Ιστορική εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού

Ασκήσεις (2016–17)

Κεφάλαιο 1: Εύδοξος και Αρχιμήδης

1. Αποδείξτε ότι αν $a : b = c : d$ τότε $a : c = b : d$. [*Υπόδειξη.* Πρώτα δείξτε ότι αν $a : b = c : d$ τότε $na : nb = mc : md$ για οποιουσδήποτε φυσικούς m και n. Στη συνέχεια, δείξτε ότι αν $na > mc$ ή $na = mc$ ή $na < mc$ τότε $nb > md$ ή $nb - md$ ή $nb < md$ αντίστοιχα.]

2. Αποδείξτε ότι για κάθε κύκλο C και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κανονικό πολύγωνο Q περιγεγραμμένο στον C, τέτοιο ώστε $\alpha(Q) < \alpha(C) + \epsilon$.

3. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν A_n και η περίμετρος S_n ενός κανονικού n-γώνου που εγγράφεται σε κύκλο ακτίνας r δίνονται από τις

$$A_n = nr^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \qquad \text{και} \qquad S_n = 2nr\sin\frac{\pi}{n}.$$

Παίρνοντας το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{S_n}$ αποδείξτε ότι $\alpha(C) = \frac{1}{2}rS(C)$.

4. Για τα A_n και S_n της προηγούμενης άσκησης και τα r_n, s_n του Σχήματος 1.2, γράψτε

$$A_n = \frac{1}{2}nr_ns_n \qquad \text{και} \qquad S_n = ns_n.$$

Αποδείξτε ότι $\alpha(C) = \frac{1}{2}rS(C)$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε τριωνομετρικές συναρτήσεις, παίρνοντας το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{S_n}$. Χρειάζεται να θεωρήσετε κάτι «προφανές»;

5. Από τη στοιχειώδη γεωμετρία του κανονικού εξαγώνου γνωρίζουμε ότι $s_6 = 1$ και $t_6 = 1/\sqrt{3}$. Υπολογίστε τα $s_{12}, s_{24}, s_{48}, s_{96}$ και $t_{12}, t_{24}, t_{48}, t_{96}$ αναδρομικά (χρησιμοποιήστε υπολογιστή αν θέλετε) και ελέγξτε ότι

$$s_{96} = 0.065438 \qquad \text{και} \qquad t_{96} = 0.032737.$$

Από την $48s_{96} < \pi < 96t_{96}$ συμπεράνατε ότι

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\pi = 3.14$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

6. Ξεκινώντας από το γεγονός ότι η πλευρά κανονικού δεκαγώνου που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, υπολογίστε αναδρομικά τα s_{640} και t_{640}, και συμπεράνατε ότι $\pi = 3.1416$ με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

7. Έστω p_n και P_n οι περίμετροι του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κανονικού n-γώνου στο μοναδιαίο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}} \qquad \text{και} \qquad P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n}.$$

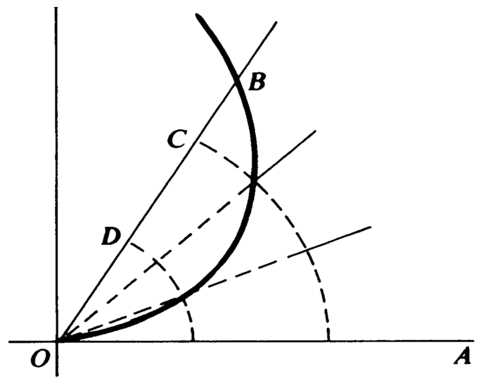
Ξεκινώντας από τις $p_4 = 4\sqrt{2}$ και $P_4 = 8$, και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις, υπολογίστε τα p_{64} και P_{64}. Ποιά είναι τα φράγματα που προκύπτουν για τον π;

8. Έστω a_n και A_n τα εμβαδά του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κανονικού n-γώνου στο μοναδιαίο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$a_{2n} = \sqrt{a_nA_n} \qquad \text{και} \qquad A_{2n} = \frac{2a_{2n}A_n}{a_{2n} + A_n}.$$

9. Χρησιμοποιώντας παραλληλόγραμμο ταχυτήτων επαληθεύστε την κατασκευή του Αρχιμήδη για την εφαπτόμενη της σπείρας στην περίπτωση που το P είναι το σημείο $(0, \kappa\pi/2)$ στον y-άξονα. Σε αυτό το σημείο το P έχει κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ίση με v και οριζόντια συνιστώσα ίση με $\omega\kappa\pi/2$ (εξηγήστε γιατί).

10. Χρησιμοποιώντας τη σπείρα του Αρχιμήδη εξηγήστε πώς μπορούμε να τριχοτομήσουμε τυχούσα γωνία, δεδομένου ότι μπορούμε εύκολα να τριχοτομήσουμε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα (βλέπε σχήμα).



