri να αναπτύξει τη θεωρία των αδιαιρέτων για τον υπολογισμό εμβαδών επιπέδων και όγκο στερεών σχημάτων».

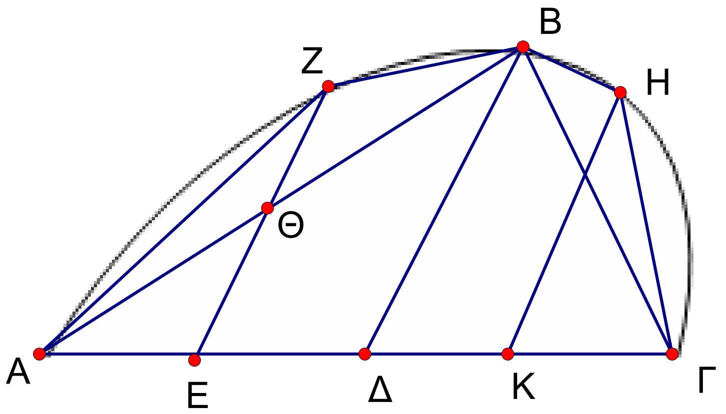
2.2 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ)

Πριν από την απόδειξη του θεωρήματος του τετραγωνισμού της παραβολής θα παραθέσουμε δύο προτάσεις του Αρχιμήδη , τις οποίες χρησιμοποιεί για την απόδειξη του πιο πάνω θεωρήματος .

ΠΡΟΤΑΣΗ 21

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμάματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται	Αν σε τμήμα που περιέχεται μεταξύ ευθείας και παραβολής εγγραφεί τρίγωνο που να έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το τμήμα και εάν στα τρίγωνα που παραλείπονται εγγραφούν άλλα τρίγωνα που να έχουν και αυτά την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με τα τμήματα, το τρίγωνο που έχει εγγραφεί σε ολόκληρο το τμήμα θα είναι οκταπλάσιο

τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμᾶμα ἐγγραφέν.	καθενός από τα τρίγωνα που έχει εγγραφεί στα παραλειπόμενα τμήματα



Παρατηρήσεις

Ύψος του παραβολικού χωρίου ο Αρχιμήδης εννοεί την απόσταση της εφαπτομένης της παράλληλης προς την ΑΓ από την ΑΓ.
Διάμετρο θεωρεί τον άξονα της παραβολής .
Σε προηγούμενο θεώρημα έχει αποδείξει ότι η παράλληλη προς τον άξονα από το μέσον της χορδής ΑΓ περνά από την κορυφή Β του τμήματος ,καθώς και ότι ΒΔ=4/3ΕΖ

Εστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα οἷον εἴρηται,	Έστω ΑΒΓ το τμήμα της υπόθεσης
καὶ τετμάσθω ἁ ΑΓ δίχα τῷ Δ, ἁ δ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον·	έστω ότι η ΑΓ έχει τμηθεί στο μέσον της Δ και έστω ότι η ΒΔ έχει αχθεί παράλληλα προς την διάμετρο
τὸ Β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστιν τοῦ τμάματος.	συμπεραίνουμε ότι το σημείο Β είναι η κορυφή του τμήματος .
Τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό.	Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το τμήμα
Πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ ΑΔ τῷ Ε, καὶ	Τέμνουμε πάλι την ΑΔ στο μέσον

ἄχθω ἁ ΕΖ παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω δ ἁ ΑΒ κατὰ τὸ Θ·	της Ε και φέρνουμε την ΕΖ παράλληλη με την διάμετρο και έστω ότι η ΑΒ τέμνεται από την ΕΖ στο σημείο Θ,
τὸ ἄρα Ζ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος τοῦ ΑΖΒ.	άρα το σημείο Ζ είναι η κορυφή του τμήματος ΑΖΒ .
Τὸ δὴ ΑΖΒ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ [ΑΖΒ] τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό.	Το τρίγωνο, τώρα ΑΖΒ έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το τμήμα ΑΖΒ.
. Δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΖΒ τριγώνου	Πρέπει να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το οκταπλάσιο του τριγώνου ΑΖΒ

Εστιν οὖν ἁ ΒΔ τᾶς μ ν ΕΖ ἐπίτριτος, τᾶς δ ΕΘ διπλασία·	Η ΒΔ λοιπόν , ισούται με τα 4 /3 της ΕΖ και είναι διπλάσια από την ΕΘ .
διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΕΘ τᾶς ΘΖ. ῞	Άρα η ΕΘ είναι διπλάσια της ΘΖ.
Ωστε καὶ τὸ ΑΕΒ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΒΑ·	Συνεπώς και το τρίγωνο ΑΕΒ είναι διπλάσιο από το ΖΑΒ ,
τὸ μ ν γὰρ ΑΕΘ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΘΖ, τὸ δ ΘΒΕ τοῦ ΖΘΒ.	διότι το ΑΕΘ είναι διπλάσιο του ΑΘΖ και το ΘΒΕ είναι διπλάσιο του ΖΘΒ.
῞Ωστε τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΖΒ ἐστὶν ὀκταπλάσιον	Επομένως το ΑΒΓ είναι οκταπλάσιο του ΑΖΒ.
Ομοίως δ δειχθήσε- ται καὶ τοῦ εἰς τὸ ΒΗΓ τμᾶμα ἐγγραφέντος.	Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι είναι οκταπλάσιο και του τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στο τμήμα ΒΗΓ.

Αν συμβολίσουμε με S το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου ΑΒΓ , τότε το S αποτελείται ουσιαστικά από το άπειρο άθροισμα.

$$S=(ΑΒΓ)+\frac{1}{4}(ΑΒΓ)+\frac{1}{4^2}(ΑΒΓ)+\cdots+\frac{1}{4^\nu}(ΑΒΓ)+\cdots=$$

$$(ΑΒΓ).\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^\nu}+\cdots\right)$$

Σήμερα βέβαια το άθροισμα $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^\nu}+\cdots$ ως άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ= $\frac{1}{4} \in (-1, 1)$ ξέρουμε ότι

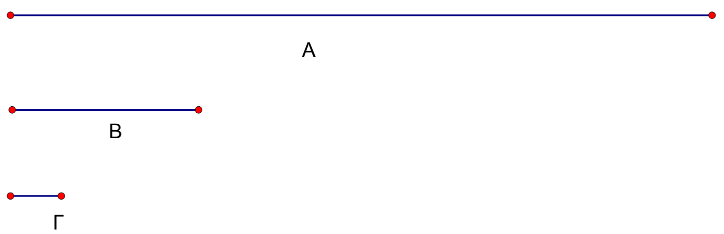
ισούται με $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

Ο Αρχιμήδης όμως για να καταλήξει σ΄ αυτό το συμπέρασμα χωρίς να χρησιμοποιήσει την έννοια του ορίου που ήταν άγνωστη στην εποχή του επινόησε το εξής τέχνασμα εργαζόμενος βέβαια μέχρι το S_5

ΠΡΟΤΑΣΗ 23.

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου	Εάν δίνεται μια σειρά μεγεθών με λόγο τέσσερα, το άθροισμα των μεγεθών αυτών συν το ένα τρίτο του μικροτέρου θα ισούται με τα τέσσερα τρίτα του μεγαλυτέρου.

Ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε τετραπλασίονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου	Έστω λοιπόν μια σειρά οσωνδήποτε τον αριθμό μεγεθών Α, Β, Γ, Δ, Ε, τέτοια ώστε καθένα τους να είναι τετραπλάσιο του επομένου του.



