16-6-2022

Αναπλήρωση : Πέμπτη 23/6/2022 (4-7 μμ).

Επαναληπτικό ANOVA-Regression Τετάρτη 22/6/22 (4-7 μμ)

uoa.webex.com/meet/aburnetas

1. Παραδείγματα Προσομοίωσης Monte Carlo.

2. Γεννήτρια τυχαίων αριθμών.
   - Μέθοδος αντιστροφής
   - Μέθοδος αποδοχής απόρριψης (παραδείγματα)

3. Μείωση Διασποράς μέσω Importance Sampling

4. Bootstrap για εκτίμηση.

① Μέθοδος Αντιστροφής

Έστω ότι θέλουμε γεννήτρια τυχαίων αριθμών από τυχαία μεταβλητή $X \sim F(x)$.

$$F(x) = P(X \le x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ασκ.}$$

Υποθέσεις: ① Αναλυτική έκφραση για την $F(x)$.

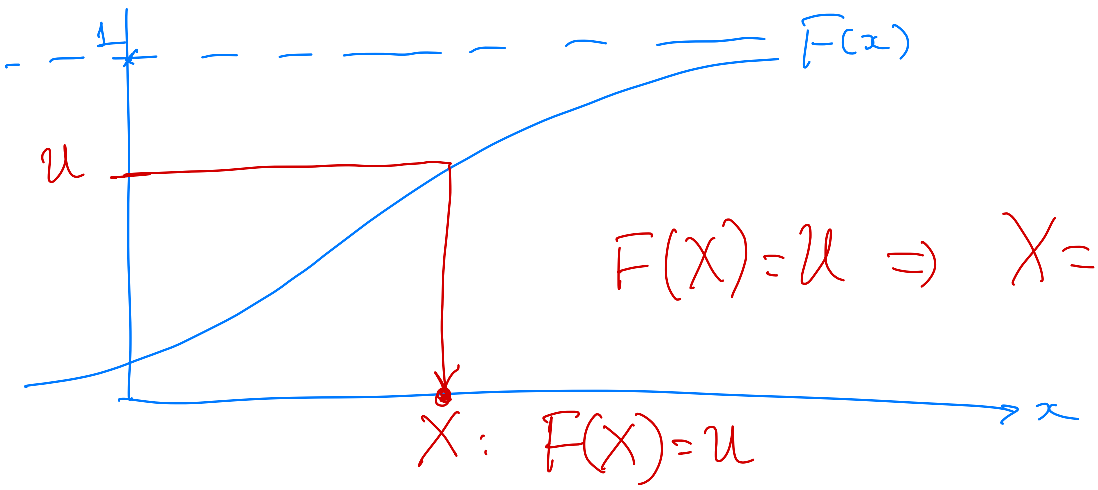
② Αναλυτική λύση της εξ. $F(x) = \alpha \quad \forall \alpha$.

Αλγόριθμος Γεννήτριας

① Δημιουργία τυχαίου αριθμού $u \sim U(0,1)$

② X = λύση της εξίσωσης $F(X) = u$

X = u-ποσοστημόριο της $F(x)$.



$$F(X) = u \Rightarrow X = F^{-1}(u)$$

$$P(X \le x) = P\left(F^{-1}(u) \le x\right) = P\left(F\left(F^{-1}(u)\right) \le F(x)\right)$$

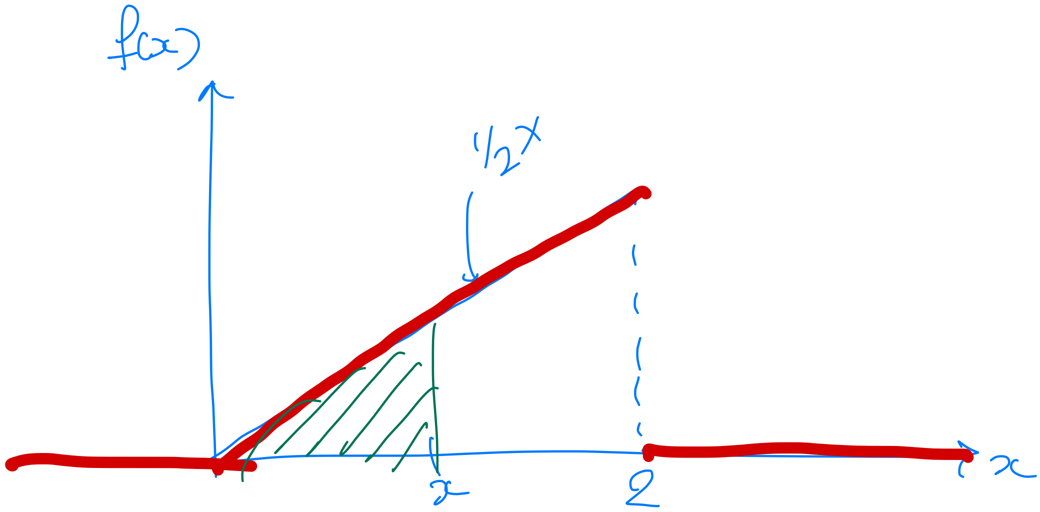
$$= P\left(u \le F(x)\right) = F(x) \Rightarrow P(X \le x) = F(x)$$