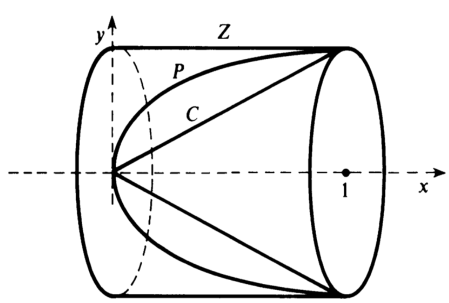
Σχήμα 1:

11. Χρησιμοποιώντας τη μηχανική μέθοδο αποδείξτε τον τύπο

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h\left(\frac{3r-h}{2r-h}\right)$$

για τον όγκο του μικρότερου σφαιρικού τμήματος που αποκόπτεται από το επίπεδο $x = a$ (όπου $0 < a < r$), έχει ακτίνα βάσης $\rho = \sqrt{r^2 - a^2}$ και ύψος $h = r - a$. Χρησιμοποιήστε τα τμήματα του κώνου και του κυλίνδρου που αποκόπτονται από το ίδιο επίπεδο.

12. Έστω P το τμήμα του παραβολοειδούς που προκύπτει αν περιστρέψουμε την παραβολή $y^2 = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ως προς τον x-άξονα. Χρησιμοποιώντας τη μηχανική μέθοδο, αποδείξτε ότι ο όγκος του P είναι ίσος με το μισό του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου Z (βλέπε σχήμα).



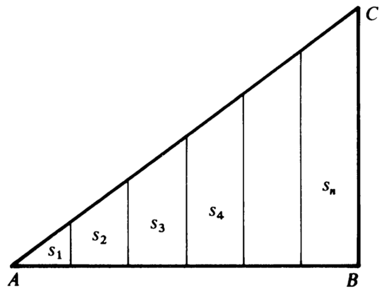
Σχήμα 2:

Κεφάλαιο 2: Άπειρες διαδικασίες στο Μεσαίωνα

---

1. Θεωρήστε την περίπτωση μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με $v_o = 0$, οπότε το τραπέζιο του Oresme γίνεται τρίγων (βλέπε σχήμα). Διαιρέστε τη βάση AB σε n ίσα χρονικά υποδιαστήματα και συμβολίστε με $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ τις αποστάσεις που διανύει το κινούμενο σημείο σε αυτά τα διαδοχικά χρονικά διαστήματα. Αποδείξτε ότι αυτές οι αποστάσεις είναι ανάλογες με τους περιττούς φυσικούς αριθμούς $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Δηλαδή,

$$\frac{s_1}{1} = \frac{s_2}{3} = \frac{s_3}{5} = \cdots = \frac{s_n}{2n-1}.$$



Σχήμα 3:

Αυτός ο «νόμος των περιττών αριθμών» για τις αποστάσεις που διανύονται σε διαδοχικά ίσα χρονικά υποδιαστήματα με σταθερή επιτάχυνση, ήταν σημαντικός για τη μεταγενέστερη εμπειρική επιβεβαίωση, από τον Γαλιλαίο, του ότι σώματα που εκτελούν ελεύθερη πτώση κοντά στην επιφάνεια της Γης έχουν σταθερή επιτάχυνση.

2. Εφαρμόζοντας την (2.4.3) αποδείξτε ότι

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \cdots = 1.$$

3. Εφαρμόζοντας τη γεωμετρική μέθοδο του Oresme αποδείξτε ότι

$$\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{3}{64} + \cdots + n \cdot \frac{3}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

Σκεφτείτε μια κίνηση με ταχύτητα 1 στα πρώτα $\frac{3}{4}$ ενός μοναδιαίου χρονικού διαστήματος, με ταχύτητα 2 στα επόμενα $\frac{3}{16}$ του διαστήματος, ταχύτητα 3 στα επόμενα $\frac{3}{64}$, και ούτω καθεξής.

Κεφάλαιο 3: Απαρχές του Απειροστικού Λογισμού

---

1. Εξηγήστε γιατί η (3.1.4) δεν ισχύει γενικά. Παρατηρήστε ότι, με συμβολισμό ολοκληρωμάτων, μας δίνει

$$\alpha = \frac{1}{2} \int r\, ds,$$

ενώ ο τύπος για το εμβαδόν, σε πολικές συντεταγμένες, είναι

$$\alpha = \frac{1}{2} \int r^2\, d\theta.$$

Είναι σωστό ότι $\Delta s = r\Delta\theta$ για ένα μικρό τμήμα τυχούσας καμπύλης;

2. Καταλήξτε στον τύπο για τον όγκο της σφαίρας συγκρίνοντας ένα ημισφαίριο ακτίνας r με το στερεό που προκύπτει αν από έναν κύλινδρο με ακτίνα βάσης r και ύψος r αφαιρέσουμε έναν αντεστραμμένο κώνο που η βάση του είναι στην κορυφή του κυλίνδρου και η κορυφή του είναι το κέντρο της βάσης του κυλίνδρου.

3. Θεωρούμε το σφαιρικό δακτύλιο που προκύπτει από μια σφαίρα αν κάνουμε μια κυλινδρική οπή με άξονα την κατακόρυφη διάμετρο της σφαίρας. Να βρείτε τον όγκο του δακτυλίου συγκρίνοντάς τον με μια σφαίρα που έχει διάμετρο ίση με το ύψος του δακτυλίου.