, μέγιστον δ ἔστω τὸ Α, ἔστω δ τὸ μ ν Ζ τρίτον τοῦ Β, τὸ δ Η τοῦ Γ, τὸ δ Θ τοῦ Δ, τὸ δ Ι τοῦ Ε	Έστω επίσης μεγαλύτερο το Α και έστω το Ζ = $\frac{1}{3}$Β, Η= $\frac{1}{3}$Γ,Θ=$\frac{1}{3}$Δ, Ι=$\frac{1}{3}$Ε .
Ἐπεὶ οὖν τὸ μ ν Ζ τοῦ Β τρίτον μέρος ἐστίν,	Επειδή λοιπόν το μεν Ζ= $\frac{1}{3}$ Β,το δε

τὸ δ Β τοῦ Α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ Β, Ζ μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Η, Γ τοῦ Β καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ Ι, Ε τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ	$Β=\frac{1}{4}Α$, θα είναι $Β+Ζ=\frac{1}{3}Α$. Για τους αυτούς λόγους είναι και $Η+Γ=\frac{1}{3}Β$, $Θ+Δ= \frac{1}{3}Γ$ και $Ι+Ε= \frac{1}{3}Δ$, Έτσι θα είναι $Β+Ζ=\frac{1}{3}Α$. $Η+Γ=\frac{1}{3}Β$, $Θ+Δ= \frac{1}{3}Γ$ $Ι+Ε= \frac{1}{3}Δ$, , από το άθροισμα τους θα είναι $Β+Γ+Δ+Ε+Ζ+Η+Θ+Ι=$ $\frac{1}{3}(Α.+ Β+Γ+Δ\ )$.
Ἐντὶ δ καὶ αὐτὰ τὰ Ζ, Η, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν Β, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ Α. Δῆλον οὖν ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ τὸ Ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ Ε, τοῦ Α ἐστὶν ἐπίτριτα.	Είναι δε και $Ζ+Η+Θ=\frac{1}{3}(\ Β+Γ+Δ\ )$ και τα λοιπά άρα $Β+Γ+Δ+Ε+Ι=\frac{1}{3}Α$. Είναι λοιπόν φανερό ότι το συνολικό άθροισμα Α+Β+Γ+Δ+Ε συν το Ι, τουτέστιν, το $\frac{1}{3}Ε$,είναι ίσο με $\frac{4}{3}Α$. ΔΗΛΑΔΗ $Α+ Β+Γ+Δ+Ε+\frac{1}{3}Ε=\frac{4}{3}Α$

Εφαρμόζοντας το τέχνασμα αυτό μπορούμε να βρούμε μια αναδρομική σχέση για την ακολουθία (S_ν) με $S_\nu = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^\nu}, \quad \forall \nu \in N$

$$S_\nu+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\nu}== 1 \ + \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu-1}}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{3}\frac{1}{4^\nu}=$$

$$(\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu-1}})+\frac{4}{3}\frac{1}{4^\nu}= \quad S_{\nu-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{\nu-1}}$$

ΟΜΟΙΩΣ

$$S_{\nu-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{\nu-1}}= S_{\nu-2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{4^{\nu-2}}$$

και τελικά

$$S_\nu+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\nu}= S_1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{3} \qquad \forall \nu\in N^*$$

Άρα $S_\nu=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\nu}$

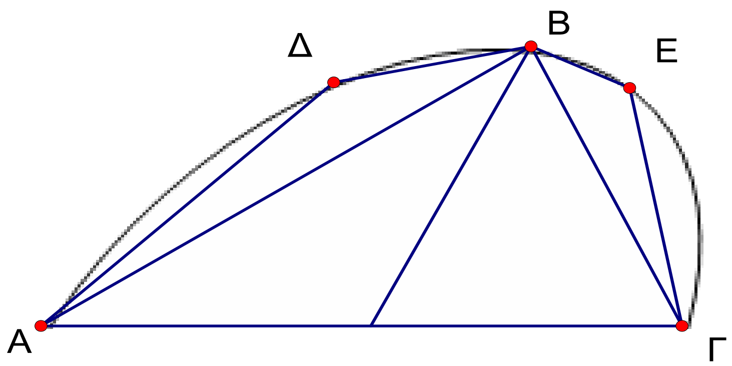
Θα έχουμε λοιπόν S>(ΑΒΓ). S_ν = (ΑΒΓ)$\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\nu}\right)=\ \varepsilon_\nu$

Με $\varepsilon_\nu=\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)-$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\nu}$(ΑΒΓ)< $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)

Στην συνέχεια ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ αποδεικνύει ότι

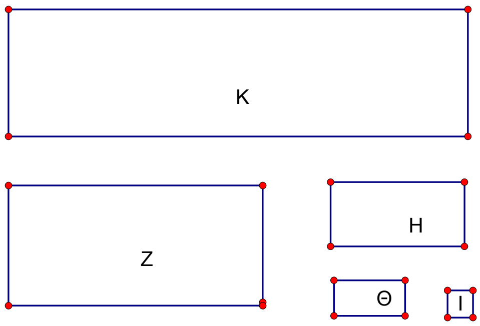
Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου
κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν
βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Δηλαδή κάθε τμήμα που περιέχεται μεταξύ ευθείας και παραβολής ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και ύψος ίσο με το τμήμα.



Εστω γὰρ τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ δ ΑΒΓ τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, τοῦ δ ΑΒΓ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ Κ χωρίον	Έστω το τμήμα ΑΔΒΕΓ που περιέχεται μεταξύ ευθείας και παραβολής και έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος με το τμήμα και έστω ότι η επιφάνεια Κ είναι ίση με τα τέσσερα τρίτα της επιφάνειας του τριγώνου ΑΒΓ.
Δεικτέον ὅτι	Πρέπει να δειχθεί οτι η επιφάνεια Κ

ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔΒΕΓ τμάματι.	είναι ίση με την επιφάνεια του τμήματος ΑΔΒΕΓ.
Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον.	Διότι εάν δεν είναι ίση θα είναι είτε μεγαλύτερη ή μικρότερη .
Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου.	Έστω πρώτα ότι είναι δυνατόν το τμήμα ΑΔΒΕΓ να ειναι μεγαλύτερο από την επιφάνεια Κ.
Ἐνέγραψα δὴ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα, ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμάματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ κατα-λειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου.	Ενέγραψα λοιπόν τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ , όπως έχουμε πει και στα τμήματα που παραλείφθησαν ενέγραψα άλλα τρίγωνα που να έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με τα τμήματα , και συνέχισα να εγγράφω απο ένα τρίγωνο με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος στο καθένα από τα δύο τμήματα που παραλείπονταν κάθε φορά , τα απομένοντα τμήματα θα φτάσουν να είναι μικρότερα από την διαφορά κατά την οποία υπερέχει το τμήμα ΑΔΒΕΓ από την επιφάνεια Κ.
Ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ Κ· ὅπερ ἀδύνατον.	Συνεπώς το πολύγωνο που έχει εγγραφεί θα είναι μεγαλύτερο από την επιφάνεια Κ πράγμα αδύνατον.
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι ερειδη λόγῳ, πρῶτον μ ν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, ἔπειτα δ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων καὶ ἀεὶ οὕτω, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δ Κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου.	Διότι, επειδή έχουμε μια φθίνουσα γεωμετρική σειρά επιφανειών με λόγο τέσσερα και η πρώτη ,το τρίγωνο ΑΒΓ, είναι (ΑΒΓ)=$\frac{1}{4}$ [(ΑΔΒ)+(ΒΕΓ)] στη συνέχεια το άθροισμα αυτό είναι τετραπλάσιο από το άθροισμα των τριγώνων που έχουν εγγραφεί στα επόμενα τμήματα και το ίδιο συμβαίνει συνεχώς , είναι προφανές ότι το άθροισμα όλων των επιφανειών είναι μικρότερο απο τα 4/3 της μεγαλύτερης (δηλαδή του τριγώνου ΑΒΓ) .
Οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου.	Άρα το τμήμα ΑΔΒΕΓ δεν είναι μεγαλύτερο από την επιφάνεια Κ.