$$\Rightarrow X \sim F$$

Παράδειγμα 1

Έστω τμ. X συνεχής

συν. πυκνότητας
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{v} \end{cases}$$

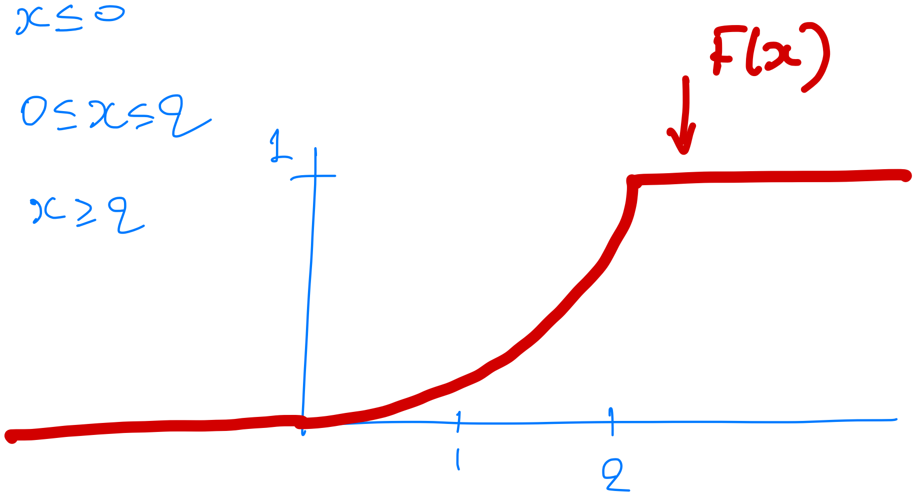


$x \le 0 \qquad F(x) = 0.$

$x > 2 \qquad F(x) = 1$

$0 \le x \le 2: \qquad F(x) = \int_0^x f(y)dy = \int_0^x \frac{1}{2}y\,dy = \frac{1}{4}y^2\Big|_0^x = \frac{x^2}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/4 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