4. Αναπτύξτε το $\sum_A^B a^4 = \sum_A^B (x+y)^4$ και αποδείξτε ότι

$$\sum_A^B x^4 = \frac{1}{5}\sum_A^B a^4 = \frac{1}{5}a^5.$$

5. Θεωρούμε το χωρίο στο xy-επίπεδο, το οποίο φράσσεται από την ευθεία $y=1$ και την παραβολή $y=x^2$. Έστω P το στερεό που προκύπτει αν περιστρέψουμε αυτό το χωρίο γύρω από την ευθεία $y=1$. Εκφράζοντας αυτό το στερεό ως «άθροισμα» των κυκλικών τομών του, εφαρμόστε τα αποτελέσματα του Cavalieri για να αποδείξετε ότι $\mathrm{Vol}(P)=\frac{16\pi}{15}$.

6. Αποδείξτε ότι για κάθε $n,k\geqslant 1$ ισχύει η ανισότητα

$$1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k+2^k+\cdots+n^k.$$

7. Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι για κάθε σταθερό $k\geqslant 1$ ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)\cdots(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(k+1)!}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

8. Ξεκινώντας από την $\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1)$ και χρησιμοποιώντας την (3.3.7) υπολογίστε τα $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$ και $\sum_{i=1}^n i^4$. Σε κάθε βήμα, θα χρειαστεί να υπολογίσετε τους συντελεστές a_i στην (3.3.6), για $k=2,3,4$ αντίστοιχα.

9. Αποδείξτε, με επαγωγή ως προς n, την

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{ χαμηλότερες δυνάμεις του } n.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή μας δίνει αμέσως την (3.3.4).

10. Ξεκινώντας από την $\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1)$ και χρησιμοποιώντας την (3.3.9) υπολογίστε τα $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$ και $\sum_{i=1}^n i^4$. Κάντε τη σύγκριση με την Άσκηση 8: ποιά μέθοδος είναι «γρηγορότερη»;

11. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό τύπο αναπτύξτε το δεξιό μέλος της (3.3.9) και αποδείξτε με επαγωγή ως προς k ότι

$$\sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \text{ χαμηλότερες δυνάμεις του } n.$$

12. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση αποδείξτε ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε

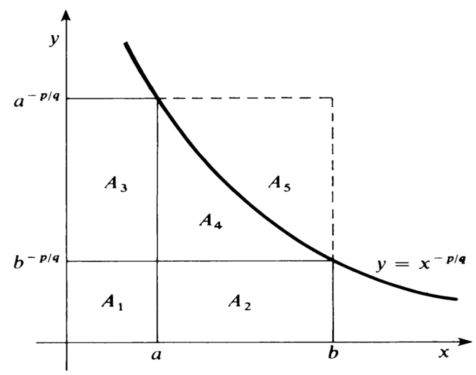
$$1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k+2^k+\cdots+n^k.$$

13. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν κάτω από τη γενικευμένη υπερβολή $y=x^{-p/q}$ (όπου $p/q>1$) πάνω από την ημιευθεία $[a,\infty)$ είναι ίσο με

$$\int_a^\infty x^{-p/q}dx = \frac{p}{p-q}a^{-\frac{p-q}{q}},$$

ακολουθώντας την τεχνική του Fermat: διαιρέστε τη βάση $[a,\infty)$ σε άπειρα το πλήθος υποδιαστήματα με άκρα $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, όπου $x=ar^n$ για κάποιο $r>1$.

14. Ο Torricelli θεώρησε τη γενικευμενη υπερβολή $y = x^{-p/q}$, όπου p/q είναι ένας θετικός ρητός αριθμός, διαφορετικός από 1, και τα εμβαδά A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4:

Απέδειξε με τη μέθοδο της εξάντλησης ότι

$$\frac{A_3 + A_4}{A_2 + A_4} = \frac{p}{q}, \tag{1}$$

(α) Επαληθεύστε την (1) υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα

$$A_2 + A_4 = \int_a^b x^{-p/q} dx$$

και

$$A_3 + A_4 = \int_{b^{-p/q}}^{a^{-p/q}} y^{-q/p} dy.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την (1) και τη σχέση

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = ba^{-p/q}$$

η οποία είναι άμεση από το σχήμα, αποδείξτε ότι

$$\int_a^b x^{-p/q} dx = A_2 + A_4 = \frac{b^{-\frac{p-q}{q}} - a^{-\frac{p-q}{q}}}{\frac{q-p}{p}}.$$

15. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Neil για να δείξετε ότι η ευθειοποίηση μιας παραβολής είναι ισοδύναμη με τον τετραγωνισμό μιας παραβολής. Ειδικότερα, το μήκος s της $y = x^2$ πάνω από το $[0, a]$ ισούται με

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Κεφάλαιο 4: Οι πρώτες κατασκευές εφαπτομένης

---

1. Αν $f(x) = \sum a_i x^i$ είναι ένα πολυώνυμο, αποδείξτε ότι η διαφορά $f(x+\epsilon) - f(x)$ διαιρείται με ϵ.

2. Εφαρμόστε τυπικά τη μέθοδο του Fermat για να βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f(x) = bx^2 - x^3$ στο $0 \leqslant x \leqslant b$.

3. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Fermat για να δείξετε ότι η υπο-εφαπτόμενη της $y = x^n$ είναι $s = x/n$, άρα η κλίση της εφαπτόμενης είναι nx^{n-1}.

4. Αν $y = x^{3/2}$, εφαρμόστε τη μέθοδο του κύκλου του Descartes για να δείξετε ότι η υπο-κάθετος είναι $v - x = 3x^2/2$ και η κλίση της εφαπτόμενης είναι $3\sqrt{x}/2$.

5. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Descartes σε συνδυασμό με τον κανόνα του Hudde για να δείξετε ότι η κλίση της εφαπτόμενης της $y = (x^2+1)^{3/2}$ είναι $3x(x^2+1)^{1/2}$.

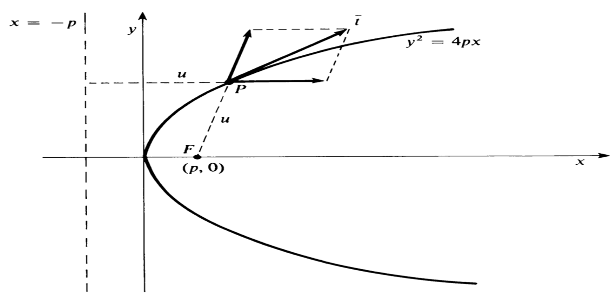
6. Αποδείξτε ότι αν ο κανόνας του Sluse εφαρμοστεί στην $y = \sum c_i x^i$ δίνει $m = \sum i c_i x^{i-1}$.

7. Εφαρμόστε τον κανόνα του Sluse για το φύλλο του Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, παίρνοντας όμως $a = 2$ και $b = 1$. Ποιά είναι η τιμή βρίσκετε για το m;

8. Εφαρμόστε τη μέθοδο του τλΒαρροω για την $y = x^n$ και αποδείξτε ότι η κλίση της εφαπτόμενης είναι $\alpha/\epsilon = nx^{n-1}$.

9. Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην κυκλοειδή είναι κάθετο στην ευθεία που περνάει από το σημείο P της κυκλοειδούς και το σημείο T στο οποίο εφάπτονται ο κυλιόμενος κύκλος και ο x-άξονας.

10. Έστω u η απόσταση ενός σημείου P κινούμενου πάνω στην παραβολή $y^2 = 4px$ από την διευθετούσα $x = -p$ και την εστία $(p, 0)$.



Σχήμα 5:

Αν το σημείο κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε $u' = x' = 1$ (έχει μοναδιαία οριζόντια ταχύτητα), αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{t}$ που φαίνεται στο σχήμα είναι το

$$\vec{t} = \left(\frac{2x}{x+p}, \frac{y}{x+p}\right),$$

ενώ το πραγματικό διάνυσμα ταχύτητας του P είναι το

$$\vec{v} = (1, \sqrt{p/x}).$$

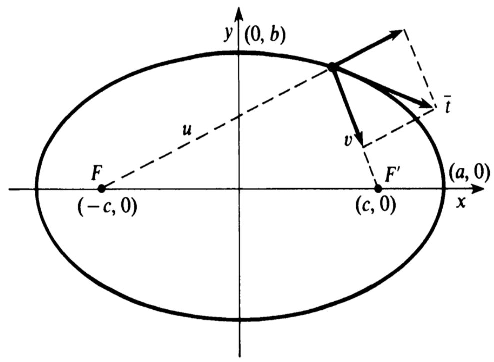
Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι τα $\vec{t}$ και $\vec{p}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση, αλλά

$$|\vec{t}| = 2\sqrt{\frac{x}{x+p}} \qquad \text{ενώ} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{\frac{x+p}{x}}.$$

11. Συμβολίζουμε με u και v τις αποστάσεις του σημείου P της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ από τις εστίες $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$ αντίστοιχα, όπου $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Τότε,

$$u = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad \text{και} \qquad v = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Υποθέτουμε ότι το σημείο P κινείται πάνω στην έλλειψη, με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και ικανοποιεί τη συνθήκη $u + v = 2a$, με $u' = 1$ και $v' = -1$.



Σχήμα 6:

Αποδείξτε ότι, όταν το P βρίσκεται στο σημείο $(0, b)$ τότε το διάνυσμα $\vec{t}$ που φαίνεται στο σχήμα είναι το $\vec{t} = (2c/a, 0)$, ενώ το πραγματικό διάνυσμα ταχύτητας $\vec{v} = (x', y')$ είναι το $\vec{v} = (a/c, 0)$. [*Υπόδειξη.* Αφαιρώντας τις εξισώσεις $(x+c)^2 + y^2 = u^2$ και $(x-c)^2 + y^2 = v^2$ παίρνουμε $4xc = u^2 - v^2$.]

Κεφάλαιο 5: Η ανακάλυψη της διωνυμικής σειράς

---

1. Εφαρμόζοντας τον αναδρομικό τύπο

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\,\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx,$$

ο οποίος προκύπτει με ολοκλήρωση κατά μέρη, αποδείξτε τις (5.1.7) και (5.1.8).