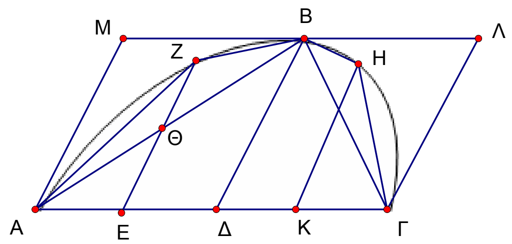


Εστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον.	Έστω τώρα ότι είναι δυνατόν (ΑΔΒΕΓ)< Κ.
Κείσθω δὴ τὸ μ ν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ Ζ, τοῦ δ Ζ τέταρτον τὸ Η, καὶ ὁμοίως τοῦ Η τὸ Θ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται τὸ ἔσχατον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Κ χωρίον τοῦ τμάματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ Ι·	Έστω λοιπόν ότι έχουμε μια επιφάνεια Ζ ίση με το τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒΓ)=Ζ , μια επιφάνεια Η, $Η=\frac{1}{4}Ζ$, το δε $Θ=\frac{1}{4}Η$ και ούτω καθεξής , μέχρι που η τελευταία επιφάνεια φτάνει να είναι μικρότερη από την διαφορά κατά την οποία υπερέχει η επιφάνεια Κ από το τμήμα .Έστω ότι η μικρότερη αυτή επιφάνεια είναι η Ι .
ἔστιν δὴ τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ Ι ἐπίτριτα τοῦ Ζ.	Αρα το $Ζ+Η+Θ+Ι+\frac{1}{3}Ι=\frac{4}{3}Ζ$.
Εστιν δ καὶ τὸ Κ τοῦ Ζ ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ Κ τοῖς Ζ, Η, Θ, Ι καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ Ι.	Είναι δε και το $Κ=\frac{4}{3}Ζ$.Άρα $Κ= Ζ+Η+Θ+Ι+\frac{1}{3}Ι$.
Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ χωρίον τῶν μ ν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ Ι, τοῦ δ τμάματος μείζονι τοῦ Ι, δῆλον ὡς μείζονά ἐντι τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία τοῦ τμάματος· ὅπερ ἀδύνατον·	Επειδή λοιπόν η επιφάνεια Κ υπερέχει από το άθροισμα των επιφανειών Ζ,Η ,Θ και Ι κατά μια διαφορά μικρότερη από το Ι και από το τμήμα κατά μια διαφορά μεγαλύτερη απο το Ι είναι προφανές ότι το άθροισμα των επιφανειών Ζ,Η,Θ και Ι είναι μεγαλύτερο από το τμήμα πράγμα αδύνατον.
· ἐδείχθη γὰρ ὅτι, ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμᾶμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία	Διότι αποδείχθηκε ότι εάν έχουμε μια σειρά οσωνδήποτε τον αριθμό επιφανειών με λόγο τέσσερα και η μεγαλύτερη από αυτές είναι ίση με το τρίγωνο το εγγεγραμμένο στο τμήμα , το άθροισμα των επιφανειών

ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος.	θα είναι μικρότερο από την επιφάνεια του τμήματος
Οὐκ ἄρα τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Κ χωρίου.	Άρα το τμήμα ΑΔΒΕΓ δεν είναι μικρότερο απο την επιφάνεια Κ
Ἐδείχθη δ ὅτι οὐδ μεῖζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ Κ.	Αποδείξαμε όμως ότι ούτε μεγαλύτερο είναι.
Τὸ δ Κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ· καὶ τὸ ΑΔΒΕΓ ἄρα τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.	Άρα η επιφάνεια Κ ισούται με τα 4/3 του τριγώνου ΑΒΓ, άρα και το τμήμα ΑΔΒΕΓ ισούται με τα 4/3 του τριγώνου ΑΒΓ.

Μια πιο γενική απόδειξη του ισχυρισμού του Αρχιμήδη ότι S=$\frac{4}{3}$(ΑΒΓ), (S το εμβαδόν του παραβολικού τμήματος ΑΒΓ) που αποκόμισε από την θεωρία των μοχλών και απέδειξε με την απαγωγή σε άτοπο είναι η εξής:

Α) Έστω S>$\frac{4}{3}$(ΑΒΓ)



Αν θεωρήσουμε την ακολουθία (α_ν) με α_ν = S-ε_ν $\quad \forall \nu \in \mathrm{N}$

(ΑΒΓ)$\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\nu}\right) = \quad \varepsilon_\nu$

Ονομάσουμε δε Π_0 το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΜΛΓ που είναι περιγεγραμμένο στο παραβολικό χωρίο τότε θα έχουμε

α_0= S-ε_0= S- (ΑΒΓ)< $\frac{1}{2}$ S αφού (ΑΒΓ)= $\frac{1}{2}$ Π_0> $\frac{1}{2}$ S

Ομοίως αν καλέσουμε Π_1 Π'_1 τα εμβαδά των αντιστοίχων παραλληλογράμμων των περιγεγραμμένων στα παραβολικά τμήματα με χορδές ΑΒ, ΒΓ τότε α_1= S-ε_1= S-ε_0-(ε_1- ε_0)<$\frac{1}{2}$ α_0

Αφού (ε_1 - ε_0)=2(ZAB)=(ZAB)+(BHΓ)= $\frac{1}{2}$ Π_1 + $\frac{1}{2}$ Π'_1 > $\frac{S-(\mathrm{AB\Gamma})}{2}$ =

= $\frac{1}{2}$ (S-ε_0)= $\frac{1}{2}$ α_0

Επαγωγικά διαπιστώνουμε ότι $\alpha_{\nu+1}$ < $\frac{1}{2}$ α_ν $\forall \nu \in \mathrm{N}$

Άρα για ε= S- $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)>0 θα υπάρχει $\nu \in \mathrm{N}$ ώστε α_ν < ε

δηλαδή S-ε_ν < S- $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)

οπότε ε_ν > $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ) πράγμα άτοπο αφού

ε_ν < $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)

Β)Αν S< $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ) τότε από τη σχέση

(ΑΒΓ)(1+ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu-1}}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{3}\frac{1}{4^\nu}$)= $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)
προκύπτει

$\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ) - (ΑΒΓ)(1+ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu-1}}+\frac{1}{4^\nu}$)= $\frac{1}{3}\frac{1}{4^\nu}$ (ΑΒΓ)< $\frac{1}{4^\nu}$ (ΑΒΓ)

Άρα για ε= $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)- S>0, υπάρχει $\nu \in \mathrm{N}$