Η εξίσωση $F(X) = u \Rightarrow \dfrac{X^2}{4} = u \Rightarrow$

$\Rightarrow X^2 = 4u \Rightarrow X = \pm 2\sqrt{u}$

η $-2\sqrt{u}$ απορρίπτεται επειδή $(0 \le X \le 2)$

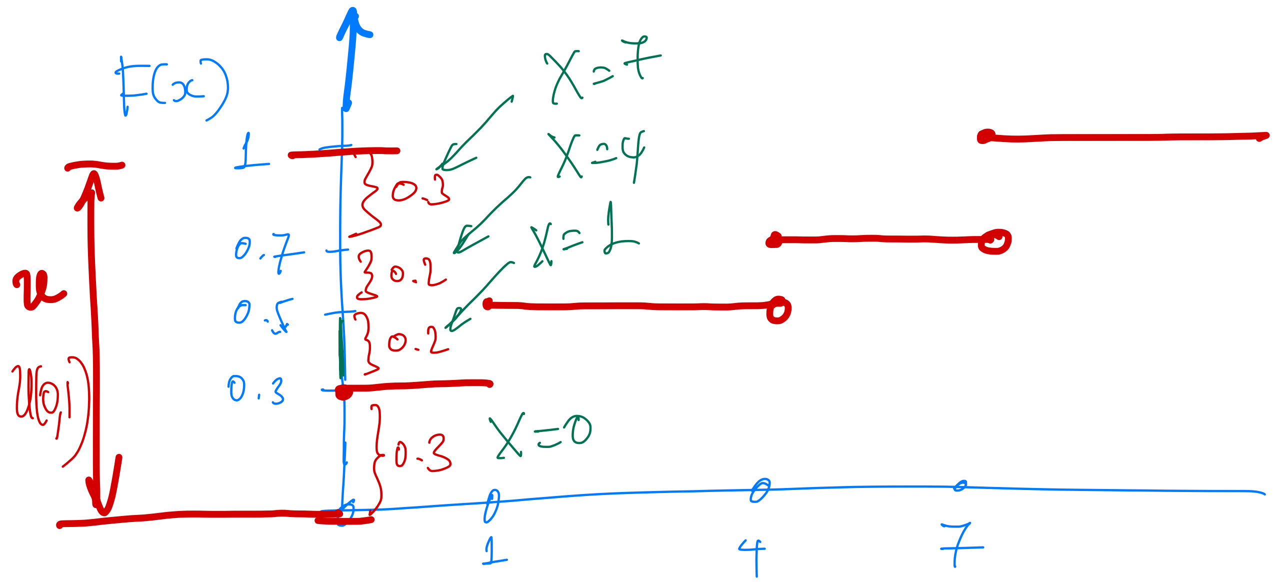
Αλγόριθμος

① $u \sim U(0,1)$

② $X = 2\sqrt{u}$

Εφαρμογή σε Διακριτές Κατανομές

π.χ. $X = \begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } 0.3 \\ 1 & \text{" " } 0.2 \\ 4 & \text{" " } 0.2 \\ 7 & \text{" " } 0.3 \end{cases}$



Αλγόριθμος

① $u \sim U(0,1)$

② Αν $0 \le u \le 0.3 \Rightarrow X=0$

$0.3 < u \le 0.5 \Rightarrow X=1$

$0.5 < u \le 0.7 \Rightarrow X=4$

$0.7 < u \le 1 \Rightarrow X=7$

Άσκηση

Δημιουργήστε συνάρτηση R

gendiscdist (v, p)

v = διάνυσμα τιμών της X

p = " πιθανοτήτων

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

$$p = (p_1, p_2, \dots p_k)$$

$$p_j = P(X = v_j)$$

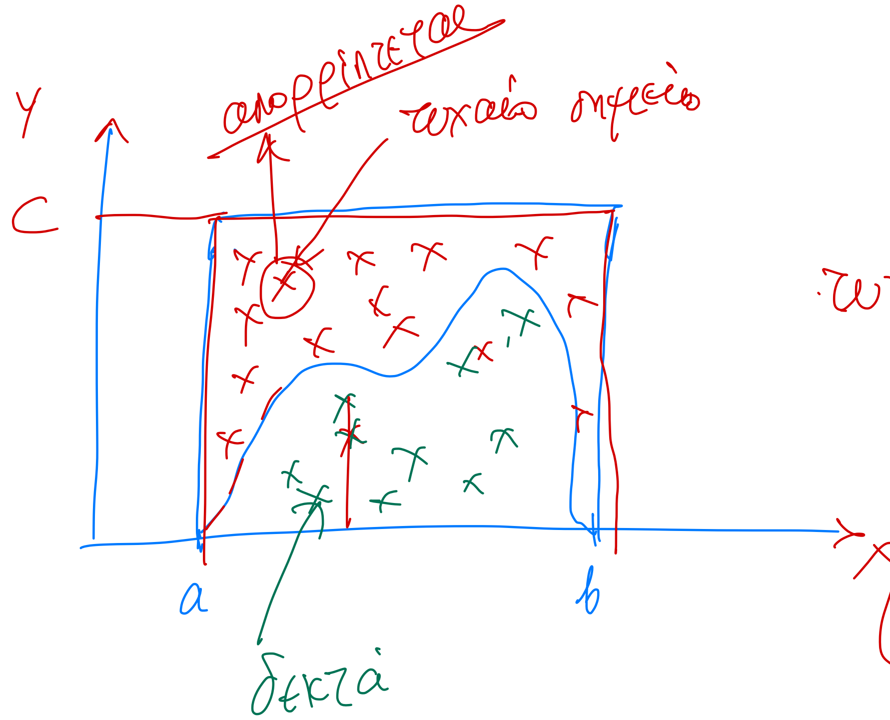
$$j = 1, \dots, K.$$

Δημιουργεί μια τυχαία παρατήρηση από την X

(υπόδειξη χρησιμοποιήστε while).