2. (α) Από τις (5.1.7) και (5.1.8) αποδείξτε την

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

(γ) Αποδείξτε τον τύπο του γινομένου του Wallis χρησιμοποιώντας τα (α) και (β).

3. Χρησιμοποιώντας το απειρογινόμενο του Wallis αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι ο

$$P_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$P_n = \frac{(n!)^4 2^{4n}}{[(2n)!]^2(2n+1)}.$$

4. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται από την

$$n! = a_n\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Υποθέτοντας ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, αποδείξτε ότι $a = \sqrt{2\pi}$. Αυτό μας δίνει μια ασθενή μορφή του τύπου του Stirling.

5. Κάνοντας την αντικατάσταση $x = y^p$ και χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Γάμμα και Βήτα αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{a_{p,q}} = \int_0^1 (1 - x^{1/p})^q dx = \frac{1}{\binom{p+q}{p}}.$$

Αποδείξτε επίσης ότι

$$a_{p,q} = \frac{p+q}{q}\, a_{p,q-1}.$$

6. Χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα και την

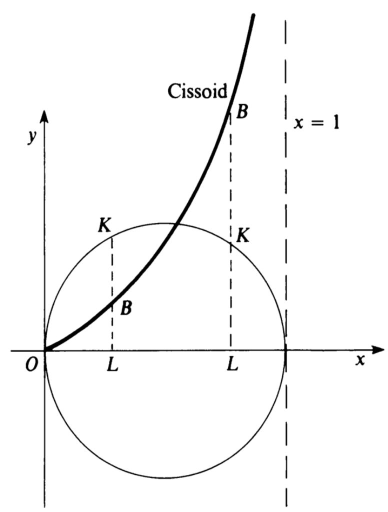
$$a_{p,q} = \frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}$$

αποδείξτε ότι

$$b_{m,n} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}$$

για κάθε ζεύγος ακεραίων $m, n \geqslant 2$.

7. Η *κισσοειδής* που αντιστοιχεί στον κύκλο $y^2 = x(1-x)$ διαμέτρου 1, ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων B για τα οποία $BL/OL = OL/KL$ (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 7:

Αποδείξτε ότι η εξίσωση της κισσοειδούς σε ορθογώνιες συντεταγμένες είναι

$$y = x^{3/2}(1-x)^{-1/2}, \qquad x \in (0,1).$$

Είναι φανερό ότι $B \to 0$ όταν $x \to 0$ και ότι η ευθεία $x = 1$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης. Συνεπώς, το εμβαδόν κάτω από την κισσοειδή ισούται με

$$A = \int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{-1/2}\, dx,$$

αν βέβαια αυτό το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

8. Έστω

$$a_m = \int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{m/2}\, dx = \int_0^1 x^{m/2}(1-x)^{1/2}\, dx.$$

Παρατηρήστε ότι $a_1 = \pi/8$, το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου 1. Υπολογίστε απευθείας τις τιμές

$$a_0 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}, \quad a_4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}, \quad a_6 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}.$$

Οι τιμές αυτές υποδεικνύουν ότι αν ο m είναι άρτιος τότε

$$a_m = \frac{m}{m+3}\, a_{m-2}.$$

Υποθέτοντας ότι η ίδια σχέση ισχύει και όταν ο m είναι περιττός, συμπεράνατε ότι

$$a_3 = \frac{3a_1}{6} = \frac{\pi}{16}.$$

9. Έστω

$$b_n = \int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{n/2}\, dx.$$

Παρατηρήστε ότι ο b_{-1} μας δίνει το εμβαδόν κάτω από την κισσοειδή. Υπολογίστε απευθείας τις τιμές

$$b_0 = \frac{2}{5}, \quad b_2 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}, \quad b_4 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}.$$

Οι τιμές αυτές υποδεικνύουν ότι αν ο n είναι άρτιος τότε

$$b_n = \frac{n}{n+5}\, b_{n-2}.$$

Υποθέτοντας ότι η ίδια σχέση ισχύει και όταν ο n είναι περιττός, συμπεράνατε ότι

$$b_{-1} = 6b_1 = 6a_3 = \frac{3\pi}{8}.$$

Δηλαδή, το εμβαδόν κάτω από την κισσοειδή ισούται με το τριπλάσιο του εμβαδού του ημικυκλίου που την παράγει.

10. Αποδείξτε αυστηρά τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης, παρατηρώντας ότι

$$b_n = B\left(\frac{5}{2}, \frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{n+5}\cdot\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(n/2)}{\Gamma(n+5/2)}.$$

11. Υψώστε στο τετράγωνο την ποσότητα

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + R(x),$$

όπου x^{10} είναι η μικρότερη δύναμη του x που εμφανίζεται στο $R(x)$, και ελέγξτε ότι

$$[P(x)]^2 = 1 - x^2 + Q(x).$$

Ποιά είναι η μικρότερη δύναμη του x που εμφανίζεται στο $Q(x)$;

12. Υποθέτοντας ότι η ακολουθία (x_n) που ορίζεται από την (5.3.2) συγκλίνει σε κάποιον $x_* \neq 0$, αποδείξτε ότι $x_*^2 = N$.