ώστε $\frac{1}{4^\nu}$ (ΑΒΓ)<ε

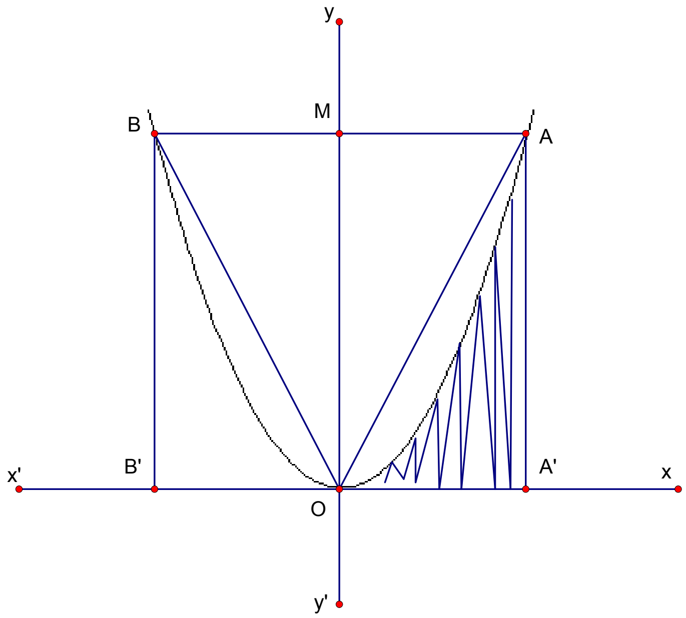
Οπότε με βάση την προηγούμενη σχέση θα έχουμε
$\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ) - (ΑΒΓ)(1+ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu-1}}+\frac{1}{4^\nu}$)< $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ) - S

Άρα (ΑΒΓ)(1+ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu-1}}+\frac{1}{4^\nu}$)> S

δηλαδή (ΑΒΓ) S_ν >S ή ε_ν >S πράγμα άτοπο

Επομένως S= $\frac{4}{3}$ (ΑΒΓ)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ



Αν θεωρήσουμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα ΧΟΨ την παραβολή ψ $=χ^2$ και την χορδή της ΑΒ//Χ'Χ τότε το προηγούμενο συμπέρασμα σημαίνει ότι το εμβαδόν Ε του παραβολικού χωρίου μεταξύ της χορδής ΑΒ και της παραβολής είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$(ΑΟΒ).

Αν λοιπόν Α', Β' είναι οι προβολές των Α,Β στον Χ'Χ τότε

$$(ΑΑ'Β'Β)-Ε=(ΑΑ'ΒΒ')-\frac{4}{3}(ΑΟΒ)=2\,(ΑΟΒ)-\frac{4}{3}(ΑΟΒ)=\frac{2}{3}\,(ΑΟΒ)$$

το εμβαδόν επομένως του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της παραβολής, του άξονα Χ'Χ και των ευθειών Ψ'Ψ και Α'Α ,δηλαδή το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος θα είναι ίσο με

$$Ε=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,(ΑΟΒ)=\frac{1}{3}(ΑΟΒ)=\frac{1}{3}\cdot 2(ΟΑΜ)=\frac{1}{3}(ΑΜΟΑ'),\text{όπου}$$

Μ το μέσο του ΑΒ.

Δηλαδή $Ε=\frac{1}{3}(ΑΜΟΑ')=\frac{1}{3}\cdot λ.λ^2=\frac{1}{3}\cdot λ^3$ αν η ΑΑ΄ είναι η ευθεία χ=λ.

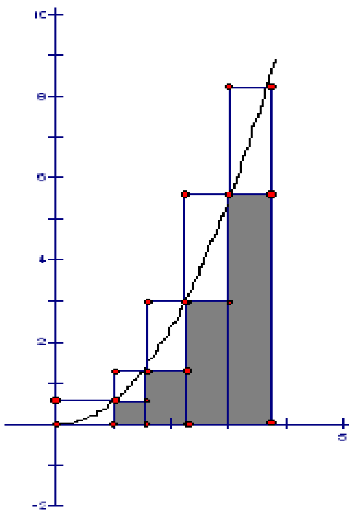
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα κάνουμε μία γενική περιγραφή της μεθόδου της εξάντλησης , θα αποδείξουμε τον τετραγωνισμό της παραβολής και τον όγκο παραβολοειδούς εκ περιστροφής με την μέθοδο της εξάντλησης, αλλά με σύγχρονη ορολογία και θα δούμε πώς ο Αρχιμήδης παρουσιάζει στην πραγματεία του « Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος » την εύρεση του όγκου του παραβολοειδούς εκ περιστροφής .

1.ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

Το πρόβλημα το οποίο επιλύεται με την μέθοδο της εξάντλησης είναι ο υπολογισμός του εμβαδού Ε μιας επιφάνειας ή του όγκου V ενός στερεού. Η βασική ιδέα του Αρχιμήδη είναι να προσεγγίζει το εμβαδόν Ε η τον όγκο V



με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα-χωρία.
Η διαδικασία υπολογισμού περιλαμβάνει τρία στάδια **.**

1^{ο} Στάδιο

Ορίζει εμβαδά ή όγκους Αn, $n \in N^*$ εγγεγραμμένων χωρίων και εμβαδά ή όγκους Βn , $n \in N^*$ περιγεγραμμένων χωρίων της ζητούμενης επιφάνειας ή όγκου .

Τότε θα ισχύει $An \leq E(\eta V) \leq Bn$, $n \in N^*$

2^o Στάδιο

«Μαντεύει» έναν αριθμό c ,τέτοιον ώστε $An \leq c \leq Bn$.

Το «μάντεμα» αυτό γίνεται με μηχανικό τρόπο, όπως ο ίδιος δηλώνει στο «Περί μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος».

« Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως ε ναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν».

3^o Στάδιο

Αποδεικνύει ότι για κάθε ε>0 υπάρχει nεN* τέτοιο ώστε

$Bn - An < \varepsilon$

Μετά την ολοκλήρωση του τρίτου σταδίου συμπεραίνει ότι

$E(ήV)=c$

Η απόδειξη του συμπεράσματος αυτού γίνεται με την « εις άτοπο απαγωγή »

Αν c>E

Τότε θεωρώντας ως $\varepsilon = (c-E)/2$ θα υπάρχει $n \in N^*$ τέτοιο ώστε

$Bn - An < (c-E)/2$ Από πρώτο , δεύτερο στάδιο θα είναι

$An \leq E < c \leq Bn$

οπότε θα έχουμε

$c \leq Bn$

$E \geq An \Rightarrow -E \leq -An$

τότε θα ισχύει $c - E \leq Bn - An < (c-E)/2$

ΑΤΟΠΟ

Αν c<E

θεωρούμε ως $\varepsilon = (c-E)/2$ υπάρχει $n \in N^*$ τέτοιο ώστε

$Bn - An < (E-c)/2$ (1)

Από το πρώτο και δεύτερο στάδιο συμπεραίνουμε οτι

$An \leq c < E \leq Bn$ Δηλαδή $E \leq Bn$

$c \geq An \Rightarrow -c \leq -An$ Τότε ισχύει $E - c \leq Bn - An$

λόγω της (1) είναι $E - c < (E-c)/2$

ΑΤΟΠΟ

Άρα απομένει η περίπτωση c=E (ο.ε.δ)

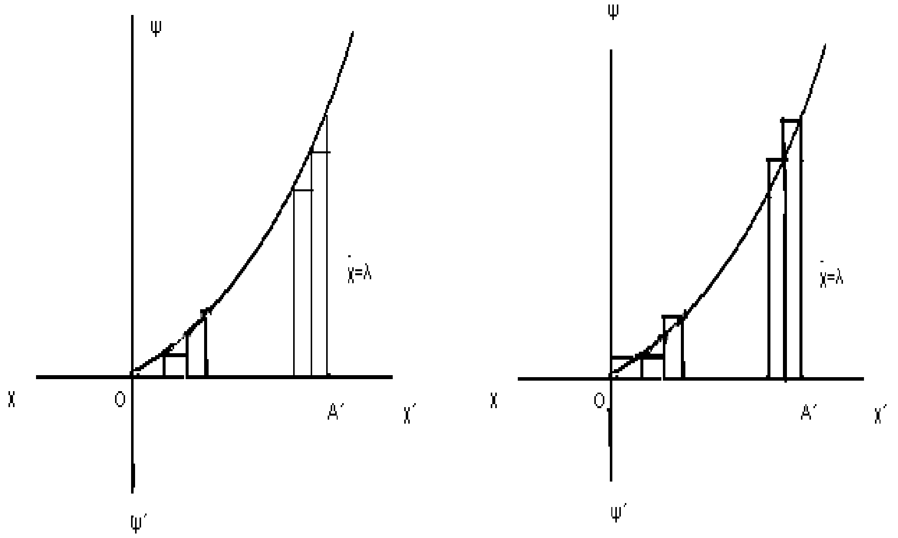
2. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Θα δείξουμε ότι το εμβαδόν Ε της $\psi=\chi^2$, $\psi=0$ και των ευθειών $\chi=0$ και $\chi=\lambda>0$ είναι ίσο με $E=\frac{\lambda^3}{3}$.