2) Μέθοδος Accept-Reject

$X \sim f(x)$ (δίνεται η $f(x)$ δεν χρειάζεται η $F(x)$)



$X \in [a, b]$

τυχαίο σημείο

$X \sim U(a, b)$

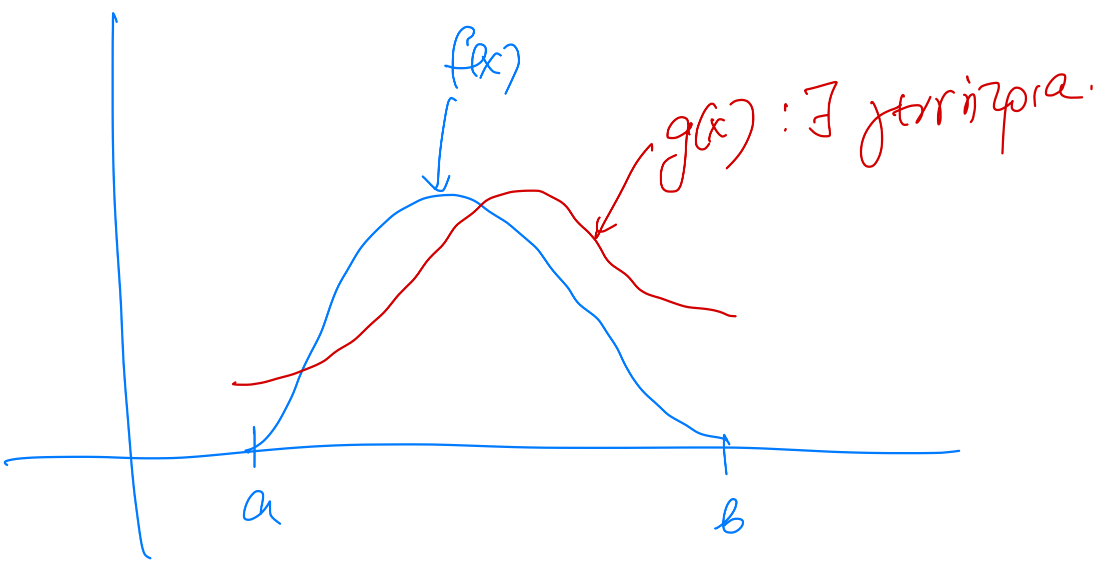
$Y \sim U(0, C)$

X, Y ανεξάρτητα

Γενίκευση

Έστω $f(x)$ η επιθυμητή κατανομή

" $g(x)$ μια άλλη κατανομή (αναφοράς) από την οποία έχουμε γεννήτρια



Αλγόριθμος

Έστω f : επιθυμητή κατανομή X

$g(x)$: κατανομή αναφοράς : υπάρχει γεννήτρια

① Βρίσκουμε (αναλυτικά ή υπολογιστικά) σταθερά $M \geq 0$ τέτοια ώστε $\frac{f(x)}{g(x)} \leq M \ \forall x$.

π.χ. $M = \max\left\{\frac{f(x)}{g(x)} : x \in \mathbb{R}\right\}$ (function optimize / R)

② Δημιουργούμε τυχαία Y από την $g(x)$.

③ Δημιουργ. $u \sim U(0,1)$

Αν $u \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)} \Rightarrow Y$ αποδεκτή, $X = Y$

Αν $u > \frac{f(Y)}{Mg(Y)} \Rightarrow Y$ απορρ. επιστρ. στο 2

Παράδειγμα 3

$$f(x) = c e^{x}, \quad 0 \le x \le 2$$

$$c: \quad \int_0^2 c e^{x} dx = 1 \Rightarrow c \int_0^2 e^{x} dx = 1$$

$$\Rightarrow c\left(e^{2} - 1\right) = 1 \Rightarrow \underbrace{c = \frac{1}{e^{2}-1}}$$

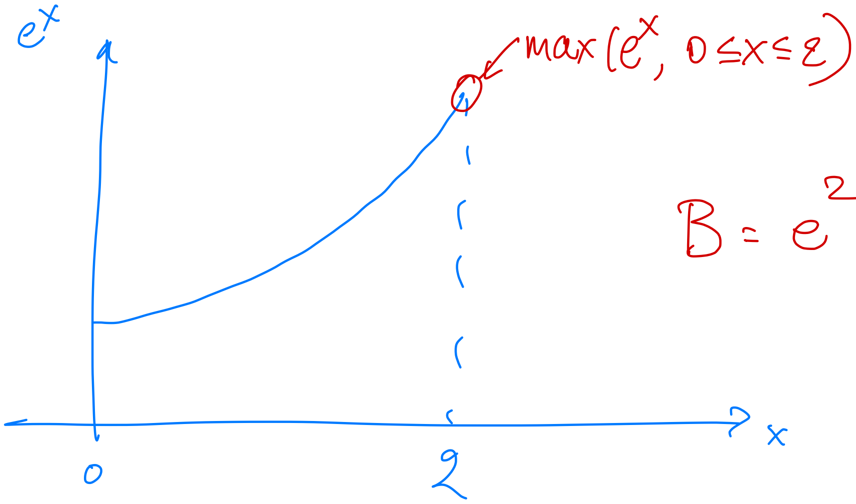
δεν θα το χρησιμοποιήσουμε

(πιο γενική αντιμετώπιση που δεν απαιτεί γνώση του c).