13. Υπολογίστε την τετραγωνική ρίζα του $461,041$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Viète.

14. Αποδείξτε την (5.4.4) στις περιπτώσεις $0 < x \leqslant y \leqslant 1$ και $0 < x \leqslant 1 \leqslant y$.

15. Έστω $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ μια γεωμετρική πρόοδος. Χρησιμοποιώντας την (5.4.1) αποδείξτε ότι η

$$0 < L(a_1) < L(a_2) < \cdots < L(a_n) < \cdots$$

είναι αριθμητική πρόοδος.

16. Μιμούμενοι τον υπολογισμό της $L'(x)$ αποδείξτε ότι η παράγωγος της $\log x$ είναι ίση με

$$\frac{\log e}{x},$$

όπου

$$e := \lim_{s\to 0}(1+s)^{1/s}.$$

17. Σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα, ξεκινήστε βρίσκοντας το πολλαπλάσιο του δοθέντος φυσικού το οποίο είναι πιο κοντά στον 1000:

(α) Εκφράστε το λογάριθμο του 37 συναρτήσει των λογαρίθμων των 3, 10 και 0.999.

(β) Εκφράστε το λογάριθμο του 19 συναρτήσει των λογαρίθμων των 2, 13 και 0.988. Με ποιόν τρόπο θα υπολογίζατε το λογάριθμο του 0.988;

(γ) Εκφράστε το λογάριθμο του 31 συναρτήσει των λογαρίθμων των 2, 10 και 0.992. Με ποιόν τρόπο θα υπολογίζατε το λογάριθμο του 0.992;

Κεφάλαιο 6: Ο Απειροστικός Λογισμός του Newton

---

1. Γράψτε την $y = x^n$ στη μορφή $f(x,y) = 0$ και συμπεράνατε από την (6.1.1) ότι

$$\frac{\dot y}{\dot x} = nx^{n-1}.$$

2. Αν $\dot y/\dot x = cx^{n-1}\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}$, αποδείξτε μέσω της αντικατάστασης $z = x^n$ ότι

$$y = \Box\,\frac{c}{n}\sqrt{a+bz+cz^2}.$$

3. Αν $\dot y/\dot x = \frac{c}{x}\sqrt{ax^n+bx^{2n}}$, χρησιμοποιήστε την ανικατάσταση $z^2 = x^n$ και την $2z\dot z = nx^{n-1}\dot x$ για να δείξετε ότι

$$y = \Box\,\frac{2c}{n}\sqrt{a+bz^2}.$$

4. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στον ακόλουθο υπολογισμό του

$$t = \int \frac{z^{\eta-1}dz}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}$$

από τον Newton. Πρώτα, κάνοντας την αντικατάσταση $x = z^\eta$ δείξτε ότι

$$t = \frac{1}{\eta}\int \frac{dx}{e+fx+gx^2}.$$

Κτόπιν, χρησιμοποιήστε την παραγοντοποίηση

$$4g(e+fx+gx^2) = (f+p+2gx)(f-p+2gx),$$

όπου $p^2 = f^2 - 4eg$, για να συμπεράνετε ότι

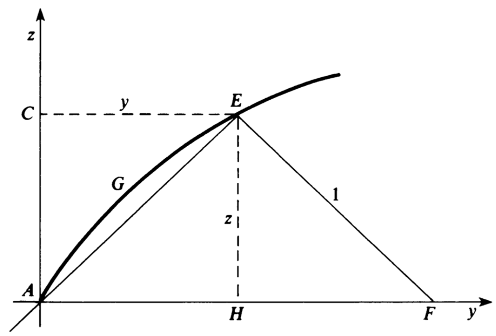
$$t = \frac{2g}{p\eta}\int\left(\frac{1}{f-p+2gx} - \frac{1}{f+p-2gx}\right)dx.$$

5. Θεωρούμε την καμπύλη «κάππα» η οποία περιγράφεται, από τον Newton, ως ο γεωμετρικός τόπος του σημείου E του ορθογωνίου τριγώνου AEF στο σχήμα, όπου A είναι η αρχή των αξόνων και το F κινείται στον οριζόντιο y-άξονα και το EF έχει μοναδιαίο μήκος. Από τα όμοια τρίγωνα AEH και EFH βλέπουμε ότι

$$y = \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}},$$

άρα το εμβαδόν $AGEC$ είναι ίσο με

$$t = \int_0^{z_0} \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$



Σχήμα 8:

Αποδείξτε με αντικατάσταση ότι αν s είναι το εμβαδόν κάτω από τον κύκλο $v = \sqrt{1-x^2}$, και $x = z$, τότε

$$t = s - xv.$$

Δηλαδή,

$$\int_0^{z_0} \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^x \sqrt{1-x^2}\, dx - x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\arcsin z_0 - \frac{1}{2} z_0 \sqrt{1-z_0^2}.$$

6. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες του (πιθανού) επιχειρήματος του Newton για την απόδειξη της

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{16n^2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255} + \cdots .$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots ,$$

αναπτύσσοντας το $1/(1+x^4)$ σε γεωμετρική σειρά και ολοκληρώνοντας όρο προς όρο.
(β) Παρατηρώντας ότι

$$2\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2},$$

συμπεράνατε ότι

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}.$$

Αντικαθιστώντας $x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\theta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\arctan(1+\sqrt{2}) - \arctan(1-\sqrt{2})\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{3\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(γ) Τέλος, ομαδοποιήστε τους όρους στη μορφή

$$1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)-\cdots$$

και βρείτε τους κοινούς παρονομαστές.