Στο σημείο αυτό σωστό είναι να παρατηρήσουμε ότι το παραβολικό τμήμα στο παρακάτω σχήμα δεν είναι ακριβώς το ίδιο μ' εκείνο που θεώρησε ο Αρχιμήδης ,καθώς και οι λεπτομέρειες στους συλλογισμούς που ακολουθούν δεν είναι ομοιότυπες μ' εκείνες που χρησιμοποίησε αυτός .Οι ιδέες όμως ουσιαστικά ανήκουν στον Αρχιμήδη και αυτό που παρουσιάζουμε εδώ μπορεί να θεωρηθεί ως η μέθοδος της εξάντλησης σε σύγχρονη διατύπωση(Apostol.T [1]).
Η βασική ιδέα είναι η εξής:

Κόβουμε το σχήμα σ' ένα πλήθος κατακόρυφες ταινίες με το ίδιο πλάτος και βρίσκουμε έτσι δύο προσεγγίσεις του ζητούμενου εμβαδού. Μία κατ' έλλειψη και μία καθ΄ υπεροχή.

Σύμφωνα λοιπόν με την άποψη του Αρχιμήδη το ζητούμενο εμβαδόν δεν είναι δυνατόν να είναι μικρότερο από το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών ορθογωνίων ούτε μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των εξωτερικών ορθογωνίων.



Αν αυξήσουμε το πλήθος των ταινιών τότε το πρώτο άθροισμα αυξάνει , ενώ το δεύτερο ελαττώνεται . Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των ταινιών , τόσο καλύτερη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού θα έχουμε. Μπορούμε δηλαδή να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν με οποιοδήποτε βαθμό ακριβείας επιθυμούμε αρκεί να θεωρήσουμε ένα επαρκές πλήθος ταινιών.

Μια αυστηρότερη διατύπωση των παραπάνω συλλογισμών είναι η εξής :

1^0 ΣΤΑΔΙΟ

Χωρίζουμε το διάστημα ΟΑ΄ σε ν-ισα τμήματα, τα διαιρετικά σημεία θα έχουν τότε κατά σειρά τετμημένες

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{\lambda}{\nu},\quad x_2=\frac{2\lambda}{\nu},\quad \ldots\quad x_{\nu-1}=\frac{(\nu-1)\lambda}{\nu},\quad x_\nu=\frac{\nu\lambda}{\nu}=\lambda$$

ξεκινώντας από το Ο και καταλήγοντας στο Α΄.

Τα εσωτερικά ορθογώνια έχουν βάσεις ίσες με $\frac{\lambda}{\nu}$ και ύψη

$$\upsilon_0=0,\quad ,\quad \upsilon_1=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2,\quad \upsilon_2=\left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2,\quad \ldots\ldots\quad \upsilon_{\nu-1}=\left(\frac{(\nu-1)\lambda}{\nu}\right)^2$$

ενώ τα εξωτερικά ορθογώνια έχουν βάσεις ίσες με $\frac{\lambda}{\nu}$ και ύψη

$$\upsilon_1=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2,\quad \upsilon_2=\left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2,\ \ldots\ldots\quad \upsilon_\nu=\left(\frac{\nu\lambda}{\nu}\right)^2$$

αντιστοίχως .

Η κατ' έλλειψη προσέγγιση λοιπόν του ζητούμενου εμβαδού δίνεται από το άθροισμα .

$$A_\nu=\frac{\lambda}{\nu}(\upsilon_0+\upsilon_1+\upsilon_2+\cdots+\upsilon_{\nu-1})$$

$$=\frac{\lambda}{\nu}\left[0^2+\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2+\left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2+\cdots\left(\frac{(\nu-1)\lambda}{\nu}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(\nu-1)^2]$$

Ενώ η καθ' υπεροχή προσέγγιση αυτού από το άθροισμα

$$B_\nu=\frac{\lambda}{\nu}(\upsilon_1+\upsilon_2+\ldots.+\upsilon_\nu)=\frac{\lambda}{\nu}\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2+\left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)^2+\ldots..\left(\frac{\nu\lambda}{\nu}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3[1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2]$$

Είναι $A_\nu<E<B_\nu$

2^0 ΣΤΑΔΙΟ

Μαντεύουμε τον $c=\frac{\lambda^3}{3}$ δηλαδή $A_\nu<\frac{\lambda^3}{3}<B_\nu$

Ο Αρχιμήδης είχε υποψιαστεί αυτόν τον αριθμό με την ευρετική του μέθοδο που έχουμε αναφέρει . Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής .

Από την ταυτότητα

$1^2+2^2+3^2+\dots \quad +\nu^2 = \frac{\nu^3}{3}+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}$ που επαγωγικά αποδεικνύεται και θα μπορούσε να θεωρηθεί γνωστή την εποχή του Αρχιμήδη βρίσκουμε .

$$1^2+2^2+3^2+\dots \quad +(\nu-1)^2 = \frac{\nu^3}{3}+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6} - \nu^2 = \frac{\nu^3}{3}-\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6}$$

Προφανώς $\frac{\nu^3}{3}+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6} > \frac{\nu^3}{3}$

$$\frac{\nu^3}{3}-\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu}{6} = \frac{\nu^3}{3} - \frac{\nu(3\nu-1)}{6} < \frac{\nu^3}{3}$$

$\forall \nu \in \mathrm{N}^*$

Επομένως $A_\nu < ((\frac{\lambda}{\nu})^3 \cdot \frac{\nu^3}{3} < B_\nu$

δηλαδή $A_\nu < \frac{\lambda^3}{3} < B_\nu \ \forall \nu \in \mathrm{N}^*$

Όπως πλέον μπορεί να υποψιαστεί κάποιος το ζητούμενο εμβαδόν Ε θα είναι ίσο με $\frac{\lambda^3}{3}$.