Έστω $g(x)$: $u(0,2)$: $g(x) = b \quad (x \in [0,2])$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le M \Rightarrow \frac{c e^{x}}{b} \le M \Rightarrow e^{x} \le \frac{M \cdot b}{c} = \underline{B}$$

Υπολογίζω το $B = \text{maximum} \left\{ e^{x}, \ 0 \le x \le 2 \right\}$



$B = e^2$

Αλγόριθμος ① Δημ. Y από $U(0,2)$ ← $g(x)$

② Δημ. $U \sim U(0,1)$

Αν $U \le \frac{f(Y)}{Mg(Y)} = \frac{e^Y}{B} \Rightarrow X = Y$ δεκτό

$$\boxed{\frac{f(x)}{Mg(x)} = \frac{c\,e^x}{M\cdot b} = \frac{e^x}{\frac{M\cdot b}{c}}}$$

Διαφορετικά αν $U > \frac{e^Y}{B}$

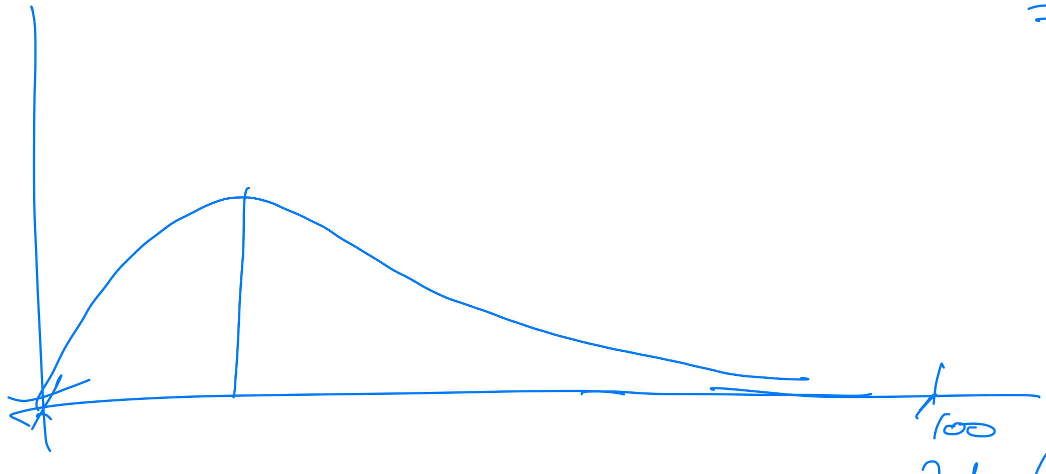
απορ. το Y

επιστροφή στο ①

Άσκηση 2

① $X \sim c\sqrt{x}\, e^{-2x}$, $x \geq 0$ $\left(x \in [0,\infty)\right)$

$c\, x^{1/2} e^{-2x} \sim \text{Gamma}(1/2, 2)$



Δεν μπορούμε να πάρουμε $g \sim \mathcal{U}(\quad)$

Παίρνουμε μια εκθετική π.χ. $\text{Exp}(\lambda = 1)$

$g(x) = 1 \cdot e^{-1 \cdot x} = e^{-x}$, $x \in (0,\infty)$

$$B = \max \frac{\sqrt{x}\, e^{-2x}}{e^{-x}} , \boxed{x \in (0,\infty)}$$

Πάρτε optimize(- - - - , interval = c(0, 100), maximum = T)

② Δημιουργήστε δείγμα $N = 1000$

③ Κάντε έλεγχο Kolmogorov-Smirnov για καλή προσαρμογή από $\Gamma(1/2, 2)$.

Bootstrap

Έστω ότι θέλω να εκτιμήσω μ ; $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ $X \sim F$ (άγνωστο)

μ, σ^2 άγνωστα.

δείγμα $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\hookrightarrow \hat{\mu} = \overline{x}_n$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_n)^2}{n-1}$$