7. Γράφοντας $\sqrt{x+x^2}/x^5 = x^{-4}(1+x^{-1})^{1/2}$ και χρησιμοποιώντας την (6.10.2) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{1}{x^5}\sqrt{x+x^2}\,dx = \frac{-16x^2+24x-30}{105x^4}(x+1)\sqrt{x^2+x}.$$

8. Γράφοντας

$$\frac{x^{1/3}}{\sqrt[5]{1-3x^{2/3}+3x^{4/3}-x^2}} = x^{1/3}(1-x^{2/3})^{-3/5}$$

και χρησιμοποιώντας την (6.10.2) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{x^{1/3}dx}{\sqrt[5]{1-3x^{2/3}+3x^{4/3}-x^2}} = \frac{30x^{2/3}+75}{28}(1-x^{2/3})^{2/5}.$$

9. Γράψτε

$$\frac{x^5+x^4-8x^2}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{x^6-9x^4+8x^3}{(x-1)^4(x+2)^2} = x^3\frac{8-9x+x^3}{(2-3x+x^3)^2}$$

και εφαρμόζοντας την (6.10.3) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{x^5+x^4-8x^3}{(x-1)^3(x+2)^2}dx = \frac{x^4}{x^3-3x+2}.$$

10. Εφαρμόζοντας την (6.10.3) αποδείξτε ότι

$$\int \frac{3+2x+8x^2+8x^3-7x^4-6x^5}{(1+x-x^2-x^3)^{4/3}}\,dx = \frac{3x(1+x^2)}{(1+x-x^2+x^3)^{1/3}}.$$

Κεφάλαιο 7: Ο Απειροστικός Λογισμός του Leibniz

---

1. (α) Προσθέτοντας το $2+4+\cdots+2n$ στα δύο μέλη της (7.2.2) αποδείξτε ότι

$$1+2+3+\cdots+2n = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

(β) Προσθέτοντας τον $2n+1$ στα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης, αποδείξτε ότι

$$1+2+3+\cdots+2n+(2n+1) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι τα (α) και (β) μας δίνουν τη γνωστή ταυτότητα

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Εφαρμόστε την (7.2.1) στην ακολουθία των κύβων

$$0, 1, 8, \ldots, n^3$$

και συμπεράνατε ότι

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + n = n^3.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

3. Εφαρμόστε την (7.2.3) για την ακολουθία $a_n = \frac{1}{2n-1}$ των αντιστρόφων των περιττών ακεραίων και συμπεράνατε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

4. Ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι η ακολουθία των διαφορών των όρων της γεωμετρικής προόδου

$$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

είναι η

$$(1-a), (1-a)a, (1-a)a^2, \dots, (1-a)a^n, \dots,$$

και εφαρμόζοντας την (7.2.3) αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

για κάθε $0 < a < 1$.

5. Αποδείξτε ότι το n-οστό στοιχείο της τρίτης γραμμής του αρμονικού τριγώνου ισούται με $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$, δηλαδή είναι ίσο με το ένα τρίτο του αντιστρόφου του n-οστού αριθμού τύπου 2.

6. Αποδείξτε, με επαγωγή ως προς k, ότι το n-οστό στοιχείο της $(k+1)$-οστής γραμμής του αρμονικού τριγώνου ισούται με

$$\frac{k!}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{(k+1)F(n,k)},$$

όπου $F(n,k)$ είναι ο n-οστός αριθμός τύπου k. Συμπεράνατε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F(n,k)} = \frac{k+1}{k}.$$

7. Για κάθε ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \dots$, ορίζουμε την ακολουθία διαφορών $\{\Delta a_n\}$:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{n+1} - a_n, \dots$$

και την ακολουθία αθροισμάτων $\{Sa_n)\}$:

$$a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \cdots + a_n, \dots.$$

Αποδείξτε ότι

$$\Delta(Sa_n) = a_{n+1} \quad \text{και} \quad S(\Delta a_n) = a_{n+1} - a_1.$$

8. Εφαρμόστε την (7.3.1) στο τόξο του τεταρτοκυκλίου που αντιστοιχεί στο $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ και συμπεράνατε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta \, d\theta = \cos\alpha - \cos\beta.$$

9. Θεωρήστε την παραβολή $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Θεωρώντας γνωστή την $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, αποδείξτε ότι η κάθετη στην παραβολη είναι $n = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$. Εφαρμόζοντας την (7.3.2) αποδείξτε ότι το εμβαδόν του παραβολοειδούς που προκύπτει αν περιστρέψουμε την παραβολή γύρω από τον x-άξονα ισούται με

$$A = \int 2\pi y \, ds = \pi \int_0^a \sqrt{4x+1}\, dx = \frac{\pi}{6}\big((4a+1)^{3/2} - 1\big).$$