3^0 ΣΤΑΔΙΟ

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathrm{N}: \quad B_\nu - A_\nu < \varepsilon$

Πράγματι

$$B_\nu - A_\nu = (\frac{\lambda}{\nu})^3 [1^2+2^2+3^2+\dots \quad +\nu^2] - (\frac{\lambda}{\nu})^3 [1^2+2^2+3^2+\dots \quad +(\nu-1)^2] = \frac{\lambda^3}{\nu}$$

Από θεώρημα Αρχιμήδους- Ευδόξου για τους λ^3, $\varepsilon>0$ $\quad \exists \nu \in \mathrm{N}:$

$$\nu.\varepsilon>\lambda^3 \Rightarrow \frac{\lambda^3}{\nu} < \varepsilon \Rightarrow \quad B_\nu - A_\nu < \varepsilon$$

Άρα για κάθε ε>0 υπάρχει $\nu=[\frac{\lambda^3}{\varepsilon}]+1$ τέτοιο ώστε $B_\nu - A_\nu < \varepsilon$

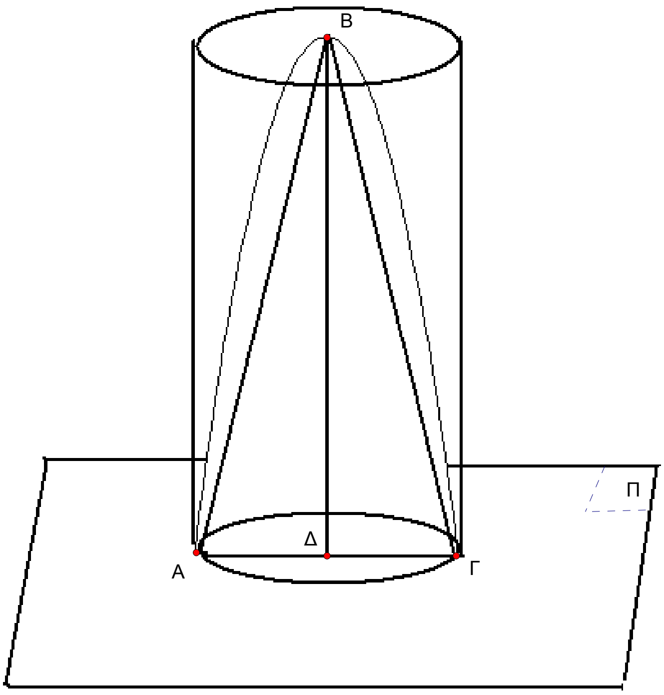
Δηλαδή $E = \frac{\lambda^3}{3}$

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΓΚΟΥ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΟΥΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Θα περιγράψουμε τώρα πώς υπολογίζεται ο όγκος ενός στερεού εφαρμόζοντας την περιγραφείσα μέθοδο της εξάντλησης. Το πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του όγκου παραβολοειδούς εκ περιστροφής ,και βρίσκεται στο έργο του «ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ »

Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε τίθεται στο θεώρημα 21 του έργου του Αρχιμήδη που προαναφέραμε και διατυπώνεται ως εξής .

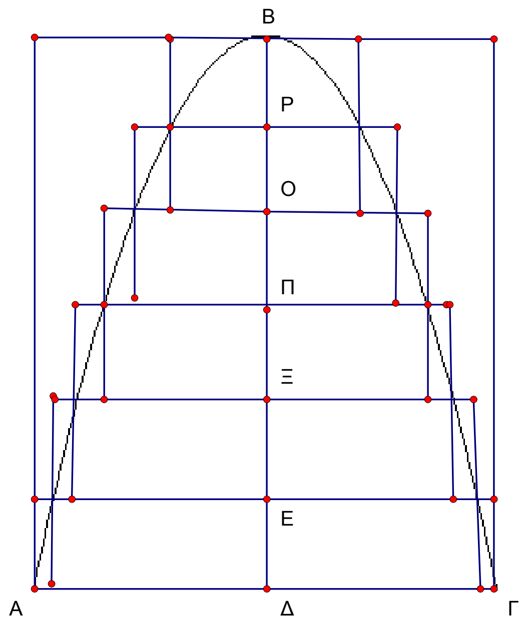
Πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν	Κάθε τμήμα παραβολοειδούς εκ περιστροφής το οποίο τέμνεται από επίπεδο κάθετο προς τον άξονα έχει, όγκο ίσο προς τα 3/2 του όγκου του κώνου που έχει την ίδια βάση με το (αποτετμηθέν) τμήμα και τον ίδιο άξονα



Τέμνοντας λοιπόν το παραβολοειδές με επίπεδο (Π) κάθετο στη ΒΔ δημιουργείται το στερεό του οποίου θα αποδείξουμε ότι ο όγκος ισούται με τα 3/2 του κώνου βάσης και ύψους ίδιο με αυτά του παραβολοειδούς (βάση ,ο κυκλικός δίσκος διαμέτρου ΑΓ και ύψος ο άξονας ΒΔ) ή ισοδύναμα το 1/2 του κυλίνδρου με τα ίδια στοιχεία .
Τα τρία στάδια της μεθόδου της εξάντλησης αναπτύσσονται στις προτάσεις 19 (το πρώτο και τρίτο στάδιο) και 21 (το δεύτερο στάδιο).

ΠΡΟΤΑΣΗ 19.

Προσέγγιση του όγκου παραβολοειδούς με εγγεγραμμένους και περιγεγραμμένους κυλίνδρους .

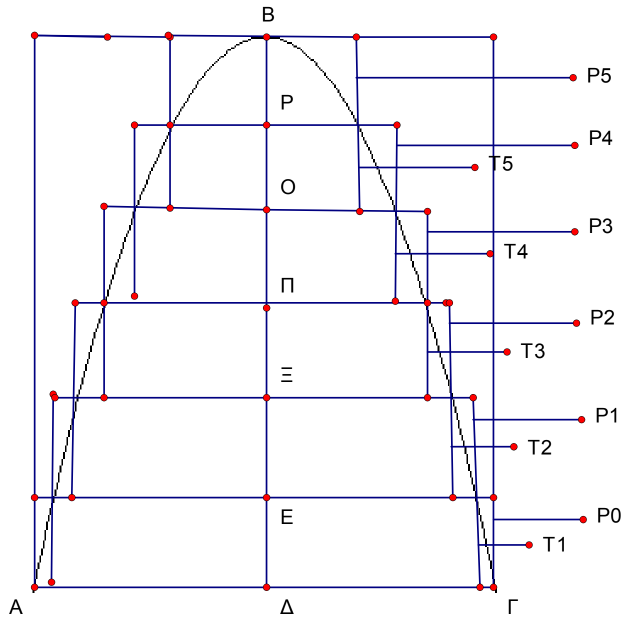


Το ανωτέρω σχήμα προκύπτει αν τμήσουμε το παραβολοειδές με επίπεδο διερχόμενο δια του άξονα ΒΔ. Το επίπεδο αυτό θα τμήσει το παραβολοειδές κατά την παραβολή ΑΒΓ και το επίπεδο (Π) κατά το τμήμα ΑΓ .

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τον κύλινδρο με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ και άξονα το ΒΔ .
Ο κύλινδρος αυτός βρίσκεται έξω από την επιφάνεια του παραβολοειδούς . Θεωρούμε ένα (οσοδήποτε μικρό) δοθέν (προτεθέν) στερεό μέγεθος (όγκο) ε, και τέμνουμε συνεχώς τον κύλινδρο δίχα , με ένα επίπεδο κάθετο προς τον άξονα.

Με αυτόν τον τρόπο θα μείνει κάποτε υπόλοιπο μικρότερο του ε. Έστω λοιπόν ότι το απομείναν τμήμα του κυλίνδρου , είναι κύλινδρος με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ και ύψος τμήμα δ. Τότε υπάρχει n$\in$N* τέτοιο ώστε: n.δ>ΒΔ $\Rightarrow \frac{\mathrm{B}\Delta}{\eta}$ <δ .