10. Θεωρήστε την ημι-κυβική παραβολή $y = x^{2/3}$, $0 \leqslant x \leqslant 8$. Θεωρώντας γνωστή την $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ και παίρνοντας $a = 1$, αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη δίνεται από την $t = \frac{1}{2}\sqrt{9y+4}$. Εφαρμόζοντας την (7.3.3) αποδείξτε ότι το μήκος αυτής της ημι-κυβικής παραβολής ισούται με

$$\ell = \int ds = \int t\,dy = \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{9y+4}\,dy = \frac{1}{27}\big(40^{3/2} - 8\big).$$

11. Θεωρήστε την «παραβολή υψηλότερης τάξης» $y^q = x^p$, όπου $q > p > 0$. Αποδείξτε ότι

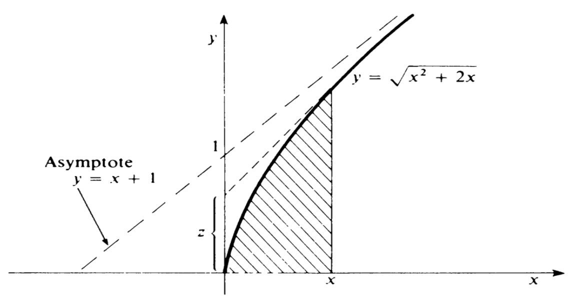
$$\frac{q}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{p}{x}, \quad \text{άρα} \quad z = \frac{q-p}{q}\,y.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μετατροπής συμπεράνατε ότι

$$\int_a^b x^{p/q}dx = \frac{q}{p+q}\big[xy\big]_a^b = \frac{q}{p+q}\big[x^{\frac{p+q}{q}}\big]_a^b.$$

12. Θεωρούμε την υπερβολή $y = \sqrt{x^2+2x}$, $x \geqslant 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μετατροπής αποδείξτε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου, στο παρακάτω σχήμα, ισούται με

$$\int_0^x \sqrt{u^2+2u}\,du = \left(3 - \frac{1}{3}\right)z^3 + \left(5 - \frac{1}{5}\right)z^5 + \cdots .$$

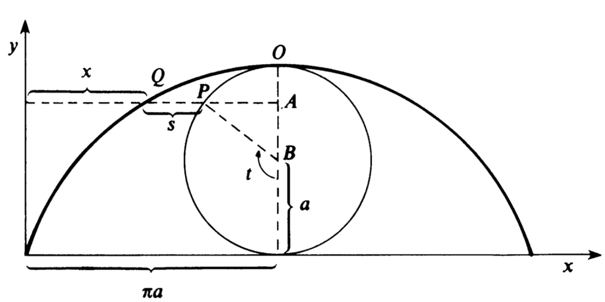


Σχήμα 9:

13. Στο σχήμα βλέπουμε την κυκλοειδή που παράγεται από κύκλο ακτίνας a, με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Αποδείξτε ότι το μήκος s του ευθύγραμμου τμήματος PQ είναι ίσο με το μήκος $a(\pi - t)$ του κυκλικού τόξου $\overset{\frown}{OP}$.

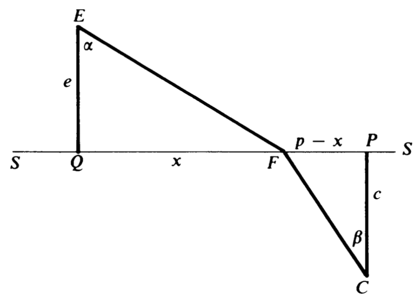


Σχήμα 10:

14. Αποδείξτε με παραγώγιση ότι η καμπύλη $bx = y^3/3$ έχει υπο-εφαπτόμενη $\nu = b/y$.

15. Με το συμβολισμό στο παρακάτω σχήμα, θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$w = h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}.$$



Σχήμα 11:

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη $dw = 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{h(p-x)}{\sqrt{(p-x)^2 + c^2}} = \frac{rx}{\sqrt{x^2 + e^2}}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{h}{r}.$$

16. Ολοκληρώνοντας την (7.6.1) αποδείξτε ότι $w = e^{x/a}$, ισοδύναμα $x = a\log w$, αν $w = 1$ όταν $x = 0$.

17. (α) Αποδείξτε ότι

$$d^2(uv) = u\,(d^2v) + 2(du)(dv) + (d^2u)\,v = (d^0u)(d^2v) + 2(du)(dv) + (d^2u)(d^0v),$$

όπου $d^0u = u$ και $d^0v = v$.

(β) Με επαγωγή ως προς n αποδείξτε τον κανόνα του Leibniz

$$d^n(uv) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (d^pu)(d^{n-p}v).$$

18. Υποθέτοντας ότι $d^2x = 0$, αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι

$$d\left(\frac{d^{n-1}y}{(dx)^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{(dx)^{n-1}},$$

και διαιρώντας με dx συμπεράνατε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{(dx)^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{(dx)^n},$$