Άρα μπορούμε να διαιρέσουμε τον άξονα ΒΔ σε n ίσα τμήματα που το καθένα θα έχει μήκος μικρότερο του δ (στην πρόταση ο Αρχιμήδης έχει n=6 και έχει πάρει ΔΕ=ΕΞ=ΞΠ =ΠΟ=ΟΡ=ΡΒ<δ)



Στα σημεία λοιπόν Ε,Ξ,Π Ο,Ρ φέρνουμε επίπεδα κάθετα προς τον άξονα . Οι τομές των επιπέδων αυτών με το παραβολοειδές θα είναι κύκλοι με τα κέντρα τους πάνω στον άξονα ΒΔ. Με βάση κάθε έναν από τους κύκλους αυτούς και άξονα ίσο προς το ΕΔ κατασκευάζουμε δύο κυλίνδρους, ο ένας προς το μέρος που κείται το Δ και ο άλλος προς το μέρος που κείται το Β.
(Δηλαδή κατασκευάζουμε τους εγγεγραμμένους και περιγεγραμμένους στο παραβολοειδές κυλίνδρους). Έτσι καταφέραμε να κατασκευάσουμε :

σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκεί-
μενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Δ, καὶ
ἄλλο περιγεγραμμένον συγκείμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν
ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἃ τὸ Β ἐστίν.

Τοιουτοτρόπως έχει υλοποιηθεί το πρώτο στάδιο της μεθόδου της εξάντλησης.

Πράγματι αν ονομάσουμε V τον ζητούμενο όγκο τότε
$0+T_1+T_2+T_3+T_4+T_5<V<P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_0$
Όπου Ti οι εγγεγραμμένοι και Pi οι περιγεγραμμένοι κύλινδροι στο παραβολοειδές .
Δηλαδή ισχύει An < V < Bn

όπου $An = 0+T_1+T_2+T_3+T_4+T_5$ και
$Bn= P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_0$

Θα δείξουμε τώρα το τρίτο στάδιο κατά το οποίο
δεῖξαι ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου
ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.
Δηλαδή μένει να δείξουμε ότι $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει $n\in N^*$ τέτοιο ώστε Bn-An<ε. Όμως , από τον τρόπο κατασκευής τους , οι κύλινδροι είναι ανά δύο ίσοι. Συγκεκριμένα
$T_1= P_1$
$T_2= P_2$ έχουν ίδιες βάσεις και ίδια ύψη
$T_3= P_3$
$T_4= P_4$
$T_5= P_5$
Άρα
$Bn-An= P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_0 - (T_1+T_2+T_3+T_4+T_5)= P_0$

Αλλά το P_0 <ε από την κατασκευή του :

« Δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγε-
γραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίν-
δρῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν
ΑΓ, ἄξονα δ τὰν ΕΔ· οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτε-
θέντος στερεοῦ μεγέθεος.
τῷ κυλίνδρῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ,
(δηλαδή τον κύλινδρο P_0) .
τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος»
(δηλαδή του ε).

Έτσι ολοκληρώθηκε και το τρίτο βήμα
Απομένει το δεύτερο στάδιο κατά το οποίο ο
Αρχιμήδης - μαντεύει –έναν αριθμό c (δηλαδή την τιμή του όγκου V).

Το δεύτερο στάδιο αναπτύσσεται στην πρόταση 21 της πραγματείας «περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων ».

Στην πρόταση αυτή ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι ο αριθμός $c=\frac{3}{2}Vu$

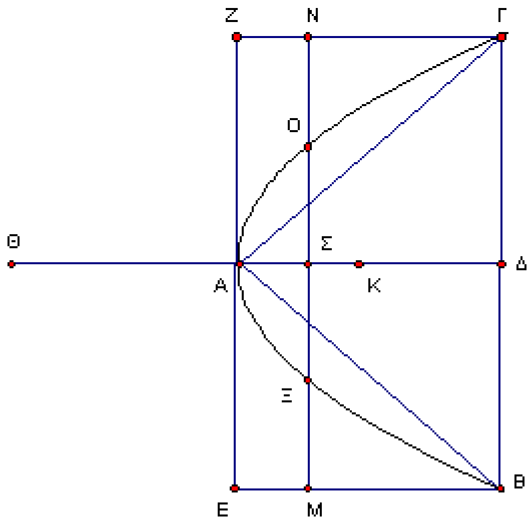
όπου Vu ο όγκος του κώνου με βάση και ύψος ίσα με αυτά του παραβολοειδούς .

Δηλαδή An $\le \frac{3}{2}$Vu $\le$ Bn.

Στην πραγματεία του «Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος» ο Αρχιμήδης εξηγεί πώς εφεύρε οτι c=$\frac{3}{2}$Vu .

Συγκεκριμένα αναφέρει:

Ὅτι δ πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἐπιπέδῳ ἀποτεμνόμενον ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ τὸν ἄξονα τὸν αὐτόν, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται..	Το ότι κάθε τμήμα παραβολοειδούς που αποτέμνεται από επίπεδο κάθετο προς τον άξονα ισούται με τα 3/2 του κώνου που έχει βάση την ίδια με το τμήμα και άξονα επίσης τον ίδιο εξετάζεται με τον εξής τρόπο
τ ετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθογωνίο Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον κωνοειδ ς καὶ του κώνου τομὴν τὴν ΑΒΓ	Έστω παραβολοειδές και έστω ότι έχει τμηθεί από επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα του ,έστω ότι η τομή του επιπέδου με την επιφάνεια του παραβολοειδούς είναι η παραβολή ΑΒΓ.



τετμήσθω δ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω αὐτῶν	Τέμνουμε την επιφάνεια αυτή και με άλλο επίπεδο κάθετο προς τον

κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δ ἔστω τοῦ τμήματος ἡ ΔΑ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δ αὐτοῦ τὸ Α	άξονα και έστω ΒΓ η τομή των δύο επιπέδων . Έστω ΔΑ ο άξονας του τμήματος Προεκτείνουμε τη ΔΑ μέχρι το σημείο Θ και έστω ότι η ΑΘ είναι ίση με την ΔΑ . Η ΔΘ θεωρείται ζυγός με μέσο το Α
ἡ τοῦ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος ἔστω δ ὀρθὸς ὢν πρὸς <τὴν ΑΔ, νοείσθω δ κῶνος βάσιν> μ ν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δ τὸ Α σημεῖον, ἔστω δ καὶ κύλινδρος βάσιν μ ν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, ἄξονα δ τὸν ΑΔ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μ ν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δ τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ	Έστω επίσης ότι η βάση του τμήματος είναι ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ κάθετος στην ΑΔ . Θεωρούμε κώνο με βάση τον κύκλο που έχει διάμετρο τη ΒΓ και κορυφή το σημείο Α και έστω κύλινδρος με βάση τον κύκλο με διάμετρο τη ΒΓ και άξονα την ΑΔ . Στο παραλληλόγραμμο (ΕΒΓΖ) φέρνουμε μία παράλληλο προς την ΒΓ, έστω την ΜΝ ,και από την ΜΝ επίπεδο κάθετο στην ΑΔ Το επίπεδο αυτό θα τμήσει τον κύλινδρο κατά κύκλο με διάμετρο την ΜΝ και το τμήμα του παραβολοειδούς κατα κύκλο με διάμετρο την ΞΟ.
Καὶ ἐπεὶ ὀρθογωνίου κώνου τομή ἐστιν ἡ ΒΑΓ, διάμετρος δ αὐτῆς ἡ ΑΔ, καὶ τεταγμένως κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΞΣ, ΒΔ, ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. Ἴση δ ἡ ΔΑ τῇ ΑΘ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ	Επειδή η ΒΑΓ είναι παραβολή με διάμετρο ΑΔ και επειδή οι ΞΣ και ΒΔ έχουν αχθεί ως τεταγμένες , το τετράγωνο πλευράς ΒΔ προς το τετράγωνο πλευράς ΞΣ έχει όπως η ΔΑ προς την ΑΣ. Αλλά η ΔΑ είναι ίση με την ΑΘ, Άρα το τετράγωνο πλευράς ΜΣ προς το τετράγωνο πλευράς ΣΞ έχει όπως η ΘΑ προς την ΑΣ. Αλλά όπως έχει το τετράγωνο πλευράς ΜΣ προς το τετράγωνο πλευράς ΣΞ έχει και ο εντός του κυλίνδρου κύκλος διαμέτρου ΜΝ προς τον εντός του τμήματος του παραβολοειδούς κύκλο διαμέτρου ΞΟ,

· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ.	Άρα όπως έχει η ΘΑ προς την ΑΣ έχει και ο κύκλος με διάμετρο τη ΜΝ προς τον κύκλο με διάμετρο την ΞΟ .
Ἰσόρροπος ἄρα ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον αὐτοῦ <ε ναι τοῦ βάρους τὸ> Θ· <καί ἐστι τοῦ> μ ν <κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ> ΜΝ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπε- πονθότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ΞΟ. `	Άρα ο εντός του κυλίνδρου κύκλος με διάμετρο την ΝΜ, μένοντας στη θέση του, ισορροπεί ως προς το σημείο Α, τον κύκλο με διάμετρο την ΞΟ , εφ΄ όσον αυτός μεταφερθεί και τεθεί επί του ζυγού στο σημείο Θ, έτσι ώστε το σημείο Θ να είναι το κέντρο βάρους του . Το κέντρο βάρους του κύκλου με διάμετρο την ΜΝ είναι το σημείο Σ , ενώ του κύκλου που έχει διάμετρο την ΞΟ και έχει μετατοπισθεί το σημείο Θ, Συνεπώς ο λόγος της ΘΑ προς την ΑΣ είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου που έχει ο κύκλος με διάμετρο τη ΜΝ προς τον κύκλο που έχει διάμετρο την ΞΟ .
Ομοίως δ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΕΓ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΘ, ὅτι ἰσορροπήσει πρὸς τῷ Α σημείῳ ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον ε ναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι καὶ τεθέντι	Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και εάν στο παραλληλόγραμμο ΕΒΓΖ αχθεί άλλη παράλληλη προς τη ΒΓ και από αυτή αχθεί επίπεδο κάθετο προς την ΑΘ , ο κύκλος που θα δημιουργηθεί στον κύλινδρο , παραμένοντας στη θέση του, θα ισορροπεί ως προς το σημείο Α τον κύκλο που θα δημιουργηθεί στο τμήμα του παραβολοειδούς , εφόσον μεταφερθεί επί του ζυγού στο Θ έτσι ώστε το σημείο Θ να είναι το κέντρο βάρους του. Εάν λοιπόν συμπληρωθεί ο κύλινδρος και το τμήμα του παραβολοειδούς από τέτοιους κύκλους ,ο κύλινδρος στη θέση του θα ισορροπεί ως προς το σημείο Α το τμήμα του

τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον ε ναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ.	παραβολοειδούς που θα έχει μεταφερθεί και τεθεί επί του ζυγού στο Θ έτσι ώστε το σημείο Θ να είναι το κέντρο βάρους του.
Ἐπεὶ δ ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, καί ἐστι τοῦ μ ν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Κ σημεῖον δίχα τεμνομένης τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, τοῦ δ τμήματος μετενηνεγμένου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ, ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον <ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ὁ> κύλινδρος πρὸς τὸ τμῆμα.	Επειδή όμως τα εν λόγω μεγέθη ισορροπούν ως προς το σημείο Α και επειδή το κέντρο βάρους του κυλίνδρου είναι το σημείο Κ,το οποίο τέμνει σε δυο ίσα μέρη την ΑΔ, ενώ του τμήματος του παραβολοειδούς που έχει μεταφερθεί το κέντρο βάρους είναι το σημείο Θ , η ΘΑ προς την ΑΚ θα έχει λόγο αντιστρόφως ανάλογο προς το λόγο του κυλίνδρου προς το τμήμα .
Διπλασία δ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος.	Αλλά η ΘΑ είναι διπλάσια από την ΑΚ ,άρα και ο κύλινδρος είναι διπλάσιος του τμήματος.
Ὁ δ αὐτὸς κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δ τὸ Α σημεῖον· δῆλον οὖν ὅτι τὸ τμῆμα ἡμιόλιόν ἐστιν τοῦ αὐτοῦ κώνου.	Αλλά ο ίδιος κύλινδρος είναι τριπλάσιος του κώνου που έχει βάση τον κύκλο με διάμετρο τη ΓΒ και κορυφή το σημείο Α. Είναι λοιπόν φανερό ότι το τμήμα ισούται με τα τρία δεύτερα κώνου αυτού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1). Apostol, T: Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός (Μετάφραση Δ. Γκιόκα), εκδόσεις Ατλαντίς, Αθήνα 1962

2) Γιαννακούλιας Ε.
Απειροστικός λογισμός ,Η ιστορική του εξέλιξη από τον $5^{ο}$ π.χ. έως και τον $19^{ο}$ αιώνα, Αθήνα 2006.

3) Heath,T.L.
A history of Greek mathematics, 2 vols, Clarehdon press, Oxford,1921.

4) Heath,T.L.
Euclid The thirteen books of the Elements,Dover publications INC. New York, 1956.

5) Eves, H,
Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, εκδόσεις τροχαλία.

6). Νεγρεπόντης Σ –.Γιωτόπουλος Σ –.Γιαννακούλιας Ε,
Απειροστικός λογισμός Ι, εκδόσεις Συμμετρία ,Αθήνα1987

7) Σταμάτης Ε.
Ευκλείδου Γεωμετρία ,Στοιχείων βιβλία Ι,ΙΙ,ΙΙΙ,ΙV,Ο.Ε.Σ.Β.Αθήνα 1957.

8) Σταμάτης Ε.
Ευκλείδου Γεωμετρία ,Θεωρία Αριθμών Στοιχείων βιβλία V, VI, VII, VIII, IX Ο.Ε.Σ.Β.Αθήνα 1953

9) Σταμάτης Ε.
Ευκλείδου Στερεομετρία,Στοιχείων βιβλία XI, XII, XIII,Ο.Ε.Σ.Β.Αθήνα 1975.

10) Σταμάτης Ε.
Ευκλείδου,Περί ασυμμέτρων, Βιβλίο X, Ο.Ε.Σ.Β.Αθήνα 1975.

11) Σταμάτης Ε.
Αρχιμήδους Άπαντα ,Αρχαίον κείμενο – μετάφρασις-σχόλια ,εκδόσεις Τ.Ε.Ε, Αθήνα 1970.

12) Ευκλείδη Στοιχεία,τόμος ΙΙΙ,Η Γεωμετρία του χώρου ,βιβλία XI,XII,XIII,Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης .

13) Van der Waerden,B.
Η αφύπνιση της επιστήμης , μετάφραση Γ.Χριστιανίδης , Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης ,Ηράκλειο ,2000.

14) Struik,D.
Συνοπτική Ιστορία μαθηματικών ,Ζαχαρόπουλος ,Αθήνα,1982.

15) Χριστιανίδης ,Γ.
Θέματα από την Ιστορία των μαθηματικών, Πανεπιστημιακές εκδόσεις
Κρήτης, Ηράκλειο, 2003.

Σημείωση:
Τα αρχαία κείμενα είναι από τη βάση δεδομένων T.L.G(Musaios).